

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. С. КОМПАНЕЕЦ

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ
И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
ГАЗОДИНАМИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА 1977

ые
ес-
—
дв,
юе
эи,
ый
чи,
ую
ой
ва
ия
ис-
ие
ля
ие-
за-
эх
го
ся
са
и-
е-
е-

Сборник составлен из научных работ известного советского физика-теоретика, доктора физико-математических наук, профессора А. С. Компанейца. Большая часть статей посвящена изучению взаимодействия света с веществом и физико-химических явлений, сопровождающих сильный взрыв в неоднородной атмосфере и в грунте.

Сборник предназначен для специалистов в области физики и физической химии.

Ответственный редактор

академик

И. М. ЛИФШИЦ

Составитель

Н. М. КУЗНЕЦОВ

В настоящее издание включены 44 наиболее значительные научные статьи доктора физико-математических наук, профессора Александра Соломоновича Компанейца. А. С. Компанец — крупный физик-теоретик, автор ряда монографий и учебников, изданных в СССР и в зарубежных странах. Не менее ценное научное наследие А. С. Компанейца составляют его статьи, опубликованные в научных журналах в 1937—1972 годы.

Работы, вошедшие в этот сборник, внесли существенный вклад в развитие классической и квантовой электродинамики, теории относительности, квантовой механики. Значительную часть сборника составляют работы по механике и физической газодинамике. К ним относятся исследования: сильного взрыва в грунте и в неоднородной атмосфере, установления равновесия между квантами и электронами, ряда явлений, связанных с распространением лучистой энергии в веществе. Эти пионерские исследования А. С. Компанейца явились отправным пунктом для развития современных направлений в изучении сложных явлений, сопровождающих взрыв в различных средах.

Работы автора по взаимодействию света с электронами оказались очень полезными для объяснения новых экспериментальных данных об электромагнитном излучении глубин космического пространства.

В последние годы жизни Александр Соломонович занимался вопросами биофизики. Его работы о распространении импульса по нервному волокну — пример плодотворного применения физических законов и методов исследования в другой области естествознания.

Публикуемые статьи в соответствии с их тематикой разделены по следующим четырем разделам.

1. Физико-химическая газодинамика и механика.
2. Электродинамика и теория относительности.

3. Квантовая механика.

4. Физико-химические аспекты теории распространения импульса по нервному волокну.

При распределении статей внутри каждого раздела в первую очередь учитывалось их тематическое родство, а затем уже — принцип хронологической упорядоченности.

Статьи публикуются без каких-либо изменений, исключая исправления замеченных мелких опечаток и замены некоторых обозначений, в соответствии с правилами издательства. Первая статья раздела II дана в переводе с немецкого.

Н. М. Кузнецов
И. М. Лифшиц

Раздел I

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА И МЕХАНИКА

О ПОГЛОЩЕНИИ СВЕТА ПЛАЗМОЙ*

Известно, что свободный электрон не поглощает света: законы сохранения энергии и импульса в акте поглощения для него не могут выполняться одновременно. Поэтому явление фотоэлектрического эффекта существующим образом зависит от связи электрона с ядром: K -электрон поглощает световые кванты во всяком случае сильнее, чем L -электрон, и т. д. Тем более невелико поглощение света электроном, принадлежащим к непрерывному спектру.

Можно ожидать, таким образом, что вполне ионизированный газ, находящийся при достаточно высокой температуре, имсет небольшой коэффициент поглощения света. В настоящей работе показывается, что это на самом деле не так, потому что плазма как целое также обладает способностью поглощать свет, причем это поглощение, в отличие от фотоэлектрического, не убывает с частотой света и температурой плазмы.

Рассмотрим распространение электромагнитных колебаний в плазме. Очевидно, оно будет сопровождаться также и смещением зарядов плазмы, причем ядра как более тяжелые будут смещаться во всяком случае слабее электронов. Далее, смещение последних можно описать уравнениями классической гидродинамики, в которых объемная сила имеет вид силы Лорентца. Релаксационными явлениями, связанными с подвижностью зарядов, при колебаниях, имеющих весьма малый период, можно пренебречь. Совместная система уравнений гидродинамики и электродинамики, таким образом, имеет вид

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + en \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} n \mathbf{v}, \quad (2)$$

* ЖЭТФ, 1944, 14, выл. 6.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(n), & (3a) \\ \rho &= \rho(n), & (3b) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e \mathbf{v} n}{c}, & (4) \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e (n - n_0), & (5) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & (6) \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. & (7) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{v} — скорость смещения электронов, n — их плотность, ρ — давление, c — скорость света, e — элементарный заряд, n_0 — равновесная плотность электронов, так что $n - n_0$ — плотность некомпенсированного заряда, \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{H} — магнитное поле, ρ — плотность энергии электронов, включая энергию покоя плюс их давление, разделенные на c^2 . Уравнения (1) — (3а, б) — уравнение гидродинамики, (4) — (7) — обычные уравнения Максвелла. Мы приняли, что во всяком случае, каковы бы ни были микроскопические скорости электронов, $|\mathbf{v}| \ll c$.

Полагая возмущения, происходящие в плазме, небольшими, нетрудно свести систему (1) — (7) к виду, который относится к распространению малых колебаний. Для этого надо считать $n - n_0$ малой величиной и систематически пренебрегать всеми квадратичными в возмущениях величинами. Тогда линейризованная система примет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\xi \nabla n' + en_0 \mathbf{E}, & (8) \\ \frac{\partial n'}{\partial t} &= -n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}, & (9) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi n_0 e}{c} \mathbf{v}, & (10) \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi en', & (11) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & (12) \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & (13) \end{aligned}$$

причем $n' = n - n_0$, $\xi = \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{n=n_0}$.

Система (8) — (13) может быть выведена из вариационного принципа, причем функция Лагранжа должна выглядеть так:

$$L = \int \left[\frac{\rho v^2}{2} - \frac{\xi n'^2}{2n_0} - en' \varphi + \frac{n_0 e (\mathbf{v} \mathbf{A})}{c} + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \right] dV, \quad (14)$$

где φ — скалярный потенциал, \mathbf{A} — векторный потенциал.

Исключим теперь \mathbf{v} , n' и \mathbf{H} из системы (8) — (13). С этой целью продифференцируем уравнение (10) еще раз по времени, причем в левую часть подставим $\partial \mathbf{H} / \partial t$ из (12), а в правую — $\partial \mathbf{v} / \partial t$ из (8), заменяя при этом n' по (11). Тогда получится уравнение, описывающее только вектор электрического поля \mathbf{E} :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{n_0 \xi}{c\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi e^2 n_0^2}{c\rho} \mathbf{E}. \quad (15)$$

Полагая теперь

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k r)}, \quad (16)$$

т. е. в виде обычной плоской волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , получим два различных закона дисперсии $\omega = \omega(k)$ в зависимости от направления поляризации \mathbf{E}_0 .

При $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{k}$ (продольные волны)

$$\omega^2 = \frac{n_0 \xi}{\rho} k^2 + \frac{4\pi n_0^2 e^2}{\rho} \equiv \frac{n_0 \xi}{\rho} k^2 + \omega_0^2, \quad (17)$$

и при $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ (поперечные волны)

$$\omega^2 = c^2 k^2 + 4\pi n_0^2 e^2 / \rho \equiv c^2 k^2 + \omega_0^2. \quad (18)$$

Рассматривая функцию Лагранжа L , легко видеть, что она распадается на две — L_1 и L_2 , так что распространение продольных и поперечных волн в линейном приближении происходит независимо друг от друга.

Функциональная зависимость частоты от волнового вектора как для продольных, так и для поперечных волн очень напоминает выражение релятивистской гамилтоновой функции материальной точки через импульс, причем в обоих случаях масса покоя пропорциональна $\omega_0^2 \equiv 4\pi n_0^2 e^2 / \rho$. Однако частота поперечных волн зависит от k гораздо сильнее, так как она содержит коэффициент c^2 при k^2 , тогда как частота продольных волн имеет коэффициент u^2 (квадрат скорости звука), равный $n_0 \xi / \rho$. В самом крайнем случае, когда электроны плазмы движутся со скоростями, весьма близкими к c ,

$$\rho \sim n^{1/2}, \quad \text{а} \quad \rho = 1/2 (\rho - p), \quad (19)$$

так что

$$u^2 \ll c^2/3, \quad (20)$$

обычно можно полагать $u \ll c$.

Поперечная волна, если она каким-либо образом возникнет, будет поглощаться плазмой. Такой поперечной волне следует сопоставить световую волну, в которую поперечная волна переходит при $n_0 = 0$. Закон ее затухания в плазме под влиянием возбужденных звуковых волн будет описывать поглощение света. Механизм поглощения становится ясным, если написать

систему уравнений (1) — (7) с точностью не до линейных, а до квадратичных членов. Это значит, что при исключении неизвестных надо отбросить величины типа $n[\mathbf{v}\mathbf{N}]$ как малые третьего порядка. Тогда, обозначая

$$\xi_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \right)_{n=n_0}, \quad (21)$$

получим вместо уравнения (15) следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = & -c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{n_0 \xi}{c\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi e^2 n_0^2}{c\rho} \mathbf{E} - \\ & - \frac{(\xi + n_0 \xi_1)}{4\pi e\rho} \operatorname{div} \mathbf{E} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{4\pi n_0 e}{c} [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}] + \\ & + \frac{2n_0 e}{c\rho} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi n_0^2 e^2}{c^2 \rho} [\mathbf{v}\mathbf{N}]. \end{aligned} \quad (22)$$

Последние три члена в (22) представляют возмущающую силу. В ней следует удерживать те члены, которые описывают взаимодействия продольных волн с поперечными (поперечно-поперечные взаимодействия отсутствуют в квадратичном приближении). Поэтому член $\operatorname{div} \mathbf{E} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E}$ для поглощения поперечных волн не существен. Далее, величины \mathbf{v} и \mathbf{N} могут быть определены из линеаризованных уравнений, если задать \mathbf{E} в виде плоской волны согласно (16).

Именно:

$$\mathbf{H} = \frac{c |\mathbf{kE}|}{\omega_l}, \quad (23)$$

$$v_l = \frac{en_0 E_l}{i\omega_l \rho}, \quad (24)$$

$$v_t = \frac{\omega_l \mathbf{E}}{4\pi i e n_0}. \quad (25)$$

Тогда возмущающая сила получит следующее выражение:

$$F_{kk'} = - \frac{ie n_0}{c\rho} \left(2 + \frac{\omega_{tk'j}}{\omega_{tk}} \right) (\mathbf{k}' E_{tk'j}) E_{tk} \equiv - \frac{i}{c} \lambda_{kk'j} (\mathbf{k}' E_{tk'j}) E_{tk}. \quad (26)$$

Здесь индекс j принимает значения 1 и -1 , причем $\omega_{tk',1} = |\omega_{tk'}|$, $\omega_{tk',-1} = -|\omega_{tk'}|$, так что $E_{tk',1}$ обозначает волну, бегущую направо, $E_{tk',-1}$ — волну, бегущую налево. Обозначение $\lambda_{kk'j}$ очевидно. Разлагая (22) по компонентам Фурье, мы должны выбирать только члены с одинаковой зависимостью от координат

нат. Тогда получим

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 E_k = \sum_{k',j} -i \lambda_{k-k',k',j} E_{k-k'} (\mathbf{k}' E_{k'j}), \quad (27a)$$

$$\frac{\partial^2 E_{k-k'}}{\partial t^2} + \omega_{k-k'}^2 E_{k-k'} = i \lambda_{k-k',-k',-j} (\mathbf{k}' E_{-k',-j}) E_k. \quad (27b)$$

При написании (27b) предполагалось, что в какой-то начальный момент времени $t=0$ было возбуждено только колебание E_{tk} и «звуковой» спектр, тогда как комбинационное колебание $E_{t,k-k'}$ возникло уже в результате взаимодействия того и другого. Поэтому в правую часть (27b) из всех поперечных волн должно было войти только уже возбужденное E_{tk} . Будем искать E_{tk} в таком виде:

$$E_{tk} = E_{0k} e^{i\omega_k t - \Gamma_k t}, \quad (28)$$

Γ_k равна коэффициенту поглощения, умноженному на фазовую скорость поперечных волн. $E_{k-k'}$ ищем как

$$E_{k-k'} = c(t) e^{i\omega_{k-k'} t}, \quad (29)$$

где $c(t)$ настолько медленно переменная функция времени, что ее второй производной следует пренебречь. На $c(t)$ налагается начальное условие $c(0)=0$. Тогда $c(t)$ определится по уравнению (27b) следующим образом:

$$c(t) = - \frac{\lambda_{k,-k',j} E_{0k} (\mathbf{k}' E_{0,-k',-j})}{2i\omega_{k-k'}} \frac{e^{i(\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'} t - \Gamma_k t)}}{\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'} - i\Gamma_k}. \quad (30)$$

Подставляя теперь (28) в левую часть, а (30) в правую часть (27a), получим такое уравнение (где мы пренебрегли Γ_k^2):

$$2i\omega_k \Gamma_k E_{0k} e^{i(\omega_k + \Gamma_k)t} = \sum_{k',j} \frac{\lambda_{k-k',k',j} \lambda_{k,-k',-j}}{2\omega_{k-k'}} E_{0k} \times \\ \times (k' E_{0k'j}) (\mathbf{k}' E_{0,-k',-j}) e^{i(\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'} t - \Gamma_k t)} \frac{e^{i(\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'} t - \Gamma_k t)} - 1}{\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'} - i\Gamma_k}. \quad (31)$$

Суммирование по k' можно заменить интегрированием, если учесть, что число колебаний с волновым вектором k' равно

$$\frac{V k'^3 d\Omega_{k'}}{(2\pi)^3},$$

где V — объем какой-то произвольной области, занятой плазмой. Последний сомножитель правой части (31) обладает резонансными свойствами: он велик тогда, когда $\omega_{k'} + \omega_{k-k'} = \omega_k + i\Gamma_k$. Именно: при не слишком малых имеет место равенство

$$\frac{e^{ix} - 1}{x} \approx i\pi \delta(x), \quad (32)$$

которым пользуются, например, в квантовой теории излучения при вычислении ширины спектральных линий.

Учитывая, что разложение Фурье величины E должно представлять действительную величину, приходим к требованию

$$E_{k'l} = \bar{E}_{-k', -l}, \quad (33)$$

где черта над E означает комплексно-сопряженную с ним величину.

Тогда находим искомый коэффициент затухания Γ_k :

$$\Gamma_k = \frac{\pi}{4\omega_k} \left(\frac{n_0 e}{\rho} \right)^2 \sum_j \int \frac{k'^2 dk' d\Omega_{k'}}{(2\pi)^3 \omega_{k-k'}} V |E_{k'}|^2 \times \\ \times \lambda_{k-k', k', j} \lambda_{k-k', -j} \delta(\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'}) \quad (34)$$

Величину $V |E_{k'}|^2$ следует выразить через энергию, приходящуюся на колебание с волновым вектором k' . Так как энергия продольных колебаний связана с функцией Лагранжа соотношением

$$E_l = \left(v_l \frac{\partial L_l}{\partial v_l} - L_l \right), \quad (35)$$

находим

$$V |E_{lk'}|^2 = \frac{16\pi^2 n_0 e^2}{\xi k'^2} E_{k'}, \quad (36)$$

откуда

$$\Gamma_k = \frac{n_0^3 e^4}{2\xi \rho^2 \omega_k} \sum_j \int \frac{k'^2 dk' d\Omega_{k'}}{\omega_{k-k'}} E_{k'} \left(2 + \frac{\omega_{k'l}}{\omega_{k-k'}} \right) \times \\ \times \left(2 - \frac{\omega_{k'l}}{\omega_k} \right) \delta(\omega_k - \omega_{k-k'} - \omega_{k'}). \quad (37)$$

Для того чтобы вычислить стоящий в (37) интеграл, следует прежде всего поставить величину $E_{k'}$. При достаточно высокой температуре $\Theta \gg \hbar \omega_{k'}$ надо воспользоваться законом равнораспределения, так что

$$E_{k'} = \Theta \quad (38)$$

(Θ — температура в эргах).

Интерференционное условие (32), если воспользоваться выражениями (17) и (18) для ω_l и ω , приобретает несколько сложный вид, так что одно из интегрирований (по $d\Omega_{k'}$) произойдет сразу, зато другое, по k' , приводит к уравнению четвертой степени для нахождения верхнего предела предела величины k' при заданном k . Мы рассмотрим поэтому только предельные случаи. Пусть, во-первых,

$$u |k| \ll \omega_0, \quad (39)$$

иначе говоря, распространением звуковых волн можно пренебречь. Тогда в качестве переменной интегрирования в (37) проще всего выбрать вектор $k-k' = q$, полагая $\omega_k = \omega_0$. Пользуясь тем, что

$$c^2 q d q = \omega_q d \omega_q, \quad (40)$$

находим

$$\Gamma_k = \frac{2\pi n_0^3 e^4 \Theta}{\xi \rho^2 c^3} \sum_j \frac{V (\omega_k - \omega_{0j})^2 - \omega_0^2}{\omega_k} \left(2 + \frac{\omega_{0j}}{\omega_k - \omega_{0j}} \right) \left(2 - \frac{\omega_{0j}}{\omega_k} \right). \quad (41)$$

Очевидно, что найденная величина Γ_k не сильно зависит от ω_k . Даже если $\omega_k \gg \omega_0$, Γ_k приводится к не зависящей от частоты величине

$$\Gamma_k \approx \frac{16\pi n_0^3 e^4 \Theta}{\xi \rho^2 c^3}. \quad (42)$$

Разумеется, если $\omega_0 < \omega_k < 2\omega_0$, в формуле (41) следует брать только тот член суммы по j , для которого $q = \frac{1}{c} \sqrt{(\omega_k + \omega_0)^2 - \omega_0^2}$

— действительная величина, так как другой член не удовлетворяет интерференционному условию. Но и наименьшая возможная частота $\omega_k = \omega_0$ приводит к тому же порядку величины Γ_k . Пусть далее

$$uk \gg \omega_0, \quad (43)$$

что соответствует очень коротким волнам. Тогда и подавно

$$ck \gg \omega_0, \quad (44)$$

а аргумент дельта-функции сводится к виду

$$f(k') = ck - c |k - k'| \pm uk' = 0. \quad (45)$$

Наибольшее значение k' , возможное по этому равенству, есть

$$k'_{\max} = \frac{2k}{1 \pm u/c}. \quad (46)$$

Интеграл по $d\Omega_{k'}$ в (37) тоже легко берется; для этого достаточно воспользоваться (47) и хорошо известной формулой

$$\int \varphi(x) \delta(f(x)) dx = \frac{\varphi(x_0)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_0}; \quad f(x_0) = 0. \quad (47)$$

В нашем случае

$$x = \cos \vartheta, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{ckk'}{|k - k'|}.$$

Обозначая еще $u_1 = u$, $u_{-1} = -u$, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \frac{\pi n_0^2 e^4 \Theta}{\xi c^3 \rho^2} \sum_l \int_0^{\frac{1 \pm u_l/c}{c}} k' \left(2 + \frac{k' u_l}{c - k' u_l} \right) \left(2 - \frac{k' u_l}{c} \right) dk' = \\ &= \frac{\pi n_0^2 e^4 \Theta}{\xi c^3 \rho^2} \frac{24 + 8 \left(\frac{u}{c} \right)^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{u}{c} \right)^4}{\left(1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right)^3}. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, очень короткие волны поглощаются примерно так же, как и более длинные, частота которых сравнима с ω_0 . Окончательно Γ_k надо записать так:

$$\Gamma_k = f \frac{n_0^2 e^4 \Theta}{\xi c^3 \rho^2}, \quad (49)$$

где f — функция частоты, которая, однако, всюду имеет порядок нескольких единиц. Поэтому поглощение достаточно коротких волн колебаниями плазмы всегда должно превысить фотопоглощение. Если $\Theta \ll mc^2$, а плотность плазмы такова, что имеет место статистика Больцмана, коэффициент поглощения света $\chi \equiv \Gamma/c$ выглядит так:

$$\chi = f \left(\frac{c}{v} \right)^{1/2} n_0 \frac{e^4}{m^2 c^4}. \quad (50)$$

Следует отметить далее, что и в том случае, когда электронный газ подчиняется статистике Ферми, звуковые колебания могут следовать закону равномерного распределения. Для этого необходимо выполнение двух неравенств:

$$\Theta \ll \frac{3^{1/2} \pi^{1/2} n_0^{1/2} h^2}{2m}, \quad (51)$$

$$\Theta \gg \frac{2\pi^{1/2} n_0^{1/2} e h}{m^{1/2}}, \quad (52)$$

которые совместимы тогда, когда

$$n_0^{1/2} \gg \frac{me^2}{h^2}. \quad (53)$$

В релятивистской области

$$\Theta \ll 3^{1/2} \pi^{1/2} n_0^{1/2} h c, \quad (51a)$$

$$\Theta \gg \frac{8}{\pi^{1/2} 3^{1/2}} n_0^{1/2} e \sqrt{h c}, \quad (52a)$$

и следовательно,

$$\frac{8}{\pi^{1/2} 3^{1/2}} \frac{e}{\sqrt{h c}} \ll 1. \quad (53a)$$

Левая часть (53a) меньше 0,1, так что (51a) и (52a) совместимы во всяком случае. Невыполнение (51) или (51a) означает только, что статистика электронного газа близка к Больцмановской, но не затрагивает вопроса о применимости закона равномерного распределения.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

В ПРОСТРАНСТВЕ

(к теории шаровидной молнии)*

Шаровидная молния — редкое и мало изученное явление. Близко воспроизвести ее в лабораторных условиях не удается [2]¹. Поэтому всякая предлагаемая теоретическая модель шаровидной молнии представляет гипотезу, выводы из которой можно сравнивать только с показаниями очевидцев.

Что прежде всего бросается в глаза при описании шаровидной молнии, — это ее сравнительная устойчивость. Надо объяснить, каким образом большой объем (порядка 1000 см³) ионизированного газа существует как одно целое в течение нескольких десятков секунд.

В литературе известна попытка Нейгебауера [1] свести устойчивость шаровидной молнии к обменным силам между электронами плазмы. Легко видеть, однако, что его работа содержит неустрашимое противоречие. В самом деле, он считает, что в плазме отсутствуют кулоновские силы между электронами внутри экранирования их положительными зарядами ионов. Но энергию обменного взаимодействия Нейгебауер определяет как диагональный матричный элемент обменного типа именно от этого кулоновского взаимодействия, причем экранирование совершенно им не учитывается. Если бы он таким же образом попытался определить энергию прямого кулоновского взаимодействия, то получилась бы бесконечность, от которой, следовательно, он отделался чисто словесно. На самом деле экранирование должно влиять на обменные силы в той же степени, что и на кулоновские, причем обменные силы притяжения во всяком случае, меньше прямых сил отталкивания. Кроме того, в цити-

* Труды Физико-технического ин-та, т. 1. Ташкент, 1947.

¹ В квадратные скобки заключены указания на литературу.

руемой работе совершенно не принимается во внимание диффузия зарядов, которые считаются как бы заключенными в ящик. Какую роль может играть при этом рекомбинация ионов? При каждой рекомбинации образуется световой квант. Такой квант при атмосферном давлении имеет свободный пробег (обратное значение коэффициента поглощения) порядка 10^{-4} см, сравнимый со свободным пробегом иона или электрона. Поглощаясь, квант ионизирует молекулу. В результате ионизированная молекула исчезнет в одном месте и появится в другом — произойдет своего рода диффузия обоих носителей заряда [3]. Коэффициент диффузии равен квадрату свободного пробега, деленному на время жизни атома в ионизированном состоянии. Но этот промежуток времени гораздо больше промежутка между двумя упругими соударениями. Следовательно, коэффициент рекомбинационной диффузии надо считать малым по сравнению с обычным газокинетическим. В дальнейшем мы будем рассматривать только обычную диффузию. Установим прежде всего уравнения, которым подчиняется диффузионный процесс в плазме, т. е. в сильно ионизированном газе. Плазму будем считать «изотермической», иначе говоря, примем температуру того или другого рода носителей заряда одинаковой. Подвижности ионов и электронов равны коэффициентам диффузии, деленным на kT .

Пусть n_e и n_p — объемные концентрации электронов и ионов, D_e и D_p — их коэффициенты диффузии, E — электрическое поле. Тогда уравнения диффузии в одном измерении имеют вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{eD_e}{kT} n_e E \right), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_p \frac{\partial n_p}{\partial x} - \frac{eD_p}{kT} n_p E \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e (n_p - n_e). \quad (1b)$$

Предположим, что плотности n_e и n_p в объеме, занятом плазмой, мало отличаются от начальной плотности n_0 . Допущение это будет тем точнее, чем меньше время протекания диффузионный процесс. Все время протекания процесса имеет порядок величины R^2/D_p , где R представляет размеры ионизированной области [см. формулу (45)] и близко к одной минуте. Поэтому начальный этап процесса можно описывать плотностями $n_e = n_0 + \delta n_e$, $n_p = n_0 + \delta n_p$, где δn_e и δn_p — малые величины. Электрическое поле E тогда тоже будет иметь порядок малости δn , и мы имеем право заменить $n_e E$ произведением $n_0 E$ и соответственно $n_p E$ на $n_0 E$, пренебрегая малыми второго порядка. Решение (9) тем точнее, чем ближе t к нулю, и имеет относительную ошибку tD_0/R^2 , которая, по определению, всегда меньше единицы. Приведенное рассуждение теряет силу для области,

первоначально не занятой плазмой, где n_0 равно нулю и не имеет смысла считать δn_e и δn_p малыми величинами. В этом случае применяется другой метод приближения. Если заменить их величиной n_0 в множителе при E , система (1) превращается в линейную.

Заменим в ней $t \frac{4\pi n_0 e^2}{kT}$ буквой t и $x \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{kT}}$ буквой x . След-

довательно, мы приняли в качестве единицы длины дебаевский радиус ионного облака. Окончательно линейная система выглядит так:

$$D_e \frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + (n_p - n_e), \quad (2a)$$

$$D_p \frac{\partial n_p}{\partial t} = \frac{\partial^2 n_p}{\partial x^2} - (n_p - n_e). \quad (26)$$

В целях сокращения письма мы введем векторную систему обозначений. Именным введем вектор n с компонентами n_e , n_p и постоянный вектор $R = R\{-1, 1\}$. В дальнейшем у нас будет встречаться еще один постоянный вектор $E = E\{1, 1\}$ и постоянная диагональная матрица D :

$$D \equiv \begin{Bmatrix} D_e & 0 \\ 0 & D_p \end{Bmatrix}, \quad D^{-1} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{D_e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_p} \end{Bmatrix}.$$

Тогда система (2) приобретет вид

$$D^{-1} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - R(Rn). \quad (3)$$

Возьмем частное решение (3) n_n , пропорциональное $e^{-\lambda x}$. Для него будем иметь

$$-\lambda D^{-1} n_n = \frac{\partial^2 n_n}{\partial x^2} - R(Rn_n).$$

Отсюда получается условие ортогональности

$$(\lambda - \lambda') \int_{-\infty}^{\infty} n_n D^{-1} n_{n'} dx = 0,$$

если предположить, например, что $n(-\infty) = n(0) = 0$.

Другая ортогональная система получается из условия

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

но ей не соответствует никакого потока частиц из области, первоначально занятой зарядами ($x < 0$), в область, первоначально свободную от ионов ($x \geq 0$).

Положим

$$n_\lambda = \zeta \sin \chi x,$$

где ζ — постоянный вектор. Получается система однородных уравнений

$$\lambda D^{-1} \zeta = \chi^2 \zeta + R(R\zeta), \quad (4)$$

условие разрешимости которой следует из равенства нулю определителя системы (4):

$$\lambda = \frac{1}{2} (D_e + D_p) (1 \pm \chi^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (D_e - D_p)^2 (1 + \chi^2)^2 + D_e D_p}. \quad (5)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться решением при больших x . Во всяком случае, макроскопический x должен быть порядка $10^5 - 10^6$ дебаевских радиусов.

Это соответствует

$$\chi^2 \ll 1, \quad (6)$$

что дает два корня

$$\lambda_{1,2} = D_e + D_p, \quad (7a)$$

$$\lambda_3 = \frac{2D_e D_p}{D_e + D_p} \chi^2 \approx \frac{\chi^2}{\delta}. \quad (7b)$$

(7a) отвечает весьма быстро затухающему решению, которое не играет роли. λ_3 дальше будет именоваться λ и соответствующее ему ζ_2 просто ζ . В составляющих

$$\zeta_e = 1, \quad \zeta_p = \chi^2 \frac{D_e - D_p}{D_e + D_p}. \quad (8)$$

Общее решение будем искать в виде

$$n = \int_0^\infty S(\chi) \zeta e^{-\lambda x} \sin \chi x dx, \quad (9)$$

где коэффициент $S(\chi)$ определяется из начального условия

$$n(t=0) = \begin{cases} En_0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}, \quad (10)$$

как

$$S(\chi) = \frac{2n_0}{\pi} \int_0^\infty \sin(\chi) \xi d\xi. \quad (11)$$

При этом допущено просто $\zeta = E$, так как поправка имеет порядок

дебаевский радиус
микроскопическая длина

Входящий в $S(\chi)$ множитель $\int_{-\infty}^0 \sin \chi \xi d\xi$ следует полагать рав-

ным $-1/\chi$ во всех тех случаях, когда такая замена не ведет к расходимости. В нашей задаче это законно (в противном случае надо менять порядок интегрирования по ξ и по χ). Плотность n с достаточным приближением получается, если заменить ζ единичным вектором E . Приводить n в замкнутом виде мы не будем, а запишем только диффузионную часть потока (в обычной системе единиц)

$$j_D = -D \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{n_0 V \delta}{\sqrt{\pi t}} D E e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (13)$$

Чтобы вычислить электрическую часть потока (вынужденная диффузия), следует воспользоваться более точным выражением для ζ из равенства (8), так как иначе плотность заряда, равная $e(Rn)$, обращается в нуль. В результате электрическое поле окажется порядка малости (12), а вызванный им поток зарядов одного порядка с (13):

$$j_E = \frac{n_0 V \delta}{\sqrt{\pi t}} \frac{D_e - D_p}{D_e + D_p} D R e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (14)$$

Общий поток, равный сумме (13) и (14), одинаков по величине и знаку для ионов и электронов:

$$j_e = j_p = \frac{n_0}{\sqrt{\pi \delta t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (15)$$

Следовательно, взаимодействие между зарядами делает равными их потоки, несмотря на сильное различие коэффициентов диффузии (по крайней мере, на два порядка величины). Фактически j зависит только от меньшего коэффициента диффузии ионов D_p , так как с большим приближением

$$\delta = \frac{1}{2D_p}.$$

Менее подвижные ионы как бы удерживают более подвижные электроны, и плазма остается нейтральной². Всякий объемный заряд очень быстро заставил бы ее рассеяться в простран-

² Это имеет место и для точного уравнения.

стве. Поток через границу окончательно равняется

$$j_e(0) = j_p(0) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi l \delta}}. \quad (16)$$

Может показаться, что дальнейшее движение электронов и ионов будет подчиняться законам свободной диффузии, т. е. что в наружной области $j = j_p$.

Однако различие коэффициентов диффузии немедленно поведет к появлению в этой области объемного заряда. Его поле с необходимостью вызовет вынужденный поток j_E . Подробное вычисление показывает, что за время порядка $t = 1$ сек и на макроскопических расстояниях от первоначально ионизированной области определенный таким способом j_E значительно больше первоначально принятого потока j_p [отношение $E_{//} D_i$ — обратная величина (12)], т. е. мы приходим к противоречию. На самом деле во внешней области ($x = 0$) следует учитывать только

j_E , и тогда вычисленный из определения $j_p = -D \frac{\partial n}{\partial x}$ диффузионный поток окажется значительно меньшим, чем j_E . Таким образом, в области $x \gg 0$ надо пользоваться системой (1), обратная, однако, член $D \frac{dn}{dx}$. Запишем сначала уравнение диффузии ионов:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{e D_p}{k T} E n_p. \quad (17)$$

В дальнейшем будет показано, что слагаемая поля, обязанная ионам, значительно больше той слагаемой, которую создают электроны. Поэтому поле в первом приближении определится из уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4 \pi e n_p. \quad (18)$$

Исключая n_p из уравнений (17) и (18), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{D_p e E}{k T} \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (19)$$

Вводя обозначения $\frac{E_e}{k T} \equiv Z$, $D_p t \equiv \tau$ и интегрируя (19), приходим к уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = - Z \frac{\partial Z}{\partial x} - f(\tau). \quad (20)$$

Функция $f(\tau)$ определится из граничных условий. Чтобы найти общее решение (20), перейдем к независимым переменным τ , Z .

Для x получится линейное уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} - f(\tau) \frac{\partial x}{\partial Z} = Z, \quad (21)$$

интеграл которого легко находится как

$$x = \psi \left(Z + \int f d\tau \right) + Z\tau + \int \tau f d\tau. \quad (22)$$

Найдем теперь функции ψ и f . Прежде всего заметим, что при $x = 0$ и Z , т. е. электрическое поле, тоже равно нулю. Мы рассматриваем диффузию на малых участках сферической поверхности, считая их плоскими. На самом же деле точка $x = 0$ является внутренней по отношению ко всем зарядам. Отсюда следует граничное условие для E , которое дает

$$\psi \left(\int f d\tau \right) = - \int \tau f d\tau. \quad (23)$$

Далее надо приравнять потоки j_p при $x = 0$:

$$(j_p)_0 = \left(\frac{e D_p}{k T} E n_p \right)_0 = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} \delta t}. \quad (24)$$

В наших обозначениях

$$j_p = \frac{D_p k T}{4 \pi e^2} \frac{Z}{\psi \left(Z + \int f d\tau \right) + \tau}.$$

Разлагая ψ в ряд по степеням Z до первого члена включительно, приходим к следующим двум условиям:

$$\psi \left(\int f d\tau \right) + \tau = 0, \quad (24a)$$

$$\psi \left(\int f d\tau \right) - a \sqrt{\tau} = 0, \quad (24b)$$

где

$$a = \frac{k T}{4 \sqrt{\pi e^2 n_0}} \sqrt{D_p} \delta. \quad (25)$$

Исключая n_p из уравнений (24a, б), запишем

$$\psi^2 = -\alpha^2 \psi \quad (26)$$

или

$$\psi(u) = \frac{\alpha^2}{12} u^3. \quad (27)$$

Будем искать $f(\tau)$ в виде

$$f(\tau) = \frac{A}{\sqrt{\tau}}. \quad (28)$$

Подставляя (28) и (27) в (23), получим

$$A^2 = 1/\alpha^2. \quad (29)$$

Равенство (24а) при этом удовлетворится. Для того чтобы вы-
полнилось уравнение (24б), возьмем

$$A = -1/\alpha. \quad (30)$$

Итак, решение уравнения (19) с учетом граничных условий в
неявном виде (x через E) выглядит так:

$$x = -\frac{\alpha^2}{12} \left(Z - \frac{2\sqrt{\tau}}{\alpha} \right) + \tau Z - \frac{2}{3} \frac{\tau^{3/2}}{\alpha}. \quad (31)$$

Можно оценить верхний предел для x , исходя из того требова-
ния, чтобы полный заряд во внешней области равнялся тому ко-
личеству, которое вытекает из плазмы:

$$\int_0^{x_{\max}} n_p dx = \int_0^t \frac{n_0 dt}{\sqrt{\pi t \delta}} \quad (32)$$

или, пользуясь (18),

$$E(x_{\max}) = \frac{8\sqrt{\pi} n_0 e}{\sqrt{\delta}},$$

откуда x_{\max} определится непосредственно по (31) как

$$x_{\max} = \frac{8}{3} \sqrt{\pi} D_p \sqrt{\frac{t^3 n_0 e^2}{\delta k T}} \quad (33)$$

(при $t \sim 1$ сек). Это очень большое число, порядка 10 см. Смысл
(33), конечно, только в том, что заряды во внешней области
своим же полем достаточно быстро убираются на бесконечное
расстояние и вовсе выходят из игры, уносимые конвекционными
потоками воздуха, проводниками и т. п. Решением (31) следует
пользоваться в непосредственной близости от плазмы при до-
статочно малых x , порядка нескольких сантиметров.

Тогда поле, созданное ионами, приобретает простой вид:

$$E_p = 2\sqrt{2} \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{n_0 k T}}{\sqrt{\delta t} \sqrt{D_p}} \sqrt{x}. \quad (34)$$

Если положить t равным нескольким секундам, то $E \sim 10^4$ в.
Найдем теперь электронную часть поля, которой мы сначала
пренебрегали. Для этого вычислим сперва n_e по уравнению

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{e E_p}{k T} D_e n_e, \quad (35)$$

а затем E_e из

$$\frac{\partial E_e}{\partial x} = -4\pi e n_e, \quad (36)$$

считая снова $E_e(x=0) = 0$.

Подставив E_p в (35) из (34), приходим таким образом к ли-
нейному уравнению в частных производных первого порядка для
 n_e . Оно легко интегрируется с учетом пограничного условия для
потока. Решения выписывать мы не будем, так как n_e требуется
ведь только для оценки отброшенной нами величины E_e . Дей-
ствительно, оказывается

$$\frac{|E_e|}{|E_p|} = \frac{D_p}{D_e} \sim 10^{-2}. \quad (37)$$

Так как предполагается, что система (1) при поставленных
условиях имеет единственное решение, мы должны допустить,
что n_p , найденное из уравнения (17), и n_e , найденное из уравне-
ния (35), отличаются от своих точных значений не более чем на
малые величины порядка D_p/D_e , и доказательство формулы (37)
не включает в себе порочного круга.

Далее, диффузионный поток тоже нетрудно вычислить:

$$j_D = -D_p \frac{\partial n_p}{\partial x} = -\frac{D_p}{4\pi e} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

Его отношение к электрическому равно

$$\frac{j_D}{j_E} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{kT}{n_0}} \frac{\sqrt{D_p t}}{e\sqrt{x^3}}, \quad (38)$$

что при $x \sim 1$ см и $t \sim 1$ сек не превышает 10^{-6} .

Таким образом, плазма окружена электрическим полем, на
нее непосредственно не действующим. Если равновесие в систе-
ме нарушится, может произойти сильный разряд.

Перейдем теперь к вопросу о равновесии плазмы.

Прежде всего, если какая-нибудь внешняя причина (провод-
ник) резко нарушит симметрию окружающего плазму объемного
заряда, весьма вероятно разряд. Но и диффузионный процесс
лишает плазму устойчивости сам по себе. Это можно выяснить
следующим образом.

Изменение свободной энергии плазмы, связанное диффузии
(на единицу поверхности), имеет вид

$$\frac{\partial F'_s}{\partial t} = \int \left[(\mu_p + e\varphi) \frac{\partial n_p}{\partial t} + (\mu_e - e\varphi) \frac{\partial n_e}{\partial t} \right] dx, \quad (39)$$

где F'_s — свободная энергия на единицу поверхности, μ_e и μ_p —
химические потенциалы носителей заряда, φ — электрический
потенциал. Подставляя $\partial n/\partial t$ из (2а, б) и преобразуя (39) с уче-
том граничных условий для n , найдем

$$\frac{\partial F'_s}{\partial t} = -\frac{kT}{n_0} \int (D^{-1} j, j) dx, \quad (40)$$

откуда, пользуясь уравнением (15), будем иметь

$$F'_s = - \frac{4n_0 kT}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D_p D_e}{D_p + D_e}} t. \quad (41)$$

Сюда еще следует подставить $n_0 = cN/v$, где c — относительная начальная концентрация ионов, N — число Лошмидта. Окончательно для всей поверхности

$$F' = \frac{4 \cdot 6^{1/2} c N k T}{\pi^{1/2} v^{1/2}} \sqrt{Dt}, \quad (42)$$

где

$$D = \frac{D_e D_p}{D_e + D_p}.$$

Возрастание F' со временем относится точно к бесконечной ионизированной области. Поэтому может показаться странным переход к конечному объему в уравнении (42). На самом деле задачу диффузии нетрудно решить и для сферы. При этом в уравнении (9) вместо интеграла будет стоять ряд Фурье. Но при t , достаточно малых (по сравнению с R^2/D_p), ряды так или иначе заменяются на интегралы. Физически это значит, что диффузионный процесс задевает только область сферы, близкую к поверхности, и переход от формулы (41) к формуле (42) законен. Это соответствует добавочному давлению

$$p = - \frac{\partial F}{\partial v} = - \frac{4}{3} \frac{6^{1/2} c N k T}{\pi^{1/2} v^{3/2}} \sqrt{Dt}, \quad (43)$$

которое как бы стремится сжать плазму (оно имеет знак внешнего давления). Оно напоминает давление в жидкой капле, объясненное поверхностному натяжению. Последним можно объяснить, почему плазма стремится принять именно форму шара, а также возникновение молнии в виде четок в том месте, где обычный разряд ионизировал воздух. Последнее похоже на разрыв жидкой струи на отдельные капли. Для полного давления в плазме имеем

$$p = p' + NkT/v. \quad (44)$$

Производная $\partial p/\partial v$ всегда должна быть отрицательной, между тем получается

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{16}{9} \frac{6^{1/2} c N k T}{\pi^{1/2} v^{3/2}} - \frac{NkT}{v^2}. \quad (45)$$

При достаточно большом t первый член в правой части превзойдет по величине второй и плазма потеряет устойчивость. Именно

это будет иметь место при

$$t = \frac{9}{16} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{1/2} \frac{v^{3/2}}{c D_p}.$$

Считая c сравнимым с единицей, получим t порядка 10^2 сек. При меньших c плазма рассеется раньше, чем потеряет устойчивость. Такие случаи также описаны. В момент разрыва p' равно $3/4$ всего давления. Поэтому, когда «поверхностное натяжение» исчезает, должен возникнуть скачок давления, распространение которого на небольших расстояниях связано со значительным звуковым эффектом. Чисто механический эффект разрыва, наоборот, невелик, что, по-видимому, согласуется с имеющимися наблюдениями. Все разрушения, связанные с шаровой молнией, следует приписать электрическому разряду.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. Л. Р. Нейману за весьма интересное обсуждение результатов этой работы.

Л и т е р а т у р а

1. Neugebauer. Z. Phys., 106, 474, 1937.
2. И. С. Стекольников. Молния. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1939. (Содержит всю литературу вопроса).
3. Р. Ромпе, М. Штеенбек. УФН, 1941, 25, 190.

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ТЕПЛООВОГО РАВНОВЕСИЯ МЕЖДУ КВАНТАМИ И ЭЛЕКТРОНАМИ *

1. Введение

Для того чтобы можно было рассматривать излучение как замкнутую систему, удобно полагать, что оно находится в со- суде с зеркально отражающими стенками. Само по себе излучение в таком сосуде не может прийти в термодинамическое равновесие: уравнивая электродинамики строго линейны и обмен энергиями между колебаниями различной частоты, направления распространения и поляризации не осуществляется. Поэтому считают, что в ящике, кроме излучения, находится сколь угодно малая «углеродная пылинка», которая заметно не возму-

* Работа была выполнена в 1950 г. в Институте химической физики Академии наук СССР, отчет № 336; ЖЭТФ, 1956, 31, вып. 5(11), 876.

щает поле в каждый данный момент, но способна поглощать и испускать излучение всех частот. Через достаточно долгое время поглощение и испускание квантов «пылинок» приведет к установлению термодинамического равновесия.

Что будет, если поместить в сосуд вместо пылинки вещества свободный электрон? Сосуд считается достаточно большим, чтобы можно было пренебречь квантованием энергии электрона. Свободный электрон не поглощает и не испускает, а только рассеивает кванты, поэтому общее число квантов в сосуде не будет изменяться. Какого рода равновесие установится? Если числа заполнения n отдельных состояний малы по сравнению с единицей, то можно пренебречь вынужденными переходами и полагасть, что вероятность рассеяния кванта в некоторое состояние не зависит от числа находящихся в этом состоянии квантов, иначе говоря, заменить множитель $1+n$ в вероятности перехода на 1. Тогда между квантами будет устанавливаться такое распределение, как в идеальном газе с постоянным числом частиц, иначе говоря, получится распределение вида $n = e^{-h\omega/kT}$ (закон Вина). При этом средняя энергия кванта равна $3 kT$. Распределение Планка установится только значительно позже, так как оно осуществляется за счет вынужденного испускания.

Физические условия, в которых может осуществляться распределение Вина, можно представить себе следующим образом. Пусть вещество мгновенно приведено в состояние с очень высокой температурой, так что все атомы полностью ионизованы, а излучение не успело образоваться. Тогда поглощение и испускание квантов будет происходить за счет «свободно-свободного» механизма. Соответствующий процесс испускания есть не что иное, как радиационное торможение электронов. Этот процесс тем вероятнее, чем меньше частота испускаемого кванта. То же самое относится и к вероятности обратного процесса, «свободно-свободного» поглощения, поэтому при достаточно малых частотах тепловое равновесие будет устанавливаться путем поглощения и испускания квантов. При больших частотах вероятность комптоновского рассеяния превосходит вероятность поглощения. Так как кванты рассеиваются на движущихся электронах, их частота при рассеянии может и возрастать. Вначале число квантов еще невелико: все они будут стремиться к тепловому равновесию независимо друг от друга (т. е. вынужденные процессы не будут составлять заметной части всех процессов рассеяния). Между такими квантами установится распределение Вина со средней энергией $3kT$.

Благодаря этому переход энергии от вещества к излучению будет гораздо более быстрым, чем если бы он происходил только за счет радиационного торможения электронов. Тормозные кванты, имеющие частоты ω больше некоторой определенной частоты ω_0 , будут быстро и необратимо увеличивать свою энер-

гию комптоновским механизмом, стремясь дойти до виновской энергии $3kT$.

В дальнейших разделах будет найдена функция распределения квантов, претерпевающих комптоновский процесс. В Приложении мы рассмотрим, какую энергию отбирают от электронов кванты в теле ограниченных размеров.

2. Кинетическое уравнение

Напишем кинетическое уравнение для функции распределения квантов n в неограниченной среде при учете одного только рассеяния. Для общности сначала не будем пренебрегать вынужденными процессами. Уравнение имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_C = - \int d\tau \int [n(1+n')N(\epsilon) - n'(1+n)N(\epsilon + h\omega - h\omega')] dW. \quad (1)$$

Здесь N — функция распределения свободных электронов, $d\tau$ — элемент фазового объема электронов, dW — дифференциальная вероятность перехода из данного состояния в другое, совместимая с законами сохранения энергии и импульса. Индекс C при dn/dt напоминает о том, что в равенстве учтены только комптоновские процессы. Статистическое равновесие между электронами в плазме устанавливается весьма быстро независимо от излучения, поэтому функцию распределения $N(\epsilon)$ следует считать максвелловской. Тогда, если подставить вместо n в (1) распределение Планка $n = (e^{h\omega/kT} - 1)^{-1}$, то правая и левая части обратятся в нуль, как и должно быть.

Будем считать, что энергии электронов нерелятивистские, иначе говоря, допустим, что имеет место неравенство $kT \ll mc^2$. Тогда энергия, передаваемая в каждом отдельном акте, мала по сравнению с энергией кванта $h\omega$: $\omega' - \omega \equiv \Delta \ll \omega$.

Пользуясь этим неравенством, разложим подынтегральное выражение (1) в ряд по степеням Δ до второй степени включительно. Положим $h\omega/kT \equiv x$:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_C = \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \frac{h}{kT} \int d\tau \int dW N(\epsilon) \Delta + + \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \frac{1}{2} \left(\frac{h}{kT} \right)^2 \int d\tau \int dW N(\epsilon) \Delta^2. \quad (2)$$

Второй интеграл в правой части равенства (2) гораздо легче вычислить, чем первый. Но достаточно вычислить только один из двух интегралов, другой определится из того условия, что уравнение должно обеспечивать сохранение полного числа квантов при рассеянии.

Закон сохранения импульса и энергии в нерелятивистском приближении пишется следующим образом:

$$(\hbar\omega/c)\mathbf{p} + \mathbf{p} = (\hbar\omega'/c)\mathbf{p}' + \mathbf{p}', \quad (3)$$

$$\hbar\omega + p^2/2m = \hbar\omega' + p'^2/2m.$$

Здесь $p^2/2m = \epsilon$, \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы электрона до и после столкновения, \mathbf{p} и \mathbf{p}' — направления распространения кванта. Исключая \mathbf{p}' из этих уравнений, получаем уравнение, определяющее ω' как функцию ω , \mathbf{p} и углов рассеяния. В этом уравнении следует положить $\omega = \omega' + \Delta$ и ограничиться членами, линейными относительно Δ , по крайней мере, пока определится интеграл, содержащий Δ^2 . После простых преобразований получается

$$\hbar\Delta = - \frac{\hbar\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{p}') + (\hbar\omega)^2(1 - \mathbf{p}\mathbf{p}')}{mc^2[1 + (\hbar\omega/mc^2)(1 + \mathbf{p}\mathbf{p}') - \mathbf{p}\mathbf{p}'/mc]}. \quad (4)$$

Скобку в знаменателе (4) в интересующем нас случае можно заменить единицей. В числителе первый член имеет порядок величины $(\hbar T/mc^2)^{2/2}$, а второй член — порядок $(\hbar T/mc^2)^2$. Но мы будем определять интеграл от Δ^2 , поэтому вклад первого члена при усреднении по углам не обратится в нуль. Следовательно, при подстановке в (2) надо будет вычислить следующий интеграл:

$$I = (\hbar\omega/mc^2)^2 \int d\tau \int dW(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 N(\epsilon). \quad (5)$$

После усреднения по всем направлениям \mathbf{p} получим

$$I = 1/3 (\hbar\omega/mc^2)^2 \int p^2 N(\epsilon) d\tau \int |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 dW. \quad (6)$$

Первый интеграл равен $2m \cdot 3/2$, $\hbar T = 3 m \hbar T$. Во втором интеграле следует заменить томсоновское сечение в нерелятивистском приближении на томсоновское, которое симметрично относительно рассеяния на углы θ и $\pi - \theta$, так что $\int \mathbf{p}\mathbf{p}' dW = 0$. Томсоновское сечение не зависит от энергии кванта, следовательно,

$$I = (\hbar\omega)^2 (kT/mc^2) c/l, \quad (7)$$

где l — комптоновский пробег, определяемый полным сечением $(8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$.

Для того чтобы уравнение (2) обеспечивало сохранение полного числа квантов, надо положить

$$\int d\tau \int dW N(\epsilon) \Delta = (kT/mc^2) (c/l) \hbar\omega (4 - \hbar\omega/kT). \quad (8)$$

Равенство (8) может быть получено следующим образом. Кинетическое уравнение для квантов должно выглядеть как неко-

торый закон сохранения

$$(\partial n/\partial t)_c = -x^{-2} \partial(x^2 j)/\partial x, \quad (9)$$

где j — «поток» квантов в пространстве частот. Так как уравнение (2) второго порядка относительно x и содержит вторую производную $d^2 n/dx^2$ линейно, без коэффициента, зависящего от n , поток должен иметь вид суммы первой производной dn/dx и некоторой функции, зависящей от n . Но в состоянии полного равновесия, когда $n = (e^x - 1)^{-1}$, поток равен нулю. При этом $dn/dx = -n(1+n)$. Отсюда следует, что

$$j = g(x) [dn/dx + n(1+n)], \quad (10)$$

где функция $g(x)$ подлежит определению. Подставляя (10) в уравнение (9) и сравнивая с (2), убеждаемся, что $g \sim x^2$, а неизвестная функция $\Delta \sim x \times (4-x)$, что эквивалентно (8). Работность (8) находится в качественном согласии с формулой Вина: энергия кванта увеличивается до тех пор, пока $\hbar\omega < 4kT$.

Введем теперь безразмерное время y по формуле

$$t = (mc^2/kT)(l/c) = y. \quad (11)$$

В этих единицах кинетическое уравнение пишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_c = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right). \quad (12)$$

Если $n \ll 1$, то это уравнение переходит в линейное:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_c = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n\right). \quad (13)$$

Это уравнение и будет решаться. По уравнению (13) легко вычислить время, за которое энергия кванта увеличится вследствие комптон-эффекта в e раз. Умножая обе части (13) на x^3 и интегрируя, получим

$$\frac{d}{dy} \int_0^\infty nx^3 dx = 4 \int_0^\infty nx^3 dx - \int_0^\infty nx^4 dx. \quad (14)$$

Пока $\hbar\omega$ еще мало по сравнению с kT , вторым интегралом в (14) справа можно пренебречь. При этом будет $x = x_{\text{max}} e^{4y}$. Это значит, что время возрастания энергии в e раз равно

$$\tau_c = (mc^2/4kT) l/c. \quad (15)$$

3. Тормозной спектр

Спектр тормозного излучения в общем случае выглядит довольно сложно. Предположим, что выполняются такие условия, когда для определения спектра применимо борновское приближение. Эти условия выполняются в легких элементах при достаточно высокой температуре (от нескольких десятков кило-

вольт и выше). В то же время считается, что выполнено неравенство $kT \ll mc^2$. Рассеяние электронов на электронах с испусканием квантов мы учитывать не будем, так как оно вносит заметный вклад только в самом легком веществе и во всяком случае не превышает тормозного испускания на ядрах, оставаясь всегда меньше него.

В борновском приближении и в нерелятивистском случае тормозное сечение выгладит так [(1), с. 183, (18)]:

$$d\sigma = \frac{3}{8} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \ln \frac{(V\epsilon + \sqrt{V^2 \epsilon^2 - h\omega})^2 d\omega}{h\omega} \frac{1}{\omega} \quad (16)$$

Чтобы перейти отсюда к полному числу квантов с данной частотой ω , испускаемых в единицу времени, сечение надо умножить на $LN(e)v dt$ (L — число ядер в единице объема, v — скорость электрона), проинтегрировать по всем состояниям электрона и отнести к числу состояний кванта данной частоты в единице объема. Так получается выражение

$$\frac{1}{\tau_B^0} = 3 \sqrt{\frac{\pi^3}{8m^2 kT}} \frac{Z^3 L^2 e^6}{h\omega^3} e^{-h\omega/2kT} K_0 \left(\frac{h\omega}{2kT} \right) \equiv B \frac{e^{-x/2} K_0(x/2)}{h\omega^3} \quad (17)$$

Здесь K_0 — функция Макдональда [2, с. 206], τ_B^0 — величина размерности времени, характеризующая тормозное излучение. Если учесть обратное поглощение квантов и их вынужденное испускание, то получится скорость изменения числа квантов вследствие радиационного торможения и свободно-свободного поглощения:

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_B = (1/\tau_B^0) [(1+n) - ne^{h\omega/kT}]. \quad (18)$$

Производная обращается в нуль, если вместо n подставить распределение Планка.

Отвлекаясь от комptonовского процесса и полагая, что в левой части (18) стоит полное изменение dn/dt , мы можем проинтегрировать (18). Если в начальный момент $n(0) = 0$, то получается

$$n = \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1} \left(1 - \exp \left\{ - \frac{t}{\tau_B^0} (e^{h\omega/kT} - 1) \right\} \right). \quad (19)$$

Отсюда следует, что время релаксации теплового равновесия квантов при чисто тормозном механизме равно

$$\tau_B = \tau_B^0 / (e^{h\omega/kT} - 1). \quad (20)$$

Полное кинетическое уравнение, учитывающее комptonовские и тормозные процессы, запишется теперь так:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_C + \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_B = \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{kT}{mc^2} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) + \frac{1}{\tau_B^0} [(1+n) - ne^x]. \quad (21)$$

Переходя снова к безразмерному времени y , получим

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) + \frac{4\tau_C}{\tau_B^0} [(1+n) - ne^x]. \quad (22)$$

Тормозное время τ_B уменьшается с уменьшением частоты примерно как ω^2 , поэтому кванты достаточной малых частот всегда будут приходить в статистическое равновесие в процессах испускания и поглощения. Кванты больших частот будут подхватываться комptonовским процессом и увеличивать свою частоту, приближаясь к виновскому распределению. Не следует думать, что их частота должна расти монотонно: уравнение (12) — второго порядка, диффузионного типа. Приближение квантов к неполному равновесию (по энергии, но не по числу) идет по типу броуновского движения. Граница частоты, при которой комptonовский процесс подхватывает квант быстрее, чем он успевает поглотиться, определена следующей оценкой: $\tau_C/\tau_B \sim 1$. Подставляя в нее τ_C и τ_B , получаем

$$(9\sqrt{\pi}/64\sqrt{2}) LZ^2 m^{1/2} c^3 h^2 e^2 (kT)^{-3/2} e^{-x_0/2} \tau_B^{-3} K_0(x_0/2) (e^{x_0} - 1) \sim 1. \quad (23)$$

Весь рассматриваемый процесс установления равновесия комpton-эффектом представляется интерес только в том случае, если $h\omega_0 \ll kT$, так как только тогда имеется область частот $\omega \gg \omega_0$, в которой комpton-эффект играет существенную роль. При малых x_0 функция K_0 может быть заменена разложением по x_0 [2, с. 96]: $K_0(x_0/2) = \ln(4/\gamma x_0)$, где $\ln \gamma = 0,577$. Таким образом, x_0 определяется по уравнению

$$Ax_0^{-2} \ln(2,35/x_0) \sim 1. \quad (24)$$

Это уравнение имеет смысл только в том случае, если A — малое число.

Сравним теперь отвод энергии от электронов к квантам чисто тормозным и комptonовским механизмом¹.

Полная энергия квантов, испускаемых электронами в единице объема, равна

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_B = \int \frac{1}{\tau_B} h\omega \frac{\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3} = \frac{BkT}{\pi^2 c^3 h} \int_0^\infty dx e^{-x/2} K_0 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{2BkT}{\pi^2 c^3 h} \quad (25)$$

[2, с. 424]. Все кванты, частота которых больше ω_0 , отбирают энергию у электронов комptonовским механизмом, причем в среднем энергия квантов доходит до $3kT$. Поэтому в единицу времени отбирается энергия

$$(dE/dt)_C = 3kT \int_{\omega_0}^\infty \tau_B^{-1} \omega^2 d\omega / \pi^2 c^3. \quad (26)$$

¹ Это сравнение указал нам Л. Д. Ландау.

Основной вклад в интеграл дают малые частоты. Поэтому функцию K_0 под интегралом можно заменить ее приближенным выражением и во избежание расходимости на верхнем пределе интегрировать не до бесконечности, а до $\omega = kT/h$. Отсюда получается

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_C = 3kT \frac{B}{\pi^2 c^3 h} \int_0^{kT/h} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{4kT}{\gamma h \omega} \sim \frac{3}{2} \frac{BkT}{\pi^2 c^3 h} \ln^2 \frac{4kT}{\gamma h \omega_0}. \quad (27)$$

Если не пользоваться приближенным выражением для K_0 , то в формуле (27) будет стоять еще численное слагаемое при логарифме. Именно, вместо $\ln^2(4/\gamma x_0)$ интеграл даст $\ln^2(4/\gamma x) - 0,27$. Но это вряд ли можно считать уточнением, потому что частота ω_0 найдена оценочным способом.

Отношение энергии, передаваемой комптоновским механизмом, к энергии, передаваемой квантам при испускании, равно

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_C : \left(\frac{dE}{dt}\right)_B = \frac{3}{4} \ln^2 \frac{4kT}{\gamma \omega_0}, \quad (28)$$

что может достигать нескольких десятков.

Полагая, что кванты с частотой меньше ω_0 совсем не испытывают комптоновского рассеяния, мы совершаем некоторую ошибку. Можно предположить другой, несколько более точный способ вычисления (dE/dt) . При достаточно малых частотах состояние квантов стационарно и при $x \rightarrow 0$ стремится к $1/x$, т. е. к предельному виду формулы Планка. Поэтому n удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое получается из (22), если отбросить в нем dn/dy . Кроме того, следует отбросить и n по сравнению с n^2 и последовательно считать x малой величиной во втором слагаемом правой части. Это дает²

$$\frac{d}{dx} x^3 \left(\frac{dn}{dx} + n^2 \right) + \frac{4A}{x} (1 - nx) \ln \frac{2,35}{x} = 0. \quad (29)$$

Положим теперь $n = z'/z$, $z = x + \psi$, $\psi \ll x$. Тогда для ψ' получается уравнение

$$\frac{d}{dx} x^3 \psi'' - \frac{4A}{x} \psi' \ln \frac{2,35}{x} = 0. \quad (30)$$

Его можно приближенно проинтегрировать, если считать коэффициент при ψ' большим числом (по методу Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна). С этой точностью

$$\psi' = C \exp \left\{ - \frac{2\sqrt{A}}{x} \sqrt{\ln \frac{2,35}{x}} \right\}. \quad (31)$$

² Далее предполагается, что $\ln(2,35/x) \gg 1$.

Такое решение справедливо, строго говоря, только тогда, когда показатель велик по сравнению с единицей. Но если выбрать $C = -1$, то получится интерполяционная формула для функции распределения, которая обладает нужными свойствами и при $x \gg x_0$:

$$n = \frac{1}{x} \left(1 - \exp \left\{ - \frac{2\sqrt{A}}{x} \sqrt{\ln \frac{2,35}{x}} \right\} \right). \quad (32)$$

При больших x/x_0 число квантов значительно меньше равновесного. Добавляя под интеграл (27) множитель $(1 - nx)$, учитывая вынужденное испускание и поглощение квантов, получаем сходящееся выражение, которое можно интегрировать от $\omega = 0$:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_C = 3kT \frac{B}{\pi^2 c^3 h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} \omega^2 d\omega \cdot \exp \left\{ - \frac{2kT\sqrt{A}}{h\omega} \sqrt{\ln \frac{2,35kT}{h\omega}} \right\}. \quad (33)$$

Подынтегральная функция равна нулю при достаточно малых ω . Эффективная граница интегрирования лежит примерно при $\omega \sim \omega_0$.

4. Общие формулы для средней частоты при комптоновском процессе

Если фотонный газ еще далек от статистического равновесия с электронами, то число фотонов с частотой $\omega \gg \omega_0$ мало по сравнению с единицей. В этой стадии процесса для квантов с частотой $\omega \gg \omega_0$ можно написать следующее линейризованное кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) = 4\tau c / v_B. \quad (34)$$

Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение. Для этого введем новую неизвестную функцию по формуле

$$n = e^{-x/2} \varphi(x)/x. \quad (35)$$

φ удовлетворяет уравнению (мы рассматриваем однородное уравнение)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} x \varphi + \left(- \frac{x}{2} + 2 - \frac{2}{x} \right) x \varphi \equiv \hat{A}(x) \varphi. \quad (36)$$

Здесь $\hat{A}(x)$ — оператор в правой части. Некоторые упрощения расчетов возникают благодаря тому, что $\hat{A}(x)$ — эрмитовский оператор³.

³ Мы ввели оператор $\hat{A}(x)$ и нашли его спектр, пользуясь указаниями И. М. Гельфанда.

Допустим, что начальное распределение фотонов задано в виде некоторой функции $n_0(x)$; тогда распределение в любой более поздний момент символически записывается так:

$$\varphi(x, y) = e^{\hat{A}(x)y} x e^{x/2} n_0(x); \quad n = \frac{e^{-x/2}}{x} e^{\hat{A}(x)y} x e^{x/2} n_0(x). \quad (37)$$

Допустим, что в начальный момент испустился квант с частотой ω_1 . Тогда $n_0(x) = \delta(x-x_1)/x_1^2$. Вычислим в безразмерном виде среднюю частоту, которую будет иметь этот квант через некоторое время в результате комптоновского процесса:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^{\infty} x n x^2 dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x/2} e^{\hat{A}(x)y} x^{1/2} \delta(x-x_1) \frac{dx}{x_1^2} = \\ &= \int_0^{\infty} e^{x/2} \frac{\delta(x-x_1)}{x_1} e^{\hat{A}y} x^2 e^{-x/2} dx = \frac{1}{x_1} e^{-x_1/2} e^{\hat{A}(x_1)y} x_1^2 e^{-x_1/2} = \frac{1}{x_1} e^{x_1/2} \chi(x_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция от эрмитовского оператора есть тоже эрмитовский оператор. В формулу (38) входит функция $\chi(x_1)$, которая, очевидно, удовлетворяет относительно x_1 такому же уравнению (36), как $\varphi(x)$ относительно x . В отличие от φ функция χ подчинена другому начальному условию:

$$\chi(y=0) = x_1^2 e^{-x_1/2}. \quad (39)$$

В дальнейшем индекс 1 при x_1 будет опускаться, потому что «текущая частота» x нам больше не встретится.

Итак, чтобы найти среднюю частоту кванта, испущенного с начальной частотой x , надо решить уравнение (36) с начальным условием (39). Для этого надо сначала определить спектр эрмитовского оператора $\hat{A}(x)$. Положим

$$z = \ln x, \quad \chi = e^{-z/2} f_{\mu}(z) e^{-(\mu^2 - 1/4)z}. \quad (40)$$

Функция $f_{\mu}(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению такого же вида, как уравнение Шредингера для колебательных уровней двухатомной молекулы, если потенциальная функция ядер взята в форме, предложенной Морзе:

$$-d^2 f_{\mu} / dz^2 + (-2e^z + 1/4 e^{2z}) f_{\mu} = \mu^2 f_{\mu}. \quad (41)$$

Уравнение (41) интегрируется при помощи вырожденных гипергеометрических функций, которые мы выразим через перенную x :

$$\chi = C x^{-1} W_{2, \mu}(x) \quad (42)$$

[3, гл. 16]. Здесь $W_{2, \mu}(x)$ есть функция Уиттекера, которая представляет собой комбинацию двух обычных вырожденных гипер-

геометрических функций:

$$W_{2, \mu}(x) = \frac{\Gamma(-2i\mu)}{\Gamma(-3/2 - i\mu)} M_{2, i\mu}(x) + \frac{\Gamma(2i\mu)}{\Gamma(-3/2 + i\mu)} M_{2, -i\mu}(x). \quad (43)$$

Здесь $M_{2, i\mu}(x)$ определяется известным рядом

$$M_{2, i\mu}(x) = x^{1/2+i\mu} e^{-x/2} \left(1 + \frac{(-3/2 + i\mu)x}{1(2i\mu + 1)} + \frac{(-3/2 + i\mu)(-1/2 + i\mu)x^2}{2!(2i\mu + 1)(2i\mu + 2)} \right). \quad (44)$$

Функция W убывает на бесконечности как e^{-x} , тогда как M этим свойством не обладает. Поэтому χ и выражено через W .

Найдем теперь функции дискретного спектра, аналогичные колебательным состояниям двухатомной молекулы (функции непрерывного спектра отвечают диссоциированной молекуле). Дискретный спектр возможен при отрицательных μ^2 [см. (41)] или при чисто мнимых μ . Соответствующие собственные функции должны обладать интегрируемым квадратом. Согласно формулам (42) — (44) функция W при малых x и чисто мнимых μ состоит из двух слагаемых вида $x^{-3/2+i|\mu|}$. Но при верхнем знаке квадрат функции не интегрируем. Следовательно, собственными значениями являются такие числа, при которых W состоит только из функции с интегрируемым квадратом. Эти числа суть $|\mu| = 3/2$ и $|\mu| = 1/2$, так как обращают в нуль первое слагаемое формулы (43) ($\Gamma(-2) = \infty$, $\Gamma(-3) = \infty$).

Ряды для функций $M_{2, 1/2}(x)$ и $M_{2, 3/2}(x)$ обрываются. Так получают элементарные функции, которые мы пишем сразу с нормировочными коэффициентами

$$\chi_{1/2}(x) = \sqrt{2} (1 - x/2) e^{-x/2}, \quad \chi_{3/2}(x) = 2^{-1/2} x e^{-x/2}. \quad (45)$$

Функции непрерывного спектра нормируются путем перехода к своему асимптотическому разложению совершенно аналогично тому, как это делается в задаче об атоме водорода. Разложения относятся не к большому, а к малому x , потому что при больших x функция W экспоненциально убывает. Из уравнения (41) видно, что при $z \rightarrow -\infty$, т. е. при малых x , функция f_{μ} пропорциональна $\cos(\mu z + \lambda)$. Нормировочный множитель косинуса есть $\sqrt{2/\pi}$. Выраяя W через $\cos(\mu z + \beta) = \cos(\mu \ln x + \lambda)$, получаем нормированные функции непрерывного спектра

$$\chi_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\Gamma(-3/2 + i\mu)}{\Gamma(2i\mu)} \right| \frac{W_{2, i\mu}(x)}{x}. \quad (46)$$

Теперь легко написать общую формулу для \bar{x} (x в правой части равенства задает начальную частоту кванта, ранее названную x_1):

$$\bar{x} = \frac{1}{x} e^{x/2} \left[e^{-y\mu/4} \int_0^{\infty} e^{-\mu^2 y^2} \zeta_{\mu} d\mu + e^{-2y\zeta_{1/2}} \zeta_{1/2} + \zeta_{3/2} \chi_{3/2} \right], \quad (47)$$

где ζ_μ , $\zeta_{1/2}$ и $\zeta_{3/2}$ — коэффициенты разложения функции $x^2 e^{-x/2}$ [см. (38)] по ортогональной системе функций χ_μ , $\zeta_{1/2}$ и $\zeta_{3/2}$ на- ходятся элементарно. Для определения ζ_μ воспользуемся инте- гральным представлением функции $W_{2,\mu}(x)$ [3, с. 148]:

$$W_{2,\mu}(x) = \frac{x^2 e^{-x/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(-\sigma - i\mu - 3/2) \Gamma(-\sigma + i\mu - 3/2) x^\sigma}{\Gamma(-i\mu - 3/2) \Gamma(i\mu - 3/2)} d\sigma.$$

Отсюда при помощи (46) находим

$$\begin{aligned} \zeta_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\Gamma(-3/2 + i\mu)}{\Gamma(2i\mu)} \right| \times \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\sigma + 4) \Gamma(-\sigma - i\mu - 3/2) \Gamma(-\sigma + i\mu - 3/2)}{\Gamma(-i\mu - 3/2) \Gamma(i\mu - 3/2)} d\sigma = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\Gamma(-3/2 + i\mu)}{\Gamma(2i\mu)} \right| \Gamma(5/2 + i\mu) \Gamma(5/2 - i\mu), \end{aligned}$$

где комплексный интеграл взят по формуле Бёрнса [3, с. 74]. Подставляя это в (47), пользуясь формулой $\Gamma(u) \Gamma(1-u) = \pi \operatorname{csc} \pi u$ и тем, что $W_{2,\mu}(x)$ есть четкая функция от μ , полу- чаем выражение x в виде комплексного интеграла:

$$\bar{x} = \frac{i}{x^2} e^{-x/2} e^{-9y/4} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s^2 y} W_{2,-s}(x) \operatorname{tg} \pi s \cdot s \, ds - 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-2y} + 3. \quad (48)$$

Отсюда видно, что в результате комптоновского процесса сред- няя частота любого кванта стремится к $3kT/h$ независимо от его начальной частоты. Применение формулы (48) будет дано в приложении.

В заключение выражаю искреннюю признательность Я. Б. Зельдовичу, поставившему настоящую задачу и прояв- ляющему к ней постоянный интерес, а также Л. Д. Ландау и И. М. Гельфанду, сделавшим ряд важных указаний. Многие результаты раздела 3 были получены при участии ныне покой- ного С. П. Дьякова.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОМПТОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС В ТЕЛЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Можно вычислить среднюю частоту, которую приобретает вследствие комптоновского процесса квант в теле конечных раз- меров. Так как томсоновское сечение не зависит от энергии, ко- эффициент диффузии кванта постоянен. При этом вероятность

вылета кванта в момент времени y зависит от времени экспло- нентциально, если только начальное распределение отвечает ка- кой-нибудь из собственных функций диффузионной задачи. Естественно принять распределение, отвечающее основному соб- ственному значению, так как только она из всех функций зна- копостоянна. В безразмерных единицах вероятность вылета кванта из системы записывается так:

$$dw(y) = \beta e^{-\beta y} dy. \quad (I)$$

Средняя частота вылетающего кванта при этом уже меньше $3kT/h$. Она определяется, если помножить (I) на x и проинте- грировать по y :

$$\bar{x} = \int x dw(y) = \frac{i\beta e^{x/2}}{x^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{tg} \pi s W_{2,-s}(x) \frac{s \, ds}{\nu/4 + \beta - s^2} - \frac{2\beta(1/x - 1/2)}{\beta + 2} + 3. \quad (II)$$

Энергия, отбираемая квантами от электронов в этих усло- виях, равна интегралу по (II), взятому по тормозному спектру. Введем обозначение

$$H(x_0, s) = \int_{x_0}^{\infty} M_{2,-s}(x) K_0 \left(\frac{x}{2} \right) \frac{dx}{x^3}. \quad (III)$$

С этим обозначением получим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int \bar{x} e^{-x/2} K_0 \left(\frac{x}{2} \right) \frac{dx}{x} = i\beta \int_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{tg} \pi s \left\{ \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(-3/2 + s)} H(x_0, s) + \right. \\ &+ \left. \frac{\Gamma(-2s)}{\Gamma(-3/2 + s)} H(x_0, -s) \right\} \frac{s \, ds}{\beta + \nu/4 - s^2} - \\ &- 2\beta \int_{x_0}^{\infty} \frac{(1/x - 1/2)}{\beta + 2} e^{-x/2} K_0 \left(\frac{x}{2} \right) \frac{dx}{x} + 3 \int_{x_0}^{\infty} e^{-x/2} K_0 \left(\frac{x}{2} \right) \frac{dx}{x}. \quad (IV) \end{aligned}$$

Комплексный интеграл от первого слагаемого дополняется ин- тегралом по бесконечному полуокругу в левой полуплоскости. Тогда весь интеграл выражается в виде суммы вычетов поды- тегрального выражения, расположенных левее мнимой оси. Эти полюсы расположены в точках $s = -1/2, -3/2, -5/2$ и, кроме того, в точке $s = \sqrt{\beta + 9/4}$. Вычеты в первых двух точках сокра- щаются с двумя последними интегралами в формуле (IV). Вы- четы в точках $s = -5/2, -7/2, -9/2$ остаются конечными и при $x_0 = 0$, поэтому в них можно заменить x_0 на 0. Все эти вычеты дают только небольшую добавку к интегралу. Главный вклад получается от вычета при $s = -\sqrt{\beta + 9/4}$ (если тело имеет не слишком малые размеры, то ν — малое число). Для

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА НА АВТОЭЛЕКТРОННУЮ ЭМИССИЮ *

(Представлено академиком В. Н. Кондратьевым 18.VI 1959)

1. В настоящее время в опытах по автоэлектронной эмиссии достигаются плотности тока порядка 10^7 а/см². При таких плотностях тока поле объемного заряда начинает становиться сравнимым с полем, рассчитанным по полной разности потенциалов и геометрии прибора. Иначе говоря, истинное поле на поверхности катода уменьшается, и ток при данной разности потенциалов оказывается меньше, чем это следует из формул, не учитывающих влияния объемного заряда. При плоских электродах влияние объемного заряда было найдено в работе [1]. Полное там уравнение в безразмерных переменных можно записать в виде

$$3\alpha^2 - 1,33\alpha v^{3/2} + (v-1) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = 2\pi(2md)^{1/2}e^{-1/2} \mathcal{E}^{-1/2} j$, $v = V(\mathcal{E}d)^{-1}$, где \mathcal{E} — поле на катоде, d — расстояние между электродами, V — полная разность потенциалов, j — плотность тока. В свою очередь j и \mathcal{E} связаны уравнением автоэлектронной эмиссии. Вычисления удобно проводить, задавшись некоторым значением \mathcal{E} , из него находить α и затем уже v . Тогда определится, во сколько раз надо увеличить разность потенциалов между электродами по сравнению с теорией, не принимающей в расчет объемного заряда, чтобы получить данное значение тока.

Фактически геометрия прибора гораздо ближе к сферической, чем к плоской. Точное решение задачи о сферическом диоде было получено В. Л. Каном [2] и обобщено Р. П. Поллавым [3] для того случая, когда поле не равно нулю на катоде. Мы покажем, что сферичность очень сильно сказывается на величине разности потенциалов, необходимой для получения данного тока.

Решение Кана и Поллава можно представить в параметрической форме следующим образом:

$$\frac{R}{r} = x^{1/2} y^{1/2} [I_{1/2}(y) K_{-1/2}(x) + K_{1/2}(y) I_{-1/2}(x)]^2; \quad (2)$$

$$\frac{V}{(k'J)^{1/2}} = y^{1/2} \left[\frac{I_{-1/2}(y) K_{-1/2}(x) - K_{-1/2}(y) I_{-1/2}(x)}{I_{1/2}(y) K_{-1/2}(x) + K_{1/2}(y) I_{-1/2}(x)} \right]^2; \quad (3)$$

$$(\mathcal{E}r)^{1/2} = k'Jx. \quad (4)$$

Здесь R — радиус анода; r — радиус катода; $J = 4\pi^2 j$, т. е. полный ток; $k' = 3m^{1/2}(2e)^{-1/2} = 2,88 \cdot 10^{-6}$. Из дальнейших вычислений

* ДАН СССР, 1959, 128, вып. 6, 1169.

≡ x получается выражение

$$\begin{aligned} x = & -2\pi\beta \operatorname{tg} \pi \sqrt{\beta + 9/4} \frac{\Gamma(-2\sqrt{\beta + 9/4})}{\Gamma(-9/2 - \sqrt{\beta + 9/4})} H(x_0) - \sqrt{\beta + 9/4} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-)^k (k+2)!}{(2k+1)!} \frac{\beta}{\beta + 9/4 - (2k+1)^2/4} H\left(0, -\frac{2k+1}{2}\right). \quad (V) \end{aligned}$$

Величины $H(0, -(2k+1)/2)$ разлагаются в сходящиеся числовые ряды $H(0, -5/2) = 2,27$, $H(0, -7/2) = 2,31$, остальные выражения такого же рода умножаются на малые коэффициенты. Величину $H(x_0, -\sqrt{\beta + 9/4})$ представим в виде разности двух интегралов:

$$\begin{aligned} H(x_0, -\sqrt{\beta + 9/4}) = & \int_0^{\infty} M_{2, -(1/2+n)}(x) K_0\left(\frac{x}{2}\right) \frac{dx}{x^3} - \\ & - \int_0^{x_0} M_{2, -(1/2+n)}(x) K_0\left(\frac{x}{2}\right) \frac{dx}{x^3}. \quad (VI) \end{aligned}$$

Первый интеграл [назовем его $F(u)$] вычисляется путем разложения M в степенной ряд. Числовые значения $F(u)$ следующие:

$u = 0,01$	0,03	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1,0
$F(u) = 10080$	1137	107	28,8	13,7	8,2	5,7	3,3	2,2

Во втором интеграле в (VI) надо взять выражения M и K_0 при малых x . Это дает

$$\int_0^{x_0} x^{u-1} \ln\left(\frac{xy}{4}\right) dx = \frac{x_0^u}{u} \left(-\ln \frac{4}{yu} - \frac{1}{u} \right).$$

При стремлении u к нулю получаются уже известные нам результаты для неограниченной среды.

Л и т е р а т у р а

1. В. Гайлер. Квантовая теория излучения. М.—Л., ГТТИ, 1940.
2. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций М., ИЛ, 1949.
3. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2. М.—Л., ГТТИ, 1934.

следует, что $y \gg x$, причем $x \gg 20$. Поэтому можно перейти к асимптотическому представлению бесселевых функций*:

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} \right)^{1/2} e^{2(\psi-x)}; \quad (5)$$

$$V = (k' J y)^{1/2}. \quad (6)$$

Покажем теперь на типичном примере, насколько результаты расчета для сферического диода по уравнениям (4) — (6) отличаются от результатов, получаемых из (1). Удобно исходить из некоторого значения поля \mathcal{E} на катоде, которое мы положим равным 10^8 в/см $= 3,33 \cdot 10^8$ CGSE. Работа выхода пусть будет равна $\omega = 4,6$ эв. Плотность тока определяем по известной формуле [4]:

$$j = \frac{e^3 \mathcal{E}^2}{16\pi^2 \hbar \omega} \exp \left[-\frac{2}{3} \frac{(2m\omega)^{3/2}}{e\hbar \mathcal{E}} \right], \quad (7)$$

что дает $j = 1,29 \cdot 10^{10}$ CGSE. Полагая $r = 2\mu = 2 \cdot 10^{-4}$ см, находим $k' J = 18,7$, откуда из (4) получается $x = 29,3$. Беря $R = 5$ см, определяем из (5) $y = 35$. Следовательно, из (6) находим $V = 75,4$ CGSE. Без учета объема заряда получилось бы $V = 66,7$ CGSE, так что объемный заряд увеличивает разность потенциалов на 13%.

Совсем иной результат получается для плоского диода (1). Если принять $d = R$, то $\alpha = 1,83$, а $v = 2,88$. Это соответствует увеличению потенциала почти в 3 раза. Полагая $d = r$, получим $v = 1,017$, так что по формулам для плоского диода нельзя определить эффективное расстояние между электродами, которое давало бы такое же возрастание потенциала, как при сферической геометрии.

2. При больших плотностях тока обычно рекомендуется ввести в формулу (7) поправку на силу изображения. Эта поправка вызывает некоторые сомнения. Действительно, задача об автоэлектронной эмиссии сводится к совместному решению уравнений Шредингера и Пуассона: $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + (e\phi - \epsilon) \psi = 0$, $\Delta \phi = -4\pi \rho$, где ρ — плотность заряда. Сила изображения получается, если подставить вместо ρ выражение $e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ (\mathbf{r}' — радиус-вектор заряда). Но эта подстановка противоречит квантовой механике — следует взять $\rho = e|\psi|^2$. Поэтому задача сводится к совместному решению уравнений Шредингера и Пуассона, а классическая сила изображения в потенциал ϕ войти не может.

Фактически барьер не является, конечно, прямоугольным. Он как-то скруглен на расстоянии порядка размеров атомного слоя.

* Асимптотическое решение почти такого же вида было найдено Н. Б. Айзенбергом [6].

Эффективный прямоугольный барьер подбирается из условия равенства площадей. Поэтому поправка от непрямоугольности барьера второго порядка малости по величине полной прозрачности [т. е. экспоненты (7)]. Всякая поправка, имеющая реальный смысл, должна быть больше. Однако оказывается, что влияние подбарьерного объемного заряда, по крайней мере в буквенном выражении, удовлетворяет этому требованию, так как содержит дополнительное квадрат логарифма большого числа.

Подробности вычислений по методу самосогласованного поля мы здесь не приводим, приведем только результаты. Обозначим величину показателя экспоненты в (7) через \mathcal{K} и определим величину

$$B \equiv \frac{9}{\pi} \frac{e^2}{\hbar} \frac{m^{1/2}}{(2\omega)^{1/2}} \mathcal{K}^2. \quad (8)$$

Она имеет порядок 200—300. Далее, введем функцию

$$f(B) \equiv \left[B \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{\xi^2 e^{\xi} + B} - \left(B \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 e^{\xi} + B} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Тогда проницаемость барьера с учетом объемного заряда равна

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \left(1 + \frac{f(B)}{2\mathcal{K}^2} \right). \quad (10)$$

Если задать величину ξ_0 равенством

$$\xi_0^2 e^{\xi_0} = B, \quad (11)$$

то $f(B)$ при большом B приближенно равна $-\xi_0^2/2$.

В рассмотренном примере $B = 217$, $\xi_0 = 3,11$, так что поправка составляет 0,054. Следовательно, чтобы получить ток той же силы, что по формуле (7), надо взять на 5,4% меньше поле и на 8,1% меньшей x . Соответственно y тоже уменьшится на 2,37, т. е. станет равным 32,63 вместо 35,0. Это дает $V = 71$, или всего на 6,5% больше, чем следует из теории, не учитывающей никаких поправок на объемный заряд.

Л и т е р а т у р а

1. J. P. Barbour, W. W. Dolan et al. Phys. Rev., 1953, 92, 45.
2. В. Л. Кан, ЖТФ, 1948, 18, 483.
3. Р. П. Поллаковский, ЖТФ, 1950, 20, 149.
4. Г. А. Бете, А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, М.—Л., ОНТИ, 1938.
5. М. И. Елинсон, Г. Ф. Васильев, Автоэлектронная эмиссия, М., Физматгиз, 1958.
6. Н. Б. Айзенберг, ЖТФ, 1954, 24, 2079.

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ПРИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ *

Совместно с Я. Б. Зельдовичем

Введение

Классическая теория распространения тепла в среде с постоянной теплоемкостью и постоянной теплопроводностью может считаться наиболее изученной и даже практически законченной областью математической физики.

В настоящее время на очереди стоят нелинейные задачи распространения тепла. Один класс таких задач возникает, когда в уравнении распространения тепла рассматриваются источники тепла (химическая реакция), мощность которых зависит от температуры. С такими задачами мы встречаемся в теории распространения пламени и в теории звезд.

В обоих случаях наряду с влиянием температуры на скорость выделения тепла имеет место также существенная, как правило, степенная зависимость теплопроводности и теплоемкости от температуры.

До последнего времени в теории горения и в теории звезд решались задачи, в которых температура зависит только от одной переменной, что позволяет переходить к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Сюда относятся прежде всего стационарные задачи (температура зависит только от координат, но не от времени) и задача о простом распространении пламени с постоянной скоростью в системе координат, в которой вещество движется навстречу покоящемуся пламени.

В настоящей заметке мы исследуем решения нелинейного уравнения в частных производных для случая, когда в начальный момент в точке (в бесконечно малом объеме) сосредоточено конечное количество тепла; очевидно, что температура в этом случае зависит и от координат, и от времени. Аналогичное решение можно дать и для точечного источника, в котором тепло выделяется с постоянной скоростью начиная с некоторого момента времени. Поставленную задачу мы решим для инертной среды (без выделения тепла) для степенной зависимости коэффициента теплопроводности и теплоемкости от температуры, полагая начальную температуру среды равной нулю.

В линейном случае, т. е. при постоянной теплопроводности,

решением является хорошо известный «интеграл изолированного источника»

$$T \sim \frac{1}{(2\pi\chi t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\chi t}}. \quad (1)$$

Это решение может быть, например, получено разложением начального распределения тепла (дельта-функция) в ряд по плоским волнам и их сложением в произвольный момент времени. В свою очередь с помощью (1) легко построить решение задачи о распространении произвольного начального распределения температуры в неограниченном пространстве.

В нелинейном случае частное решение не может быть использовано для построения общего решения при произвольном начальном распределении температуры. Искомое частное решение удается получить только с помощью понятия об автомодельности (самоподобии).

Исследование решения представляет интерес как в связи с общей методикой получения автомодельных решений, так и в связи с особым поведением решения вблизи $T=0$.

В линейной теории теплопроводности полностью отсутствует понятие области влияния; температура лишь асимптотически стремится к нулю на бесконечном расстоянии от источника. В нелинейной теории, если в начальном состоянии среды теплопроводность равна нулю (или если теплоемкость бесконечна), то в каждый данный момент тепловое возмущение охватывает только определенный, конечный объем. Мы особо рассмотрим закон изменения температуры вблизи границы области, куда уже распространилось тепловое возмущение, и вблизи границы невозмущенной области.

