А.С.Холево

КВАНТОВАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА

(Итоги науки и техн. Соврем, пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ, 1991. т.83. С. 3—132)

Предметом обзора является вероятностная структура квантовой теории. Математические исследования в этой области начались в 30-е годы, но лишь за последние двадцать лет усилиями ряда специалистов была, в основном, создана квантовая теория вероятностей, опирающаяся на современный аппарат некоммутативного функционального анализа и свободная от трудностей и противоречий первоначального подхода. Основные понятия квантовой теории вероятностей рассматриваются в обзоре в сопоставлении с классической вероятностной схемой. Подчеркиваются принципиальные отличия, в основе которых лежат более сложные геометрия выпуклого множества квантовых состояний и алгебраическая структура пространства квантовых наблюдаемых. Эти отличия находят выражение в корреляционных неравенствах, проливающих новый свет на проблему скрытых параметров, а также в фундаментальных ограничениях на точность и информативность измерений, составляющих предмет квантовой теории статистических решений.

Центральные математические понятия — разложение единицы (положительная операторно-значная мера) и вполне положительное отображение — рассматриваются в естественной связи с приложениями. Основанная на этих средствах обобщенная статистическая модель квантовой механики дает ключ к ряду вопросов, не находящих удовлетворительного решения в рамках стандартной формулировки. Это — проблема соответствия (канонической сопряженности), марковская динамика открытых квантовых систем, проблема воспроизводимости в теории квантового измерения, процессы непрерывного измерения. Излагаются основы теории квантовых случайных процессов, в частности, квантовое стохастическое исчисление, дающее эффективный метод расширения динамических полугрупп и процессов непрерывного измерения.

Содержание

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретико-множественная концепция, положенная А. Н. Колмогоровым в основу теории вероятностей, оказалась необычайно плодотворной и продолжает успешно разрабатываться. В то же время эволюция естествознания с необходимостью приводит к рассмотрению альтернативных вероятностных систем, в которых теоретико-множественная математика играет вспомогательную роль, и на первый план выходят связи с функциональным анализом и современной математической физикой.

Развитие физики — от механики через статистическую механику к квантовой теории — сопровождалось возрастанием роли вероятностных представлений. Наблюдаемое поведение физических объектов атомного и субатомного уровней имеет выраженный статистический характер. Соответственно, предсказания теории, описывающей поведение микрообъектов, являются по своему существу вероятностными и выражаются в терминах средних значений, корреляций, вероятностей переходов и т. п. Принципиально важным, однако, является следующее обстоятельство: хотя результат каждого отдельно взятого эксперимента можно рассматривать как обычную случайную величину, оказывается невозможным дать описание совокупности результатов всевозможных экспериментов над данным микрообъектом, характеризующей его состояние, в терминах классического «пространства элементарных событий». Другими словами, состояние не может быть задано, как в классической статистической механике, распределением вероятностей $P(d\omega)$ на некотором фазовом пространстве Ω, отражающим неточность или неполноту задания «истинного» состояния $\omega \in \Omega$. Квантовая статистичность имеет первичный характер и неустранима за счет повышения точности и детальности измерений.

Одна из главных особенностей квантовой физики, препятствующих «классическому», т. е. теоретико-множественному описанию, состоит в наличии взаимно *дополнительных* величин, которые не могут одновременно иметь каких-либо определенных значений. При последовательном измерении таких величин результат оказывается зависящим от порядка измерений. С этим связано то обстоятельство, что в основе математического аппарата квантовой физики лежит некоммутативная алгебра матриц или операторов. Перефразируя известное определение теории вероятностей [1], можно сказать, что квантовая теория вероятностей — это теория операторов в гильбертовом пространстве, «одушевленная» статистической интерпретацией квантовой механики.

Начало исследованию вероятностной структуры квантовой теории было положено в известной монографии Дж. фон Ней-

---

[1] «Probability theory is a measure theory — with a soul» (M. Kac).

мана «Математические основы квантовой механики» (1932). В этой книге, послужившей истоком многих идей функционального анализа, было дано обоснование формализма, развитого в предшествовавших физических работах, особенно в дираковских «Принципах квантовой механики». Кроме того, в ней был поднят ряд фундаментальных вопросов вероятностной структуры квантовой теории, которые в то время не могли найти удовлетворительного решения. В 60—70-е годы эта проблематика вызывает новый интерес, который стимулирует создание, уже на базе достижений современного функционального анализа, вероятностной теории, являющейся логическим развитием статистической интерпретации квантовой механики и свободной от ряда трудностей и противоречий первоначального подхода. Обзор основных принципов и результатов этой теории и является предметом настоящей статьи.

Квантовая вероятность связана со многими разделами математики и физики, и излагать ее можно с разных позиций. Автор придерживается той точки зрения, что наибольший интерес в квантовой вероятности представляют те факты, которые принципиально отличают ее от обычной (и зачастую противоречат классической вероятностной интуиции). По этой причине квантовая вероятность рассматривается здесь в тесной связи со статистикой измерений, в которой эти отличия находят наиболее яркое проявление и имеют определенное физическое содержание. Основное внимание уделено не формальным поискам некоммутативных аналогов различных результатов теории вероятностей, а раскрытию вероятностной структуры квантовой теории и показу того, как это помогает в решении конкретных проблем (подробнее см. введение).

С другой стороны, контраст между классической и квантовой вероятностью проявляется на фоне определенного параллелизма математических структур. В полной мере этот параллелизм раскрывается в рамках так называемой некоммутативной теории вероятностей — общей алгебраической схемы, включающей в себя как квантовый, так и классический (коммутативный) случаи. Всячески подчеркивая конкретные проявления этого параллелизма, автор отказался от соблазна изложения с более общих позиций, поскольку это потребовало бы усложнения математического аппарата, не сопровождающегося заметным выигрышем в понимании сущности квантовой вероятности. Вследствие такого подхода, а также ограниченности объема статьи некоторые красивые результаты некоммутативной теории вероятностей, носящие более технический характер, не нашли здесь подробного отражения. Взамен в тексте даются ссылки на другие статьи обзорного характера, где этим вопросам уделено больше внимания.

Большая часть тем, вошедших в этот обзор, обсуждалась на семинаре «Алгебраические методы в классической и квантовой статистике» в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, и автор выражает всем его участникам свою искреннюю благодарность.

Введение

0.1. Конечномерные системы. Изложение теории вероятностей принято начинать с конечной схемы. Следуя этой традиции, рассмотрим конечное вероятностное пространство Ω. Имеют место три тесно связанных между собой факта, которые по-разному выражают классичность вероятностной схемы:

1) множество событий $A \subset \Omega$ образует булеву алгебру;

2) множество распределений вероятностей $[p_1, \ldots, p_N]$ на Ω является симплексом, т. е. выпуклым множеством, в котором каждая точка однозначно представляется в виде смеси (выпуклой комбинации) крайних точек;

3) множество случайных величин $[\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$ на Ω образует коммутативную алгебру (относительно поточечного умножения).

Квантовым аналогом этой схемы является модель N-уровневой системы. Аналог распределения вероятностей — *состояние* такой системы описывается *матрицей плотности* — эрмитовой $N \times N$-матрицей S, удовлетворяющей условиям положительной определенности и единичности следа

$$S \geqslant 0, \ \operatorname{Tr} S = 1; \tag{0.1}$$

аналог случайной величины — *наблюдаемая* описывается произвольной эрмитовой $N \times N$-матрицей X. Пусть

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j \tag{0.2}$$

— спектральное разложение эрмитовой матрицы X, где $x_1 < x_2 < \ldots$ — собственные числа, $E_1, E_2, \ldots$ — проекторы на соответствующие собственные подпространства. Набор $\mathbf{E} = \{E_j\}$ образует *ортогональное разложение единицы*:

$$E_j E_k = \delta_{jk} E_j; \quad \sum_{j=1}^{n} E_j = I, \tag{0.3}$$

где I — единичная матрица. Из свойств (0.1), (0.3) следует, что соотношение

$$\mu_S^X (x_j) = \operatorname{Tr} S E_j; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{0.4}$$

задает распределение вероятностей на спектре $\operatorname{Sp} X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ наблюдаемой X; в квантовой механике постулируется, что это есть распределение вероятностей наблюдаемой X в состоянии S.

В частности, среднее значение X в состоянии S есть

$$\mathbf{E}_S(X) = \operatorname{Tr} SX. \tag{0.5}$$

Если в этой модели ограничиться рассмотрением только диагональных матриц

$$S = \begin{bmatrix} p_1 \cdot & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix},$$

то мы возвращаемся к классической схеме с N элементарными событиями, где, в частности, (0.5) сводится к $\mathbf{E}_S(X) = \sum_{j=1}^{N} p_j \lambda_j$. То же самое мы получили бы, рассматривая только одновременно диагонализуемые, т. е. коммутирующие (перестановочные между собой) матрицы. Поскольку имеются наблюдаемые, описываемые некоммутирующими матрицами, модель N-уровневой системы не сводится к классической схеме.

Роль индикаторов событий в квантовом случае играют наблюдаемые, принимающие значения 0 или 1, т. е. эрмитовы идемпотентные матрицы: $E^2 = E$. Вводя унитарное координатное пространство $\mathscr{H} = \mathbf{C}^N$, в котором действуют $N \times N$-матрицы, такую матрицу E можно рассматривать как ортогональный проектор на подпространство $\mathscr{E}$ в $\mathscr{H}$. Таким образом, **квантовые события** можно отождествить с подпространствами унитарного пространства $\mathscr{H}$. Множество квантовых событий, называемое **квантовой логикой**, частично упорядочено (по включению) и наделено операциями $\mathscr{E}_1 \vee \mathscr{E}_2$ (линейная оболочка подпространств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$), $\mathscr{E}_1 \wedge \mathscr{E}_2$ (пересечение подпространств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$), $\mathscr{E}'$ (ортогональное дополнение) с известными свойствами. Неклассичность модели N-уровневой системы можно выразить тремя различными утверждениями:

1) квантовая логика событий не является булевой алгеброй, поскольку в ней не выполнено тождество дистрибутивности

$$\mathscr{E}_1 \wedge (\mathscr{E}_2 \vee \mathscr{E}_3) = (\mathscr{E}_1 \wedge \mathscr{E}_2) \vee (\mathscr{E}_1 \wedge \mathscr{E}_3).$$

Вследствие этого, нет «элементарных событий», на которые однозначно распадалось бы любое квантовое событие;

2) выпуклое множество состояний не является симплексом, т. е. представление матрицы плотности в виде смеси крайних точек неоднозначно;

3) комплексная оболочка множества наблюдаемых является некоммутативной (ассоциативной) алгеброй.

В бесконечномерном случае вместо матриц приходится рассматривать операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Математически корректное изложение основных понятий квантовой механики в гильбертовом пространстве было впервые дано Дж. фон Нейманом [26]. Он, в частности, подчеркнул существенное различие между эрмитовыми (симметричными) и самосопряженными операторами, которое, конечно, не проводилось в предшествовавших физических работах и указал, что именно условие самосопряженности обеспечивает в случае $\dim\mathscr{H}=\infty$ аналог спектрального разложения (0.2). Другой круг вопросов в случае $\dim\mathscr{H}=\infty$ связан с уточнением понятия следа и соответствующего класса операторов с конечным следом. Математическая схема, называемая с т а н д а р т н о й ф о р м у л и р о в к о й квантовой механики в гильбертовом пространстве, рассматривается в гл. 1.

0.2. Общие постулаты статистического описания. Каждая из математических структур — квантовая логика событий, выпуклое множество состояний и алгебра квантовых наблюдаемых — может быть охарактеризована определенной системой аксиом, но возникающие при этом характеризационные проблемы оказываются совсем не тривиальными и по существу составляют отдельные направления исследований, обзор которых выходит за рамки настоящей статьи (см., в частности, Сигал [32], Макки [23], Варадарайан [160], Людвиг [125], Гаддер [95]). Имея дело с конкретным объектом — квантовой теорией вероятностей в гильбертовом пространстве, не приходится прибегать к тем или иным системам аксиом; более того, именно знание структурных особенностей этого объекта и дает основание для мотивировки той или иной аксиомы. Одним из полезных уроков аксиоматического подхода является, однако, указание на плодотворный параллелизм в описании классических и квантовых систем. Формулируемые ниже положения являются модификацией первых четырех аксиом Макки, одинаково применимых как к классическим, так и квантовым системам.

(I) Заданы множество $\mathfrak{S}$, элементы которого называются *состояниями* и множество $\mathfrak{D}$, элементы которого называются (вещественными) *наблюдаемыми*. Для любой пары $S\in\mathfrak{S}$, $X\in\mathfrak{D}$ задано распределение вероятностей $\mu_S^X(dx)$ на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой $\mathbf{R}$, называемое распределением вероятностей наблюдаемой X в состоянии S.

Состояние S интерпретируется как более или менее детальное описание приготовления с т а т и с т и ч е с к о г о а н с а м б л я независимых индивидуальных представителей рассматриваемой системы, а наблюдаемая X — как величина, измеряемая определенным прибором для каждого представителя в данном ансамбле. Аксиома (I), таким образом, предполагает в о с п р о и з в о д и м о с т ь индивидуальных экспериментов и у с т о й ч и в о с т ь ч а с т о т при их независимых повторениях. Следующая аксиома выражает возможность с м е ш и в а н и я ансамблей.

(II) Для любых $S_1, S_2\in\mathfrak{S}$ и любого числа p, $0<p<1$, существует $S\in\mathfrak{S}$, такое, что

$$\mu_S^X=p\mu_{S_1}^X+(1-p)\,\mu_{S_2}^X.$$

для всех $X\in\mathfrak{D}$; S называется *смесью* состояний S_1, S_2 в пропорции $p:(1-p)$.

Следующая аксиома говорит о возможности преобразования информации, полученной при измерении наблюдаемой. Пусть f борелевская функция из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Если X_1, $X_2 \in \mathfrak{O}$ таковы, что для всех $S \in \mathfrak{S}$

$$\mu_S^{X_2}(B) = \mu_S^{X_1}(f^{-1}(B)); \quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}),$$

где $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$, то наблюдаемая X_2 *функционально подчинена* наблюдаемой X_1. В этом случае будем писать $X_2 = f \circ X_1$.

(III) Для любой $X_1 \in \mathfrak{O}$ и любой борелевской функции f существует $X_2 \in \mathfrak{O}$, такая что $X_2 = f \circ X_1$.

Пару непустых множеств $(\mathfrak{S}, \mathfrak{O})$, удовлетворяющих аксиомам (I)—(III), назовем *статистической моделью*. Статистическая модель называется *отделимой*, если

(IV) Из того, что $\mu_{S_1}^{X} = \mu_{S_2}^{X}$ для всех $X \in \mathfrak{O}$ следует $S_1 = S_2$; из того, что $\mu_S^{X_1} = \mu_S^{X_2}$ для всех $S \in \mathfrak{S}$ следует $X_1 = X_2$.

Для отделимой модели операция смешивания в $\mathfrak{S}$ и отношение функциональной подчиненности в $\mathfrak{O}$ определены однозначно. Тем самым множество состояний $\mathfrak{S}$ наделяется выпуклой структурой, а множество наблюдаемых $\mathfrak{O}$ получает частичную упорядоченность.

Наблюдаемые $X_1, \ldots, X_m$ называются *совместимыми*, если они функционально подчинены некоторой наблюдаемой X, т. е. $X_j = f_j \circ X$; $j = 1, \ldots, m$. Совместимые наблюдаемые могут быть измерены в одном эксперименте. Наблюдаемые, совместимые со всеми наблюдаемыми $X \in \mathfrak{O}$, образуют *центр* статистической модели. Запас элементов в центре определяет степень классичности модели.

0.3. Классические и квантовые системы. Пусть $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ — измеримое пространство, $\mathfrak{P}(\Omega)$ — выпуклое множество всех вероятностных мер на Ω, а $\mathfrak{O}(\Omega)$ совокупность всех вещественных случайных величин с естественным отношением функциональной подчиненности. Пусть

$$\mu_P{}^X(B) = P(X^{-1}(B)) : B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$$

— распределение вероятностей $X \in \mathfrak{O}(\Omega)$ относительно $P \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Пара $(\mathfrak{P}(\Omega), \mathfrak{O}(\Omega))$ образует отделимую статистическую модель, которую можно назвать к о л м о г о р о в с к о й. В этой модели все наблюдаемые совместимы и центр совпадает с $\mathfrak{O}(\Omega)$. Для простоты продемонстрируем совместимость наблюдаемых с конечным множеством значений. Всякая такая наблюдаемая имеет представление, аналогичное (0.2)

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j(\omega), \tag{0.6}$$

где $E_j(\omega)$ есть индикатор множества $B_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\}$. Множества B_j образуют разбиение пространства Ω, а $\{E_j(\omega)\}$ являются аналогом ортогонального разложения единицы (0.3). Если $X_1, \ldots, X_m$ — произвольный набор таких наблюдаемых, то достаточно взять разбиение $\{B_j\}$ более мелкое, чем все разбиения, соответствующие наблюдаемым X_i, чтобы было возможно представить все X_i как функции наблюдаемой X, соответствующей такому разбиению $\{B_j\}$.

Статистическая модель N-уровневой квантовой системы фактически была описана в п. 1. Если наблюдаемая X имеет спектральное разложение (0.2), то наблюдаемая $f \circ X$ определяется как

$$f \circ X = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) E_j. \tag{0.7}$$

Квантовые наблюдаемые $X_1, \ldots, X_m$ совместимы тогда и только тогда, когда соответствующие матрицы перестановочны, т. е.

$$X_i X_j = X_j X_i; \; i, \; j = 1, \ldots, m.$$

Центр такой модели тривиален: он состоит из матриц, кратных единичной, т. е. только из постоянных наблюдаемых.

Для совместимых наблюдаемых естественно вводится совместное распределение вероятностей относительно любого состояния S. Если же $X_1, \ldots, X_m$ несовместимы, то совместное распределение относительно произвольного состояния не существует. Это обстоятельство отражает квантовый принцип дополнительности. Физические измерения над микрообъектами осуществляются макроскопическими экспериментальными установками, каждая из которых предполагает сложную и специфичную организацию пространственно-временной среды. Разные способы такой организации, отвечающие разным наблюдаемым, могут быть взаимно исключающими (хотя и относятся к одному и тому же микрообъекту), т. е. дополнительными. Наличие обширного запаса несовместимых наблюдаемых — первое из основных отличий квантовой статистики от классической.

Один из наиболее спорных вопросов квантовой теории — проблема скрытых параметров, т. е. вопрос о принципиальной возможности описания квантовой статистики в терминах классического вероятностного пространства. Первая попытка доказательства невозможности введения скрытых параметров была предпринята Дж. фон Нейманом в [26] и долгое время его аргументы рассматривались как решающие. В 1966 г. Дж. Белл обратил внимание на их неполноту и указал на другое фундаментальное свойство квантовомеханического описания, которое можно обозначить как свойство целостности[1]. Математически оно связано с принципом суперпозиции и с тем обстоятель-

[1] Английский термин — non-separability.

ством, что составные квантовые системы описываются с помощью тензорного, а не декартова произведения, как в классической теории вероятностей. Свойства дополнительности и целостности лежат в основе негативных результатов в проблеме скрытых параметров, которые обсуждаются в конце гл. 1.

0.4. Рандомизация в классической и квантовой статистике. Вернемся к колмогоровой модели и рассмотрим случайную величину (0.6). В каждой точке $\omega\in\Omega$ она с вероятностью 1 принимает одно из значений x_j. В математической статистике, в частности в теории статистических решений полезно рассмотрение «рандомизованных» случайных величин, которые определяются указанием вероятностей $M_j(\omega)$, $(0\leqslant M_j(\omega)\leqslant 1)$ принятия значения x_j для любого элементарного события ω. Набор функций $\mathbf{M}=\{M_j(\omega)\}$ характеризуется условиями

$$M_j(\omega)\geqslant 0;\quad \sum_{j=1}^{n} M_j(\omega)=1;\quad \omega\in\Omega, \tag{0.8}$$

и описывает неточное измерение случайной величины X, т. е. измерение со случайными ошибками. Распределение вероятностей такого измерения относительно вероятностной меры P дается формулой

$$\mu_P^{\mathbf{M}}(x_j)=\int_{\Omega} P(d\omega)\, M_j(\omega). \tag{0.9}$$

В частности, измерение является точным (безошибочным), если $M_j(\omega)=E_j(\omega)$. Таким образом возникает другая классическая статистическая модель, которую по имени создателя теории статистических решений можно назвать моделью Вальда.

Естественно рассмотреть квантовый аналог модели Вальда, в которой наблюдаемая с конечным множеством значений описывается конечным разложением единицы, т. е. семейством матриц (операторов) $\mathbf{M}=\{M_j\}$, удовлетворяющим условиям

$$M_j\geqslant 0;\quad \sum_{j=1}^{n} M_j=I. \tag{0.10}$$

Вероятность j-го исхода в состоянии S определяется формулой, аналогичной (0.9)

$$\mu_S^{\mathbf{M}}(x_j)=\operatorname{Tr} SM_j. \tag{0.11}$$

Эти определения естественно переносятся и на наблюдаемые с произвольным множеством значений. Так возникает обобщенная статистическая модель квантовой механики (см. § 2.1).

Общие разложения единицы в квантовой теории появляются на рубеже 70-х годов. К этому независимо приводят исследования по квантовой аксиоматике (Г. Людвиг), по проблеме воспроизводимости, связанной с повторными измерениями (Э. Б. Дэвис и Дж. Льюис); по квантовой теории статистических решений (А. С. Холево) и другие работы. Обобщенная статистическая модель квантовой механики является логическим следствием ее вероятностной структуры и дает основу для рассмотрения ряда вопросов, не находящих удовлетворительного решения в рамках стандартной формулировки.

0.5. Выпуклая геометрия разложений единицы и фундаментальные пределы точности. Хотя описанное выше расширение понятия наблюдаемой формально аналогично введению рандомизованных величин в классической статистике, неортогональные разложения единицы имеют в квантовой теории принципиально более важное значение, нежели просто средство описания неточных измерений. Дело в том, что и с математической, и с физической точек зрения наибольший интерес представляют крайние точки выпуклого множества разложений единицы (0.10), описывающие статистику предельно точных и максимально информативных измерений. В классическом случае крайние точки множества (0.8) совпадают с нерандомизованными процедурами $\{E_j(\omega)\}$, соответствующими обычным случайным величинам. Однако в квантовом случае крайние точки множества (0.10) при $n>2$ уже не исчерпываются ортогональными разложениями единицы. Следовательно, для описания предельно точных квантовых измерений требуются, в общем случае, неортогональные разложения единицы.

С другой стороны, как показал М. А. Наймарк (1940), произвольное разложение единицы расширяется до ортогонального в некотором объемлющем гильбертовом пространстве. Это позволяет истолковать неортогональное разложение единицы как обычную наблюдаемую в расширении исходной квантовой системы, содержащем независимую дополнительную систему. Таким образом, измерение над расширением может быть более точным и информативным, чем любое прямое квантовое измерение. Этот парадоксальный с точки зрения классической статистики факт связан с затронутым в п. 3 квантовым свойством целостности.

В 1940—50 годы в работах Д. Габора и Л. Бриллюэна было высказано предположение, что квантово-механическая природа канала связи должна налагать фундаментальные ограничения на скорость передачи и точность воспроизведения информации. Этот вопрос приобрел актуальность в 60-е годы с появлением квантовых каналов связи — систем передачи информации, основанных на свойствах когерентного лазерного излучения. В 70-е годы была создана последовательная квантовая теория статистических решений, которая дает принципиальную основу для рассмотрения вопросов предельной точности и информативности измерений (см. К. Хелстром [37], А. С. Холево [43]).

В этой теории решающие процедуры — измерения описываются разложениями единицы в гильбертовом пространстве системы и решаются задачи об отыскании экстремума некоторого функционала (меры точности, шенноновской информации) в классе квантовых решающих процедур, обычно подчиненных дополнительным ограничениям (несмещенности, ковариантности и т. п.) (см. гл. 2).

0.6. Проблема соответствия. Одна из трудностей в стандартной формулировке квантовой механики состоит в невозможности сопоставления некоторым величинам, таким как время, угол, фаза и т. п. самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве системы. Причина кроется в теореме единственности Стоуна—фон Неймана, которая налагает жесткие ограничения на спектры канонически сопряженных наблюдаемых.

К этому же кругу вопросов можно отнести и трудности с локализуемостью (т. е. введением ковариантных наблюдаемых положения) для релятивистских квантовых частиц с нулевой массой. Рассмотрение в качестве наблюдаемых неортогональных разложений единицы, подчиненных условиям ковариантности, аналогичных коммутационным соотношениям Вейля в теореме Стоуна—фон Неймана, позволяет в значительной степени избежать этих трудностей (см. гл. 2). В спектральной теории неортогональные разложения единицы возникают как обобщенные спектральные меры несамосопряженных операторов. В соответствии с этим, например, оператор, отвечающий наблюдаемой времени, оказывается максимальным эрмитовым (но не самосопряженным). Можно сказать, что обобщенная статистическая модель квантовой механики на новом математическом уровне оправдывает «наивное» представление о вещественной наблюдаемой, как об эрмитовом, но не обязательно самосопряженным, операторе.

0.7. Повторные и непрерывные измерения. В колмогоровской модели преобразования состояний системы могут быть описаны с помощью условных вероятностей. Пусть в результате измерения случайной величины (0.6) получено значение x_j. При этом классическое состояние, т. е. вероятностная мера $P(d\omega)$ на Ω преобразуется по формуле

$$P(A) \to P(A \mid B_j) = \frac{\int_A P(d\omega) E_j(\omega)}{\int_\Omega P(d\omega) E_j(\omega)}; \quad A \in \mathscr{B}(\Omega). \tag{0.12}$$

Очевидно, что если результат измерения не принимается во внимание, то состояние P вообще не изменяется:

$$P(A) \to \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j) = P(A). \tag{0.13}$$

В квантовой статистике ситуация качественно более сложна. Аналогом преобразования (0.12) является знаменитый **проекционный постулат** Дж. фон Неймана

$$S \to S_j = \frac{E_j S E_j}{\operatorname{Tr} S E_j}, \tag{0.14}$$

где S оператор плотности состояния перед измерением, а S_j — после измерения наблюдаемой (0.2), в результате которого получено значение x_j. Основанием для этого постулата служит феноменологическая гипотеза воспроизводимости, подразумевающая предельную точность и минимальность возмущения, вносимого измерением наблюдаемой X. Если результат измерения не принимается во внимание, то состояние S преобразуется по формуле, аналогичной (0.13):

$$S \to \sum_{j=1}^{n} S_j \mu_S^X (x_j) = \sum_{j=1}^{n} E_j S E_j \tag{0.15}$$

Однако в общем случае $\sum_j E_j S E_j \neq S$; это означает, что изменение состояния в ходе квантового измерения не сводится только к преобразованию информации и отражает также принципиально неустранимое и необратимое физическое воздействие измерительного прибора на наблюдаемую систему. С проекционным постулатом связан целый ряд проблем; не затрагивая вопросов философского характера, которые выходят за пределы вероятностной интерпретации, остановимся на конкретных проблемах, которые успешно решаются в рамках обобщенной статистической модели квантовой механики.

Принципиальную трудность представляет формулировка проекционного постулата для наблюдаемых с непрерывным спектром. Для описания изменения состояния при произвольном квантовом измерении Э. Б. Дэвис и Дж. Льюис (1970) ввели понятие **инструмента** — меры со значениями в множестве преобразований квантовых состояний. Этим понятием охватываются и неточные измерения, не удовлетворяющие условию воспроизводимости, что позволяет включить и случай непрерывного спектра. С каждым инструментом связано разложение единицы, причем инструментам, возникающим из проекционного постулата, отвечают ортогональные разложения единицы. Понятие инструмента открывает возможность описания статистики любой последовательности квантовых измерений.

Новое освещение получает вопрос о траекториях, восходящий к фейнмановской формулировке квантовой механики. Процесс непрерывного (во времени) измерения квантовой наблюдаемой можно представить как предел «серий» последовательных неточных измерений. Математическое описание такого предела обнаруживает замечательные аналогии с классической схемой суммирования случайных величин, функциональными предельными теоремами в теории вероятностей и представлением Леви—Хинчина для процессов с независимыми приращениями (см. гл. 4).

0.8. Необратимая динамика. Обратимая динамика изолированной квантовой системы описывается уравнением

$$S \to U_t S U_t^{-1}; \quad -\infty < t < \infty, \tag{0.16}$$

где $\{U_t\}$ — группа унитарных операторов. Если система является открытой, т. е. взаимодействует с окружением, то ее эволюция является, как правило, необратимой. Пример такого необратимого изменения состояния, обусловленного взаимодействием с измерительным прибором, дается соотношением (0.15). Наиболее общий вид динамического отображения, задающего конечную эволюцию открытой системы, включает как (0.16), так и (0.15):

$$S \to \sum_j V_j S V_j^*, \tag{0.17}$$

где $\sum_j V_j^* V_j = I$. Среди всевозможных аффинных преобразований выпуклого множества состояний, отображения (0.17) выделяются специфически некоммутативным свойством полной положительности, возникшим и играющим важную роль в современной теории операторных алгебр.

Непрерывная марковская эволюция открытой системы описывается динамической полугруппой, т. е. полугруппой динамических отображений, удовлетворяющей определенным условиям непрерывности (см. Э. Б. Дэвис [78]). Динамические полугруппы являются некоммутативным аналогом марковских полугрупп в теории вероятностей. В 1976 г. Г. Линдблад и независимо, в конечномерном случае, В. Горини, А. Коссаковский и Э. Сударшан получили полное описание инфинитезимального оператора непрерывной по норме динамической полугруппы. Этот результат, лежащий в основе многих фактов теории квантовых случайных процессов, рассматривается в гл. 3.

0.9. Квантовые случайные процессы. Одним из стимулов возникновения теории квантовых случайных процессов послужила проблема расширения динамической полугруппы до обратимой динамики «большой системы», включающей открытую систему и окружение. Возможность такого расширения означает, в частности, согласованность понятия динамической полугруппы с основным динамическим принципом квантовой механики, выраженным соотношением (0.16).

В теории вероятностей подобное расширение марковской полугруппы до группы временных сдвигов в пространстве траекторий, соответствующих марковскому случайному процессу, осуществляется известной конструкцией Колмогорова—Даниэля. Понятие квантового случайного процесса, играющее важную роль в проблеме расширения динамической полугруппы, было сформулировано Л. Аккарди, А. Фриджерио и Дж. Льюисом (1980). Роль марковского свойства особенно подчеркивалась Л. Аккарди. В 80-е годы теория квантовых случайных процессов превратилась в обширное самостоятельное поле исследований (см., в частности, сборники [141]—[145]).

Аналитический аппарат квантового стохастического исчисления, позволяющий, в частности, строить нетривиальные классы квантовых случайных процессов и конкретные расширения динамических полугрупп, был предложен Р. Л. Хадсоном и К. Р. Партасарати (1982). Квантовое стохастическое исчисление возникает на пересечении двух концепций — временной фильтрации в смысле теории случайных процессов и вторичного квантования в пространстве Фока. В конце 60-х годов Р. Стритер и X. Араки указали на структуру непрерывного тензорного произведения, которая лежит в основе связи между безграничной делимостью, процессами с независимыми приращениями и пространством Фока. Благодаря этому, пространство Фока оказывается носителем процессов «квантового шума», которые дают универсальную модель окружения открытой квантовой системы. Квантовое стохастическое исчисление представляет интерес и с точки зрения классической теории случайных процессов. Оно перебрасывает мост между исчислением Ито и вторичным квантованием, открывает неожиданные связи между непрерывными и скачкообразными процессами, позволяет по-новому взглянуть на понятие стохастического интеграла. Наконец, на этой основе развиваются потенциально важные приложения, относящиеся к теории управления и фильтрации для квантовых случайных процессов (см. гл. 5).

Глава 1

СТАНДАРТНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Основные понятия

1.1. Операторы в гильбертовом пространстве. Изложению теории операторов в гильбертовом пространстве, в значительной мере стимулированной проблемами квантовой механики, посвящено много прекрасных книг (см., в частности, [2], [30]). Ниже мы лишь напоминаем некоторые факты и фиксируем обозначения.

Далее $\mathcal{H}$ обозначает сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Для скалярного произведения в $\mathcal{H}$ используется дираковское обозначение $\langle\varphi|\psi\rangle$, причем считается, что форма $\langle\varphi|\psi\rangle$ линейна по ψ и антилинейна по φ. Символ $|\psi\rangle\langle\varphi|$

обозначает оператор, действующий на вектор $\chi\in\mathscr{H}$ по формуле

$$|\psi\rangle\langle\varphi|\chi=\psi\langle\varphi|\chi\rangle.$$

В частности, если $\langle\psi|\psi\rangle=1$, то $|\psi\rangle\langle\psi|$ есть проектор на вектор $\psi\in\mathscr{H}$. Линейная оболочка множества операторов вида $|\psi\rangle\langle\varphi|$ совпадает с множеством операторов конечного ранга в $\mathscr{H}$.

Если X — ограниченный оператор в $\mathscr{H}$, то X^* обозначает *сопряженный* оператор, определяемый соотношением

$$\langle\varphi|X^*\psi\rangle=\langle X\varphi|\psi\rangle;\quad \varphi,\ \psi\in\mathscr{H}.$$

Множество $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathscr{H}$ является банаховой алгеброй с инволюцией *. Оператор $X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *эрмитов*, если $X=X^*$. *Унитарным* оператором называется оператор U, такой что $U^*U=UU^*=I$, где I — единичный оператор. *Проектором* называется эрмитов оператор E, такой что $E^2=E$. Эрмитов оператор X *положителен* ($X\geqslant0$), если $\langle\psi|X\psi\rangle\geqslant0$ для всех $\psi\in\mathscr{H}$. Для положительного оператора однозначно определен положительный квадратный корень.

Для всякого ограниченного положительного оператора T однозначно определен *след*

$$\operatorname{Tr} T=\sum_{i=1}^{\infty}\langle e_i|Te_i\rangle\leqslant+\infty, \tag{1.1}$$

где $\{e_i\}$ произвольный ортонормированный базис. Оператор T называется *ядерным* (оператором со следом), если он является линейной комбинацией положительных операторов с конечным следом. Для такого оператора след определяется однозначно, как сумма абсолютно сходящегося ряда вида (1.1). Множество ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ является банаховым пространством относительно нормы $\|T\|_1=\operatorname{Tr}\sqrt{T^*T}$, причем множество операторов конечного ранга плотно в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$.

Множество $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ образует двусторонний идеал в алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Сопряженное к банахову пространству $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ изоморфно $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, причем двойственность определяется билинейной формой

$$\langle T,\ X\rangle=\operatorname{Tr} TX;\quad T\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}),\quad X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}). \tag{1.2}$$

Нижний индекс h в обозначении множества операторов означает, что рассматривается соответствующее подмножество эрмитовых операторов, например, $\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$ есть вещественное банахово пространство ограниченных эрмитовых операторов в $\mathscr{H}$. Отметим, что $\mathfrak{T}_h(\mathscr{H})^*=\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$, причем двойственность по-прежнему задается формой (1.2).

Кроме сходимости по операторной норме в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, часто используются более слабые понятия сходимости. Последовательность $\{X_n\}$ сходится к X *сильно*, если $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n\psi-X\psi\|=0$ для всех $\psi\in\mathscr{H}$, *слабо*, если $\lim\limits_{n\to\infty}\langle\varphi|X_n\psi\rangle=\langle\varphi|X\psi\rangle$ для всех $\varphi,\ \psi\in\mathscr{H}$, и w^* — *слабо* (ультраслабо), если $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Tr} TX_n=\operatorname{Tr} TX$ для всех

$T \in \mathfrak{T}(\mathscr{H})$. Если $\{X_n\}$ ограниченная по норме последовательность операторов, такая что $X_n \leqslant X_{n+1}$, то X_n сходится сильно, слабо и w^* — слабо к ограниченному оператору X (обозначается $X_n \uparrow X$).

1.2. Оператор плотности. Так называется всякий положительный оператор S с единичным следом:

$$S \geqslant 0; \quad \mathrm{Tr}\, S = 1.$$

Множество операторов плотности $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является выпуклым подмножеством вещественного линейного пространства $\mathfrak{T}_h(\mathscr{H})$; более, того, оно является основанием конуса положительных элементов, порождающего $\mathfrak{T}_h(\mathscr{H})$. Точка S выпуклого множества $\mathfrak{S}$ называется *крайней*, если из того, что $S = pS_1 + (1-p)S_2$, где $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$, $0 < p < 1$, следует $S_1 = S_2 = S$. Крайними точками множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ являются одномерные проекторы

$$S_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{1.3}$$

где $\psi \in \mathscr{H}$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Всякий оператор плотности представим в виде счетной выпуклой комбинации

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

где $\langle\psi_j|\psi_j\rangle = 1$, $p_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Одно из таких представлений дается спектральным разложением оператора S, когда ψ_j являются его собственными векторами, а p_j соответствующими собственными числами.

Рассмотрим множество $\mathfrak{E}(\mathscr{H})$ проекторов в $\mathscr{H}$, изоморфное квантовой логике событий (замкнутых линейных подпространств $\mathscr{H}$). *Вероятностной мерой* на $\mathfrak{E}(\mathscr{H})$ называется вещественная функция μ со свойствами: 1) $0 \leqslant \mu(E) \leqslant 1$, $E \in \mathfrak{E}(\mathscr{H})$; 2) если $\{E_j\} \subset \mathfrak{E}(\mathscr{H})$, причем $E_j E_k = 0$ при $j \neq k$ и $\sum_j E_j = I$, то

$$\sum_j \mu(E_j) = 1.$$

Отвечая на вопрос Макки, Глисон (1957) доказал следующую теорему.

Теорема. Пусть $\dim \mathscr{H} \geqslant 3$. Тогда всякая вероятностная мера на $\mathfrak{E}(\mathscr{H})$ имеет вид

$$\mu(E) = \mathrm{Tr}\, SE, \tag{1.4}$$

где S — однозначно определяемый оператор плотности.

Случай $\dim \mathscr{H} = 2$ является особым — для него легко указать меры, не представимые в виде (1.4), однако они не используются в квантовой теории. Доказательство теоремы Глисона совершенно нетривиально и породило целое направление в некоммутативной теории меры, посвященное всевозможным обобщениям и упрощениям этой теоремы (см. обзор Кручиньского в [141]).

По поводу некоммутативной теории меры и интегрирования см. обзоры Ш. А. Аюпова и А. Н. Шерстнева и другие статьи в сборниках [18], [34].

1.3. Спектральная мера. Пусть $\mathscr{X}$ множество с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathscr{B}(\mathscr{X})$. *Ортогональным разложением единицы* в $\mathscr{H}$ называется проекторно-значная мера на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$, т. е. функция множеств $\mathbf{E}:\mathscr{B}(\mathscr{X})\to\mathfrak{E}(\mathscr{H})$, удовлетворяющая условиям:

1) если B_1, $B_2\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $B_1\cap B_2=\varnothing$, то $E(B_1)E(\mathrm{B}_2)=0$;

2) если $\{B_j\}$ — конечное или счетное разбиение $\mathscr{X}$ на попарно-непересекающиеся измеримые подмножества, то

$$\sum_j E(B_j)=\mathrm{I},$$

где ряд сходится сильно.

Пусть X — оператор с плотной областью определения $\mathscr{D}(X)\subset\mathscr{X}$. Обозначим $\mathscr{D}(X^*)$ множество векторов φ таких, что существует $\chi\in\mathscr{H}$, для которого

$$\langle\varphi|X\psi\rangle=\langle\chi|\psi\rangle;\ \psi\in\mathscr{D}(X).$$

Определим оператор X^* с областью определения $\mathscr{D}(X^*)$, полагая $X^*\varphi=\chi$. Оператор X называется *эрмитовым* (симметрическим), если $X\subseteq X^*$, и *самосопряженным,* если $X=X^*$.

Спектральная теорема (фон Нейман, Стоун, Рисс, 1929—1932) устанавливает взаимно однозначное соответствие между ортогональными разложениями единицы $\mathbf{E}$ на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой $\mathbf{R}$ и самосопряженными операторами в $\mathscr{H}$ по формуле

$$X=\int_{-\infty}^{\infty} xE(dx), \tag{1.5}$$

где интеграл понимается в подходящем смысле (см. [30]). Разложение единицы $\mathbf{E}$ называется *спектральной мерой* оператора X. Для любой борелевской функции f определен самосопряженный оператор

$$f\circ X=\int_{-\infty}^{\infty} xE(dx),$$

спектральная мера $\mathbf{F}$ которого связана со спектральной мерой оператора X соотношением

$$F(B)=E(f^{-1}(B)),\ B\in\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Совокупность всех самосопряженных операторов в $\mathscr{H}$ обозначим $\mathfrak{O}(\mathscr{H})$.

1.4. Статистический постулат. С каждой квантовомеханической системой связывается сепарабельное комплексное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. *Состояния* системы описываются операторами плотности в $\mathscr{H}$. *Вещественной наблюдаемой* называется любой самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Распределение вероятностей наблюдаемой X в состоянии S задается соотношением

$$\mu_S^X(B) = \operatorname{Tr} SE(B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}), \tag{1.6}$$

где $\mathbf{E}$ — спектральная мера X. Определенную таким образом отделимую статистическую модель $(\mathfrak{S}(\mathscr{H}), \mathfrak{D}(\mathscr{H}))$ будем называть *стандартной статистической моделью квантовой механики.*

Из (1.5), (1.6) вытекает, что *среднее значение* наблюдаемой X в состоянии S,

$$\mathbf{E}_S(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \mu_S^X(dx),$$

равно

$$\mathbf{E}_S(X) = \operatorname{Tr} SX \tag{1.7}$$

(по крайней мере, для ограниченных наблюдаемых).

Крайние точки множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, описываемые операторами плотности (1.3), называются *чистыми состояниями*, а вектор ψ называется *вектором состояния*. Среднее значение наблюдаемой X в таком состоянии равно

$$\mathbf{E}_{S_\psi}(X) = \langle \psi | X\psi \rangle .$$

Допуская вольность речи, ограниченной наблюдаемой иногда называют произвольный $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Соотношение (1.7) определяет линейный положительный нормированный ($\mathbf{E}_S(I) = 1$) функционал на алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, т. е. состояние в смысле теории алгебр (предыдущие рассуждения поясняют происхождение этого математического термина). Состояние на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, определяемое оператором плотности по формуле (1.7), является *нормальным* в том смысле, что если $X_n \uparrow X$, то $\mathbf{E}_S(X_n) \to \mathbf{E}_S(X)$.

Алгеброй фон Неймана называется всякая алгебра ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, содержащая единичный оператор, замкнутая относительно инволюции и предельного перехода в сильной (слабой) операторной топологии. С любой алгеброй фон Неймана $\mathfrak{B}$, как и с $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, ассоциируется статистическая модель, в которой состояниями являются нормальные состояния на $\mathfrak{B}$, а наблюдаемыми — самосопряженные операторы, присоединенные к $\mathfrak{B}$. Такие модели занимают промежуточное положение между квантовой и классическими (соответствующими коммутативным алгебрам $\mathfrak{B}$), и играют важную роль в теории квантовых систем с бесконечно большим числом степеней свободы — полей и сред (см. [7], [9], [51]).

1.5. Совместимые наблюдаемые. *Коммутатором* ограниченных операторов X, Y называется оператор

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Операторы $X, Y \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ — *перестановочны* (коммутируют), если $[X, Y] = 0$. Самосопряженные операторы X, Y называются перестановочными, если перестановочны их спектральные меры. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Наблюдаемые $X_1, \ldots, X_n$ *совместимы*, т. е. существует наблюдаемая X и борелевские функции $f_1, \ldots, f_n$ такие, что $X_j = f_j \circ X$; $j = 1, \ldots, n$.

2) Операторы $X_1, \ldots, X_n$ перестановочны.

