КВАНТОВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ

Сб. статей 1982—1984г.г. Сост. А. С. Холево

Сборник статей зарубежных специалистов, отражающий недавние результаты в новом направлении на стыке статистической механики, функционального анализа и теории вероятностей. В нем рассмотрены: общее определение квантового случайного процесса и аналог теоремы реконструкции А. Н. Колмогорова; эргодические свойства квантовых процессов; свойство марковости и строение квантовых динамических полугрупп; расширения динамических полугрупп до обратимой автоморфной динамики; квантовое стохастическое дифференциальное исчисление; непрерывные квантовые измерения. Среди авторов статей — известные математики — Л.Аккарди (Италия), К.Партасарати (Индия), Р.Хадсон (Великобритания), Дж.Льюис (Ирландия), У.Браттели (Норвегия), В.Шредер (ФРГ).

Для математиков и физиков-теоретиков, занимающихся основаниями неравновесной статистической механики, динамическими системами, некоммутативной теорией вероятностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Известно, что физические истоки понятия случайного процесса — одного из основных в современной теории вероятностей — тесно связаны с концепцией открытой системы в статистической механике. Открытой называется система, обычно с небольшим числом степеней свободы, взаимодействующая с окружением (резервуаром), который представляет собой систему с большим или бесконечным числом степеней свободы (как правило, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия). Существенно, что эволюция полной системы, включающей резервуар, описывается однопараметрической группой обратимых преобразований (например, динамическими уравнениями гамильтонова типа); статистический элемент входит лишь в начальное состояние, которое в классическом случае задается распределением вероятностей на фазовом пространстве, отражающем неопределенность в описании начальных условий, неизбежную для систем с большим числом степеней свободы.

С точки зрения наблюдателя, который может следить только за выделенной малой системой, но не за окружением, эволюция такой системы будет представлять собой случайный процесс — с течением времени все новые и новые компоненты окружения будут приходить во взаимодействие с открытой системой, приводя к статистическому обновлению ее состояния. Примером, который сразу приходит на ум, является броуновское движение массивной частицы, погруженной в газ одинаковых молекул. Если говорить о математической стороне вопроса, то описание «субдинамики» открытой системы дается некоторым интегро-дифференциальным «управляющим уравнением», которое в общем случае является крайне сложным из-за наличия «памяти». Однако при определенных физических условиях этой зависимостью от прошлого можно пренебречь, и эволюция открытой системы сводится к марковскому процессу, описываемому дифференциальным уравнением, т. е. полугруппой переходных операторов в фазовом пространстве открытой системы. Исследование динамики, в частности, важного вопроса об установлении равновесия, при этом значительно упрощается.

Пока что речь шла о классических системах; при переходе к квантовой механике общая схема динамики открытой системы формулируется аналогично, однако возникают новые вопросы, которые либо отсутствовали, либо были тривиальными для классических систем. В определенном смысле всякая квантовая система может рассматриваться как открытая — с измерением любой величины связано конечное необратимое изменение состояния системы. Поэтому в отличие от классического случая, где вопросы измерения не играют какой-либо существенной роли, теория открытых квантовых систем оказывается глубоко связанной с теорией измерения.

Исследования моделей открытых систем, восходящие к пионерской работе Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова [1], приобрели широкий размах в 60-е годы в связи с приложениями в теории лазера, спиновой релаксации и т. п. (см., например, обзор [2]). Однако лежащие в основе стохастические структуры были открыты и изучены лишь в последнее десятилетие. Важно отметить, что речь шла не просто о «наведении строгости» в физических результатах; трудности лежали на принципиальном уровне. Непростым, например, оказался уже сам вопрос о правильном определении понятия квантового случайного процесса — ведь квантовый аналог конечномерных распределений должен каким-то образом отражать зависимость от порядка измерений.

В предлагаемом вниманию читателей сборнике дается представление о той стадии развития теории, когда основные объекты ее изучения уже обрели определенные очертания, хотя многие задачи еще ждут своего решения. Основу сборника составили материалы конференции «Квантовая вероятность и ее приложения в квантовой теории необратимых процессов», [3], состоявшейся вблизи г. Рима (Villa Mondragone, Italy, 6—11 сентября 1982 г.).

На начальном этапе детально изучалось марковское приближение динамики открытой системы в пределе слабого и сингулярного взаимодействия (см. обзор [4] и книгу Дэвиса [5]). Однако общая картина становится яснее, если придерживаться логической, а не хронологической последовательности. Поэтому мы начнем с вопроса об общем определении квантового случайного процесса, который был изучен позднее. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается C^*- или W^*-алгеброй наблюдаемых $\mathscr{A}$, группой автоморфизмов $\{\alpha_t\}$ и состоянием ρ. Пусть $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ — алгебра, которая задает интересующую нас окрытую подсистему. Таким образом, $\{\alpha_t\}$ описывает динамику полной системы $\mathscr{A}$, включающей окружение системы $\mathscr{A}_0$. Введем *корреляционные ядра*

$$w_{t_1,\ldots,t_n}(X_1,\ldots,X_n;Y_1,\ldots,Y_n) =$$

$$= \rho\left(j_{t_1}(X_1)^* \ldots j_{t_n}(X_n)^* j_{t_n}(Y_n) \ldots j_{t_1}(Y_1)\right), \qquad (1)$$

где $j_t = \alpha_t | \mathscr{A}_0$, для всевозможных $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$; $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \in \mathscr{A}_0$. Набор таких величин удовлетворяет ряду специальных свойств. В открывающей сборник статье Аккарди, Фриджерио, Льюиса (которая имеет дело с несколько более общей ситуацией, позволяющей охватить классические процессы в смысле Колмогорова — Дуба) набор всевозможных корреляционных ядер, удовлетворяющих этим свойствам, положен в основу конструкции *квантового случайного процесса*. Доказан некоммутативный аналог теоремы А. Н. Колмогорова, утверждающий о возможности реконструкции исходной алгебраической структуры по набору всех корреляционных ядер.

Таким образом, роль конечномерных распределений в этой конструкции играют корреляционные ядра (1) для всевозможных $t_1, \ldots, t_n$. Как подчеркивают авторы статьи, статистическую интерпретацию через результаты измерений, последовательно проводимых над открытой системой $\mathscr{A}_0$, имеют лишь хронологически упорядоченные ядра с $t_1 < \ldots < t_n$. Если положить в основу только эти ядра, то возникает другое определение квантового случайного процесса, предложенное впервые Линдбладом [6]; при этом исходная алгебраическая структура не восстанавливается, а теорема реконструкции приводит к более сложному объекту, который, по-видимому, не имеет простого динамического описания.

Приведем элементарный пример, показывающий, насколько неоднозначно хронологически упорядоченные ядра определяют алгебраическую структуру процесса. Пусть $\{X_t;\ t = 0, \pm 1, \ldots\}$ — последовательность Бернулли независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$, а $\{Y_t;\ t = 0, \pm 1, \ldots\}$ — последовательность антикоммутирующих переменных, $Y_t Y_s + Y_s Y_t = \delta_{ts}$, с квазисвободным (фоковским) состоянием ρ_F, имеющим корреляционную функцию $\rho_F(Y_t Y_s) = \delta_{ts}$. Тогда процессы $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ имеют одинаковые хронологически упорядоченные корреляционные ядра, хотя их алгебраические свойства, можно сказать, противоположны. С другой стороны, принятие всей совокупности корреляционных ядер является обоснованным, если, как это обычно бывает, a priori заданы коммутационные соотношения, т. е. тип статистики системы. Все работы данного сборника, по существу, имеют дело с квантовыми случайными процессами в смысле Аккарди — Фриджерио — Льюиса (АФЛ). Следует при этом заметить, что конструкция Линдблада представляет интерес для изучения общих статистических свойств квантовой эволюции, таких как эргодичность, хаотичность и т. п. [7]. Некоторые свойства перемешивания рассмотрены в статье Шрёдера, который отправляется от понятия некоммутативной K-системы, весьма близкого к квантовому случайному процессу в смысле АФЛ.

В статье Льюиса и Маассена содержится конструкция квантового уравнения Ланжевена, порождающего квантовый случайный процесс, и с ее помощью исследуется вопрос об установлении равновесия для некоторой нетривиальной модели. Рассмотренный в этой работе процесс Форда — Каца — Мазура интересен тем, что он является одним из немногих явно исследованных немарковских процессов. Все остальные работы сборника посвящены пока что наиболее изученному классу марковских процессов. По существу, настоящая формулировка марковского свойства оказывается возможной лишь в рамках того или иного понятия случайного процесса. Пусть в определении АФЛ $\mathcal{A}_{t]}$ и $\mathcal{A}_{[t}$ подалгебры «прошлого» и «будущего», порожденные алгебрами $\mathcal{A}_s = j_s(\mathcal{A}_0)$ соответственно при $s \leqslant t$ и $s \geqslant t$. Предположим, что существуют условные ожидания $\mathbf{E}_{t]}$ на $\mathcal{A}_{t]}$, согласованные с состоянием ρ (в отличие от классического случая, это является сильным ограничением). Квантовый случайный процесс называется *марковским*, если

$$\mathbf{E}_{t]}(\mathcal{A}_{[t}) \subseteq \mathcal{A}_t, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Для марковского процесса можно ввести отображения алгебры $\mathcal{A}_0$ в себя по формуле

$$\Phi_t[X] = \mathbf{E}_{0]} j_t(X), \qquad X \in \mathcal{A}_0. \tag{3}$$

Семейство отображений $\{\Phi_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ образует *марковскую полугруппу*, дающую замкнутое описание субдинамики открытой системы $\mathcal{A}_0$. Обозначая через $\mathcal{L}$ производящий оператор полугруппы, имеем марковское управляющее уравнение (аналог дифференциального уравнения А. Н. Колмогорова) для эволюции наблюдаемой $X_t = \Phi_t[X]$:

$$\frac{dX_t}{dt} = \mathcal{L}[X_t], \qquad X_0 = X. \tag{4}$$

Хронологически упорядоченные корреляционные ядра для $0 < t_1 < \ldots < t_n$ выражаются через Φ_t и начальное состояние $\rho_0 = \rho | \mathcal{A}_0$ согласно «квантовой регрессионной теореме»

$$w_{t_1, \ldots, t_n}(X_1, \ldots, X_n;\ Y_1, \ldots, Y_n) = \\ = \rho_0\left(\Phi_{t_1}\left[X_1^* \ldots \Phi_{t_n - t_{n-1}}\left[X_n^* Y_n\right] \ldots Y_1\right]\right). \tag{5}$$

Важнейшим (существенно некоммутативным) свойством, позволяющим разобраться в структуре марковских полугрупп, является полная положительность отображений Φ_t. Отображение Φ из C^*-алгебры $\mathcal{A}$ в C^*-алгебру $\mathcal{B}$ называется вполне положительным (см., например, [8]), если всякая положительная матрица $[X_{jk})$ с элементами $X_{j,\,k} \in \mathscr{A}$ переходит в положительную матрицу $[\Phi[X_{jk}]]$ с элементами из $\mathscr{B}$. Автоморфизмы и условные ожидания вполне положительны; это свойство наследуется и отображениями (3). Введенное в 50-х годах в математической работе Стайнспринга понятие вполне положительного отображения стало играть ключевую роль в теории открытых квантовых систем.

Опишем круг вопросов, рассмотренных для марковских процессов и полугрупп. Еще до появления общего определения квантового случайного процесса и формулировки марковского свойства, марковские полугруппы были детально изучены в случае $\mathscr{A}_0 = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (алгебра всех ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$), где они получили название *квантовых динамических полугрупп*. Ставший уже классическим результат Линдблада [8] (в конечномерном случае полученный независимо Горини, Коссаковским и Сударшаном) утверждает, что производящий оператор непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы имеет вид

$$\mathscr{L}[\mathrm{X}] = i[H, X] + \sum_i \left(V_j^* X V_j - \frac{1}{2} V_j^* V_j X - \frac{1}{2} X V_j^* V_j\right), \tag{6}$$

где H, $\sum_j V_j^* V_j \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. В полной общности для сильно непрерывных полугрупп проблема характеризации производящего оператора не решена по сей день; некоторые результаты в этом направлении содержатся в статье Браттели.

Большое внимание уделялось строгому выводу полуфеноменологических кинетических уравнений из гамильтоновой динамики полной системы (см. обзор [9]). На эту проблему можно взглянуть и с другой стороны — допустим, что имеется некоторое управляющее уравнение марковского типа, дающее феноменологическое описание динамики открытой системы. Можно ли «расширить» данную открытую систему до некоторой полной динамической системы, подчиняющейся обратимой эволюции? Связь между исходной марковской полугруппой $\{\Phi_t\}$ и обратимой динамикой $\{\alpha_t\}$ должна даваться проекционным соотношением типа (3), включающим, быть может, некоторый предельный переход (предел слабого или сингулярного взаимодействия с резервуаром). Если ставить вопрос о чисто математической возможности такого расширения, то он имеет положительное решение [10]. Интересно, однако, найти расширения, допускающие физическое истолкование. В этом плане вопрос рассматривается в статье Льюиса и Маассена и в статье Кюммерера.

Сильный аналитический метод, позволяющий, в частности, строить нетривиальные классы квантовых марковских случайных процессов и расширений динамических полугрупп, дают бозонное и фермионное стохастические исчисления, развитые Хадсоном и Партасарати (фермионное стохастическое исчисление разрабатывалось также Стритером с сотрудниками, см. [3], [7]). В этой статье получены некоммутативные аналоги формул Ито и Фейнмана — Каца. Если для исчисления Ито базисным является винеровский процесс $\{W_t\}$, удовлетворяющий формальному соотношению $dW_t^2 = dt$, то квантовое исчисление строится на основе пары некоммутирующих процессов «квантового броуновского движения» $(A_t,\ A_t^\dagger)$, таких что $dA_t^\dagger\, dA_t = 0$, $dA_t\, dA_t^\dagger = dt$. Не исключено, что этот аппарат найдет применение и в классическом стохастическом дифференциальном исчислении [11]. Интересно, что квантовое стохастическое исчисление было недавно переоткрыто физиками. В содержательной работе [12] помимо формулы Ито приводится квантовый аналог исчисления Стратоновича, правила для вычисления корреляционных ядер и дается физическая интерпретация квантовых уравнений Ланжевена. Статья Вальденфельса содержит пример явного решения стохастического дифференциального уравнения, описывающего некоторое обобщение модели Вигнера — Вайскопфа атома, взаимодействующего с полем излучения.

Круг приложений теории квантовых случайных процессов (как и классических) не ограничивается проблемами статистической механики. Важную роль понятие случайного процесса играет в теории информации, теории управления, статистической теории связи. Развитие технологии и совершенствования физического эксперимента заставляют задуматься о фундаментальных квантовомеханических ограничениях в процессах передачи информации и управления. Для иллюстрации приведем лишь один пример, где использование понятий и методов теории квантовых случайных процессов кажется уместным.

В последнее время много внимания уделялось вопросу о потенциальных возможностях различных схем детекторов гравитационного излучения. Речь идет об обнаружении столь слабых сигналов, что учет квантовых ограничений представляется необходимым [13]. Предельно упрощенная модель детектора представляет собой квантовый осциллятор (свободную массу), взаимодействующий с окружением и поэтому подверженный затуханию и испытывающий действие классического источника, описывающего гравитационное излучение. В некотором приближении модель описывается квантовым стохастическим дифференциальным уравнением

$$da_t = -(i\omega + \mu/2)\, a_t\, dt + \sqrt{\mu}\, dA_t + \varphi(t)\, dt, \tag{7}$$

где a_t — амплитуда осциллятора, $\omega \geqslant 0$ — собственная частота, $\mu \geqslant 0$ — коэффициент затухания, а A_t — компонента квантового броуновского движения, отражающая влияние окружения. Скалярная (комплексная) функция $\varphi(t)$, представляющая классический источник, полностью или частично неизвестна, и вопрос состоит в нахождении принципиальных ограничений на возможности оценивания сигнала $\varphi(t)$ по измерениям квантового процесса $\{a_t;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Уравнение (7) задает квантовый марковский случайный процесс — некоммутативный аналог комплексного процесса Орнштейна — Уленбека [14], а поставленный вопрос оказывается конкретной задачей из области статистики квантовых случайных процессов [15].

В этой связи возникает представляющий и независимый интерес вопрос о последовательном квантовомеханическом описании измерений, длящихся непрерывно в течение некоторого промежутка времени. В статье Проспери излагается оригинальный и весьма общий формализм, позволяющий вычислять вероятностные характеристики таких непрерывных измерений, и обнаруживающий неожиданные связи с классическими безгранично-делимыми процессами.

Представленные в данном сборнике направления получили дальнейшее развитие в последующие годы. Особенно это касается расширений динамических полугрупп, квантового стохастического дифференциального исчисления и теории непрерывных измерений, между которыми выявились глубокие связи [7]. Списки литературы статей настоящего сборника дополнены ссылками на свежие работы по соответствующим темам.

А. Холево

Литература

1. Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Про рівняння Фоккера — Планка, що виводиться в теории пертурбацій методом, заснованим на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана, Зап. каф. мат. физ. АН УССР, 4, (1939), 5—80.
2. Haake F. Statistical treatment of open systems by generalized master equations, Springer, 1973.
3. Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes (eds. L. Accardi, A. Frigerio, V. Gorini)), Lect. Notes Math., 1055, (1984).
4. Gorini V., Frigerio A., Verri M., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G. Properties of quantum Markovian master equations, Repts. Math. Phys., 13, (1978), 149—173.
5. Davies E. B. Quantum theory of open systems, AP, London, 1976.
6. Lindblad G. Non-Markovian quantum stochastic processes and their entropy, Commun. Math. Phys., 65, (1979), 281—294.
7. Quantum probability and applications II (eds. L. Accardi, W. von Waldenfels), Lect. Notes Math., 1136 (1985).

8. Lindblad G. On generators of quantum dynamical semigroups, Commun. Math. Phys., 48, (1976), 119—130.
9. Spohn H. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits, Rev. Mod. Phys., 53, (1980), 569—615.
10. Evans D. E., Lewis J. T. Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory, Commun. of DIAS, ser. A, N 24, (1977).
11. Meyer P. A. Fock space and probability theory, Preprint, 1985.
12. Gardiner G. W., Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: quantum stochastic differential equations and the master equations, Phys. Rev. A, 31, (1985), 3761—3774.
13. Braginski V. B., Vorontzov Y. I., Thorne K. S. Quantum nondemolition measurment, Science, 209, (1980), 547—557.
14. Арато М., Колмогоров А. Н., Синай Я. Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса, ДАН СССР, 146, (1962), 747—757.
15. Holevo A. S. Quantum estimation, in: Advances in Statistical Signal Processing: Theory and Applications, JAI Press Inc., 1986.

КВАНТОВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ[1]

Луиджи Аккарди
Математический институт Миланского университета, Милан, Италия

Альберто Фриджерио
Физический институт Миланского университета, Милан, Италия

Джон Т. Льюис
Дублинский институт перспективных исследований, Дублин, Ирландия

Резюме. Вводится класс некоммутативных случайных процессов, определяемых с точностью до эквивалентности многовременными корреляционными ядрами. Доказана теорема реконструкции, обобщающая теорему Колмогорова для классических процессов. Изучены марковские процессы и соответствующие им полугруппы; с помощью теории возмущений построены примеры неквазисвободных марковских процессов на алгебре Клиффорда. Обсуждается связь с моделью Хеппа — Либа.

§ 0. ВВЕДЕНИЕ

Мы изучим некоторый класс некоммутативных случайных процессов, которые определяются с точностью до эквивалентности своими многовременными корреляциями. Эти процессы являются аналогом классических процессов в смысле Дуба [1], Мейера [2] и включают их как частный случай.

Мы определяем случайный процесс над C^*-алгеброй $\mathscr{B}$ с множеством значений параметра T как совокупность из C^*-алгебры $\mathscr{A}$, семейства $\{j_t\colon\ t \in T\}$ $*$-гомоморфизмов алгебры $\mathscr{B}$ в $\mathscr{A}$ и состояния ω на $\mathscr{A}$. Это является обобщением понятия некоммутативного случайного процесса в смысле Аккарди [3], причем локальные алгебры определяются как $\mathscr{A}_I = \bigvee \{j_t(b)\colon\ t \in T,\ b \in \mathscr{B}\}$ для любого подмножества $I \subset T$; наблюдаемые, «локализованные в разных моментах времени», не обязаны коммутировать. Мы покажем (предложение 1.1), что такой процесс задается однозначно с точностью до эквивалентности семейством корреляционных ядер $\omega\left(j_{t_1}(a_1)^* \ldots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \ldots j_{t_1}(b_1)\right)$; последние получаются через поляризационное тождество из величин $\omega\left(j_{t_1}(b_1)^* \ldots \ldots j_{t_n}(b_n)^* j_{t_n}(b_n) \ldots j_{t_1}(b_1)\right)$, которые являются неотрицательными вещественными числами и являются аналогом конечномерных распределений в классической теории вероятностей; если $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, то оии в принципе определяются

---

[1] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum Stochastic Processes, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18(1982), 97—133.

последовательными измерениями (когда T означает временной параметр) [4—6]; корреляционные ядра для произвольного набора времен могут быть получены из хронологически упорядоченных, если известны коммутационные соотношения.

Мы доказываем (теорема 1.3), что такой процесс может быть восстановлен однозначно с точностью до эквивалентности по проективному семейству корреляционных ядер; это — обобщение теоремы Колмогорова [7] (родственные результаты даются теоремами 1.7.1, 1.7.2 и следствием 1.8.2). Дается определение марковского процесса и соответствующей полугруппы; мы исследуем связь между этими понятиями (теоремы 2.1 и 2.2.2) и развиваем теорию возмущений для марковских процессов, основанную на квантовой формуле Фейнмана — Каца [8], [9] (теоремы 2.3 и 2.4.4). Рассмотрены некоторые примеры процессов на алгебре Клиффорда. Сначала мы строим квазисвободные процессы и даем характеризацию марковских квазисвободных процессов через аналог теоремы Дуба [10] (теоремы 3.2.1—3.3.2), а затем применяем теорию возмущений для марковских процессов. Мы доказываем, что возмущенные процессы удовлетворяют уравнению Ланжевена (теоремы 3.4.1 и 3.4.2) и (в § 4) отмечаем, каким образом они возникают в модели Хеппа — Либа [11], [12].

§ 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ТЕОРЕМА РЕКОНСТРУКЦИИ

1.1. Пусть $\mathscr{B}$ есть C^*-алгебра с единицей и T — некоторое множество; *случайным процессом над* $\mathscr{B}$ *с множеством значений параметра* T называется тройка $(\mathscr{A}, \{j_t\colon t\in T\}, \omega)$, где $\mathscr{A}$ есть C^*-алгебра с единицей, j_t для любого $t\in T$ есть $*$-гомоморфизм алгебры $\mathscr{B}$ в $\mathscr{A}$, такой что $j_t(1_{\mathscr{B}})=1_{\mathscr{A}}$, причем $\mathscr{A}$ порождается образами $\{\mathscr{A}_t=j_t(\mathscr{B})\colon t\in T\}$ алгебры $\mathscr{B}$, и ω — состояние на $\mathscr{A}$. Пусть $(\mathscr{H}, \pi, \Omega)$ — ГНС-конструкция, ассоциированная с $(\mathscr{A}, \omega)$. Два случайных процесса $(\mathscr{A}^{(i)}, \{j_t^{(i)}\}, \omega^{(i)})$, $i=1, 2$ над одной алгеброй $\mathscr{B}$ с множеством T *эквивалентны*, если существует унитарный оператор $U\colon \mathscr{H}^{(1)}\to \mathscr{H}^{(2)}$, такой что $U\Omega^{(1)}=\Omega^{(2)}$ и $U\pi^{(1)}j_t^{(1)}(b)=\pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U$ для всех $b\in\mathscr{B}$ и $t\in T$.

Предложение 1.1. *Два случайных процесса* $(\mathscr{A}^{(i)}, \{j_t^{(i)}\}, \omega^{(i)})$, $i=1,2$, *над* $\mathscr{B}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\omega^{(1)}\left(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^*\ \dots\ j_{t_n}^{(1)}(a_n)^*\, j_{t_n}^{(1)}(b_n)\ \dots\ j_{t_1}^{(1)}(b_1)\right)=$$

$$=\omega^{(2)}\left(j_{t_1}^{(2)}(a_1)^*\ \dots\ j_{t_n}^{(2)}(a_n)^*\, j_{t_n}^{(2)}(b_n)\ \dots\ j_{t_1}^{(2)}(b_1)\right) \quad (1.1)$$

для всех $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\in\mathscr{B}$, $t_1, \dots, t_n\in T$ *и всех* n.

Доказательство. Пусть (1.1) выполняется; тогда отображение U, задаваемое соотношением

$$U\left(\pi^{(1)} j^{(1)}_{t_n}(b_n) \ldots \pi^{(1)} j^{(1)}_{t_1}(b_1)\,\Omega^{(1)}\right) = \pi^{(2)} j^{(2)}_{t_n}(b_n) \ldots \pi^{(2)} j^{(2)}_{t_1}(b_1)\,\Omega^{(2)},$$

продолжается до унитарного отображения $\mathscr{H}^{(1)}$ на $\mathscr{H}^{(2)}$, такого что $U\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ и $U\pi^{(1)} j^{(1)}_t(b) = \pi^{(2)} j^{(2)}_t(b)\,U$ для всех $b \in \mathscr{B}$ и $t \in T$. Обратное утверждение очевидно.

Случайный процесс называется *W^*-процессом*, если $\mathscr{B}$ — W^*-алгебра и отображения $\pi \circ j_t$ нормальны для всех $t \in T$.

1.2. Пусть $\mathbf{T} = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} T^n$ — множество всех конечных наборов элементов T, $n = 1, 2, \ldots$; всякий элемент $\mathbf{t}$ множества $\mathbf{T}$ принадлежит T^n для некоторого $n = n(\mathbf{t})$ и может быть записан в виде $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Для любого $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ пусть $\mathscr{B}_\mathbf{t}$ есть $n(\mathbf{t})$-кратное прямое произведение $\mathscr{B}$ на себя. Будем обозначать элементы $\mathscr{B}_\mathbf{t}$ через $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, и пусть $j_\mathbf{t}$ есть отображение $\mathscr{B}_\mathbf{t}$ в $\mathscr{A}$ по формуле $j_\mathbf{t}(\mathbf{b}) = j_{t_n}(b_n) \ldots j_{t_1}(b_1)$; *корреляционное ядро* $w_\mathbf{t}$ случайного процесса $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над $\mathscr{B}$ определяется как функция на $\mathscr{B}_\mathbf{t} \times \mathscr{B}_\mathbf{t}$ со значениями в $\mathbb{C}$ по формуле

$$w_\mathbf{t}(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = \omega\left(j_\mathbf{t}(\mathbf{a})^* j_\mathbf{t}(\mathbf{b})\right). \tag{1.2}$$

В соответствии с предложением 1.1 случайный процесс определяется с точностью до эквивалентности семейством $\{w_\mathbf{t}\colon\ \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ своих корреляционных ядер.

Предложение 1.2. *Семейство $\{w_\mathbf{t}(.,.);\ \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ корреляционных ядер случайного процесса над $\mathscr{B}$ удовлетворяет формулируемым ниже условиям СК1, ..., СК6. Для W^*-процесса имеет место также условие NСК.*

СК1 (проективность): для всех $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, для k, таких что $1 \leqslant k \leqslant n(\mathbf{t})$, и для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{B}_\mathbf{t}$, таких что $a_k = b_k = 1$, выполняется

$$w_\mathbf{t}(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = w_{\hat{k}\mathbf{t}}(\hat{k}\mathbf{a};\ \hat{k}\mathbf{b}),$$

где $\hat{k}\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$, $\hat{k}\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$;

СК2 (положительность): для всех $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, всех конечных последовательностей $\{c_r \in \mathbb{C};\ r = 1, \ldots, m\}$, $\{\mathbf{b}_r \in \mathscr{B}_\mathbf{t}\colon\ r = 1, \ldots, m\}$ выполняется

$$\sum_{i,j} \bar{c}_i c_j w_\mathbf{t}(\mathbf{b}_i;\ \mathbf{b}_j) \geqslant 0;$$

СК3 (нормированность): для всех $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$

$$w_\mathbf{t}(\mathbf{1};\ \mathbf{1}) = 1,$$

где $\mathbf{1}$ — элемент $(1, \ldots, 1) \in \mathscr{B}_\mathbf{t}$;

*СК*4 (*полуторалинейность*); *для всех* $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, *всех* $\mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathscr{B}_\mathbf{t}$, *отображение* $b_k \longmapsto w_\mathbf{t}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ *из* $\mathscr{B}$ *в* $\mathbb{C}$ *линейно, а отображение* $a_k \longmapsto w_\mathbf{t}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ *антилинейно для любого* k, $1\leqslant k\leqslant n(\mathbf{t})$;

*СК*5 (**-условие*): *для всех* $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$ *и* $n=n(\mathbf{t})$ *выражение* $w_\mathbf{t}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ *зависит от аргументов* a_n, b_n *через* $a_n^*b_n$;

*СК*6 (*мультипликативность*): *для всех* $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, *таких что* $t_k=t_{k-1}$, *выполняется*

$$w_\mathbf{t}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = w_{\dot{k}\mathbf{t}}(\dot{k}\mathbf{a}; \dot{k}\mathbf{b})$$

для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathscr{B}_\mathbf{t}$, *где* $\dot{k}\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_k a_{k-1}, \ldots, a_n)$ *принадлежит* $\mathscr{B}_{\dot{k}\mathbf{t}}$.

NСК (*нормальность*): *для любого* $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$ *и всех* $\mathbf{a}\in\mathscr{B}_\mathbf{t}$, *таких что* $a_n=1$, $n=n(\mathbf{t})$, *и для всех* $\mathbf{b}\in\mathscr{B}_\mathbf{t}$ *отображение* $b_n\longmapsto w_\mathbf{t}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ *из* $\mathscr{B}$ *в* $\mathbb{C}$ *нормально.*

Доказательство. Утвержденне доказывается прямой проверкой.