1. Основное уравнение

Общее уравнение теплопроводности имеет вид

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \chi \operatorname{grad} T.$$

Если теплоемкость постоянна, а теплопроводность пропорциональна T^n , запишем его так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} a T^n \operatorname{grad} T, \quad \chi = \frac{k}{c} = a T^n. \quad (2)$$

Если теплоемкость тоже переменна, введем новую переменную

$$T', \text{ однозначно связанную с } T \text{ по формуле } T' = \int_0^T c dT,$$

$$dT' = c dT \quad (3)$$

и выразим $k(T)$ и $c(T)$ через новую переменную T' : если $c \sim T^m$,

* Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.

$k \sim T^n$, то $T' \sim T^{m+1}$, $\kappa \sim T^{m+1}$; и получим таким образом уравнение типа (2) для новой переменной T' . В дальнейшем рассмотрим плоскую и сферически симметричную задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} T^n \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 T^n \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (4b)$$

Соответственно закон сохранения энергии имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T dx = E = \text{const}, \quad (5a)$$

$$\int_0^r T r^2 dr = E = \text{const}. \quad (5b)$$

2. Поведение температуры вблизи границы возмущения

Рассмотрим предельный вид решения при T , близком к нулю. Предположим, что существует граница возмущенной области, которая перемещается в пространстве с определенной скоростью v . Обозначив z — расстояние от этой границы, получим вместо (2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \frac{dT}{dz} = \frac{d}{dz} a T^n \frac{dT}{dz}. \quad (6)$$

Легко найдем первый интеграл (константу определяем из условия, что в невозмущенной области $T=0$):

$$-vT = aT^n \frac{dT}{dz} \quad (7)$$

и далее

$$T = \left(-nz \frac{v}{a} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (8)$$

Напомним, что в случае постоянной теплопроводности известное решение вида $T = \text{const } e^{-uz/a}$ и температура обращается в нуль только экспоненциально, асимптотически при $z \rightarrow \infty$; при теплопроводности, растущей с понижением температуры как $T^{-\nu}$, мы получили бы еще более медленное спадание температуры, степенное (как $z^{-1/\nu}$), а не экспоненциальное.

3. Автоподобное решение

Будем искать частные решения (4) и (5) вида

$$T = At^{-k} f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{Bt^m} \quad \text{или} \quad \xi = \frac{r}{Bt^m}, \quad (9)$$

где ξ — безразмерная переменная, $f(\xi)$ — безразмерная функция, которая может зависеть от числа измерений пространства и от показателя степени n в законе теплопроводности; f не должно зависеть ни от t (помимо ξ), ни от размерной константы a в законе теплопроводности. Эти условия дают два уравнения: одно, связывающее m и k с n , и другое, связывающее A и B с n . Чтобы получить эти уравнения, подставим (9) в уравнение (4) или (5). Опуская для простоты все безразмерные функции и переменные, заменим дифференцирование делением. Получим

$$\frac{T}{t} \sim \frac{aT^{n+1}}{x^2}; \quad T \sim At^{-k}, \quad x \sim Bt^m, \quad (10)$$

$$\frac{aA^n t^{-nk} t}{B^2 t^{2m}} = 1; \quad aA^n B^{-2} = 1; \quad t^{1-kn-2m} = 1; \quad 2m + kn = 1. \quad (11)$$

Если условия (11) выполнены, получим для f уравнения

$$kf' + m\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} f^n \frac{df}{d\xi} = 0, \quad (12a)$$

$$kf' + m\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 f^n \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (12b)$$

соответственно в плоском и сферическом случаях.

При данном n (т. е. при данном законе теплопроводности) мы можем получить различные уравнения, а следовательно, и различные решения, произвольно выбирая одну из двух величин m или k , связанных между собою уравнением (11).

Недостающая связь между m и k легко может быть получена из интеграла энергии (9), подставляя в (5a, б) выражение для температуры (9), получим при учете (11):

$$2At^{-k} Bt^m \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi = E; \quad AB = E \int_{-\infty}^{\infty} f d\xi; \quad m = k = \frac{1}{2+n}; \quad (13a)$$

сферический случай

$$At^{-k} B^2 t^{2m} \int_0^{\infty} f^2 d\xi = E; \quad AB^2 = E \int_0^{\infty} f^2 d\xi; \quad 3m = k = \frac{3}{2+n}. \quad (13b)$$

Так как (11) устанавливает только одну связь между A и B , то (13а, б) не фиксирует никакого определенного значения $\int_0^{\infty} f d\xi$

или $\int_0^{\infty} \xi^2 d\xi$. Обозначая $\int_0^{\infty} f d\xi = J_1$, $\int_0^{\infty} \xi^2 d\xi = J_2$, найдем

$$B = a^{\frac{1}{2+n}} \left(\frac{E}{J_1} \right)^{\frac{n}{2+n}}, \quad A = (E^2/aJ_1^2)^{\frac{1}{2+n}}, \quad (14a)$$

$$B = a^{\frac{1}{2+3n}} \left(\frac{E}{J_2} \right)^{\frac{n}{2+3n}}, \quad A = (E^2/a^3J_2^2)^{\frac{2}{2+3n}}. \quad (14b)$$

Из уравнений (13а, б) легко получить равенства $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$

и $r^2 \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$ соответственно для плоского и сферического случаев. Эти равенства выражают условие отсутствия постоянно действующего источника тепла в начале координат в согласии с законом сохранения энергии. (Условие отсутствия объемных источников тепла обеспечивается однородностью исходных уравнений). Чтобы доказать сделанное нами утверждение, умножим (12а) на $d\xi$ и (12б) на $\xi^2 d\xi$ и проинтегрируем их от 0 до ∞ . Тогда получим в плоском случае

$$k \int_0^{\infty} f d\xi + m \int_0^{\infty} \xi \frac{df}{d\xi} d\xi + f^n \frac{df}{d\xi} \Big|_0^{\infty} = (k-m) \int_0^{\infty} f d\xi + m \xi f \Big|_0^{\infty} + f^n \frac{df}{d\xi} \Big|_0^{\infty},$$

$$\left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0. \quad (15a)$$

откуда следует, что при $k=m$, действительно,

В сферическом случае имеем

$$k \int_0^{\infty} \xi^2 d\xi + m \int_0^{\infty} \xi^3 \frac{df}{d\xi} d\xi + \xi^2 f^n \frac{df}{d\xi} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= (k-3m) \int_0^{\infty} \xi^2 d\xi + m \xi^3 f \Big|_0^{\infty} + f^n \xi^2 \frac{df}{d\xi} \Big|_0^{\infty}.$$

Тогда при $3m=k$ выполняется поставленное условие

$$\left(\xi^2 \frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0. \quad (15b)$$

4. Определение констант в автономном решении

Общее решение дифференциальных уравнений (12а, б) состоит в общем случае из двух произвольных констант. Напишем его в виде

$$f = \varphi(\xi, C_1, C_2). \quad (16)$$

Решение должно удовлетворять двум граничным условиям:

$$x = \infty, \quad T = 0; \quad x = -\infty, \quad T = 0 \quad (17a)$$

или

$$r = \infty, \quad T = 0; \quad r = 0, \quad r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (17b)$$

В плоском случае по симметрии можно рассматривать только $x > 0$ и заменить второе условие (при $x = -\infty$) на условие $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ при $x = 0$. Мы уже говорили, что условия для производных в начале координат выражают отсутствие источника тепла в задаче о распространении заданного, постоянного количества тепла.

Мы показали, что условия в нуле у автономного решения выполняются при соответствующем выборе показателей m и k . Это связано с тем, что одна из постоянных интегрирования, скажем C_1 , входит в уравнение особым образом. Легко убедиться, что уравнения (12а, б) имеют группу преобразований, оставляющих эти уравнения инвариантными, а именно (штрихами отмечены преобразованные переменные):

$$\xi' = c^n \xi; \quad f' = c^2 f. \quad (18)$$

Следовательно, если мы имеем какое-либо решение $f = \varphi(\xi)$, то и $f' = c^2 \varphi(c^n \xi)$ также является решением. Этим устанавливается способ нахождения констант C_1 . Вместо (16) напишем

$$f = C_1^{-2} \varphi(C_1^n \xi, C_2). \quad (19)$$

Подставляя (19) в граничные условия (17), мы убедимся в том, что C_1 выпадает из получившихся уравнений. Выполнение граничного условия в нуле обеспечено надлежащим выбором показателей; можно сказать, что показатель m выделяется как собственное значение из граничных условий, наложенных на решение дифференциального уравнения.

В другой тепловой задаче — о распространении пламени — мы раньше встретились с аналогичным положением, когда из граничных условий на бесконечности удалось определить собственное значение параметра, входящего в уравнение, а именно скорости распространения пламени v ; в этом случае уравнение имело простейшую группу преобразований — группу переносов по оси x , благодаря тому что переменная x входила только под знаком дифференциала. Поэтому одна из констант (C_1) входит

ла в выражение температуры так: $T = T(x + C_1, C_2, v)$ и не влияла поэтому на выполнение граничных условий на ∞ .

Вернемся к автономному решению уравнений нелинейной теплопроводности. Как отмечалось выше, только при $n=0$, в линейном случае, T асимптотически стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$; при $n > 0$ существует определенная граница возмущения в каждый данный момент t , так что $T \equiv 0$ при $x > x_0(t)$ или $r > r_0(t)$. В автономном решении очевидно, что это условие перешагивается так:

$$f \equiv 0 \text{ при } \xi > \xi_0; \quad x_0(t) = \xi_0 B t^n. \quad (20)$$

Скорость границы возмущения v , определяемая равенством

$$v = \frac{dx_0}{dt} = n \xi_0 B t^{n-1}, \quad (21)$$

непостоянна. Однако вблизи границы возмущения, в пределе, при малых $x_0 - x$ уравнение (6) оказывается справедливым и при переменной скорости v и аналогично в сферическом случае при $r_0 - r \ll r_0$.

Поэтому решение вблизи края найдем, подставляя (21) в (8). Получим

$$T = [n \xi_0 B t^{m-1} (x_0 - x) a^{-1}]^{1/n} \quad (22)$$

и после перехода к безразмерным переменным, используя (11), будем иметь

$$f(\xi) = [n m \xi_0 (\xi_0 - \xi)]^{1/n}, \quad \xi_0 - \xi \ll \xi_0. \quad (23)$$

Его можно получить и непосредственно из уравнений (12а, б).

Таким образом, (23) вблизи $\xi = \xi_0$ дает начало кривой $f(\xi)$. Весь дальнейший ход решения уравнения тем самым уже полностью определен. Постоянная C_2 при этом определится еще уравнением (7) из условия смыкания при $\xi = \xi_0$ с тривиальным решением $T = 0$.

Из предельного вида решения (23) мы заключаем, что постоянную C_1 можно выбрать равной ξ_0 . Поэтому, пользуясь тем, что уравнение допускает группу (18), решение можно записать так:

$$f(\xi) = \xi_0^{2/n} \Psi \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right). \quad (24)$$

Следовательно, все решения вида (24), отвечающие различным ξ_0 , получаютс я финным преобразованием (изменением масштабов ξ и f) из одного решения, например из такого, в котором положено $\xi_0 = 1$. Благодаря тому что в области отрицательного решения $\xi < \xi_0$, такое стандартное решение описывает процесс распространения тепла при заданных нами начальных и граничных условиях все время. Оно автоматически при-

ходит в точку $\xi = 0$ с правильным значением производной благодаря надлежащему выбору показателей.

Благодаря паличию группы можно получить из одного решения $f(\xi)$ целый набор различных решений (19); при этом меняются также интегралы $J_1 \sim C_1^{-(2+n)}$ в плоском случае и $J_3 \sim C_1^{-(2+3n)}$ в сферическом случае. Согласно (14а, б) при этом меняются A и B , но как раз таким образом, что решение в переменных x и t никак не зависит от C_1 , а определяется только заданными величинами n, a, E .

5. Понижение порядка и исследование уравнения

Согласно известной теореме Ли, порядок обыкновенного дифференциального уравнения, допускающего однопараметрическую группу преобразований, т. е. инвариантного по отношению ко всем преобразованиям этой группы, может быть всегда понижен на единицу. Выше мы указывали, что уравнение для автономного решения допускает группу преобразований.

Заметим, что для существования такой группы необходимо, чтобы с течением времени оставалось подобным самому себе не только решение с данным значением энергии E [см. (5а, б)], но чтобы имелось подобие и в решениях с различным E . В нашем случае степенного закона теплопроводности и начального теплового импульса оба условия выполнимы.

Для понижения порядка уравнения удобно пользоваться следующим методом: вводим инвариант преобразования

$$y = \xi^{-2/n} f \quad (25)$$

и новую независимую переменную, для которой преобразование представляет собой параллельный перенос

$$z = \ln \xi.$$

Тогда уравнение второго порядка, связывающее y и z , содержит z лишь под знаком дифференциала. Следовательно, вводя $p = \frac{dy}{dz}$ в качестве неизвестного, исключим z и получим уравнение

первого порядка, связывающее p с y . Подставляя найденные нами показатели по уравнениям (12, 13а, б), будем иметь: плоский случай

$$y^n p \frac{dp}{dy} + n p^2 y^{n-1} + \frac{4+3n}{n} p y^n + \frac{1}{2+n} p + \frac{4+2n}{n^2} y^{n+1} + \frac{y}{n} = 0; \quad (26a)$$

сферический случай

$$y^n p \frac{dp}{dy} + n p^2 y^{n-1} + \frac{4+5n}{n} p y^n + \frac{1}{2+3n} p + \frac{4+6n}{n^2} y^{n+1} + \frac{y}{n} = 0. \quad (26b)$$

При малых y ищем решение степенного вида

$$p = Hy^s, \quad (27)$$

причем из условия обращения в нуль y при конечных ξ и z следует, что $s < 1$. Подставляя (27) в уравнение и удерживая старшие члены по малому y , найдем

$$p = -\frac{1}{2+n} y^{1-n}, \quad (28a)$$

$$p = -\frac{1}{2+3n} y^{1-n}, \quad (28b)$$

что тождественно совпадает с (23).

При $\xi \rightarrow 0$ f стремится к константе, а следовательно, в этом пределе

$$y = \xi^{-\frac{2}{n}} f(0) e^{-\frac{2z}{n}}, \quad p = \frac{dy}{dz} = -\frac{2}{n} f(0) e^{-\frac{2z}{n}} = -\frac{2}{n} y \quad (29)$$

y и p неограниченно растут. Нетрудно убедиться, что (29) удовлетворяет уравнениям (26a, б) в пределе при больших p и y . Из предшествующего следует, что решение, идущее при малом y по (28a, б), при большом y обязательно переходит в (29).

6. Решение уравнения для плоской задачи

Прямая подстановка показывает, что в плоской задаче [уравнение (26a)] при любом значении показателя n сумма выражений, дающих предельные законы зависимости p от y при малых и больших y , т. е. выражение

$$p = -\frac{1}{2+n} y^{1-n} - \frac{2}{n} y, \quad (30)$$

является точным решением (26a).

Теперь нетрудно найти и безразмерную $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \left[\frac{n}{2(2+n)} (1 - \xi^2) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (31)$$

Наконец, возвращаясь к размерным переменным x, t и используя условие нормировки на полную энергию (5a), получим окончательное решение в окончательном виде

$$T = \left(\frac{n}{8(n+2)J_n^2} \frac{E^2}{at} \right)^{\frac{1}{2+n}} \left\{ 1 - \frac{\frac{n-1}{2^{2+n}} \frac{1}{n} \frac{n}{J_n^{2+n}}}{(2+n)^{2+n} (at)^{2+n} E^{\frac{n}{2+n}}} x^2 \right\}^{\frac{1}{n}}, \quad (32)$$

48

где

$$J_n = \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{1}{n}} dy = \frac{V_n}{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}. \quad (33)$$

Легко убедиться в том, что в пределе при $n \rightarrow 0$ найденное решение переходит в известное решение линейного уравнения. Действительно, при

$$n \rightarrow 0 \quad J_n \rightarrow \sqrt{\pi n/2}$$

и (32) превращается в

$$T \rightarrow \frac{E}{2\sqrt{\pi at}} \left(1 - n \frac{x^2}{4at} \right)^{1/n} \rightarrow \frac{E}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (34)$$

Более того, выражение, подобное (32), оказывается справедливым и при $n < 0$. Таким образом, мы нашли решение плоской задачи не только в случае теплопроводности, обращаемой в нуль при начальной температуре $T=0$ ($n < 0$), но и в случае теплопроводности, обращаемой в бесконечность при $T=0$ ($n < 0$).

В линейном случае постоянной теплопроводности решение задачи дается, как известно, выражением (34) и экспоненциально спадает на большом расстоянии. В случае $n < 0$, т. е. при нулевой теплопроводности, при $T=0$ решение отличается существованием конечной области распространения тепла, вне которой $T=0$.

В случае $n < 0$, или бесконечной теплопроводности, при $T=0$ решение имеет вид

$$T = \left(\frac{v}{8(2-v)G_v^2 at} \right)^{\frac{1}{2-v}} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{(EG_v)^{\frac{2-v}{v}} v^{\frac{1}{2-v}} x^2}}{(2-v)^{2-v} 2^{2-v} (at)^{\frac{1}{2-v}}} \right\}^{-\frac{1}{v}}, \quad (35)$$

где $-n = v, k/c = aT^{-v}$ и

$$G_v = \int_0^\infty (1+y^2)^{-\frac{1}{v}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}. \quad (36)$$

Это решение справедливо только при $v < 2$, так как при большем v интеграл G_v расходится, что физически означает мгновенный уход тепла на бесконечное расстояние при теплопроводности, обращаемой в бесконечность по закону T^{-2} или еще сильнее.

Выражение (32) позволяет легко вычислить координату мгновенного положения области распространения тепла:

$$x_{\text{гр}} = \left(\frac{2+n}{2^{n-1} n J_n^n} a t E^n \right)^{\frac{1}{2+n}}. \quad (37)$$

Выражение для времени, за которое граница возмущения достигнет заданного положения, можно привести к привычному виду:

$$t_{\text{гр}} = \frac{n J_n^n}{2(2+n)} \frac{x^2}{a \left(\frac{E}{2x} \right)^n} = \frac{n J_n^n}{2(2+n)} \frac{x^2}{\bar{\chi}_x}, \quad (38)$$

где

$$\bar{\chi}_x = a (\bar{T}_x)^n \bar{T}_x = E/(2x). \quad (39)$$

$\bar{\chi}_x$ есть значение температуропроводности, отвечающее средней температуре в рассматриваемый момент, когда область возмущения простирается от x до $-x$, занимая длину $2x$.

Наконец, в плоской задаче можно также выразить скорость движения границы через $\bar{\chi}_x$:

$$\frac{dx_{\text{гр}}}{dt} = \frac{2 \bar{\chi}_x}{n J_n^n} \frac{dx_{\text{гр}}}{dt}; \quad n < 1: \frac{dx_{\text{гр}}}{dt} = \frac{2 \bar{\chi}_x}{n x};$$

$$n = 1: \frac{dx_{\text{гр}}}{dt} = \frac{3 \bar{\chi}_x}{x}; \quad n > 1: \frac{dx_{\text{гр}}}{dt} = \frac{4 \bar{\chi}_x}{n x}. \quad (40)$$

7. Распространение тепловых волн от покоящейся плоскости постоянной температуры

Рассмотрим задачу нелинейной теплопроводности с начальным условием $T=0$, $x>0$ при $t=0$ и с граничным условием $T=T_0$, $x=0$, $t>0$. Последнее отвечает постоянной температуре, поддерживаемой на стенке во время распространения тепла.

Из граничного условия видно, что показатель k в выражении (9) надо выбрать равным нулю, откуда следует, что $m=1/2$. Таким образом,

$$T = T_0 f(\xi); \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a T_0 t}} = \frac{x}{\sqrt{\chi_0 t}}, \quad \chi_0 = a T_0^n. \quad (41)$$

Можно показать, что при $n>0$ снова получится конечная область влияния и граница

$$\xi = \xi_0, \quad x_{\text{гр}} = \xi_0 \sqrt{\chi_0 t},$$

за которой $T \equiv 0$.

Зависящее от n число ξ_0 может быть найдено численным интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, что нами не производилось. Результаты представляются в виде

$$\frac{dx_{\text{гр}}}{dt} = \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\chi_0}{x}. \quad (42)$$

Для поддержания постоянной температуры в плоскости необходимо, чтобы в ней помещался источник тепла, мощность которого $\sim 1/\sqrt{t}$. Эти результаты вполне аналогичны соответствующим утверждениям линейной теории.

По замечанию Н. А. Дмитриева, нестационарная задача о распространении тепла от плоскости постоянной температуры автомодельна при любом законе теплопроводности $\Phi(T)$. Уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (43)$$

всегда допускает решение вида

$$T = T \left(T_0, \frac{x}{\sqrt{t}} \right). \quad (44)$$

Однако при произвольном (не степенном) виде Φ решения с различными T_0 не подобны друг другу. В согласии с теоремой Ли при произвольном Φ не удается понизить порядок обыкновенного уравнения второго порядка, к которому приводит подстановка (44) в (43).

Заключение

1. Рассмотрено нелинейное уравнение теплопроводности со степенной зависимостью теплопроводности и теплоемкости от температуры.
2. При температуропроводности, стремящейся к нулю в начальном состоянии, решение отлично от нуля в конечной области, так что существует граница решения и невозмущенной области. Рассмотрено решение вблизи границы.
3. Составлены уравнения для автомодельного решения задачи о распространении отдельного теплового импульса.
4. Дано аналитическое решение уравнений в плоском случае.

ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ВОЗДУХА ИЗЛУЧЕНИЕМ. I *

ОБЩАЯ КАРТИНА ЯВЛЕНИЯ И СЛАБАЯ ВОЛНА ОХЛАЖДЕНИЯ

Совместно с Я. Б. Зельдовичем и Ю. П. Райзером

1. Качественная картина процесса охлаждения нагретого воздуха

Задача о сильном взрыве в воздухе была рассмотрена Седовым [1] (см. также [2]). Сильная ударная волна необратимо нагревает воздух до весьма высоких температур, так что после взрыва, когда давление падает до атмосферного, образуется большая масса сильно нагретого воздуха.

Представим себе большую массу воздуха с линейными размерами порядка нескольких сот метров, нагретую до высокой температуры — выше $100\,000^\circ$ в центре; к периферии температура спадает ниже 100° . Как охлаждается такая масса? Очевидно, что молекулярная теплопроводность не играет никакой роли: при коэффициенте диффузии тела (температуропроводности) порядка $1\text{ см}^2/\text{сек}$ и размере $\sim 10^4\text{ см}$ воздух остывал бы год. Конвективный подъем за счет различия плотности горячего и холодного воздуха и связанное с подъемом перемешивание горячего воздуха с окружающими массами холодного более существенны. Однако в первые $2-3\text{ сек}$ подъем невелик. Очевидно, что конвективный подъем не может превышать $gt^2/2$, что составляет 5 м за 1 сек , 20 м за 2 сек , 46 м за 3 сек . Поэтому, рассматривая первые секунды, можно не учитывать и конвекцию. Основным фактором является световое излучение воздуха, рассмотрение которого и посвящена настоящая работа.

Характерная особенность задачи состоит в том, что прозрачность воздуха сильно зависит от температуры. Холодный воздух, как известно, прозрачен для видимого света, что и обуславливает возможность лучистого охлаждения нагретого объема.

Непрерывный спектр поглощения света в нагретом воздухе обязан главным образом фотоионизации возбужденных атомов. Энергия ионизации атомов азота и кислорода в основном состоит из $(I \approx 14\text{ eV})$ при температурах порядка $10\,000^\circ$ значительно больше энергий квантов, играющих основную роль в потоке энергии $h\nu$ порядка нескольких kT . Эти кванты могут поглощаться лишь атомами, возбужденными до энергии $I - h\nu$, равное количество которых пропорционально бальмановскому фактору $\exp\{-(I + h\nu/kT)\}$. Поэтому длина пробега света, равная обратной величине коэффициента поглощения, чрезвычайно сильно зависит от температуры. Длина пробега меняется от ки-

* ЖЭТФ, 1958, 34, вып. 5, 1278.

лометров при $T \approx 6000^\circ$ до метров при $T \approx 10\,000^\circ$ и сантиметров при $T \approx 13\,000^\circ$.

Очевидно, что излучение, охлаждающее воздух, определяется в основном тем слоем, в котором длина пробега излучения порядка размеров системы, т. е. слоем с температурой порядка $10\,000^\circ$, которую можно назвать температурой прозрачности T_2 .

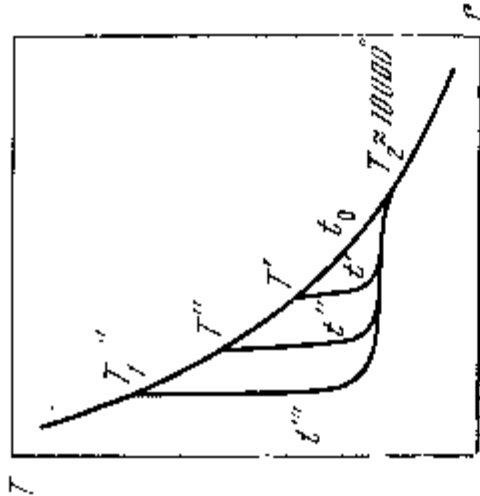


Рис. 1

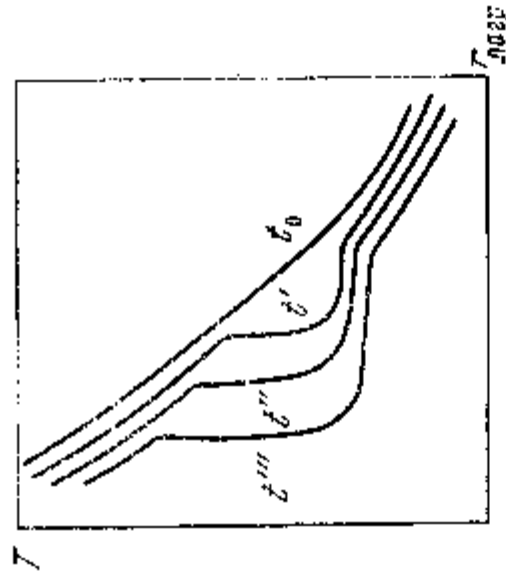


Рис. 2

Более холодный воздух прозрачен и не излучает, более горячий воздух непрозрачен, интенсивно излучает, но испущенное им излучение тут же поглощается. Такого рода соображения, определяющие эффективный излучающий слой, ни в какой степени не являются новыми, они общеприняты при изучении звезд. Но в отличие от звезд излучение энергии воздухом не компенсируется притоком энергии из внутренней более нагретой области, так как распределение температуры в нашем случае определяется главным образом предыдущей историей явления и не подчинено условию стационарности. Поэтому можно ожидать, что если в начальный момент имется какое-то плавное распределение температуры, изображенное на рис. 1, то охладиться излучением начнет слой с температурой порядка $T_2 \sim 10\,000^\circ$ и в следующие моменты распределение температуры под влиянием излучения будет изменяться так, как показано на рис. 1. Один за другим слой воздуха будут охлаждаться до температуры прозрачности. По нагретому выше T_2 газу распространяется температурный уступ — волна охлаждения ($ВО$), в котором температура резко падает от начального значения T_1 до температуры прозрачности T_2 .

Изображая последовательные изменения распределения температуры на рис. 1, мы отвлекаемся от изменения распределения за счет чисто гидродинамического движения. В действительности уступ образуется еще до того, как давление в воздухе упадет до атмосферного, и гидродинамический разлет прекратится примерно в тот момент, когда охлаждение излучением слоя с температурой $\sim 10\,000^\circ$ станет сравнимым с адиабатическим ох-

лаждением расширяющегося воздуха. В дальнейшем, когда адиабатическое охлаждение по мере падения давления быстро уменьшается, охлаждение излучением начинает играть главную роль. Напротив, до момента образования уступа основную роль играет адиабатическое охлаждение и потери на излучение малы. Таким образом, с учетом адиабатического охлаждения последовательные изменения распределения температуры имеют вид, показанный на рис. 2, где по абсциссе отложена не эйлеровская, а лагранжева координата.

Можно сказать, что ВО распространяется по невозмущенному излученному воздуху, температура которого T_1 к моменту подхода волны определяется только предыдущей историей процесса и чисто гидродинамическим движением, если таковое существует. Дело в том, что при температурах порядка десятков и сотен тысяч градусов и градиентах температуры порядка тысяч градусов на метр, которые имеют место в начальном распределении, лучистая теплопроводность из-за сильного поглощения слишком мала для того, чтобы создать сколько-нибудь заметный поток энергии в области начальных температур T_1 . Лучистая теплопроводность, коэффициент которой (коэффициент пропорциональности между тепловым потоком и градиентом температуры) пропорционален длине пробега света $l(T)$ и кубу температуры, быстро возрастает с увеличением температуры и играет существенную роль лишь при сотнях тысяч градусов, ограничивая подъем температуры величинами такого порядка и выравнивая температуру вблизи центра¹.

Благодаря малой теплопроводности на верхнем краю ВО при температуре T_1 поток энергии, поступающий в волну изнутри, близок к нулю и не может иметь существенного значения. Все свойства ВО, и в частности скорость ее распространения по горячему газу, определяются в основном одной величиной — температурой исходного газа T_1 . (Свойства газа и его давление предполагаются заданными). Основная задача теории волны охлаждения состоит в нахождении потока энергии S_2 , уходящего с поверхности волны, который заключен, очевидно, в пределах $\sigma T_1^4 > S_2 > \sigma T_2^4$ (σ — постоянная Стефана—Больцмана). Эта задача представляется нетривиальной, так как во фронте ВО имеет место весьма резкое изменение температуры. Когда мы найдем поток S_2 , скорость волны из соображений энергетического баланса выразится элементарно

$$S_2 = 4\rho_1 c_p (T_1 - T_2), \quad (1)$$

где c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кото-

¹ Коэффициент лучистой теплопроводности снова становится большим при низких температурах (ниже $\sim 10\ 000^\circ$) из-за резкого возрастания длины пробега l , которая при $T \sim 50\ 000^\circ$ проходит через минимум $l(T)$ T_2 имеет минимум при $T \sim 10\ 000^\circ$. Однако при больших пробегах, сравнимых с размерами системы, перенос излучения теряет характер теплопроводности.

рую мы для простоты полагаем постоянной, а ρ_1 — плотность воздуха, по которому бежит волна. Основанием для написания такого баланса служит то, что скорость волны, согласно оценкам, оказывается дозвуковой, так что на протяжении узкого фронта ВО давление p практически постоянно (по мере охлаждения воздух сжимается, так что $p \sim \rho T \approx \text{const}$).

Нижняя температура ВО, или температура прозрачности, не есть величина строго определенной. Это такая температура, ниже которой поглощение и излучение света становятся очень малы, точнее, при которой длина пробега света становится сравнимой с характерным масштабом R , на котором температура падает от T_2 до достаточно малой величины, скажем, 1000° ,

$$l(T_2) \approx R. \quad (2)$$

Когда волна распространяется по расширяющемуся воздуху, этот масштаб определяется гидродинамикой всего движения в целом; он тем меньше, чем больше скорость адиабатического охлаждения. Благодаря чрезвычайно резкой экспоненциальной зависимости длины пробега от температуры, температура прозрачности, несмотря на содержащийся в ее определении произвол, заключена в довольно узком интервале и логарифмически зависит от размера R и плотности воздуха ρ_1 .

Если должным образом усредненная по спектру длина пробега есть

$$l = a(T) (\rho_0/\rho) e^{1/kT}, \quad (3)$$

где a — медленная функция от T (для воздуха мы принимаем $a = 2,8 \cdot 10^{-12} \times T^2$ см), ρ_0 — нормальная плотность воздуха (см. ниже), то температура прозрачности согласно (2) равна

$$T_2 = \frac{1}{k} \left(\ln \frac{R\rho}{a\rho_0} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Как будет показано в дальнейшем, излучение, выходящее с поверхности ВО, генерируется всегда на нижнем краю уступа независимо от его высоты, т. е. при сколь угодно больших температурах исходного газа T_1 . Величина излучаемого ВО потока S_2 определяется главным образом температурой прозрачности и приближенно равна $2\sigma T_2^4$.

Таким образом, скорость распространения ВО, пропорциональная

$$u \sim 2\sigma T_2^4 / \rho (1 - T_2/T_1), \quad (5)$$

в случае достаточно сильной волны, когда $T_2 \ll T_1$, зависит главным образом только от давления². В таблице приведено не-

² Если учесть, что теплоемкость при высоких температурах растет с температурой из-за ионизации, то зависимости (1), (5) несколько усложняются: в этом случае вместо $c_p T_1$ и $c_p T_2$ надо писать удельные энтальпии $W(T_1, p)$ и $W(T_2, p)$.

сколько рассчитанных значений скорости u , км/сек в воздухе при атмосферном давлении при разных T_1 и T_2 . Там же указаны и значения R , из которых по формуле (4) была получена температура T_2 .

Т а б л и ц а

$R, \text{ м}^{\circ} T_1$	$u, \text{ км/сек при } p=1 \text{ атм}$	
	10 10 700	50 9 700
T_1°		
20 000	2,7	2,1
50 000	1,8	1,4
100 000	1,6	1,2
		100
		9 300

В теории теплопроводности показывается, что время охлаждения нагретого тела $t \sim R_0^2 c_p / \kappa$, где κ — коэффициент теплопроводности, а R_0 — размеры тела. В основе зависимости $t \sim R_0^2$ лежит предположение о постепенном подобном понижении температуры всей массы тела. При охлаждении нагретого тела излучением, когда от периферии к центру объема бежит ВО, время охлаждения выражается совершенно иначе: $t \sim R_0 / u$. Так, масса воздуха радиусом ~ 100 м, находящаяся при атмосферном давлении и нагретая до температур порядка десятков и сотен тысяч градусов, охлаждается излучением до температуры порядка $10\,000^{\circ}$ за время $\sim 0,1$ сек. В дальнейшем охлаждение излучением идет значительно медленнее и носит существенно иной, объемный, характер (так как длина пробега света становится сравнимой с размерами тела). При этом начинают играть роль механизмы поглощения и излучения света, отличные от рассмотренного выше.

Вследствие сильной растянутости нижнего края ВО, а также поглощения и излучения света охлажденным ВО воздухом, фронт ВО практически в большинстве случаев остается невидимым. Все эти вопросы, в том числе и вопрос о возможности экспериментального наблюдения ВО, выходят за рамки настоящей работы.

Ниже развивается приближенная теория ВО, т. е. подробно рассмотрению подвергается тот узкий слой, в котором происходит резкое падение температуры от T_1 до T_2 .

2. Постановка задачи о волне охлаждения

Отвлекаясь от конкретных размеров и формы охлаждающейся массы воздуха, будем искать решение стационарных уравнений лучистого теплообмена вида $T(x-ut)$, соответствующее плоской волне, распространяющейся в газе с заданными

температурой T_1 и плотностью ρ_1 с постоянной скоростью u . Скорость u сама должна быть найдена из уравнений наподобие определения скорости пламени во взрывчатой смеси.

В действительности, уравнения не имеют точного решения вида $T(x-ut)$. Дело в том, что по мере распространения волны увеличивается толщина слоя охлажденного воздуха, в которой поглощение света хотя и мало, но все же отлито от нуля, и температура прозрачности меняется с течением времени. В неограниченной среде слой газа, охлажденного до сколь угодно низкой температуры из-за своей бесконечной протяженности, оказывается совершенно непрозрачным, поток на бесконечности равен нулю и режима ВО в строгом смысле слова вообще не существует. Этот момент, принципиальный в случае неограниченной среды, создает лишь кажущуюся трудность в реальных условиях. Ведь на самом деле нагретая область всегда ограничена и температура прозрачности лишь очень немного меняется с увеличением пройденного волной расстояния, будучи заключенной для реальных размеров системы в весьма узком интервале. Дополнительная, очень медленная зависимость решения от времени $T(x-ut, t)$ возникает лишь на самом нижнем, сильно растянутом краю волны, в области уже охлажденного воздуха, которая почти прозрачна.

Если ВО распространяется по расширяющемуся воздуху, то адиабатическое охлаждение быстро выводит охлажденные излучением слой воздуха в область столь низких температур, что он становится практически прозрачным. Дополнительная медленная зависимость T от времени будет существовать лишь в области адиабатического охлаждения и почти не будет влиять на профиль температуры в самой ВО.

Мы здесь не будем рассматривать дополнительного поглощения света в области низких температур, порядка нескольких тысяч градусов, которое связано образующимся в нагретом воздухе окиси и двуокиси азота и практически не оказывает влияния на волну, хотя и может играть существенную роль в поглощении потока излучения, выходящего с поверхности волны, в периферийных слоях воздуха.

Кроме того, мы будем пренебрегать интенсивным молекулярным поглощением в области низких температур, существенным для ультрафиолетового излучения с $\lambda < 2000 \text{ \AA}$, так как в спектре с $\lambda < 2000 \text{ \AA}$ при температурах порядка и ниже $10\,000^{\circ}$ заключена небольшая доля энергии (меньше 4%), незначительно сказываю-

³ До некоторой степени аналогичная ситуация имеет место в теории стационарного распространения пламени. Если не предполагать скорости химической реакции в негоревшей смеси тождественно равной нулю, несмотря на то что в действительности это — конечная, хотя и исчезающе малая величина, смесь горит раньше, чем к ней подойдет фронт пламени.

⁴ Своеобразные оптические эффекты, связанные с образованием при сильном взрыве окислов азота, подробно рассмотрены одним из авторов в работе [3].

щаяся на энергетическом балансе ВО. Для построения теории ВО следует рассмотреть, как это обычно делается в теории резонансов, плоский стационарный процесс в системе координат, в которой ВО покоится. Для того чтобы избавиться от указанной выше трудности и сделать задачу стационарной, т. е. перейти от истинного решения $T(x-ut, t)$ с дополнительной медленной зависимостью от t к идеализированному $T(x-it)$, можно воспользоваться одним из двух формально искусственных, но в силу сказанного физически совершенно оправданных приемов, отвечающих реальному положению вещей.

Можно, во-первых, ввести в энергетическое уравнение дополнительный постоянный член A , играющий роль адиабатического охлаждения, который задает постоянный масштаб R , определяющий температуру прозрачности T_2 и делающий поглощение в охлажденной области конечным. Уравнение энергетического баланса в стационарном случае имеет вид

$$u\rho_0 \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dx} = -A, \quad (6)$$

где S — поток энергии излучения в точке x .

Можно, во-вторых, вообще исключить из рассмотрения охлажденную ниже температуры прозрачности слабо поглощающую область газа, определив с самого начала температуру прозрачности T_2 по формуле (4) и полагая, что среда при $T < T_2$ абсолютно прозрачна ($l = \infty$).

Для определения потока излучения мы воспользуемся диффузионным приближением к строгому кинетическому уравнению, которое приближенным образом учитывает угловое распределение излучения. В диффузионном приближении к точному уравнению баланса излучения

$$dS/dx = c(U_p - U)l \quad (7)$$

добавляется приближенная связь потока S с плотностью энергии излучения⁵ U :

$$S = -1/3 l c dU/dx. \quad (8)$$

Здесь

$$U_p = 4\sigma T^4/c \quad (9)$$

— равновесная плотность излучения, c — скорость света. Мы отвлекаемся от рассмотрения спектрального состава излучения, характеризуя перенос излучения должным образом усредненной по спектру длиной пробега l .

⁵ Не следует смешивать диффузионное приближение с приближением лучистой теплопроводности, которое представляет собой частный случай, когда истинная плотность U в уравнении (8) заменяется равновесной U_p .

Как будет показано ниже, в значительной части ВО истинная плотность излучения U весьма близка к равновесной U_p ; в этом случае, как известно [4], длина пробега усредняется по Росселанду. В области охлажденного воздуха U сильно отличается от U_p и длина пробега должна усредняться совсем иначе. Для простоты будем везде пользоваться Росселандовым средним, пользуясь тем обстоятельством, что болцмановский экспоненциальный фактор остается в l при любом способе усреднения, а от предэкспоненциального множителя, который, разумеется зависит от способа усреднения, все существенные эффекты в ВО зависят только логарифмически. Росселандово усреднение формулы Крамера для фотоэлектрического поглощения квантов возбужденными атомами [4] дает после подстановки известных констант предэкспоненциальный множитель $a(T)$, который стоит в формуле (3) для длины пробега.

В уравнениях (7), (8) удобно перейти от геометрической координаты x к оптической толщине τ по формуле

$$d\tau = -dx/l, \quad \tau = -\int dx/l, \quad (10)$$

отсчитывая τ от места, где $l = \infty$, в сторону увеличения поглощения, т. е. в сторону повышения температуры:

$$dS/d\tau = -c(U_p - U); \quad (11)$$

$$S = 1/3 c dU/d\tau. \quad (12)$$

Отказываясь от точного учета углового распределения излучения, можно написать и приближенные интегральные выражения для потока и плотности, полагая, что все кванты двигаются параллельно оси x «вперед» и «назад»:

$$S = \frac{c}{4} \left[\int_{\tau}^{\infty} U_p e^{-\tau'} d\tau' - \int_0^{\tau} U_p e^{-\tau'} d\tau' \right]; \quad (13)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_{\tau}^{\infty} U_p e^{-\tau'} d\tau' + \int_0^{\tau} U_p e^{-\tau'} d\tau' \right]. \quad (14)$$

Коэффициенты при квадратных скобках выбраны так, чтобы формулы (13), (14) давали правильные значения потока с плотности абсолютно черного тела и плотности внутри черного тела, вдали от границы. Для эффективного учета углового распределения следует пользоваться в этих формулах не истинной, а вдвое уменьшенной длиной пробега. Легко проверить, что выражения (13), (14) удовлетворяют при этом уравнениям (11), (12) типа диффузионных с коэффициентом диффузии, пропорциональным $1/4$ вместо $1/3$ ⁶. На верхнем краю ВО, как уже было

⁶ Вдвое уменьшенная длина пробега означает, что средний косинус квантов, двигающихся «вперед» и «назад», полагается равным $1/2$. Дифференциальные

сказано выше, поток близок к нулю, поэтому одно из граничных условий к уравнению (11), (12) есть

$$\tau = \infty, \quad S = 0. \quad (15)$$

Второе граничное условие должно быть поставлено на границе между поглощающей и абсолютно прозрачной средами, т. е. при $\tau = 0$. Это — известное диффузионное условие, согласно которому диффузионный поток на границе с «вакуумом» равен половине кинетического

$$\tau = 0, \quad S = cU/2. \quad (16)$$

Интегральные выражения (13), (14) автоматически удовлетворяют этому условию.

3. Слабая волна охлаждения

Рассмотрим предельный случай слабой ВО, в которой верхняя температура T_1 лишь немного превышает нижнюю T_2 . При этом, однако, длину пробега будем считать весьма сильно зависящей от температуры так, чтобы оказались совместимыми два условия: $l(T_1) \ll l(T_2)$ — условие, необходимое для самого существования ВО, и условие $T_1 \approx T_2$, $T_1^4 \approx T_2^4$, необходимое для того, чтобы волну можно было рассматривать как слабую.

Рассмотрение слабой волны представляет главным образом методический интерес; на этом примере благодаря упрощению исходных уравнений удается получить точное аналитическое решение уравнений.

Воспользуемся первым из указанных в предыдущем разделе приемом и будем считать, что наряду с лучистым теплообменом существует постоянное адиабатическое охлаждение A , так что энергетическое уравнение записывается в форме (6). Интеграл энергетического уравнения (6) содержит константу интегрирования C , которая определяется выбором начала отсчета координаты x , т. е. произвольна (уравнение имеет группу трансляции):

$$u\rho_1 c_p T + S = -Ax + C. \quad (17)$$

На нижнем и верхнем краях ВО, где поток S стремится к S_2 — потоку, уходящему на бесконечность и к нулю, величина $u\rho_1 c_p T$ асимптотически стремится к двум пределам:

$$u\rho_1 c_p T = -Ax - S_2 + C_2, \quad x \rightarrow \infty; \quad (18)$$

$$u\rho_1 c_p T = -Ax + C, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (19)$$

сдвинутым по ординате на величину потока, уходящего на бесконечность S_2 .

Уравнения, эквивалентные интегральным выражениям (13), (14), известны в астрофизике под названием приближения Шварцшильда [4].

Уступ ВО заключен между этими прямыми; наша задача заключается в нахождении положения этого уступа. Воспользуемся теперь условием, что волна слабая. Поскольку явление разгрявается в узком интервале температур, можно приближенно полагать множитель U_p в уравнениях переноса излучения, которому пропорциональна излучательная способность, постоянным. Очевидно, этот множитель, заключенный в волне в пределах $4\sigma T_2^4/c < U_p < 4\sigma T_1^4/c$,

может быть в силу близости пределов положен равным любому из них. Для определенности будем считать, что $U_p = 4\sigma T_2^4/c$. При этом, очевидно, поток, уходящий на бесконечность,

$$S_2 = \sigma T_2^4. \quad (20)$$

При условии $U_p = \text{const}$ уравнения переноса излучения сильно упрощаются. Будем исходить здесь из интегрального выражения (13); получим

$$S = S_2 e^{-\tau}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (17), получим

$$u\rho_1 c_p T = -Ax - S_2 e^{-\tau} + C. \quad (22)$$

Подстановка температуры из этой формулы в уравнение (10) дает дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции $x(\tau)$ или, возвращаясь к (22), $T(\tau, S_2)$ и $T(x, S_2)$. Для решения этого уравнения заметим, что в интересующем нас узком интервале температур фактическая больцмановская зависимость длины пробега от температуры, даваемая формулой (3) (слабой зависимостью от температуры предэкспоненциального фактора пренебрегаем), может быть аппроксимирована экспоненциальной

$$l = (a\rho_0/p) \exp \left\{ \frac{l}{kT_0} - (T - T_0) \frac{l}{kT_0^2} \right\} = l(T_0) \exp \left\{ -\frac{(T - T_0)l}{kT_0^2} \right\}, \quad (23)$$

где T_0 — некоторая температура, около которой произведено разложение показателя экспоненты.

Такая аппроксимация была сделана Франк-Каменецким в теории теплового взрыва [5]. Эта формула автоматически обеспечивает стремление потока к нулю при $x \rightarrow -\infty$, где температура стремится к бесконечности (а ее градиент согласно (22) конечен), что необходимо для существования режима. Температуру T_0 , около которой произведено разложение и которая может быть задана произвольно, определим уравнением

$$Al(T_0)l/u\rho_1 c_p T_0 kT_0 = 1. \quad (24)$$

Перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$\Theta = (T - T_0) I / T_0 k T_0; \quad (25)$$

$$d\xi = dx / l(T_0); \quad (26)$$

$$s = \frac{S_2}{\nu \rho_1 c_p T_0 k T_0} = \frac{S_2}{Al(T_0)} = \frac{l(T_1 - T_2)}{kT_0 T_0}. \quad (27)$$

Уравнения (22) и (10) в безразмерных величинах имеют вид

$$\Theta = -\xi - se^{-\tau} + C, \quad (28)$$

$$d\xi = -e^{-\tau} d\tau. \quad (29)$$

Решение их с граничным условием $\tau=0, \xi=\infty (x=\infty)$,

$$\xi = -\ln \left[\int_0^\tau e^{se^{-\tau}} d\tau \right] + C, \quad (30)$$

$$\Theta = \ln \left[\int_0^\tau e^{se^{-\tau}} d\tau \right] - se^{-\tau}, \quad (31)$$

дает параметрическую связь $\Theta(\xi)$, т. е. профиль температуры в слабой ВО. При помощи подстановки $z = e^{-\tau}$ интеграл, стоящий под знаком логарифма в формулах (30), (31), выражается через табулированные функции $\text{Ei}(x)$ [6]:

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^y}{y} dy, \quad (32)$$

а именно:

$$J = \int_0^\tau e^{se^{-\tau}} d\tau = \text{Ei}(s) - \text{Ei}(se^{-\tau}). \quad (33)$$

На нижнем краю ВО температура асимптотически приближается к нижней прямой по закону (при $\tau \ll 1, s\tau \ll 1, \Theta \rightarrow -\infty$)

$$\xi \rightarrow -\Theta - s + s(1 - \exp(-e^\Theta)) + C. \quad (34)$$

Со стороны верхних температур профиль $\Theta(\xi)$ имеет характер уступа, крутизна которого все время растет при увеличении Θ . Лишь когда Θ почти достигает верхней прямой, кривая $\Theta(\xi)$ проходит через точку перегиба и начинает асимптотически приближаться к верхней прямой, опять-таки по закону (34), но при $\tau \gg 1, se^{-\tau} \ll 1, \Theta \rightarrow +\infty$.

Эти закономерности иллюстрируются рис. 3, на котором график $\Theta(\xi)$ при $s=5$; начало отсчета ξ помещено в точку, где $\Theta=0$. Естественно считать фронтом ВО точку перегиба $\Theta(\xi)$, в которой крутизна уступа максимальна, и под верхней и ниж-

ней температурами ВО подразумевать значения Θ на асимптотических прямых при координате перегиба (см. рис. 3).

Оптическая толщина τ_ϕ , соответствующая фронту ВО, может быть найдена из уравнения $d^2\Theta/d\xi^2=0$. Дифференцирование (30), (31) дает трансцендентное уравнение для τ_ϕ в зависимости от параметра s

$$\bar{J}_\phi = \text{Ei}(s) - \text{Ei}(\beta) = e^\beta / (1 - \beta), \quad \beta = se^{-\tau_\phi}. \quad (35)$$

Температура в точке перегиба Θ_ϕ , а также верхняя и нижняя температуры ВО Θ_1 и Θ_2 равны

$$\Theta_\phi = -\ln(1 - \beta), \quad (36)$$

$$\Theta_1 = \Theta_\phi + \beta, \quad (37)$$

$$\Theta_2 = \Theta_\phi + \beta - s. \quad (38)$$

Задача нахождения нижней температуры ВО T_2 и, следовательно, ее скорости и при заданных верхней температуре T_1 и адиабатическом охлаждении A легко решается методом последовательных приближений. Задаемся какой-либо величиной параметра s и по формулам (35) — (38) находим Θ_1 и Θ_2 . Затем, переходя к размерным температурам по формуле (25), определяем T_0 и T_2 ; подставляя эти значения в (27), находим параметр s в следующем приближении и т. д. Последовательные приближения быстро сходятся, так как T_0 зависит от s логарифмически.

Удобнее пойти обратным путем: задаваясь значениями параметра s и какой-либо из двух величин, характеризующих ВО — T_1 или T_2 , определить вторую величину и необходимое для обеспечения существования стационарного режима адиабатическое охлаждение A . Так, для случая $s=5$, к которому относится рис. 3, получаем по формулам (35) — (38): $\beta=0,93, \tau_\phi=1,69, \Theta_\phi=2,7, \Theta_1=3,7, \Theta_2=-1,3$. Например, при верхней температуре $T_1=12250^\circ$, нижняя температура оказывается равной $T_2=9200^\circ$; при этом $T_0=10000^\circ$ (l принято равным для воздуха 14 eV).

Реальный интерес представляют лишь значения параметра s , достаточно большие по сравнению с единицей. В самом деле, из формулы (23) следует, что

$$s = \Theta_1 - \Theta_2 = l(T_1) / l(T_2), \quad (39)$$

а соотношение длин пробега должно быть больше единицы для самого существования ВО, о чем было сказано в начале этого раздела. (С другой стороны, сверху s ограничено условием слабости волны.) В случае $s \gg 1$ все формулы существенно упрощаются и может быть установлена в явном виде приближенная

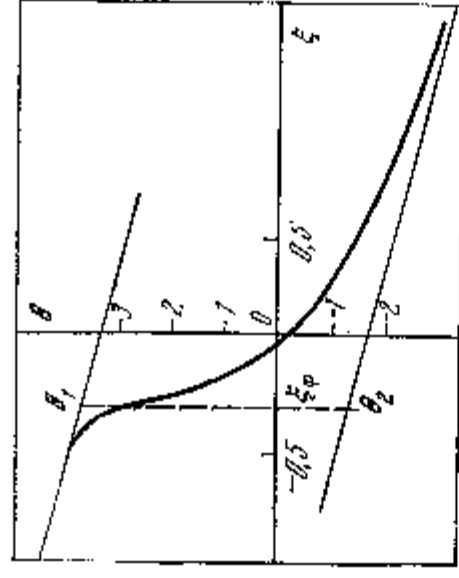


Рис. 3

связь между нижней температурой ВО и величиной адиабатического охлаждения, причем температура T_0 , около которой проведено разложение длины пробега, вообще выладеет из уравнений.

Воспользовавшись асимптотическим выражением $\bar{E}_1(s) \approx e^s/s$ при $s \gg 1$ и замечая, что когда $s \gg 1$, корень уравнения (35) $\beta \approx 1$ ($\tau_0 \approx \ln s$), найдем по (31), (35)

$$\Theta_\phi \approx \ln \bar{E}_1(s) - 1 \approx s - \ln s - 1. \quad (40)$$

Откуда по формуле (38)

$$\Theta_2 \approx -\ln s. \quad (41)$$

Возвращаясь к размерной температуре по формуле (25) и принимая во внимание (27) и (23), получим искомого соотношение

$$Al(T_2) = S_2 = \sigma T_2^4. \quad (42)$$

Следует отметить, что согласно (37) $\Theta_1 > \Theta_\phi > 0$, а по (41) $\Theta_2 < 0$, т. е. длину пробега мы разлагаем по формуле (23) около промежуточной температуры в ВО:

$$T_2 < T_0 < T_\phi < T_1.$$

Л и т е р а т у р а

1. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 3-е. М., Гостехиздат, 1954.
2. G. Taylor. Proc. Roy. Soc., 1950, 201, 175.
3. Ю. П. Райзер. ЖЭТФ, 1958, 34, 483.
4. А. Унзольд. Физика звездных атмосфер. М., ИЛ, 1949.
5. Д. А. Фрэнк-Каменский. ЖФХ, 1939, 13, 738; Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Изд-во АН СССР, 1947.
6. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. М.—Л., ГИИТЛ, 1949.

ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ВОЗДУХА ИЗЛУЧЕНИЕМ. II*

Совместно с Я. Б. Зельдовичем и Ю. П. Райзером

В первой части настоящей работы [1]¹ была описана качественная картина охлаждения большого объема нагретого воздуха. Охлаждение осуществляется излучением. При этом в воздухе вырабатывается своеобразный профиль температуры — в виде

* ЖЭТФ, 1958, 34, вып. 6, 1447.

¹ В дальнейшем при ссылках на формулы первой части будем писать перед номером формулы единицу (например, (1.4), (1.10)).

уступа или волны охлаждения (ВО), которая распространяется в сторону более нагретого воздуха. Воздух в волне охлаждается от высокой температуры T_1 до более низкой температуры T_2 . Нижняя температура T_2 соответствует наступлению прозрачности воздуха, т. е. таким условиям, когда он перестает поглощать и испускать излучение.

В [1] был рассмотрен предельный случай слабой ВО, в которой верхняя и нижняя температуры T_1 и T_2 близки друг к другу. Вследствие близости обеих температур поток, уходящий с фронта слабой ВО, достаточно близок к σT_1^4 и к σT_2^4 .

В этой статье будет дана теория сильной ВО, в которой верхняя температура может быть неограниченно высокой. Основная задача заключается, очевидно, в определении потока излучения, уходящего с фронта ВО на бесконечность, другая задача состоит в нахождении распределения температуры во фронте ВО.

1. Определение потока излучения, уходящего с фронта волны охлаждения

В [1] было указано, что для нахождения стационарного режима ВО необходимо воспользоваться одним из двух приемов: либо ввести в энергетическое уравнение постоянный член адиабатического охлаждения, либо же с самого начала определить температуру прозрачности T_2 по формуле (1.4) и считать, что при $T < T_2$ воздух абсолютно прозрачен ($l = \infty$), тем самым исключив из рассмотрения уже охлажденную излучением область воздуха, которая поглощает свет весьма слабо.

Первый прием дает более полную картину распределения температуры, так как позволяет исследовать ход температуры в охлажденном воздухе и учесть поглощение света в нем. Однако он приводит к излишним математическим усложнениям при рассмотрении профиля температуры внутри ВО, т. е. при температурах выше температуры прозрачности, и определении потока, уходящего с фронта ВО. Между тем внутри ВО адиабатическое охлаждение играет весьма малую роль, поэтому предпочтительно рассматривать внутреннюю структуру ВО, воспользовавшись вторым приемом. При этом энергетическое уравнение (1.6) примет вид

$$u\rho_1 c_p \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad u\rho_1 c_p \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dx} = 0, \quad (1)$$

а интеграл его

$$u\rho_1 c_p (T_1 - T) = S. \quad (2)$$

Относя равенство (2) к нижнему краю ВО, получим уравнение баланса энергии в ВО:

$$u\rho_1 c_p (T_1 - T_2) = S_2. \quad (3)$$

Величина потока S_2 , уходящего с фронта ВО, может быть ограничена как сверху, так и снизу из самых общих соображений.

Рассмотрим нижний край ВО, где температуры близки к T_2 . Согласно принятому нами условию, воздух ни в какой точке волны не охлаждается до температуры более низкой, чем T_2 , так как при $T < T_2$ он перестает поглощать и излучать свет. Следовательно, дойдя до температуры T_2 , воздух не может дальше охлаждаться, так что T_2 есть наименьшая из возможных температур в волне. Поэтому на краю ВО производная $dT/dt \gg 0$ и согласно (1) $dS/dt \ll 0$. Из (1.11) следует, что плотность излучения на краю ВО меньше равновесной $U_{p2} = 4\sigma T_2^4/c$. Поэтому в диффузионном приближении вследствие граничного условия (1.16) $S_2 \ll 2\sigma T_2^4$. С другой стороны, эффективная температура излучения, уходящего на «бесконечность» с границы ВО, определяется формулой

$$S_2 = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (4)$$

и не может быть ниже самой низкой температуры в ВО — T_2 . Следовательно, поток S_2 и эффективная температура T_{eff} заключены в очень узких пределах:

$$\sigma T_2^4 < S_2 < 2\sigma T_2^4; \quad (5)$$

$$T_2 < T_{\text{eff}} < \sqrt[4]{2} T_2. \quad (6)$$

Таким образом, независимо от амплитуды ВО, которую можно характеризовать отношением T_1/T_2 , при сколько угодно большой верхней температуре излучает всегда нижний край ВО. Этот вывод является следствием стационарности профиля ВО.

Излучение, выходящее с поверхности нагретого тела, чаще всего с прозрачной областью, генерируется в слое около поверхности, имеющем оптическую толщину τ порядка нескольких единиц, так как кванты, рожденные в более глубоких слоях, практически полностью поглощаются в этом слое. Эффективная температура излучения T_{eff} равна, очевидно, некоторой средней температуре излучающего слоя. Из формулы (6) следует, что в излучающем слое, оптическая толщина которого порядка нескольких единиц, температура меняется весьма слабо, что является условием существования локального термодинамического равновесия излучения с веществом или чистой тепловой проводности. Это условие выполняется тем лучше, чем больше амплитуда ВО, т. е. U_2 тем ближе к U_{p2} и S_2 к $2\sigma T_2^4$.

В самом деле, если изменение температуры в излучающем слое имеет порядок T_2 , то изменение потока в нем согласно (2) есть $|\Delta S| \sim u p_1 c p T_2$. Но в сильной волне согласно (3) $S_2 \sim u p_1 c p T_1$, так как $T_2 \ll T_1$. Тогда с помощью (1.11) и (5) можно оценить и относительное отклонение плотности излучения

U от равновесного значения U_p :

$$\left(\frac{U_p - U}{U_p} \right)_2 = - \frac{1}{c U_{p2}} \left(\frac{dS}{dt} \right)_2.$$

Так как в излучающем слое $\tau \sim l$, производная $(dS/dt)_2$ порядка $|\Delta S|$ и

$$\left(\frac{U_p - U}{U_p} \right)_2 \sim \frac{|\Delta S|}{c U_{p2}} \sim \frac{S_2}{c U_{p2}} \frac{T_2}{T_1} \sim \frac{T_2}{T_1}.$$

Поскольку поток в излучающем слое сильной ВО почти постоянен $|\Delta S|/S_2 \sim T_2/T_1 \ll 1$, положение на нижнем краю сильной ВО вполне аналогично положению в фотосферах стационарных звезд. Задача определения связи потока S_2 с температурой прозрачности T_2 при точном учете углового распределения излучения эквивалентна в пределе сильной ВО известной проблеме Милна [2], точное решение которой

$$S_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma T_2^4 \quad (7)$$

лишь немного отличается от принятого нами диффузионного

$$S_2 = 2\sigma T_2^4. \quad (8)$$

2. Распределение температуры в волне охлаждения

Выше было показано, что на нижнем краю сильной ВО плотность излучения весьма близка к равновесной. Естественно признать, что локальное равновесие имеет место на протяжении всей волны, и положить в уравнении (1.12) $U \approx U_p$:

$$S = \frac{c}{3} \frac{dU_p}{dt} = \frac{16\sigma T^3}{3} \frac{dT}{dt}. \quad (9)$$

Подставляя поток (9) в интеграл энергии (2), получим уравнение для температуры

$$dT/dt = 3u p_1 c p (T_1 - T) / 16\sigma T^3, \quad (10)$$

из которого видно, что производная dT/dt и, следовательно, отклонение от условия локального равновесия монотонно уменьшаются с ростом температуры по мере удаления от нижней границы ВО. Таким образом, перенос энергии излучения в сильной ВО имеет характер чистой теплопроводности. Это и доказывает справедливость используемого нами расселандова способа усреднения длины пробега по спектру [2] внутри ВО (см. [1]).

Уравнение (10) интегрируется в квадратурах и дает профиль температуры в ВО

$$t = 1 - (1 - t_2) \exp[-\tau/\tau_k + q(t)], \quad (11)$$

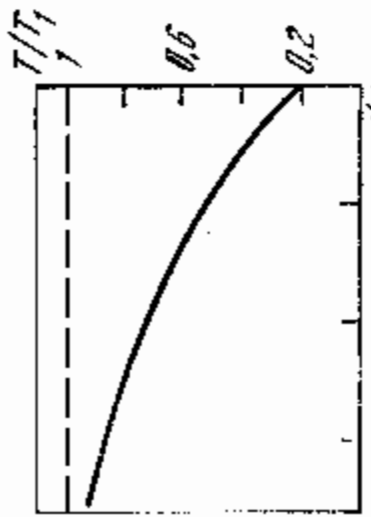


Рис. 1. $T_2/T_1 = 1/5$; $\tau_k = 1670$

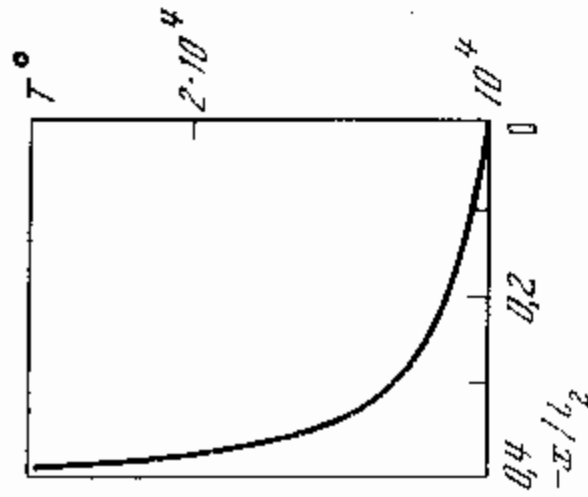


Рис. 2. $T_2 = 10\ 000^\circ$

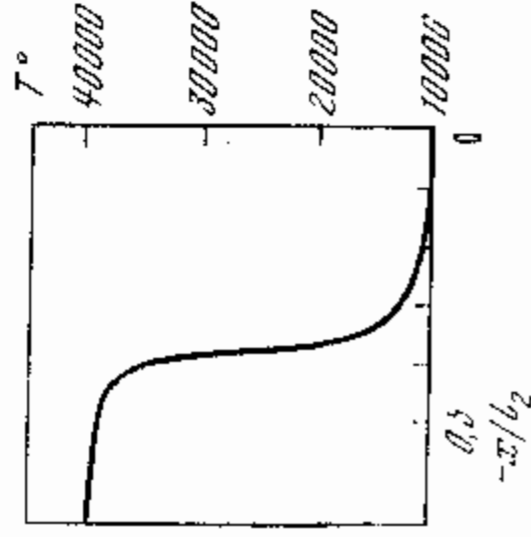


Рис. 3. $T_1 = 40\ 000^\circ$, $T_2 = 10\ 000^\circ$

(10), получим с помощью выражений (3) и (8)

$$-x = \int_0^{\tau} l(T) d\tau = \frac{8(T_1 - T_2)}{3T_2^4} \int_{T_2}^{T_1} \frac{l(T) T^3 dT}{T_1 - T} \quad (13)$$

При температурах, не слишком близких к верхней T_1 , можно приближенно положить в (13) $T_1 - T \approx T_1 - T_2$. Подставляя в (13) длину пробега по формуле (1.3)², получим

$$-\frac{x}{l_2} = \frac{8}{3} z_2^3 \int_z^{z_2} e^{z_2 - z} \frac{dz}{z^3}, \quad z = \frac{l}{kT}, \quad z_2 = \frac{l}{kT_2}; \quad l_2 = l(T_2) \quad (14)$$

Формула (14) подтверждает соображения, высказанные в [1] о том, что температура в ВО имеет резкий уступ со стороны высоких температур. На рис. 2 изображено распределение $T(x)$ на нижнем краю по формуле (14).

Экспоненциальная зависимость $l(T)$, обеспечивающая резкий уступ в ВО, в действительности имеет место лишь в области температур, где существенна только первая ионизация, т. е. до $\sim 30\ 000 \div 40\ 000^\circ$. При более высоких температурах l проходит через минимум и затем возрастает (сравнительно медленно). Поэтому верхний край достаточно сильной волны с $T_1 > 50\ 000 \div 100\ 000^\circ$ довольно сильно растягивается, даже более, чем $T(\tau)$ по формуле (11). (При $l = \text{const}$ в области высоких температур профиль $T(x)$ в этой области в точности совпадал бы с профилем $T(\tau)$.) Примерный профиль температуры во всей волне представлен на рис. 3.

Для того чтобы оценить точность приближения лучистой теплопроводности, в котором был найден профиль температуры и тем самым определить понятие «сильной» волны, можно найти поправку к величине потока $S_2 = 2\sigma T_2^4$ за счет отклонения от локального равновесия. Очевидно, эта поправка дает точность приближенного решения уравнения ВО, так как наибольшее отклонение от локального равновесия имеет место именно на нижней границе волны. Расчет указанной поправки методом последовательных приближений дает $1 - S_2/2\sigma T_2^4 = 0,18$ при $T_1/T_2 = 1,5$; та же величина равна 0,1 при $T_1/T_2 = 2$ и 0,05 при $T_1/T_2 = 3$. Таким образом, точность приближений лучистой теплопроводности быстро увеличивается с возрастанием амплитуды ВО, и волна с $T_1/T_2 = 3$ с точностью 5% может считаться сильной.

² Согласно (1.3), $l \sim (T^2/\rho) \exp [l/kT]$. Вследствие постоянства давления в ВО (см. [1]), $\rho \sim T^{-1}$ и $l \sim T^3 \exp [l/kT]$.

где

$$q(t) = (t - t_2) [1 + (1/2)(t + t_2) + (1/3)(t^2 + tt_2 + t_2^2)]; \quad (11)$$

$$\tau_k = 8(1 - t_2)/3t_2^4, \quad t = T/T_1, \quad t_2 = T_2/T_1.$$

Вблизи нижнего края $T \sim T_2$, так что в сильной ВО $T \ll T_1$. Тогда числитель правой части (10) можно записать с помощью (3) и (8), что дает приближенное решение на нижнем краю волны

$$T^4 = T_2^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \quad (12)$$

Это выражение, естественно, совпадает с диффузионным решением проблемы Милна.

Асимптотический вид профиля при $\tau \gg \tau_k$ можно получить, если положить в формуле (11) $q(t) \approx q(1)$. Эта величина при $t_2 \ll 1$ равна $11/6$. Из получаемой при этом формулы следует, что τ_k представляет собою эффективную оптическую толщину ВО.

Если экстраполировать приближенную формулу (12) вплоть до верхней температуры T_1 , оптическая толщина ВО окажется примерно в 4 раза меньше, чем τ_k . Согласно (11') оптическая толщина ВО возрастает с увеличением ее амплитуды очень быстро, пропорционально $(T_1/T_2)^4$.

На рис. 1 изображено распределение $l(\tau)$ для $t_2 = 0,2$.

Найдем теперь распределение температуры по геометрической координате x . Поместим начало координат на нижней границе волны, где $T = T_2$, $\tau = 0$. Переходя в уравнении (1.10) к новой переменной температуре вместо оптической толщины τ , и подставляя $dT/d\tau$ по формуле

3. Нижний край волны охлаждения и переход к прозрачной зоне охлажденного воздуха

Выше была рассмотрена структура фронта ВО, т. е. того слоя, в котором воздух охлаждается излучением от начальной температуры T_1 до температуры прозрачности T_2 . При этом мы с самого начала определяли температуру прозрачности из общего условия (1.2) и полагали, что при $T_1 < T_2$ воздух абсолютно прозрачен. В действительности поглощение света воздухом, охлажденным ниже температуры T_2 , хотя и мало, но все же конечно.

Что происходит с потоком излучения, уходящим с фронта ВО и как ведет себя температура в зоне охлажденного воздуха? Процесс в этой области является существенно нестационарным, он зависит от конкретных условий: размеров, гидродинамического движения, от дополнительных механизмов поглощения света, которые имеют место при низких температурах (см. [1]). Мы рассмотрим здесь тот практически важный случай, когда давление в воздухе еще не упало до атмосферного и воздух, охлажденный излучением, продолжает охлаждаться адиабатически. Из-за чрезвычайно резкой зависимости $I(T)$ адиабатическое охлаждение весьма быстро выводит воздух в область температур, при которых поглощение становится настолько малым, что эта область воздуха уже не оказывает практически никакого влияния на режим ВО.

В том слое воздуха, который еще может повлиять на общее распределение температуры и в котором температура падает до величины на $1000-2000^\circ$ ниже температуры прозрачности, адиабатическое охлаждение меняется мало. Поэтому процесс с адиабатическим охлаждением является квазистационарным во всей представляющей интерес области.

Проследим за последовательным изменением состояния частицы воздуха, вступающей в сильную ВО или, что то же самое, будем продвигаться в положительном направлении оси x с постоянной скоростью u . Пусть частица вступает в ВО с высокой начальной температурой T_1 . Она начинает быстро охлаждаться излучением. Плотность излучения в частице при этом остается все время ниже равновесной, так как количество поглощаемой в единицу времени энергии меньше количества излучаемой энергии; поток излучения в ней возрастает. Скорость адиабатического охлаждения вначале значительно меньше скорости лучистого охлаждения. Так происходит до тех пор, пока частица не охладится до такой низкой температуры, что скорость адиабатического охлаждения превысит скорость лучистого теплообмена. Вследствие чрезвычайно резкого падения поглощения (и излучения) с понижением температуры уже небольшое адиабатическое охлаждение после этого момента делает частицу почти прозрачной и лучистый теплообмен вскоре прекращается.

При этом плотность излучения, которая определяется потоком, рождающимся в более нагретых слоях и проходящим через частицу, остается почти неизменной. Равновесная же плотность излучения, пропорциональная T^4 , быстро падает. Плотность излучения в «прозрачной» области становится, в отличие от «непрозрачной», больше равновесной (количество энергии, поглощаемой в единицу времени больше количества излучаемой), воздух несколько нагревается излучением, и поток уменьшается.

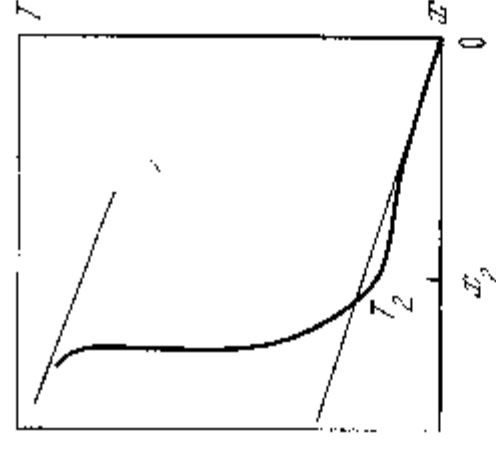


Рис. 4

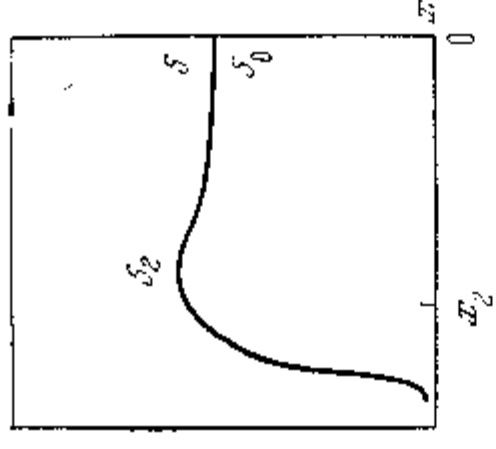


Рис. 5

Следовательно, на оси x существует такая точка $x = x_2$ (соответствующие ей оптическую толщину и температуру обозначим τ_2 и T_2), которая разделяет области «непрозрачного» воздуха, интенсивно охлаждающегося излучением, и почти прозрачного воздуха, слабо нагревающегося излучением. В этой точке плотность излучения в точности равна соответствующей равновесной $U_2 = U_{p_2}$ и поток в ней S_2 максимален.

Очевидно, точку, в которой прекращается охлаждение воздуха излучением, и следует считать нижней границей ВО, а температуру в ней — температурой прозрачности при данном значении адиабатического охлаждения A . Поток S_0 , уходящий на бесконечность, несколько меньше потока S_2 , выходящего с поверхности фронта ВО за счет поглощения в «прозрачной» зоне. Это поглощение оказывается небольшим: оптическая толщина «прозрачной» зоны, согласно оценке, сделанной в Приложении, равна примерно $\tau_2 \approx 0,16$, так что S_0 лишь немного меньше, чем S_2 .

Профили температуры и потока $T(x)$ и $S(x)$, отвечающие описанной выше качественной картине процесса, схематически изображены на рис. 4 и 5. При низких температурах кривая $T(x)$ стелется очень близко около нижней прямой, соответствующей постоянному адиабатическому охлаждению A и потоку S_0 , уходящему на бесконечность, причем она приближается к этой прямой снизу, так как воздух в этой области нагревается излучением. Со стороны высоких температур кривая $T(x)$ резко

отходит от верхней прямой, соответствующей адиабатическому охлаждению A и нулевому потоку. На нижнем краю ВО, где поток максимален, отклонение температуры вниз от нижней прямой также максимально, что видно из энергетического уравнения (1.6).

Как показано в Приложении, температура прозрачности лишь логарифмически зависит от величины адиабатического охлаждения и от амплитуды ВО.

Приносим благодарность акад. Н. Н. Семенову за стимулирующие дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим стационарный режим сильной ВО с адиабатическим охлаждением A . В интеграле энергии (1.17) константа интегрирования так же, как и в случае слабой ВО, равняется потоку, уходящему на бесконечность:

$$u_1 c_p T + S = -Ax + S_0. \quad (15)$$

Со стороны низких температур, когда поток S стремится к S_0 , кривая температуры приближается к нижней прямой

$$u_1 c_p T = -Ax, \quad (16)$$

а со стороны высоких температур, при $S \rightarrow 0$ — к верхней прямой³

$$u_1 c_p T = -Ax + S_0. \quad (17)$$

В «прозрачной» области $|x| > |x_2|$, где можно пренебречь адиабатическим охлаждением, решение уравнений совпадает с решением, полученным в разделе 2. Следует только писать не частный интеграл (11), проходящий через точку $\tau = 0$, $T = T_2$, а общий — проходящий через произвольную пока точку $(\tau_2; T_2)$. Если экстраполировать это решение вплоть до температуры прозрачности T_2 , то получим прежнюю связь потока с температурой T_2 : $S_2 = 2\sigma T_2^4$.

В «прозрачной» области $|x| < |x_2|$ при низких температурах излучательная способность очень мала, поток является одностронним: все кванты двигаются только «вперед», выходя из области с достаточно высокой температурой. При этом интегральные выражения (1.13), (1.14) принимают вид

$$S = cU/2 = S_0 e^{2x}. \quad (18)$$

³ В режиме без адиабатического охлаждения условие $S \rightarrow 0$ со стороны высоких температур было эквивалентно условию, что температура $T \rightarrow T_1 = \text{const}$. Здесь же температурный градиент не только отличен от нуля, но стремится к константе при высоких температурах, поэтому для выполнения условия $S \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ и существования режима необходимо, чтобы $l \rightarrow 0$ достаточно быстро при $T \rightarrow \infty$. В задаче о слабой ВО это условие выполнялось автоматически благодаря использованию аппроксимационной формулы (1.23).

Экстраполяция этого решения, справедливого при $U_p \ll U$, к точке x_2 , где $U_2 = U_p$, также приводит к потоку $S_2 = 2\sigma T_2^4$.

По определению, температура прозрачности соответствует тому месту в волне, в котором скорость лучистого теплообмена dS/dx меняет знак, т. е. обращается в нуль. Однако ясно, что эта температура весьма близка к той, при которой скорость лучистого охлаждения частицы падает до величины порядка скорости адиабатического охлаждения. В самом деле, как уже было сказано выше, вследствие резкой температурной зависимости коэффициента поглощения, которому пропорциональна скорость лучистого охлаждения, уже небольшое адиабатическое снижение температуры резко понижает скорость лучистого теплообмена. Поэтому температуру прозрачности T_2 можно определить из условия равенства скорости лучистого охлаждения, найденной по экстраполированному решению в «непрозрачной» области, и скорости адиабатического охлаждения A .

Воспользуемся для вычисления скорости лучистого охлаждения в точке с температурой T_2 формулами (1), (3), (8), (9), (1.10):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS}{dx}\right)_2 &= -u_1 c_p \left(\frac{dT}{dx}\right)_2 = u_1 c_p \frac{3S_2}{16\sigma T_2^3 l(T_2)} = \\ &= \frac{3}{8} \frac{u_1 c_p T_2}{l(T_2)} = \frac{3}{4} \frac{\sigma T_2^4}{l(T_2) (T_1/T_2 - 1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, мы приходим к трансцендентному уравнению для определения температуры прозрачности через скорость ВО или через величину верхней температуры ВО T_1 :

$$\frac{8}{3} \frac{A l(T_2)}{u_1 c_p T_2} = \frac{4}{3} \frac{A l(T_2) (T_1/T_2 - 1)}{\sigma T_2^4} = 1. \quad (20)$$

Благодаря экспоненциальной зависимости $l(T)$ температура прозрачности лишь логарифмически зависит от амплитуды ВО, которая характеризуется ее скоростью или верхней температурой, и от адиабатического охлаждения.

Ясно, что определенная уравнением (20) температура с логарифмической точностью равняется «истинной» температуре прозрачности, которая определяется условием равенства нулю лучистого теплообмена, что и обосновывает возможность сделанного приближения. Геометрически условие (20) означает, что мы экстраполируем решение со стороны «непрозрачной» области до тех пор, пока наклон температурной кривой dT/dx не совпадает с наклоном прямой (16), к которой снизу приближается температурная кривая в «прозрачной» области (см. рис. 4).

Остается еще определить положение нижнего края ВО, т. е. координаты x_2 и τ_2 . Для этого вычислим приближенно оптическую толщину τ , соответствующую какой-нибудь точке x в «прозрачной» области. Замечая, что в пределе низких темпера-

тур поглощение потока ничтожно ($S \approx S_0$) и кривая температуры $T(x)$ почти совпадает с нижней прямой (17), получим

$$\tau \approx - \int_0^x \frac{dx}{l(T)} \approx - \int_0^x \frac{dx}{dT} \frac{dT}{l(T)} \approx \frac{u r_1 c_p}{A} \int_0^x \frac{dT}{l(T)}. \quad (21)$$

Здесь имеется в виду «точная» формула Крамерса для длины пробега вместо приближения (1.23), согласно которой $l = \infty$ при $T = 0$. Подставляя в (21) длину пробега по формуле (1.3) и принимая во внимание, что при низких температурах экспоненциальная зависимость гораздо резче степенной, найдем в результате приближенного интегрирования

$$\tau \approx \frac{u r_1 c_p T}{A l(T)} \frac{kT}{l} = \frac{|x|}{l(T)} \frac{kT}{l}. \quad (22)$$

По самому своему выводу эта формула справедлива при $\tau \ll 1$. Если отнести ее к нижнему краю ВО, т. е. к точке, где $T = T_2$, получим с помощью (20)

$$\tau_2 \approx 8kT_2/3I. \quad (23)$$

Поскольку в воздухе $I = 14$ eV, а $T_2 \approx 10\,000^\circ$, $\tau_2 \approx 0,164$ оказывается достаточно малой величиной, и выражение (23) можно рассматривать как оптическую толщину нижнего края ВО.

Геометрическая координата нижнего края ВО, которая согласно (22), (23) равна

$$|x_2| = u r_1 c_p T_2 / A = \tau_2 I(T_2), \quad (24)$$

представляет собой при этом расстояние, на котором температура вследствие адиабатического охлаждения спадает от T_2 до нуля.

Как и следовало ожидать, длина пробега, соответствующая температуре прозрачности, как раз имеет порядок этого характерного масштаба, задаваемого величиной адиабатического охлаждения и временем его действия.

Л и т е р а т у р а

1. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец, Ю. П. Райзер. ЖЭТФ, 1958, 34, 1278; см. наст. изд., стр. 52.
2. А. Унзольд. Физика звездных атмосфер. М., ИЛ, 1949.

РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ АТОМНОГО ВЗРЫВА. I*

Известно, что взрывы атомных бомб сопровождаются характерными радиосигналами, которые принимаются на расстоянии тысяч и десятков тысяч километров. При распространении на столь большие расстояния спектр радиоимпульса значительно усложняется по сравнению с тем, который имел первоначально испущенный импульс [1]. В настоящей работе будет изучаться только этот последний. В такой форме он может быть зарегистрирован на расстоянии, скажем, ста километров от места взрыва. Иными словами, будет найден эффективный излучатель.

Г. М. Гандельман и Л. П. Феоктистов указали (частное сообщение), каким образом в воздухе возникает электрическое поле под действием γ -квантов. Кванты выбивают комптоновские электроны, которые летят преимущественно вперед, т. е. от места взрыва. Но так как поток квантов приблизительно экспоненциально убывает с расстоянием от места взрыва, количество отрицательных зарядов, перемещаемых на разных расстояниях, различно. Неравномерная плотность заряда приводит к появлению электрического поля.

На своем пути комптоновские электроны рождают большое число вторичных электронов, тем самым делая воздух проводящим, и возникает ток, стремящийся уничтожить поле. Если есть асимметрия вылета γ -квантов, ток излучает электромагнитный импульс. Но длительность импульса, связанного с электронному току, может быть порядка одной или немногих микросекунд, что может давать радиоволны метрового диапазона. Большой интерес представляют более длинноволновые колебания.

Причину этих колебаний указал О. И. Лейпунский (частное сообщение). Электроны присоединяются не к положительным ионам, а в основном к нейтральным молекулам O_2 . Воздух приобретает ионную проводимость, и ток в нем сохраняется гораздо дольше, чем в стадии электронной проводимости. К моменту установления ионной проводимости в воздухе остается еще электрическое поле. О. И. Лейпунский показал, что величина этого поля практически независима от начальной ионизации в данной точке пространства, так как чем больше ионизация, тем больше и начальная плотность объемного заряда, но тем больше и электронная проводимость воздуха, благодаря которой этот объемный заряд рассасывается. Тот же результат, но в более строгой форме получается и в настоящей ионизации, то на нем не сказывается и начальная асимметрия вылета квантов. Поэтому оно оказывается чисто радиальным и симметричным. Источником асимметрии является ионная проводимость воздуха,

* ЖЭТФ, 1958, 35, вып. 6 (12), 1538.

которая, конечно, больше с той стороны, куда вылетело больше квантов. Как показывают дальнейшие расчеты, асимметричный ионный ток приводит к радиоимпульсу разумного порядка величины и ожидаемой длительности.

1. Начальное поле

Пусть число γ -квантов, выходящих из места взрыва в единице телесного угла в единицу времени в данном направлении, есть $\dot{N}_0/4\pi$ (полное число вышедших квантов будет тогда \dot{N}_0 , где усреднение производится по телесному углу). Назовем пробег кванта λ , а число вторичных электронов, приходящихся на один комптоновский электрон, ν . Тогда число свободных электронов, возникающих на расстоянии r от места взрыва в единицу времени в единице объема, есть

$$J = \dot{N}_0 \nu e^{-r/\lambda} / 4\pi \lambda^2. \quad (1)$$

Эффектов, связанных с многократным рассеянием квантов, мы здесь рассматривать не будем, так как они имеют второстепенное значение.

Если γ — вероятность прилипания электрона к молекуле в единицу времени, а n_e — объемная концентрация вторичных электронов, то n_e удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial n_e / \partial t + \gamma n_e = J, \quad (2)$$

интеграл которого есть

$$n_e = e^{-\gamma t} \int_0^t J(t') \exp(\gamma t') dt'. \quad (3)$$

Плотность объемного заряда ρ определяется из закона сохранения заряда, который в данном случае приводит к такому уравнению:

$$\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div} \sigma_e E + \dot{\rho}_0, \quad (4)$$

где E — электрическое поле, σ_e — электронная проводимость воздуха, которая значительно больше его ионной проводимости, пока есть свободные электроны, и $\dot{\rho}_0$ — скорость возрастания плотности объемного заряда, создаваемой перемещением комптоновских электронов в воздухе.

Назовем среднюю радиальную составляющую пробега комптоновских электронов l . Очевидно, что $l \ll \lambda$. $\dot{\rho}_0$ определяется разностью между числом электронов, вышедших из данной точки и пришедших в нее, или

$$\dot{\rho}_0 = e [J(r) - J(r+l)]/\nu.$$

Для точек, не слишком близких к центру, это дает

$$\dot{\rho}_0 = J l e / \lambda \nu. \quad (5)$$

Согласно уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} E = 4\pi \rho. \quad (6)$$

Подставляя это в (4), находим

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma_e E \right) = \dot{\rho}_0. \quad (7)$$

Заметим, что диффузионный ток был отброшен, так как он гораздо меньше тока проводимости в данных условиях.