Если $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n$ — спектральные меры совместимых наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$, то соотношение

$$E(B_1 \times \ldots \times B_n) = E_1(B_1) \cdot \ldots \cdot E_n(B_n); \quad B_j \in \mathscr{B} \quad (\mathbf{R}),$$

однозначно определяет ортогональное разложение единицы $\boldsymbol{E}$ на $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, называемое совместной спектральной мерой операторов $X_1, \ldots, X_n$. Для любого оператора плотности S определено *совместное распределение вероятностей* наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$

$$\mu_S^{X_1, \ldots, X_n}(B) = \operatorname{Tr} SE(B), \; B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n).$$

Для любой борелевской функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена наблюдаемая

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) E(dx_1 \ldots dx_n),$$

причем

$$\mathbf{E}_S(f(X_1, \ldots, X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \mu_S^{X_1, \ldots, X_n}(dx_1 \ldots dx_n).$$

Существование несовместимых наблюдаемых отражает квантовый принцип дополнительности. Количественное выражение этого принципа дает *соотношение неопределенностей.* Для наблюдаемых X, Y, имеющих конечный второй момент относительно состояния S, корректно определяются билинейные формы

$$\langle X, Y \rangle_S = \operatorname{Re} \operatorname{Tr} YSX, \; [X, Y]_S = 2 \operatorname{Im} \operatorname{Tr} YSX$$

(см. [43, гл. II]). Пусть $\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_n]$ — набор произвольных наблюдаемых с конечным вторым моментом. Введем вещественные матрицы

$$\mathbf{D}_S(\mathbf{X}) = [\langle X_i - I \cdot \mathbf{E}_S(X_i), \; X_j - I \cdot \mathbf{E}_S(X_j) \rangle_S]_{i,j=1, \ldots, n}.$$

$$\mathbf{C}_S(\mathbf{X}) = [[X_i, \; X_j]_S]_{i,j=1, \ldots, n}.$$

Из положительной определенности полуторалинейных форм $X, Y \to \operatorname{Tr} Y^*SX$, $\operatorname{Tr} XSY^*$ вытекает неравенство[1])

$$\mathbf{D}_S(\mathbf{X}) \geqslant \pm \frac{i}{2} \mathbf{C}_S(\mathbf{X}), \qquad (1.8)$$

[1]) Впервые такое неравенство было указано Робертсоном (1934); впоследствии оно неоднократно переоткрывалось (см. [17]).

где левая и правая части рассматриваются как комплексные эрмитовы матрицы. Для двух наблюдаемых $X=X_1$, $Y=X_2$ неравенство (1.8) равносильно соотношению неопределенностей Шрёдингера—Робертсона

$$\mathbf{D}_S(X)\cdot\mathbf{D}_S(Y)\geqslant\langle X-\mathrm{I}\cdot\mathbf{E}_S(X),\ Y-\mathrm{I}\cdot\mathbf{E}_S(Y)\rangle^2+ \\ +\frac{1}{4}[X,\ Y]_S^2, \tag{1.9}$$

где

$$\mathbf{D}_S(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathbf{E}_S(X))^2\mu_S^X(dx)$$

— *дисперсия* наблюдаемой X в состоянии S. Если X, Y — совместимые наблюдаемые, то величина

$$\langle X-\mathrm{I}\cdot\mathbf{E}_S(X),\ Y-\mathrm{I}\cdot\mathbf{E}_S(Y)\rangle_S= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathbf{E}_S(X))(y-\mathbf{E}_S(Y))\mu_S^{X,Y}(dx\,dy)$$

представляет собой *ковариацию* X, Y в состоянии S; при этом $[X,\ Y]_S=0$ и (1.9) превращается в неравенство Коши—Шварца для ковариации случайных величин.

Детальный обзор многообразных вариантов и обобщений соотношения неопределенностей см. в [17].

Заметим, что если X, Y — произвольные (ограниченные) операторы, то

$$\langle X,\ Y\rangle_S=\mathrm{Tr}\,SX\circ Y, \tag{1.10}$$

где

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$$

— *йорданово* (симметризованное) *произведение* операторов X, Y. Величина вида (1.10) в квантовой статистической механике называется корреляцией, хотя если наблюдаемые X, Y не совместимы, она не связана каким-либо простым образом с измерениями X, Y.

1.6. Простейший пример. Пусть $\dim\mathscr{H}=2$. Базис в $\mathfrak{D}(\mathscr{H})$ образован матрицами

$$\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

где σ_i — ***матрицы Паули***. Полагая $X(\mathbf{a})=\sum_{i=1}^{3}a_i\sigma_i$, где $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\in\mathbf{R}^3$, имеем

$$X(\mathbf{a})\cdot X(\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathrm{I}+iX(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \tag{1.11}$$

где $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ — скалярное, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ — векторное произведения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Отсюда

$$\operatorname{Tr} X(\mathbf{a})X(\mathbf{b})=2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \tag{1.12}$$

Всякая матрица плотности однозначно записывается в виде

$$S(\mathbf{a})=\frac{1}{2}(I+X(\mathbf{a})),$$

где $|\mathbf{a}|\leqslant 1$. Таким образом, $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ как выпуклое множество изоморфно единичному шару в $\mathbf{R}^3$, причем чистые состояния соответствуют точкам сферы $|\mathbf{a}|=1$. В этом случае

$$S(\mathbf{a})=|\psi(\mathbf{a})\rangle\langle\psi(\mathbf{a})|,$$

где $\psi(\mathbf{a})$ — единичный вектор состояния. Поскольку $\langle\psi(\mathbf{a})|\psi(-\mathbf{a})\rangle=0$, то соотношение

$$X(\mathbf{a})=|\psi(\mathbf{a})\rangle\langle\psi(\mathbf{a})|-|\psi(-\mathbf{a})\rangle\langle\psi(-\mathbf{a})|,\quad (|\mathbf{a}|=1)$$

дает спектральное разложение наблюдаемой $X(\mathbf{a})$. Итак, наблюдаемая $X(\mathbf{a})$ принимает значения ± 1, причем вероятность значения ± 1 в состоянии $S(\mathbf{b})$ $(|\mathbf{b}|\leqslant 1)$ есть

$$\operatorname{Tr} S(\mathbf{b})S(\pm\mathbf{a})=\frac{1}{2}(1\pm\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}), \tag{1.13}$$

так что $X(\mathbf{a})$ имеет распределение Бернулли.

В физике конечномерное гильбертово пространство обычно описывает внутренние (спиновые) степени свободы квантовой системы. Случай $\dim\mathscr{H}=2$ отвечает минимальному спину $1/2$. Матрица $\frac{1}{2}X(\mathbf{a})$ описывает наблюдаемую спина в направлении $\mathbf{a}$, а оператор плотности $S(\mathbf{a})$ $(|\mathbf{a}|=1)$ — «полностью поляризованное состояние», в котором спин в направлении $\mathbf{a}$ имеет точное значение $\frac{1}{2}$. Операторы плотности с $|\mathbf{a}|<1$, представляющие собой смеси полностью поляризованных состояний, описывают «частично поляризованные» состояния, в частности, $\mathbf{a}=0$ соответствует хаотическому состоянию $S(0)=\frac{1}{2}I$.

Из соотношения (1.11) следует, что наблюдаемые $X(\mathbf{a})$, $X(\mathbf{b})$ совместимы тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. С другой стороны, для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^3$

$$X(\mathbf{a})X(\mathbf{b})+X(\mathbf{b})X(\mathbf{a})=2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})I. \tag{1.14}$$

Фиксируем некоторое состояние и рассмотрим соотношение

$$X(\mathbf{a})+X(\mathbf{b})=X(\mathbf{a}+\mathbf{b}). \tag{1.15}$$

Оно показывает, что распределение Бернулли устойчиво по отношению к сложению наблюдаемых, подчиненных соотношению антикоммутации (1.14), и что в квантовой теории вероятностей существует векторное пространство бернуллиевских случайных величин размерности, большей единицы (в обычной теории вероятностей таким свойством обладают только гауссовские случайные величины).

На самом деле такое пространство существует для любой конечной размерности n. Пусть $\mathscr{C}(n)$ — конкретная *алгебра Клиффорда*, т. е. комплексная алгебра матриц, порождаемая эрмитовыми образующими $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$X_j^2 = 1, \ X_j X_k + X_k X_j = 0; \ k \neq j; \ k, \ j = 1, \ldots, n. \qquad (1.16)$$

Более точное определение и дальнейшие сведения об алгебрах Клиффорда см., например, в [160]. Полагая $X(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ для $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, соотношения (1.16) можно записать в форме (1.14). При этом, конечно, выполняется (1.15). Наблюдаемые $X(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, принимают только значения $\pm|\mathbf{a}|$ и поэтому имеют распределение Бернулли относительно любого состояния на алгебре $\mathscr{C}(n)$.

На алгебре Клиффорда естественно определяется «бернуллиевское состояние», подобное многомерному гауссовскому распределению в обычной теории вероятностей (т. н. квазисвободное состояние канонических антикоммутационных соотношений [58], [150]).

§ 2. Симметрии, кинематика, динамика

2.1. Группы симметрий. Рассмотрим отделимую статистическую модель $(\mathfrak{S}, \mathfrak{D})$. Пусть задана пара взаимно однозначных преобразований: Ψ, отображающее $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{S}$ и Φ, отображающее $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{D}$, причем

$$\mu_{\Psi(S)}^{\Phi(X)}(B) = \mu_S^X(B); \ B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$$

для всех $S \in \mathfrak{S}$, $X \in \mathfrak{D}$. Отсюда следует, что Ψ является аффинным отображением, т. е.

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Psi(S_i),$$

если $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Преобразование Ψ назовем *симметрией* в пространстве состояний.

Теорема (Вигнер, 1931). Всякая симметрия пространства квантовых состояний имеет вид

$$\Psi(S) = USU^*, \qquad (2.1)$$

где U унитарный или антиунитарный оператор в $\mathscr{H}$.

Для средних значений наблюдаемых имеем

$$\operatorname{Tr} \Psi(S) X = \operatorname{Tr} S \Psi^*(X),$$

где

$$\Psi^*(X) = U^* X U. \qquad (2.2)$$

С точки зрения наблюдаемой статистики преобразование (2.1) состояний эквивалентно преобразованию (2.2) наблюдаемых. В первом случае говорят о *картине Шрёдингера,* а во втором — о *картине Гейзенберга.*

Пусть G — группа и $g \to \Psi_g$ — представление G в группу симметрий $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, так что

$$\Psi_{g_1 \cdot g_2} = \Psi_{g_1} \cdot \Psi_{g_2}; \; g_1, \; g_2 \in G.$$

Если G — связная топологическая группа, а представление $g \to \Psi_g$ непрерывно, то Ψ_g представляется в виде

$$\Psi_g(S) = U_g S U_g^*,$$

где $g \to U_g$ — проективное унитарное представление группы G в пространстве $\mathscr{H}$, т. е. операторы U_g унитарны и удовлетворяют уравнению

$$U_{g_1} U_{g_2} = \omega(g_1, \; g_2) U_{g_1 \cdot g_2}, \qquad (2.3)$$

где $\omega(g_1, g_2)$ — множитель представления — комплексная функция, удовлетворяющая определенным алгебраическим соотношениям (см., например, Варадарайан [160]).

2.2. Однопараметрические группы. В случае $G = \mathbf{R}$, как показали Вигнер и Баргманн, всегда можно выбрать $\omega(g_1, g_2) = 1$, так что однопараметрическая группа симметрий определяется унитарным представлением $\mathbf{R}$ в $\mathscr{H}$.

Теорема (Стоун, 1932). Пусть $t \to U_t$, $t \in \mathbf{R}$ — сильно непрерывная группа унитарных операторов в $\mathscr{H}$, так что

$$U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1 + t_2}; \; t_1, \; t_2 \in \mathbf{R}.$$

Тогда существует самосопряженный оператор A в $\mathscr{H}$, такой что $U_t = e^{itA}$. Обратно, для любого самосопряженного оператора A семейство e^{itA}, $t \in \mathbf{R}$, образует сильно непрерывную однопараметрическую группу.

Итак, предположив, например, что статистическое описание изолированной квантовой системы инвариантно относительно выбора начала отсчета времени, мы приходим к выводу, что в $\mathscr{H}$ существует самосопряженный оператор H такой, что состояние системы в момент времени t описывается формулой

$$S_t = e^{-iHt} S_0 e^{iHt}. \qquad (2.4)$$

Оператор H называется *гамильтонианом* (или наблюдаемой энергии) системы. Из (2.4) следует уравнение эволюции (в картине Шрёдингера)

$$i \frac{dS_t}{dt} = [H, \; S_t]. \qquad (2.5)$$

Если $S_0 = |\psi_0\rangle \langle\psi_0|$ — чистое состояние, то $S_t = |\psi_t\rangle \langle\psi_t|$, где $\{\psi_t\}$ — семейство векторов в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее *уравнению Шрёдингера*

$$i \frac{d\psi_t}{dt} = H \psi_t. \qquad (2.6)$$

Как правило, H — неограниченный оператор (полуограниченный снизу), так что в соотношениях (2.5), (2.6) следует позаботиться об областях определения.

Уравнение эволюции в картине Гейзенберга имеет вид

$$X_t = e^{iHt} X_0 e^{-iHt}; \; i\frac{dX_t}{dt} = [X_t, \; H].$$

Аналогично, из предположения о пространственной однородности вытекает существование самосопряженного оператора P, такого что состояние квантовой системы в системе отсчета, сдвинутой на расстояние x вдоль данной координатной оси, определяется уравнением

$$S_x = e^{-iPx} S_0 e^{iPx}. \tag{2.7}$$

Оператор P называется оператором *импульса* вдоль этой оси. Вообще, всякой однопараметрической группе симметрий геометрического или кинематического характера отвечает самосопряженный оператор, порождающий по формулам типа (2.4), (2.7) преобразования квантовых состояний.

2.3. Соотношения Г. Вейля. Кинематика нерелятивистских систем как классических, так и квантовых, основана на принципе относительности Галилея, согласно которому описание изолированной системы одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Пусть $W_{x,v}$ — унитарный оператор, порождающий преобразование состояний при переходе в систему отсчета, сдвинутую на расстояние x и движущуюся относительно исходной со скоростью v вдоль выделенной координатной оси. Тогда $(x, v) \to W_{x,v}$ есть проективное представление группы $G = \mathbf{R}^2$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Можно доказать, что соотношение (2.3) приводится к виду

$$W_{x_1,v_1} W_{x_2,v_2} = \exp\left[-\frac{im}{2}(x_1 v_2 - x_2 v_1)\right] W_{x_1+x_2,\, v_1+v_2}, \tag{2.8}$$

где m — вещественный параметр (связанный с массой частицы) и далее строго положительный. Выделяя однопараметрические подгруппы — группу пространственных сдвигов $V_x = W_{x,0}$ и группу «галилеевых бустов» $U_v = W_{0,v}$, соотношение (2.8) можно переписать в виде

$$U_v V_x = e^{imxv} V_x U_v; \quad x, v \in \mathbf{R}, \tag{2.9}$$

причем $W_{x,v} = e^{imxv/2} V_x U_v$. Соотношение (2.9) называется *каноническим коммутационным соотношением (ККС) Г. Вейля* [10].

Согласно теореме Стоуна,

$$U_v = e^{imvQ}, \quad V_x = e^{-ixP},$$

где Q, P — самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$. Рассматривая Q как вещественную наблюдаемую, заметим, что соотношение

(2.9) равносильно уравнению

$$V_x^* E(B+x) V_x = E(B); \ B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \tag{2.10}$$

для спектральной меры $\mathbf{E}$ оператора Q. Это же равносильно тому, что распределение вероятностей наблюдаемой преобразуется ковариантно при пространственных сдвигах (2.7):

$$\mu_{S_x}^{Q}(B+x) = \mu_{S_0}^{Q}(B); \quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}),$$

для любого состояния S_0. Это дает основание назвать Q *наблюдаемой координаты* вдоль выделенной оси. Симметричное рассуждение показывает, что P/m есть *наблюдаемая скорости* изолированной квантовой системы.

Представлением ККС считается любая конкретная пара (V, U), удовлетворяющая соотношениям (2.9). Представление называется неприводимым, если в $\mathscr{H}$ нет замкнутого подпространства, инвариантного относительно V_x, U_v. Неприводимым является *представление Шрёдингера* в $\mathscr{H} = L^2(\mathbf{R})$

$$V_x \psi(\xi) = \psi(\xi - x), \ U_v \psi(\xi) = e^{imv\xi} \psi(\xi).$$

В этом представлении Q задается оператором умножения на ξ, а P — оператором $i^{-1}\frac{d}{d\xi}$.

Операторы P, Q имеют общую плотную инвариантную область определения и удовлетворяют на ней *ККС Гейзенберга*[1]:

$$[P, Q] = i\mathrm{I}. \tag{2.11}$$

Операторы P, Q называются *каноническими наблюдаемыми*. Обратный переход от соотношения Гейзенберга к соотношению Вейля (экспоненциирование) имеет ряд аналитических тонкостей, связанных с неограниченностью операторов P, Q и породил обширную математическую литературу (см. Йоргенсен, Мур [112]).

Принципиальное значение для квантовой механики имеет тот факт, что ККС определяют канонические наблюдаемые P, Q практически однозначно.

Теорема (Стоун-фон Нейман, 1931). Всякое сильно непрерывное представление ККС является прямой суммой неприводимых представлений, каждое из которых унитарно эквивалентно представлению Шрёдингера.

В частности, в любом представлении ККС операторы P, Q, как и в представлении Шрёдингера, неограничены и имеют лебегов спектр, простирающийся на всю вещественную прямую. С этим связана известная трудность с установлением разумного принципа соответствия в квантовой механике. Вопрос состоит в определении канонически сопряженных квантовых наблюдаемых, аналогичным обобщенным координатам и импульсам в

---

[1] Соотношение (2.11) впервые было рассмотрено в 50-х годах прошлого века ирландским математиком Грейвсом, который развил соответствующее символическое исчисление.

гамильтоновом формализме квантовой механики, и связан с проблемой квантования классических систем. Так, в классической механике время и энергия, подобно координате и импульсу, являются канонически сопряженными величинами. Однако наблюдаемая энергии H имеет ограниченный снизу спектр, поэтому из теоремы Стоуна—фон Неймана вытекает, что не существует самосопряженного оператора времени T, которым был бы связан с H каноническим коммутационным соотношением. Эти трудности, возникающие и для других канонических пар, разрешаются в рамках обобщенной статистической модели квантовой механики (см. гл. 2, § 3).

Аналогично формулируются ККС для систем с произвольным числом степеней свободы. Пусть $\{Z, \Delta\}$ — *симплектическое пространство*, т. е. вещественное линейное пространство с билинейной кососимметричной формой $\Delta(z, z')$; $z, z' \in Z$. Представлением ККС называется семейство $z \to W(z)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющее *ККС Вейля—Сигала*

$$W(z) W(z') = \exp \frac{i}{2} \Delta(z, z') W(z + z'). \qquad (2.12)$$

Если форма Δ невырождена, а Z конечномерно, то оно имеет четную размерность d, и существует базис, в котором

$$\Delta(z, z') = \sum_{j=1}^{d} (x_j y'_j - x'_j y_j).$$

При этом операторы сильно непрерывного представления Вейля записываются в виде

$$W(z) = \exp i \sum_{j=1}^{d} (x_j P_j + y_j Q_j), \qquad (2.13)$$

где самосопряженные операторы P_j, Q_j удовлетворяют многомерному аналогу ККС Гейзенберга (2.11)

$$[P_j, Q_k] = i\delta_{jk} \mathrm{I}; \ [P_j, P_k] = 0, \ [Q_j, Q_k] = 0.$$

В этом случае теорема единственности Стоуна—фон Неймана сохраняет силу.

Для систем с бесконечным числом степеней свободы единственность нарушается и существует континуальное множество неэквивалентных представлений, что является причиной «инфракрасных расходимостей» в квантовой теории поля (см. [7], [32], [51]).

Неединственность представлений ККС тесно связана с неэквивалентностью вероятностных мер в бесконечномерных пространствах и послужила одним из первоначальных стимулов для изучения этого вопроса, занимающего большое место в классической теории случайных процессов.

2.4. Гауссовские состояния. Неравенство (1.9) и ККС (2.11) влекут *соотношение неопределенностей Гейзенберга*

$$\mathbf{D}_S(P)\,\mathbf{D}_S(Q)\geqslant 1/4, \tag{2.14}$$

из которого видно, что не существует состояния S, в котором P и Q одновременно принимали бы некоторые точные значения с вероятностью 1. Состояния, для которых в (2.14) достигается равенство, называются *состояниями минимальной неопределенности*. Это чистые состояния $S_{x,v}$, определяемые векторами

$$\psi_{x,v}=W_{x,v}\psi_{0,0};\quad (x,v)\in\mathbf{R}^2, \tag{2.15}$$

где $\psi_{0,0}$ — вектор *основного состояния*, в представлении Шрёдингера имеющий вид

$$\psi_{0,0}(\xi)=(2\pi\sigma^2)^{-1/4}\exp(-\xi^2/4\sigma^2).$$

Состояния $S_{x,v}$ характеризуются тремя параметрами

$$x=\mathbf{E}_{S_{x,v}}(Q),\quad v=\mathbf{E}_{S_{x,v}}(P),$$

$$\sigma^2=\mathbf{D}_{S_{x,v}}(Q)=[4\mathbf{D}_{S_{x,v}}(P)]^{-1}.$$

При фиксированном σ^2 векторы $\psi_{x,v}$ образуют семейство, известное в квантовой оптике как семейство когерентных состояний [12], [21]. Для этих состояний

$$\langle\, Q-\mathbf{E}_{S_{x,v}}(Q)\cdot I,\quad P-\mathbf{E}_{S_{x,v}}(P)\cdot I\,\rangle_{S_{x,v}}=0. \tag{2.16}$$

Более широкий класс образуют чистые состояния, для которых достигается равенство в соотношении неопределенностей (1.9) (для P и Q), но условие (2.16) не обязано выполняться. Эти состояния широко обсуждались в физической литературе под именем сжатых (squeezed) состояний (см., например, [140]). С математической точки зрения все эти состояния входят в класс состояний, являющихся естественным квантовым аналогом гауссовских распределений в теории вероятностей.

Пусть $\{Z,\Delta\}$ — конечномерное симплектическое пространство с невырожденной кососимметричной формой Δ и $z\to W(z)$ — неприводимое представление ККС в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. *Характеристическая функция* оператора плотности S в $\mathscr{H}$ определяется соотношением

$$\varphi(z)=\operatorname{Tr} SW(z);\quad z\in Z, \tag{2.17}$$

и обладает рядом свойств, аналогичных свойствам характеристических функций в теории вероятностей [43, гл. V]. В частности, аналог условия положительной определенности имеет вид

$$\sum_{j,k}\bar{c}_j c_k\varphi(z_j-z_k)\exp\frac{i}{2}\Delta(z_j,z_k)\geqslant 0 \tag{2.18}$$

для всех конечных наборов $\{c_j\}\subset\mathbf{C}$, $\{z_j\}\subset Z$. Состояние S называется *гауссовским*, если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(z) = \exp\left[im(z) - \frac{1}{2}\alpha(z, z)\right],$$

где $m(z)$ — линейная, а $\alpha(z, z')$ — билинейная формы на Z. Это соотношение задает характеристическую функцию тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\alpha(z, z)\alpha(z', z') \geqslant \frac{1}{4}\Delta(z, z')^2; \quad z, z' \in Z,$$

непосредственно связанное с (2.18). Общее определение для бесконечномерного Z было дано в [127]. В квантовой теории поля такие состояния описывают квазисвободные (обобщенно-свободные) поля и носят такое же название. В статистической механике они возникают как равновесные состояния бозе-систем с квадратичным гамильтонианом (см., например, [70], [51]).

§ 3. Составные системы

3.1. Тензорное произведение гильбертовых пространств. Пусть $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ — гильбертовые пространства со скалярными произведениями $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$. В множестве $\mathscr{L}$ формальных линейных комбинаций элементов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ введем положительно определенную эрмитову форму, полагая

$$\langle \varphi_1 \times \varphi_2 | \psi_1 \times \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle_1 \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle_2$$

и продолжая ее на $\mathscr{L}$ по линейности. Пополнение (факторизованного по нулевому подпространству формы) пространства $\mathscr{L}$ является гильбертовым пространством, которое называется *тензорным произведением* $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ и обозначается $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Вектор пространства $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, соответствующий классу эквивалентности векторов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathscr{L}$, обозначается $\psi_1 \otimes \psi_2$.

Если $\mathscr{H}_j = L^2(\Omega_j, \mu_j)$; $j = 1, 2$, то пространство $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ состоит из всех функций $\psi(\omega_1, \omega_2)$, квадратично интегрируемых по мере $\mu_1 \times \mu_2$, причем вектор $\psi_1 \otimes \psi_2$ определяется функцией $\psi_1(\omega_1)\psi_2(\omega_2)$.

Тензорное произведение операторов $X_1 \otimes X_2$, где X_j — оператор в $\mathscr{H}_j$, определяется формулой

$$(X_1 \otimes X_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) = X_1\psi_1 \otimes X_2\psi_2.$$

Если $\mathscr{H}_j$ — конечномерные (комплексные) гильбертовы пространства, то

$$\dim \mathfrak{D}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2) = \dim \mathfrak{D}(\mathscr{H}_1) \dim \mathfrak{D}(\mathscr{H}_2).$$

Если же $\mathscr{H}_j$ — вещественные гильбертовы пространства, то здесь имеет место знак $>$, а для кватернионных гильбертовых пространств (при некотором разумном определении $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$), знак $<$. Это обстоятельство рассматривается как косвенный аргумент в пользу поля комплексных чисел в аксиоматической квантовой механике.

Аналогично определяется тензорное произведение любого конечного числа гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$. В квантовой механике $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$ описывает систему из n различимых частиц. В статистической механике приходится рассматривать системы неразличимых частиц — бозонов или фермионов. В n-кратном тензорном произведении $\mathscr{H}^{\otimes n}$ выделяются два подпространства: симметричное тензорное произведение $\mathscr{H}^{sn}$, описывающее бозоны, и антисимметричное тензорное произведение $\mathscr{H}^{an}$, описывающее фермионы (в случае $\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mu)$ первое состоит из симметричных, а второе — из антисимметричных функций $\psi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ аргументов $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$). Системы из переменного (неограниченного) числа частиц описываются пространствами Фока: симметричным пространством $\Gamma_a(\mathscr{H}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \oplus \mathscr{H}^{sn}$ в случае бозонов и антисимметричным пространством $\Gamma_a(\mathscr{H}) = \sum\limits_{n=0} \oplus \mathscr{H}^{an}$ в случае фермионов. В этих пространствах действует специальное представление канонических коммутационных (соответственно, антикоммутационных) соотношений, связанное с процедурой вторичного квантования (см. [6], [51], [70]).

3.2. Произведение квантовых состояний. Если S_j — операторы плотности в $\mathscr{H}_j$, то $S_1 \otimes S_2$ — оператор плотности в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, причем

$$\operatorname{Tr}(S_1 \otimes S_2)(X_1 \otimes X_2) = \operatorname{Tr} S_1 X_1 \cdot \operatorname{Tr} S_2 X_2; \; X_j \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_j).$$

Операторы вида $X \otimes I_2$, где $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_1)$, а I_2 — единичный оператор в $\mathscr{H}_2$, образуют подалгебру $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$, изоморфную $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_1)$. Формула

$$\mathscr{E}(X_1 \otimes X_2) = X_1 \otimes (\operatorname{Tr} S_2 \times X_2) I_2 \tag{3.1}$$

определяет отображение $\mathscr{E}$ из $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ на $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_1)$, обладающее свойством у с л о в н о г о о ж и д а н и я

$$\mathbf{E}_S(XY) = \mathbf{E}_S(\mathscr{E}(X)\, Y); \; X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2), \; Y \in \mathfrak{B}_1,$$

относительно состояния $S = S_1 \otimes S_2$. В квантовой теории вероятностей условные ожидания играют меньшую роль, чем в классической, поскольку в общем случае условное ожидание на данную подалгебру $\mathfrak{B}$ относительно данного состояния S существует лишь при весьма ограничительном соотношении между $\mathfrak{B}$ и S, в определенной мере, сводящем ситуацию к классической; точнее см. п. 3.1.3.

Если S — произвольный оператор плотности в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, то в $\mathscr{H}_1$ найдется единственный оператор плотности S_1, такой что

$$\operatorname{Tr} S_1 X = \operatorname{Tr} S(X \otimes I_2); \; X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_1).$$

Это же верно для любой линейной комбинации операторов плотности, т. е. для любого ядерного оператора T в $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$. Отображение $T\to T_1$ называется *частичным следом* оператора T (обозначается $T_1=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2} T$). Операция частичного следа аналогична нахождению маргинального распределения в теории вероятностей.

3.3. Независимость и предельные теоремы. Рассмотрим сначала ситуацию, соответствующую одномерной центральной предельной теореме в теории вероятностей. Пусть S — фиксированное состояние. Вещественные наблюдаемые $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ называются *независимыми*, если

$$\mathbf{E}_S(\varphi_1(X_{j_1})\cdot\ldots\cdot\varphi_m(X_{j_m}))= \qquad (3.2)$$
$$=\mathbf{E}_S(\varphi_1(X_{j_1}))\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}_S(\varphi_m(X_{j_m}))$$

для любых $m=1, 2, \ldots$, любых ограниченных борелевских функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и любых номеров $j_1, \ldots, j_m$, таких что $j_k\neq j_l$ при $k\neq l$. Предполагается, что X_j одинаково распределены и имеют второй момент, причем $\mathbf{E}_S(X_j)=0$, $\mathbf{D}_S(X_j)=1$. Что можно сказать о предельном распределении нормированных сумм

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j?$$

Если $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — попарно перестановочны, то

$$\exp it(X_1+\ldots+X_n)=\exp itX_1\cdot\ldots\cdot\exp itX_n;\ t\in\mathbf{R}, \qquad (3.3)$$

и применение характеристических функций сводит вопрос к классической центральной предельной теореме, со стандартным нормальным распределением в качестве предельного. В общем случае (3.3) не выполняется и предельное поведение сумм существенно зависит от алгебраических свойств последовательности слагаемых. Пусть, например, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — антиперестановочны в том смысле, что

$$X_jX_k=-X_kX_j \text{ при } j\neq k.$$

Тогда прямой подсчет (в предположении конечности 4-го момента X_j) показывает, что

$$\mathbf{E}_S(S_n^4)-(\mathbf{E}_S(S_n^2))^2\to 0,$$

откуда следует, что $S_n^2\to 1$ по вероятности. Поскольку $\mathbf{E}_S(S_n)=0$, то распределение S_n стремится к симметричному распределению Бернулли, сосредоточенному в точках ± 1[1]. Это согласуется с наблюдением, что распределение Бернулли устойчиво относительно сложения антиперестановочных наблюдаемых (п. 1.6).

Богатство новых возможностей, открывающихся в некоммутативной теории, демонстрируют понятие свободной независимо-

[1] Это рассуждение сообщено автору В. фон Вальденфельсом.

сти и соответствующая предельная теорема, открытые Войкулеску [162] (см. также Шпайхер [151]). Вещественные наблюдаемые $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ называются *свободно независимыми*, если соотношения (3.2) выполняются для всех номеров $j_1, \ldots, j_m$, таких что $j_k \neq j_{k+1}$, $k=1, \ldots, m-1$.

Теорема. Пусть X_j — свободно независимые наблюдаемые, $\|X_j\| \leqslant c$; $j=1, \ldots, n, \ldots$ Пусть X_j одинаково распределены и $\mathbf{E}_B(X_j)=0$, $\mathbf{D}_B(X_j)=1/4$. Тогда распределение нормированных сумм S_n сходится при $n \to \infty$ к полукруговому закону Вигнера с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x| \leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы методом моментов требует довольно сложных комбинаторных подсчетов. Другой метод доказательства — использование преобразования Коши, которое играет роль логарифма характеристической функции для свободно независимых величин [163].

При переходе к многомерной предельной теореме возникает принципиально новая ситуация, обусловленная возможностью различных алгебраических соотношений между компонентами каждого из слагаемых. В работе Кашена, Хадсона [77] (соответственно, Хадсона [106]) предполагается, что компоненты слагаемых подчинены каноническим коммутационным (антикоммутационным) соотношениям и доказывается, что состояния, описывающие нормированную сумму, сходятся к квазисвободному состоянию канонических коммутационных (антикоммутационных) соотношений, т. е. к квантовому гауссовскому (бернуллиевскому) состоянию. При этом в случае антикоммутационных соотношений вместо обычного тензорного произведения алгебр, порожденных компонентами каждого слагаемого, необходимо использовать так называемое градуированное тензорное произведение, обобщающее понятие антиперестановочности. Более интересны результаты работ Гири, фон Вальденфельса [90] и Вальденфельса [164], в которых показано, что квазисвободное состояние на алгебре канонических коммутационных (соответственно, антикоммутационных) соотношений возникает в квантовой центральной предельной теореме без априорных предположений об алгебраической природе слагаемых, а лишь в зависимости от выбора обычного (или градуированного) тензорного произведения. Однако метод доказательства в этих работах, основанный на вычислении моментов, предполагает ограничительное в аналитическом плане условие существование моментов всех порядков.

В ряде работ рассматривался случай слабо зависимых наблюдаемых. М. Ш. Гольдштейн доказал сходимость к нормальному распределению в случае последовательности вещественных наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, удовлетворяющей условиям слабой зависимости и асимптотической перестановочности типа условия Розенблатта (см. обзор В. В. Аншелевича и М. Ш. Гольдштейна в сборнике [34] и книгу Т. А. Сарымсакова [31]). Обобщение результатов фон Вальденфельса об асимптотической квазисвободности на случай слабо зависимых слагаемых даны в работе Аккарди и Баха [53] (алгебру $\mathfrak{B}$ в этой работе следует считать коммутативной). Наиболее полный результат для слабо зависимых (перестановочных) слагаемых получен Годерисом, Вербером, Ветсом [92]. Следует отметить, что истоком работ [90], [92] послужили известные работы Хеппа и Либа о флуктуациях в мазере Дикке, которые дают некоторую физическую мотивацию квантовой центральной предельной теоремы для перестановочных слагаемых.

Различные алгебраические обобщения центральной предельной теоремы (связанные, в частности, с понятием безграничной делимости) рассматривались также Хегерфельдтом [97], Партасарати и Шмидтом [138], Фаннесом и Куагебером (статья в сборнике [142]).

§ 4. Проблема скрытых параметров

Проблема скрытых параметров — это вопрос о принципиальной возможности описания квантовой механики в терминах классического фазового пространства. Несмотря на устоявшееся среди физиков мнение о невозможности такого описания, конструирование теорий со скрытыми параметрами не прекращается (одной из недавних и наиболее интересных попыток является стохастическая механика [132]). Этой проблеме посвящена обширная литература (см., например, [14]). Здесь мы ограничимся обсуждением наиболее существенных логических аргументов против «скрытых параметров».

4.1. Скрытые параметры и квантовая дополнительность. С математической точки зрения в проблеме скрытых параметров речь идет о возможности установления соответствий $S(d\omega)\to\hat{S}$, $X(\omega)\to\hat{X}$ между классическими состояниями, т. е. распределениями вероятностей $S(d\omega)$ на измеримом «фазовом пространстве» $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ и операторами плотности $\hat{S}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ квантовой системы, и между случайными величинами $X(\omega)$ и наблюдаемыми $\hat{X}$ в $\mathscr{H}$, которые воспроизводили бы статистические предсказания квантовой теории и удовлетворяли некоторым физически мотивированным условиям. Такими условиями, естественно возникающими из общего понятия статистической модели (п. 0.2), в первую очередь являются сохранение функциональной подчиненности в пространстве наблюдаемых, а также выпуклой структуры в множестве состояний. Обзор с этой точки зрения основных «доказательств невозможности» скрытых параметров дан в [45]. Так, результаты

Белла [66] и Кошена, Шпеккера [115] равносильны следующему утверждению.

Предложение. Пусть $\dim \mathscr{H} \geqslant 3$. Не существует однозначного отображения $\hat{X} \to X(\omega)$ множества наблюдаемых $\mathfrak{O}(\mathscr{H})$ в множество случайных величин на каком-либо измеримом пространстве Ω, удовлетворяющего условию:

1) если $\hat{X} \to X(\omega)$, то $f \circ \hat{X} \to f(X(\omega))$ для любой борелевской функции f.

Доказательство. Можно считать, что $\dim \mathscr{H} < \infty$. Пусть такое отображение существует, тогда из 1) выводятся следующие свойства

2) $X(\omega) \in \mathrm{Sp}\, \hat{X}$ для любого $\omega \in \Omega$;

3) Если $\hat{X}_j$ — совместимые наблюдаемые и $\hat{X}_j \to X_j(\omega)$, то $\sum_j \hat{X}_j \to \sum_j X_j(\omega)$.

Фиксируем $\omega \in \Omega$ и рассмотрим функцию проекторов $\mu(\hat{E}) = E(\omega)$, где $\hat{E} \to E(\omega)$. Из 2), 3) вытекает, что μ является вероятностной мерой на $\mathfrak{E}(\mathscr{H})$, принимающей только значения 0,1. По теореме Глисона $\mu(\hat{E}) = \mathrm{Tr}\, \hat{S}\hat{E}$, где $\hat{S}$ — оператор плотности, но такая функция не может быть двузначной мерой.

Недостаток аргументации фон Неймана [26] состоит в том, что он требовал выполнения свойства 3) для произвольных, а не только совместимых наблюдаемых $\hat{X}_j$. Рассуждение с аддитивностью средних значений, которое он привел для обоснования этого требования, по существу, заранее исключает теории со скрытыми параметрами [45], [14].

Приведенное выше доказательство означает невозможность введения скрытых параметров по схеме частичной наблюдаемости, реализуемой, например, в классической статистической механике, где имеется взаимно однозначное соответствие между «макроскопическими» наблюдаемыми и некоторыми функциями на фазовом пространстве. Однако оно не исключает более сложных конструкций, в которых одна и та же квантовая наблюдаемая $\hat{X}$ может быть измерена множеством разных способов и соответствие $X(\omega) \to \hat{X}$, таким образом, не взаимно однозначно. На самом деле в квантовой механике имеется по крайней мере столько различных способов измерения наблюдаемой $\hat{X}$, сколько есть представлений $\hat{X} = f \circ \hat{Y}$ в виде функций от других наблюдаемых $\hat{Y}$. Если $\hat{X}$ имеет кратное собственное значение, то заведомо найдутся несовместимые наблюдаемые $\hat{Y}_1$ и $\hat{Y}_2$ такие, что $\hat{X} = f_1 \circ \hat{Y}_1 = f_2 \circ \hat{Y}_2$. Требование взаимной однозначности входит тогда в прямое противоречие с квантовым свойством дополнительности [1]. Отсюда вытекает, что в теориях

[1] Если $\dim \mathscr{H} = 2$, то наблюдаемые с кратным спектром — это постоянные величины; тогда такого противоречия не возникает, и теория со скрытыми параметрами, удовлетворяющая условиям доказанного предложения, строится явным образом [66].

со скрытыми параметрами следует оставить возможность для различных классических представлений одной и той же квантовой наблюдаемой (такого рода теории Дж. Белл назвал *контекстуальными*). Аналогичное замечание можно отнести и представление квантовых состояний. А. С. Холево дал явное описание такой формальной конструкции, сохраняющей структуры статистической модели [45], [101].

Предложение. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Существует измеримое пространство Ω и отображения $X(\omega)\to\hat{X}$ некоторого множества случайных величин на $\mathfrak{D}(\mathscr{H})$ и $S(d\omega)\to\hat{S}$ некоторого множества вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ такие, что

1) Если $S_j(d\omega)\to\hat{S}_j$ и $\{p_j\}$ — конечное распределение вероятностей, то $\sum\limits_j p_jS_j(d\omega)\to\sum\limits_j p_j\hat{S}_j$;

2) Если $X(\omega)\to\hat{X}$ и f — борелевская функция, то $f(X(\omega))\to f\circ\hat{X}$;

3) Если $X(\omega)\to\hat{X}$ и $S(d\omega)\to\hat{S}$, то

$$\int\limits_{\Omega} X(\omega)\,S(d\omega)=\operatorname{Tr}\hat{S}\hat{X}.$$

В случае $\dim\mathscr{H}\geqslant 3$ отображения $X(\omega)\to\hat{X}$, $S(d\omega)\to\hat{S}$ с необходимостью не являются взаимно однозначными. Этот результат показывает, что принцип дополнительности препятствует классическому описанию квантовой статистики лишь при дополнительном требовании взаимной однозначности (неконтекстуальности).

4.2. Скрытые параметры и квантовая целостность. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух компонент $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$. Чистые состояния такой системы задаются единичными векторами $\psi\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$, которые являются линейными комбинациями (суперпозициями) факторизуемых векторов $\psi_1\otimes\psi_2$. Если $\psi=\psi_1\otimes\psi_2$, то обе компоненты системы находятся в однозначно определенных чистых состояниях; если же ψ нефакторизуемо, то между компонентами обнаруживаются специфические корреляции, которые невозможно смоделировать никаким классическим механизмом случайности. На это обратил внимание Белл, показавший, что даже в контекстуальной теории со скрытыми параметрами нельзя удовлетворить естественному требованию, названному им «эйнштейновской локальностью» [66][1]. Обсудим близкое, но более общее условие *разделимости* [45].

[1] В этой связи см. также статью Э. Вигнера «Скрытые параметры и квантовомеханические вероятности» в сб. [11].

Рассмотрим наблюдаемые

$$\hat{X}_j = \hat{X}_j^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)}, \; j_k = 1, \ldots, n;$$
$$\hat{Y}_k = \hat{I}^{(1)} \otimes \hat{Y}_j^{(2)}, \; k = 1, \ldots, m, \tag{4.1}$$

где $\hat{I}^{(j)}$ — единичный оператор в $\mathscr{H}_j$, так что

$$[\hat{X}_j, \hat{Y}_k] = 0, \tag{4.2}$$

т. е. каждая наблюдаемая $\hat{X}_j$ совместима с каждой $\hat{Y}_k$. Поэтому для любого состояния $\hat{S}$ в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ определены квантовые корреляции $\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}}$. Матрица $\mathbf{C} = [\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}}]_{\substack{j=1,\ldots,n,\\ k=1,\ldots,m}}$ описывает статистические результаты nm различных экспериментов, вообще говоря, несовместимых между собой.

Предложение. Пусть $n, m \geqslant 2$. Не существует измеримого пространства Ω и отображений $S(d\omega) \to \hat{S}$, $X(\omega) \to \hat{X}$ таких, что:

1) если $X(\omega) \to \hat{X}$, то $X(\omega) \in \operatorname{Sp} \hat{X}$;

2) для любого $\hat{S}$ и любых $\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n$; $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m$ вида (4.1) найдутся $X_j(\omega)$, $Y_k(\omega)$ такие, что $X_j(\omega) \to \hat{X}_j$, $Y_k(\omega) \to \hat{Y}_k$ и

$$\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}} = \int_\Omega X_j(\omega) Y_j(\omega) S(d\omega); \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m,$$

для какого-либо $S(d\omega) \to \hat{S}$.