1.3. Пусть $\mathscr{B}$ — некоторая C^*-алгебра с единицей, а T — некоторое множество: *проективной системой корреляционных ядер над* $\mathscr{B}$ назовем семейство $\{w_\mathbf{t}\colon \mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$ функций $w_\mathbf{t}$: $\mathscr{B}_\mathbf{t}\times\mathscr{B}_\mathbf{t}\longmapsto\mathbb{C}$, таких что они удовлетворяют условиям *СК*1 — *СК*6. Если, кроме этого, $\mathscr{B}$ есть W^*-алгебра и условие *NСК* выполняется, то это семейство называется *проективной системой нормальных корреляционных ядер.* Отметим, что для любых $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, $\mathbf{b}\in\mathscr{B}_\mathbf{t}$ и $\mathbf{a}=(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1)\in\mathscr{B}_\mathbf{t}$ отображение $b_n\longmapsto w_\mathbf{t}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ есть положительный линейный функционал на $\mathscr{B}$, как следует из условий *СК*2, *СК*4 и *СК*5; следовательно, он ограничен.

Теорема 1.3 (теорема реконструкции). *Пусть* $\mathscr{B}$ *есть* C^*-*алгебра с единицей, и пусть* $\{w_\mathbf{t}\colon \mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$ *является проективной системой корреляционных ядер над* $\mathscr{B}$ *с множеством значений параметра* T; *тогда существует случайный процесс* $(\mathscr{A}, \{j_t\colon t\in T\}, \omega)$ *над* $\mathscr{B}$ *с таким семейством корреляционных ядер, и он единствен с точностью до эквивалентности. Более того, если* $\mathscr{B}$ *есть* W^*-*алгебра и* $\{w_\mathbf{t}\colon \mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$ *удовлетворяет условию NСК, то этот процесс является* W^*-*процессом.*

Доказательство. Реализуем $\mathscr{A}$ как конкретную C^*-алгебру операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с циклическим вектором Ω; используем *СК*1, *СК*2 и *СК*3, чтобы построить $\mathscr{H}$ и Ω, и *СК*4, *СК*5 и *СК*6 для построения отображений j_t и алгебры $\mathscr{A}$. Сначала мы построим множество X, включающее все $\mathscr{B}_\mathbf{t}$, и положительно определенное ядро w на $X\times X$. Определим частичное упорядочение $\prec$ в $\mathbf{T}$: положим $\mathbf{s}\prec\mathbf{t}$, если $n(\mathbf{s}) \leqslant n(\mathbf{t})$ и $\mathbf{s}$ может быть получен путем вычеркивания компонент из $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Для любых $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)$, $\mathbf{s} \prec \mathbf{t}$, определим целочисленную функцию $k_{\mathbf{s},\mathbf{t}}$ из набора $\{1, \ldots, m\}$ в $\{1, \ldots, n\}$ следующим образом:

$$k_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(m) = \max\{l;\ t_l = s_m\},$$
$$k_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(r) = \max\{l\colon\ l < k_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(r+1),\ t_l = s_r\},\ r < m,$$

и обозначим через $f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}}$ отображение, вкладывающее $\mathscr{B}_{\mathbf{s}}$ в $\mathscr{B}_{\mathbf{t}}$ и имеющее вид

$$f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}}(\mathbf{a}) = (b_1, \ldots, b_n),$$
$$b_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l \neq k_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(r) \text{ для всех } r = 1, \ldots, m,\\ a_r, & \text{если } l = k_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(r).\end{cases}$$

Тогда $f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{t}}$ есть тождественное отображение $\mathscr{B}_{\mathbf{t}}$ на себя, и выполняется равенство $f^{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} \circ f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}} = f^{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}$ для любых $\mathbf{s} \prec \mathbf{t} \prec \mathbf{u}$. Пусть X — индуктивный предел $\lim\{\mathscr{B}_{\mathbf{s}}, f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}}\colon \mathbf{s} \prec \mathbf{t}\}$ в категории множеств; тогда существуют отображения $i_{\mathbf{t}}\colon \mathscr{B}_{\mathbf{t}} \to X$, такие что $i_{\mathbf{t}} \circ f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}} = i_{\mathbf{s}}$ при $\mathbf{s} \prec \mathbf{t}$. По условию *СК*1 справедливо равенство $w_{\mathbf{s}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = w_{\mathbf{t}}(f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}}\mathbf{a}; f^{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}}\mathbf{b})$ для всех $\mathbf{s} \prec \mathbf{t}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{s}}$; следовательно, существует ядро w на $X \times X$, определяемое выражением $w(i_{\mathbf{t}}\mathbf{a}; i_{\mathbf{t}}\mathbf{b}) = w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$ и всех $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, которое положительно определено в силу условия *СК*2. Тогда по теореме 1.9 работы [13] существует минимальное разложение Колмогорова $(\mathscr{H}, v)$ ядра w, такое что $v\colon X \to \mathscr{H}$, $\langle v(x), v(y)\rangle = w(x, y)$ для любых $x, y \in X$ и $\mathscr{H} = \bigvee\{v(x)'\colon x \in X\}$.

Обозначим через $\mathscr{D}$ линейную оболочку элементов $\{v(x)\colon x \in X\}$; она плотна в $\mathscr{H}$, и ее элементы имеют вид $v(i_{\mathbf{t}}(\mathbf{b}))$ для соответствующих $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$. Согласно *СК*1, вектор $v(i_{\mathbf{t}}(\mathbf{1}))$ не зависит от $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$; обозначим его через Ω; тогда $\langle \Omega, \Omega\rangle = 1$ в силу *СК*3. Для любых $b \in \mathscr{B}$ и $\mathbf{t} \in \mathbf{\Gamma}$ определим линейный оператор $j_t(b)$, отображающий $\mathscr{D}$ на себя согласно равенству $j_t(b)\,v(i_{\mathbf{s}}(\mathbf{a})) = v(i_{\mathbf{s},t}(\mathbf{a}, b))$, где $\mathbf{s}, t = (s_1, \ldots, s_m, t)$ и $\mathbf{a}, b = (a_1, \ldots, a_m, b)$. Мы имеем равенство

$$v(i_{\mathbf{t}}(\mathbf{b})) = j_{\mathbf{t}}(\mathbf{b})\,\Omega \tag{1.3}$$

для всех $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$, и $j_{\mathbf{t}}(1)$ есть тождественное отображение $\mathscr{D}$ на себя согласно *СК*1. Пока мы использовали лишь условия *СК*1, *СК*2, *СК*3. Теперь воспользуемся условиями *СК*2, *СК*4 и *СК*5 для того, чтобы получить соотношение

$$\|j_t(b)\,v(i_{\mathbf{s}}(\mathbf{a}))\|^2 = w_{\mathbf{s},t}(\mathbf{a}, b; \mathbf{a}, b) \leqslant \|b\|^2 w_{\mathbf{s}}(\mathbf{a}; \mathbf{a}) = \|b\|^2 \|v(i_{\mathbf{s}}(\mathbf{a}))\|^2,$$

так что $j_t(b)$ продолжается по линейности и непрерывности до ограниченного линейного оператора $j_t(b)$ на $\mathscr{H}$, причем $\|j_t(b)\| \leqslant \|b\|$. Из $CK4$, $CK5$, $CK6$ следует, что j_t является $*$-представлением алгебры $\mathscr{B}$ при каждом $t \in T$. Пусть $\mathscr{A}$ есть C^*-алгебра, порождаемая образами $\{j_t(b) \colon b \in \mathscr{B},\ t \in T\}$, и пусть ω — векторное состояние на $\mathscr{A}$, такое что $\omega(a) = \langle \Omega, a\Omega \rangle$ для любых $a \in \mathscr{A}$. Тогда по формуле (1.3) Ω является циклическим вектором для $\mathscr{A}$ в $\mathscr{H}$ и совокупность $(\mathscr{A},\ \{j_t \colon t \in T\},\ \omega)$ определяет случайный процесс над $\mathscr{B}$, причем выполняется равенство

$$\omega\left(j_{\mathbf{t}}(\mathbf{a})^* j_{\mathbf{t}}(\mathbf{b})\right) = w(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$$

для любых $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$. Согласно предложению 1.1, процесс единствен с точностью до эквивалентности. Из построения ясно, что условие NCK влечет за собой нормальность отображений $\pi \circ j_t$.

1.4. Пусть $(\mathscr{A},\ \{j_t\},\ \omega)$ — случайный процесс над $\mathscr{B}$. Рассмотрим группу G, действующую на множестве T. Процесс называется *G-стационарным*, если существует группа унитарных преобразований $\{U_g \colon g \in G\}$, действующих в ГНС-пространстве $\mathscr{H}$, ассоциированном с $(\mathscr{A}, \omega)$, такая что

$$S\colon\ U_g\Omega = \Omega \quad \text{и} \quad U_g \pi j_t(b) = \pi j_{gt}(b) U_g$$

для всех $g \in G$ и $b \in \mathscr{B}$. Определим действие G на $\mathbf{T}$ как $g(t_1, \ldots, t_n) = (gt_1, \ldots, gt_n)$. Семейство корреляционных ядер называется *G-инвариантным*, если справедливо равенство

$$S'\colon\ w_{g\mathbf{t}}(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$$

для всех $g \in G$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$.

Предложение 1.4. *Случайный процесс является G-стационарным тогда и только тогда, когда его семейство корреляционных ядер G-инвариантно.*

Доказательство. Условие S' влечет за собой эквивалентность процессов $(\mathscr{A},\ \{j_t\},\ \omega)$ и $(\mathscr{A},\ \{j_{gt}\},\ \omega)$, т. е. существование унитарных преобразований, удовлетворяющих S и групповому свойству, следует из предложения 1.1. Доказательство обратного утверждения очевидно.

Если процесс G-стационарен, причем $G = T = \mathbb{R}$ и действие $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$ имеет вид $s, t \to s + t$, мы будем говорить, что процесс является *стационарным.*

1.5. Пусть S_n — группа перестановок n объектов; ее действие на T^n определяется как $\mathbf{t} \mapsto p\mathbf{t}$, где $p(t_1, \ldots, t_n) =$

$=(t_{p(1)}, \dots, t_{p(n)})$, и на $\mathscr{B}_{\mathbf{t}}$ как $\mathbf{b} \mapsto p\mathbf{b}$, где $p(b_1, \dots, b_n) = (b_{p(1)}, \dots, b_{p(n)})$. Семейство $\{\omega_{\mathbf{t}}\colon \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ корреляционных ядер называется *симметричным*, если выполняется равенство $\omega_{p\mathbf{t}}(p\mathbf{a}; p\mathbf{b}) = \omega_{\mathbf{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ для всех $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$ и $p \in S_{n(\mathbf{t})}$, таких что $p(k) < p(l)$, если $k < l$ и $t_k = t_l$; это семейство называется *вполне симметричным*, если $\omega_{p\mathbf{t}}(p\mathbf{a}; p\mathbf{b}) = \omega_{\mathbf{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ выполняется для всех $p \in S_{n(\mathbf{t})}$ без ограничений. Случайный процесс называется вполне симметричным, если семейство его корреляционных ядер вполне симметрично.

Предложение 1.5. *Случайный процесс симметричен тогда и только тогда, когда алгебры $\pi j_t(\mathscr{B})$ и $\pi j_s(\mathscr{B})$ в различные моменты времени коммутируют: $[\pi j_s(a), \pi j_t(b)] = 0$ для всех $a, b \in \mathscr{B}$, $s \neq t$; он вполне симметричен тогда и только тогда, когда при различных временах эти алгебры коммутируют, а алгебры $\pi j_t(\mathscr{B})$ при фиксированных t абелевы.*

Доказательство. Непосредственная проверка.

Комментарии и дополнительные результаты

1.6. Определение случайного процесса было дано в п. 1.1 с учетом возможного применения в квантовой теории открытых систем; оно может рассматриваться как некоммутативная версия классического случайного процесса в смысле Дуба [1] и Мейера [2]. Классический случайный процесс со значениями в измеримом пространстве $(S, \mathscr{E})$ задается семейством $\{X_t\colon t \in T\}$ измеримых функций со значениями в S, определенных на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathscr{F}, \mu)$; два процесса с одинаковым множеством значений параметра и со значениями в одном пространстве называются эквивалентными, если они имеют одинаковые конечномерные совместные распределения вероятностей:

$$\int\limits_{\Sigma^{(1)}} f_1 \circ X^{(1)}_{t_1} \dots f_n \circ X^{(1)}_{t_n}\, d\mu^{(1)} = \int\limits_{\Sigma^{(2)}} f_1 \circ X^{(2)}_{t_1} \dots f_n \circ X^{(2)}_{t_n}\, d\mu^{(2)}$$

для каждой конечной последовательности $\{f_1, \dots, f_n\}$ в множестве функций, порождающем W^*-алгебру $L^\infty(S, \mathscr{E})$, и для каждого конечного набора $\{t_1, \dots, t_n\}$ элементов T. Каждая функция X_t определяет нормальный, сохраняющий единицу $*$-гомоморфизм j_t из $L^\infty(S, \mathscr{E})$ в $L^\infty(\Sigma, \mathscr{F})$ согласно равенству $j_t(f) = f \circ X_t$ для каждого $f \in L^\infty(S, \mathscr{E})$, вероятностная мера μ определяет нормальное состояние ω на $L^\infty(\Sigma, \mathscr{F})$ по формуле $\omega(g) = \int g\, d\mu$ для любого $g \in L^\infty(\Sigma, \mathscr{F})$, и ГНС-представление, индуцированное ω, есть факторотображение

$L^\infty(\Sigma, \mathscr{F})$ на $L^\infty(\Sigma, \mathscr{F}, \mu)$. Таким образом, классический случайный процесс в смысле Дуба определяет W^*-случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над абелевой W^*-алгеброй $\mathscr{B}$, причем алгебра $\mathscr{A}$ также абелева.

Наоборот, пусть $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ есть некоторый W^*-процесс над абелевой алгеброй $\mathscr{B}$, с абелевым представлеиием $\pi(\mathscr{A})$; тогда по теореме о представлении абелевой W^*-алгебры [14] существуют измеримое пространство $(S, \mathscr{E})$ и вероятиостное пространство $(\Sigma, \mathscr{F}, \mu)$, такие что $\mathscr{B} = L^\infty(S, \mathscr{E})$ и $\pi(\mathscr{A})'' = L^\infty(\Sigma, \mathscr{F}, \mu)$; состояние ω определяется вероятностной мерой μ, и существует семейство $\{X_t\colon t \in T\}$ измеримых функций $X_t\colon \Sigma \to S$, таких что $j_t(f) = f \circ X_t$ для каждого $f \in \mathscr{B}$ (лемма 2.3 [3]). В этом случае условие эквивалентности п. 1.1 сводится к равенству конечномерных совместных распределений вероятностей. Таким образом, мы можем определнть классический случайный процесс как W^*-процесс, для которого алгебры $\mathscr{B}$ и $\pi(\mathscr{A})$ абелевы.

Случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ определяет семейство локальных алгебр, объединение которых порождает $\mathscr{A}$; для процессов в смысле Дуба и их некоммутативных аналогов локальные алгебры могут быть ассоциированы с ограниченными подмножествами $F \subset T$, если определить $\mathscr{A}_F$ как C^*-алгебру, порождаемую образами $\{j_t(b)\colon b \in \mathscr{B},\ t \in F\}$. Обобщенные случайные процессы в смысле Гельфанда [15] и локальные теории поля в смысле Хаага и Кастлера [4] также дают примеры случайных процессов с заданным множеством значений параметра и соответственно определенными локальными алгебрами. В этих случаях может быть удобно считать два процесса эквивалентными, если существует унитарное отображение U из $\mathscr{H}^{(1)}$ в $\mathscr{H}^{(2)}$, такое что $U\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ и $U\pi^{(1)}\left(\mathscr{A}_F^{(1)}\right)'' = \pi^{(2)}\left(\mathscr{A}_F^{(2)}\right)'' U$ для всех локальных алгебр $\mathscr{A}_F$.

Если применнть такое определение к случайным процессам в смысле Дуба, то получится слишком грубая классификация случайных процессов. Это определеиие подразумевает, что два случайных процесса $\left(\mathscr{A}^{(i)}, \left\{j_t^{(i)}\right\}, \omega^{(i)}\right)$, $i = 1, 2$, над $\mathscr{B}$ эквивалентны, если существует семейство $\{\alpha_t\colon t \in T\}$ $*$-автоморфизмов алгебры $\mathscr{B}$, такое что

$$\omega^{(1)}\left(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(1)}(a_n)^* j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(1)}(b_1)\right) =$$

$$= \omega^{(2)}\left(j_{t_1}^{(2)}\left(\alpha_{t_1} a_1\right)^* \cdots j_{t_n}^{(2)}\left(\alpha_{t_n} a_n\right)^* j_{t_n}^{(2)}\left(\alpha_{t_n} b_n\right) \cdots j_{t_1}^{(2)}\left(\alpha_{t_1} b_1\right)\right)$$

для всех $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$. Например, рассмотрим $\left\{T_t^{(i)}\colon t \in T\right\}$, $i = 1, 2$, — две группы измеримых отображений измеримого пространства $(S, \mathscr{E})$ на себя. Определим $\tau_t^{(i)}\colon \mathscr{B} = L^\infty(S, \mathscr{E}) \to \mathscr{B}$, $\tau_t^{(i)}(f) = f \circ T_t^{(i)}$, $\mathscr{A}^{(1)} =$

$=\mathscr{A}^{(2)}=\otimes_{\mathbb{R}}\mathscr{B}$, $j_t^{(1)}=j_t^{(2)}$ — естественное отображение $\mathscr{B}$ на себя для каждого $t\in\mathbb{R}$. Пусть ν — некоторая вероятностная мера на $(S,\mathscr{E})$ и зададим состояния $\omega^{(i)}$ на $\mathscr{A}^{(i)}$ равенством

$$\omega^{(i)}\left(j_{t_1}^{(i)}(a_1)^*\ldots j_{t_n}^{(i)}(a_n)^*j_{t_n}^{(i)}(b_n)\ldots j_{t_1}^{(i)}(b_1)\right)=$$
$$=\nu\left(\tau_{t_1}^{(i)}(a_1)^*\ldots\tau_{t_n}^{(i)}(a_n)^*\tau_{t_n}^{(i)}(b_n)\ldots\tau_{t_1}^{(i)}(b_1)\right),\qquad i=1,\ 2;$$

тогда процессы $\left(\mathscr{A}^{(i)},\{j_t^{(i)}\},\omega^{(i)}\right)$ будут эквивалентными, причем α_t будет равно $\tau_{-t}^{(2)}\tau_t^{(1)}$ для каждого $t\in\mathbb{R}$.

Корреляционные ядра определяются величинами $w_t(\mathbf{b};\,\mathbf{b})$ на диагонали $\mathscr{B}_t\times\mathscr{B}_t$; они являются неотрицательными числами и могут в принципе быть заданы через последовательность измерительных процедур [4, 5, 6]; если параметр t есть время, то измерению доступны лишь ядра с $t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$, а ядра с произвольным порядком могут быть получены из времяупорядоченных, если известны коммутационные соотношения между наблюдаемыми для разных моментов времени. С математической точки зрения корреляционные ядра могут служить заменой конечномерных распределений вероятностей классической теории (совместные распределения не существуют для некоммутирующих наблюдаемых в квантовой теории [16]), которые являются основными объектами в хорошо известной теореме Колмогорова [7] о восстановлении классического процесса по проективному семейству конечномерных совместных распределений. Наша теорема 1.3 дает некоммутативную версию этой процедуры и позволяет восстановить случайный процесс по проективному семейству корреляционных ядер.

В классическом случае теорема Колмогорова дает несколько больше: она позволяет доказать, что любой классический случайный процесс над заданной алгеброй $\mathscr{B}=$ $=L^\infty(S,\mathscr{E})$ может быть реализован заданием состояния $\bar{\omega}$ на некоторой универсальной алгебре $\bar{\mathscr{A}}$ с универсальными включениями $\bar{j}_t$ алгебры $\mathscr{B}$ в $\bar{\mathscr{A}}$, такими что все соотношения между подалгебрами $\bar{\mathscr{A}}_s$ и $\bar{\mathscr{A}}_t$ для $s\neq t$ даются одним только состоянием; мы приведем ниже (теорема 1.7.1) некоммутативную версию этого аспекта теоремы Колмогорова. В классическом случае в качестве алгебры $\bar{\mathscr{A}}$ может рассматриваться $L^\infty(\Pi_T S,\Pi_T\mathscr{E})$, и аналитический смысл теоремы Колмогорова состоит в том, что при слабых топологических ограничениях на S состояние ω порождает счетно-аддитивную меру на $\Pi_T(S,\mathscr{E})$; иными словами, это есть критерий нормальности предела последовательности локально нормальных состояний. Мы не будем рассматривать некоммутативный аналог этого утверждения.

Первая часть доказательства теоремы реконструкции использует чуть больше, чем теорема 1.9 [13], а также понятие индуктивного предела в категории множеств, и является весьма общей: она выполняется для всех множеств $\mathscr{B}$ с выделенным единнчным элементом. По смыслу это утверждение является общей частью всех теорем реконструкции; например, теорема реконструкции Вайтмана [17] соответствует случаю, когда T есть пространство основных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ и $\mathscr{B}$ есть алгебра (ненормированная) полиномов переменной φ: тогда $j_f(1) = 1$ и $j_f(\mathscr{S}^n) = \mathscr{S}(f)^n$ для каждой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$; конечно, при этом существует еще дополннтельная структура, связанная с Пуаикаре-инвариантностью и локальной коммутативностью, которые воплощаются в дополнительных аксиомах Вайтмана. Результат Дабина — Сьюэлла [18] можно также рассматривать как теорему реконструкции, и доказывать его можио с помощью этой процедуры: тогда $\mathscr{B}$ есть $*$-алгебра с нормой и единицей, которая не замкнута (будучи объединением всех локальных C^*-алгебр), $T = \mathbb{R}$ есть временная ось; дополнительные аксиомы означают в этом случае, что процесс стационарен и детерминирован: $j_t(\mathscr{B})'' = j_0(\mathscr{B})''$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

1.7. Если $\mathscr{A}^{(0)}$ есть C^*-алгебра и $\{j_t^{(0)}:\ t \in T\}$ — семейство сохраияющих единицу $*$-гомоморфизмов $\mathscr{B} \to \mathscr{A}^{(0)}$, то можно доказать, что проективиое семейство $\{w_\mathbf{t}:\ \mathbf{t} \in T\}$ корреляциониых ядер иад $\mathscr{B}$ определяет состояние на $\mathscr{A}^{(0)}$ тогда и только тогда, когда алгебраические соотношеиия алгебры $\mathscr{A}^{(0)}$ выполияются для $\{w_\mathbf{t}:\ \mathbf{t} \in T\}$. Более точно, пусть $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ есть случайный процесс над $\mathscr{B}$, определяемый семейством $\{w_\mathbf{t}:\ \mathbf{t} \in T\}$ по теореме реконструкции; тогда состояиие $\omega^{(0)}$ на $\mathscr{A}^{(0)}$ существует, причем

$$\omega^{(0)}\left(j_\mathbf{t}^{(0)}(\mathbf{a})^*\, j_t^{(0)}(\mathbf{b})\right) = w_\mathbf{t}(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$$

для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{B}_\mathbf{t}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда из

$$\sum_k j_{\mathbf{t}_k}^{(0)}(\mathbf{b}_k) = 0$$

следует

$$\sum_k j_{\mathbf{t}_k}(\mathbf{b}_k) = 0$$

для всех конечных наборов $\{\mathbf{t}_k:\ \mathbf{t}_k \in T,\ k = 1, \ldots, m\}$ и $\{\mathbf{b}_k:\ \mathbf{b}_k \in \mathscr{B}_\mathbf{t},\ k = 1, \ldots, m\}$. В частности, если $(\mathscr{A}^{(0)}, \{j_t^{(0)}\}, \omega^{(0)})$ — случайный процесс, то процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$, полученный по теореме реконструкции, таков, что $\mathscr{A}$ изоморфно $\pi^{(0)}(\mathscr{A}^{(0)})$; т. е. все алгебраические соотношения $\mathscr{A}^{(0)}$ сохраняются для $\mathscr{A}$, и дальнейшие статистические соотношения могут быть представлены через состояние $\omega^{(0)}$, если $\pi^{(0)}$ не является точным.

Сформулируем без доказательства две теоремы о существовании универсальной C^*-алгебры для всех случайных процессов (для всех симметричных случайных процессов) над заданной C^*-алгеброй $\mathcal{B}$; они мотивируются предыдущими рассуждениями. Доказательство теоремы 1.7.1 аналогично доказательству Виннинка [19].

Теорема 1.7.1. *Пусть* $\mathcal{B}$ *есть* C^**-алгебра с единицей и* T — *некоторое множество. Существуют* C^**-алгебра с единицей* $\bar{\mathcal{A}}$ *и семейство* $\{\bar{j}_t\colon t\in T\}$ $*$*-гомоморфизмов из* $\mathcal{B}$ *в* $\bar{\mathcal{A}}$, *такие что любой случайный процесс* $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ *над* $\mathcal{B}$ *эквивалентен случайному процессу* $(\bar{\mathcal{A}}, \{\bar{j}_t\}, \bar{\omega})$, *где только* $\bar{\omega}$ *зависит от* $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$.

Теорема 1.7.2. *Случайный процесс* $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ *над* $\mathcal{B}$, $t\in T$, *является симметричным тогда и только тогда, когда он эквивалентен случайному процессу* $(\otimes_T\mathcal{B}, \{i_t\}, \bar{\omega})$, *где* $\otimes_T\mathcal{B}$ *есть* C^**-тензорное произведение изоморфных копий* $\mathcal{B}$ *для всех* $t\in T$, i_t *есть естественное включение* $\mathcal{B}$ *как* t*-й компоненты тензорного произведения и* $\bar{\omega}$ *есть произвольное состояние на* $\otimes_T\mathcal{B}$.

Алгебра $\bar{\mathcal{A}}$ из условия теоремы 1.6 (см. [19]) есть подалгебра свободной алгебры, порождаемой прямым объединением изоморфных копий $\mathcal{B}$ для всех значений параметра $t\in T$; все алгебраические соотношения в $\bar{\mathcal{A}}$ являются следствием того, что $\{\bar{j}_t\colon t\in T\}$ — $*$-гомоморфизмы. Алгебра $\otimes_T\mathcal{B}$ может быть получена из $\bar{\mathcal{A}}$ путем приравнивания нулю всех коммутаторов между наблюдаемыми, локализованными в различных временах. Она является аналогом алгебры $L^\infty(\Pi_T S, \Pi_T(\mathcal{E}))$ ограниченных измеримых функций на пространстве траекторий классического случайного процесса. Конечно, все классические процессы являются симметричными и вполне симметричными. Симметричные квантовые случайные процессы над $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ изучались в работах Аккарди [3, 20].

1.8. Для симметричных процессов теорема реконструкции может быть представлена в форме, более близкой к первоначальной теореме Колмогорова [7]; введем вначале удобные обозначения. Обозначим $F(T)$ совокупность ограниченных подмножеств T; для каждого $E\in F(T)$ обозначим через $\mathcal{B}^E$ множество функций из E в $\mathcal{B}$, снабженное операциями поточечного сложения, умножения и сопряжения; например, для β_1 и β_2 из $\mathscr{B}^E$ мы имеем $(\beta_1\beta_2)(s)=\beta_1(s)\beta_2(s)$ для всех $s\in E$. Для каждого $t\in T$ определим действие элементов $\mathscr{B}$ на $\mathscr{B}^E$ равенством $(b_t\beta)(1)=b\beta(t)$, $(b_t\beta)(s)=\beta(s)$ для $s\neq t$. Для двух множеств E, $F\in F(T)$, таких что $E\subseteq F$, обозначим через g_E^F отображение из $\mathscr{B}^E$ в $\mathscr{B}^F$, определенное для всех $s\in F$ как $(g_E^F\beta)=\beta(s)$, если $s\in E$, и $(g_E^F\beta)(s)=1$ если $S \underline{\underline{\in}} E$. Пусть $[\cdot]$: $\mathbf{T}\to F(T)$ есть отображение, для которого $[\mathbf{t}]=\{t_1, \ldots, t_n\}$ для каждого $\mathbf{t}=(t_1, \ldots, t_n)\in\mathbf{T}$, и обозначим $[\cdot]$: $\mathscr{B}_{\mathbf{t}}\to\mathscr{B}^{|\mathbf{t}|}$ отображение, действующее согласно формуле $[\mathbf{b}](s)=\prod_{\{k:\, t_k=s\}} b_k$.

Для симметричного случайного процесса $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над C^*-алгеброй $\mathscr{B}$ семейство $\{\varphi_E\colon E\in F(T)\}$ функционалов, определенных для каждого $\beta\in\mathscr{B}^E$ как $\varphi_E(\beta)=\omega\left(\prod\limits_{s\in E} j_s(\beta(s))\right)$, называется *семейством функционалов ожидания* такого процесса.

Предложение 1.8.1. *Семейство* $\{\varphi_E\colon E\in F(T)\}$ *функционалов ожидания симметричного случайного процесса над* $\mathscr{B}$ *удовлетворяет условиям* $EF1, \ldots, EF4$; *если это* W^*-*процесс, то условие* NEF *также выполняется*:

$EF1$ (*проективность*): $\varphi_F(g_E^F\beta)=\varphi_E(\beta)$ *для всех* $E\subseteqq F$ *из* $F(T)$, $\beta\in\mathscr{B}^E$;

$EF2$ (*положительность*): *для всех* $E\in F(T)$ *имеем* $\varphi_E(\beta^*\beta)\geqslant 0$ *для всех* $\beta\in B^E$;

$EF3$ (*нормированность*): *для всех* $E\in F(T)$ *имеем* $\varphi_E(1_E)=1$, *где* $1_E(s)=1$ *для всех* $s\in E$, $1_E(s)=0$ *для* $s\notin E$;

$EF4$ (*линейность*): *для всех* $E\in F(T)$ *и* $\beta\in\mathscr{B}^E$ *отображение* $\beta(s)\longmapsto\varphi_E(\beta)$ *линейно при каждом* $s\in E$;

NEF (*нормальность*): *для всех* $E\in F(T)$, *всех* $t\in E$ *и* $\beta\in\mathscr{B}^E$ *отображение* $b\longmapsto\varphi_E(b_t\beta)$ *нормально.*

Доказательство. Утверждение доказывается прямой проверкой.

Пусть $\mathscr{B}$ есть C^*-алгебра с единицей и T — множество; семейство $\{\varphi_E\colon E\in F(T)\}$ называется *проективной системой функционалов ожидания над* $\mathscr{B}$, если для каждого $E\in F(T)$ φ_E есть функционал на $\mathscr{B}^E$ со значением в $\mathbb{C}$, такой что условия $EF1, \ldots, EF4$ выполнены; оно называется *нормальной проективной системой*, если $\mathscr{B}$ есть W^*-алгебра и условне NEF также выполнеио.