Как уже указывалось, σ_e и ρ_0 зависят от угла. Тем не менее будет показано, что в интересующие нас моменты времени поле имеет только радиальную составляющую. Поэтому операция div в правой части (6) фактически содержит только производные по r :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma_e E_r \right) \right) = \dot{\rho}_0. \quad (8)$$

На E_r налагается граничное условие $E_r(\infty, t) = 0$. Интегрируя уравнение (8) с этим условием и используя (5) и (1), находим

$$\partial E_r / \partial t + 4\pi \sigma_e E_r = -(\dot{N}_0 e l / \lambda \nu^2) \exp(-r/\lambda). \quad (9)$$

Отсюда

$$E_r = - (e l / r^2 \lambda) e^{-r/\lambda} \int_0^t \exp \left\{ -4\pi \int_{r'}^t \sigma_e(t'') dt'' \right\} \dot{N}_0(t') dt'. \quad (10)$$

Здесь, как уже указывалось, σ_e — электронная проводимость воздуха. Обозначая подвижность электрона буквой ω_e , получим [см. (3)]

$$\sigma_e = e \omega_e n_e = \frac{e \omega_e \nu}{4\pi r^2 \lambda} e^{-r/\lambda} \int_0^t \dot{N}_0(t''') \exp \{ \gamma (t''' - t) \} dt'''. \quad (11)$$

В выражение для E_r входит интеграл от σ_e по времени, в котором можно свести двукратное интегрирование к однократному, что дает

$$4\pi \int_{r'}^t \sigma_e dt'' = \frac{e \omega_e \nu}{r^2 \lambda} e^{-r/\lambda} \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^t \dot{N}_0(t'') (1 - \exp \{ \gamma (t'' - t) \}) dt'' - \int_0^{t'} \dot{N}_0(t'') (1 - \exp \{ \gamma (t'' - t') \}) dt'' \right]. \quad (12)$$

Чтобы найти E_r , надо задаться явной зависимостью \dot{N}_0 от времени. Относительно вида этой зависимости можно высказать следующее. Сначала, когда цепная реакция еще только развивается, $\dot{N}_0(t)$ весьма быстро нарастает. После достижения максимума $\dot{N}_0(t)$ убывает, но значительно медленнее, чем происходило нарастание.

Можно задаться зависимостью

$$\dot{N}_0(t) = A \exp\{-\beta t\}. \quad (13)$$

Как видно из дальнейших вычислений, поле E_r весьма мало чувствительно к величине β , если только выполнено простое неравенство

$$\beta < \gamma. \quad (14)$$

$1/\gamma$ — время прилипания электрона к молекуле — составляет примерно $4 \cdot 10^{-7}$ сек (см. [2]), величина же $1/\beta$ больше, что и дает основание написать неравенство (14).

Подставляя зависимость (13) в формулу (12) и выполняя интегрирование, находим

$$E_r = \frac{et}{\lambda r^2} e^{-r/\lambda} \exp\left\{-\frac{e\omega_e \nu \exp(-r/\lambda)}{r^2 \lambda \gamma} \left[\frac{A}{\beta} - \frac{A\gamma \exp(-\beta t)}{\beta(\gamma - \beta)} + \frac{A \exp(-\gamma t)}{\gamma - \beta} \right] \int_0^t A e^{-\beta t'} dt' \exp\left\{-\frac{e\omega_e \nu \exp(-r/\lambda)}{r^2 \lambda \gamma} \times \left[\frac{A}{\beta} - \frac{A\gamma \exp(-\beta t')}{\beta(\gamma - \beta)} + \frac{A \exp(-\gamma t')}{\gamma - \beta} \right] \right\}. \quad (15)$$

В экспоненциальные функции этого выражения входит величина

$$e\omega_e A \nu \exp(-r/\lambda) \lambda r^2 \beta (\gamma - \beta).$$

Полагая A/β равным полному числу квантов, например 10^{22} , ν , т. е. число вторичных электронов на γ -квант, $\sim 3 \cdot 10^4$, $r \sim \lambda \sim \sim 3 \cdot 10^5$ см, $\omega_e \sim 2,5 \times 10^6$ CGSE, находим, что выражение в скобках имеет порядок $4 \cdot 10^3$, т. е. очень велико. Но отсюда следует, что основной вклад в интеграл (15) дают большие значения t' , когда функция $\exp(-\beta t')$ меньше всего, потому что она входит в интеграл с отрицательным знаком (отсюда понятно, почему не существенна фаза нарастания потока квантов). Это верно в том случае, когда выполнено неравенство (14), т. е. когда экспонента $\exp(-\gamma t')$ меньше $\exp(-\beta t')$. Тогда экспонента $\exp\{-\gamma t'\}$ вообще не сказывается на величине интеграла и выпадает из окончательного выражения для E_r , если t не слишком мало. В результате интегрирования получится

$$E_r = E_{\infty} - (\gamma - \beta) l / \omega_e \nu. \quad (16)$$

Аналогичную оценку получил О. И. Лейпунский.

Итак, полное число γ -квантов и их угловое распределение действительно не сказываются на величине остаточного поля E , если только A/β достаточно велико. Но это практически всегда выполнено.

E означает радиальное поле. Оно не обращается в нуль в начале координат. Поэтому плотность заряда имеет в начале координат особую точку:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} r^2 E = \frac{E}{2\pi r}.$$

Но эта особая точка не дает никакого вклада в полный заряд, так как при интегрировании по объему ρ множится на $r^2 dr$. Физически появление такой особой точки вполне оправдано, потому что в начале имеет особую точку $J(r, t)$. Численная оценка дает для E порядок величины около 2 В/см.

2. Электромагнитные колебания

Время образования начального поля порядка $1/\beta$, что можно принять около одной микросекунды. Период электромагнитных колебаний примерно в 10 раз больше. Поэтому весь процесс можно разбить на две стадии: первая стадия — возникновение поля, рассмотренное выше, и вторая стадия — затухающие колебания, вызванные полем.

Во второй стадии проводимость воздуха — ионная. Соответственно этому затухание колебаний значительно меньше, чем если бы оно было вызвано электронной проводимостью.

Число ионов непрерывно уменьшается вследствие их рекомбинации. Процесс рекомбинации следует учитывать вместе с ионной проводимостью, потому что константа рекомбинации связана с подвижностью ионов соотношением (см. [2])

$$b \approx 4\pi e (\omega_+ + \omega_-) = 4\pi e \omega. \quad (17)$$

Оно удовлетворительно согласуется с опытом при атмосферной плотности воздуха.

Найдем теперь выражение для ионной проводимости воздуха в зависимости от координат и времени. Для плотности ионов одного знака имеем $dn/dt = -bn^2$, откуда

$$n = 1/(bt + 1/n_0). \quad (18)$$

Здесь n_0 — начальное число ионов в см³. Считая, что угловая зависимость вылета квантов выражена слабо, запишем

$$n = 1/(bt + (1 + \xi \cos \theta)/n_0).$$

Ограничиваясь величинами первого порядка малости по ξ , найдем выражение для электропроводности

$$\sigma = ne\omega = \frac{e\omega \xi \cos \theta}{bt + 1/n_0} - \frac{e\omega \xi \cos \theta}{n_0 (bt + 1/n_0)^2} \equiv \sigma_0 + \sigma_1 \cos \theta. \quad (19)$$

Здесь \bar{n}_0 определяется равенством

$$\bar{n}_0 = (Av/4\pi b\lambda^3) \mu(r/\lambda), \quad (20)$$

где

$$\mu(x) = x^{-2} e^{-x}. \quad (21)$$

Таким образом, в начальный момент поле радиально симметрично и дается равенством (16); а электропроводность зависит от угла. Поэтому соответствующей асимметрией будет обла- дать и ток.

Электропроводность поведет к ослаблению начального поля со временем. Удерживая только член σ_0 , имеем

$$\partial E_{or}/\partial t + 4\pi\sigma_0 E_{or} = 0, \quad (22)$$

где индекс 0 при E_{or} напоминает о том, что в этом приближении поле считается центрально симметричным. Интегрируя (22), находим с помощью (18)

$$E_{or} = E \exp \left\{ - \int_0^t 4\pi\sigma_0 dt' \right\} = E \exp \left\{ - \frac{4\pi\sigma_0}{b} \ln(b + 1/\bar{n}_0) t \right\}. \quad (23)$$

Если понимать равенство (17) буквально, то следует заменить коэффициент при логарифме на 1. Мы положим, однако,

$$4\pi\sigma_0/b \equiv \alpha, \quad (24)$$

где α можно определить из опытных данных. Таким образом,

$$E_{or} = E (bt\bar{n}_0 + 1)^{-\alpha}. \quad (25)$$

Влияние рекомбинации приводит к степенному затуханию поля вместо экспоненциального, как это было бы при постоянной во времени концентрации ионов. Малая по предположению величина $\sigma_1 \cos \theta$ будет умножаться на E_{or} , что дает неоднородность в уравнениях Максвелла, приводящую к появлению асимметричного тока. Конечно, предположение о малости асимметрии вызвано только расчетными причинами. При произвольной стелени асимметрии пришлось бы численно интегрировать уравнения Максвелла с тремя переменными (радиус, угол и время), что неизмеримо труднее, чем (тоже численно) определять величины, зависящие только от радиуса и от времени.

Уравнения Максвелла запишем в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}. \quad (26)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (27)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (28)$$

Уравнения для $\text{div } \mathbf{E}$, как обычно для проводящих сред, писать не надо, так как оно следует из (26).

Решение для системы (26) — (28) ищем в виде

$$E_r = E_{or} + E_1 \cos \theta, \quad E_\theta = E_2 \sin \theta, \quad E_\phi = 0;$$

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\phi = H \sin \theta.$$

После такой подстановки угловая зависимость отделяется и получается система уравнений для E_1 , E_2 и H .

Вводим следующие безразмерные переменные:

$$x = r/\lambda, \quad y = ct/\lambda, \quad H = \xi E H', \quad E_1 = \xi E E_1', \quad E_2 = \xi E E_2',$$

$$m = (e\omega v/\alpha\lambda^2 c) A/\beta.$$

Тогда окончательно система, подлежащая численному интегрированию, принимает вид¹

$$\frac{2H'}{x} = \frac{\partial E_1'}{\partial y} + \frac{m\alpha\mu(x)E_1'}{m\mu(x)y+1} + \frac{m\alpha\mu(x)}{(m\mu(x)y+1)^{2+\alpha}}; \quad (29)$$

$$-\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} xH' = \frac{\partial E_2'}{\partial y} + \frac{m\alpha\mu(x)E_2'}{m\mu(x)y+1}; \quad (30)$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (xE_2') + E_1' \right) = - \frac{\partial H'}{\partial y}, \quad (31)$$

причем $\mu(x)$ дается формулой (21).

Начальные условия над H' , E_1' , E_2' заключается в том, что все они при $t=0$ равны нулю.

При $r=0$ электрическое поле, по соображениям симметрии, должно быть направлено по той прямой, от которой отсчитывается угол θ . Это дает

$$E_1'(0, t) + E_2'(0, t) = 0. \quad (32)$$

Магнитное поле в начале координат должно равняться нулю:

$$H'(0, t) = 0. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь вопрос об излучении электромагнитных волн. На большом расстоянии от места взрыва, где функцию $\mu(x)$ можно считать равной нулю, система (29) — (31) путем подстановки

$$\zeta = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 H') \quad (34)$$

приводится к волновому уравнению

$$d^2 \zeta / dx^2 - d^2 \zeta / dy^2 = 0, \quad (35)$$

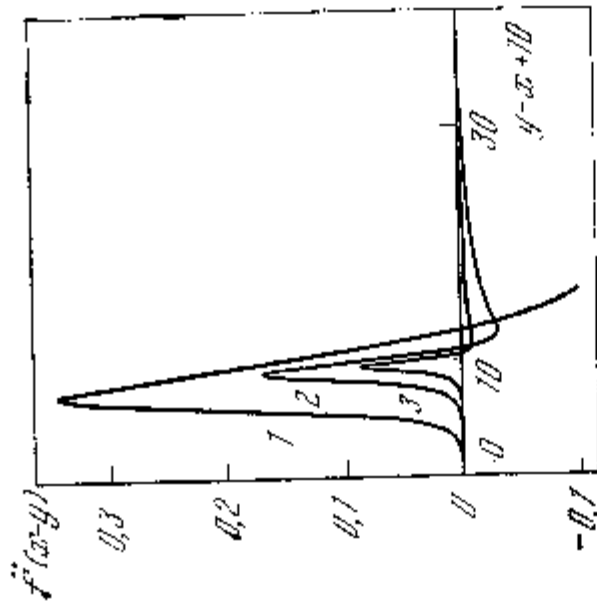
¹ Если асимметрия вылета квантов квадрупольная, вида $\xi(3 \cos^2 \theta - 1)/2$, то в уравнение (31) войдет коэффициент 3 при E_1' .

решение которого представим как $\zeta = \dot{f}(x-y)$. Через функцию \dot{f} поле выражается по формулам

$$H' = x^{-1}\dot{f}(x-y) - x^{-2}\dot{f}(x-y), \quad (36)$$

$$E'_2 = x^{-1}\dot{f}(x-y) - x^{-2}\dot{f}(x-y) + x^{-3}\ddot{f}(x-y).$$

Таким образом, функция $\dot{f}(x-y)$ определяет эффективный излучающий диполь. Он определяется путем численного интегрирования системы вдоль характеристики $x=y$ до той области, где $\mu(x) = 0$. Результаты интегрирования приведены на рисунке для трех случаев. По ординате отложена функция $\dot{f}(x-y)$, определяющая поле в волновой зоне, а по абсциссе — величина $y-x+10$. Как видно, амплитуда сигнала зависит от величины m , т. е. от полного числа квантов, приблизительно логарифмически.



Значения параметров: 1 — $\alpha=4$, $m=200$; 2 — $\alpha=1$, $m=10$; 3 — $\alpha=1$, $m=1$

В заключение приношу благодарность О. И. Лейпунскому, который указал на роль ионной проводимости воздуха при возникновении радиосигнала и стимулировал настоящую работу многочисленными дискуссиями. Анализ уравнений и необходимые расчеты по данной задаче проводила группа А. А. Милютина, которой я также приношу глубокую признательность. А. А. Дороницына и М. В. Келдыша благодарю за предоставление вычислительных машин.

Литература

1. Я. Л. Альперт, УФН, 1956, 60, 369.
2. А. Энгель, М. Стеенбек, Физика и техника электрического разряда в газах. т. I. М.—Л., ГТТИ, 1936.

В работе [1] показано, что асимметричные ионные токи в воздухе, возникающие благодаря начальной асимметрии вылета γ -квантов из места взрыва, приводят к появлению радиосигнала¹. Всякое заметное отклонение от симметрии может вызвать радиосигнал. О. И. Лейпунский рассмотрел влияние электрического поля земли на проводящую область воздуха около места взрыва и возникающий при этом радиосигнал. Он указал также, что магнитное поле земли, вызывая азимутальное отклонение мегавольтовых комптоновских электронов, выбиваемых γ -квантами, может вызвать радиоизлучение магнитодипольного типа. В настоящей статье будет показано, что это излучение может создавать поля напряженностью порядка $2-3$ в/м на расстоянии 60 км от места взрыва. Эти поля в десять раз меньше тех, которые изучены в работе [1], и никогда не могут (даже при самых специальных обстоятельствах) погасить их из-за разной симметрии электрического и магнитного диполей.

Азимутальный ток

Пусть полярная ось сферической системы координат совпадает с направлением земного магнитного поля. Тогда направленная азимутальная составляющая скорости комптоновского электрона v_ϕ в магнитном поле земли будет равна по порядку величины

$$v_\phi = eicH_v/\epsilon, \quad (1)$$

где ϵ — энергия электрона; l — его направленный пробег в воздухе, составляющий около 2 м при $\epsilon \approx 1$ Мэв; H_v — полярная составляющая магнитного поля (с учетом искажения, вносимого током).

Азимутальная составляющая тока выражается через радиальную составляющую следующим образом:

$$i_\phi = \frac{v_\phi}{v_r} i_r. \quad (2)$$

Выражение для радиальной составляющей тока было получено в работе [1]. Мы перепишем его с учетом запаздывания распространения γ -квантов. Для простоты расчетов будем полагать, что вылет γ -квантов из места взрыва следует экспоненциальному

* Атомная энергия», 1960, 9, 265.

¹ Если подставить в формулу (16) работы [1] исправленные значения подвижности электронов и времени прилипания электрона к молекуле O_2 , то полученный результат при прочих равных условиях окажется раз в 40 больше результата, приведенного в формуле (16).

закону

$$\dot{N}(t) = Ae^{-\beta t}, \quad (3)$$

где A/β — полное число γ -квантов. Тогда для радиального тока получится выражение

$$j_r = \frac{e t A^{-\beta t}}{4\pi r \lambda \left(1 - \beta \frac{\lambda}{c}\right) r^2} \left(e^{r\left(\frac{\beta}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)} - e^{t\left(\beta - \frac{c}{\lambda}\right)} \right), \quad (4)$$

где λ — свободный пробег γ -кванта в воздухе, который для γ -квантов с энергией 2 Мэв составляет около 170 м.

Отсюда получается азимутальный ток комптоновских электронов

$$j_\varphi = \frac{\dot{N}(t) e t^2 H_0 \left(e^{r\left(\frac{\beta}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)} - e^{t\left(\beta - \frac{c}{\lambda}\right)} \right)}{4\pi r^2 \lambda R H_0 \left(1 - \beta \frac{\lambda}{c} \right)}, \quad (5)$$

где R — радиус вращения электронов в поле с напряженностью H_0 (произведение RH_0 не зависит от величины поля).

Вытеснение магнитного поля из ионизированного воздуха

Комптоновские электроны создают вторичную ионизацию воздуха. Один мегавольтный электрон создает приблизительно $\nu \approx 3 \cdot 10^4$ электронов. Эти электроны присоединяются в основном к нейтральным молекулам кислорода. Рекомбинируют уже отрицательные молекулярные ионы с положительными. Так как подвижность ионов по крайней мере в 1000 раз меньше, чем электронов, в начальной стадии можно пренебречь ионной проводимостью по сравнению с электронной. Если скорость соединения электронов к молекулам обозначить γ , подвижность вторичного электрона в воздухе — ω_e и электронную проводимость — σ_e , то для азимутальной составляющей тока проводимости получим

$$\sigma_e \mathcal{E}_\varphi = \frac{e \omega_e \nu}{4\pi r^2 \lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \int_{r/c}^t \dot{N} \left(t' - \frac{r}{c} \right) e^{\gamma(t'-t)} dt' e_\varphi. \quad (6)$$

Так же как и в работе [1], мы предположим, что $\beta < \gamma$. Тогда можно пренебречь экспонентой $e^{-\gamma t}$ по сравнению с экспонентой $e^{-\beta t}$, и выражение для азимутального электрического тока будет выглядеть так:

$$\sigma_e \mathcal{E}_\varphi = \frac{e \omega_e \nu}{4\pi r^2 \lambda} \frac{A e^{-\frac{r}{\lambda} - \beta \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{\gamma - \beta}. \quad (7)$$

Запишем теперь уравнения Максвелла. Для этого введем следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi^0 \sin \vartheta; \quad H_\vartheta = H_\vartheta^0 \sin \vartheta; \quad H_r = H_r^0 \cos \vartheta; \\ j_\varphi = j_\varphi^0 \sin \vartheta. \quad (8)$$

Радиальная проекция электрического поля не входит в данную задачу. Угловая зависимость поля исключается, и мы приходим к следующей системе:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_r^0 + \frac{H_\vartheta^0}{r} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_\varphi^0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma_e \mathcal{E}_\varphi^0 + \frac{4\pi}{c} j_\varphi^0; \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mathcal{E}_\varphi^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial H_r^0}{\partial t}; \quad (10)$$

$$\frac{2\mathcal{E}_\varphi^0}{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r^0}{\partial t}. \quad (11)$$

Последние два члена в правой части выражения (9) пропорциональны потоку γ -квантов A/β . Можно полагать, что величина A/β для разных значений полного эквивалента взрыва, начиная с килограммов, является достаточно большой [1], и поэтому в выражении (9) можно оставить только члены, пропорциональные A/β . При этом в выражении для j_φ^0 надо пренебречь экспонентой $e^{-\frac{r}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c} \right)}$ по сравнению с $e^{-\beta \left(t - \frac{r}{c} \right)}$. Действительно, $c/\lambda \approx 1,7 \cdot 10^6$, а β — порядка нескольких единиц на 10^3 [1]. При этом в равенстве

$$\sigma_e \mathcal{E}_\varphi^0 + j_\varphi^0 = 0 \quad (12)$$

сокращаются все экспоненциальные члены и получается простая зависимость

$$\mathcal{E}_\varphi^0 = -\frac{r^2 (\gamma - \beta)}{R H_0 \omega_e \nu \left(1 - \beta \frac{\lambda}{c} \right)} H_\vartheta^0 \equiv -\alpha H_\vartheta^0. \quad (13)$$

Постоянная $\alpha \approx 10^{-2}$. Аналогичное приближение [1] давало величину

$$\mathcal{E}_r^0 = \frac{(\gamma - \beta) t}{v \omega_e}.$$

Подставляя выражение (13) в (10), приходим к уравнению

$$\alpha \frac{\partial}{\partial r} r H_\vartheta^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} r H_\vartheta^0 = 0 \quad (14)$$

откуда

$$H_\vartheta^0 = \frac{1}{r} f \left(r - ct \alpha \right), \quad (15)$$

а из выражения (11) следует, что

$$H_r^0 = -\frac{2}{r^2} \int dr f(r - ct\alpha). \quad (16)$$

При $t=0$ имеем $H_\phi^0 = -H_0$, где H_0 — невозмущенное поле земли, так что $f(r) = -r$. Следовательно,

$$H_\phi^0 = -H_0 \frac{r - ct\alpha}{r} \quad (17)$$

при $r > ct\alpha$

$$H_r^0 = H_0 \frac{(r - ct\alpha)^2}{r^2} \quad (18)$$

и

$$H_\phi^0 = 0 \quad H_r^0 = 0 \quad \text{при } r < ct\alpha.$$

Таким образом, поле совершенно вытесняется только из весьма малого объема. Но это вытеснение не равносильно образованию магнитного диполя соответствующих размеров, как бы находящегося в среде с бесконечно большой проводимостью. Поле магнитного диполя уменьшается обратно пропорционально кубу расстояния. В нашем случае добавка к невозмущенному полю, как это следует из выражений (17) и (18), обратно пропорциональна расстоянию.

Ионная проводимость

Так как электронная проводимость уменьшается экспоненциально, а ионная — обратно пропорционально времени, то через достаточно большой промежуток времени последняя всегда будет преобладать. Ясно, что при этом исчезнет основная причина для описанного выше вытеснения магнитного поля. Чтобы точнее сравнить электронную и ионную проводимости, мы не будем, как в работе [1], считать, что все электроны мгновенно выделились и присоединились к молекулам, а рассмотрим все процессы вместе, т. е. выбивание вторичных электронов, их присоединение к молекулам и рекомбинацию отрицательных ионов с положительными.

Уравнения баланса числа ионов обоих знаков в единице объема n_+ и n_- имеют вид

$$\frac{dn_+}{dt} = -bn_+n_- + De^{-\beta t}; \quad (19a)$$

$$\frac{dn_-}{dt} = -\frac{bn_+n_- + \gamma D(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t})^2}{\gamma - \beta}, \quad (19b)$$

Значение $\gamma = 10^7$ получается из монографии [2], если принять, что закон $1/\nu$ для эффективного поперечника захвата электрона молекулой O_2 начина-

где $D \equiv Ae^{-r/\lambda} \frac{\nu}{4\pi r^2 \lambda}$; b — коэффициент рекомбинации; t — время с учетом запаздывания. Вычитая одно уравнение из другого и интегрируя результат с начальным условием $n_+(0) - n_-(0) = 0$, получим

$$n_+ = n_- + \frac{D}{\gamma - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}), \quad (20)$$

так что n_+ можно легко исключить из системы (19) и получить уравнение Риккати для n_- .

Делая обычную подстановку

$$n_- = \frac{1}{bz} \frac{dz}{dt}, \quad (21)$$

получим линейное уравнение для z , которое выписывать не будем. В этом уравнении удобно избавиться от первой производной, для чего следует сделать подстановку

$$z = \xi e^{-\frac{D}{2\gamma}(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t})}, \quad (22)$$

приводящую к уравнению для ξ :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi \left[-Db \left(e^{-\beta t} - \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \right) - \left(\frac{Db}{2\gamma} \right)^2 (e^{-\beta t} - e^{-\gamma t})^2 \right] = 0. \quad (23)$$

В дальнейшем будет приниматься, что $\beta \ll \gamma$.

Фактически нас интересует решение при $\beta t \approx 1$, когда член $e^{-\gamma t}$ пренебрежимо мал. Но начальное условие накладывается на ξ при $t=0$, когда обе экспоненты $e^{-\beta t}$ и $e^{-\gamma t}$ равны. Поэтому исследовать уравнение (23) надо осторожно. Удобно обратиться к методу аналитического сопряжения решений, примененному в работе [4].

Рассмотрим сначала область, где $\gamma t \approx 1$. Тогда $e^{-\beta t}$ можно заменить единицей. Решение, удовлетворяющее начальному условию, выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [5]. Это решение можно распространить на область значений t , где $e^{-\gamma t} \ll 1$, а $e^{-\beta t}$ еще очень мало отличается от единицы. Там ξ имеет вид экспоненты:

$$\xi = \exp \left(t \sqrt{Db + \left(\frac{Db}{2\gamma} \right)^2} \right). \quad (24)$$

Ясно, что уравнение (23) действительно обладает таким решением, если исключить $e^{-\gamma t}$ и заменить $e^{-\beta t}$ единицей. Тогда можно

еще действовать с энергией 0,5 эв и меньше. Значение подвижности электрона в воздухе взято из книги [3]. Лучше всего было бы определить γ и ω_e из эксперимента, близкого к естественным условиям. Для этого нужно посыпать в воздух импульсы мегавольтных электронов длительностью не более 10^{-8} сек и измерять проводимость и время ее затухания. Этим занятием я обязан С. В. Стародубцеву.

построить такое решение, которое при $\beta t \ll 1$ имело бы вид (24) и могло быть асимптотически продолжено в область $e^{-\beta t} \ll 1$. Уравнение для ξ в интересующей нас области выглядит так:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi \left[-\frac{Db}{\beta^2} e^{-\tau} - \left(\frac{Db}{2\beta\gamma} \right)^2 e^{-2\tau} \right] = 0, \quad (25)$$

где $\tau = \beta t$.

Сделаем следующие подстановки:

$$x \equiv \frac{Dbe^{-\tau}}{\beta\gamma}; \quad (26)$$

$$\xi \equiv \frac{\xi}{\sqrt{x}}. \quad (27)$$

Тогда для ξ имеем уравнение

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \xi \left(-\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right) = 0. \quad (28)$$

Это уравнение — для вырожденной гипергеометрической функции с одним индексом, равным нулю (в обозначениях книги [5] $m=0$). Здесь надо искать решение аналогично тому, как это делается для функций Бесселя с целым индексом, т. е.

$$\xi = e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x K_0(2\sqrt{xv}) v^{-1/2+\nu/\beta} e^{-v} dv, \quad (29)$$

где K_0 — функция Макдональда [6]. Считая Db/γ^2 и γ/β большими числами, легко вычислить интеграл (29) методом перевала для $\beta t = \tau \ll 1$. Тогда оказывается, что выражение (29) действительно переходит в (24). Это оправдывает выбор решения с K_0 под интегралом, а не с I_0 ; последнее тоже удовлетворяет уравнению (28), но не переходит в (24).

Сравним электронную и ионную проводимости при $\beta t = \tau \gg 1$, когда число электронов уже не очень велико. При этом условии функцию K_0 можно заменить постоянной и вынести из-под интеграла для значения $v = \gamma/\beta \gg 1$. Тогда

$$n_- = \frac{\beta}{b} \frac{S}{2} \frac{K_1(s)}{K_0(s)} = n_+, \quad (30)$$

так как разность между n_- и n_+ экспоненциально мала при $t \gg 1$. Здесь s сокращенно обозначает выражение

$$s = \left(\frac{e\omega Av}{\beta^2 \lambda} \right)^{1/2} e^{-\frac{\tau}{2\lambda} - \frac{\beta t}{2}} \frac{r}{r}. \quad (31)$$

В этом случае использовано соотношение между подвижностью ионов и коэффициентом рекомбинации $b = 4\mu e\omega$.

При очень малых s приближенно имеем $sK_1(s) = 1$, $K_0(s) = \ln(2/s) = 0,577$, так что число ионов каждого знака

$$n_{\pm} = n_{\pm} = \left(bt - \frac{2b}{\beta} L \right)^{-1}, \quad (32)$$

где

$$L = \ln \left[2 \left(\frac{e\omega Av}{\beta^2 \lambda} \right)^{1/2} e^{-\frac{\tau}{2\lambda}} \frac{r}{r} \right] + 0,577. \quad (33)$$

Формула (32) напоминает обычный закон рекомбинации ионов, но содержит логарифм начального числа электронов. Если считать, что электроны мгновенно присоединяются к нейтральным молекулам, то получается обратное начальное число ионов, как обычно:

$$n = \left(bt + \frac{1}{n_0} \right)^{-1}. \quad (34)$$

В дальнейшем надо определить границу между областями, где преобладают электронная и ионная проводимости. Так как первая из них уменьшается экспоненциально, то граница имеет довольно точный смысл. Проводимости равны там, где соблюдается условие

$$2 \frac{\omega\gamma}{\omega_e \beta} \frac{K_1(s)}{K_0(s)} = s. \quad (35)$$

Полагая $\omega = 6 \cdot 10^2$ CGSE, $\omega_e = 2 \cdot 10^5$ CGSE, $\gamma = 10^7$ сек⁻¹, $\beta = 3 \cdot 10^3$ сек⁻¹, получим $\omega\gamma/(\omega_e \beta) = 0,1$ (и, следовательно, $s = 0,4$). Тогда из выражения (31) получается уравнение для границы между областями с различной природой проводимости:

$$\frac{r}{\lambda} + 2 \ln \frac{r}{\lambda} = \tau_0 - \tau, \quad (36)$$

где

$$\tau_0 = \ln 25 \frac{e\omega Av}{\beta^2 \lambda^2}. \quad (37)$$

Для взрыва с эквивалентом 20 тыс. г тринитротолуола можно принять полное число γ -квантов $A/\beta = 10^{23}$ [7]. Тогда $\tau_0 = 10,2$, причем полный интервал изменения τ порядка τ_0 . Учитывая, что уравнение (36) применяется только для оценок, мы заменим его следующим линейным уравнением:

$$\frac{r}{\lambda} = 0,6(\tau_0 - \tau). \quad (38)$$

Так как τ — время с учетом запаздывания, т. е.

$$\tau = \beta \left(t - \frac{r}{c} \right); \quad \tau_0 = \beta t_0, \quad (39)$$

находим искомое уравнение для границы:

$$r = 0,12c(t_0 - t), \quad (40)$$

где коэффициент 0,12 мало чувствителен к эквиваленту взрыва.

Оценка амплитуды радиосигнала

Точное решение задачи о радиосигнале потребовало бы численного интегрирования при помощи электронной машины, как это делалось в работе [1]. В данной работе мы удовлетворимся простой оценкой радиосигнала по порядку величины.

Прежде всего заметим, что ионная проводимость, если ее определять по порядку величины из выражения (32) и воспользоваться соотношением между подвижностью и коэффициентом рекомбинации, дает для ионного тока выражение вида $\mathcal{E}\varphi/t$, которое сравнимо с выражением для тока смещения $d\mathcal{E}\varphi/dt$. Поэтому при грубой оценке величины радиопульса (отвлекаясь при этом от его формы) отбросим ток ионной проводимости. Поле излучения определим, исходя из того требования, что соответствующее магнитное поле должно равняться $-H_0\alpha ct/r$ на прямой, определяемой формулой (40) [см. также (17)]. Постоянное слагаемое в выражении (17) соответствует невозмущенному полю земли. Указанный способ оценки не вполне однозначен, но если определить подобным способом электрическое поле импульса в волновой зоне или вычислять поле по второй производной магнитного момента токов, то получится почти то же самое с точностью до коэффициентов, близких к единице.

Поперечная составляющая поля излучающего магнитного диполя равна

$$-H_{\theta}^0 = \frac{F\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} + \frac{F\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2c} + \frac{F\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3}. \quad (41)$$

Уравнение прямой, определяемой формулой (40), в плоскости (r, t) имеет вид

$$r = ac(t_0 - t), \quad (42)$$

где для нашей задачи (с учетом небольшой поправки на запаздывание) $a = 0,12$. Подставляя в выражение (41) r из (40) и приравняв это добавке к H_{θ}^0 из (17), легко находим

$$F(\omega) = \frac{(\omega - t_0)^3}{6 - \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2}} - \frac{\alpha H_0 c^3}{(1+a)^4} + \frac{(\omega - t_0)^2}{2 - 2/a - 1/a^2} - \frac{\alpha H_0 c^3 t_0}{(1+a)^3}. \quad (43)$$

Отсюда определим поле в волновой зоне:

$$F_{\theta} = \frac{\alpha H_0 c}{(1+a)^2} \frac{6[t - r/c - t_0]}{(6 - 3/a + 1/a^2)r} + \frac{2\alpha H_0 c t_0}{(1+a)(2 - 2/a + 1/a^2)r}. \quad (44)$$

Здесь функция в квадратных скобках имеет полный интервал изменения t_0 . Вне этого интервала ее надо принять равной нулю с точностью производимой оценки. При $\beta = 3 \cdot 10^6$ и $\beta t = 10,2$ это соответствует $3 \cdot 10^{-5}$ сек. Пусть $ct_0/r = 1/5$, тогда $H_0 \approx 2,5$ в/м. Для больших эквивалентов эффективное время логарифмически увеличивается. Например, для $2 \cdot 10^6$ м тринитротолуола t_0 приблизительно в 1,5 раза больше.

В заключение приношу благодарность О. И. Лейпунскому, который указал мне на рассмотренный здесь механизм возникновения радиосигнала.

Литература

1. А. С. Компанец. ЖЭТФ, 1958, 35, вып. 6(12), 1538; см. наст. изд., стр. 75.
2. Г. Месси, Е. Барлоу. Электронные и ионные столкновения, М., ИЛ, 1958.
3. А. Энгель. Ионизованные газы, М., Физматгиз, 1959, стр. 129.
4. А. С. Компанец, Ю. С. Саясов. ЖТФ, 1955, 25, 1124.
5. Е. Уиттекер, Дж. Ватсон. Курс современного анализа, М., Гостехиздат, 1934.
6. Г. Н. Ватсон. Бесселевы функции, М., ИЛ, 1949.
7. О. И. Лейпунский. Гамма-излучение атомного взрыва, М., Атомиздат, 1959.

НАГРЕВАНИЕ ГАЗА ИЗЛУЧЕНИЕМ*

Совместно с Е. Я. Ланцбургем

1. Введение. Постановка задачи

При высоких температурах, порядка 10^5 К и выше, энергия переносится в газе в основном излучением, хотя относительная доля энергии, принадлежащая излучению, может быть и малой (по сравнению с энергией вещества).

Задача о распространении тепла из точечного источника может быть просто решена в том случае, когда пробег излучения и внутренняя энергия вещества зависят от температуры по степенному закону [1 — 3]. Характерной особенностью решения является широкое «плато» температуры в середине нагретой области и крутой спад к краю. Этот характер решения легко понять, так как в середине, где теплопроводность больше, температура выравнивается легче; очевидно, что для этого не обязательна строго степенная зависимость теплопроводности от температуры.

Если зависимость пробега излучения в газе от температуры достаточно сильная, полученное таким образом решение может привести к следующему внутреннему противоречию: длина про-

* ЖЭТФ, 1961, 41, вып. 5, 1649.

бега излучения внутри нагретой области окажется сравнимой или даже гораздо большей размеров самой области. Очевидно, что при этом механизм переноса энергии не может быть описан в терминах теплопроводности, тогда как в основу решения [1—3] был положен именно механизм теплопроводности, т. е. предположение о локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом.

В настоящей работе рассматривается тот случай, когда это предположение не выполняется, что может иметь место при температурах $\sim 10^6$ К и выше. Строгая постановка задачи для всей нагретой области (даже после ряда упрощающих предположений) в этом случае возможна только с помощью интегрального уравнения переноса излучения. Однако, если пробег меняется с температурой достаточно сильно, задачу можно с хорошим приближением решить более простым способом.

Пусть размер нагретой области R . Тогда температура T_0 , при которой длина пробега сравнивается с R , определяется уравнением

$$l(T_0) = R. \quad (1)$$

Определение $l(T)$ будет дано ниже. При сильной зависимости l от T температура T_0 слабо зависит от R .

Соответственно определению (1) вся нагретая область разбивается на две: внутреннюю, прозрачную, и внешнюю, мало прозрачную, граничащую с холодным газом. Фактически со стороны низких температур газ снова становится прозрачным при температуре ниже $\sim 10^6$ К [4]. Поэтому существует утечка энергии из нагретой области «на бесконечность». Но, если температура во внутренней области достаточно высока, ролью этой утечки в общем балансе энергии всей нагретой области можно пренебречь. Соответственно этому мы будем полагать, что температура на ружного холодного газа и пробег излучения в нем равны нулю.

2. Прозрачная внутренняя область

Рассмотрим теперь состояние излучения в прозрачной области. Так как пробег излучения в ней велик по сравнению с ее размерами, следует считать, что плотность энергии излучения U_1 внутри нагретой области постоянна по сечению (но меняется со временем). При этом U_1 гораздо меньше равновесной плотности энергии излучения aT^4 при температуре вещества T внутри области ($a = 7,55 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}$). Очевидно, что везде внутри прозрачной области $T > T_0$. Спад температуры до T_0 вблизи границы прозрачной области происходит не за счет излучения, а как-либо иначе (например, путем электронной теплопроводности). Так как спад температуры осуществляется на длине меньшей, чем пробег излучения, плотность энергии излучения U у границы прозрачности такая же, как внутри области, т. е. равна U_1 .

Нетрудно оценить U_1 по порядку величины. Именно:

$$U_1(T) \approx RaT^4/l(T). \quad (2)$$

Таким образом, пробег $l(T)$ здесь характеризует излучательную способность единицы объема нагретого газа, равную $c a T^4/l(T)$ (c — скорость света). Величина $[l(T)]^{-1}$ равна спектральному коэффициенту поглощения, усредненному по распределению Планка с учетом вынужденного излучения [5]. Для дальнейшего удобно ввести эффективную температуру излучения T_1 по формуле $U_1 \equiv a T_1^4$ или

$$T_1 = [R/l(T)]^{1/4}. \quad (3)$$

Для того чтобы нагретая область расширялась путем переноса лучистой энергии, в каждую точку непрозрачной области должно приходиться излучение с температурой T_1 , несколько более высокой, чем местная температура вещества. В рассматриваемой задаче плотность энергии излучения может значительно превышать ее локальную равновесную плотность aT^4 (в приближении лучистой теплопроводности это превышение считается бесконечно малым). В частности, на границе непрозрачной области при $T = T_0$ тоже должно выполняться неравенство

$$U_1 > aT_0^4. \quad (4)$$

Найдем условие, при котором это неравенство выполняется. Отношение U_1/aT_0^4 можно с помощью (1) и (2) записать как $l(T_0)aT_0^4/l(T)aT_0^4 = (T/T_0)^{4-n}$.

Показатель степени n для полностью ионизованного газа равен $1/2$ [5, 6]. У не полностью ионизованного газа он меньше $1/2$, т. е. неравенство (4) выполняется при $T > T_0$.

3. Непрозрачный внешний слой и скорость его распространения

Непрозрачной является та область, в которой температура падает от T_0 до нуля. Толщина этой области гораздо меньше R , поэтому приближенно ее можно рассматривать как плоский слой. Иначе говоря, в каждый данный момент времени можно считать, что прозрачная область занимает полупространство, и состояние излучения в ней характеризуется температурой T_1 . Граница прозрачной области будет тогда перемещаться в сторону холодного газа с постоянной скоростью $v(T_1, T_0)$. С этой же скоростью будет перемещаться и любая точка непрозрачного слоя в соответствии с тем, что его толщина гораздо меньше R .

Таким образом, мы свели задачу нагревания газа излучением к нахождению квазистационарного режима распространения плоской тепловой волны по холодному газу (ср. [7]). Распределение температур вещества T и излучения T_1 по радиусу качествен-

но изображено на рис. 1. Заштрихованная часть отвечает непрозрачному слою.

Выпишем теперь уравнение лучистого распространения тепла в непрозрачной области. Для плотности энергии вещества ϵ и потока энергии S имеем, очевидно, соотношение

$$\partial(\epsilon + U)/\partial t + \partial S/\partial x = 0. \quad (5)$$

Мы пренебрежем всеми видами переноса энергии, кроме лучистого. При тех больших температурах, которые рассматриваются в настоящей задаче, перенос энергии излучением происходит столь быстро, что газ не успевает реагировать на изменение

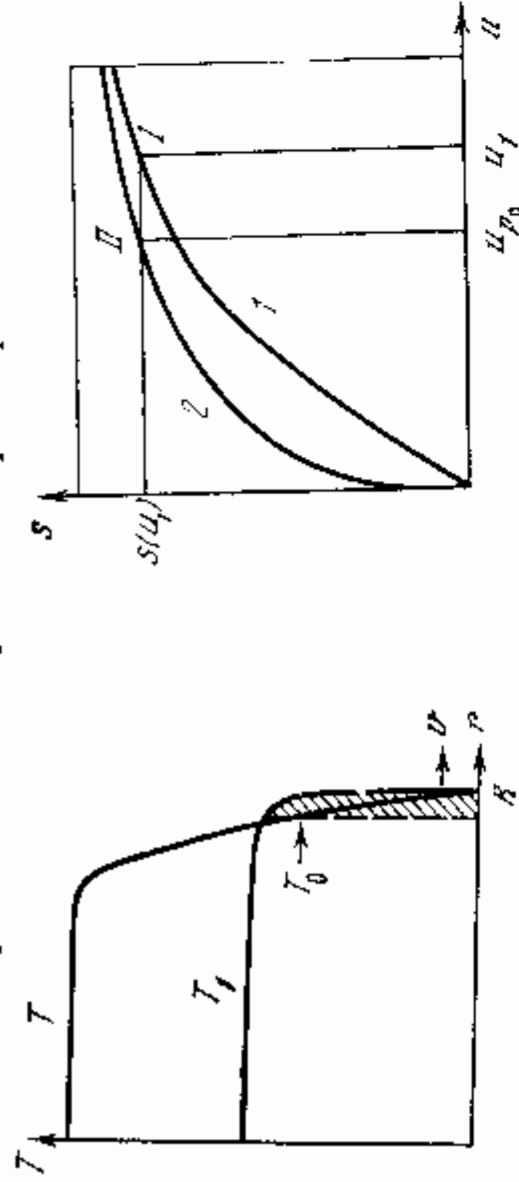


Рис. 1.

давления и не приходит в движение; иначе говоря, гидродинамическим переносом энергии можно пренебречь. Примем, что $\epsilon = \rho c_v T$, где ρ — плотность газа, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, которую будем считать не зависящей от температуры. Напишем теперь уравнение баланса одного только излучения:

$$\partial U/\partial t + \partial S/\partial x = c(aT^4 - U)/l(T). \quad (6)$$

Правая сторона уравнения (6) учитывает баланс между испусканием и поглощением лучистой энергии.

Так как пробег излучения быстро падает с уменьшением температуры, можно считать, что он гораздо меньше размеров области. При этом перенос энергии излучением можно рассматривать в диффузионном приближении [4], так что

$$S = -\frac{1}{3} l' c \partial U/\partial x. \quad (7)$$

В приближении лучистой теплопроводности в этом уравнении вместо U ставится aT^4 . В данной задаче последнее приближение недостаточно, так как оно приводит к нулевой скорости распространения. Пробег l' усредняется по частотам иначе, чем рассмотренный выше пробег $l(T)$, характеризующий лучеиспускательную

способность прозрачной области нагретого газа. Мы примем, однако, для простоты, что в непрозрачной области l из (6) и l' из (7) одинаковы (см. [4, 8]).

Граничные условия для системы уравнений (5) — (7) следующие: на границе прозрачной области $T = T_0$, $U = U_1$; на передней границе нагретого газа $T = 0$, $S = 0$, $U = 0$.

Так как мы ищем стационарный режим распространения, надо считать, что все величины зависят от координат и времени только через аргумент $x - vt$. Кроме того, удобно ввести оптическую толщину τ , дифференциал которой равен

$$d\tau = -\partial x/l(T)$$

(координата x отсчитывается в сторону уменьшения температуры T), и перейти к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{aT_0^4}{\epsilon(T_0)}, & \beta &= \frac{v}{c}, & u &= \frac{U}{aT_0^4} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\beta} \right)^{1/2}, & s &= \frac{\sqrt{3}S}{caT_0^4} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\beta} \right)^{1/2}, \\ u_1 &= \frac{U_1}{aT_0^4} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\beta} \right)^{1/2}, & u_p &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\beta} \right)^{1/2}, & u_{p_0} &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\beta} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрирование уравнения (5) при условии $T = S = U = 0$ (или $u_p = s = u = 0$) на передней границе нагретого газа сразу

приводит к уравнению

$$s = u_p^{1/2} + \sqrt{3}\beta u. \quad (9)$$

Вместо же двух уравнений (6) и (7), исключив $d\tau$, можно получить одно обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{3}\beta + \frac{u - u_p}{s} = \sqrt{3}\beta + \frac{u}{s} - \frac{(s - \sqrt{3}\beta u)^2}{s}, \quad (10)$$

которое вместе с (9) связывает величины s , u и β (или размерные S , U и v). При данном значении параметра β последнее уравнение интегрируется единственным образом с граничным условием $s = 0$, $u = 0$. На границе прозрачной области (при $T = T_0$, $U = U_1$ или $u_p = u_{p_0}$, $u = u_1$) это дает некоторую величину $s(u_1; \beta)$, которую надо приравнять $u_{p_0}^{1/2} + \sqrt{3}\beta u_1$ согласно (9). Отсюда определяется искомая величина скорости $\beta(u_1, u_{p_0})$ или $v(T_1, T_0)$.

Разумеется, физический смысл имеют только такие решения, при которых $\beta = v/c \ll 1$. В ряде случаев для этого требуется, чтобы выполнялось неравенство $U \ll \epsilon$, которое мы положим в основу дальнейших вычислений.

Отбрасывая в уравнении (5) соответствующий пренебрежительно вторым членом в правой части уравнения (9). При этом

¹ Заметим, что решение вида $f(x-vt)$ уравнений типа лучистого теплообмена рассматривалось также ранее рядом авторов [4, 9, 10].

уравнение (10) переписывается в виде

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{3\beta} + \frac{u}{s} - s^3 \quad (11)$$

при начальном условии $s=0$ для $u=0$.

Скорость волны β определяется из условия $U=U_1$ при $T=T_0$ (или $u=u_1$, при $u_p=u_p$), и уравнение для определения β приобретает вид

$$s(u_1; \beta) = u_p^{1/4}. \quad (12)$$

Через особую точку (седло) $u=0$, $s=0$ проходит только одна интегральная кривая (сепаратриса) в области положительных значений величин (рис. 2, кривая 1). На этом же рис. 2 нанесена кривая $s=u^{1/4}$, соответствующая уравнению (9) без второго члена в правой части, — кривая 2 (т. е. кривая 2 отвечает равновесным значениям плотности энергии излучения $u=u_p$). Заданным значениям u_1 и u_p (т. е. T_1 и T_0) соответствуют точки I и II на кривых 1 и 2. Очевидно, что уравнение (12) будет удовлетворено, если точки I и II имеют одинаковую ординату, откуда ясно, что скорость β находится единственным образом.

Из рис. 2 видно, что истинная плотность энергии излучения u всегда больше равновесной u_p , что необходимо, как отмечалось, для распространения тепловой волны.

4. Некоторые частные случаи

Уравнение (11) в общем случае не интегрируется в известных функциях. Поэтому мы рассмотрим предельные случаи.

1) $(T_1 - T_0)/T_1 \ll 1$. Этот случай соответствует той части кривой I на рис. 2, которая отвечает большим значениям u , где кривые 1 и 2 близки друг к другу. Для больших значений аргумента решение (11) имеет вид

$$s(u, \beta) \approx u^{1/4} (1 - 1/16u^{3/2}). \quad (13)$$

Здесь заранее опущен член, пропорциональный β , так как β оказывается малой величиной. Подставляя $s(u, \beta)$ из (13) при $u=u_1$ в уравнение (12), получим

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}} \gamma \left(\frac{T_1 - T_0}{T_1} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что если выполнено исходное неравенство $(T_1 - T_0) \ll T_1$, то и при $\gamma \sim 1$ будет $\beta \ll 1$. Поэтому закону восстановления более точным уравнением (10). Это дает уточненное значение скорости:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma}} \left(\frac{T_1 - T_0}{T_1} \right)^{1/2}. \quad (14a)$$

2) $T_1 \gg T_0$, но $U_1 \ll \varepsilon(T_0)$. При этом существенны малые значения u , что отвечает приближенному решению уравнения (11):

$$s(u, \beta) \approx u \left(1 + \frac{\beta \sqrt{3}}{2} \right). \quad (15)$$

Для $\beta \ll 1$ получается выражение

$$\beta = U_1 / \sqrt{3} \varepsilon(T_0). \quad (16)$$

3) $\gamma \ll 1$, а T_1/T_0 — порядка нескольких единиц. При этом получается $\beta \ll 1$. Пренебрегая β в уравнении (11), приводим последнее к уравнению Риккати, которое интегрируется в функциях Бесселя чисто мнимого аргумента [11]. Уравнение (12) для нахождения скорости запишется при этом в виде

$$I_{1/2} \left(\frac{4}{3} u_1^{3/2} \right) / I_{-1/2} \left(\frac{4}{3} u_1^{3/2} \right) = (T_0/T_1)^2. \quad (17)$$

Так как $T_1 > T_0$, это уравнение всегда имеет решение. Здесь мы приняли, что $T_1 - T_0$ не является малым по сравнению с T_1 . Тогда u_1 , очевидно, имеет порядок величины нескольких единиц, а скорость находится из равенства

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\gamma}{u_1^{1/4}} \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^2. \quad (18)$$

После того как скорость v границы нагретого газа определена в зависимости от T_1 и T_0 , задача о распространении тепловой волны решается из соображений баланса. Пренебрегая энергией, заключенной в области спада температуры, имеем уравнение энергии

$$\frac{1}{2} \pi R^2 [U_1(T) + \varepsilon(T)] = E, \quad (19)$$

которое вместе с уравнением

$$dR/dt = v(T_1, T_0) \quad (20)$$

и соотношениями (1) и (2) определяет R и T как функции времени t (здесь T — истинная температура вещества в прозрачной области, E — полная энергия в волне).

Рассматриваемая задача имеет смысл только до тех пор, пока $T_1 > T_0$. Если в ходе решения указанной системы окажется, что T_1 и T_0 сравнимы, дальнейшее решение должно проводиться в приближении лучистой теплопроводности, поскольку при этом излучение пришло в равновесие с веществом (см. [1—3]). Если же этот момент соответствует достаточно большим временам, может успеть произойти достаточно заметное гидродинамическое расширение нагретой области.

В заключение принеся благодарность Ю. П. Райзеру за ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец. Сб., посвящ. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 61; см. наст. изд., стр. 40.
2. Г. И. Баренблатт. ПММ, 1952, 16, 67.
3. Э. И. Андрианкин. ЖЭТФ, 1958, 35, 428.
4. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец, Ю. П. Райзер. ЖЭТФ, 1958, 34, 1278, 1447 (см. наст. изд., стр. 52, 64).
5. Ю. П. Райзер. ЖЭТФ, 1959, 37, 1079.
6. В. В. Бибииков, В. И. Коган. В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 86.
7. Я. Б. Зельдович. Теория горения и детонации. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944.
8. А. Унзолд. Физика звездных атмосфер. М., ИЛ, 1949.
9. Г. И. Баренблатт. ПММ, 1953, 17, 739.
10. И. В. Нежннов. ПМТФ, 1960, 1, 36.
11. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1949, стр. 91, 108; Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми, М., ИЛ, 1949, стр. 351.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ УЧЕТЕ КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ СВЕТА *

Совместно с Е. Я. Ланцбургем

1. Введение

Как известно, при достаточно высокой температуре вещество, в частности газ, сильно или полностью ионизуется и становится весьма прозрачным для излучения (длина пробега излучения превышает линейные размеры нагревой области). В таком состоянии тепловое равновесие между излучением и веществом устанавливается относительно медленно, и если в веществе с конечной скоростью происходят изменения, то излучение может не успевать «следить» за ними, оставаясь неравновесным.

Пример такого процесса был рассмотрен нами ранее в работе [1], где изучалось расширение нагревой области в газе. Решалась задача о скорости квазистационарного распространения в непрозрачном холодном газе границы нагревой области, причем в начальный момент времени внутри области вещество газа не находилось в равновесии с излучением и было прозрачным для него. Определяющим являлся тонкий переходный слой от прозрачного, горячего газа к полностью непрозрачному, холодному.

* ЖЭТФ, 1962, 43, вып. 1(7), 234.

Баланс между излучением и поглощением в этом слое и определял скорость распространения тела излучением.

В [1] была найдена зависимость этой скорости от величины отношения неравновесной плотности энергии излучения U_1 в прозрачной области к плотности энергии вещества газа $\varepsilon(T_0)$ на границе прозрачности (граница прозрачности условно определяется температурой T_0 , при которой пробег излучения порядка размеров всей нагревой области). При некоторых условиях ($U_1 \gg U_{p0}$, где $U_{p0} = aT_0^4$ — равновесная плотность энергии излучения на границе прозрачности) скорость распространения v границы нагревой области по холодному газу определялась формулой

$$v = cU_1 \sqrt{3\varepsilon(T_0)},$$

где c — скорость света (см. формулу (16) в [1]). Так как U_1 и $\varepsilon(T_0)$ — физически не связанные величины, эта формула может привести к невозможному результату $v > c$ при достаточно больших U_1 .

Для того чтобы избежать этого, в настоящей работе будет найдена скорость v при учете конечности скорости распространения света.

2. Интегральные уравнения переноса излучения при учете конечности скорости света

Совместим начало отсчета $x=0$ в момент времени $t=0$ с границей прозрачности и направим ось x в сторону холодного газа. Тогда переходный слой, который из-за малой толщины можно рассматривать как плоский, займет пространство между точкой $x=0$, где он граничит с прозрачной областью, условно простирающейся до $x=-\infty$, и точкой $x=x_0$, где он граничит с холодным газом (см. рисунок).

Состояние излучения в переходном слое описывается дифференциальным уравнением переноса излучения, которое для нашего случая имеет вид [2]

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial x} + kI = \frac{kc}{4\pi} U_p. \quad (1)$$

Здесь $I(x, t, \mu)$ — интегральная (по частотам) интенсивность излучения, μ — косинус угла между направлением распространения луча и осью x , $k(x, t)$ — коэффициент поглощения излучения, усредненный по частотам, $U_p = aT^4$ — равновесная плотность энергии излучения, причем температура $T = T(x, t)$; $a = 7,55 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}$.

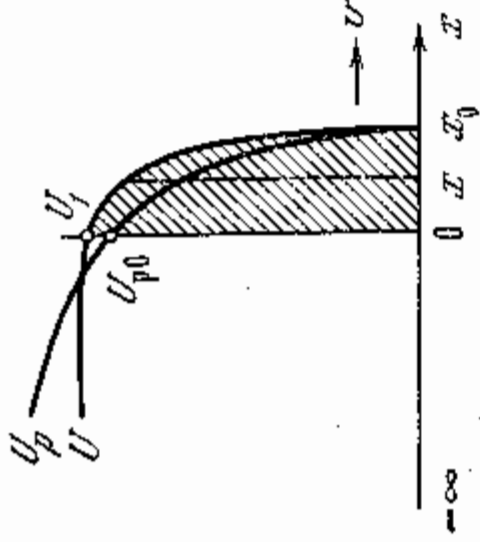
Удобно отдельно рассмотреть интенсивность $I(x, t, \mu)$ для $1 \geq \mu \geq 0$ и $-1 \leq \mu \leq 0$, т. е. для излучения, идущего «вперед» и «назад». Потребуем чтобы функции $I(\mu \geq 0)$ и $I(\mu \leq 0)$ удовлет-

воряли следующим граничным условиям:

$$I(\mu \geq 0, x=0) = \frac{c}{4\pi} U_1(t),$$

$$I(\mu \leq 0, x=x_0) = 0. \quad (2)$$

Первое из условий (2) описывает подвод лучистой энергии из прозрачной области к переходному слою на границе прозрачно-оптической. Оно учитывает неравновесное состояние излучения прозрачной области, где плотность энергии излучения по порядку величины равна U_1 (как было указано в [1]), плотность энергии излучения у границы прозрачности почти такая же, как и внутри прозрачной области, т. е. приближенно равна $U_1 = aT^4 R/l(T)$, где R — размер всей нагретой области газа, $l(T)$ — определенным образом усредненная по частотам длина пробега излучения, характеризующая лучеиспускательную способность нагретого до температуры T газа; в [1] показано также, что $U_1 \gg U_{p0}$.



Второе из условий (2) означает, что в переходном непрозрачном слое отсутствует излучение, входящее в него на границе с холодным газом.

Решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (2), как легко показать, являются

$$I \geq \mu \geq 0: \quad I(x, t, \mu \geq 0) = \frac{c}{4\pi} U_1 \left(t - \frac{x}{\mu c} \right) E_\mu(0, x) + \frac{c}{4\pi} \int_0^x k(x', t') U_p(x', t') E_\mu(x', x) \frac{dx'}{\mu},$$

$$-1 \leq \mu \leq 0: \quad I(x, t, \mu \leq 0) =$$

$$= -\frac{c}{4\pi} \int_x^{x_0} k(x', t') U_p(x', t') E_\mu(x', x) \frac{dx'}{\mu}, \quad (3)$$

где обозначено

$$E_\mu(x', x) = \exp \left\{ -\int_{x'}^x k(x'', t'') \frac{dx''}{\mu} \right\},$$

$$t' = t - \frac{x-x'}{\mu c}, \quad t'' = t - \frac{x-x''}{\mu c}.$$

По определению, плотность энергии излучения $U(x, t)$ и поток излучения $S(x, t)$ связаны с интенсивностью $I(x, t, \mu)$ соотношениями

$$U(x, t) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I(x, t, \mu) d\mu, \quad S(x, t) = 2\pi \int_{-1}^1 I(x, t, \mu) \mu d\mu. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), приходим к интегральным уравнениям переноса излучения, которые связывают $U(x, t)$ и $S(x, t)$ с равновесной плотностью энергии излучения $U_p = aT^4$ и в которых автоматически учитывается запаздывание:

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x d\mu U_1 \left(t - \frac{x}{\mu c} \right) E_\mu(0, x) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d\mu}{\mu} \int_0^x k(x', t') U_p(x', t') E_\mu(x', x) \frac{dx'}{\mu} + \frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{d\mu}{\mu} \int_x^{x_0} k(x', t') U_p(x', t') E_\mu(x', x) \frac{dx'}{\mu} \equiv U_0 + U_+ + U_-, \quad (5)$$

$$S(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^1 \mu d\mu U_1 \left(t - \frac{x}{\mu c} \right) E_\mu(0, x) + \frac{c}{2} \int_0^x d\mu \int_0^x k(x', t') U_p(x', t') E_\mu(x', x) \frac{dx'}{\mu} + \frac{c}{2} \int_0^{-1} d\mu \int_x^{x_0} k(x', t') U_p(x', t') E_\mu(x', x) \frac{dx'}{\mu} \equiv S_0 + S_+ + S_-. \quad (6)$$

Обозначения U_0, S_0, U_\pm, S_\pm понятны из уравнений: U_0 и S_0 представляют собой соответственно плотность энергии и поток излучения, приходящего в точку x от границы прозрачности; U_+, S_+ и U_-, S_- — плотность энергии и поток излучения, приходящего в точку x из переходного непрозрачного слоя соответственно справа и слева от рассматриваемой точки. Во всех этих величинах учитывается, что по пути в точку x излучение испытывает поглощение.

3. Диффузионное приближение с учетом конечности скорости света

Найдем решение уравнений переноса излучения, отвечающее квази стационарному режиму распространения по холодному газу плоской тепловой волны с постоянной скоростью v , считая все функции, входящие в (5) и (6), зависящими от координаты x и времени t только в комбинации $x - vt$ [при этом под интегралами t следует брать с учетом запаздывания, как в (5) и (6)].

Будем решать задачу в диффузионном приближении, иначе говоря, допустим, что на одной длине пробега излучения $l = 1/k$ температура вещества меняется не очень сильно. В этом случае U_p в (5) и (6) можно разложить в ряд по степеням $(x - x')$ и ограничиться рассмотрением только первых трех членов этого ряда.

Удобно также ввести «ретардированную» оптическую толщину ζ по формулам

$$(d\zeta)_{x=\text{const}} = -dx'k \left[x' - v \left(t - \frac{x - x'}{vc} \right) \right];$$

$$\zeta = \int_{x'}^x k(x'', t'') dx'' = \begin{cases} \infty & \text{при } x' = 0 \\ -\infty & \text{при } x' = x_0. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда разложенные в ряд выражения для $U(x - vt)$ и $S(x - vt)$ для точки x , расположенной не очень близко от границы прозрачности, примут вид

$$U(x - vt) \approx U_+ + U_- = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^\infty |U_p| e^{-\xi/\mu} d\xi + \int_0^{-1} \frac{d\mu}{\mu} \int_{-\infty}^0 |U_p| e^{-\xi/\mu} d\xi \right], \quad (8)$$

$$S(x - vt) \approx S_+ + S_- = \frac{c}{2} \left[\int_0^1 d\mu \int_0^\infty |U_p| e^{-\xi/\mu} d\xi + \int_0^{-1} d\mu \int_{-\infty}^0 |U_p| e^{-\xi/\mu} d\xi \right], \quad (9)$$

здесь

$$[U_p] \equiv U_p(x - vt) + (x' - x) \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right) U_p' + \frac{(x' - x)^2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right)^2 U_p''; \quad \beta \equiv \frac{v}{c}, \quad (10)$$

причем U_p берется от аргумента $x - vt$, а U_p' и U_p'' означают соответственно первую и вторую производные от функции $U_p(x - vt)$ по этому аргументу. В (8) и (9) опущены величины U_0 и S_0 , поскольку не очень близко от границы прозрачности ($x = 0$) они дают экспоненциально малые вклады в U и S .

Чтобы выполнить интегрирование по ζ и μ , надо выразить $x' - x$ через ζ и μ . Для этого воспользуемся определением «ретардированной» оптической толщины (7):

$$x' - x = - \int_0^\zeta l(\xi) d\xi \approx - \zeta l(x - vt) - \frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{dl}{d\xi} \right)_{x-vt} = = - \zeta l + \frac{\zeta^2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right) l'. \quad (11)$$

В (11) l берется от аргумента $x - vt$, а l' — производная от l по этому аргументу.

Подставляя (11) в (10), получаем

$$[U_p] = U_p(\zeta, \mu) = U_p - \zeta \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right) U_p l + + \frac{\zeta^2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right) (U_p l^2 + U_p l'). \quad (12)$$

Если теперь еще раз ввести оптическую толщину τ , дифференциал которой равен $d\tau = d(x - vt)/l(T)$, причем $\tau = 0$ при $x = 0$ и $\tau = \infty$ при $x = x_0$, получим вместо (12)

$$U_p(\zeta, \mu) = U_p - \zeta \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right) \frac{dU_p}{d\tau} + \frac{\zeta^2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \right)^2 \frac{d^2 U_p}{d\tau^2}. \quad (12')$$

В интегралах U_- и S_- удобно сделать замену переменных $\zeta \rightarrow -\zeta$ и $\mu \rightarrow -\mu$, тогда выражения $U(x - vt)$ и $S(x - vt)$ не очень близко от границы прозрачности принимают симметричную форму

$$U(x - vt) \approx \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^\infty |U_p(\zeta, \mu) + U_p(-\zeta, -\mu)| e^{-\xi/\mu} d\xi, \quad (13)$$

$$S(x - vt) \approx \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu \int_0^\infty |U_p(\zeta, \mu) - U_p(-\zeta, -\mu)| e^{-\xi/\mu} d\xi. \quad (14)$$

Если в эти уравнения подставить (12') и выполнить интегрирование по ζ и μ , получим выражения для U и S в диффузионном приближении с учетом конечности скорости света:

$$U \approx U_p + \beta dU_p/d\tau + \frac{1}{3} d^2 U_p/d\tau^2, \quad (15)$$

$$S \approx -\frac{1}{3} cdU_p/d\tau - \frac{2}{3} \beta cd^2 U_p/d\tau^2. \quad (16)$$

Из уравнений (16) и (15) можно исключить производные от U_p , оставляя линейные по β члены и пренебрегая производными порядка выше второго. Тогда вместо двух уравнений (15) и (16)

приходим к двум другим, из которых одно связывает диффузионный поток S и плотность излучения U при учете конечности скорости света

$$-\beta dS/d\tau + S = -\frac{1}{3}cdU/d\tau, \quad (17)$$

а другое является уравнением баланса лучистой энергии

$$-\beta cdU/d\tau + dS/d\tau = c(U_p - U) \quad (18)$$

(заметьте, что в [1] использовалось уравнение (17) без первого члена в левой части).

Уравнения (17) и (18) можно получить и непосредственно из дифференциального уравнения переноса излучения (1), если решить его в диффузионном приближении (линейная зависимость $I(\mu)$ от μ). Для этого надо последовательно умножить (1) на 2μ и проинтегрировать по μ в пределах от -1 до $+1$, принимая во внимание определение (4).

Мы предпочли воспользоваться интегральными уравнениями переноса (5) и (6), так как из уравнения (6) одновременно получается и выражение для диффузионного потока S на границе прозрачности. При выводе этого выражения уже нельзя пренебрегать величиной S_0 в этом уравнении. Тем же методом, которым получено равенство (16), находим из (6), полагая в нем $x=0$,

$$S(\tau=0) = \frac{c}{4}(U_1 - U_{p0}) - c \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\beta \right) \left(\frac{dU_p}{d\tau} \right)_0 - c \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\beta \right) \left(\frac{d^2U_p}{d\tau^2} \right)_0 \quad (19)$$

(индекс 0 указывает, что производные берутся при $\tau=0$). Производные от U_p надо исключить из (19) при помощи (15) и (16); тогда получаем в нужном нам приближении выражение для диффузионного потока на границе прозрачности

$$S(\tau=0) = \frac{c}{4}(U_1 - U_{p0}) + \frac{1}{2}S(0) - \frac{\beta c}{4} \left(\frac{dU}{d\tau} \right)_0 + \frac{3}{8} \left(\frac{dS}{d\tau} \right)_0 \quad (20)$$

Таким образом, величины T , U и S на границах переходного слоя должны удовлетворять следующим условиям:

$$\tau=0 \begin{cases} T = T_0 \\ U = U_1 \\ S = S(\tau=0) \end{cases} \quad (\text{т. е. } \varepsilon = \varepsilon(T_0) \text{ и } U_p = U_{p0} = aT_0^4); \quad (21)$$

на границе с холодным газом

$$\tau \rightarrow \infty, \quad T = U = S = 0. \quad (22)$$

Из уравнения баланса энергии $\partial(\varepsilon + U)/\partial t + \partial S/\partial x = 0$ и условия (22) следует

$$S = v(\varepsilon + U), \quad (23)$$

где $\varepsilon(T)$ — плотность энергии вещества газа при температуре T . На границе прозрачности уравнение (23) имеет вид

$$S(\tau=0) = v(\varepsilon(T_0) + U_1). \quad (24)$$

4. Скорость распространения квазистационарной тепловой волны

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выяснить, как влияет конечность скорости света на величину скорости распространения v тепловой волны в холодном газе. Как было указано в разделе 1, в случае, когда на границе прозрачности $U_1 \gg U_{p0}$ в [1] оказалось возможным, что $v > c$. Поэтому представляет интерес исследовать здесь именно этот случай.

Пренебрегаем в уравнении (18) U_p и исключаем из (17) и (18) S ; тогда получаем уравнение, содержащее только U :

$$\left(\frac{1}{3} - \beta^2 \right) \frac{d^2U}{d\tau^2} + 2\beta \frac{dU}{d\tau} - U = 0, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (25)$$

Точно такое же уравнение получается и для S , если из (17) и (18) исключить U . Решение этих уравнений ищем в виде $S \exp(-\tau\lambda/\beta)$, причем λ должно быть действительным и положительным, чтобы U и S удовлетворяли условию (22) при $\tau \rightarrow \infty$. Анализ характеристического уравнения для λ

$$\left(\frac{1}{3\beta^2} - 1 \right) \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \quad (26)$$

показывает, что оно может иметь необходимые нам решения $\lambda > 0$ только в том случае, когда коэффициент при λ^2 положителен, т. е. когда

$$\beta < 1/\sqrt{3}. \quad (27)$$

Когда этот коэффициент равен нулю или отрицателен, действительных положительных корней уравнения (26) не существует.

Неравенство (27) означает, что в рассматриваемом приближении плоская квазистационарная тепловая волна не может распространяться со сколь угодно большой скоростью: эта скорость v всегда меньше $c/\sqrt{3}$.

Из двух корней уравнения (26) один оказывается отрицательным, и его следует отбросить; положительный корень равен

$$\lambda_1 = \sqrt{3}\beta/(1 - \sqrt{3}\beta). \quad (28)$$

Таким образом, решения уравнения (26) для U и аналогичного уравнения для S , удовлетворяющие условию (22), таковы:

$$U = C_1 e^{-v_0 x/\beta}, \quad S = C_2 e^{-v_0 x/\beta}, \quad (29)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны быть определены из условий (21) на границе прозрачности. Очевидно, что $C_1 = U_1$; используя (24), можно получить и C_2 .

Из уравнений (18) и (23) при $U \gg U_p$ следует, что $\beta de/dt = -U$.

Интегрируя это уравнение при условии (21), получаем соотношение

$$U_1/\varepsilon(T_0) = \lambda_1 = \sqrt{3} \beta / (1 - \sqrt{3} \beta). \quad (30)$$

Уравнение (30) определяет отношение $U_1/\varepsilon(T_0)$ как функцию $\beta = v/c$. Оно показывает, что при $\beta \ll 1/\sqrt{3}$ это отношение может принимать любое конечное значение. Таким образом, какова бы ни была величина U_1 , скорость v распространения квазистационарной тепловой волны всегда меньше $c/\sqrt{3}$. При $U_1/\varepsilon(T_0) \ll 1$ (т. е. $\beta \ll 1/\sqrt{3}$) соотношение (30) переходит в соответствующий результат работы [1] для случая, когда $U_1 \gg U_{p0}$.

Благодарим Ю. П. Райзера за обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

1. А. С. Компанец, Е. Я. Ланцбург. ЖЭТФ, 1961, 41, 1649 (см. наст. изд., стр. 91).
2. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О РАЗВИТИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИЗ ВОЛНЫ СЖАТИЯ *

(Представлено академиком Л. И. Седовым 14.XII 1955)

Автомодельные начальные условия задаются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= Bx^\alpha, & x &\geq 0; \\ \rho_0 &= 0, & x &< 0; \\ \rho_0 &= \text{const} & -\infty &\leq x \leq \infty \\ v_0 &= 0 & t &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь ρ_0 , v_0 — начальные давление, плотность и скорость.

* ДАН СССР, 1956, 107, вып. 1, 29.

Мы положим $\alpha \ll 1$, так что кривая распределения давления имеет в начале координат вертикальную касательную. Давлением невозмущенного газа мы пренебрегаем, в этом приближении задача и является автомодельной.

Уравнения газовой динамики в переменных Эйлера, как известно, имеют вид

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\rho_0} + v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho}{\rho_0} = 0. \quad (3)$$

Вводим следующие переменные:

$$\xi = \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \frac{1}{x^{2-\alpha}} \equiv \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{\beta} \frac{t^{2\beta}}{x^{2\beta}}; \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^2}{t^2} f(\xi); \quad (5)$$

$$v = \frac{x}{t} \varphi(\xi); \quad (6)$$

$$\rho = \rho_0 \psi(\xi); \quad (7)$$

$$\omega \equiv f/\psi; \quad (8)$$

$$\psi/\psi = \chi. \quad (9)$$

В этих обозначениях система (1) — (3) переписывается так:

$$(2\beta - \varphi) \xi \dot{\varphi} - \omega \xi \dot{\chi} - \xi \dot{\omega} = \varphi - \varphi^2 - 2\omega; \quad (10)$$

$$-\xi \dot{\varphi} + (2\beta - \varphi) \xi \dot{\chi} = -\varphi; \quad (11)$$

$$(1 - \gamma) (2\beta - \varphi) \omega \xi \dot{\chi} + (2\beta - \varphi) \xi \dot{\omega} = 2(1 - \varphi) \omega. \quad (12)$$

В уравнения не входит явно χ . Исключая из них χ и образуя частное от деления φ на ω , получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{2\beta - \varphi}{\omega} \frac{(\varphi - \varphi^2) (2\beta - \varphi) + \omega (2 - \gamma \varphi - 4\beta)}{2(1 - \varphi) (2\beta - \varphi)^2 + (1 - \gamma) (2\beta - \varphi) (2\beta \varphi - \varphi + 2\omega) + 2(1 - \varphi) \omega}. \quad (13)$$

Это уравнение является основным в настоящей задаче. Исследуем поведение интегральных кривых.

** Такие подстановки впервые ввели Л. И. Седов и К. П. Станюкович.

Линии $\varphi=2\beta$ и $\omega=0$ суть два особых решения (13). Любая интегральная кривая может пересекаться с этими линиями только в особых точках уравнения (13). Найдем теперь общий характер интегральной кривой. В окрестности точки $\varphi=0$, $\omega=0$ уравнение (13) выглядит так:

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{\varphi}{2\omega} - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right). \quad (14)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi = C \sqrt{\omega} - 2\omega \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right), \quad (15)$$

где C — постоянная интегрирования.

Покажем теперь, что начальным условиям задачи можно удовлетворить только положив $C=0$. Действительно, моменту $t=0$ отвечает $\xi=0$. Согласно начальному условию, $\varphi(0)=0$, причем порядок обращения φ в нуль должен быть большим, чем $1/2\beta$, потому что $\xi^{1/2\beta}$ пропорционально t . Для ξ имеем следующее уравнение:

$$[(2\beta - \varphi)^2 - \gamma\omega] \xi \frac{d\varphi}{d\xi} = \omega (2 - \gamma\varphi - 4\beta) \cdot (2\beta - \varphi) (\varphi - \varphi^2). \quad (16)$$

При $C \neq 0$ $\varphi \sim \sqrt{\omega}$ (при малых φ и ω), что дает согласно (16) $\varphi \sim \xi^{1/2\beta} \sim t$. Но это не удовлетворяет начальному условию для φ . Следовательно, $C=0$. Тогда $\varphi = -2\omega(1 - 1/2\beta)$. При этом вблизи $\varphi=0$, $\omega=0$ уравнение (16) пишется так:

$$4\beta^2 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} = \omega (2 - 4\beta) + 2\beta\varphi = 4\beta\varphi, \quad \varphi \sim \xi^{1/\beta}, \quad (17)$$

что согласуется с начальным условием. Следовательно, из точки $\varphi=0$, $\omega=0$ выходит вполне определенная интегральная кривая в сторону отрицательных φ и положительных ω . Этой кривой отвечают положительные значения x и отрицательные ω , как и должно быть. Точка $x=0$, $\xi=\infty$ при $t>0$ физически ничем не выделена. Легко видеть, что в этой точке φ обращается в бесконечность, как ξ , а ω — как ξ^2 , что и обеспечивает регулярный ход всех функций при $x=0$.

Действительно, точка $\varphi=\infty$, $\omega=\infty$ является узлом для дифференциального уравнения (13). Вблизи этого узла $\omega=C'\varphi^2$. Подставляя это в (16), получаем

$$\varphi \sim \xi, \quad \omega \sim \xi^2,$$

что и обеспечивает регулярность решения при $x=0$. После этого интегральная кривая переходит в область $\varphi>2\beta$, $\omega>0$ (через узел при $\varphi=\infty$, $\omega=\infty$).

Интегральная кривая проходит ближе к оси φ , чем изоклина нулей. Действительно, если бы где-либо при $\varphi<0$ имело место

пересечение интегральной кривой с изоклиной нулей, кривая не могла бы пройти через точку $\varphi=\infty$ (см. рисунок). Уравнение изоклины нулей на бесконечности $\omega=A\varphi^2$, а уравнение интегральной кривой на бесконечности $\omega=B\varphi^2$, где $B<A$.

Точка, отвечающая переднему фронту ударной волны, лежит в этой области, а ниже $\varphi=2\beta$. Действительно, уравнение фронта ударной волны вследствие автомодельности задачи есть

$$x = \frac{1}{\xi_0} \left(\frac{B}{\rho_0}\right)^{\beta} t^{2\beta}, \quad (18)$$

где ξ_0 — число. Отсюда, используя соотношения для ударной волны, имеем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4\beta^2 \frac{1}{\xi_0^2} \left(\frac{B}{\rho_0}\right)^{2\beta} t^{4\beta-2} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\xi_0^2} \left(\frac{B}{\rho_0}\right)^{2\beta} t^{4\beta-2} f(\xi_0); \quad (19)$$

$$\frac{\gamma+1}{2} f(\xi_0) = 4\beta^2.$$

Но $v^2 = \frac{2}{\gamma+1} \frac{\rho}{\rho_0}$, откуда следует, что $\varphi^2(\xi_0) = \frac{2}{\gamma+1} f(\xi_0)$. Подставляя это в (19), получаем

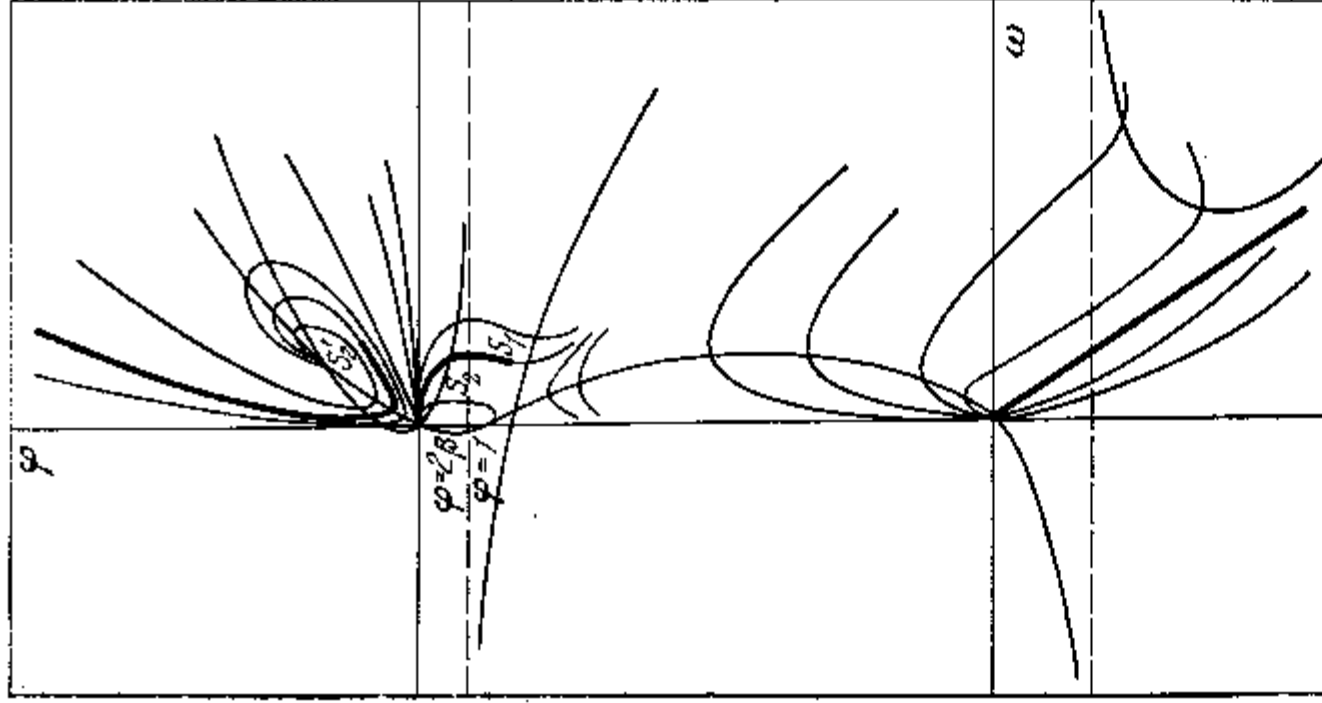
$$\varphi(\xi_0) = \frac{4\beta}{\gamma+1}. \quad (20)$$

Мы взяли положительный знак корня, так как скорость везде направлена в сторону отрицательных x и ударная волна находится при $x<0$. В дополнении к (20) имеем

$$\omega(\xi_0) = \frac{8\beta^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \quad (21)$$

Таким образом, точка интегральной кривой, отвечающая ударному фронту, лежит ниже прямой $\varphi=2\beta$. Эта прямая сама является особым решением основного уравнения (13). Следовательно, интегральная кривая может пересечься с ней только в особой точке. Особых точек на этой прямой две: при $\omega=\infty$ и при $\omega=0$. Последняя особенность высшего порядка. Через первую из них интегральная кривая пройти не может, потому что ω обращается в бесконечность при $x=0$, т. е. при $\varphi=\infty$. Если бы $\omega=\infty$ в любой другой точке, получилась бы бесконечная температура. Помимо этого, при $\omega=\infty$, $\varphi=2\beta$ уравнение имеет седло. Проходящая через него единственная кривая (сепаратриса) не может совпадать с особой интегральной кривой, представляющей решение при $\varphi=0$, $\omega=0$. При $\varphi=2\beta$, $\omega=0$ все интеграль-

* Существование ударного фронта впереди волны с необходимостью следует из того, что нет никакого другого решения, удовлетворяющего нулевым граничным условиям при $x=-\infty$.



ные кривые, идущие со стороны $\varphi > 2\beta$, $\omega > 0$, ближе к оси φ , чем изоклина нулей, не проходят через эту особую точку, кроме особого решения $\omega = 0$. Но это решение не совпадает с интегральной кривой при $\varphi > 2\beta$ и не приходит в точку, отвечающую ударной волне. В точке $\varphi = 2\beta$, $\omega = 0$ имеется и особенность типа узла. Соответствующие интегральные кривые лежат ниже сепаратрисы, тангенс угла наклона которой к оси ω есть $1/(2\beta - 1)$. Изоклина нулей в этой точке проходит круче, имея тангенс наклона $\gamma/(2\beta - 1) + 1/\beta$. Но интегральная кривая, по доказанному, идет еще круче и не может прийти в особую точку со стороны узла.

Единственная возможность получить решение задачи состоит в том, чтобы допустить существование второй ударной волны, идущей по сжатому веществу позади первой. В этой волне происходит скачкообразный переход через линию $\varphi = 2\beta$. Так как обе интегральные кривые выше и ниже $\varphi = 2\beta$ определены единственным образом, точки перехода могут быть прямо найдены из решения системы уравнений

$$\frac{(\delta - \varphi_1)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \omega_1 = \frac{(\delta - \varphi_2)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \omega_2;$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = (f_1 - f_2) \left(\frac{1}{\psi_2} - \frac{1}{\psi_1} \right); \quad \delta^2 = \frac{(f_1 - f_2) \psi_1}{(\psi_1 - \psi_2) \psi_2}.$$

Индекс 2 отвечает точке ниже линии $\varphi = 2\beta$.

Функции ω , f и ψ однозначно определены вдоль обеих интегральных кривых в зависимости от φ . Поэтому написанная здесь система уравнений в принципе дает возможность определить φ_1 и φ_2 , а, следовательно, по уравнению (16) можно найти и ξ второго ударного фронта. Дальнейшее интегрирование (16) определяет и $\xi = \xi_0$, отвечающее головному фронту.

На рисунке показано примерное расположение интегральных кривых в полуплоскости $\omega > 0$. Головной ударный фронт показан в точке S_1 , вторая ударная волна — в точках S_2, S_3 . Искомая интегральная кривая проведена жирной линией. Области $x < 0$ отвечает нижний отрезок, области $x > 0$ — оба верхних отрезка.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило
10.VIII 1955 г.

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ УПЛОТНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ*

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 17.I 1956)

Задача о медленном распространении пластической деформации была решена С. Л. Соболевым [1]. Мы рассмотрим ударное распространение пластической деформации в среде, характеризующейся следующими свойствами. В начальном состоянии ее плотность ρ_0 , при этой плотности она оказывает пренебрежимо малое сопротивление сжатию. Доведенная до плотности ρ , среда несжимаема и в этом состоянии пластична, причем принимается, что абсолютная величина наибольшего касательного напряжения линейно зависит от среднего нормального напряжения (условие пластичности Прандтля) [2]. Такого рода пластичностью может обладать, например, песок.

Ударная волна возникает под действием взрыва в некотором весьма небольшом сферическом объеме радиуса R_0 . Главные оси тензора напряжений совпадают с координатными линиями сферической системы, центр которой совмещен с центром взрыва. Главные нормальные напряжения мы назовем σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$. Условие пластичности, согласно предположению, должно быть записано так:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = k + m(\sigma_r + 2\sigma_\theta). \quad (1)$$

Уравнения движения уплотненной среды имеют вид

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0. \quad (3)$$

*ДАН СССР, 1956, 109, вып. 1, 49.

Из уравнения (3) следует, что

$$u = \lambda(t)/r^2. \quad (4)$$

Подставляя это в (2) и исключая σ_0 при помощи (1), получаем после интегрирования

$$\sigma_r = -\frac{k}{3m} + \rho_1 \frac{k}{(\alpha-1)r} - 2\rho_1 \frac{\lambda^2}{(\alpha-4)r^4} + C(t)r^{-\alpha}, \quad (5)$$

где

$$\alpha = 6m/(1+2m). \quad (6)$$

Граничные условия на фронте ударной волны имеют вид

$$\rho_0 \dot{R} = \rho_1 (\dot{R} - u(R)), \quad (7)$$

$$\rho_0 \dot{R}^2 = \rho_1 (\dot{R} - u(R))^2 - \sigma_r(R). \quad (8)$$

Здесь R — радиус фронта ударной волны.

На границе расширяющейся полости надо приравнять давление нормальному напряжению, взятому с обратным знаком:

$$p = -\sigma_r(R_0). \quad (9)$$

Радиус полости легко определить, исходя из сохранения массы. Если R_0 — начальный радиус полости, получаем

$$R_0 = \left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) R^3 + \frac{\rho_0}{\rho_1} R^3 \right]^{1/3} \cong R \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}. \quad (10)$$

Величиной R_0^3 можно здесь пренебречь, даже если $1 - \rho_0/\rho_1$ порядка нескольких процентов.