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $n = m = 2$. Рассмотрим наблюдаемые $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ вида (4.1) и такие, что

$$\|\hat{X}_j\| \leqslant 1, \; \|\hat{Y}_k\| \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Предположим, что указанные отображения существуют и пусть X_j, Y_k — соответствующие случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), S(d\omega))$. В силу условия 1), $|X_j(\omega)| \leqslant 1$, $|Y_k(\omega)| \leqslant 1$, откуда

$$X_1(\omega) Y_1(\omega) + X_1(\omega) Y_2(\omega) + X_2(\omega) Y_1(\omega) - X_2(\omega) Y_2(\omega) \leqslant 2, \quad \omega \in \Omega,$$

Усредняя по $S(d\omega)$ и используя условие 2), получаем *неравенство Белла—Клаузера—Хорна—Шимони* (*БКХШ*)

$$\langle \hat{X}_1, \hat{Y}_1 \rangle_{\hat{S}} + \langle \hat{X}_1, \hat{Y}_2 \rangle_{\hat{S}} + \langle \hat{X}_2, \hat{Y}_1 \rangle_{\hat{S}} - \langle \hat{X}_2, \hat{Y}_2 \rangle_{\hat{S}} \leqslant 2. \tag{4.4}$$

Остается указать квантовые наблюдаемые $\hat{X}_j$, $\hat{Y}_k$ и состояние $\hat{S}$, для которых неравенство (4.4) нарушается. Рассмотрим систему из двух частиц со спином $1/2$, так что $\dim \mathscr{H}_1 = \dim \mathscr{H}_2 = 2$. (см. п. 1.6). Пусть $\hat{S}$ — чистое состояние составной системы с вектором

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(\mathbf{e}) \otimes \psi_2(-\mathbf{e}) - \psi_1(-\mathbf{e}) \otimes \psi_2(\mathbf{e})],$$

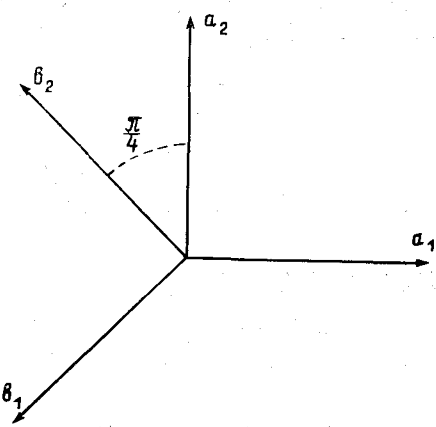
где $\psi_j(\mathbf{e})$ — единичный вектор j-й компоненты, описывающий полностью поляризованное состояние с направлением спина $\mathbf{e}$. Положим

$$\hat{X}(\mathbf{a}) = \hat{X}^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \hat{1}^{(2)}, \quad \hat{Y}(\mathbf{b}) = \hat{1}^{(1)} \otimes \hat{X}^{(2)}(\mathbf{b}),$$

где $\hat{X}^{(j)}(\mathbf{a})$ — наблюдаемые спина в $\mathscr{H}_j$ (см. п. 1.6). Корреляции между компонентами имеют вид

$$\langle \hat{X}(\mathbf{a}), \hat{Y}(\mathbf{b}) \rangle_{\hat{S}} = \langle \psi | \hat{X}^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \hat{X}^{(2)}(\mathbf{b}) \psi \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Пусть векторы $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_k$ образуют конфигурацию, обозначенную на рисунке, тогда значение левой части неравенства (4.4) для наблюдаемых $\hat{X}_j = \hat{X}(\mathbf{a}_j)$, $\hat{Y}_k = \hat{Y}(\mathbf{b}_k)$ равно $2\sqrt{2}$, что противоречит неравенству и доказывает предложение[1].



В [114] указано общее неравенство

$$(\hat{X}_1\hat{Y}_1 + \hat{X}_1\hat{Y}_2 + \hat{X}_2\hat{Y}_1 - \hat{X}_2\hat{Y}_2)^2 \leqslant 4\hat{1} - [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \cdot [\hat{Y}_1, \hat{Y}_2],$$

справедливое для любых операторов, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3). Из него вытекает как неравенство БКХШ (при $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = [\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = 0$), так и граница

$$\| \hat{X}_1\hat{Y}_1 + \hat{X}_1\hat{Y}_2 + \hat{X}_2\hat{Y}_1 - \hat{X}_2\hat{Y}_2 \| \leqslant 2\sqrt{2},$$

из которой видно, что в построенном примере неравенство БКХШ нарушается максимальным образом.

[1] Работы Дж. Белла стимулировали ряд экспериментов, в которых нарушение неравенства БКХШ получило подтверждение (см., например, [14]).

Поскольку компоненты составной системы могут представлять собой частицы, пространственно отделенные друг от друга макроскопическим расстоянием, то описывающая их теория со скрытыми параметрами должна быть существенно нелокальной[1]. В работе Саммерса и Вернера [156] показано, что положение не спасает и переход к локальной квантовой теории поля, где неравенство БКХШ также нарушается максимальным образом.

4.3. Структура множества квантовых корреляций. В работе Б. С. Цирельсона [48] было изучено выпуклое множество $\mathrm{Cor}(n, m)$ *квантовопредставимых* матриц $\mathbf{C}=[c_{jk}]_{k=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$, элементы которых представимы как корреляции $c_{jk}=\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}}$ каких-либо квантовых наблюдаемых $\hat{X}_j$, $\hat{Y}_k$, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3). Оказывается, что формально более сильное, чем (4.2) (и физически содержательное), условие (4.1) приводит к тому же множеству корреляционных матриц $\mathbf{C}$. Это видно из доказательства следующей теоремы, которая дает прозрачное геометрическое описание множества $\mathrm{Cor}(n, m)$.

Теорема. *Матрица* $\mathbf{C}$ *принадлежит множеству* $\mathrm{Cor}(n, m)$ *тогда и только тогда, когда в евклидовом пространстве размерности* $\min(n, m)$ *существуют векторы* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$; $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ *такие, что* $\|\mathbf{a}_j\|\leqslant 1$, $\|\mathbf{b}_k\|\leqslant 1$ *и* $\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{b}_k=c_{jk}$ *для всех* j, k.

Дадим набросок конструкции, существенной для доказательства. Пусть $\mathscr{C}(n)$ — комплексная алгебра Клиффорда с n эрмитовыми образующими $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$X_j^2=I, \quad X_jX_k+X_kX_j=0; \quad j, k=1, \dots, n, \quad j\neq k.$$

Поскольку элементы $X_j\otimes X_j$ алгебры $\mathscr{C}(n)\otimes\mathscr{C}(n)$ перестановочны и их спектр состоит из ± 1, то 1 является точкой спектра элемента

$$A=\frac{1}{n}(X_1\otimes X_1+\dots+X_n\otimes X_n)$$

(кратности 1). Пусть π — неприводимое представление алгебры $\mathscr{C}(n)\otimes\mathscr{C}(n)$, тогда в пространстве представления существует единственный с точностью до множителя вектор ψ, такой что $\pi(A)\psi=\psi$. Доказывается, что

$$\langle\psi|\pi(X(\mathbf{a})\otimes X(\mathbf{b}))\psi\rangle=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}; \ \mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathbf{R}^n.$$

Вектор ψ определяет состояние $\hat{S}$ в точном представлении алгебры $\mathscr{C}(n)\otimes\mathscr{C}(n)$ такое, что

$$\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}}=\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{b}_k,$$

[1] По поводу нелокальности в стохастической механике см. статью Э. Нельсона [132].

где $\hat{X}_j = X(\mathbf{a}_j)\otimes I$, $\hat{Y}_k = I\otimes X(\mathbf{b}_k)$ удовлетворяют условию (4.1), а значит, и (4.2).

Из этой теоремы в [48] получено описание крайних точек множества $\mathrm{Cor}(n, m)$, а также указаны неравенства, задающие множество $\mathrm{Cor}(2, 2)$.

Обозначая $\mathrm{Cor}_1(n, m)$ множество *классически-представимых* матриц C, таких что

$$c_{jk} = \int X_j(\omega) Y_k(\omega) S(d\omega),$$

где X_j, Y_k — случайные величины, такие что $|X_j(\omega)|\leqslant 1$, $|Y_k(\omega)|\leqslant 1$, имеем, очевидно,

$$\mathrm{Cor}_1(n, m) \subsetneqq \mathrm{Cor}(n, m).$$

Несовпадение этих множеств математически выражает свойство квантовой целостности. Неравенство БКХШ задает граничную гиперплоскость, отделяющую многогранник $\mathrm{Cor}_1(2, 2)$ от квантово-реализуемой матрицы $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\in\mathrm{Cor}(2, 2)$. Естественно поставить вопрос, насколько $\mathrm{Cor}(n, m)$ превосходит $\mathrm{Cor}_1(n, m)$. Пусть $K(n, m)$ — наименьшее число, обладающее свойством

$$\mathrm{Cor}(n, m)\subset K(n, m)\,\mathrm{Cor}_1(n, m).$$

Последовательность $K(n, m)$ возрастает с ростом n, m. Как отмечается в [48], из геометрического описания множества $\mathrm{Cor}(n, m)$ вытекает, что $K = \lim\limits_{n, m\to\infty} K(n, m)$ совпадает с известной в теории нормированных пространств константой Гротендика $K_G \leqslant \dfrac{\pi}{2\ln(1+\sqrt{2})} \approx 1{,}782$.

Глава 2

СТАТИСТИКА КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 1. Обобщенные наблюдаемые

1.1. Разложения единицы. Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{B}(\mathscr{X}))$ — измеримое пространство. В дальнейшем часто $\mathscr{X}$ стандартное измеримое пространство, т. е. борелевское подмножество полного сепарабельного метрического пространства. Стандартные измеримые пространства одинаковой мощности изоморфны (см., например, [160, гл. V]), поэтому с точки зрения теории меры они эквивалентны борелевским подмножествам вещественной прямой $\mathbf{R}$.

Разложением единицы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ называется нормированная положительная операторнозначная мера на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$, т. е. функция множеств $\mathbf{M}: \mathscr{B}(\mathscr{X}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, удовлетворяющая условиям:

1) $M(B)$ — положительный оператор в $\mathscr{H}$ для любого $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$;

2) Если $\{B_j\}$ — конечное или счетное разбиение $\mathscr{X}$ на попарно-непересекающиеся измеримые подмножества, то

$$\sum_j M(B_j) = \mathrm{I},$$

где ряд сходится сильно.

Если $M(B)^2 = M(B)$ для всех $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$, то $\mathbf{M}$ — ортогональное разложение единицы (см. п. 1.1.3). Неортогональные разложения единицы (на $\mathbf{R}$) появились в работе Карлемана (1923), в связи с проблемой спектрального разложения несамосопряженных операторов и были детально изучены в 1940—60-е годы (см., например, [2], [30], [68]).

Теорема (М. А. Наймарк, 1940). Всякое разложение единицы в $\mathscr{H}$ может быть расширено до ортогонального разложения единицы, т. е. существует гильбертово пространство $\tilde{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$ и ортогональное разложение единицы $\mathbf{E}: \mathscr{B}(\mathscr{X}) \to \mathfrak{E}(\tilde{\mathscr{H}})$ в $\tilde{\mathscr{H}}$ такое, что

$$M(B) = PE(B)P; \quad B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}),$$

где P — проектор из $\tilde{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H}$. Если $\mathscr{H}$ — сепарабельно, а $\mathscr{X}$ — стандартно, то $\tilde{\mathscr{H}}$ можно выбрать сепарабельным. Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности минимальное расширение, характеризующееся тем свойством, что множество $\{E(B)P\psi;\ B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}),\ \psi \in \mathscr{H}\}$ плотно в $\tilde{\mathscr{H}}$.

Если существует σ-конечная мера μ, такая что $\|M(B)\| \leqslant C\mu(B)$, то

$$M(B) = \int_B P(x)\,\mu(dx); \quad B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}), \tag{1.1}$$

где $P(x)$ — измеримая ограниченная функция со значениями в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, называемая *плотностью* $\mathbf{M}$ относительно меры μ (интеграл сходится в сильной операторной топологии). Если $\dim \mathscr{H} = \infty$, то ортогональное разложение единицы не может иметь плотности относительно какой-либо σ-конечной меры.

Пример. *Переполненной системой* [21], [6] в $\mathscr{H}$ называется семейство $\{e_x;\ x \in \mathscr{X}\} \subset \mathscr{H}$, удовлетворяющее условию

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathscr{X}} |\langle e_x | \psi \rangle|^2 \mu(dx); \quad \psi \in \mathscr{H},$$

где μ — некоторая σ-конечная мера на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$, т. е.

$$\int_{\mathscr{X}} | e_x \rangle \langle e_x | \mu(dx) = \mathrm{I}.$$

Частным случаем переполненной системы является полная ортогональная система в $\mathscr{H}$, однако в общем случае векторы e_x могут быть не ортогональны и линейно зависимы. Всякий вектор $\psi\in\mathscr{H}$ имеет разложение

$$\psi=\int\limits_{\mathscr{X}} \langle e_x|\psi\rangle e_x\mu(dx) \tag{1.2}$$

по векторам переполненной системы. Соотношение

$$M(B)=\int\limits_{B}|e_x\rangle\langle e_x|\mu(dx) \tag{1.3}$$

определяет разложение единицы с плотностью $P(x)=|e_x\rangle\langle e_x|$. Дадим для него явную конструкцию минимального расширения Наймарка (см. [78, гл. 8]). Определим ортогональное разложение единицы $\mathbf{E}$ в $\tilde{\mathscr{H}}=L^2(\mathscr{X},\mu)$ соотношением

$$E(B)f(x)=1_B(x)f(x);\quad x\in\mathscr{X},$$

где $1_B(\cdot)$ — индикатор множества $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$. В (1.2), (1.3) следует, что соотношение

$$(V\psi)(x)=\langle e_x|\psi\rangle$$

задает изометрическое вложение $\mathscr{H}$ в $\tilde{\mathscr{H}}$, причем

$$M(B)=V^*E(B)V.$$

Образ $V\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{H}$ в $L^2(\mathscr{X},\mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром $\mathscr{K}(x,y)=\langle e_x|e_y\rangle$, т. е. проектор P из $L^2(\mathscr{X},\mu)$ на $V\mathscr{H}$ является интегральным оператором с ядром $\mathscr{K}(x,y)$.

1.2. Обобщенная статистическая модель квантовой механики. Это отделимая статистическая модель (см. п. 0.2), в которой состояния описываются операторами плотности, а вещественные наблюдаемые — разложениями единицы на $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Функциональная подчиненность наблюдаемых определяется соотношением $(f\circ M)(B)=M(f^{-1}(B))$. Если $\mathscr{X}$ — измеримое пространство, то *обобщенной наблюдаемой* (*наблюдаемой*) со значениями в $\mathscr{X}$ называется произвольное (ортогональное) разложение единицы $\mathbf{M}$ на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$. Распределение вероятностей обобщенной наблюдаемой $\mathbf{M}$ в состоянии S определяется формулой

$$\mu_S^{\mathbf{M}}(B)=\operatorname{Tr}SM(B);\quad B\in\mathscr{B}(\mathscr{X}). \tag{1.4}$$

Основанием для этих определений служит

Предложение ([143, гл. 2]). Соответствие $S\to\mu_S^{\mathbf{M}}$ является аффинным отображением выпуклого множества квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ в множество вероятностных мер $\mathfrak{P}(\mathscr{X})$. Обратно, всякое аффинное отображение из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{P}(\mathscr{X})$ имеет вид $S\to\mu_S^{\mathbf{M}}$, где $\mathbf{M}$ — однозначно определенное разложение единицы на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$.

Аффинность означает, что смесь состояний переходит в соответствующую смесь распределений

$$\mu^{\mathbf{M}}_{\sum\limits_j p_j S_j} = \sum_j p_j \mu^{\mathbf{M}}_{S_j},$$

для любых $S_j \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$; $p_j \geqslant 0$, $\sum\limits_j p_j = 1$, и имеет прямое истолкование в терминах статистических ансамблей. Можно сказать, что разложение единицы дает наиболее общее описание статистики исходов квантового измерения, совместимое с вероятностной интерпретацией квантовой механики.

Опираясь на теорему Наймарка, можно доказать, что для любого разложения единицы $\mathbf{M}$ в $\mathcal{H}$ найдутся гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, оператор плотности S_0 в $\mathcal{H}_0$ и ортогональное разложение единицы $\mathbf{E}$ в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, такие что

$$\mu^{\mathbf{M}}_S(B) = \mathrm{Tr}\,(S \otimes S_0)\, E(B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{1.5}$$

для всех $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ или $M(B) = \mathcal{E}_0(E(B))$, где $\mathcal{E}_0$ — условное ожидание относительно состояния S_0, определяемое аналогично формуле (1.3.1). Таким образом, разложение единицы описывает статистику измерения обычной наблюдаемой в некотором расширении исходной системы, содержащем вспомогательную независимую систему в состоянии S_0, что говорит о согласованности понятия обобщенной наблюдаемой со стандартной формулировкой квантовой механики.

Пример. Векторы состояний минимальной определенности (1.2.15) образуют переполненную систему в $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$,

$$\frac{m}{2\pi} \iint\limits_{\mathbf{R}^2} |\psi_{x,v}\rangle\langle\psi_{x,v}|\, dx\, dv = I$$

([12], [21]), что позволяет определить обобщенную наблюдаемую со значениями в $\mathbf{R}^2$

$$M(B) = \frac{m}{2\pi} \iint\limits_{B} |\psi_{x,v}\rangle\langle\psi_{x,v}|\, dx\, dv. \tag{1.6}$$

Укажем конструкцию, которая связывает $\mathbf{M}$ с приближенным совместным измерением координаты и скорости квантовой частицы. Пусть $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbf{R})$, P_0, Q_0 — канонические наблюдаемые в $\mathcal{H}_0$ и $S_0 = |\psi_{0,0}\rangle\langle\psi_{0,0}|$ — основное состояние в $\mathcal{H}_0$. Самосопряженные операторы

$$\tilde{Q} = Q \otimes I_0 - I \otimes Q_0, \quad \frac{1}{m}\tilde{P} = \frac{1}{m}[P \otimes I_0 + I \otimes P_0] \tag{1.7}$$

в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ перестановочны [1)], а значит, имеют совместную спектральную меру $E(dx\,dv)$. Используя аппарат характеристических

[1)] На это указал Н. Бор в статье «О понятиях причинности и дополнительности» (1948) (см. Избранные научные труды.— М.: Наука, 1971.— 2.— С. 391—398).

функций из п. 1.2.4, можно доказать, что для любого состояния S распределение вероятностей обобщенной наблюдаемой (1.6)

$$\mu_S^{\mathbf{M}}(B)=\frac{m}{2\pi}\iint\limits_B \langle \psi_{x,v} | S\psi_{x,v} \rangle \, dx dv$$

удовлетворяет соотношению (1.5), т. е. совпадает с совместным распределением вероятностей наблюдаемых $\tilde{Q}$, $\tilde{P}/m$ в состоянии $S\otimes S_0$ (см. [43, гл. 3]). Относительно приближенных измерений Q, P см. также [78], [37], [159] и цитированные там работы.

1.3. Геометрия множества обобщенных наблюдаемых. Аналогом обобщенной наблюдаемой в классической статистике является рандомизованная случайная величина, т. е. переходная вероятность $\Pi(B|\omega)$ из пространства элементарных событий Ω в пространстве значений X. Будем далее предполагать, что $\mathscr{X}$ — стандартное пространство. Тогда соотношение

$$\Pi(B|\omega)=1_B(f(\omega)); \quad \omega\in\Omega,$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между случайными величинами f со значениями в $\mathscr{X}$ и детерминированными переходными вероятностями, такими что $\Pi(B|\omega)=0$ или 1, т. е. $\Pi(B|\omega)^2=\Pi(B|\omega)$. Переходные вероятности из Ω в $\mathscr{X}$ образуют выпуклое множество, крайними точками которого являются детерминированные переходные вероятности и только они (см., например, [41, гл. II]).

Соотношение между наблюдаемыми и обобщенными наблюдаемыми в квантовом случае значительно сложнее и интереснее. Обозначим $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ выпуклое множество обобщенных наблюдаемых со значениями в $\mathscr{X}$, $\mathrm{Extr}\,\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ множество его крайних точек, $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{M}$ выпуклую оболочку подмножества $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}(\mathscr{X})$. В $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ вводится естественная топология: последовательность $\{\mathbf{M}^{(n)}\}\subset\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ сходится к $\mathbf{M}$, если для любого состояния S последовательность вероятностных мер $\mu_S^{(n)}(B)=\mathrm{Tr}\,SM^{(n)}(B)$ сходится по вариации к $\mu_S(B)=$ $=\mathrm{Tr}\,SM(B)$; $\bar{\mathfrak{M}}$ означает замыкание подмножества $\mathfrak{M}$ в этой топологии. Пусть $\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})$ — подмножество обычных наблюдаемых и $\mathfrak{M}_1(\mathscr{X})$ — подмножество обобщенных наблюдаемых $\mathbf{M}$, таких что $[M(B_1), M(B_2)]=0$ для всех $B_1, B_2\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$. В работе А. С. Холево [38] показано, что $\mathbf{M}\in\mathfrak{M}_1(\mathscr{X})$ тогда и только тогда, когда

$$M(B)=\int\limits_{\mathscr{X}_1}\Pi(B|x_1)\,E(dx_1), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{E}$ — наблюдаемая со значениями в некотором пространстве $\mathscr{X}_1$, $\Pi(B|x_1)$ — переходная вероятность из $\mathscr{X}_1$ в $\mathscr{X}$. По аналогии с классической статистикой, наблюдаемые, описываемые ортогональными разложениями единицы $\mathbf{E}$ $(E(B)^2=E(B))$, можно рассматривать как детерминированные (более точное обсуждение см. в [101]). Наблюдаемые из $\mathfrak{M}_1(\mathscr{X})$, которые задаются перестановочными разложениями единицы, являются *классически-рандомизованными* в том смысле, что $\mathbf{M}\in\mathfrak{M}_1(\mathscr{X})$ получается из обычной наблюдаемой путем преобразования (1.8), содержащего внешний классический источник неопределенности. Всякую обобщенную наблюдаемую $\mathbf{M}\in\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ можно рассматривать как *квантово-рандомизованную* в смысле представления (1.5): она эквивалентна обычной наблюдаемой в расширении исходной системы, включающем независимую квантовую систему. Наконец, точки из $\operatorname{Extr}\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ представляют собой обобщенные наблюдаемые, в которых неопределенность, обусловленная процедурой измерения, сведена к минимуму.

Обозначим m мощность множества значений $\mathscr{X}$.

Теорема. Если $m=2$, то $\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})=\operatorname{Extr}\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ и $\mathfrak{M}_1(\mathscr{X})=\overline{\operatorname{Conv}\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})}=\mathfrak{M}(\mathscr{X})$. Если $m>2$, то $\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})\subsetneqq\operatorname{Extr}\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ и $\mathfrak{M}_1(\mathscr{X})\subsetneqq\overline{\operatorname{Conv}\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})}\subset\mathfrak{M}(\mathscr{X})$, причем если $\dim\mathscr{H}<\infty$, то последнее включение точно. Если же $\dim\mathscr{H}=\infty$, то $\overline{\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})}=\mathfrak{M}(\mathscr{X})$.

Таким образом, ситуация аналогична классической лишь в случае обобщенных наблюдаемых с двумя значениями[1]. В этом случае $\mathbf{M}=\{M_0, M_1\}$, где $M_1=I-M_0$ и $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ как выпуклое подмножество изоморфно порядковому интервалу $\{M_0 : M_0\in\mathfrak{L}_h(\mathscr{H}),\ 0\leqslant M_0\leqslant I\}$, крайние точки которого совпадают с проекторами в $\mathscr{H}$ (см., например, [78, гл. 2]).

Чтобы доказать, что $\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})\neq\operatorname{Extr}\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ при $m>2$, достаточно сделать это в случае $m=3$ и $\dim\mathscr{H}=2$ (см. [43, § 1.6]). Рассмотрим неортогональное разложение единицы

$$M_k=\frac{1}{3}\,|\psi(\mathbf{e}_k)\rangle\langle\psi(\mathbf{e}_k)|;\quad k=1,\ 2,\ 3, \tag{1.9}$$

где $\psi(\mathbf{e}_k)$ — векторы состояний системы со спином $^1/_2$ (см. п. 1.1.6), причем $\mathbf{e}_k$, $k=1, 2, 3$, образуют правильный треугольник. Тот факт, что (1.9) является крайней точкой, можно установить непосредственно, либо воспользовавшись критерием из статьи Штермера в [85]: конечное разложение единицы $\mathbf{M}=\{M_1, \ldots, M_m\}$ является крайней точкой тогда и только тогда, когда для любых $X_1, \ldots, X_m\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ из $\sum\limits_{i=1}^{m} E_iX_iE_i=0$ следует $E_iX_iE_i=0$, где E_i — носитель M_i, т. е. проектор на ортогональное дополнение к нулевому подпространству M_i. Если $\dim\mathscr{H}<\infty$, то из наличия крайних точек, не попадающих в $\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})$, следует, что $\overline{\operatorname{Conv}\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})}\neq\mathfrak{M}(\mathscr{X})$.

Интересный пример крайней точки дает неортогональное разложение единицы (1.6).

[1] Такие наблюдаемые, называемые «эффектами», играют центральную роль в аксиоматическом подходе Людвига [125], [118].

Доказательство того, что $\overline{\mathfrak{M}_0(\mathscr{X})}=\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ в случае $\dim\mathscr{H}=\infty$, основывается на теореме М. А. Наймарка. Пусть $\mathbf{M}\in\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ и $\{P^{(n)}\}$ — последовательность конечномерных проекторов в $\mathscr{H}$, сильно сходящаяся к I. Тогда $M^{(n)}(B)=P^{(n)}M(B)P^{(n)}$ — разложение единицы в конечномерном пространстве $\mathscr{H}^{(n)}=P^{(n)}\mathscr{H}$, которое можно расширить до ортогонального разложения единицы $\mathbf{E}^{(n)}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathscr{H}}^{(n)}\supset\mathscr{H}^{(n)}$. Поскольку $\dim\mathscr{H}=\infty$, можно считать, что $\tilde{\mathscr{H}}^{(n)}=\mathscr{H}$. Имеет место оценка

$$\operatorname{var}(\mu_S^{(n)}-\mu_S)\leqslant 6\|(\mathrm{I}-P^{(n)})S\|_1,$$

где $\mu_S^{(n)}(B)=\operatorname{Tr}SE^{(n)}(B)$, $\mu_S(B)=\operatorname{Tr}SM(B)$ [44], доказывающая утверждение. Итак, в случае $\dim\mathscr{H}=\infty$, все обобщенные наблюдаемые являются предельными точками множества наблюдаемых.

§ 2. Квантовая теория статистических решений

2.1. Проверка гипотез. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ наблюдаемой квантовой системы заданы операторы плотности S_θ; $\theta=1, \ldots, m$, описывающие одно из возможных состояний системы. Выбор одной из гипотез $\theta=1, \ldots, m$ осуществляется на основе *решающего правила*, задаваемого разложением единицы $\mathbf{M}=\{M_1, \ldots, M_m\}$. При этом вероятность принятия гипотезы $u=1, \ldots, m$, если система находится в состоянии S_θ, равна

$$\mu_\theta^{\mathbf{M}}(u)=\operatorname{Tr}S_\theta M_u. \tag{2.1}$$

Как и в классической статистике, задается некоторый функционал от вероятностей (2.1) и вопрос состоит в нахождении экстремума этого функционала в том или ином классе решающих правил. В физических задачах квантовая система является носителем информации, состояния которого S_θ зависят от «передаваемого сигнала» θ. «Приемник» осуществляет квантовое измерение, статистика которого описывается разложением единицы $\mathbf{M}$ в $\mathscr{H}$. Речь идет об отыскании квантовых ограничений на качество измерения и о его оптимизации.

При байесовском подходе задаются априорные вероятности гипотез π_θ и функция отклонения $W_\theta(u)$; θ, $u=1, \ldots, m$. Байесовский риск определяется обычной формулой

$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}\}=\sum_{\theta=1}^{m}\pi_\theta\sum_{u=1}^{m}W_\theta(u)\,\mu_\theta^{\mathbf{M}}(u). \tag{2.2}$$

Решающее правило, минимизирующее $\mathscr{R}\{\mathbf{M}\}$, называется *байесовским*. Часто рассматривают случай $W_\theta(u)=1-\delta_{\theta u}$ и $\pi_\theta=1/m$. Тогда речь идет о максимизации средней вероятности правильного решения

$$\mathscr{P}\{\mathbf{M}\}=\frac{1}{m}\sum_{\theta=1}^{m}\mu_\theta^{\mathbf{M}}(\theta), \tag{2.3}$$

что является дискретным аналогом метода максимального правдоподобия. Наконец, важной мерой качества решающего правила является шенноновская информация

$$\mathscr{I}\{\mathbf{M}\}=\sum_{\theta=1}^{m}\pi_\theta\sum_{u=1}^{m}\mu_\theta^{\mathbf{M}}(u)\ln\frac{\mu_\theta^{\mathbf{M}}(u)}{\sum_{\lambda=1}^{m}\pi_\lambda\mu_\lambda^{\mathbf{M}}(u)}. \tag{2.4}$$

Первоначальная постановка квантовой задачи различения гипотез (Хелстром, 1967) основывалась на стандартном квантово-механическом формализме, в соответствии с которым решающие правила описывались ортогональными разложениями единицы. Формулировка квантовой теории статистических решений, основанная на обобщенных наблюдаемых, была предложена А. С. Холево (1972). Обозначим $\mathfrak{M}$ класс всех решающих правил $\mathbf{M}=\{M_1, \ldots, M_m\}$, $\mathfrak{M}_1$ — класс классически-рандомизированных правил (т. е. таких, что $M_jM_k=M_kM_j$) и $\mathfrak{M}_0$ — класс детерминированных решающих правил $(M_jM_k=\delta_{jk}M_j)$.

Пример ([38]). Рассмотрим задачу различения равновероятных гипотез

$$S_\theta=|\psi(\mathbf{e}_\theta)\rangle\langle\psi(\mathbf{e}_\theta)|;\quad \theta=1,\,2,\,3,$$

где $\psi(\mathbf{e}_\theta)$ — векторы состояний системы со спином $^1/_2$, возникающие в (1.9). Тогда

$$\max_{\mathfrak{M}_0}\mathscr{P}\{\mathbf{M}\}=\max_{\mathfrak{M}_1}\mathscr{P}\{\mathbf{M}\}=\frac{1}{6}(2+\sqrt{3})<\frac{2}{3}=\max_{\mathfrak{M}}\mathscr{P}\{\mathbf{M}\},$$

причем максимум достигается на решающем правиле (1.9). Более того,

$$\max_{\mathfrak{M}_0}\mathscr{J}\{\mathbf{M}\}=\max_{\mathfrak{M}_1}\mathscr{J}\{\mathbf{M}\}<\max_{\mathfrak{M}}\mathscr{J}\{\mathbf{M}\}.$$

Этот и другие подобные примеры (см. [80]) демонстрируют неожиданный с классической точки зрения факт: квантовая рандомизация может увеличивать информацию о состоянии системы. Хотя этот эффект проявляется только в конечномерных гильбертовых пространствах (см. предыдущий пункт), он ясно указывает на необходимость использования обобщенных наблюдаемых.

2.2. Байесовская задача. Байесовский риск (2.2) представляется в виде

$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}\}=\mathrm{Tr}\sum_{u=1}^{m}\hat{W}_uM_u,$$

где $\hat{W}_u = \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta W_\theta(u) S_\theta$ — операторная апостериорная функция отклонения. Поскольку $\mathcal{R}\{\mathbf{M}\}$ — аффинный функционал на выпуклом множестве $\mathfrak{M}$, задача о его минимизации может быть рассмотрена с помощью методов линейного программирования.

Теорема (А. С. Холево, Юн). Имеет место соотношение двойственности

$$\min_{\mathfrak{M}} \mathcal{R}\{\mathbf{M}\} = \max\{\mathrm{Tr}\,\Lambda : \Lambda \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}),\ \Lambda \leqslant \hat{W}_u;\ u = 1, \ldots, m\}. \quad (2.5)$$

Следующие утверждения эквивалентны:

0) $\mathbf{M}^0 = \{M_u^0\}$ — байесовское решающее правило;

1) существует $\Lambda^0 \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, такой что

$$\Lambda^0 \leqslant \hat{W}_u; \quad (\hat{W}_u - \Lambda^0) M_u^0 = 0; \quad u = 1, \ldots, m;$$

2) оператор $\Lambda^0 = \sum_{u=1}^{m} \hat{W}_u M_u^0$ эрмитов и $\Lambda^0 \leqslant \hat{W}_u$; $u = 1, \ldots, m$.

Задача в правой части (2.5) имеет единственное решение, которым является оператор Λ^0, входящий в условия 1), 2).

Наиболее часто используется достаточность условия 1), которая доказывается элементарно: для любого $\mathbf{M} = \{M_u\}$

$$\mathcal{R}\{\mathbf{M}\} = \mathrm{Tr} \sum_{u=1}^{m} \hat{W}_u M_u \geqslant \mathrm{Tr}\,\Lambda \sum_{u=1}^{m} M_u^0 = \mathrm{Tr} \sum_{u=1}^{m} \hat{W}_u M_u^0 = \mathcal{R}\{\mathbf{M}^0\}.$$

С помощью этого условия легко проверяется оптимальность решающего правила (1.9) в примере предыдущего пункта,

Пример 1. Пусть операторы $\hat{W}_u - \hat{W}_v$; $u, v = 1, \ldots, m$, перестановочны, т. е. $\hat{W}_u = C + \hat{W}_u^0$, где $\hat{W}_u^0$ — перестановочные операторы. Тогда существует самосопряженный оператор X и функции $\hat{W}_u^0(x)$ на $\mathbf{R}$, такие что

$$\hat{W}_u^0 = \hat{W}_k^0(X).$$

Пусть $\{\mathcal{X}_k\}$ — разбиение $\mathbf{R}$, такое что $\hat{W}_k^0(x) \leqslant \hat{W}_j^0(x)$ при $x \in \mathcal{X}_k$, $j \neq k$, и положим $\Lambda^0 = C + \min_k \hat{W}_k^0(X)$, $M_k^0 = 1_{\mathcal{X}_k}(X)$. Тогда условия 1) выполнены. Если $C = 0$, то это соответствует вычислению байесовского решающего правила в классической статистике: правило является детерминированным и для каждого x предписывает выбирать решение u, для которого апостериорное отклонение $\hat{W}_u(x)$ минимально [37, гл. IV].

Пример 2. Условия предыдущего примера автоматически выполняются в случае двух гипотез S_0, S_1. Для простоты рассмотрим функцию потерь $W_\theta(u) = 1 - \delta_{\theta u}$, так что речь идет о минимизации средней ошибки. Байесовское решающее правило имеет вид

$$M_0^0 = 1_{(0,\infty)}(\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1), \quad M_1^0 = 1_{(-\infty,0]}(\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1),$$

и минимальная ошибка

$$\mathcal{R}\{\mathbf{M}^0\} = \frac{1}{2}(1 - \|\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1\|_1).$$

Если S_0, S_1 — чистые состояния с векторами ψ_0, ψ_1, то

$$\mathcal{R}\{\mathbf{M}^0\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\pi_0\pi_1 |\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle|^2}\right).$$

В общем случае уравнения оптимальности сводятся к сложной нелинейной задаче, часто геометрического характера. Много интересных явно решаемых случаев, в которых условия примера 1 не выполняются, рассмотрено Хелстромом [37], Р. Л. Стратоновичем [155] и В. П. Белавкиным [63]. Остановимся на задаче различения m чистых состояний с линейно независимыми векторами ψ_θ и априорными вероятностями $\pi_\theta > 0$. Можно считать, что $\mathcal{H}$ порождается векторами ψ_θ; $\theta = 1, \ldots, m$. Кеннеди показал, что в этом случае байесовское решающее правило имеет вид

$$M_u = |e_u\rangle\langle e_u|; \ u = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

где $\{e_u\}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ (см. [37, гл. IV]). Таким образом, задача сводится к нахождению ортонормированного базиса, наилучшим образом приближающего систему $\{\psi_u\}$ в смысле критерия

$$\mathcal{R}\{\mathbf{M}\} = \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta (1 - |\langle \psi_\theta | e_\theta \rangle|^2). \tag{2.7}$$

В [63] из общих условий оптимальности 1), 2) получено нелинейное уравнение для базиса $\{e_u\}$ и указан случай, когда оно решается явно. Пусть диагональные элементы матрицы $Q^{1/2}$, где $Q = [\sqrt{\pi_j\pi_k}\langle\psi_j|\psi_k\rangle]_{j,\,k=1,\ldots,m}$, совпадают и равны $\sqrt{q}$. Тогда оптимальный базис

$$e_k = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\pi_j}\,\lambda_{jk}\psi_j,$$

где $[\lambda_{jk}] = Q^{1/2}$, причем минимальная ошибка

$$\min \mathcal{R}\{\mathbf{M}\} = 1 - mq.$$

В частности, в «равноугольном» случае, когда $\langle\psi_j|\psi_k\rangle \equiv \gamma$ при $j \neq k$, а $\pi_\theta = 1/m$, получается формула Юна—Лэкса

$$\min \mathcal{R}\{\mathbf{M}\} = \frac{m-1}{m^2}\left(\sqrt{1+(m-1)\gamma} - \sqrt{1-\gamma}\right)^2.$$

А. С. Холево заметил [42], что в случае равновероятных чистых состояний имеет место оценка

$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}\} \leqslant \frac{1}{m} \sum_{\theta=1}^{m} \| \psi_\theta - e_\theta \|^2.$$

Базис, минимизирующий правую часть, имеет вид

$$e_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \psi_j, \tag{2.8}$$

где $[a_{jk}] = \Gamma^{-1/2}$ и $\Gamma = [\langle \psi_j | \psi_k \rangle]$, причем

$$\min_{\{e_\theta\}} \sum_{\theta=1}^{m} \| \psi_\theta - e_\theta \|^2 = \operatorname{Tr}(I - \Gamma^{1/2})^2 = 2\operatorname{Tr}(I - \Gamma^{1/2})$$

(теорема М. Г. Крейна). Отсюда

$$\min \mathscr{R}\{\mathbf{M}\} \leqslant \frac{1}{m} \operatorname{Tr}(I - \Gamma^{1/2})^2. \tag{2.9}$$

Решающее правило, отвечающее базису (2.8), асимптотически оптимально в пределе почти ортогональных состояний, $\Gamma \to I$, причем правая часть в (2.9) дает первый член асимптотики. В «равноугольном» случае (2.9) обращается в равенство.

2.3. Пропускная способность квантового канала связи. Набор операторов плотности $\{S_\theta\}$ определяет простейшую модель квантового канала связи (см. [39], [98]), для которого θ играет роль «сигнала», пробегающего входной алфавит $1, \ldots, m$. Кодирование задается распределением вероятностей $\pi = \{\pi_\theta\}$ на входном алфавите, а декодирование — разложением единицы $\mathbf{M} = \{M_u\}$, где u пробегает выходной алфавит $1, \ldots, p$. Вероятность получить на выходе символ u при условии, что на входе — сигнал θ, дается формулой (2.1). Таким образом, квантовый канал связи можно рассматривать как обычный канал со специфическими ограничениями на переходные вероятности, неявно выраженными формулой (2.1). Чему равна пропускная способность такого канала связи?

Рассмотрим информационное количество $\mathscr{I}_1(\pi, \mathbf{M})$, определяемое формулой типа (2.4) (где u пробегает от 1 до p) и величину $C_1 = \sup_{\pi; \mathbf{M}} \mathscr{I}_1(\pi, \mathbf{M})$, где супремум берется по всевозможным кодированиям и декодированиям. В ранних работах для оценки пропускной способности использовалась величина

$$\overline{C} = \sup_{\pi} \left[H\left(\sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta S_\theta \right) - \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta H(S_\theta) \right], \tag{2.10}$$

где $H(S) = -\operatorname{Tr} S \ln S$ — энтропия фон Неймана квантового состояния S. В [40], [121] показано, что для любого кодирования π и декодирования $\mathbf{M}$

$$\mathcal{J}_1(\pi, \mathbf{M}) \leqslant H\left(\sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta S_\theta\right) - \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta H(S_\theta), \tag{2.11}$$

причем если операторы S_θ неперестановочны, то неравенство строгое[1]. По-видимому, при том же условии $C_1 < \overline{C}$, хотя в полной общности это не было установлено. Однако как показывают следующие рассуждения, величина C_1 также не может рассматриваться как пропускная способность.

Правильное определение пропускной способности должно быть связано с предельной скоростью асимптотически безошибочной передачи информации. Рассмотрим n-ю степень канала в пространстве $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$, определяемую состояниями $S_v = S_{\theta_1} \otimes \ldots \otimes S_{\theta_n}$, где $v = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — всевозможные слова входного алфавита длины n. Пусть $\mathcal{J}_n(\pi, \mathbf{M})$ и $C_n = \sup\limits_{\pi; \mathbf{M}} \mathcal{J}_n(\pi, \mathbf{M})$ — величины, определяемые для n-й степени канала аналогично $\mathcal{J}_1(\pi, \mathbf{M})$ и C_1. Информационное количество $\mathcal{J}_n(\pi, \mathbf{M})$ обладает свойством аддитивности [40]

$$\sup_{\mathbf{M}^{(n)}, \mathbf{M}^{(m)}} \mathcal{J}_{n+m}(\pi^{(n)} \times \pi^{(m)}, \mathbf{M}^{(n)} \otimes \mathbf{M}^{(m)}) = \\ = \sup_{\mathbf{M}^{(n)}} \mathcal{J}_n(\pi^{(n)}, \mathbf{M}^{(n)}) + \sup_{\mathbf{M}^{(m)}} \mathcal{J}_m(\pi^{(m)}, \mathbf{M}^{(m)}),$$

откуда следует, что последовательность $\{C_n\}$ субаддитивна, $C_n + C_m \leqslant C_{n+m}$, а следовательно, существует

$$C = \lim_{n \to \infty} C_n/n = \sup_n C_n/n. \tag{2.12}$$

Основываясь на классической теореме кодирования, можно доказать, что при $R < C$ существуют такие кодирования и декодирования объема $N = [2^{nR}]$, что средняя ошибка

$$\bar{\lambda}(n, N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (1 - \operatorname{Tr} S_{v_j} M_j)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, тогда как при $R > C$ она не стремится к нулю при любом выборе кодирования и декодирования [42]. Это дает основание назвать величину C *пропускной способностью* данного квантового канала связи.

Следует отметить, что для соответствующего классического канала «без памяти» последовательность $\{C_n\}$ аддитивна и поэтому $C \equiv C_n/_n = C_1$. Оказывается, что в квантовом случае возможно строгое неравенство

$$C_1 < C, \tag{2.13}$$

[1] Это утверждение было высказано Л. Б. Левитиным в 1969 г.

что соответствует парадоксальному с классической точки зрения наличию «памяти» в произведении независимых каналов. Измерение в таком произведении может нести больше информации, чем сумма информаций, получаемых в каждой компоненте. Этот факт, разумеется, обусловлен необычными статистическими свойствами составных квантовых систем и является еще одним проявлением квантовой целостности.

Доказательство этого факта, данное в работе А. С. Холево [42], использует следующую оценку пропускной способности C для канала с чистыми состояниями $S_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$:

$$C \geqslant \tilde{C} \equiv -\ln \min_{\pi} \left[\sum_{j,k=1}^{m} \pi_j \pi_k |\langle \psi_j | \psi_k \rangle|^2 \right],$$

в основе которой лежит неравенство (2.9) для средней ошибки и модификация метода случайных кодов, предложенная Р. Л. Стратоновичем и А. Г. Ванцян в [36]. Для двоичного канала $(m=2)$

$$\tilde{C} = 1 - \ln(1+\varepsilon^2) > 1 - \varepsilon^2/\ln 2,$$

где $\varepsilon = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$. В случае «почти ортогональных состояний»

$$C_1 \leqslant 1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \ln \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2 \ln \varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0,$$

откуда следует (2.13) для достаточно малых ε.

В этой области остается ряд трудных нерешенных вопросов [98]. Определенная формулой (2.12) пропускная способность не вычислена в точном виде даже для двоичного канала. Ввиду серьезных аналитических трудностей, представляют большой интерес всевозможные оценки и приближенные результаты (см. Бенджбаллах и Чарбит [67], В. П. Белавкин [63], Ингарден [110], Линдблад [121], Чемберс [74]). В общем случае $C \leqslant \bar{C}$, однако неизвестно, достигается ли здесь равенство для неперестановочных операторов плотности S_θ.

2.4. Общая формулировка. Как и в классической теории статистических решений [50], задается множество значений Θ неизвестного параметра θ, множество $\mathscr{X}$ решений x (часто $\mathscr{X} = \Theta$) и функция отклонения $W_\theta(x)$, определяющая качество решения x при данном значении параметра θ. Множество $\mathscr{X}$ — измеримое (обычно стандартное) пространство и $W_\theta(x)$ ограничена снизу и измерима по x при фиксированном $\theta \in \Theta$.

Каждому значению θ соответствует оператор плотности S_θ в гильбертовом пространстве рассматриваемой квантовой системы, а *решающее правило* задается разложением единицы $\mathbf{M}: \mathscr{B}(\mathscr{X}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{H}$. Ортогональные разложения единицы описывают *детерминированные* решающие правила. При данном значении параметра θ и данном решающем правиле $\mathbf{M}$ решение выбирается в соответствии с распределением вероятностей

$$\mu_\theta^{\mathbf{M}}(B) = \operatorname{Tr} S_\theta M(B);\ B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}).$$

Среднее отклонение, определяемое формулой

$$\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\} = \int\limits_{\mathscr{X}} W_\theta(x)\,\mu_\theta^{\mathbf{M}}(dx),$$

является для каждого $\theta \in \Theta$ аффинным функционалом на выпуклом множестве решающих правил $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$.