Следствие 1.8.2. *Пусть* $\mathscr{B}$ *есть* C^*-*алгебра с единицей и* $\{\varphi_E\colon E\in F(T)\}$ — *проективная система функционалов ожидания над* $\mathscr{B}$ *с множеством значений параметра* T. *Тогда су-*

ществует симметричный случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ *над* $\mathscr{B}$ *с семейством функционалов ожидания* $\{\varphi_E\colon E \in F(T)\}$. *Процесс единствен с точностью до эквивалентности и является* W^**-процессом, если* $\mathscr{B}$ — W^**-алгебра и система функционалов ожидания нормальна.*

Доказательство. Для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, положим $w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a};\, \mathbf{b}) = \varphi_{[\mathbf{t}]}([\mathbf{a}^*]\,[\mathbf{b}^*]^*)$. Легко проверить, что если $\{\varphi_E\colon E \in F(T)\}$ удовлетворяет $EF1, \ldots, EF4$, то $\{w_{\mathbf{t}}\colon \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ удовлетворяет $CK1, \ldots, CK6$ (и условие NCK также выполняется, если выполняется NEF). Следовательно, по теореме 1.3 существует случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над $\mathscr{B}$, единственный с точностью до эквивалентности, семейство корреляционных ядер которого совпадает с $\{w_{\mathbf{t}}\colon \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$, причем выполняется $w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a};\, \mathbf{b}) = \omega\left(j_{\mathbf{t}}(\mathbf{a})^*\, j_{\mathbf{t}}(b)\right)$. Так как $[p\mathbf{t}] = [\mathbf{t}]$ и $[p\mathbf{b}] = [\mathbf{b}]$ для всех перестановок p, то семейство $\{w_{\mathbf{t}}\colon \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ симметрично и справедливо равенство $\varphi_{[\mathbf{t}]}([\mathbf{b}]) = w_{\mathbf{t}}([\mathbf{b}^*];\; 1_{\mathbf{t}}) = \omega\left(j_{\mathbf{t}}(\mathbf{b}^*)^*\right) = \omega\left(j_{t_1}(b_1) \ldots j_{t_n}(b_n)\right)$ для всех $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathscr{B}_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{T}$, и функционалы ожидания определяются процессом. Нормальность отображений πj_t следует из условия NEF так же, как и в доказательстве теоремы 1.3.

§ 2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПОЛУГРУППЫ

2.1. В этом параграфе под «случайным процессом» понимается совокупность $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$, как в определении, причем под $\mathscr{A}$ подразумевается ее ГНС-представление $\pi(\mathscr{A})$, так что $j_t = \pi \circ j_t$; это всегда возможно с точностью до эквивалентности. Если $\mathscr{B}$ есть W^*-алгебра и отображения j_t нормальны (W^*-процесс), то мы возьмем в качестве $\mathscr{A}$ W^*-алгебру, порождаемую $\{j_t(b)\colon b \in \mathscr{B},\ t \in T\}$, а в качестве ω — нормальное состояние на $\mathscr{A}$. Предположим также, что множество значений параметра T вполне упорядочено (например, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$), и мы будем рассматривать его как «время». Для каждого $t \in T$ определим C^*-подалгебры в $\mathscr{A}$ (W^*-подалгебры для W^*-процесса):

$$\mathscr{A}_{t]} = \bigvee \{j_s(b)\colon\ b \in \mathscr{B},\ s \leqslant t\}; \tag{2.1а}$$

$$\mathscr{A}_t = \bigvee \{j_t(b)\colon\ b \in \mathscr{B}\} = j_t(\mathscr{B}); \tag{2.1б}$$

$$\mathscr{A}_{[t} = \bigvee \{j_u(b)\colon\ b \in \mathscr{B},\ t \leqslant u\}; \tag{2.1в}$$

и для всех $t < u$ определим

$$\mathscr{A}_{[t,\, u]} = \bigvee \{j_s(b)\colon\ b \in \mathscr{B},\ t \leqslant s \leqslant u\}, \tag{2.1г}$$

где $\bigvee S$ означает, что C^*-алгебра (или W^*-алгебра) порождена подмножествами $S \subset \mathscr{A}$.

Если $\mathscr{A}$ есть W^*-алгебра, и ω — точное нормальное состояние на $\mathscr{A}$, то новый результат [21], обобщающий известную теорему Такесаки [22], показывает, что существует семейство канонических вполне положительных отображений, сохраняющих единицу, $E_{s,t}$ из $\mathscr{A}_{t]}$ в $\mathscr{A}_{s]}$, $s < t \in T$, совместимых с ω в том смысле, что

$$\omega \upharpoonright \mathscr{A}_{t]} = \omega \upharpoonright \mathscr{A}_{s]} \circ E_{s,t}, \qquad s < t \in T; \tag{2.2}$$

они являются точными и нормальными и удовлетворяют правилу цепи

$$E_{s,t} E_{t,u} = E_{s,u}; \qquad s < t < u \in T. \tag{2.3}$$

Такие отображения являются условными ожиданиями тогда и только тогда, когда каждая алгебра $\{\mathscr{A}_{s]} : s \in T\}$ глобально инвариантна относительно группы модулярных автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$, присоединеной к ω, согласно теории Томиты — Такесаки (в частности, когда $\mathscr{A}$ абелева).

Определение. Случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$, где $\mathscr{A}$ есть W^*-алгебра и ω — точное нормальное состояние на $\mathscr{A}$, называется *марковским процессом* [1], если канонические отображения $\{E_{s,t}\colon s < t \in T\}$ совместимы с ω и выполняется

$$M\colon\ E_{s,t}(A_{[s,t]}) \subseteq \mathscr{A}_s \quad \text{для всех} \quad s < t \in T.$$

(Это определение слегка модифицироваио по сравнению с определением из [23, 24, 3].)

Теорема 2.1. *Пусть* $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ — *марковский процесс над* $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ *суть* W^*-*алгебры*, j_t — *нормальные отображения*, ω — *точное нормальное состояние на* $\mathscr{A}$). *Предположим существование левого обратного* j_t^* *для* j_t, *и пусть* $E_{t,t}$ — *тождественное отображение в* $\mathscr{A}_{t]}$. *Тогда формула*

$$Z_{s,t} = j_s^* E_{s,t} j_t, \quad s \leqslant t \in T \tag{2.4}$$

определяет двухпараметрическое семейство вполне положительных, сохраняющих единицу нормальных отображений $\mathscr{B}$ *на себя, для которых справедливо*

$$Z_{s,t} Z_{t,u} = Z_{s,u} \tag{2.5}$$

при всех $s \leqslant t \leqslant u \in T$. *Более того, если* $E_{s,t}$ *являются условными ожиданиями, то*

$$\begin{aligned} &E_{t_0,t_n}\left(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_1}(b_1)\right) = \\ &\qquad = j_{t_0} Z_{t_0,t_1}\left(a_1^* Z_{t_1,t_2}\left(a_2^* \cdots Z_{t_{n-1},t_n}(a_n^* b_n) \cdots b_2\right) b_1\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

для всех $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \in T$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$.

---

[1] Это определение, по-видимому, является слишком общим. В настоящее время под квантовым марковским процессом понимают марковский процесс с условными ожиданиями (см. ниже). — *Прим. перев.*

Доказательство. Для всех $s \leqslant t$ и $b \in \mathscr{B}$ из марковского свойства следует, что $E_{s,t} j_t(b) \in \mathscr{A}_s$, так что $j_s^* E_{s,t} j_t(b)$ имеет смысл и отображение $Z_{s,t}$ определено согласно (2.4). Оно вполне положительно, сохраняет единицу и нормально, поскольку построено из отображений, обладающих этими свойствами. Пользуясь правилом (2.3) и тем, что $j_t j_t^*$ есть тождественное отображение в $\mathscr{A}_t$, получаем

$$Z_{s,t} Z_{t,u} = j_s^* E_{s,t} j_t j_t^* E_{t,u} j_u = j_s^* E_{s,t} E_{t,u} j_u = j_s^* E_{s,u} j_u = Z_{s,u}$$

для $s \leqslant t \leqslant u$, что доказывает (2.5). Снова пользуясь формулой (2.3) для $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, получим равенство $E_{t_0, t_n} = E_{t_0, t_1} E_{t_1, t_2} \ldots E_{t_{n-1}, t_n}$. Если теперь $E_{s,t}$ являются условными ожиданиями, то левая часть (2.6) принимает вид

$$E_{t_0, t_1}\left(j_{t_1}(a_1)^* E_{t_1, t_2}\left(j_{t_2}(a_2)^* E_{t_2, t_3}\left(\ldots E_{t_{n-1}, t_n} \times \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \left(j_{t_n}(a_n^* b_n)\right) \ldots\right) j_{t_2}(b_2)\right) j_{t_1}(b_1)\right).$$

Тогда (2.6) следует из (2.4), марковского свойства M и того, что $j_t j_t^*$ есть тождественное отображение в $\mathscr{A}_t$.

2.2. Если $\{E_{s,t}\colon s < t \in T\}$ совместимы с ω и являются условными ожиданиями, то существует проективное семейство $\{E_{s]}\colon s \in T\}$ условных ожиданий $E_{s]}$ из алгебры $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}_{s]}$, $s \in T$, совместимых с ω в том смысле, что $E_{s,t} = E_{s]} \upharpoonright \mathscr{A}_{t]}$ для всех $s < t \in T$. Марковское свойство M при этом эквивалентно

$$M'\colon\ E_{s]}(\mathscr{A}_{[s}) = \mathscr{A}_s$$

для всех $s \in T$.

Перечислим некоторые свойства семейства $\{E_{s]}\colon s \in T\}$, которые мы будем использовать в дальнейшем:

$E1$: $E_{s]}(ab) = E_{s]}(a)b$ для всех $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{A}_{s]}$, $s \in T$;

$E2$: $\omega = \omega \upharpoonright \mathscr{A}_{s]} \circ E_{s]}$ для всех $s \in T$;

$E3$: $E_{s]} E_{t]} = E_{s \wedge t]}$ для всех $s, t \in T$;

и если $T = \mathbb{R}$ и процесс стационарный с группой автоморфизмов $\{u_t = U_t(\cdot) U_{-t}\colon t \in \mathbb{R}\}$, то

$E4$: $u_t E_{s]} = E_{s+t]} u_t$ для всех $s, t \in \mathbb{R}$.

Условия $E1$—$E4$ могут быть сформулированы и в том случае, когда $\mathscr{A}$ есть C^*-алгебра и ω не является точным состоянием. Если существуют отображения, удовлетворяющие условиям $E1$ и $E2$, то они будут удовлетворять $E3$ (и $E4$ в стационарном случае), если ГНС-представление $\mathscr{A}_{s]}$, определяемое $\omega \upharpoonright \mathscr{A}_{s]}$, является точным при всех s. Мы можем использовать условия $E1-E4$ и M' для того, чтобы дать определение марковского свойства, которое имеет смысл даже когда $\mathscr{A}$ не есть W^*-алгебра и ω не точное.

Определение. Случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ называется *марковским процессом с условными ожиданиями*, если существует семейство $\{E_{s]}\colon s \in T\}$ условных ожиданий $E_{s]}$ из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}_{s]}$, $s \in T$, удовлетворяющее условиям $E1-E3$ (и $E4$ в стационарном случае) и марковскому свойству M'. Для W^*-процесса необходимо, чтобы $\{E_{s]}\colon s \in T\}$ было нормально.

Теорема 2.1 выполняется для марковского процесса с условными ожиданиями независимо от нормальности отображений $Z_{s,\,t}$, которая требуется лишь для W^*-процесса. Более того, если $T = \mathbb{R}$ и процесс стационарный, то $Z_{s,\,s+t}$ не зависит от s при всех $t \geqslant 0$ согласно $E4$, т. е.

$$Z_t = Z_{s,\,s+t} \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0, \tag{2.7}$$

определяет $\{Z_t\colon t \geqslant 0\}$ — полугруппу вполне положительных, сохраняющих единицу отображений $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$, оставляющих инвариантным состояние $\omega_0 = \omega \circ j_0$ $(=\omega_0 j_t$ для всех $t \in \mathbb{R})$.

Очередное утверждение является прямым следствием теоремы 2.1.

Следствие 2.2.1. *Времяупорядоченные корреляционные ядра* $w_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, *марковского процесса с условными ожиданиями даются формулой*

$$w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a};\, \mathbf{b}) = \omega \circ j_{t_1}\Big(a_1^* Z_{t_1,\,t_2}\big(a_2^* \ldots Z_{t_{n-1},\,t_n}(a_n^* b_n) \ldots b_2\big) b_1\Big) \tag{2.8}$$

для всех $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *из* $\mathscr{B}_{\mathbf{t}}$. *Если процесс стационарный, то*

$$w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a};\, \mathbf{b}) = \omega_0\Big(a_1^* Z_{t_2 - t_1}\big(a_2^* \ldots Z_{t_n - t_{n-1}}(a_n^* b_n) \ldots b_2\big) b_1\Big). \tag{2.9}$$

Соотношения (2.8), (2.9) известны в физической литературе под назваиием «квантовая регрессионная теорема».

Определение. Будем говорить, что случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ удовлетворяет *регрессионному соотношению*, если существует семейство $\{Z_{s,\,t}\colon s < t\}$ отображений $\mathscr{B}$ на себя, таких что выполняется соотношение (2.8).

Определение. Алгебра $\mathscr{A}$ называется *порожденной времяупорядоченными произведениями как векторное пространство*, если для каждого $s \in T$, $\mathscr{A}_{s]}$ (или $\mathscr{A}_{[s}$) является замыканием линейной оболочки произведений $j_{t_n}(b_n) \ldots j_{t_1}(b_1)$

в подходящей топологии, причем $b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$ и $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant s$ (или $s \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$).

Теорема 2.2.2. *Пусть* $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ *есть случайный процесс, причем для каждого* $s \in T$ *ГНС-представление* $\mathscr{A}_{s]}$, *определяемое* $\omega \restriction \mathscr{A}_{s]}$, *является точным и алгебра* $\mathscr{A}$ *порождается времяупорядоченными произведениями как векторное пространство. Тогда, если выполняется регрессионное соотношение,* $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ *является марковским процессом с условными ожиданиями.*

Доказательство. Дадим детальное доказательство для случая W^*-процесса, обобщение на C^*-случай будет очевидно. Отождествляя $\mathscr{A}$ с алгеброй $\pi(\mathscr{A})$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с циклическим вектором Ω, обозначим через $\mathscr{H}_{s]}$ замкнутое подпространство $\overline{A_{s]}\Omega}$ в $\mathscr{H}$ и через $P_{s]}$ — ортогональный проектор на него для всех $s \in T$. Для любого элемента $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ верно $P_{s]}xP_{s]} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_{s]})$, и можно определить отображение $\pi_{s]}\colon \mathscr{A}_{s]} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_{s]})$ как $\pi_{s]}(a) = P_{s]}aP_{s]}$, где $a \in \mathscr{A}_{s]}$. Тогда совокупность $(\mathscr{H}_{s]}, \pi_{s]}, \Omega)$ есть ГНС-конструкция, ассоциированная с $(\mathscr{A}_{s]}, \omega \restriction \mathscr{A}_{s]})$, поскольку $P_{s]}$ коммутирует со всеми элементами $\mathscr{A}_{s]}$ и оставляет Ω инвариантным. По предположению $\pi_{s]}$ нормально и точно, следовательно, существует отображение $\pi_{s]}^{-1}$, являющееся нормальным $*$-изоморфизмом. Из формулы (2.8) и условий теоремы следует, что $P_{s]}j_{t_1}(a_1)^* \ldots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \ldots j_{t_1}(b_1) P_{s]} =$

$$= P_{s]}\left(j_s \circ Z_{s,\, t_1}\right)\left(a_1^* Z_{t_1,\, t_2}\left(a_2^* \ldots Z_{t_{n-1},\, t_n}\left(a_n^* b_n\right) \ldots\right) b_1\right) P_{s]}$$

для всех наборов $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{T}$, таких что $s \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, и для всех $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$.

Из этой формулы и условий теоремы следует

$$P_{s]}\mathscr{A}_{[s}P_{s]} \subseteqq \pi_{s]}(\mathscr{A}_s) \subseteqq \pi_{s]}(\mathscr{A}_{s]}), \tag{2.10}$$

так как отображения $a \to P_{s]}aP_{s]}$ и $a \to \pi_{t]}(a)$ ограничены и нормальны, а $\pi_{s]}$ есть представление и $\mathscr{A}_s$ есть W^*-подалгебра W^*-алгебры $\mathscr{A}_{s]}$. Для всех $a \in \mathscr{A}_{[s}$ и $b \in \mathscr{A}_{s]}$ мы находим, что $P_{s]}abP_{s]}$ принадлежит $\pi_{s]}(\mathscr{A}_{s]})$, поскольку

$$P_{s]}abP_{s]} = P_{s]}aP_{s]}bP_{s]} = P_{s]}aP_{s]}\pi_{s]}(b).$$

По предположению $\mathscr{A}$ есть замыкание линейной оболочки элементов $\{ab\colon a \in \mathscr{A}_{[s},\ b \in \mathscr{A}_{s]}\}$, следовательно, $P_{s]}\mathscr{A}P_{s]} = \pi_{s]}(\mathscr{A}_{s]})$. Теперь определим отображение $E_{s]}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}_{s]}$ по формуле

$$E_{s]}(a) = \pi_{s]}^{-1}\left(P_{s]}aP_{s]}\right) \tag{2.11}$$

для всех $a \in \mathscr{A}$; оно вполне положительно, сохраняет единицу и нормально и, согласно (2.10), оно удовлетворяет марковскому свойству M. Для $a \in \mathscr{A}$ и $b \in \mathscr{A}_{s]}$ имеем

$$E_{s]}(ab) = \pi_{s]}^{-1}\left(P_{s]}aP_{s]}bP_{s]}\right) = \pi_{s]}^{-1}\left(P_{s]}aP_{s]}\right)b = E_{s]}(a)\,b,$$

так что $E_{s]}$ удовлетворяет условию $E1$ (т. е. $E_{s]}$ есть условное ожидание из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}_{s]}$); оно удовлетворяет условию совместности $E2$, так как $P_{s]}\Omega = \Omega$. Условие проективности $E3$ следует из того, что $\{E_{s]}\colon s \in T\}$ определено единственным образом. То же самое доказательство справедливо в C^*-случае при соответствующей замене топологии.

2.3. В этом и последующих подпунктах мы построим теорию возмущений для стационарных марковских процессов с условными ожиданиями, которая основана на обобщении [8, 9] идей, лежащих в основе формулы Фейнмана — Каца.

Определение. Пусть $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ — стационарный марковский процесс с множеством значений параметра $\mathbb{R}$, с группой автоморфизмов $\{u_t\colon t \in R\}$ и условными ожиданиями $\{E_{t]}\colon t \in R\}$. Семейство $\{m_t\colon t \geqslant 0\}$ вполне положительных, сохраняющих единицу отображений $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ называется *марковским коциклом* относительно $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$, если выполняются следующие условия:

$MC1$: $m_{s+t} = m_s u_s m_t u_{-s}$ для всех s, $t \geqslant 0$;

$MC2$: m_t отображает $\mathscr{A}_{[0}$ на себя при всех $t \geqslant 0$;

$MC3$: m_t коммутирует с $E_{t]}$ при любых $t \geqslant 0$.

Теорема 2.3. *Пусть $\{m_t\colon t \geqslant 0\}$ — марковский коцикл относительно стационарного марковского процесса с условными ожиданиями $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над $\mathscr{B}$. Тогда равенство*

$$\tilde{Z}_t = j_0^* E_{0]} m_t j_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.12}$$

определяет полугруппу вполне положительных, сохраняющих единицу отображений $\mathscr{B}$ на себя, и

$$E_{0]}\left(m_{t_1} j_{t_1}(a_1)^* \ldots m_{t_n} j_{t_n}(a_n)^* m_{t_n} j_{t_n}(b_n) \ldots m_{t_1} j_{t_1}(b_1)\right) =$$
$$= j_0 \tilde{Z}_{t_1}\left(a_1^* \tilde{Z}_{t_2 - t_1}\left(a_2^* \ldots \tilde{Z}_{t_n - t_{n-1}}\left(a_n^* b_n\right) \ldots b_2\right) b_1\right) \tag{2.13}$$

для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ в $\mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ в $\mathscr{B}$ и для всех n.

Доказательство (см. [8, 9]). Для всех $b \in \mathscr{B}$, $m_t j_t(b) \in \mathscr{A}_{[0}$ согласно $MC2$, так что $E_{0]} m_t j_t(b) \in \mathscr{A}_0$ согласно марковскому свойству M'. Тогда Z_t определено, вполне положительно и сохраняет единицу по построению. Более того, для всех $s, t \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_s\tilde{Z}_t &= j_0^* E_{0]} m_s u_s j_0 j_0^* E_{0]} m_t u_t j_0 \\
&= j_0^* E_{0]} m_s u_s E_{0]} m_t u_t j_0 \quad (\text{так как } j_0 j_0^* \text{ — тождественное отображение } \mathscr{A}_0) \\
&= j_0^* E_{0]} m_s E_{s]} u_s m_t u_t j_0 \quad (\text{по } E4) \\
&= j_0^* E_{0]} E_{s]} m_s u_s m_t u_t j_0 \quad (\text{по } MC3) \\
&= j_0^* E_{0]} m_s u_s m_t u_t j_0 \quad (\text{по } E3) \\
&= j_0^* E_{0]} m_{s+t} u_{s+t} j_0 \quad (\text{по } MC1) \\
&= \tilde{Z}_{s+t}.
\end{aligned}$$

Равенство (2.13) может быть получено заменой $E_{0]}$ в левой части на $E_{0]}E_{t_1]} \dots E_{t_{n-1}]}$, что допустимо в силу $E3$, и использованием $E1$, $MC3$ и (2.12) (см. доказательство теоремы 2.1).

2.4. Рассмотрим стационарный марковский процесс с сильно непрерывной группой автоморфизмов $\{u_t\colon t \in \mathbb{R}\}$, инфинитезимальный оператор которой обозначим δ. Тогда полугруппа $\{Z_t = j_0^* E_{0]} u_t j_0\colon t \geqslant 0\}$ также сильно непрерывна, и ее инфинитезимальный оператор обозначим L. Положим, что v есть самосопряженный элемент $\mathscr{B}$ и что $\{\tilde{u}_t\colon t \in \mathbb{R}\}$ есть сильно непрерывная группа $*$-автоморфизмов $\mathscr{A}$ с инфинитезимальным оператором

$$\tilde{\delta} = \delta + i\,[j_0(v), \cdot\,] \text{ на } \mathscr{D}(\delta).$$

Лемма 2.4.1. *Семейство* $\{m_t\colon t \geqslant 0\}$, *определяемое равенством*

$$m_t = \tilde{u}_t u_{-t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.14}$$

является марковским коциклом. Соответствующая полугруппа $\{\tilde{Z} = j_0 E_{0]} m_t j_t\colon t \geqslant 0\}$ *сильно непрерывна и ее инфинитезимальный оператор имеет вид*

$$\tilde{L} = L + i\,[v, \cdot\,] \quad \textit{на} \quad \mathscr{D}(L). \tag{2.15}$$

Доказательство. Для всех $a \in \mathscr{A}$ и $t \geqslant 0$ имеем (см., например, [28])

$$m_t(a) = a + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int\limits_{0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant t} \!\!\dots\!\! \int [j_{t_1}(v), [\dots, [j_{t_n}(v), a] \dots]] \times \\ \times dt_1 \dots dt_n = M_t a M_t^*, \tag{2.16}$$

где $M_t \in \mathscr{A}_{[0} \cap \mathscr{A}_{t]}$,

$$M_t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int\limits_{0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t} \cdots \int j_{t_1}(v) \ldots j_{t_n}(v)\, dt_1 \ldots dt_n. \quad (2.17)$$

Тогда ясно, что $\{m_t\colon t \geqslant 0\}$ удовлетворяет $MC2$ и $MC3$, и удовлетворяет $MC1$, если $\{u_t\}$ и $\{\tilde{u}_t\}$ образуют группы. Наконец, для любого $b \in \mathscr{B}$ мы имеем равенство

$$t^{-1}[\tilde{Z}_t(b) - b] = t^{-1}[Z_t(b) - b] + t^{-1}[\tilde{Z}(b) - Z_t(b)] =$$
$$= t^{-1}\left[Z_t(b) - b\right] + j_0^* E_{0]}\left[t^{-1}(m_t - 1)\, j_t(b)\right].$$

Из явного выражения (2.16) для m_t следует, что второе слагаемое в правой части стремится к $i[v, \cdot]$ при $t \to 0$, следовательно, (2.15) доказано.

Лемма 2.4.2. *Определим* $\tilde{j}_t = \tilde{u}_t j_0$, $t \in \mathbb{R}$, *и положим*

$$\widetilde{\mathscr{A}}_t = \tilde{j}_t \mathscr{B}, \qquad \widetilde{\mathscr{A}}_{t]} = \vee\{\widetilde{\mathscr{A}}_s\colon s \leqslant t\},$$
$$\widetilde{\mathscr{A}}_{[t} = \vee\{\widetilde{\mathscr{A}}_u\colon t \leqslant u\}. \quad (2.18)$$

Тогда

$$\widetilde{\mathscr{A}}_{t]} = \mathscr{A}_{t]} \quad \textit{для} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{и} \quad \widetilde{\mathscr{A}}_{[t} = \mathscr{A}_{[t} \quad \textit{для} \quad t \leqslant 0. \quad (2.19)$$

Доказательство. Из доказательства леммы 2.4.1 ясно, что $\widetilde{\mathscr{A}}_{t]} \subseteq \mathscr{A}_{t]}$ при всех $t \geqslant 0$. Поменяв местами $\tilde{u}_t$ и u_t, убедимся, что обратное соотношение также истинно. Вторая половина (2.19) доказывается так же, но ряды теории возмущений рассматриваются для $\tilde{u}_t u_{-t}$ и $u_t \tilde{u}_{-t}$ при отрицательных временах (см. [28]).

Лемма 2.4.3. *Существует хотя бы одно состояние* $\tilde{\omega}$ *на* $\mathscr{A}$, *инвариантное относительно* $\tilde{u}_t$ *и совместимое с* $E_{0]}$. *Для* $\tilde{Z}_t$ *также существует хотя бы одно инвариантное состояние, а именно* $\tilde{\omega} \circ \tilde{j}_0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\omega}$ есть $*$-слабый предел при $t \to \infty$ сети $\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_0 \tilde{u}_s\, ds\colon t \geqslant 0\right\}$, где под интегралом понимается $*$-слабый интеграл Римана. Такая предельная точка всегда существует в силу $*$-слабой компактности множества состояний на C^*-алгебре с единицей. Тогда $\tilde{\omega}$ инвариантно относительно u_t по построению. Поскольку при всех $s \geqslant 0$

$$\tilde{u}_s E_{0]} = m_s u_s E_{0]} = m_s E_{s]} u_s = E_{s]} m_s u_s = E_{s]} \tilde{u}_s \quad (2.20)$$

и состояние ω совместимо со всеми $E_{s]}$, $\tilde{\omega}$ также будет совместимо с $E_{0]}$. Наконец, справедливо равенство $\tilde{\omega} \circ j_0 \circ \tilde{Z}_t = \tilde{\omega} \circ E_{0]}\tilde{u}_t j_0 = \tilde{\omega}_0 j_0$.

Теорема 2.4.4. *При вышеуказанных предположениях* $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \tilde{\omega})$ *есть новый стационарный марковский процесс над* $\mathcal{B}$ *с группой автоморфизмов* $\{\tilde{u}_t\colon t \in \mathbb{R}\}$ *алгебры* $\mathcal{A}$, *полугруппой* $\{\tilde{Z}_t\colon t \geqslant 0\}$ *на* $\mathcal{B}$ *и условными ожиданиями* $\{\tilde{E}_{t]}\colon \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}_{t]};\ t \in \mathbb{R}\}$, *совпадающими с* $E_{t]}$ *при* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Согласно лемме 2.4.3, $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ есть стационарный процесс с группой автоморфизмов $\{u_t\}$ и $\tilde{\omega}$ совместимо с отображениями

$$\tilde{E}_{t]} = \tilde{u}_t E_{0]} u_{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

которые являются условными ожиданиями на алгебру $\mathcal{A}_{t]} = u_t \mathcal{A}_{0]}$, $t \in \mathbb{R}$, и удовлетворяют условию ковариантности $E4$ относительно $\{\tilde{u}_t\}$. Более того, мы имеем

$$\tilde{E}_{t]}\tilde{\mathcal{A}}_{[t} = \tilde{u}_t E_{0]}\tilde{\mathcal{A}}_{[0} = \tilde{u}_t E_{0]}\mathcal{A}_{[0} = \tilde{u}_t \mathcal{A}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_t$$

согласно лемме 2.4.2 и благодаря марковости исходного процесса. Аналогичным путем для $s \leqslant t \in \mathbb{R}$ получаем по формуле (2.20)

$$\tilde{E}_{s]}\tilde{E}_{t]} = \tilde{u}_s E_{0]}\tilde{u}_{t-s}E_{0]}\tilde{u}_{-t} = \tilde{u}_s E_{0]} E_{s]}\tilde{u}_{-s} = \tilde{u}_s E_{0]}\tilde{u}_{-s} = \tilde{E}_{s]},$$

так что условие проективности также выполнено. Тогда $(\mathcal{A}, \{\tilde{j}_t\}, \tilde{\omega})$ есть стационарный марковский процесс с условными ожиданиями. Соответствующая ему полугруппа $\{\tilde{Z}_t\}$ дается формулой (2.12), так как $\tilde{E}_{0]} = E_{0]}$. Кроме того, согласно (2.20), $E_t = \tilde{u}_t E_{0]}\tilde{u}_{-t} = E_{t]}\tilde{u}_{-t}\tilde{u}_t = E_{t]}$ для всех $t \geqslant 0$.

Комментарии и замечания

К 2.1: В классическом случае ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — абелевы W^*-алгебры, ω — точное нормальное состояние) канонические отображения $E_{s,t}$ всегда оказываются условными ожиданиями, и наше определение марковского свойства эквивалентно обычному для процессов в смысле Дуба с вполне упорядоченным множеством значений параметра. Однако следует заметить, что марковское свойство представляет интерес также и для случайных процессов с частично упорядоченным множеством значений параметра T (многомерное марковское свойство). В частности, это существенно для тех обобщенных классических случайных процессов, которые используются в евклидовой квантовой теории поля (см., например, [29, 30]). По поводу некоммутативной формулировки многомерного марковского свойства смотри работу [23].