Принимая, что вещество в полости расширяется как идеальный газ с показателем изэнтропы γ , находим выражение для p :

$$p = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{-\gamma}. \quad (11)$$

Исключая $C(t)$ и $\lambda(t)$ из (7), (8) и (9), приходим к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} R\dot{R} + \dot{R}^2 \left\{ 2 + \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{\alpha-1}{1-(1-\rho_0/\rho_1)^3} - 2 \frac{(\alpha-1)[(1-\rho_0/\rho_1)^3 - 1]}{(\alpha-4)[(1-\rho_0/\rho_1)^3 - 1]} \right\} = \\ = \left\{ \frac{\rho_1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{2/3} \left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1-\alpha} - 1 \right]^{-1} \right\}^{-1} \times \\ \times \left\{ p + \frac{k}{3m} \left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{-\frac{\alpha}{3}} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оно интегрируется в квадратурах. Прежде чем записать квадратуру, удобно исследовать выражение в правой части. Уравнение должно во всяком случае допускать решение, отвечающее равновесию, $R=0$, $\dot{R}=0$. В правой части (12) будет стоять нуль, если

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} = -\frac{k}{\rho_0} \frac{1}{3m} \left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{-\frac{\alpha}{3}} - 1 \right] \left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{\gamma} \right]. \quad (13)$$

Равновесие должно достигаться и тогда, когда $m=0$, как в теории пластичности Сен-Венана, потому что k и m не связаны друг с другом. Но в этом случае для равновесия необходимо, чтобы k было меньше нуля. Отношение $|k|/\rho_0$ весьма малое число, порядка 10^{-4} или меньше. Это оправдывает приближение, сделанное в (10), применительно к условию равновесия (13) для не слишком больших γ .

Условие равновесия (13) при $k < 0$ выполняется для всех $m \geq -1/2$. Но если $-1/2 \ll m < 0$, то равновесный радиус больше, чем при $m=0$. Это весьма мало вероятно, ибо m описывает дополнительное трение в условии Прандтля. Поэтому надо считать, что $m > 0$. При очень больших m равновесный радиус снова становится больше, чем при $m=0$. Следовательно, эти значения m лежат за пределами применимости линейной формулы (1) в рассматриваемой задаче.

Введем теперь следующие безразмерные величины:

$$\frac{R}{R_0} \equiv x; \quad \dot{R} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} \equiv y; \quad 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \equiv \xi; \quad (14)$$

$$\mu \equiv 4 + \frac{2(1-\xi)(\alpha-1)}{\alpha-1} \frac{4-\alpha}{1-\alpha} \frac{2(\alpha-1)(\xi^3-1)}{1-\alpha}; \quad (15)$$

$$A \equiv 2 \frac{(\alpha-1)(1-\xi)}{1-\alpha} \frac{1-\xi^3}{\xi^2} (\xi^3-1). \quad (16)$$

В этих переменных уравнение (12) переписывается так:

$$x \frac{d(y^2)}{dx} + \mu y^2 = A \left(\frac{x^{-3\gamma}}{\xi^{\gamma}} - \frac{|k|}{\rho_0} \frac{\xi^{-\frac{\alpha}{3}} - 1}{3m} \right). \quad (17)$$

Его первый интеграл есть

$$y^2 = \frac{1-\xi}{\xi} x^{-\mu} + A x^{-\mu} \int_1^x x^{\mu-1} \left(\frac{x^{-3\gamma}}{\xi^{\gamma}} - \frac{|k|}{\rho_0} \frac{\xi^{-\frac{\alpha}{3}} - 1}{3m} \right) dx. \quad (18)$$

Приближение (10), а значит и все дальнейшее, оправдано только в том случае, если в интеграле (18) область, близкая к 1,

ТОЧЕЧНЫЙ ВЗРЫВ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ *

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 19.X 1959)

не дает существенного вклада, т. е. если $\mu - 3\gamma > 0$. Это условие не является особенно стеснительным, как видно из таблицы значений μ при разных α и пористости $\xi = 1 - \rho_0/\rho_1$.

ξ	0	1	2	3
0,01	3,26	4,44	6,00	7,84
0,1	3,78	4,78	5,98	7,40
0,2	4,12	5,00	5,96	7,12

Считая, что условие $\mu - 3\gamma > 0$ выполнено, можно пренебречь и первым слагаемым в уравнении (18), в чем легко убедиться, сравнивая коэффициент A/ξ^2 с величиной $\frac{1-\xi}{\xi}$. Тогда получается простое выражение для y^2 :

$$y^2 = A \left(\frac{x^{-3\gamma}}{(\mu - 3\gamma)\xi\gamma} - \frac{|k| \xi^{-\frac{\alpha}{s}}}{\rho} \frac{1}{3m\mu} - 1 \right), \quad (19)$$

откуда получается значение максимального радиуса расширения волны

$$R_m = R_0 \left[\frac{3m\mu}{\mu - 3\gamma} \frac{1}{(\xi^{\frac{\alpha}{s}} - 1)\xi\gamma} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{|k|} \right]^{\frac{1}{3\gamma}}. \quad (20)$$

Вещество остается сжатым и после разгрузки, так как сжатие необратимо. R_m больше равновесного радиуса в отношении $(\mu/(\mu - 3\gamma))^{1/3\gamma}$.

Время полного расширения равно

$$t_m = R_0 \sqrt{\frac{\rho_0(\mu - 3\gamma)\xi\gamma}{\rho_0 A} \left(\frac{R_m}{R_0} \right)^{\frac{3\gamma+2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3\gamma} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{3\gamma} + 1\right)}}. \quad (21)$$

Отметим, что в задаче не вошло какое-либо соотношение между напряжениями и деформациями или скоростями деформации. Здесь имеется аналогия со статически определенными плоскими задачами теории пластичности.

Литература

1. С. Л. Соболев. Труды Сейсмолог. ин-та. 1935, 49.
2. Л. С. Лейбензон. Элементы математической теории пластичности. М.—Л., ГИТЛ, 1943, стр. 56.

Как известно, задача о точечном взрыве в среде с постоянным показателем изэнтропы γ имеет аналитическое решение [1] для той стадии явления, когда можно пренебречь энергией, заключенной в среде до взрыва, по сравнению с энергией, приносимой взрывной волной. Сравнительно простое решение получается потому, что задача автономна: она не содержит никаких характерных параметров размерности длины, скорости и времени. Если есть градиент плотности среды хотя бы в одном направлении, автономности уже нет, и точное решение не получается. При малых градиентах задачу удается рассмотреть методом возмущений [2, 3].

Если взрыв происходит в весьма разреженной атмосфере, то сильная ударная волна с предельным сжатием распространяется на такие расстояния, где плотность меняется во много раз по сравнению с плотностью в месте взрыва. Тогда линеаризация недопустима. Численное интегрирование задачи с тремя переменными очень затруднительно, даже при счете на электронной машине.

Можно предложить полукачественный подход, основанный на одной существенной особенности точного центрально-симметричного решения. Именно, в этом решении энергия распределена почти равномерно по всему объему взрывной волны и только вблизи самого ее фронта в 2—3 раза превышает среднее значение по объему. В этой области сосредоточена и вся масса вещества.

Естественно предположить, что это же свойство имеет и взрывная волна в неоднородной атмосфере. Действительно, если давление внутри волны постоянно в пространстве (давление пропорционально плотности энергии), а плотность массы равна нулю, то уравнения гидродинамики в основной части объема выполняются тривиальным образом. Тогда, чтобы описать распространение волны, надо воспользоваться условиями на самом ударном фронте.

Если уравнение фронта волны есть $f(r, z, t) = 0$, то нормальная составляющая скорости фронта D_n определяется известным равенством

$$D_n = -\frac{\partial f}{\partial t} / |\nabla f| = \sqrt{\frac{\rho}{\rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right)}}. \quad (1)$$

* ДАН СССР, 1960, 130, выл. 5, 1001.

Здесь, как обычно в задаче о сильном взрыве, отброшено начальное давление по сравнению с давлением во фронте волны p . В этом приближении плотность за фронтом ρ' связана с плотностью перед фронтом ρ постоянным отношением

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (2)$$

Давление выражается через плотность энергии ϵ :

$$p = (\gamma - 1)\epsilon = (\gamma - 1)\lambda E/V, \quad (3)$$

где E — полная энергия взрыва; V — объем, занятый взрывной волной; $\lambda = \lambda(\gamma)$ — коэффициент, показывающий, во сколько раз плотность энергии около фронта больше, чем средняя плотность по объему [1]. Допущение о постоянстве λ по поверхности лежит в основе предлагаемого здесь метода.

Будем считать уравнение фронта волны в цилиндрических координатах разрешенным относительно радиуса: $r = r(z, t)$. Тогда полный объем волны есть

$$V(t) = \pi \int_{z_1}^{z_2} r^2(z, t) dz, \quad (4)$$

где $r(z_1, t) = r(z_2, t) = 0$. Подставляя (2) — (4) в (1) и выражая плотность по барометрической формуле, приходим к уравнению в частных производных для функции r :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 - e^{+z/z_0} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + 1 \right] = 0. \quad (5)$$

Здесь z_0 — эквивалентная толщина атмосферы; y — вспомогательная переменная, определяемая равенством

$$y = \int_0^t \frac{dt}{V\bar{V}} \sqrt{\frac{\lambda E(\gamma^2 - 1)}{2\rho_0}}; \quad (6)$$

ρ_0 — начальная плотность воздуха в точке взрыва ($z = 0$).

Уравнение (5) решается по методу разделения переменных:

$$r = \xi y + \int_0^z dz \sqrt{\xi^2 e^{-z/z_0} - 1}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = y + \int_0^z dz \frac{\xi e^{-z/z_0}}{\sqrt{\xi^2 e^{-z/z_0} - 1}} = F(\xi). \quad (8)$$

При малых t или y волна должна быть сферической. Для этого достаточно положить функцию F (ξ) равной нулю. Исключив

здесь тогда ξ из (8) и подставляя в (7), получим

$$r = 2z_0 \operatorname{arccos} \left[\frac{1}{2} e^{z/z_0} (1 - x^2 + e^{-z/z_0}) \right], \quad (9)$$

здесь $x = y/2z_0$.

Отсюда получаем положения верхней и нижней точек волны z_1 и z_2 :

$$e^{-z_{1,2}/z_0} = 1 \mp x, \quad (10)$$

а также положение и значение ее максимального радиуса

$$e^{-z_m/z_0} = 1 - x^2, \quad r_m = 2z_0 \operatorname{arccos} x. \quad (11)$$

Таким образом, максимально возможный радиус волны равен z_0 . При этом $x = 1$, так что верхний край волны уходит на

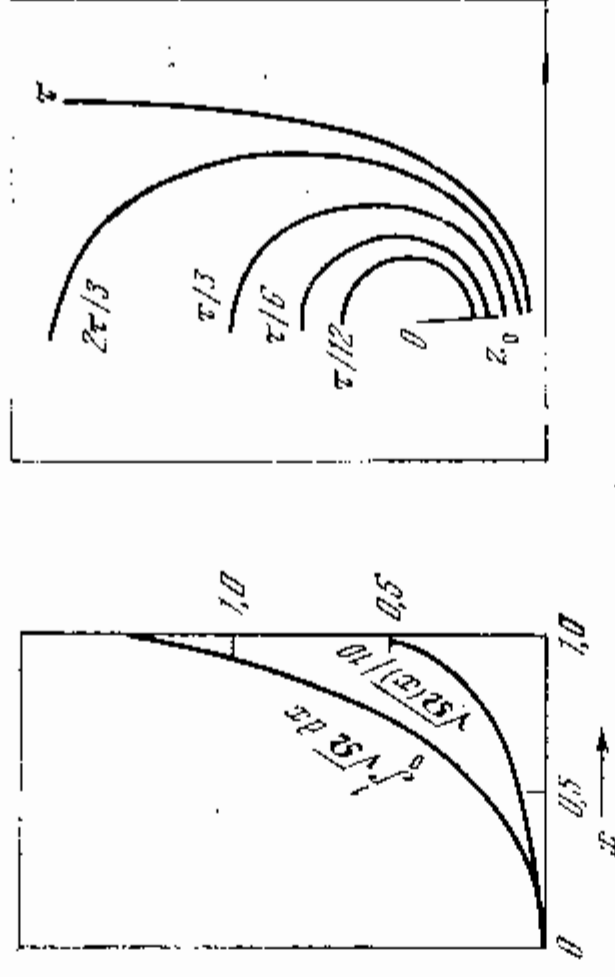


Рис. 1

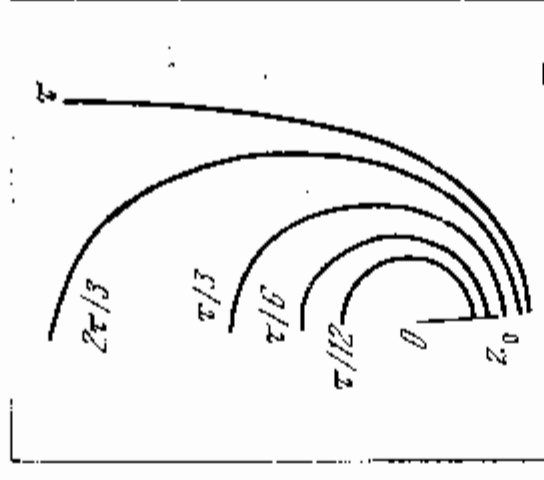


Рис. 2

бесконечность. Но это происходит за конечное время τ , которое определяется из (6) как

$$\tau = \sqrt{\frac{32\pi z_0^3 \rho_0}{\lambda E(\gamma^2 - 1)}} \int_0^1 \sqrt{\Omega(x)} dx, \quad (12)$$

где

$$\Omega(x) = \int_{-2 \ln(1-x)}^{-2 \ln(1+x)} du \operatorname{arccos}^2 \left[\frac{1}{2} e^{u/2} (1 - x^2 + e^{-u}) \right]. \quad (13)$$

Время ухода волны вверх на бесконечность оказывается конечным благодаря тому, что скорость волны согласно (1) стремится к бесконечности при $z \rightarrow \infty$. На рис. 1 изображены кривые для пересчета от x к t и $[\Omega(x)]^{1/2}$. На рис. 2 нанесены в масштабе

рассчитанные сечения волны вертикальной плоскостью, проходящей через точку взрыва, для нескольких моментов времени.

Разумеется, решение теряет смысл раньше, чем z_0 обратится в бесконечность. Тем не менее можно сделать следующий вывод: как бы ни была велика полная энергия взрыва, сильная ударная волна может распространяться по полученному здесь закону вниз не более чем на $1,38 z_0$, или примерно на 11 км. При дальнейшем распространении вниз ударный фронт будет ослабляться быстрее за счет волн разрежения, уходящих от него вверх по открытой в пустоту области, захваченной волной. Распространенные волны по невозмущенному воздуху будут напоминать короткий удар по веществу, граничащему с вакуумом, рассмотренный Я. Б. Зельдовичем [4].

Л и т е р а т у р а

- 1 Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
- 2 В. П. Карликов. ДАН СССР, 1955, 101, 86.
- 3 Э. И. Андрианкин. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 2.
- 4 Я. Б. Зельдович. Акуст. журн., 1956, 2, 28.

ПРЕВРАЩЕНИЕ УДАРНОГО СЖАТИЯ В ИЗЭНТРОПИЧЕСКОЕ *

Совместно с В. И. Романовой и П. А. Ямпольским

В физике высоких давлений в последние годы часто обсуждаются новые, перспективные задачи. Сюда относятся проблемы получения сверхпроводников, металлизация диэлектриков и, в частности, получение металлического водорода и ряд других задач.

Проведение экспериментальных исследований, необходимых для решения указанных задач, ограничено теми максимальными давлениями, которые доступны современным лабораторным установкам. Эти давления, получаемые при статическом сжатии, не превышают, как правило, нескольких сот килобар¹.

Между тем для решения указанных выше задач требуются давления, превышающие мегабар. Давления до 10 Мбар в настоящее время можно получить в ударных волнах с использова-

* «Письма ЖЭТФ», 1972, 16, вып. 4, 259.

¹ Имеются данные о статическом уплотнении стекла и кварца при давлениях выше 2 Мбар [1].

нием взрывчатых веществ. Однако имеется одно обстоятельство, лимитирующее использование ударных волн в ряде задач физики высоких давлений.

Процессы в ударных волнах связаны с изменением энтропии. Вещество за фронтом ударной волны испытывает в связи с этим сильный нагрев. Это приводит к тому, что степень сжатия вещества в ударной волне много меньше, чем при статическом сжатии при тех же давлениях.

Таким образом, при решении перечисленных выше проблем, где определяющим является, в сущности, не давление, приложенное извне, а степень уплотнения вещества, преимущества от использования ударных волн, создающих большие давления, являются поэтому в значительной степени иллюзорными.

В связи с этим представляется перспективной возможность трансформации ударно-волнового сжатия в изэнтропическое². При этом становится возможным при помощи ударных волн получить высокие сжатия вещества, недоступные современной лабораторной практике.

С этой целью ниже рассматривается задача о распространении ударной волны по среде с переменными акустическими характеристиками и определяется, каким законам должно удовлетворять изменение этой характеристики для превращения ударно-волнового сжатия в сжатие изэнтропическое.

Использовалось уравнение состояния типа Л. Д. Ландау и К. П. Станюковича в виде суммы двух составляющих, которые характеризуют упругие свойства холодного тела и тепловое давление атомов [2]. Показатель степени объема в упругой составляющей принят равным 3, а коэффициент Грюнайзена равен 2. Для простоты рассматривается вещество с переменным удельным объемом V_0 , но при постоянной начальной скорости звука c_0 и с постоянным коэффициентом Грюнайзена.

Так как ударная волна создает переменную энтропию, удобно вести счет в лагранжевых координатах, считая координатой массу на квадратный сантиметр, заключенную между входной поверхностью и данной точкой. Тогда уравнения движения имеют следующий вид³:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{du}{\partial t}; \quad (2)$$

где V — удельный объем, u — скорость, $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_{s=const}$, s — энтропия. Уравнение адиабаты Гюгонио принимает весьма

² Изэнтропа в твердом теле при не очень высокой температуре близка к изотерме.

³ В журнальном тексте в уравнение (1) вкралась ошибка. После исправления уравнения (1) были скорректированы уравнение (5) и рисунки.

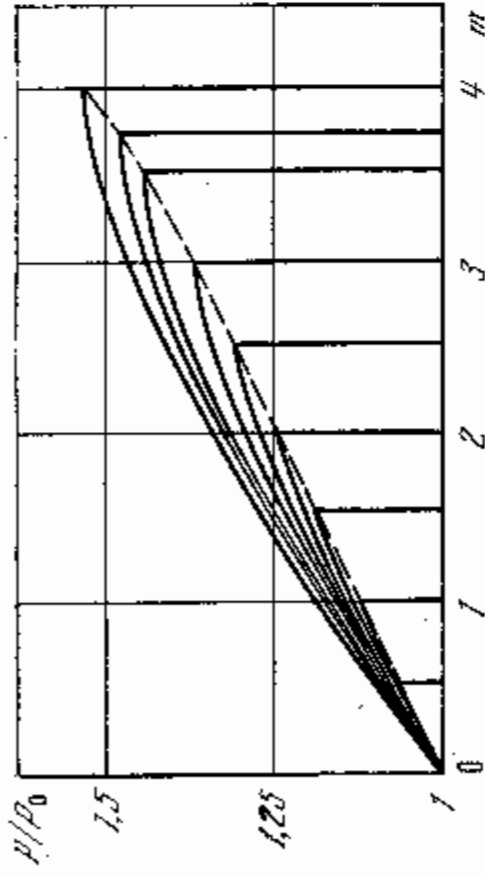


Рис. 1

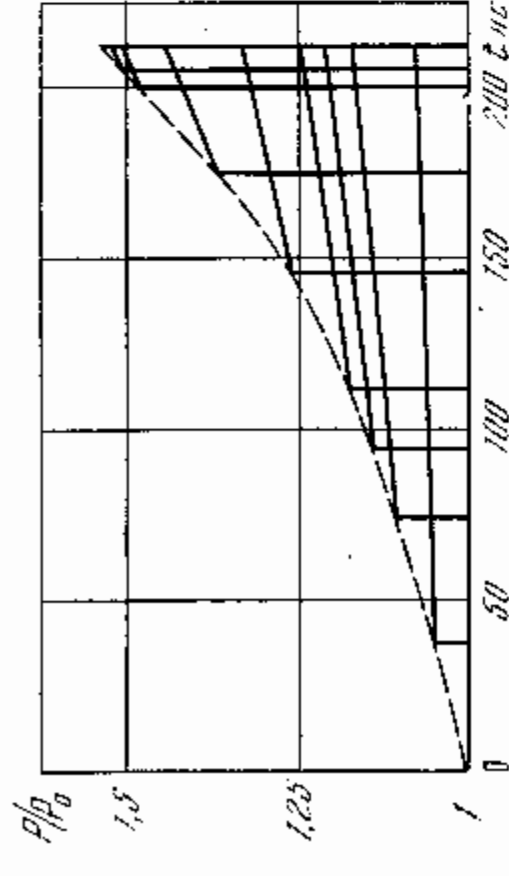


Рис. 2

простой вид

$$\rho_{\Phi} = \left(\frac{c_0^2/V_0}{2V_{\Phi} - V_0} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где ρ_{Φ} , V_{Φ} — давление и удельный объем на фронте ударной волны.

С помощью этого уравнения записываются выражения скорости фронта ударной волны и скорости вещества на фронте.

Закон распределения плотности с массой принимаем

$$\rho_0 = \rho_{\Phi} [1 - (m/m_0)^2]^{-1}. \quad (4)$$

Здесь ρ_{Φ} — характерное значение плотности.

Форма зависимости в большой степени произвольна. Существует только, чтобы плотность нарастала по мере распространения волны. В конкретных расчетах было принято $m_0 = 5 \text{ г/см}^2$.

Ударная волна возбуждается с помощью детонации достаточно толстого слоя взрывчатого вещества, примыкающего к среде при $m=0$, так чтобы давление на сжимаемое вещество было постоянно.

Начальное изменение давления во фронте ударной волны описывается разложением

$$\rho_{\Phi} = \rho_0 \left[1 + 6,4 \left(\frac{m_{\Phi}}{m_0} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Расчеты, выполненные на ЭВМ методом явной разностной схемы [3], привели к следующим результатам (рис. 1 и 2).

Получено, что при растущей плотности амплитуда ударной волны растет. Дальнейшее дожатие приводит изэнтропически. На рис. 2 приведены для этого случая кривые сжатия в зависимости от времени для разных точек.

Таким образом показано, что принципиально возможно преобразование ударно-волнового сжатия в изэнтропическое.

Приносим благодарность Г. М. Гандельману за совет о выборе уравнения состояния и Х. С. Кистенбойму за указание эффективного метода численного счета.

Литература

1. N. Kawai, S. Mochizuki, *J. Fluids Phys. Lett.*, 1971, 34A, 107.
2. Л. Д. Ландау, К. П. Станюкович, ДАН СССР, 1945, 46, 399.
3. Х. С. Кистенбойм, Г. С. Росляков. Численное решение одномерных задач о взрыве. МГУ, 1971.

ДИФФУЗИЯ ИЗ МГНОВЕННОГО ИСТОЧНИКА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ *

(Представлено академиком В. Н. Кондратьевым 1.XI 1962)

Считая, что газ, в котором происходит диффузия, распределен по барометрическому закону, запишем для коэффициента диффузии

$$D = \delta e^{\lambda z}, \quad \lambda = \frac{mg}{kT}. \quad (1)$$

Плотность диффундирующего газа ищем в виде

$$n = N(r, z, t) e^{-\lambda_1 z}, \quad \lambda_1 = \frac{m_1 g}{kT}. \quad (2)$$

Называя еще $\tau = \delta t$, получим уравнение для N :

$$e^{-\lambda z} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (\lambda - \lambda_1) \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (3)$$

Имеем систему ортонормированных по r и z частных решений:

$$N_{p,q} = e^{-p^2 \tau} J_0(qr) \sqrt{\frac{\lambda}{2}} e^{(\lambda_1 - \lambda)z/2} J_{\nu} \left(\frac{2p}{\lambda} e^{-\lambda z/2} \right). \quad (4)$$

* ДАН СССР, 1963, 149, вып. 3, 554.

Здесь

$$v = \sqrt{\frac{4q^2}{\lambda^2} + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda}\right)^2}. \quad (5)$$

Точечному единичному мгновенному источнику при $r=0$, $z=0$ отвечает выражение

$$n = \frac{2}{\pi\lambda} e^{-(\lambda+\lambda_1)z/2} \int_0^\infty \int_0^\infty q dq p dr e^{-p^2 r} J_0(qr) J_\nu\left(\frac{2p}{\lambda} e^{-\lambda z/2}\right) J_\nu\left(\frac{2p}{\lambda}\right). \quad (6)$$

Интегрирование по p легко выполнить по стандартным формулам, что дает

$$n = \frac{1}{2\pi\tau\lambda} e^{-(\lambda_1+\lambda)z/2} \exp\left[-\frac{1 + e^{-\lambda z}}{\tau\lambda^2}\right] \int_0^\infty q dq J_0(qr) I_\nu\left(\frac{2e^{-\lambda z/2}}{\tau\lambda^2}\right). \quad (7)$$

Последний интеграл не может быть взят в общем виде. Поэтому рассмотрим следующие частные случаи:

1) $2e^{-\lambda z}/\tau\lambda^2 \gg 1$. Это относится либо к малым временам, либо к большим глубинам вниз $e^{-\lambda z/2} \gg 1$. Учитывая (5), получим для I_ν асимптотическое выражение

$$I_\nu = \sqrt{\frac{\tau\lambda^2}{4\pi}} \exp\left\{\frac{\lambda z}{4} + \frac{2e^{-\lambda z/2}}{\tau\lambda^2} - \tau e^{\lambda z} \left[q^2 + \frac{11}{4}(\lambda_1 - \lambda)^2\right]\right\}. \quad (8)$$

После этого интегрирование выполняется, и для n находим

$$n = \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{5\lambda}{4} + \frac{\lambda_1}{2}\right)z - \frac{r^2}{4\nu} e^{-\lambda z} - \frac{(1 - e^{-\lambda z/2})^2}{\tau\lambda^2} - \frac{\tau}{4}(\lambda_1 - \lambda)^2 e^{\lambda z}\right]. \quad (9)$$

При малых z это переходит в стандартное решение для точечного мгновенного источника.

2) $2e^{-\lambda z}/\tau\lambda^2 \ll 1$, что соответствует большим временам или большим высотам, $e^{-\lambda z/2} \ll 1$. При этом I_ν можно заменить первым членом разложения $I_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(4+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$. Гамма-функцию удобно представить контурным интегралом, чтобы выразить ее через экспоненту. Получаем приближенное равенство

$$I_\nu\left(\frac{2e^{-\lambda z/2}}{\tau\lambda^2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^s}{s} e^{-\lambda\nu\alpha/s} ds, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{\lambda} \ln(st\lambda^2 e^{\lambda z/2}). \quad (11)$$

После этого интегрирование по q выполняется:

$$\int_0^\infty q dq J_0(qr) e^{-\alpha\nu\lambda/2} = \frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \left(\frac{|\lambda_1 - \lambda|}{2} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}\right) e^{-|\lambda_1 - \lambda| \sqrt{r^2 + \alpha^2}/2}. \quad (12)$$

Интегрирование по s можно произвести в двух случаях:

2а) Точка прямо над источником, $r=0$. Считая, что s под логарифмом порядка единицы и вынося α из-под интеграла, получим

$$n = \frac{|\lambda_1 - \lambda|}{4\pi\tau} \frac{(\tau\lambda^2)^{-|\lambda_1 - \lambda|/\lambda}}{\ln(\tau\lambda^2 e^{\lambda z/2})} \exp\left(-\frac{1 + e^{-\lambda z/2}}{\tau\lambda^2}\right) \begin{cases} \frac{e^{-\lambda z}}{\Gamma(\lambda_1/\lambda)}, & \lambda < \lambda_1, \\ \frac{e^{-\lambda z}}{\Gamma(2 - \lambda_1/\lambda)}, & \lambda > \lambda_1. \end{cases} \quad (13')$$

Формула (13') показывает, что легкий газ в тяжелом далеко не сразу переходит к равновесному больцмановскому распределению. Сначала он распространяется по высоте почти по тому же закону, что и тяжелый газ. Это распределение тоже удовлетворяет диффузионному уравнению, так как

$$e^{\lambda z} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \lambda_1\right) e^{-\lambda z} = \text{const},$$

что соответствует постоянному потоку. Плотность раньше обращается в нуль, чем становится равновесной. При $\lambda_1 < \lambda$ равновесие приближенно достигается раньше.

2б) Точка на уровне источника, $z=0$ и большие времена $\tau\lambda^2 \gg 1$. Тогда, если $r \gg \alpha$, имеем

$$n = \frac{|\lambda_1 - \lambda|}{2\pi\tau\lambda^2} \frac{e^{-2/\tau\lambda^2}}{r^2} e^{-|\lambda_1 - \lambda|r/2} [\ln(\tau\lambda^2) - 0,577]. \quad (14)$$

В случае, когда $\lambda_1 = \lambda$:

$$n = \frac{e^{-2/\tau\lambda^2}}{\pi\tau\lambda^2 r^2} [\ln(\tau\lambda^2) - 0,577]. \quad (15)$$

Неравенство $r > \alpha$ фактически означает $r > 2 \ln \tau\lambda^2 / \lambda$. Как показывают уравнения (14) и (16), плотность при больших расстояниях от источника быстро убывает. Таким образом, в отличие от диффузии в однородной среде, распространение вбок в поле тяжести заметно подавлено.

Вычислим еще количество вещества, ушедшего вверх.

При $\tau\lambda^2 \gg 1$ легко проинтегрировать общее выражение (7):

$$2\pi \int_0^\infty r dr \int_0^\infty dz n = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1 + \lambda_1/\lambda) (\tau\lambda^2)^{\lambda_1/\lambda}}, & \lambda_1 > \lambda; \\ \frac{1}{\Gamma(2 - \lambda_1/\lambda) (\tau\lambda^2)^{2 - \lambda_1/\lambda}}, & \lambda_1 < \lambda. \end{cases} \quad (16')$$

$$(16'')$$

В обоих случаях основная масса вещества уходит вниз. Это связано с распределениями (13') и (13'').

Задача очень упрощается, если диффузия происходит только по высоте из плоского горизонтального слоя. Тогда вместо формулы (7) имеем замкнутое выражение

$$n(z, t) = \frac{1}{\tau\lambda} \exp\left[-\frac{(\lambda + \lambda_1)z}{2} - \frac{1 + e^{-\lambda z}}{\tau\lambda^2} \right] I_{|\lambda_1 - \lambda|/\lambda} \left(\frac{2e^{-\lambda z/2}}{\tau\lambda^2} \right). \quad (17)$$

Для точки, где плотность максимальна, отсюда получаем уравнение

$$e^{-\lambda z_m} = \tau\lambda^2 \begin{cases} \times \frac{\lambda_1}{\lambda}, & \lambda_1 > \lambda, \\ \times 1, & \lambda_1 < \lambda. \end{cases} \quad (18')$$

$$(18'')$$

Считая, что $\tau\lambda^2 \gg 1$, можно было бы заменить $I_{|\lambda_1 - \lambda|/\lambda}(x)$ его нулевым членом разложения.

Ширина распределения оценивается по обычным формулам теории флуктуаций. Это дает

$$V \overline{(z - z_m)^2} = \begin{cases} \frac{1}{V\lambda\lambda_1}, & \lambda_1 > \lambda, \\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda_1 < \lambda. \end{cases} \quad (19')$$

$$(19'')$$

Таким образом, в отличие от свободной диффузии, ширина распределения стремится к конечному пределу порядка λ .

В заключение выражаю благодарность В. Л. Тальрозе за постановку задачи.

ЦЕПНЫЕ РЕАКЦИИ ПРИ УЧЕТЕ ДИФФУЗИИ ДВУХ АКТИВНЫХ ЦЕНТРОВ*

Совместно с В. В. Воеводским

1. В конце двадцатых годов Семеновым [1] было установлено, что в кинетике цепных реакций большую роль играет диффузия активных центров к стенкам сосуда. Выяснению этого обстоятельства послужил теоретический анализ экспериментальных данных по воспламенению паров фосфора [2]. Прямые опыты Трифонова, поставленные с целью проверки этого основного для

цепной теории сложенная, количественно его подтвердили [3].

Семеновым и его сотрудниками было показано, что в огромном большинстве всех практически важных случаев опытные факты подтверждают расчеты, основанные на представлении о том, что преобладает диффузия одного активного центра над другими. Соответствующее дифференциальное уравнение было решено сначала для крайнего случая большого коэффициента рекомбинации у стенки, когда концентрация там считается равной нулю (так называемая диффузионная область процесса рекомбинации) [4]. В дальнейшем Семсеновым [5] было получено общее решение этого уравнения для любых значений коэффициента рекомбинации, объяснившее ряд разнообразных экспериментальных данных, в том числе опыты Бирон и Налбаджана [6], являющиеся прямым доказательством существования наряду с диффузионной областью кинетической области обрыва цепей на стенках, когда скорость рекомбинации на стенках определяется не коэффициентом диффузии, а только константой скорости гетерогенной рекомбинации.

Применимость представлений о диффузии одного активного центра вытекает из того, что химическая активность центров различного типа обычно существенно различается, и поэтому концентрация того из них, который медленнее вступает в реакцию, во много раз превышает концентрацию остальных активных центров.

Однако возможны такие редкие случаи, когда концентрации двух активных центров оказываются сравнимыми. Это может иметь место, например, при сильном обеднении реакционной смеси одной из компонент: концентрация того активного центра, который в ходе цепной реакции взаимодействует с этим веществом, сильно возрастает. Приближенное решение такой задачи на примере реакции окисления водорода было дано в 1946 г. одним из нас [7]. Уже эти приближенные расчеты дали удовлетворительное согласие с опытом и объяснили, в частности, наблюдаемое на опыте смыкание нижнего и верхнего пределов воспламенения в области малых содержаний водорода.

Вопрос о роли диффузии двух или большего числа активных центров рассматривается также в недавно вышедшей книге Акулова [8]. Акулов, однако, исходит из неверного представления о том, что диффузионное уравнение для одного только центра не включает членов, «учитывающих цепные превращения частиц друг в друга», и что «поэтому такие уравнения к цепным процессам по существу... неприменимы» [8, с. 17].

Прежде всего, хорошо известны цепные процессы, в которых имеет место диффузия одного, и только одного активного центра. Таков, например, цепной распад урана, где единственным активным центром является нейтрон (см., например, [9, с. 327]). Ниже будет показано, что и результаты, получаемые при решении уравнений диффузии для двух центров, в обычных условиях экви-

* ЖЭТФ, 1952, 23, вып. 2(8), 230.

валентны результатам приближенной теории Семенова с одним центром и не приводят к появлению новых пределов.

Н. С. Акулов ставит в общем виде задачу о цепной реакции с учетом диффузии многих центров и пытается решить ее для случая диффузии двух центров. Эта система написана у Акулова в следующем виде [8, с. 161, (36.7)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} &= D_1 \Delta n_1 + a_{11} n_1 + a_{12} n_2, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} &= D_2 \Delta n_2 + a_{21} n_1 + a_{22} n_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение этих уравнений Акулов ищет в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sum_p C_{1p} e^{k_p r} \psi_p, \\ n_2 &= \sum_p C_{2p} e^{k_p r} \psi_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, Акулов полагает, что частные решения, отвечающие одному и тому же показателю k_p , для обеих компонент пропорциональны. Из-за этого он (на с. 162) приходит к противоречию при попытке удовлетворить граничным условиям общего вида

$$\begin{aligned} D_1 \left(\frac{\partial n_1}{\partial r} \right)_n &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \\ D_2 \left(\frac{\partial n_2}{\partial r} \right)_n &= \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2. \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие сделанного им ограничивающего предположения Акулов лишен возможности искать общее решение задачи о двух центрах.

В следующем § 37 [8] Акулов пытается удовлетворить уравнениям с одной функцией, отбрасывая коэффициенты превращения активных центров на стенках; при этом он берет собственные функции в виде $\Psi_p = \cos l_p x$ [формула (37.5)]. Но уже в формуле (37.7) он вынужден принять l_p различными для разных активных центров; очевидно, что после этого его «собственные функции» уже не удовлетворяют основным уравнениям (36.7). Следовательно, предлагаемое Н. С. Акуловым решение по существу является ошибочным. Если же принять приближенное решение Акулова, то оно может, очевидно, удовлетворить только уравнениям диффузии с одним центром, и поэтому никакого обобщения результатов Семенова в такой форме дать не может, что и обнаруживается в конечном результате (37.16), который вдобавок менее точен, чем приводимый строчкой ниже в формуле без номера результат Семенова (без всякой на него ссылки).

Второй путь приближенного решения задачи, предлагаемый Акуловым в § 38 [8], основан на предположении о крайне малых

скоростях гетерогенных превращений активных центров. В этом крайнем случае концентрации активных центров всех типов просто постоянны по всему объему. Формулы для пределов восполнения могут быть получены и без решения диффузионного уравнения, как это и было сделано в цитированной выше работе [7]. Акулов получает в этом случае правильный результат, поскольку в этих условиях принятое им предположение о пропорциональности n_1 и n_2 выполняется.

2. Правильное решение системы (1) при граничных условиях (2) должно искаться в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sum_p e^{k_p r} (C_1 \Psi_p^{(1)} + C_2 \Psi_p^{(2)}), \\ n_2 &= \sum_p e^{k_p r} (\alpha_1 C_1 \Psi_p^{(1)} + \alpha_2 C_2 \Psi_p^{(2)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Мы используем тот, вполне очевидный факт, что при данном показателе k_p имеются не одно, а два частных решения, причем для различных компонент должна выбираться разная линейная комбинация этих частных решений. Эта комбинация подбирается из граничных условий и ни к каким противоречиям отнюдь не приводит.

Будем искать решение для сферического сосуда радиуса R . При сосудах другой формы ничего качественно различного в результатах не может получиться.

Тогда частное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} n_1 &= e^{-kt} \left(C_1 \frac{\sin \kappa_1 r}{r} + C_2 \frac{\sin \kappa_2 r}{r} \right), \\ n_2 &= e^{-kt} \left(\alpha_1 C_1 \frac{\sin \kappa_1 r}{r} + \alpha_2 C_2 \frac{\sin \kappa_2 r}{r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь κ_1 и κ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (D_1 \kappa^2 - k - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (D_2 \kappa^2 - k - a_{22}) \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

а коэффициенты пропорциональности $\alpha_{1,2}$ связаны с $\kappa_{1,2}$ так:

$$\alpha_{1,2} = \frac{D_1 \kappa_{1,2}^2 - k - a_{11}}{a_{12}}. \quad (6)$$

Полученные уравнения мы применим к анализу вопроса о пределах воспламенения. При переходе через предел величина k обращается в нуль. Отсюда получаются для пределов следующие значения $\kappa_{1,2}^2$ и $\alpha_{1,2}$:

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{a_{22}}{D_2} + \frac{a_{11}}{D_1} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{22}}{D_2} - \frac{a_{11}}{D_1} \right)^2 + \frac{4a_{12}a_{21}}{D_1 D_2}} \right], \quad (7)$$

а также

$$\alpha_{1,2} = \left(\frac{D_1}{2a_{12}} \right) \left[\frac{a_{22}}{D_2} - \frac{a_{11}}{D_1} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{22}}{D_2} - \frac{a_{11}}{D_1} \right)^2 + \frac{4a_{12}a_{21}}{D_1 D_2}} \right] \quad (8)$$

Покажем, прежде всего, что уравнения диффузии для двух центров могут быть сведены к уравнению Семенова для диффузии одного центра в том случае, когда кинетические коэффициенты для одного центра, скажем, a_{12} , a_{22} , пренебрежимо малы по сравнению с коэффициентами для другого центра a_{11} , a_{21} . Отсюда получаем вместо (7)

$$\kappa_1^2 = a_{11}/D_1, \quad \kappa_2^2 = 0 \quad (7a)$$

$$\text{и вместо (8)} \quad \alpha_2 = -a_{11}/a_{12} \quad (8a)$$

Таким образом, концентрация второго активного центра в рассматриваемом случае оказывается постоянной (в связи с тем, что α обращается в нуль).

Итак, концентрации активных центров равны

$$n_1 = C_1 \frac{\sin \kappa_1 r}{r} + C_2; \quad (1a)$$

$$n_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} C_2.$$

Подставляем найденные решения в граничные условия (2)

$$C_1 [D_1 (\kappa R \cos \kappa R - \sin \kappa R) - \sigma_{11} R \sin \kappa R] - C_2 R^2 \left(\sigma_{11} - \sigma_{12} \frac{a_{11}}{a_{12}} \right) = 0,$$

$$C_1 \sigma_{21} \sin \kappa R + C_2 R \left(\sigma_{21} - \sigma_{22} \frac{a_{11}}{a_{12}} \right) = 0.$$

Исключая отсюда постоянные C_1 и C_2 , приходим к уравнению для определения пределов в рассматриваемом случае:

$$\kappa R \operatorname{ctg} \kappa R - 1 = -\frac{a_{11} R (\sigma_{21} \sigma_{12} - \sigma_{11} \sigma_{22})}{D_1 (a_{21} a_{12} - \sigma_{22} a_{11})}. \quad (9)$$

По форме оно совпадает с тем, которое получил Семенов [5], но вследствие граничных условий общего вида (2) в правой части стоит постоянная величина более сложного вида, содержащая коэффициенты σ_{12} и σ_{21} , соответствующие гетерогенным реакциям продолжения цепи. Такого рода превращения Семеновым не учитывались, поскольку существование их вообще не доказано. Так как мы положили, что второй центр менее химически активен, чем первый, то следует и здесь считать $\sigma_{21} \approx 0$, после чего уравнение (9) оказывается тождественным с уравнением приближенной теории (см. [5], формула (42)).

Рассмотрим теперь общий случай, когда учитывается диффузия обоих центров. Подставляя решение (4) в граничные условия (2) и исключая постоянные C_1 и C_2 , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & (a_2 - a_1) \left[(\kappa_1 R \operatorname{ctg} \kappa_1 R - 1) (\kappa_2 R \operatorname{ctg} \kappa_2 R - 1) + \frac{\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21}}{D_1 D_2} \right] + \\ & + R (\kappa_2 R \operatorname{ctg} \kappa_2 R - 1) \left[\frac{\sigma_{21} + \alpha_1 \sigma_{12}}{D_2} - \alpha_2 \frac{\sigma_{11} + \alpha_1 \sigma_{12}}{D_1} \right] + \\ & + R (\kappa_1 R \operatorname{ctg} \kappa_1 R - 1) \left[\frac{\alpha_1}{D_1} (\sigma_{11} + \alpha_2 \sigma_{12}) - \frac{\sigma_{21} + \alpha_2 \sigma_{22}}{D_2} \right] = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Проанализируем это уравнение для различных предельных случаев. Рассмотрим случай, когда все коэффициенты σ_{ik} малы. Этот случай называется кинетическим, поскольку процесс обмена определяется кинетикой гетерогенной рекомбинации, а не диффузией. В этом случае надо произвести разложения $\kappa_1 R \operatorname{ctg} \kappa_1 R$ и $\kappa_2 R \operatorname{ctg} \kappa_2 R$ в ряды, и тогда после преобразований получается уравнение для пределов

$$\begin{aligned} & (R/3)^2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) + (R/3) (\sigma_{11} a_{22} + \sigma_{22} a_{11} - \\ & - \sigma_{12} a_{21} - \sigma_{21} a_{12}) + (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21}) = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

из которого, как и следовало ожидать, выпадают оба коэффициента диффузии.

При анализе конкретного примера окисления водорода уравнение (11) сводится к более простому выражению, получаемому на основании простых качественных рассуждений [7]. Как уже говорилось, приближенное решение (11) полностью совпадает с тем, которое получено Акуловым в § 38 его книги [8] (уравнение (15)). Мы привели его только для того, чтобы показать, что оно может быть получено непосредственно из общего решения.

Покажем, что уравнение (11) отвечает двум пределам восслабления. Для этого надо задаться зависимостью коэффициентов a_{ik} от давления. Коэффициенты с разными индексами ($i \neq k$), соответствующие процессам продолжения и разветвления цепей, в общем случае пропорциональны первой степени давления; коэффициенты с одинаковыми индексами ($i = k$) отвечают как процессам такого же рода, так и реакциям гомогенного обрыва цепей при тройных столкновениях, что приводит к появлению квадратичных по давлению членов. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(ap^2 + bp), \\ a_{12} &= cp, \\ a_{21} &= dp, \\ a_{22} &= -(fp^2 + ep), \end{aligned} \quad (12)$$

а уравнение (11), записанное через давление, приобретает вид

$$(R/3)^2 [Ap^4 + Bp^3 + (be - cd)p^2] + (R/3)(Cp^3 + Dp) + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = 0^1. \quad (13)$$

По определению $\sigma_{21} \leq \sigma_{11}$ и $\sigma_{12} \leq \sigma_{22}$, так что $\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \geq 0^2$. Тогда, ввиду того что

$$cd \geq be + 3C/R \text{ и } D \geq 0,$$

уравнение (13) имеет или два положительных корня, или ни одного, что соответствует либо двум пределам воспламенения, либо полному отсутствию воспламенения.

Исследуем теперь зависимость пределов воспламенения от состава смеси при $D > 0$ в соответствии с реальными цепными процессами. Пусть доля одной из компонент исходной смеси будет x , а другой $1-x$; тогда кинетические коэффициенты $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ будут пропорциональны x , а $a_{2,1}$, $a_{1,1}$ — пропорциональны $(1-x)$. Приведенное выше неравенство $cd > be + 3C/R$, при выполнении которого при $D > 0$ уравнение (13) имеет два положительных корня, как легко видеть, не может выполняться ни при $x=0$, ни при $x=1$. Это означает, что область воспламенения при данной температуре ограничена как со стороны бедных, так и со стороны богатых смесей.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда отношение $R\sigma_{11}/D_2$ весьма велико (диффузионная область). В этом случае концентрации активных центров на стенках сосуда весьма малы и могут быть положены равными нулю. Для диффузии одного центра такой случай рассматривался ранее Семеновым [1, 5], для многих центров эта задача была рассмотрена Акуловым в § 27 его книги. Отметим, что в этом случае концентрации различных центров пропорциональны³.

Условия равенства концентраций нулю могут быть записаны в таком виде:

$$C_1 \sin \kappa_1 R + C_2 \sin \kappa_2 R = 0, \quad (14)$$

$$\alpha_1 C_1 \sin \kappa_1 R + \alpha_2 C_2 \sin \kappa_2 R = 0.$$

Величина κ_2^2 отрицательна, а поэтому κ_2 — величина чисто мнимая. Единственное допущение, при котором можно удовлетворить (14):

$$C_2 = 0, \quad \kappa_1 R = \pi. \quad (15)$$

¹ $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $D \geq 0$.

² Если нет разветвления цепей на стенке.

³ В кинетическом случае, когда концентрации различных активных центров почти постоянны по объему (см. выше), они тоже пропорциональны. Предположение Акулова о пропорциональности всех частных решений системы (1) справедливо в этих двух крайних случаях, но как это видно из (4), в общем случае неверно.

Освобождаясь от иррациональности, приходим к уравнению для пределов в диффузионной области

$$\frac{\alpha_{22}\sigma_{11} - \alpha_{12}\sigma_{21}}{D_1 D_2} - \frac{2\pi^2}{R^2} \left(\frac{\alpha_{22}}{D_2} + \frac{\alpha_{11}}{D_1} \right) + \frac{4\pi^4}{R^4} = 0. \quad (16)$$

Подставив сюда выражения для a_{ik} из формулы (12), мы приходим к следующему уравнению:

$$A'p^6 + B'p^5 + \frac{4}{D_1^2 D_2^2} (be - cd)p^4 + C'p^3 + E'p^2 + \frac{4\pi^4}{R^4} = 0. \quad (17)$$

Здесь коэффициенты A' , B' , C' и E' — существенно положительные числа, а коэффициенты диффузии были представлены в виде $D_i = D_i^0/p$. Из уравнения (17) видно, что имеются либо два, либо ни одного корня. Точно так же, как и в рассмотренном выше случае, скобка $(be - cd)$ пропорциональна $x(1-x)$, откуда следует, что область воспламенения замкнута со стороны смесей, обедненных любой из компонент.

Рассмотрим теперь такой случай, когда скорость гетерогенных реакций одного из активных центров, взятого отдельно, лимитируется диффузией, а другого — кинетикой процесса на поверхности, иными словами, выполняется следующая система неравенств:

$$\frac{R(\sigma_{21} + \alpha_2\sigma_{22})}{D_2} \ll 1, \quad \frac{R(\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{12})}{D_1} \gg 1. \quad (18)$$

Тогда в уравнении (10) следует оставить только те члены, которые содержат большое отношение. Деля их на произведение $(R\kappa_1 \operatorname{ctg} \kappa_1 R - 1)(R\kappa_2 \operatorname{ctg} \kappa_2 R - 1)$, приходим к уравнению

$$\frac{\alpha_2(\sigma_{11} + \alpha_1\sigma_{12})}{\alpha_1(\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{12})} = \frac{\kappa_1 R \operatorname{ctg} \kappa_1 R - 1}{\kappa_2 R \operatorname{ctg} \kappa_2 R - 1}.$$

При этом надо учесть, что κ_2 — чисто мнимая величина, так что, переходя к действительным величинам, получим

$$\frac{\alpha_2(\sigma_{11} + \alpha_1\sigma_{12})}{\alpha_1(\sigma_{11} + \alpha_2\sigma_{12})} = \frac{\kappa_1 R \operatorname{ctg} \kappa_1 R - 1}{|\kappa_2| R \operatorname{cth} |\kappa_2| R - 1}. \quad (19)$$

Числитель дроби, стоящей в правой части (19), испытывает скачок от $-\infty$ до $+\infty$ каждый раз, когда $\kappa_2 R$ принимает значения, кратные π , а знаменатель есть монотонная функция своего аргумента $|\kappa_2| R$. Поэтому (19) имеет бесчисленное множество действительных корней. Для нас представляет интерес только первый корень, лежащий при значении $\kappa_1 R$, несколько большим π . Несмотря на то, что значение этого корня немного зависит от давления, все результаты анализа предыдущего, чисто диффузионного случая, конечно, остаются в силе.

Любопытно, что если положить равным нулю коэффициент превращения на стенке σ_{12} (существование которого, вообще, до

сих пор не доказано), то и коэффициент рекомбинации σ_{11} из уравнения пределов исключается.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Поскольку в ходе диффузии цепи к стенке происходит непрерывное превращение центров обоих типов друг в друга, то, если диффузия хотя бы одного из центров затруднена, диффузия цепочки в целом будет также замедлена.

Таким образом, качественная картина цепной реакции, получаемая при рассмотрении диффузии только одного центра, не изменяется даже при столь различном диффузионном поведении обоих центров. Этим и объясняется то, что приближенная теория Семенова, основанная на диффузии одного центра, так хорошо согласуется с большим числом опытных данных.

Л и т е р а т у р а

1. Н. Н. Семенов. Цепные реакции. М.—Л., ОНТИ, 1934; Z. Phys., 1927, 46, 109; Z. phys. Chem., В, 1929, 2, 61.
2. Уи. В. Khariton, L. F. Vatta. Z. Phys., 1926, 39, 547.
3. А. Трифанов. Z. phys. Chem., В, 1929, 3, 195.
4. V. Varsian, V. Sogokin. Z. phys. Chem., В, 1931, 12, 247.
5. М. Н. Семелов. Acta phys.-chim. URSS, 1943, 118, 93.
6. А. Е. Бирон и А. Б. Налбандян. ЖФХ, 1937, 9, 132.
7. В. В. Воеводский. ЖФХ, 1946, 20, 779.
8. Н. С. Акулов. Теория цепных процессов. М.—Л., ГИТИ, 1951.
9. А. И. Ахизер, И. Я. Померанчук. Некоторые вопросы теории ядра. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, стр. 321.
10. А. Б. Налбандян и В. В. Воеводский. Механизм окисления и горения водорода. М., Изд-во АН СССР, 1949.

Раздел II ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ИНДУЦИРОВАННЫЙ β -РАСПАД ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНА С ТЯЖЕЛОЙ ЧАСТИЦЕЙ*

Как известно, космические лучи порождают в веществе так называемые ливни, состоящие из большого числа частиц, которые возникают одновременно в одной и той же точке пространства. Гейзенберг [1] высказал предположение о том, что эти ливни являются продуктами β -распада тяжелых частиц, индуцированного космическими лучами.

Эффективное сечение β -распада при столкновении кванта света или электрона с тяжелой частицей (протоном или нейтроном) в первом приближении, т. е. с учетом рождения только одной β -частицы, вычислено Фирцем [2]. Как и следовало ожидать, это сечение очень мало. В связи с этим представляется интересным вычислить вероятность β -распада при центральном ударе.

В качестве падающей частицы рассмотрим очень быстрый электрон. Его энергия E_0 много больше mc^2 , что наверняка выполняется в космических лучах (m — масса покоя электрона).

Волновую функцию падающего электрона можно представить в виде сферической стоячей волны. В соответствии с задачей о центральном ударе будем считать тяжелую частицу неподвижной и находящейся в начале координат. Волновую функцию полагаем в виде стоячей, а не бегущей волны потому, что в данном случае речь идет не о возникновении, а о прямом и обратном движении, которое почти не возмущено β -распадом. Совсем иначе обстоит дело с электроном, вылетающим из ядра. Волновая функция такого электрона имеет особенность в начале координат и не является поэтому регулярным решением уравнения Дирака.

* «Физ. журн. СССР», 1937, 12, 138.

Для простоты ограничимся рассмотрением состояний электро- на с полным моментом $j=1/2$. Им соответствуют четыре различ- ные собственные функции. Спин двух первых ориентирован по направлению импульса частицы. Остальные две функции харак- теризуются спином противоположного знака. В обычных спек- тропических обозначениях для двух первых функций $j=1/2$, $l=1$, $m=1$ и 0 , а для двух следующих $j=1/2$, $l=0$, $m=0$ и $l=1$, $m=-1$.

Все четыре собственные функции в указанной последователь- ности имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(p_0) &= \begin{vmatrix} -i(f'_x + if'_y) \frac{h}{p_0} & -i \\ if'_z \frac{h}{p_0} & -i(f'_x - if'_y) \frac{h}{p_0} \\ 0 & if'_z \frac{h}{p_0} \\ f & 0 \end{vmatrix}; \quad \Psi^{(2)}(p_0) = \begin{vmatrix} -i \\ if'_z \frac{h}{p_0} \\ 0 \\ f \end{vmatrix}; \\ \Psi^{(3)}(p_0) &= \begin{vmatrix} -i(f'_x + if'_y) \frac{h}{p_0} & f \\ if'_z \frac{h}{p_0} & 0 \\ -i(f'_x - if'_y) \frac{h}{p_0} & f \\ if'_z \frac{h}{p_0} & 0 \end{vmatrix}; \quad \Psi^{(4)}(p_0) = \begin{vmatrix} f \\ 0 \\ -if'_z \frac{h}{p_0} \\ -i(f'_x - if'_y) \frac{h}{p_0} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем далее верхние индексы 1, 2, 3, 4 обозначать буквой α . Функция Ψ нормирована на один электрон в объеме $V=4/3 \pi R^3$. При этом

$$f = \frac{1}{2\sqrt{\pi R}} e^{-iE_0 t/\hbar} \frac{1}{r} \sin \frac{p_0 r}{\hbar}. \quad (2)$$

Здесь $f'_x = \partial f / \partial x$ и т. д.;

$$E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2}.$$

В дальнейшем, там, где это не ведет к расхождению интегра- лов, будем полагать $E_0 = c p_0$. Это приближение уже использовано для $\Psi^{(\alpha)}(p_0)$ в (1).

Волновую функцию конечного состояния можно представить плоскими волнами

$$\Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i(E(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\mathbf{r})/\hbar} u^\beta(\mathbf{p}). \quad (3)$$

Здесь $u^\beta(\mathbf{p})$ — спинорная амплитуда волны Дирака с $\beta=1$ и 2 . Она также определяется в приближении $E = c p$, поскольку E , как будет видно из дальнейшего, имеет порядок величины E_0 .

Поле падающих электронов, соответствующее переходу $p_0 \rightarrow \alpha \rightarrow \mathbf{p}$, β описывается методом Меллера. А именно: конструируют- ся соответствующие плотности заряда и тока

$$\rho = e \Psi^{*\alpha} \Psi^\beta; \quad j = e c \Psi^{*\alpha} \alpha \Psi^\beta,$$

причем скалярный и векторный потенциалы искомого поля опре- деляются из уравнений Даламбера

$$\square \varphi = -4\pi \rho; \quad \square \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}/c, \quad (4)$$

здесь α — вектор Дирака.

Для удобства решения уравнений (4) $\Psi^\alpha(p_0)$ разлагается по плоским волнам:

$$\Psi^{(\alpha)}(p_0) = e^{-iE_0 t/\hbar} \int a^{(\alpha)}(\mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p}'\mathbf{r})/\hbar} d\mathbf{p}',$$

согласно интегральной формуле Фурье

$$a^{(\alpha)}(p_0) = \frac{1}{8\pi r_0 \hbar} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \delta(p_0 - |\mathbf{p}'|) v^\alpha(\mathbf{p}'),$$

здесь $v^\alpha(\mathbf{p}')$ — спинор:

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} (p'_x + ip'_y)/p_0 & p'_z/p_0 \\ -p'_z/p_0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; & v^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} (p'_x - ip'_y)/p_0 & p'_z/p_0 \\ p'_z/p_0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ v^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (p'_x + ip'_y)/p_0 & p'_z/p_0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; & v^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p'_z/p_0 & (p'_x - ip'_y)/p_0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -p'_z/p_0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Этот спинор отличается от спинора плоской волны. Так, если v^3 и v^4 — амплитуды спинора, соответствующие положительной энергии, то v^1 и v^2 не обязательно соответствуют отрицательной энергии.

Окончательно получаем

$$\Psi^{(\alpha)}(p_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{p_0}{\hbar} \int v^\alpha(\mathbf{p}') e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar} d\Omega' e^{-iE_0 t/\hbar}; \quad (6)$$

здесь $|\mathbf{p}'| = p_0$, $d\Omega'$ — элемент телесного угла для направления \mathbf{p}' . Отсюда обычным способом получаются φ и \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi R V}} e p_0 \hbar \int \frac{e^{i(E_0 - E(\mathbf{p}'))/\hbar - i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{r}/\hbar}}{(p' - p)^2 - (E_0 - E(\mathbf{p}'))^2/c^2} v^{\alpha\alpha} u^\beta d\Omega', \\ \mathbf{A} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi R V}} e p_0 \hbar \int \frac{e^{i(E_0 - E(\mathbf{p}'))/\hbar - i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{r}/\hbar}}{(p' - p)^2 - (E_0 - E(\mathbf{p}'))^2/c^2} v^{\alpha\alpha} \alpha u^\beta d\Omega'. \end{aligned} \quad (7)$$

Массу тяжелой частицы можно считать бесконечно большой. Ее изменение в процессе β -перехода пренебрежимо мало по сравнению с E_0/c^2 .

Пусть, например, неподвижная тяжелая частица, расположенная в начале координат, является нейтроном. В этом случае весь процесс вынужденного β -распада описывается в терминах теории рассеяния следующим образом. Сначала нейтрон спонтанно распадается на протон, β -электрон и нейтрино. Это состояние называется промежуточным. Далее β -электрон взаимодействует с падающей частицей и получает энергию, достаточную для перехода в конечное состояние.

Импульс и спин спонтанно возникающего электрона в промежуточном состоянии обозначим через l' , δ ($\delta = 1, 2, 3, 4$). Электрон может иметь и отрицательную энергию. Конечное состояние электрона и нейтрона обозначим соответственно через l , γ ($\gamma = 1, 2$) и S , ϵ ($\epsilon = 1, 2$).

Возмущенная собственная волновая функция электрона в конечном состоянии представляется с помощью обычных формул теории рассеяния

$$\Psi^\gamma(l) = -\frac{1}{V} \frac{e^{i h p_0}}{2\pi R} \frac{x_{\alpha\beta\gamma}}{V} \frac{e^{i l' r/h} e^{-i(E(l)+E(p)-E_0)t/h}}{(p' - p)^2 - (E_0 - E(p))^2/c^2} \quad (8)$$

где $l' = l + p - p'$ и

$$x_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\delta} \left[\frac{v^{\alpha} u^{\beta}(p) u^{\delta}(l') u^{\gamma}(l)}{E(l) + E(p) - E_1 - E\delta(l')} \frac{v^{\alpha}(p') \alpha u^{\beta}(p) u^{\delta}(l') \alpha u^{\gamma}(l)}{E(l) + E(p) - E_0 - E\delta(l')} u^{\delta}(l') \right] \quad (9)$$

Обмен между падающим и возникающим электронами будет учтен в дальнейших формулах.

Обозначим $E(l) + E(p) - E_0$ через W . Суммирование по переменной δ выполняется известным способом: числитель и знаменатель (9) умножаются на $W + E(l')$ и в числителе $E^{\delta} u^{\delta}$ заменяется на $H u^{\delta}$.

Кроме того $\sum u_i^{\alpha} u_i^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. В результате имеем

$$x_{\alpha\beta\gamma} = \frac{v^{\alpha} u^{\beta} [W + H(l')] u^{\gamma}(l)}{W^2 - E^2(l')} \frac{v^{\alpha} \alpha u^{\beta} [W + H(l')] \alpha u^{\gamma}(l)}{W^2 - E^2(l')} \quad (10)$$

Фермиевский матричный элемент, определяющий рождение β -электрона и нейтрино, пропорционален значениям их Ψ -функций в начале координат.

Для учета обмена следует взять в матричном элементе анти-симметричную комбинацию состояний двух электронов. При этом антисимметризации подложит только одна пара состояний. Таковой может быть, например, пара конечных состояний p , β и l , γ .

В случае перехода протон \rightarrow нейтрон нужно было бы рассмотреть обмен падающего электрона с электроном, имеющим отрицательную энергию.

Для искомого матричного элемента получаем следующее выражение:

$$H = g \Psi^{\epsilon}(l) \Psi^{\gamma}(l) = -\frac{g e^{i h p_0}}{V} \frac{e^{i(E_0 - E(l) - E(p) - E_0)t/h}}{\sqrt{2} \pi R V^2} \times \\ \times \left(\int \frac{x_{\alpha\beta\gamma} u^{\delta}(s)}{(p' - p)^2 - (E_0 - E(p))^2/c^2} \frac{x_{\alpha\beta\gamma} u^{\delta}(s)}{(p' - l)^2 - (E_0 - E(l))^2/c^2} d\Omega' \right) \quad (11)$$

Интегрирование по $d\Omega'$ выполняется без труда. Именно: в приближении Меллера полагается

$$p = \frac{E}{c} \left(1 - \frac{m^2 c^2}{2 E^2} \right),$$

так что

$$(p' - p)^2 - (E_0 - E(p))^2/c^2 = \frac{2 E_0 E(p)}{c^2} \left[1 + \frac{m^2 c^4 (E_0 - E(p))^2}{2 E_0^2 E^2(p)} - \cos \angle(p' p) \right],$$

$$(p' - l)^2 - (E_0 - E(l))^2/c^2 = \frac{2 E_0 E(l)}{c^2} \left[1 + \frac{m^2 c^4 (E_0 - E(l))^2}{2 E_0^2 E^2(l)} - \cos \angle(p' l) \right].$$

Но поскольку $m c^2 \ll E_0$, применима следующая формула

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{f(y)}{\alpha + y} dy = -f(0) \ln \alpha + O(1).$$

Эта формула получается интегрированием по частям, если только $f(0) \neq 0$ и $f'(0) \neq \infty$. Интегрирование (11) выполняется после подстановки $1 - \cos \angle(p' p) = y$ и соответственно $1 - \cos \angle(p' l) = y$. Следует только еще подставить $p' \parallel p$ в $x_{\alpha\beta\gamma}$ и $p' \parallel l$ в $x_{\alpha\beta\gamma}$.

Для дальнейшего $p' \parallel l$ обозначим через p'' и определим вектор l'' тождеством $l'' = l + p - p''$.

Далее будет видно, что $E(l)$ и $E(p)$ имеют тот же порядок величины, что E_0 , поэтому

$$\ln \frac{m^2 c^4 (E_0 - E(p))^2}{2 E_0^2 E^2(p)}$$

можно представить более кратко в виде $2 \ln \frac{m c^2}{E_0}$.

При этом получаем

$$H = - \sqrt{\frac{2\pi}{RV^3}} g e^2 h c e^{i(E_0 - E(p) - E(t) - E(s))/\hbar} |\Pi^2 \frac{E_0}{mc^2} \left| \frac{u^\epsilon x_{\alpha\beta\gamma}}{E(p)} - \frac{u^\epsilon x_{\alpha\beta\gamma}}{E(t)} \right| | \quad (12)$$

Искомая вероятность перехода имеет вид

$$|H|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \delta [E_0 - E(p) - E(t) - E(s)].$$

Просуммируем эту вероятность по конечным состояниям всех частиц. Сначала вычислим сумму по спиновым координатам ϵ, β, γ . Но поскольку каждое из четырех значений α равноценно (веса всех этих значений в нашем приближении равны), выполним суммирование только по α и разделим результат на 4. При суммировании встречаются члены двух типов: $|x^\alpha \beta \gamma|^2$ и $x_{2\beta\gamma} x_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим член первого типа:

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\epsilon} |x_{\alpha\beta\gamma} u^\epsilon|^2 (W^2 - E^2(t'))^2 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\epsilon} |u^\epsilon (W + c(\alpha I')) u^\gamma v^{\alpha\beta} u^\beta - u^\epsilon (W + c(\alpha I')) \alpha u^\gamma v^{\alpha\beta} \alpha u^\beta|^2 \quad (13)$$

Индексы β, γ, ϵ пробегает значения от 1 до 2. Можно приравнять им значения от 1 до 4, если по известному методу Казимира заменить $u^\beta(p)$ на

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\alpha p)}{p} \right) u^\beta(p), \quad \beta = 1, 2; \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\alpha p)}{p} \right) u^\beta(p), \quad \beta = 3, 4.$$

Аналогично заменяются $u^\gamma(1)$ и $u^\epsilon(s)$.

Искомая сумма преобразуется следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta\gamma\epsilon=1}^4 u^\epsilon (W + c(\alpha I')) u^\gamma v^{\alpha\beta} u^\beta u^{\epsilon\alpha} (W + c(\alpha I')) u^\beta u^{\epsilon\alpha} u^{\beta\epsilon} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta\gamma\epsilon=1}^4 \times \\ \times \left(1 + \frac{(\alpha s)}{s} \right) u^\epsilon (W + c(\alpha I')) \left(1 + \frac{(\alpha l)}{l} \right) u^\gamma v^{\alpha\epsilon} \left(1 + \frac{(\alpha p)}{p} \right) u^\beta u^{\epsilon\alpha} (W + \\ + c(\alpha I')) u^* \gamma v^{\alpha\beta} u^{\beta\epsilon} = \frac{1}{8} \sum_{\epsilon} \tilde{u}^\epsilon \left(1 + \frac{(\alpha s)}{s} \right) (W + c(\alpha I')) \left(1 + \frac{(\alpha l)}{l} \right) (W + c(\alpha I')) \left(1 + \frac{(\alpha p)}{p} \right) (W + c(\alpha I')) u^\epsilon \sum \tilde{v}^\alpha \left(1 + \frac{\alpha p}{p} \right) v^\alpha = \frac{1}{8} \text{Sp} \left\{ \left(1 + \frac{(\alpha s)}{s} \right) (W + c(\alpha I')) \left(1 + \frac{(\alpha l)}{l} \right) (W + c(\alpha I')) \left(1 + \frac{(\alpha p)}{p} \right) \sum \tilde{v}^\alpha \left(1 + \frac{\alpha p}{p} \right) v^\alpha \right\}$$

Здесь \sim означает операцию сопряжения, так что $\tilde{\alpha} = \alpha$. Перед вычислением шпура удобно сначала выполнить интегрирование по $d\Omega_s$, т. е. по всем направлениям импульса нейтрона. При этом

члены, линейные по s , исчезают, а независимые от s умножаются на 4 π . Вычисление шпура производится обычным образом с учетом того, что для единичной матрицы δ_{ik} шпур $\delta_{ii} = 4$. Шпур каждого члена, содержащего нечетные степени (αA) , равен нулю. При суммировании по α используются следующие соотношения:

$$\sum_{\alpha} \tilde{v}^\alpha(1) v^\alpha(p) = 2 \left(1 + \frac{(\alpha l)}{\rho l} \right), \quad \sum_{\alpha} \tilde{v}^\alpha(1) \alpha v^\alpha(p) = 2 \left(\frac{1}{l} + \frac{p}{\rho} \right), \quad (14)$$

$$\sum_{\alpha} \tilde{v}^\alpha(1) \gamma v^\alpha(p) = 2 \frac{[\rho l]}{\rho l}, \quad \sum_{\alpha} \tilde{v}^\alpha(1) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 v^\alpha(p) = 0.$$

Здесь введено обозначение $\gamma_i = \alpha_i \alpha_k$, индексы iks следуют в порядке циклической перестановки.

После введения еще одного обозначения $(1p)/lp = \xi$ искомое выражение (13) представляется в виде

$$4\pi \left\{ (W^2 + c^2 l'^2) - 2 \left(l' \frac{p}{\rho} \right) W \right\} \left(1 - \frac{(\alpha p)}{lp} \right) = \\ = 4\pi c^2 (\rho l + (\rho_0 - p)(\rho_0 - l)) (1 - \xi)^2. \quad (15)$$

Теперь вычисляем смешанные слагаемые

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\epsilon} x_{\alpha\beta\gamma} u^\epsilon x_{\alpha\beta\gamma} u^{\epsilon*} (W^2 - E^2(1')) (W^2 - E^2(1'')) = \\ = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta, \gamma, \epsilon=1}^4 u^\epsilon (W + c(\alpha I')) u^\gamma(1) v^{\alpha\epsilon}(p) u^\beta(p) \times \\ \times u^{\epsilon*} (W + c(\alpha I')) u^{\beta*}(p) v^\alpha(p) u^{\beta*}(1) \quad (16)$$

плюс аналогичные слагаемые, в которых α действует на $u^\gamma(1)$ и $u^\beta(p)$. При этом снова вводятся операторы Казимира и производится интегрирование по $d\Omega_s$. После вычислений из (16) получаем

$$2\pi (1 - \xi) \{ (W^2 - c^2(1'')) (1 + \xi) - (1'') (1'') \} |p\rangle = \\ = 4\pi c^2 (1 - \xi)^2 (1 + \xi) (\rho_0 - l) (\rho_0 - p). \quad (17)$$

В том же приближении для знаменателей в (10) имеем

$$W^2 - E^2(1') = 2(\rho_0 - p) l c^2 (1 - \xi), \\ W^2 - E^2(1'') = 2(\rho_0 - l) \rho c^2 (1 - \xi). \quad (18)$$

После подстановки (15), (17) и (18) в $|H|^2$ находим

$$\int d\Omega_s \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\epsilon} |H|^2 = \\ = \frac{\pi^2 g^2 e^4 h^2}{2 R V^3 c^2} \left\{ \frac{[\rho l + (\rho_0 - p)(\rho_0 - l)]}{\rho^2 l^2} \left(\frac{1}{(\rho_0 - p)^2} + \frac{1}{(\rho_0 - l)^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{(1 + \xi)}{\rho^2 l^2} \right\} |\Pi^2 \frac{mc^2}{E_0}|.$$

ИНДУЦИРОВАННЫЙ β -РАСПАД ТЯЖЕЛОЙ ЧАСТИЦЫ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ИСПУСКАНИЕМ КВАНТА *

Известно, что частицы космических лучей, проходя через материю, образуют в ней так называемые ливни, имеющие на фотграфиях вид нескольких треков, выходящих из одной точки. Для объяснения ливней Гейзенберг [1] предложил привлечь теорию β -распада Ферми [2]. Наличие в ней новой универсальной постоянной g позволяет построить определенную комбинацию размерности длины. Тогда, если длина дебройлевской волны летающей частицы будет порядка этой длины, вероятность одновременно образования нескольких β -частиц окажется того же порядка, что и вероятность образования одной частицы, т. е. эффекты высших приближений теории возмущений станут сравнимы с эффектом первого приближения. Паули, однако, показал, что теория Ферми принципиально непригодна для построения высших приближений. Одновременно Хейтлеру и Баба [3] удалось устранить основную трудность объяснения ливней с помощью пар электрон — позитрон, исходя из так называемой ливневой теории. В то время как вероятность возникновения нескольких пар одновременно пропорциональна соответствующей степени постоянной тонкой структуры, наблюдения совсем не показывают такого показателя спадания числа ливней с возрастанием числа входящих в них частиц. Согласно ливневой теории, одна возникающая пара образует другую, другая — третью и т. д. При этом вероятность возникновения любого количества частиц пропорциональна всегда одной и той же степени постоянной тонкой структуры.

Все эти результаты, однако, не означают непригодности первого приближения теории Ферми для расчета индуцированных β -переходов, могущих представить известный интерес. В настоящей работе вычисляется эффективный поперечник рассеяния жестких γ -квантов тяжелой частицей с одновременно ее β -повращением.

При этом делаются следующие допущения:

а) энергия кванта гораздо больше как mc^2 (m — масса электрона), так и масс-дефекта тяжелой частицы в переходе нейтрон — протон. Последним поэтому можно пренебречь, и результат будет равно описывать переходы прямой и обратной;

б) масса тяжелой частицы бесконечно велика. Тяжелая частица может получать только импульс, но не энергию. В дальнейшем она предположена покоящейся в начале координат.

Рассматриваемый эффект относится в общей сложности к третьему приближению теории возмущения: первому в теории

Дальнейшее интегрирование по $d\Omega_p$ и $d\Omega_s$ сводится просто к умножению на $(4\pi)^2$. Линейный по ξ член исчезает.

По абсолютному значению s легко провести интегрирование с помощью δ -функции. Поскольку вес состояний, заключенных между s и $s+ds$ равен $s^2 V / (2\pi\hbar)^3$, интегрирование снова сводится к умножению — теперь на $(p_0 - p - l)^2 / (2\pi)^2 c\hbar^4$. После введения переменных $\zeta = E(p)/E_0$ и $\eta = E(l)/E_0$ искомая вероятность перехода в единицу времени в интервал $d\zeta d\eta$ представляется в виде

$$\frac{1}{82\pi^4} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{g^2 E_0^4}{R c^6} \ln^2 \frac{mc^2}{E_0} \left\{ (\xi\eta + (1-\zeta)(1-\eta)) \left(\frac{1}{(1-\zeta)^2} + \frac{1}{(1-\eta)^2} \right) - 2 \right\} \times (1-\zeta-\eta)^2 d\zeta d\eta. \quad (19)$$

Для получения вероятности перехода при одном столкновении следует разделить (19) на поток падающих частиц $s \int \Psi^* \alpha \Psi d\sigma$. Здесь в качестве Ψ надо брать не стоячую, а падающую волну, для которой ток равен $4s/R$.

Представляет интерес привести в явном виде результат интегрирования по $d\eta$ от 0 до $1-\zeta$:

$$d\omega_\xi = \frac{1}{128\pi^4} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{g^2 E_0^4}{\hbar^6 c^6} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{12} - \frac{\xi^3}{6} + (2\xi^2 + \xi^3) \ln \xi \right\} \ln^2 \frac{mc^2}{E_0}.$$

Вероятность различных значений ξ в интервале от 0 до 1 не имеет ярко выраженного максимума и для $\xi=0$ и $\xi=1$ равна нулю.

Наконец, полная вероятность процесса

$$\omega = \frac{1}{4616\pi^4} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{g^2 E_0^4}{\hbar^6 c^6} \ln^2 \frac{mc^2}{E_0}. \quad (20)$$

Эта вероятность даже для крайне больших значений E_0 ($E_0 \sim 10^{10}$ eV) составляет около 10^{-10} .

Выражаю сердечную благодарность профессору Л. Д. Ландау за решающие указания.

Л и т е р а т у р а

1. W. Heisenberg. Z. Phys., 1936, 101, 533.
2. M. Fierz. Helv. phys. acta, 1936, 9, 245.

* ЖЭТФ, 1938, 8, вып. 10—11.

распада и второму в теории излучения (как всякий эффект рассеяния).

Промежуточные состояния системы образуют следующие набор: тяжелая частица спонтанно распадается на другую тяжелую (легкую) заряженную частицу и нейтрино; второе промежуточное состояние может получиться двумя способами — либо легкая частица поглотит падающий квант, либо испустит рассеянный. В первом случае в конечном состоянии частица должна испустить рассеянный квант, во втором случае — поглотить падающий.

Пусть импульс падающего кванта \mathbf{k} ($k = \hbar\omega/c$), импульс рассеянного кванта \mathbf{k}' ($k' = \hbar\omega'/c$), импульс легкой заряженной частицы в конечном состоянии \mathbf{p} . Так как импульс в промежуточных состояниях сохраняется, во втором промежуточном состоянии в первом случае он должен равняться $\mathbf{p}'' = \mathbf{p} + \mathbf{k}'$, а во втором случае $\mathbf{p}_1'' = \mathbf{p} - \mathbf{k}$.

В первом промежуточном состоянии, из какого бы второго ни исходить, получается импульс $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}$.

Из общей теории следует такое выражение искомого дифференциального эффективного поперечника процесса:

$$d\Omega = \frac{Vc}{\hbar\omega} \left| \sum \frac{V_{0p'} V_{p'p''} V_{p''p}}{(E' - E)(E'' - E)} + \sum \frac{V_{0p'} V_{p'p''} V_{p''p}}{(E' - E)(E'' - E_0)} \right|^2 \frac{2\pi}{h} \delta(E - E_0) \frac{V^3 d\tau_p d\tau_k}{(2\pi\hbar)^3} d\omega'. \quad (1)$$

Предположим Ψ -функции всех частиц нормированными к единице на объем V . Тогда

$$\begin{aligned} V_{0p'} &= \frac{g}{V} u^i(\mathbf{s}) u^k(\mathbf{p}'), \\ V_{p'p''} &= ec \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \bar{u}^k(\mathbf{p}') (\alpha\mathbf{n}') u^l(\mathbf{p}''), \\ V_{p''p} &= ec \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega'}} \bar{u}^k(\mathbf{p}') (\alpha\mathbf{n}') u^l(\mathbf{p}_1''), \\ V_{p''p} &= ec \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \bar{u}^l(\mathbf{p}'') (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p}), \\ V_{p''p} &= ec \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \bar{u}^l(\mathbf{p}_1'') (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь s означает импульс нейтрино, $u^i(\mathbf{s})$ — соответственно все остальные u -амплитуды дираковских плоских волн, причем значки i и m пробегают значения от 1 до 2, а k и l — от 1 до 4 (промежуточные состояния могут иметь отрицательную энергию).

Суммирование под знаком модуля производится по $k, l; \mathbf{p}, \mathbf{p}'$ — единичные векторы поляризации падающего и рассеянного квантов.

Далее

$$\begin{aligned} E' - E_0 &= E^k(\mathbf{p}') + E(s), \\ E'' - E_0 &= E^l(\mathbf{p}'') - \hbar\omega + E(s), \\ E_1'' - E_0 &= E^l(\mathbf{p}_1'') + \hbar\omega' + E(s). \end{aligned} \quad (3)$$

Суммирование по k, l выполняется по известному способу Дирака:

$$\begin{aligned} b &= \sum_{k,l} \left\{ \frac{u^i(\mathbf{s}) u^k(\mathbf{p}') \bar{u}^k(\mathbf{p}') (\alpha\mathbf{n}') u^l(\mathbf{p}'') \bar{u}^l(\mathbf{p}'') (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p})}{[E(s) + E^k(\mathbf{p}')] [E(s) - \hbar\omega + E^l(\mathbf{p}'')] } + \right. \\ &+ \left. \frac{u^i(\mathbf{s}) u^k(\mathbf{p}') \bar{u}^k(\mathbf{p}') (\alpha\mathbf{n}') u^l(\mathbf{p}_1'') \bar{u}^l(\mathbf{p}_1'') (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p})}{[E(s) + E^k(\mathbf{p}')] [E(s) + \hbar\omega' + E^l(\mathbf{p}_1'')] } \right\} = \\ &= \frac{u^i(\mathbf{s}) [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - \hbar\omega - H(\mathbf{p}'')] (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p})}{[E^2(s) - E^2(\mathbf{p}')] [(h\omega - E(s))^2 - E^2(\mathbf{p}'')] } + \\ &+ \frac{u^i(\mathbf{s}) [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}') [E(s) + \hbar\omega' - H(\mathbf{p}_1'')] (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p})}{[E^2(s) - E^2(\mathbf{p}')] [(E(s) + \hbar\omega')^2 - E^2(\mathbf{p}_1'')] }. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $H(\mathbf{p}')$ — оператор энергии уравнения Дирака, где, однако, \mathbf{p}' — обыкновенный вектор, а не $\hbar/i \nabla$. Обозначим для сокращения знаменатель первой дроби через f_1 , а второй — через f_2 .

Просуммируем далее по спинам конечного состояния, т. е. по значкам i, m , от 1 до 2. Это легче всего осуществить по известному способу Казимира, который заключается в следующем. Заменим $u^i(\mathbf{s})$ выражением $1/2 [1 + H(\mathbf{s})/E(s)] u^i(\mathbf{s})$. Оно остается равным $u^i(\mathbf{s})$ при $i=1, 2$, т. е. в состояниях нейтрино с положительной энергией, и равно тождественно нулю при $i=3, 4$. После замены по i можно суммировать от 1 до 4. Аналогично поступим с u^m .

Тогда квадрат модуля первого члена b будет равняться

$$\begin{aligned} \sum_{i,m} |u^i(\mathbf{s}) [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - \hbar\omega - H(\mathbf{p}'')] (\alpha\mathbf{n}') u^m(\mathbf{p})|^2 &= \\ &= \frac{1}{4} \text{spur} \left\{ \left[\frac{E(s) + H(\mathbf{s})}{E(s)} \right] [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - \hbar\omega - \right. \\ &- H(\mathbf{p}'')] (\alpha\mathbf{n}') \frac{E(p) + H(p)}{E(p)} (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - \hbar\omega - \\ &- H(\mathbf{p}'')] (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - H(\mathbf{p}'')] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Прежде чем вычислить шпур, удобно произвести интегрирование по $d\Omega_s$, т. е. по всем направлениям импульса нейтрино.

Тогда, принимая во внимание, что покоящаяся масса нейтрино равна нулю и $\int H(s) d\Omega_s = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int d\Omega_s \sum_{i,m} |b|^2 &= \frac{\pi}{f_1^2} \operatorname{spur} \left\{ [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}) [E(s) - h\omega] - \right. \\ &- H(\mathbf{p}'') | (\alpha\mathbf{n}') \left(1 + \frac{H(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')} \right) (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - h\omega - H(\mathbf{p}'')] | (\alpha\mathbf{n}) [E(s) - \\ &- H(\mathbf{p}')] | \left. + \frac{\pi}{f_2^2} \operatorname{spur} \left\{ [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}') [E(s) + h\omega] - \right. \right. \\ &- H(\mathbf{p}_1') | (\alpha\mathbf{n}') \left(1 + \frac{H(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')} \right) (\alpha\mathbf{n}) [E(s) + h\omega] - H(\mathbf{p}_1') | (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - \\ &- H(\mathbf{p}'')] | \left. + \frac{2\pi}{f_1 f_2} \operatorname{spur} \left\{ [E(s) - H(\mathbf{p}')] (\alpha\mathbf{n}) [E(s) - h\omega] - \right. \right. \\ &- H(\mathbf{p}'') | (\alpha\mathbf{n}') \left(1 + \frac{H(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')} \right) (\alpha\mathbf{n}) [E(s) + h\omega] - H(\mathbf{p}_1') | (\alpha\mathbf{n}') [E(s) - \\ &- H(\mathbf{p}')] | \left. \right\} = \pi \left\{ \frac{A}{f_1^2} + \frac{B}{f_2^2} + \frac{2C}{f_1 f_2} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если бы с самого начала писать матричный элемент β -перехода как $G/V \cdot i \delta i'$, в (5) вошли бы шпуры вида $\operatorname{spur} \{ \delta i i' \} = \operatorname{spur} \{ \mathcal{M} \}$, так как матрица δ унитарна. Ее нельзя опускать, если в дальнейшем не иметь в виду интегрирование по импульсам нейтрино. Аналогично в анзатце Коконинского — Юленбека β -матрица не влияет на результаты.

При вычислении шпуров мы будем пренебрегать величинами порядка mc^2 , так как все входящие в задачу импульсы положены много большими.

В знаменателях замена $E(\mathbf{p})$ на cp повела бы к расходимостям в интегралах. Здесь мы положим

$$E(\mathbf{p})/c = p + \frac{1}{2} mc^2/p. \quad (6)$$

В выражении (5) достаточно выписать только шпуры A и B , так как C ничего не прибавляет к эффекту в рассматриваемом приближении (см. ниже).