Решающее правило называется *байесовским,* если оно минимизирует байесовский риск

$$\mathscr{R}_\pi\{\mathbf{M}\} = \int\limits_{\Theta} \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}\,\pi(d\theta)$$

для данного априорного распределения π на Θ, и *минимаксным,* если оно минимизирует максимальное среднее отклонение $\max\limits_\theta \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}$. Как классическая, так и квантовая теории статистических решений включаются в общую схему, в которой состояния описываются точками произвольного выпуклого множества $\mathfrak{S}$, причем значительная часть результатов классической теории Вальда переносится на эту схему, достигая естественных границ общности (А. С. Холево [41]). При минимальных требованиях на функцию отклонений установлены общие условия существования байесовского (Озава [133]) и минимаксного решающих правил, полнота класса байесовских решающих правил (Н. А. Боголюбов [8]), аналог теоремы Ханта—Стейна [43], [8]. Обобщения понятия достаточности изучали Умегаки [158], А. С. Холево [41], Петц [139]. В силу ограниченности понятия условного ожидания, в квантовой теории статистических решений достаточность играет гораздо меньшую роль, чем в классической, зато на первый план выходят свойства инвариантности относительно подходящих групп симметрий (см. § 3).

На основе соответствующего аппарата интегрирования в [41] получены необходимые и достаточные условия оптимальности и соотношение двойственности в байесовской задаче с произвольными Θ, $\mathscr{X}$, обобщающие теорему из п. 2.2. Эти условия позволяют, в частности, дать исчерпывающее решение многомерной байесовской задачи оценивания среднего значения гауссовских состояний (В. П. Белавкин, Б. А. Гришанин [5], А. С. Холево [41]), которое иллюстрируется здесь одним примером.

В задаче оценивания $\Theta = \mathscr{X}$ является конечномерным многообразием, в частности, областью в $\mathbf{R}^n$. В этом случае детерминированное решающее правило может быть задано набором совместимых вещественных наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$ в $\mathscr{H}$. Согласно п. 1.2, произвольное решающее правило задается набором совместимых наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$ в расширении $\mathscr{H}$ вида $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$, где $\mathscr{H}_0$ — вспомогательное гильбертово пространство с оператором плотности S_0. При таком способе задания решающее правило называется *оценкой* многомерного параметра $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$. В квантовой задаче оценивания, в отличие от классической, байесовские оценки могут оказаться существенно недетерминированными.

Пример. Пусть $\{S_{\alpha,\beta};\ (\alpha, \beta)\in\mathbf{R}^2\}$ — семейство гауссовских состояний (см. п. 1.2.4) с характеристической функцией

$$\operatorname{Tr} S_{\alpha,\beta}\exp[i(Px+Qy)]=\exp[i(\alpha x+\beta y)-\\ -\frac{\sigma^2}{2}(x^2+y^2)];\ (x,\ y)\in\mathbf{R}^2, \tag{2.14}$$

где P, Q — канонические наблюдаемые, $\sigma^2\geqslant\frac{1}{2}$. Рассмотрим байесовскую задачу оценивания параметра $\theta=(\alpha, \beta)$ с функцией отклонения

$$W_{\alpha,\beta}(\alpha',\ \beta')=g_1(\alpha-\alpha')^2+g_2(\beta-\beta')^2$$

и гауссовским априорным распределением вероятностей с плотностью $(2\pi)^{-1}\exp\left(-\frac{\sigma_0{}^2}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right)$. Решение этой задачи качественно зависит от величины g_1/g_2. Если $g_1/g_2\leqslant(2s^2)^{-2}$ или $g_1/g_2\geqslant\geqslant(2s^2)^2$, где $s^2=\sigma^2+\sigma_0^2$, то байесовские оценки детерминированы, т. е. задаются парой перестановочных самосопряженных операторов A, B в $\mathscr{H}$. В первом случае $A=\left(\frac{\sigma_0}{s}\right)^2P$, $B=0$, а во втором $A=0$, $B=\left(\frac{\sigma_0}{s}\right)^2Q$. Если же $(2s^2)^{-2}\leqslant g_1/g_2\leqslant(2s^2)^2$, то оценки задаются перестановочными операторами

$$A=k_1(P\otimes I_0)+k_2(I\otimes P_0),\quad B=k_2(Q\otimes I)-k_1(I\otimes Q_0)$$

в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$ (ср. (1.7)), где k_1, k_2 — коэффициенты, нелинейно зависящие от s^2, g_1, g_2, а оператор плотности S_0 в $\mathscr{H}_0$ гауссовский и имеет характеристическую функцию

$$\operatorname{Tr} S_0\exp[i(P_0x+Q_0y)]=\\ =\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\frac{k_1}{k_2}x^2+\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\frac{k_2}{k_1}y^2\right)\right].$$

Соответствующее разложение единицы в $\mathscr{H}$ отличается от (1.7) линейной заменой переменных. В отличие от аналогичной классической задачи, зависимость байесовского риска от весов g_1, g_2 также имеет существенно нелинейный характер.

2.5. Квантовые неравенства Рао—Крамера. Рассмотрим задачу оценивания в семействе состояний $\{S_\theta\}$, где $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_k)\in\mathbf{R}^k$. Решающее правило $\mathbf{M}$ назовем *несмещенным*, если для всех $\theta\in\Theta$

$$\int\ldots\int x_j\mu_\theta^{\mathrm{M}}(dx_1\ldots dx_k)=\theta_j;\quad j=1,\ldots,k.$$

В предположении конечности вторых моментов определена матрица ковариации

$$\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\}=\left[\int\ldots\int(x_i-\theta_i)(x_j-\theta_j)\,\mu_\theta^{\mathrm{M}}(dx_1\ldots dx_k)\right];\ i,\ j=1,\ldots,k.$$

В классической статистике хорошо известно неравенство Рао—Крамера, ограничивающее снизу матрицу ковариации несмещенных оценок. Входящая в эту границу информационная матрица Фишера однозначно определяется метрической геометрией симплекса «классических состояний», т. е. распределений вероятностей на пространстве элементарных событий Ω [50]. В квантовой статистике имеется много неэквивалентных неравенств типа Рао—Крамера, что связано с существенно более сложной геометрией множества состояний.

Поскольку неравенство Рао—Крамера имеет локальный характер, достаточно предполагать, что семейство состояний определено в окрестности фиксированной точки θ. Введем вещественное гильбертово пространство $L^2(S_\theta)$, определяемое как пополнение множества $\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$ ограниченных вещественных наблюдаемых относительно скалярного произведения

$$\langle X,\ Y\rangle_\theta=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,YS_\theta X\equiv\mathrm{Tr}\,S_\theta X\circ Y,\tag{2.15}$$

где $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$ — йорданово произведение X, Y. Предположим, что

1) семейство $\{S_\theta\}$ сильно дифференцируемо в точке θ как функция со значениями в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$;

2) линейные функционалы $X\to\mathrm{Tr}\,\frac{dS_\theta}{d\theta_j}X$ непрерывны относительно скалярного произведения (2.15).

При этих условиях по теореме Ф. Рисса существуют *симметризованные логарифмические производные* $L_\theta^j\in L^2(S_\theta)$, определяемые из условий

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta_j}X=\langle L_\theta^j,\ X\rangle,\quad X\in\mathfrak{B}_h(\mathscr{H}).\tag{2.16}$$

Формально,

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta_j}=S_\theta\circ L_\theta^j.\tag{2.17}$$

Тогда для любого решающего правила $\mathbf{M}$, имеющего конечные вторые моменты и удовлетворяющего условию локальной несмещенности

$$\int \dots \int x_i \frac{\partial \mu_\theta^{\mathbf{M}}}{\partial \theta_j} (dx_1 \dots dx_k) = \delta_{ij}; \quad i,\ j = 1, \dots, k, \tag{2.18}$$

где $\frac{\partial \mu_\theta^{\mathbf{M}}}{\partial \theta_j}(B) = \mathrm{Tr}\, \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} M(B)$, имеет место неравенство

$$\mathbf{D}_\theta \{\mathbf{M}\} \geqslant \mathbf{J}_\theta^{-1}. \tag{2.19}$$

Здесь $\mathbf{J}_\theta = [\langle L_\theta^i,\ L_\theta^j \rangle_\theta]_{i,\, j=1,\, \dots,\, k}$ — вещественная симметричная матрица — аналог информационной матрицы Фишера для симметризованной логарифмической производной.

С другой стороны, введем комплексные гильбертовы пространства $L_\pm^2(S_\theta)$ как пополнения $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ относительно скалярных произведений

$$\langle X, Y \rangle_\theta^+ = \mathrm{Tr}\, X^* S_\theta Y, \ \langle X, Y \rangle_\theta^- = \mathrm{Tr}\, Y S_\theta X^*$$

и определим *правую* и *левую логарифмические производные* $L_\theta^{\pm j}$ как решения уравнений

$$\mathrm{Tr}\, \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} X = \langle L_\theta^{\pm j}, X \rangle_\theta^\pm, \quad X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}),$$

(существующие при тех же условиях 1), 2)). Формально

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = S_\theta L_\theta^{+j} = L_\theta^{-j} S_\theta.$$

Тогда, при условии (2.18)

$$\mathbf{D}_\theta \{\mathbf{M}\} \geqslant \left(\mathbf{J}_\theta^\pm\right)^{-1}, \tag{2.20}$$

где $\mathbf{J}_\theta^\pm = \left[\langle L_\theta^{\pm i}, L_\theta^{\pm j} \rangle_\theta^\pm\right]_{i,\, j=1, \dots, k}$ — комплексные эрмитовы матрицы, и (2.20) рассматривается как неравенство для эрмитовых матриц.

Формальное определение (2.17) симметризованной логарифмической производной и неравенство (2.19) принадлежит Хелстрому, а неравенство (2.20) — Юну и Лэксу (см. [37, гл. VIII]). Другие неравенства были получены Р. Л. Стратоновичем [155]. Математически корректные определения логарифмических производных и вывод соответствующих неравенств дан в книге [43, гл. VI]. Пространства L^2, ассоциированные с квантовым состоянием, полезны и в других вопросах. Элементы этих пространств могут быть интерпретированы как (классы эквивалентности) неограниченных операторов в $\mathscr{H}$ ([43, гл. II]).

Неравенства (2.19), (2.20) дают существенно различные, несравнимые границы для $\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\}$. В случае одномерного параметра ($k=1$) всегда $J_\theta \leqslant J_\theta^\pm$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $[S_\theta, \frac{dS_\theta}{d\theta}] = 0$. В этом случае неравенство, основанное на симметризованной логарифмической производной, оказывается наилучшим [37, гл. VIII]. С другой стороны, для двупараметрического семейства гауссовских состояний (2.14) неравенство (2.19) дает $\mathrm{Tr}\,\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\}\geqslant 2\sigma^2$, тогда как из (2.20) вытекает $\mathrm{Tr}\,\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\}\geqslant 2\sigma^2+1$. Последняя граница достигается для несмещенных оценок, определяемых операторами типа (1.7). Неравенство (2.20), основанное на правой (или левой) логарифмической производной, вообще лучше приспособлено к задачам оценивания, в которых параметр допускает естественную комплексификацию (в последнем примере $\theta=\alpha+i\beta$).

Выражение

$$d(S_1, S_2)=\sqrt{2(1-\|\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\|_1)}$$

определяет метрику в множестве операторов плотности $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. В более широком контексте алгебр фон Неймана эта метрика, известная как расстояние Бюреса, подробно изучалась Араки, Ульманом и др. (см. обзор Раджио в [141]). Если $\{S_\theta\}$ — семейство, удовлетворяющее условиям 1), 2), то при $\Delta\theta\to 0$

$$d(S_\theta, S_{\theta+\Delta\theta})^2\approx\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{k}\langle L_\theta^i, L_\theta^j\rangle_\theta\,\Delta\theta_i\Delta\theta_j. \tag{2.21}$$

Таким образом, расстояние Бюреса эквивалентно в малом римановой метрике, определяемой квантовым аналогом информационной матрицы Фишера. Е. А. Морозова и И. Н. Ченцов в [35] описали всевозможные римановы метрики в $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ $(\dim\mathscr{H}<\infty)$, монотонно инвариантные в категории марковских морфизмов (аффинных отображений $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ в себя). Минимальной в этом классе является риманова метрика в правой части (2.21).

§ 3. Ковариантные наблюдаемые

3.1. Формулировка проблемы. Пусть G — локально компактная группа, действующая непрерывно на транзитивном G-пространстве $\mathscr{X}$ и $\mathbf{V}: g\to V_g$, $g\in G$, — непрерывное (проективное) унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Разложение единицы $\mathbf{M}: B\to M(B)$, $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$ в $\mathscr{H}$ *ковариантно* по отношению к $\mathbf{V}$, если

$$V_g^*M(B)V_g=M(g^{-1}B);\ g\in G,\ B\in\mathscr{B}(\mathscr{X}). \tag{3.1}$$

В квантовой механике $\mathscr{X}$ является пространством значений физического параметра (обобщенной координаты) x, обладающего группой симметрий (движений) G. Фиксируем $x_0\in\mathscr{X}$ и оператор плотности S_0. Соотношение

$$S_x=V_gS_0V_g^*,\quad\text{где}\quad x=gx_0, \tag{3.2}$$

описывает преобразование квантового состояния, отвечающее движению g. Рассмотрим обобщенную наблюдаемую $\mathbf{M}$, удовлетворяющую условию ковариантности (3.1), и пусть $\mu_x^{\mathbf{M}}(B) = \mathrm{Tr}\, S_x M(B)$ — ее распределение вероятностей в состоянии S_x. Тогда условие (3.1) равносильно следующему:

$$\mu_{gx_0}^{\mathbf{M}}(gB) = \mu_{x_0}^{\mathbf{M}}(B); \quad B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}),\ g \in G, \tag{3.3}$$

для любого состояния S_0. Это означает, что статистика наблюдаемой $\mathbf{M}$ преобразуется согласно движениям g в пространстве обобщенной координаты $\mathscr{X}$ (см. пример в п. 1.2.3). Условие ковариантности, таким образом, дает правило для установления соответствия между классическими параметрами и квантовыми наблюдаемыми.

Такое соответствие является, конечно, далеко не однозначным. Среди множества ковариантных обобщенных наблюдаемых основной интерес представляют те, которые описывают предельно точные измерения соответствующего параметра. Рассмотрим задачу оценивания параметра $x \in \mathscr{X}$ в семействе состояний (3.2). Пусть на множестве $\mathscr{X} = \Theta$ задана функция отклонения $W_\theta(x)$, такая что $W_{g\theta}(gx) = W_\theta(x)$. Среднее отклонение

$$\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\} = \int_{\mathscr{X}} W_\theta(x)\, \mu_\theta^{\mathbf{M}}(dx) \tag{3.4}$$

при условии (3.1) не зависит от θ. Минимум аффинного функционала (3.4) достигается в крайней точке выпуклого множества $\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$ ковариантных обобщенных наблюдаемых. Обозначим $\mathfrak{M}_0^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$ подмножество ковариантных наблюдаемых, задаваемых ортогональными разложениями единицы. Проблема соответствия в математическом плане сводится к изучению запаса элементов и структуры множеств $\mathfrak{M}_0^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$, $\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$. В общем случае

$$\mathfrak{M}_0^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X}) \subsetneq \mathrm{Extr}\, \mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X}).$$

Целый ряд парадоксов в стандартной формулировке квантовой механики обусловлен тем, что множество $\mathfrak{M}_0^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$ оказывается пустым. С другой стороны, $\mathrm{Extr}\, \mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$ имеет значительно более обширный запас элементов, среди которых и находится обобщенная квантовая наблюдаемая, отвечающая данному классическому параметру.

3.2. Структура ковариантного разложения единицы. При специальных предположениях относительно G, $\mathscr{X}$, $\mathbf{V}$ можно дать прямое решение уравнения ковариантности (3.1), проливающее свет и на общий случай.

Пусть G — унимодулярна, а $G_0 = G/\mathscr{X}$ компактна, тогда на G существует σ-конечная инвариантная мера μ, а на $\mathscr{X}$ конечная инвариантная мера ν, такая что $\nu(B) = \mu(\lambda^{-1}(B))$, где $\lambda : g \to gx_0$.

Теорема ([78], [43]). Пусть $\mathbf{V}$ — конечномерное представление группы G. Для любого ковариантного разложения единицы $\mathbf{M}$ найдется положительный оператор P_0, такой что $[P_0, V_g]=0$, $g\in G_0$ и

$$M(B)=\int_B P(x)\nu(dx),$$

где плотность $P(x)$ определяется соотношением

$$P(gx_0)=V_gP_0V_g^* \tag{3.5}$$

Доказательство. Из тождества

$$\int_G \operatorname{Tr} V_gSV_g^*M(B)\mu(dg)=\nu(B), \quad S\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}),$$

(см. [43, гл. IV]), полагая $S=(\dim\mathscr{H})^{-1}I$, получаем $\operatorname{Tr} M(B)=(\dim\mathscr{H})^{-1}\nu(B)$. Поэтому существует плотность $P(x)$ со значениями в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$. Соотношение (3.5) вытекает из условия ковариантности.

Ограничение на P_0, вытекающее из условия нормировки $M(\mathscr{X})=I$, иногда удается выразить явно. Очень просто устроено множество $\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(\mathscr{X})$ в случае, когда $\mathbf{V}$ есть неприводимое квадратично-интегрируемое представление ($\dim\mathscr{H}\leqslant+\infty$) унимодулярной группы $G=\mathscr{X}$. Из соотношений ортогональности для $\mathbf{V}$ (см. [126]) следует, что при надлежащей нормировке μ

$$\int_G V_gS_0V_g^*\mu(dg)=I$$

для любого оператора плотности S_0. Таким образом, формула

$$M(B)=\int_B V_gS_0V_g^*\mu(dg)$$

устанавливает взаимно однозначное аффинное соответствие между $\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(G)$ и $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. В частности, крайние точки множества $\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(G)$ описываются формулой

$$M(B)=\int_B |\psi(g)\rangle\langle\psi(g)|\mu(dg), \tag{3.6}$$

где $\psi(g)=V_g\psi_0$, а ψ_0 — произвольный единичный вектор в $\mathscr{H}$. Семейство $\{\psi(g);\ g\in G\}$ образует переполненную систему, называемую в физике *обобщенными когерентными состояниями* (обычные когерентные состояния отвечают неприводимому представлению ККС и специальному выбору вектора ψ_0, см. п. 1.2.4).

3.3. Обобщенные системы импримитивности. Если $\mathbf{M}$ в соотношении (3.1) ортогональное разложение единицы, то пара $(\mathbf{V}, \mathbf{M})$ называется *системой импримитивности.* Это понятие, введенное Дж. Макки (см. [126]), играет важную роль в теории представлений групп: представление **V** продолжается до системы импримитивности тогда и только тогда, когда оно индуцировано с подгруппы $G/\mathscr{X}$. Если же **M** — произвольное ковариантное разложение единицы, то (**V**, **M**) называется обобщенной системой импримитивности. Имеет место следующее обобщение теоремы М. А. Наймарка о расширении.

Теорема ([72], [148]). Пусть G — локально компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $(\mathscr{X}, \mathscr{B}(\mathscr{X}))$ — стандартное измеримое пространство. Пусть (**V**, **M**) — обобщенная система импримитивности в $\mathscr{H}$, тогда существуют изометрическое вложение W пространства $\mathscr{H}$ в некоторое гильбертово пространство $\tilde{\mathscr{H}}$ и система импримитивности $(\tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{E})$ в $\mathscr{H}$, такие что

$$V_g = W^* \tilde{V}_g W; \quad M(B) = W^* E(B) W.$$

Если множество $\{E(B) W\psi \mid B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}), \psi \in \mathscr{H}\}$ плотно в $\tilde{\mathscr{H}}$, то $(\tilde{V}, \mathbf{E})$ унитарно эквивалентно системе импримитивности, продолжающей представление в $\tilde{\mathscr{H}} = L^2_{\mathscr{K}}(\mathscr{X}, \mu)$, индуцированное с подгруппы $G/\mathscr{X}$ [1].

Для иллюстрации рассмотрим пару (**V**, **M**), где **V** — неприводимое квадратично интегрируемое представление, **M** дается формулой (3.6). Искомое расширение в $\mathscr{H} = L^2(G, \mu)$ является модификацией конструкции для произвольной переполненной системы (см. п. 2.1.1), именно

$$\tilde{V}_g f(x) = f(gx); \quad E(B) f(x) = 1_B(x) f(x),$$

причем вложение W действует по формуле $W\psi(g) = \langle \psi(g) \mid \psi \rangle$. Подпространство $W\mathscr{H} \subset L^2(G, \mu)$ связано с воспроизводящим ядром $\mathscr{K}(g, g') = \langle \psi(g) \mid \psi(g') \rangle = \langle \psi_0 \mid V(g^{-1}g') \psi_0 \rangle$. Связь между обобщенными когерентными состояниями и индуцированными представлениями подробно исследовал Скутару [148]. В общем случае Каттанео [73] показал, что **M** имеет ограниченную плотность $P(x)$ относительно квазиинвариантной меры μ на $\mathscr{X}$ тогда и только тогда, когда подпространство $W\mathscr{H} \subset L^2_{\mathscr{K}}(\mathscr{X}, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (со значениями в $\mathfrak{B}(\mathscr{K})$).

3.4. Случай абелевой группы. Случай, когда $G = \mathscr{X}$ — абелева локально компактная группа, представляет интерес, в частности, в связи с проблемой канонической сопряженности в квантовой механике. Полное описание ковариантных разложений единицы для произвольного (непрерывного) представления **V** дается в терминах преобразования Фурье; при этом значения «плотности» $P(x)$ оказываются, вообще говоря, неограниченны-

[1] $L^2_{\mathscr{K}}(\mathscr{X}, \mu)$ обозначает гильбертово пространство функций на $\mathscr{X}$ со значениями в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$, квадратично интегрируемых по мере μ.

ми положительно-определенными формами. Излагаемые далее результаты могут быть получены как прямыми методами гармонического анализа, так и с помощью теоремы о расширении из предыдущего пункта (см. статью А. С. Холево в [141]). Обобщение на неабелевы группы типа I дано в работе [46].

Пусть $\hat{G}$ — двойственная группа, $d\hat{g}$ — мера Хаара в $\hat{G}$.

Предложение 1. $\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(G) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда спектр $\mathbf{V}$ абсолютно непрерывен относительно $d\hat{g}$.

Если это выполнено, то $\mathbf{V}$ разлагается в прямой интеграл факторных представлений, именно

$$\mathscr{H} = \int_{\Lambda} \oplus \mathscr{H}(\lambda)\, d\lambda,$$

где Λ — измеримое подмножество $\hat{G}$, $\{\mathscr{H}(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ — измеримое семейство гильбертовых пространств с $\dim \mathscr{H}(\lambda) > 0$ для п. в. $\lambda \in \Lambda$, причем

$$V_g \psi = \int_{\Lambda} \oplus \overline{\lambda(g)}\, \psi(\lambda)\, d\lambda, \text{ если } \psi = \int_{\Lambda} \oplus \psi(\cdot\lambda)\, d\lambda.$$

Здесь $\lambda(g)$ — значение характера $\lambda \in \hat{G}$ на элементе $g \in G$. Следующее утверждение вытекает из теоремы импримитивности Макки, которая обобщает теорему единственности Стоуна — фон Неймана (п. 1.2.3).

Предложение 2. $\mathfrak{M}_0^{G,V}(G) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = \hat{G}$ с точностью до множества нулевой меры и $\dim \mathscr{H}(\lambda) = \mathrm{const}$ для п. в. $\lambda \in \hat{G}$.

Ядром будем называть семейство $\{P(\lambda, \lambda'); \lambda, \lambda' \in \Lambda\}$, где $P(\lambda, \lambda')$ — сжимающие операторы из $\mathscr{H}(\lambda')$ в $\mathscr{H}(\lambda)$, причем комплексная функция $\langle \varphi(\lambda) | P(\lambda, \lambda') \psi(\lambda') \rangle_\lambda$ измерима по мере $d\lambda \times d\lambda'$ для любых $\varphi = \int \oplus \varphi(\lambda)\, d\lambda$, $\psi = \int \oplus \psi(\lambda)\, d\lambda \in \mathscr{H}$ ($\langle \cdot | \cdot \rangle_\lambda$ обозначает скалярное произведение в $\mathscr{H}(\lambda)$). Ядро *положительно определено*, если

$$\int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \langle \varphi(\lambda) | P(\lambda, \lambda') \varphi(\lambda') \rangle_\lambda d\lambda\, d\lambda' \geqslant 0$$

для всех $\varphi \in \mathscr{H}_1 = \left\{ \varphi : \int_{\Lambda} \| \varphi(\lambda) \|_\lambda d\lambda < \infty \right\}$. Для таких ядер однозначно с точностью до эквивалентности определяется диагональное значение $P(\lambda, \lambda)$ (см. [141]). Обозначим $\hat{1}_B(\lambda) = \int_B \lambda(g)\, dg$, где dg — мера Хаара в G.

Теорема. Соотношение

$$\langle \varphi | M(B)\psi \rangle = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} \langle \varphi(\lambda) | P(\lambda, \lambda')\varphi(\lambda') \rangle_{\lambda} \hat{1}_B(\lambda-\lambda')\, d\lambda d\lambda',$$

где B пробегает компактные подмножества в G, $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_1$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между ковариантными разложениями единицы в $\mathscr{H}$ и классами эквивалентности положительно определенных ядер $\{P(\lambda, \lambda')\}$, таких что $P(\lambda, \lambda) = I_\lambda$ (единичный оператор в $\mathscr{H}(\lambda)$).

Эта теорема сводит вопрос об описании множества $\mathrm{Extr}\,\mathfrak{M}^{G,V}(G)$ к нахождению крайних точек выпуклого множества положительно определенных ядер $\{P(\lambda, \lambda')\}$, удовлетворяющих условию $P(\lambda, \lambda) = I_\lambda$. В полном объеме эта задача не решена даже для конечного Λ. Можно, однако, выделить подкласс множества $\mathrm{Extr}\,\mathfrak{M}^{G,V}(G)$, существенный для квантовомеханических приложений.

Для простоты ограничимся далее случаем, когда $\dim \mathscr{H}(\lambda) = \mathrm{const}$, $\lambda \in \Lambda$. Обозначим $\mathfrak{M}_c^{G,V}(G)$ класс ковариантных разложений единицы, ядра которых удовлетворяют соотношению

$$P(\lambda, \lambda')P(\lambda', \lambda'') = P(\lambda, \lambda''); \ \lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda.$$

Если $\Lambda = G$, то этот класс совпадает с $\mathfrak{M}_0^{G,V}(G)$, с другой стороны, $\mathfrak{M}_c^{G,V}(G) \subset \mathrm{Extr}\,\mathfrak{M}^{G,V}(G)$, причем совпадение имеет место только, если Λ состоит из двух точек. Все элементы $\mathfrak{M}_c^{G,V}(G)$ получаются друг из друга калибровочными преобразованиями

$$M'(B) = U^*M(B)U, \tag{3.7}$$

где $U = \int\limits_{\Lambda} \oplus U(\lambda)\, d\lambda$ — разложимый унитарный оператор в $\mathscr{H} = \int\limits_{\Lambda} \oplus \mathscr{H}(\lambda)\, d\lambda$.

Если реализовать $\mathscr{H}$ как $L^2_{\mathscr{K}}(\Lambda, d\lambda)$, где $\mathscr{H}(\lambda) \equiv \mathscr{K}$, $\lambda \in \Lambda$, то в классе $\mathfrak{M}_c^{G,V}(G)$ выделяется разложение единицы M_c, определяемое ядром $P(\lambda, \lambda') \equiv I_{\mathscr{K}}$ (единичный оператор в $\mathscr{K}$), для которого

$$\langle \psi | M_c(B)\varphi \rangle = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} \langle \psi(\lambda) | \varphi(\lambda') \rangle_{\mathscr{K}} \hat{1}_B(\lambda-\lambda')\, d\lambda d\lambda'. \tag{3.8}$$

Всякое $M \in \mathfrak{M}_c^{G,V}(G)$ имеет ядро вида $U(\lambda)^* U(\lambda')$, где $\{U(\lambda)\}$ — измеримое семейство унитарных операторов в $\mathscr{K}$.

3.5. Каноническая сопряженность в квантовой механике. Пусть x — одномерный параметр, так что $G = \mathscr{X}$ является вещественной прямой $\mathbf{R}$ (случай параметра сдвига), или единичной окружностью $\mathbf{T}$ (случай параметра поворота), и пусть $x \to V_x = e^{-ixA}$ — унитарное представление группы G в $\mathscr{H}$. Спектр Λ оператора A содержится в двойственной группе $\hat{G}$, которая совпадает с $\mathbf{R}$ в случае $G=\mathbf{R}$ и с множеством целых чисел $\mathbf{Z}$ в случае $G=\mathbf{T}$.

Условие ковариантности обобщенной наблюдаемой $\mathbf{M}$ имеет вид

$$V_x^* M(B) V_x = M(B-x); \quad B \in \mathscr{B}(G),\ x \in G, \tag{3.9}$$

где $B-x=\{y : y+x \in B\}$, причем в случае $G=\mathbf{T}$ имеется в виду сложение по модулю 2π. Вводя операторы

$$U_y = \int_G e^{iyx} M(dx), \quad y \in \hat{G},$$

получаем, что (3.9) равносильно соотношению Вейля (см. п. 1.2.3)

$$U_y V_x = e^{ixy} V_x U_y; \quad x \in G,\ y \in \hat{G}, \tag{3.10}$$

в котором, однако, операторы U_y, вообще говоря, неунитарны. В этом смысле обобщенная наблюдаемая $\mathbf{M}$ является канонически сопряженной к наблюдаемой A.

Для обобщенной канонической пары $(A, \mathbf{M})$ имеет место соотношение неопределенностей [100]

$$\Delta_S^{\mathbf{M}}(y) \cdot \mathbf{D}_S(A) \geqslant 1/4; \quad y \in \hat{G}, \tag{3.11}$$

где $\Delta_S^{\mathbf{M}}(y) = y^{-2}\{|\operatorname{Tr} SU_y|^{-2} - 1\}$, $y \neq 0$, есть некоторая функциональная мера неопределенности ковариантной обобщенной наблюдаемой $\mathbf{M}$ в состоянии S (см. [43, § IV.7]). Если $G=\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ имеет конечную дисперсию $\mathbf{D}_S(\mathbf{M})$, то $\lim\limits_{y\to 0} \Delta_S^{\mathbf{M}}(y) = \mathbf{D}_S(\mathbf{M})$, так что из (3.11) следует обобщение соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\mathbf{D}_S(\mathbf{M})\, \mathbf{D}_S(A) \geqslant 1/4.$$

Для параметра поворота $(G=\mathbf{T})$ дисперсия не является адекватной мерой неопределенности, и неравенство (3.11) следует рассматривать как окончательное. Различные формы соотношения неопределенностей для угловых переменных обсуждались в обзорах [19], [17]. Следует отметить, что обобщенная наблюдаемая угла поворота существует всегда, поскольку условия предложения 1 из предыдущего пункта выполняются автоматически $(\hat{G}=\mathbf{Z})$. С другой стороны, условия предложения 2 не могут быть выполнены, если $\dim \mathscr{H} < \infty$ (как для систем с конечным спином), и в этих случаях обычной наблюдаемой угла поворота не существует.

Наибольший интерес представляют ковариантные обобщенные наблюдаемые, имеющие минимальную неопределенность.

Теорема ([100]). Пусть $S=|\psi\rangle\langle\psi|$ — чистое состояние, тогда

$$\min_{\mathbf{M}\in\mathfrak{M}^{G,\mathbf{V}}(G)} \Delta_S^{\mathbf{M}}(y)=y^{-2}\left[\left(\int\limits_{\hat{G}} \|\psi(y')\|\,\|\psi(y'+y)\|\,dy'\right)^{-2}-1\right]. \quad (3.12)$$

В частности, для $G=\mathbf{R}$

$$\min_{\mathbf{M}\in\mathfrak{M}^{\mathbf{R},\mathbf{V}}(\mathbf{R})} \mathbf{D}_S(\mathbf{M})=\int\limits_{\mathbf{R}}\left(\frac{d}{dy}\|\psi(y)\|\right)^2 dy, \quad (3.13)$$

где $\psi(y)$ — компоненты вектора ψ в представлении, диагонализующем оператор A. Минимум достигается на ковариантной наблюдаемой $\mathbf{M}^*$ класса $\mathfrak{M}_c^{G,\mathbf{V}}$, которая задается ядром $P^*(y,y')$ таким, что $P^*(y,y')\psi(y')/\|\psi(y')\|=\psi(y)/\|\psi(y)\|$; $y,\ y'\in\Lambda$.

Величины (3.12), (3.13) дают внутреннюю меру неопределенности параметра x в состоянии S.

Таким образом, требования ковариантности и минимальной неопределенности (относительно чистых состояний) определяют канонически сопряженную обобщенную наблюдаемую однозначно с точностью до калибровочного преобразования (3.7). Следует отметить, что аналогичная степень произвола остается и в стандартной формулировке квантовой механики, поскольку в случае $\Lambda=\hat{G}$ класс $\mathfrak{M}_c^{G,\mathbf{V}}(G)$ совпадает с классом ковариантных наблюдаемых $\mathfrak{M}_0^{G,\mathbf{V}}(G)$.

Пример. Рассмотрим квантовую систему с положительным гамильтонианом H. Представление $t\to V_t=e^{-iHt}$ группы временных сдвигов не удовлетворяет условиям предложения 2 предыдущего пункта, поскольку $\Lambda\subset\mathbf{R}_+$. Поэтому ковариантной наблюдаемой временного сдвига не существует[1]. Предположим для простоты, что $\Lambda=\mathbf{R}_+$ и что спектр H однороден (т. е. имеет постоянную кратность для п.в. $\lambda\in\Lambda$). Тогда H унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}=L^2_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}_+)$ квадратично-интегрируемых функций $\psi=[\psi(\lambda)]$ на $\mathbf{R}_+$ со значениями в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$. Ковариантные обобщенные наблюдаемые класса $\mathfrak{M}_c^{\mathbf{R},\mathbf{V}}(\mathbf{R})$ с точностью до калибровочного преобразования (3.7) эквивалентны наблюдаемой $\mathbf{M}_c$, определяемой соотношением (3.8), т. е.

$$\langle\psi|M_c(B)\varphi\rangle=\int\limits_{\mathbf{R}_+}\int\limits_{\mathbf{R}_+}\langle\psi(\lambda)|\varphi(\lambda')\rangle_{\mathcal{K}}\int\limits_B e^{i(\lambda'-\lambda)\tau}\frac{d\tau}{2\pi}. \quad (3.14)$$

Разложение единицы $\mathbf{M}_c$ является обобщенной спектральной мерой в смысле [2] максимального симметричного (но не самосо-

[1] На трудности с определением наблюдаемой времени в квантовой механике указывал Паули (см. Handbuch der Physik.— 1958.— 5/1.— С. 60—63).

пряженного) оператора

$$T = i\frac{d}{d\lambda}, \quad \mathscr{D}(T) = \{\psi : \psi \text{ абсолютно непрерывна}, \ \psi(0) = 0, \int\limits_{\mathbf{R}_+} \left\| \frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda)\right\|^2_{\mathscr{K}} d\lambda < \infty \Big\}.$$

Минимальное расширение Наймарка разложения единицы $\mathbf{M}_c$ в пространстве $\widetilde{\mathscr{H}} = L^2_{\mathscr{K}}(\mathbf{R})$ дается формулой, аналогичной (3.14), с заменой $\mathbf{R}_+$ на $\mathbf{R}$, и является спектральной мерой самосопряженного оператора $i\frac{d}{d\lambda}$в $L^2_{\mathscr{K}}(\mathbf{R})$.

3.6. Локализуемость. Пусть $\mathbf{W}$ — унитарное представление группы, описывающей кинематику данной квантовой системы (универсальной накрывающей группы Галилея в нерелятивистском или группы Пуанкаре в релятивистском случае), в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и пусть $\mathbf{U}$ — ограничение $\mathbf{W}$ на универсальную накрывающую G группы евклидовых преобразований $g : x \to Ax + b$, $x \in \mathbf{R}^3$. Система называется *локализуемой по Вайтману,* если в $\mathscr{H}$ существует ортогональное разложение единицы $\mathbf{E}$ на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R}^3)$ борелевских подмножеств координатного пространства $\mathbf{R}^3$, удовлетворяющее условию евклидовой ковариантности

$$U_g^* E(B)\, U_g = E(g^{-1}B); \ g \in G, \ B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^3).$$

При этом условии для любой области $B \subset \mathbf{R}^3$ найдется вектор состояния ψ такой, что $\langle\psi|E(B)\psi\rangle = 1$, т. е. вероятность обнаружения системы в области B равна 1. Для локализуемой системы определены совместимые наблюдаемые координат

$$Q_j = \int\int\int x_j E(dx_1 dx_2 dx_3); \ j = 1, 2, 3, \qquad (3.15)$$

ковариантные относительно евклидовых преобразований.

Используя то обстоятельство, что $(\mathbf{U}, \mathbf{E})$ — система импримитивности, можно доказать, что локализуемыми по Вайтману являются все массивные частицы и релятивистские безмассовые частицы с нулевой спиральностью. Безмассовые частицы с ненулевой спиральностью (фотон, нейтрино) оказываются нелокализуемыми (Ньютон, Вигнер, 1949, Вайтман, 1962). Такой вывод не согласуется с экспериментальной локализуемостью фотона; более того, как показал Хегерфельдт, такое понятие локализуемости приводит к противоречию с требованием причинности в релятивистской динамике (см., например, [55]). Эти трудности снимаются, если в определении локализуемости допускаются произвольные разложения единицы. Неортогональное разложение единицы $\mathbf{M}$, описывающее локализацию фотона, было указано, в частности, в работах Крауса (в сб. [159]), А. С. Холево [99]. Полная классификация соответствующих обобщенных систем импримитивности, при дополнительном условии ковариантности относительно преобразований подобия, включающая характеризацию крайних точек, дана Кастрижьяно [71]. Релятивистские безмассовые частицы оказываются приближенно локализуемыми в том смысле, что $\sup_{\|\psi\|=1} \langle\psi|M(B)\psi\rangle=1$ для любой области $B\subset\mathbf{R}^3$. Наблюдаемые координаты, определенные соотношением (3.15), являются самосопряженными, но неперестановочными операторами и поэтому не имеют совместной спектральной меры.

В ряде работ, обзор которых имеется в статьях Али, Пруговечки [55], развивалась идея стохастической локализуемости в фазовом пространстве. Результаты этих работ также указывают на то, что обобщенная статистическая модель квантовой механики дает возможность, по крайней мере, смягчить известные противоречия между релятивистской инвариантностью и нелокальностью квантовомеханического описания.

Глава 3

ЭВОЛЮЦИЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. Преобразования квантовых состояний и наблюдаемых

Динамика изолированной квантовой системы, описываемая однопараметрической группой унитарных операторов, обратима во времени. Эволюция открытой системы, подверженной внешним воздействиям, будь то процесс установления равновесия с окружением или взаимодействие с измерительным прибором, обнаруживает черты необратимости. В математическом плане такие необратимые изменения описываются вполне положительными отображениями.

1.1. Вполне положительные отображения. Пусть $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ — некоторая *C^*-алгебра* операторов, т. е. подпространство $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, замкнутое относительно алгебраических операций, инволюции и перехода к пределу по операторной норме (см., например, [32], [9]). Обозначим $\mathfrak{M}_n$ алгебру комплексных $n\times n$-матриц. Линейное отображение Φ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}(\mathscr{K})$ (где $\mathscr{K}$ гильбертово пространство) называется *положительным*, если из $X\in\mathfrak{A}$, $X\geqslant0$ следует $\Phi[X]\geqslant0$, и *вполне положительным*, если для любого $n\geqslant1$ отображение Φ_n C^*-алгебры $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{M}_n$ в C^*-алгебру $\mathfrak{B}(\mathscr{K})\otimes\mathfrak{M}_n$, определяемое формулой $\Phi_n(X\otimes Y)=\Phi_n(X)\otimes Y$, является положительным. Другими словами, для любой матрицы $[X_{jk}]_{j,\,k=1,\,\ldots,\,n}$ с элементами $X_{jk}\in\mathfrak{A}$, положительно определенной в том смысле, что $\sum_{j,\,k=1}^{n}\langle\varphi_j|X_{jk}\varphi_k\rangle\geqslant0$ для любого набора $\{\varphi_j\}\subset\mathscr{H}$, матрица $[\Phi(X_{jk})]_{j,\,k=1,\,\ldots,\,n}$ также является положительно определенной. Еще одно эквивалентное определение: для любых конечных наборов $\{X_j\}\subset\mathfrak{A}$ и $\{\psi_j\}\subset\mathcal{K}$

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \Phi[X_j^* X_k] \psi_k \rangle \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Для положительного отображения имеет место *неравенство Кэдисона—Шварца*

$$\Phi[X]^*\Phi[X] \leqslant \|\Phi\| \Phi[X^*X] \tag{1.2}$$

для всех $X\in\mathfrak{A}$ таких, что $X^*X=XX^*$. Если Φ вполне положительно, то это неравенство выполняется для всех $X\in\mathfrak{A}$. Пример положительного, но не вполне положительного отображения — транспонирование в $\mathfrak{M}_n$. Если Φ положительно и $\mathfrak{A}$, либо $\Phi(\mathfrak{A})$ коммутативны, то Φ вполне положительно. Таким образом, свойство полной положительности проявляется лишь в некоммутативной ситуации.

Отображение $\pi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\tilde{\mathcal{K}})$ называется *$*$-гомоморфизмом* (представлением), если оно сохраняет алгебраические операции и инволюцию.

Теорема (Стайнспринг, 1955). Пусть $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра с единицей и $\Phi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ — линейное отображение. Φ вполне положительно тогда и только тогда, когда оно допускает представление

$$\Phi[X]=V^*\pi[X]V, \tag{1.3}$$

где V — ограниченное линейное отображение из $\mathcal{K}$ в некоторое гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{K}}$, π — $*$-гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}(\tilde{\mathcal{K}})$.

Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности минимальное представление (1.3), характеризующееся свойством: подпространство $\{\pi[X]V\psi: X\in\mathfrak{A}, \psi\in\mathcal{K}\}$ плотно в $\tilde{\mathcal{K}}$.

Доказательство прямого утверждения представляет собой обобщение *конструкции Гельфанда—Наймарка—Сигала* (ГНС), которая соответствует случаю положительного линейного функционала на $\mathfrak{A}$ ($\dim\mathcal{K}=1$) [32], [9]. На алгебраическом тензорном произведении $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{K}$ определяется (псевдо-) скалярное произведение, такое что

$$\langle X\otimes\varphi | Y\otimes\psi\rangle = \langle\varphi|\Phi[X^*Y]\psi\rangle_{\mathcal{K}};\quad X, Y\in\mathfrak{A};\ \varphi, \psi\in\mathcal{K}.$$

Неотрицательность скалярного квадрата следует из (1.1). Пусть $\tilde{\mathcal{K}}$ гильбертово пространство, получающееся в результате факторизации и пополнения $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{H}$ по этому скалярному произведению. Соотношения

$$\pi[X](Y\otimes\psi) = XY\otimes\psi,$$
$$V\varphi = I\otimes\varphi$$

определяют переходом в $\tilde{\mathcal{K}}$ объекты V, π, удовлетворяющие соотношению (1.3).

Замечание. Если $\mathscr{X}$ — метризуемый компакт и $\mathbf{M}$ — разложение единицы в $\mathscr{H}$ на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathscr{B}(\mathscr{X})$, то отображение

$$f \to \int_{\mathscr{X}} f(x) M(dx); \quad f \in C(\mathscr{X})$$

C^*-алгебры $C(\mathscr{X})$ непрерывных комплексных функций на $\mathscr{X}$ в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ является (вполне) положительным. Теорема Стайнспринга в этом случае дает расширение Наймарка для $\mathbf{M}$, поскольку $*$-гомоморфизм $C(\mathscr{X})$ задается ортогональным разложением единицы.