К 2.2: Согласно следствию 2.2.1 и теореме 2.2.2 регрессионное соотношение (2.8), или (2.9) в стационарном случае, является характеристическим для марковского процесса с условными ожиданиями при некоторых условиях на коммутационные соотношения в $\mathscr{A}$. В частности, (2.8) выполняется для всех классических марковских процессов, гарантируя тем самым, что классический марковский процесс единственным образом определяется соответствующей эволюцией $\{Z_{s,t}: s \leqslant t \in T\}$ на $\mathscr{B}$ и начальным распределением $\omega_0 = \omega_0 j_0$ $(0 \equiv \min T)$, или стационарным распределением в стационарном случае. Это не имеет места в случае некоммутативных марковских процессов; см., например, [3, 20], где рассматривалась структура симметричных марковских квантовых процессов и приведена формула, заменяющая (2.8) в подобной ситуации. Однако некоммутативные случайные процессы, удовлетворяющие регрессионному соотношению, представляют очевидный интерес. Линдблад [31] использует регрессионное соотношение в качестве определения марковости в рамках теории случайных процессов, базисными объектами которых являются времяупорядоченные корреляционные ядра.

Следует отметить, что регрессионное соотношение (2.9) является значительно более сильным свойством, нежели полугрупповой закон для редуцированной динамики:

SG: Существуют полугруппа $\{Z_t: t \geqslant 0\}$ и инвариантное состояние ω_0 на $\mathscr{B}$, такие что

$$w_{t_1, t_2}(a_1, a_2; b_1, b_2) = \omega_0\left(a_1^* Z_{t_2 - t_1}\left(a_2^* b_2\right) b_1\right)$$

для всех $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathscr{B}$ и $t_1 \leqslant t_2 \in \mathbb{R}$.

Это хорошо известно для классических случайных процессов [32]; Линдблад [33] построил квантовомеханический пример процесса, удовлетворяющего *SG*, но не регрессионному соотношению. Этот процесс обладает памятью о начальном состоянии и немарковский в рамках нашего определения марковости процесса. Один из вариантов этого примера дан в приложении.

Интересным является вопрос о том, можно ли построить стационарный марковский процесс (с условными ожиданиями) над $\mathscr{B}$ с множеством значений параметра $\mathbb{R}$, определяемый полугруппой $\{Z_t: t \geqslant 0\}$ вполне положительных, сохраняющих единицу отображений в $\mathscr{B}$ с инвариантным состоянием ω_0 так, чтобы выполнялось регрессионное соотношение (2.9). Известно, что это имеет место для классических процессов (конструкция Колмогорова — Даниэля): полугруппа и стационарное состояние дают времяупорядоченные корреляционные ядра, а произвольные корреляционные ядра находятся в силу перестановочной симметрии. В более широком смысле теорема 2.2.2 утверждает, что подобная конструкция возможна, если известны коммутационные соотношения в $\mathscr{A}$, так что произвольные корреляционные ядра могут быть построены из времяупорядоченных и $\mathscr{A}$ порождается как векторное пространство времяупорядоченными произведениями элементов $j_t(b)$, $b\in\mathscr{B}$, $t\in\mathbb{R}$. В следующем разделе мы выполняем это построение для квазисвободных процессов на алгебре Клиффорда. Аналогичная конструкция для некоммутативных гауссовых процессов на ККС-алгебре может быть найдена в [34].

К 2.3: По поводу других исследований о формуле Фейнмана — Каца см. [35, 36, 20, 31, 38]. В работе [8] имеется детальное обсуждение структуры, представленной в теореме 2.3.

Марковские коциклы, состоящие из отображений, не сохраняющих единицу, рассматривались в [8, 9]; соответствующая полугруппа $\tilde{Z}_t$ в условии теоремы 2.3 тогда также не сохраняет единицу.

К 2.4: Леммы 2.4.1 и 2.4.2 имеют простую версию в W^*-случае при условии, что группа $\{u_t\colon t\in\mathbb{R}\}$ непрерывиа в W^*-топологии. Тогда допустимо рассмотрение неограниченных самосопряженных v, присоединениых к алгебре $\mathscr{A}_0$. Сходимость правой части (2.16) — вот все, что необходимо для определения марковского коцикла m_t, а следовательио, и $*$-слабо непрерывной полугруппы $\tilde{Z}_t$; тогда инфинитезимальный оператор $\tilde{L}$ полугруппы $\tilde{Z}_t$ может быть по определеиию взят как сумма L и $i[v,\cdot]$ (см. [39] для классического случая).

Лемма 2.4.3 была доказана с использованием $*$-слабой компактности множества состояний на C^*-алгебре и сильной непрерывности $\{\tilde{u}_t\colon t\in\mathbb{R}\}$, а следовательно, не имеет простой W^*-версии; таким образом, теорема 2.4.4 также не имеет простого W^*-варианта.

Аналог леммы 2.4.1 будет также справедлив, если предположить явную зависимость оператора $v\in\mathscr{B}$ от времени. Если $t\longmapsto v(t)=v(t)^*$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathscr{B}$, то мы можем положить

$$m_{s,t}(a)=a+\sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{s\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t}\cdots\int [j_{t_1}(v(t_1)),[\cdots$$

$$\cdots,[j_{t_n}(v(t_n)),a]\cdots]]\,dt_1\ldots dt_n$$

для $s \leqslant t \in R$,

$$m_{s,t}(a) = a + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{s \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_n \geqslant t} \cdots \int \left[j_{t_1}(v(t_1)), \left[\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots, \left[j_{t_n}(v(t_n)), a\right] \cdots\right]\right] dt_1 \ldots dt_n$$

для $s \geqslant t \in \mathbb{R}$. Тогда $m_{s,t}$ вполне положительны, сохраняют единицу и $m_{s,t} m_{t,u} = m_{s,u}$ для $s \leqslant t \leqslant u \in \mathbb{R}$; $m_{s,t}$ отображает $\mathcal{A}_{[s}$ на себя и коммутирует с $E_{t]}$ при каждом $s \leqslant t \in \mathbb{R}$. Действуя по аналогии с теоремой 2.3 и леммой 2.4.1, мы можем положить

$$\tilde{Z}_{s,t} = j_s^* E_{s]} m_{s,t} j_t, \qquad s \leqslant t \in \mathbb{R};$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \tilde{Z}_{s,t}(b) = \tilde{Z}_{s,t}(L(b) + i[v(t), b])$$

для всех $b \in \mathcal{D}(L)$, $s \leqslant t \in \mathbb{R}$ и

$$\tilde{Z}_{s,t} \tilde{Z}_{t,u} = \tilde{Z}_{s,u}$$

для всех $s \leqslant t \leqslant u \in \mathbb{R}$. Полагая $\tilde{j}_t = m_{0,t} j_t = m_{0,t} u_t j_0$, мы находим по аналогии с (2.13), что

$$E_{0]}\left(\tilde{j}_{t_1}(a_1)^* \cdots \tilde{j}_{t_n}(a_n)^* \tilde{j}_{t_n}(b_n) \cdots \tilde{j}_{t_n}(b_1)\right) =$$

$$= \tilde{j}_0 \circ \tilde{Z}_{0,t_1}\left(a_1^* \tilde{Z}_{t_1,t_2}\left(a_2^* \cdots \tilde{Z}_{t_{n-1},t_n}(a_n^* b_n) \cdots b_2\right) b_1\right)$$

для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ в $\mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ в $\mathcal{B}$ и для всех n. Процесс $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ не является стационарным или марковским в общем случае, однако условные ожидания на $\tilde{\mathcal{A}}_{t]}$, совместимые с ω, существуют при $t \geqslant 0$, поскольку $\tilde{\mathcal{A}}_{t]} = \mathcal{A}_{t]}$ при $t \geqslant 0$. Так как $\{\tilde{u}_t = m_{0,t} u_t,\ t \in R\}$ не образует группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, то невозможно выбрать $\tilde{\omega}$ на $\mathcal{A}$ так, чтобы $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \tilde{\omega})$ был стационарным процессом.

Более того, предельная точка сети $\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \omega \circ \tilde{u}_s\, ds\right\}$ при $t \to \infty$ не обязана быть инвариантной относительно $\{\tilde{u}_t \colon t \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, аналог теоремы 2.4.4 для зависящих от времени возмущений не существует.

§ 3. ПРОЦЕССЫ НА АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА

3.1. Напомним некоторую предварительную информацию об алгебре Клиффорда, а также о квазисвободных состояниях и отображениях на ней [40]—[45].

Алгеброй Клиффорда $A(H)$ над вещественным гильбертовым пространством H называется (единственная с точностью до $*$-изоморфизма) C^*-алгебра, порождаемая единицей 1 и самосопряженными элементами $B(h)$, линейными по $h \in H$ и удовлетворяющими каноническому антикоммутационному соотношению

$$B(h)B(k) + Б(k)B(h) = 2(h, k)1 \tag{3.1}$$

для всех h, $k \in H$. Отображение $h \to B(h)$ непрерывно, и $\|B(h)\| = \|h\|$ для всех $h \in H$.

Пусть M и H — вещественные гильбертовы пространства. Для любой изометрии X из M в H существует единственный $*$-изоморфизм, обозначаемый $A(X)$, отображающий $A(M)$ в $A(H)$, такой что

$$A(X)(B(m_1)\ \ldots\ B(m_n)) = B(Xm_1)\ \ldots\ B(Xm_n) \tag{3.2}$$

для всех $m_1, \ldots, m_n \in M$.

Состояние ω на $A(H)$ называется *квазисвободным*, если

$$\omega(B(h_1)\ \ldots\ B(h_{2n+1})) = 0 \tag{3.3а}$$

для всех $n = 0, 1, \ldots$ и всех $h_1, \ldots, h_{2n+1} \in H$,

$$\omega(B(h_1)\ \ldots\ B(h_{2n})) = \sum_{p \in \mathscr{P}_n} (\operatorname{sgn} p) \prod_{r=1}^{n} \omega(B(h_{p(2r-1)})\, B(h_{p(2r)})) \tag{3.3б}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $h_1, \ldots.\ h_{2n} \in H$, где $\mathscr{P}_n$ есть множество перестановок p набора $\{1, \ldots, 2n\}$, таких что $p(2r-1) < p(2r)$ и $p(2r-1) < p(2r+1)$ для всех $r = 1, 2, \ldots, n$, а $\operatorname{sgn} p$ означает четность p.

Существует взаимно однозначное соответствие между квазисвободными состояниями ω на $A(H)$ и косоэрмитовыми сжатиями Q на H, определяемое как

$$\omega(B(h)B(k)) \equiv \omega_Q(B(h)B(k)) = (h, k) + i(Qh, k). \tag{3.4}$$

Отметим, что кососимметричная билинейная форма $q(.,.)$ на H записывается как $q(h, k) = (Qh, k)$, где Q — косоэрмитов сжимающий оператор на H, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i,j} \bar{c}_i c_j [(h_i, h_j) + iq(h_i, h_j)] \geqslant 0 \tag{3.5}$$

для всех конечных наборов $\{c_i \in C\colon i = 1, \ldots, n\}$ и $\{h_i \in H\colon i = 1, \ldots, n\}$.

ГНС-представление $A(H)$, определяемое квазисвободным состоянием ω_Q, является точным, поскольку ω_Q есть произведение точного состояния и состояния на простой C^*-алгебре [42].

В следующей лемме изложены результаты Эванса [43, 44], Фаннеса и Рокка [45].

Лемма 3.1. *Если Z — вполне положительное, сохраняющее единицу отображение $A(H)$ на себя, удовлетворяющее условию*

$$Z(B(h)) = B(Th) \tag{3.6а}$$

для всех $h \in H$, где T — линейный оператор на H, и такое что

$$\omega_Q \circ Z = \omega_Q, \tag{3.6б}$$

где ω_Q — квазисвободное состояние на $A(H)$, то

$$\sum_{i,j} \bar{c}_i c_j [(h_i, h_j) - (Th_i, Th_j) + i(Qh_i, h_j) - i(QTh_i, Th_j)] \geqslant 0 \tag{3.7}$$

для всех конечных наборов $\{c_i\} \in \mathbb{C}$ и $\{h_i\} \in H$. Это, в частности, означает, что T является сжатием.

Обратно, если задать сжатие T и косоэрмитов оператор Q в H так, чтобы удовлетворялось (3.7), *то существует каноническое вполне положительное, сохраняющее единицу отображение $A(H)$ на себя, удовлетворяющее* (3.6а) *и* (3.6б).

Доказательство. Z отображает линейную оболочку элементов $\{B(h)\colon h \in H\}$ на себя и является сжатием относительно полунормы

$$\| x \|_Q^2 = \omega_Q(x^* x), \quad x \in \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} \{B(h)\colon h \in H\},$$

поскольку

$$\omega_Q(Z(x)^* Z(x)) \leqslant \omega_Q(Z(x^* x)) = \omega_Q(x^* x)$$

согласно неравенству Кадисона — Шварца. Этот факт выражается соотношением (3.7). Наоборот, если (3.7) справедливо, то T является сжатием, причем

$$\omega_Q^T(B(h_1) \ldots B(h_k)) = \omega_Q(B(Dh_1) \ldots B(Dh_k)), \tag{3.8а}$$

где $D = (1 - T^* T)^{1/2}$. Следовательно, можно построить вполне положительное, сохраняющее единицу отображение Z, полагая [43, 44, 45]

$$Z(B(h_1) \ldots B(h_n)) =$$
$$= \sum_{\text{partitions}} (\operatorname{sgn} p) B(Th_{i_1}) \ldots B(Th_{i_m}) \omega_Q^T(B(h_{i_{m+1}}) \ldots B(h_{i_n})), \tag{3.8б}$$

где $\omega_Q^T(\cdot)$ определено формулой (3.8а), а суммирование выполняется по всем разбиениям набора $\{1, \ldots, n\}$ на два множества $\{i_1 < \ldots < i_m\}$, $\{i_{m+1} < \ldots < i_n\}$ и $\operatorname{sgn} p$ есть четность перестановки $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Определение. Отображение, определяемое равенствами (3.8а) и (3.8б), называется *квазисвободным вполне положительным отображением* и обозначается $A_Q(T)$.

Заметим, что $A_Q(0) = \omega_Q(\cdot)\, 1$; если T изометричен и коммутирует с Q, то $A_Q(T)$ совпадает с $A(T)$, введенным в (3.2), и $A_Q(T)$ является условным ожиданием, совместимым с ω_Q, тогда и только тогда, когда T есть ортогональный проектор, коммутирующий с Q. Множество $\mathscr{S}_Q$ сжатий T на H, которые удовлетворяют (3.7), образует полугруппу, а $T \longmapsto A_Q(T)$ есть гомоморфизм из $\mathscr{S}_Q$ в множество вполне положительных, сохраняющих единицу отображений на $A(H)$.

3.2. Пусть $\{X_t\colon\ t \in \mathbb{R}\}$ — семейство изометрических отображений из вещественного гильбертова пространства M в вещественное гильбертово пространство H, причем $H = \bigvee \{X_t m\colon\ t \in \mathbb{R},\ m \in M\}$, и положим, что Q есть косоэрмитово сжатие в H. Пусть $\mathscr{A} = A(H)$, и пусть

$$j_t = A(X_t)\colon\ A(M) \longmapsto A(H), \qquad \omega = \omega_Q. \tag{3.9}$$

Случайный процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над $A(M)$ с множеством значений параметра $\mathbb{R}$ называется *квазисвободным процессом*. Отметим, что $t \longmapsto j_t$ сильно непрерывно тогда и только тогда, когда сильно непрерывно $t \longmapsto X_t$.

Теорема 3.2.1. *Квазисвободный процесс* $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ *над* $A(M)$ *определяется с точностью до эквивалентности своей ковариационной функцией*

$$\omega(j_t B(m)\, j_{t'} B(m')) = (m, K(t, t')\, m') + i\,(m, K^Q(t, t')\, m'), \tag{3.10}$$
$$m,\ m' \in M,\ t,\ t' \in \mathbb{R},$$

где $K(t, t')$ *и* $K^Q(t, t')$ *в* $\mathscr{B}(M)$ *обладают свойствами:*

$$K(t, t') = 1 \ \textit{для всех}\ t \in \mathbb{R},$$
$$K(t, t')^* = K(t', t),\ K^Q(t, t')^* = -K^Q(t', t) \tag{3.11а}$$

для всех $t,\ t' \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i,j} \bar{c}_i c_j\, [(m_i, K(t_i, t_j)\, m_j) + i\,(m_i, K^Q(t_i, t_j)\, m_j)] \geqslant 0 \tag{3.11б}$$

для всех конечных наборов $\{c_i\} \in \mathbb{C}$, $\{t_i\} \in \mathbb{R}$ *и* $\{m_i\} \in M$.

Доказательство. Если процесс $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ над $A(M)$ квазисвободный, то $K(t, t') = X_t^* X_{t'}$ и $K^Q(t, t') = -X_t^* Q X_{t'}$ удовлетворяют всем вышеуказанным свойствам. Наоборот, задав $K(.,.)$ и $K^Q(.,.)$ так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы, заметим, что $K(.,.)$ есть положительно определенное ядро на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и имеет минимальное разложение Колмогорова [13] X_t: $M \longmapsto H$, где X_t изометричны. Тогда K^Q определяет кососимметричную форму q на H

$$q\left(\sum_i c_i X_{t_i} m_i, \ \sum_i c'_j X_{t'_j} m'_j\right) = \sum_{i,j} c_i c'_j \left(m_i, K^Q(t_i, t'_j) m'_j\right)$$

для всех конечных наборов $\{m_i\}$, $\{m'_j\}$ в M, $\{c_i\}$, $\{c'_j\}$, $\{t_i\}$, $\{t'_j\}$ в $\mathbb{R}$. Согласно (3.11б) по аналогии с (3.5) q однозначно определяется косоэрмитовым сжатием Q на H. Тогда H, $\{X_t\}$ и Q могут быть использованы для построения квазисвободного процесса; они определяют корреляционные ядра, а следовательно, квазисвободный процесс определяется с точностью до эквивалентности.

Теорема 3.2.2. *Квазисвободный процесс является стационарным тогда и только тогда, когда существует группа унитарных преобразований* $\{T_t: t \in \mathbb{R}\}$ *на* H, *таких что*

$$T_t X_s = X_{s+t} \text{ для всех } t, \ s \in \mathbb{R}, \tag{3.12а}$$

$$T_t Q = Q T_t \text{ для всех } t \in \mathbb{R}, \tag{3.12б}$$

и

$$u_t = A(T_t) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}. \tag{3.12в}$$

Доказательство. Если процесс стационарный, то $K(s, s') = K(s+t, s'+t)$ для всех s, s', $t \in \mathbb{R}$. В силу единственности минимального разложения Колмогорова положительно определенного ядра [13] существует семейство унитарных операторов $\{T_t: t \in \mathbb{R}\}$ на H, таких что выполняется (3.12а). Групповое свойство может быть проверено прямо. Более того, $K^Q(s, s') = K^Q(s+t, s'+t)$ для всех s, s', $t \in \mathbb{R}$, следовательно, $T_t^{-1} Q T_t = Q$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и условие (3.12б) также выполняется. Тогда при всех $s_1, \ldots, s_n$, $t \in \mathbb{R}$ и $m_1, \ldots, m_n \in M$ мы имеем

$$u_t\left(B\left(X_{s_1} m_1\right) \ldots B\left(X_{s_n} m_n\right)\right) = u_t B\left(X_{s_1} m_1\right) \ldots u_t B\left(X_{s_n} m_n\right) = \\ = B\left(T_t X_{s_1} m_1\right) \ldots B\left(T_t X_{s_n} m_n\right),$$

так что (3.12в) также выполняется. Обратно, если (3.12а) и (3.12б) выполнены, то определим u_t согласно (3.12в) и проверим, что $u_t j_s = j_{s+t}$ для всех s, $t \in \mathbb{R}$, $\omega_Q \circ v_t = \omega_Q$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

3.3. Теперь перейдем к рассмотрению марковских процессов с условными ожиданиями. В силу того что $A = A(H)$ порождено как векторное пространство времяупорядоченными произведениями, для таких процессов, согласно следствию 2.2.1 и теореме 2.2.2, выполняется регрессионное соотношение

(2.8). Если ω_Q — отделяющее состояние (что эквивалентно $\mathrm{Ker}(1 - Q^*Q) = \{0\}$), то можно показать, что условные ожидания $\mathbf{E}_{t]}$ на $\mathcal{A}_{t]} = A(H_{t]})$, совместимые с ω_Q, существуют тогда и только тогда, когда $P_{t]}$ коммутирует с Q, и в этом случае $E_{t]} = A_Q(P_{t]})$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (пользуемся теоремой Такесаки [22] и явным выражением для группы модулярных автоморфизмов, связанной с отделяющим квазисвободным состоянием [46]). Для общего случая (произвольного $\mathrm{Ker}(1 - Q^*Q)$) мы для краткости дадим следующее определение.

Определение. Квазисвободный процесс $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ называется *квазисвободным марковским процессом*, если он является марковским процессом с условными ожиданиями вида

$$E_{t]} = A_Q(P_{t]}) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Теорема 3.3.1. *Квазисвободный процесс будет квазисвободным марковским тогда и только тогда, когда*

$$K(s, t) \cdot K(t, u) = K(s, u) \tag{3.14а}$$

для всех $s \leqslant t \leqslant u$ *в* $\mathbb{R}$ *и*

$$K^Q(s, t) = -Q_s K(s, t) \tag{3.14б}$$

для всех $s, t \in \mathbb{R}$, *где* Q_s *есть косоэрмитово сжатие на* M.

Доказательство. Предположим, что процесс является квазисвободным марковским. Тогда Q коммутирует со всеми $P_{t]}$, и из $A_Q(P_{t]})\,A(H_{[t}) = A(H_t)$ следует $P_{t]}H_{[t} = H_t$, где $H_{[t} = \bigvee \{X_u M\colon t \leqslant u\}$ и $H_t = X_t M$. Поэтому H может быть представлено в виде суммы $H = D_t^- \oplus H_t \oplus D_t^+$, где $D_t^- = H_{t]} \ominus H_t$, $D_t^+ = H_{[t} \ominus H_t$. Следовательно, $((1 - P_t) X_s m, (1 - P_t) X_u m') = 0$ для всех $m, m' \in M$, $s \leqslant t \leqslant u \in \mathbb{R}$, где $P_t = X_t X_t^*$ — ортогональный проектор H на H_t. Но то же самое можно переписать в виде

$$(m, (K(s, u) - K(s, t)\,K(t, u))\,m') = 0$$

для всех $m, m' \in M$, откуда следует (3.14а). Более того, для $s \leqslant t$ имеем

$$K^Q(s, t) = -X_s^* Q X_t = -X_s^* P_{s]} Q X_s = -X_s^* Q P_{s]} X = -X_s^* Q X_s X_s^* X_t,$$

так как $P_{s]} X_t = P_s X_t$ для $s \leqslant t$, согласно марковскому свойству, что доказывает (3.14б), причем $Q_s = X_s^* Q X_s$.

Это доказательство может быть обращено: из (3.14а) следует, что $P_{t]} H_{[t} = H_t$ и (3.14б) дает нам равенство

$$(Q X_s m, (1 - P_t) X_u m') = (Q_s m, K(s, u)\,m') - \\ - (Q_s m, K(s, t)\,K(t, u)\,m'),$$

что в свою очередь равно нулю по (3.14а) для всех $m, m' \in M$ и $s \leqslant t \leqslant u$ в $\mathbb{R}$; таким образом, $QH_{t]}$ ортогонально к D_t^+, Q отображает $H_{t]}$ на себя и коммутирует с $P_{t]}$, будучи косоэрмитовым. Тогда $A_Q(P_{t]})$ существует и $A(P_{t]})A(H_{[t}) = A(H_t)$.

В специальном случае стационарного квазисвободного марковского процесса полугруппа $Z_t = j_0^* E_{0]} j_t$ имеет вид

$$Z_t = A_{Q_0}(S_t), \quad t \geqslant 0,$$

где $S_t = X_0^* X_t$ — полугруппа согласно (3.14а), а $Q_0 = X_0^* Q X_0$, очевидно, косоэрмитово сжатие. Условие (3.7) выполнено согласно построению.

Мы докажем и обратное утверждение.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $\{Z_t = A_{Q_0}(S_t)\colon t \geqslant 0\}$ *— полугруппа квазисвободных вполне положительных отображений в* $A(M)$. *Тогда существует стационарный квазисвободный марковский процесс над* $A(M)$, *такой что* $\{Z_t\colon t \geqslant 0\}$ *— связанная с ним полугруппа, и процесс единствен с точностью до эквивалентности в классе квазисвободных марковских процессов.*

Доказательство. Определим ковариационную функцию формулами

$$K(s, t) = \begin{cases} S_{t-s}, & t \geqslant s, \qquad (3.15а) \\ S_{s-t}^*, & t \leqslant s \qquad (3.15б) \end{cases}$$

и

$$K^Q(s, t) = \begin{cases} -Q_0 S_{t-s}, & t \geqslant s, \qquad (3.15в) \\ -S_{s-t}^* Q_0, & t \leqslant s. \qquad (3.15г) \end{cases}$$

Очевидно, что $K(s, t)$ и $K^Q(s, t)$ удовлетворяют условиям (3.11а), (3.14а), (3.14б). Докажем, что (3.11б) также выполняется. Имеем

$$\sum_{i, j} \bar{c}_i c_j \{(m_i, K(t_i, t_j) m_j) + i(m_i, K^Q(t_i, t_j) m_j)\} =$$
$$= \sum_{\{i, j : t_i \leqslant t_j\}} \bar{c}_i c_j \omega_Q(B(m_i) Z_{t_j - t_i}(B(m_j))) +$$
$$+ \sum_{\{i, j : t_i > t_j\}} \bar{c}_i c_j \omega_Q(Z_{t_i - t_j}(B(m_i)) B(m_j)). \qquad (3.16)$$

Из доказательства леммы 3.1 мы знаем, что $\{Z_t\colon t \geqslant 0\}$ образует полугруппу сжимающих отображений на $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, \{B(m)\colon m \in M\}$ относительно полунормы $\| x \|_Q^2 = \omega_Q(x^* x)$. Полугруппа сжатий в гильбертовом пространстве задает положительно определенную функцию [47], следовательно, выражение

(3.16) неотрицательно. Отсюда следует, что ковариационная функция, определяемая соотношениями (3.15а—г) определяет (с точностью до эквивалентности) квазисвободный марковский процесс, который стационарен согласно доказательству теоремы 3.2.2. Полугруппа $\{Z'_t\colon t \geqslant 0\}$, связанная с этим процессом, удовлетворяет соотношениям: $Z'_t B(m) = B(S_t m)$ для всех $m \in M$ и $\omega_Q \circ Z'_t = \omega_Q$ при всех $t \geqslant 0$. Нетрудно видеть, что $Z'_t = A_{Q_0}(S_t) = Z_t$. Обратно, любой квазисвободный марковский процесс, такой что его полугруппа имеет вид $A_{Q_0}(S_t)$, обладает ковариационной функцией, удовлетворяющей условиям (3.15а—г), что доказывает его единственность с точностью до эквивалентности.

3.4. Охарактеризуем класс марковских квазисвободных процессов, удовлетворяющих уравнению Ланжевена.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega_Q)$ — *стационарный квазисвободный марковский процесс с полугруппой* $\{A_{Q_0}(S_t)\colon t \geqslant 0\}$. *Пусть* $\{S_t\}$ *сильно непрерывна с инфинитезимальным оператором* G. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \| A_{Q_0}(S_t)(b) - \omega_{Q_0}(b)\,1 \| = 0$ *для всех* $b \in A(M)$;

(ii) *существует семейство* $\{\xi_t^G : t \in \mathbb{R}\}$ *линейных операторов из* $\mathscr{D}(G)$ *в* H, *такое что*

$$(\xi_t^G m, \xi_{t'}^G m') = (t \wedge t')(-(Gm, m') - (m, Gm'))$$

для всех $t, t' \in \mathbb{R}$, $m, m' \in \mathscr{D}(G)$,

$$H = \vee \{\xi_t^G m : t \in \mathbb{R},\ m \in \mathscr{D}(G)\},$$

и $\{j_t\}$ *удовлетворяет следующему уравнению Ланжевена*:

$$j_t(B(m)) - j_s(B(m)) = \int_s^t j_u(B(Gm))\,du + B((\xi_t^G - \xi_s^G)\,m) \tag{3.17}$$

для всех $s \leqslant t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathscr{D}(G)$.

Доказательство. Из явного выражения (3.8а, б) для $A_{Q_0}(S_t)$ мы видим, что (i) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to\infty} \|S_t m\| = 0$ для всех $m \in M$. Согласно теореме 4.2 работы [48] и теореме 3.15 из [13], это эквивалентно тому, что

$$X_t m - X_s m = \int_s^t X_u G m\,du + (\xi_t^G - \xi_s^G)\,m$$

для всех $s \leqslant t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathscr{D}(G)$, где $\{\xi_t^G\colon t \in \mathbb{R}\}$ есть семейство, описанное в (ii); утверждение теоремы следует из того, что отображение $B\colon H \to A(H)$ линейно и изометрично.