Называя

$$\mathcal{E} \equiv 2\mathbf{n} (\mathbf{np}/p) - \mathbf{p}/p, \quad \mathcal{E}' = 2\mathbf{n}' (\mathbf{n}'\mathbf{p}/p) - \mathbf{p}'/p,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{A}{4c^4} &= (s^2 + p'^2) \left[\left(s - \frac{h\omega}{c} \right)^2 + p'^2 - 2 \left(s - \frac{h\omega}{c} \right) (\mathbf{p}'\mathcal{E}) \right] - \\ &- 4 (\mathbf{p}'\mathbf{n}') s \left[\left(s - \frac{h\omega}{c} \right)^2 (\mathcal{E}\mathbf{n}) - 2 \left(s - \frac{h\omega}{c} \right) (\mathbf{p}'\mathbf{n}') + 2 (\mathcal{E}\mathbf{p}') \cdot (\mathbf{p}'\mathbf{n}') - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- p'^2 (\mathcal{E}\mathbf{n}) \left. + 2s \left[\left(s - \frac{h\omega}{c} \right)^2 (\mathcal{E}\mathbf{p}') - 2 \left(s - \frac{h\omega}{c} \right) (\mathbf{p}'\mathbf{p}') + \right. \right. \\ &+ 2 (\mathcal{E}\mathbf{p}') \cdot (\mathbf{p}'\mathbf{p}') - p'^2 (\mathcal{E}\mathbf{p}') \left. \right]; \\ \frac{B}{4c^4} &= (s^2 + p'^2) \left[\left(s + \frac{h\omega'}{c} \right)^2 + p_1'^2 - 2 \left(s + \frac{h\omega'}{c} \right) (\mathbf{p}_1'\mathcal{E}') \right] - \\ &- 4 (\mathbf{p}_1'\mathbf{n}') s \left[\left(s + \frac{h\omega'}{c} \right)^2 (\mathcal{E}'\mathbf{n}') - 2 \left(s + \frac{h\omega'}{c} \right) (\mathbf{p}_1'\mathbf{n}') + \right. \\ &+ 2 (\mathcal{E}'\mathbf{p}_1') \cdot (\mathbf{p}_1'\mathbf{n}') + p_1'^2 (\mathcal{E}'\mathbf{n}') \left. \right] + 2s \left[\left(s + \frac{h\omega'}{c} \right)^2 (\mathcal{E}'\mathbf{p}') - \right. \\ &- 2 \left(s + \frac{h\omega'}{c} \right) (\mathbf{p}_1'\mathbf{p}') + 2 (\mathcal{E}'\mathbf{p}_1') \cdot (\mathbf{p}_1'\mathbf{p}') - 2 (\mathcal{E}'\mathbf{p}') \cdot p_1'^2 \left. \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрирование по s легко выполнить, пользуясь входящей в (1) δ -функцией. Именно: $s = h\omega - h\omega' - p$, и вся операция сводится просто к умножению на s и соответствующей замене в подынтегральной функции.

Проинтегрируем далее по всем направлениям импульса \mathbf{p} . Для этого надо преобразовать множители, входящие в f_1 и f_2 , пользуясь (6). Именно:

$$\begin{aligned} c^2 (h\omega/c - s)^2 - E^2(\mathbf{p}'') &= [E(\mathbf{p}) + ck']^2 - E^2(\mathbf{p} + \mathbf{k}') = \\ &= 2pk'c^2 [1 - \cos(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{k}'})] + m^2c^2/2p^2, \\ c^2 (h\omega'/c - s)^2 + E^2(\mathbf{p}_1') &= [E(\mathbf{p}) - ck]^2 - E^2(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) = \\ &= 2pkc^2 [1 - \cos(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{k}})] + m^2c^2/2p^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь легко произвести само интегрирование по формуле

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\alpha} \frac{f(x) dx}{\alpha + x} = \frac{f(0)}{\alpha} - f'(0) \ln(\alpha) + 0(1), \quad \alpha > 0. \quad (9)$$

Под x будем понимать один раз $1 - \cos(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{k}'})$, другой раз $1 - \cos(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{k}})$. Рассматривая шпуры, легко видеть, что A обращается в нуль при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}'$ и B — при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}$. Остаются поэтому только члены, пропорциональные $\ln p/mc$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^4} \left\{ \frac{\partial A}{\partial [\cos(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{k}'})]_{\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}'}} \right\} &= 16 [1 - \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{k}'})] [p^2 + (p + k')^2] [(k - p - k')^2 + \\ &+ (p + k')^2], \quad (10) \\ \frac{1}{c^4} \left\{ \frac{\partial A}{\partial [\cos(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{k}})]_{\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}}} \right\} &= 16 [1 - \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{k}'})] [p^2 + (p - k)^2] [(k - p - k')^2 + (p - k)^2]. \end{aligned}$$

Знаменатель третьего члена (5) становится малым в двух точках: при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}$ и при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}'$. Каждая из точек дает, однако, толь-

ко член, содержащий $\ln p/mc$. Но в обеих точках C равно нулю. Это легко видеть таким способом: при $p \parallel k'$ оператор $(\alpha p')$ антиперестановочен с $(\alpha p')$, так как $(\alpha A)(\alpha B) + (\alpha B)(\alpha A) = 2(AB)$, $(k'p') = 0$ и аналогично $(pp') = 0$ при $p \parallel k'$. Тогда сомножитель $[s - \hbar\omega/c - (\alpha p')][1 + (\alpha p)/p]$, входящий в C , равен $(p + k')$. $(\alpha p')[1 - (\alpha p)/p] \times [1 + (\alpha p)/p] = 0$. Область, где k по направлению близко к k' , прибавляет к интегралу члены гораздо меньшего порядка, так как, хотя знаменатель в ней становится того же порядка, что и в первых двух членах (5), сама область мала. При дальнейшем интегрировании по направлениям $k' A$ и B умножатся снова на логарифмический член, ставясь порядком $\ln \hbar\omega/mc^2$. Между тем, если удерживать величины 0 (1), остающиеся от интегрирования C по $d\Omega_p$, они войдут в окончательный результат в крайнем случае пропорциональными первой степени $\ln \hbar\omega/mc^2$. Содержать mc^2 в знаменателе они, конечно, не могут, так как их порядок во всяком случае не больше A и B .

Чтобы проинтегрировать по $d\Omega_k$, представим знаменатели в виде

$$\begin{aligned} [s^2 - E^2(p')]_{p \parallel k'} &= \\ &= 2k(p+k')(1 - \cos(\widehat{kk}')) + \frac{p(k-k')}{k(k+k')} \frac{m^2c^2}{2p^2}, \quad [s^2 - E^2(p')]_{p \perp k} = \\ &= 2k'(p-k)(1 - \cos(\widehat{kk}')) + \frac{p(k-k')}{k(k+k')} \frac{m^2c^2}{2p^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее все логарифмы следует заменить на логарифмы $\ln \hbar\omega/mc^2$, потому что остальные входящие в них сомножители сами 0 ($\hbar\omega/p$) и замена отвечает пренебрежению членами 0 (1). Тогда, снова пользуясь (9), получим

$$\begin{aligned} \int d\Omega_p d\Omega_k \pi \left\{ \frac{A}{f_1^2} + \frac{B}{f_2^2} + \frac{2C}{f_1 f_2} \right\} &= \frac{16\pi^3 \ln^2 \hbar\omega/mc^2}{p^2 k^2 k'^2} \left\{ \frac{1}{(p+k)^2} |p^2 + (p + \right. \\ &+ k')^2| [(k-p-k')^2 + (p+k')^2] + \frac{1}{(p-k)^2} |p^2 + (p - \\ &- k)^2| [(k-p-k)^2 + (k-p)^2] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эффективный поперечник вычисляется для энергии падающих квантов, ибо для числа квантов он расходуется при малых k' , как это часто оказывается, (12) содержит k'^2 в знаменателе, и матричные элементы (2) тоже дают k'^{-1} . Полный эффективный поперечник будет

$$\Phi = \frac{8}{22\pi^3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{g^2 \omega^2}{\hbar^2 c^4} \ln^2 \frac{\hbar\omega}{mc^2}. \quad (13)$$

Если исходить из анзатца Конопинского и Юленбека, Φ будет пропорционально ω^4 . Ход вычислений ни в одном пункте не отли-

чается от приведенного. При $\hbar\omega = 1000 mc^2$, как это можно положить для космических лучей, Φ имеет порядок величины $10^{-10} cm^2$ в связи с малостью $g \sim 10^{-48} \text{ эрг} \cdot cm^3$.

Л и т е р а т у р а

1. W. Heisenberg. Z. Phys., 1937, 101, 533.
2. E. Fermi. Z. Phys., 1936, 88, 161.
3. Heitler, Bhabha. Proc. Roy. Soc., 1936, A159, 432.

О НОВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДИРАКОМ *

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 20.XII 1951)

Недавно Дирак¹ предложил новую формулировку классической электродинамики.

Уравнения Дирака выглядят так:

$$\frac{\partial F_i^k}{\partial x^k} = 4 \pi \lambda A_i, \quad (1)$$

$$A_i A^i = - \frac{m^2 c^4}{e^2}. \quad (2)$$

Следовательно, потенциалы в этой теории не являются производными величинами, а пропорциональны току, с которым они связаны соотношением

$$J_i = \lambda A_i. \quad (3)$$

Дополнительная величина λ определяется условием (2), налагаемым на потенциалы. Соотношения между полями и потенциалами, конечно, обычные.

Дирак показывает, что в предельном случае весьма малых λ его уравнения переходят в уравнения движения малого заряда в электромагнитном поле, такие, как в лорентцевской электродинамике.

В настоящей заметке рассмотрено решение уравнений Дирака для заряженной сферы.

Показано, что если задать первоначально покомпонентно поделенный заряд сферической формы, равномерно распределен-

* ДАН СССР, 1952, 82, вып. 6, 873.

¹ P. Dirac. Proc. Roy. Soc., 1951, 209, 291.

ный в пространстве, то уравнения Дирака имеют два решения.
 1. Решение, в котором заряды разбегаются. В предельном случае малой начальной плотности оно переходит в решение, даваемое обыкновенной электродинамикой, как и должно быть.
 2. Решение, в котором заряды сходятся к центру. Оно, очевидно, не может соответствовать физической реальности. Между тем оно удовлетворяет тем же начальным условиям. Если в классической электродинамике от него еще можно (словесно) отделиться, то при переходе к квантовой теории, вероятно, встретятся очень большие трудности².

Уравнения Дирака для поставленной нами задачи выглядят так:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E = 4\pi\lambda\varphi, \quad (4)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi\lambda A, \quad (5)$$

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\varphi^2 - A^2 = \frac{m^2 c^4}{e^2}. \quad (7)$$

Здесь φ — скалярный потенциал, A — радиальная составляющая векторного потенциала, пропорциональная радиальному току, E — радиальная составляющая электрического поля.

Введем новые переменные:

$$\varphi = -\frac{mc^2}{e} \operatorname{ch} \psi, \quad A = -\frac{mc^2}{e} \operatorname{sh} \psi, \quad (8)$$

$$E = \frac{mc^2}{e} \varepsilon. \quad (9)$$

Заметим, что если выбрать в равенстве (8) знаки +, то получится упомянутое вначале неправильное решение. Положение здесь аналогично двузначности энергии в теории относительности. Знак при $\operatorname{sh} \psi$ не важен, потому что он отвечает просто выбору знака ψ . Исключая λ из (4) (5), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \operatorname{cth} \psi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{2\varepsilon}{r} = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{sh} \psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \operatorname{ch} \psi \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \varepsilon = 0. \quad (11)$$

² В обычной релятивистской механике имеется аналогичная трудность, потому что получаются два знака энергии, или, что то же самое, два знака массы. Но отрицательные массы исключаются начальным условием.

Уравнения характеристик выглядят так:

$$dr = \frac{cdt}{\operatorname{cth} \psi} = -\frac{r d\varepsilon}{2\varepsilon}, \quad (12)$$

$$\frac{dr}{\operatorname{sh} \psi} = \frac{cdt}{\operatorname{ch} \psi} = \frac{d\psi}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Эта система легко интегрируется и дает

$$\varepsilon r^2 = C_1, \quad (14)$$

$$\frac{C_1}{r} + \operatorname{ch} \psi = C_2, \quad (15)$$

$$\int_0^\psi \frac{C_1 \operatorname{ch} \psi' d\psi'}{(C_2 - \operatorname{ch} \psi')^2} - ct = C_3. \quad (16)$$

Общий интеграл системы (10), (11) выглядит так:

$$C_2 = f(C_1), \quad C_3 = F(C_1). \quad (17)$$

В начальный момент радиальный ток отсутствует. Следовательно, $A=0$, $\operatorname{sh} \psi=0$, $\psi=0$, $\operatorname{ch} \psi=1$. Но произведение εr^2 внутри сферы постоянно. Поэтому $F(C_1)=0$.

Чтобы определить вторую функцию, найдем с помощью (4) распределение поля в начальный момент. Имеем

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_0 e}{mc^2} r \equiv \alpha r, \quad r \ll R. \quad (18)$$

Здесь R — начальный радиус сферы, ρ_0 — начальная плотность.

Таким образом, решение поставленной задачи выглядит так:

$$\varepsilon r + \operatorname{ch} \psi = 1 + \sqrt[3]{\alpha \varepsilon^2 r^4}, \quad \varepsilon r^2 \ll \alpha R^3, \quad (19)$$

$$ct = \varepsilon r^2 \int_0^\psi \frac{\operatorname{ch} \psi' d\psi'}{(\varepsilon r + \operatorname{ch} \psi - \operatorname{ch} \psi')^2}. \quad (20)$$

В неправильном решении в формуле (20) стоит минус перед интегралом. Но это значит, что ψ с течением времени уменьшается, $\psi < 0$, $A < 0$. Мы не можем теперь выбрать $\lambda < 0$, потому что тогда получится отрицательная плотность заряда, вопреки предположению. Полное время спадания в точку, как видно из (20), конечно. Покажем еще, что в предельном случае малой начальной плотности заряда при нашем выборе знаков в (8) получится обычное решение. Возьмем крайнюю точку сферы, для которой согласно (19) $\varepsilon r^2 = \alpha R^3$. Для нее уравнение (20) принимает вид

$$ct = \int_R^r \left(1 + \alpha R^2 - \frac{\alpha R^3}{r} \right) \left[\left(1 + \alpha R^2 - \frac{\alpha R^3}{r} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} dr. \quad (21)$$

При малых α оно приводится к виду

$$ct = (2\alpha R^2)^{-1/2} \int_R^{\infty} dr' \left(1 - \frac{R}{r'}\right)^{-1/2}, \quad (22)$$

как в обычной электродинамике.

Заметим, что $\alpha \sim 1$ отвечает совсем небольшим плотностям заряда, при $m = 10^{-27}$ всего $0,8 \cdot 10^{12}$ электрон/см³.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ *

Как известно, классические уравнения электродинамики не могут быть регуляризованы релятивистско-инвариантным образом в рамках чисто электромагнитной картины поля. Классическая модель протяженного заряда неустойчива по теореме Ирншоу, а допускавшиеся раньше неэлектромагнитные силы были дальнедействующими и поэтому не укладывались в рамки теории относительности.

В настоящее время теоретическая физика знает примеры релятивистско-инвариантных полей помимо электромагнитных, например векторное мезонное поле. Оно, как бозонное, допускает и предельный переход к неквантовой теории. Поэтому можно заново поставить вопрос о построении устойчивой классической модели заряда, в которой электрические силы отталкивания уравновешиваются «мезонными» силами притяжения. Разумеется, расчеты по классической модели представляют чисто методический интерес и не могут непосредственно сравниться с опытом.

Любопытно, однако, что регуляризация на основе «мезонного» поля удастся без введения в теорию новых констант. Окажется, что устойчивую модель протяженного заряда можно получить только, если принять, что «мезонному» полю отвечают виртуальные, а не реальные частицы. Последние не дают устойчивого равновесия с электромагнитными силами.

Будем исходить из релятивистско-инвариантного лагранжиана

$$L = \int d\nu \left[\frac{1}{16\pi} (F_{ik}^2 - \kappa^2 \psi_i^2 - E_{ik}^2) + j_i (\varphi_i + \lambda \psi_i) \right]. \quad (1)$$

Здесь φ_i — электромагнитный, ψ_i — «мезонный» потенциалы; E_{ik} и F_{ik} — соответствующим образом определенные поля; κ и λ — инвариантные константы. Знак κ^2 выбран в соответствии с тем, что «мезонное» поле — виртуальное. Существовало, что электромагнитные и «мезонные» слагаемые E_{ik}^2 и F_{ik}^2 входят с разными знаками, так как «мезонное» поле должно быть притягивающим.

Дальнейшие вычисления удобно производить в системе покоя заряда как целого. Тогда из (1) получаются обычным образом уравнения электростатики и «мезостатики»:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (2)$$

$$\Delta\psi + \kappa^2\psi = 4\pi\rho\lambda, \quad (3)$$

$$\rho(E + \lambda F) = 0. \quad (4)$$

При этом φ , ψ и ρ — временные компоненты потенциалов и плотности тока, E и F — электростатическое и «мезостатическое» поля. Формула (4) выражает условие равновесия сил. Следует, конечно, потребовать и устойчивости равновесия.

Уравнение (4) имеет два решения: $\rho = 0$ и $E = -\lambda F$. Будем считать, что первое имеет место при $r > r_0$, а второе при $r \leq r_0$, т. е. внутри области, занятой зарядом, в которой, таким образом, $\varphi = \lambda\psi + C$. (5)

Подставляя это в (2) и (3), находим

$$4\pi\rho = -\lambda\kappa^2\psi / (1 - \lambda^2) \quad (6)$$

и

$$\Delta\psi = -\kappa^2\psi / (1 - \lambda^2) \quad \text{при } r \leq r_0, \quad (7)$$

$$\Delta\psi = -\kappa^2\psi \quad \text{при } r > r_0. \quad (8)$$

Таким образом, «мезонное» поле и вне заряда — переменное в пространстве. Но так как на κ^2 не накладывается никакого ограничения сверху, можно допустить, что пространственный период сколь угодно мал и поэтому «мезонное» поле не наблюдается. Другой вариант, с быстро затухающим в пространстве «мезонным» полем, не дает устойчивого равновесия с электростатическими силами.

Решения (7) и (8) всегда могут быть сопряжены при $r = r_0$. Далее, надо удовлетворить непрерывности электрического потенциала и поля: $\varphi(r_0) = e/r_0$, $E(r_0) = e/r_0^2$. Это дает значение постоянной C из (5):

$$C = \frac{e}{r_0} \left[1 - \frac{\text{tg } \nu \kappa r_0}{\nu \kappa r_0} \right]^{-1}, \quad (9)$$

где $\nu = (1 - \lambda^2)^{-1/2}$.

* ЖЭТФ, 1962, 43, вып. 6(12), 2185.

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ С МОМЕНТОМ *

Через C очень просто выражается энергия заряда, которая равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int \{E^2 - (F^2 - \kappa^2 \psi^2)\} dv. \quad (10)$$

Производя над ней обычные преобразования, основанные на том, что $E = -\nabla\phi$, $F = -\nabla\psi$, и на уравнениях (2) и (3), получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \rho (\phi + \lambda\psi) dv = \frac{C}{2} \int \rho dv = \frac{Ce}{2}. \quad (11)$$

Теперь покажем, что \mathcal{E} имеет минимум при известном значении r_0 . Для этого удобно записать v так:

$$v = \frac{\pi}{2\kappa r_0} + \delta, \quad (12)$$

что дает

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{2r_0} \left[1 + \frac{c^2 g \kappa r_0}{\pi/2 + \kappa r_0} \right]^{-1}. \quad (13)$$

При $r_0 = 0$ знаменатель этого выражения имеет конечное значение и положительную производную, при $\kappa r_0 = \pi$ он обращается в $-\infty$. Следовательно, существует определенное значение κr_0 , где знаменатель максимален, а \mathcal{E} имеет минимум, т. е. равновесие устойчиво. Оно достигается при $\kappa r_0 = 2, 3$, когда

$$\mathcal{E} = e^2 \kappa e / 3,54; \quad (14)$$

\mathcal{E} следует приравнять энергии покоя частицы mc^2 , откуда

$$\kappa e = 3,54 mc^2 / e^2, \quad r_0 = 0,65 e^2 / mc^2. \quad (15)$$

Можно показать, что в слабом внешнем поле величина $m = Ce^2 / 2c^2$ есть коэффициент пропорциональности между силой и ускорением заряда.

Таким образом, в ответ входит только произведение κe , а не каждая из величин в отдельности. Можно, например, считать e сколь угодно малым, а κ устремить к бесконечности. Если e стремится к нулю, то постоянная связи λ стремится к бесконечности, а произведение $\lambda\psi$ остается конечным, как это легко видеть из краевых условий при $r = r_0$. Но так как «мезонное» поле имеет бесконечно малый пространственный период, оно никак не действует на внешний заряд, который согласно (15) тоже имеет конечные размеры.

Ранее [1] было показано, что можно построить устойчивую протяженную классическую модель заряженной частицы, уравновешивая электростатические силы отталкивания «мезонными» силами притяжения. Соответствующие векторные мезоны должны иметь мнимобесконечный заряд и мнимобесконечную массу. Если выбрать их массу действительной, то равновесие оказывается неустойчивым; мнимая, но конечная масса приводит бы к сверхсветовым скоростям. Поэтому, чтобы лагранжиан удовлетворял необходимым требованиям релятивистской инвариантности не только по форме, надо выбрать массу частиц мнимобесконечной. Тогда из уравнений следует, что и соответствующий заряд мнимобесконечен.

Вне области, занятой электрическим зарядом, «мезонное» поле имеет бесконечно малый пространственный период и поэтому непосредственно не воспринимается. Таким образом, в теории не появляются никакие новые физические постоянные, кроме радиуса (или массы), который имеет чисто полевую природу и оказывается конечным в результате вычитания энергии «мезонного» поля из энергии электростатического поля.

В настоящей работе ставится вопрос о некотором расширении предлагаемой модели. Можно допустить, что она обладает не только статической плотностью заряда, но и стационарным распределением тока. Такая модель может существовать, не излучая, если только электромагнитная сила везде уравновешивается «мезонной».

Основные уравнения в системе покоя заряда как целого, согласно [1], записываются в виде

$$\Delta\phi = -4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\Delta\psi = -4\pi\lambda - \kappa^2\psi, \quad (2)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = -4\pi c^{-1} \lambda \mathbf{j} - \kappa^2 \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} - \lambda \mathbf{F} + c^{-1} [\mathbf{j}, \mathbf{H} - \lambda \mathbf{G}] = 0. \quad (5)$$

Здесь ϕ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} — электромагнитные, ψ , \mathbf{B} , \mathbf{F} , \mathbf{G} — «мезонные» потенциалы и поля, ρ , \mathbf{j} — плотность электрического заряда и тока. Инвариантная по определению константа λ характеризует заряд как источник «мезонного» поля, знак κ^2 выбран в соответствии с виртуальностью этого поля.

В дальнейшем мы принимаем, что ток \mathbf{j} и потенциалы \mathbf{A} , \mathbf{B} имеют только азимутальные компоненты относительно некоторой

* ЖЭТФ, 1963, 44, вып. 6, 2169.

оси симметрии и сами от азимута не зависят. Таким образом будут удовлетворены закон сохранения заряда и условие Лоренца для электромагнитного потенциала.

Как и в [1], положим $\lambda^2 \rightarrow -\infty$ и преобразуем в соответствии с этим уравнения (1) — (4). Смысл преобразования достаточно хорошо виден из операций над уравнениями (1) и (2). Комбинируя их, получаем

$$\Delta \lambda \psi = \frac{\Delta \lambda^2 (\varphi - \lambda \psi)}{1 - \lambda^2} - \frac{\kappa^2}{1 - \lambda^2} \lambda \psi. \quad (6)$$

Введем обозначения

$$\lambda \psi \equiv x, \quad \varphi - \lambda \psi \equiv -y, \quad (1 - \lambda^2)^{-1} \equiv v^2, \quad (7)$$

тогда в пределе получаем

$$\Delta(x - y) = -\kappa^2 v^2 x, \quad (8)$$

$$\rho = \kappa^2 v^2 x / 4\pi. \quad (9)$$

Произведение κv считается конечным. Аналогичные преобразования выполняются над магнитными величинами.

Система уравнений (1) — (5) нелинейна. Она не допускает обычного разделения переменных в конечном виде путем разложения по полиномам Лежандра. Физически это понятно: невозможно уравновесить силы от какого-то одного магнитного мультиполя, в частности диполя, во втором слагаемом (5) конечным числом электрических мультиполей в первом слагаемом. Поэтому заряд как целое будет обладать не только магнитным дипольным моментом, но и всеми магнитными моментами четного порядка и всеми электрическими — четного порядка. Возможно, что это непривлекательное свойство классической модели не перейдет в квантовую теорию, где жесткое условие равновесия заменится гораздо менее стеснительным условием стационарности.

Для электрических величин ищем разложения вида

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k}(r) P_{2k}(\cos \theta), \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k}(r) P_{2k}(\cos \theta) \quad (10)$$

и для магнитных —

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k+1}(r) P_{2k+1}^1(\cos \theta), \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}(r) P_{2k+1}^1(\cos \theta). \quad (11)$$

Подстановка в уравнения (8) дает

$$\frac{d^2}{dr^2} r(x_s - y_s) - \frac{s(s+1)}{r^2} r(x_s - y_s) = -\kappa^2 v^2 r x_s, \quad (12)$$

где четность s — любая.

При подстановке в нелинейные уравнения (5) надо переразложить произведения полиномов Лежандра по их первым степеням. Для этого имеем следующие формулы:

$$P_{2k} P_{2l} = \sum_{n=|k-l|}^{k+l} L_{2k, 2l}^{2n} P_{2n}, \quad (13)$$

$$P_{2k+1}^1 P_{2l+1}^1 = \sum_{n=|k-l|}^{k+l+1} M_{2k+1, 2l+1}^{2n} P_{2n}, \quad (14)$$

$$P_s P_t = \sum_{n=|s-t|/2}^{(s+t)/2} N_{s,t}^{2n} P_{2n}, \quad (15)$$

в (15) четность s, t произвольна, но одинакова. Коэффициент $L_{2k, 2l}^{2n}$ находится, согласно [2], следующим образом («формула Герона»):

$$L_{2k, 2l}^{2n} = \frac{4n+1}{4(k+l+n)+1} \frac{[2(k+l-n)-1]! [2(k+n-l)-1]!}{[2(k+l-n)]! [2(k+n-l)]!} \times \frac{[2(n+l-k)-1]! [2(k+l+n)]!}{[2(n+l-k)]! [2(k+l+n)-1]!}. \quad (16)$$

Далее,

$$M_{2k+1, 2l+1}^{2n} = \frac{1}{2} [(2k+1)(2k+2) + (2l+1)(2l+2) - 2n(2n+1)] L_{2k+1, 2l+1}^{2n}, \quad (17)$$

$$N_{s,t}^{2n} = \frac{s(s+1) + 2n(2n+1) - t(t+1)}{4n(n-1)} L_{s,t}^{2n}, \quad (18)$$

где порядок нижних индексов в последней формуле, очевидно, не безразличен.

Сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых полиномах, получаем условие равновесия для радиальной составляющей силы

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=|n-l|}^{n+l} [L_{2k, 2l}^{2n} x_{2k} \frac{dy_{2l}}{dr} - M_{2k+1, 2l+1}^{2n} x_{2k+1} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r y_{2l+1})] = 0, \quad (19)$$

где $n \geq 0$. Для составляющей силы, перпендикулярной радиусу, находим азимутальная составляющая равна нулю по соображениям симметрии)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=|n-l|}^{n+l} N_{2k, 2l}^{2n} x_{2k} y_{2l} + \left(\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=n-l-1}^{n+l} N_{2k+1, 2l+1}^{2n} (2l+1)(2l+2) x_{2k+1} y_{2l+1} = 0, \quad (20) \right.$$

причем $n \geq 1$.

Уравнения (12), (19), (20) образуют полную систему, которая должна решаться внутри области, занятой зарядом $r \ll r_0$. В начале координат $r=0$ выполняется условие регулярности: разложение величины с индексом s начинается с r^s . При $r=r_0$ непрерывны составляющие поля и статический потенциал заряда. Благодаря тому что «мезонное» поле осциллирует в пространстве, на него не надо налагать условий при $r=\infty$. Поэтому условия его непрерывности при $r=r_0$ могут быть удовлетворены всегда. Тогда условия непрерывности электромагнитного поля выражаются только при помощи величин x, y , определенных из внутренней задачи. Соответственно разложению (10) каждый член четного порядка отвечает электрическому мультиполю, нечетного — магнитному мультиполю.

Согласно (7) электромагнитные потенциалы определяются просто как разности $x-y$. Следовательно, для нулевого порядка имеем

$$(x_0 - y_0)_{r=r_0} = \frac{e}{r_0}, \quad \left[r \frac{d}{dr} (x_0 - y_0) \right]_{r=r_0} = -\frac{e}{r_0}. \quad (21)$$

Для всех высших порядков мультипольные моменты исключаются, так что соответствующие граничные условия однородны. Так,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r (x_1 - y_1) \Big|_{r=r_0} &= -(x_1 - y_1) \Big|_{r=r_0}, \\ r \frac{d}{dr} (x_2 - y_2) \Big|_{r=r_0} &= -3(x_2 - y_2) \Big|_{r=r_0} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (22)$$

Несколько разная форма записи для четных и нечетных мультиполей связана с тем, что первые — электрические, вторые — магнитные. Вместе с условиями (21) и (22), а также условием в нуле система приведенных уравнений является полной и может решаться численно, если ограничиться несколькими членами в разложениях (10) и (11).

Энергию и момент нетрудно выразить в виде интегралов только по внутренней области. Так, энергия равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_0^{xv r_0} [\rho(\varphi - \lambda\psi) + \frac{1}{c} (A + \lambda B)] dV = \\ &= \frac{e^2}{r_0} \int_0^{xv r_0} z^2 dz \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x_2^k y_2^k}{4k+1} + \frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+3} x_{2k+1} y_{2k+1} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Параметр $xv r_0$ надо выбрать из условия минимума \mathcal{E} . В нулевом приближении [1] энергия, вычисленная по (23), не имела минимума. Однако можно было несколько изменить определение величины v , связанной с «мезонным» зарядом λ . Именно: заменив v на $\pi/2 \kappa_0 + \epsilon$, мы нашли единственное положительное минимальное значение \mathcal{E} . Выбор коэффициента $\pi/2$ дает наименьший ми-

нимум. Переход от v к ϵ устанавливает некоторую связь между массой и зарядом «мезонов». В дальнейшем, возможно, следует минимизировать \mathcal{E} и по форме заряда, отступая от сферической.

Пользуясь определением момента [3], можно выразить его тоже через интеграл, только по внутренней области, причем поверхностный интеграл обращается в нуль тождественно. Получаем

$$\begin{aligned} |M| &= \frac{1}{c} \left| \int [r, (A - \lambda B)] \rho dV \right| = \frac{e^2}{c} \int_0^{xv r_0} z^2 dz \left\{ \frac{2}{3} x_0 y_1 + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k} \left[\frac{2k(1-2k)}{16k^2-1} y_{2k-1} + \frac{2(k+1)(2k+1)}{(4k+1)(4k+3)} y_{2k+1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Л и т е р а т у р а

1. А. С. Компанец. ЖЭТФ, 1962, 43, 2185.
2. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952, стр. 89.
3. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. М., Гостехиздат, 1947, стр. 105—106.

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ДВУМЯ ФЕРМИОНАМИ. I *

1. Постановка задачи

Современная квантовая электродинамика обладает всеми чертами законченной физической теории: она в состоянии однозначно предвычислить любой наблюдаемый эффект с заданной степенью точности, если не надо учитывать никаких взаимодействий, кроме электромагнитных. Расходящиеся выражения квантовой электродинамики частично отбрасываются, если они входят в градиентно инвариантные члены, частично устраняются путем перенормировки массы и заряда. Хотя операция перенормировки производится по строго определенному рецепту, остается одна неудовлетворительная деталь: произведение расходящегося интеграла на постоянную тонкой структуры считается малой величиной. Для оправдания говорится, что в «будущей» теории этот интеграл станет конечным. Но трудно ожидать, чтобы эта будущая теория существенно отличалась от нынешней. Маловероят-

* ЖЭТФ, 1965, 49, вып. 6(12), 1781.

той фермионной линии, в частности на нее не распространяются правила квантования. В то же время для незамкнутых линий остается в силе прежняя процедура, так что нет оснований ожидать каких-либо нарушений унитарности, как это бывает при введении фиктивных регуляризирующих частиц в лагранжиан. Вместе с тем теория по-прежнему остается локальной и, разумеется, релятивистски инвариантной.

Основными в предлагаемой схеме надо считать уравнения Дайсона для гриновских функций фермиона и кванта. При этом оба фермиона должны входить в теорию симметричным образом, но так, чтобы всевозможные фермионные петли на фотонной линии взаимно погасили бесконечные части. Если угодно, квант является при этом как бы «сплавом» обоих фермионов, совокупностью всех возможных петель с расходимостями, которые сокращаются попарно. Для вершинной части, как известно, точного уравнения не существует. Поэтому любой результат получается лишь в том или ином приближении отпосредственно постоянной тонкой структуры. Здесь мы проследим разложение до членов, квадратичных отпосредственно постоянной тонкой структуры.

Чем можно оправдать предлагаемый прагматический рецепт? Прежде всего, весь существующий аппарат теории остается почти без изменения. В принципе можно было бы заметить отличие результатов в предлагаемой схеме от обычных только в радиационных поправках второго порядка к магнитному моменту μ -мезона. В соответствующие поправки для электрона μ -мезонная петля дает вклад, который меньше электронного в отношении квадратов масс обших частиц, тогда как у μ -мезона вклад электронной петли больше. Но здесь зато очень мала сама поправка от поляризации вакуума, так что точность современного опыта недостаточна, чтобы высказаться за или против предлагаемой модификации теории.

Л. А. Кружковой-Зайцевой принадлежит следующее замечание. Знак электронной петли надо во всяком случае считать известным по лэмбовскому сдвигу у электрона. Поэтому знак мезонной петли должен быть обратным, чтобы компенсировались бесконечные части.

2. Фермионная функция Грина

Уравнение для фермионной функции Грина имеет вид (см. [3, с. 475, (44.4)])

$$G(p) = S(p) + \frac{e^2}{(2\pi)^4} S(p) \int \gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p, p-k) G(p) D_{\mu\nu}(k) d^4k, \quad (1)$$

где $S(p) = -(\hat{p} - im)^{-1}$, $D_{\mu\nu}$ — фотонная функция Грина, Γ_ν — «точная» вершинная часть. Уравнение (1) путем деления на

но, чтобы один и тот же круг явлений описывался двумя совсем непохожими теориями. Скорее всего в аппарате теории должна быть видоизменена какая-нибудь деталь, притом такая, которая при современном уровне экспериментальных знаний не влияет заметным образом ни на один эффект.

Поиски этой детали облегчаются следующими соображениями. Ландау, Абрикосов и Халатников [1] нашли, что наиболее существенна расходимость собственно-энергетической части фотона. Если вычислить ее точно, а не в первом приближении по постоянной тонкой структуре, то физический заряд электрона стремится к нулю. По-видимому, основные трудности квантовой электродинамики коренятся именно в фотонной функции Грина. Джонсон, Бэкер и Уилли [2] показали, что если принять фотонную функцию Грина при больших энергиях такой же, как она выглядит у свободного фотона в нулевом приближении, то электрон будет обладать конечной массой чисто электромагнитного происхождения при нулевой затравочной массе. В [2] авторы не ставили себе целью устранить расходимость фотонной функции Грина, полагая, что в нее должны дать вклад все заряженные частицы, которые только существуют в природе. Тем самым было высказано допущение, что квантовая электродинамика принципиально не может быть построена как внутренне замкнутая и последовательная теория уже потому, что большинство заряженных частиц ядерноактивно.

Но это в какой-то степени плохо мирится с тем фактом, что квантовая электродинамика в ее современной форме почти закончена как физическая теория. Поэтому можно попытаться так видоизменить аппарат квантовой электродинамики, чтобы ее можно было формулировать без привлечения полей незлектромагнитной природы. Тогда обязательно надо учесть, что существуют две чисто электромагнитные частицы — электрон и μ -мезон. В нынешней электродинамике их учитывают чисто формальным образом: например, при вычислении собственно энергетической части фотона складывают расходящиеся интегралы от электронной и μ -мезонной петли.

Видоизменение теории, предлагаемое в настоящей работе, заключается в том, что интегралы от обеих петель будут не складываться, а вычитаться. При этом расходящиеся выражения в любом приближении по постоянной тонкой структуре сократятся и останутся только конечные операции, связанные с устранением градиентно неинвариантной части и перенормировкой зарядов.

Как было показано в [2], все выражения квантовой электродинамики могут быть сделаны конечными вместе с фотонной функцией Грина.

Предлагаемая вычислительная процедура, по-видимому, не может быть получена из лагранжева формализма. Надо допустить, что вакуумная петля существенно отличается от незамкну-

$G(p)S(p)$ приводится к виду

$$G^{-1}(p) = S^{-1}(p) - \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p, p-k; k) D_{\mu\nu}(k) d^4k. \quad (2)$$

Но в дальнейшем, следуя [2], мы будем считать, что масса имеет чисто электромагнитное происхождение. Тогда вместо $S(p)$ надо писать просто $(\hat{p})^{-1}$.

Найдем уравнение для массы в нулевом приближении, полагая

$$\Gamma_\nu = \gamma_\nu, D_{\mu\nu} = \frac{1}{ik^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right).$$

Здесь выбрана калибровка Ландау. Функцию $G(p)$ ищем в виде

$$G(p) = [-X(p^2) \hat{p} + iY(p^2)]^{-1}. \quad (3)$$

Тогда, разделяя (2) на четную и нечетную части, получим

$$X(p^2) \hat{p} = \hat{p} + \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{X(p'^2) [\hat{p}' + 2\hat{n}(p'n)] d^4p'}{X^2(p'^2) p'^2 + Y^2(p'^2)} i(p-p')^2, \quad (4)$$

$$Y(p^2) = \frac{3e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Y(p'^2) d^4p'}{X^2(p'^2) p'^2 + Y^2(p'^2)} i(p-p')^2, \quad (5)$$

$$n \equiv \frac{p-p'}{|p-p'|} \equiv \frac{k}{|k|}.$$

Чтобы выполнить интегрирование по углам, удобно перейти от галилеевского к четырехмерному евклидовскому пространству, записывая для элемента объема $4\pi p'^3 dp' \sin^2 \chi dx$. При этом надо положить, что p имеет только четвертую составляющую. Тогда в результате элементарных выкладок оказывается, что интеграл, входящий в (4), обращается в нуль, что было отмечено еще в [2]. Мы получаем $X(p^2) = 1$. Этим результатом можно пользоваться и в следующем приближении по e^2 к уравнению (5). Интегрируя тем же способом по углам в (5), приводим его к виду

$$f(x) = \lambda \left(\int_0^x \frac{x' f(x') dx'}{x [x' + f^2(x')]} + \int_x^\infty \frac{f(x') dx'}{x' + f^2(x')} \right). \quad (6)$$

Здесь $Y(z) = m f(z/m^2)$, $3e^2/16\pi^2 = \lambda$. В частности, при $x=0$

$$1 = \lambda \int_0^\infty \frac{f(x) dx}{x + f^2(x)}. \quad (7)$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится только условие $f(0) = 1$. Асимптотический вид решения $f(x) \sim x^{-1}$, найденный в [2], будет применен только для доказательства законности некоторых упрощений.

3. Первая радиационная поправка к фотонной функции Грина

Применим теперь предлагаемую вычислительную процедуру для нахождения первой радиационной поправки к функции Грина фотона. Для нее имеем выражение (см. [3])

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^0 + D_{\mu\sigma}^0 \Pi_{\sigma\tau}^{(2)} D_{\tau\nu}^0. \quad (8)$$

Здесь

$$D_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{ik^2} (\delta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu),$$

а $\Pi_{\sigma\tau}^2$ выражается известным образом:

$$\Pi_{\sigma\tau}^{(2)} = \frac{e^2}{(2\pi)^4} Sp \int \gamma_\sigma G(p) \gamma_\tau G(p-k) d^4p. \quad (9)$$

Под G мы будем понимать не функцию Грина фермиона в нулевом приближении, т. е. не $S(p)$, а точную функцию (3). В этой функции достаточно положить, однако, $X=1$, $Y=Y(0)=m$. Но, хотя G относится как бы к свободному фермиону, не надо считать, что $p=im$. В дальнейшем мы положим $p=0$, так что $G=(im)^{-1}=(iY(0))^{-1}$, где масса целиком электромагнитного происхождения.

Таким образом, мы не должны учитывать никаких электронных собственно-энергетических поправок в уравнении Дайсона, равно как и μ -мезонных. Мы считаем, что они точным образом учтены в $G(p)$, которая находится из однородного интегрального уравнения. Поэтому, кроме поправок к $D_{\mu\nu}$, надо будет учесть еще только поправки к вершинной части.

Можно показать, что если для $D_{\mu\nu}^0$ выбрана калибровка Ландау, то и $D_{\mu\nu}$ будет чисто поперечным, если интеграл (9) сходится. Таким образом, в первом приближении получим

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^0 (1 + \delta\Phi), \quad (10)$$

где $\delta\Phi$ — разность выражений вида

$$\Phi = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{4}{ik^2} \int \frac{m^2 + (p, p-k) - 2/3 [p^2 - (ip)^2]}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2]} d^4p, \quad (11)$$

образованная для двух фермионов. Для расходящихся интегралов входящих в (11), берем известные выражения [3, с. 503]. Существо, что коэффициенты при них не содержат масс, так что бесконечные члены сокращаются. После этого получим

$$\delta\Phi = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{8\pi^2}{k^2} \int_0^1 x(1-x) dx \left\{ k^2 \ln \left[\frac{m_2^2 + k^2 x(1-x)}{m_1^2 + k^2 x(1-x)} \right] - \frac{m_1^2}{2} + \frac{m_2^2}{2} \right\}. \quad (12)$$

Благодаря сходимости интеграла по p мы взяли только $G(0) = (im)^{-1}$.

Выражение для бФ следует, как обычно, сделать равным нулю при $k=0$. Для этого надо отбросить члены $(m_2^2 - m_1^2)/2$ и $k^2 \times \ln(m_2^2/m_1^2)$. Последнее отвечает конечной калибровке. Заметим, однако, что окончательный вид уравнения для отношения масс от этой процедуры не зависит, так как члены, вошедшие в перенормировку заряда, в уравнении для отношения масс сокращаются. Но мы запишем бФ уже в калиброванном виде и гравитационно-инвариантно:

$$\delta\Phi = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{1+x(1-x)k^2/m_2^2}{1+x(1-x)k^2/m_1^2}. \quad (13)$$

4. Радиационная поправка к вершинной части

Если прибавить к вершинной части в уравнении Дайсона (2) первую радиационную поправку, получится выражение

$$\frac{e^4}{(2\pi)^8} \int \gamma_\mu G(p-k) D_{\text{эф}}(q) \gamma_\alpha G(p-q-k) \gamma_\beta G(p-q) \gamma_\rho D_{\mu\nu}(k) d^4q d^4k.$$

Здесь собственно от вершинной части стоит интеграл

$$\Gamma_V^{(2)}(\rho, \rho-k; k) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int D_{\text{эф}}(q) \gamma_\alpha G(p-q-k) \gamma_\beta G(p-q) \gamma_\rho d^4q. \quad (14)$$

Он не обращается в нуль при $k=0$, поэтому для правильной калибровки в уравнение надо подставить

$$\Gamma_V^{(2)}(\rho, \rho-k; k) = \Gamma_V^{(2)}(\rho, \rho, 0).$$

Кроме того, нас будет интересовать только значение поправки при $\rho=0$. Члены продольного характера, т. е. k_ν и q_ν , дающие после интегрирования опять k_ν , мы сразу опустим. Тогда подынтегральное выражение (14) приводится к следующему виду:

$$-(2\hat{q}\hat{\gamma}_\nu\hat{q} + q^2\gamma_\nu) + \hat{q}k\gamma_\nu + \frac{im}{q^2}\hat{q}k\gamma_\nu\hat{q} + 2m^2\gamma_\nu + \frac{m^2}{q^2}\hat{q}\hat{\gamma}_\nu\hat{q}.$$

В окончательном выражении нам понадобятся только те члены, которые будут содержать логарифмическую расходимость. Эта расходимость ликвидируется, если подставить правильное асимптотическое выражение для $Y(\rho^2)$. Но мы выведем уравнение для отношения масс фермионов, в котором понадобятся только $Y(0)$, как в формуле для радиационной поправки к гриновской функции фотона. Те члены вершинной части, которые не содержат логарифмической расходимости, сокращаются из выражения для вершинной части, когда мы от самих масс фермионов перейдем к отношению масс. Надо заметить, что сами массы из уравнений получить невозможно, потому что затравочная масса

принята равной нулю, а построить из электродинамических величин комбинацию с размерностью массы нельзя.

Подставляя вместо $G(\rho')$ простое выражение $-(\rho' - im)^{-1}$, приводим интеграл от исправленной вершинной части во втором порядке по e^2 к виду

$$\begin{aligned} & \frac{-i\pi^2 e^4}{(2\pi)^8} \int (\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \gamma_\mu \frac{im - \hat{k}}{k^2(k^2 + m^2)} \gamma_\nu \times \\ & \times \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \left[\frac{x_1(1-x_1)k^2}{k^2 x_1(1-x_1) + m^2(1-x_2)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{im\hat{k}x_2(1-x_1)^2 k^2}{[k^2 x_1(1-x_1) + m^2(1-x_2)]^2} \right] - \frac{3}{2} \right\} d^4k. \quad (15) \end{aligned}$$

Интегралы по x_1 и по x_2 вошли, как обычно, в результате преобразования знаменателей по Фейнману. Последнее слагаемое в фигурной скобке (15) возникло при вычитании $\Gamma_V^2(0, 0; 0)$. Окончательно вклад радиационной поправки к вершинной части сводится к выражению

$$-\frac{3\pi^2 im e^4}{(2\pi)^8} \frac{3}{2} \ln \frac{L^2}{m^2}. \quad (16)$$

5. Уравнение для отношения масс

В уравнениях для функции Грина обоих фермионов удобно перейти к безразмерным переменным $|p|/m_1$ и $|p|/m_2$ и затем поделить соответственно на m_1 и m_2 . Перейдя к системе отсчета, где $\rho=0$, получим уравнения, в которые входит только $f(k^2/m_{1,2}^2)$ (число a под логарифмом — от нерасходящихся членов):

$$1 = \frac{3e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{m_{1,2}^4} \frac{f(k^2/m_{1,2}^2)}{k^2/m_{1,2}^2 + f^2(k^2/m_{1,2}^2)} \frac{1}{ik^2/m_{1,2}^2} (1 + \delta\Phi_{1,2}) - \frac{3e^4}{(2\pi)^8} \frac{3}{2} \ln \frac{L^2}{am_{1,2}^2}. \quad (17)$$

Благодаря тому что интегралы в уравнении (17) сходящиеся, можно вычесть одно уравнение из другого и заменить при этом $f(k^2/m_{1,2}^2)$ на единицу: сходимость для разности интегралов сохраняется. Бесконечные слагаемые вершинных частей сократятся; благодаря этому мы заранее полагаем $f=1$ в вершинных частях.

При интегрировании удобно снова перейти к евклидовскому пространству. Особенности логарифмического члена, входящего в бФ_{1,2}, этому не мешают, так как при изменении контура интегрирования в плоскости k_4 они остаются в стороне. Тогда для

отношения масс получается уравнение

$$\frac{3e^1}{(2\pi)^8} 8\pi^2 \int_0^1 \frac{f(z) dz}{1+z} \int_0^1 x(1-x) dx \times \\ \times \ln \frac{|1+zx(1-x)|^2}{[1+zm_1^2 m_2^2 x(1-x)][1+zm_2^2 m_1^2 x(1-x)]} = \frac{3e^4 \pi^2}{(2\pi)^8} \frac{3}{2} \ln \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad (18)$$

где $f(z)$ в числителе надо заменить единицей. Будем считать массу m_1 меньшей и заменим отношение m_1^2/m_2^2 на μ . Окончательно получим

$$\int_0^1 x(1-x) dx \int_0^1 \frac{dz}{1+z} \ln \frac{|1+zx(1-x)|^2}{[1+\mu zx(1-x)][1+\mu^{-1}zx(1-x)]} = \frac{3}{16} \ln \mu. \quad (19)$$

Это уравнение обладает нетривиальным решением $\mu \neq 1$. Действительно, при $\mu=1$ оно выполняется. Но производная правой части по $\ln \mu$ конечна, а взятая от левой части — обращается в нуль. Следовательно, вблизи $\mu=1$ правая часть идет круче. При очень малых μ левая часть идет как $-\ln^2 \mu$, так что обязательно есть еще один корень уравнения (19), кроме единицы. Положим сразу $\mu \ll 1$, что будет подтверждено дальнейшим расчетом. Пользуясь тем, что интеграл, входящий в (19), сходящийся, его можно представить в таком виде:

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z} \ln \frac{|1+zx(1-x)|^2}{[1+\mu zx(1-x)][1+\mu^{-1}zx(1-x)]} = \int_0^1 \left\{ \frac{2[1-x(1-x)]}{e^\mu - 1 + \mu x(1-x)} - \frac{1+\mu^{-1}x(1-x)}{e^\mu - 1 + \mu^{-1}x(1-x)} \right\} u du. \quad (20)$$

Первое слагаемое справа, проинтегрированное по x , есть простое число, не зависящее от μ . Оно равняется 0,359. Во втором слагаемом надо пренебречь μ , и оно дает $\pi^2/6$. В третьем слагаемом отбрасываем единицу по сравнению с $\mu^{-1}x(1-x)$. Тогда интеграл приобретает такой вид, какой встречается в статистике Ферми:

$$\int_0^1 \frac{u du}{\exp\{u - \ln[\mu^{-1}x(1-x)]\} + 1} \cong \frac{1}{2} \ln^2 \frac{x(1-x)}{\mu} + \frac{\pi^2}{12}, \quad (21)$$

если μ — достаточно малое число. Подставляя все это в (20), находим $\ln \mu = -4,40$ или $m_2/m_1 = 9$. Так как уравнение относилось не к μ , а к его логарифму, расхождение с правильным числом $m_2/m_1 = 206$ не чересчур сильное. Можно полагать, что оно воз-

никло за счет недостаточной сходимости приближения по e^2 , в котором велись расчеты. Еще одно приближение по e^2 , вероятно, может быть получено, но существенное уточнение теории требуется совсем иного подхода.

Уравнения в более высоком приближении по постоянной тонкой структуры могли бы содержать в себе некоторую возможность определения самой этой постоянной. Действительно, в настоящей работе мы были вынуждены просто отбросить градиентно-инвариантный член $m_2^2/2 - m_1^2/2$. При более точном вычислении это будет некоторая функция постоянной тонкой структуры и отношения масс, которую следует полагать равной пулю для того, чтобы придать теории инвариантность. Кроме того, будет еще уравнение типа (19), куда тоже войдут отношение масс и постоянная тонкой структуры. Поэтому то и другое, в принципе, могло бы быть определено.

В заключение выражаю благодарность Л. А. Кругковой-Зайцевой за помощь при вычислениях и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕОРЕМА ЧЕЛЛЕНА — ЛЕМАНА ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ФОТОННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Как известно, фотонная функция Грина должна удовлетворять соотношению

$$G(k) = Z \left[D^c + \int_0^\infty \rho(M^2) \Delta_M^c(k) dM^2 \right], \quad (П.1)$$

$$D^c = -i(k^2 - i\varepsilon)^{-1}, \quad \Delta_M^c = -i(k^2 + M^2 - i\varepsilon)^{-1},$$

где $\rho(M^2)$ — положительно определенная функция. Соотношение (П.1) вытекает из общих требований унитарности.

Проверим, что (П.1) выполняется для регуляризованной нашим способом функции Грина фотона. Сначала покажем это для функции, найденной в том же приближении путем обычной процедуры перенормировки. Соотношение (П.1) переписывается в этом случае так:

$$\frac{\alpha}{4\pi k^2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) \ln \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{m^2} (1-\eta^2) \right] d\eta = \int_0^\infty \frac{\rho_m(M^2) dM^2}{k^2 + M^2}. \quad (П.2)$$

Отсюда функция $\rho_m(M^2)$ определяется по известной формуле [4, формула (17, 85в)]

$$\rho_m^{(2)} = \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2} \right)^{1/2} \theta(M - 4m^2), \quad (П.3)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Но тогда, как видно из (П.3), разность $\rho = \rho_{m_1} - \rho_{m_2}$ тоже существенно положительна, причем вычитается ρ , зависящее от большей массы, как и требовалось.

Настоящее Приложение написано по предложению И. С. Шапиро, которому я выражаю сердечную признательность.

Л и т е р а т у р а

1. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 1954, 95, 497, 733, 1117.
2. К. Johnson, M. Baker, R. Wiley. Phys. Rev., 1964, 136, B1111.
3. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1959.
4. С. Швейбер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963, стр. 631.

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ДВУМЯ ФЕРМИОНАМИ. II *

Совместно с Л. А. Кружковой-Зайцевой

В предыдущей работе [1] было показано, что в квантовой электродинамике с двумя фермионами, электроном и мюоном, расходящиеся диаграммы, содержащие замкнутые петли, могут взаимно погашаться, и тогда удается построить теорию, свободную от бесконечных перенормировок. Предложенное видоизменение теории встретило острую критику, так как перемена знака при петле изменяет знак и ее мнимой части, что несомненно с общими физическими требованиями унитарности. В [1] была сделана попытка обойти это возражение, пользуясь тем, что мнимая часть мюонной петли при всех значениях импульса фотона меньше, чем у электронной петли. Но и это не снимает возражений, так как противоречит условиям аналитичности в применении к отдельным вершинам петли. Кроме того, если замкнутая мюонная линия имеет четыре вершины, то она связана с вероятностью радиационного торможения мюона и поэтому положительно знакоопределена.

Здесь мы попытаемся так видоизменить процедуру, предложенную в [1], чтобы сохранить основной результат, но нигде не

* «Письма ЖЭТФ», 1967, 6, выл. 4.

вступать в противоречие с общими требованиями теории поля. Будем считать, что время входит в мюонное поле со знаком, обратным тому, который оно имеет в электронном поле. Именно: если оператор электронного поля есть (см. [2])

$$\psi_e = \sum (a_e(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) e^{-i\omega_e t + i\mathbf{p}\mathbf{r}} + b_e^\dagger(\mathbf{p}) v(-\mathbf{p}) e^{i\omega_e t - i\mathbf{p}\mathbf{r}}), \quad (1)$$

то соответственный мюонный оператор

$$\psi_\mu = \sum (a_\mu(\mathbf{p}) u'(\mathbf{p}) e^{i\omega_\mu t + i\mathbf{p}\mathbf{r}} + b_\mu^\dagger(\mathbf{p}) v'(-\mathbf{p}) e^{-i\omega_\mu t - i\mathbf{p}\mathbf{r}}). \quad (1')$$

Операторы рождения и уничтожения мюонов удовлетворяют тем же антикоммутационным соотношениям, что и электроны; $\omega_{e,\mu}$ означает положительный квадратный корень $\omega_{e,\mu} = \sqrt{m_{e,\mu}^2 + p^2}$. Спинорные амплитуды $u'(\mathbf{p})$ и $v'(-\mathbf{p})$ по сравнению с амплитудами $u(\mathbf{p})$, $v(-\mathbf{p})$ подвергнуты дополнительному преобразованию Рака $R = \gamma_4 \gamma_5$. Благодаря этому в уравнении Дирака для электронов и мюонов производная по времени входит с одинаковым знаком, что необходимо для инвариантности обоих уравнений по отношению к калибровке потенциалов электромагнитного поля.

Свертка $\langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle_0$ для электронов и мюонов будет соответственно иметь различный вид:

$$\langle \psi_e(x) \bar{\psi}_e(x') \rangle_0 = -(\hat{V} - m_e) \int \frac{d\rho}{2\omega_e} e^{-i\omega_e(t-t') + i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}}, \quad (2)$$

$$\langle \psi_\mu(x) \bar{\psi}_\mu(x') \rangle_0 = -(\hat{V} - m_\mu) \int \frac{d\rho}{2\omega_\mu} e^{+i\omega_\mu(t-t') + i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}}. \quad (2')$$

Функцию $(2\omega_{e,\mu})^{-1} e^{\pm i\omega_{e,\mu}(t-t')}$ надо представить в виде контурного интеграла по ρ_0 . Тогда

$$e^{-i\omega_e(t-t')} (2\omega_e)^{-1} = (2\pi i)^{-1} \int e^{-i\rho_0(t-t')} (\rho^2 - \rho_0^2 + m_e^2 - ie) d\rho_0, \quad (3)$$

$$e^{+i\omega_\mu(t-t')} (2\omega_\mu)^{-1} = (2\pi i)^{-1} \int e^{-i\rho_0(t-t')} (\rho^2 - \rho_0^2 + m_\mu^2 + ie) d\rho_0, \quad (3')$$

причем к массе мюона надо сделать мнимую положительную добавку, чтобы получить слева должный знак в показателе. Мы взяли вычит на отрицательной полуоси ρ_0 . Тем самым энергия свободного мюона считается отрицательной. Но это не ведет к абсурдным результатам, так как знак энергии в δ -функциях при матричных элементах у мюонов обратный по отношению к фотонам и электронам. В результате закон сохранения энергии ни в чем не изменится за счет мюонных переходов.

Вместе с тем эффективное сечение рассеяния поляризованных мюонов на поляризованной мишени чувствительно к преобразованию R . Именно: матричный элемент рассеяния содер-

жит оператор $(1 + \gamma_0 S)$, где S определяется через единичный вектор поляризации в собственной системе отсчета ξ по формулам $S = \xi + p(\xi p)m^{-1}$, $S_0 = (\xi p)m^{-1}$. Но преобразование $R^{-1}(1 + \gamma_0 S)R$ меняет знак пространственной части $\gamma_0 S$. Следовательно, если волновая функция другого партнера столкновения не подвергнута преобразованию R , эффективное сечение будет по-прежнему зависеть от компонент диады $\xi_1 \xi_2$, чем у однотипной частицы.

Результаты теории β -распада мюона весьма чувствительны к виду спиновых амплитуд. Легко видеть, что если мюонное нейтрино одногиппно с мюоном в наших предположениях, т. е. зависит от времени с обратным знаком и подвергнуто преобразованию R , то все формулы обычной теории сохраняют силу (см. [3]). Так получается некоторое указание на возможность объяснения различной природы электронного и мюонного нейтрино*.

Время, входящее в уравнение для матрицы рассеяния, можно условно принять совпадающим с электронным временем. Тогда фейнмановская диаграмма мюонной петли отличается от диаграммы электронной петли знаком бесконечно малой мнимой добавки к массе

$$I_{e,\mu} = i \int_0^1 dx \int dp \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 [p^2 - p_0^2 + m_{e,\mu} \pm i\epsilon - k^2 x(1-x)]^{-2}. \quad (4)$$

Легко видеть, что мнимая часть выражения $I_{e,\mu}$ всегда конечна и не зависит от знака ϵ , тогда как действительная часть, которая логарифмически расходится, определяется знаком ϵ . Расходимости электронной и мюонной петли сокращаются, что и требовалось.

Существует возможность экспериментальной проверки знака мюонной поляризации вакуума. Лэмбовский сдвиг тяжелого μ -мезоатома, если измерить его достаточно аккуратно, чувствителен к мюонной поляризации вакуума (в легком атоме слишком преобладает электронная часть поляризации). Но так как в тяжелом μ -мезоатоме мюон в значительной мере движется внутри ядра, необходимо предварительно прозондировать распределение потенциала в ядре с помощью быстрых электронов. У идеально сферического ядра ($R \approx 20^6$) нестатическая флуктуационная часть электромагнитного поля внутри ядра должна быть невелика по сравнению со статической, и не исказит лэмбовский сдвиг сама по себе.

* Ср. [3], стр. 72, формула третья сверху. Входящий в нее вектор S надо отнести к системе покоя, где $S = \xi$. Здесь перемена знака ничего не означает. Но тогда результат не зависит от системы отсчета. Отличие от обычной теории может проявиться только в члене вида S_e, S_μ , т. е. в корреляции слиянов. Но в основном порядке величин такого члена нет (с. 73).

Весьма возможно, однако, что если удастся выявить вклад в поляризацию вакуума частиц, отличных от электронов, то заметную роль сыграют и ядерно активные частицы, особенно μ -мезоны. Тогда чистая электродинамика с двумя фермионами, электроном и мюоном, даже свободная от расходимостей, не будет соответствовать опыту. Тогда трудно ожидать, что из нее получится правильное отношение масс фермионов. В работе [1] оно и оказалось около 10.

В заключение приносим глубокую благодарность И. С. Шапиро, К. А. Гер-Мартirosяну, М. И. Рязанову, В. М. Галицкому и М. П. Рекало за критическое обсуждение всего круга вопросов, связанных как с работой [1], так и с настоящей заметкой.

Л и т е р а т у р а

1. А. С. Компанец. ЖЭТФ, 1965, 49, вып. 6 (12), 1781; см. наст. изд. стр. 157.
2. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., ГИИЛ, 1959.
3. Л. Б. Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. М., Физматгиз, 1963.

СИЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПУСТОТЕ *

Сильная гравитационная волна была впервые рассмотрена Эйнштейном и Розеном [1], показавшими, что уравнение распространения сильной волны, отвечающей в пределе слабой поперечно-поперечной волне вида $g_{22} - g_{33}$, приводится к линейному уравнению распространения цилиндрической волны. Можно показать, что и более общий случай сильной гравитационной волны, отвечающей в пределе наложению волн вида $g_{22} - g_{33}$ и g_{23} , допускает весьма сходные упрощения.

Будем исходить из интервала вида

$$-ds^2 = Adx_1^2 + Cdx_2^2 + 2Bdx_2 dx_3 + Ddx_3^2 - Adx_4^2, \quad (1)$$

где A, B, C, D зависят только от x_1 и x_2 , что в пределе соответствует плоской волне.

Здесь координаты x_1 и x_2 выбраны так, что $g_{11} = -g_{44}$, $g_{14} = 0$ (см. [1]). Отсюда получаются следующие выражения символов Кристоффеля второго рода (положено $CD - B^2 \equiv \alpha$, нижние индексы при величинах A, B, C, D означают дифференцирование

* ЖЭТФ, 1958, 34, вып. 4, 953.

по координате с тем же индексом):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{14}^4 = (2A)^{-1}A_1; & \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{44}^4 = (2A)^{-1}A_4; \\ \Gamma_{22}^1 &= -(2A)^{-1}C_1; & \Gamma_{22}^4 &= (2A)^{-1}C_4; \\ \Gamma_{33}^1 &= -(2A)^{-1}D_1; & \Gamma_{33}^4 &= (2A)^{-1}D_4; \\ \Gamma_{23}^1 &= -(2A)^{-1}B_1; & \Gamma_{23}^4 &= (2A)^{-1}B_4; \\ \Gamma_{42}^2 &= (2\alpha)^{-1}(DC_1 - BB_1); & \Gamma_{42}^4 &= (2\alpha)^{-1}(DC_4 - BB_4); \\ \Gamma_{43}^2 &= (2\alpha)^{-1}(CD_1 - BB_1); & \Gamma_{43}^4 &= (2\alpha)^{-1}(CD_4 - BB_4); \\ \Gamma_{42}^3 &= (2\alpha)^{-1}(CB_1 - BC_1); & \Gamma_{42}^4 &= (2\alpha)^{-1}(CB_4 - BC_4); \\ \Gamma_{43}^3 &= (2\alpha)^{-1}(DB_1 - BD_1); & \Gamma_{43}^4 &= (2\alpha)^{-1}(DB_4 - BD_4). \end{aligned}$$

Остальные Γ_{ik}^i , за исключением тех, которые связаны с указанным выше соотношением $\Gamma_{ik}^i = \Gamma_{ik}^i$, равны нулю.

Тождественно не обращаются в нуль только такие компоненты тензора кривизны $R_{ik}^i = R_{ik}^i$: $R_{11}^1, R_{14}^1, R_{42}^2, R_{43}^2, R_{33}^3$. Это дает шесть уравнений для четырех величин A, B, C, D . Таким образом, надо показать непротиворечивость уравнений. Это будет сделано ниже при специальном выборе координатной системы. Заметим здесь только, что на выбор координатной системы уже наложены два условия: $g_{11} = -g_{44}$ и $g_{14} = 0$. Остальные два условия содержатся в двух лишних уравнениях сверх четырех необходимых.

Запишем сначала уравнения $R_{\alpha\alpha} = 0$ для компонент 2 и 3. После некоторых упрощений они принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{44} - C_{11} + (2\alpha)^{-1}[C_1\alpha_1 - C_4\alpha_4 + 2C(B_1^2 - C_1D_1 - B_4^2 + C_4D_4)] &= 0; & (2) \\ D_{44} - D_{11} + (2\alpha)^{-1}[D_1\alpha_1 - D_4\alpha_4 + 2D(B_1^2 - C_1D_1 - B_4^2 + C_4D_4)] &= 0; & (3) \\ B_{44} - B_{11} + (2\alpha)^{-1}[B_1\alpha_1 - B_4\alpha_4 + 2B(B_1^2 - C_1D_1 - B_4^2 + C_4D_4)] &= 0. & (4) \end{aligned}$$

Умножим теперь уравнение (2) на $D/2$, (3) — на $C/2$ и (4) на $-B$ и сложим. Тогда получается линейное волновое уравнение для $\sqrt{\alpha}$:

$$(\sqrt{\alpha})_{11} - (\sqrt{\alpha})_{44} = 0. \quad (5)$$

Но, как было показано в [1], вид линейного элемента длины (1) остается инвариантным при всех тех преобразованиях координат $\bar{x}_1 = x_1(x_1, x_4)$ и $\bar{x}_4 = x_4(x_1, x_4)$, которые удовлетворяют уравнению

$$(\bar{x}_1)_{11} - (\bar{x}_1)_{44} = 0. \quad (6)$$

Поэтому можно без всякого ограничения общности положить

$$\sqrt{\alpha} = \bar{x}_1. \quad (7)$$

Иначе это видно следующим образом. Произвольное решение (5) есть $\sqrt{\alpha} = f(x_1 + x_4) + g(x_1 - x_4)$. Выберем координатную систему так, чтобы

$$f(x_1 + x_4) = (x_1 + x_4)/2, \quad g(x_1 - x_4) = (x_1 - x_4)/2.$$

Этот выбор совместим с видом интервала (1) благодаря условию (6).

Покажем теперь непротиворечивость всей системы уравнений гравитации при специальном выборе $\sqrt{\alpha} = x_1$ (черту над x_1 и x_4 опускаем, кроме того, пишем $\ln \sqrt{A} \equiv L$):

$$2R_{11} = -2[L_{11} - L_{44} - (x_1)^{-1}L_1 - (x_1)^{-2}(B_1^2 - C_1D_1)] = 0; \quad (8)$$

$$2R_{44} = 2[L_{11} - L_{44} + (x_1)^{-1}L_1 - (x_1)^{-2}(B_4^2 - C_4D_4)] = 0; \quad (9)$$

$$R_{14} = (x_1)^{-1}L_4 - (2x_1)^{-2}(2B_1B_4 - C_4D_1 - C_1D_4) = 0. \quad (10)$$

Образуя полусумму (8) и (9), получим:

$$(x_1)^{-1}L_1 - (2x_1)^{-2}(B_1^2 + B_4^2 - C_1D_1 - C_4D_4) = 0. \quad (11)$$

Дифференцируя (10) по x_1 и (11) по x_4 , легко показать, используя (2), (3) и (4), что (10) и (11) совместны, так как разность выражений для L_{14} и L_{41} пропорциональна величине $CD_4 + DC_4 - 2BB_4 = (CD - B^2)_4 = (x_1^2)_4 \equiv 0$.

Находя по (10) и (11) вторые производные L_{11} и L_{44} , убеждаемся при помощи (2), (3) и (4), что выполняются и уравнения (8) и (9). Тем самым непротиворечивость системы уравнений доказана полностью.

Вернемся теперь к уравнениям для B, C и D . Исключая B через $\alpha = x_1^2$ и вводя новые переменные

$$\sigma \equiv C(CD - x_1^2)^{-1/2}, \quad \delta \equiv D(CD - x_1^2)^{-1/2}, \quad (12)$$

имеем

$$[x_1(\sigma\delta - 1)^{-1/2}\sigma]_{11} - x_1[(\sigma\delta - 1)^{-1/2}\sigma]_{44} = 0, \quad (13)$$

$$[x_1(\sigma\delta - 1)^{-1/2}\delta]_{11} - x_1[(\sigma\delta - 1)^{-1/2}\delta]_{44} = 0,$$

что отвечает двум нелинейным взаимодействующим цилиндрическим волнам. В случае, рассмотренном Эйнштейном и Розеном [1], получалась линейная цилиндрическая волна. Сильная плоская волна невозможна потому, что вызываемое ею искривление метрики несовместимо с плоским пространством (см. [2]).

Существенно, однако, что несмотря на нелинейность системы гиперболических уравнений (13), ее характеристики суть прямые $x_1 = \pm x_4$. Поэтому можно утверждать, что и сильные гравитационные волны, подобно слабым, распространяются с

фундаментальной скоростью, равной скорости света¹. Это гораздо труднее увидеть из общих уравнений гравитации $R_{ik} = 0$. Заметим, кроме того, что характеристики каждого семейства между собой, очевидно, не пересекаются. Это значит, что нейнейные гиперболические уравнения гравитации в пустоте не приводят к необходимости образования ударных волн, в отличие, например, от уравнений газодинамики, принадлежащих к тому же классу.

Пространство является римановским, если в нем допускаются непрерывные группы преобразований координат. Появление ударных волн противоречило бы основной гипотезе о непрерывности преобразований, т. е. о римановском характере метрики. Таким образом, проведенное исследование еще раз показывает внутреннюю согласованность эйнштейновских уравнений гравитационного поля.

В заключение приношу благодарность В. Л. Гинзбургу, уклавшему мне основные литературные источники.

Л и т е р а т у р а

1. A. Einstein, N. Rosen. On gravitational waves.— J. Franklin Inst., 1937, 223, 43.
2. П. Г. Бергман. Введение в теорию относительности. М., ИЛ, 1947, стр. 253.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ*

Как известно, существуют две точки зрения на современное состояние классической теории поля. В течение многих лет считалось, и до сих пор предполагается многими, что сдвинутая классическая теория поля еще не построена и можно надеяться на построение такой геометрии мира, из которой получатся некоторые новые единые уравнения гравитации и электромагнетизма, подобно тому, как из римановой геометрии получаются уравнения гравитации. При этом не идут в счет уже достигнутые единые формы записи уравнений Максвелла и Эйнштейна (см. [1]), как не вносящие в теорию новых физических идей.

Другая точка зрения состоит в том, что существующая клас-

¹ Представляло бы, однако интерес исследование общего случая $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, где $g_{ik} = g_{ik}(x_1, x_4)$.

* ЖЭТФ, 1959, 37, вып. 6(12), 1722.

сическая теория поля уже окончательно сформулирована и никакое дальнейшее совершенствование электродинамики путем ее геометризации (по существу, а не по форме) не требуется [2].

При этом имеют в виду, конечно, поле, свободное от частиц, так как частицы являются квантовыми, а не классическими объектами. Тензор энергии импульса T_{ik} для вещества относится уже к макроскопической, феноменологической теории. Поэтому вопрос о существовании единой классической теории поля решается только для поля, свободного от частиц.

Трудно представить себе реальный эксперимент, который мог бы решить этот вопрос. Поэтому приходится искать подтверждение теории в ее внутренней непротиворечивости.

В основе современной теории гравитации лежит предположение о римановском характере пространства, в котором допускаются только непрерывные и однозначные группы преобразований. Любое следствие из уравнений гравитации и электродинамики не должно противоречить этому допущению и, разумеется, известным свойствам непрерывности электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла и Эйнштейна относятся к гиперболическому типу, причем коэффициенты при производных сами являются функциями от неизвестных величин, т. е. от компонент метрического тензора. Уравнения подобного типа не всегда допускают непрерывные решения. Например, в газовой динамике непрерывные решения, полученные из гладких начальных условий, иногда приводят к необходимости возникновения скачков, т. е. ударных волн [3]. Подобная ситуация была бы совершенно недопустима в классической теории поля, так как она противоречила бы основному допущению о римановском характере пространства или о непрерывности электромагнитного поля. Желательно было бы показать, что подобные разрывы никогда не возникают, исходя из уравнений в их самой общей форме. Пока удалось, однако, рассмотреть метрику более частного вида, принятую нами раньше [4]. Последняя несколько обобщает метрику Эйнштейна — Розена [5]. Отличие настоящей работы от [4] и [5] состоит в том, что в ней рассмотрено электромагнитное поле на равных началах с гравитационным.

Основной результат работы заключается в том, что при выбранном характере метрики всегда существуют координатная система, в которой каждое семейство характеристик образовано параллельными прямыми. Скорость любого дополнителного малого возмущения, гравитационного и электромагнитного, в этой системе координат всегда равна фундаментальной постоянной c . Возмущения не догоняют друг друга, поэтому никогда не могут возникнуть скачки, в отличие от уравнений газовой динамики. Таким образом, полученные результаты

говорят в пользу того, что современная классическая теория поля не нуждается в дальнейшем совершенствовании.

Рассмотрим теперь распространение волны. Будем исходить из метрики вида [4]

$$-ds^2 = Adx_1^2 + Cdx_2^2 + 2Bdx_2dx_3 + Ddx_3^2 - Adx_4^2, \quad (1)$$

считая коэффициенты A, B, C, D функциями только от x_1 и x_4 (этого достаточно для исследования характеристик). Уравнения Маквелла для контрвариантных составляющих электромагнитного поля имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_4} (F^{14} \sqrt{-g}) = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (F^{21} \sqrt{-g}) + \frac{\partial}{\partial x_4} (F^{24} \sqrt{-g}) = 0, \quad (2б)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (F^{31} \sqrt{-g}) + \frac{\partial}{\partial x_4} (F^{34} \sqrt{-g}) = 0, \quad (2в)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (F^{41} \sqrt{-g}) = 0. \quad (2г)$$

Из уравнений (2a) и (2г) видим, что $F^{14} = 0$, так что поле можно считать чисто поперечным. Тогда для компонент тензора энергии-импульса получим

$$T_{11} = T_{44} = 1/2 (F_{12} F_1^2 + F_{13} F_1^3 + F_{42} F_4^2 + F_{43} F_4^3). \quad (3)$$

Поэтому

$$T_1^1 = -T_4^4, \quad (4)$$

откуда следует, что и

$$T_2^2 = -T_3^3, \quad (5)$$

так как $T_i^i = 0$.

Запишем теперь уравнения Эйнштейна для компонент свертнутого тензора кривизны R_{22}, R_{33}, R_{32} (ср. [4]). Единицы измерения электромагнитного поля выберем такими, чтобы уравнения гравитации имели вид $R_{ik} = T_{ik}$ (индекс при C, D, B, α означает дифференцирование по x_1, x_4):

$$\begin{aligned} G_{44} - C_{11} + (2\alpha)^{-1} [C_1 \alpha_1 - C_4 \alpha_4 + 2C(B_1^2 - C_1 D_1 + C_4 D_4 - B_4^2)] &= 2AT_{22}, \\ D_{44} - D_{11} + (2\alpha)^{-1} [D_1 \alpha_1 - D_4 \alpha_4 + 2D(B_1^2 - G_1 D_1 - C_4 D_4 - B_4^2)] &= 2AT_{33}, \\ B_{44} - B_{11} + (2\alpha)^{-1} [B_1 \alpha_1 - B_4 \alpha_4 + 2B(B_1^2 - C_1 D_1 + C_4 D_4 - B_4^2)] &= 2AT_{32} \\ (\alpha \equiv CD - B^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Умножим первое из этих уравнений на D , второе — на C , третье — на $-2B$ и сложим. Учитывая, что $g^{22} = D\alpha^{-1}$, $g^{32} = C\alpha^{-1}$,

$g^{23} = B\alpha^{-1}$ получим справа $T_2^2 + T_3^3 = 0$, согласно (5). Слева, как было показано в [4], будем иметь

$$\alpha^{1/2} - \alpha_{44}^{1/2} = 0. \quad (7)$$

В качестве решения наиболее удобно выбрать (см. [5])

$$\alpha^{1/2} = (CD - B^2)^{1/2} = x_1. \quad (8)$$

Из уравнений для компонент R_{44}, R_{11} и R_{14} получается [4]

$$L_1 - (4x_1)^{-1} (B_1^2 - B_4^2 - C_1 D_1 - C_4 D_4) = x_1 T_{44}, \quad (9)$$

$$L_4 - (2x_1)^{-1} (2B_1 B_4 - C_1 D_4 - C_4 D_1) = x_1 T_{14}. \quad (10)$$

Здесь $L \equiv \ln A^{1/2}$. Значки 44 и 14 при T — тензорные.

Докажем теперь совместимость уравнений (9) и (10). Для этого вычислим, прежде всего, разность

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_4} (x_1 T_{44}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 T_{14}) &= - \left(\frac{\partial}{\partial x_4} (x_1 A T_4^4) + \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 A T_1^1) \right) = \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial x_4} (V \sqrt{-g} T_4^4) + \frac{\partial}{\partial x_1} (V \sqrt{-g} T_1^1) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно уравнению $T_{4,i}^i = 0$ выражение (11) равно $V \sqrt{-g} \Gamma_{4i}^i T_{4i}^i$. Пользуясь значениями символов Кристоффеля и (4), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_4} (x_1 T_{44}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 T_{14}) = V \sqrt{-g} (\Gamma_{24}^2 T_2^2 + \Gamma_{32}^3 T_3^2 + \Gamma_{43}^3 T_3^2 + \Gamma_{43}^3 T_3^2), \quad (12)$$

что в свою очередь приводится к виду

$$(2x_1)^{-1} (T_{22} C_4 + T_{33} D_4 - 2T_{23} B_4). \quad (13)$$

Подставляя вторые производные B, C, D из (6), убеждаемся в том, что (9) и (10) непротиворечивы. Таким образом, выбранная нами метрика (1) совместима с предположением о полноте электромагнитного поля.

Найдем теперь характеристики волновых уравнений электромагнитного поля. Для этого запишем уравнения Максвелла в смешанных компонентах F_{ik} . К уравнениям (2б, в) надо добавить еще первую пару, вытекающую из того, что $F_{i,s} = A_{i,s} - A_{s,i}$:

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 F_1^2 - \frac{\partial F_4^2}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 F_1^3 - \frac{\partial F_4^3}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} C F_1^2 + \frac{\partial}{\partial x_4} B F_1^3 - \frac{\partial}{\partial x_1} C F_4^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} B F_4^3 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} B F_{1,2}^2 + \frac{\partial}{\partial x_4} D F_1^3 - \frac{\partial}{\partial x_1} B F_4^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} D F_4^3 = 0. \quad (14)$$

Составляя по общему правилу характеристический определитель (см. [6]), получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ C\lambda & -C & B\lambda & -B \\ B\lambda & -B & D\lambda & -D \end{vmatrix} = \alpha(1-\lambda^2)^2 = 0. \quad (15)$$

Следовательно, он имеет двойные корни $\lambda = \pm 1$, т. е. и в искривленном пространстве малые электромагнитные дополнителные возмущения распространяются с фундаментальной скоростью. Для гравитационных возмущений, распространяющихся в пространстве с метрикой (1), то же было показано в [4]. Здесь показана совместимость обоих утверждений. Таким образом, распространение сколь угодно сильной электромагнитной волны в пространстве в классической теории не может повести к нарушению римановского характера метрики.

Можно сделать еще замечание относительно решений, обладающих эвклидовской метрикой на бесконечности. Там, где метрика эвклидовская, электромагнитное поле может быть только таким, каким оно получается из обычных уравнений Максвелла, без учета общей теории относительности. Но это поле связано фиксированными прямыми характеристиками с областью пространства, имеющими неэвклидову метрику. Поэтому поле в искривленных областях пространства не может качественно отличаться от того, что получилось бы в эвклидовом пространстве. Иначе говоря нет оснований утверждать, что в общей теории относительности возникают такие новые решения уравнений электродинамики, которые не имеют эвклидовых аналогов.

Поэтому вряд ли существуют так называемые геоны, предложенные Уилером [7], как точные несингулярные решения уравнений гравитации и электромагнетизма, в которых электромагнитное поле само себя удерживает в конечном объеме гравитационными силами (поле в конечном объеме, находящееся в тепловом равновесии, быть может и способно себя удерживать, но это соответствует другим решениям).

По тем же причинам можно усомниться и в другом предсказании Уилера [2], что наличие или отсутствие зарядов объясняется топологической связностью пространства. Продолжая прямые характеристики из бесконечности в неэвклидовскую область, нельзя ожидать, что при этом изменится топологическая связность. Оба указанных здесь вывода о «геонах» и «топологических зарядах» обнаруживаются и при аналитическом исследовании уравнений¹.

¹ Например, потенциал цилиндрической волны равен $\varphi = \sqrt{2} \operatorname{th} [1/2 J_0(kx_2) \cdot \cos(kx_1)]$ в соответствии с его обычным выражением $\varphi_0 = J_0(kx_1) \cos(kx_2)$.

Разумеется, это относится только к избранному здесь случаю решений, зависящих от двух переменных (x_1 и x_2 , или x_1 и x_3 , который алгебраически весьма сходен, хотя и приводит к эллиптическим уравнениям). Что будет, когда решения зависят более чем от двух переменных, надо еще исследовать. Против существования трехмерных «геонов» говорит следующее соображение. Как известно, двухмерная потенциальная яма способна удерживать связанную частицу в квантовой механике всегда, а трехмерная — не всегда. Иначе говоря, волновое уравнение с переменными коэффициентами имеет экспоненциально затухающее на бесконечности решение в двух измерениях, когда аналогичное уравнение в трех измерениях такого решения не имеет. Но мы видим, что подобное уравнение в теории гравитации не имеет затухающего решения и в двух измерениях. Поэтому есть основание думать, что трехмерного решения такого типа тем более нет.

Л и т е р а т у р а

1. W. Pauli. *Ann. Physik*, 1933, 18, 305. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, 1-е изд. М.—Л., ГИТТЛ, 1941, § 100.
2. A. Wheeler. *Ann. Phys.*, 1957, 2, 525.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика сплошных сред*. М., ГИТТЛ, 1953, стр. 453.
4. А. С. Компанец. *ЖЭТФ*, 1958, 34, 953; см. наст. изд., стр. 169.
5. A. Einstein, N. Rosen. *J. Franklin Inst.*, 1937, 223, 43.
6. Р. Курант, К. Фридрихс. *Ударные волны и сверхзвуковые течения*. М., ИЛ, 1950.
7. A. Wheeler. *Phys. Rev.*, 1955, 97, 1511.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ В ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ МОДЕЛИ *

Совместно с А. С. Черновым

Вопросу о характере особой точки при $t=0$ в решении гравитационных уравнений Эйнштейна посвящена обширная литература [1—4]. В настоящей работе показано, что модель с однородным распределением материи, но с анизотропной метрикой обладает иной особенностью по времени, чем однородная изотропная модель Фрийдмана — Леметра.

Мы будем искать зависящие только от времени смешанные компоненты тензора энергии-импульса в сопутствующей син-

* *ЖЭТФ*, 1964, 47, вып. 5(11).

хронной системе, для которой метрическая форма имеет следующий вид:

$$ds^2 = dt^2 - e^{v(r,t)} dr^2 - e^{\omega(r,t)} d\varphi^2 - e^{\mu(r,t)} dz^2. \quad (1)$$

Иначе говоря, от координаты z вообще ничего не зависит. Дальнейшие вычисления показывают, что в этих предположениях действительно существует сопутствующая синхронная система отсчета.

Трехзначковые символы Кристоффеля равны ($r = x_1, \varphi = x_2, z = x_3, t = x_4$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= v'/2, & \Gamma_{12}^2 &= \omega'/2, & \Gamma_{13}^3 &= \mu'/2, & \Gamma_{41}^1 &= \dot{v}/2, & \Gamma_{42}^2 &= \dot{\omega}/2, \\ \Gamma_{43}^3 &= \dot{\mu}/2, & \Gamma_{11}^4 &= e^v \dot{v}/2, & \Gamma_{22}^4 &= e^\omega \dot{\omega}/2, & \Gamma_{33}^4 &= e^\mu \dot{\mu}/2, \\ \Gamma_{23}^1 &= -e^{\omega-v} \omega'/2, & \Gamma_{33}^1 &= e^{\mu-v} \mu'/2. \end{aligned}$$

Остальные символы Кристоффеля при сделанных предположениях обращаются в нуль. Штрих означает d/dt , точка над буквой d/dt .

Смешанные компоненты T_k^i в сопутствующей системе отсчета равны $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \rho$, $T_4^4 = -\varepsilon$, остальные компоненты обращаются в нуль. Тогда из уравнений Эйнштейна

$$R_i^k = 8\pi k (T_i^k - 1/2 \delta_i^k T) \quad (2)$$

остаются следующие независимые пять (для положено в дальнейшем равным единице):

$$\begin{aligned} \varepsilon - \rho &= 1/2 [2\ddot{v} + \dot{v}(\dot{v} + \dot{\omega} + \dot{\mu})] - 1/2 e^{-v} [2(\omega'' + \mu'') + \\ &+ \omega'^2 + \mu'^2 - v'(\omega' + \mu')], \quad (2a) \\ \varepsilon - \rho &= 1/2 [2\ddot{\omega} + \dot{\omega}(\dot{v} + \dot{\omega} + \dot{\mu})] - 1/2 e^{-v} [2\omega'' + \omega'(-v' + \omega' + \mu')], \quad (2b) \\ \varepsilon - \rho &= 1/2 [2\ddot{\mu} + \dot{\mu}(\dot{v} + \dot{\omega} + \dot{\mu})] - 1/2 e^{-v} [2\mu'' + \mu'(-v' + \omega' + \mu')], \quad (2c) \\ -(\varepsilon - 3\rho) &= 1/2 [2(\ddot{v} + \ddot{\mu} + \ddot{\omega}) + (\dot{v}^2 + \dot{\mu}^2 + \dot{\omega}^2)], \quad (2d) \\ -1/2(\omega' + \mu') &= 1/4 \dot{v}(\omega' + \mu') - 1/4(\omega'\dot{\omega} + \mu'\dot{\mu}) = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение выражает условие сопутствия.

Левые части уравнений (2a) — (2c) зависят по условию только от времени. Правые части можно сделать зависящими тоже от времени, допустив, что $v = v(t)$, $\mu = \mu(t)$. Тогда (2d) приобретает форму

$$\dot{\omega}' = v\omega'/2 - \omega'\dot{\omega}/2. \quad (3)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$e^{\omega/2} = e^{v/2} h(r) + F(t). \quad (4)$$

Но мы полагаем, что φ — угловая координата. Поэтому, чтобы линия $r = 0$ не была особой, надо потребовать $e^{\omega(r,t)} = 0$. Отсюда следует $F(t) = 0$, $h(0) = 0$. Из (4) получаем тогда $\dot{\omega} = v$. Если подставить это в систему (2a) — (2c), то уравнение (2b) будет просто повторять (2a) и в дальнейшем может быть опущено.