Всякая алгебра фон Неймана $\mathfrak{B}$ является C^*-алгеброй с единицей. Положительное отображение Φ алгебры $\mathfrak{B}$ называется *нормальным*, если из $X_\alpha \uparrow X$ в $\mathfrak{B}$ следует $\Phi[X_\alpha] \uparrow \Phi[X]$.

Следствие ([117]). Всякое нормальное вполне положительное отображение $\Phi: \mathfrak{B}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ имеет вид

$$\Phi[X] = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^* X V_n, \tag{1.4}$$

где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* V_n$ сходится сильно в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

Доказательство. Если Φ нормально, то представление π в формуле (1.3) также можно считать нормальным. Известно, что всякое нормальное представление алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$ кратно единичному, т. е. $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$ и $\pi[X] = X \otimes I_0$, где $\mathscr{H}_0$ — некоторое гильбертово пространство, I_0 — единичный оператор в $\mathscr{H}_0$ (см., например, [78, гл. 9]). Пусть $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}_0$, тогда $V\psi = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \psi \otimes e_n$, а соотношение (1.3) переходит в (1.4).

Обзор свойств вполне положительных отображений имеется в статье Штермера в сборнике [85]. Андо и Чой [57] рассмотрели нелинейные вполне положительные отображения и установили для них обобщение теоремы Стайнспринга.

1.2. Операции, динамические отображения. Алгебра $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ как банахово пространство является сопряженным к пространству ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ (см. п. 1.1.1). Если Ψ — линейное отображение в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, положительное в том смысле, что $\Psi[T] \geqslant 0$, если $T \geqslant 0$, то Ψ ограничено (см., например, [78, гл. 2]) и поэтому имеет сопряженное отображение $\Phi = \Psi^*: \mathfrak{B}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, которое является линейным положительным нормальным отображением; более того, всякое Φ с такими свойствами является сопряженным к некоторому Ψ. Если Ψ положительно и, кроме того, $\mathrm{Tr}\, \Psi[T] \leqslant \mathrm{Tr}\, T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathscr{H})$, $T \geqslant 0$, то Ψ называется *операцией* (в пространстве состояний). Это равносильно тому, что $\Phi[\mathrm{I}]\leqslant \mathrm{I}$. Отображение Φ также называется операцией (в алгебре наблюдаемых).

В квантовой статистике операции описывают изменения состояний (наблюдаемых) открытой системы в результате эволюции или макроскопического воздействия, включая отбор по какому-либо признаку (например, по результату измерения) в соответствующем статистическом ансамбле. Если S — оператор плотности исходного состояния, то число $\mathrm{Tr}\,\Psi[S]$ интерпретируется как доля отобранных представителей ансамбля, а $\Psi[S]/\mathrm{Tr}\,\Psi[S]$ как оператор плотности, описывающей новое состояние отобранного ансамбля. Термин «операция» был введен в известной работе Хаага и Кастлера (1964), посвященной обоснованию квантовой теории поля. Базирующийся на понятии операции аксиоматический подход к квантовой механике был развит Дэвисом и Льюисом, Людвигом и другими авторами (см., например, [78], [125], [116], [85]).

В динамической теории особенно важны операции, переводящие состояние в состояние. Это равносильно тому, что $\mathrm{Tr}\,\Psi[T]=\mathrm{Tr}\,T$ для всех $T\in\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ или же $\Phi[\mathrm{I}]=\mathrm{I}$, где $\Phi=\Psi^*$. Если, кроме того, Φ — вполне положительно, то Ψ (или Φ) называется *динамическим отображением*[1]. Из теоремы Вигнера (п. 1.2.1) следует, что обратимые динамические отображения описываются формулами

$$\Psi[T]=UTU^*,\quad \Phi[X]=U^*XU,$$

где U — унитарный оператор в $\mathscr{H}$ (если U антиунитарный, то Φ не может быть линейным отображением). В общем случае динамические отображения описывают необратимые эволюции и являются некоммутативным аналогом марковских отображений в теории вероятностей. Мерой необратимости может служить *относительная энтропия* квантовых состояний

$$H(S_2|S_1)=\mathrm{Tr}\,S_1(\ln S_1-\ln S_2).$$

О свойствах относительной энтропии см. Линдблад [122], Верль [166], Петц [139]). Важнейшим является обобщенная H-теорема: для любого динамического отображения Ψ:

$$H(\Psi[S_2]|\Psi[S_1])\geqslant H(S_2|S_1).$$

Согласно следствию из п. 1.1, динамическое отображение допускает представление

$$\Psi[T]=\sum_{n=0}^{\infty}V_nTV_n^*,\quad \Phi[X]=\sum_{n=0}^{\infty}V_n^*XV_n,$$

где $\sum_{n=0}^{\infty}V_n^*V_n=\mathrm{I}$. Отсюда нетрудно получить

[1] На свойство полной положительности эволюции открытой системы было указано, в частности в работах [117], [39].

Следствие ([123]). Отображение $\Psi : \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ является динамическим тогда и только тогда, когда существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, состояние S_0 в $\mathcal{H}_0$ и унитарный оператор U в $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, такие что

$$\Psi[S] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} U (S \otimes S_0) U^*,$$

где $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ — частичный след в $\mathcal{H}_0$.

Таким образом, динамическое отображение расширяется до обратимой эволюции составной системы, включающей исходную открытую систему и «окружение», причем возможность такого расширения обусловлена свойством полной положительности.

1.3. Условные ожидания. Так называются отображения $\mathcal{E} : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, являющиеся идемпотентами ($\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$) с единичной нормой. $\mathcal{E}$ отображает $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ на C^*-подалгебру $\mathfrak{A} = \{X : X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}),\ \mathcal{E}[X] = X\}$. Если $\mathcal{E}$ нормально, то $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Условное ожидание *согласовано* с состоянием S, если $\mathrm{Tr}\, S\mathcal{E}[X] = \mathrm{Tr}\, SX$; $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Томияма показал, что условное ожидание является положительным отображением и обладает свойством

$$\mathcal{E}(XYZ) = X\mathcal{E}(Y)Z; \quad Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}); \quad X, Z \in \mathfrak{A},$$

которое включалось в первоначальное определение, данное Умегаки [158]. На самом деле всякое условное ожидание вполне положительно.

Общий критерий существования нормального условного ожидания в алгебрах фон Неймана дал Такесаки [157]. В случае $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ этот критерий имеет следующую формулировку. Пусть S — невырожденный оператор плотности, тогда с ним связана модулярная группа автоморфизмов $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\alpha_t[X] = S^{it} X S^{-it}; \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Условное ожидание $\mathcal{E}$ на подалгебру $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, согласованное с состоянием S, существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно α_t. В частности, это выполняется, если $[S, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{A}$.

Пример нормального условного ожидания (усреднение по подсистеме составной системы) был дан в п. 1.3.1. Приведем другой важный пример. Пусть $\{E_n\}$ — ортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}$. Тогда

$$\mathcal{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n X E_n \tag{1.5}$$

является нормальным условным ожиданием на подалгебру $\mathfrak{A}$ операторов вида (1.5), согласованным с любым состоянием, оператор плотности которого принадлежит $\mathfrak{A}$. Алгебру $\mathfrak{A}$ можно описать также соотношением $\mathfrak{A}=\{E_n;\ n=1, 2, \ldots\}'$, где $\mathfrak{M}'$ обозначает **коммутант** подмножества $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, т. е. совокупность всех ограниченных операторов, коммутирующих с операторами из $\mathfrak{M}$.

Обзор результатов об условных ожиданиях в алгебрах фон Неймана имеется в статьях Чеккини в сб. [141] и Петца в сб. [143]. В них же излагается некоторое обобщение понятия условного ожидания, принадлежащее Аккарди и Чеккини.

§ 2. Квантовые динамические полугруппы

2.1. Определение и примеры. Динамическая полугруппа является некоммутативным обобщением полугруппы переходных операторов в теории марковских случайных процессов. Возможны два эквивалентных способа задания динамической полугруппы — в пространстве состояний и в алгебре наблюдаемых системы. *Квантовой динамической полугруппой* в пространстве состояний называется семейство динамических отображений $\{\Psi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ банахова пространства ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, такое что

1) $\Psi_t\cdot\Psi_s=\Psi_{t+s};\ t, s\in\mathbf{R}_+$;

2) $\Psi_0=\mathrm{Id}$ (тождественное отображение);

3) $\{\Psi_t\}$ сильно непрерывна, т. е. $\lim\limits_{t\to 0}\|\Psi_t[T]-T\|_1=0$ для любого $T\in\mathfrak{T}(\mathscr{H})$.

Из общей теории полугрупп в банаховом пространстве (см., например, [9, гл. 3]) вытекает, что существует плотно определенный инфинитезимальный оператор

$$\mathscr{K}[T]=\lim_{t\to 0}\frac{\Psi_t[T]-T}{t}.$$

Если Ψ_t *непрерывна по норме,* т. е. $\lim\limits_{t\to 0}\|\Psi_t-\mathrm{Id}\|=0$, то $\mathscr{K}$ — всюду определенное, ограниченное отображение $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$. Если S_0 начальное состояние, то функция $S_t=\Psi_t[S_0]$ удовлетворяет квантовому марковскому *управляющему уравнению*[1])

$$\frac{dS_t}{dt}=\mathscr{K}[S_t], \tag{2.1}$$

которое является некоммутативным аналогом уравнения Колмогорова—Чепмена. В физических приложениях динамические полугруппы и возникают как решения марковских управляющих уравнений.

Динамическая полугруппа в алгебре наблюдаемых — это полугруппа динамических отображений $\{\Phi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, такая что $\Phi_0=\mathrm{Id}$ и $w^*-\lim\limits_{t\to 0}\Phi_t[X]=X$ для любого $X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

---

[1]) Английский термин — master equation.

Мы будем в основном рассматривать полугруппы, непрерывные по норме, т. е. такие, что $\lim\limits_{t\to 0}\|\Phi_t - \mathrm{Id}\| = 0$.

Пример ([116]). Пусть G — сепарабельная локально компактная группа, $g\to V_g$ — непрерывное унитарное представление G в $\mathscr{H}$ и $\{\mu_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — непрерывная сверточная полугруппа вероятностных мер на G (см., например, [13]). Соотношения

$$\Psi_t[S] = \int\limits_G V_g S V_g^* \mu_t(dg);\quad \Phi_t[X] = \int\limits_G V_g^* X V_g \mu_t(dg)$$

задают квантовые динамические полугруппы, соответственно, в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ и в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

В частности, пусть A — эрмитов оператор в $\mathscr{H}$, тогда выражение

$$\Psi_t[S] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-iAx} S e^{iAx},$$

соответствующее гауссовской сверточной полугруппе на $\mathbf{R}$, определяет динамическую полугруппу с инфинитезимальным оператором

$$\mathscr{K}[S] = ASA - A^2 \circ S. \qquad (2.2)$$

Если U — унитарный оператор, $\lambda > 0$, то

$$\Psi_t[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} U^n S U^{*n}$$

является динамической полугруппой, отвечающей пуассоновской сверточной полугруппе на $\mathbf{Z}$, с инфинитезимальным оператором

$$\mathscr{K}[S] = \lambda[USU^* - S]. \qquad (2.3)$$

Понятие динамической полугруппы было предложено Коссаковским [116] (см. также Дэвис [78]), однако без условия полной положительности, которое позднее было введено Линдбладом [123]. Многие физические примеры укладываются в общую схему квазисвободных динамических полугрупп, которые являются квантовым аналогом гауссовских марковских полугрупп. В случае ККС такие полугруппы характеризуются условием, что они переводят гауссовские состояния в гауссовские (см. п. 1.2.4). В статистической механике они описывают необратимую динамику открытых Бозе- или Ферми-систем с квадратичным взаимодействием (см. обзоры [27], [56]).

2.2. Инфинитезимальный оператор. Требование полной положительности налагает нетривиальные ограничения на инфинитезимальный оператор полугруппы. Описание инфинитезимального оператора непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы было получено Линдбладом и, независимо в случае $\dim\mathscr{H} < \infty$, Горини, Коссаковским и Сударшаном.

Теорема ([123]). Для того чтобы ограниченное отображение $\mathcal{K}$ пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ было инфинитезимальным оператором непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{K}[S] = -i[H, S] + \sum_{j=1}^{\infty} (L_j S L_j^* - L_j^* L_j \circ S), \tag{2.4}$$

где H, $L_j \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $H = H^*$ и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} L_j^* L_j$ сходится сильно.

Первое слагаемое в (2.4) отвечает обратимой эволюции с гамильтонианом H, а второе задает диссипативные члены. Оператор $\sum_{j=1}^{\infty} L_j^* L_j$ связан со скоростью диссипации. Переходя к формулировке в алгебре наблюдаемых, имеем для инфинитезимального оператора $\mathcal{L} = \mathcal{K}^*$ полугруппы $\Phi_t = \Psi_t^*$

$$\mathcal{L}[X] = i[H, X] + \sum_{j=1}^{\infty} (L_j^* X L_j - L_j^* L_j \circ X). \tag{2.5}$$

В основе доказательства теоремы лежат следующие два факта [123], [84].

Предложение. Пусть $\mathcal{L}$ — ограниченное отображение $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя, такое что $\mathcal{L}[I] = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\exp t\mathcal{L}$ вполне положительно для всех $t \in \mathbf{R}_+$;

2) $\mathcal{L}$ *вполне диссипативно*, т. е. $\mathcal{L}[X^*] = \mathcal{L}[X]^*$ и

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | (\mathcal{L}[X_j^* X_k] - X_j^* \mathcal{L}[X_k] - \mathcal{L}[X_j]^* X_k) \psi_k \rangle \geqslant 0$$

для любых конечных наборов $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$, $\{X_j\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$;

3) $\mathcal{L}[X^*] = \mathcal{L}[X]^*$ и $\mathcal{L}$ *условно вполне положительно* т. е. из $\sum_j X_j \psi_j = 0$ следует

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \mathcal{L}[X_j^* X_k] \psi_k \rangle \geqslant 0.$$

Это утверждение родственно теореме Шенберга в теории условно положительно определенных функций (см., например, [138], а также п. 4.2.4).

Теорема. Пусть $\mathcal{L}$ — ограниченное отображение $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя, такое что $\mathcal{L}[I] = 0$. Для того чтобы $\mathcal{L}$ было вполне диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{L}[X] = \Phi[X] + K^* X + XK, \tag{2.6}$$

где Φ — вполне положительное отображение, $K \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Соотношение (2.5) получается тогда из формулы (1.3) для нормального вполне положительного отображения.

Доказательство формулы (2.6) может быть связано с когомологиями алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Конструкция типа ГНС сопоставляет вполне диссипативному отображению $\mathscr{L}$ линейное отображение B алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в пространство ограниченных операторов из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$ (другое гильбертово пространство), так что

$$\mathscr{L}[X^*Y]-X^*\mathscr{L}[Y]-\mathscr{L}[X]^*Y=B[X]^*B[Y].$$

Более того, отображение B оказывается коциклом некоторого представления (*-гомоморфизма) π алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{B}(\mathscr{K})$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$B[XY]=\pi[X]B[Y]+B[X]Y;\ X,\ Y\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

Основную трудность представляет доказательство того, что всякий коцикл тривиален, т. е. имеет вид $B[X]=\pi[X]R-RX$, где R — ограниченный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$. Кристенсен и Эванс [76] обобщили этот подход и получили аналог представления (2.6) для произвольной C^*-алгебры операторов.

2.3. Свойство консервативности. Проблема характеризации инфинитезимального оператора динамической полугруппы без требования непрерывности по норме трудна и остается открытой. Нетривиальной является и задача построения динамической полугруппы по формальному выражению типа (2.5), где H, L_j — неограниченные операторы. Дэвис [79] указал довольно общие условия, при которых с формальным выражением (2.4) ассоциируется сильно непрерывная полугруппа вполне положительных отображений $\{\Phi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$, такая что

$$\Phi_t[\mathrm{I}]\leqslant\mathrm{I},$$

и являющаяся аналогом феллеровского минимального решения в классической теории марковских процессов. Если минимальная полугруппа *консервативна* в том смысле, что $\Phi_t[\mathrm{I}]=\mathrm{I}$, то она является единственной динамической полугруппой, инфинитезимальный оператор которой является замыканием оператора (2.5). Неконсервативность, как и в классической теории, связана с возможностью «ухода на бесконечность» за конечное время.

Пример 1 ([79]). Пусть $\mathscr{H}=l^2$ — гильбертово пространство последовательностей $\{\psi_n;\ n\geqslant 0\}$ и «операторы рождения-уничтожения» a^*, a определены соотношениями $(a^*\psi)_n=\sqrt{n}\psi_{n-1}$, $(a\psi)_n=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$. Рассмотрим управляющее уравнение

$$\frac{dS_t}{dt}=LS_tL^*-L^*L\circ S_t,$$

где $L=a^{*2}$, $L^*=a^2$, а S_t — диагональный оператор плотности в l^2. Диагональные элементы $p_n(t)$; $n=0, 1, \ldots,$ оператора S_t

удовлетворяют уравнению чистого рождения

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(n+2)(n+1)\,p_n(t) + n(n-1)\,p_{n-2}(t),$$

минимальное решение которого неконсервативно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(t) < 1$ при $t > 0$.

Дэвис дал достаточные условия консервативности, пригодные для класса моделей квантовой диффузии. Оригинальные общие условия консервативности, основанные на аналогиях с классической теорией марковских процессов, предложил А. М. Чеботарев в [49], [35]. Рассмотрим для простоты случай формального инфинитезимального оператора

$$\mathcal{L}[X] = L^*XL + K^*X + XK,$$

где L, L^*, K, K^* — операторы, имеющие плотную общую инвариантную область определения $\mathcal{D}$. Предполагается, что $\mathcal{D}$ — существенная область определения для операторов K, K^*, которые являются инфинитезимальными операторами сильно непрерывных сжимающих полугрупп в $\mathcal{H}$, и что $K = -\frac{1}{2} L^*L + iH$, где H — самосопряженный оператор. Условия консервативности имеют вид

$$[L, L^*] \geqslant -c\mathrm{I}, \quad i[L^*L, H] \geqslant -cL^*L,$$

где $c > 0$ и неравенства понимаются как неравенства для соответствующих форм, определенных на $\mathcal{D}$. Представление о диапазоне применимости этих условий дают два примера.

Пример 2. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$, Q — оператор умножения на x; $P = i^{-1}\frac{d}{dx}$, $a(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим формальное выражение

$$\mathcal{L}[X] = Pa(Q)\,Xa(Q)\,P - Pa(Q)^2P \circ X. \qquad (2.7)$$

Если X — оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$, то $\mathcal{L}[X]$ есть оператор умножения на $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(a(x)^2\frac{df}{dx}\right)$, т. е. совпадает с инфинитезимальным оператором симметричной диффузии на коммутативной подалгебре $L^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathfrak{B}(L^2(\mathbf{R}))$.

Условия А. М. Чеботарева выполняются, если $\sup\limits_x a(x)\,a''(x) < \infty$.

П р и м е р 3. В обозначениях предыдущего примера рассмотрим выражение

$$\mathscr{L}[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(d\xi)\, c(Q,\xi)^* V_\xi^* X V_\xi c(Q,\xi)-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(d\xi)\,|c(Q,\xi)|^2\circ X, \qquad (2.8)$$

где $V_x=\exp(-ixP)$, m — вероятностная мера на $\mathbf{R}$, c — комплексная измеримая функция, такая что $\varkappa(x)\equiv\int m(d\xi)\,|c(x,\xi)|^2<\infty$ для всех x. На коммутативной подалгебре $L^\infty(\mathbf{R})$ (2.8) совпадает с инфинитезимальным оператором скачкообразного марковского процесса в $\mathbf{R}$ с интенсивностью скачков $\varkappa(x)$. Достаточные условия консервативности выполняются, если

$$\sup_x \int m(x\,|\,d\xi)\,[\varkappa(x+\xi)-\varkappa(x)]<\infty,$$

где $m(x|d\xi)=m(d\xi)\,|c(x,\ \xi)|^2/\varkappa(x)$ — условные вероятности скачков.

Полученные в [49] условия консервативности позволяют рассмотреть также суммы выражений типа (2.7), (2.8) и гамильтоновых членов вида $i[H, X]$ с неограниченным H.

2.4. Ковариантные эволюции. Пусть $g\to V_g$ — представление в $\mathscr{H}$ группы G, описывающей симметрии окружения открытой квантовой системы. Динамическая полугруппа $\{\Psi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ называется *ковариантной*, если

$$\Psi_t[V_g S V_g^*]=V_g\Psi_t[S]V_g^*$$

для всех $S\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, $g\in G$, $t\in\mathbf{R}_+$. Структура ковариантных вполне положительных отображений рассмотрена в [149]. В конечномерном случае получена достаточно полная классификация инфинитезимальных операторов динамических полугрупп, ковариантных относительно групп пространственных симметрий [93], [1].

П р и м е р. Рассмотрим эволюцию (2.1) открытой системы со спином 1/2 ($\dim\mathscr{H}=2$; см. п. 1.1.6), ковариантную относительно действия группы SO(2), соответствующей аксиально симметричному окружению. Представление имеет вид $\varphi\to e^{i\varphi\sigma_3}$, где $\varphi\in[0, 2\pi)$. Общий вид инфинитезимального оператора ковариантной динамической полугруппы

$$\mathscr{L}[S]=-i[H,S]+\sum_{j=-1}^{1} c_j(L_jSL_j^*-L_j^*L_j\circ S), \qquad (2.9)$$

где $c_j\geqslant 0$, $H=\frac{1}{2}\omega_0\sigma_3$, $L_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1-i\sigma_2)$, $L_0=\sigma_3$, $L_1=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1+i\sigma_2)$. Полагая $S_t=S(\mathbf{a}_t)$, для вектора $\mathbf{a}_t$ имеем уравнение Блоха

$$\frac{d\mathbf{a}_t}{dt}=\begin{bmatrix} -T_{\perp}^{-1} & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & -T_{\perp}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & T_{\parallel}^{-1} \end{bmatrix}\mathbf{a}_t+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_\infty/T_{\parallel} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

где $T_{\perp}^{-1}=2c_0+(c_1+c_{-1})$, $T_{\parallel}^{-1}=2(c_1+c_{-1})$, $c_\infty=2T_{\parallel}(c_1-c_{-1})$. Уравнение (2.10) описывает релаксацию спина в аксиально-симметричном магнитном поле. Параметр $T_{\parallel}$ $(T_{\perp})$ имеет смысл времени продольной (поперечной) релаксации. При $t\to+\infty$ $\mathbf{a}_t\to\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_\infty \end{bmatrix}$, так что S_t стремится к предельному состоянию

$$S_\infty=\frac{1}{2}(I+c_\infty\sigma_3).$$

Инфинитезимальный оператор (2.9) вполне диссипативен, что налагает нетривиальные ограничения на физические параметры эволюции. Именно, $2T_{\perp}^{-1}-T_{\parallel}^{-1}=2c_0\geqslant 0$, откуда $2T_{\parallel}\geqslant \geqslant T_{\perp}$ [93].

В серии работ, обзор которых имеется в [83], описаны инфинитезимальные операторы инвариантных динамических полугрупп (не обязательно непрерывных по норме), действующих тождественно на алгебре инвариантных элементов.

2.5. Эргодические свойства. Если Φ — динамическое отображение, то семейство $\{\Phi^k;\ k=0, 1, \dots\}$ можно рассматривать как динамическую полугруппу с дискретным временем. Асимптотические свойства таких полугрупп при $k\to\infty$ являются нетривиальным обобщением эргодической теории для классических цепей Маркова. Свойство полной положительности используется при этом лишь постольку, поскольку оно влечет неравенство Кэдисона—Шварца (1.2), а эргодические теоремы для средних верны для положительных отображений.

В большинстве работ в той или иной форме присутствует предположение, что Φ имеет точное нормальное инвариантное состояние, т. е. состояние с невырожденным оператором плотности S_∞, такое, что $\operatorname{Tr} S_\infty\Phi[X]=\operatorname{Tr} S_\infty X$ для всех $X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Имеет место эргодическая теорема для средних

$$w^*-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\Phi^k[X]=\mathscr{E}_\infty[X], \tag{2.11}$$

где $\mathscr{E}_\infty$ — условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{A}_\infty$ инвариантных элементов Φ. В разной степени общности этот результат был получен Я. Г. Синаем, Е. А. Морозовой и Н. Н. Ченцовым, Кюммерером и другими авторами (см. обзор [27]). Соотношение (2.11) можно рассматривать как обобщение закона больших чисел. Много внимания было уделено распространению теорем типа (2.11) на неограниченные операторы и изучению некоммутативного аналога сходимости почти наверное в алгебрах фон Неймана. Подробный обзор этих результатов дан В. В. Аншелевичем и М. Ш. Гольдштейном в [34], Петцем в [141], Яйте [111].

Отображение Φ *неприводимо* (Дэвис, Эванс), если не существует проектора $P \neq 0$, I, такого что $\Phi[P]=P$. Последнее равенство равносильно тому, что подалгебра операторов вида PXP; $P \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ инвариантна относительно Φ. Неприводимость эквивалентна единственности инвариантного состояния S_∞ и одномерности подалгебры $\mathfrak{A}_\infty$. При этом в формуле (2.11) $\mathscr{E}_\infty[X] = (\mathrm{Tr}\, S_\infty X) \cdot \mathrm{I}$. Для неприводимости отображения Φ, записанного в виде (1.4), необходимо и достаточно, чтобы $\{V_n;\ n=1, 2, \dots$ $\dots\}'' = \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, где $\mathfrak{A}'' = (\mathfrak{A}')'$. Для неприводимого отображения имеет место аналог теоремы Перрона—Фробениуса, отвечающий разложению замкнутого класса состояний цепи Маркова на подклассы (Эванс, Хег—Крон, Альбеверио; см. обзор [27]). Случай $\dim \mathscr{H} < \infty$ детально рассмотрен также в книге Т. А. Сарымсакова [31].

Пусть теперь $\{\Phi_t;\ t \in \mathbf{R}_+\}$ — квантовая динамическая полугруппа, имеющая точное нормальное инвариантное состояние S_∞. Для нее также имеет место эргодическая теорема для средних (см. обзоры [27], [94]). Неприводимые полугруппы изучали Дэвис, Эванс, Шпон, Фриджерио (см. [78], [152]). Необходимое и достаточное условие неприводимости динамической полугруппы с инфинитезимальным оператором (2.5) состоит в том, что

$$\{H,\ L_j,\ L_j^*;\ j=1,\ 2,\ \dots\}' = \mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

Для неприводимых квантовых динамических полугрупп с непрерывным временем имеет место существенное усиление эргодической теоремы (см. [94])

$$w^* - \lim_{t \to +\infty} \Phi_t[X] = (\mathrm{Tr}\, S_\infty X) \cdot \mathrm{I}.$$

Этот факт не переносится на динамические полугруппы в произвольных алгебрах фон Неймана. Обобщения на этот случай других асимптотических свойств, спектральной теории и теоремы Перрона—Фробениуса подробно рассмотрены в обзоре Гроха [94].

Основные физические примеры эргодических динамических полугрупп относятся к классу квазисвободных полугрупп, для которых эргодичность устанавливается непосредственно (см. обзор [27]).

2.6. Расширения динамических полугрупп. С точки зрения статистической механики закономерен вопрос — насколько понятие динамической полугруппы согласуется с более фундаментальным законом обратимой эволюции для изолированной системы. В физических приложениях управляющее уравнение (2.1) получается при рассмотрении взаимодействия квантовой системы с окружением в марковском приближении (пределы слабого или сингулярного взаимодействия). Строгое обоснование такого приближения требует достаточно громоздких оценок даже для простых моделей. Имеется ряд обзоров [152], [56], [93], [27], [52], в которых эта проблема квантовой статистической механики получила всестороннее освещение, и лучшее, что здесь можно предложить — это обратиться к одному из этих обзоров.

В принципиальном плане представляет интерес также постановка обратной задачи о расширении динамической полугруппы до группы автоморфизмов, т. е. представление марковской динамики через обратимую динамику открытой системы, взаимодействующей с окружением. Возможность такого расширения обусловлена, главным образом, свойством полной положительности (Дэвис; Эванс, Льюис; см. [84]).

Теорема. Пусть $\{\Psi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — непрерывная по норме динамическая полугруппа в пространстве состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Найдутся гильбертово пространство $\mathscr{H}_0$, состояние S_0 в $\mathscr{H}_0$ и сильно непрерывная группа унитарных операторов $\{U_t;\ t\in\mathbf{R}\}$ в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$, такие что

$$\Psi_t[S]=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_0} U_t(S\otimes S_0)U_t^*;\quad S\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}),$$

для всех $t\in\mathbf{R}_+$.

В п. 5.2.2 будет приведена явная конструкция расширения, допускающая прозрачное динамико-статистическое истолкование. Следует отметить, что одна и та же динамическая полугруппа может иметь много неэквивалентных расширений (даже если требовать минимальность расширения). Дополнительный свет на структуру возможных расширений проливает понятие квантового случайного процесса. Согласно определению Аккарди, Фриджерио и Льюиса (1980), *квантовый случайный процесс* задается тройкой $(\mathfrak{A},\ (j_t),\ \varphi)$, где $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра, $(j_t)_{t\in\mathbf{R}}$ — семейство $*$-гомоморфизмов некоторой фиксированной C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, φ — состояние на $\mathfrak{A}$. При определенных условиях регулярности квантовый случайный процесс однозначно с точностью до эквивалентности восстанавливается по *корреляционным ядрам*

$$w^{t}{}_{1,\ldots,t_n}(X_1,\ \ldots,\ X_n;\ Y_1,\ \ldots,Y_n)=$$
$$=\varphi(j_{t_1}(X_1)^*\ldots j_{t_n}(X_n)^*\,j_{t_n}(Y_n)\ldots j_{t_1}(Y_1))$$

(некоммутативный аналог теоремы А. Н. Колмогорова о продолжении системы конечномерных распределений) (см. сборник [20]). В классическом случае $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ коммутативные алгебры измеримых ограниченных функций, соответственно, на пространстве элементарных исходов Ω и на фазовом пространстве системы E, (j_t) определяется семейством случайных величин на Ω со значениями в E, а φ — функционал математического ожидания, соответствующий вероятностной мере на Ω.

С квантовым случайным процессом связываются семейства подалгебр «прошлого», «настоящего» и «будущего»

$$\mathfrak{A}_{t]}=\bigvee_{s\leqslant t} j_s(\mathfrak{B}),\quad \mathfrak{A}_t=j_t(\mathfrak{B}),\quad \mathfrak{A}_{[t}=\bigvee_{s\geqslant t} j_s(\mathfrak{B}).$$

Процесс называется *марковским*, если существует согласованное с φ семейство условных ожиданий $(\mathscr{E}_{t]})_{t\in\mathbf{R}}$ из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_{t]}$, такое что

$$\mathscr{E}_{t]}(\mathfrak{A}_{[t})\subseteq\mathfrak{A}_t,$$

ковариантным марковским, если дополнительно существует группа $*$-автоморфизмов $(\alpha_t)_{t\in\mathbf{R}}$ алгебры $\mathfrak{A}$, такая что $\alpha_t(\mathfrak{A}_{s]})=\mathfrak{A}_{t+s]}$; $t, s\in\mathbf{R}$, и $\alpha_t\cdot\mathscr{E}_{s]}\cdot\alpha_{-t}=\mathscr{E}_{t+s]}$, и *стационарным марковским*, если φ инвариантно относительно (α_t). Для ковариантного марковского процесса соотношение

$$\Phi_t[X]=j_t^{-1}\mathscr{E}_{t]}j_t[X] \tag{2.12}$$

при выполнении некоторых условий непрерывности определяет динамическую полугруппу в $\mathfrak{B}$. Обратно, всякая непрерывная по норме квантовая динамическая полугруппа $\{\Phi_t\}$ расширяется до ковариантного марковского процесса, удовлетворяющего соотношению (2.12). Если же динамическая полугруппа удовлетворяет условию детального равновесия, то она расширяется до стационарного марковского квантового случайного процесса (Горини, Фриджерио). *Условие детального равновесия* относительно состояния S для полугруппы $\{\Phi_t\}$ в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ означает, что существует другая динамическая полугруппа $\{\Phi_t^+\}$ в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, такая что

$$\operatorname{Tr} S\Phi_t^+[X]Y=\operatorname{Tr} SX\Phi_t[Y];\quad X,\ Y\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}),$$

с инфинитезимальным оператором $\mathscr{L}^+$, удовлетворяющим соотношению

$$\mathscr{L}[X]-\mathscr{L}^+[X]=2i[H,\ X],$$

где $H\in\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$ (состояние S с необходимостью оказывается стационарным для Φ_t и Φ_t^+). До сих пор отсутствует полное описание динамических полугрупп, допускающих стационарные марковские расширения.

Фриджерио и Маассен [87] указали широкий класс полугрупп, не удовлетворяющих условию детального равновесия, но допускающих расширение с помощью «квантового пуассоновского процесса». Систематическое исследование стационарных марковских расширений предпринял Кюммерер [119]. Он установил прямую связь между эргодическими свойствами динамического отображения (неприводимость, слабое, сильное перемешивание) и его минимального стационарного марковского расширения. Кюммерер и Маассен [120] показали, что квантовая динамическая полугруппа в конечномерном гильбертовом пространстве допускает стационарное марковское расширение с помощью классического случайного процесса тогда и только тогда, когда ее инфинитезимальный оператор имеет вид

$$\mathscr{L}[X]=i[H, X]+\sum_{s=1}^{k}(A_sXA_s-A_s^2\circ X)+$$
$$+\sum_{r=1}^{l}\lambda_r(U_r^*XU_r-X), \tag{2.13}$$

где A_s — эрмитовы, U_r — унитарные операторы, $\lambda_r>0$. Оператор (2.13) является суммой выражений (2.2), (2.3), соответствующих гауссовским и пуассоновским полугруппам, а расширение получается с помощью случайного блуждания на группе автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}_n$.

Неоднозначность расширения динамической полугруппы до случайного процесса связана с тем, что знание полугруппы $\{\Phi_t\}$ позволяет восстановить лишь хронологически-упорядоченные корреляционные ядра

$$w_{t_1,\ldots,t_n}(X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n)=$$
$$=\varphi_0(\Phi_{t_1}[X_1^*\Phi_{t_2-t_1}[\ldots\Phi_{t_n-t_{n-1}}[X_n^*Y_n]\ldots]Y_1]),$$

для которых $0<t_1<\ldots<t_n$ (здесь $\varphi_0=\varphi|\mathfrak{A}_0$ — начальное состояние). В классической теории вероятностей корреляционные ядра зависят от времен $t_1, \ldots, t_n$ симметричным образом; известная конструкция Колмогорова—Даниэля однозначно сопоставляет полугруппе переходных вероятностей марковский процесс, являющийся ее минимальным расширением до группы временных сдвигов в пространстве траекторий. Определение квантового случайного процесса, основанное только на хронологически-упорядоченных ядрах, было предложено Линдбладом [124], некоммутативные обобщения конструкции Колмогорова—Даниэля рассматривались Винсент—Смитом [161], В. П. Белавкиным [3], Соважо [146].

Алицки и Мессер установили существование и единственность решения класса нелинейных кинетических уравнений, в частности, квантового уравнения Больцмана:

$$\frac{dSt}{d_t}=\mathrm{Tr}_{(2)}W(S_t\otimes S_t)W^*-(\mathrm{Tr}S_t)\cdot S_t, \tag{2.14}$$

где W — унитарный «оператор парных столкновений» в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}$, $\mathrm{Tr}_{(2)}$ — частичный след по второму множителю в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}$. Отвечая на вопрос, поставленный Стритером в [143], Фриджерио и Аратари построили расширение «нелинейной квантовой динамической полугруппы», определенной уравнением (2.14) по унитарной эволюции в квантовой системе, состоящей из бесконечного числа частиц с парными взаимодействиями (квантовое обобщение «карикатуры Мак—Кина» классического уравнения Больцмана). В. П. Белавкин [4] дал конструкцию квантового ветвящегося процесса, в котором одночастичная динамика описывается полугруппой нелинейных вполне положительных отображений общего вида.

Глава 4

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 1. Статистика последовательных измерений

1.1. Понятие инструмента. Рассмотрим последовательное измерение двух величин X, Y, принимающих значения, соответственно, в множествах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, которое осуществляется над системой в состоянии S. Совместная вероятность того, что исход первого измерения x попадает в множество A, а исход второго y попадает в B (где $A\subset\mathscr{X}$, $B\subset\mathscr{Y}$) есть

$$\mu_S(A;\ B)=\mu_S(A)\,\mu_S(B\,|\,A), \tag{1.1}$$

где $\mu_S(A)=\mu_S(A;\ \mathscr{Y})$ — вероятность того, что $x\in A$, а $\mu_S(B|A)$ — соответствующая условная вероятность. Обозначим S_A состояние системы после первого измерения (оно зависит также от S, но не зависит от B). Тогда, согласно (2.1.4),

$$\mu_S(B\,|\,A)=\operatorname{Tr} S_A M(B), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{M}$ — разложение единицы, отвечающее величине Y. Из (1.1), (1.2) видно, что функция множеств

$$\mathscr{M}(A)[S]=\mu_S(A)\,S_A$$

должна быть σ-аддитивна по A. Это мотивирует следующее определение (Дэвис и Льюис, 1970).

Пусть $\mathscr{X}$ — множество с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathscr{B}(\mathscr{X})$. *Инструментом* (в пространстве состояний) со значениями в $\mathscr{X}$ называется функция множеств $\mathscr{M}$, заданная на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ и удовлетворяющая условиям:

1) $\mathscr{M}(B)$ — операция для любого $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$;

2) $\mathscr{M}(\mathscr{X})$ — динамическое отображение, т. е. $\operatorname{Tr}\mathscr{M}(\mathscr{X})[T]=\operatorname{Tr} T$ для всех $T\in\mathfrak{T}(\mathscr{H})$;

3) если $\{B_j\}\subset\mathscr{B}(\mathscr{X})$ — конечное или счетное разбиение множества $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$ на попарно непересекающиеся подмножества, то

$$\mathscr{M}(B)[T]=\sum_j\mathscr{M}(B_j)[T];\quad T\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}),$$

где ряд сходится по норме $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$.

Постулируется, что если S — оператор плотности, описывающий состояние системы перед измерением, то вероятность события, что исход измерения попадает в множество $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$, равна

$$\mu_S(B)=\mathrm{Tr}\,\mathscr{M}(B)[S], \tag{1.3}$$

а состояние доли статистического ансамбля, в которой зарегистрировано это событие, дается оператором плотности

$$S_B=\mathscr{M}(B)[S]/\mathrm{Tr}\,\mathscr{M}(B)[S] \tag{1.4}$$

(при условии, что $\mu_S(B)>0$). В частности, изменение состояния всего статистического ансамбля задается динамическим отображением $S\to\mathscr{M}(\mathscr{X})[S]$.

Переходя к сопряженным отображениям $\mathscr{N}(B)=\mathscr{M}(B)^*$, получаем формулировку в алгебре наблюдаемых: инструмент — это функция множеств $\mathscr{N}$ на $\mathscr{B}(\mathscr{X})$, такая что

1) $\mathscr{N}(B)$ — положительное нормальное отображение $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в себя для любого $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$;

2) $\mathscr{N}(\mathscr{X})[I]=I$;

3) если $\{B_j\}\subset\mathscr{B}(\mathscr{X})$ — разбиение множества B, то

$$\mathscr{N}(B)[X]=\sum_j\mathscr{N}(B_j)[X];\ X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}),$$

где ряд сходится w^*-слабо.

Каждому инструменту отвечает обобщенная наблюдаемая

$$M(B)=\mathscr{N}(B)[I];\ \ B\in\mathscr{B}(\mathscr{X}), \tag{1.5}$$

такая, что

$$\mu_S(B)=\mathrm{Tr}\,SM(B).$$

Озава [135] показал, что для любого инструмента $\mathscr{M}$ и любого состояния S существует семейство *апостериорных состояний* $\{S_x;\ x\in\mathscr{X}\}$, т. е. операторов плотности S_x, таких что:

1) функция $x\to\mathrm{Tr}\,S_xY$ μ_S-измерима для любого $Y\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$;

2) $\mathrm{Tr}\,\mathscr{M}(B)[S]Y=\int\limits_B(\mathrm{Tr}\,S_xY)\,\mu_S(dx)$.

Оператор плотности S_x описывает состояние доли статистического ансамбля, в которой исход измерения равен x, а величина $\mathrm{Tr}\,S_xY=\mathsf{E}_S(Y|x)$ есть *апостериорное среднее* наблюдаемой Y при условии, что исход предыдущего измерения равен x.

Инструмент $\mathscr{M}$ (или $\mathscr{N}$) называется *вполне положительным*, если отображения $\mathscr{N}(B)$; $B\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$, вполне положительны.

Пример 1. Пусть $A=\sum_i x_iE_i$ — вещественная наблюдаемая с чисто точечным спектром. Соотношение

$$\mathscr{M}(B)[S]=\sum_{i:x_i\in B}E_iSE_i \tag{1.6}$$

определяет вполне положительный инструмент со значениями в $\mathbf{R}$, соответствующий *проекционному постулату* фон Неймана, который описывает предельно точное измерение наблюдаемой A.

Распределение вероятностей в состоянии S есть

$$\mu_S(B) = \sum_{i: x_i \in B} \mathrm{Tr} S E_i,$$

а апостериорные состояния даются формулой

$$S_i = E_i S E_i / \mathrm{Tr}\, S E_i. \tag{1.7}$$

Пример 2. Пусть A — вещественная наблюдаемая и $p(x)$ — плотность распределения вероятностей на $\mathbf{R}$, такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx = \sigma^2 < \infty. \tag{1.8}$$

Вполне положительный инструмент

$$\mathscr{M}(B)[S] = \int_B \sqrt{p(x\mathrm{I} - A)}\, S \sqrt{p(x\mathrm{I} - A)}\, dx \tag{1.9}$$

описывает неточное измерение наблюдаемой A со случайной ошибкой, распределенной с плотностью $p(x)$. В самом деле

$$\mu_S(B) = \int_B \mathrm{Tr} S p(x\mathrm{I} - A)\, dx =$$

$$= \int_B \int p(x - y)\, \mu_S^A(dy)\, dx,$$

где μ_S^A — распределение вероятностей наблюдаемой A в состоянии S. Апостериорные состояния суть

$$S_x = \frac{\sqrt{p(x\mathrm{I} - A)}\, S \sqrt{p(x\mathrm{I} - A)}}{\mathrm{Tr}\, S p(x\mathrm{I} - A)}.$$

Чем меньше σ^2, т. е. чем ближе $p(x)$ к δ-функции, тем точнее измерение наблюдаемой A. Для наблюдаемой A с чисто точечным спектром случай $\sigma^2 = 0$ соответствует примеру 1; для наблюдаемой с непрерывным спектром возникают принципиальные трудности, не позволяющие непосредственно обобщить проекционный постулат на этот случай (см. далее п. 1.3).

1.2. Представление вполне положительного инструмента. Многие реальные процессы укладываются в следующую схему косвенного измерения: рассматриваемая система взаимодействует с «пробной» системой, после чего над пробной системой производится прямое измерение некоторой квантовой наблюдаемой. Пусть $\mathscr{H}_0$ — гильбертово пространство пробной системы, S_0 — оператор плотности, описывающий ее исходное состояние, U — унитарный оператор в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, задающий взаимодействие и E_0 — ортогональное разложение единицы в $\mathscr{H}_0$, соответствующее измеряемой величине. Распределение вероятностей такого измерения дается формулой

$$\mu_S(B) = \mathrm{Tr}\, U (S \otimes S_0) U^* (\mathrm{I} \otimes E_0(B)); \quad B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}),$$

где S — оператор плотности системы перед измерением. Оно может быть записано в виде (1.3), где

$$\mathcal{M}(B)[S] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} U(S \otimes S_0) U^* (\mathrm{I} \otimes E_0(B)) \tag{1.10}$$

— вполне положительный инструмент в пространстве состояний системы $\mathcal{H}$ (здесь $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ — частичный след по $\mathcal{H}_0$). Верно и обратное.

Теорема (Озава, [134]). Пусть $\mathcal{M}$ — вполне положительный инструмент со значениями в $\mathcal{X}$. Найдется гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, оператор плотности S_0 в $\mathcal{H}_0$, унитарный оператор U в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ и ортогональное разложение единицы E_0 в $\mathcal{H}_0$, такие что для любого оператора плотности S в $\mathcal{H}$ имеет место формула (1.10).