Отметим, что семейство $\{A_{Q_0}(S_t)\colon t \geqslant 0\}$ сильно непрерывно. Если мы определим его инфинитезимальный оператор L, то мы будем иметь $B(m) \in \mathscr{D}(L)$ тогда и только тогда, когда $m \in \mathscr{D}(G)$ и $L(B(m)) = B(Gm)$, так что уравнение (3.17) может быть переписано в виде

$$j_t(B(m)) - j_s(B(m)) = \int_s^t j_u L(B(m))du + B\left(\left(\xi_t^G - \xi_s^G\right)m\right).$$

Можно построить нетривиальные примеры стационарных марковских процессов, которые не являются квазисвободными, путем применения к квазисвободному марковскому процессу теории возмущений, сформулированой в теоремах 2.3 и 2.4.4.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4.2. *Если $\{j_t\}$ удовлетворяет уравнению Ланжевена* (3.17) *и оператор $v = v^*$, определяющий возмущение, есть четный элемент $A(M)$, то возмущенный процесс $\{\tilde{j}_t\}$ удовлетворяет следующему уравнению Ланжевена*:

$$\tilde{j}_t(B(m)) - \tilde{j}_0(B(m)) = \int_0^t \tilde{j}_u(B(Gm) + i[v, B(m)])\,du +$$

$$+ B\left(\left(\xi_t^G - \xi_0^G\right)m\right) = \int_0^t \tilde{j}_u \tilde{L}(B(m))\,du + B\left(\left(\xi_t^G - \xi_0^G\right)m\right) \tag{3.18}$$

для всех $m \in \mathscr{D}(G)$ и $t \geqslant 0$, где $\tilde{L}$ — инфинитезимальный оператор возмущенной полугруппы $\{\tilde{Z}_t\colon t \geqslant 0\}$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями леммы 2.4.1. Согласио стандартной теории возмущений, мы имеем

$$\tilde{j}_t(B(m)) = \tilde{u}_t j_0(B(m)) = u_t j_0(B(m)) + \int_0^t \tilde{u}_s([ij_0(v), u_{t-s} \times$$

$$\times j_0(B(m))])\,ds = j_t(B(m)) + \int_0^t \tilde{u}_s([ij_0(v), j_{t-s}(B(m))])\,ds. \tag{3.19}$$

Используем уравнение (3.17) для вычисления $j_t(B(m))$, $j_{t-s}(B(m))$. Так как $j_0(v)$ есть четный элемент $A(H_0) \subseteq A(H_{0]})$ и $\left(\xi_t^G - \xi_0^G\right)m$ есть ортогональное дополнение к $H_{0]}$ [13, 48], то $j_0(v)$ коммутирует с $B\left(\left(\xi_t^G - \xi_0^G\right)m\right)$. Учитывая, что $\tilde{j}_0 = j_0$, получаем

$$\tilde{j}_t(B(m)) - \tilde{j}_0(B(m)) = \int_0^t j_u(B(Gm))\,du + B\left((\xi_t^G \xi_0^G)\,m\right) +$$

$$+ \int_0^t \tilde{u}_s([ij_0(v),\ j_0(B(m))])\,ds + \int_0^t \int_0^{t-s} \tilde{u}_s([ij_0(v),\ j_u(B(m))])\ du\,ds.$$

Первое и последнее слагаемое в правой части могут быть объединены в одно с учетом (3.19). Их объединение равно $\int_0^t \tilde{j}_u(B(Gm))\,du$. Третье слагаемое равно $\int_0^t [i\,\tilde{j}_u(v),\ \tilde{j}_u(B(m))]\,du$. Это доказывает (3.18).

Замечания

К 3.2: Квазисвободные процессы являются аналогами классических гауссовских процессов и полностью определяются структурой гильбертова пространства. По поводу аналогичной конструкции на ККС-алгебре см. работу Линдблада [49], а также [34].

К 3.3: Теорема 3.3.1 является аналогом теоремы Дуба [10]. Стационарные квазисвободные марковские процессы были построены по полугруппе $\{Z_t\colon t \geqslant 0\}$ Шрадером и Уленброком [36] для частного случая $Z_t = A_0(S_t)$. Аналогичная конструкция была использована Эвансом [43, 44] в его исследованиях расширеиий квазисвободных полугрупп, для которых $[Q_0, S_t] = 0$.

Понятно, что существуют квазисвободные марковские процессы без условных ожиданий; мы не затрагиваем их в данной работе.

К 3.4: Уравнение Ланжевена (3.17) не зависит от состояния ω_Q в $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega_Q)$. Для заданных $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ оно определяет $\{j_t\colon t \in \mathbb{R}\}$, однако различный выбор ω_Q может сделать получаемый процесс марковским или нет в зависимости от того, коммутирует ли Q с проекторами $\{P_{t]}\colon t \in \mathbb{R}\}$.

Группа автоморфизмов возмущенного процесса, описанного в теореме 3.4.2, квазисвободна тогда и только тогда, когда отображение $B(m) \longmapsto i[v, B(m)]$ квазисвободно.

§ 4. ПРИМЕРЫ

Мы покажем вкратце, каким образом модельные системы типа модели Хеппа — Либа [11, 12] могут рассматриваться как возмущения квазисвободных процессов.

4.1. Элементарным кирпичиком этого класса моделей является фермион, взаимодействующий с двумя бесконечными тепловыми резервуарами в фоковском вакуумном состоянии $(\Omega_0, \cdot\Omega_0)$, с полным гамильтонианом [12]

$$\widehat{H}^0 = \varepsilon a^* a + \int_{\mathbb{R}} [B(\omega)^* B(\omega) + C(\omega)^* C(\omega)]\,\omega\, d\omega + \\ + \int_{\mathbb{R}} [g^B B(\omega)^* a + g^C C(\omega)^* a + h.\,c.]\, d\omega, \qquad (4.1)$$

где a^*, a являются операторами рождения — уничтожения фермиона, а $B(\omega)^{\#}$, $C(\omega)^{\#}$ — формальные операторы рождения — уничтожения для фермионных резервуаров. Данный гамильтониан является формальным, однако эволюция, порождаемая им, может быть определена строго как предел эволюций, порождаемых регуляризованными гамильтонианами. Редуцированная динамика фермиона дается динамической полугруппой $\{Z_t\colon t \geqslant 0\}$,

$$Z_t(a) = e^{-i\varepsilon t - \gamma t} a, \quad Z_t(a^* a) = e^{-2\gamma t} a^* a + (1 - e^{-2\gamma t})\,\eta 1, \qquad (4.2)$$

где

$$\gamma = \pi\{|g^B|^2 + |g^C|^2\} > 0, \quad \eta = \pi\gamma^{-1}|g^C|^2 \in [0, 1].$$

Пользуясь преобразованием Боголюбова, напишем

$$A(\omega) = (|g^B|^2 + |g^C|^2)^{-1/2}[g^B B(\omega) - g^C C(\omega)^*], \quad \omega \in \mathbb{R},$$

тогда взаимодействие системы с резервуаром примет вид

$$(\gamma/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} [A(\omega)^* a + a^* A(\omega)]\, d\omega.$$

Алгебра, порождаемая $\{a^{\#}, A(\omega)^{\#}\colon \omega \in \mathbb{R}\}$, является глобально инвариантной относительно эволюции, порожденной гамильтонианом (4.1). Эта алгебра может рассматриваться как алгебра Клиффорда над вещественным гильбертовым пространством

$$H = [\mathbb{R} \oplus L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \oplus J(\mathbb{R} \oplus L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}))].$$

($(\mathbb{C} \oplus L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}))$ рассматривается как вещественное гильбертово пространство.)

Алгебра, порожденная a, a^*, есть алгебра Клиффорда над пространством $H_0 = \mathbb{R} \oplus J\mathbb{R}$, порождаемым двумя нормированными векторами h_0 и Jh_0, следовательно, мы имеем

$$B(h_0) = a^* + a, \quad B(Jh_0) = ia^* - ia.$$

Пусть $Q = J(1 - 2\eta)$, тогда Q коммутирует с проектором P_0 из H в H_0 и $Q_0 = P_0 Q P_0$ имеет тот же вид. Квазисвободное состояние ω_Q на $A(H)$ представляется в форме $\omega_{Q_0} \otimes (\Omega_0, \cdot \Omega_0) \restriction \vee$ $\vee$ $\{A(\omega)^{\#}: \omega \in \mathbb{R}\}$. Имеем равенство

$$Z_t = A_{Q_0}(S_t), \quad t \geqslant 0,$$

где $\{S_t = \exp(J\varepsilon t - \gamma t): \ t \geqslant 0\}$ — полугруппа сжимающих отображений на H_0, коммутирующих с Q_0.

Временна́я эволюция, порождаемая гамильтонианом (4.1), имеет вид $A(T_t)$, где полугруппа $\{T_t: t \in \mathbb{R}\}$, действующая на H, является минимальным унитарным расширением полугруппы $\{S_t: t \geqslant 0\}$, коммутирующей с J и, следовательно, с Q. Далее, проекторы $P_{t]}$ из H в $H_{t]} = \vee \{T_s H_0: s \leqslant t\}$ коммутируют с Q при всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, квазисвободное состояние ω_Q на $A(H)$ инвариантно относительно $A(T_t)$ и совместимо с условными ожиданиями $A_Q(P_{t]})$, и $P_{t]} H_{[t} = H_t$ для каждого t в силу того, что $\{S_t = P_0 T_t P_0: t \geqslant 0\}$ есть полугруппа.

Из теорем 3.2.2 и 3.3.1 следует, что $(A(H), \{A(T_t P_0)\}, \omega_Q)$ есть стационарный квазисвободный марковский процесс над $A(H_0)$, единственным образом (с точностью до эквивалентности) построенный по теореме 3.3.2 из полугруппы (4.2). Он удовлетворяет уравнению Ланжевена (3.17) тогда и только тогда, когда γ строго больше нуля.

4.2. Никакой дополнительной трудности не возникает при рассмотрении конечной или бесконечной совокупности невзаимодействующих фермионов, подобных вышеописанным. В любом случае мы будем иметь стационарный квазисвободный марковский процесс, удовлетворяющий уравнению Ланжевена (3.17) тогда и только тогда, когда все коэффициенты затухания γ_k элементарных фермионных систем строго положительны.

Можно ввести взаимодействие между фермионами, вначале в конечном объеме. Пусть v — четный самосопряженный операторный полином от операторов рождения — уничтожения $\overset{*}{a}_k$, a_k, или, что то же самое, от $B\left(h_0^{(k)}, B\left(Jh_0^{(k)}\right)\right.$, где $k = 1, \ldots, N$ — номер элементарной фермионной системы. По теореме 2.4.4 существует возмущенный стационарный марковский процесс с полугруппой $\{\tilde{Z}_t: t \geqslant 0\}$ вида

$$\tilde{Z}_t = \exp\left[t\left(\sum_{k=1}^{N} L_k + i[v, \ \cdot\ ]\right)\right], \tag{4.3}$$

где L_k — инфинитезимальный оператор полугруппы $\left\{Z_t^{(k)}: t \geqslant \right.$ $\left.\geqslant 0\right\}$ для k-го фермиона, который имеет вид

$$L_k(a_k) = (-i\varepsilon_k - \gamma_k) a_k,$$
$$L_k\left(\overset{*}{a}_k a_k\right) = -2\gamma_k\left(\overset{*}{a}_k a_k - \eta_k 1\right). \tag{4.4}$$

По теореме 3.4.2 возмущенный процесс удовлетворяет уравнению Ланжевена (3.18) тогда и только тогда, когда γ_k строго положительны.

4.3. Можно рассмотреть и термодинамический предел $N \to \infty$ взаимодействующих открытых фермионных систем. Так как это несколько выходит за рамки данной работы, мы ограничимся лишь несколькими замечаниями. Если взаимодействие имеет конечный радиус и трансляционно инвариантно, то техника Робинзона [50], Стритера и Уайлда [51] может быть использована для доказательства существования предельной эволюции в случае бесконечной системы. Можно показать также, что в этом случае существует предельное стационарное состояние и предельный стационарный марковский процесс. Для взаимодействия типа среднего поля в работах Хеппа и Либа [11, 12] дано описание предельной эволюции интенсивных наблюдаемых в «классических» состояниях. Далее, термодинамический предел многовременных корреляционных функций в этих состояниях может быть получен с помощью техники Боголюбова-мл. [52, 53]. Они определяют предельный процесс, однако мы полагаем, что такой предельный процесс может не быть ни стационарным, ни марковским в общем случае, но скорее будет иметь структуру с зависящими от времени гамильтонианами, описанную в замечаниях к разделу 2.4 (см., например, приложение к работе ван Хеммена [54]).

Общая проблема пределов некоммутативных случайных процессов (термодинамический предел, масштабные пределы, которые могут сделать процесс марковским) представляет значительный интерес. Некоторые строгие результаты и нерешенные проблемы для масштабных пределов классических процессов описаны у Спона [55]; следует ожидать, что аналогичные некоммутативные проблемы будут по крайней мере столь же сложными.

Приложение

Пример А.1 (Линдблад [33]). Пусть $\mathscr{B}$ — алгебра всех комплексных 2×2-матриц. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ положим, что $\{\alpha_t^x\colon t \in \mathbb{R}\}$ — группа $*$-автоморфизмов в $\mathscr{B}$, определяемая соотношением

$$\alpha_t^x(b) = e^{ixt\sigma_3} b e^{-ixt\sigma_3}, \quad b \in \mathscr{B}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Определим случайный процесс над $\mathscr{B}$, задав его корреляционные ядра

$$w_{\mathbf{t}}(\mathbf{a};\, \mathbf{b}) = \frac{\gamma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\gamma^2 + (x - x_0)^2} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\operatorname{trace}\left[\alpha^x_{t_1}(a_1)^* \dots \alpha^x_{t_n}(a_n)^* \alpha^x_{t_n}(b_n) \dots \alpha^x_{t_1}(b_1)\right],$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ для всех $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{T}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ из $\mathscr{B}_{\mathbf{t}}$. Явный вид случайного процесса $(\mathscr{A}, \{j_t\}, \omega)$ не потребуется, мы лишь заметим, что $\mathscr{A}$ может рассматриваться, как W^*-алгебра, j_t есть нормальное отображение из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{A}$, ω — точный нормальный след на $\mathscr{A}$. При этом процесс является стационарным.

Для всех a_1, a_2, b_1, b_2 в $\mathscr{B}$, $t_1 \leqslant t_2$ из $\mathbb{R}$ мы имеем соотношение

$$w_{t_1,\, t_2}(a_1,\, a_2;\, b_1,\, b_2) = \omega_0\left(a_1^* Z_{t_2 - t_1}\left(a_2^* b_2\right) b_1\right),$$

где $\omega_0(\cdot) = 2^{-1}\operatorname{trace}(\cdot)$ и $\{Z_t\colon\ t \geqslant 0\}$ есть полугруппа с инфинитезимальным оператором L вида

$$L(b) = -\frac{\gamma}{2}[\sigma_3, [\sigma_3, b]] + ix_0[\sigma_3, b], \quad b \in \mathscr{B},$$

такая что $\lim\limits_{t \to \infty}\| Z_1(\sigma_1)\| = 0$. Поскольку группа модулярных автоморфизмов, ассоциированная с ω, тривиальна, канонические отображения $E_{s,\, t}$ являются условными ожиданиями; следовательно, если бы процесс был марковским, то регрессионное соотношение выполнялось бы и $w_{0,\, t,\, 2t}(a_0, a_1, 1;\, b_0, b_1, \sigma_1)$ стремилось бы к нулю при $t \to \infty$ для всех a_0, a_1, b_0, b_1 из $\mathscr{B}$. Однако ясно, что

$$w_{0,\, t,\, 2t}\left(a_0,\, \sigma_1,\, 1;\, b_0,\, \sigma_1,\, \sigma_1\right) = \omega_0\left(a_0^* \sigma_1 b_0\right)$$

для всех a_0, $b_0 \in \mathscr{B}$, $t \geqslant 0$, поскольку $\sigma_1 \exp(ixt\sigma_3)\sigma_1 = \exp(-ixt\sigma_3)$ и $\sigma_1 = (\sigma_1)^3$. Это противоречит регрессионному соотношению, следовательно, процесс не является марковским.

Пример А.2. Пусть $\mathscr{B} = \mathscr{C}(\{-1, 1\})$ есть алгебра функций на двухточечном множестве $\{-1, 1\}$, порождаемая единицей 1 и функцией f, такой что $f(\pm 1) = \pm 1$. Пусть далее ω_0 состояние на $\mathscr{B}$, задаваемое соотношением $\omega_0(f) = 2^{-1}(f(1) + f(-1))$, и положим, что $\{Z_t\colon\ t \geqslant 0\}$ есть полугруппа отображений вида

$$Z_t(1) = 1,\ Z_t(f) = e^{-\gamma t} f,\ \gamma > 0,\ \text{для всех}\ t \geqslant 0.$$

Тогда Z_t сохраняет положительность и единицу, и $\omega_0 \circ Z_t = \omega_0$. Согласно конструкции Колмогорова — Даниэля существует классический стационарный марковский процесс над $\mathscr{B}$, такой что регрессионное соотношение (2.9) выполняется. Однако $\mathscr{B}$ может быть также отождествлена с алгеброй Клиффорда $A(\mathbb{R})$, порождаемой единицей 1 и самосопряженным унитарным оператором $B(e)$ (e — единичный вектор в $\mathbb{R}$), соответствующим f. Если подобное отождествление выполнено, то ω_0 будет квазисвободным состоянием, соответствующим $Q = 0$, а $\{Z_t\}$ будет квазисвободной полугруппой $Z_t = A_0(e^{-\gamma t})$. Пусть $\{X_t \colon \mathbb{R} \to H;\ t \in \mathbb{R}\}$ — минимальное разложение Колмогорова положительно определенного ядра $s,\ t \mapsto \exp(-\gamma|t-s|)$, например $H = L^2(\mathbb{R})$, $X_t r = (2\gamma)^{1/2} \exp(-\gamma|t-s|)\chi_{(-\infty,\, t]}(s) r$, $r \in \mathbb{R}$ [13]. Пусть $j_t(B(r)) = B(X_t r) \in A(H)$, и положим, что ω_0 есть квазисвободное состояние, определяемое оператором $Q = 0$ в H; тогда $(A(H), \{j_t\}, \omega_0)$ — стационарный квазисвободный марковский процесс с условными ожиданиями согласно теореме 3.3.1; следовательно, регрессионное соотношение (2.9) выполняется. Очевидно, что $A(H)$ не может быть изоморфна абелевой алгебре.

Литература *)

1. Doob J. L. Stochastic processes, Wiley, New York, 1953. [Русский перевод: Дуб Дж. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.]
2. Meyer P. A. Probability and Potential, Blaisdell, Waltham, Mass., 1966. [Русский перевод: Мейер П. А. Вероятность и потенциалы. — М.: Мир, 1973.]
3. Accardi L. Non-relativistic quantum mechanics as a non-commutative Markov process, Advances in Math., 20 (1976), 329—366.
4. Haag R., Kastler D. An algebraic approach to quantum field theory, J. Math. Phys., 5(1964), 848—861.
5. Glauber R. J. Optical coherence and photon statistics, Quantum Optics and Electronics, Les Houches 1964, edited by C. De Witt et al., Gordon and Breach, New York, 1965, 63—185.
6. Davies E. V. Quantum theory of open systems, Academic Press, London, 1976.
7. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
8. Accardi L. On the quantum Feynman — Kac formula, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 48(1978), 135—180 (lecture given in 1978, paper actually printed in 1980).
9. Accardi L. A quantum formulation of the Feynman — Kac formula, Proceedings of the Colloquium «Random fields: rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory», Esztergom, 1979.
10. Doob J. L. The elementary Markov processes, Ann. Math. Stat., 15(1944), 229—282.
11. Hepp K., Lieb E. H. Phase transitions in reservoir-driven open systems, with applications to lasers and superconductors, Helv. Phys. Acta, 46(1973), 575—603.

---

*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

12. Hepp K., Lieb E. H. The laser: a reversible quantum dynamical system with irreversible classical macroscopic motion, Lecture Notes in Phys., Springer — Berlin — Heidelberg — New York, № 38(1975), 179—207.
13. Evans D. E., Lewis J. T. Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory, Commun. Dublin Institute for Advanced Studies, Ser. A, 24(1977).
14. Segal I. E. Equivalence of measure spaces, Amer. J. Math., 73(1951), 274—313.
15. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 4, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
16. von Neumann J. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1955. [Русский перевод: фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.]
17. Wightman A. S. Quantum field theory in terms of vacuum expectations values, Phys. Rev., 101(1956), 860—866.
18. Dubin D. A., Sewell G. L. Time translations in the algebraic formulation of statistical mechanics, J. Math. Phys., 11(1970), 2990—2998.
19. Winnink M. Some general properties of thermodynamic states in an algebraic approach, Haifa Summer School, Statistical Mechanics and Field Theory, ed. R. N. Sen and C. Weil, Halsted Press, New York, 1971.
20. Accardi L. Non-commutative Markov chains associated to a preassigned evolution, an application to the quantum theory of measurement, Advances in Math., 29(1978), 226—243.
21. Accardi L., Cecchini C. Conditional expectations on W*-algebras and a theorem of Takesaki, J. Funct. Anal., 45(1982), 245—273.
22. Takesaki M. Conditional expectations in von Neumann algebras, J. Funct. Anal., 9(1972), 306—321.
23. Аккарди Л. О некоммутативном марковском свойстве, Функцион. анал. и прилож., 9(1975), 1—8.
24. Accardi L. Non-commutative Markov chains, Proceedings Summer School in Mathematical Physics, Camerino, 1974.
25. Lax M. Quantum noise XI, Multi-time correspondence between quantum and classical stochastic processes, Phys. Rev., 172(1968), 350—361.
26. Haake F. Density operator and multi-time correlation functions for open systems, Phys. Rev., A3(1971), 1723—1734.
27. Lugiato L. Generalized regression theorem for open systems, Physica, 85A(1976), 18—27.
28. Robinson D. W. Return to equilibrium, Commun. Math. Phys., 31(1973), 171—189.
29. Nelson E. Construction of quantum fields from Markov fields, J. Funct. Anal., 12(1973), 211—277.
30. Guerra F., Rosen L., Simon B. The $R(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, Ann. Math., 101(1975), 111—259.
31. Lindblad G. Non-Markovian quantum stochastic processes and their entropy, Commun. Math. Phys., 65(1979), 281—294.
32. Levy P. Exemples de processus pseudo-Markoviens, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 228(1949), 2004—2006.
33. Lindblad G. Response of Markovian and non-Markovian quantum stochastic systems to time-dependent forces, preprint, Stockholm, 1980.
34. Frigerio A., Lewis J. T. Non-commutative Gaussian processes, preprint DIAS-STP-80-02, Dublin, 1980.
35. Osterwalder K., Schrader R. Euclidean Fermi fields and a Feynman — Kac formula for Boson — Fermion models, Helv. Phys. Acta, 46(1973), 277—302.
36. Schrader R., Uhlenbrock D. A. Markov structures on Clifford algebras, J. Funct. Anal., 18(1975), 369—413.

37. Hudson R. L., Ion P. D. F. The Feynman — Kac formula for a canonical quantum-mechanical Wiener process, Proceedings of the Colloquium «Random Fields: rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory», Esztergom, 1979.
38. Hudson R. L., Ion P. D. F., Parthasarathy K. R. Time-orthogonal unitary dilations and noncommutative Feynman — Kac formulae, Commun. Math. Phys., 83(1982), 261—280.
39. Klein L., Landau L. J. Singular perturbations of positivity preserving semigroups via path space techniques, J. Funct. Anal., 20(1975), 44—82.
40. Shale D., Stinespring W. F. States on the Cliford algebra, Ann. Math., 80(1964), 365—381.
41. Balslev E., Manuceau J., Verbeure A. Representations of anticommutation relations and Bogolubov transformations, Commun. Math. Phys., 8(1968), 315—326.
42. Manuceau J., Rocca F., Testard D. On the product form of quasi-free states, Commun. Math. Phys., 12(1969), 43—57.
43. Evans D. E. Completely positive quasi-free maps on the CAR algebra, Commun. Math. Phys., 70(1979), 53—68.
44. Evans D. E. Completely positive quasi-free maps on the fermien algebra, Mathematical problems in the quantum theory of irreversible processes, ed. L. Accardi, V. Gorini, G. Parravicini, Proc. Arco Felice (Naples) Conference, 1978 (1979).
45. Fannes M., Rocca F. A class of dissipative evolutions with applications in thermodynamics of fermion systems, J. Math. Phys., 21(1980), 221—226.
46. Rocca F., Sirugue M., Testard D. On a class of equilibrium states under the Kubo-Martin-Schwinger boundary condition, I, Fermions, Commun. Math. Phys., 13(1969), 317—334.
47. Sz. Nagy B., Foias C. Harmonic analysis of operators in Hilbert space, North. Holland, Amsterdam, 1970 (page 29).
48. Lewis J. T., Thomas L. C. A characterization of regular solutions of linear stochastic differential equation, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie, 30(1974), 45—55.
49. Lindblad G. Gaussian quantum stochastic processes on the CCR algebra, J. Math. Phys., 20(1979), 2081—2087.
50. Robinson D. W. Statistical mechanics of quantum spin systems II, Commun. Math. Phys., 7(1979), 337—340.
51. Streater R. F., Wilde I. F. The time evolution of quantized fields with bounded quasi-local interaction density, Commun. Math. Phys., 17(1970), 21—32.
52. Боголюбов Н. Н., мл. Метод исследования модельных гамильтонианов. — М.: Наука, 1974.
53. Боголюбов Н. Н., мл. О некоторых обобщенных теоремах в теории модельных систем, Сообщения ОИЯИ, Д17—10418, Дубна, 1977.
54. Van Hemmen L. Linear fermion systems, molecular field models and the KMS condition, preprint IHES/P/77/174, 1977.
55. Spohn H. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics. Markovian limits, Reviews of Modern Physics, 52(1980), 569—615.
56*. Frigerio A., Gorini V. Markov dilations and quantum detailed balance, Commun. Math. Phys., 93(1984), 517—532.
57*. Vincent-Smith G. F. Dilation of a dissipative quantum dynamical semigroup, Proc. London Math. Soc., v. XLIX (1984), 158—172.
58*. Белавкин В. П. Теорема реконструкции для квантового случайного процесса, ТМФ, 62(1985), 409—431.
59*. Frigerio A. Construction of stationary quantum Markov processes through quantum stochastic calculus, Lect. Notes Math., v. 1136 (1985), 207—222.

ГАМИЛЬТОНОВЫ МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ (1)

Джон Т. Льюис, Ганс Маассен

*Дублинский институт перспективных исследований,
Дублин, Ирландия*

1. ВВЕДЕНИЕ

Создающаяся в настоящее время теория некоммутативных случайных процессов имеет несколько разных истоков. Один из них — это попытки физиков найти квантовый аналог классического уравнения Ланжевена, которое описывает движение массивной частицы, взаимодействующей с тепловым резервуаром. Работа Форда, Каца и Мазура [6] оказала глубокое влияние на исследования в этой области за последнее десятилетие. Цель этой статьи — дать связное изложение ряда идей, мотивированных работой [6].

Ланжевен [13] изучал частицу, движущуюся через жидкость. Он указал, что вязкое сопротивление, которое испытывает частица, является в действительности усредненным результатом иррегулярного процесса столкновений частицы с молекулами жидкости. Чтобы объяснить броуновское движение такой частицы, он предложил ввести дополнительную силу, которая имеет нулевое среднее, но флуктуирует с амплитудой, достаточной чтобы поддерживать среднюю величину кинетической энергии на ее равновесном значении $\frac{1}{2}kT$ на одну степень свободы, как это требуется законом равнораспределения энергии. Это приводит к уравнению Ланжевена для перемещения Q частицы массы m:

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{1}{m}P; \ \frac{d}{dt}P = -\frac{\eta}{m}P + \sigma\frac{dw}{dt}. \qquad (1.1)$$

(Для простоты описания мы рассматриваем лишь одномерное движение; обобщение на случай многих измерений очевидно.)

Взаимодействие частицы с окружающей средой (часто называемой тепловым резервуаром) описывается двумя членами: систематической тормозящей силой $-\eta P/m$ и флуктуирующей ведущей силой $\sigma\, dw/dt$. Коэффициент трения не за-

---

(1) Lewis J. T., Maassen H. Hamiltonian models of classical and quantum stochastic processes. — In: Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes. Ed. L. Accardi, A. Frigerio and V. Gorini. Lecture Notes in Mathematics, v. 1055, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo, 1984, p. 245—276.

висит от температуры T, но коэффициент σ ведущей силы зависит от T и η по формуле Эйнштейна

$$\sigma^2 = 2\eta kT, \tag{1.2}$$

где k — постоянная Больцмана. Как показал Ланжевен, формула (1.2) следует из требования, что среднее значение кинетической энергии $P^2/2m$ должно стремиться к равновесному значению $\frac{1}{2}kT$ при возрастании времени при некоторых разумных статистических предположениях относительно dw/dt. Из анализа Уленбека и Орнштейна [24] ясно, что предположения Ланжевена о dw/dt сводятся к тому, что $w(t)$ — винеровский процесс: процесс $t \to w(t)$ гауссов с нулевым средним и ковариацией

$$\mathbf{E}(w(s)w(t)) = \min(s, t). \tag{1.3}$$

Как указал Дуб [4], уравнение (1.1) не имеет непосредственного смысла, поскольку винеровский процесс нигде не дифференцируем; однако ему можно придать точный смысл, используя стохастический интеграл, введенный Винером [25]. Если P_0 — гауссовская случайная величина, не зависящая от $\{w(t) \mid t \geqslant 0\}$, то существует единственный случайный процесс $\{P(t) \mid t \geqslant 0\}$, удовлетворяющий (1.1) и условию $P(0) = P_0$; этот процесс, называемый процессом скоростей Орнштейна — Уленбека, является гауссовским и марковским и полностью определяется параметрами m, η и kT. На этом уровне исследование уравнения Ланжевена стало завершенным. Однако это не давало полного удовлетворения физикам; хотя предсказания, основанные на этом уравнении, хорошо согласовались с экспериментом, само уравнение не имело достаточного обоснования в статистической механике.

В идеале было бы желательно исходить из гамильтониана h на фазовом пространстве Ψ полной системы, состоящей из броуновской частицы и молекул окружающей жидкости. Решение $\{V_t y\}$ гамильтоновых уравнений движения выражает положения и импульсы каждой частицы в момент t в терминах их начальных значеиий, которые описываются точкой y из Ψ. В общем у нас нет детального знания о начальном состоянии системы в целом; если мы знаем только, что она находится в тепловом равновесии при температуре T, то начальное состояние описывается плотностью вероятности $\rho(y)$ на фазовом пространстве, где $\rho(y)$ пропорциональна $\exp[-h(y)/kT)$. Таким образом, всякая функция F на фазовом пространстве определяет случайный процесс $F_t(y) = F(V_t y)$. Для произвольной F это не приводит к интересным результатам, потому что соответствующий процесс не допускает простого описания. Однако, если взять в качестве F импульс броуновской частицы, мы должны получить случайный процесс, который хорошо аппроксимируется процессом Орнштейна — Уленбека. В частности, этот процесс должен быть нечувствительным по отношению к детальным свойствам теплового резервуара.

Пока что все это оставалось не более чем программой (хотя недавно Лебовиц с сотрудниками достиг определенного прогресса в ее выполнении). Вместо этого было подробно исследовано поведение сильно упрощенных моделей частицы, взаимодействующей с резервуаром. При таком подходе тепловой резервуар представляется набором взаимодействующих гармонических осцилляторов; поскольку уравнения движения для такой системы линейны, можно достигнуть определенного результата. Форд, Кац и Мазур (ФКМ) [6] достигли на этом пути пределов возможного: задавшись вопросом — для каких квадратичных гамильтонианов импульс броуновской частицы описывается процессом Орнштейна — Уленбека, они нашли ответ на этот вопрос. Он оказался довольно неожиданным. Взаимодействие имеет бесконечный радиус; на самом деле каждый осциллятор взаимодействует со всеми остальными, причем константы взаимодействия оказываются бесконечными; более того, конечного числа осцилляторов недостаточно — тепловой резервуар должен иметь бесконечное число степеней свободы. Такая патология несколько обескураживает, однако путем разумного использования процедур обрезания Форд, Кац и Мазур смогли получить в этой модели осмысленные результаты. Найдя модель теплового резервуара, действие которого на частицу в точности сводится к тормозящей силе трения и ведущему белому шуму, как в уравнении (1.1), они сделали следующий шаг и заменили классическую динамику на квантовую. Так они получили первый пример квантового случайного процесса.