Для нахождения $h(r)$ достаточно только (2a), в котором $h(r)$ входит следующим образом: $e^{-(v+\omega)/2} h''(r)$. Это выражение должно зависеть только от времени. Подставляя в него $e^{-\omega/2}$ из (4), с учетом того, что $F(t) = 0$, находим уравнение для $h(r)$:

$$h''(r)/h(r) = \text{const} = \pm \alpha^2. \quad (5)$$

Отсюда следует что имеется три типа решений: $h = \text{sh} \alpha r$ (модель, открытая по r), $h = r$ (модель, квазивыводовская по r), $h = \text{sin} \alpha r$ (модель, закрытая по r). Рассмотрим сначала второй случай как наиболее простой. Система уравнений (2a), (2b), (2c) переписывается так:

$$2(\varepsilon - \rho) = 2\ddot{v} + 2\dot{v}^2 + \dot{v}\dot{v}, \quad (6a)$$

$$2(\varepsilon - \rho) = 2\ddot{\mu} + 2\dot{\mu}\dot{v} + \dot{\mu}^2, \quad (6b)$$

$$-2(\varepsilon + 3\rho) = 4\ddot{v} + 2\dot{v} + 2\dot{v}^2 + \dot{\mu}^2. \quad (6b)$$

Рассмотрим два предельных случая: $\rho = 0$ (пылевидная материя) и $\varepsilon = 3\rho$ (ультрарелятивистский газ). Для пылевой материи найдем (несущественные масштабные постоянные опускаем)

$$\varepsilon^v = t^{1/\lambda}, \quad (7)$$

$$e^\mu = t^{-1/\lambda} (t - A)^2, \quad (8)$$

$$\varepsilon = 4/3t(t - A). \quad (9)$$

Это — частный случай более общего решения, найденного Шюкингем и Гекманом [5]. Именно: записывая метрическую форму в виде

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{\lambda=1}^3 R_\lambda^2(t) dx_\lambda^2,$$

эти авторы получают

$$R_\lambda = t^{1/2(1+\varepsilon \sin[\nu+\pi(\lambda-1)/3])} (t - A)^{1/2(1-\varepsilon \sin[\nu+\pi(\lambda-1)/3])}.$$

Подставляя сюда $\nu = \pi/6$, приходим к (7) — (9). Этот последний случай в некотором смысле выделен, так как решение Шюкинга и Гекмана при произвольном ν непродолжаемо за точку $t = A$, поскольку множитель $t - A$ стоит в метрических коэффициентах с иррациональным показателем.

Любопытно тем не менее, что точка $t = A$ является особой и в решении (7) — (9), но в несколько ином смысле, чем в более

общем решении, где $\gamma \neq \pi/6$. Из метрической формы особенность устраняется полностью, если перейти к новым координатам $\tau = (t - A) \operatorname{ch} z, \quad \xi = (t - A) \operatorname{sh} z$.

Тогда $dt^2 - (t - A)^2 dz^2$ переходит в чисто галилеевское выражение $d\tau^2 - d\xi^2$. Но произведение $\epsilon \sqrt{-g}$ при $t = A$ меняет знак. Возможно, здесь проявляется то общее свойство теории относительности, что энергия в ней не положительно определена, и переход через $t = A$ отвечает замене m на $-m$. Этот пункт остается для нас не совсем ясным. Заметим, что в противоположном крайнем случае, когда $\epsilon = 3p$, решения с положительными и отрицательными энергиями строго разграничены и не переходят одно в другое.

Что касается неквазивклидовских решений при пылевой материи, то здесь положение не изменяется существенным образом по сравнению с уже указанным. Именно: после некоторых вычислений получается ($\alpha^2 > 0$)

$$t = 2C \int_{Ce^{-v/2}}^{\xi^{1/2}(1+\xi)} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}(1+\xi)}, \quad (7')$$

$$e^{\mu/2} = (1 + Ce^{-v/2})^{1/2} \left(1 + C_1 \int_{Ce^{-v/2}}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1+\xi)^{3/2}} \right), \quad (8')$$

$$\epsilon = \frac{1}{4} C_1 e^{-v/2} (1 + Ce^{-v/2})^{1/2} \left(1 + C_1 \int_{Ce^{-v/2}}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1+\xi)^{3/2}} \right)^{-1}. \quad (9')$$

И здесь произведение $\epsilon \sqrt{-g}$ изменяет знак в некоторой точке. При очень больших значениях t расширение оказывается равномерным во все стороны. Поэтому при экстраполяции нынешнего состояния вселенной на более ранние стадии не следует упускать из виду, что в этих ранних стадиях анизотропные решения ведут себя иначе, чем изотропные.

Рассмотрим теперь квазивклидовское анизотропное решение при $\epsilon = 3p$. Система основных уравнений приобретает вид

$$\frac{4}{3}\epsilon = 2\ddot{v} + 2\dot{v}^2 + \dot{v}\mu, \quad (10a)$$

$$\frac{4}{3}\epsilon_1 = 2\ddot{\mu} + 2\dot{\mu}\dot{v} + \dot{\mu}^2, \quad (10b)$$

$$-4\epsilon_1 = 4\ddot{v} + 2\ddot{\mu} + 2\dot{v}\dot{\mu} + \dot{v}^2 + \dot{\mu}^2. \quad (10v)$$

Образуя разность из уравнений (10b) — (10v) — 4(10a), получаем с точностью до несущественной постоянной

$$\mu = -6 \ln \dot{v} - 5v. \quad (11)$$

Далее, исключаем μ и ϵ , находим

$$2\ddot{v}\dot{v} - 8\dot{v}^2 - 7\ddot{v}^2 - 3\dot{v}^4 = 0. \quad (12)$$

Первый интеграл (12) имеет вид

$$(\ddot{v}/\dot{v}^2 + 1)^4 (\ddot{v}/\dot{v}^2 + 3/4)^{-3} = -C_2 \dot{v}^2. \quad (13)$$

Чтобы выяснить характер особенности вблизи $t = 0$, надо положить $\ddot{v}/\dot{v}^2 \gg 1$, что дает

$$\dot{v} = (3C_2 t)^{-1/2}. \quad (14)$$

Сама величина v равна при малых t :

$$v = (3t)^{3/2} / 2C_2^{1/2}. \quad (15)$$

Отсюда согласно (11)

$$\mu = \ln t^2. \quad (16)$$

По уравнению (10a) определяем плотность энергии

$$\epsilon = (C_2 t)^{-1/2}. \quad (17)$$

На первый взгляд может показаться, что особенность метрической формы здесь можно в первом приближении устранить тем же способом, как и у пылевой материи при $t = A$, т. е. путем преобразования $\tau = t \operatorname{ch} z, \quad \xi = t \operatorname{sh} z$. Но разложение метрических коэффициентов идет по дробным степеням t , а в выражение кривизны входят производные до второго порядка порядка включительно. Эти производные обращаются при $t = 0$ в бесконечность. Из-за этого становится бесконечным и произведение $\epsilon \sqrt{-g}$.

В отличие от фридмановского решения, где отрицательные t не имеют смысла (в формулы входит \sqrt{t}), полученное здесь решение можно брать и при $t < 0$. Найденная нами особенность по типу подобна точке заострения циклоиды. Можно видеть, что (13) имеет и решения другого типа. Так, существует разложение $d\dot{v}^{-1}/dt$ вблизи точки $3/4$. Но для этого решения произведение $\epsilon \sqrt{-g}$ обращается в нуль как $t^{1/2}$, иначе говоря, плотность материи стремится к нулю.

* Как указано Е. Лифшицем и И. Халатниковым [3], в синхронной сопутствующей системе геодезическими являются линии времени, в результате чего пылевая материя может стучиться до бесконечной плотности просто потому, что отдельные частицы, не отталкиваясь друг от друга, сойдутся в одну точку. В ультрарелятивистском газе этому могло бы воспрепятствовать давление, отклоняющее движение частиц от геодезических линий. Но в настоящей задаче взят случай не зависящего от координат давления, так что градиент давления равен нулю. Следовательно, нет и силы, уводящей частицы газа с геодезических линий.

Переходим теперь к общему случаю $\alpha^2 \neq 0$, $\epsilon = 3\rho$. Заменяя t на t/α , получаем уравнение для v :

$$12\ddot{v}\dot{v} - 48\dot{v}^2 - 42\ddot{v}v^2 - 18\dot{v}^4 \pm 28\ddot{v}e^{-v} \pm 21\dot{v}^2e^{-v} - 4e^{-2v} = 0. \quad (18)$$

Здесь верхние знаки отвечают модели, открытой по r , нижние — закрытой модели. Делая замену

$$\dot{v} \equiv e^{-v/2}u(v), \quad du/dv \equiv q(u), \quad (19)$$

приходим к уравнению первого порядка

$$12u^3qdq/du - 36q^2u^2 - 18qu^3 - 3u^4 \pm 28qu \pm 7u^2 - 4 = 0. \quad (20)$$

В этих переменных искомые функции равны:

$$v = \int \frac{du}{dq}, \quad (21a)$$

$$\mu = 2 \int \frac{du}{qu^2} - 2 \int \frac{du}{q} - 6 \ln u, \quad (21b)$$

$$e = e^{-v} (1 - u^2 - 4qu), \quad (21в)$$

$$t = \int \frac{du}{qu} e^{v/2}. \quad (21г)$$

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Уравнение $1 - u^2 - 4qu = 0$ есть особый интеграл (20). Как видно из (21в), это решение разграничивает область с положительными и отрицательными ϵ , так что переход через $\epsilon = 0$ здесь невозможен. Точка $t = 0$ соответствует $u = \infty$, $q = \infty$ в правом нижнем квадранте плоскости (q, u) , где уравнение (20) отвечает уже исследованному выше квазивеклидовскому случаю. Поэтому и здесь общее, неквазивеклидовское решение имеет качественно такую же зависимость от времени, как и в случае пылевой материи.

Рассмотрим теперь промежуточный случай, когда вещество обладает отличным от нуля давлением, но плотность кинетической энергии еще много меньше плотности энергии покоя. Будем считать, что вещество совершает изэнтропический процесс. Тогда плотность энергии и давление выражаются через плотность частиц следующим образом:

$$\epsilon = \rho m + b\rho^{1+\delta}, \quad \rho = \delta b\rho^{1+\delta}. \quad (22)$$

При $\delta = 2/3$ имеем случай одноатомного газа. С этим значением констант это одновременно и случай холодного ферми-газа. Уравнения интегрируются в квадратурах при произвольном значении δ .

Вычтем (6б) из (6а), чтобы исключить члены, относящиеся к веществу. Получившееся уравнение допускает первый интеграл

$$\dot{v} - \dot{\mu} = Ce^{-v-1/2}. \quad (23)$$

Из уравнений (6б) и (6в) выразим теперь отдельно μ и $\mu^{1+\delta}$ и составим из них уравнение

$$2\ddot{v} + 2\dot{\mu} + \dot{v}^2 + \dot{\mu} + \dot{\mu}^2 = -b_1 [2(1-\delta)\ddot{v} + 2(1+\delta)\ddot{\mu} + (1+3\delta)\dot{v}\dot{\mu} + (1-\delta)\dot{v}^2 + (1+\delta)\dot{\mu}^2]^{1+\delta}, \quad (24)$$

где смысл постоянной b_1 очевиден. В дальнейшем удобно ввести новую неизвестную

$$\zeta = v + \mu/2, \quad (25)$$

так что $\epsilon^2 = \sqrt{-g}$.

Заменяя теперь μ через ζ , перепишем (24), одновременно понизив его порядок путем подстановок:

$$\begin{aligned} \zeta = \omega, \quad Ce^{-\zeta} = x, \quad \dot{v} = 1/3(2\omega + x), \\ \ddot{v} = -1/3\dot{\omega}(2x d\omega/dx + x). \end{aligned}$$

Приводим уравнение (24) к виду

$$-\frac{8}{3}\omega x \frac{d\omega}{dx} + \frac{4}{3}\omega^2 + \frac{x^2}{3} = -b_1 \left[-\frac{8}{3}\omega x \frac{d\omega}{dx} + \frac{4}{3}(1+\delta)\omega^2 + \frac{1}{3}(1-\delta)x^2 \right]^{1+\delta}. \quad (26)$$

Дальнейшее понижение порядка достигается путем подстановки

$$\omega^2 = x^2(1 + Av/x^2), \quad A = 3/4(1+\delta)^{1+1/\delta}b_1^{1/\delta}.$$

Если здесь еще вернуться от x к ζ , получим уравнение в окончательном виде:

$$\frac{dv}{d\zeta} + v = - \left[\frac{1}{1+\delta} \frac{dv}{d\zeta} + v \right]^{1+\delta}. \quad (27)$$

Его интеграл записывается так:

$$\zeta = -\ln C_1 \left(v + \frac{k}{1+\delta} \right), \quad k = \frac{dv}{d\zeta}. \quad (28)$$

Решение удобно выразить в параметрическом виде, если исходить из определения $k = -sv$. Пределами изменения s будут $1+\delta \geq s \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} v = (s-1)^{1/\delta} \left(1 - \frac{s}{1+\delta} \right)^{-1/\delta}, \\ \epsilon^2 = C_1^{-1} \left(v + \frac{k}{1+\delta} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{s}{1+\delta} \right)^{1/\delta-1} (s-1)^{-1/\delta}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение для плотности частиц получается через тот же параметр s , так как

$$n \sim v + k/(1 + \delta). \quad (30)$$

Таким образом, произведение $ne^t = n\sqrt{1-g}$ остается постоянным, что выражает просто сохранение числа частиц. Это требование включено в самом уравнении, связывающем p и v . Наоборот, крайний релятивистский случай этого требования в себе не заключает, так что произведение $\epsilon\sqrt{1-g}$ не остается постоянным и ϵ обращается в бесконечность сильнее, чем $\sqrt{1-g}$ в нуль.

В качестве начала отсчета времени удобно выбрать точку $s = 1 + \delta$, где плотность частиц бесконечна. Вблизи этой точки имеем

$$t = \left(1 - \frac{s}{1 + \delta}\right)^{1/2\delta}. \quad (31)$$

При произвольных значениях δ нельзя, конечно, перейти от t к $-t$ (хотя, например, при $\delta = 2/3$ можно). Но когда плотность частиц стремится к бесконечности, уравнение состояния переходит в $\epsilon = 3p$, которое снова допускает переход по времени через нуль.

В заключение приносим сердечную благодарность за весьма ценные обсуждения Я. Б. Зельдовичу, Е. М. Лифшицу, И. Д. Новикову и И. М. Халатникову.

Л и т е р а т у р а

1. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 1960, 39, 149, 800.
2. Е. М. Лифшиц, В. В. Судаков, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 1961, 40, 1847.
3. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников. УФН, 1963, 80, 391.
4. А. Л. Зельманов. Труды 6-го совещания по вопросам космогонии. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 144.
5. E. Schucking, O. Heckman. 8-me Conseil physique, Bruxelles, 1958, 149.

О НАХОЖДЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОБЕРТОНОВ МНОГОАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ *

Хорошо известно, что представление о гармоническом характере сил, действующих между ядрами многоатомной молекулы, отвечает фактам весьма неточным образом. Поэтому колебательные спектры молекул содержат не одни лишь собственные частоты колебаний, которые только и разрешены в гармонических колебательных системах, но также обертоны и комбинационные частоты. Ангармонизм нарушает, таким образом, запрет, налагаемый на переходы квазиуругим характером сил; справедливыми только остаются те запреты, которые вытекают из симметрии молекул.

Для того чтобы выяснить, разрешены ли данный переход, надо определить, по каким представлениям группы симметрии молекулы преобразуются волновые функции начального и конечного состояний. Известно, что волновая функция основного состояния преобразуется по единичному представлению, а функция первого возбужденного состояния преобразуется по тому же нормаль-приводимому представлению, что и соответствующая нормальная координата. Это следует из того, что первый полином Эрмита пропорционален координате. Функция с более высоким квантовым числом преобразуется, вообще говоря, уже по некоторому приводимому представлению группы. Зная характер этого представления, его можно разложить по характерам неприводимых представлений и найти тем самым данное представление.

В том случае, когда нормальное колебание не вырождено, характер представления для волновой функции с квантовым числом ν дается простой формулой, принадлежащей Тиссе [1, 2]:

$$\chi_\nu = (\chi_1)^\nu.$$

Там же приводятся рекуррентные формулы для случаев, когда

* ЖЭТФ, 1940, 10, вып. 11.

координата дву- и трехкратно вырождена;

$$\begin{aligned} \chi_0(R) &= \frac{1}{2} [\chi_1(R) \chi_{0-1}(R) - \chi_1(R^0)] \text{ (двукратное вырождение), (1)} \\ \chi_0(R) &= \frac{1}{8} [2\chi_1(R) \chi_{0-1}(R) - \frac{1}{2} \chi_{0-2}(R) (\chi_1(R))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \chi_{0-2}(R) \chi_1(R^2) + \chi_1(R^0)] \text{ (трехкратное вырождение). (2)} \end{aligned}$$

Здесь R — элемент группы симметрии молекулы, R^2 , R^0 — его степени,

$$\chi_{-k} = 0; \quad \chi_0 = 1.$$

В настоящей заметке указываются формулы, определяющие χ_0 в замкнутом виде. При этом волновая функция находится в предположении о квазиупругих силах, так как ангармонизм, имеющий симметрию молекулы, не изменяет представления, по которому преобразуется функция.

Рассмотрим сначала случай трехкратного вырождения. Пусть q_1 , q_2 и q_3 — соответствующие нормальные координаты. В потенциальной энергии молекулы им отвечает член $U = \frac{1}{2} \omega^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$. Положим $U = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$ и напишем уравнение Шредингера выбранного колебания в полярных координатах:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\psi}{dr} + \frac{l(l+1)\psi}{r^2} - \frac{2}{h^2} \left(E - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \psi = 0. \quad (3)$$

Здесь l означает азимутальное квантовое число. Обозначая

$$\sqrt{\frac{\omega}{h}} r \equiv x, \quad \frac{2E}{h\omega} \equiv \lambda, \quad \psi = \frac{f}{\sqrt{x}},$$

а затем переходя к $y \equiv x^2$, приводим (3) к виду

$$-\frac{d}{dy} y \frac{df}{dy} + \frac{(l+1/2)^2 f}{4y} + \frac{yf}{4} - \frac{\lambda f}{4} = 0. \quad (4)$$

(4) представляет собой известное уравнение для нахождения собственных функций водородного атома; оно имеет решение, только если

$$\frac{\lambda}{4} = p + \frac{l+1/2+1}{2},$$

где p — целое неотрицательное число. Отсюда

$$E_0 = h\omega (2p + l + 3/2) = h\omega (v + 3/2). \quad (5)$$

Здесь $3/2 h\omega$ — нулевая энергия пространственного осциллятора. Кратность уровня E_0 равна $\Sigma(2l+1)$ по всем значениям l , которые меняются через две единицы от 1 до v или от 0 до v в за-

висимости от четности v . Иначе, кратность $\equiv \frac{1}{2}(v+1)(v+2)$. Каждому l отвечает определенная функция ψ_{lv} .

Найдем сначала характер представления, по которому преобразуется ψ_{lv} . Надо заметить, что координаты q_1 , q_2 , q_3 по отношению к преобразованиям группы симметрии данной молекулы не обязательно ведут себя, как декартовы координаты x , y , z . Пусть группа симметрии молекулы H изоморфна в смысле теории абстрактных групп другой группе симметрии G . Тогда им будут отвечать одни и те же неприводимые представления. Но координаты q в группе H могут преобразовываться, как x , y , z по отношению к группе G . Так, группы O и T_d изоморфны. Они имеют два трехмерных представления, из которых одно отвечает преобразованию x, y, z в группе O , а другое — преобразованию x, y, z в группе T_d . Таблицу простых характеров точечных групп можно найти в статье Розенталя и Мерфи [2, с. 334]. Из этой таблицы легко усмотреть, по отношению к какой группе симметрии q_1, q_2, q_3 ведут себя как декартовы координаты. После того как это выяснено, нетрудно найти χ_{lv} , т. е. характер преобразования ψ_{lv} . В самом деле, он равен характеру преобразования l -й шаровой функции Y_l . Если операция не связана с отражением, а представляет чистый поворот, то $\chi_{lv} = \sin(l+1/2)\varphi / \sin\varphi/2$, где φ — угол поворота. Поэтому

$$\chi_{lv} = \frac{\sin(v/2+1)\varphi \sin(v/2+1/2)\varphi}{\sin\varphi/2 \sin\varphi}. \quad (6)$$

Если же, кроме поворота, операция содержит отражение в плоскости, перпендикулярной оси,

$$\chi_{lv} = (-1)^l \frac{\sin(l+1/2)(\varphi+\pi)}{\sin(\varphi+\pi)},$$

а

$$\chi_{lv} = (-1)^v \frac{\sin(v/2+1)\bar{\varphi} \sin\left(\frac{v}{2}+1/2\right)\bar{\varphi}}{\sin\frac{\bar{\varphi}}{2} \sin\bar{\varphi}},$$

где

$$\bar{\varphi} \equiv \varphi + \pi. \quad (7)$$

Здесь использована четность l и v . Надо считать, кроме того, что

$$\frac{\sin m\pi}{\sin \pi} = (-1)^{m-1} m, \quad \text{а} \quad \frac{\sin 2m\pi}{\sin 2\pi} = m.$$

Подстановкой в (2) можно убедиться в том, что (6) и (7) удовлетворяют формулам Тиссы.

В случае двукратно вырожденной координаты энергия

$$E_v = h\omega(2p + l + 1) = h\omega(v + 1), \quad (8)$$

следовательно, l снова меняется через два. По таблице простых характеров так же просто определяется, как преобразуются q_1, q_2 . Может оказаться, что некоторому элементу группы в представлении q_1, q_2 отвечает его степенность. Так, группы T_d и O , изоморфные, как уже говорилось, имеют двумерное представление, в котором характер класса элементов $\{3C_2\} = 2$. Поэтому классу элементов $\{3C_2\}$ в представлении q_1, q_2 отвечает единица или поворот на 2π . Если классу элементов в представлении q_1, q_2 отвечает чистый поворот,

$$\chi_{\nu} = 2 \cos l\varphi,$$

$$\chi_{\nu} = \frac{\sin(v+1)\varphi}{\sin\varphi}. \quad (9)$$

Если класс элементов содержит отражение, то $\chi_{\nu} = \delta_{\nu,0}$, поэтому

$$\chi_{\nu} = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^{\nu}\}. \quad (10)$$

Легко видеть, что (9) и (10) удовлетворяют уравнению (1).

Л и т е р а т у р а

1. L. Tisza. Z. Phys., 1933, 82, 48.
2. J. Rosentahl, G. Murphy. Rev. Mod. Phys., 1939, 8, N 4, 318.

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЙНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И α -ЧАСТИЦ В ТЯЖЕЛЫХ ЭЛЕМЕНТАХ *

Многократное рассеяние быстрых электронов послужило предметом большого числа статей, как теоретических, так и экспериментальных. Несмотря на то, что само явление никакой физической проблемы не включает, правильный учет его необходим при обработке многих экспериментов с быстрыми электронами, проходящими через конденсированное вещество. Интерес теоретиков к этой задаче вызван отчасти, быть может, тем, что все входящие в нее величины при известном предположении о распределении потенциала в рассеивающем атоме могут быть вычислены через универсальные постоянные. Между тем весьма

* ЖЭТФ, 1945, 15, вып. 6.

сходная задача о броуновском движении содержит несколько произвольную величину свободного пробега частицы. Поэтому всякое несогласие теории многократного рассеяния с опытом, выходящее за пределы неизбежных ошибок эксперимента, ставит вопрос о нахождении более точного теоретического решения. Можно полагать, что недостаток предшествующих работ по этому вопросу [2а, б; 3, 5] связан с неправильным учетом рассеяния для «больших» углов. Под большими углами понимаются углы, падающие в области, близкой к углам однократного рассеяния. В настоящей работе показано, что в теорию многократного рассеяния входит не только величина, аналогичная среднему квадрату угла отклонения частицы, но и полное интегральное сечение для столкновения.

Мы будем исходить из интегрального кинетического уравнения, полученного еще Боте [1]:

$$\cos\vartheta \frac{\partial F}{\partial \tau} = - \int W [F(\cos\vartheta', \tau) - F(\cos\vartheta, \tau)] d\Omega', \quad (1)$$

где ϑ — угол между импульсом электрона и направлением нормали к пластинке рассеивателя, τ — расстояние точки внутри пластинки от той поверхности, на которую падает электронный пучок, F — функция распределения электронов по углам, W — вероятность рассеяния в единице телесного угла в элементарном акте при прохождении слоя вещества толщиной в 1 см.

При небольших углах отклонения W может быть представлено формулой

$$W = \frac{Z^2 e^4 N}{h^2 v^2 (\mu^2 Z e)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \left[\int_0^{\infty} f(x) \sin \left(kx \sin \frac{\vartheta}{2} \right) dx \right]^2. \quad (2)$$

Выражение (2) получено в предположении о томас-фермиевском распределении потенциала рассеивающего атома. Оно задается универсальной функцией $f(x)$, ϑ — угол отклонения электрона, v — его скорость, N — число атомов в единице объема, μ определяется как

$$\mu = \frac{2^{1/2}}{3\pi} \frac{m^{1/2} e^{3/2}}{h^3}, \quad (3)$$

тогда как k — удвоенный импульс электрона p , выраженный в соответствующих единицах:

$$k = \frac{2p}{h(Ze\mu)^{1/2}}, \quad (4)$$

Z — как обычно, атомный номер рассеивателя, h — постоянная Планка, деленная на 2π .

При больших углах отклонения, таких, что $k\vartheta \gg 1$, (2) переходит в формулу Резерфорда. Следует отметить также, что (2)

не содержит слиновых поправок. Порядок величины этих поправок дается формулой Мотта и определен несколько ниже. Следует учесть, что формула Мотта для рассеяния в тяжелых элементах имеет только оценочное значение.

Когда все углы, входящие в задачу, достаточно малы, $\cos \theta$ в левой части уравнения (1) может быть заменен единицей. При $\theta < 10^\circ$ это связано с процентной ошибкой. Если на пластинку нормально падает параллельный пучок электронов и можно пренебречь большими углами отклонения в результате многих соударений, F подчиняется граничному условию

$$F(\cos \theta, x=0) = 0 \quad \text{при } \theta > 0 \quad (5)$$

и нормировано на единицу. Уравнение (5) отвечает предположению о нулевом значении альбедо пластинки. Вызванная этим ошибка порядка величины отношения полного сечения упругого соударения к сечению для отклонений на углы, большие 90° . Отношение указанных величин имеет порядок $1/k^2$.

Введем еще величину $\lambda = \sin \theta/2$; тогда после сделанных замечаний уравнение (1) получит вид

$$2\pi \frac{\partial F}{\partial \tau} = A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \left[\int_0^\infty f(x) \sin k\lambda x dx \right]^2 (F - F') \quad (6)$$

При этом единица длины выбрана равной $h^2 v^2 (Z e m^2)^{1/2} / 8\pi Z^2 e^4 N$.

Для упрощения записей будем обозначать входящий в (6) атомный множитель буквой A . Разобьем входящее в (6) интегрирование по λ на два интервала: от нуля до некоторого значения Λ и от Λ до единицы. Но, так как $k\Lambda$ есть большая величина, во втором интервале A может быть положен равным $1/k^2 \lambda^2$. Λ , в свою очередь, — еще настолько малый угол, что вместо точной формулы

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta \cos \varphi$$

в первом интервале между нулем и Λ следует применять приближенную формулу сложения

$$\theta' = \sqrt{\theta^2 + 4\lambda^2} + 4\lambda\theta \cos \varphi \quad (7)$$

Прибавим теперь к интегралу по λ и вычтем из него другой интеграл, распространенный от Λ до ∞ , в котором F' выражено по приближенной формуле сложения (7).

Рассмотрим теперь ошибку, происходящую от того, что разность интегралов

$$\frac{1}{k^2} \int_\Lambda^1 \frac{\partial \lambda}{\lambda^3} |F - F(\cos \theta')| - \frac{1}{k^2} \int_\Lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3} |F - F(\theta')| \quad (8)$$

предполагается равной нулю. Мы можем представить величину (8) еще и так:

$$\frac{F}{2k^2} - \frac{1}{k^2} \int_\Lambda^1 \frac{d\lambda}{\lambda^3} [F(\cos \theta') - F(\theta')] + \frac{1}{k^2} \int_\Lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3} F(\theta') \quad (9)$$

Первое и третье слагаемые здесь имеют один и тот же порядок величины F/k^2 . В дальнейшем будет показано, что относительная ошибка, происходящая от того, что эти слагаемые отбрасываются, несколько меньше квадрата некоторого среднего угла отклонения и не превосходит поэтому 1%. Второе слагаемое имеет порядок величины $(\theta^2/k^2) F''(\theta)$, поэтому должно быть в $\theta^2/\ln \tau$ раз меньше основного члена, имеющего порядок $\ln \tau F''/k^2$. Итак, интегральное уравнение будет иметь вид

$$2\pi \frac{\partial F}{\partial \tau} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 A(F - F') \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (9)$$

Решение (9) следует искать в виде разложения по функциям Бесселя:

$$F = \int_0^\infty c(\tau, \xi) J_0\left(\xi \frac{\theta}{2}\right) \xi d\xi \quad (10)$$

Тогда F легко может быть преобразовано с помощью известной теоремы сложения аргументов для функций Бесселя:

$$J_0\left(\xi \frac{\theta}{2}\right) = J_0\left(\xi \frac{\theta}{2}\right) J_0(\xi \lambda) + 2 \sum_{n=1}^\infty J_n\left(\xi \frac{\theta}{2}\right) J_n(\xi \lambda) \cos n\varphi \quad (11)$$

При интегрировании по φ входящая в (11) сумма исчезает. Сравнивая коэффициенты при $J_0(\xi \frac{\theta}{2})$, приходим к дифференциальному уравнению для $c(\tau, \xi)$:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -c \int_0^\infty A [1 - J_0(\xi \lambda)] \frac{d\lambda}{\lambda} \equiv -g(\xi) c \quad (12)$$

Функция F , удовлетворяющая граничному условию (5), должна выглядеть так:

$$F = \int_0^\infty e^{-g\tau} J_0\left(\xi \frac{\theta}{2}\right) \xi d\xi \quad (13)$$

Задача сводится, следовательно, к вычислению g . Подставляя вместо A его выражение и меняя порядок интегрирования, легко

приводим g к виду

$$g = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) f(y) dx dy \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \sin k\lambda x \sin k\lambda y [1 - J_0(\xi\lambda)]. \quad (14)$$

Внутренний интеграл удобно выразить с помощью интегрального представления J_0 :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u \sin \varphi) d\varphi, \quad (15)$$

и формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{a^2}. \quad (16)$$

В правой части (16) стоит $\ln(b^2/a^2)$ потому, что левая часть является четной функцией относительно a и b . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin k\lambda x \sin k\lambda y [1 - J_0(\xi\lambda)] \frac{d\lambda}{\lambda} = \\ = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\left[1 - \frac{\xi^2 \sin^2 \varphi}{k^2 (x-y)^2} \right]^2 \left[1 - \frac{\xi^2 \sin^2 \varphi}{k^2 (x+y)^2} \right]^{-2} \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Для дальнейших вычислений удобно искать сначала производную $dg/d\xi$, помня, что при $\xi=0$ и $g=0$. При дифференцировании (17) по параметру ξ мы не должны обращать внимания на то, что величина, стоящая со знаком логарифма, может обращаться в нуль, так как она входит в квадрат, а $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln x^2 = \frac{1}{x}$ при всех действительных значениях x . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{4\pi\xi} \int_0^{\infty} f(x) dx \int_0^{\infty} f(y) dy \int_0^{2\pi} \left[\left(1 - \frac{\xi^2 \sin^2 \varphi}{k^2 (x+y)^2} \right)^{-1} - \right. \\ \left. - \left[1 - \frac{\xi^2 \sin^2 \varphi}{k^2 (x-y)^2} \right]^{-1} \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Внутренний интеграл следует понимать как главное значение, если $\xi^2/k^2(x+y)^2 > 1$ или если $\xi^2/k^2(x-y)^2 > 1$. Это главное значение равно нулю, в чем нетрудно убедиться непосредственным вычислением.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{2\xi} \int_0^{\infty} f(x) dx \int_{x+y > \xi/k}^{\infty} f(y) dy \left(\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2(x+y)^2}} \right)^{-1} - \\ - \frac{1}{2\xi} \int_0^{\infty} f(x) dx \int_{|x-y| > \xi/k}^{\infty} f(y) dy \left(\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2(x-y)^2}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее удобно перейти к переменным $x+y=a$ и $x-y=b$ и ввести обозначение $\varepsilon = \xi/k$. После этого (19) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{da}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}}} \int_0^a db f\left(\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a-b}{2}\right) - \\ - \frac{1}{2\xi} \int_{\varepsilon}^{\infty} da \int_{\varepsilon}^a \frac{db}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2}}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2\xi \frac{dg}{d\xi} = -\varepsilon^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(a) da}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}} + \int_{\varepsilon}^{\infty} da \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} \int_0^a b db \frac{\partial}{\partial b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a-b}{2}\right) - \\ - \int_{\varepsilon}^{\infty} da \int_{\varepsilon}^a db \sqrt{b^2 - \varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Интеграл, входящий в первое слагаемое, преобразуется по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(a) da}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}} = -\varepsilon^2 \ln(a + \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}) f(a) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \\ + \varepsilon^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} f'(a) \ln(a + \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}) da \cong \\ \cong \varepsilon^2 \left(\ln \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^{\infty} f'(a) \ln ada \right) = \varepsilon^2 \left(\ln \frac{\varepsilon}{2} + 0,489 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом отброшены члены порядка $\varepsilon^{1/2}$. Связанная с этим ошибка будет оценена ниже. С той же точностью могут быть вычислены второе и третье слагаемые (21). После довольно длинных

вычислений они выглядят так:

$$-\frac{e^2}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x)f(y) + f'(x)f(y)}{x+y} + \frac{f(x)f'(y) - f'(x)f(y)}{x-y} dx dy = 0,906e^2. \quad (23)$$

Вспомниная теперь, что $\varepsilon = \xi/k$, найдем $g(\xi)$:

$$g(\xi) = -\frac{\xi^2}{k^2} \ln \frac{1,21\xi}{k}. \quad (24)$$

Функцию распределения можно теперь писать так:

$$F = \int_0^{\xi \leq k} \left(\frac{1,21\xi}{k} \right)^{1/3^2/4k^2} J_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \xi d\xi. \quad (25)$$

Введем переменную интегрирования $\xi/2k = x$, тогда F будет иметь следующий вид:

$$F = \frac{4k^2}{\tau} \int_0^{\frac{x \leq 2\sqrt{\tau}}{2}} e^{-x^2 \ln \frac{2,42x}{\sqrt{\tau}}} J_0 \left(x \frac{\phi}{\sqrt{\tau}} \right) x dx. \quad (26)$$

Величина ϕ входит в (26) через аргумент

$$\phi' = \phi \frac{p\sigma}{2\sqrt{\pi Z e^2 (N\tau)^{1/2}}}. \quad (27)$$

определяющий таким образом универсальную единицу угла в задаче о многократном рассеянии. Кроме этого аргумента, функция распределения зависит от параметра τ , представляющего полное число столкновений, претерпеваемых электроном внутри пластинки. Если, не меняя обозначения, ввести величину M Вильямса [2а]

$$M = 2,03 \frac{h^2}{m^2 v^2} \frac{Z^{1/2} N \sigma}{a}, \quad N = 6,02 \cdot 10^{23}, \quad (28)$$

где σ — поверхностная плотность рассеивателя, a — его атомный вес, получим под логарифмом (26) $\sqrt{1,64 M}$. Для удобства сравнения с Вильямсом мы будем в дальнейшем также пользоваться величиной M . Численное интегрирование показало, что (26) вплоть до значений $\phi' \sim 2$ хорошо воспроизводится распределением Гаусса. Полуширина (точнее, $1/e$ -ширина) его определяется как функция τ . Если бы (26) содержало только $\ln M$ в показателе, полуширина определялась бы так:

$$\alpha_0 = \sqrt{\ln M}, \quad (29)$$

в единицах, даваемых уравнением (27).

На самом деле, под логарифмом стоит также x , и это несколько меняет истинную полуширину α . Ес относение к α_0 само является некоторой весьма медленно изменяющейся функцией M , которая может быть изображена следующей таблицей, найденной в результате численного интегрирования (26):

$M=16$	28	56	250	1000	5000	100 000
$\alpha/\alpha_0=0,84$	0,95	1,00	1,04	1,06	1,06	1,06

Значение $M=100 000$ может встретиться только у весьма жестких космических частиц, так как во всех остальных случаях α окажется сравнимым с λ и рассеяние — диффузным. Сравнение с экспериментом удобно произвести в относительных единицах так, чтобы выразить теоретическое значение полуширины в процентах наблюдаемого значения; параллельно приводятся результаты теории Вильямса, отличный от нашего на 20—30% в сторону превышения.

Таблица 2

Элемент	Поверхностная плотность	M	Полуширина (%)		Автор
			Теория Вильямса	Настоящая работа	
Pb	0,148	450	178	141	[9a]
Pb	0,074	225	138	114	[9b]
C	0,68	1120	163	131	[9c]
Al	0,0067	15	91	54	[9d]
Al	0,0266	58	104	79	[7]
Pb	0,0079	25	111	78	[7]
Li	0,096	130	100	79	[8]
Pb	0,177	540	122	105	[4b]
C	1,28	2200	120	103	[4b]
Pb	0,076	230	117	98	[4a]
Cu	0,174	455	114	96	[4a]
Fe	0,173	435	107	90	[4a]
Cd	0,111	318	115	98	[4a]

Первые три величины относятся к более старым опытам: здесь и Вильямс и настоящая работа дают превышение над экспериментом, причем последняя имеет превышение, в полонину меньше. Четвертая величина лучше согласуется с теорией Вильямса. То же относится к следующим трем величинам, полученным Латышевым с сотрудниками. Следует отметить, однако, что несогласие настоящей теории с Латышевым одинаково для всех элементов, между тем как теория Вильямса дает превышение для тяжелых элементов. Наконец, последние шесть величин в целом лучше согласуются с настоящей работой. Поэтому мож-

но еще говорить о некотором несогласии экспериментальных данных различных авторов между собой.

Выражение (26) не сводится к функции Гаусса в общем виде. Оно должно перейти в нее только при $\tau \rightarrow \infty$. Но, так как τ стоит под логарифмом, даже при значении $\tau \sim 10^5$ ошибка, имеющая порядок $\ln \ln \sqrt{\tau} / \ln \sqrt{\tau}$, составит 25%. Практически, однако, (26) может быть заменено распределением Гаусса вплоть до углов, близких к полуширине распределения. Величина квадрата полуширины в радианах дается такой формулой:

$$\theta^2 = \frac{4\pi Z^2 e^4 N \sigma}{r^2 v^2 a} \ln \left(2,03 \frac{Z^{1/2} h^2 N \sigma}{m^2 v^2 a} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \right), \quad (30)$$

причем α/α_0 следует брать по табл. I.

Наряду с многократным рассеянием электронов можно поставить также вопрос о многократном упругом рассеянии быстрых α -частиц, которое может иметь место в достаточно тонких слоях вещества. Общая теория здесь совершенно такая же, как для электронов, разница только в том, что рассеяние α -частиц надо описывать не в борновском, а в классическом приближении, так как для них $2Ze^2/hv$ обычно гораздо больше единицы (см. [2]). Наименьший угол отклонения θ' , с которым здесь приходится иметь дело, определяется из того условия, что прицельное расстояние удара должно быть сравнимо с томас-фермиевским радиусом атома. Вильямс определяет наименьший угол отклонения α -частиц как $\theta' = 3,8 Ze^2/mv^2 a_0$, где a_0 — радиус атома, $z=2$. Вплоть до этого значения угла можно считать, что рассеяние имеет резерфордский характер, а затем обращается в нуль. Поэтому величина g , аналогичная (14), имеет для α -частиц такой вид:

$$g = \frac{2\pi Z^2 e^4 N \sigma}{m^2 v^2 a} \int_{\theta' \min}^{\infty} [1 - J_0(\xi \lambda)] \frac{d\xi}{\xi}. \quad (31)$$

Интеграл, входящий в (31), сходится на верхнем пределе, в отличие от среднего квадрата угла отклонения, который расходится. Эффективный верхний предел (31) есть величина Λ , приведенная при замене (6) на (9). Формула (31) вычисляется без затруднений путем однократного интегрирования по частям, следующей заменой J_1 по формуле Пуассона

$$J_1(u) = \frac{u}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi,$$

и разложения интегрального косинуса. В результате

$$g = \frac{\pi Z^2 e^4 N \sigma}{4m^2 v^2 a} \left(\ln \frac{\xi \theta' \Lambda}{2} - 1 \right) \quad (32)$$

($\ln \gamma = 0,577$). Функция распределения α -частиц по вылете из пластины имеет вид такой же, как (26). Однако величина M равна в этом случае

$$M = 0,61 \frac{h^2 N \sigma}{m^2 e^4 a}. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь возможные источники погрешности. Прежде всего погрешность может заключаться в применении борновского приближения для W (2). Известно, что неточность этого приближения имеет порядок величины Ze^2/hv , что составляет для тяжелых элементов приблизительно 0,6. Она не относится, однако, как показал Вильямс, к главному члену W , тому, который взят в формуле (2). Отклонение от закона распределения Резерфорда дается по порядку величины формулой Мотта, которую можно записать так:

$$W' = \frac{Z^2 e^4 N \sigma}{4p^2 v^2 a} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\pi Z e^2 v^2}{hc c^2} \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Если удерживать в ней, кроме первого слагаемого, еще и третье, оно прибавит к g величину порядка ξ/k^2 . Иными словами, погрешность, связанная с этим членом, даст в показателе (32) поправку $\sqrt{\tau}x/k$, которая не превосходит 1%, причем, как можно убедиться путем вычислений, в сторону уменьшения полуширины распределения. Любопытно отметить, что, если бы главного члена Резерфорда не было вовсе, закон многократного рассеяния при углах, больших, чем τ/k^2 , воспроизводил бы закон однократного рассеяния т. е. давал $1/\theta^2$. Суммарное отклонение электрона совсем не подчинялось бы распределению Гаусса. Приближение Борна в форме (2) становится несправедливым для малых углов тогда, когда третий член, пропорциональный $1/\theta^2$, становится сравним с первым, который, начиная с $\theta \sim 1/k$ и меньше, сохраняет один и тот же порядок величины. Следовательно, третий член становится близким к первому при $\theta \sim k^{-1/2}$; здесь, очевидно, уже нельзя учитывать экранирование, пользуясь приближением Борна. Но при вычислении g столь малый интервал углов приводит к неточности всего лишь относительного порядка $k^{-1/2}$. Отброшенные члены в выражении (8) также не дают ничего пропорционального ξ^2 в значении g . Далее, члены, пропорциональные $e^{1/2}$, опущенные в формулах (22) и (23), приводят к ошибке порядка $\tau^{-1/2}$. Заметим, что если представить решение в виде ряда, разложенного по полиномам Лежандра, как это делают Гаудсмит и Саундерсон, то оценить неточность, связанную с применением приближения Борна, весьма затруднительно.

Вилер [6] предполагает, что дифракция электронов в кристаллическом веществе может существовать в виде ориентированной на величину W , так как кристалл, ориентированный не под уг-

лом Брега, не рассеивает электронов вовсе. В микрокристаллическом веществе распределение электронов по углам должно иметь характер дебаеграммы, для которой единица угла приблизительно в 20 раз меньше, чем $1/k$. На величине полного эффективного сечения это должно сказаться существенным образом, так как для вычисления полного сечения важен именно интервал углов $1/k$, на котором помещается меньше 10 колец Дебая. Возражение Вильямса, согласно которому неупругое рассеяние должно выводить электроны из когерентности, не убедительно, так как при возрастании числа рассеивающих центров упругое и неупругое рассеяния растут параллельно, по крайней мере, до тех пор, пока можно пользоваться теорией возмущений при вычислениях эффективного сечения. На величине g , однако, дифракция электронов сказывается значительно слабее, так как усреднение $[1 - J_0(\xi\lambda)] = \xi^2\lambda^2/4$ совершается по интервалу углов, значительно большему чем $1/k$, вследствие логарифмической расходимости λ^2 на верхнем пределе усреднения. Главной причиной поправки, происходящей от дифракции, является различный множитель повторяемости колец p . Так, в случае гранецентрированной решетки отражения от граней с тремя различными индексами, неравными нулю, имеют множитель повторяемости $p=48$, тогда как, если два индекса одинаковы или если один из трех индексов равен нулю, $p=24$. При большом номере кольца n число колец между n и $n+dn$ растет пропорционально $n^2 dn$ при $p=48$ и пропорционально всего лишь $n dn$ при $p=24$. Для еще меньших p число колец пропорционально dn . Ошибка, вносимая кольцами с $p=24$, оказывается примерно такой же, как от члена с $1/\theta^3$, и поэтому тоже весьма незначительна.

Представляет интерес определить, при каких углах функция распределения приобретает характер, близкий к тому, который она должна иметь в элементарном акте. Для этого следует разделить асимптотический характер (13) при больших θ . Это удобно сделать, пользуясь средними значениями $\bar{\theta}^2$ и $\bar{\theta}^4$, которые из (13) весьма удобно определяются по интегральным формулам для функций Бесселя. В самом деле, если F дается формулой (13), то

$$\bar{\theta}^2 = \int_0^\infty \theta^2 F d\theta = - \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d}{d\xi} e^{-g\xi} \right)_{\xi=0} = \tau \int_0^\infty A \lambda d\lambda, \quad (34)$$

$$\bar{\theta}^4 = \int_0^\infty \theta^4 F d\theta = \left[\left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d}{d\xi} \right)^2 e^{-g\xi} \right]_{\xi=0} = \tau \int_0^\infty A \lambda^3 d\lambda + 2 \left[\tau \int_0^\infty A \lambda d\lambda \right]^2.$$

Интегралы, входящие в (34), расходятся, причем по характеру расходимости можно судить о поведении F при больших θ . Из вида $\bar{\theta}^2$ и $\bar{\theta}^4$ следует, что F при самых больших углах идет по

формуле Резерфорда. Второе слагаемое в $\bar{\theta}^4$ соответствует члену с меньшей степенью расходимости. Поэтому асимптотический характер F следующий:

$$F = \frac{Rt}{\lambda^4} + \frac{4(Rt)^2}{\lambda^6} \ln \frac{\lambda}{\lambda_{\min}}, \quad (35)$$

где $\lambda_{\min} = 1/k$, а R — коэффициент в формуле Резерфорда. Распределение Резерфорда теряет силу со стороны малых углов, когда оба члена (35) становятся одного порядка величины. Отношение $y = \lambda/\lambda_{\min}$ может быть найдено из уравнения (36):

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{\ln y}{y}. \quad (36)$$

Это дает значение λ приблизительно вдвое больше, чем полуширина кривой распределения. Во всяком случае, нет никаких оснований полагать F равным сумме двух кривых — Гаусса и Резерфорда, как это делает Вильямс. Элементарный закон рассеяния электронов по выходе из пластинки может быть легко отделен от многократного чисто экспериментально, по значению полуширины кривой распределения.

Соображениями о роли дифракции электронов я обязан весьма интересной дискуссии с проф. С. И. Пекаром, которому пишу искреннюю благодарность.

Л и т е р а т у р а

1. Bothe, Z. Phys., 1939, 54, 101.
2. E. Williams, Proc. Roy. Soc., 1939, A169, 531; Phys. Rev., 1940, 58, 292.
3. S. Goudsmith, J. L. Sanderson, Phys. Rev., 1940, 58, 37; 1940, 57, 24.
4. N. Oleson, K. T. Chao, H. Crane, Phys. Rev., 1941, 60, 378; C. Sheppard, Phys. Rev., 1942, 62, 313.
5. Bethe, Rose, Smith, Proc. Amer. Philos. Soc., 1938, 78, 572.
6. J. Wheeler, Phys. Rev., 1940, 57, 352 A.
7. L. A. Kulchitsky, G. D. Latyshev, J. Phys., 1941, 5, 249.
8. А. И. Андреевский, Л. А. Кульчицкий, Г. Д. Латышев, ЖЭТФ, 1942, 12, вып. 1—2, 16.
9. а) W. Fowler, Phys. Rev., 1938, 54, 773.
 б) N. Oleson, K. Chao, J. Halpern, H. Crane, Phys. Rev., 1939, 56, 482.
 в) C. Sheppard, W. Fowler, Phys. Rev., 1939, 56, 849.
 д) H. Crane, M. Slawsky, Phys. Rev., 1939, 56, 1203.

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ТОНКИХ ПУЧКОВ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ *

Когда быстрые электроны, летящие в виде тонкого пучка, претерпевают многократное рассеяние, диаметр пучка увеличивается по мере углубления в толщу вещества, приблизительно следуя закону свободной диффузии в двух измерениях. Соответствующий коэффициент диффузии был впервые определен Ферми [1]. При этом он пользовался дифференциальным уравнением многократного рассеяния, имеющим, как показано в работе автора [2] [в дальнейшем цитируется как (A)], логарифмическую точность.

В настоящей работе находится закон пространственного расширения пучка при многократном рассеянии. Результаты очень напоминают распределение электронов по углам, найденное в (A).

Пусть пучок электронов падает в направлении оси z на тонкую пластинку, расположенную в плоскости x, y . Функция распределения электронов зависит в этом случае от координат точки в пластинке, т. е. x, y, z , и от углов, образуемых компонентами скорости с осью z . Если пластинка достаточно тонкая, эти углы можно считать малыми и положить $v_z = v$, $v_x = \xi v$, $v_y = \eta v$. Интеграл по столкновениям, входящий в первую часть кинетического уравнения, будем писать с той же точностью, что и в (A), уравнение (9). Единицы длины примем также совпадающие с (A), т. е. $z = \tau$, а для других координат сохраним обозначения x, y в новых единицах (единица длины $= 2^{1/2} m^2 v^2 / 3^{1/2} \pi^{1/2} z^{1/2} h^2 N$, где N — плотность атомов рассеивателя, h — дираковский квант действия).

Вероятность столкновения на единице длины равна в наших обозначениях

$$W [(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2] = \frac{1}{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2} \left[\int_0^\infty \varphi(r) \sin \left(\frac{kr}{2} \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2} \right) dr \right]^2, \quad (1)$$

где $\varphi(r)$ — потенциал Томаса — Ферми, k — импульс в соответствующих единицах [см. (A)]. Здесь ξ', η' — углы, определяющие направление скорости после столкновения. Существование, что W зависит только от абсолютной величины угла столкновения. Кинетическое уравнение имеет следующий вид:

* ЖЭТФ, 1947, 17, вып. 12.

$$2\pi \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \right) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W \{ F(x, y, \xi, \eta) - F(x, y, \xi', \eta') \} d\xi' d\eta'. \quad (2)$$

Введем другую, усредненную функцию распределения, которая определяется так:

$$f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(x, y, \xi; \eta). \quad (3)$$

Производя это усреднение над уравнением (2) и пользуясь тем, что на бесконечности F равно нулю, имеем

$$2\pi \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} \right) = - \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi - \xi') [f(x, \xi) - f(x, \xi')] d\xi', \quad (4)$$

где

$$\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W d\eta, \quad (5)$$

ω введено вместо W . Пользуясь (1), приводим ω к такому виду:

$$\omega = 2\pi \int_0^\infty \varphi(r) dr \int_0^r \varphi(r') dr' \int_{\frac{k}{2}(r-r')}^{\frac{k}{2}(r+r')} J_0 [(\xi - \xi') s] ds, \quad (6)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Будем теперь искать неизвестную функцию f в виде интеграла Фурье:

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} \psi(u, \tau, x) du. \quad (7)$$

Тогда слагаемое $\xi \frac{\partial f}{\partial x}$ в левой части преобразуется так:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial u} du, \quad (8)$$

а правая часть принимает вид

$$- \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} \psi du \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \omega(\xi') (1 - e^{i u \xi'}) ; \quad \xi'' \equiv \xi - \xi'. \quad (9)$$

Пользуясь известным разрывным интегралом для бесселевой функции

$$\int_0^{\infty} e^{iux} J_0(s\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s^2 - u^2}}, & s > |u|, \\ 0, & s < |u|, \end{cases}$$

можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\xi'') (1 - e^{iux}) d\xi'' = 2\pi g(u), \quad (10)$$

где $g(u)$ — функция, найденная в (A), (24). Именно:

$$g(u) = \frac{u^2}{4k^2} \ln 2,42 \frac{u}{k}. \quad (11)$$

Таким образом, интегральное кинетическое уравнение сводится к следующему дифференциальному:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial x} = -g(u) \psi. \quad (12)$$

Предполагая падающий пучок бесконечно тонким, мы должны полагать, что при

$$\tau = 0, \quad \psi(u, x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x), \quad (13)$$

где $\delta(x)$ — известная δ -функция. Тогда при $\tau = 0$

$$f(0, \xi, x) = \delta(x) \delta(\xi). \quad (14)$$

Пользуясь (12), находим f в таком виде:

$$f(\tau, \xi, x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \exp\left(i\mu x + iu\xi + \frac{1}{\mu} \int_{\mu+\tau\xi}^u g(u) du\right). \quad (15)$$

Интегрируя f по x , приведем его к форме

$$f(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau, \xi, x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu > -k}^{\mu < k} \exp\{i\mu\xi - g(u)\tau\} d\mu. \quad (16)$$

Отсюда легко снова перейти к распределению по углам $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, а именно:

$$F(\tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mu < k} e^{-g(u)\tau} J_0(u\theta) u du, \quad (17)$$

которое было получено в (A), (25).

Интересно произвести сопоставление (16) и (17). Распределение (16) должно получиться, если рассеянные электроны ре-

гистрирует достаточно длинный счетчик, в который попадают все электроны, отклонившиеся на данный угол от плоскости $x=0$. (16) можно назвать распределением по плоским углам. (17) является распределением по телесным углам, так как оно дает вероятность отклонения на угол θ от оси $x=0$, $y=0$. Его зарегистрирует счетчик, весьма короткий по сравнению с диаметром рассеянного пучка. Распределение (17) было подробно рассмотрено в (A). Если ввести параметр M , пропорциональный числу столкновений, претерпеваемых электроном в пластинке, то (17) и (16) оказываются функциями от $\ln M$. M определяется формулой [см. (A), (28)]¹

$$M = 2,03 \frac{\hbar^2}{m^2 v^3} \frac{Z^{1/2} N \sigma}{a}.$$

Ни (16), ни (17) не сводятся к распределению Гаусса, но весьма на него похожи, если вычислять их численно. При этом отклонение полуширины к $\sqrt{\ln M}$ (точнее, $1/e$ -ширины) оказывается функцией M . Если бы $g(u)$ не содержало u под логарифмом, полуширина распределения была бы строго пропорциональна $\sqrt{\ln M}$. Однако отличие истинных распределений от гауссова при данном M ясно сказывается при сравнении полуширин (16) и (17). Как известно, гауссово распределение по углам θ является произведением таких же распределений по углам ξ и η , так как $\theta^2 = \xi^2 + \eta^2$, и имеет одинаковую с ними полуширину. Численное определение полуширин (16) и (17) дает иной результат. Если ввести полуширину (17) α в единицах $\alpha_0 = \sqrt{\ln M}$ и в тех же единицах α' для (16), то получается такая таблица:

M	46	28	56	250	1000	5000	100 000
α/α_0	0,84	0,95	1,00	1,04	1,06	1,06	1,06
α'/α_0	1,00	1,05	1,075	1,08	1,08	1,08	1,08

Из таблицы видно, что результирующие отклонения электрона по углам ξ и η нельзя считать независимыми, особенно при малом числе столкновений.

Аналогично (16) можно определить и распределение плотности пучка по координате x . А именно:

$$\begin{aligned} \chi(x, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\tau, \xi, x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mu < k/\tau} \exp\left(i\mu x + \frac{\mu^2 \tau^3}{3k^2} \ln 1,65 \frac{\mu \tau}{k}\right) d\mu. \end{aligned} \quad (18)$$

¹ $N = 6,02 \cdot 10^{23}$, σ — поверхностная плотность рассеивателя в g/cm^2 , a — атомный вес рассеивателя.

Вид (18) вполне аналогичен (16), и от него тем же способом легко перейти к распределению по радиусу $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вводя в (18) переменную интегрирования $v = \frac{\mu\tau}{k\sqrt{3}}$, запишем его так:

$$\chi(\tau, x) = \frac{k\sqrt{3}}{2\pi\tau^{3/2}} \int_0^{v < \sqrt{\tau}/3} \exp\left(\frac{xk\sqrt{3}}{\tau^{3/2}}v + v^2 \ln 2,85 \frac{v}{\sqrt{\tau}}\right) dv. \quad (19)$$

По виду $\chi(\tau, x)$ не отличается от $f(\tau, \xi)$. Для вычисления ширины χ следует ввести величину M' , аналогичную M , которая связана с ней равенством

$$M' = 0,72 M.$$

Результат (19) так же отличается от полученного Ферми, как угловое распределение (17) от обычного гауссового. Но следует заметить, что при выводе (17) и (19) не учитывались конечные размеры ядра, которые сказываются и на рассеянии на малые углы, когда энергия электронов достаточно велика (например, для космических частиц).

Л и т е р а т у р а

1. В. Rossi, *K. Greisen. Rev. Mod. Phys.*, 1941, 13, 4.
2. А. С. Компанец. ЖЭТФ, 1945, 15, вып. 6, 235; см. наст. изд., стр. 188.

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ТЯЖЕЛОМ ВЕЩЕСТВЕ *

Изучение элементарных процессов, происходящих с быстрыми электронами, предвзывает к данным эксперимента непрерывное требование «большой статистики», т. е. очень большого числа измерений определенного эффекта в строго определенных условиях. Этому проще всего удовлетворить, пропуская монохроматический пучок электронов или γ -квантов через вещество в конденсированном состоянии, например в виде пластинки. Тогда вероятность элементарного процесса, происходящего с электроном в атоме или в ядре атома, будет несравнимо большей, чем в том случае, если вещество изучается в камере Вильсона в парособразном состоянии. Преимущество камеры Вильсона заключается в наглядности результатов, но, чтобы получить из них

* «Труды Физико-технического ин-та», т. 1. Ташкент, 1947.

количественные выводы, экспериментатору часто приходится проследить суммарно многие километры треков.

Слабой стороной эксперимента с пластинками является трудность исключения вторичных эффектов из получившихся данных. Если речь идет о тяжелом веществе, то важнейшим из таких вторичных эффектов является рассеяние электронов на атомах, упругое и неупругое. При этом упругое рассеяние, растущее, как квадрат атомного номера рассеивателя, в тяжелом веществе будет преобладать. Как известно, упругое (резерфордское) рассеяние в большинстве случаев происходит на весьма небольшой угол, но такие отклонения на малый угол могут накопляться, и в конце концов электроны, вошедшие в пластинку или выбитые из нее γ -квантами, получат угловое распределение, весьма отличное от того, какое должно было бы установиться при действии одного только изучаемого элементарного процесса. Поэтому представляет интерес построение количественной теории такого многократного упругого рассеяния быстрых электронов на малые углы: в одних случаях для того, чтобы оценить связанный с ним «вторичный» эффект и исключить его, в других, быть может, и для того, чтобы включить его в рассматриваемый первичный эффект и предсказать эффект суммарный [1]. Кроме того, имеющиеся в литературе экспериментальные данные о многократном рассеянии частью противоречивы, частью превосходят по величине результаты того, что можно заранее предполагать, и поэтому представляет интерес возможно точная количественная теория явления.

Прежде чем установить уравнения для многократного рассеяния быстрых электронов, следует установить вероятность рассеяния электрона на определенном угле в элементарном акте столкновения с атомным ядром тяжелого элемента. Как известно, для тяжелых элементов, у которых $Z/137$ сравнимо с единицей (Z — атомный номер), замкнутой формулы для эффективного поперечника рассеяния на произвольный угол не существует, но для интересующего нас рассеяния на малые углы, которое является преобладающим, сохраняет силу обычная формула Резерфорда, причем входящая в нее масса электрона релятивистски зависит от скорости. Для вероятности рассеяния электрона на угол Θ на l см пути получается следующее выражение:

$$W(\Theta) d\Omega = \frac{N}{4} \frac{Z^2 e^4}{m^2 v^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}, \quad (1)$$

где N — плотность атомов рассеивателя.

Так как ядро считается неподвижным, входящая в уравнение (1) скорость электрона v при столкновении не меняется. При малых Θ выражение (1) расходится. Это произошло потому, что в него не введен атомформфактор, который учитывает экрани-

рование заряда ядра атомными электронами при больших классических параметрах столкновения.

Более точная формула получается при определенных допущениях о распределении электронной плотности в атоме. Для тяжелых элементов принято для этого пользоваться распределением Томаса — Ферми, хорошо оправдавшим себя в различных задачах о столкновениях. Потенциал ядра, действующий на электрон, берется в этом случае таким:

$$X = \mu^{1/2} (Ze)^{1/2} f(x)/x, \quad (2)$$

$$x = \mu^{1/2} (Ze)^{1/2} r, \quad (3)$$

$$\mu = \frac{2^{1/2} \pi^2 e^{1/2} m^{3/2}}{3 h^3}, \quad (4)$$

а функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f^{3/2}}{Vx}. \quad (5)$$

Тогда введенная в формуле (1) плотность вероятности $W(\Theta)$ получит вид

$$W(\Theta) d\Omega = \frac{2NZe^4}{v^2(1-\cos\Theta)} \left(\int_0^\infty f(x) \sin \left[\frac{pr}{h} \sqrt{2(1-\cos\Theta)} \right] dr \right)^2 d\Omega, \quad (6)$$

где p — импульс электрона.

Удобно далее ввести обозначения:

$$K = \frac{V\sqrt{2}}{(Ze)^{1/2} \mu^{1/2}} \frac{p}{h} = \frac{3^{1/2} V\sqrt{2}}{2^{1/2} \pi^{1/2}} \frac{Ev}{c^2} \frac{h}{Z^{1/2} m e^2}. \quad (6)$$

Здесь v — скорость сталкивающихся электронов, практически равная c .

Тогда

$$W(\Theta) d\Omega = \frac{3^{1/2}}{2^{3/2} \pi^{1/2}} \frac{Z^{1/2} h^2}{m^2 v^2} \left(\int_0^\infty f(x) \sin [Kx \sqrt{1-\cos\Theta}] dx \right)^2 \frac{d\Omega}{1-\cos\Theta} \equiv \frac{B}{1-\cos\Theta} \left(\int_0^\infty f(x) \sin [Kx \sqrt{1-\cos\Theta}] dx \right)^2 d\Omega. \quad (7)$$

Выражение (1) часто обрезают со стороны Θ больших, следуя Вильямсу [2]. Этим исключается, как принято говорить, однократное рассеяние на больших углах. На самом деле решение интегрального уравнения многократного рассеяния содержит в себе и эти будто бы «единичные» акты. При достаточно малой

толщине пластинки решение переходит в распределение типа (1) или — для произвольных углов — в формулу, релятивистски более точную, чем (1). При больших толщинах не имеет никакого смысла разделять электроны, вылетающие из пластинки в обратном направлении, на рассеянные многократно, «накопившие» большой угол, и на «завернувшие» сразу вследствие столкновения «в лоб». Первых будет тем относительно больше, чем толще пластинка, но провести это разделение можно только качественно. Тем более физически невозможно установить «биографию» рассеянного электрона. Употребляемая иногда формула Вильямса носит поэтому в лучшем случае интерполяционный характер и содержит степень произвола почти того же порядка, что и уточнение результатов, на которое она претендует. При этом произвол связан с употреблением качественного критерия Вентцеля для угла, рассеяние на который «однократно».

Если пучок электронов падает на пластинку нормально к ее поверхности, функция распределения электронов по углам в данной точке внутри пластинки может зависеть только от одной пространственной координаты — расстояния точки от поверхности пластинки.

Функция распределения за единицу времени выразится как

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi} v \cos \vartheta, \quad (8)$$

где ϑ — угол между направлением скорости электрона и нормалью к пластинке (внутренней в точке падения). Изменение функции $F(\vartheta)$ равно разности между числом электронов, полученных вследствие столкновения компоненту скорости $v_i = v \cos \vartheta$, и числом электронов, изменивших это значение v_i на любое другое, что можно записать в виде интегрального уравнения

$$V \frac{\partial F}{\partial \xi} \cos \vartheta = \int v W(\Theta) \{F(\vartheta') - F(\vartheta)\} d\Omega, \quad (9)$$

где $\cos \vartheta' = \cos \vartheta \cos \Theta + \sin \vartheta \sin \Theta \cos \varphi$; φ — азимут.

Коэффициент $\cos \vartheta$ в левой части уравнения при малых углах рассеяния близок к единице. Его можно принять равным единице при достаточно тонких пластинках. Ошибка, которая при этом допускается, тем меньше, чем меньше толщина пластинки, и по порядку величины сравнима с толщиной пластинки, умноженной на средний угол рассеяния на единице пути электрона. Числовая величина этой ошибки будет оценена ниже. Итак, мы запишем уравнение (9) как

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \int W(\Theta) \{F(\vartheta') - F(\vartheta)\} d\Omega. \quad (10)$$

В уравнении (10) легко разделить переменные (φ, θ) , пользуясь разложением $F(\theta, \xi)$ по полиномам Лежандра:

$$F(\theta, \xi) = \sum_n C_n(\xi) P_n(\cos \theta). \quad (11)$$

Тогда в выражении $F(\theta')$ следует воспользоваться теоремой сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos \theta') = \sum_{m=-n}^n P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \Theta) e^{im\varphi}. \quad (12)$$

При подстановке (12) в (10) все члены, содержащие $e^{im\varphi}$, пропадут при интегрировании по φ , если $m \neq 0$. Поэтому (10) получает вид (если перейти от $d\Omega'$ к $d\Omega_0$)

$$\sum_n \frac{\partial C_n}{\partial \xi} P_n(\cos \theta) = -2\pi \sum_n P_n(\cos \theta) C_n \int W(\Theta) \{1 - P_n(\cos \Theta)\} d\Omega,$$

или, сравнивая коэффициенты при одинаковых P_n , получим

$$C_n(\xi) = C_n(0) e^{-2\pi \int W(\Theta) \{1 - P_n(\cos \Theta)\} d\Omega}. \quad (13)$$

Интеграл, стоящий в показателе правой части (13), может быть вычислен, если воспользоваться выражением (7). При этом надо учесть то обстоятельство, что функция $f(x)$ задана только числовой таблицей. Поэтому интеграл не может быть вычислен точно, как функция K . Тем не менее при большом K (т. е. большой энергии электронов) его удается определить с точностью до членов порядка $1/\sqrt{K}$ по сравнению с $\ln K$ и с членом порядка единицы. До сих пор задача решалась таким образом, что опускался и этот последний член, что, несомненно, уступает точности последних экспериментов [3].

Обозначая $\cos \Theta$ буквой u , опуская пока что постоянные коэффициенты и меняя порядок интегрирования в формулах (7) и (13), запишем интересующий нас интеграл так:

$$\int_0^\infty f(x) dx \int_0^1 f(y) dy \int_{-1}^1 \frac{\sin Kx \sqrt{1-u} \sin Ky \sqrt{1-u}}{1-u} \{1 - P_n(u)\} du. \quad (14)$$

Полином $P_n(u)$ разложим в ряд по степеням $(1-u)$, ограничиваясь первым членом разложения. Дальнейшие члены после интегрирования имеют по отношению к нему порядок малости $1/K$. Тогда

$$P_n(u) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} (1-u). \quad (15)$$

Введя далее $\sqrt{1-u}$ в качестве новой переменной, придадим (14) вид

$$\frac{n(n+1)}{2} \frac{d}{dK} \frac{1}{K} \int_0^\infty f(x) dx \int_0^\infty f(y) dy \left[\frac{1 - \cos K(x-y)}{(x-y)^2} - \frac{1 - \cos K(x+y)}{(x+y)^2} \right]. \quad (16)$$

Интеграл, входящий в (16), может быть переписан еще так:

$$\int_0^\infty f(x) dx \int_0^\infty f(y) dy \left[\frac{1 - \cos K(x-y)}{x-y} + \frac{1 + \cos K(x+y)}{x+y} \right] + K \int_0^\infty f(x) dx \int_0^\infty f(y) dy \left[\frac{\sin K(x-y)}{x-y} + \frac{\sin K(x+y)}{x+y} \right]. \quad (17)$$

Займемся прежде всего первым из входящих в (17) интегралов. Пробразуя его по частям, мы приведем интегрирование по y к форме

$$-2 \frac{1 - \cos Kd}{x} - \int_0^\infty f'(y) \left[\frac{1 - \cos K(y-x)}{x-y} + \frac{1 + \cos K(x+y)}{x+y} \right], \quad (18)$$

причем подставлено $f(\infty) = 0$. Так как, далее, $f(0) = 1$, получим от первого члена (18)

$$2 \int_0^\infty f(x) \frac{1 - \cos Kx}{x} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -f(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_\varepsilon^\infty f'(x) \ln x dx - -f(\varepsilon) \int_{K\varepsilon}^\infty \frac{\cos x}{x} dx - \int_0^\infty f'(x) dx \int_0^\infty \frac{\cos z}{z} dz \right\}. \quad (19)$$

Во втором и четвертом интегралах заменим нижний предел интегрирования нулем, так как это не ведет к расходимостям. Далее, в первом и третьем интеграле положим $f(\varepsilon) = 1$. Воспользуемся далее равенством

$$\int_{K\varepsilon}^\infty \frac{\cos x}{x} dx = -\ln(K\varepsilon + C) + O(\varepsilon),$$

где C — постоянная Эйлера, равная 0,577. В результате первый и третий интегралы сведутся просто к $\ln(K+C)$. Покажем далее, что четвертый интеграл имеет порядок величины $1/\sqrt{K}$ и в принятом нами приближении может быть опущен. Для этого заменим в нем Kx буквой ζ и проинтегрируем его по частям. Будем

иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} \int_0^{\infty} f\left(\frac{z}{K}\right) d\zeta \int_0^{\infty} \frac{\cos Z}{Z} dZ = \\ & = -\frac{f(0)}{K} \int_0^{\infty} d\sigma \int_0^{\infty} \frac{\cos Z}{Z} dZ - \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^{\infty} f^2\left(\frac{z}{K}\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{\infty} \frac{\cos Z}{Z} dZ, \end{aligned} \quad (20)$$

причем использовано уравнение (5), которому удовлетворяет f . Первый из получившихся интегралов равен нулю. В самом деле, ему легко придать вид

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A d\sigma \int_0^{\infty} \frac{\cos Z}{Z} dZ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\sigma \int_0^{\infty} \frac{\cos Z}{Z} dZ + \int_0^{\sigma} dZ \cos Z \right] \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=A} = \\ &= -\sin A + \sin A + O\left(\frac{1}{A}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

где использовано асимптотическое поведение интегрального косинуса. Наконец, во втором интеграле правой части (20) можно заменить $f^{1/2}\left(\frac{z}{K}\right)$ единицей, так как это не ведет к расхождению и ошибка имеет порядок величины $1/K$, как это видно, если разложить по обратным степеням $1/K$ и ограничиться первым членом разложения. Именно, употребляя прием, аналогичный (21), и пользуясь формулами для интегралов Френеля, найдем его равным $\frac{2}{3} \sqrt{K}$. Следовательно, (19) сведется к виду

$$2 \left[\ln K + C - \int_0^{\infty} f(x) \ln x dx \right]. \quad (22)$$

Входящий в (22) интеграл находится численно по таблицам f . При f , меньшем 0,1, следует пользоваться разложением

$$f(x) = 1 - 1,589x + \frac{4}{3} x^{3/2} + \dots; \quad (23)$$

окончательно

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln x dx = 0,383. \quad (24)$$

Обратимся теперь к интегралу, входящему в формулу (18). Он распадается на два слагаемых:

$$\int_0^{\infty} f'(y) \left[\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} \right] dy - \int_0^{\infty} f'(y) \left[\frac{\cos K^2(x-y)}{x-y} + \frac{\cos K(x+y)}{x+y} \right] dy. \quad (25)$$

Путем некоторых вычислений удается произвести мажорацию (оценку верхнего предела величины) второго слагаемого (25), и оно оказывается по порядку величины не большим $1/\sqrt{K}$.

Первое слагаемое не зависит от K и содержит только универсальную функцию f . Пользуясь известным интегральным преобразованием Дирихле, нетрудно придать ему вид, в котором числитель и знаменатель при $x=y$ одновременно обращаются в нуль (26). Окончательно имеем для первого слагаемого (17) выражение

$$2 [\ln K + C - 0,383] - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx dy \left[\frac{f'(x)f(y) - f'(y)f(x)}{x-y} - \frac{f'(x)f(y) + f'(y)f(x)}{x+y} \right]. \quad (26)$$

Оба двойных интеграла также вычисляются численно; первый из них равен $-1,08$, второй $-1,99$. Поэтому (26) равно почти $2 \ln 0,8K$.

Второе слагаемое (17) вычисляется, если подставить его в (16) и выполнить дифференцирование по K . Тогда оно приобретает простой вид:

$$2 \left(\int_0^{\infty} f(x) \sin Kx dx \right)^2 = \frac{2}{K^2} \quad (27)$$

с ошибкой, не превышающей ту, которая допускалась выше. Окончательно (16) сведется к выражению

$$\frac{n(n+1)}{K^2} \ln(0,8K), \quad (28)$$

и разложение, которое мы имеем, получает вид

$$F(\xi, \cos \theta) = \sum_n C_n(0) \exp\left(-\frac{2\pi B}{K^2} n(n+1) \ln(0,8K)\xi\right) P_n(\cos \theta). \quad (29)$$

Если рассматривается очень тонкая пластинка, вероятность того, что электрон, пройдя в ней некоторый путь, будет выброшен в обратном направлении многочисленными актами столкновений, очень мала. Также мала вероятность однократного столкновения, сразу отклоняющего электрон на угол, больший 90° . Поэтому в случае рассеяния в тонкой пластинке предполагают, что все электроны, проходящие через ее переднюю поверхность, имеют распределение падающего пучка и, следовательно, назад не летит ничего. Считая падающий пучок параллельным, надо

полагать

$$F(0, \cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \delta(1 - \cos \vartheta), \quad (30)$$

где δ — дираковская δ -функция. Чтобы удовлетворить граничному условию (30), приравняем $C_n(0) = \frac{2n+1}{2}$. Поэтому функция распределения окончательно запишется так:

$$F = \sum_n \frac{2n+1}{2} e^{-n(n+1)\vartheta} P_n(\cos \vartheta), \quad (31)$$

где

$$t \equiv \frac{2\pi B}{K^2} \ln(0,8K) \xi. \quad (32)$$

Выясним теперь точность, с которой распределение (31) может быть заменено гауссовским распределением при малых углах. Для этого вычислим средние значения величин

$$(1 - \cos \vartheta)^m \cong \left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)^m \quad (33)$$

при достаточно малых ϑ . Обозначим для краткости $\cos \vartheta = u$. Тогда выражению (31) можно придать вид двойного ряда, если воспользоваться разложением экспоненциальной функции и дифференциальным уравнением для полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} F(t, u) &= \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t^K}{K!}\right)^K \sum_n [n(n+1)]^K \frac{2n+1}{n} P_n(u) = \\ &= \sum_K \frac{t^K}{K!} \sum_n \frac{2n+1}{2} \left[\frac{d}{du}(1-u^2)\right]^K \frac{d}{du} P_n(u). \end{aligned} \quad (34)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} (1-u)^m &= \sum_K \frac{t^K}{K!} \int \left[\frac{d}{du}(1-u^2)\right]^K \sum_n \frac{2n+1}{2} P_n(u) (1-u)^m du = \\ &= \sum_K \frac{t^K}{K!} \int \left[\frac{d}{du}(1-u^2)\right]^K \delta(1-u) (1-u)^m du \equiv \\ &\equiv \sum_K \frac{t^K}{K!} D^K (1-u)_{u-1}^m, \end{aligned} \quad (35)$$

так как суммирование по n представляет собой разложение δ -функции по полиномам Лежандра. Обозначение оператора D ясно из (35). Прежде всего, легко видеть, что $D^K (1-u)_{u-1}^m$ обращается в нуль при $m < K$.

Для этого достаточно придать этому выражению вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (1-u) (1+u) \frac{d^2}{du^2} (1-u) (1+u) \frac{d^2}{du^2} \dots \\ \dots \frac{d^2}{du^2} (1-u) (1+u) \frac{d}{du} (1-u)^m. \end{aligned}$$

Самое последнее дифференцирование понижает степень $(1-u)$ на единицу, что затем компенсируется множителем $(1-u)$ при производной. Дальнейшее двукратное дифференцирование понижает степень на два, но последующее умножение на $(1-u)$ опять прибавляет единицу к показателю. Так как вторая производная содержится в операторе $(K-1)$ раз, она понижает степень m на $(K-1)$, и самая внешняя первая производная понижает ее еще на единицу. В результате наименьшая степень $(1-u)$ будет $m-K$. Все прочие члены, получающиеся от дифференцирования сомножителей $(1+u)$, дают более высокую степень $(1-u)$. Поэтому первый член (35), не обращающийся в нуль, есть $\frac{t^m}{m!} D^m (1-u)_{u-1}^m$. Следующие члены пропорциональны более высоким степеням t и при малых толщинах рассеивающего вещества могут быть опущены. Член, который мы удерживаем, приводит (31) к распределению Гаусса, имеющему, таким образом, точность порядка величины t по сравнению с единицей.

Вычислим теперь

$$D^m (1-u)_{u-1}^m \equiv a_m. \quad (36)$$

Имеем

$$\begin{aligned} a_m &= \left[D^{m-1} \frac{d}{du} (1-u) (1+u) \frac{d}{du} (1-u)^m \right]_{u=1} = \\ &= 2m^2 D^{m-1} (1-u)^{m-1} + m(m+1) D^{m-1} (1-u)^m \Big|_{u=1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Последний член в правой части согласно только что доказанному равен нулю, и получается

$$a_m = 2m^2 a_{m-1} \quad (38)$$

или

$$a_m = 2^m (m!)^2. \quad (39)$$

Таким образом,

$$(\delta^2)^m = 4^m t^m m! \equiv \int_0^{\infty} (\vartheta^2)^m F(t, \vartheta^2) d(\vartheta^2).$$

КРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В ВЕСЬМА ТОНКИХ СЛОЯХ ВЕЩЕСТВА *

Следовательно, нам известны все моменты, даваемые функциями распределения F . Отсюда F однозначно определяется как

$$F = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{t^2}{4t}} \quad (40)$$

Множитель $1/2\pi$ отвечает нормировке в отношении азимута. Уравнение (40) и является распределением Гаусса. Мы, однако, оценили точность его в зависимости от толщины пластинки. Далее, из вывода (40) можно определить и те толщины, при которых рассеяние электронов практически однократно и не отличается от того, которое имеет место в элементарном акте.

Для этого надо исходить из определения не среднего квадрата, как это иногда делается, а среднего значения четвертой степени угла рассеяния. Именно, средний квадрат угла рассеяния, вычисленный из (1), (7) или (40), всегда возрастает, как первая степень толщины пластинки, и его зависимость от толщины не может, следовательно, служить критерием одно- или многократности рассеяния. Между тем среднее значение четвертой степени при элементарном акте столкновения также пропорционально первой степени t , а при многократном рассеянии пропорционально t^2 . Как легко видеть, это связано с характером зависимости S_n разложения F от n , именно с тем, что в показательную функцию входит $n(n+1)$, на чем и построен весь вывод (40). Но член $n(n+1)$ является только первым в разложении $P_n(u)$ по степеням $(1-u)$, применяемому в (15). Следующий член, опущенный нами, меньше в отношении $1/K$. Зато, если бы он был учтен, среднее значение содержания рассеяния над толщиной, при которых многократное рассеяние преобладает над однократным, определяются из неравенства $t^2 \gg t/K$, $tK \gg 1$.

Для свинца при энергии электронов около 2,5 Мэв это означает, что однократное рассеяние имеет место всегда, если толщина мишени составляет около 1 мг на 1 см².

Л и т е р а т у р а

1. Г. Д. Латышев, А. С. Компанец, Н. П. Борисов и Н. М. Гусак. ЖЭТФ, 1940, 10, 996.
2. E. Williams. Proc. Roy. Soc., 1939, 169, 531.
3. А. И. Андреевский, Л. А. Кульчицкий, Г. Д. Латышев. ЖЭТФ, 1942, 12, 17.

Во многих ядерных экспериментах бывает существенно учитывать кратное рассеяние заряженных частиц, прошедших через столь тонкие слои вещества, что полное число столкновений сравнимо с единицей. При этом обычная приближенная теория многократного рассеяния, в которой принимается, что число столкновений весьма велико, неприменима, так что необходимо пользоваться более точной теорией [1, 2]. Полученная в этой теории функция распределения для малых толщин изучалась Бирманом [3], но результаты этой работы не могут быть перенесены на углы, большие по сравнению с минимальным дифракционным углом отклонения (см. ниже). Даже если толщина рассеивающего слоя вещества составляет один пробег для упругого рассеяния, заметная доля частиц претерпевает при прохождении больше, чем одно столкновение. Определить долю таких частиц в интегральном эффекте рассеяния очень легко. При помощи точной теории многократного рассеяния можно определить и долю частиц, претерпевших кратное рассеяние и вылетевших из вещества под определенным углом к первоначальному направлению падения.

Общая формула для функции распределения частиц, прошедших через некоторую толщину вещества и отклонившихся на малый угол, была дана в [1] и [2]. Эту функцию можно записать так:

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(u\theta) \exp \left\{ -N \int d\sigma' (1 - J_0(u\theta')) \right\} u du, \quad (1)$$

где N — число рассеивающих атомов на 1 см², J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $d\sigma'$ — дифференциальное эффективное сечение.

Для легких элементов в (1) надо подставить дифференциальное эффективное сечение кулоновского рассеяния с учетом экранирования:

$$d\sigma = \frac{8\pi Z^2 e^4}{m^2 v^4} \frac{\alpha d\theta}{[\theta^2 + (\hbar\alpha/mv)^2]^2}; \quad (2)$$

здесь Z — атомный номер, v — скорость частицы, α — параметр экранирования. Углы рассеяния считаются малыми, так как эти углы представляют основной интерес в задаче о кратном рассеянии. Формуле (2) отвечает потенциальное поле вида $V = (Ze/r) e^{-\alpha r}$.

* ЖЭТФ, 1955, 28, вып. 3, 308.

Введем оптическую толщину рассеивателя (d — геометрическая толщина)

$$\tau = 8\pi N Z^2 e^4 d / \hbar^2 \alpha^2 v^2 \quad (3)$$

и безразмерный параметр экранирования

$$\nu = \hbar \alpha / 2 m v. \quad (4)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в общую формулу (1), получим формулу для многократного кулоновского рассеяния в легких элементах:

$$f(\theta) = \frac{e^{-\tau}}{8\pi\nu^2\tau} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0\left(\xi \frac{\theta}{2\nu\sqrt{\tau}}\right) \exp\left\{\xi\sqrt{\tau} K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right\} \xi d\xi; \quad (5)$$

здесь K_1 — функция Макдональда. При больших оптических толщинах эту функцию можно представить в виде

$$K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right) \approx \frac{\sqrt{\tau}}{\xi} - \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \ln \frac{0,89\xi}{\sqrt{\tau}}, \quad (6)$$

поскольку при этом основной вклад в интеграл (5) дают значения ξ , гораздо меньшие, чем $\sqrt{\tau}$.

Подстановка (6) в (5) дает формулу, справедливую при больших τ — порядка нескольких десятков:

$$f(\theta) = \frac{1}{8\pi\nu^2\tau} \int_0^{\xi < \sqrt{\tau}} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\xi^2}{2} \ln \frac{0,89\xi}{\sqrt{\tau}}\right\} J_0\left(\xi \frac{\theta}{2\nu\sqrt{\tau}}\right) \xi d\xi. \quad (7)$$

Подобное выражение было получено в [1], где изучалось рассеяние в тяжелых элементах, причем оказалось, что $f(\theta)$ весьма напоминает гауссово распределение. Для $\tau = 100$ формула (5) табулирована в [5] без перехода к асимптотической форме (7).

Если $\tau = 1$ или 3, то формула (7), конечно, совершенно непригодна. Чтобы найти функцию распределения в этом случае, необходимо численно интегрировать выражение (5). Как уже говорилось, расчет $f(\theta)$ при малых τ производил Биберман. Он заменил элементарный закон рассеяния суммой гауссовых функций. Такая сумма может дать хорошее приближение для $f(\theta)$ при самых малых углах отклонения ($\theta \sim 2\nu$), но заведомо неприменима в области $\theta \gg 2\nu$, потому что средний квадрат угла отклонения, вычисленный по формуле (2), логарифмически расходится, а если пользоваться гауссовыми функциями вместо формулы (2), — сходится. Но поскольку характерная особенность кулоновского рассеяния как раз и состоит в том, что средний квадрат угла отклонения расходится со стороны больших углов, то, чтобы проследить $f(\theta)$ до возможно больших θ , не следует пользоваться гауссовым приближением.

Заметим прежде всего, что непосредственное численное интегрирование по формуле (5) невозможно, потому что интеграл весьма медленно сходится на верхнем пределе. Поэтому из подынтегрального выражения следует выделить часть, приходящуюся на частицы, совсем не рассеявшиеся, и на частицы, рассеявшиеся однократно. Оставшаяся функция распределения имеет вид

$$f_{>1}(\theta) = \frac{1}{8\pi\nu^2\tau} e^{-\tau} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0\left(\xi \frac{\theta}{2\nu\sqrt{\tau}}\right) \times \\ \times \left(\exp\left\{\xi\sqrt{\tau} K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right\} - 1 - \xi\sqrt{\tau} K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \xi d\xi. \quad (8)$$

Индекс >1 указывает, что учтено только кратное рассеяние. Легко проверить, что третий член в скобке под интегралом дает однократное рассеяние, потому что (см. [4])

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K_1(ax) J_0(bx) x^2 dx = \frac{2}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Для случая $\tau = 3$ удобно было выделить и двукратное рассеяние, так как интеграл (8) сошелся еще недостаточно хорошо. Распределение двукратно рассеявшихся частиц, записанное отдельно, имеет вид

$$f_2(\theta) = \frac{\tau^2 e^{-\tau} \theta^2}{2\pi (\theta^4 + 4\theta^2)^2} \left[\frac{2(\theta^2 + 1)}{(\theta^4 + 4\theta^2)^{1/2}} \ln \frac{\theta^2 + 2 + \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}}{\theta^2 + 2 - \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}} + \theta^2 - 2 \right], \quad (9)$$

где

$$\theta = \theta / 2\nu\sqrt{\tau}. \quad (10)$$

Можно убедиться, что

$$2\pi \int_0^\infty f_2(\theta) \theta d\theta = \frac{\tau^2 e^{-\tau}}{2},$$

как и должно быть.

Приводим в табл. 1 (см. стр. 218) результаты численных расчетов для $\tau = 1$ и для $\tau = 3$ (вычисления производились Т. Н. Шаталовой).

Здесь $f_{>1}(\theta)$ — функция распределения частиц, испытавших больше чем одно столкновение, f_1 — функция распределения частиц, испытавших одно столкновение. Оказывается, что число тех и других становится сравнимым при $\theta = 2$, а при больших углах преобладают частицы, претерпевшие кратное рассеяние.