В основе этой теоремы лежит следующая комбинация теоремы Наймарка и теоремы Стайнспринга: если $\mathcal{N}$ — вполне положительный инструмент (в алгебре наблюдаемых), то существует гильбертово пространство $\mathcal{K}$, изометрический оператор V из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, ортогональное разложение единицы E в $\mathcal{K}$ и нормальный $*$-гомоморфизм π из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$, такие что $[E(B), \pi[X]] = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и

$$\mathcal{N}(B)[X] = V^* E(B) \pi[X] V. \tag{1.11}$$

Пространство $\mathcal{K}$ превращается в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ с помощью рассуждений, которые были использованы при доказательстве формулы (3.1.4).

Из (1.11) выводится аналог представления (3.1.4) для вполне положительного инструмента

$$\mathcal{N}(B)[X] = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)^* X V_n(x) \mu(dx),$$

где μ—σ-конечная мера на $\mathcal{X}$, а $V_n(x)$ — μ-измеримые функции на $\mathcal{X}$ со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, такие что

$$\int_{\mathcal{X}} \sum_{k=1}^{\infty} V_n(x)^* V_n(x) \mu(dx) = \mathrm{I}.$$

Соответствующий инструмент в пространстве состояний имеет вид

$$\mathcal{M}(B)[S] = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) S V_n(x)^* \mu(dx). \tag{1.12}$$

При этом распределение вероятностей в состоянии S дается формулой

$$\mu_S(B) = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Tr}\, S V_n(x)^* V_n(x) \mu(dx), \tag{1.13}$$

а апостериорные состояния —

$$S_x = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)\, S V_n(x)^* \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tr} S V_n(x)^* V_n(x). \qquad (1.14)$$

1.3. Три уровня описания квантовых измерений. Теорема Озава имеет принципиальное значение, поскольку демонстрирует согласованность понятия (вполне положительного) инструмента со стандартным формализмом квантовой механики. Описание измерения в обобщенной статистической модели квантовой механики может быть осуществлено с различной степенью подробности. Имеется три основных уровня описания, каждому из которых отвечает определенный математический объект в гильбертовом пространстве системы:

1) Задана только статистика исходов измерения. Как показано в п. 2.1.2, это эквивалентно заданию обобщенной наблюдаемой, т. е. некоторого разложения единицы в $\mathscr{H}$.

2) Кроме статистики, задан закон преобразования состояний в зависимости от исхода измерения. На этом уровне адекватное описание измерения дается понятием инструмента. Каждому инструменту по формуле (1.5) отвечает обобщенная наблюдаемая, однако это соответствие не взаимно однозначно, поскольку инструмент дает более подробное описание измерения, нежели наблюдаемая.

3) Задано динамическое описание взаимодействия системы с пробной системой. Этот уровень является еще более подробным: каждому инструменту по формуле (1.10) может соответствовать множество различных процедур косвенного измерения. Детальность схемы косвенного измерения зависит от того, где в измерительном приборе проводится черта между «пробной системой» и «детектором», осуществляющим прямое измерение.

С точки зрения физических приложений представляет большой интерес вопрос о реализуемости той или иной теоретической схемы квантового измерения. Высказывалась мысль (см., например, статью «Проблема измерения» в сборнике [11]), что хотя квантовая механика правильно отражает некоторые черты микромира, далеко не все, что содержится в ее математической модели, может иметь свой прототип в реальности. Известны общие ограничения типа правил суперотбора (см., например, [23]), которые постулируют измеримость только наблюдаемых, совместимых с некоторой выделенной величиной типа заряда. В связи со схемой косвенного измерения возникают следующие вопросы:

1) Соответствует ли данному унитарному оператору U реальное квантовомеханическое взаимодействие?

2) Соответствует ли данной наблюдаемой A реально измеримая физическая величина?

Подробное обсуждение таких вопросов выходит за рамки настоящего обзора, но некоторые комментарии здесь все же необходимы. В работах Ваневского [165] и Мельника [129] показано, что всякий унитарный оператор может быть получен из шрёдингеровской эволюции с некоторым потенциалом, зависящим от времени. Таким образом, первый вопрос сводится к реализуемости потенциалов в квантовой механике. С другой стороны, в п. 1.5 будет показано, что второй вопрос сводится к первому для взаимодействий специального вида. Практически, конечно, эти вопросы могут быть совсем не просты и требуют отдельного рассмотрения в каждой конкретной задаче измерения (см. в этой связи поучительное обсуждение «приемника Долинара» в [37, гл. VI] и в [18]).

1.4. Воспроизводимость. Пусть S — оператор плотности, $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ — последовательность инструментов со значениями в измеримых пространствах $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_n$. Из постулатов (1.3), (1.4) следует, что величина

$$\mu_S^{\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \\ = \operatorname{Tr} \mathscr{M}_n(B_n)[\ldots \mathscr{M}_1(B_1)[S]\ldots], \tag{1.15}$$

где $B_j \in \mathscr{B}(\mathscr{X}_j)$ есть вероятность того, что в последовательности измерений, задаваемых инструментами $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$, над системой, первоначально находившейся в состоянии S, будут получены исходы $x_j \in B_j$; $j=1, \ldots, n$. Если $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_n$ — стандартные измеримые пространства, то функция множеств (1.12), заданная на параллелепипедах $B_1 \times \ldots \times B_n$, однозначно продолжается до вероятностной меры на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathscr{X}_1) \times \ldots \times \mathscr{B}(\mathscr{X}_n)$ (см. [78, § 4.2]). Соотношение (1.15) можно записать также в виде

$$\mu_S^{\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \\ = \operatorname{Tr} S \mathscr{N}_1(B_1)[\ldots \mathscr{N}_n(B_n)[I]\ldots]. \tag{1.16}$$

В случае инструментов, сооответствующих проекционному постулату (1.6), соотношение (1.15) переходит в формулу Вигнера (см. статью «Проблема измерения» в сборнике [11]).

Рассмотрим повторное измерение, описываемое инструментом $\mathscr{M}$. Инструмент $\mathscr{M}$ называется *воспроизводимым*, если

$$\mathscr{M}(B_1)[\mathscr{M}(B_2)[S]] = \mathscr{M}(B_1 \cap B_2)[S]; \quad B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{X}) \tag{1.17}$$

для любого оператора плотности S. Это свойство является математическим выражением гипотезы воспроизводимости, гласящей, что «если физическая величина дважды измеряется на системе $\mathscr{S}$, причем измерения следуют непосредственно одно за другим, то в обоих случаях получается одно и то же значение» (см. [26, гл. IV, п. 3]).

Рассмотрим инструмент со счетным множеством исходов $\mathscr{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и положим $\mathscr{M}_i = \mathscr{M}(\{x_i\})$.

Предложение ([134], [78]). Всякий инструмент вида (1.6) обладает свойствами:

1) $\mathscr{M}_i[\mathscr{M}_j[S]]=\delta_{ij}\mathscr{M}_i[S]$ (воспроизводимость);

2) если $\operatorname{Tr}\mathscr{M}_i[S]=1$, то $\mathscr{M}_i[S]=S$ (минимальность возмущения);

3) если $X\geqslant 0$ и $\mathscr{M}_i{}^*[X]=0$ для $i=1, 2, \ldots,$ то $X=0$ (невырожденность).

Обратно, всякий инструмент с этими свойствами имеет вид (1.6).

Таким образом, проекционный постулат (1.6) можно рассматривать как следствие ряда физически содержательных свойств соответствующего инструмента, включающих воспроизводимость. Как уже отмечалось, в случае непрерывного спектра возникают принципиальные трудности, которые в наиболее ясной форме выражаются следующей теоремой

Теорема (Озава [134]). Пусть $\mathscr{X}$ — стандартное измеримое пространство. Всякий инструмент со значениями в $\mathscr{X}$, обладающий свойством воспроизводимости (1.17), с необходимостью является дискретным, т. е. существует счетное подмножество $\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}$, такое что $\mathscr{M}(\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0)[S]=0$ для всех S.

Доказательство. Рассмотрим точное состояние, задаваемое невырожденным оператором плотности S. Согласно п. 1.1, существует семейство апостериорных состояний $\{S_x\}$. Пусть $\{B_n\}$ — счетная подалгебра, порождающая $\mathscr{B}(\mathscr{X})$. Обозначая $M(B)=\mathscr{M}(B)^*[I]$ и используя воспроизводимость, имеем

$$\int\limits_B \operatorname{Tr} S_x M(B_n)\,\mu_S(dx)=\operatorname{Tr}\mathscr{M}(B)[S]\,M(B_n)=$$

$$=\operatorname{Tr}\mathscr{M}(B\cap B_n)[S]=\int\limits_B 1_{B_n}(x)\,\mu_S(dx),$$

откуда $\operatorname{Tr} S_xM(B_n)=1_{B_n}(x)$ для μ_S-почти всех $x\in\mathscr{X}$. Поэтому найдется подмножество $\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}$, такое что $\mathscr{M}(\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0)[S]=0$ и

$$\operatorname{Tr} S_xM(B)=1_B(x);\ x\in\mathscr{X}_0,\ B\in\mathscr{B}(\mathscr{X}).$$

Но тогда $\operatorname{Tr} S_xM(\{x\})=1$, $x\in\mathscr{X}_0$, т. е. $M(\{x\})\neq 0$ и $\mu_S(\{x\})\neq 0$, откуда следует, что $\mathscr{X}_0$ счетно.

В примере 1 апостериорные состояния (1.7) таковы, что в этих состояниях (дискретная) наблюдаемая A с вероятностью 1 имеет определенное значение x_j. Причина трудностей с непрерывным спектром связана с тем, что (алгебраическое) состояние, в котором непрерывная наблюдаемая A имеет определенное значение, не может быть нормальным (т. е. задаваться каким-либо оператором плотности).

1.5. Измерения непрерывных наблюдаемых. В работах Шринивача [153] и Озавы [136] указана возможность описания воспроизводимых измерений непрерывных наблюдаемых, использующая состояния и инструменты, не удовлетворяющие условию нормальности. Пусть $A=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xE_A(dx)$ — вещественная наблюдаемая и пусть η — какое-либо инвариантное среднее[1] на пространстве $C(\mathbf{R})$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}$. Следуя [153], рассмотрим отображение $\mathscr{E}_\eta{}^A$ алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в себя, определяемое формулой

$$\operatorname{Tr} S\mathscr{E}_\eta^A[X]=\eta_y(\operatorname{Tr} Se^{iyA}Xe^{-iyA}),$$

где индекс y означает, что усреднение происходит по переменной y, и функцию множеств

$$\mathscr{N}_A(B)[X]=E_A(B)\mathscr{E}_\eta^A[X];\quad B\in\mathscr{B}(\mathbf{R}). \tag{1.18}$$

Отображение $\mathscr{E}_\eta{}^A$ является условным ожиданием на коммутативную подалгебру $\{E_A(B);\ B\in\mathscr{B}(\mathbf{R})\}'=\mathfrak{B}_A$, порожденную наблюдаемой A. Если A имеет чисто точечный спектр, то $\mathscr{E}_\eta{}^A$ есть нормальное условное ожидание, задаваемое формулой (3.1.5), а соотношение (1.18) совпадает с проекционным постулатом (1.6). В общем случае отображение $\mathscr{E}_\eta{}^A$ не нормальное, а функция множеств (1.18) обладает всеми свойствами воспроизводимого инструмента, кроме нормальности.

Вероятности последовательного измерения наблюдаемых $A_1, \ldots, A_n$ даются обобщением формулы (1.16)

$$\mu_S^{A_1,\ldots,A_n}(B_1\times\ldots\times B_n)=$$
$$=\operatorname{Tr} S\mathscr{N}_{A_1}(B_1)[\ldots\mathscr{N}_{A_n}(B_n)[I]\ldots]. \tag{1.19}$$

Если $A_1, \ldots, A_n$ совместимы, то $\mathscr{E}_\eta^{A_j}[E_{A_k}(B)]=E_{A_k}(B)$, откуда

$$\mu_S^{A_1,\ldots,A_n}(B_1\times\ldots\times B_n)=\operatorname{Tr} SE_{A_1}(B_1)\ldots E_{A_n}(B_n), \tag{1.20}$$

т. е. распределение вероятностей последовательных точных измерений совместимых наблюдаемых совпадает с распределением точного совместного измерения этих наблюдаемых (см. п. 1.1.5) — результат, который подтверждает правомерность «обобщенного проекционного постулата» (1.18).

С другой стороны, если A_j несовместимы, то из-за не нормальности отображений $\mathscr{E}_\eta^{A_j}$, функция множеств (1.18) может оказаться лишь конечно аддитивной на $\mathscr{B}(\mathbf{R})$. Для того чтобы восстановить σ-аддитивность, необходимо рассматривать распределение на компактификации вещественной прямой $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$. Например, после точного измерения наблюдаемой координаты Q система переходит в не нормальное состояние, в котором импульс P с положительными вероятностями принимает значения $\pm\infty$ [153].

[1] См. Ф. Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения.— М.: Мир, 1973.

Озава [136] построил процесс косвенного измерения, отвечающий обобщенному проекционному постулату (1.18) и разъяснил роль инвариантного среднего η. Рассмотрим наблюдаемые Q, P во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_0 = L^2(\mathbf{R})$, которое будет описывать «пробную систему». Пользуясь теоремой Банаха о продолжении, можно показать, что для любого η на алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_0)$ существует (не нормальное) состояние E_η, такое, что

$$E_\eta(f(Q)) = f(Q),\ E_\eta(f(P)) = \eta(f),$$

для любой $f \in C(\mathbf{R})$. Пусть $U_t = \exp(-itH_{\mathrm{int}})$ — унитарная эволюция в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, где

$$H_{\mathrm{int}} = \lambda(A \otimes P), \tag{1.21}$$

причем λ может быть выбрано произвольно большим, чтобы пренебречь свободной динамикой системы и прибора. В [136] показано, что для любого (нормального) состояния S и любого $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$

$$\mathrm{Tr}\, S\mathscr{N}_A(B)[X] = (E_S \otimes E_\eta)(U^*_{1/\lambda}(X \otimes E_Q(B))U_{1/\lambda});\quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Таким образом, пробная система, находящаяся в состоянии E_η с точно определенной координатой, в течение времени $1/\lambda$ взаимодействует с наблюдаемой системой согласно (1.21), после чего производится точное измерение координаты пробной системы.

Такая схема является обобщением процедуры косвенного измерения, рассмотренной фон Нейманом в случае чисто точечного спектра ([26, гл. VI, п. 3]). В принципиальном плане она сводит измерение произвольной квантовой наблюдаемой к измерению координаты пробной системы, при условии реализуемости гамильтониана взаимодействия (1.21).

§ 2. Процессы непрерывного измерения

2.1. Неразрушающие измерения. Рассмотрим изолированную квантовую систему, эволюция которой описывается группой унитарных операторов $\{U_t;\ t \in \mathbf{R}\}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть $\{A_{jt};\ j = 1, \ldots, m;\ t \in T\}$, где $T \subset \mathbf{R}$ — семейство вещественных наблюдаемых. Обозначим

$$A_j(t) = U_t^* A_{jt} U_t;\quad t \in T, \tag{2.1}$$

и предположим, что для любых моментов времени $t_1 < \ldots < t_n$ и любых $j_1, \ldots, j_n$ наблюдаемые $A_{j_1}(t_1), \ldots, A_{j_n}(t_n)$ совместимы. Согласно формуле (1.20), последовательное точное измерение наблюдаемых $A_{j_1}(t_1), \ldots, A_{j_n}(t_n)$ $(j_k = 1, \ldots, m)$ имеет распределение вероятностей

$$\mu_S(B_1 \times \ldots \times B_n) = \mathrm{Tr}\, SE_{(t_1)}(B_1) \ldots E_{(t_n)}(B_n), \tag{2.2}$$

где $B_k \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^m)$ и $E_{(t_k)}$ — совместная спектральная мера наблюдаемых $A_j(t_k)$; $j=1, \ldots, m$.

Семейство вероятностных мер (2.2) при всевозможных $n=1, 2, \ldots$; $t_1, \ldots, t_n$ является согласованным. Используя теорему А. Н. Колмогорова о продолжении, можно доказать, что существует единственное ортогональное разложение единицы $\mathbf{E}$ на $\mathscr{B}(\mathbf{R}^T)$, где $\mathscr{B}(\mathbf{R}^T)$ — σ-алгебра цилиндрических множеств на пространстве траекторий $\mathbf{R}^T$ такое, что

$$E(x(\cdot): x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n) = E_{(t_1)}(B_1) \ldots E_{(t_n)}(B_n).$$

Оно описывает статистику непрерывного (во времени) точного измерения семейства совместимых наблюдаемых (2.1), в том смысле, что вероятность подмножества B в пространстве траекторий есть

$$\mu_S(x(\cdot) \in B) = \mathrm{Tr}\, SE(B).$$

В физике подобные измерения получили название *неразрушающих* и привлекли внимание, в связи с задачей обнаружения слабой силы (гравитационной волны), действующей на пробную систему [69], [140].

П р и м е р. Квантовомеханический осциллятор массы m и с частотой ω, возбуждаемый скалярной силой $\varphi(t)$, описывается уравнениями

$$\dot{Q}(t) = m^{-1} P(t), \quad \dot{P}(t) = -m\omega^2 Q(t) + \varphi(t) \mathrm{I}, \tag{2.3}$$

где $Q(0)=Q$, $P(0)=P$ — канонические наблюдаемые, т. е. $[P, Q] = i\mathrm{I}$. Положим $A_{1t} = Q \cos \omega t - (P/m\omega) \sin \omega t$, так что

$$A_1(t) = Q(t) \cos \omega t - (P(t)/m\omega) \sin \omega t.$$

Из уравнений (2.3)

$$\dot{A}_1(t) = -(\varphi(t)/m\omega) \sin \omega t\, \mathrm{I}, \tag{2.4}$$

поэтому наблюдаемые $A_1(t)$ совместимы при разных t и возможно непрерывное неразрушающее измерение семейства $\{A_1(t)\}$. Сила $\varphi(t)$ может быть определена по любой траектории из соотношения (2.4).

Аналогично, для $A_{2t} = P \cos \omega t + m\omega Q \sin \omega t$ получаем семейство совместимых наблюдаемых

$$A_2(t) = P(t) \cos \omega t + m\omega Q(t) \sin \omega t,$$

для которого $\dot{A}_2(t) = \varphi(t) \cos \omega t \mathrm{I}$. Заметим, что $A_1(t)$ и $A_2(t)$ несовместимы, поскольку $[A_2(t), A_1(t)] = i\mathrm{I}$. Действуя в духе п. 2.1.3, рассмотрим семейство совместимых наблюдаемых

$$\tilde{A}_1(t) = A_1(t) \otimes \mathrm{I}_0 - \mathrm{I} \otimes Q_0; \quad \tilde{A}_2(t) = A_2(t) \otimes \mathrm{I}_0 + \mathrm{I} \otimes P_0 \tag{2.5}$$

в пространстве $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$ (см. [103]). Сила $\varphi(t)$ определяется тогда из соотношения

$$\varphi(t)=\cos\omega t\dot{\tilde{A}}_2(t)-m\omega\sin\omega t\dot{\tilde{A}}_1(t).$$

2.2. «Квантовый парадокс Зенона». Попытки рассмотрения непрерывных измерений несовместимых наблюдаемых, опирающиеся на проекционный постулат, приводят к парадоксальным выводам, в основе которых лежит следующий математический факт. Пусть H — самосопряженный оператор из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, E — проектор, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(E\exp(itH/n)E)^n=E\exp(itEHE). \tag{2.6}$$

Это следует из того, что $\|\exp(itH/n)-\mathrm{I}-itH/n\|=o(1/n)$ и $E^2=E$. Обобщение этого результата на случай неограниченного H является непростой задачей; некоторые условия были получены Фридманом [86]. Его результаты включают случай, когда $\mathscr{H}=L^2(\mathbf{R}^n)$, $H=-\Delta/2m$ — гамильтониан свободной частицы в $\mathbf{R}^n$, а $E=1_{\mathscr{D}}(\cdot)$ — индикатор ограниченной области $\mathscr{D}\subset\mathbf{R}^n$ с гладкой границей.

Рассмотрим свободную частицу, эволюционирующую на временном интервале $[0, t]$, и предположим, что в каждый момент времени tk/n, $k=0, 1, \ldots, n$, производится точное измерение наблюдаемой E, описываемое проекционным постулатом (1.6). Если исход измерения равен 1, то это означает, что частица находится в области $\mathscr{D}$. Вероятность того, что во всех $n+1$ измерениях получен исход 1, есть

$$\mu_s(1, \ldots, 1)=\mathrm{Tr}(E\exp(itH/n)E)^n S(E\exp(itH/n)E)^n$$

и при $n\to\infty$ в силу (2.6) стремится к

$$\mathrm{Tr}\,E\exp(itEHE)S_0\exp(-itEHE)E=\mathrm{Tr}\,S_0E, \tag{2.7}$$

где S_0 — начальное состояние. Если в начальный момент частица находится в области $\mathscr{D}$, то вероятность (2.7) равна 1 независимо от эволюции, т. е. при непрерывном точном измерении местоположения частица никогда не покидает область $\mathscr{D}$ (см. также Дэвис [78, п. 7.4]). Необычные физические следствия соотношения (2.6) были подробно рассмотрены в работе Мисры и Сударшана [130], где для них было предложено общее название «квантовый парадокс Зенона».

Причина парадокса состоит в том, что измерение, описываемое проекционным постулатом, переводя состояние системы в состояние, отвечающее точно определенному значению наблюдаемой, производит конечное изменение, на фоне которого эффект эволюции за время t/n является пренебрежимо малым при $n\to\infty$. Чтобы избежать этого и получить нетривиальный предельный процесс непрерывного измерения, включающий эволюцию, Баркиелли, Ланц и Проспери [59], [60], предложили рассматривать последовательность неточных измерений, точность которых убывает пропорционально числу измерений n. Первоначально описание предельного процесса в частных случаях связывалось с фейнмановским интегралом по траекториям (ср. в этой связи также Менский [25]), однако общая картина прямо основывается на идеях, изложенных в § 1, в частности на понятии инструмента. В работах А. С. Холево [47], [102] было указано на параллель такого подхода с классическими предельными теоремами в схеме серий, причем предельный процесс непрерывного измерения оказывается некоммутативным аналогом процесса с независимыми приращениями. Подобно классическому случаю, все такие процессы описываются некоторой формулой типа Леви—Хинчина [102], [35]. Квантовые случайные процессы в смысле Дэвиса [78] с этой точки зрения соответствуют сложному пуассоновскому процессу. Дальше кратко излагаются результаты этих работ.

2.3. Предельная теорема для сверток инструментов. Для простоты ограничимся измерениями со значениями в $\mathbf{R}$ (существенно лишь, что пространство значений является абелевой локально компактной группой; см. [102], [35]). Пусть $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n$ — инструменты (в алгебре наблюдаемых) со значениями в $\mathbf{R}$. Существует единственный инструмент $\mathcal{N}$ со значениями в $\mathbf{R}^n$, такой что

$$\mathcal{N}(B_1\times \ldots \times B_n)[X]=\mathcal{N}_1(B_1)[\ldots\mathcal{N}_n(B_n)[X]\ldots];\ B_j\in\mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

Свертка инструментов $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n$ определяется соотношением

$$\mathcal{N}_1*\ldots*\mathcal{N}_n(B)[X]=\mathcal{N}((x^1,\ldots,x_n):x_1+\ldots+x_n\in B);\ B\in\mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

и, согласно формуле (1.13), описывает статистику суммы исходов n последовательных измерений, отвечающих инструментам $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n$. Инструмент $\mathcal{N}$ со значениями в $\mathbf{R}$ называется *безгранично-делимым*, если для любого $n=1, 2, \ldots$ найдется инструмент $\mathcal{N}_{(n)}$ такой, что $\mathcal{N}=\mathcal{N}_{(n)}*\ldots*\mathcal{N}_{(n)}\equiv\mathcal{N}_{(n)}^{*n}$. Проблема непрерывного измерения оказывается тесно связанной с пределами n-кратных сверток вида $\mathcal{N}_{(n)}^{*n}$ при $n\to\infty$ и со структурой безгранично-делимых инструментов. Решение этих вопросов опирается на некоторое обобщение метода характеристических функций в теории вероятностей.

Обозначим $\mathfrak{F}_\sigma$ банахову алгебру w^*-непрерывных линейных отображений $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя с произведением $\Phi\cdot\Psi[X]=\Phi[\Psi[X]]$. Единицей в этой алгебре является тождественное отображение, обозначаемое Id. В алгебре $\mathcal{F}_\sigma$ вводится топология τ, определяемая семейством полунорм

$$\|\Phi\|_S=\sup_{\|X\|\leqslant 1}|\operatorname{Tr} S\Phi[X]|,\quad S\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Характеристическая функция инструмента $\mathcal{N}$ определяется соотношением

$$\Phi(\lambda)[X]=\int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x}\mathcal{N}(d\lambda)[X], \tag{2.8}$$

где интеграл сходится в топологии τ. Функция $\Phi(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{F}_\sigma$ является характеристической функцией вполне положительного инструмента тогда и только тогда, когда

1) $\Phi(0)[I]=I$;

2) $\Phi(\lambda)$ τ-непрерывна в точке $\lambda=0$;

3) $\Phi(\lambda)$ *положительно определенна* в следующем смысле: для любых конечных наборов $\{\psi_j\}\subset\mathscr{H}$, $\{\lambda_j\}\subset\mathbf{R}$, $\{X_j\}\subset\mathfrak{B}(\mathscr{H})$

$$\sum_{j,k}\langle\psi_j|\Phi(\lambda_k-\lambda_j)[X_j^*X_k]\psi_k\rangle\geqslant 0.$$

(аналог теоремы Бохнера—Хинчина, сводящийся к ней в случае $\dim\mathscr{H}=1$).

Характеристическая функция свертки $\mathcal{N}_1*\ldots*\mathcal{N}_n$ есть поточечное произведение соответствующих характеристических функций $\Phi_1(\lambda)\cdot\ldots\cdot\Phi_n(\lambda)$, поэтому n-кратная свертка $\mathcal{N}_{(n)}^{*n}$ имеет характеристическую функцию $\Phi_{(n)}(\lambda)^n$, где $\Phi_{(n)}(\lambda)$ — характеристическая функция инструмента $\mathcal{N}_{(n)}$. Распределение вероятностей $\mu_S^{(n)}$ суммы n повторных измерений, описываемых инструментом $\mathcal{N}_{(n)}$, определяется формулой

$$\int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x}\mu_S^{(n)}(dx)=\operatorname{Tr} S\Phi_{(n)}(\lambda)^n[I].$$

Следующее утверждение является аналогом центральной предельной теоремы в схеме серий.

Предложение. Пусть $\{\mathcal{N}_{(n)}\}$ — последовательность вполне положительных инструментов и пусть существует τ — непрерывный предел

$$\tau-\lim_{n\to\infty} n(\Phi_{(n)}(\lambda)-\mathrm{Id})=\mathscr{L}(\lambda). \tag{2.9}$$

Тогда свертки $\mathcal{N}_{(n)}{}^{*n}$ слабо сходятся к безгранично делимому инструменту $\mathcal{N}$ с характеристической функцией $\exp\mathscr{L}(\lambda)$[1] в том смысле, что

$$\tau-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathcal{N}_{(n)}(dx)=\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathcal{N}(dx)$$

для всех непрерывных ограниченных функций $f(x)$.

Заметим, что аналог классического условия асимптотической пренебрегаемости

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi_{(n)}(\lambda)-\mathrm{Id}\|=0$$

[1] Имеется в виду экспонента в банаховой алгебре $\mathfrak{F}_\sigma$.

в общем случае не влечет (2.9). Вопрос об описании возможных пределов $\tau - \lim_{n\to\infty} \Phi_{(n)}(\lambda)$ при одном этом условии остается открытым.

Пример. Пусть A, H — (ограниченные) вещественные наблюдаемые, $p(x)$ — плотность распределения вероятностей на $\mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям (1.8). Рассмотрим вполне положительный инструмент

$$\mathcal{N}_{(n)}(B)[X] = e^{itH/n}\sqrt{n}\int_B \sqrt{p\left(\sqrt{n}\,x\mathrm{I} - \frac{1}{\sqrt{n}}A\right)}\times$$
$$\times X\sqrt{p\left(\sqrt{n}\,x\mathrm{I} - \frac{1}{\sqrt{n}}A\right)}\,dx\,e^{-itH/n}. \qquad (2.10)$$

Свертка $\mathcal{N}_{(n)}^{*n}$ имеет следующую статистическую интерпретацию. Рассмотрим квантовую систему, динамика которой на интервале $[0, t]$ описывается гамильтонианом H. В моменты времени $t_j = jt/n$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$, производится приближенное измерение наблюдаемой A с дисперсией $n\sigma^2 = n\int x^2 p(x)\,dx$, а затем берется среднее $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha\left(t_j^{(n)}\right)$ полученных результатов $\alpha\left(t_j^{(n)}\right)$ (которое имеет дисперсию σ^2). Предел при $n\to\infty$ соответствует среднему $\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau$ результатов $\alpha(\tau)$ некоторого «непрерывного измерения» наблюдаемой A. Вычисления показывают, что для достаточно гладкой плотности $p(x)$ предел (2.9) равен

$$\mathcal{L}(\lambda)[X] = it[H, X] +$$
$$+ \frac{1}{4}J(AXA - A^2\circ X) + i\lambda A\circ X - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 X, \qquad (2.11)$$

где $J = \int p'(x)^2 p(x)^{-1} dx$ — информационное количество Фишера для семейства плотностей $\{p(x+\theta)\}$ с параметром сдвига $\theta\in\mathbf{R}$, так что $\sigma^2 J \geqslant 1$.

2.4. Сверточные полугруппы инструментов. Следующий результат типа теоремы Шенберга (см., например, [96], [138]) перебрасывает мост между скалярными условно положительно определенными функциями и вполне диссипативными отображениями (п. 3.2.2).

Предложение. Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ — функция со значениями в $\mathfrak{F}_\sigma$.

Следующие условия эквивалентны:

1) $\exp t\mathcal{L}(\lambda)$ положительно определенна для всех $t \geqslant 0$;

2) функция $\mathcal{L}(\lambda)$ *эрмитова*, т. е. $\mathcal{L}(-\lambda)[X^*] = \mathcal{L}(\lambda)[X]^*$

и *условно положительно определенная*, т. е. для любых конечных наборов $\{\psi_j\}\subset\mathscr{H}$, $\{\lambda_j\}\subset\mathbf{R}$, $\{X_j\}\subset\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ таких, что $\sum_j X_j\psi_j=0$ выполняется

$$\sum_{j,k}\langle\psi_j|\mathscr{L}(\lambda_k-\lambda_j)[X_j^*X_k]\psi_k\rangle\geqslant0.$$

Для того чтобы функция $\mathscr{L}(\lambda)$ представлялась в виде предела (2.9), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла одному из условий этого предложения, была τ-непрерывна и $\mathscr{L}(0)[I]=0$. Такие функции будем называть *квазихарактеристическими.*

Семейство инструментов $\{\mathscr{N}_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ образует *сверточную полугруппу*, если $\mathscr{N}_t*\mathscr{N}_s=\mathscr{N}_{t+s}$; t, $s\in\mathbf{R}_+$. Очевидно, что все инструменты $\mathscr{N}_t$ безгранично делимы. Пусть $\Phi_t(\lambda)$ — характеристическая функция инструмента $\mathscr{N}_t$. Соотношение

$$\Phi_t(\lambda)=\exp t\mathscr{L}(\lambda);\quad t\in\mathbf{R}_+,\tag{2.12}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между квазихарактеристическими функциями $\mathscr{L}(\lambda)$ и сверточными полугруппами вполне положительных инструментов, удовлетворяющими условию непрерывности

$$\lim_{t\to0}\|\mathscr{N}_t(U_0)-\mathrm{Id}\|=0\tag{2.13}$$

для любой окрестности нуля U_0.

Следующий результат можно рассматривать как обобщение представления Леви—Хинчина для логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения.

Теорема. Для того чтобы функция $\mathscr{L}(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{F}_\sigma$ была квазихарактеристической, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$\mathscr{L}(\lambda)=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1(\lambda)+\mathscr{L}_2(\lambda),\tag{2.14}$$

где $\mathscr{L}_0$ — вполне диссипативное отображение вида (3.2.5),

$$\mathscr{L}_1(\lambda)[X]=\sigma^2\left[(L^*XL-L^*L\circ X)+i\lambda(L^*X+XL)-\frac{1}{2}\lambda^2X\right],\tag{2.15}$$

причем $\sigma^2\geqslant0$, $L\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, т. е. функция типа (2.11);

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2(\lambda)[X]=&\sum_{r,s=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}\setminus0}(V_s^*XV_re^{i\lambda x}-V_s^*V_r\circ X)\mu_{rs}(dx)+\\&+\sum_{s=1}^{\infty}V_s^*X\int_{\mathbf{R}\setminus0}(e^{i\lambda x}-1)\mu_{0s}(dx)+\\&+\sum_{r=1}^{\infty}XV_r\int_{\mathbf{R}\setminus0}(e^{i\lambda x}-1)\mu_{r0}(dx)+\\&+\left[\int_{\mathbf{R}\setminus0}\left(e^{i\lambda x}-1-\frac{i\lambda x}{1+x^2}\right)\mu_{00}(dx)+i\alpha\lambda\right]X,\end{aligned}\tag{2.16}$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, $V_s \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, а $[\mu_{r,s}]_{r,s=1,2,\ldots}$ — положительно определенная матрица комплексных мер на $\mathbf{R} \setminus 0$, такая, что ряд $\sum_{r,s=1}^{\infty} \mu_{rs}(\mathbf{R} \setminus 0) V_s^* V_r$ сходится w^*-слабо, и

$$\int_{\mathbf{R} \setminus 0} \frac{x^2}{1+x^2} \mu_{00}(dx) < \infty .$$

Доказательство формулы (2.14) использует разновидность конструкции ГНС, которая сопоставляет условно положительно определенной функции $\mathscr{L}(\lambda)$ пару коммутирующих коциклов алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ и группы $\mathbf{R}$, а также сведения о структуре этих коциклов [96], [84], [76] (доказательство проходит для любой алгебры фон Неймана и абелевой локально-компактной группы). Перенесение вероятностного метода, основанного на понятии сопровождающего закона, представляется в некоммутативной ситуации затруднительным.

Вероятностный смысл каждого из слагаемых в формуле (2.12) выясняется в связи с процессами непрерывного измерения.

2.5. Инструментальные процессы. Пусть $\mathscr{Y}$ — пространство всех вещественных функций на $\mathbf{R}$, $\mathscr{B}_{a,b}$ — σ-алгебра, порождаемая приращениями $y(s)-y(t)$; $a \leqslant t < s \leqslant b$. *Инструментальным процессом с независимыми приращениями (и.-процессом)* называется семейство $\{\mathscr{N}_{a,b};\ a,\ b \in \mathbf{R},\ a \leqslant b\}$, где $\mathscr{N}_{a,b}$ — инструмент (в алгебре наблюдаемых) со значениями в $(\mathscr{Y}, \mathscr{B}_{a,b})$, причем

$$\mathscr{N}_{a,b}(E) \cdot \mathscr{N}_{b,c}(F) = \mathscr{N}_{a,c}(E \cap F), \tag{2.17}$$

если $a \leqslant b \leqslant c$ и $E \in \mathscr{B}_{a,b}$, $F \in \mathscr{B}_{b,c}$. Если все инструменты $\mathscr{N}_{a,b}$ вполне положительны, то и.-процесс называется *вполне положительным*. Для любого оператора плотности S и временного промежутка $[a, b]$ и.-процесс определяет распределение вероятностей

$$\mu_S(E) = \operatorname{Tr} S\mathscr{N}_{a,b}(E)[I]; \quad E \in \mathscr{B}_{a,b}, \tag{2.18}$$

на пространстве траекторий $y(t)$; $t \in [a, b]$. С физической точки зрения, исходом непрерывного измерения является производная $\dot{y}(t)$, однако оказывается, что распределение (2.18) сосредоточено на недифференцируемых функциях. Это определение, данное в [102], является модификацией определения Дэвиса [78], использовавшего лишь пространство скачкообразных функций и более общего определения Баркиелли, Ланца, Проспери [59], основанного на пространстве обобщенных функций. В случае $\dim \mathscr{H} = 1$ и.-процессы — это обычные вещественные процессы с независимыми приращениями. Всякий и.-процесс однозначно определяется набором своих конечномерных распределений, которые в силу (2.17) имеют следующую структуру

$$\mathcal{N}_{\tau_0,\tau_p}(y(\cdot):y(\tau_1)-y(\tau_0)\in B_1,\ldots,y(\tau_p)-y(\tau_{p-1})\in B_p)=$$
$$=\mathcal{N}_{\tau_0,\tau_1}(y(\cdot):y(\tau_1)-y(\tau_0)\in B_1)\ldots$$
$$\ldots\mathcal{N}_{\tau_{p-1},\tau_p}(y(\cdot):y(\tau_p)-y(\tau_{p-1})\in B_p),$$

где $\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\ldots\leqslant\tau_p$; $B_1,\ldots,B_p\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

И.-процесс называется *однородным*, если для любых a, b, $\tau\in\mathbf{R}$ выполняется

$$\mathcal{N}_{a+\tau,b+\tau}(T_\tau(E))=\mathcal{N}_{a,b}(E),\quad E\in\mathcal{B}_{a,b},$$

где $(T_\tau y)(t)=y(t+\tau)$. Соотношение

$$\mathcal{N}_t(B)=\mathcal{N}_{a,a+t}(y(\cdot):y(a+t)-y(a)\in B);\quad B\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),\tag{2.19}$$

определяет тогда сверточную полугруппу инструментов, через которую конечномерные распределения выражаются по формуле

$$\mathcal{N}_{\tau_0,\tau_p}(y(\cdot):y(\tau_1)-y(\tau_0)\in B_1,\ldots,y(\tau_p)-y(\tau_{p-1})\in B_p)=$$
$$=\mathcal{N}_{\tau_1-\tau_0}(B_1)\cdot\ldots\cdot\mathcal{N}_{\tau_p-\tau_{p-1}}(B_p).\tag{2.20}$$

Если и.-процесс непрерывен в том смысле, что

$$\lim_{t\to 0}\|\mathcal{N}_{a,a+t}(y(\cdot):|y(a+t)-y(a)|\geqslant\varepsilon)-\mathrm{Id}\|=0\tag{2.21}$$

для любого $\varepsilon>0$, то соответствующая сверточная полугруппа непрерывна в смысле (2.13), и, следовательно, ее характеристические функции имеют вид (2.12), где $\mathcal{L}(\lambda)$ — некоторая квазихарактеристическая функция. Обратно пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ — квазихарактеристическая функция, $\{\mathcal{N}_t\}$ — соответствующая сверточная полугруппа, тогда соотношение (2.20) определяет конечномерные распределения, продолжающиеся до однородного, непрерывного, вполне положительного и.-процесса $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$. Более того, модифицируя технику продолжения теории случайных процессов[1], можно доказать, что и.-процесс $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$ сосредоточен на подпространстве $\mathcal{D}\subset\mathcal{Y}$, состоящем из функций без разрывов второго рода. Функция $\mathcal{L}(\lambda)$ называется *генератором* и.-процесса $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$.

Слагаемое $\mathcal{L}_0$ в формуле (2.14) описывает эволюцию (в общем случае необратимую) рассматриваемой квантовой системы, происходящую независимо от процесса измерения. В классическом случае ($\dim\mathcal{H}=1$) это слагаемое вообще отсутствует. Второе слагаемое $\mathcal{L}_1(\lambda)$ описывает процесс непрерывного приближенного измерения наблюдаемой $A=\sigma^2(L+L^*)$. Соответствующий и.-процесс сосредоточен на непрерывных траекториях и отвечает классическому винеровскому процессу. Многомерное обобщение — сумма слагаемых вида (2.11) с разными операторами $L_1,\ldots,L_m$ — задает процесс непрерывного приближенного

[1] См. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1973.— 2.

измерения нескольких (вообще говоря, несовместимых) наблюдаемых [60]. Наконец, слагаемое $\mathscr{L}_2(\lambda)$ описывает скачкообразную компоненту процесса измерения.

Пример (ср. [78, гл. 5]). Пусть $B \to \mathscr{P}(B)$; $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R} \setminus 0)$ — функция множеств, удовлетворяющая определению (вполне положительного) инструмента (см. п. 1.1), за исключением условия нормировки 2). Таким образом, $C = \mathscr{P}(\mathbf{R} \setminus 0)[I]$ — некоторый положительный оператор. Соотношение

$$\mathscr{L}(\lambda)[X] = \int_{\mathbf{R} \setminus 0} e^{i\lambda x} \mathscr{P}(dx)[X] - C \circ X + i[H, X] \qquad (2.22)$$

определяет квазихарактеристическую функцию, представляющую собой первое слагаемое в формуле (2.16). Однородный и.-процесс $\{\mathscr{N}_{a,b}\}$ с генератором (2.22) имеет кусочно-постоянные траектории; пусть, например, $F \subset \mathscr{D}$ — подмножество траекторий, имеющих ровно m скачков на отрезке $[a, b]$, причем j-й скачок происходит на интервале $\Delta_j \subset [a, b]$ и имеет величину $h_j \in B_j$, где $B_j \in \mathscr{B}(\mathbf{R} \setminus 0)$. Если интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ следуют друг за другом без пересечений, то

$$\mathscr{N}_{a,b}(F) = \int_{\Delta_1} \ldots \int_{\Delta_m} e^{(t_1 - a)\mathscr{L}_0} \cdot \mathscr{P}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathscr{P}(B_m) \times$$
$$\times e^{(b - t_m)\mathscr{L}_0} dt_1 \ldots dt_m,$$

где $\mathscr{L}_0[X] = -C \circ X + i[H, X]$. Особенно просто устроен аналог пуассоновского процесса с генератором

$$\mathscr{L}(\lambda)[X] = \mu(e^{i\lambda h} U^* X U - X) + i[H, X],$$

где U — изометрический оператор. Это *считающий процесс* [154], для которого скачки траектории фиксированной величины h происходят в случайные моменты времени, имеющие экспоненциальное распределение с параметром $\mu > 0$. В момент скачка состояние преобразуется по формуле $S \to USU^*$, а между скачками эволюционирует согласно закону

$$S \to e^{-\mu t} e^{-iHt} S e^{iHt}.$$

Рассмотрим вкратце вопрос о сходимости повторных измерений к процессу непрерывного измерения. Пусть временная ось $\mathbf{R}$ разбита на промежутки $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$ длины $1/n$, и каждому моменту времени отвечает измерение, описываемое вполне положительным инструментом $\mathscr{N}_{(n)}$ с характеристической функцией $\Phi_{(n)}(\lambda)$. Серия таких повторных измерений естественным образом определяет и.-процесс $\{\mathscr{N}_{a,b}\}$, траекториями которого являются кусочно-постоянные функции (см. [102]). Обозначим

$$\mu_{S,X}^{(n)}(B) = \operatorname{Tr} S \mathscr{N}_{a,b}^{(n)}(E)[X]; \quad E \in \mathscr{B}_{a,b},$$

где $X \geqslant 0$.

Теорема. Пусть существует τ-непрерывный предел

$$\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} n\left(\Phi_{(n)}(\lambda)-\mathrm{Id}\right)=\mathscr{L}(\lambda),$$

причем $\sup\limits_{n}\sup\limits_{|\lambda|\leqslant 1} n\|\Phi_{(n)}(\lambda)-\mathrm{Id}\|<\infty$. Тогда последовательность мер $\{\mu_{S,X}^{(n)}\}$ сходится в топологии Скорохода к мерам

$$\mu_{S,X}(E)=\mathrm{Tr}\, S\mathscr{N}_{a,b}(E)[X],$$

где $\{\mathscr{N}_{a,b}\}$ — однородный вполне положительный и.-процесс с генератором $\mathscr{L}(\lambda)$.

В частности, последовательность повторных приближенных измерений наблюдаемой A из примера п. 2.3 сходится к процессу непрерывного измерения с генератором (2.11).

В случае $\dim\mathscr{H}=1$ этот результат переходит в теорему А. В. Скорохода о сходимости сумм независимых случайных величин к процессу с независимыми приращениями.