То обстоятельство, что для получения процесса Орнштейна — Уленбека пришлось неограниченно увеличивать число степеней свободы, наводит на мысль, что стоит поискать модели, которые с самого начала имеют бесконечное число степеней свободы. В 1900 г. Лэмб [12] предложил простую модель радиационного затухания. Он рассмотрел смещение частицы массы m, которая может двигаться вдоль оси y под действием возвращающей упругой силы и соединена с полубесконечной однородной струной плотности ρ, натянутой вдоль положительной полуоси x с натяжением τ. В линейном приближении смещение струны $f_t(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_t(x) = \tau \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_t(x), \quad (x > 0),$$

а смещение частицы — уравнению

$$m\frac{d^2}{dt^2}Q(t)+\alpha Q(t)=\frac{\partial}{\partial x}f_t(x)|_{x=0}.$$

Как будет показано в примере 5.1, энергия, которая исходно локализована в осцилляторе, уходит по струне и не возвращается. Это порождает эффективную силу трения (затухания), пропорциональную скорости частицы. Исходное движение струны разлагается на приходящую и уходящую волны. Уходящая волна не оказывает влияния на осциллятор, но приходящая действует как эффективная ведущая сила. Если рассмотреть полную систему как линейную гамильтонову систему, то мы можем распространить на нее принципы классической статистической механики, введя гауссову меру на бесконечномерном фазовом пространстве и исходя из требования, что средняя энергия на степень свободы равна $\frac{1}{2}kT$. Такая статистическая версия модели Лэмба была предложена одним из авторов и детально изучена в диссертации Томаса [22] (см. также [15]). Смещение осциллятора является тогда случайным процессом; Томас показал, что оно подчиняется уравнению Ланжевена

$$m\frac{d^2}{dt^2}Q(t)+\eta\frac{d}{dt}Q(t)+\alpha Q(t)=\sigma\frac{dw(t)}{dt}.$$

Это немарковский процесс, но, как хорошо известно, он имеет марковское расширение: двухкомпонентный процесс $\{Q(t), P(t)\}$ является марковским (он называется осцилляторным процессом Орнштейна — Уленбека). Если α равно нулю, то импульс $P(t)$ оказывается процессом скоростей Орнштейна — Уленбека. Отсюда видна связь между моделями Лэмба и ФКМ. На самом деле, будучи представленными как линейные гамильтоновы системы с бесконечным числом степеней свободы, они эквивалентны, как показали Льюис и Томас [15].

Оказывается, что обе модели можно рассматривать как конкретные конструкции ортогональных расширений Секефальви-Надя некоторой полугруппы сжимающих операторов. Обратное было доказано в [16] (см. более короткое доказательство в последующей работе [5]): минимальное ортогональное расширение полугруппы сжимающих операторов, которая сходится к нулю, удовлетворяет абстрактному уравнению Ланжевена. Эта связь была использована Льюисом и Пуле [14], которые показали, что всякая линейная диссипативная система может быть вложена в линейную гамильтонову систему так, что ограничение гамильтонова потока на исходную систему удовлетворяет уравнению Ланжевена; при проецировании на исходную систему возникает исходный диссипативный поток.

Рассматривая стационарные случайные процессы как линейные гамильтоновы системы, нетрудно построить их квантовый аналог. Такая конструкция была предложена в [17]; если исходным является осцилляторный процесс Орнштейна — Уленбека, то квантовым аналогом оказывается осцилляторный ФКМ-процесс. Квантовый процесс всегда оказывается более сингулярным, чем соответствующий классический (по крайней мере в случае бозонного квантования); это обусловлено квантовыми флуктуациями теплового резервуара. Квантовый тепловой шум был рассмотрен одним из авторов [18]; было показано, что осцилляторный ФКМ-процесс удовлетворяет квантовому уравнению Ланжевена.

Долгое время существовало подозрение, что эти результаты имеют чисто линейную природу и поэтому в какой-то мере нетипичны. В случае классической системы Льюис и Пуле [14] показали, что нелинейный диссипативный поток, рассматриваемый как возмущение линейного диссипативного потока, вкладывается в гамильтонову систему таким образом, что ограничение гамильтонова потока на исходную систему удовлетворяет нелииейному уравнению Ланжевена с тем же шумом, что и для невозмущенной линейной системы. Бенгуриа и Кац [2] рассмотрели этот вопрос для квантовой системы, используя теорию возмущений. Строгое рассмотрение фермионной системы было дано Аккарди, Фриджерио и Льюисом [1]. Бозонный случай был строго рассмотрен Маасеном [18]; близкие результаты были независимо получены Наказава [19].

План статьи следующий. В разд. 2 и 3 мы даем обзор гильбертовой структуры случайных процессов, делая упор на регулярные стационарные гауссовы процессы. Подчеркивается эквивалентность для таких процессов марковского свойства и выполнения уравнения Ланжевена.

В разд. 4 мы описываем, каким образом гиббсовские состояния линейных гамильтоновых систем в классической механике приводят к стационарным гауссовским случайным процессам. Выбирая специальную гамильтонову систему, можно таким образом получить процесс Орнштейна — Уленбека, как в разд. 5. Мы показываем, что ряд физических моделей, известных в литературе, — модель ФКМ, модель Лэмба и две модели из атомной физики — эквивалентны этой центральной гамильтоновой системе.

В разд. 6 обсуждается квантовое описание гамильтоновых систем, приводящее к квантовому уравнению Ланжевена.

Нелинейное квантовое уравнение Ланжевена рассматривается в разд. 7. Можно показать, что оно имеет решение, стремящееся к тепловому равновесию, если только нелинейность обусловлена осцилляторным потенциалом, который является гладким, выпуклым и близок к гармоническому.

2. ПРОЦЕССЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Гильбертово пространство, порождаемое случайным процессом второго порядка, было рассмотрено впервые в работах Колмогорова [11] и Крамера [3]. В случае гауссовского процесса свойства этого пространства определяют свойства процесса [20]. Напомним основные понятия процессов в гильбертовом пространстве (кратко, H-процессов), имея в виду приложения к гауссовским процессам. Более подробное изложение см. в [7], [1].

H-процесс описывает движущееся подпространство в вещественном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, или, более четко, сильно непрерывное семейство $\{J_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ изометрий из другого гильбертова пространства $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}$. Мы будем предполагать, что $\mathscr{H}$ порождается векторами $\{J_t k \mid t\in\mathbb{R},\ k\in\mathscr{K}\}$. H-процесс называется *стационарным*, если движение подпространства описывается группой $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ортогональных преобразований $\mathscr{H}$, т. е. для всех t, $s\in\mathbb{R}$

$$J_{t+s} = U_t \circ J_s. \tag{2.1}$$

Для любого $t\in\mathbb{R}$ определим следующие подпространства:

$\mathscr{H}_t = J_t\mathscr{K}$ (настоящее),

$\mathscr{H}_{t]}$ = замкнутое подпространство, порождаемое $\{J_s k \mid k\in\mathscr{K},\ s\leqslant t\}$ (прошлое и настоящее),

$\mathscr{H}_{[t}$ = замкнутое подпространство, порождаемое $\{J_s k \mid k\in\mathscr{K},\ s\geqslant t\}$ (настоящее и будущее).

Пусть P_t, $P_{t]}$ и $P_{[t}$ — ортогональные проекторы на $\mathscr{H}_t$, $\mathscr{H}_{t]}$ и $\mathscr{H}_{[t}$ соответственно.

Определение. H-процесс называется

детерминированным, если $\mathscr{H}_{t]} = \mathscr{H}$ для всех $t\in\mathbb{R}$,

регулярным, если $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_{t]} = \{0\}$,

марковским, если $P_{t]}\mathscr{H}_{[t} = \mathscr{H}_t$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

Корреляционная функция K: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathscr{L}(\mathscr{K})$ H-процесса J определяется соотношением

$$\langle k, K(s, t)k'\rangle = \langle J_s k, J_t k'\rangle. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Всякий H-процесс определяется однозначно с точностью до ортогональной эквивалентности своей корреляционной функцией.*

Доказательство. Утверждение является частным случаем теоремы существования и единственности минимального колмогоровского разложения положительно определенного ядра [5]; J является мининмальным колмогоровским разложением K. □

Свойства процесса J отражаются в свойствах K, как показывает следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* K: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathscr{L}(\mathscr{K})$ — *корреляционная функция H-процесса J. Тогда J*

(i) *стационарен тогда и только тогда, когда $K(t, t+s)$ не зависит от t при всех s;*

(ii) *марковский тогда и только тогда, когда $K(s, t)K(t, u) = K(s, u)$ для всех $s\leqslant t\leqslant u$ в $\mathbb{R}$.*

Доказательство Если J стационарен, то $K(t, t+s) = J_t^*J_{t+s} = J_0^*U_t^*U_{t+s}J_0 = J_0^*U_sJ_0$, что не зависит от t. Обратно, если $K(t, t+s)$ не зависит от t для всех s, то процессы $s\to J_s$ и $s\to J_{t+s}$ имеют одинаковые корреляционные функции $(u, s)\to K(u+t, t+s) = K(t, s)$. По лемме 2.1 тогда существует ортогональное отображение U_t, удовлетворяющее (2.1).

Чтобы доказать (ii), заметим, что для всех k и k' в $\mathscr{K}$ и для всех $s\leqslant t\leqslant u$ в $\mathbb{R}$ имеем

$$\langle k, (K(s, u) - K(s, t)K(t, u))k'\rangle =$$

$$= \langle J_sk, (1 - J_tJ_t^*)J_uk'\rangle = \langle J_sk, (\mathrm{I} - P_t)J_uk'\rangle\cdot \quad \square$$

Для стационарного H-процесса J можно определить корреляционную функцию одного аргумента S: $[0, \infty)\to\mathscr{L}(\mathscr{K})$ соотношением

$$S_s = K(t, t+s), \quad (s\geqslant 0, t\in\mathbb{R}). \tag{2.3}$$

Если J к тому же марковский, то S — полугруппа

$$S_{t+s} = S_t\cdot S_s, \quad (s, t\geqslant 0). \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Стационарный марковский H-процесс регулярен тогда и только тогда, когда S сильно сходится к нулю, т. е.*

$$\forall k\in\mathscr{K} : \lim_{t\to\infty}\|S_tk\| = 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Для всех $s\in\mathbb{R}$ и $t\leqslant s$ имеем

$$\|P_{t|}J_sk\| = \|P_tJ_sk\| = \|J_t^*J_sk\| = \|K(t, s)k\| = \|S_{s-t}k\|,$$

поэтому (2.5) эквивалентно соотношению

$$\forall h \in \mathscr{H} : \lim_{t \to \infty} \| P_{t]} h \| = 0,$$

которое выражает регулярность J. □

С другой стороны, для любой полугруппы S, удовлетворяющей (2.5), можно построить стационарный марковский H-процесс [5]. Если $\mathscr{N}$ — гильбертово пространство, то обозначим $L^2(\mathbb{R} \to \mathscr{N})$ гильбертово пространство всех измеримых функций h: $\mathbb{R} \to \mathscr{N}$, таких что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| h(t) \|^2 dt < \infty$. Для $h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R} \to \mathscr{N})$ положим $\langle h_1, h_2 \rangle := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle h_1(t), h_2(t) \rangle dt$. Пусть $\{T_t\}$ — группа сдвигов в $L^2(\mathbb{R} \to \mathscr{N})$:

$$(T_t h)(s) = h(s - t). \tag{2.6}$$

Лемма 2.4. *Пусть S — сильно непрерывная полугруппа линейных операторов в $\mathscr{K}$, сильно сходящаяся к нулю. Тогда существует регулярный стационарный марковский H-процесс $\{J_t = U_t J_0\}_{t \in \mathbb{R}}$, такой что*

$$J_0^* U_t J_0 = \begin{cases} S_t, & t \geqslant 0 \\ S_{-t}^*, & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Пара $\{\mathscr{H}, U\}$ эквивалентна $\{L^2(\mathbb{R} \to \mathscr{N}), T\}$.

Стационарный H-процесс $\{J_t = U_t J_0\}_{t \in \mathbb{R}}$ со свойством (2.7) называется *расширением* полугруппы S. По лемме 2.1 все расширения данной полугруппы эквивалентны.

Доказательство. Пусть G — производящий оператор S. Поскольку $t \to \| S_t k \|$ — невозрастающая функция для всех k, имеем для $k \in \operatorname{dom}(G + G^*)$,

$$-\langle k, (G + G^*) k \rangle = -\frac{d}{dt} \| S_t k \|^2 |_{t=0} \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\mathscr{K}_0$ — нулевое подпространство $G + G^*$, и $\mathscr{N} = \operatorname{dom}(G) / \mathscr{K}_0$. Пусть A: $\mathscr{K} \to \mathscr{N}$ — каноническое отображение, и определим скалярное произведение в $\mathscr{N}$ соотношением $\langle Ak, Ak' \rangle := -\langle k, (G + G^*) k' \rangle$. Положим $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R} \to \mathscr{N})$ и $U_t = T_t$. Отображение J_0: $\mathscr{K} \to \mathscr{H}$, даваемое формулой

$$(J_0 k)(s) = \begin{cases} 0, & s > 0, \\ A S_{-s} k, & s \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

является изометрией, поскольку для всех $k \in \operatorname{dom}(G)$

$$\| J_0 k \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \| AS_{-s}k \|^2 ds = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{d}{ds} \| S_{-s}k \|^2 \right) ds = \| S_{-s}k \| \Big|_{s=-\infty}^{s=0} = \\ = \| k \|^2.$$

Более того, для всех $k, k' \in \operatorname{dom}(C)$ и всех $t \geqslant 0$

$$\langle J_0 k, U_t J_0 k' \rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} \langle AS_{-s}k, AS_{-s+t}k' \rangle ds = \\ = \int\limits_{-\infty}^{0} \langle AS_{-s}k, AS_{-s}(S_t k') \rangle ds = \langle J_0 k, J_0 S_t k' \rangle = \langle k, S_t k' \rangle.$$

Это доказывает (2.7) при $t \geqslant 0$. Если $t < 0$, то $J_0^* U_t J_0 = (J_0^* U_t^* J_0)^* = (J_0^* U_{-t} J_0)^* = S_{-t}^*$. □

Расширение J сжимающей полугруппы имеет интересное свойство — оно удовлетворяет абстрактной версии уравнения Ланжевена для броуновского движения: приращение $J_t k$ состоит из слагаемого, обусловленного изменением $S_t k$, и «шума», который ортогонален любому вектору из прошлого $\mathscr{H}_{t]}$. Пусть $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ — совокупность борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Если $S \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, то лебегова мера S обозначается $|S|$.

Определение. Пусть c — неотрицательная билинейная форма на $\mathscr{K}$. *Гильбертов белый шум* на $\mathscr{K}$ с *коэффициентом диффузии c* это отображение

$$\xi \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{K} \to \mathscr{H} \colon (S, k) \to \xi_S k,$$

где $\mathscr{H}$ некоторое гильбертово пространство, линейное по k, и такое что для всех $S, S' \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ и всех $k, k' \in \mathscr{K}$

$$\langle \xi_S k, \xi_{S'} k' \rangle = | S \cap S' | \cdot c(k, k').$$

Теорема 2.5. *Пусть S — сильно непрерывная полугруппа сжатий на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, сильно сходящаяся к нулю. Пусть J — расширение полугруппы S и G — ее инфинитезимальный оператор. Тогда существует гильбертов белый шум ξ на $\mathscr{K}$, такой что для всех $k \in \mathscr{K}$*

$$d(J_t k) = (J_t G k)\, dt + \xi_{dt} k. \tag{2.10}$$

Коэффициент диффузии дается формулой

$$c(k, k') = -\langle k, (G + G^*) k \rangle. \tag{2.11}$$

Абстрактное уравнение Ланжевена (2.10) является сокращенной записью выражения

$$J_t k - J_s k = \int_s^t (J_u G k)\,du + \xi_{[s,t]}\,k, \quad \forall s,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Связь между диссипацией — $(G + G^*)$ и коэффициентом диффузии c, выражаемая формулой (2.11), является абстрактной версией физической *флуктуационно-диссипационной теоремы.*

Доказательство. В силу единственности с точностью до эквивалентности расширений полугрупп достаточно доказать, что существуют J и ξ, удовлетворяющие (2.10) и (2.11). Пусть J дается соотношением $J_t = T_t J_0$, J_0, как в (2.9), и определим ξ по формуле

$$(\xi_S k)(s) = \chi_S(s) \cdot Ak.$$

Тогда выполняется (2.12), поскольку для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\int_s^t (J_u G k)(x)\,du = \begin{cases} 0, & x \geqslant t, \\ (J_t k)(x) - Ak, & t \geqslant x \geqslant s, \\ (J_t k)(x) - (J_s k)(x), & s \geqslant x. \ \square \end{cases}$$

3. ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Для любого гильбертова пространства $\mathscr{H}$ можно найти вероятностное пространство $\{\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}, \mathscr{F}_{\mathscr{H}}, \mathbf{P}_{\mathscr{H}}\}$ и линейное отображение $\varphi_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to L^2(\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}, \mathbf{P}_{\mathscr{H}})$, такое что все $\varphi(f)$ являются гауссовскими случайными величинами, причем

$$\forall f,\ g \in \mathscr{H}\colon\ \mathbf{E}_{\mathscr{H}}(\varphi_{\mathscr{H}}(f)\,\varphi_{\mathscr{H}}(g)) = \langle f, g\rangle. \tag{3.1}$$

Вероятностное пространство и отображение $\varphi_{\mathscr{H}}$ определяются с точностью до стохастической эквивалентности пространством $\mathscr{H}$. Если $\mathscr{H}$ конечномерно, то можно положить
$\mathfrak{X}_{\mathscr{H}} = \mathscr{H}$, $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}(dh) = (2\pi)^{-1/2 \dim \mathscr{H}} \exp(-{}^1\!/_2 \| h \|^2)\,dh$, и $(\varphi_{\mathscr{H}}(f))(h) = \langle f, h\rangle$.

Однако для сепарабельного бесконечномерного $\mathscr{H}$ необходимо более широкое вероятностное пространство. В этом случае пусть $\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}$ — пространство всевозможных последовательностей $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, и пусть $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}$ — мера на $\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}$, задаваемая формулой

$$\mathbf{P}_{\mathscr{H}}(dx) = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \left((2\pi)^{-1/2} \exp\left(-{}^1\!/_2 x_n^2\right) dx_n\right). \tag{3.2}$$

Выберем ортонормированный базис $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в $\mathscr{H}$, и пусть $\mathscr{H}_0$ — подпространство всех линейных комбинаций векторов h_n.

Определим для всех $f \in \mathscr{H}_0$

$$(\varphi_0(f))(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle h_n, f\rangle x_n.$$

Тогда φ_0 продолжается единственным образом до непрерывного отображения φ: $\mathscr{H} \to L^2(\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}\mathbf{P}_{\mathscr{H}})$, удовлетворяющего (3.1).

Пусть $\mathfrak{M}_{\mathscr{H}}$ — коммутативная алгебра фон Неймана $L^\infty(\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}P_{\mathscr{H}})$. Если $\mathscr{L}$ подпространство $\mathscr{H}$, то пусть $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ наименьшая под-σ-алгебра $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}$, относительно которой измеримы все $\varphi(f)$, $(f \in \mathscr{L})$. Пусть $\mathbf{P}_{\mathscr{L}}$ — ограничение $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$. Тогда алгебра фон Неймана, порождаемая ограниченными измеримыми функциями от случайных величин $\{\varphi(f) \mid f \in \mathscr{L}\}$, совпадает с $\mathfrak{M}_{\mathscr{L}} = L^\infty(\mathfrak{X}_{\mathscr{H}}, \mathscr{F}_{\mathscr{L}}, \mathbf{P}_{\mathscr{L}})$, и операция взятия условного ожидания $E_{\mathscr{L}}(X)$ случайной величины X при данных значениях $\{\varphi(f) \mid f \in \mathscr{L}\}$ определяет проектор $E_{\mathscr{L}}$: $\mathfrak{M}_{\mathscr{H}} \to \mathfrak{M}_{\mathscr{L}}$.

Ортогональным подпространствам $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ отвечают статистически независимые алгебры $\mathfrak{M}_{\mathscr{L}_1}$ и $\mathfrak{M}_{\mathscr{L}_2}$.

(*Коммутативным*) *случайным процессом* мы называем семейство $\{j_t\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}\}_{t \in \mathbb{R}}$ $*$-морфизмов коммутативной алгебры фон Неймана $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$. Мы предполагаем, что алгебры $j_t\mathfrak{N}$, $(t \in \mathbb{R})$ порождают $\mathfrak{M}$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ определим следующие подалгебры:

$$\mathfrak{M}_t = \{j_t(N) \mid N \in \mathfrak{N}\}'' \quad \text{(настоящее)},$$

$$\mathfrak{M}_{t]} = \{j_t(N) \mid N \in \mathfrak{N},\ t \leqslant 0\}'' \quad \text{(прошлое и настоящее)},$$

$$\mathfrak{M}_{[t} = \{j_t(N) \mid N \in \mathfrak{N},\ t \geqslant 0\}'' \quad \text{(настоящее и будущее)}.$$

В терминах этих подалгебр удобно формулируются некоторые понятия теории случайных процессов.

Определение. Случайный процесс $\{j_t\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}\}_{t \in \mathbb{R}}$ называется

детерминированным, если $\mathfrak{M}_{t]} = \mathfrak{M}$ для всех $t \in \mathbb{R}$,

регулярным, если $\bigcap\limits_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{M}_{t]} = \{\lambda \cdot I \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,

марковским, если $E_{t]}\mathfrak{M}_{[t} = \mathfrak{M}_t$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь $E_{t]} = E_{\mathfrak{M}_{t]}}$).

Пусть теперь $\{J_t : \mathscr{K} \to \mathscr{H}_{t \in \mathbb{R}}\}$ есть H-процесс. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ отображение j_t^0, задаваемое соотношением

$$j_t^0(F(\varphi_{\mathscr{K}}(k))) = F(\varphi_{\mathscr{H}}(J_t k)), \quad (F \in L^\infty(\mathbb{R})), \tag{3.3}$$

продолжается по непрерывности до $*$-морфизма j_t: $\mathfrak{M}_{\mathscr{K}} \to \mathfrak{M}_{\mathscr{H}}$. Мы называем j *гауссовским случайным процессом*, ассоциированным с гильбертовым процессом J.

Теорема 3.1. *Гауссовский случайный процесс* $\{j_t\colon \mathfrak{M}_{\mathcal{K}} \to \mathfrak{M}_{\mathcal{H}}\}_{t\in\mathbb{R}}$ *детерминирован (регулярен, марковский) тогда и только тогда, когда* J *обладает соответствующим свойством.*

Доказательство см. в [7]. □

Пример 3.1. Возьмем $\eta > 0$. Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ и определим полугруппу S как

$$S_t k = e^{-\eta t} k, \quad (t \geqslant 0).$$

Расширение S дается соотношением

$$J_t\colon \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R})\colon (J_t k)(s) = \sqrt{2\eta}\,\theta(t-s)\,e^{-\eta(t-s)}k.$$

Тогда $p_t := J_t I$ удовлетворяет абстрактному уравнению Ланжевена

$$dp_t = -\eta p_t\,dt + \sqrt{2\eta}\,\chi_{dt}. \tag{3.4}$$

Соответствующий марковский процесс $\{j_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ дается соотношениями

$$j_t\colon L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{L^2(\mathbb{R})}\colon\ F \to F \circ P_t,$$

где

$$P_t = \varphi_{L^2(\mathbb{R})}(p_t), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Пусть теперь χ_t, $(t \in \mathbb{R})$ дается соотношением

$$\chi_t = \chi_{[0,\,t]}, \ (t \geqslant 0);\ \chi_t = -\chi_{[t,\,0]}, \quad (t < 0).$$

Тогда в понятном смысле $d\chi_t = \chi_{dt}$ (ср. (2.10) и (2.12)). Семейство $\{\omega_t = \varphi_{L^2(\mathbb{R})}(\chi_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ является *винеровским процессом*, и в силу (3.4) P удовлетворяет *уравнению Ланжевена*

$$dP_t = -\eta P_t\,dt + \sqrt{2\pi}\,d\omega_t. \tag{3.5}$$

Процесс j (или P) называется *процессом скоростей Орнштейна — Уленбека.*

Пример 3.2. Возьмем $\eta > 0$. Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2$, и определим полугруппу S соотношением

$$S_t = \exp(tG), \ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\eta \end{pmatrix},$$

Тогда $-(G + G^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\eta \end{pmatrix}$, так что расширение по-прежнему лежит в $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R} \to \mathcal{N})$, где $\dim \mathcal{N} = 1$. Имеем

$$(J_t(k_1, k_2))(s) = \sqrt{2\eta}\,\theta(t-s)\langle(0, 1), S_{t-s}(k_1, k_2)\rangle =:$$
$$=: k_1 q_t(s) + k_2 p_t(s).$$

Положим $Q_t = \varphi_{L^2(\mathbb{R})}(q_t)$ и $P_t = \varphi_{L^2(\mathbb{R})}(p_t)$. Тогда ассоциированный гауссовский процесс $\{j_t\}$ дается соотношением

$$j_t(F) = F(Q_t, P_t), \quad (F \in L^\infty(\mathbb{R}^2)), \tag{3.6}$$

и $\{(Q_t, P_t)\}$ удовлетворяет уравнению Ланжевена

$$dQ_t = P_t\,dt; \quad dP_t = (-\eta P_t - Q_t)\,dt + \sqrt{2\eta}\,dw_t. \tag{3.7}$$

Этот процесс известен как *осцилляторный процесс Орнштейна — Уленбека.*

4. ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Стационарные гауссовские случайные процессы естественно возникают в классической статистической механике линейных гамильтоновых систем.

Линейная гамильтонова система задается совокупностью $\{\Psi, h, \sigma, V\}$, где Ψ — вещественное линейное пространство, h — строго положительная форма на Ψ, σ — невырожденная кососимметричная билинейная (*симплектическая*) форма и V — группа линейных преобразований Ψ, удовлетворяющая уравнению

$$\forall x,\ y \in \Psi:\ \frac{d}{dt}\sigma(x, V_t y)\,|_{t=0} = -2h(x, y). \tag{4.1}$$

Здесь $h(x, y) = {}^1/_2(h(x+y) - h(x) - h(y))$ — билинейная форма, ассоциированная с квадратичной формой h.

Пространство Ψ — это *фазовое пространство* системы, функция $h\colon \Psi \to \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой точке фазового пространства ее *энергию*, называется *гамильтонианом* системы, а V обозначает временнýю эволюцию. Симплектическая форма σ вводит дополннтельную структуру, которой Ψ наделено как фазовое пространство. Часто Ψ имеет вид $\Psi = \Phi \oplus \Phi^*$, где Φ — линейное пространство конфигураций, а Φ^* его сопряженное. Тогда σ имеет вид

$$\sigma(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) = \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle.$$

Каноническое уравнение движения (4.1) связывает каждый член тройки $\{h, \sigma, V\}$ с другими двумя. Обычно V должно быть найдено по h и σ. Из (4.1) следует, что V сохраняет как h, так и σ.

Пример 4.1: *гармонический осциллятор.*
Пусть $m, \alpha > 0$.

$$\Psi = \mathbb{R}^2;\ x \in \Psi:\ x = (x_1, x_2);\ h(x) = {}^1/_2\alpha x_1^2 + {}^1/_2 m^{-1} x_2^2;$$

$$\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1;\ V_t = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Пример 4.2: *система связных гармонических осцилляторов.*

Выберем $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\{A_{ij}\}$ — строго положительная вещественная $n \times n$-матрица; пусть $m_i > 0$ для $i = 1, \ldots, n$.

$$\Psi = \mathbb{R}^{2n};\ x \in \Psi\colon x = \{x_{ij} \mid i = 1, 2;\ j = 1, \ldots, n\},$$

$$h(x) = {}^1/_2 \sum_{i,j=1}^{n} x_{1i} A_{ij} x_{1j} + {}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} m_i^{-1} x_{2i}^2;\ \sigma(x, y) = \\ = \sum_i (x_{1i} y_{2i} - x_{2i} y_{1i}),$$

V определяется как решение (4.1) для данных h и σ.

Пример 4.3: *полубесконечная струна.*

Пусть $\mathscr{S}$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Положим $\Psi = \mathscr{S}^2 = \{f = (f_1, f_2) \mid f_1, f_2 \in \mathscr{S}\}$. Определим

$$h(f) = {}^1/_2 \int_{-\infty}^{\infty} (f_1'(s)^2 + f_2(s)^2)\, ds;\quad \sigma(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, ds;$$

$$(V_t f)(s) = (a(s - t) + b(s + t),\ -a'(s - t) + b'(s + t)),$$

где a и b определяются с точностью до постоянной разности соотношениями

$$a + b = f_1;\ -a' + b' = f_2.$$

Функция $\Psi \to \mathbb{R}$ называется *наблюдаемой.* Широкий класс линейных наблюдаемых дается функционалами

$$\varphi_x\colon y \to \sigma(x, y). \tag{4.2}$$

Таким образом, каждая точка в фазовом пространстве естественно играет роль наблюдаемой. Наблюдаемые эволюционируют по закону $\{V_{-t}\}$, потому что

$$\varphi_x(V_t y) = \sigma(x, V_t y) = \sigma(V_{-t} x, y) = \varphi_{V_{-t}}(y).$$

Определим *сопряженный гамильтониан* $\tilde{h}$ на наблюдаемых по формуле

$$\tilde{h}(x) = \sup_{y \in \Psi} (\sigma(x, y) - h(y)). \tag{4.3}$$

Если $a_x \in \Psi$ — точка, в которой супремум достигается, то производная максимизируемой функции равна нулю, т. е.

$$\forall y\colon \sigma(x, y) = 2h(a_x, y). \tag{4.4}$$

Поэтому

$$\tilde{h}(x) = \sigma(x, a_x) - h(a_x) = 2h(a_x) - h(a_x) = h(a_x). \tag{4.5}$$

Определение (4.3) мотивируется следующей леммой.