Распределение, приведенное в табл. 1, нормировано на единицу:

$$e^{-1} + 2\pi \int_0^{\infty} (f_{>1} + f_1) \theta d\theta = 1.$$

Здесь e^{-1} — доля частиц, прошедших без единого акта рассеяния. Фактически табл. 1 охватывает 0,975 от числа всех прошедших частиц, остальные рассеиваются на угол Φ , больший 5.

Эта таблица охватывает 0,92 от числа всех прошедших частиц. Заметим, что теперь кратное рассеяние становится больше единичного уже при самых малых значениях Φ .

ДОПОЛНЕНИЕ

Функция распределения для кратного кулоновского рассеяния может быть изучена и экспериментально при помощи простой оптической модели.

Пусть составлена эмульсия из двух прозрачных сред с очень близкими показателями преломления. Будем считать, что одно вещество образует собственно среду, в которую вкраплено второе вещество в виде беспорядочно расположенных шариков одинакового радиуса R . Радиус будем считать большим по сравнению с длиной волны проходящего света, чтобы можно было пользоваться законами геометрической оптики. Таким образом рассматриваемое рассеяние в известном смысле противоположно рэлеевскому рассеянию, когда длина волны велика по сравнению с размерами препятствия.

Определим сначала отклонение светового луча в элементарном акте рассеяния. Согласно предположению, относительный показатель преломления двух сред есть ν , где $\nu \ll 1$ — малое число. Пусть полярная ось проведена из центра шара в направлении падения луча. Полярный угол точки падения луча на шар назовем β . Тогда угол отклонения луча в шаре, как видно из элементарного построения, есть

$$\theta = 2\nu \operatorname{tg} \beta.$$

Угол θ считается малым, так как $\nu \ll 1$ и вклад больших углов незначителен. Отсюда легко получить дифференциальный эффективный поперечник рассеяния. По общим формулам классической теории рассеяния он оказывается равным¹

$$d\sigma = 2\pi R^2 \frac{4\nu^2 \theta d\theta}{(4\nu^2 + \theta^2)^2}.$$

¹ Заметим, что формула (2) получена в борновском приближении из волнового уравнения, а последняя формула получена в приближении геометрической оптики. Волновая картина для частиц оказывается аналогичной лучевой картине для света. Следовательно, найденная аналогия отнюдь не является частным случаем оптико-механической аналогии. Усмотреть физическую причину для этой аналогии мы не смогли.

Таблица 2
Функция распределения частиц, прошедших через слой вещества толщиной в три пробера ($\tau=3$)

$\theta = \frac{2\nu V \tau}{\beta}$	$2\pi f_{>1}(\theta)$	$2\pi f_1(\theta)$	$2\pi f_2(\theta)$
0	0,295	0,298	0,149
0,5	0,268	0,191	0,133
1,0	0,205	0,146	0,088
1,5	0,143	0,028	0,056
2,0	0,0645	0,0118	0,0162
4	0,0201	0,00103	0,030
6	0,0043	0,0002	0,0075
8	0,0023	0,00007	0,00024

Таблица 1
Функция распределения частиц, прошедших слой вещества толщиной в один пробер ($\tau=1$)

$\theta = \frac{2\nu V \tau}{\beta}$	$2\pi f_{>1}$	$2\pi f_1$
0	0,149	0,130
0,5	0,091	0,184
1	0,057	0,0342
1,5	0,0204	0,00735
2	0,00735	0,00254
3,5	0,00386	0,0011
4,5	0,0026	0,0011

Эта формула вполне подобна (2), причем обозначение ν соответствует прежнему, а

$$R = 2Ze^2/h\alpha v.$$

Формула для $d\sigma$ может быть получена и путем предельного перехода из дифракционной теории.

Л и т е р а т у р а

1. А. С. Компанеец. ЖЭТФ, 1945, 15, 235; см. наст. изд., стр. 188.
2. А. С. Компанеец. ЖЭТФ, 1947, 17, 1059; см. наст. изд., стр. 200.
3. Л. М. Биберман. Изв. АН СССР. Серия физ. 1951, 15, 424.
4. Г. Н. Валтон. Бесселевы функции. М., ИЛ, 1949.
5. H. S. Snyder, V. T. Scott. Phys. Rev., 1949, 76, 220.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ К ЯДРУ*

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 14.V.1952)

Метод самосогласованного поля впервые применялся к объяснению строения ядра Вейцекером [1]. В последнее время в связи с развитием учения об ядерных оболочках возрос интерес к методу самосогласованного поля применительно к ядру. Д. Д. Иваненко применял метод Томаса — Ферми к объяснению магических чисел [2].

В настоящей статье будет показано, что метод самосогласованного поля может в самых общих, грубых чертах объяснить некоторые основные закономерности в строении ядер: приближенное постоянство энергии и объема, приходящихся на один нуклон. Ввиду того что ряд постоянных, относящихся к ядерным силам, неизвестен, мы будем вести доказательство так, чтобы возможно меньше прибегать к конкретным численным значениям величин.

Мы примем, что потенциал взаимодействия нуклонов в ядре подчиняется уравнению типа Юкава

$$\Delta\varphi - \alpha^2\varphi = -4\pi gn. \quad (1)$$

Здесь g — нуклонный заряд, имеющий размерность обычного заряда; n — плотность ядерной материи; φ — потенциал; α — обратный радиус действия ядерных сил. В начале координат, не являющемся, очевидно, особой точкой, надо потребовать, чтобы

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (2)$$

* ДАН СССР, 1952, 85, вып. 2, 301.

Границу ядра мы определим условием $n=0$. В этой точке потенциал должен плавно сопрягаться с решением для пустого пространства, имеющим вид $\varphi \sim e^{-\alpha r}/r$. Отсюда получаем второе граничное условие

$$\left(\frac{d}{dr} \ln r\varphi\right)_{n=0} = -\alpha. \quad (3)$$

Вычислим теперь полную энергию взаимодействия нуклонов, учитывая, что силы имеют частично обменный характер. Для примера возьмем, что половина сил не связана с обменом, а половина сил — обменные. Координатная часть энергии взаимодействия между парой нуклонов будет браться в виде

$$U_{12} = -g^2 \frac{e^{-\alpha|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \quad (4)$$

а обменный оператор мы запишем так (см., например, [3], стр. 106):

$$M = \frac{[1 + (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)] [1 + (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)]}{4}. \quad (5)$$

Здесь $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ — операторы спина обоих нуклонов, $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ — операторы их изотопического спина. Так как спин и заряд каждого нуклона могут принимать два значения, в системе из двух нуклонов может быть 16 волновых функций. Все эти функции следует выбирать антисимметричными относительно перестановки нуклонов. Мы выбрали волновые функции всегда в виде произведений трех множителей: пространственного, спинового и зарядового. В 15 функциях антисимметричен один из трех множителей, а в одной функции антисимметричны все три. Пространственную волновую функцию мы выберем в виде плоской волны. Так как потенциал оказывается почти постоянным и, во всяком случае, меняется очень плавно, пользование плоскими волнами для вычисления обменного интеграла, во всяком случае, здесь более оправдано, чем у атома, как это делал Дирак (см. [4], § 2). Благодаря плавному ходу плотности мы отбросили и правку Вейцекера на Vn ([4], § 12).

Вычисление диагонального матричного элемента энергии взаимодействия, после суммирования по 16 состояниям, в обменной части дает $16I-4B$, где I — обычная энергия, вычисленная через плотность нуклонов, B — обменный интеграл. Обменная часть дает $4I-16B$. Полусумма этих величин равна $10I-10B$. Таким образом, на каждые 16 состояний двух нуклонов приходится по 10 величин I и B .

Энергию взаимодействия нуклонов следует проинтегрировать по всем возможным импульсам, от нуля до граничного импульса фермиевского распределения. Как только что было указано,

выражение энергии взаимодействия имеет следующий вид:

$$U = -10 \frac{1}{2} \iint \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^6} \iint \{\psi_1(1)\psi_2(2)U_{12}\bar{\psi}_1(2)\bar{\psi}_2(1) - \\ - |\psi_1(1)|^2 |\psi_2(2)|^2 U_{12}\} d\omega_1 d\omega_2. \quad (5)$$

Множитель 10 впереди связан, конечно, с тем, что мы приняли равные доли обычных и обменных сил. Подставляя плоские волны для ψ_1 , ψ_2 и выражение (4) для U_{12} , получим после элементарного интегрирования (q — граничный импульс, умноженный на $1/\hbar\alpha$)

$$U = \frac{5g^2\alpha^4}{16\pi^3} \int d\nu \left\{ \frac{(2q)^2}{2} + \frac{1}{6} \right\} \ln(1+4q^2) + \\ + \frac{(2q)^4}{4} - \frac{(2q)^2}{6} - \frac{2(2q)^3}{3} \operatorname{arctg} 2q \left\} - \frac{5}{16} g \int n\varphi d\nu. \quad (7)$$

Кинетическая энергия в методе Томаса — Ферми равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{\hbar^2\alpha^3}{5\pi^2 m} \int q^3 d\nu. \quad (8)$$

При этом было учтено, что вес состояния нуклона с данным импульсом равен 4, а не 2, как у электрона.

Потребуем минимума $E_{\text{кин}} + U$ при дополнительном условии

$$A = \int n d\nu = \frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int q^3 d\nu = \text{const}, \quad (9)$$

выражающем постоянство полного числа нуклонов. Умножая (9) на некоторый параметр μ , который имеет физический смысл работы удаления одного нуклона из ядра $\left(\mu = -\frac{\partial(E_{\text{кин}} + U)}{\partial A}\right)$, прибавляя μA к $(E_{\text{кин}} + U)$ и варьируя по q , получаем условие, связывающее между собой потенциал φ и граничный импульс q :

$$\frac{\alpha^5 \hbar^2}{\pi^2 m} q^4 + \frac{2\alpha^3}{\pi^2} \mu q^2 - \frac{5\alpha^3}{4\pi^2} g q^2 \varphi + \\ + \frac{5}{8\pi^3} g^2 \alpha^4 (2q)^3 \left\{ 1 + \frac{\ln(1+4q^2)}{4q^2} - \frac{1}{q} \operatorname{arctg} 2q \right\} = 0. \quad (10)$$

Это уравнение и должно решаться вместе с (1) при граничных условиях (2), (3).

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\varphi = \frac{8g\alpha}{3\pi} \lambda^3 \Phi; \quad \mu = \frac{5}{3\pi} g^2 \alpha \lambda^3 M; \quad q = \lambda Q; \quad \lambda = \frac{3\pi}{10} \frac{\hbar^2 \alpha}{m g^2}; \quad r = \frac{\xi}{\alpha}. \quad (11)$$

Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\Delta\Phi - \Phi = -Q^3, \quad (12)$$

$$\Phi - M = Q^2 + \frac{3}{2} \frac{Q}{\lambda^3} f(2Q\lambda), \quad (13)$$

причем функция f определена согласно (10) так:

$$f(s) = 1 + \frac{\ln(1+s^2)}{s^2} - \frac{2}{s} \operatorname{arctg} s. \quad (14)$$

Перейдем к исследованию получившейся системы. В основной части ядра потенциал, а следовательно, и граничный импульс должны быть почти постоянными. Поэтому удобно исходить, как из нулевого приближения, из бесконечно протяженной ядерной материи. Для нее $\Delta\Phi = 0$ и ее состояние определяется «химическим потенциалом» M с помощью двух уравнений:

$$\Phi_0 = Q_0^3, \quad (15)$$

$$\Phi_0 - M = Q_0^2 + \frac{3}{2} \frac{Q_0}{\lambda^3} f(2Q_0\lambda). \quad (16)$$

Пусть в средней части ядра Φ и Q мало отличаются от Φ_0 и Q_0 . Положим $\Phi = \Phi_0 + \Phi'$, $Q = Q_0 + Q'$, где Φ' и Q' считаются малыми. Для них получается система линейных уравнений, которая после исключения Q' приобретает вид

$$\Delta\Phi' = \left(1 - \frac{3Q_0^2}{2Q_0 + \frac{3}{2\lambda^2} f(2Q_0\lambda)} \right) \Phi', \quad (17)$$

где функция f дается равенством

$$f(s) = 1 - \frac{\ln(1+s^2)}{s^2}. \quad (18)$$

Множитель при Φ' в правой части может быть как положительным, так и отрицательным. Если он отрицателен, решение имеет осциллирующий характер. Тогда, следовательно, Φ' не имеет тенденции к возрастанию по мере удаления от центра ядра. Иначе говоря, плотность везде будет близка к плотности бесконечной ядерной материи и нигде не обратится в нуль. Итак, если выражение, стоящее в скобке, отрицательно, нельзя получить решение, близкое к постоянному в середине ядра и приводящее в то же время к конечным размерам ядра.

Отсюда сразу видно значение обменного члена в энергии взаимодействия. Без него скобка отрицательна при всех $Q_0 > \frac{2}{\lambda}$. Но при $Q_0 < \frac{2}{\lambda}$ и без обменного члена оказывается отрицательной «работа выхода» M , что, очевидно, бессмысленно. Вообще без обменного члена нельзя получить из решения системы (12) — (13) ничего напоминающего свойства ядер.

Если величина в скобке положительна, решение имеет экспоненциально возрастающий характер, поскольку вблизи начала координат оно обязано согласно (2) иметь вид $\Phi'_{\xi} = C \operatorname{sh} a\xi$, где

a^2 — указанная величина в скобке. Поэтому при сколь угодно малом начальном отклонении Φ от Φ_0 поправка Φ' станет сравнима с Φ_0 , если отойти достаточно далеко от начала. Конечно, тогда уже нужно пользоваться точной системой (12) — (13). Но если начальное значение Φ' было отрицательно, то величина Q' тоже отрицательна. Поэтому плотность материи в какой-то точке обращается в нуль и ядро получает конечные размеры. Разумеется, мы не можем при заданном значении M распоряжаться начальным значением Φ' по произволу: оно должно быть выбрано так, чтобы при обращении Q в нуль выполнялось условие (3). Но из-за экспоненциального характера решения для Φ' уже малые изменения M будут приводить к изменению радиуса ядра в 2—3 раза. Поэтому окажется, что энергия связи ядра и его объем будут приближенно линейны в зависимости от атомного веса, ибо в своей основной части ядро близко по состоянию к бесконечно протяженной ядерной материи. Это состояние является нулевым приближением к задаче и отвечает, как указывалось, близким значениям химического потенциала, а поэтому при разных радиусах и атомных весах различается мало.

Из того условия, чтобы выражение в скобках в (18) было положительным, и из (16) вытекают два неравенства:

$$M\lambda^3 \leq \frac{1}{16} \left\{ 3s \left[1 - \frac{3}{s^2} \ln(1 - s^2) + \frac{2}{s} \operatorname{arctg} s \right] - s^3 \right\} \equiv \frac{1}{16} \Psi(s), \quad (19)$$

$$\lambda \leq \frac{3}{4} \left\{ s - \frac{2}{s} \left[1 - \frac{1}{s^2} \ln(1 + s^2) \right] \right\} \equiv \chi(s). \quad (20)$$

По отношению к константе связи они действуют в противоположные стороны и могут быть записаны так:

$$\frac{g^2}{\hbar c} > \frac{48\pi}{5\Psi(s)} \frac{\mu}{m} \frac{m}{m_0}; \quad \frac{g^2}{\hbar c} \leq \frac{3\pi}{10\chi(s)} \frac{m_0}{m}. \quad (21)$$

Здесь m_0 — масса мезона, передающего силу, равная $\hbar\alpha/c$, и μ — химический потенциал, который по порядку величины равен 10 Мэв. Исключая отсюда константу связи, приходим к неравенству для массы мезона:

$$\frac{m_0}{m} > \sqrt{\frac{32}{5} \frac{\mu}{m c^2} \frac{\chi(s)}{\Psi(s)}}. \quad (22)$$

В интервале значений $0 < s < 0,5$ отношение $\chi(s)/\Psi(s)$ составляет около $1/3$, так что получается неравенство $m_0 > m/3$, не слишком грубое, если учесть характер приближений. $s = 0,5$ отвечает константа связи $g^2/\hbar c \sim 6,5$, т. е. «сильная связь»*.

* При чисто обменных силах можно выбрать

$$\frac{g^2}{\hbar c} \sim \frac{m_0}{m} \sim \frac{1}{6}.$$

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Я. Б. Зельдовичу и В. Л. Гинзбургу за ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. C. F. Weizsäcker. *Z. Phys.*, 1935, 96, 431.
2. Д. Д. Иваненко, В. Родичев. ДАН СССР, 1950, 70, 605.
3. Г. Бете. Лекции по теории ядра. М., ИЛ, 1949.
4. П. Гомбах. Статистическая теория атома и ее применения. М., ИЛ, 1951.

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ СИЛ*

Метод самосогласованного поля в приближении Томаса — Ферми можно вывести из уравнений Фока путем перехода к квазиклассическому представлению матрицы плотности и гамилтониана [1—3]. Такой переход может быть произведен для координатной зависимости матричных элементов, но не для спиновых переменных, так как спину не отвечает никакая классическая величина. Интересно поэтому найти уравнения для матрицы плотности в том случае, когда силы, действующие между частицами, явно зависят от спина и от изотопического спина.

Как известно, матрица плотности определяется следующим образом [1, с. 254]:

$$\rho(q, q') = \sum_n \Psi_n(q) \bar{\Psi}_n(q'). \quad (1)$$

Ψ_n в методе Фока представляет некоторую (неполную) систему ортогональных функций. Желая учесть зависимость от спина явно, запишем Ψ_n так:

$$\Psi_n(q) = \bar{f}_s(x) \psi_s(\sigma) \chi_t(\tau), \quad (2)$$

где s и t — собственные значения спина и изотопического спина, σ и τ — соответствующие переменные, $\bar{f}_s(x)$ — пространственная волновая функция. Суммирование по s и t в матрице плотности производится от 1 до 2. Поскольку

$$\sum_s \psi_s(\sigma) \bar{\psi}_s(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sum_t \chi_t(\tau) \bar{\chi}_t(\tau') = \delta_{\tau\tau'},$$

то матрица плотности диагональна относительно переменных σ и τ .

* ЖЭТФ, 1953, 25, вып. 5(11), 540.

Покажем теперь, что диагональна и правая часть уравнения движения для матрицы плотности, которое имеет вид

$$i\hbar \partial \rho / \partial t = H \rho - \rho H, \quad \text{где } H - \text{гамилтониан [1, с. 255, (45)]}.$$

Более подробно это уравнение можно записать так:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(q, q') = \int (H_0 + B - A)_{q'' q'''} \rho(q''', q'') dq'''' - - \int \rho(q', q''') (H_0 + B - A)_{q'' q'''} dq'''' \quad (3)$$

Здесь H_0 — кинетическая энергия и энергия частиц во внешнем поле (если оно имеется), B и A — операторы, зависящие от парных действий между частицами;

$$(B - A)_{q' q''} = \iint [V(q', q'') + V(q', q''') + V(q''', q'')] \rho(q''', q'') dq'''' dq'''' \quad (4)$$

Интегрирование в этих формулах включает в себя и суммирование по спиновым переменным.

В формулы (3) и (4) входит матрица плотности в общем виде (1). Подставим теперь выражения (2) для волновых функций, ограничиваясь сначала зависимостью от обычного спина. Изотопический спин будет введен дальше. Рассмотрим операторы V , которые могут иметь три вида спиновой зависимости:

$$V = V_1(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) \delta_{\sigma' \sigma''} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \quad (5)$$

$$V = V_2(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) s_{\sigma' \sigma''} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \quad (6)$$

$$V = V_3(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) (s_{\sigma' \sigma''} \mathbf{A}) (s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \mathbf{A}), \quad (7)$$

где \mathbf{A} — оператор. Векторное обозначение для x будет введено ниже. Матрицы s удовлетворяют условию

$$s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = 1.$$

Выражение $\int (B - A)_{q' q''} \rho(q''', q'') dq''''$ для оператора (5) представим так:

$$\begin{aligned} & \int (B - A)_{q' q''} \rho(q''', q'') dq'''' = \\ & = \sum_{t w} \iiint dx^{(b)} dx^{(b)} V_1(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) \sum_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma' \sigma''} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \times \\ & \times [\bar{f}_v(x'') f_v(x''') \bar{f}_w(x^{(b)}) f_w(x^{(b)}) \bar{\psi}_r(\sigma'') \psi_r(\sigma''') \bar{\psi}_s(\sigma^{(b)}) \psi_s(\sigma^{(b)}) - \\ & - \bar{f}_v(x'') f_v(x^{(b)}) \bar{f}_w(x^{(b)}) f_w(x^{(b)}) \bar{\psi}_r(\sigma'') \psi_r(\sigma'') \bar{\psi}_s(\sigma^{(b)}) \psi_s(\sigma''')]. \quad (8) \end{aligned}$$

Используя теперь полноту системы спиновых функций, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{r s \sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma' \sigma''} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \bar{\psi}_r(\sigma'') \psi_r(\sigma''') \bar{\psi}_s(\sigma^{(b)}) \psi_s(\sigma^{(b)}) = \\ & = \sum_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma' \sigma''} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} = 2 \delta_{\sigma' \sigma''}; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{r s \sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma' \sigma''} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \bar{\psi}_r(\sigma'') \psi_r(\sigma^{(b)}) \bar{\psi}_s(\sigma^{(b)}) \psi_s(\sigma^{(b)}) = \\ & = \sum_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma' \sigma''} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} = \delta_{\sigma' \sigma''}. \quad (10) \end{aligned}$$

Обозначив через $\rho(x, x')$ матрицу плотности, зависящую только от пространственных координат, приходим к уравнению, не содержащему спиновой переменелной:

$$\begin{aligned} & \int (B - A)_{x' x''} \rho(x''', x'') dx''' = \\ & = \sum_{t w} \iiint dx^{(b)} dx^{(b)} V_1(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) \bar{f}_v(x'') f_w(x^{(b)}) \times \\ & \times [2 f_v(x''') f_w(x^{(b)}) - f_v(x^{(b)}) f_w(x''')] = \\ & = \int dx''' [(2 \int V_1(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) \rho(x^{(b)} x^{(b)}) dx^{(b)} dx^{(b)}) \rho(x''', x'') - \\ & - \int V_1(x', x^{(b)}; x''', x^{(b)}) \rho(x''', x^{(b)}) dx^{(b)} dx^{(b)} \rho(x^{(b)}, x'')]. \quad (11) \end{aligned}$$

Последний член справа описывает обменное взаимодействие. Оно, как известно, вошло у Дирака с неверным множителем, равным двум [3, с. 141].

Возьмем теперь оператор (6). Для него получается

$$\begin{aligned} & \sum_{r s \sigma'' \sigma^{(b)}} s_{\sigma' \sigma''} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \bar{\psi}_r(\sigma'') \psi_r(\sigma''') \bar{\psi}_s(\sigma^{(b)}) \psi_s(\sigma^{(b)}) = \\ & = \sum_{\sigma'' \sigma^{(b)}} s_{\sigma' \sigma''} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} = \sum_{\sigma^{(b)}} s_{\sigma' \sigma''} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

потому что диагональная сумма всех компонент s равна нулю. Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_{r s \sigma'' \sigma^{(b)}} s_{\sigma' \sigma''} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \bar{\psi}_r(\sigma'') \psi_r(\sigma^{(b)}) \bar{\psi}_s(\sigma^{(b)}) \psi_s(\sigma''') = \\ & = \sum_{\sigma'' \sigma^{(b)}} s_{\sigma' \sigma''} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma'' \sigma^{(b)}} \delta_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} = \\ & = \sum_{\sigma^{(b)}} s_{\sigma' \sigma^{(b)}} s_{\sigma^{(b)} \sigma^{(b)}} = (s^2)_{\sigma' \sigma''} = 3 \delta_{\sigma' \sigma''} \quad (13) \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (11) заменится таким:

$$\int (B-A)_{x'x''} \rho(x''', x'') dx''' = -3 \int dx''' V_2(x', x^{(6)}; x''', x^{(9)}) \rho(x''', x^{(6)}, x^{(9)}, x''), \quad (14)$$

т. е. содержит только обменный интеграл.

Для взаимодействия вида (7) не обменный член, вполне аналогично (12), тоже даст нуль, а обменный член приводится к виду

$$\sum_{\tau^{(6)}} \{s_{\sigma'\sigma^{(6)}}(s) \mathbf{A} (s_{\sigma^{(6)}}(s) \mathbf{A})\}_{\sigma'\sigma''} = \mathbf{A}^2 \delta_{\sigma'\sigma''}, \quad (15)$$

благодаря антикоммутативности операторов s_x, s_y, s_z и тому, что их квадраты равны единице. Следовательно, получается выражение, аналогичное (14), но с коэффициентом $-\mathbf{A}^2$ в правой части.

Теперь нетрудно учесть влияние изотопического спина. В симметричной относительно знака заряда теории этот спин может входить только в комбинации $\vec{\tau}_1 \tau_2$ или через единичную матрицу. Скалярное произведение $\vec{\tau}_1 \tau_2$, подобно $s_1 s_2$ оставит только обменный член с коэффициентом -3 . Следовательно, комбинация $(\vec{\tau}_1 \tau_2) (s_1 s_2)$ должна дать множитель -9 , а $(\vec{\tau}_1 \tau_2) (s_1 \mathbf{A}) (s_2 \mathbf{A})$ — множитель $-3\mathbf{A}^2$. Единичная матрица в пространстве изотопического спина даст прямое взаимодействие с множителем 2, а обменное — с множителем -1 . Если при этом входит и обычный спин, прямое взаимодействие исчезает, а обменное получает множитель -3 или $-1 \cdot \mathbf{A}^2$.

Остается рассмотреть еще кулоновскую энергию

$$V_4 = \frac{1}{4} (1 - \vec{\tau}_{12}) (1 - \vec{\tau}_{22}) \frac{e^2}{r_{12}}.$$

В прямом члене имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau^{(6)} \tau^{(5)}} (\delta_{\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''}) (\delta_{\tau^{(5)} \tau^{(4)}} - \vec{\tau}_{2\tau^{(5)} \tau^{(4)}}) \delta_{\tau' \tau''} \delta_{\tau^{(5)} \tau^{(4)}} = \\ & = \sum_{\tau^{(6)}} (\delta_{\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''}) (\delta_{\tau^{(5)} \tau^{(5)}} - \vec{\tau}_{2\tau^{(5)} \tau^{(5)}}) = 4 \delta_{\tau' \tau''} \delta_{\tau \tau''}, \end{aligned} \quad (16)$$

если матрица τ_z приведена к диагональному виду

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Соответственно обменный член дает

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau^{(6)} \tau^{(5)}} (\delta_{\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''}) (\delta_{\tau^{(5)} \tau^{(4)}} - \vec{\tau}_{2\tau^{(5)} \tau^{(4)}}) \delta_{\tau' \tau^{(4)}} \delta_{\tau^{(5)} \tau''} = \\ & = \sum_{\tau^{(6)}} (\delta_{\tau' \tau^{(5)}} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau^{(5)}}) (\delta_{\tau^{(5)} \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau^{(5)} \tau''}) = \\ & = \sigma_{\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''} + \vec{\tau}_{2\tau' \tau''} = 2 (\delta_{\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''}) = 4 \delta_{\tau' \tau''} \delta_{2\tau''}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом кулоновское взаимодействие входит только при значении переменной изотопического спина, равном двум. Обменный член войдет с коэффициентом $1/2$ по сравнению с прямым из-за обычного спина [ср. (11)].

Для примера рассмотрим взаимодействие с потенциальной энергией такого вида:

$$\begin{aligned} V = & \{V_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(6)}|) + (\vec{\tau}_{\tau' \tau''} \vec{\tau}_{\tau^{(6)} \tau^{(4)}}) (s_{\sigma' \sigma''} \nabla) (s_{\sigma^{(6)} \sigma^{(4)}}) V_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|) + \\ & + \frac{1}{4} (\delta_{\tau' \tau''} - \vec{\tau}_{2\tau' \tau''}) (\delta_{\tau^{(6)} \tau^{(4)}} - \vec{\tau}_{2\tau^{(6)} \tau^{(4)}}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(6)}|} \} \times \\ & \times \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(6)}) \delta(\mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x}^{(4)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь член с V_1 можно точно свести к нейтральному скалярному мезонному полю, а член с V_3 сводится к симметричному псевдоскалярному мезонному полю во втором приближении. При этом функции $V_1(r)$ и $V_3(r)$ надо брать в виде (см. [4], с. 13)

$$V_1(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r}; \quad V_3(r) = \frac{f^2 e^{-\beta r}}{\beta^2 r}. \quad (19)$$

Оператор \mathbf{A} есть ∇ , так что вместо \mathbf{A}^2 надо ставить Δ . Далее

$$\Delta V_3 = \beta^2 V_3 - (4\pi f^2 / \beta^2) \delta(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Напишем теперь уравнения движения для составляющих матрицы плотности, содержащих $\tau' = \tau'' = 1$ и $\tau' = \tau'' = 2$. Последняя определяет плотность заряда. При $\tau' = \tau'' = 1$ имеем

$$i\hbar \partial \rho / \partial t = (H_0 + D - F) \rho - \rho (H_0 + D - F), \quad (21)$$

где

$$H_0 = p^2 / 2m; \quad (22)$$

$$D(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = 4\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \int d\mathbf{x}^{(4)} V_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|) \rho(\mathbf{x}^{(4)} \mathbf{x}^{(4)}); \quad (23)$$

$$F(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = (V_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(6)}|) + 3\Delta V_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(6)}|)) \rho(\mathbf{x}' \mathbf{x}^{(6)}). \quad (24)$$

При $\tau' = \tau'' = 2$ получится

$$i\hbar \partial \rho / \partial t = (H_0 + D - F + C - C_a) \rho - \rho (H_0 + D - F + C - C_a), \quad (25)$$

В указанном приближении квантовая скобка Пуассона $\hbar\rho - \rho\hbar$ переходит в классическую скобку для величин $\hbar(\rho, \mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Условие стационарности состоит в том, что

$$\{H\rho\} = \nabla_{\mathbf{p}} H \nabla_{\mathbf{x}} \rho - \nabla_{\mathbf{x}} H \nabla_{\mathbf{p}} \rho = 0. \quad (33)$$

Это уравнение содержит одну неизвестную функцию $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. В статистическом приближении функцию $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ следует писать в таком виде ($\rho \equiv |\mathbf{p}|$):

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \rho(p - P(|\mathbf{x}|)); \quad \rho(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \leq 0; \\ 0 & \text{при } z > 0. \end{cases} \quad (34)$$

Иначе говоря, все состояния, у которых абсолютная величина импульса меньше граничного значения $P(|\mathbf{x}|)$, заняты, а все остальные — свободны. С такой функцией величины D, F, C, C_a приобретают вид

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = -4g^2 \int d\mathbf{x}' \frac{e^{-\alpha|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int \frac{P(|\mathbf{x}'|)}{4\pi\rho'^2 dp'} = \\ = -\frac{2g^2}{3\pi^2\hbar^3} \int d\mathbf{x}' \frac{e^{-\alpha|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} P^3(|\mathbf{x}'|); \quad (35)$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(-g^2\varphi(P, \rho, \alpha) + 3f^2\varphi(P, \rho, \beta) - \frac{f^2}{(\beta\hbar)^2} P^3 \right). \quad (36)$$

При этом функция $\varphi(P, \rho, \alpha)$ равна

$$\varphi(P, \rho, \alpha) = \frac{P^2 - \rho^2 + (\alpha\hbar)^2}{2\rho} \ln \frac{(P + \rho)^2 + (\alpha\hbar)^2}{(P - \rho)^2 + (\alpha\hbar)^2} - \\ - 2\alpha\hbar \left(\operatorname{arctg} \frac{P + \rho}{\alpha\hbar} - \operatorname{arctg} \frac{P - \rho}{\alpha\hbar} \right) + 2P; \quad (37)$$

для $\varphi(P, \rho, \beta)$ имеем аналогичное выражение. Заметим, что величины $\hbar\alpha$ и $\hbar\beta$ суть умноженные на скорость света массы мезонов, переносящих взаимодействие. Функция $\varphi(P, \rho, \alpha)$ удовлетворяет следующему тождественному соотношению:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial P} \right)_{\rho=P} = 2 - \frac{(\hbar\alpha)^2}{2\rho^2} \ln \left(1 + \frac{4\rho^2}{(\hbar\alpha)^2} \right) \equiv 2j \left(\frac{2P}{\hbar\alpha} \right) \quad (38)$$

[6, уравнение (18)].

Для кулоновских энергий имеем

$$C = \frac{e^2}{3\pi^2\hbar^3} \int \frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} P^3(|\mathbf{x}'|); \quad (39)$$

$$C_a = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left(\frac{P^2 - \rho^2}{2\rho} \ln \left(\frac{P + \rho}{P - \rho} \right) + 2P \right) \quad (40)$$

[2, с. 384]. Выражение в круглых скобках в (40) есть $\varphi(P, \rho, 0)$. Применимость квазиклассического приближения (28) можно

где C — электростатическая энергия взаимодействия

$$C(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = 2\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \int d\mathbf{x}^{(4)} \frac{e^2}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|} \rho(\mathbf{x}^{(4)} \mathbf{x}^{(4)}); \quad (26)$$

C_a — обменная электростатическая энергия взаимодействия

$$C_a(\mathbf{x}' \mathbf{x}^{(4)}) = \frac{e^2 \rho(\mathbf{x}' \mathbf{x}^{(4)})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|}. \quad (27)$$

Чтобы совершить предельный переход от квантовых уравнений движения к квазиклассическим, надо найти выражения, соответствующие матричным элементам [5, с. 196; 2, с. 382]. Эти выражения сводятся к коэффициентам Фурье такого вида:

$$\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \int \rho(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \exp \left[\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')}{\hbar} \right] \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (28)$$

Здесь $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — классическая амплитуда, где \mathbf{p} и \mathbf{x} — числа, а не операторы; \mathbf{x} можно считать средним между \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' .

Найдем теперь соответствующие амплитуды от величины D и F :

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \int \exp \left[-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')}{\hbar} \right] D(\mathbf{x}' \mathbf{x}'') d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') = \\ = \int d\mathbf{x}^{(4)} V_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|) \rho(\mathbf{x}^{(4)}, \mathbf{x}^{(4)}) = \\ = -4g^2 \int \exp[-\alpha|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|] \rho(\mathbf{x}^{(4)}, \mathbf{x}^{(4)}) (|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|)^{-1} d\mathbf{x}^{(4)}; \quad (29)$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \int \exp \left[-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)})}{\hbar} \right] F(\mathbf{x}' \mathbf{x}^{(4)}) d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}) = \\ = \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \rho(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \int d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}) \exp \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)})}{\hbar} \right] \times \\ \times \{ V_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|) + 3\Delta V_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|) \} = \\ = \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \left(-\frac{g^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + (\alpha\hbar)^2} + \frac{3f^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + (\beta\hbar)^2} \right) \times \\ \times \rho(\mathbf{p}', \mathbf{x}) d\mathbf{p}'. \quad (30)$$

Электростатические члены, как известно, равны

$$C = 2e^2 \int d\mathbf{x}^{(4)} \frac{\rho(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|}; \quad (31)$$

$$C_a = e^2 \int \frac{d\mathbf{p}' \rho(\mathbf{p}', \mathbf{x})}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)})}{\hbar} \right] \frac{d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(4)}|} = \\ = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}' \rho(\mathbf{p}', \mathbf{x})}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}. \quad (32)$$

обосновать следующим образом. Оно справедливо тогда, когда в экспоненте под интегралом стоит большая величина. Если считать область движения нуклона весь размер ядра порядка $1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/2}$, а импульс порядка $10^{-16} g \cdot cm/sec$ (соответственно граничной энергии $20 Mev$), то в экспоненте стоит величина $\sim A^{1/2}$. Обычно, когда метод Томаса — Ферми применяется к атому, в экспоненту входит $Z^{1/2}$.

Если подставить (34) — (40) в классические скобки Пуассона (33), то получится общий множитель $d\rho/dz = -\delta(p-P)$. Следовательно, достаточно потребовать, чтобы выражение при $d\rho/dz$ равнялось нулю при $p = P(|x|) = P(x)$. Величины (35) — (40) зависят только от абсолютных значений p и x , так что уравнение (33) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{P}{m} \frac{dP}{dx} - \frac{2g^2}{3\pi^2 \hbar^3} \frac{d}{dx} \int \frac{e^{-\alpha|x-x'|}}{|x-x'|} P^3(x') dx' + \\ + \frac{1}{\pi \hbar} \left(g^2 j \left(\frac{2P}{\hbar \alpha} \right) - 3f^2 j \left(\frac{2P}{\hbar \beta} \right) - e^2 \right) \frac{dP}{dx} + \\ + \frac{2f^2}{\pi \beta^2 \hbar^3} \frac{dP^3}{dx} + \frac{e^2}{3\pi^2 \hbar^3} \frac{d}{dx} \int \frac{P^3(x')}{|x-x'|} dx' = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

При этом мы пользовались тождеством (38). Итак, должна быть постоянна следующая величина:

$$\begin{aligned} \frac{P^3}{2m} - \frac{2g^2}{3\pi^2 \hbar^3} \int \frac{e^{-\alpha|x-x'|}}{|x-x'|} P^3(x') dx' + \frac{e^2}{3\pi^2 \hbar^3} \int \frac{P^3(x')}{|x-x'|} dx' + \\ + \frac{2f^2 P^3}{\pi \beta^2 \hbar^3} + \frac{1}{\pi \hbar} \left(g^2 k \left(\frac{2P}{\hbar \alpha} \right) - 3f^2 k \left(\frac{2P}{\hbar \beta} \right) - e^2 \right) P = -\mu. \end{aligned} \quad (42)$$

Функция $k(s)$ означает то же, что $f(s)$ в [6, (формула (14))]:

$$k(s) = 1 + \frac{1}{s^2} \ln(1+s^2) - \frac{2}{s} \operatorname{arctg} s.$$

Уравнение (42) относится к компоненте $\tau' = \tau'' = 2$.

Для компоненты $\tau' = \tau'' = 1$ члены, содержащие заряд, должны быть опущены. Константа μ определяется из условия

$$\frac{2}{(2\pi \hbar)^3} \int P^3(|x|) dx = Z, \quad (43)$$

где интеграл берется по всей области, в которой $P(r)$ отлочно от нуля. Эта область одинакова для обеих компонент ρ , заряженной и нейтральной, что и определяет связь между A и Z .

Уравнение (42) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого введем скалярный мезонный потенциал χ по формуле

$$\chi = -\frac{2g}{3\pi^2 \hbar^3} \int \frac{e^{-\alpha|x-x'|}}{|x-x'|} P^3(|x'|) dx' \quad (44)$$

и скалярный электростатический потенциал Φ :

$$\Phi = \frac{e}{3\pi^2 \hbar^3} \int \frac{P^3(|x'|) dx'}{|x-x'|}. \quad (45)$$

Очевидно, что потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \chi - \alpha^2 \chi = 8\pi g P^3 / 3\pi^2 \hbar^3; \quad (46)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi e P^3 / 3\pi^2 \hbar^3. \quad (47)$$

Уравнение (42) переписывается теперь так:

$$\frac{P^3}{2m} + g\chi + e\Phi + \frac{2f^2}{\pi \beta^2 \hbar^3} P^3 + \frac{1}{\pi \hbar} \left[g^2 k \left(\frac{2P}{\hbar \alpha} \right) - 3f^2 k \left(\frac{2P}{\hbar \beta} \right) - e^2 \right] = -\mu. \quad (48)$$

Аналогичное уравнение, но без электростатических членов и тензорных сил было нами получено в работе [6].

Граничные условия к уравнениям (46) и (47) следующие:

$$\chi'(0) = 0; \quad \Phi'(0) = 0; \quad (49)$$

$$\left(\frac{d \ln(\chi \chi)}{dx} \right)_{r=r_0} = -\alpha; \quad \left(\frac{d \ln(\chi \Phi)}{dx} \right)_{x=x_0} = 0, \quad (50)$$

где точка r_0 соответствует обращению в нуль $P(r)$.

Рассмотрим еще уравнения (46), (48) при $e = 0$ тем методом, который применялся в [6]. Для этого надо исходить из бесконечно протяженной ядерной материи, как из нулевого приближения, полагая $\Delta \chi = 0$. Отсюда

$$\chi_0 = -\frac{8g}{3\pi \alpha^2 \hbar^3} P_0^3; \quad (51)$$

$$\frac{P_0^3}{2m} + g\chi_0 + \frac{2f^2}{\pi \beta^2 \hbar^3} P_0^3 + \frac{1}{\pi \hbar} (g^2 k_0 - 3f^2 k_0) P_0 = \mu. \quad (52)$$

Эти уравнения позволяют определить P_0 как функцию μ .

Далее, вблизи середины ядра можно положить, что состояние ядерной материи незначительно отклоняется от состояния неограниченной в пространстве материи, и подставить

$$\chi = \chi_0 - \chi_1; \quad P = P_0 - P_1,$$

где χ_1 и P_1 — малые величины.

Для χ_1 получаем линеаризованное уравнение

$$\Delta \chi_1 = \chi_1 \left(1 - Q_0 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{f\alpha}{g\beta} \right)^2 \right] \right) Q_0 + \frac{1}{8Q_0 \lambda^2} j \left(2\lambda Q_0 \right) - 3 \frac{f^2}{g^2} j \left(2\lambda Q_0 \frac{\alpha}{\beta} \right) \Big|^{-1}, \quad (53)$$

где

$$\lambda = \frac{\pi}{8} \frac{\hbar^2 \alpha}{mg^2}, \quad P_0 = \lambda \hbar \alpha Q_0, \quad \Delta \alpha = \frac{1}{\alpha^2} \Delta.$$

1. Квазиклассической может являться только зависимость матрицы плотности от пространственных координат, другие переменные (механический и изотопический спин) всегда остаются существенно квантовыми. Поэтому мы будем сначала рассматривать только пространственную координату x и запишем матрицу плотности ρ , как $\rho(x, x')$. В стационарном состоянии матрица $\rho(x, x')$ удовлетворяет обычному квантовомеханическому уравнению [2, 3]

$$i(H\rho - \rho H) = i \int dx'' (H(x', x'')\rho(x'', x'') - \rho(x', x'')H(x'', x')) = 0. \quad (1)$$

Переход к квазиклассическому приближению состоит в том, что матричные элементы выражаются через коэффициенты Фурье (везде положено $\hbar=1$):

$$\rho(x, x') = \int \rho\left(p, \frac{x+x'}{2}\right) e^{ip(x-x')} dp \quad (2)$$

и аналогично для $H(x, x')$. Этот переход можно делать только в том случае, когда в экспоненте стоит большое по модулю число, т. е. когда $e^{ip(x-x')}$ быстропеременная функция. Подставляя ρ по формуле (2) и соответствующее представление для H в (1), получаем после простой замены переменных уравнение

$$\int dp e^{ip\Delta} \iint dq d\xi e^{iq\xi} \left[H\left(p-q, x+\frac{\xi}{2} + \frac{\Delta}{2}\right) \rho\left(p, x+\frac{\xi}{2}\right) - \right. \\ \left. - H\left(p+q, x+\frac{\xi}{2} - \frac{\Delta}{2}\right) \rho\left(p, x+\frac{\xi}{2}\right) \right] = 0. \quad (3)$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд до членов третьего порядка включительно. Квадратичный член, очевидно, сократится. Остаточные выражение выглядит так:

$$\int dp e^{ip\Delta} \iint dq d\xi e^{iq\xi} \left(p, x+\frac{\xi}{2} \right) \left[-2q \frac{\partial H}{\partial p} + \Delta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{3} \times \right. \\ \left. \times \left(q^3 \frac{\partial^3 H}{\partial p^3} - 3q^2 \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial p^2 \partial x} + 3q \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x^2} - \left(\frac{\Delta}{2} \right)^3 \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right) \right]. \quad (4)$$

Члены, содержащие q , Δ и их степени, можно проинтегрировать по частям. Тогда интегрирование по q и по ξ выполняется при помощи теоремы Фурье, и остается только интеграл по p , который после сокращений приводится к виду

$$\int dp e^{ip\Delta} \left[\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \rho}{\partial p^3} - \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial p} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial^3 \rho}{\partial p^2 \partial x} + 3 \frac{\partial^3 H}{\partial p^2 \partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2 \partial p} \right) \right] = 0. \quad (5)$$

Подынтегральное выражение должно равняться нулю. Первое слагаемое есть классическая скобка Пуассона, а величина в

Если коэффициент при χ_1 , стоящий в правой части этого уравнения, положителен, то при достаточно большом значении χ функция χ_1 станет сравнима с χ_0 , ибо она растет экспоненциально. Иначе говоря, выбирая в центре значения χ , весьма близкие к χ_0 , можно получить различные значения радиуса ядра χ_0 . Чем меньше разность $\chi - \chi_0$ в центре, тем больше χ_0 при данном μ . Фактически каждому μ отвечает такое χ_1 в центре, для которого выполнено граничное условие (50) на краю ядра. μ имеет смысл работы выхода нуклона из ядра. Весьма малые изменения μ приводят к заметным изменениям χ_0 .

Можно заключить, что одно симметричное псевдоскалярное поле во втором приближении не может обеспечить приближенного выполнения свойства постоянной плотности ядерной материи. Весьма вероятно, что правильная теория ядерных сил будет учитывать, по крайней мере, два сорта мезонов или больше.

Так как значения постоянных g, f, α , входящих в основное выражение для потенциальной энергии, нам неизвестны, мы не будем проводить численный анализ полученных результатов.

Литература

1. П. Дирак. Основы квантовой механики. М.—Л., ГТТИ, 1932, гл. XI-а (дополн.е автора к рус. переводу).
2. P. Dirac. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, 26, 376.
3. П. Гомбаш. Статистическая теория атома. М., ИЛ, 1951.
4. В. Паули. Мезонная теория ядерных сил. М., ИЛ, 1947.
5. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, ч. 1. М.—Л., ГТТИ, 1948.
6. А. С. Компанец. ДАН СССР, 1952, 85, вып. 2, 301; см. наст. изд., стр. 220.

УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЯДРА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ *

В предыдущей статье [1] было показано, как произвести переход от уравнений самосогласованного поля Фока к квазиклассическому приближению Томаса — Ферми для некоторых видов обычно рассматриваемых ядерных сил. Исходным пунктом является введение матрицы плотности. Переход к ее квазиклассическим матричным элементам (см. [2, 3]) дает искомое приближение.

Здесь мы дадим сначала критерий законности этого перехода, который в [1] был только намечен.

* ЖЭТФ, 1954, 26, вып. 2, 153.

круглой скобке — квантовая поправка к ней. Эта поправка пропорциональна квадрату кванта действия. Она существенна в тех случаях, когда величины ρ и H обладают большими производными по ρ и по x .

В [3] показано, что из классической скобки Пуассона получаются уравнения Томаса — Ферми для распределения заряда в атом (с обменной поправкой). Добавочные члены в (5) велики вблизи ядра. Кроме того, они велики вблизи верхней границы энергии в импульсном пространстве, где ρ обрывается. Поэтому поправка относительно велика и на больших расстояниях от ядра, где общее число заполненных состояний невелико. В применении к ядру классическая скобка Пуассона может стать недостаточной вблизи границы ядра.

В [4] была сделана попытка исправить метод Томаса — Ферми, вводя вблизи границы ядра «поправку на кинетическую энергию», содержащую производную от плотности. Строгое выражение (5) не сводится к выражению, полученному в [4], так что упомянутая поправка работы [4] вряд ли имеет количественный смысл.

Может оказаться, что классическая скобка применима к ядру во всех точках пространства (кроме очень малой области вблизи внешней границы, где велики высшие производные величины). Пусть, например, решение уравнений самосогласованного поля покажет, что производная $\delta\rho/\delta x$ имеет порядок величины ρ/R (R — радиус ядра), а не порядок ρ/r_0 (r_0 — радиус действия ядерных сил). Так как импульсы частиц в ядре порядка $1/r_0$, а $R \sim r_0 A_0^{1/3}$, то второй член в (5) меньше основного (классического) в отношении $A_0^{-1/3}$, что для тяжелых ядер составляет примерно 0,025. Если же из уравнений самосогласованного поля окажется, что ρ переходит от значения вблизи центра ядра к нулевому значению на расстояниях, сравнимых с r_0 , то квазиклассическое приближение в применении к ядру не лучше, чем представление ядра в виде прямоугольной потенциальной ямы.

Анализ уравнений самосогласованного поля, проведенный нами в статьях [1, 5], показывает, что переходная область на границе ядра, во всяком случае, несколько больше радиуса действия ядерных сил. Поэтому можно попытаться применить метод Томаса — Ферми к короткодействующим ядерным силам, проверяя законность метода по виду распределения плотности. Наибольшая точность, которую можно ожидать, — порядка $A_0^{-1/3}$, тогда как в наилучшем случае результаты будут иметь лишь качественный характер. Что справедливо на самом деле — сказать пока нельзя.

Гораздо труднее доказать применимость к ядру метода самосогласованного поля Фока до перехода к квазиклассическому приближению. Существование ядерных оболочек с определенными значениями орбитального момента заставляет предполагать, что метод самосогласованного поля к ядру применим.

2. Матрица плотности определяется, как известно, таким образом:

$$\rho(q, q') = \sum_v \psi_v(q) \psi_v^*(q'). \quad (6)$$

Здесь q означает совокупность координат нуклона, т. е. его геометрическую координату, механический и изотопический спин, а v — совокупность соответствующих собственных значений.

Будем, как обычно, искать $\psi_v(q)$ в виде произведения волновых функций, зависящих от пространственных координат x , механического спина s и изотопического спина t :

$$\psi_v(q) = \psi_{\pi\tau}(x) \psi_\sigma(s) \psi_\tau(t). \quad (7)$$

В отличие от предыдущей работы [1], мы учли, что пространственные волновые функции нейтрона ($\tau_z = 1$) и протона ($\tau_z = -1$) различны. Теперь мы получим систему уравнений самосогласованного поля, уточненную в этом отношении по сравнению с [1]. Влияние механического спина мы рассматривать не будем, а поэтому учтем только бесспиновые силы. Иначе говоря, будут написаны уравнения самосогласованного поля для взаимодействий следующего вида:

$$V_1 = -g^2 (e^{-\alpha r}/r), \quad (8)$$

$$V_2 = -f^2 (\tau_1 \tau_2) (e^{-\beta r}/r) \quad (9)$$

и для кулоновского взаимодействия

$$V_C = \frac{1}{4} (1 - \tau_{1z})(1 - \tau_{2z}) \frac{e^2}{r}. \quad (10)$$

Учитывая, что собственную функцию спина можно записать как

$$\psi_\tau(t) = \delta_{\tau t}; \quad \psi_\sigma(s) = \delta_{\sigma s}, \quad (11)$$

перепишем матрицу плотности в виде

$$\rho(xst, x't's') = \rho(xt\sigma, x't'\sigma') = \\ = \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma\sigma'} \sum_{\pi} \psi_{\pi\tau}(x) \psi_{\pi\tau'}(x') = \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma\sigma'} \rho_\tau(x, x'). \quad (12)$$

Здесь $\rho_1(x, x')$ — матрица плотности нейтронов, $\rho_{-1}(x, x')$ — матрица плотности протонов.

Операторы взаимодействия V входят в гамильтониан взаимодействия $H_{q,q'}$ уравнений самосогласованного поля (1) в форме

$$(B - A)_{q,q'} = \iint dq^{(4)} dq^{(5)} [V(q'q^{(4)}; q''q^{(5)}) - \\ - V(q'q^{(4)}; q^{(6)}q'')] \rho(q^{(4)}, q^{(5)}). \quad (13)$$

Здесь первый член в квадратных скобках под интегралом описывает прямое, а второй член — обменное взаимодействие. Операторы V_1 , V_2 и V_3 представим в виде

$$\begin{aligned} V_1(q'q^{(4)}; q''q^{(5)}) &= \\ &= \delta_{s's''} \delta_{s(4)s(5)} \delta_{t't''} \delta_{t(4)t(5)} \delta(x' - x''') \delta(x^{(4)} - x^{(5)}) F_1(x' - x^{(4)}), \\ V_2(q'q^{(4)}; q''q^{(5)}) &= \\ &= \delta_{s's''} \delta_{s(4)s(5)} \tau_{t't''} \tau_{t(4)t(5)} \delta(x' - x''') \delta(x^{(4)} - x^{(5)}) F_2(x' - x^{(4)}), \\ V_3(q'q^{(4)}; q''q^{(5)}) &= \delta_{s's''} \delta_{s(4)s(5)} \times \\ &\times \frac{1}{4} (\delta_{t't''} \tau_{t(4)t(5)} - \tau_{2t't''} (\delta_{t(4)t(5)} - \tau_{2t(4)t(5)}) \delta(x' - x''') \delta(x^{(4)} - \\ &- x^{(5)}) F_C(x' - x^{(4)}), \end{aligned}$$

где F_1 , F_2 и F_C означают пространственные части соответствующих операторов.

Пользуясь равенствами (12) — (14), можно выразить операторы взаимодействия $B \rightarrow A$ через матрицу плотности и операторы V . Для обычных сил, зависящих только от пространственных координат, получаем

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A)_{q'q''} &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\tau\tau'} \int [2V_1(x'x^{(6)}, x''x^{(4)}) \bar{\rho}(x^{(4)}x^{(6)}) - \\ &- V_1(x'x^{(6)}, x^{(4)}x^{(6)}) \rho_{\tau}(x^{(4)}x^{(6)})] dx^{(4)} dx^{(6)} = \\ &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\tau\tau'} \int [2\delta(x' - x''') \delta(x^{(4)} - x^{(6)}) F_1(x' - x^{(6)}) - \rho(x^{(6)}x^{(4)}) - \\ &- \delta(x' - x^{(4)}) \delta(x^{(6)} - x''') F_1(x' - x^{(6)}) \rho_{\tau}(x^{(4)}x^{(6)})] dx^{(4)} dx^{(6)} = \\ &= [2\delta(x' - x''') \int dx^{(4)} F_1(x' - x^{(4)}) \bar{\rho}(x^{(4)}x^{(4)}) - \\ &- F_1(x' - x''') \rho_{\tau}(x'x''')] \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\tau\tau'}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\bar{\rho}$ означает $\rho_1 + \rho_{-1}$. Симметричные силы, зависящие от изотопического спина, приводятся к выражению

$$(B \rightarrow A)_{q'q''} = -\delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\tau\tau'} F_2(x' - x''') [2\bar{\rho}(x'x''') - \rho_{\tau}(x'x''')]. \quad (16)$$

В (16) входят только обменные силы, т. е. только $A_{q'q''}$. Наконец, кулоновские силы действуют на одну протонную компоненту и дают

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A)_{q'q''} &= [2\delta(x' - x''') \int dx^{(4)} F_C(x' - x^{(4)}) \rho_{-1}(x^{(4)}x^{(4)}) - \\ &- F_C(x' - x''') \rho_{-1}(x'x''')] \delta_{\sigma\sigma'}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для перехода к квазиклассическому приближению надо пред- ставить $\rho_r(x'x''')$ в форме (2). В компоненте Фурье теперь можно

писать просто x вместо полусуммы $(x' + x''')/2$. Подставляя $\rho_r(x'x''')$ в формулы (15) — (17) и переходя к компонентам Фурье от величин $B \rightarrow A$, получим для сил обычного типа

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A)_{p,x,\tau} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[2 \int dx' F_1(x - x') \int dp' \bar{\rho}(p'x) - \right. \\ &\left. - \int dp' \rho_{\tau}(p'x) \int dx' F_1(x') e^{i(p' - p)x'} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Для симметричных сил выражение (16) дает

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A)_{p,x,\tau} &= \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int dp' [2\bar{\rho}(p'x) - \rho_{\tau}(p'x)] \int dx' F_2(x') e^{i(p' - p)x'}. \end{aligned} \quad (19)$$

Кулоновские силы приводят к выражению

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A)_{p,x,-1} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[2 \int dx' F_C(x - x') \int dp' \rho_{-1}(p'x) - \right. \\ &\left. - \int dp' \rho_{-1}(p'x) \int dx' F(x') e^{i(p' - p)x'} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Входящие сюда интегралы можно представить в более удобном виде. Прежде всего интеграл

$$\int dx' F_1(x - x') \int dp' \bar{\rho}(p'x) \equiv g\Phi(x) \quad (21)$$

есть потенциальная энергия нуклона в самосогласованном поле сил. Потенциал Φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi - a^2\Phi = 4\pi g \cdot 2 \int \bar{\rho} dp'. \quad (22)$$

Здесь множитель 2 перед интегралом учитывает возможные ориентации спина. Потенциал симметричных сил не входит в уравнения, так как формула (19) содержит только обменный член и явная координатная зависимость выпадает.

В уравнение для протонов входит еще и электростатический потенциал, который подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi_C = -4\pi e \cdot 2 \int \rho_{-1} dp. \quad (23)$$

Обменные интегралы легко вычисляются. Так,

$$\int dx' F_1(x') e^{i(p' - p)x'} = -\frac{4\pi g^2}{a^2 + (p - p')^2}. \quad (24)$$

Плотности нейтронов и протонов следует искать в виде

$$\rho_{\tau}(p, x) = \rho(p - P_{\tau}); \rho(z) = \begin{cases} 1/(2\pi)^3, & z \leq 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \quad (25)$$

где P_{τ} — граничный импульс протонов и нейтронов. Отсюда имеем

$$\int \rho_{\tau}(p'x) dp' \int dx' F_1(x') e^{i(p'-p)x'} = -\frac{g^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\rho} (P_{\tau}^2 - p^2 + \alpha^2) \ln \frac{(P_{\tau} + p)^2 + \alpha^2}{(P_{\tau} - p)^2 + \alpha^2} - 2\alpha [\operatorname{arctg}(P_{\tau} + p) + \operatorname{arctg}(P_{\tau} - p)] + 2P_{\tau} \right\} = -\frac{g^2}{2\pi} \varphi(\alpha; P_{\tau}, p), \quad (26)$$

здесь φ — функция, стоящая в фигурных скобках.

Условие стационарности состоит в том, что классическая скобка Пуассона от величины r_{τ} должна обращаться в нуль. Если подставить в эту скобку r_{τ} в форме (25), обращение скобки в нуль означает просто, что гамилтониан равен постоянному числу, т. е. не зависит от координаты на границе $p = P_{\tau}$ (см. [3, 5]). Отсюда получаем уравнения для нейтронной и протонной компонент:

$$\frac{P_{\tau}^2}{2m} + g\Phi - \frac{g^2}{2\pi} \varphi(\alpha; P_1, P_2) + \frac{f^2}{2} [2\varphi(\nu; P_{-1}, P_1) + \varphi(\nu; P_1, P_1)] = -\mu_1, \quad (27)$$

$$\frac{P_{-1}^2}{2m} + g\Phi + \frac{g^2}{2\pi} \varphi(\alpha; P_{-1}, P_{-1}) + \frac{f^2}{2\pi} [2\varphi(\nu; P_1, P_{-1}) + \varphi(\nu; P_{-1}, P_{-1})] + e\Phi_C - \frac{e^2}{2\pi} \varphi(0; P_{-1}, P_{-1}) = -\mu_{-1}. \quad (28)$$

Здесь согласно (24)

$$\varphi(0; P_{-1}, P_{-1}) = 2P_{-1}. \quad (29)$$

Если пренебречь электростатическими членами в (28), то следует считать просто $\mu_1 = \mu_{-1}$, $P_1 = P_{-1}$, как и должно быть в теории, в которой нейтроны и протоны вполне равноправны. Одни только силы (9), содержащие оператор $(\tau_1 \tau_2)$, не дают устойчивой модели ядра, потому что уравнения (27), (28) без потенциала Φ не могут быть удовлетворены при положительных значениях μ_{τ} . Величины μ_{τ} имеют смысл работы вырывания нуклона из ядра.

Условие связи между числом протонов и числом нейтронов состоит в том, что P_1 и P_{-1} должны обратиться в нуль в одной точке. Действительно, если в некоторой точке P_1 обратится в нуль, а P_{-1} еще не будет равен нулю, то система (20), (21), (25) и (26) станет противоречивой (перепределенной), так как в ней придется считать $P_1 = 0$ до тех пор, пока P_{-1} тоже станет равным нулю. Если же P_1 и P_{-1} будут равны нулю в одной и той же точ-

ке R , то для нее достаточно потребовать условий

$$\left(\frac{d}{dr} \ln r\Phi \right)_{r=R} = -\alpha, \quad (30)$$

$$\left(\frac{d}{dr} r\Phi_C \right)_{r=R} = 0. \quad (31)$$

Вместе с очевидными условиями

$$(d\Phi/dr)_{r=0} = 0; \quad (d\Phi_C/dr)_{r=0} = 0 \quad (32)$$

система уравнений является полной и непротиворечивой.

Уравнения самосогласованного поля с учетом кулоновских сил, но без учета обмена и симметричных сил (9) рассматривали Иваненко и Родичев [6], но их решение не удовлетворяет условиям (32), выражающим тот факт, что начало координат не является особой точкой. В работе [1] наша система была несколько упрощена в том смысле, что в уравнение для протонов в функцию Φ подставлялось $P_1 = P_{-1}$, т. е. не входил граничный импульс нейтронов, а в уравнение для нейтронов не входил граничный импульс протонов. Теперь наши уравнения в этом смысле уточнены. При этом получается обоснование то обстоятельство, что P_1 и P_{-1} обращаются в нуль в одной точке.

Л и т е р а т у р а

1. А. С. Компанец. ЖЭТФ, 1953, 25, вып. 5(11), 540; см. наст. изд., стр. 225.
2. Н. Дирак. Основы квантовой механики. М.—Л., ГИИИ, 1932, гл. XI-а (дополн.е автора к рус. переводу).
3. P. Dirac. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, 26, 376.
4. Н. Гомбаш. Статистическая теория атома. М., ИЛ, 1951.
5. А. С. Компанец. ДАН СССР, 1952, 85, вып. 2, 301; см. наст. изд., стр. 220.
6. Д. Д. Иваненко, В. Родичев. ДАН СССР, 1950, 70, 605.

УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ В АТОМЕ *

Совместно с Е. С. Павловским

1. Уравнение для матрицы плотности

Как известно, наилучший метод нахождения термов многоэлектронного атома был предложен В. А. Фоком. Метод Фока основан на том, что интеграл $\int \Psi^* H \Psi dq$ стационарен для всех

* ЖЭТФ, 1956, 31, вып. 3(9), 427.

собственных значений гамильтониана H атома. В частности, этот интеграл имеет абсолютный минимум для основного состояния атома (q обозначает совокупность всех пространственных и спиновых переменных атома). На волновую функцию при этом налагается условие

$$\int |\Psi|^2 dq = 1. \quad (1)$$

В методе Фока волновая функция выбирается в виде симметризованного произведения волновых функций отдельных электронов $\psi_i(q)$:

$$\Psi = (Z!)^{-1/2} \sum_P (-1)^P \prod_i \psi_i(Pq) \quad (2)$$

(P означает перестановку переменных отдельных электронов).

Волновые функции $\psi_i(q_i)$ можно всегда считать взаимно ортогональными и нормированными, так как их можно ортогонализировать путем линейной подстановки. Если функция ψ выбрана в форме (2), то без дальнейших ограничений общности удобно брать в качестве дополнительного условия, налагаемого на волновую функцию, следующее:

$$\int \psi_i^*(q) \psi_k(q) dq = \delta_{ik} \quad (3)$$

вместо указанного выше требования (1).

Прежде чем варьировать интеграл энергии, приведем его к специальному виду, пользуясь тем, что гамильтониан содержит только члены, относящиеся к отдельным электронам и их парным взаимодействиям:

$$H = \sum_i U(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,k \neq i} V(q_i, q_k), \quad (4)$$

причем функция V симметрична относительно обеих входящих в нее переменных. В атоме U есть сумма кинетической и потенциальной энергии электрона в поле ядра, V — энергия электростатического взаимодействия электронов.

Подставляя (2) и (4) в выражение $\Psi^* H \Psi dq$ и используя условие (3), получаем

$$\begin{aligned} \int \Psi^* H \Psi dq &= \sum_i \int \psi_i^* U \psi_i dq + \\ &+ \sum_{i,k < i} \iint \psi_i^*(q') \psi_k^*(q) V(q, q') [\psi_i(q) \psi_k(q) - \psi_i(q) \psi_k(q')] dq dq'. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь q слева относится ко всему атому, а справа — к отдельному электрону. Вариация выражения (5) равна

$$\begin{aligned} \int \delta \Psi^* H \Psi dq &= \sum_i \int \delta \psi_i^*(q) dq \left\{ U \psi_i(q) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k < i} \int \psi_k^*(q') V(q, q') [\psi_i(q) \psi_k(q') - \psi_i(q') \psi_k(q)] dq' \right\} = \\ &\equiv \sum_i \int \delta \psi_i^*(q) dq \left[U \psi_i(q) + B(q) \psi_i(q) - \sum_k B_{ik}(q) \psi_k(q) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

причем использованы сокращенные обозначения

$$B_{ik}(q) \equiv \int \psi_k^*(q') V(q, q') \psi_i(q') dq', \quad B(q) \equiv \sum_k B_{kk}(q). \quad (7)$$

Умножая дополнительные условия (3) на вариационные параметры a_{ik} и добавляя вариации (3) к вариации интеграла энергии, получаем систему уравнений для искомого волновых функций ψ_i :

$$U(q) \psi_i(q) + B(q) \psi_i(q) - \sum_k B_{ik}(q) \psi_k(q) + \sum_k a_{ik} \psi_k(q) = 0. \quad (8)$$

Существенно, что в этой сумме не исключается тот член, в котором $i=k$.

Параметры a_{ik} легко выразить через интегралы от U , B и B_{ik} , пользуясь условием (3). Именно,

$$a_{ik} = \int \psi_k^* U \psi_i dq + \int \psi_k^* B \psi_i dq - \sum_j \int \psi_k^* B_{ij} \psi_j dq. \quad (9)$$

Пользуясь определениями, легко показать, что матрица a_{ik} — эрмитовская: $a_{ik} = a_{ki}^*$.

Уравнения (8) могут быть переписаны в очень компактном виде, если ввести матрицу плотности $\rho(q, q')$, которая определяется следующим образом [1]:

$$\rho(q, q') = \sum_i \psi_i(q) \psi_i^*(q'). \quad (10)$$

При этом сами волновые функции $\psi_i(q)$ из уравнений исключаются.

Чтобы перейти к матрице плотности $\rho(q, q')$, напишем вместе с уравнением (8) уравнение для комплексно-сопряженной функции $\psi_i^*(q')$:

$$\begin{aligned} U^*(q') \psi_i^*(q') + B^*(q') \psi_k^*(q') - \\ - \sum_k B_{ik}^*(q') \psi_k^*(q') + \sum_k a_{ik}^* \psi_k^*(q') = 0. \end{aligned} \quad (8^*)$$

Умножим теперь уравнение (8) на $\psi_i^*(q')$, а уравнение (10) — на $\psi_i(q)$, просуммируем по i и вычтем (8*) из (8). Члены, содержащие a_{ik} и a_{ik}^* , при этом сократятся, ибо

$$\begin{aligned} \sum_k a_{ik} \psi_k(q) \psi_i^*(q') - \sum_k a_{ik}^* \psi_k^*(q') \psi_i(q) &= \\ = \sum_k a_{ik} \psi_k(q) \psi_i^*(q') - \sum_k a_{ki}^* \psi_i^*(q') \psi_k(q) &= 0 \end{aligned}$$

в силу эрмитовости матрицы a_{ik} .

Члены, стоящие при U и B , непосредственно переписываются через матрицу $\rho(q, q')$. Выражение, содержащее B_{ik} , тоже можно переписать при помощи ρ . Действительно, в уравнении (8) получается

$$\begin{aligned} \sum_k B_{ik}(q) \psi_k(q) \psi_i^*(q') &= \\ = \sum_{i,k} \int \psi_k^*(q') V(q, q') \psi_i(q'') dq'' \psi_k(q) \psi_i^*(q') &= \\ = \int V(q, q'') \rho(q, q'') dq'' \rho(q'', q), & \quad (11) \end{aligned}$$

и аналогично преобразуется уравнение (8*):

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} \psi_i(q) \psi_k^*(q') \int \psi_k(q'') V(q', q'') \psi_i^*(q'') dq'' &= \\ = \int \rho(q, q'') dq'' \rho(q'', q') V(q'', q). & \quad (11^*) \end{aligned}$$

Если ввести оператор

$$A_{qq''} \equiv \rho(q, q'') V(q, q''), \quad (12)$$

то выражение (11) переписется так:

$$\sum_{i,k} B_{ik}(q) \psi_k(q) \psi_i^*(q') = \int A_{qq''} dq'' \rho(q'', q'), \quad (13)$$

а (11*) получит вид

$$\sum_{i,k} B_{ik}^*(q') \psi_i(q) \psi_k^*(q') = \int \rho(q, q'') dq'' A_{qq''}^*, \quad (13^*)$$

где использована очевидная симметрия оператора взаимодействия V :

$$V(q', q'') = V(q'', q').$$

Члены, происходящие от B , тоже можно выразить через матрицу плотности

$$B \sum_i \psi_i(q) \psi_i^*(q') = \left(\int \rho(q'', q'') V(q, q'') dq'' \right) \rho(q, q').$$

Вводя операторы

$$B_{qq''} = \delta(q - q'') \int \rho(q'', q''') V(q, q''') dq'''; \quad U_{qq''} = \delta(q - q'') U, \quad (14)$$

приводим уравнение для матрицы плотности к виду

$$\begin{aligned} \int dq'' \{ (U_{qq''} + B_{qq''} - A_{qq''}) \rho(q'', q') - \\ - \rho(q, q'') (U_{q''q'} + B_{q''q'} - A_{q''q'}) \} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Это последнее уравнение представляет собой квантовую скобку Пуассона между операторами

$$H_{qq''} \equiv U_{qq''} + B_{qq''} - A_{qq''} \quad (16)$$

и матрицей плотности ρ

$$H\rho - \rho H = 0. \quad (17)$$

Иными словами, H есть эффективный оператор Гамильтона. В этом операторе член B отвечает самосогласованному полю, которое обязано распределению электронной плотности, а член A есть так называемый оператор обменной энергии.

Он появился в уравнениях потому, что с самого начала была взята антисимметризованная волновая функция Ψ [см. (2)] в соответствии с принципом Паули для системы электронов. Уравнение (17) несколько отличается от обычных уравнений квантовой механики тем, что оператор Гамильтона H сам зависит от плотности ρ .

Исключим теперь спиновую переменную, пользуясь тем, что исходный гамильтониан (4) не зависит от спинов. Матрица плотности диагональна относительно спиновой переменной, так как в сумму по i можно поставить полную систему спиновых функций. Поэтому обменный оператор тоже диагонален в переменных спина. Оператор $B_{qq''}$ содержит по сравнению с $A_{qq''}$ лишнее интегрирование по q'''' , которое включает в себя и суммирование по спинам. Это дает в $B_{qq''}$ дополнительный множитель 2 по сравнению с $A_{qq''}$ (Дирак [2] первоначально писал A с лишним множителем 2, что было исправлено Йенсеном [3]).

Итак, мы можем записать все величины уже не через полную совокупность переменных q , а только через пространственную переменную \mathbf{r} , потому что относительно спиновой переменной все выражения диагональны:

$$A_{\mathbf{r}\mathbf{r}''} = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}''), \quad (18)$$

$$B_{\mathbf{r}\mathbf{r}''} = 2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') e^2 \int \frac{\rho(\mathbf{r}''', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} d\mathbf{r}'''. \quad (19)$$

2. Переход к квазиклассическому приближению

Дирак показал [2], что путем перехода к квазиклассическому приближению можно из уравнения (17) получить известное уравнение Томаса — Ферми для распределения потенциала в атоме. При этом обменный оператор у Дирака давал в уравнении для потенциала член, который меньше остальных членов в отношении $Z^{-3/2}$, где Z — атомный номер элемента. Этот обменный член трактовался многими авторами [3—5] не как малая поправка по отношению к самому уравнению, а наравне со всеми остальными членами уравнения. Мы покажем, что так поступать нельзя.

Пределный переход к квазиклассическому приближению в работе Дирака состоял в том, что квантовая скобка Пуассона для матрицы плотности $\rho(r, r')$ была просто заменена классической скобкой Пуассона для коэффициента Фурье от матрицы плотности. Между тем оказывается, что если не ограничиться этим приближением, а найти член следующего порядка малости, то появится поправка, пропорциональная $Z^{-3/2}$, как и «обменный член», оставляемый Дираком в уравнении. Как будет показано дальше, добавочный член, пропорциональный $Z^{-3/2}$, входит с малым численным коэффициентом по сравнению с обменным членом. Но, во всяком случае, целесообразно решать уравнение с «обменным членом» точно. Всякий член, пропорциональный $Z^{-3/2}$, должен рассматриваться только как поправка соответствующего порядка к обычному уравнению Томаса — Ферми.

Следует указать, что Вайцекер [6] пытался улучшить уравнение Томаса — Ферми, вводя в него другие поправочные члены порядка $Z^{-3/2}$, кроме обменных. Но метод, которым пользовался Вайцекер, нельзя считать убедительным. На самом деле оказывается, что правильное выражение соответствующей поправки, вытекающее из уравнения (17), мельше вайцекеровского в 9 раз. Из-за этого в конце концов выходит, что вместо обменной поправки является преобладающей по сравнению с другими членами порядка $Z^{-3/2}$, так что в численном выражении исправления обычного уравнения Томаса — Ферми, производившиеся до сих пор, следует считать верными. Но это заключение справедливо только до тех пор, пока обменный поправочный член мал по сравнению с основным. Последнее условие не всегда было выполнено: например, на больших расстояниях от ядра поправка уже значительно превышает основной член.

Совершим теперь переход к квазиклассическому приближению. Для этого представим сначала матричные элементы $\rho(x, x')$ и $H(x, x')$ в виде разложений в интегралы Фурье по плотности аргументов $x \rightarrow x'$:

$$\rho(x, x') = \int \rho\left(p, \frac{x+x'}{2}\right) e^{ip(x-x')} dp, \quad (20)$$

$$H(x, x') = \int H\left(p, \frac{x+x'}{2}\right) e^{ip(x-x')} dp, \quad (21)$$

где все аргументы векторные, так что x следует понимать, как \mathbf{r} , и т. п. Подставим эти разложения в скобку Пуассона:

$$\begin{aligned} H\rho - \rho H &= \int dx'' [H(x, x'')\rho(x'', x') - \rho(x, x'')H(x'', x')] = \\ &= \iiint dx'' dp dp_1 \left[H\left(p_1, \frac{x+x''}{2}\right) \rho\left(p, \frac{x+x'}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \rho\left(p_1, \frac{x+x''}{2}\right) H\left(p, \frac{x+x'}{2}\right) \right] \times \\ &\quad \times \exp\{ip_1(x-x'') + ip(x''-x')\}. \end{aligned} \quad (22)$$

В первом слагаемом этого интеграла сделаем следующую замену переменных: $x'' = x + \zeta + \Delta$, $x' = x - \Delta$, $p_1 = p - q$. Во втором слагаемом переменим обозначения p и p_1 и положим $x'' = x + \zeta$, $x' = x - \Delta$, $p_1 = p + q$. После этой подстановки скобка Пуассона сведется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int dp e^{ip\Delta} \iiint dq d\zeta e^{iq(\zeta+\Delta)} \rho\left(p, x + \frac{\zeta}{2}\right) \left[H\left(p - q, x + \frac{\zeta}{2} + \frac{\Delta}{2}\right) - \right. \\ \left. - H\left(p + q, x + \frac{\zeta}{2} - \frac{\Delta}{2}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

При переходе к квазиклассическому приближению надо считать большими область движения и импульс в интеграле (23). Иными словами, велики импульс p и координата ζ , потому что ζ входит только в комбинации $x + \zeta/2$ (мы положили $\hbar = 1$, а также будем полагать в дальнейшем $e = 1$ и $m = 1$, т. е. перейдем к атомным единицам). Но если велика координата ζ , то соответственно мала разность импульсов q , потому что произведение $q\zeta$ входит в показатель экспоненты. Разность координат Δ тоже следует считать малой, ибо она входит в показатель, умноженная на большой импульс p . Следовательно, разность гамма-функций под интегралом можно разложить в ряд по степеням q и Δ . Мы ограничимся третьим членом разложения. Очевидно, что нулевой и второй члены сократятся, а останутся только первый и третий. Будем сначала писать формулы без тензорных значков, которые затем легко ввести в окончательный результат. Разложение выглядит следующим образом (см. [7]):

$$\begin{aligned} H\left(p - q, x + \frac{\zeta}{2} + \frac{\Delta}{2}\right) - H\left(p + q, x + \frac{\zeta}{2} - \frac{\Delta}{2}\right) = \\ = -2q \frac{\partial H}{\partial p} + \Delta \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3} \left[-q^3 \frac{\partial^3 H}{\partial p^3} + 3q^2 \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^3 H}{\partial p^2 \partial x} - \right. \\ \left. - 3q \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \frac{\partial^3 H}{\partial p \partial x^2} + \left(\frac{\Delta}{2} \right)^3 \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Легко избавиться от множителей q и Δ путем интегрирования по частям, заменяя $qe^{iq\zeta}$ и $\Delta e^{i\Delta(x-\zeta)}$ на $-i(\partial/\partial\zeta)e^{iq\zeta}$ и $-i(\partial/\partial p)e^{i\Delta(x-\zeta)}$.

Внутренний интеграл, как известно, равен $4\pi|\rho - \rho'|^{-2}$. Последующее интегрирование по $d\rho'$ элементарно и дает

$$A_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho_0^2 - p^2}{p} - \ln \frac{\rho_0 + p}{\rho_0 - p} + 2\rho_0 \right). \quad (29)$$

По сравнению с B , A_p имеет меньший порядок величины, что будет показано в дальнейшем после перехода к единицам Томаса — Ферми. Поэтому в наименьшем приближении гамильтониан выглядит так:

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{Z}{r} + B = \frac{p^2}{2} - \frac{Z}{r} + \frac{1}{3\pi^2} \int \frac{d r''}{|r - r''|} \rho_0^3(r''). \quad (30)$$

Согласно (25) функция ρ_0 в этом приближении должна обращаться в нуль классическую скобку Пуассона:

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} - \frac{\partial H_0}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial p_i} = 0.$$

Из выражений для H_0 и ρ_0 получаем

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \rho_i; \quad \frac{\partial H_0}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3\pi^2} \int \frac{d r''}{|r - r''|} \rho_0^3(r'') - \frac{Z}{r} \right);$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial p_i} = \frac{\rho_i}{p} \rho_0'; \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r} \frac{d \rho_0}{dr} \rho_0',$$

так что скобка Пуассона имеет следующий вид:

$$\frac{(\rho, \rho)'}{p r} \rho_0' \left[\rho \frac{d \rho_0}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3\pi^2} \int \frac{d r''}{|r - r''|} \rho_0^3(r'') - \frac{Z}{r} \right) \right] = 0. \quad (31)$$

Функция ρ_0' отлична от нуля только при $p = \rho_0$. Следовательно, при этом значении p обращается в нуль выражение в круглой скобке:

$$\rho_0 \frac{d \rho_0}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3\pi^2} \int \frac{\rho_0^3(r'')}{|r - r''|} d r'' - \frac{Z}{r} \right) = 0. \quad (32)$$

Это уравнение непосредственно интегрируется, причем из условия на бесконечности константа интегрирования должна быть положена равной нулю:

$$\frac{\rho_0^2}{2} + \frac{1}{3\pi^2} \int \frac{\rho_0^3}{|r - r''|} d r'' - \frac{Z}{r} = 0. \quad (33)$$

Выражение в левой части равенства есть энергия, вычисленная для граничного значения импульса ρ_0 . Как мы видим, она обращается в нуль. Поэтому функция ρ_0 может быть записана в следующем, весьма удобном для дальнейших вычислений виде:

$$\rho_0 = \rho_0(E_0) = \begin{cases} 1, & E_0 \leq 0, \\ 0, & E_0 > 0. \end{cases} \quad (34)$$

Приравняв нулю коэффициент Фурье, получим после интегрирования по частям следующее выражение, записанное уже в тензорной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \\ + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^3 \rho}{\partial p_i \partial p_k \partial p_l} - 3 \frac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_k \partial p_l} \frac{\partial^3 \rho}{\partial p_i \partial p_k \partial p_l} + \frac{\partial^3 \rho}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \\ + 3 \frac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial p_k \partial p_l} \frac{\partial^3 \rho}{\partial p_i \partial p_k \partial p_l} - \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_k \partial p_l} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Первые два члена в этом равенстве представляют классическую скобку Пуассона от коэффициента Фурье плотности ρ , а остальные члены дают квантовую поправку к скобке Пуассона. Исследование этой поправки и является основной целью настоящей работы.

3. Уравнения самосогласованного поля в квазиклассическом приближении

В наименьшем приближении коэффициент Фурье от матрицы плотности имеет вид

$$\rho_0 = \rho_0(p - \rho_0(r)) = \begin{cases} 1, & p \leq \rho_0(r), \\ 0, & p > \rho_0(r). \end{cases} \quad (26)$$

Иными словами, все состояния, у которых импульс меньше некоторого граничного импульса $\rho_0(r)$, заняты, а состояния, у которых $p > \rho_0(r)$, свободны. При помощи ρ_0 можно определить коэффициенты Фурье от различных членов гамильтониана (речь идет о коэффициентах Фурье относительно разности аргументов $x - x'$, так что координатная зависимость входит в них через полусуммы аргументов).

Самосогласованное потенциальное поле B [см. (19)] дает следующее выражение коэффициента Фурье:

$$B = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d r''}{|r - r''|} \int \rho_0(p - \rho_0) d p = \frac{1}{3\pi^2} \int \frac{d r''}{|r - r''|} \rho_0^3(r''). \quad (27)$$

Здесь $(2\pi)^{-3}$ есть коэффициент Фурье от $\delta(r - r')$, а внутренний интеграл равен $4\pi \rho_0^3/3$ по определению функции ρ_0 . Спinoвые состояния учтены множителем 2, входящим в B .

Обменный оператор преобразуется следующим способом:

$$\begin{aligned} A_p &= \int \frac{e^{i p(r-r')}}{|r - r'|} \frac{d r'}{(2\pi)^3} \int d p' \rho_0(p' - \rho_0) e^{-i p'(r-r')} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d p' \rho_0(p' - \rho_0) \int \frac{d r'}{|r - r'|} e^{i(p-p', r-r')}. \end{aligned} \quad (28)$$

От уравнения (33) легко перейти к его обычной форме. Действительно, полагая

$$\varphi_0 = -\frac{1}{3\pi^2} \int \frac{\rho_0^3(r')}{|r-r'|} dr' + \frac{Z}{r}, \quad (35)$$

мы видим, что

$$\Delta \varphi_0 = 4\pi \rho_0^3 / 3r^2. \quad (36)$$

Но согласно (33), $\rho_0^2 = 2\varphi_0$, так что потенциал удовлетворяет уравнению Томаса — Ферми

$$\Delta \varphi_0 = (2^{7/2}/3\pi) \varphi_0^{3/2}. \quad (37)$$

Перейдем теперь к уравнениям первого приближения. Для этого будем писать матрицу плотности и потенциал в виде разложений

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 = \rho_0(E_0) + \rho_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1. \quad (38)$$

Здесь φ_0 , по определению, есть сумма потенциала ядра и самосогласованного поля нулевого приближения. Функция $\rho_0(E_0)$ определена формулой (34). Поправочные члены φ_1 и ρ_1 мы будем подставлять только в скобку Пуассона нулевого приближения, а во всех остальных членах уравнения (25) и в обменном операторе оставим только нулевое приближение.

Если подставить в часть выражения (25), содержащую третьи производные, гамльтониан H_0 согласно (30), то легко убедиться, что останется только первый член в круглых скобках. Действительно, все смешанные производные от H_0 по x_i и по ρ_i равны нулю и, кроме того, H_0 имеет только производную по ρ_i не выше второго порядка. Вычисляя производные, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H_0}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} &= -x_i x_k x_l \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} - \\ &- (\delta_{ik} x_l + \delta_{il} x_k + \delta_{kl} x_i) \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\varphi_0}{dr}, \\ \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \rho_i \partial \rho_k \partial \rho_l} &= (\delta_{ik} \rho_l + \delta_{kl} \rho_i + \delta_{il} \rho_k) \frac{d^2 \rho_0}{dE_0^2} + \rho_i \rho_k \rho_l \frac{d^3 \rho_0}{dE_0^3}. \end{aligned} \quad (39)$$

Удобно выделить множитель (ρ, \mathbf{r}) и в остальной части изменить независимые переменные, входящие в задачу: вместо ρ, r и $(\rho \mathbf{r})$ ввести переменные

$$E_0 = 1/2 \rho^2 - \varphi_0, \quad M^2 = [\mathbf{r}, \rho^2] = \rho^2 r^2 - (\rho \mathbf{r})^2 \quad (40)$$

и r . В новых переменных произведем введение третьих производных вы- г- лядит так:

$$\frac{\partial^3 H_0}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial \rho_i \partial \rho_k \partial \rho_l} =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2E_0 \frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + 2 \left(\varphi_0 \frac{d^2 \rho_0}{dr^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_0}{dr} \right)^2 \right) - \right. \\ &\left. - M^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right\} + 3 \frac{d^2 \rho_0}{dE_0^2} \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) \equiv \frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{\partial I}{\partial r}, \end{aligned} \quad (41)$$

где обозначение I очевидно.

Обменную энергию A [см. (29)] следует подставлять только в скобку Пуассона нулевого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} - \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial \rho_i} &= -\frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \left(\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial A}{\partial \rho_0} \right)_{\rho=\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \rho} \\ &= -\frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{1}{\pi} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{d\varphi_0}{dE_0} = -\frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \sqrt{2\varphi_0} \frac{d\rho_0}{dE_0}. \end{aligned} \quad (42)$$

Будем полагать, что поправка к плотности выражена через E_0, M^2 и r . Как известно, классическая скобка Пуассона от любого интеграла движения или от любой функции интегралов движения обращается в нуль. Поэтому при подстановке ρ_1 в скобку Пуассона нулевого приближения не обратится в нуль только тот член, который содержит производную по r . Этот член равен

$$\frac{\partial H_0}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} = \frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}. \quad (43)$$

Поправка к потенциалу φ_1 зависит, по определению, только от r . Поэтому она дает член

$$\frac{(\rho \mathbf{r})}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} \frac{\partial \rho_0}{\partial E_0}. \quad (44)$$

Все выражения, входящие в уравнение (25), после сокращения на $(\rho \mathbf{r})/r$ имеют вид производных по r от различных выражений:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{d\varphi_1}{dr} \frac{d\rho_0}{dE_0} = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{2\varphi_0} \right) \frac{d\rho_0}{dE_0} + \frac{1}{24} \frac{\partial I}{\partial r}. \quad (45)$$

Так как ρ_0 не зависит от r , это уравнение можно сразу проинтегрировать, полагая произвольную аддитивную функцию от E_0 и M^2 равной нулю из условий на бесконечности. Это интегрирование по r стало возможным вследствие выбора независимых переменных E_0, M^2 и r . Итак,

$$\begin{aligned} \rho_1 + \varphi_1 \frac{d\rho_0}{dE_0} &= -\frac{\sqrt{2\varphi_0}}{\pi} \frac{d\rho_0}{dE_0} + \\ &+ \frac{1}{24} \frac{d^2 \rho_0}{dE_0^2} \left[2E_0 \frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + 2\varphi_0 \frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} - \left(\frac{d\varphi_0}{dr} \right)^2 - M^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right] + \\ &+ \frac{1}{8} \frac{d^2 \rho_0}{dE_0^2} \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Другое уравнение, связывающее Φ , и ρ , есть уравнение Пуассона для потенциала

$$\Delta\Phi_1 = \frac{1}{r^2} \int \rho_1 dr. \quad (47)$$

Хотя поправки к ρ_0 велики при $E_0 = 0$, но в потенциал они входят интегрально, и поэтому результирующая добавка к потенциалу мала.