Знание генератора и.-процесса позволяет в принципе определить основные вероятностные характеристики распределения (2.18) в пространстве траекторий, в частности, произвольные смешанные моменты [60]. На этом основаны квантово-статистические приложения рассматриваемой теории. В работе [103] проведено сравнение оценок неизвестной силы, действующей на открытую квантовую систему, построенных на основе различных процессов непрерывного измерения. Статистика считающих процессов рассматривалась в работах [154], [18].

Глава 5

ПРОЦЕССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

§ 1. Квантовое стохастическое исчисление

1.1. Основные определения. Пусть $\mathfrak{h}$ — гильбертово пространство. *Симметричное пространство Фока,* ассоциированное с $\mathfrak{h}$, определяется как

$$\Gamma(\mathfrak{h})=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\Gamma_n(\mathfrak{h}),$$

где $\Gamma_0(\mathfrak{h})=\mathbf{C}$, $\Gamma_n(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}^{\mathrm{s}n}$ — симметризованная n-я тензорная степень пространства $\mathfrak{h}$ (см. п. 1.3.1). $\Gamma_n(\mathfrak{h})$ называется *n-частичным подпространством,* $\Gamma_0(\mathfrak{h})$ — *вакуумным подпространством.* В квантовой физике $\Gamma(\mathfrak{h})$ описывает систему из переменного (неограниченного) числа частиц (бозонов [6], [7]).

В интересующем нас случае, когда $\mathfrak{h}=L^2(\mathbf{R}_+)$, пространство Фока $\Gamma(\mathfrak{h})$ состоит из бесконечных последовательностей

$$\psi=[f_0, f_1(t),\dots, f_n(t_1,\dots,t_n),\dots],$$

где $f_0\in\mathbf{C}$, $f_n(t_1,\dots,t_n)$ — комплексная симметричная квадратично-интегрируемая функция от $t_1,\dots,t_n\in\mathbf{R}_+$, причем

$$\langle\psi|\psi\rangle\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}|f_n(t_1,\dots,t_n)|^2dt_1\dots dt_n<\infty.$$

Удобная модификация этого представления была предложена Маассеном в [142]. Пусть $\tau=\{t_1,\dots,t_n\}$ — цепь в $\mathbf{R}_+$, т. е. подмножество $\mathbf{R}_+$ конечной мощности $|\tau|=n$, упорядоченное так, что $t_1<\dots<t_n$. Обозначая $\mathfrak{P}$ множество всех цепей, $\mathfrak{P}_n$ — множество цепей мощности n, имеем $\mathfrak{P}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{P}_n$, где $\mathfrak{P}_0=\{\varnothing\}$. Определим на $\mathfrak{P}$ σ-конечную меру $\mu(d\tau)$, которая совпадает с мерой $dt_1\dots dt_n$ на $\mathfrak{P}_n$, $n>0$, и $\mu(\varnothing)=1$. Для $\psi\in\Gamma(\mathfrak{h})$ положим $\psi(\tau)=f_n(t_1,\dots,t_n)$, если $|\tau|=n>0$ и $\psi(\varnothing)=f_0$. Симметричная функция f_n однозначно определяется своим ограничением на $\mathfrak{P}_n$, причем $\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}|f_n(t_1,\dots,t_n)|^2dt_1\dots dt_n=$ $=\int_{\mathfrak{P}_n}|\psi(\tau)|^2\mu(d\tau)$, так что

$$\langle\psi|\psi\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathfrak{P}_n}|\psi(\tau)|^2\mu(d\tau)=\int_{\mathfrak{P}}|\psi(\tau)|^2\mu(d\tau). \tag{1.1}$$

Для любого $t\geqslant 0$ определим операторы $A(t)$, $A^+(t)$, $\Lambda(t)$ соотношениями

$$(A(t)\psi)(\tau)=\int_0^t\psi(\tau\cup\{s\})\,ds,$$

$$(A^+(t)\psi)(\tau)=\sum_{s\in\tau}1_{[0,t]}(s)\,\psi(\tau\setminus\{s\}),$$

$$(\Lambda(t)\psi)(\tau)=\sum_{s\in\tau}1_{[0,t]}(s)\,\psi(\tau). \tag{1.2}$$

Оператор $A(t)$ переводит $\Gamma_n\equiv\Gamma_n(L^2(\mathbf{R}_+))$ в Γ_{n-1}, $A^+(t)$ переводит Γ_n в Γ_{n+1}, и $\Lambda(t)$ переводит Γ_n в Γ_n. В квантовой физике $A(t)$ является *оператором уничтожения* (бозона на временном отрезке $[0,t]$), $A^+(t)$ — *оператором рождения*, $\Lambda(t)$ — *оператором числа частиц* (бозонов). Общей инвариантной областью определения является подпространство Γ_∞, состоящее из векторов $\psi \in \Gamma(\mathfrak{h})$ таких, что

$$\int\limits_{\mathfrak{P}} \lambda^{|\tau|} |\psi(\tau)|^2 \mu(d\tau) < \infty$$

для всех $\lambda > 0$. Операторы $A(t)$, $A^+(t)$ однозначно продолжаются до замкнутых взаимно сопряженных операторов (для которых сохраняются прежние обозначения). Операторы $\Lambda(t)$, а также

$$Q(t) = A(t) + A^+(t),\ P(t) = i(A^+(t) - A(t)) \tag{1.3}$$

являются существенно самосопряженными на Γ_∞ (см., например, [6], [29]).

Из определений (1.2) вытекают следующие коммутационные соотношения на Γ_∞

$$\begin{gathered} [A(t), A(s)] = 0, \quad [A^+(t), A^+(s)] = 0, \\ [A(t), A^+(s)] = (t \wedge s)\,\mathrm{I}, \\ [\Lambda(t), \Lambda(s)] = 0, \\ [\Lambda(t), A(s)] = -A(t \wedge s), \quad [\Lambda(t), A^+(s)] = A^+(t \wedge s), \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $t \wedge s = \min(t, s)$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} [Q(t), Q(s)] = 0, \quad [P(t), P(s)] = 0, \\ [Q(t), P(s)] = 2i(t \wedge s)\,\mathrm{I}, \\ [\Lambda(t), Q(s)] = -iP(t \wedge s), \quad [\Lambda(t), P(s)] = iQ(t \wedge s). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Пусть $f \in L^2(\mathrm{R}_+)$. *Экспоненциальным вектором* называется вектор $\psi_f \in \Gamma(\mathfrak{h})$ такой, что $\psi_f(\varnothing) = 1$, $\psi_f(\tau) = \prod\limits_{t \in \tau} f(t)$. Скалярное произведение двух экспоненциальных векторов

$$\langle \psi_f | \psi_g \rangle = \exp \int\limits_0^\infty \overline{f(t)}\, g(t)\, dt.$$

Из (1.2) следует, что $A(t)\psi_f = \left(\int\limits_0^t f(s)\, ds\right) \cdot \psi_f$.

Вектор ψ_0, соответствующий $f \equiv 0$, называется *вакуумным вектором*. Для него

$$A(t)\psi_0 = 0,\ \Lambda(t)\psi_0 = 0. \tag{1.6}$$

Линейную оболочку семейства экспоненциальных векторов обозначим Γ_e. Она плотна в $\Gamma(\mathfrak{h})$ (см., например, [96]).

1.2. Стохастический интеграл. Одно из основных свойств пространства Фока — ф у н к т о р и а л ь н о е с в о й с т в о

$$\Gamma(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = \Gamma(\mathfrak{h}_1) \otimes \Gamma(\mathfrak{h}_2), \tag{1.7}$$

в частности, для любого $t \in \mathbf{R}_+$

$$\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+)) = \Gamma(L^2(0, t)) \otimes \Gamma(L^2(t, \infty)). \tag{1.8}$$

При этом экспоненциальные векторы, включая вакуумный, также факторизуются

$$\psi_f = \psi_f^{(0,t)} \otimes \psi_f^{(t,\infty)}. \tag{1.9}$$

Поскольку $L^2(\mathbf{R}_+)$ можно рассматривать как непрерывную прямую сумму (прямой интеграл) одномерных гильбертовых пространств, пространство $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ является, в определенном смысле, непрерывным тензорным произведением. Эта структура лежит в основе связи между пространством Фока, безграничной делимостью и процессами с независимыми приращениями (см., например, [96], [138]).

Далее $\mathfrak{H} = \mathscr{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, где $\mathscr{H}$ — некоторое «начальное» пространство. Элементы $\mathfrak{H}$ можно рассматривать как функции $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{P}$, со значениями в $\mathscr{H}$. Будет удобно не различать в написании операторы, действующие в $\mathscr{H}$, или в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, и их поднятия в $\mathfrak{H}$; например, $A(t)$ обозначает как оператор в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, так и оператор $\mathrm{I} \otimes A(t)$ в $\mathfrak{H}$ (где I — единичный оператор в $\mathscr{H}$). Обозначим $\mathscr{H} \otimes \Gamma_e$ алгебраическое тензорное произведение $\mathscr{H}$ и Γ_e. Семейство (вообще говоря, неограниченных) операторов $\{M(t);\ t \in \mathbf{R}_+\}$, определенных на $\mathscr{H} \otimes \Gamma_e$, будет называться *процессом* в $\mathfrak{H}$.

Соотношения (1.8), (1.9) задают естественную фильтрацию в пространстве $\mathfrak{H}$. Процесс $\{M(t);\ t \in \mathbf{R}_+\}$ в $\mathfrak{H}$ называется *согласованным* (с данной фильтрацией), если для любого $t \in \mathbf{R}_+$

$$M(t) = M_{t]} \otimes \mathrm{I}_{[t}, \tag{1.10}$$

где $M_{t]}$ — оператор, действующий в $\mathscr{H} \otimes \Gamma(L^2(0, t))$, а $\mathrm{I}_{[t}$ — единичный оператор в $\Gamma(L^2(t, \infty))$. Благодаря (1.8), (1.9), определено отображение условного ожидания $\mathscr{E}_{t]}$ в алгебру операторов вида (1.10), согласованное с вакуумным состоянием $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Согласованный процесс называется *мартингалом*, если $\mathscr{E}_{t]}[M(s)] = M(t)$ при $s > t$. Основные процессы $\{A(t)\}$, $\{A^+(t)\}$, $\{\Lambda(t)\}$ являются мартингалами.

Партасарати и Хадсон [108], [20] построили стохастический интеграл от согласованных процессов по основным мартингалам $A(t)$, $A^+(t)$, $\Lambda(t)$. Дальше излагается модификация этой конструкции (см. статью А. С. Холево в [145]). Процесс $\{M(t);\ t \in [0, T]\}$ называется *простым*, если существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, такое что $M(t) = M(t_{j-1})$ для $t \in [t_{j-1}, t_j)$. Для четверки простых согласованных процессов $\{M_\alpha(t)\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, стохастический интеграл определяется соотно шением

$$I(T) \equiv \int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt) =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \{M_0(t_{j-1})[\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})] +$$
$$+ M_1(t_{j-1})[A(t_j) - A(t_{j-1})] + M_2(t_{j-1})[A^+(t_j) - A^+(t_{j-1})] +$$
$$+ M_3(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\}. \tag{1.11}$$

Из неравенств Журне (см. [128, п. V.1.4]) вытекает оценка

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| I(t)\psi \otimes \psi_f \|^2 \leqslant C(\|f\|) \cdot \left\{ \int_0^T |f(t)|^2 \times \right.$$
$$\times \| M_0(t)\psi \otimes \psi_f \|^2 dt + \int_0^T [\| M_1(t)\psi \otimes \psi_f \|^2 + \tag{1.12}$$
$$\left. + \| M_2(t)\psi \otimes \psi_f \|^2] dt + \left[\int_0^T \| M_3(t)\psi \otimes \psi_f \| dt \right]^2 \right\},$$

где $\psi \in \mathscr{H}$, $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Назовем $\{M_\alpha(t)\}$ *допустимой* четверкой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется четверка $\{\tilde{M}_\alpha(t)\}$ простых согласованных процессов, такая что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \| [M_0(t) - \tilde{M}_0(t)]\psi \otimes \psi_f \| < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \| [M_{1,2}(t) - \tilde{M}_{1,2}(t)]\psi \otimes \psi_f \|^2 dt < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \| [M_3(t) - \tilde{M}_3(t)]\psi \otimes \psi_f \| dt < \varepsilon,$$

и *сильно допустимой* четверкой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется четверка $\{\tilde{M}_\alpha\}$ простых согласованных процессов со значениями в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, такая что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \| M_0(t) - \tilde{M}_0(t) \| < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \| M_{1,2}(t) - \tilde{M}_{1,2}(t) \|^2 dt < \varepsilon, \tag{1.13}$$
$$\int_0^T \| M_3(t) - \tilde{M}_3(t) \| dt < \varepsilon.$$

Из неравенства (1.12) вытекает, что для любой допустимой четверки стохастический интеграл

$$I(T)=\int_0^T (M_0 d\Lambda+M_1 dA+M_2 dA^+ + M_3 dt) \tag{1.14}$$

определен на $\mathscr{H}\otimes\Gamma_e$ как сильный предел стохастических интегралов вида (1.11) от простых процесов $\{\widetilde{M}_\alpha\}$ и является согласованным процессом. Если $M_3\equiv 0$, то $I(t)$ является мартингалом; доказано, что достаточно произвольный ограниченный мартингал в пространстве Фока является стохастическим интегралом (Партасарати и Синха). Пример неограниченного мартингала, не представимого в виде стохастического интеграла по основным процессам, содержится в работе Журне [113].

Из определений (1.2) основных мартингалов вытекает явная формула (В. П. Белавкин [35])

$$(I(t)\psi)(\tau)=\int_0^t [M_3(s)\psi+M_1(s)\psi^{(s)}](\tau)\,ds+$$
$$+\sum_{\substack{s\in\tau\\ s\leqslant t}} [M_2(s)\psi+M_0(s)\psi^{(s)}](\tau\setminus\{s\}),$$

где $\psi^{(s)}(\tau)=\psi(\tau\cup\{s\})$, которая может служить для альтернативного определения стохастического интеграла, имеющего смысл для более широких классов процессов (включая несогласованные процессы).

Стохастический интеграл по процессам в антисимметричном пространстве Фока рассматривался Барнетом, Стритером, Уайлдом [62], [141], Хадсоном и Эпплбаумом [107].

1.3. Квантовая формула Ито. Соотношение (1.14) принято записывать в дифференциальной форме

$$dI=M_0 d\Lambda+M_1 dA+M_2 dA^+ + M_3 dt. \tag{1.15}$$

Пусть $J(t)$ — другой стохастический интеграл, так что $dJ=$ $=N_0 d\Lambda+N_1 dA+N_2 dA^+ + N_3 dt$.

Теорема. Если четверки $\{M_\alpha\}$, $\{N_\alpha\}$ сильно допустимы, то произведение $I(t)J(t)$ является стохастическим интегралом, причем

$$d(IJ)=I(dJ)+(dI)J+(dI)(dJ),$$

где произведение вычисляется по следующим формальным правилам: значения любого согласованного процесса в момент t коммутируют со стохастическими дифференциалами основных процессов $d\Lambda(t)$, $dA(t)$, $dA^+(t)$, dt, а в слагаемом $(dI)(dJ)$ произведения стохастических дифференциалов основных процессов находятся согласно таблице умножения

$$\begin{array}{c|cccc} & dA^+ & d\Lambda & dA & dt \\ \hline dA & dt & dA & 0 & 0 \\ d\Lambda & dA^+ & d\Lambda & 0 & 0 \\ dA^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,. \tag{1.16}$$

Алгебра стохастических дифференциалов (1.15) с таблицей умножения (1.16) изоморфна некоторой алгебре 3×3-матриц. Особенно удобна реализация, предложенная В. П. Белавкиным в [35]: соответствие

$$dI = M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt \leftrightarrow$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & M_3 \\ 0 & M_0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

оказывается инволютивным алгебраическим изоморфизмом, переводящим инволюцию $(dI)^* = M_0^* d\Lambda + M_2^* dA + M_1^* dA^+ + M_3^* dt$ в инволюцию

$$\begin{bmatrix} 0 & M_1 & M_3 \\ 0 & M_0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\bigstar} = \begin{bmatrix} 0 & M_2^* & M_3^* \\ 0 & M_0^* & M_1^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим стохастические интегралы

$$B(t) = \int\limits_0^t J(s)\, dA(s), \quad B^+(t) = \int\limits_0^t J(s)\, dA^+(s),$$

где $J(t) = (-1)^{\Lambda(t)}$ — сильно допустимый процесс. Из формулы (1.24) следующего пункта вытекает, что $J(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dJ = -2J d\Lambda.$$

Пользуясь таблицей (1.16), находим

$$d(BJ + JB) = -2(BJ + JB)\, d\Lambda.$$

Поскольку $B(0) = 0$, то из теоремы следующего пункта вытекает, что $B(t)J(t) + J(t)B(t) \equiv 0$. Снова пользуясь таблицей (1.16), находим $d(BB^+ + B^+B) = dt$, откуда

$$B(t)B^+(t) + B^+(t)B(t) = t,$$

т. е. операторы $B(t)$, $B^+(t)$ удовлетворяют каноническому антикоммутационному соотношению для фермионных операторов рождения—уничтожения. Этот факт лежит в основе изоморфизма между симметричным (бозонным) и антисимметричным (фермионным) пространствами Фока, установленного Хадсоном и Партасарати [109].

Квантовый стохастический интеграл и формула Ито имеют естественное обобщение на случай многих степеней свободы, когда основные процессы $A_j(t)$, $A_k^+(t)$, $\Lambda_{jk}(t)$ многомерны и действуют в пространстве Фока $\Gamma(L_{\mathscr{K}}^2(\mathbf{R}_+))$, где $\mathscr{K}$ — гильбертово пространство, размерность которого равна числу степеней свободы (Хадсон, М. П. Эванс [143], В. П. Белавкин [35]), а также в нефоковских пространствах, связанных с гауссовскими состояниями канонических коммутационных соотношений (Хадсон, Линдсей [142]).

1.4. Квантовые стохастические дифференциальные уравнения. Рассмотрим линейное однородное квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$dV=[L_0d\Lambda+L_1dA+L_2dA^++L_3dt]V,\ t\geqslant 0, \tag{1.18}$$

с начальным условием $V(0)=\mathrm{I}$, которое является краткой записью интегрального уравнения

$$V(t)=\mathrm{I}+\int_0^t[L_0(s)\,d\Lambda(s)+L_1(s)\,dA(s)+L_2(s)\,dA^+(s)+$$
$$+L_3(s)\,ds]V(s).$$

Модифицируя рассуждение Хадсона и Партасарати [108], основанные на методе последовательных приближений, можно доказать следующую теорему.

Теорема. Если $\{L_\alpha\}$ — сильно допустимая четверка, то решение $\{V(t);\ t\in\mathbf{R}_+\}$ уравнения (1.18) существует, единственно и является сильно непрерывным согласованным процессом.

Обозначим $\mathscr{S}_t$ оператор временного сдвига в $\mathfrak{H}:\mathscr{S}_t\psi(\tau)=$ $=\psi(\tau_t)$, где $\tau_t=\{t_1+t,\ldots,t_n+t\}$, если $\tau=\{t_1,\ldots,t_n\}$. Решение $V(t)$ удовлетворяет уравнению коцикла

$$V(t+u)=(\mathscr{S}_u{}^*V(t)\mathscr{S}_u)V(u);\ t,\ u\in\mathbf{R}_+. \tag{1.19}$$

Особый интерес представляет случай, когда $V(t)$, $t\in\mathbf{R}_+$, являются унитарными операторами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.18) имело вид

$$\begin{aligned} dV=[(W-\mathrm{I})\,d\Lambda+L\,dA^+-L^*W\,dA-\\ \left(iH+\frac{1}{2}L^*L\right)dt]V,\end{aligned} \tag{1.20}$$

где W — унитарный, а H — самосопряженный операторы из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

Весьма важной является задача обобщения теоремы существования и единственности решения уравнения (1.18) на случай неограниченных коэффициентов $L_\alpha(t)$. Некоторые результаты в этом направлении имеются в работах Хадсона и Партасарати [108], Журне [113], Фриджерио, Фаньолы, А. М. Чеботарева [75]. В работе [113] частично решена задача описания сильно непрерывных унитарных решений уравнения (1.19). Этот вопрос тесно связан с проблемой консервативности, обсуждавшейся в п. 3.2.3.

Уравнения типа (1.18) связаны с линейными стохастическими дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве (см., в частности, А. В. Скороход [33]), и можно надеяться, что эти два направления взаимно обогатят друг друга. Решения уравнения (1.20) являются некоммутативным аналогом мультипликативного процесса с независимыми стационарными приращениями в группе унитарных операторов. Общая теория таких процессов развита Аккарди, фон Вальденфельсом и Шурманом [54]. Последний показал [144], [147], что всякий такой процесс, удовлетворяющий условию равномерной непрерывности, является решением уравнения типа (1.20). Используя аналогию с квантовыми процессами, А. С. Холево указал стохастическое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет произвольный классический мультипликативный процесс с независимыми стационарными приращениями в группе Ли (мультипликативный аналог разложения Ито) [104].

Наглядное представление решений уравнения (1.18) дают хронологически упорядоченные экспоненты, родственные мультипликативному стохастическому интегралу в классической теории случайных процессов (по поводу последнего см. Эмери [82]). Пусть $\{\tilde{M}_\alpha(t)\}$ — четверка простых согласованных процессов на $[0, T]$ со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Положим

$$V_j = \exp[\tilde{M}_0(t_{j-1})(\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})) + \\ + \tilde{M}_1(t_{j-1})(A(t_j) - A(t_{j-1})) + \tilde{M}_2(t_{j-1})(A^+(t_j) - A^+(t_{j-1})) + \\ + \tilde{M}_3(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})]$$

и обозначим

$$\overleftarrow{\exp}\int_0^T (\tilde{M}_0 d\Lambda + \tilde{M}_1 dA + \tilde{M}_2 dA^+ + \tilde{M}_3 dt) = \\ = V_N \cdot \ldots \cdot V_1. \qquad (1.21)$$

Оператор (1.21) определен на $\mathcal{H}\otimes\Gamma_e$. В работе А. С. Холево (см. [145]) доказано, что если $\{M_\alpha\}$ — сильно допустимая четверка согласованных процессов со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\{\tilde{M}_\alpha^{(N)}\}$ — последовательность четверок простых процессов, аппроксимирующая $\{M_\alpha\}$ в смысле (1.13), то существует сильный предел на $\mathcal{H}\otimes\Gamma_e$ выражений вида (1.21), который называется *хронологически упорядоченной экспонентой.* При этом семейство хронологически упорядоченных экспонент

$$V(t) = \overleftarrow{\exp}\int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt), \quad t \in \mathbf{R}_+, \qquad (1.22)$$

является сильно непрерывным на $\mathscr{H}\otimes\Gamma_e$, согласованным процессом, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1.18), где $\{L_\alpha\}$ и $\{M_\alpha\}$ связаны соотношениями

$$L_0=a(M_0),\ L_1=M_1b(M_0),\ L_2=b(M_0)M_2,$$
$$L_3=M_3+M_1c(M_0)M_2.$$

Здесь a, b, c — целые функции

$$a(z)=e^z-1,\quad b(z)=\frac{e^z-1}{z},\quad c(z)=\frac{e^z-1-z}{z^2},\quad z\neq 0. \qquad (1.23)$$

Используя изоморфизм (1.17), эти соотношения можно объединить в одно матричное равенство

$$\mathbf{L}=e^{\mathbf{M}}-\mathrm{I}.$$

Если коэффициенты $M_\alpha(t)$ коммутируют между собой при всевозможных значениях временных аргументов, то хронологически упорядоченная экспонента превращается в обычную

$$V(t)=\exp\int_0^t(M_0d\Lambda+M_1dA+M_2dA^++M_3dt),$$

и дает, таким образом, явное решение уравнения (1.18).

Пример. Решение уравнения

$$dJ_z=zJ_zd\Lambda;\quad J_z(0)=\mathrm{I}, \qquad (1.24)$$

при $z\neq-1$ записывается в виде

$$J_z(t)=(z+1)^{\Lambda(t)},\ t\in\mathrm{R}_+.$$

Если $z=-1$, то решение уравнения (1.24) имеет вид

$$J_{-1}(t)=\delta_{0,\Lambda(t)},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Поскольку $J_{-1}(t)$ обращается в нуль, оно не может быть записано в виде экспоненты.

Хронологически упорядоченные экспоненты

$$V(t)=\overleftarrow{\exp}\int_0^t(LdA^+-L^*dA-iHdt) \qquad (1.25)$$

рассматривались фон Вандельфельсом, а также Хадсоном и Партасарати в [141], [20]. Эти экспоненты являются унитарными операторами, удовлетворяющими уравнению

$$dV=[LdA^+-L^*dA-\left(iH+\frac{1}{2}L^*L\right)dt]V;\ V(0)=\mathrm{I}. \qquad (1.26)$$

Пример. Пусть $\dim\mathscr{H}=1$ и $f\in L^2(\mathrm{R}_+)$. Экспонента

$$V_f(t)=\exp\int_0^t(f(s)\,dA^+(s)-\overline{f(s)}\,dA(s))$$

является унитарным решением уравнения

$$dV_f(t) = [f(t)\,dA^+(t) - \overline{f(t)}\,dA(t) - \frac{1}{2}|f(t)|^2 dt]\,V_f(t) \quad (1.27)$$

в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$. Из этого уравнения и квантовой формулы Ито вытекает, что процессы $V_f(t)V_g(t)$ и $V_{f+g}(t)\exp i\,\mathrm{Im}\int_0^t f(s)\times \times\overline{g(s)}\,ds$, где g—другая функция из $L^2(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяют одному и тому же уравнению; кроме того, они совпадают при $t=0$ и, следовательно, тождественно равны, т. е.

$$V_f(t)V_g(t) = V_{f+g}(t)\exp\left[i\,\mathrm{Im}\int_0^t f(s)\,\overline{g(s)}\,ds\right]. \quad (1.28)$$

Рассмотрим $L^2(\mathrm{R}_+)$ как вещественное линейное пространство Z с кососимметричной формой

$$\Delta(f, g) = 2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty f(s)\,\overline{g(s)}\,ds.$$

Из (1.28) тогда следует, что операторы $W(f) = V_f(\infty)$ образуют (неприводимое) представление канонического коммутационного соотношения Вейля (1.2.12) в симметричном (бозонном) пространстве Фока $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, а формулы (1.4), (1.5) дают инфинитезимальную форму канонического коммутационного соотношения. При этом экспоненциальные векторы играют ту же роль, что и когерентные состояния в случае конечного числа степеней свободы, а отображение дуальности (см. п. 2.1) соответствует переходу к представлению Шрёдингера, диагонализирующему операторы $Q(t)$.

Дальнейшие сведения о квантовом стохастическом исчислении можно найти в обзоре Мейера [128], а также в сборниках [142]—[145], охватывающих такие темы, как связи с некоммутативной геометрией (Хадсон, Эпплбаум, Робинсон), применение в теории кратного стохастического интеграла (Маассен, Мейер, Партасарати, Линдсей), некоммутативные случайные блуждания в «игрушечном пространстве Фока» и их сходимость к основным процессам (Партасарати, Линдсей, Аккарди) и другие.

§ 2. Расширения в пространстве Фока

Благодаря структуре непрерывного тензорного произведения, пространство Фока является естественным вместилищем различных «безгранично делимых» объектов. В конце 60-х годов Араки и Стритер рассматривали безгранично делимые представления групп и показали, что такие представления вкладываются в пространство Фока. Поскольку представление группы определяется некоторой положительно определенной функцией, то этот результат дает запись безгранично делимой положительно определенной функции через фоковское вакуумное среднее (см. [96], [138]). Отсюда также следует, что всякое безгранично-делимое распределение вероятностей может быть реализовано как распределение некоторой квантовой наблюдаемой относительно вакуумного состояния в пространстве Фока. Таким образом, пространство Фока вмещает в себя все процессы с независимыми приращениями, а также процессы «квантового шума», которые дают универсальную модель окружения открытой квантовой системы. Это обстоятельство лежит в основе конструкций расширения, использующих фоковское пространство.

2.1. Винеровский и пуассоновский процессы в пространстве Фока. Если $\{X(t);\ t\in\mathbf{R}\}$ — коммутирующее семейство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то оно *диагонализуемо*: существует пространство с мерой $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mu)$ и унитарный оператор J из $\mathfrak{H}$ на $L^2(\Omega, \mu)$, такие что

$$(JX(t)J^{-1}\varphi)(\omega)=X_t(\omega)\varphi(\omega),$$

для $\varphi\in L^2(\Omega, \mu)$, где $X_t(\omega)$ — вещественные измеримые функции. При этом для любого $\psi\in\mathfrak{H}$ и ограниченной борелевской функции $f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\langle \psi | f(X(t_1), \ldots, X(t_n))\psi \rangle = \int f(X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega))P(d\omega)$$

где $P(d\omega)=|(J\psi)(\omega)|^2\mu(d\omega)$ — вероятностная мера на Ω. В этом смысле семейство $\{X(t)\}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с выделенным вектором ψ *стохастически эквивалентно* случайному процессу $\{X_t(\omega)\}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), P)$.

Рассмотрим коммутирующее (в силу (1.5)) семейство самосопряженных операторов $\{Q(t)\}$ в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$. Пусть $\{W_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — стандартный винеровский процесс, $L^2(W)$ — гильбертово пространство комплексных квадратично интегрируемых функционалов от винеровского процесса. *Отображение дуальности* (Сигал)

$$J\psi=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\int\ldots\int_{\mathfrak{P}_n} f_n(t_1, \ldots, t_n)\,dW_{t_1}\ldots dW_{t_n},$$

где в правой части формулы — кратные стохастические интегралы в смысле Ито, является изоморфизмом пространства Фока $\mathfrak{H}=\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ и $L^2(W)$, причем

$$J\psi_0=1;\quad JQ(t)J^{-1}=W_t.$$

Поэтому семейство $\{Q(t)\}$ в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ с вакуумным вектором ψ_0 стохастически эквивалентно винеровскому процессу W_t. Аналогичное утверждение справедливо и для коммутирующего семейства $\{P(t)\}$. Заметим, что в силу (1.5) операторы $Q(t)$ и $P(s)$ не коммутируют между собой и поэтому семейство $\{Q(t), P(t)\}$ не эквивалентно двумерному винеровскому процессу. Унитарный оператор $U\psi(\tau)=i^{|\tau|}\psi(\tau)$ переводит ψ_0 в ψ_0 и

$$P(t)=UQ(t)U^{-1}.$$

Оператору U в $L^2(W)$ отвечает преобразование Фурье—Винера [1].

Рассмотрим теперь коммутирующее семейство самосопряженных операторов $\{\Lambda(t)\}$. Пусть $\{N_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), P_\lambda)$ и $L^2(N)\equiv L^2(\Omega, P_\lambda)$. Отображение

$$J^{(\lambda)}\psi=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\mathfrak{P}_n}\cdots\int f_n(t_1, \ldots, t_n)\,dX_{t_1}\ldots dX_{t_n},$$

где $X_t=\lambda^{-1/2}(N_t-\lambda t)$ — компенсированный пуассоновский процесс, является изоморфизмом пространства Фока $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ и $L^2(N)$, причем

$$J^{(\lambda)}\psi_0=1,\quad J^{(\lambda)}\Pi^{(\lambda)}(t)\,J^{(\lambda)-1}=N_t,$$

где

$$\Pi^{(\lambda)}(t)=\Lambda(t)+\sqrt{\lambda}\,Q(t)+\lambda t. \tag{2.1}$$

Таким образом, семейство $\{\Pi^{(\lambda)}(t)\}$ в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ с вакуумным вектором ψ_0 стохастически эквивалентно пуассоновскому процессу [108].

С точки зрения классической теории вероятностей соотношение (2.1) не может не вызвать удивления — пуассоновский процесс представлен как сумма винеровского процесса с постоянным сносом и процесса $\Lambda(t)$, равного нулю почти наверное (относительно вакуумного состояния). Дело, конечно, в том, что слагаемые не коммутируют и поэтому не могут рассматриваться как классические случайные процессы на одном вероятностном пространстве. Заметим, что подобная связь между пуассоновским и нормальным распределением хорошо известна в квантовой оптике [21].

В подходящее пространство Фока $\Gamma(L^2_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}_+))$, где $L^2_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}_+)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций со значениями в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$, может быть вложен произвольный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями (Партасарати, см. [128]). Представление такого процесса требует, вообще говоря, бесконечного числа независимых процессов рождения-уничтожения-числа частиц.

Среди процессов с независимыми приращениями только ви-

[1] См. Т. Хида. Броуновское движеиие.— М.: Наука, 1987.

неровский и пуассоновский обладают следующим свойством *хаотической представимости*: гильбертово пространство квадратично интегрируемых функционалов от процесса является прямой суммой подпространств, порождаемых n-кратными стохастическими интегралами (Винер, Ито). Вопрос — какие другие мартингалы обладают этим свойством — привлек внимание специалистов по теории случайных процессов. В частности, Эмери показал, что этим свойством обладает мартингал Аземы

$$X_t = \operatorname{sgn} W_t \sqrt{2(t-g_t)}, \tag{2.2}$$

где g_t — последний нуль винеровского процесса W_t перед моментом t. Партасарати [137] рассмотрел квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = (c-1)X(t)\,d\Lambda(t) + dQ(t), \quad X(0)=0,$$

и показал, что при любом $c \in [-1, 1]$ оно имеет решение, являющееся коммутирующим семейством самосопряженных операторов и стохастически эквивалентное (относительно вакуумного вектора) мартингалу со свойством хаотической представимости. Как заметил Мейер, при $c=0$ решение $X(t)$ стохастически эквивалентно мартингалу Аземы. Таким образом, в высшей степени нелинейное преобразование (2.2) винеровского процесса оказывается тесно связанным с линейным стохастическим дифференциальным уравнением для некоммутирующих процессов.

2.2 Стохастические эволюции и расширения динамических полугрупп. Интересный класс безгранично делимых объектов возникает в связи с динамическими полугруппами. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, Φ — динамическое отображение в алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, т. е. нормальное вполне положительное отображение, такое что $\Phi[I]=I$. Назовем Φ *безгранично делимым*, если для любого $n=1, 2, \ldots$ $\Phi = (\Phi_n)^n$, где Φ_n — динамическое отображение. Если $\{\Phi_t;\ t \in \mathbf{R}_+\}$ — динамическая полугруппа, то все отображения Φ_t безгранично делимы, поскольку $\Phi_t = (\Phi_{t/n})^n$. С другой стороны, если $\dim \mathscr{H} < \infty$, то всякое безгранично делимое динамическое отображение имеет вид $\Phi = \mathscr{E} \cdot e^{\mathscr{L}}$, где $\mathscr{E}$ — условное ожидание на некоторую подалгебру $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, а $\mathscr{L}$ — вполне диссипативное отображение, оставляющее подалгебру $\mathfrak{B}$ инвариантной [15]. Отображение $\mathscr{E}$ играет роль, аналогичную идемпотентному делителю в теории безгранично делимых положительно определенных функций на группах [138]. Если $\mathscr{E} = \mathrm{Id}$, то через Φ можно провести квантовую динамическую полугруппу.

В работе Хадсона и Партасарати [108] было построено вложение непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы в пространство Фока, которое может быть истолковано как расширение до марковского квантового случайного процесса в смысле п. 3.2.6 (см. статью Фриджерио в [142]). Для простоты ограничимся описанием конструкции работы [108] для полугруппы с инфинитезимальным оператором вида

$$\mathscr{L}[X]=i[H,\ X]+L^*XL-L^*L\circ X, \tag{2.3}$$

где $H,\ L\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}),\ H^*=H$.

Предложение. Пусть $\{\Phi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — квантовая динамическая полугруппа в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ с инфинитезимальным оператором (2.3). Тогда

$$\Phi_t[X]=\mathscr{E}_0[V(t)^*(X\otimes I)V(t)],\ X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}), \tag{2.4}$$

где $\{V(t);\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — семейство унитарных операторов в $\mathfrak{H}=\mathscr{H}\otimes\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, удовлетворяющее уравнению (1.26), а отображение $\mathscr{E}_0:\mathfrak{B}(\mathfrak{H})\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ — усреднение по вакуумному состоянию, определяемое формулой

$$\mathrm{Tr}\, S\mathscr{E}_0[Y]=\mathrm{Tr}\,(S\otimes|\psi_0\rangle\langle\psi_0|)Y.$$

для любого оператора плотности S в $\mathscr{H}$ и любого $Y\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Из уравнения (1.26) и квантовой формулы Ито вытекает *квантовое уравнение Ланжевена* для $X(t)$:

$$dX(t)=[L(t)^*,\ X(t)]dA(t)+[X(t),\ L(t)]dA^+(t)+$$
$$+\{i[H(t),\ X(t)]+(L(t)^*X(t)L(t)-L(t)^*L(t)\circ X(t))\}dt.$$

Усредняя по вакуумному состоянию и учитывая первое из соотношений

$$dA(t)\psi_0=0,\quad d\Lambda(t)\psi_0=0, \tag{2.5}$$

вытекающих из (1.6), получаем, что семейство наблюдаемых $\tilde{\Phi}_t[X]=\mathscr{E}_0[V(t)^*(X\otimes I)V(t)]$ в алгебре системы $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ удовлетворяет уравнению

$$d\tilde{\Phi}_t[X]=\tilde{\Phi}_t[\mathscr{L}[X]]\,dt;\quad \tilde{\Phi}_0[X]=X.$$

Отсюда следует, что $\tilde{\Phi}_t[X]=\exp t\mathscr{L}[X]=\Phi_t[X]$.

Пусть теперь $\{\Psi_t;\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — соответствующая динамическая полугруппа в пространстве состояний. Из представления (2.4) вытекает конструктивное доказательство теоремы о расширении, сформулированной в п. 3.2.6. Обозначим $\mathscr{H}_0=\Gamma(L^2(\mathbf{R}))$ пространство Фока, ассоциированное с $L^2(\mathbf{R})$, и пусть $S_0=|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, где ψ_0 — вакуумный вектор в $L^2(\mathbf{R})$. В пространстве $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$ действует группа унитарных операторов временного сдвига $\{\mathscr{S}_t;\ t\in\mathbf{R}\}$, определяемых как в п. 1.4. Поскольку $\mathscr{H}_0=\Gamma(L^2(\mathbf{R}_-))\otimes\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, где $\mathbf{R}_-=(-\infty,\ 0)$, действие основных процессов $A(t),\ A^+(t),\ \Lambda(t);\ t\in\mathbf{R}_+$; естественно переносится в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$. Решение уравнения (1.26) является тогда семейством унитарных операторов $\{V(t);\ t\in\mathbf{R}_+\}$ в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$, удовлетворяющим соотношению коцикла (1.19). Из этого соотношения вытекает, что

$$U_t=\begin{cases}\mathcal{S}_t V(t), & t\in\mathbf{R}_+,\\ V(-t)^*\mathcal{S}_t, & t\in\mathbf{R}_-\end{cases}$$

является группой унитарных операторов в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_0$. Поскольку $\mathcal{S}_t^*(X\otimes I)\mathcal{S}_t=X\otimes I$, из (2.4) следует, что

$$\Psi_t[S]=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}U_t(S\otimes S_0)U_t^*,\quad t\in\mathbf{R}_+.$$

Построенное расширение имеет прозрачную физическую интерпретацию. Группа операторов временного сдвига $\{\mathcal{S}_t\}$ описывает динамику квантового шума, который играет роль окружения рассматриваемой системы. Записывая операторы $V(t)$ в виде хронологически упорядоченной экспоненты (1.25), можно видеть, что они задают эволюцию системы с гамильтонианом H, взаимодействующей с окружением посредством сингулярного гамильтониана

$$H_{\mathrm{int}}=i(L\dot{A}^+(t)-L^*\dot{A}(t)).\tag{2.6}$$

Усреднение унитарной эволюции $\{U_t\}$ по вакуумному состоянию шума и дает динамическую полугруппу в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Аналогичное унитарное расширение имеет место для произвольной квантовой динамической полугруппы с инфинитезимальным оператором (3.2.4) — надо только использовать квантовое стохастическое исчисление с бесконечным набором операторов рождения-уничтожения.

С точки зрения статистической механики представляет интерес выяснение точных условий, при которых такая в высшей степени идеализированная динамическая система, как квантовый шум, возникает из более реалистичных физических моделей открытых систем (см. в этой связи работу [52], где обсуждаются приближения слабого взаимодействия и малой плотности).

Из формулы (2.4) можно получить представления квантовой динамической полугруппы через решения классических стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см. статью А. С. Холево в [35]). Пусть W_t — стандартный винеровский процесс и $\{V_t^{(1)}(W);\ t\in\mathbf{R}_+\}$ — случайный процесс со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dV_t^{(1)}(W)=\left[L\,dW_t-\left(iH+\frac{1}{2}L^*L\right)dt\right]V_t^{(1)}(W);$$

$$V_0^{(1)}(W)=I.\tag{2.7}$$

Тогда

$$\Phi_t[X]=\mathbf{M}_{(1)}V_t^{(1)}(W)^*XV_t^{(1)}(W),\tag{2.8}$$

где $\mathbf{M}_{(1)}$ — математическое ожидание, отвечающее распределению винеровского процесса. С другой стороны, пусть N_t — пуассоновский процесс с единичной интенсивностью и $\{V_t^{(2)}(N),$

$t \in \mathbf{R}_+\}$ удовлетворяет уравнению

$$dV_t^{(2)}(N) = \left[(L - \mathrm{I})\, dN_t - \left(iH + \frac{1}{2}(L^* L - \mathrm{I})\right) dt\right] V_t^{(2)}(N);$$

$$V_0^{(2)}(N) = \mathrm{I}. \tag{2.9}$$

Тогда

$$\Phi_t[X] = \mathbf{M}_{(2)} V_t^{(2)}(N)^* X V_t^{(2)}(N), \tag{2.10}$$

где $\mathbf{M}_{(2)}$ — математическое ожидание, отвечающее распределению пуассоновского процесса.

Заметим, что решения уравнений (2.7), (2.9) могут быть записаны в виде хронологически-упорядоченных экспонент (мультипликативных стохастических интегралов)

$$V_t^{(1)}(W) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \left\{L dW_s - \left[iH + \frac{1}{2}(L^* + L) L\right] ds\right\}, \tag{2.11}$$

$$V_t^{(2)}(N) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \left\{(\ln L)\, dN_s - \left[iH + \frac{1}{2}(L^* L - \mathrm{I})\right] ds\right\}. \tag{2.12}$$

Ограничимся выводом представления (2.8). Введем семейство изометрических операторов $V_t^{(1)}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathfrak{H} = \mathscr{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, определяемых соотношением

$$V_t^{(1)} \varphi = V(t)(\varphi \otimes \psi_0); \quad \varphi \in \mathscr{H}. \tag{2.13}$$

Из уравнения (1.26) следует

$$dV_t^{(1)} = \left[L dQ(t) - \left(iH + \frac{1}{2} L^* L\right) dt\right] V_t^{(1)}, \tag{2.14}$$

поскольку в силу (2.5) коэффициент при $dA(t)$ может быть произвольным. Если воспользоваться теперь преобразованием дуальности, то формула (2.4) перейдет в (2.8), а уравнение (1.26) — в уравнение (2.7). Аналогично, вывод представления (2.10) из формулы (2.4) основан на преобразовании $J^{(\lambda)}$ из п. 2.1 (при $\lambda = 1$) (см. п. 2.4).

2.3. Расширения инструментальных процессов. При рассмотрении процессов непрерывного измерения естественно возникает понятие безграничной делимости инструмента, которое объединяет безграничную делимость распределений вероятностей и динамических отображений. В работе Баркиелли и Лупиери (см. [61], [142]) указано соответствующее расширение в пространстве Фока, которое можно рассматривать как конкретизацию общего результата Озава (п. 4.1.2) для процессов измерения, протекающих во времени. Ограничимся здесь двумя наиболее важными примерами.