Лемма 4.1. *Пусть $\beta > 0$. Пусть Ψ конечномерно и dy обозначает меру Лебега на Ψ. Тогда для всех $x \in \Psi$*

$$\left(\int\limits_{\Psi} e^{i\sigma(x,y)} e^{-\beta h(y)} dy\right) \Big/ \left(\int\limits_{\Psi} e^{-\beta h(y)} dy\right) = e^{-\tilde{h}(x)/\beta}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Фиксируем $x \in \Psi$. Пусть $h_{\mathbb{C}}$ аналитическое продолжение h на $\Psi_{\mathbb{C}} \times \Psi_{\mathbb{C}}$, где $\Psi_{\mathbb{C}}$ — комплексификация Ψ. По теореме Коши

$$\int\limits_{\Psi} e^{-h(y)} dy = \int\limits_{\Psi - ia_x} e^{-h_{\mathbb{C}}(y)} dy = \int\limits_{\Psi} e^{-h_{\mathbb{C}}(y - ia_x)} dy. \tag{4.7}$$

Однако

$$h_{\mathbb{C}}(y - ia_x) = h(y) - h(a_x) - 2ih(y, a_x) =$$
$$= h(y) - \tilde{h}(x) - i\sigma(x, y),$$

согласно (4.4) и (4.5). Поэтому правая часть (4.7) равна

$$e^{\tilde{h}(x)} \cdot \int\limits_{\Psi} e^{-h(y) + i\sigma(x, y)} dy.$$

Отсюда получается утверждение при $\beta = 1$; общий случай аналогичен. □

Лемма 4.2. *Пусть $\{\Psi, h, \sigma\}$ — линейная гамильтонова система с сопряженным гамильтонианом $\tilde{h}$. Тогда для всех $x, y \in \Psi$*

$$|\sigma(x, y)|^2 \leqslant 4h(x)\tilde{h}(y).$$

Доказательство. Из определения (4.3) следует, что

$$\sigma(x, y) \leqslant h(x) + \tilde{h}(y).$$

Поэтому для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, y \in \Psi$

$$\lambda^2 h(x) - \lambda\sigma(x, y) + \tilde{h}(y) \geqslant 0.$$

Утверждение следует из правила дискриминанта. □

Определим скалярное произведение на Ψ по формуле

$$\langle x, y\rangle = 2h(a_x, a_y). \tag{4.8}$$

Тогда

$$\tilde{h}(x) = {}^1\!/_2 \langle x, x\rangle = {}^1\!/_2 \| x \|^2.$$

В лемме (4.1) утверждается, что в случае $\dim \Psi < \infty$ наблюдаемые $\{\varphi_x\}$ являются гауссовскими случайными величинами с дисперсией $\|x\|^2/\beta$, если состояние задается *гиббсовской мерой* на Ψ

$$\mathbf{P}_\beta(dy) = c^{-\beta h(y)} dy \Big/ \left(\int\limits_{\Psi} e^{-\beta h(y)} dy\right).$$

Естественно распространить это утверждение на бесконечномерный случай, когда меры Лебега dy не существует. Очень часто можно естественным образом расширить Ψ до пространства Ψ_+, достаточно большого, чтобы вместить такую гиббсовскую меру $\mathbf{P}_\beta$.

Пусть $\mathscr{H}$ — пополнение Ψ по норме (4.9). Соответствие $x \to \varphi_x$ продолжается до отображения $f \to \varphi_{\mathscr{H}}(f)$ из $\mathscr{H}$ в пространство функций, определенных почти всюду на Ψ_+. Временна́я эволюция $t \to V_{-t}$ продолжается до унитарной группы U на $\mathscr{H}$, а через $\varphi_{\mathscr{H}}$ — до группы сохраняющих меру преобразований на Ψ_+.

Предположим, что $\mathscr{K}$ — подпространство $\mathscr{H}$, состоящее из наблюдаемых, которые относятся к подсистеме рассматриваемой гамильтоновой системы (например, один из осцилляторов системы в примере 4.2). Тогда мы оказываемся в ситуации, описанной в предыдущем разделе: семейство $\{J_t = U_t \mid \mathscr{K}\}_{t \in \mathbb{R}}$ определяет H-процесс над подсистемой, который переводится в стационарный гауссовский случайный процесс отображением $\varphi_{\mathscr{H}}$.

Завершим этот раздел формулировкой канонического уравнения движения в терминах скалярного произведения (4.8). Оно имеет вид

$$\forall x,\ y \in \Psi\colon\ \frac{d}{dt}\langle x, V_t y\rangle|_{t=0} = \sigma(x, y). \qquad (4.10)$$

5. ГАМИЛЬТОНОВЫ МОДЕЛИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Теперь мы можем описать каноническую конструкцию гамильтоновой системы, моделирующей броуновское движение. Определим линейную гамильтонову систему $\Gamma_0 = \{\Psi_0, h_0, \sigma_0, V^0\}$ следующим образом:

$$\Psi_0 = \text{пространство Шварца } \mathscr{S};\ h_0(f) = {}^1\!/_2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(s)^2\, ds;$$

$$\sigma_0(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g'(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, dg(s);$$

$$V_t^0 f = f(\cdot + t) = T_{-t} f.$$

Тогда сопряженная система (наблюдаемых)

$$\tilde{\Gamma}_0 = \{L^2(\mathbb{R}),\ {}^1\!/_2\|\cdot\|^2,\ T\}.$$

Состояние теплового равновесия при обратной температуре β получится, если нам удается расширить фазовое пространство Ψ_0 до некоторого пространства Ψ_{0+} и наблюдаемые $\varphi_f\colon g \to \sigma_0(f, g)$ до линейного функционала $\varphi_0(f)\ :\ \Psi_{0+} \to \mathbb{R}$ таким образом, что Ψ_{0+} является носителем вероятностной меры $\mathbf{P}_\beta$ со свойством

$$\forall f \in \Psi_0: \int\limits_{\Psi_{0+}} e^{i(\varphi_0(f))(w)}\, dP_\beta(w) = e^{-1/2\|f\|^2/\beta}. \tag{5.1}$$

Это может быть сделано следующим образом:

$$\Psi_{0+} = \{w \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists K > 0: |w(s)| \leqslant K(1+|s|)^n\};$$

$$(\varphi_0(f))(w)) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(s) f'(s)\, ds; \tag{5.2}$$

и $\mathbf{P}_\beta$ является вероятностной мерой винеровского процесса с «температурой» $1/\beta$.

Для почти всех w (относительно $\mathbf{P}_\beta$) (5.2) интегрируется по частям

$$(\varphi_0(f))(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\, dw(s), \tag{5.3}$$

причем интеграл понимается в винеровском смысле. Более того, из (5.1) следует, что

$$\mathbf{E}_\beta(\varphi_0(f)\,\varphi_0(g)) = \beta^{-1}\langle f, g\rangle,$$

и это позволяет продолжить далее φ_0 до изометрии $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\Psi_{0+}, \mathbf{P}_\beta)$ (с точностью до множителя β).

Пусть q_0 и p_0 обозначают наблюдаемые в $L^2(\mathbb{R})$, отвечающие начальным координате и импульсу осцилляторного H-процесса Орнштейна — Уленбека с коэффициентом упругости $\alpha > 0$ $\left(\text{в примере 3.2 следует положить } G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\eta \end{pmatrix}\right)$. Заметим, что $q_t = T_t q_0$, $p_t = T_t p_0$. Осцилляторный процесс Орнштейна — Уленбека дается соотношениями

$$Q_t = \varphi_0(T_t q_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_0(s-t)\, dw(s);$$

$$P_t = \varphi_0(T_t p_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_0(s-t)\, dw(s).$$

Такая конструкция может показаться не вполне удовлетворительной. Хотя она и соответствует описанию линейной гамильтоновой системы в предыдущем разделе, ее физическая интерпретация представляется не столь очевидной, как для рассмотренных там примеров. Поэтому мы обратимся к примерам, взятым из физической литературы, и покажем, что они либо прямо изоморфны системе Γ_0, либо могут быть аппроксимированы ею

Пример 5.1: *модель Лэмба.*

Рассмотрим линейную гамильтонову систему $\Gamma_L = \{\Psi_L, h_L, \sigma_L, V^L\}$, определяемую следующим образом (более подробно см. в [15], [18]).

Пусть $\alpha, \eta > 0$. Пусть Ψ_L пространство всевозможных пар $f = (f_1, f_2)$ функций $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, таких что f_1 и $F_2\colon t \to \int\limits_{-\infty}^{t} f_2(s)\,ds$ бесконечно дифференцируемы и имеют компактный носитель, и f_1 удовлетворяет граничному условию

$$f_1''(0) = \eta f_1'(0) - \alpha f_1(0). \tag{5.4}$$

Пусть

$$h_L(f) = {}^1\!/_2 \left(\alpha f_1(0)^2 + f_2(0)^2\right) + {}^1\!/_2 \eta \int\limits_0^\infty \left(f_1'(s)^2 + f_2(s)^2\right) ds$$

и

$$\sigma_L(f, g) = f_1(0)\, g_2(0) - f_2(0)\, g_1(0) + \eta \int\limits_0^\infty (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, ds.$$

Канонические уравнения движения (4.1) сводятся к

$$\frac{d}{dt} V_t^L (f_1, f_2)\big|_{t=0} = (f_2, f_1''), \tag{5.5}$$

$$\frac{d}{dt} (V_t^L) f_2(0)\big|_{t=0} = -\alpha f_1(0) + \eta f_1'(0). \tag{5.6}$$

Эти уравнения совместны, только когда f удовлетворяет граничному условию (5.4), и поэтому оно было включено в определение Ψ_L.

Система Γ_L описывает гармонический осциллятор с коэффициентом упругости α и единичной массой, соединенный с полубесконечной струной плотности η и натяжения η. Вертикальное отклонение струны на расстоянии s от осциллятора обозначается $f_1(s)$, скорость отклонения $f_2(s)$.

Уравнение (5.5) есть волновое уравнение для струны. Любое решение V^L этого уравнения имеет вид

$$(V_t^L f)(s) = (a(t-s) + b(t+s),\ a'(t-s) + b'(t+s)), \tag{5.7}$$

$$(t \in \mathbb{R},\ s \geqslant 0).$$

Мы будем называть a и b *уходящей* и *приходящей волнами*, связанными с f. Граничное условие (5.4) вместе с соотношением $f_2''(0) = d^2/dt^2 \left(V_t^L f\right)_1 (0) \,|_{t=0}$ выражает второй закон Ньютона для осциллятора. На осциллятор действуют две силы: сила упругости $-\alpha f_1(0)$, возвращающая в положение равновесия, и сила $\eta f_1'(0)$, вертикальная составляющая силы, действующей со стороны струны.

Сопряженный гамильтониан системы Γ_L имеет вид

$$\tilde{h}_L(f) = {}^1/_2(f_1(0)^2 + \alpha^{-1} f_2(0)^2) + {}^1/_2\eta \int\limits_0^\infty (f_1(s)^2 + F_2(s)^2)\, ds,$$

где F_2 введенная выше первообразная функции f_2.

Пусть δ_L: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ определяется соотношением

$$\delta_L(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s > 0. \end{cases}$$

Тогда следующие функции принадлежат замыканию $\mathscr{H}_L$ пространства Ψ_L по норме, определяемой $\tilde{h}_L$:

$$p_L = (\delta_L,\ 0) \quad \text{и} \quad q_L = (0,\ -\delta_L).$$

Рассматриваемые как наблюдаемые p_L и q_L представляют импульс и координату осциллятора

$$\sigma_L(p_L,\ f) = f_2(0) \quad \text{и} \quad \sigma_L(q_L,\ f) = f_1(0), \quad \forall f \in \Psi_L.$$

Теорема 5.1. *Для любого* $f \in \Psi_L$ *существуют единственные функции* a *и* b *в* $\mathscr{S}$, *для которых выполняется* (5.7). *Отображения*

$$f \to \sqrt{2\eta}\, a \quad \text{и} \quad f \to \sqrt{2\eta}\, b$$

продолжаются по непрерывности до изоморфизмов Ω_{out} и Ω_{in} *между* Γ_L *и* Γ_0. *Более того,*

$$\Omega_{\text{in}} q_L = q_0 \quad и \quad \Omega_{\text{in}} p_L = p_0.$$

Доказательство. Функции $a \restriction (-\infty,\ 0]$ и $b \restriction [0,\ \infty)$ однозначно определяются по f, как видно из (5.7) при $t = 0$. Следует показать, что они единственным образом продолжаются до бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций на $\mathbb{R}$ так, что правая часть (5.7) удовлетворяет (5.4) для всех моментов времени. Это эквивалентно тому, что

$$a'' + \eta a' + \alpha a = -(b'' - \eta b' + \alpha b). \tag{5.8}$$

Пусть теперь функции K_+: $[0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ и $K_- : -\infty,\ 0] \to \mathbb{R}$ таковы, что $K''_\pm \pm \eta K'_\pm + \alpha K_\pm = 0$ с граничными условиями $K_\pm(0) = 0$, $K'_\pm(0) = \pm 1$. Тогда общее решение уравнения (5.8) для a на $[0,\ \infty)$ имеет вид

$$a(t) = -b(t) + 2\eta \int\limits_0^t K_+(t-s)\, b'(s)\, ds + c_1 K_+(t) + c_2 K'_+(t), \tag{5.9}$$

а для b на $(-\infty, 0]$:

$$b(t) = -a(t) - 2\eta \int\limits_t^0 K_-(t-s)\, a'(s)\, ds + c_3 K_-(t) + c_4 K'_-(t). \tag{5.10}$$

Гладкие склеивания значений a и b в нуле получаются, если

$$c_1=\eta f_1(0)+f_2(0);\qquad c_2=f_1(0);$$

$$c_3=\eta f_1(0)+f_2(0);\qquad c_4=-f_1(0).$$

Пусть теперь $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций в $C_0([0,\infty)\to[0,1])$, таких что $\varepsilon_n(0)=1$, и носитель ε_n стягивается к $\{0\}$. Тогда $(\varepsilon_n,0)\to p_L$, $(n\to\infty)$ и $(0,-\varepsilon_n)\to q_L$ $(n\to\infty)$ по норме, определяемой $\bar{h}_L$. Согласно (5.10) имеем в $\mathscr{H}_0=L^2(\mathbb{R})$

$$\Omega_{\text{in}}(0,\,-\varepsilon_n)(t)=$$

$$=\sqrt{2\eta}\left({}^1\!/_2\int_0^{-t}\varepsilon_n(s)\,ds-\eta\int_t^0K_-(t-s)\,\varepsilon_n(-s)\,ds+K_-(t)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\to\sqrt{2\eta}\,K_-(t)=q_0(t),$$

(см. пример 3.2) и

$$\Omega_{\text{in}}(\varepsilon_n,\;0)(t)=\sqrt{2\eta}\left(-{}^1\!/_2\varepsilon_n(-t)+\eta\int_t^0K_-(t-s)\,\varepsilon_n(-s)\,ds+\right.$$

$$\left.+\,\eta K_-(t)-K'_-(t)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\sqrt{2\eta}\,K'_-(t)=p_0(t).\ \square$$

Следствие 5.2. *В гиббсовском состоянии модели Лэмба приходящая волна b с точностью до множителя $(2\eta)^{-1/2}$ эквивалентна винеровскому процессу w при обратной температуре β. Осциллятор удовлетворяет уравнению Ланжевена* (3.7).

Пример 5.2: *модель Форда — Каца — Мазура.*

Пусть $A=\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ положительно определенная последовательность вещественных чисел, такая что $\forall n\in\mathbb{Z}:A_{-n}=A_n$. Определим линейную гамильтонову систему $\Gamma_A=\{\Psi_A,h_A,\sigma_A,V^A\}$ соотношениями

$$\Psi_A=\left\{x\in(\mathbb{R}^2)^{\mathrm{Z}}\,\middle|\,\forall k>0:\sum_{n\in\mathrm{Z}}|n|^k(|x_{1n}|+|x_{2n}|)<\infty\right\},$$

$$h_A(x)=\frac{1}{2}\sum_{n,\,m\in\mathrm{Z}}x_{1n}A_{n-m}x_{1m}+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathrm{Z}}x_{2n}^2,$$

$$\sigma_A(x,\;y)=\sum_{n\in\mathrm{Z}}(x_{1n}y_{2n}-x_{2n}y_{1n}).$$

Γ_A описывает цепь гармонических осцилляторов, связанных трансляционно инвариантной системой пружин A (возможны и отрицательные значения коэффициента упругости), так что полная потенциальная энергия неотрицательна. Из всевозможных наблюдаемых выделяются импульсы и координата нулевого осциллятора: пусть $\delta_A \in \mathbb{R}^Z$ есть последовательность $(\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, где единица стоит на нулевом месте, и обозначим

$$p_A = (\delta_A, 0) \quad \text{и} \quad q_A = (0, -\delta_A).$$

Используем трансляционную инвариантность системы Γ_A, чтобы преобразовать ее к другой гамильтоновой системе, эволюция которой выписывается в явном виде. Рассмотрим функцию Ω: $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$\Omega(\theta)^2 = \sum_{n \in Z} A_n e^{in\theta}, \quad \theta \neq 0, \tag{5.11}$$

причем $\Omega(\theta)$ имеет тот же знак, что и θ, и $\Omega(0) = 0$. Это возможно в силу положительной определенности A. Определим систему $\Gamma_\Omega = \{\Psi_\Omega, h_\Omega, \sigma_\Omega, V^\Omega\}$ соотношениями

$$\Psi_\Omega = \{f \in C^\infty_{\text{per}}([-\pi, \pi])^2 \,|\, f(-\theta) = f(\theta)^*\},$$

$$h_\Omega(f) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\Omega(\theta)^2 |f_1(\theta)|^2 + |f_2(\theta)|^2) \frac{d\theta}{2\pi},$$

$$\sigma_\Omega(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} (f_1(\theta) g_2(\theta) - f_2(\theta) g_1(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Тогда временная эволюция V^Ω, определяемая каноническими уравнениями движения, имеет вид

$$V_t^\Omega(f_1, f_2) = \big((\cos \Omega t) f_1 + (\Omega^{-1} \sin \Omega t) f_2,$$
$$- (\Omega \sin \Omega t) f_1 + (\cos \Omega t) f_2\big).$$

Γ_A изоморфно отображается в Γ_Ω при отображении

$$\Psi_A \to \Psi_\Omega : x \to \Big(\sum_n x_{1n} e^{in\cdot}, \ \sum_n x_{2n} e^{in\cdot}\Big).$$

Заметим, что p_A переходит в $p_\Omega := (1, 0)$, а q_A в $q_\Omega := (0, -1)$.

Следующая лемма показывает, что Γ_Ω является весьма универсальной линейной гамильтоновой системой.

Лемма 5.3. *Для любой непрерывной четной и положительно определенной функции $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $F(0) = 1$ существует единственная нечетная неубывающая функция Ω: $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, такая что для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\Omega(\theta) t} \, d\theta = F(t). \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть мера μ такова, что $\hat{\mu}=F$. Тогда существует неубывающая случайная величина Ω на $(-\pi, \pi)$, такая что μ является ее распределением вероятностей. Она задается формулой[1]

$$\Omega(\theta)=\sup\left\{\omega\geqslant 0 \mid \mu([0, \omega])-\frac{1}{2}\mu(\{0\})\leqslant\frac{\theta}{2\pi}\right\}, \qquad (\theta>0);$$

$$\Omega(\theta)=-\Omega(-\theta), \qquad (\theta<0). \ \square$$

Следствие 5.4. *Для любой непрерывной, четной и положительно определенной функции $F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ существует линейная гамильтонова система типа Γ_Ω, такая что*

$$\langle V_t^\Omega p_\Omega, V_s^\Omega p_\Omega\rangle=F(t-s).$$

Чтобы перейти к системе Γ_A, заметим, что последовательность A определяется соотношением

$$A_n=\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\theta)^2 e^{in\theta}\frac{d\theta}{2\pi},$$

если $\Omega\in L^2([-\pi, \pi])$. Это эквивалентно тому, что μ имеет конечный второй момент. Таким образом, имеет место

Теорема 5.5. *Пусть $F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная, четная и положительно определенная функция. Пусть мера μ, такая что $\hat{\mu}=F$, имеет конечный второй момент. Существует модель Форда — Каца — Мазура Γ_A, в которой импульс нулевого осциллятора имеет корреляционную функцию F. Соответствующая последовательность коэффициентов упругости A дается формулой*

$$A_n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{in\theta(\omega)}\omega^2\mu(d\omega), \tag{5.13}$$

где
$$\theta(\omega)=2\pi\begin{cases}\mu([0, \omega])-\frac{1}{2}\mu(\{0\}), & \omega>0,\\ -\theta(-\omega), & \omega<0.\end{cases} \tag{5.14}$$

Замечания к примеру 5.2. Второй момент меры μ_{OU}, ассоциированной с импульсом процесса Орнштейна — Уленбека (осцилляторного или скоростей)

$$\mu_{\mathrm{OU}}(d\omega)=|\hat{p}_0(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi}=\frac{2\eta\omega^2}{(\omega^2-\alpha)^2+\eta^2\omega^2}\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{5.15}$$

бесконечен. В самом деле, уравнение Ланжевена влечет недифференцируемость траекторий $\{P_t\}$ и это исключает конечность второго момента соответствующей меры [8]. Поэтому не существует ФКМ-модели для осцилляторного про-

---

[1] Если множество в фигурных скобках пусто, следует положить $\Omega(\theta)=0$. — *Прим. перев.*

цесса Орнштейна — Уленбека (и заведомо для процесса скоростей, поскольку тот не имеет даже наблюдаемой координаты). Однако, вводя высокочастотное обрезание при $c > 0$:

$$\Omega^c(\theta) = \begin{cases} \Omega(\theta), & |\Omega(\theta)| \leqslant c, \\ \operatorname{sign}(\Omega(\theta)) \cdot c, & |\Omega(\theta)| > c, \end{cases}$$

мы получаем функцию Ω^c в $L^2([-\pi, \pi])$ и, таким образом, ФКМ-модель Γ_{A^c}, которая аппроксимирует процесс Орнштейна — Уленбека с произвольной точностью [6].

В заключение отметим, что p_A не является циклическим вектором для системы Γ_A, потому что все векторы $\{V_t^A p_A \mid t \in \mathbb{R}\}$ четны. Нечетная часть отделена от четной. Вследствие этого Γ_A изоморфна не $L^2(\mathbb{R})$, а $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ со сдвигами в качестве временных эволюций. Эти две компоненты переходят друг в друга под действием оператора, отвечающего смещению цепи осцилляторов на одно звено.

Пример 5.3: *модель Швабла — Тирринга.*

Следующий пример носит более реалистический характер. Он был исследован в начале шестидесятых годов Шваблом и Тиррингом [21] в качестве грубой модели атома, взаимодействующего с полем излучения, чтобы получить некоторое представление о действии лазера. Модель состоит из гармонического осциллятора, взаимодействующего с трехмерным скалярным полем через *«ϕ — q-связь»*. Мы покажем, что в пределе точечной массы осциллятор удовлетворяет уравнению Ланжевена. Мы дадим описание модели как линейной гамильтоновой системы, что позволяет дать не только классическую, но и квантовомеханическую интерпретацию (ср. § 6).

Будем обозначать систему через $\Gamma_{ST}(\rho)$, поскольку она зависит от выбора функции плотности зарядов ρ. Система состоит из двух подсистем. Первая Γ_{free} — это сферически симметричная компонента поля.

Пусть Ψ_{free} — это пространство пар $f = (f_1, f_2)$ сферически симметричных, бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$. Для всех $f, g \in \Psi_{\text{free}}$ положим

$$h_{\text{free}}(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\|\nabla f_1(r)\|^2 + f_2(r)^2)\, d_3 r,$$

$$\sigma_{\text{free}}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^3} (f_1(r) g_2(r) - f_2(r) g_1(r))\, dr.$$

Вторая подсистема — это гармонический осциллятор массы m с коэффициентом упругости α. Полная система определяется выбором сферически симметричной функции класса Шварца ρ и задается соотношениями

$$\Psi_{ST} = \Psi_{osc} \oplus \Psi_{free} = \{(x, f) \mid x \in \mathbb{R}^2, f \in \Psi_{free}\},$$

$$h^0_{ST}(x, f) = h_{osc}(x) + h_{free}(f) + x_1 \int_{\mathbb{R}^3} \rho(r) f_1(r) d_3 r,$$

$$\sigma_{ST}((x, f), (y, g)) = \sigma_{osc}(x, y) + \sigma_{free}(f, g).$$

Временна́я эволюция в Γ_{free} описывается сферическими волнами, набегающими к началу координат, отражающимися от него, и затем убегающими. Это подобно сдвигам в $L^2(\mathbb{R})$, как видно из следующей леммы.

Пусть $g \to \hat{g}$ — преобразование Фурье функции любого числа переменных. Пусть R — отображение, переводящее сферически симметричные функции на $\mathbb{R}^3$ в четные функции на $\mathbb{R}$ по формуле

$$(Rg)^\wedge(\omega) = \hat{g}(\omega, 0, 0). \tag{5.16}$$

Лемма 5.6. *Отображение* L: $\Psi_{free} \to \Psi_0$, *определенное формулой*

$$Lf = (2\pi)^{-1/2}((Rf_1)' + Rf_2),$$

является изоморфизмом между Γ_{free} *и* Γ_0.

Доказательство. Отображение R имеет свойство

$$(Rk)'(s) = -2\pi s k(s, 0, 0), \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Поэтому k и $(2\pi)^{-1/2}(Rk)'$ имеют одинаковую L^2-норму, и это же верно для ∇k и $(2\pi)^{-1/2}(Rk)''$. Отсюда следует, что $h_0 \circ L = h_{free}$. Кроме того, для всех $f, g \in \Psi_{free}$ выполняется

$$\sigma_0(Lf, Lg) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} ((Rf_1)' + Rf_2)((Rg_1)' + Rg_2)' ds =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} ((Rf_1)'(Rg_2)' - (Rf_2)'(Rg_1)') ds = \sigma_{free}(f, g). \quad \square$$

Этот изоморфизм позволяет заменить Γ_{free} на Γ_0 и получить упрощенную модель Швабла — Тирринга $\Gamma_{ST'}(\xi)$, где $\xi = R\rho/\sqrt{2\pi}$:

$$\Psi_{ST'} = \Psi_{osc} \oplus \Psi_0, \quad \sigma_{ST'} = \sigma_{osc} \oplus \sigma_0.$$

Далее

$$h^{\xi}_{\mathrm{ST}'}(x,\ f)=\frac{1}{2}\alpha x_1^2+\frac{1}{2}m^{-1}x_2^2+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(s)^2\,ds-x_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi f'\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\left(x_1-\alpha^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi f'\,ds\right)^2+\frac{1}{2}m^{-1}x_2^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(s)^2\,ds-\alpha^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi f'\,ds\right)^2\right).$$

Из второго выражения видно, что $h^{\xi}_{\mathrm{ST}'}$ строго положительно при $\alpha>\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(s)^2\,ds$. Сопряженный гамильтониан дается выражением

$$\tilde{h}_{\mathrm{ST}'}(x,\ f)=\frac{1}{2}mx_1^2+\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{-1}\left(x_2-\int\xi f\,ds\right)^2+\frac{1}{2}\int f^2\,ds,$$

где $\tilde{\alpha}$ — «ренормированный» коэффициент упругости: $\tilde{\alpha}=$ $=\alpha-\int\xi^2\,ds$.

Применим теперь тот же метод, что и для модели Лэмба, чтобы показать что $\Gamma_{\mathrm{ST}'}(\xi)$ изоморфна Γ_0: отождествим конфигурацию в $\Gamma_{\mathrm{ST}'}$ с соответствующей волной в Γ_0. Тогда оказывается, что в пределе точечного заряда, когда ρ стремится к $e\delta$, наблюдаемые $q_{\mathrm{ST}'}:=((0,\ -1))$ и $p_{\mathrm{ST}'}:=((1,\ 0),\ (0,\ 0))$ переходят в q_0 и p_0.

Определим функцию $\zeta_\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ соотношением

$$\zeta_\xi(t)=\begin{cases}\sigma_{\mathrm{ST}'}\left(q_{\mathrm{ST}'},\ V^{\xi}_{-t}q_{\mathrm{ST}'}\right), & t\leqslant 0,\\ 0, & t>0,\end{cases}$$

где V^{ξ} — временная эволюция в $\Gamma_{\mathrm{ST}'}(\xi)$.

Лемма 5.7. *Пусть $\alpha>\int\xi^2\,ds$ и $\hat{\xi}(\omega)\neq 0$ для всех $\omega\in\mathbb{R}$. Тогда ζ_ξ дается соотношением*

$$\hat{\zeta}_\xi(\omega)=\left(-m\omega^2+\tilde{\alpha}-i\omega\eta_\xi(\omega)\right)^{-1}, \tag{5.17}$$

где

$$\eta_\xi(\omega)=\int\limits_{s\leqslant t}e^{i\omega(s-t)}\xi(s)\,\xi(t)\,ds\,dt. \tag{5.18}$$

В частности, функции ζ_ξ и ζ'_ξ непрерывны и квадратично интегрируемы и стремятся к нулю на бесконечности.