В уравнении (47) удобно прежде всего произвести интегрирование по частям. При этом члены, не зависящие от угла, приобретают просто множитель 4π , а член, пропорциональный M^2 , получает множитель $4\pi^{2/3} r^2 \rho^2$ потому, что M^2 пропорционален квадрату синуса между γ и ρ . При помощи равенства (40) величина, стоящая в квадратной скобке правой части (46), после интегрирования по углам становится равной

$$\frac{8\pi}{3} (E_0 + \Phi_0) \left(\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} \right) - 4\pi \left(\frac{d\Phi_1}{dr} \right)^2.$$

Интегрирование по r тоже легко произвести, если воспользоваться определением (34) функции ρ_0 .

Действительно, вместо $\rho^2 dr$ напишем $\sqrt{2(E_0 + \Phi_0)} dE_0$ и воспользуемся тем, что $d\Phi_0/dE_0 = -\delta(E_0)$. Интегралы от второй и третьей производных ρ_0 легко берутся при помощи известной формулы

$$\int f(E_0) \frac{d^{n+1}}{dE_0^{n+1}} \rho_0(E_0) dE_0 = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dE_0^n} f(E_0) \right)_{E_0=0}. \quad (48)$$

Подставляя ρ_1 из (46) в уравнение (47), получим

$$\Delta\Phi_1 - \frac{4}{\pi} \sqrt{2\Phi_0} \Phi_1 = \frac{8}{\pi^2} \Phi_0 + \frac{1}{12\pi \sqrt{2\Phi_0}} \left[4\Delta\Phi_0 - \frac{1}{\Phi_0} \left(\frac{d\Phi_0}{dr} \right)^2 \right]. \quad (49)$$

Это и есть уравнение для поправки к потенциалу. Здесь первое слагаемое справа учитывает обмен, а второе слагаемое происходит от добавки к классической скобке Пуассона. Если представить выражение $\Delta\Phi_0$ в правую часть (49), то получится слагаемое $(8/9\pi^2)\Phi_0$, которое в 9 раз меньше обменного члена. При численном интегрировании оказывается, что такого же порядка отношения обеих поправок к потенциалу. Перейдем теперь к безразмерным переменным Томаса — Ферми, которые мы здесь выразим через m , e и \hbar :

$$r = \frac{(3\pi)^{2/3}}{3^{1/3}} \frac{x}{Z^{1/3}} \frac{\hbar^2}{me^2}; \quad \Phi_0 = \frac{Ze^2}{r} \chi; \quad \Phi_1 = \frac{Z^{1/3}}{(6\pi)^{4/3}} \frac{y}{x} \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad (50)$$

Тогда безразмерный потенциал в нулевом приближении удовлетворяет известному уравнению

$$d^2\chi/dx^2 = \chi^{3/2} x^{-1/2}, \quad (51)$$

а безразмерная поправка y находится из линейного неоднородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} y = \left[40\chi - \sqrt{\frac{x^3}{\chi^3}} \left(\frac{d}{dx} \frac{\chi}{x} \right)^2 \right]. \quad (52)$$

Заметим, что потенциал в нулевом приближении пропорционален $Z^{1/3}$, а в первом приближении пропорционален $Z^{2/3}$. Следовательно, относительный порядок величины поправки есть $Z^{-2/3}$ (численный коэффициент $40/(6\pi)^{4/3}$ мало отличается от единицы).

4. Интегрирование уравнения для поправки к потенциалу

Граничные условия к уравнению (51) суть $\chi(0) = 1$ и $\chi(\infty) = 0$, ибо в непосредственной близости от ядра имеет место чисто кулоновский потенциал, а на большом расстоянии от ядра потенциал из-за экранирования электронами спадает быстрее, чем кулоновский. Условие на бесконечности для y есть, очевидно, тоже $y(\infty) = 0$, а в нуле $y(0) = 0$, потому что значение потенциала вблизи $x=0$ описывается уже функцией $\chi(x)$.

С другой стороны, уравнение (52) несправедливо как в непосредственной близости к ядру, так и на больших расстояниях от ядра. Можно поставить вопрос: законно ли интегрировать уравнение (52) с граничными условиями $y(0) = y(\infty) = 0$, если эти условия наложены вне области применимости уравнений*.

Рассмотрим сначала решение со стороны малых значений x , порядка радиуса K -оболочки. В области K -оболочки принятое в работе квазиклассическое приближение заведомо неприменимо. Но заключенный в этой оболочке заряд — порядок величины единицы, так что его влияние на потенциал самосогласованного поля в атоме имеет порядок $1/Z$ по отношению ко всему потенциалу.

Между тем принятая нами точность есть $Z^{-2/3}$, так что поправка порядка $1/Z$ должна отбрасываться. Вместе с тем отсюда видно, что $Z^{-2/3}$ есть наивысшее приближение, совместимое с квазиклассическим подходом к задаче.

Поэтому не следует интегрировать «точное» уравнение, в котором члены, пропорциональные $Z^{-2/3}$, учитываются наравне с основными (что, например, делает Йенсен [3]). Уравнение для первого приближения (52) достаточно проинтегрировать один раз, как и основное уравнение (51), и для разных атомов учитывать зависимость потенциала от Z только согласно (50).

Можно оценить непосредственно по уравнению (52) порядок величины тех расстояний от ядра (со стороны малых x), где поправка становится сравнимой с нулевым приближением. Наиме-

* Этот вопрос поставил и разъяснил нам Л. Д. Ландау.

нее благоприятная оценка получается в случае, если сравнивать не потенциалы, а поля, производимые данным распределением плотности электронного заряда. Это сравнение мы и произведем. Функция χ вблизи начала координат имеет, как известно, следующий вид $\chi = 1 - 1,589x + \frac{1}{8}x^{3/2}$. Единица в первой части отвечает потенциалу ядра и при вычислении поля нас интересует не будет. Поле, происходящее от электронов, в нулевом приближении есть

$$\mathcal{E}_0 = -Z^{1/2} \frac{d}{dx} \frac{\chi - 1}{x} = -\frac{2}{3} Z^{1/2} x^{-3/2}.$$

Выражение y при самых малых x легко получить, подставляя в правую часть (52) $\chi = 1$, что дает $y = 4\sqrt{x}$, или согласно (50)

$$\mathcal{E}_1 = \frac{4}{(6\pi)^{1/2}} Z^{3/2} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,04 Z^{3/2} x^{-3/2}.$$

Сравнивая \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_1 , видим, что \mathcal{E}_1 становится порядка \mathcal{E}_0 , когда $x_{\min} \sim 0,06 Z^{-2/3}$, $r_{\min} \sim 0,07 h^2/Zme^2$, т. е. $\sim 0,07$ от радиуса K -оболочки.

Таким образом, экстраполируя граничное условие для y в точку $x = 0$, мы совершаем ошибку, относительный порядок которой есть $1/Z$, причем с малым численным коэффициентом.

Рассмотрим теперь применимость граничного условия $y = 0$ при больших x . Как известно, асимптотический вид решения $\chi(x)$ со стороны больших x есть $144/x^2$. Но практически эта форма решения не достигается. Поэтому целесообразно принять, что функция $\chi(x)$ при больших x есть $A^2(x)x^{-3}$, где $A(x)$ — медленно меняющаяся функция от x . Соответственно определим асимптотическое решение однородного уравнения

$$y'' - \frac{3}{2} y_0 \sqrt{\chi/x} = 0.$$

Будем искать y_0 в виде $y_0 = x^{\lambda(x)}$, пренебрегая производными $d\lambda/dx$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(3A/2) + \frac{1}{4}}.$$

Одно решение y_{01} возрастает на бесконечности как x^{λ_1} , а другое решение y_{02} убывает на бесконечности, как x^{λ_2} .

Любое решение неоднородного уравнения (52) можно выразить в виде квадратур от правой части при помощи решений y_{01} и y_{02} . Но правая часть известна нам не при любых значениях x , а только при таких x , когда поправка еще мала по сравнению с основным решением. Предположим, что начиная с какого-то $x = x_0$ и больше функция в правой части (52) есть какая-то известная $F(x)$. Покажем, что решение $y(x)$ при $x \ll x_1$ не зависит от этой функции $F(x)$, если только $y(x_1)$ достаточно велико для того, чтобы убывающее на бесконечности решение уже становилось малым. Это означает, что можно положить $y(\infty) = 0$, не делая заметной ошибки.

Обозначим известную правую часть (52) через $f(x)$. Тогда решение со стороны $x \ll x_1$ можно записать в следующем виде:

$$y(x) = C_1 y_{01}(x) + C_2 y_{02}(x) + \int_0^x f(x') (y_{01}(x') y_{02}(x) - y_{01}(x) y_{02}(x')) dx', \quad (53)$$

если решение y_{02} связано с y_{01} известным соотношением $y_{02} = y_{01} \int y_{01}^{-2} dx$. Между коэффициентами C_1 и C_2 существует зависимость, определяемая из граничного условия в нуле. Эта зависимость имеет форму $C_2 = \beta C_1$, причем коэффициент β никак не зависит от выбранного значения $x = x_1$ и не связан с функцией $F(x)$.

Со стороны больших x решение должно выглядеть так:

$$y(x) = C_3 y_{01}(x) + C_4 y_{02}(x) + \int_{x_1}^x F(x') (y_{01}(x') y_{02}(x) - y_{01}(x) y_{02}(x')) dx'. \quad (54)$$

Для того чтобы решение сохраняло конечное значение на бесконечности, необходимо наложить на C_3 условие

$$C_3 = - \int_{x_1}^{\infty} F(x) y_{02}(x) dx. \quad (55)$$

Решения уравнений (53) и (54) должны плавно сопрягаться при $x = x_1$, т. е. должны равняться сами функции и их первые производные. Это дает

$$C_1 = \int_0^{x_1} f(x') y_{02}(x') dx' + \int_{x_1}^{\infty} F(x') y_{02}(x') dx'. \quad (56)$$

Но это и означает, что при больших x_1 можно положить $x_1 = \infty$, если только допустить, что функция $F(x)$ не возрастает на бесконечности, что вполне естественно. Но тогда решение (52) при $x \ll x_1$ вообще перестает зависеть от значения x_1 и от неизвестной функции $F(x)$. Следовательно, можно считать, что условие $y(\infty) = 0$ наложено в области применимости уравнения (52).

Уравнение (52) интегрировалось численно по методу Нумерова [8]. Идея этого метода заключается в том, что вместо известной функции $y(x)$ выбирается новая известная функция $y(x) = (a^2/12)y''(x)$, где a — шаг численного интегрирования. У новой неизвестной второй производная отличается от второй разности на величину шестого порядка относительно a . Благодаря этому метод Нумерова позволяет численно интегрировать уравнения, разрешенные относительно второй производной, выходящая большой шаг.

Для того чтобы удовлетворить условию на бесконечности, надо поступить следующим образом: сначала определить путем

В последнее время появились данные о рассеянии ядер углерода на углеродной мишени, указывающие на существование резонансных квазиуровней [1]. Эти уровни приписываются «молекулярному» состоянию с временем жизни порядка 10^{-21} сек. Настоящая заметка не ставит себе целью дать объяснение опытам Альмквиста, которые, кроме того, еще не закончены. Будет только показано, что могут существовать квазиустойчивые состояния двух ядер на расстоянии, превосходящем размер зоны размытости ядерного края. Это состояние следует рассматривать как некий предельный случай, указывающий на возможность менее полного разделения, механизм которого выявлен менее четко.

Связь в такой квазимолекуле может осуществляться за счет общей для двух ядер орбиты сильно возбужденного нейтрона. Если энергия такого нейтрона близка к порогу вырывания (например, ниже его на 1 Мэв), то волновая функция вне ядра затухает на расстояниях, больших чем радиус действия ядерных сил. Расчет показывает, что результирующая сила взаимодействия между ядрами за счет энергии этого нейтрона и кулоновского отталкивания переходит в притяжение на таких расстояниях от ядра, для которых уже можно говорить о раздельном существовании обоих ядер, т. е. вне зоны размытости ядерного края.

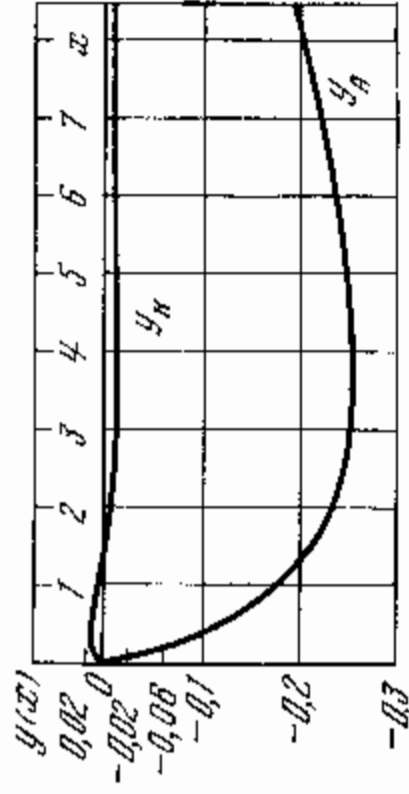
В ряде опытов Альмквиста энергия сталкивающихся ядер, по-видимому, была недостаточна для возбуждения одночастичного нейтронного уровня (на это указал нам А. С. Давыдов). Можно полагать поэтому, что в опытах осуществлялся не тот предельный случай, который рассмотрен здесь, а некий промежуточный случай, когда зоны размытости ядерных краев частично перекрывались. Так или иначе к этим опытам данная заметка не имеет прямого отношения.

Таким образом, положение здесь аналогично тому, которое осуществляется в дейтроне. Поэтому можно произвести удовлетворительные по точности квантовомеханические вычисления энергии связи, рассматривая оба ядра как две потенциальные ямы. При бесконечном удалении друг от друга они имеют одинаковый нейтронный уровень. При сближении ядер этот уровень расщепляется на два уровня: симметричный и антисимметричный относительно ядер. Первый из них лежит ниже. Его энергия может быть вычислена в адиабатическом приближении как функция расстояния между ядрами. Для этого надо применить метод, аналогичный тому, который применен в [2] для одномерных потенциальных ям.

* ЖЭТФ, 1960, 39, вып. 6(12), 1713.

численного интегрирования решение однородного уравнения, равное нулю при $x=0$, затем, тоже путем численного интегрирования, найти такое же решение неоднородного уравнения (52). Отношение обоих решений стремится к постоянному числу при $x \rightarrow \infty$. Тогда, если вычесть из решения неоднородного уравнения решение однородного уравнения, умноженное на это постоянное отношение, то получится решение, удовлетворяющее обоим поставленным условиям.

Для сравнения с расчетами, производившимися другими авторами, мы расщепили правую часть на два слагаемых: чисто



«обменную» поправку, равную $36x$, и остальную, «квантовую» часть, найденную в настоящей работе. Соответствующие слагаемые названы y_A и y_K . На графике y_A и y_K показаны отдельно. Вследствие большого численного коэффициента y_A существенно преобладает при всех x , поэтому результаты Иенсена практически являются справедливыми, но только до тех пор, пока в них обменная поправка мало по сравнению с основным членом. Последнее условие у Иенсена не соблюдалось при больших x .

Что касается квантовой поправки, то она оказалась в 9 раз меньше, чем предполагал Вайцекер. Поэтому можно считать окончательно установленным, что на потенциале Томаса — Ферми заметно сказывается только обменная поправка.

Литература

1. П. Дирак. Основы квантовой механики. М.—Л., ГИИТ, 1932, стр. 243—256.
2. P. Dirac. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, 26, 376.
3. H. Jensen. Z. Phys., 1930, 111, 373.
4. R. P. Feynman, N. Metropolis, E. Teller. Phys. Rev., 1947, 75, 1561.
5. П. Гомбах. Статистическая теория атома. М., ИЛ, 1951.
6. С. F. Weizsäcker. Z. Phys., 1935, 96, 431.
7. А. С. Комрагнец. ЖЭТФ, 1954, 26, вып. 2, 153; см. наст. изд., стр. 234.
8. Б. Нумеров. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1924, 84, 592; G. Pratt, Jr. Phys. Rev., 1952, 88, 1217.

Могло бы показаться, что рассматриваемый случай связи может осуществиться при столкновении ядер C^{13} и C^{12} , где просто есть избыточный нейтрон, но не при столкновении двух ядер C^{12} . На самом деле, однако, при столкновении достаточной энергии ядер C^{12} нейтрон может возбуждаться в одном из ядер. На месте этого нейтрона образуется дырка в оболочке $P_{3/2}$, причем в дырку частично перейдет нейтрон с соответствующего уровня другого ядра. Благодаря второму нейтрону, частично заполнившему дырку, возбужденный нейтрон движется в двух одинаковых потенциальных ямах. Ядра будут иметь два «общих» нейтрона — возбужденный и невозбужденный. Так как им отвечают разные квантовые числа, принцип Паули не мешает им находиться в состояниях любой симметрии. Даже и в состояниях с разной симметрией их действия не могут компенсировать друг друга из-за различия декрементов затухания волновых функций. Разумеется, действия невозбужденных нейтронов в замкнутых оболочках компенсируются, так как с необходимостью появляются пары нейтронов с противоположной симметрией волновых функций.

Если направить ось z по линии, соединяющей центры ядер, а начало координат поместить посередине, то смещение энергии состояния, симметричного относительно ядер, выражается так:

$$\Delta E = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} \int_0^{\infty} r dr \left(\psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (1)$$

Здесь ψ_0 — состояние в отдельном ядре, а интегрирование проводится в средней плоскости, перпендикулярной оси z . В качестве ψ_0 мы подставим функции p - и s -состояний нейтрона. Если распределение плотности возбужденного нейтрона вытянуто вдоль оси, соединяющей ядра (как это имеет место в p -состоянии), то связь между ядрами больше, чем для s -состояния нейтрона с той же энергией.

Результирующая кривая потенциальной энергии в обоих случаях сходна по форме. Она имеет форму кратера, внутри которого возможен молекулярный квазиуровень. Расстояние вершины кратера в выбранном примере от центра ядра для p -состояния в 2,41 раза больше ядерного радиуса.

Обозначая расстояние вершины от «края» ядра через Δ , радиус ядра r_0 , $\kappa = \sqrt{2m|E_{связ}}|$, можно вычислить при помощи (1) ΔE из уравнений

$$\frac{12\pi\hbar^2}{Z^2 e^2 m r_0} e^{-2\Delta\kappa} \left(1 + \frac{3}{\kappa r_0} + \frac{3}{\kappa^2 r_0^2} \right)^{-1} (3 + 2\kappa(r_0 + \Delta)) + \frac{3}{\kappa(r_0 + \Delta)} + \frac{3}{2\kappa^2(r_0 + \Delta)^2} = 1 \quad (2)$$

(p -нейтрон) и

$$\frac{4\pi\hbar^2}{Z^2 e^2 m r_0} \left(1 + \frac{1}{\kappa r} \right)^{-1} (1 + 2\kappa(r_0 + \Delta)) e^{-2\kappa\Delta} = 1 \quad (3)$$

(s -нейтрон).

При выводе этих формул мы пренебрегли энергией нейтрона вне ямы по сравнению с его кинетической энергией в яме.

Для численных подстановок в формуле (2) и (3) радиус ядра был положен равным $3,2 \text{ ф}$ (считая, что $r_0 = 1,4 A^{1/3} \text{ ф}$). Энергию связи нейтрона в ядре положим равной 1 Мэв . Заметим, что, по данным [3], в ядре C^{12} имеется уровень с такой энергией связи и ему приписывается состояние O^+ , как и основному состоянию C^{12} . Поэтому возбужденное состояние можно приписать p -нейтрону. Вопрос о возможности возбуждения именно этого состояния в опытах [1] оставим в стороне, так как нас больше интересует принципиальный вопрос осуществимости квазимолекулы. Тогда из (2) получим $\Delta_p = 4,53 \text{ ф}$, а из (3) $\Delta_s = 3,91 \text{ ф}$. Оба эти значения, а особенно первое, больше чем радиус действия ядерных сил. Для энергии связи нейтрона 4 Мэв $\Delta_p = 3,55 \text{ ф}$.

Очень интересно было бы объяснить с рассматриваемой точки зрения, почему Альквист не наблюдал резонансных явлений при столкновении ядер O^{16} . Здесь, к сожалению, приходится пока ограничиться предположениями. Например, можно допустить, что возбужденные нейтроны происходят при столкновении ядер O^{16} с меньшей вероятностью, чем в случае C^{12} , вследствие большей устойчивости O^{16} . Но это допущение падо было бы проверить независимыми опытами.

Для того чтобы ядра в «кратере» могли находиться в квазистойчивом состоянии, они не должны слипаться при каждом соприкосновении (на это указал нам К. А. Тер-Мартirosян). Если действительная картина для ядер C^{12} отвечает рассмотренной здесь модели, что будет означать, что коэффициент прилипания для этих ядер значительно меньше единицы. Тогда возникает еще одна возможность объяснения того, что резонансы отсутствуют у O^{16} : это может быть связано с большей вероятностью слипания у этих ядер. В задаче о рассеянии возможность слипания может быть учтена путем введения некоторого комплексного граничного условия в точке соприкосновения ядер,

Литература

1. D. A. Bromley, J. A. Kuehner, E. Almqvist. Phys. Rev. Lett., 1960, 4, 365.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М., Гостехиздат, 1948, стр. 208.
3. F. Auzenberg-Selove, T. Lauritsen. Nucl. Phys., 1959, 11, 117.

ПОЛЕ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЭЛЕКТРОН, В МЕТОДЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ*

При расчете атомных волновых функций по методу самосогласованного поля многоэлектронная задача сводится к эффективной одноэлектронной. Волновая функция оптического электрона определяется так, как если бы он двигался в поле ядра и атомного остатка. Берсукер [1] обратил внимание на то, что при вычислении вероятностей перехода оптического электрона по этому способу надо считать, что на электрон действует поле, искаженное остовом. В работе [1] это искажение учитывалось так, как если бы остов был диэлектрическим шаром, помещенным во внешнее поле. Несмотря на грубость этой модели, она находится в соответствии с основной физической идеей. В работах [2, 3] задача была решена более строгим, квантовомеханическим методом в адиабатическом приближении. Мы покажем, что это приближение не является необходимым и что можно получить более общую формулу дисперсионного вида, которая в предельном случае малых частот переходит в формулы, найденные в работах [2, 3].

Напишем, прежде всего, волновое уравнение для остова в поле падающей световой волны:

$$-\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi - (e\mathcal{E}_0 x \cos \omega t) \psi. \quad (1)$$

Здесь не учтено обратное влияние оптического электрона на остов, что соответствует так называемому методу «наслаивания». Было показано прямым вычислением, что это влияние невелико [4]. Заметим также, что при учете обратного влияния задача перестает быть линейной и нельзя применить обычный аппарат квантовой механики, на котором основаны дальнейшие вычисления.

Возмущенную волновую функцию основного состояния остова ищем в виде

$$\psi = \psi_0 + \sum_n c_n(t) \psi_n. \quad (2)$$

Считая, что внешнее поле включено адиабатически, находим отсюда

$$c_n = \frac{e\mathcal{E}_0 x_{0n}}{2\hbar} \left(\frac{e^{i(\omega_{n0} + \omega)t}}{\omega_{n0} + \omega} + \frac{e^{i(\omega_{n0} - \omega)t}}{\omega_{n0} - \omega} \right). \quad (3)$$

* «Оптика и спектроскопия», 1964, 16, 706.

Определяем возмущение плотности заряда остова, вызванное световой волной:

$$\rho' = e (\psi' \psi_0 + \psi \psi'_0) = \frac{2e^2 \mathcal{E}_0}{\hbar} \left(\sum_n \frac{\omega_{n0} x_{0n}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \tilde{\psi}_0 \psi'_n \right) \cos \omega t. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{\psi}_0$ и ψ'_n означают уже волновые функции без временных множителей. По возмущению плотности заряда определяем возмущение потенциала, действующее на оптический электрон. Это возмущение когерентно с падающей волной:

$$\varphi' = \int \frac{\rho'(r')}{|r - r'|} dV'. \quad (5)$$

Таким образом, поправка, предложенная Берсукером, состоит в том, что в возмущающей энергии — $e\mathcal{E}x$ в уравнении для оптического электрона надо прибавить линейное по \mathcal{E} возмущение φ' , происходящее от поляризации остова. Аналогичный результат получен в [2, 3], но, как мы видим, решение задачи не требует адиабатического приближения. При больших частотах падающей волны это приводит к новым эффектам.

Вычислим матричный элемент перехода между некоторыми двумя состояниями оптического электрона k и m . Эти состояния должны отличаться на ± 1 по орбитальному моменту, как это следует из обычных правил отбора и непосредственно видно по вычислениям. Получаем

$$(e\varphi')_{km} = \frac{2e^2 \mathcal{E}_0}{\hbar} \left\{ \frac{l+1}{\sqrt{3(2l+1)(2l+3)}} \sum_n \frac{\omega_{n0} x_{0n} \xi_{0n, km}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right. \\ \left. - \frac{l}{\sqrt{3(4l^2 - 1)}} \right\}. \quad (6)$$

Здесь l — момент электрона в k -м состоянии; верхний множитель отвечает изменению момента на $+1$, нижний — на -1 . $\xi_{0n, km}$ — интеграл от нормированных радиальных частей волновых функций, принадлежность которых видна по нижнему индексу:

$$\xi_{0n, km} = \int_0^\infty g_0(r') g_n(r') dr' \left(\int_0^{r'} f_k(r) f_m(r) r^2 dr + r'^2 \int_{r'}^\infty f_k(r) f_m(r) dr \right). \quad (7)$$

Выражения в фигурных скобках (6) получаются из-за того, что волновые функции содержат, по определению, нормированные полиномы Лежандра, а в разложении $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ в (5) дает те же полиномы Лежандра, которые мы взяли ненормированными. Правила отбора не меняются потому, что при вычислении матричных элементов по волновым функциям остова поле падающей волны считается однородным. Благодаря этому возбужденное l -е состояние отличается от основного на единицу по орбитальному моменту, а интеграл (5) дает только первый полином Лежандра. Заметим еще, что при вычислении радиального интеграла мы относим в дальнейшем индекс n уже к одноэлектронной функции, так как волновая функция остова считается факторизованной.

Таким образом, явление поляризации остова не выражается в общем случае просто через его поляризуемость, как это получается по грубой модели.

Тем не менее для оценки явления можно несколько упростить $\xi_{оп, km}$. Волновые функции остова G_n отличаются от нуля в меньшей области пространства, чем функции оптического электрона f_k, f_m . Если обозначить эффективные радиусы внутренней и внешней оболочки α и β и заменить волновые функции для оценки интегралов экспонентами, то простой расчет показывает, что по порядку величины отношение второго интеграла в (7) к первому есть $(\alpha/\beta)^5$. Даже если $\alpha/\beta = 1/2$, это отношение невелико. Тогда, если совсем отбросить первый интеграл и распространить интегрирование по r во втором интеграле до нуля, получим простую оценку

$$\xi_{оп, km} \sim \chi_{оп} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{km} \quad (8)$$

Она позволяет ввести обычную поляризуемость остова в формулу (6), так как тогда в матричный элемент войдет выражение

$$\sum_n \frac{\omega_{no} (x_{on})^2}{\omega_{no}^2 - \omega^2}$$

Приближение (8) тем лучше, чем выше лежат возбужденные состояния k и m , что физически хорошо понятно. Отношение поляризационной поправки к основному матричному элементу перехода имеет следующий порядок:

$$\frac{\text{энергия оптического электрона}}{\text{энергия возбуждения остова}} \left(\frac{\text{радиус остова}}{\text{радиус внешней оболочки}} \right)^2$$

Это отношение обычно не превышает 2—3%. Но если частота падающего излучения близка к одному из потенциалов возбуждения оболочки, то роль поляризации оболочки становится весьма важной. Можно ожидать, что в спектре мягких фотоэлектронов (с энергией порядка нескольких десятков электронвольт) должны наблюдаться максимумы в соответствующих местах.

При выводе формул нигде не считалось, что $\omega \ll \omega_{оп}$, так что наличие максимумов поглощения в спектре мягких фотоэлектронов не вызывает сомнения. Но, разумеется, в непосредственной близости от максимумов нельзя применять простую теорию возмущений. Для вычисления формы линий необходимо, как всегда, учитывать затухание.

В заключение приношу благодарность А. В. Ивановой за указание литературы.

Л и т е р а т у р а

1. И. Б. Берсукер. Уч. зап. Кишиневск. ун-та (Физмат), 1956, 24, 63.
2. И. Б. Берсукер. Опт. и спектр., 1960, 9, 685; Изв. АН СССР, сер. физ., 1958, 22, 750.
3. И. Б. Берсукер, М. Г. Веселов. Изв. АН СССР, серия физ., 1958, 22, 662.
4. А. В. Иванова и А. Н. Иванова. Опт. и спектр., 1964, 16, 917.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ФОТОЭФФЕКТЕ *

Когда электромагнитная волна падает на оптический электрон атома, поведение электрона нельзя рассматривать строго, не учитывая влияния поля на атомный остаток. Иначе говоря, приближение самосогласованного поля для расчета волновых функций наружного электрона несправедливо при нахождении вероятности радиационных переходов. Берсукер [1, 2] показал, что влияние остова можно описывать в терминах поляризуемости или величины, напоминающей поляризуемость, создающей дополнительное линейное и когерентное слагаемое электромагнитного поля, действующего на электрон. В заметке [3] было показано, что эффект влияния на оптический электрон со стороны остатка обладает дисперсией. Некоторые ограничительные предположения, сделанные при выводе Берсукером, могут быть сняты, и результат зависит от динамической поляризуемости атомного остатка.

Когда частота падающего излучения близка к энергии одной возбуждения остатка, эффект приобретает резонансный характер. Так как соответствующие уровни могут лежать при энергиях порядка нескольких десятков электронвольт, резонансная поляризация остатка должна сказываться на вероятности фотоэлектрического вырывания внешнего электрона световой волной. Грубо говоря, остаток сперва поглощает квант с энергией, близкой к своей энергии возбуждения, а затем передает ее оптическому электрону, который вылетает из атома. На самом деле, однако, имеет место интерференция между обоими механизмами фотоэффекта (прямым и через возбуждение остова), подобно тому, как в ядерной физике интерферируют потенциальное и резонансное рассеяния нейтронов. В настоящей работе будет рассмотрен резонансный фотоэффект.

Переменные, описывающие состояние атомной системы, обозначим двумя индексами: из них первый относится к остатку, а второй — в внешнему электрону. Соответственно вводим три ам-

* ЖЭТФ, 1968, 54, вып. 3.

плитуды: c_{00} , c_{n0} и c_{0E} . Индекс n относится к возбужденному состоянию остатка, энергия которого близка к энергии падающих квантов; E означает энергию фотозлектрона. Матричные элементы оптических переходов обозначим соответственно H_{0n} и H_{0E} , полагая, что они относятся или к остову, или к внешнему электрону. Зависимость от времени не включена в них. Недиагональный матричный элемент взаимодействия остова и внешнего электрона назовем $V_{n0,0E}$. Он был выписан, например, в [3], но здесь его явный вид не имеет значения. Для амплитуд c_{n0} и c_{0E} имеем уравнения

$$i\dot{c}_{0E} = V_{0E,n0} e^{-i(\omega E - \omega_n)t} c_{n0} + H_{0E} E^{-1} c_{00} \quad (1)$$

$$i\dot{c}_{n0} = \sum_{E'} V_{n0,0E'} e^{i(\omega E' - \omega_n)t} c_{0E'} + H_{0n} e^{i(\omega - \omega_n)t} c_{00} \quad (2)$$

Здесь ω_n и ω_E — соответствующие частоты переходов, ω — частота кванта.

Задачу можно решать методом возмущений по отношению к c_{00} , считая $c_{00} = 1$. Тогда система (1) — (2) имеет строгое решение. Избавимся прежде всего в уравнениях от явной зависимости от времени, полагая

$$c_{0E} = e^{-i(\omega E - \omega)t} c_{0E}(t), \quad c_{n0} = e^{i(\omega - \omega_n)t} c_{n0}(t) \quad (3)$$

Тогда уравнения для величин со штрихами выглядят так:

$$i\dot{c}_{0E} + (\omega_E - \omega) c_{0E} = V_{0E,n0} \dot{c}_{n0} + H_{0E} E, \quad (4)$$

$$i\dot{c}_{n0} + (\omega_n - \omega) c_{n0} = \sum_{E'} V_{n0,0E'} \dot{c}_{0E'} + H_{0n} E, \quad (5)$$

с начальными условиями $c_{0E}(0) = 0$, $c_{n0}(0) = 0$. Согласно уравнению (3) представляем c_{0E} в виде квадратуры:

$$c_{0E} = -i \int_0^t (H_{0E} + V_{0E,n0} \dot{c}_{n0}(t')) e^{-i(\omega E - \omega)(t-t')} dt' \quad (6)$$

Это выражение надо подставить в (4) и просуммировать по E' . Для этого второй член под интегралом справа удобно сперва проинтегрировать по частям с учетом начального условия:

$$\begin{aligned} \int_0^t c_{n0}(t') e^{-i(\omega E - \omega)(t-t')} dt' &= \frac{c_{n0}(t)}{\omega_E - \omega} - i \int_0^t \frac{e^{-i(\omega E - \omega)(t-t')}}{\omega_E - \omega} \dot{c}_{n0}(t') dt' = \\ &= i \int_0^t \frac{1 - e^{-i(\omega E - \omega)(t-t')}}{\omega_E - \omega} \dot{c}_{n0}(t') dt'. \end{aligned}$$

После этого надо изменить порядок суммирования по E' и интегрирования по t . От суммы по E' перейдем к интегрированию,

вводя дифференциал числа состояний $\rho(E') dE'$. Так как в дальнейшем потребуются решение, справедливое при больших временах, применим следующую асимптотическую формулу:

$$\int dE' \Phi(E') \frac{1 - e^{-i(\omega E' - \omega)t}}{\omega E' - \omega} = -\pi i \rho(\omega),$$

откуда получаем окончательно

$$\sum_{E'} V_{n0,0E'} \dot{c}_{0E'} = -\pi i (V_{n0,00} H_{00} \rho(\omega) + |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega) \dot{c}_{n0}(t)). \quad (6)$$

Таким образом, c_{n0} удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$i\dot{c}_{n0} + (\omega_n - \omega + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega)) c_{n0} = -\pi i \rho(\omega) V_{n0,0\omega} H_{00} + H_{0n} E. \quad (7)$$

Его решение выглядит так:

$$c_{n0}(t) = (H_{n0} - \pi i \rho(\omega) V_{n0,0\omega} H_{00}) \frac{\exp\{i(\omega_n - \omega + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega))t\} - 1}{i(\omega_n - \omega + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega))}. \quad (8)$$

Известное теперь выражение $c_{n0}'(t)$ подставляем в (6), откуда получается искомая амплитуда вероятности $c_{0E}'(t)$:

$$\begin{aligned} c_{0E}' &= \left[H_{0E} - \frac{(\pi i \rho(\omega) V_{n0,0\omega} H_{00} - H_{0n} E) V_{00,n0}}{\omega_n - \omega + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega)} \right] \times \\ &\times \frac{e^{i(\omega E - \omega)t} - 1}{i(\omega_E - \omega)} - \frac{H_{0n} E - \pi i \rho(\omega) V_{n0,0\omega} H_{00}}{\omega_n - \omega + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega)} \times \\ &\times \frac{\exp\{i(\omega_n - \omega_E + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega))t\} - 1}{i(\omega_n - \omega_E + \pi i |V_{n0,0\omega}|^2 \rho(\omega))}. \quad (9) \end{aligned}$$

От этой величины надо взять квадрат модуля и проинтегрировать по некоторому интервалу непрерывного спектра E . Можно показать, что ненулевой вклад, пропорциональный t , даст только величина в квадратной скобке. Действительно, экспоненциально затухающий член следует положить равным нулю, он связан с выбором начальных условий при $t=0$. При достаточно большом t затухающую экспоненту всегда можно отбросить. Член, содержащий $(e^{i(\omega E - \omega)t} - 1)/(\omega_E - \omega)$ линейно, при интегрировании по E дает вклад, не зависящий от времени, и поэтому при дальнейшем дифференцировании по t выпадает. То же относится к единице во втором слагаемом выражения (9). Остается обычное резонансное интегрирование, которое дает для вероятности перехода

$$W = 2\pi \rho(\omega) \frac{|H_{00}(\omega_n - \omega) + V_{00,n0} H_{0n}|^2}{(\omega_n - \omega)^2 + [\pi |V_{00,n0}|^2 \rho(\omega)]^2}. \quad (10)$$

Пренебрегая взаимодействием остова с внешним электроном, получим, очевидно, вероятность прямого фотоэффекта

$$W_{\Phi} = 2\pi\rho(\omega) |H_{00}|^2.$$

Вводя сокращенные обозначения

$$\frac{\omega_n - \omega}{2\pi |V_{n0,00}|^2 \rho(\omega)} \equiv x, \quad \left| \frac{H_{n0}}{H_{00} 2\pi\rho(\omega) V_{n0,00}} \right| \equiv \alpha,$$

видим, что форма резонансной линии определяется выражением

$$f(x) = \frac{(x + \alpha)^2}{x^2 + 1/4}. \quad (11)$$

При $x = -\alpha$ эта функция имеет минимальное значение, равное нулю. При $x = 1/4\alpha$ ее величина максимальна. Легко показать, что $f(0) = f_{\max} - 1 = f_{\max} - f(\infty)$. Отсюда можно найти точное положение резонанса по кривой поглощения.

Оценим теперь ожидаемую ширину резонансной области. Матричный элемент $V_{n0,00}$ примем приблизительно равным $V_{n0,00} \sim e^2 x_{n0} x_{0n} / r_0^3$, где r_0 порядка атомного радиуса. Сечение фотоэффекта далеко от резонансной области выразим как

$$\sigma_{\Phi} \cong \frac{e^2}{hc} \left(\frac{m\omega}{h} \right)^{1/2} r_0^3 x_{00}^2.$$

Отсюда получается искомая ширина области

$$\Delta\omega \sim \frac{e^2}{hc} \frac{e^2 x_{n0}^2 \sigma_{\Phi}}{r_0^6 \omega}.$$

Считая, что переход в остатке разрешенный, примем $x_{0n} \sim r_0 Z^{-1/2}$, что дает $\Delta\omega \sim 10^8 Z^{-2/3} \sigma_{\Phi}$. Здесь мы положили $\omega \sim 10^{16}$. Выбирая энергию кванта порядка десятикратной энергии ионизации, оцениваем σ_{Φ} для М-оболочки не очень тяжелых элементов как 10^{-19} см^2 , что дает $\Delta\omega$ приблизительно в 1 эв. Параметр α имеет порядок величин $r_0^3 \omega / c\sigma_{\Phi}$. В тех же допущениях он приблизительно равен единице. Но, если $\sigma_{\Phi} \ll 10^{-19}$, α становится гораздо большим, что дает сильное превышение пика над гладкой кривой фотоэффекта.

Все сказанное открывает некоторую возможность изучения уровней атомных остатков. Заметим также, что аналогичные эффекты могут наблюдаться и в ядерном фотоэффекте.

Литература

1. И. Б. Берсукер. Уч. зап. Кишиневск. ун-та (физмат), 1956, 24, 63; Оптика и спектроскопия, 1960, 9, 685; Изв. АН СССР, сер. физ., 1958, 22, 750.
2. И. Б. Берсукер, М. Г. Веселов. Изв. АН СССР, серия физ., 1958, 22, 662.
3. А. С. Комланец. Оптика и спектроскопия. 1964, 16, 706; см. наст. изд., стр. 260.

Раздел IV

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ*

Совместно с В. Д. Гуровичем

Физическая картина явлений, происходящих при распространении импульса по нервному волокну, с большой полнотой раскрыта в работах Ходжкина и его сотрудников [1]. В настоящее время можно ставить вопрос о построении теоретической картины нервной проводимости для реальных нервных волокон, а не для имитирующих моделей, как это сделано, например, в работе [2].

Ходжкин и Хаксли [3] описали механизм избирательной проводимости мембраны с помощью ряда эмпирически подобранных параметров и функций, которые они подставили затем в общее уравнение распространения импульса вдоль волокна. Получившееся уравнение оказалось столь сложным, что потребовало численного решения. Хотя форма и скорость распространения импульса, найденные таким образом, хорошо совпадают с экспериментальными результатами для данного конкретного волокна, желательнее иметь некоторые простые общие соотношения, не зависящие от конкретной модели мембраны, о механизме действия которой известно пока еще весьма мало. Выделив чисто феноменологические вопросы, удобнее решать проблемы, относящиеся к электрохимическому механизму избирательной проводимости мембраны.

Как известно, при распространении нервного импульса можно различать следующие характерные периоды.

1. Нарастание потенциала от его значения в покое ϕ_0 до некоторого порогового значения ϕ_1 .

* «Биофизика», 1966, 11, вып. 5, 913.

2. Дальнейшее нарастание потенциала до максимального значения Φ_2 за счет ионов Na^+ , входящих в волокно из окружающей среды сквозь оболочку. Причина увеличения проницаемости мембраны при потенциале Φ_1 пока не выяснена, и мы вынуждены так или иначе описывать это явление феноменологически, обращаясь к простейшей форме зависимости, совместимой с экспериментом.

3. Возвращение нерва приблизительно к исходному потенциалу за счет оттока ионов K^+ .

4. Период «отдыха», после которого нерв способен пропускать новый импульс.

Мы покажем, что скорость распространения одиночного импульса определяется только первым и вторым периодами, т. е. нарастающей фазой потенциала. Третий и четвертый периоды подстраиваются к первым двум и на скорость распространения не влияют. Уже поэтому можно полагать, что схема, принятая при расчетах Ходжкиным и Хаксли, слишком сложна. Простые зависимости, которые будут выведены, ранее предлагались Ходжкиным и Раштоном [4, 5] из соображений размерности и включают минимальное число констант. Уравнение, предложенное Ходжкиным и Хаксли, включает гораздо больше констант, поэтому размерностные оценки к нему, строго говоря, неприменимы. Чтобы вывести простые формулы для скорости импульса, надо обратиться к общей теории распространения химических процессов [6], учитывая избирательный характер проводимости мембраны возможно более простым образом.

Мы рассмотрим отдельно безмиелиновые волокна с перехватами Ранвье (миелиновые), что дает два разных типа зависимости скорости распространения от параметров.

Безмиелиновое волокно

Обозначим заряд на единицу длины волокна e , продольный электрический ток i , а ток через единицу длины мембраны i . Тогда закон сохранения заряда записывается так:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{dj}{dx} - i. \quad (1)$$

Ток i возникает при некотором потенциале Φ_1 и, как показывает опыт, сохраняет приблизительно постоянно значение до потенциала Φ_2 , после чего меняет знак. Постоянство тока видно из линейного нарастания потенциала на осциллограммах. При знании Φ_2 потенциал достигает максимума, иначе говоря, в этой точке $d\Phi/dt = 0$.

Поэтому запишем

$$i = -\lambda e(\Phi). \quad (2)$$

Здесь $e(\Phi) = 1$, если $\Phi_2 \geq \Phi \geq \Phi_1$, и $e(\Phi) = 0$, если Φ вне этого ин-

тервала. Фактически поведение $e(\Phi)$ при $\Phi \geq \Phi_2$ для дальнейшего не существенно. Знак минус указывает на увеличение заряда при $\Phi \geq \Phi_1$.

Заменяя теперь $\Phi = \frac{e}{C}$ и $j = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dx}$, где C и R — емкость и сопротивление на единицу длины, получаем

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{d^2e}{dx^2} + \lambda e(e). \quad (3)$$

Чтобы описать режим распространения импульса, надо искать $e(x, t)$ в виде $e(x - vt)$, что дает

$$-v \frac{de}{d\xi} = \frac{1}{RC} \frac{d^2e}{d\xi^2} + \lambda e(e), \quad (4)$$

где $\xi = x - vt$. При $\xi = \infty$, $e = e_0 = C\Phi_0$. При $e = e_1$ производная $\frac{de}{d\xi} = p$ непрерывна. В этой точке произвольно выберем $\xi = 0$.

Далее, в точке, где $e = e_2$, надо взять $p = 0$, так как это — точка максимума. Выполняя простые квадратуры, с учетом указанных условий при $e = e_1$ и e_2 находим уравнение для v :

$$\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_0} = -y \ln \left(1 - \frac{1}{y} \right); \quad y \equiv \frac{\lambda}{RC(e_1 - e_0)v^2}. \quad (5)$$

Длительность фазы нарастания потенциала от Φ_1 и Φ_2 получается из квадратуры для ξ и равна простому выражению

$$\Delta t = \frac{1}{RCv^2} \ln \left(1 - \frac{1}{y} \right) = \frac{e_2 - e_0}{\lambda v}. \quad (6)$$

что согласуется с определением величины λ .

Отношение в левой части (5) приблизительно равно 4 или 5; чтобы удовлетворить этому равенству, надо считать, что $y \approx 1$ с точностью до 1%. Тогда логарифм будет соответственно велик. Отсюда находим с той же точностью выражение для скорости v :

$$v = \left(\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_0} \frac{1}{RC\Delta t} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Эта формула дает такую же зависимость скорости v от радиуса волокна r , какая была найдена в [4] из соображений размерности: $v \sim \sqrt{r}$. Как мы видим, достаточно рассмотреть только фазу нарастания потенциала.

Миелиновое волокно

Как известно, расстояние между перехватами Ранвье приблизительно совпадает с длиной затухания импульса между ними в e раз. Чтобы учесть дискретный («сальтаторный») характер усиления импульса в перехватах, мы будем пользоваться усредненными значениями величин по отдельным промежуткам между перехватами. Тогда вместо дифференциального уравнения (3) получим разностное уравнение

$$\frac{de_n}{dt} = \frac{1}{R_0 C_0} (-2e_n + e_{n+1} + e_{n-1}) + \lambda e(e), \quad (8)$$

в котором R_0 и C_0 относятся к целому промежутку, а вторая разность $(e_{n+1} - e_n) - (e_n - e_{n-1})$ заменяет вторую производную по координате d^2e/dx^2 . Так как в каждом перехвате происходит полное восстановление импульса за время, малое по сравнению с временем прохождения импульса по отдельному участку, мы будем считать изменения e_n с номером весьма резкими. В пределе, для которого мы найдем приближенное решение, фронт нарастания потенциала помещается в одном-двух промежутках.

Если в уравнении (8) отбросить λ , то оно становится линейным и однородным и допускает частные решения вида

$$e_{nt} = B_f \exp\left(\frac{f}{2} \cdot \tau - fn\right), \quad (9)$$

где τ — безразмерное время $t/R_0 C_0$. Это решение отвечает распространению импульса со скоростью $\frac{4}{f} \operatorname{sh}^2 \frac{f}{2}$, т. е. очень сильной зависимости скорости от параметра f («волнового числа»), входящего в решение. Следовательно, для того чтобы импульс сохранял свою форму и не размывался, необходимо, чтобы решение с каким-то определенным f сильно преобладало под всеми другими частными решениями.

При тех значениях e_n , где λ отлочно от нуля, легко найти частное решение неоднородного уравнения, зависящее от такого же аргумента, как и (8). Это есть

$$e'_{nt} = R_0 C_0 \lambda \left(\tau - fn/4 \operatorname{sh}^2 \frac{f}{2} \right). \quad (10)$$

Оба решения, e_{nt} и e'_{nt} , разумеется, относятся только к фазе нарастания потенциала, где справедливо уравнение (8). Как указывалось, мы ищем такое решение, которое отвечает максимуму крутому нарастанию потенциала. Поскольку мы пользуемся средними значениями потенциала на каждом промежутке, т. е. пренебрегаем его пространственной зависимостью в этих пределах, целесообразно соответственным образом характеризовать и его временное изменение в бегущем импульсе. Иными словами, мы выберем такой момент времени, когда в некотором $(n+2)$ -м

промежутке $e_{n+2} = e_0$, в $(n+1)$ -м уже $e_{n+1} = e_1$, т. е. достигнуто пороговое значение потенциала для срабатывания перехвата, и $e_n = e_2$, т. е. заряд достиг максимального значения. Ясно, что, имея три числа: e_0 , e_1 и e_2 , задать более крутое изменение потенциала нельзя. Затем выберем в e_{nt} и e'_{nt} некоторое среднее значение τ , которое в дальнейшем сократится. Приравняв теперь e_{n+2} выбранным величинам e_0 , e_1 и e_2 на промежутках с номерами n , $n+1$ и $n+2$, получим уравнение

$$(e_2 - e_0 - 2f\lambda R_0 C_0/4 \operatorname{sh}^2(f/2)) / (e_1 - e_0 - fR_0 C_0 \lambda/4 \operatorname{sh}^2(f/2)) = (1 + e^{-\tau}). \quad (11)$$

Но λ исключается тем же способом, как и в случае немиелиновых волокон, потому что оно имеет тот же смысл. Именно, $R_0 C_0 \lambda = \frac{e_2 - e_1}{\Delta \tau}$, где $\Delta \tau$ — время прохождения одного отрезка, деленное на $R_0 C_0$, т. е. обратная величина указанной выше безразмерной скорости. Отсюда находим

$$f_1 = \ln \frac{e_2 - e_1}{e_1 - e_0}. \quad (12)$$

Окончательно получаем выражение для скорости

$$v = \left(\ln \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_0} \right)^{-1} \frac{(e_2 + e_1 - 2e_0)^2}{(e_1 - e_0)(e_2 - e_1)} \frac{1}{R_0 C_0}. \quad (13)$$

Здесь r — длина промежутка. Последний сомножитель был найден Раштоном из соображений размерности [5]. Рассмотренный в [1] пример хорошо согласуется по значению скорости с формулой (13). Получается скорость 22 м/сек при крутизне нарастания импульса, отвечающей времени 0,2 м/сек. Это как раз два промежутка.

Таким образом, скорость распространения фронта импульса в обоих случаях удолетворительно описывается формулами, получаемыми без привлечения конкретной модели мембраны.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить признательность Л. А. Блюменфельду и участнику семинара кафедры биофизики физического факультета МГУ, принявшим участие в обсуждении настоящей работы.

Литература

1. А. Ходжкин. Нервный импульс. М., «Мир», 1965.
2. В. М. Ентов, Р. Л. Салаганик, Г. И. Баренблатт. ПИМ, 1965, 29, 977.
3. A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, J. Physiol., 1952, 617, 500.
4. A. L. Hodgkin, J. Physiol., 1954, 125, 221.
5. W. A. H. Rushton, J. Physiol., 1951, 115, 101.
6. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк-Каменецкий. Ж. физ. хим., 1938, 12, 100.

ВЫХОД НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА НА СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ*

Как известно, электрическое сопротивление мембраны нервного волокна имеет своеобразный характер. Если потенциал выше порогового, ток идет не против градиента потенциала, а в направлении градиента. Иначе говоря, потенциал электролита растет самопроизвольно за счет энергии, запасенной в биологической среде, пока не достигает максимального значения. После этого ток идет в обратном направлении и постепенно восстанавливает состояние покоя в нерве.

Простейшая модель этого процесса отвечает чисто феноменологическому описанию. Считается, что в надпороговой области ток сквозь мембрану имеет постоянное значение и прекрущается по достижении максимального значения потенциала. Тогда оказывается, что можно получить формулу для скорости распространения импульса без учета процессов, восстанавливающих потенциал нерва, рассматривая только фазу нарастания потенциала. В случае гладкого волокна решение этой задачи достигается вполне строгим методом и чисто аналитически. Волокно с перекватами Ранвье удается рассмотреть только в некоторых не вполне очевидных предположениях о характере решения.

Представляет интерес проследить за выходом возбуждения волокна на режим стационарного распространения: это позволяет однозначно определить характер распределения потенциала по волокну и скорость распространения импульса, когда она уже установилась.

Такая задача не допускает аналитического решения даже для принятой простейшей модели. Но, так как возможен переход к безразмерным переменным, численное решение на ЭВМ позволяет сравнительно просто охватить различные случаи.

Режим возбуждения в безмиелиновом, т. е. гладком, волокне может быть описан с помощью известного уравнения

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + i. \quad (1)$$

Здесь e — заряд, R — сопротивление, C — емкость, i — ток сквозь мембрану на единицу длины волокна. В простейшем предположении [1] ток i отличен от нуля, если $e_2 \gg e \gg e_1$, и соответственно потенциал $V_2 \gg V_1$, и в этом интервале имеет постоянное значение. Если не учитывать влияния конечного омического сопротивления мембраны в подпороговом состоянии, задача приводится к безразмерным переменным и содержит минимальное число па-

раметров¹. Сделанное таким образом упрощение ничего не меняет в принципиальном отношении и лишь несколько сказывается на численных результатах.

Общая картина возникновения импульса при односторонне приложенном возбуждении следующая. Считается, что приложенный потенциал V_p превышает пороговое значение V_1 . Тогда в точке приложения, на конце волокна, сразу возникает мембранный ток i , что приводит к нарастанию потенциала не только за счет переноса заряда вдоль волокна, но и сквозь мембрану. Через некоторый промежуток времени распределение потенциала описывается уже не падающей кривой от точки приложения, а приобретает максимум где-то на конечном расстоянии от нее. Затем этот максимум достигает значения V_2 . После этого мембранный ток должен изменить направление, что, однако, не отражено в уравнении (1), где положено $i = \text{const}$. Тем не менее задача допускает решение и без учета этого обстоятельства.

Достаточно потребовать, чтобы при $e = e_2$ производная $\frac{de}{dx}$ обращалась в нуль и при больших значениях x выполнялось уравнение (1). Тогда все, что находится левее линии, где $e = e_2$, не оказывает никакого влияния на область правее нее, и положение самой линии тоже определяется однозначно, если известна точка, где эта линия началась. Таким образом, описывается весь процесс возбуждения от начала до выхода на стационарный режим.

Пусть e_p — плотность заряда в той точке, где потенциал равен V_p ($e_p = CV_p$). Перейдем к следующим переменным:

$$t' = \frac{t}{e_p}, \quad (2a)$$

$$x' = \left(\frac{RCi}{e_p} \right)^{1/2} x, \quad (2b)$$

$$\eta = \frac{e}{e_p}. \quad (2в)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t'} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x'^2} + 1 \quad \text{при} \quad \frac{e_1}{e_p} \leq \eta \leq \frac{e_2}{e_p}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t'} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x'^2} \quad \text{при} \quad \eta \leq \frac{e_1}{e_p}. \quad (3b)$$

¹ Омическое сопротивление мембраны в подпороговом состоянии может повести к тому, что и небольшой надпороговый импульс тоже затухнет. Мы, однако, пренебрегли этим, чтобы достичь большей общности описания в обычных условиях.

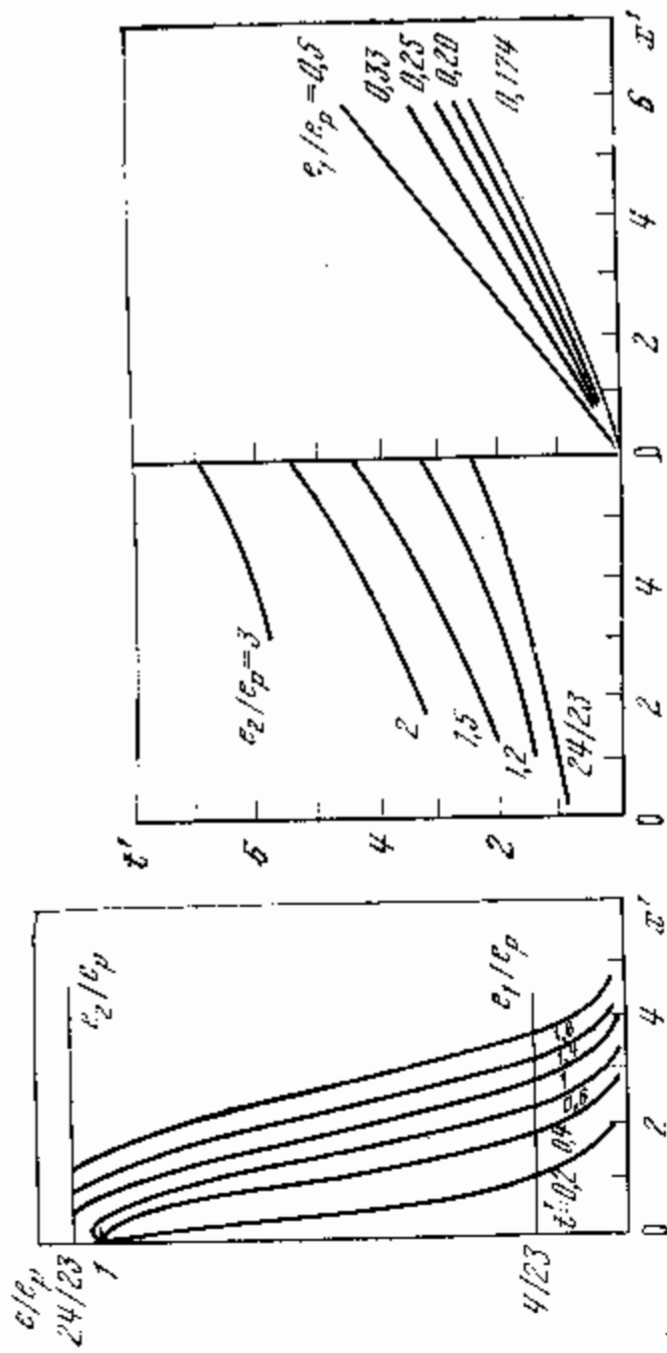


Рис. 5

Рис. 6

Уравнения (3а, б) решались численно на ЭВМ. По данным вычислений построены кривые рис. 1—5 для случая, когда $e_2 - e_0 = 5(e_1 - e_0)$, и различных значений возбуждающего потенциала, показанных на каждом рисунке отдельно². Видно, что вскоре после достижения максимального потенциала (или плотности заряда) кривые распределения заряда начинают перемещаться параллельно друг другу с постоянной скоростью, что и отвечает выходу на стационарный режим распространения.

Так как единицы длины и времени содержат величину e_p , скорость распространения должна быть пропорциональна корню квадратному из e_p . Результаты вычислений отвечают этому с хорошей точностью. После перехода к обычным единицам скорость стационарного распространения согласуется со скоростью, вычисленной по формуле, полученной в [1]: $v = (i/e_0 RC)^{1/2}$.

На рис. 6 изображены траектории точек, где $e = e_1$ и $e = e_2$ в плоскости x', t' . Видно, что линии, где $e = e_2$, почти сразу становятся прямыми.

Вычисления производились также для волокна с перехватами Ранье при тех же начальных и граничных условиях. В основу было положено дифференциально-разностное уравнение, принятое в [1]:

$$\frac{de_n}{dt} = \frac{1}{R_0 C_0} (e_{n+1} + e_{n-1} - 2e_n) + \begin{cases} 1, & \text{при } e_n \geq e_1, \\ 0, & \text{при } e_n < e_1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь e_n — заряд, отнесенный к n -му перехвату, R_0, C_0 — сопротивление и емкость, приходящиеся на один участок между перехватами.

² Кривые, описывающие распространение импульса в стационарном режиме, изображены только правее точки, где $e = e_2$. Левее ток через мембрану имеет обратное направление, но существенно, что поставленная задача имеет решение без учета этого обстоятельства.

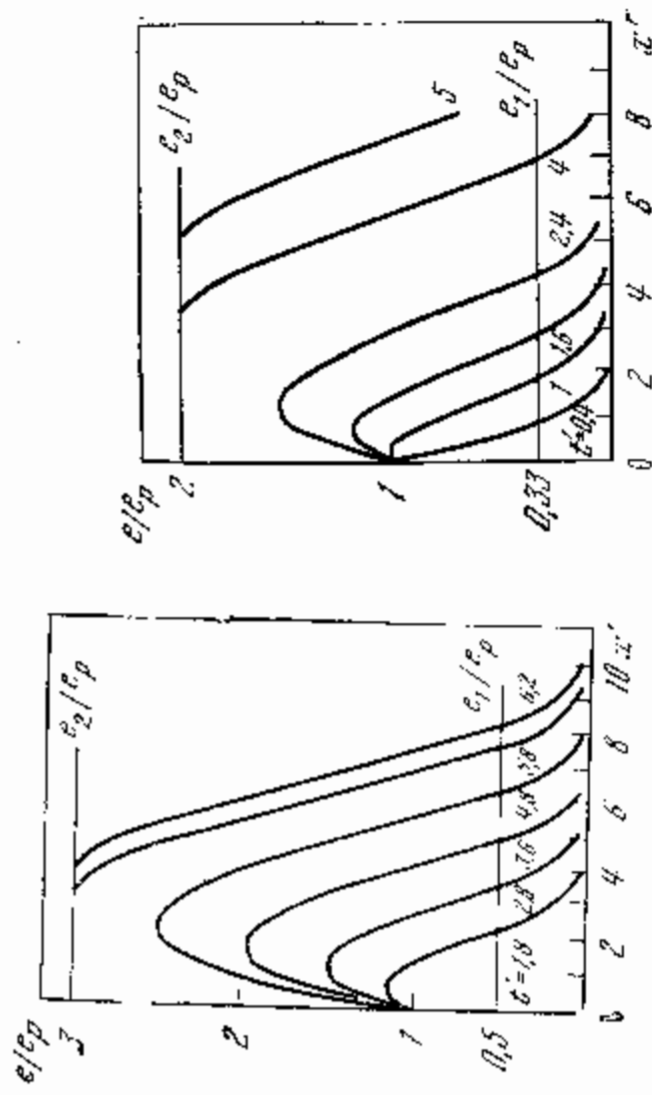


Рис. 1

Рис. 2

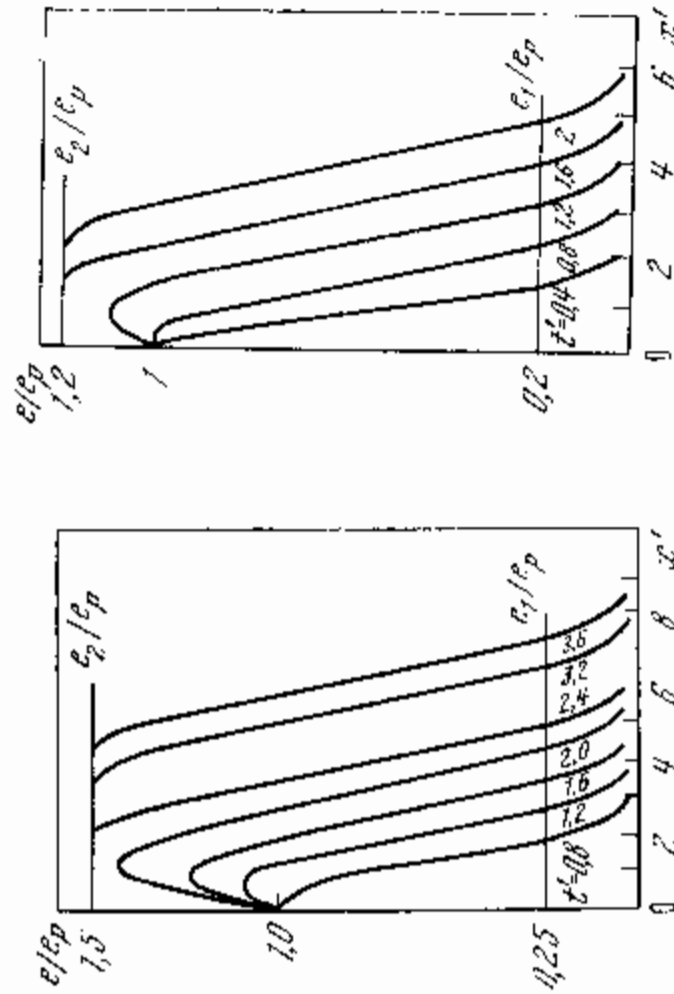


Рис. 3

Рис. 4

К этим уравнениям добавляются следующие начальные и граничные условия:

$$\eta = 0, \quad \text{когда } t' = 0, \quad x' > 0, \quad (A)$$

$$\eta = 1, \quad \text{когда } x' = 0, \quad t' > 0, \quad \text{пока}$$

$$\eta < \frac{e_2}{e_p} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (B)$$

После того, как достигнуто значение $\eta = \frac{e_2}{e_p}$ в той точке, где оно в данный момент имеет место.

Скорость распространения импульса, выведенная в [1], имеет вид

$$v = \frac{(e_2 + e_1 - 2e_0)^2}{(e_1 - e_0)(e_2 - e_1)} \ln^{-1} \frac{e_2 - e_1}{e_1 - e_0} \frac{1}{R_0 C_0} \quad (6)$$

(i — длина перехвата). С численными расчетами должен сравниться коэффициент, зависящий от e_2 , e_1 и e_0 . Отношение $(e_2 - e_1)/(e_1 - e_0)$ обозначим буквой ξ . Тогда рассматриваемая величина есть $(\xi - 1)^2 / \xi \ln \xi$. Ее можно рассматривать как безразмерную скорость распространения, т. е. время прохождения одного перехвата, измеренное в единицах $(R_0 C_0)^{-1}$. Имеем

ξ	$\frac{(\xi - 1)^2}{\xi \ln \xi}$	по вычислениям
2	0,73	1,43
3	1,19	1,70
5	1,97	2,08

Надо заметить, что формула для скорости в этом случае была получена из некоторых допущений, а не путем строгого решения уравнения (5). Расчет показал ее неточность. Но одно допущение, принятое при решении в [1], подтвердилось. И именно: окзалось, что переход от минимального потенциала к максимальному происходит на наименьшем числе перехватов из возможных, когда режим распространения стационарен, т. е. на одном или двух перехватах. Это позволяет полагать, что само уравнение (5), написанное в дифференциально-разностном виде, отвечает действительному положению вещей, т. е. опытным данным. Не требуется привлекать к рассмотрению ход потенциала на отдельном перехвате.

*

В заключение приношу благодарность И. А. Корниенко за постановку настоящей задачи. На ранних стадиях работы в ней принимали участие О. Д. Ейса и Ю. Ткач.

ВЛИЯНИЕ ОМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕМБРАНЫ НЕРВНОГО ВОЛОКНА НА НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ НЕРВНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ *

Прямые измерениями Тасаки и других показано, что мембрана нервного волокна в подпороговом состоянии обладает определенным сопротивлением омического типа, т. е. ток, проходящий через мембрану, пропорционален разности потенциалов

* «Биофизика», 1971, 16, вып. 5, 890.

по обе ее стороны и направлен от большого потенциала к меньшему. При достижении порогового значения потенциала свойства мембраны скачкообразно изменяются, ток направлен по разности потенциалов и, кроме того, не связан с ней пропорциональной зависимостью.

В работе [1] было принято простейшее предположение, что ток в надпороговом режиме возбуждения сохраняет постоянное значение, когда разность потенциалов между протоплазмной нервной волокна и наружной средой больше некоторого минимального значения V_1 и меньше максимального значения V_2 . При достижении этого значения потенциала ток скачкообразно изменяется на обратное. Этого допущения было достаточно, чтобы доказать существование вполне определенного режима распространения импульса в волокне. Выражение для скорости импульса могло быть выведено в основном и из чисто размерностных соображений с точностью до коэффициента. Но соображения, основанные на размерностях величин, могут применяться только при допущении, что сопротивление мембраны в подпороговом режиме бесконечно велико. Если учесть, что оно на самом деле конечно, необходимо пользоваться общими методами теории режимов распространения. При этом выражение для скорости распространения приобретает более сложный вид.

Конечность сопротивления мембраны сказывается еще сильнее на распределении потенциала в волокне в подпороговом режиме. В случае гладкого волокна это распределение описывается известным решением задачи о распространении тепла вдоль стержня при теплоотводе через боковую поверхность [2]. Более сложная ситуация возникает в волокне с перехватами Ранвье вследствие дискретного («сальтаторного») механизма распространения; с этой задачи мы и начнем.

1. Подпороговое возбуждение миелинизированного нервного волокна. Дифференциальное уравнение, описывающее возбуждение гладкого нервного волокна, переходит в дифференциально-разностное уравнение для волокна с перехватами Ранвье. Предложенное в работе [1] уравнение такого типа выведено в предположении, что в подпороговом режиме мембрана вообще не проводит. Но, как следует из данных Тасаки [3, 4], омическое сопротивление перехватов в поперечном направлении сравнимо с сопротивлением участков между перехватами. Поэтому в подпороговом режиме надо учитывать утечку заряда сквозь перехваты.

Выведем уравнение баланса заряда в подпороговом режиме. Будем условно относить емкость миелинизированной части волокна к ближайшему перехвату, считая, что заряд как бы целиком сосредоточен на перехвате. Фактически емкость, обязанная миелиновой оболочке, сравнима с емкостью самого перехвата или несколько больше нее [3, 4], но разностная схема по модели сосредоточенных зарядов здесь оправдана.

Пусть R_0 — продольное сопротивление участка между перехватами, r_0 — сопротивление одного перехвата в подпороговом состоянии, C_0 — совокупная емкость обложки и мембраны, отнесенная к одному перехвату, e_n — заряд, приходящийся на участок волокна, содержащий один перехват, V_n — потенциал на соответствующем перехвате. Здесь n — номер перехвата. Очевидно, что $e_n = C_0 V_n$. Ток, проходящий от $n+1$ -го перехвата к n -му, равен $R_0^{-1}(V_{n+1} - V_n)$. Следовательно, скорость изменения заряда в n -м перехвате согласно уравнению баланса есть

$$\frac{de_n}{dt} = \frac{1}{R_0}(V_{n+1} - V_n) - \frac{1}{R_0}(V_n - V_{n-1}) - \frac{V_n}{r_0}. \quad (1)$$

Здесь последний член относится к утечке заряда сквозь мембрану перехвата. Выражая потенциалы через заряды и переходя к безразмерной записи времени в единицах $R_0 C_0$, т. е. заменяя t на RCt , получаем дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{de_n}{dt} = (e_{n+1} + e_{n-1} + 2e_n) - \frac{R_1}{r_0} e_n. \quad (2)$$

Предположим, что к концу перехвату в начальный момент приложен постоянный потенциал V_0 , так что там сохраняется и постоянный заряд $e_0 = 1$. Требуется определить $e_n(t)$, считая, что при $t=0$ $e_n(0) = 0$, если $n \geq 1$. Поставленная задача напоминает задачу о продольном распространении тепла в стержне с линейным законом теплоотдачи через боковую поверхность. Но в данном случае координата изменяется дискретно, через единицу.

Уравнение (2) решается следующим образом. Возьмем частное решение вида

$$e_{np}(t) = C_q(t) \exp(in\varphi) \quad (3)$$

для $n \geq 1$. Переменная φ изменяется от 0 до 2π . Для $C_q(t)$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dC_q}{dt} = -2(1 + \lambda - \cos\varphi) C_q, \quad (4)$$

где

$$2\lambda \equiv \frac{R_0}{r_0},$$

так что

$$C_q(t) = C_q(0) \exp[-2(1 + \lambda - \cos\varphi)t]. \quad (5)$$

Функция $C_q(0)$ определяется с помощью начального условия

$$e_n(0) = \int_0^{2\pi} C_q(0) \exp(in\varphi) d\varphi = \delta_{n0}, \quad (6)$$

из которого следует, что $C_q(0)$ должно быть линейной комбина-

цией функций $\exp(ik\varphi)$, с неотрицательным k при любом целом положительном n . Таким образом, $C_q(0)$ представляется суммой вида

$$C_q(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \exp(ik\varphi). \quad (7)$$

Заряд $e_0(t)$ по условию сохраняет постоянное значение, равное 1. Умножая равенство для $e_0(t)$ на $\exp[2(1+\lambda)t]$, получаем

$$\exp[2(1+\lambda)t] \int_0^{2\pi} C_q(0) \exp(2 + \cos\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \exp(ik\varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Вспользуемся теперь известным разложением

$$\exp(2t \cos\chi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(2t) \exp(il\chi), \quad (9)$$

где I_l — функция Бесселя l -го порядка мнимого аргумента. В левой части равенства (8) будем считать и аргумент χ чисто мнимым, и положим $\cos\chi = \text{ch}|\chi| = 1 + \lambda$. Ввиду того, что $I_l(2t) = -I_{-l}(2t)$, перепишем равенство (9) в следующем виде:

$$\exp[2t(1+\lambda)] = I_0(2t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} I_l(2t) \text{ch}[l \text{ arch}(1+\lambda)]. \quad (10)$$

Но $\text{ch}[l \text{ arch}(1+\lambda)]$ есть не что иное, как полином Чебышева от $(1+\lambda)$, т. е.

$$\begin{aligned} \text{ch}[l \text{ arch}(1+\lambda)] &= \frac{1}{2} \left[(1+\lambda + \sqrt{(1+\lambda)^2 - 1})^l + \right. \\ &\quad \left. + (1+\lambda - \sqrt{(1+\lambda)^2 - 1})^l \right] \equiv \frac{1}{2} (u^l + u^{-l}) \equiv T_l(1+\lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно,

$$\exp[2t(1+\lambda)] = I_0(2t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} T_l(1+\lambda) I_l(2t). \quad (12)$$

В правой части равенства (8) получается сумма $2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \xi_l I_l(2t)$.

Так как все $I_l(2t)$ линейно независимы, получаем из сравнения коэффициентов

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad \xi_l = \frac{1}{\pi} T_l(1+\lambda). \quad (13)$$

Отсюда находим выражение для $C_\varphi(0)$:

$$C_\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \exp(i l \varphi) T_l(1 + \lambda) \right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{u \exp(i\varphi)}{1 - u \exp(i\varphi)} + \frac{\exp(i\varphi)}{u - \exp(i\varphi)} \right), \quad (14)$$

где использовано обозначение u , введенное равенством (11).

Подставим выражение ξ_t в уравнение (6) и заменим $\exp(i\varphi)$ на комплексную переменную z . Тогда интегрирование от 0 до 2π по φ перейдет в интеграл по контуру единичной окружности в плоскости z . Но при этом равенство (6) нарушится из-за того, что полюс выражения $z \left(\frac{1}{u} - z \right)^{-1}$ (второе слагаемое в (14) справа) лежит внутри контура интегрирования. При интегрировании необходимо исключить этот полюс и оставить только полюс при $z=0$. Если $t=0$, этот полюс дает вычет только при $n=0$:

$$e_n(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_z \frac{dz}{z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (uz)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{u} \right)^k \right) z^n = \delta_{n0}.$$

Теперь легко найти $e_n(t)$:

$$e_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \exp[-(1 + \lambda)2t] \int \frac{dz}{z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (uz)^k + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{u} \right)^k \right) z^n \exp \left[t \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]. \quad (15)$$

Подставляя сюда разложение (9) и беря вычет только при $z=0$, получаем

$$e_n(t) = \left(I_n(2t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k I_{n+k}(2t) \right) e^{-2t(1+\lambda)}. \quad (16)$$

С помощью рекуррентных соотношений

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2x T_k(x) \quad (x \equiv 1 + \lambda),$$

$$\frac{d}{dt} I_m(2t) = I_{m+1}(2t) + I_{m-1}(2t)$$

можно убедиться в том, что функция $e_n(t)$ удовлетворяет основному уравнению (2). Выполнение начального условия очевидно, а граничное условие следует из формулы (12).

Посмотрим, как выражение для $e_n(t)$ стремится к своему граничному значению при $t \rightarrow \infty$. Для этого надо оставить $e_n(t)$ записанным в виде контурного интеграла. Он равен тождественно интегралу, действительно вычисленному вдоль контура по φ (т.е. найденному не с помощью теории вычетов), минус тот вычет,

который контурный интеграл по окружности имеет при $z = 1/u$. Соответствующий полюс был исключен при нахождении формулы (16), а теперь удобнее сначала проинтегрировать вдоль самой окружности, а затем отбросить вклад лишнего полюса.

Это последнее слагаемое, уже с обратным знаком, равно u^{-n} , т.е. значению e_n по достижении стационарности (см. [4]). При больших t вклад в интеграл по φ дают только значения φ , близкие к 0, или, что то же самое, к 2π . Интегрирование можно распространить от $\varphi = -\infty$ до $\varphi = \infty$. Разлагая дробные выражения, входящие в (14), по φ и удерживая линейный член, получаем

$$e_n(t) = u^{-n} + \frac{\exp(-\lambda t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\varphi^2 + i n \varphi) \times \\ \times \left[1 + \frac{u \exp(i\varphi)}{1 - u \exp(i\varphi)} + \frac{\exp(i\varphi)}{u - \exp(i\varphi)} \right] d\varphi = \\ = u^{-n} + \frac{i u}{\pi (u-1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\left(\varphi \sqrt{t} - \frac{i n}{2 \sqrt{t}} \right)^2 - \frac{n^2}{4t} \right] \varphi d\varphi = \\ = u^{-n} - \frac{i n \exp \left(-\frac{n^2}{4t} \right)}{2\pi (u-1)^2 t^{3/2}}. \quad (17)$$

Таким образом, при $\lambda \neq 0$, $u_n(t)$ стремится к предельному значению экспоненциально.

Если $\lambda=0$, решение (16) приобретает более простую форму:

$$e_n(t) = \left[I_n(2t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{n+k}(2k) \right] \exp(-2t). \quad (18)$$

Это можно преобразовать к конечной сумме бессельевых функций, но форма (18) нагляднее. Чтобы дать представление о зависимости этой суммы от n и t , приводится таблица. При $t=0,3$; 1; 4; 10 строкой ниже приведены также значения функции $1 - \Phi(n/2\sqrt{t})$, где Φ — интеграл ошибок, что позволяет сравнить зависимость искомой величины от n при дискретном и непрерывном изменении. $1 - \Phi(n/2\sqrt{t})$ — асимптотический вид (18) при $t \rightarrow \infty$.

С помощью формулы (16) получается и решение более общей задачи, когда в момент времени $t=0$ на нулевом перехвате возбуждение включается и затем равняется заданной функции $f(t)$, а на всех остальных перехватах оно 0 при $t=0$. Если сохранить обозначение $e_n(t)$ для случая (16), то в общем случае

$$e_n(t) = \int_0^t f(t_0) \frac{de_n(t-t_0)}{dt} dt_0 \quad (19)$$

при $x = \infty$. Потенциал и заряд отсчитываются от своего значения в состоянии покоя.

Уравнение (23) при подстановке выражения (24) приобретает форму

$$-v'e = \dot{e} + 1. \quad (28)$$

Полагая $\dot{e} \equiv \rho$ и переходя к независимой переменной e , перепишем (28) так:

$$-v'\rho = \rho \frac{d\rho}{de} + 1. \quad (29)$$

Разделим в нем переменные и интегрируем по e от e_1 до e_2 . Значение производной ρ исключается из следующих условий: при $e = e_2$ обращается в нуль производная $\rho(e_2) = 0$, при $e = e_1$ производная непрерывна, т. е. согласно формуле (26)

$$\rho(e_1) = -\chi e_1. \quad (30)$$

Поэтому для скорости v' получается следующее уравнение:

$$\frac{1}{v'} \ln(1 - \chi v' e_1)^{-1} - \chi e_1 = v' e_2 - v' e_1. \quad (31)$$

Чтобы перейти к скорости распространения в обычных единицах, введем следующие обозначения:

$$\Delta t \equiv \frac{e_2 - e_1}{t}, \quad (32a)$$

$$i\alpha \Delta t \equiv \sigma, \quad (32b)$$

$$\frac{e_2 - e_1}{e_1} \equiv \varepsilon, \quad (32в)$$

$$v^2 \equiv \frac{\rho}{RCM}, \quad (32г)$$

$$u \equiv \frac{\rho}{e} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{\rho}} \right). \quad (32д)$$

Легко показать, что величина ρ , или квадрат скорости v^2 , выражается через u следующим образом:

$$\rho = \frac{e^2 u^2}{\varepsilon u + \sigma} = v^2 RC \Delta t. \quad (33)$$

Подставляя это в (31), получаем уравнение для u :

$$u \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + \sigma/\varepsilon u} \right) = \ln \frac{1}{1 - u}. \quad (34)$$

Величины, входящие в это уравнение, как видно из их определений (32a—г), не зависят от диаметра волокна. Следовательно, не зависит от диаметра и величина u . Отсюда видно, что ско-

рость v пропорциональна корню квадратному из диаметра, как это получается без учета конечности сопротивления мембраны. Но теперь это уже не может быть выведено из простых соображений о размерности величин.

Сравним теперь результаты с данными опыта, которые приводятся в книгах [3] и [5]. Наименее точно может быть определена величина Δt , т. е. длительность фазы нарастания импульса. Пользуясь кривой, относящейся к аксону кальмара [3, с. 18], $\Delta t = 0,7 \cdot 10^{-3}$ сек или, во всяком случае, близка к этому. Далее, согласно [5, с. 98], можно принять $\varepsilon = 2$. Значение σ для аксона кальмара [5, с. 61] следует принять равным 1, так как сопротивление мембраны R_m на единицу площади равно $700 \text{ ом} \cdot \text{см}$, а емкость $C_m = 1 \text{ мкф/см}$. Таким образом, уравнение для u имеет вид

$$u \left(1 + \frac{2}{1 + 1/2u} \right) = \ln \frac{1}{1 - u}.$$

Путем простого подбора легко убедиться, что $u = 0,85$. Тогда согласно (33) $\rho = 1,07$. Диаметр аксона равен $d = 0,05 \text{ см}$, а сопротивление в продольном направлении $R_l = 30 \text{ ом} \cdot \text{см}$. Следовательно,

$$v = \left(\rho \frac{\pi d}{R_l C_m \Delta t} \right)^{1/2} = 28 \text{ м/сек}, \quad (35)$$

что не слишком сильно отличается от экспериментального значения $v = 25 \text{ м/сек}$ для того же объекта [3, с. 13]. Различно можно приписать известному произволу в выборе Δt и отчасти ε .

Без учета конечности сопротивления мембраны, т. е. при $\sigma = 0$, получилась бы скорость 36 м/сек , что согласуется с опытом гораздо хуже.

Приношу благодарность И. А. Корниенко за ряд ценных указаний.

Л и т е р а т у р а

1. А. С. Компанец, В. Ц. Гурович. Биофизика, 1966, 11, вып. 5, 913; см. наст. изд., стр. 267.
2. Х. С. Карслоу. Теория теплопроводности. М.—Л., Гостехиздат. 1947.
3. А. Ходжкин. Нервный импульс. М., «Мир», 1965.
4. Я. Тасаки. Проведение нервного импульса. М., ИЛ, 1957.
5. Б. Катц. Нерв, мышца и сигнал. М., «Мир», 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

Регуляризация классических уравнений электродинамики	150
Классическая модель заряженной частицы с моментом	153
Квантовая электродинамика с двумя фермионами. I	157
Квантовая электродинамика с двумя фермионами. II. (Совместно с Л. А. Кружковой-Зайцевой)	166
Сильные гравитационные волны в пустоте	169
Распространение сильной электромагнитно-гравитационной волны в вакууме	172
Решение уравнений гравитации в однородной анизотропной модели. (Совместно с А. С. Черновым)	177
Раздел III	
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА	185
О нахождении колебательных обертонов многоатомных молекул. Многократное рассеяние быстрых электронов и α -частиц в тяжелых элементах	185
Многократное рассеяние тонких пучков быстрых электронов	188
Многократное рассеяние быстрых электронов в тяжелом веществе	200
Кратное рассеяние в кулоновском поле в весьма тонких слоях вещества	204
Применение метода самосогласованного поля к ядру	215
Метод самосогласованного поля для тензорных сил	220
Уравнения самосогласованного поля для ядра с учетом электро-статических сил	225
Уравнения самосогласованного поля в атоме. (Совместно с Е. С. Павловским)	234
О связи в ядерной молекуле $C^{12}-C^{12}$	241
Поле световой волны, действующей на электрон, в методе самосогласованного поля	257
Резонансные явления в фотоэффекте	260
Раздел IV	
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ	267
Распространение импульса по нервному волокну. (Совместно с В. Ц. Гуровичем)	267
Выход нервного импульса на стационарный режим распространения	272
Влияние омического сопротивления мембраны нервного волокна на некоторые эффекты нервного возбуждения	276



Предисловие	3
Раздел I	
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА И МЕХАНИКА	5
О поглощении света плазмой	5
Об устойчивости плазмы в пространстве (к теории шаровидной молнии)	13
Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами	23
Влияние объемного заряда на автоэлектронную эмиссию	37
К теории распространения тела при теплопроводности, зависящей от температуры. (Совместно с Я. Б. Зельдовичем)	40
Об охлаждении воздуха излучением. I. (Совместно с Я. Б. Зельдовичем и Ю. П. Райзером)	52
Об охлаждении воздуха излучением. II. (Совместно с Я. Б. Зельдовичем и Ю. П. Райзером)	64
Радиоизлучение атомного взрыва. I	75
Радиоизлучение атомного взрыва. II	83
Нагревание газа излучением. (Совместно с Е. Я. Ланцбургем)	91
Распространение неравновесной тепловой волны при учете конечности скорости света. (Совместно с Е. Я. Ланцбургем)	98
Автомодельная задача о развитии ударной волны из волны сжатия	106
Ударные волны в пластической уплотняющейся среде	111
Точечный взрыв в неоднородной атмосфере	115
Превращение ударного сжатия в изэнтропическое. (Совместно с В. И. Романовой и П. А. Ямпольским)	118
Диффузия из мгновенного источника в поле тяжести	121
Цепные реакции при учете диффузии двух активных центров. (Совместно с В. В. Воеводским)	124
Раздел II	
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	133
Индцированный β -распад при центральном столкновении электрона с тяжелой частицей	133
Индцированный β -распад тяжелой частицы с одновременным испусканием кванта	144
О новой формулировке электродинамики Дираком	147