Пример 1. Рассмотрим и.-процесс $\{\mathcal{N}^{(1)}_{a,b}\}$ с генератором

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda)[X]=\mathcal{L}[X]+i\lambda(L^*X+XL)-\frac{1}{2}\lambda^2X, \quad (2.15)$$

где L, $H=H^*$ — ограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $\mathcal{L}[X]$ дается формулой (2.3). Согласно п. 4.2.3, это есть процесс непрерывного измерения наблюдаемой $A=(L+L^*)$ в системе, эволюционирующей с гамильтонианом H. Из результата Баркиелли и Лупиери следует, что

$$\mathcal{N}^{(1)}_{0,t}(E)[X]=\mathcal{E}_0[V(t)^*(X\otimes P^{(1)}_{0,t}(E))V(t)];\quad E\in\mathcal{B}_{0,t}, \quad (2.16)$$

где $\{V(t)\}$ — семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}=\mathcal{H}\otimes\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, удовлетворяющее квантовому стохастическому дифференциальному уравнению (1.26), а $P^{(1)}_{0,t}(E)$; $E\in\mathcal{B}_{0,t}$, спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $Q(s)$; $0\leqslant s\leqslant t$, в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ (см. п. 4.2.1) (в силу однородности аналогичное представление имеет место и для $\mathcal{N}^{(1)}_{a,b}$, где $a\leqslant b$).

Пусть $\{\mathcal{M}^{(1)}_{a,b}\}$ — соответствующий и.-процесс в пространстве состояний. Тогда соотношение (2.16) приобретает вид формулы (4.1.10)

$$\mathcal{M}^{(1)}_{0,t}(E)[S]=\mathrm{Tr}_{\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))}V(t)(S\otimes|\psi_0\rangle\langle\psi_0|)\times$$
$$\times V(t)^*(I\otimes P^{(1)}_{0,t}(E)), \quad (2.17)$$

которая имеет ясную физическую интерпретацию: наблюдаемая система, первоначально находившаяся в состоянии S и эволюционирующая с гамильтонианом H, взаимодействует с квантовым шумом посредством сингулярного гамильтониана (2.6). При этом над квантовым шумом, который играет роль пробной системы, производится непрерывное неразрушающее измерение семейства совместимых наблюдаемых $Q(s)$; $0\leqslant s\leqslant t$.

Пример 2. И.-процесс $\{\mathcal{N}^{(2)}_{a,b}\}$ с генератором

$$\mathcal{L}^{(2)}(\lambda)[X]=i[H,X]+(L^*XLe^{i\lambda}-L^*L\circ X), \quad (2.18)$$

где H, $L\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, является естественным обобщением считающего процесса из п. 4.2.5. Для этого процесса расширение имеет вид

$$\mathcal{N}^{(2)}_{0,t}(E)=\mathcal{E}_0[V(t)^*(I\otimes P^{(2)}_{0,t}(E))V(t)];\quad E\in\mathcal{B}_{0,t}, \quad (2.19)$$

где $P^{(2)}_{0,t}(E)$; $E\in\mathcal{B}_{0,t}$, спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $\Lambda(s)$; $0\leqslant s\leqslant t$, в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$. Соответствующее представление в пространстве состояний

$$\mathcal{M}^{(2)}_{0,t}(E)=\mathrm{Tr}_{\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))}V(t)(S\otimes|\psi_0\rangle\langle\psi_0|)V(t)^*(I\otimes P^{(2)}_{0,t}(E)) \quad (2.20)$$

имеет интерпретацию, аналогичную соотношению (2.17).

Несколько слов о методе доказательства соотношений (2.16), (2.19). Обозначим

$$\tilde{\mathscr{N}}_t^{(j)}(B) = \mathscr{E}_0[V(t)^* (I \otimes P_{0,t}^{(j)}(y(\cdot): y(t) - y(0) \in B)) V(t)],$$

где $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, и введем характеристические функции

$$\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x} \tilde{\mathscr{N}}_t^{(j)}(dx).$$

Тогда

$$\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda)[X] = \mathscr{E}_0[V(t)^* (X \otimes e^{i\lambda Y^{(j)}(t)}) V(t)], \tag{2.21}$$

где $Y^{(1)}(t) = Q(t)$ и $Y^{(2)}(t) = \Lambda(t)$. Используя квантовую формулу Ито, можно доказать, что функции (2.21) удовлетворяют уравнениям

$$d\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \mathscr{L}^{(j)}(\lambda) \cdot \tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda)\, dt,$$

т. е.

$$\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \exp t\mathscr{L}^{(j)}(\lambda).$$

Отсюда вытекает, что $\{\tilde{\mathscr{N}}_t^{(j)}\}$ есть сверточная полугруппа, отвечающая и.-процессу $\{\mathscr{N}_{a,b}^{(j)}\}$. В силу взаимной однозначности соответствия между и.-процессами и сверточными полугруппами (п. 4.2.5) отсюда следуют соотношения (2.16), (2.19).

2.4. Стохастические представления процессов непрерывного измерения. Используя прием, который позволил получить в п. 2.2 стохастические представления квантовой динамической полугруппы, найдем соответствующие стохастические представления для процессов непрерывного измерения [105]. Из этих представлений вытекает явное описание распределений вероятностей в пространстве траекторий — исходов непрерывного измерения и апостериорных состояний наблюдаемой квантовой системы.

Рассмотрим сначала и.-процесс с генератором (2.15). Как отмечалось в п. 4.2.5, он сосредоточен на непрерывных траекториях. Пусть $\mu_{(1)}$ — мера Винера в пространстве непрерывных функций $\mathscr{C}$, отвечающая стандартному винеровскому процессу W_t.

Предложение 1. И.-процесс $\{\mathscr{M}_{a,b}^{(1)}\}$ абсолютно непрерывен по мере $\mu_{(1)}$ в том смысле, что

$$\mathscr{M}_{0,t}^{(1)}(E)[S] = \int_E V_{(t)}^{(1)}(W)\, S V_t^{(1)}(W)^* d\mu_{(1)}(W); \quad E \in \mathscr{B}_{0,t} \cap \mathscr{C}, \tag{2.22}$$

где $\{V_t^{(1)}(W)\}$ — семейство ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению (2.7) относительно меры $\mu_{(1)}$.

Доказательство основано на применении преобразования дуальности к представлению (2.17). При этом, как в п. 2.2, появляются операторы $V_t^{(1)}(W)$, а спектральная мера $P_{0,t}^{(1)}$ семейства $Q(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$, диагонализуется, так что проектор $P_{0,t}^{(1)}(E)$ переходит в индикатор множества $E \in \mathscr{B}_{0,t} \cap \mathscr{C}$.

Соотношение (2.17) дает конкретное представление вполне положительного инструмента $\mathscr{M}_{0,t}^{(1)}$ в виде (4.1.12). Отсюда получается распределение вероятностей в пространстве наблюдаемых траекторий

$$\mu_S(E) = \int_E \mathrm{Tr}\, S V_t^{(1)}(W)^* V_t^{(1)}(W)\, d\mu_{(1)}(W); \quad E \in \mathscr{B}_{0,t} \cap \mathscr{C}.$$

Оно абсолютно непрерывно по мере Винера $\mu_{(1)}$, причем плотность дается формулой

$$p_t^{(1)}(W) = \mathrm{Tr}\, S V_t^{(1)}(W) V_t^{(1)}(W)^*, \tag{2.23}$$

и почти наверное положительна. Апостериорное состояние, отвечающее наблюдаемой траектории W_s; $0 \leqslant s \leqslant t$, есть

$$S_t^{(1)}(W) = p_t^{(1)}(W)^{-1} V_t^{(1)}(W)\, S V_t^{(1)}(W)^*. \tag{2.24}$$

Отметим, что если начальное состояние чистое, $S = |\psi\rangle\langle\psi|$, то апостериорные состояния являются чистыми $S_t^{(1)}(W) = |\psi_t^{(1)}(W)\rangle\langle\psi_t^{(1)}(W)|$, где

$$\psi_t^{(1)}(W) = V_t^{(1)}(W)\psi / \|V_t^{(1)}(W)\psi\|.$$

Перейдем к случаю считающего процесса с генератором (2.18). Пусть $\mu_{(2)}$ — мера в пространстве $\mathscr{D}$, отвечающая пуассоновскому процессу единичной интенсивности.

Предложение 2. И.-процесс $\{\mathscr{M}_{a,b}^{(2)}\}$ абсолютно непрерывен по мере $\mu_{(2)}$, а именно

$$\mathscr{M}_{0,t}^{(2)}(E)[S] = \int_E V_t^{(2)}(N)\, S V_t^{(2)}(N)^* d\mu_{(2)}(N); \quad E \in \mathscr{B}_{0,t} \cap \mathscr{D}, \tag{2.25}$$

где $\{V_t^{(2)}(N)\}$ — семейство ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению (2.9) относительно меры $\mu_{(2)}$.

Доказательство соотношения (2.25) требует некоторого преобразования представления (2.20). Рассмотрим унитарные операторы Вейля $V_z(t) = \exp[zA^+(t) - \bar{z}A(t)]$, где $z \in \mathbf{C}$. При $s \leqslant t$ имеет место соотношение

$$V_z(t)^* \Lambda(s) V_z(t) = \Lambda(s) + \bar{z}A(s) + zA^+(s) + |z|^2 s \equiv \Pi(s),$$

которое проверяется с использованием уравнения (1.27) и квантовой формулы Ито. Положим $z = 1$, тогда $\Pi(s)$ является пуассоновским процессом единичной интенсивности в пространстве

Фока. Обозначая $\tilde{U}_t = V_1(t)^* V(t)$, перепишем (2.20) в виде

$$\mathscr{M}_{0,t}^{(2)}(E) = \mathrm{Tr}_{\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))} \tilde{U}_t (S \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \tilde{U}_t^* \left(\mathrm{I} \otimes \tilde{P}_{0,t}^{(2)}(E)\right), \quad (2.26)$$

где $\tilde{P}_{0,t}^{(2)}$ — спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $\Pi(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$. Из квантовой формулы Ито вытекает уравнение для $\tilde{U}_t$:

$$d\tilde{U}_t = \Big\{(L - \mathrm{I})\, dA^+(t) - (L - \mathrm{I})^* dA(t) - \\ - \left[iH + \frac{1}{2}(L^* L - 2L + \mathrm{I})\right] dt\Big\} \tilde{U}_t.$$

Вводя изометрические операторы $V_t^{(2)}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathfrak{H}$ по формуле

$$V_t^{(2)} \varphi = \tilde{U}_t (\varphi \otimes \psi_0); \quad \varphi \in \mathscr{H},$$

и учитывая соотношения (2.5), получаем уравнение

$$dV_t^{(2)} = \left\{(L - \mathrm{I})\, d\Pi(t) - \left[iH + \frac{1}{2}(L^* L - \mathrm{I})\right] dt\right\} V_t^{(2)}. \quad (2.27)$$

Унитарный оператор $J^{(1)}$ из п. 2.1 переводит пространство Фока $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ в $L^2(N)$, где N_t — классический пуассоновский процесс единичной интенсивности, при этом уравнение (2.27) переходит в (2.9), проектор $\tilde{P}_{0,t}^{(2)}(E)$ — в индикатор множества E, а формула (2.26) — в представление (2.25).

Для распределения вероятностей в пространстве наблюдаемых траекторий и апостериорных состояний получаются формулы, аналогичные (2.23)—(2.25).

2.5. Нелинейные стохастические уравнения апостериорной динамики. Получим стохастические дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют наблюдаемые траектории и апостериорные состояния в процессе непрерывного квантового измерения. Рассмотрим сначала процесс измерения наблюдаемой $A = L + L^*$ с генератором (2.15). Из уравнения (2.7) для семейства $V_t^{(1)}(W)$ и формулы (2.23) вытекает, что плотность $P_t^{(1)}(W)$ распределения вероятностей наблюдаемых траекторий μ_S относительно меры Винера $\mu_{(1)}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dp_t^{(1)}(W) = m_t(W)\, p_t^{(1)}(W)\, dW_t, \quad (2.28)$$

где

$$m_t(W) = \mathrm{Tr}\, S_t^{(1)}(W)\, A$$

— апостериорное среднее наблюдаемой A. Отсюда следует[1], что наблюдаемый процесс $Y(t)$ является процессом диффузионного типа, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY(t) = m_t(Y)\, dt + dW_t. \quad (2.29)$$

[1] См. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974, § 7.2.

Применяя стохастическое исчисление Ито, получаем уравнение для апостериорного состояния (2.24)

$$dS_t^{(1)}(Y)-\mathscr{K}[S_t^{(1)}(Y)]=[(L-m_t(Y))S_t^{(1)}(Y)+ + S_t^{(1)}(Y)(L-m_t(Y))^*][dY(t)-m_t(Y)\,dt], \tag{2.30}$$

где

$$\mathscr{K}[S]=-i[H, S]+LSL^*-L^*L\circ S.$$

Это уравнение было получено В. П. Белавкиным из рассмотрения квантового аналога задачи фильтрации случайных процессов [64]. В случае чистых состояний уравнение для вектора апостериорного состояния имеет вид

$$d\psi_t^{(1)}(Y)=[L-m_t(Y)]\psi_t^{(1)}(Y)[dY(t)-m_t(Y)\,dt]- -\left[iH+\frac{1}{2}\;L^*L-2Lm_t(Y)+m_t(Y)^2)\right]\psi_t^{(1)}(Y)\,dt. \tag{2.31}$$

Нелинейность уравнений (2.30), (2.31) обусловлена нормировкой апостериорных состояний (2.24), в основе же лежит линейное стохастическое уравнение (2.7) типа уравнения Закаи в классической теории фильтрации.

Большой интерес представляет задача вывода и исследования уравнений (2.30), (2.31) в случае, когда L, H — неограниченные операторы. В работе В. П. Белавкина и Сташевского [65] рассмотрено уравнение

$$d\psi_t^{(1)}(Y)=(Q-m_t(Y))\psi_t^{(1)}(Y)[dY(t)-m_t(Y)\,dt]- -\left[iP^2/2m+\frac{1}{2}(Q-m_t(Y))^2\right]\psi_t^{(1)}(Y)\,dt, \tag{2.32}$$

которое получается из (2.31) формальной заменой $H=P^2/2m$, $L=Q$, где P, Q — канонические наблюдаемые нерелятивистской частицы массы m. Это соответствует непрерывному приближенному измерению координаты свободной частицы. Найдено явное решение в случае гауссовского начального состояния и показано, что оно является гауссовским с дисперсией, стремящейся к конечному пределу при $t\to+\infty$. Таким образом, уравнение (2.32) снимает известный квантовомеханический парадокс с расплыванием волнового пакета свободной частицы.

Интересно, что сходные нелинейные уравнения, однако с совершенно иной мотивировкой и интерпретацией, возникли практически одновременно в работах ряда авторов, занимающихся поисками альтернативного концептуального обоснования теории квантового измерения. В работе, опубликованной в сборнике [142], Гирарди, Римини и Вебер поставили вопрос о нахождении уравнений, дающих единое описание микро- и макросистем, из которых, в частности, вытекали бы как обратимая квантовая динамика, так и необратимые изменения типа проекционного постулата. Предлагались различные решения этого вопроса; в работах Джизена [91], Гирарди, Пирла и Римини [89] введено уравнение типа (2.31), где, однако, вместо $dY(t) - m_t(Y)dt$ фигурирует стохастический дифференциал некоторого априорно данного винеровского процесса (уравнение в [91] отличается за счет выбора фазового множителя у $\psi_t^{(1)}$). Пусть $H=0$, $L=\Sigma x_i E_i$ — самосопряженный оператор с чисто точечным спектром. В [91], [89] отмечается, что получающееся уравнение

$$d\psi_t=(L-\langle L\rangle_t)\psi_t dW_t-\frac{1}{2}(L-\langle L\rangle_t)^2\psi_t dt, \qquad (2.33)$$

где $\langle L\rangle_t=\langle\psi_t|L\psi_t\rangle$, дает динамическое описание проекционного постулата $\psi\to\psi_i=E_i\psi/\|E_i\psi\|$, в том смысле, что при $t\to+\infty$ решение ψ_t стремится к одному из состояний ψ_i. В работе Гатарека и Джизена [88] дано математическое исследование уравнения (2.33) для неограниченного оператора L, а также уравнения типа (2.32). Для доказательства существования слабого решения эти авторы использовали формальный прием преобразования вероятностной меры (теорему Гирсанова), который в схеме непрерывного измерения имеет содержательный смысл перехода от процесса $Y(t)$ к винеровскому процессу W_t, определяемого формулой (2.29).

В случае считающего процесса с генератором (2.18) стохастическое уравнение для плотности в пространстве траекторий имеет вид

$$dp_t^{(2)}(N)=[\lambda_t(N)-1]\,p_t^{(2)}(N)(dN-dt),$$

где

$$\lambda_t(N)=\mathrm{Tr}\,S_t^{(2)}(N)\,L^*L$$

— апостериорная интенсивность скачков. Уравнение для апостериорного состояния

$$dS_t^{(2)}(Y)-\mathcal{K}\left[S_t^{(2)}(Y)\right]dt=$$
$$=\left[\frac{LS_t^{(2)}(Y)L^*}{\lambda_t(Y)}-\mathrm{I}\right][dY(t)-\lambda_t(Y)dt]. \qquad (2.34)$$

В статье В. П. Белавина в сборнике [35] приведено общее нелинейное уравнение квантовой фильтрации, включающее в себя как уравнение (2.30), так и (2.34).

ЛИТЕРАТУРА

Приведенная ниже библиография не претендует на полноту. Чтобы облегчить пользование списком литературы, при его составлении предпочтение отдавалось монографиям, сборникам статей и обзорным работам. Ссылки на отдельные статьи носят, в основном, дополняющий характер и даются обычно в тех случаях, когда содержание этих статей не охватывается в достаточной мере перечисленными видами обобщающих публикаций. В частности, значительная доля статей содержится в трудах конференций по квантовой теории вероятностей и ее приложениям [141]—[145] (см. также сборник переводов [20]). В таких случаях в тексте приводится имя автора оригинальной работы и дается ссылка на соответствующий сборник или обзор.

1. *Артемьев А. Ю.* Классификация квантовых марковских кинетических уравнений спиновых систем по группам симметрий окружения // Теор. и мат. физ.— 1989.— *79*, № 3.— С. 323—333
2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.— 543 с.
3. *Белавкин В. П.* Теорема реконструкции для квантового случайного процесса // Теор. и мат. физ.— 1985.— *62*, № 3.— С. 409—431
4. — Квантовые ветвящиеся процессы и нелинейная динамика многоквантовых систем // Докл. АН СССР.— 1988.— *301*, № 6.— С. 1348—1352
5. —, *Гришанин Б. А.* Исследование проблемы оптимального оценивания в квантовых каналах методом обобщенного неравенства Гейзенберга // Пробл. передачи информации.— 1973.— *9*, № 3.— С. 44—52
6. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1986.— 319 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля.— М.: Наука, 1987.— 615 с.
8. *Богомолов Н. А.* Минимаксные измерения в общей теории статистических решений // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— *26*, № 4.— С.798—807
9. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.— 511 с. (Пер.: *Bratteli O., Robinson D. W.* Operator algebras and quantum statistical mechanics I.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer Verlag, 1979)
10. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика.— М.: Наука, 1986.— 495 с. (Пер.: *Weyl H.* Gruppentheorie und quantenmechanik.— Leipzig: S. Hirzel, 1928)
11. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии.— М.: Мир, 1971.— 318 с. (Пер.: *Wigner E. P.* Symmetries and reflections.— Bloomington — London: Indiana Univ. Press, 1970)
12. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов (в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика»).— М.: Мир, 1966.— С. 91—279 (Пер.: *Glauber R. J.* The quantum theory of optical coherence // Phys. Rev.— 1963.— *130*.— С. 2529—2539)
13. *Гренандер У.* Вероятности на алгебраических структурах.— М.: Мир, 1965.— 275 с. (Пер.: *Grenander U.* Probabilities on algebraic structures.— Stockholm, Göteborg, Uppsala: Almquist and Wiksell, 1963)
14. *Гриб А. А.* Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях // Успехи физ. наук. — 1984.— *142*, вып. 4.— С. 619—634
15. *Денисов Л. В.* Безгранично делимые марковские отображения в квантовой теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.— 1988.— *33*, № 2.— С. 417—420
16. *Дирак П.* Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.— 480 с. (Пер.: *Dirac P. A. M.* The principles of quantum mechanics, 4th ed.— Oxford: Oxford Univ. Press, 1958)
17. *Додонов В. В., Манько В. И.* Обобщения соотношений неопределенностей в квантовой механике // Тр. ФИАН СССР.— 1987.— *183*.— С. 5—70
18. Известия ВУЗов. Математика. Т. 8(243).— Изд-во Казан. ун-та, 1982.— 79 с.
19. *Каррузерс П., Ньето М.* Переменные фаза-угол в квантовой механике. В сб. «Когерентные состояния в квантовой теории».— М.: Мир, 1972.— С. 71—146 (Пер.: *Carruthers P., Nieto M. M.* Phase and angle variables in quantum mechanics // Rev. Mod. Phys.— 1968.— 40(2).— С. 411—440)

20. Квантовые случайные процессы и открытые системы. Сер. Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 42.— М.: Мир, 1988.— 222 с.
21. *Клаудер Дж. Сударшан Э.* Основы квантовой оптики.— М.: Мир, 1970. — 428 с. (Пер.: *Klauder J. R., Sudarshan E. C. G.* Fundamentals of quantum optics.— New York, Amsterdam: W. A. Benjamin Inc., 1968)
22. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.— 119 с.
23. *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики.— М.: Мир, 1965.— 222 с. (Пер.: *Mackey G. W.* Mathematical foundations of quantum mechanics.— New York: W. A. Benjamin Inc., 1963)
24. *Маслов В. П.* Операторные методы.— М.: Наука, 1973.— 538 с.
25. *Менский М. Б.* Группа путей: измерения, поля, частицы.— М.: Наука, 1983.— 319 с.
26. *фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.— 367 с. (Пер.: *von Neumann J.* Mathematische grundlagen der quantenmechanik.— Berlin: Springer Verlag, 1932)
27. *Оселедец В. И.* Вполне положительные линейные отображения, негамильтонова эволюция и квантовые стохастические процессы // Итоги науки и техн. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теоретич. кибернетика.— ВИНИТИ, 1983.— *20*.— С. 52—94
28. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей.— М.: Наука, 1967.— 495 с.
29. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2.— М.: Наука, 1978.— 395 с. (Пер.: *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. II.— New York, San Francisco, London: Acad. Press, 1975)
30. *Рисс Б., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.— 587 с. (Пер.: *Riesz F., Sz.-Nagy,* Leçons d'analyse fonctionelle, 6 eme ed.— Budapest: Acad. Kiadó, 1972)
31. *Сарымсаков Т. А.* Введение в квантовую теорию вероятностей.— Ташкент: ФАН, 1985.— 142 с.
32. *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики.— М.: Мир, 1968.— 191 с. (Пер.: *Segal I.* Mathematical problems of relativistic physics.— Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc.— 1963)
33. *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 6.— С. 157—183.
34. Современные проблемы математики. Новейшие достижения.— ВИНИТИ, 1985.— *27*.— 230 с.
35. Современные проблемы математики. Новейшие достижения.— ВИНИТИ, 1990.— *36*.— 185 с.
36. *Стратонович Р. Л., Ванцян А. Г.* Об асимптотически безошибочном декодировании в чистых квантовых каналах // Пробл. упр. и теории информ.— 1978.— *7*, № 3.— С. 161—174
37. *Хелстром К. У.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.— М.: Мир, 1979.— 344 с. (Пер.: *Helstrom C. W.* Quantum detection and estimation theory.— New York: Acad. Press, 1976)
38. *Холево А. С.* Аналог теории статистических решений в некоммутативной теории вероятностей // Тр. моск. матем. об-ва.— 1972.— *26*.— С. 133—149
39. —. К математической теории квантовых каналов связи // Пробл. передачи информ.— 1972.— *8*, № 1.— С. 62—71
40. — Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи // Пробл. передачи информ.— 1973.— *9*, № 3.— С. 3—11
41. — Исследования по общей теории статистических решений // Тр. МИАН СССР, т. *124*.— М.: Наука, 1976.— 140 с.
42. —. О пропускной способности квантового канала связи // Пробл. передачи информации.— 1979.— *15*, № 4.— С. 3—11

43. — Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.— М.: Наука, 1980.— 320 с.
44. — О проверке статистических гипотез в квантовой теории // Probability and mathematical statistics.— 1982.— *3*, № 1.— С. 113—126
45. — Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры.— М.: Знание, 1985.— 32 с.
46. — Об одном обобщении канонического квантования // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— *50*, № 1.— С. 181—194
47. — Безгранично делимые измерения в квантовой теории вероятностей // Теор. вероятностей и ее применения.— 1986.— *31*, № 3.— С. 560—564
48. *Цирельсон Б. С.* Квантовые аналоги неравенств Белла. Случай двух пространственно разделенных областей // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Проблемы вероятностных распределений. IX.— 1985.— *142*.— С. 175—194
49. *Чеботарев А. М.* Достаточные условия консервативности диссипативных динамических полугрупп // Теор. и мат. физ.— 1989.— *80*, № 2.— С. 192—211
50. *Ченцов Н. Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы.— М.: Наука, 1972.— 520 с.
51. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля.— М.: Мир, 1976.— 423 с. (Пер.: *Emch G. G.* Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory.— New York: Wiley Interscience, 1972)
52. *Accardi L., Alicki R., Lu Y. G., Frigerio A.* An invitation to the weak coupling and low density limits // Preprint, Centro matematico V. Volterra.— 1990.— № 41.— 58 c.
53. *Accardi L., Bach A.* Quantum central limit theorems for strongly mixing random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.— 1985.— *68*.— C. 393—402
54. *Accardi L., Schürmann M., von Waldenfels W.* Quantum independent increment processes on superalgebras // Math. Z.— 1988.— *198*.— C. 451—477
55. *Ali S. T., Prugovečki E.* Mathematical problems of stochastic quantum mechanics: harmonic analysis on phase space and quantum geometry // Acta Appl. Math.— 1986.— *6*.— C. 1—62
56. *Alicki R., Lendi K.* Quantum dynamical semigroups and applications // Lect. Notes Phys.— 1987.— *286*.— 196 c.
57. *Ando T., Choi M. D.* Non-linear completely positive maps. In: «Aspects of positivity in functional analysis» (eds: *Nagel R., Schlotterbeek U., Wolff M. P. H.*)— Elsevier, (North Holland), 1986.— C. 3—13
58. *Balslev E., Verbeure A.* States on Clifford algebras // Commun. Math. Phys.— 1968.— *7*, № 1.— C. 55—76
59. *Barchielli A., Lanz L., Prosperi G. M.* A model for macroscopic description and continuous observations in quantum mechanics // Nuovo cim.— 1982.— *72B*.— C. 79—21
60. —, —, — Statistics of continuous trajectories in quantum mechanics: operation-valued stochastic processes // Found. Phys.— 1983.— *13*.— C. 779—812
61. —, *Lupieri G.* Quantum stochastic calculus. operation valued stochastic processes, and continual measurements in quantum mechanics // J. Math. Phys.— 1985.— *26*, № 9.— C. 2222—2230
62. *Barnett C., Streater R. E., Wilde I. F.* The Itô—Clifford integral // J. Funct. Anal.— 1982.— *48*, № 2.— C. 172—212
63. *Belavkin V. P.* Optimal multiple quantum statistical hypothesis testing // Stochast.— 1975.— *1*.— C. 315—345
64. — Nondemolition stochastic calculus in Fock space and nonlinear filtering and control in quantum systems. In: Stochastic methods in mathematics and physics. Proc. 24 Karpacz winter school, 1988 (eds. *Gielerak R., Karwowski W.*) — Singapore; World Scientific.— 1989.— C. 310—324

65. —, *Staszewski P.* A quantum particle undergoing continuous observation // Phys. Lett. A.— 1989.— *140,* № 7, 8.— C. 359—362
66. *Bell J. S.* On the problem of hidden variables in quantum mechanics // Rev. Mod. Phys.— 1966.— *38.*— C. 447—452
67. *Benjballah C., Charbit M.* Quantum communication with coherent states // IEEE Trans. Inform. Theory.— 1989.— *35,* № 5.— C. 1114—1123
68. *Berberian S. K.* Notes on spectral theory.— Princeton: D. Van Nostrand, 1966.— 122 s.
69. *Braginsky V. B., Vorontzov Y. I., Thorne K. S.* Quantum nondemolition measurement // Science.— 1980.— *209,* № 4456.— C. 547—557
70. *Bratteli O., Robinson D.* Operator algebras and quantum statistical mechanics. II.— Berlin, Heidelberg, New York; Springer—Verlag, 1981
71. *Castrigiano D. P. L.* On euclidean systems of covariance for massless particles // Lett. Math. Phys.— 1981.— *5.*— C. 303—309
72. *Cattaneo U.* On Mackey's imprimitivity theorem // Commun. Math. Helv. — 1979.— *54,* № 4.— C. 629—641
73. — Densities of covariant observables // J. Math. Phys.— 1982.— *23,* № 4.— C. 659—664
74. *Chambers W. G.* Quantum bounds on the information capacity of narrowband free-space links without extraneous noise // J. Phys. A: Math. Gen. — 1981.— *14.*— C. 133—143
75. *Chebotarev A. M., Fagnola F., Frigerio A.* Towards a stochastic Stone's theorem. Preprint. University of Trento.— 1990.— 13 c.
76. *Christensen E., Evans D. E.* Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups // J. London Math. Soc.— 1979.— *20,* № 2.— C. 358—368
77. *Cushen C. D., Hudson R. L.* A quantum mechanical central limit theorem. // J. Appl. Probab.— 1971.— *8.*— C. 454—469
78. *Davies E. B.* Quantum theory of open systems.— London: Acad. Press, 1976.— 171 c.
79. —. Quantum dynamical semigroups and the neutron diffusion equation // Rept. Math. Phys.— 1977.— *11,* № 2.— C. 169—188
80. —. Information and quantum measurement // IEEE Trans. Inform. Theory.— 1978.— IT-*24.*— C. 596
81. —, *Lewis J. T.* An operational approach to quantum probability // Commun. Math. Phys.— 1970.— *17.*— C. 239—260
82. *Emery M.* Stabilite des solutions des equations differentielles stochastiques: applications aux integrals multiplicatives stochastiques // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und werw. Gebiete.— 1978.— *41.*— C. 241—262
83. *Evans D. E.* A review on semigroups of completely positive maps // Lect. Notes Phys.— 1980.— *116.*— C. 400—406
84. —, *Lewis J. T.* Dilations on irreversible evolutions in algebraic quantum theory // Commun. of the Dublin Inst. of Adv. Stud., Ser. A.— 1977.— *24.*— 104 c.
85. Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces (eds *Hartkämper A., Neumann H.*) // Lect. Notes Phys. Berlin, Heidelberg. New York: Springer—Verlag, 1974.— *29.*— 355 c.
86. *Friedman C. N.* Semigroup product formulas, compressions and continual observations in quantum mechanics // Indiana Univ. Math. J.— 1972.— *21,* № 11.— C. 1001—1013
87. *Frigerio A., Maassen H.* Quantum Poisson processes and dilations of dynamical semigroups // Probab. Theory Rel. Fields.— 1989.— *83,* № 4. — C. 489—508
88. *Gatarek D., Gisin N.* Continuous quantum jumps and infinitedimensional stochastic equations // Preprint. Université de Genève.— 1990.— 15 c.
89. *Chirardi G., Pearle P., Rimini A.* Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneour localization of systems of identical particles // Preprint ICTP. Trieste.— IC/89/44— 1989.— 28 c.
90. *Giri N., von Waldenfels W.* An algebraic version of the central limit

theorem // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Gebiete.— 1978.— *42*, № 2.— С. 129—134
91. *Gisin N.* Stochastic quantum dynamics and relativity // Helv. Phys. Acta.— 1989.— *62*.— С. 363—371
92. *Goderis D., Verbeure A., Vets P.* Non-commutative central limits // Probab. Theory Rel. Fields.— 1989.— *82*, № 4.— С. 527—544
93. *Gorini V., Frigerio A., Verri M., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G.* Properties of quantum Markovian master equations // Rept. Math. Phys.— 1978.— *13*, № 2.— С. 149—173
94. *Groh U.* Positive semigroups on C^*- and W^*-algebras // Lect. Notes Math.— 1986.— *1184*.— С. 369—425
95. *Gudder S.* Stochastic methods in quantum mechanics.— New York: North Holland, 1979
96. *Guichardet A.* Symmetric Hilbert spaces and related topics // Lect. Notes Math.— 1972.— *261*.— 197 с.
97. *Hegerfeldt G. C.* Noncommutative analogs of probabilistic notions and results // J. Funct. Anal.— 1985.— *64*, № 3.— С. 436—456
98. *Holevo A. S.* Problems in the mathematical theory of quantum communication channels // Rept. Math. Phys.— 1977.— *12*, № 2.— С. 253—258
99. — Estimation of shift parameter of a quantum state // Rept. Math. Phys.— 1978.— *13*, № 3.— С. 287—307
100. — Bounds for generalized uncertainty of the shift parameter // Lect. Notes Math.— 1983.— *1021*.— С. 243—251
101. — Statistical definition of observable and the structure of statistical model // Rep. Math. Phys.— 1985.— *22*, № 3.— С. 385—407
102. — Conditionally positive definite functions in quantum probability // Proc. of International Congress of Mathematicians, Berkeley, Calif., USA, 1986.— 1987.— С. 1011—1020
103. — Quantum estimation // Odv. Statist. Signal Processing.—1987.— *1*.— С. 157—202
104. — An analog of the Ito decomposition for multiplicative processes with values in a Lie group // Sankhya.— 1990
105. — Inference for quantum processes // Proc. Internat. Workshop on Quantum Aspects of Optical Communication, Paris, 1990
106. *Hudson R. L.* A quantum mechanical central limit theorem for anti-commuting observables // J. Appl. Probab.— 1973.— *10*, № 3.— С. 502—509
107. —, *Applebaum D.* Fermion Ito's formula and stochastic evolutions // Commun. Math. Phys.— 1984.— *96*.— С. 473—456
108. —, *Parthasarathy K. R.* Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // Commun. Math. Phys.— 1984.— *93*, № 3.— С. 301—323
109. — Unification of Fermion and Boson stochastic calculus // Commun. Math. Phys.— 1986.— *104*.— С. 457—470
110. *Ingarden R. S.* Quantum information theory // Rept. Math. Phys.— 1976. — *10*, № 1.— С. 43—72
111. *Jajte P.* Strong limit theorems in noncommutative probability // Lect. Notes Math.— 1985.— *1110*.— 152 с.
112. *Jørgensen P. T., Moore R. T.* Operator commutation relations.— Dodrecht: Reidel, 1984.— 493 с.
113. *Journe J.-L.* Structure des cocycles markoviens sur l'espace de Fock // Probab. Theory Rel. Fields.— 1987.— *75*, № 2.— С. 291—316
114. *Khalfin L. A., Tsirelson B. S.* Quantum and quasi-local analogs of Bell inequalities. In: Symp. on the foundations of modern physics (ed: *P. Lahti P. Mittelstaedt*).— 1985.— С. 441—460
115. *Kochen S., Specker E.* The problem of hidden variables in quantum mesystems // Rept. Math. Phys.— 1972.— *170*.— С. 59—87
116. *Kossakowski A.* On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems // Rept. Math. Phys.— 1972.— *3*, № 4.— С. 247—274
117. *Kraus K.* General state changes in quantum theory // Ann. Phys.— 1971.— *64*, № 2.— С. 331—335

118. — States, effects and operations // Lect. Notes Phys.— 1983, *190.*— 151 c.
119. *Kümmerer B.* Markov dilations on W^*-algebras // J. Funct. Anal.— 1985. — *63,* № 2.— C. 139—177
120. *Kümmerer B., Maassen H.* The essentially commutative dilations of dynamical semigroups on M_n // Commun. Math. Phys.— 1987.— *109.*— C. 1—22
121. *Lindblad G.* Entropy, information and quantum measurement // Commun. Math. Phys.— 1973.— *33.*— C. 305—222
122. — Completely positive maps and entropy inequalities // Commun. Math. Phys.— 1975.— *40.*— C. 147—151
123. — On the generators of quantum dynamical semigroup // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48.*— C. 119—130
124. — Non-markovian quantum stochastic processes and their entropy // Commun. Math. Phys.— 1979.— *65.*— C. 281—294
125. *Ludwig G.* Foundations of quantum mechanics I.— New York/Heidelberg/Berlin: Springer—Verlag, 1983.— 426 c.
126. *Mackey G. W.* Unitary group representations in physics, probability and number theory.— Reading Mass. London: Benjamin/cummings publ. comp., 1978
127. *Manuceau J., Verbeure A.* Quasifree states of the CCR // Commun. Math. Phys.— 1968.— *9,* № 4.— C. 293—302
128. *Meyer P.-A.* Elements de probabilités quantiques // Lect. Notes Math.— 1986.— *1204.*— C. 186—312
129. *Mielnik B.* Global mobility of Schrödinger's particle // Rept. Math. Phys. — 1977.— *12,* № 3.— C. 331—339
130. *Misra B., Sudarshan E. C. G.* The Zeno's paradox in quantum theory // J. Math. Phys.— 1977.— *18,* № 4.— C. 756—763
131. *Nelson E.* Dynamical theories of Brownian motion.— Princeton, N. J., 1967
132. — Field theory and the future of stochastic mechanics // Lect. Notes Phys.— 1986.— *262.*— C. 438—469
133. *Ozawa M.* Optimal measurements for general quantum systems // Rep. Math. Phys.— 1980.— *18,* № 1.— C. 11—28
134. — Quantum measuring processes of continuous observables // J. Math. Phys.— 1984.— *25.*— C. 79—87
135. — Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics // Publ. RIMS Kyoto Univ.— 1985.— *21,* № 2.— C. 279—295
136. — Measuring processes and repeatability hypothesis // Lect. Notes Math. — 1987.— *1299.*— C. 412—421
137. *Parthasarathy K. R.* Azema martingales and quantum stochastic calculus // Preprint ISI—1989.— 20 c.
138. —, *Schmidt K.* Positive definite kernels, continuous tensor products, and central limit theorems of probability theory // Lect. Notes Math.— 1972.— *272.*— 107 c.
139. *Petz D.* Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra // Commun. Math. Phys.— 1986.— *105.*— C. 123—131
140. Quantum optics, experimental gravitation and measurement theory (eds *Meystre P., Scully M. O.*).— New York: Plenum, 1983
141. Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes. Proc. Villa Mondragone, 1982 (eds *Accardi L., Frigerio A., Gorini V.*) — Lect. Notes Math.— 1984.— *1055.*— 441 c.
142. Quantum probability and applications. II. Proc. Heidelberg, 1984 (eds *Accardi L., von Waldenfels W.*) — Lect. Notes Math.— 1985.— *1136.*— 534 c.
143. Quantum probability and applications. III. Proc. Oberwolfach, 1987 (ed. *Accardi L., von Waldenfels W.*).— Lect. Notes Math.— 1988.— *1303.*— **373 c.**

144. Quantum probability and applications. IV. Proc. Rome, 1987 (ed. *Accardi L., von Waldenfels W.*).— Lect. Notes Math.— 1989.— *1396*.— 355 c.
145. Quantum probability and applications. V. Proc. Heidelberg, 1988 (ed. *Accardi L., von Waldenfels W.*).— Lect. Notes Math.— 1990.— *1442*
146. *Sauvageot J.-L.* Markov quantum semigroups admit covariant Markov C^*-dilation // Commun. Math. Phys.— 1986.— *106*.— C. 91—103
147. *Schürmann M.* Noncommutative stochastic processes with independent and stationary increments satisfy quantum stochastic differential equations // Probab. Theory Rel. Fields.— 1990.— *84*.— C. 473—490
148. *Scutaru H.* Coherent states and induced representations // Lett. Math. Phys.— 1977.— *2*, № 2.— C. 101—107
149. — Some remarks on covariant completely positive linear maps on C^*-algebra // Rept. Math. Phys.— 1979.— *16*, № 1.— C. 79—87
150. *Shale D., Stinespring W.* States of the Clifford algebra // Ann. Math.— 1964.— *80*, № 2.— C. 365—381
151. *Speicher R.* A new example of «independence» and «white noise» // Probability Theory and Related Fields.— 1990.— *84*, № 2.— C. 141—160
152. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Rev. Mod. Phys.— 1980.— *53*, № 3.— C. 569—615
153. *Srinivas M. D.* Collapse postulate for observables with continuous spectrum // Commun. Math. Phys.— 1980.— *71*.— C. 131—158
154. —, *Davies E. B.* Photon counting probability in quantum optics // Opt. Acta.— 1981.— *28*, № 7.— C. 981—996
155. *Stratonovich R. L.* The quantum generalization of optimal statistical estimation and hypothesis testing // Stochast.— 1973.— *1*, № 1.— C. 87—126
156. *Summers S. J., Werner R.* Bell's inequalities and quantum field theory. II. Bell's inequalities are maximally violated in the vacuum // J. Math. Phys.— 1987.— *28 (10)*.— C. 2448—2456
157. *Takesaki M.* Conditional expectations in von Neumann algebra // J. Funct. Anal.— 1972.— *9*.— C. 306—321
158. *Umegaki H.* Conditional expectations in an operator algebra. IV. (Entropy and information) // Kodai Math. semin repts.— 1962.— *14*, № 2.— C. 59—85
159. The uncertainty principle and foundations of quantum mechanics (eds *Price W. C., Chissick G. S.*).— London: Wiley, 1977
160. *Varadarajan V. S.* Geometry of quantum theory.— New York/Berlin/ /Heidelberg/Tokyo: Springer—Verlag, 1985.— 412 c.
161. *Vincent-Smith G. F.* Dilation of a dissipative quantum dynamical system to a quantum Markov process // Proc. London Math. Soc.— 1989.— *59*, № 1.— C. 58—72
162. *Voiculescu D.* Symmetries of some reduced free product C^*-algebras // Lect. Notes Math.— 1985.— *1132*.— C. 556—588
163. — Addition of certain non-commuting random variables // J. Funct. Anal.— 1986.— *66*.— C. 323—346
164. *von Waldenfels W.* An algebraic central limit theorem in the anticommuting case // Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.— 1978.— *43*, № 2.— C. 135—140
165. *Waniewski J.* Theorem about completeness of quantum mechanical motion group // Rept. Math. Phys.— 1977.— *11*, № 3.— C. 331—339
166. *Wehrl A.* General properties of entropy // Rev. Modern Phys.— 1978.— *50*.— C. 221—260

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ К СТАТЬЕ А. С. ХОЛЕВО

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К СТАТЬЕ А. С. ХОЛЕВО

ОПЕЧАТКИ

к РЖ «Соврем. пробл. матем. фундам. направления» № 83, 1991 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
13	14 сверху	$\mu_S^{X_1}=\mu_S^{X_2}$	$\mu_{S_1}^{X}=\mu_{S_2}^{X}$
34	15 сверху	$\Gamma_a(\mathscr{H}) = \ldots$	$\Gamma_s(\mathscr{H}) = \ldots$
39	5 сверху	представление	к представлению
68	15 сверху	$\mathcal{H}$	$\mathscr{H}$
123	13 снизу	$P_t^{(1)}(W)$	$p_t^{(1)}(W)$
126	30 снизу	Weyt	Weyl
179	19 снизу	$\ldots-\nabla_{\mathbf{Z}}(\mathbf{X})-\ldots$	$\ldots-\nabla_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})-\ldots$
192	1 снизу	(8.16	(8.16)
203	5 снизу	$\ldots=q_h(\omega-\theta_h,$	$\ldots q_h(\omega)-\theta_h,$
239	10 снизу	см. (11.36)	(см. (11.36))
245	6 сверху	$\ldots p(\cdot)\Vert^2)(g(n),$	$\ldots p(\cdot)\Vert^2 \underset{\simeq}{\asymp} g(n),$
249	3 сверху	$\ldots \mathbf{E}_P q(\omega).$	$\ldots \mathbf{E}_{p_q(\omega)}.$

Зак. 9280

Технический редактор *Л. В. Кутакова* Корректор *Н. И. Шаркова*

Сдано в набор 27.11.90 Подписано в печать 23.04.91
Формат бумаги 60×90 1/16. Бум. кн.-журн. Литературная гарнитура
Высокая печать. Усл. печ. л. 17,25 Усл. кр.-отт. 17,25 Уч.-изд. л. 16,55
Тираж 600 экз. Заказ 9280 Цена 6 р. 40 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, ул. Усиевича, 20а. Тел. 155-42-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56911

ISSN 0233—6723. ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 83. 1991. — С. 276.