Доказательство. Поскольку $\alpha > \int \xi^2 ds$, то квадратичные формы $\tilde{h}_{ST'}$ и $h_{ST'}$ являются строго положительно определенными. Из леммы 4.2 следует, что ζ_ξ — ограниченная функция

$$|\zeta_\xi(t)| \leqslant |\sigma_{ST'}(q_{ST'}, V^\xi_{-t} q_{ST'})| \leqslant 4h_{ST'}(q_{ST'}) \cdot \tilde{h}_{ST'}(q_{ST'}).$$

Поэтому $\hat{\zeta}_\xi(\omega)$ определена и аналитична для всех ω в верхней комплексной полуплоскости. Используя этот факт при вычислении преобразования Лапласа, из уравнений движения получаем (5.17). Из того, что $\operatorname{Re} \eta_\xi(\omega) = \frac{1}{2} |\hat{\xi}(\omega)|^2 > 0$, следует, что знаменатель не обращается в нуль при $\omega \in \mathbb{R}$. □

Теорема 5.8. *Пусть* $\alpha > \int \xi^2 ds$, $\hat{\xi}(\omega) \neq 0$. *Тогда для всех* $(x, f) \in \Psi_{ST'}$ *предел*

$$\lim_{t \to \infty} V^0_t \circ V^\xi_{-t}(x, f) \tag{5.19}$$

существует. Он имеет вид $(0, b)$, *где* $b \in L^2(\mathbb{R})$. *Отображение*

$$\Omega^{ST'}_\xi \colon (x, f) \to b$$

является изоморфизмом между $\Gamma_{ST'}(\xi)$ *и* Γ_0. *Более того,*

$$\Omega^{ST'} q_{ST'} = \xi * \zeta_\xi \quad \textit{и} \quad \Omega^{ST'} p_{ST'} = -\xi * \zeta'_\xi. \tag{5.20}$$

Доказательство. Используя свойства ζ_ξ, можно показать, что

$$\sigma_{ST'}((y, 0), V^\xi_{-t}(x, f)) \to 0, \quad (t \to \infty)$$

и

$$\int_0^\infty \left\| \frac{d}{dt} V^0_t \circ V^\xi_{-t}(x, f) \right\| dt < \infty.$$

Отсюда следует, что предел (5.19) существует и имеет вид $(0, b)$. Отображение $\Omega^{ST'}$ очевидным образом сохраняет σ и h. Соотношение (5.20) вытекает из того, что

$$\lim_{t \to \infty} V^0_t \circ V^\xi_{-t}(x, 0) = \int_0^\infty \left(-\sigma_{ST'}(q_{ST'}, V^\xi_{-t}(x, 0)) V^0_{-t}\xi\right) dt =$$
$$= (0, x_1(\xi * \zeta_\xi) - x_2(\xi * \zeta_\xi)). \quad \square$$

В заключение рассмотрим предел точечного заряда. Фиксируем ρ и пусть $\rho_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-3} \rho(r/\varepsilon)$. Тогда ρ_ε сходится к плотности $e\delta$ точечного заряда, где $e = \int \rho(r) d_3 r = \hat{\rho}(0)$. Процедура эквивалентна тому, что в $\Gamma_{ST'}$ полагается $\xi_\varepsilon = (2\pi)^{-1/2} R\rho_\varepsilon$.

При $\varepsilon \downarrow 0$ интеграл $\int \xi_\varepsilon ds$ сходится к $(2\pi)^{-1/2} e$, но $\int \xi_s^2 ds$ стремится к бесконечности. Поэтому, чтобы $\tilde{\alpha} = \alpha - \|\xi_\varepsilon\|^2$ оставалось положительным, α должно также стремиться к бесконечности. Такая процедура известна как ренормировка коэффициента упругости.

Из (5.17) видно, что в пределе $\varepsilon \downarrow 0$

$$\Omega_{\xi_\varepsilon} q_{\mathrm{ST}'} = \xi_\varepsilon * \zeta_{\xi_\varepsilon} \to q_0 \quad \text{и} \quad \Omega_{\xi_\varepsilon} p_{\mathrm{ST}'} = -\xi_\varepsilon * \zeta_{\xi_\varepsilon} \to p_0.$$

Это означает, что в пределе точечного заряда модель Шваба — Тирринга становится изоморфной модели Лэмба.

Пример 5.4: *заряженный гармонический осциллятор в электромагнитном поле.*

Наш последний пример является наиболее реалистичным и соответственно наименее регулярным. Снова рассмотрим гармонический осциллятор, заряд которого распределен сферически симметрично с плотностью ρ относительно колеблющейся точки. Он погружен в электромагнитное поле, которое описывается парой векторных полей (A, E). Здесь E — трансверсальная составляющая электрического поля, а A — магнитный потенциал, так что магнитное поле есть $\operatorname{rot} A$. Согласно законам нерелятивистской электродинамики гамильтониан системы имеет вид

$$H_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2} \alpha \| q \|^2 + \frac{1}{2m} \left\| p - \int_{\mathbb{R}^3} \rho(r - q) A(r) d_3 r \right\|^2 + \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\| E(r) \|^2 + \| \operatorname{rot} A(r) \|^2) d_3 r, \quad (5.21)$$

где q — вектор координат, p — вектор импульса осциллятора. Симплектическая структура определяется тем, что $-E$ считается *канонически сопряженным* к A. Это означает, что A и $-E$ играют роль соответственно первой и второй компонент поля f в форме σ_{free} предыдущего примера.

Из-за наличия q в аргументе функции ρ в первом интеграле формулы (5.21) H_{EM} не является квадратичным гамильтонианом. Чтобы сделать его таковым, мы просто опустим q в аргументе ρ. Это известно как *дипольная аппроксимация*, широко распространенная в приложениях атомной и молекулярной физики [10].

Второе упрощение состоит в том, что мы забудем о векторной природе A, E, q и p. Это не повлияет на качественное поведение модели.

Возвращаясь к обозначениям предыдущего примера и заменяя сразу свободное поле на Γ_0, мы приходим к следующему описанию линейной гамильтоновой системы $\Gamma_{\mathrm{EM}}(\xi)$:

$$\Psi_{\mathrm{EM}} = \Psi_{\mathrm{osc}} \oplus \mathscr{S}; \quad \sigma_{\mathrm{EM}} = \rho_{\mathrm{osc}} + \sigma_0;$$

$$h^{\rho}_{\mathrm{EM}}(x, f) = \frac{1}{2}\alpha x_1^2 + \frac{1}{2} m^{-1} (x_2 - \langle \xi, f' \rangle)^2 + \frac{1}{2} \| f' \|^2.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\| \cdot \|$ — скалярное произведение и норма в L^2. Сопряженный гамильтониан принимает вид

$$\tilde{h}_{\mathrm{EM}}(x, f) = \frac{1}{2} \tilde{m} x_1^2 + \frac{1}{2} \alpha^{-1} x_2^2 + \frac{1}{2} \| f \|^2 + x_1 \langle \xi, f \rangle,$$

где $\tilde{m} := m + \|\xi\|^2$ — *ренормированная масса*. Как h_{EM}, так и $\tilde{h}_{\mathrm{EM}}$ строго положительны тогда и только тогда, когда $m > 0$, т. е. $\tilde{m} > \|\xi\|^2$. Это становится очевидным, если мы запишем $\tilde{h}_{\mathrm{EM}}$ в виде

$$\tilde{h}_{\mathrm{EM}}(x, f) = \frac{1}{2} \tilde{m} (x_1 + \tilde{m}^{-1} \langle \xi, f \rangle)^2 + \frac{1}{2} \alpha^{-1} x_2^2 + \\ + \frac{1}{2} (\| f \|^2 - \tilde{m}^{-1} \cdot \langle \xi, f \rangle^2).$$

Теперь определим $\zeta_{\xi}^{\mathrm{EM}}$ соотношением

$$\zeta_{\xi}^{\mathrm{EM}}(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ \sigma_{\mathrm{EM}}(q_{\mathrm{EM}}, V_{-t}^{\xi} q_{\mathrm{EM}}), & t \leqslant 0, \end{cases}$$

где $q_{\mathrm{EM}} = ((0, -1), (0, 0))$ и V^{ξ} — временна́я эволюция в $\Gamma_{\mathrm{EM}}(\xi)$.

Теорема 5.9. *Предположим, что $m > 0$ и $\hat{\xi}(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда предел (5.19) существует для всех $(x, f) \in \Psi_{\mathrm{EM}}$, где V^{ξ} и V^0 — временны́е эволюции в $\Gamma_{\mathrm{EM}}(\xi)$ и $\Gamma_{\mathrm{EM}}(0)$ соответственно. Он определяет изоморфизм $\Omega^{\xi}_{\mathrm{EM}}$ между $\Gamma_{\mathrm{EM}}(\xi)$ и Γ_0. Имеем*

$$(\Omega^{\xi}_{\mathrm{EM}} p_{\mathrm{EM}})^{\wedge}(\omega) = \frac{-\hat{\xi}(\omega)}{-\tilde{m}\omega^2 + \alpha - i\omega^3 \eta_{\xi}(\omega)} \quad \text{и} \tag{5.22}$$

$$\Omega^{\xi}_{\mathrm{EM}} q_{\mathrm{EM}} = (\Omega^{\xi}_{\mathrm{EM}} p_{\mathrm{EM}})'.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.7 и теоремы 5.8.

Если обозначить $\{Q_t, P_t\}$ гауссовский случайный процесс, связанный с (5.22) в пределе точечного заряда $\xi \to (2\pi)^{-1/2} e\delta$, то мы приходим к стохастическим дифференциальным уравнениям (в обобщенном смысле)

$$\frac{d}{dt} P_t = -\alpha Q_t \quad \text{и} \quad \tilde{m} \frac{d^2}{dt^2} Q_t + \alpha Q_t - \frac{e^2}{4\pi} \frac{d^3}{dt^3} Q_t = e \frac{d^2}{dt^2} w_t. \tag{5.23}$$

К сожалению, уравнения (5.23) обладают тем свойством, что их единственное невзрывающееся решение является упреждающим (зависит от будущего). Оно не только неприемлемо с физической точки зрения, но даже не может быть пределом неупреждающих процессов.

В самом деле, в пределе точечного заряда, который приводит к (5.22), происходит что-то неладное. Для любой фиксированной положительной $\tilde{m}$ «голая масса» $m = \tilde{m} - \|\xi\|^2$ становится отрицательной при достаточно узкой ξ; и когда m переходит через нуль, гамильтониан и его сопряженный становятся неположительными, так что изоморфизм между $\Gamma_{\mathrm{EM}}(\xi)$ и Γ_0 нарушается.

Таким образом, имеются две несовершенные нерелятивистские модели заряженного осциллятора в электромагнитном поле. Одна дается решением уравнений (5.23). Оно является упреждающим и не соответствует какому-либо Γ_{EM}. Другая получается, если распределение заряда сужается лишь настолько, чтобы голая масса оставалась неотрицательной. В ней осциллятору приписывается некоторое, совершенно произвольное, распределение заряда (называемое *форм-фактором* или *высокочастотным обрезанием*). Обе модели изоморфны Γ_0

6. КВАНТОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

Квантовомеханическое описание физической системы часто может быть получено из классического с помощью процедуры, называемой *квантованием*. Эта процедура не является четко очерченной, и многие квантовомеханические модели получаются без ее использования. Однако для гамильтоновых систем с линейным фазовым пространством и гладкой положительной функцией Гамильтона эта процедура является действенной и приводит к физически правильным результатам.

Опишем процедуру квантования. Пусть Ψ — линейное пространство с симплектической формой σ. Как и прежде, мы отождествляем линейную наблюдаемую $y \to \sigma(x, y)$ с x. Процедура состоит из кинематической части (a) и динамической части (b).

(a) Сопоставим каждой линейной наблюдаемой $x \in \Psi$ самосопряженный оператор $\Phi(x)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ таким образом, что выполняется *каноническое коммутационное соотношение* (ККС)

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = \sigma(x, y) \cdot \mathrm{I}, \quad (x, y \in \Psi). \tag{6.1}$$

(b) Определим *гамильтониан* — самосопряженный оператор H, заменяя линейные наблюдаемые x в выражении для h

операторами $\Phi(x)$. Временна́я эволюция α линейных наблюдаемых тогда дается соотношением

$$\alpha_t(\Phi(x)) = \exp(itH)\Phi(x)\exp(-itH), \quad (x \in \Psi,\ t \in \mathbb{R}). \qquad (6.2)$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, порождаемая операторами $\Phi(x)$, $(x \in \Psi)$. Самосопряженный оператор $A \in \mathfrak{M}$ называется *наблюдаемой* квантовой системы. Проекционный оператор называется *событием*. Временная эволюция по непрерывности распространяется на всю $\mathfrak{M}$. Положительный линейный w^*-непрерывный функционал ω на $\mathfrak{M}$, такой что $\omega(\mathrm{I}) = 1$, называется *состоянием* квантовой системы или просто состоянием на $\mathfrak{M}$. Вероятность события A в момент t, если система описывается состоянием ω, есть $\omega(\alpha_t(A))$.

Для линейных гамильтоновых систем динамическая часть (b) процедуры квантования сводится к тому, что

$$\alpha_t(\Phi(x)) = \Phi(\tilde{V}_t x), \quad (x \in \Psi) \qquad (6.3)$$

(здесь $\tilde{V}_t = V_{-t}$). Чтобы это показать, возьмем последовательность $\{x_j\} \subset \Psi$, такую что

$$h(y) = \frac{1}{2}\sum_j \sigma(x_j, y)^2, \quad (x \in \Psi).$$

Тогда (b) означает, что $H = \frac{1}{2}\sum_j \Phi(x_j)^2$ и

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(\Phi(y))|_{t=0} = i[H, \Phi(y)] = \frac{1}{2}i\sum_j [\Phi(x_j)^2, \Phi(y)] =$$

$$= \frac{1}{2}i\sum_j (2i\sigma(x_j, y)\Phi(x_j)) = \Phi\left(-\sum_j \sigma(x_j, y)x_j\right).$$

Однако $-\sum_j \sigma(x_j, y)x_j = -\frac{d}{dt}V_t y|_{t=0} = \frac{d}{dt}\tilde{V}_t y|_{t=0}$, поскольку для всех $z \in \Psi$

$$\sigma\left(\sum_j \sigma(x_j, y)x_j, z\right) = \sum_j \sigma(x_j, y)\sigma(x_j, z) = 2h(y, z).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(\Phi(y))|_{t=0} = \Phi\left(\frac{d}{dt}\tilde{V}_t y|_{t=0}\right),$$

откуда следует (6.3).

Пример 6.1. *Гармонический осциллятор*

Пусть $\{\Psi, \sigma, h\} = \left\{\mathbb{R}^2, \sigma_{\mathrm{osc}}, \frac{1}{2}\|\cdot\|^2\right\}$, где $\sigma_{\mathrm{osc}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Пусть $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ и операторы Q и P определены соотношением

$$(Q\psi)(s)=s\psi(s), \quad (P\psi)(s)=-i\psi'(s).$$

Тогда $[Q, P]=i\mathbb{1}$. Положим $\Phi(x)=x_1P-x_2Q$. Тогда Φ удовлетворяет (6.1). Гамильтониан дается формулой

$$H=\frac{1}{2}(Q^2+P^2).$$

Из соотношения (6.3) следует, что

$$\alpha_t(Q)=Q\cos t+P\sin t, \quad \alpha_t(P)=P\cos t-Q\sin t.$$

В частности, $\alpha_{\pi/2}(A)=F^{-1}AF$, где F преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Алгебра $\mathfrak{M}:=\{\Phi(x)\,|\,x\in\mathbb{R}^2\}''=\{Q, P\}''$ состоит из всех ограниченных операторов в H.

Тесная связь (6.3) между динамикой классической механической системы и соответствующей квантовой системы является исключительным свойством линейных гамильтоновых систем, которое исчезает, как только квадратичный гамильтониан подвергается возмущению. Мы вернемся к этому замечанию в следующем разделе.

Для конечномерного фазового пространства Ψ кинематическая часть (а) процедуры квантования является корректно определенной: теорема единственности Стоуна — фон Неймана утверждает, что с точностью до кратности и унитарной эквивалентности существует только одно отображение Φ с требуемыми свойствами. Однако если фазовое пространство Ψ бесконечномерно, как в центральном примере § 5, то существует множество неэквивалентных представлений Φ канонического коммутационного соотношения (6.1). Приведем определения, которые используются при классификации этих представлений. При этом оказывается предпочтительным формулировать ККС в терминах унитарных операторов, порождаемых операторами Φ:

$$W(x):=\exp(i\Phi(x)). \tag{6.4}$$

Определение. *Циклическим представлением ККС* над симплектическим пространством $\{\Psi, \sigma\}$ называется тройка $\{\mathcal{H}, W, \Omega\}$, где $\mathcal{H}$ гильбертово пространство, W сильно непрерывное отображение Ψ в множество унитарных операторов в $\mathcal{H}$, а Ω единичный вектор в $\mathcal{H}$, такие что

(i) для любых $x, y\in\Psi$: $W(x+y)=e^{{}^1\!/_2 i\sigma(x, y)}W(x)W(y)$,

(ii) линейная оболочка множества $\{W(x)\Omega\,|\,x\in\Psi\}$ плотна в $\mathcal{H}$.

Определение. *Производящий функционал* $C:\Psi\to\mathbb{C}$ представления $\{\mathcal{H}, W, \Omega\}$ ККС над $\{\Psi, \sigma\}$ определяется соотношением

$$C(x) = \langle \Omega,\ W(x)\Omega \rangle.$$

Всякий производящий функционал обладает следующим свойством положительности: пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные числа и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки Ψ. Тогда

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} z_j^* z_k e^{{}^1\!/_2 i\sigma(x_j,\, x_k)} C\left(x_j - x_k\right) \geqslant 0. \qquad (6.5)$$

Приведенные определения мотивируются следующим результатом:

Теорема 6.1. *Всякий непрерывный функционал* $C : \Psi \to \mathbb{C}$, *такой что* $C(0) = 1$, *и удовлетворяющий условию* (6.5), *является производящим функционалом циклического представления ККС над* $\{\Psi, \sigma\}$, *которое определяется однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

Доказательство. Отображение $x \to W(x)\Omega$ является колмогоровским разложением [5] положительно определенного ядра $\Psi \times \Psi \to \mathbb{C}$:

$$\{x,\ y\} \to \exp\left(\frac{1}{2} i\sigma(x,\ y)\right) \cdot C(x - y). \ \square$$

Пример 6.2. Вновь рассмотрим $\left\{\mathbb{R}^2,\ \sigma_{\text{osc}},\ \frac{1}{2}\|\cdot\|^2\right\}$. Положим

$$C(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|x\|^2\right), \qquad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Пусть

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}); \quad \Omega(s) = \pi^{-1/4} e^{-1/2 s^2}; \quad W(x) = e^{1/2 i x_1 x_2} T_{-x_1} e^{-i x_2 Q},$$

где $(T_t\psi)(s) = \psi(s - t)$. Тогда $\{\mathcal{H}, W, \Omega\}$ — циклическое представление ККС над $\{\mathbb{R}^2, \sigma_{\text{osc}}\}$. Связь с примером 6.1 осуществляется соотношением (6.4)

Пример 6.3. Пусть $C_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ задается соотношением

$$C_\beta(x) = \exp\left(-\left(\frac{1}{4}\cot h \frac{1}{2}\beta\right)\|x\|^2\right).$$

Положим

$$\mathcal{H}_\beta = L^2(\mathbb{R}) \otimes l^2; \quad \Omega_\beta(s,\ n) = e^{-1/2 n\beta}\left((2^n \cdot n!)^{-1/2}(Q + iP)^n \Omega\right)(s);$$
$$W_\beta(x) = W(x) \otimes I.$$

Тогда $\{\mathcal{H}_\beta, W_\beta, \Omega_\beta\}$ является циклическим представлением ККС над $\{\mathbb{R}^2, \sigma_{\text{osc}}\}$ с производящим функционалом C_β.

Пример 6.2 описывает обычное квантование гармонического осциллятора, где Ω — основное состояние. Пример 6.3

дает циклическое представление ККС для гармонического осциллятора, отвечающее равновесному состоянию при обратной температуре β. Это состояние может быть задано в обычном представлении оператором плотности

$$\rho = \exp(-\beta H)/tr \exp(-\beta H).$$

Циклическое представление в примере 6.3 является, очевидно, кратным обычному представлению, т. е. *квазиэквивалентно* этому представлению. Температурные состояния поэтому не приводят к новому представлению ККС в соответствии с теоремой фон Неймана.

В случае бесконечномерного пространства $\exp(-\beta H)$ не является ядерным оператором в представлении основного состояния. Состояния с положительной температурой не задаются оператором плотности в этом представлении. Это является аналогом ортогональности гиббсовских мер для классических бесконечных систем.

Температурные представления определяются следующим образом [9]. Рассмотрим полосу $\Lambda(\beta) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \beta\}$. Обозначим $A(\Lambda(\beta))$ алгебру всех ограниченных непрерывных функций $\Lambda(\beta) \rightarrow \mathbb{C}$, которые аналитичны внутри $\Lambda(\beta)$.

Определение. $\{\mathscr{H}, W, \Omega\}$ называется *квантованием* линейной гамильтоновой системы $\{\Psi, h, \sigma, V\}$ *при обратной температуре* β, если $\{\mathscr{H}, W, \Omega\}$ является циклическим представлением ККС над $\{\Psi, \sigma\}$, таким что для всех $x, y \in \Psi$ функция

$$t \rightarrow \langle \Omega,\ W(x) W(V_t y) \Omega \rangle \tag{6.6}$$

продолжается до функции $G_{xy} \in A(\Lambda(\beta))$, удовлетворяющей условию

$$G_{xy}(t + i\beta) = \langle \Omega,\ W(V_t y) W(x) \Omega \rangle, \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{6.7}$$

Представление $\{\mathscr{H}, W, \Omega\}$ является *квантованием при нулевой температуре*, если (6.6) является граничным значением функции, ограниченной и аналитичной в верхней комплексной полуплоскости.

Заметим, что условие (6.7) является фактически ограничением на производящий функционал. Оно выполняется для функции C_β в примере 6.3.

Применим сформулированное определение к линейной гамильтоновой системе Γ_0 из § 5. Пусть $R_\beta : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \rightarrow \mathbb{C}$ дается соотношением

$$R_\beta(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{1 - e^{-\beta\omega}} \hat{f}(\omega)^* \hat{g}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (\beta > 0);$$

$$R_0(f, g) = \int_0^{\infty} \omega \hat{f}(\omega)^* \hat{g}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Лемма 6.2. *Непрерывный функционал* $C:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ *является порождающим функционалом квантования системы* Γ_0 *при температуре* β^{-1} *тогда и только тогда, когда*

$$C(f)=\gamma(\hat{f}(0))\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}R_\beta(f,\ f)\right),$$

где $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — *положительно определенная функция,* $\gamma(0)=1$, *и* $\beta\in(0,\infty]$.

Доказательство см. в [17], [18]. □

Нас будет интересовать только случай $\gamma=1$. Пусть $\{\mathcal{H}_\beta,\ W_\beta,\Omega_\beta\}$ — квантование системы Γ_0, отвечающее

$$C_\beta\colon\ f\to\exp\left(-\frac{1}{2}R_\beta(f,\ f)\right).$$

Пусть Φ_β получаются из соотношения

$$W_\beta(\lambda f)=\exp(i\lambda\Phi_\beta(f)),\qquad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

Явная конструкция представления $\{\mathcal{H}_\beta,\ W_\beta,\ \Omega_\beta\}$ дана в [18].

Отображения Φ_β и W_β могут быть продолжены на $\overline{\mathcal{S}}^\beta$, замыкание $\mathcal{S}$ по норме $f\to R_\beta(f,f)^{1/2}$. Отображение Φ_β в квантовой механике играет роль отображения φ из § 2. Например, оператор координаты в момент $t\in\mathbb{R}$ в квантовомеханической моделн Лэмба есть

$$Q_t^\beta:=\Phi_\beta(q_t).\tag{6.8}$$

Семейство $\{Q_t^\beta\}$ удовлетворяет квантовому уравнению Ланжевена

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f''-\eta f'+\alpha f)(t)\,Q_t^\beta\,dt=\Phi_\beta(f)\sqrt{2\eta},\qquad(f\in\mathcal{S}).\tag{6.9}$$

С другой стороны, оператор момента P_t^β не может быть определен соотношением

$$P_t^\beta:=\Phi_\beta(p_t),$$

поскольку $p_t\notin\overline{\mathcal{S}}^\beta$ в силу расходимости интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{p}_t(\omega)|^2\frac{\omega}{1-e^{-\beta\omega}}\frac{d\omega}{2\pi}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\eta\omega^2}{(\omega^2-\alpha)^2+\eta^2\omega^2}\,\frac{\omega}{1-e^{-\beta\omega}}\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Физически это означает, что в квантовой версии модели Лэмба движение осциллятора настолько иррегулярно из-за «нулевого» шума струны, что оператор скорости не существует.

В силу той же причины квантование возмущения, распространяющегося по струне, которое в классическом случае имело вид $w_t = \varphi(\chi_{[0,\,t]})$, не задается семейством операторов $\{\Phi_\beta(\chi_{[0,\,t]})\}$. Тем не менее будем называть Φ_β *квантовым белым шумом.*

Пусть теперь $\mathfrak{M}_\beta = \{\Phi_\beta(f) \mid f \in \mathcal{S}\}''$ Временна́я эволюция операторов W продолжается до группы $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}_\beta$, а производящий функционал C_β определяет состояние $\omega_\beta : A \to \langle \Omega_\beta, A\Omega_\beta \rangle$.

Отметим, что квантовомеханическая версия процесса Орнштейна — Уленбека, определяемая соотношением (6.8), не является марковским процессом. Во-первых, в силу несуществования оператора импульса алгебра наблюдаемых в каждый момент времени оказывается слишком узкой. Во-вторых, не существует условного ожидания относительно алгебры «прошлого», порождаемой операторами $\{Q_t^\beta\}_{t \leqslant 0}$. Это обстоятельство является более серьезным, так как оно отражает общую черту квантовых случайных процессов в состоянии теплового равновесия [1].

Система $\{\mathfrak{M}_\beta, \alpha^\beta, \omega_\beta\}$ обладает, однако, свойством сильного перемешивания:

Лемма 6.3. *Для всех* $\psi \in \mathcal{H}_\beta$ *и всех* $M \in \mathfrak{M}_\beta$
$$\langle \psi,\ \alpha_t^\beta(M)\psi \rangle \to \omega_\beta(M), \quad (t \to \pm\infty). \tag{6.10}$$

Доказательство, данное в [18], опирается на тот факт что $\mathfrak{M}'_\beta \Omega_\beta$ плотно в $\mathcal{H}_\beta$; соотношение (6.10) не выполняется для $\beta = \infty$.

7. ПРИБЛИЖЕНИЕ К ТЕПЛОВОМУ РАВНОВЕСИЮ ДЛЯ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является решением квантового уравнения Ланжевена с необязательно гармоническим потенциалом
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f''(t) - \eta f'(t))\, X_t\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, v'(X_t)\, dt = \sqrt{2\eta}\, \Phi_\beta(f). \tag{7.1}$$

Что можно в этом случае сказать о пределе
$$\lim_{t \to \infty} \langle \psi,\ \exp(i\lambda X_t)\, \psi \rangle, \quad (\psi \in \mathcal{H}_\beta)? \tag{7.2}$$

В соответствующей классической задаче, описываемой уравнением (7.1) с φ вместо Φ_β, рассуждают следующим образом. Процесс $\{X_t,\ \dot{X}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является марковским с фазовым пространством $\mathbb{R}^2$, поскольку удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению. Вследствие этого временна́я эволюция описывается полугруппой преобразований на множестве всех плотностей вероятности в фазовом пространстве. Эта полугруппа порождается уравнением диффузии Фоккера — Планка. Если предположить, что потенциал v имеет ровно один минимум, то существует единственная стационарная плотность вероятностей и все другие распределения приближаются со временем к этой плотности. Эта стационарная плотность оказывается плотностью гиббсовского распределения, отвечающего потенциалу v (см., например, [23]). В этом смысле решение классического уравнения Ланжевена приближается к тепловому равновесию.

В квантовом случае однако процесс не является марковским. Вместо этого мы опираемся при доказательстве приближения к тепловому равновесию на свойство сильного перемешивания (6.10). Оно справедливо для гладких ограниченных возмущений, сохраняющих выпуклость гамильтониана [18]. Благодаря свойству сильного перемешивания достаточно доказать, что существует оператор X, присоединенный к $\mathfrak{M}_\beta$, такой что $X_t := \alpha_t(X)$ является решением (7.1). Отсюда будет следовать

$$\lim_{t\to\infty}\langle\psi, \exp(i\lambda X_t)\psi\rangle = \langle\Omega, \exp(i\lambda X)\Omega\rangle. \qquad (7.3)$$

Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра линейных комбинаций операторов $\{\exp(i\lambda Q_t^\beta)\,|\,\lambda,\ t\in\mathbb{R}\}$. Мы действуем следующим образом:

(a) Возмущаем динамику α_t: $A\to e^{itH}Ae^{-itH}$ и получаем динамику $\tilde{\alpha}_t$: $A\to e^{it\tilde{H}}Ae^{-it\tilde{H}}$, где

$$\tilde{H} = H + w(Q_0^\beta),$$

w — возмущающий потенциал.

(b) Доказываем, что существует $*$-автоморфизм $\gamma_0:\mathscr{A}\to\mathfrak{M}_\beta$, такой что

$$\tilde{\alpha}_t\circ\gamma_0 = \gamma_0\circ\alpha_t. \qquad (7.4)$$

Тогда $\tilde{\alpha}_t(Q_0^\beta)$ удовлетворяет квантовому уравнению Ланжевена с шумом $\gamma_0\circ\Phi_\beta$.

(c) Доказываем, что γ_0 продолжается до $*$-автоморфизма γ алгебры $\mathfrak{M}_\beta$. Тогда

$$X_t := \alpha_t\circ\gamma^{-1}(Q_0^\beta) \qquad (7.5)$$

является решением (7.1)

Сформулируем основные результаты. Группы α и $\tilde{\alpha}$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\alpha_{-t}\circ\tilde{\alpha}_t(M) = M + i\int_0^t \alpha_{-s}\left(\left[w(Q_0^\beta),\ \tilde{\alpha}_s(M)\right]\right)ds, \qquad (7.6)$$

$$\tilde{\alpha}_{-t}\circ\alpha_t(M) = M - i\int_0^t \tilde{\alpha}_{-s}\left(\left[w(Q_0^\beta),\ \alpha_s(M)\right]\right)ds. \qquad (7.7)$$

Рассмотрим морфизмы Мёллера γ_0 и $\tilde{\gamma}_0$, определяемые соотношениями

$$\gamma_0(A) := \lim_{t\to\infty} \tilde{\alpha}_{-t}\circ\alpha_t(A), \qquad \tilde{\gamma}_0(A) := \lim_{t\to\infty} \alpha_{-t}\circ\tilde{\alpha}_t(A).$$

Лемма 7.1. *Для всех положительных значений α и η функция q_0, отвечающая начальному положению осциллятора Орнштейна — Уленбека в примере 3.2, удовлетворяет соотношению*

$$|\sigma(q_0, T_t q_0)| \leqslant a e^{-b|t|}, \tag{7.8}$$

для некоторых $a, b \geqslant 0$, причем с необходимостью $b < \alpha\cdot a$.

Теорема 7.2. *Пусть функция $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет вид*

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\mu(d\lambda),$$

где μ — комплексная мера, полная вариация которой μ_+ удовлетворяет условию

$$2\left(\int \mu_+(d\lambda)\right) + a\left(\int \lambda^2 \mu_+(d\lambda)\right) < b. \tag{7.9}$$

Тогда для всех A выполняется

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{0\geqslant t_1 \geqslant \ldots t_n \geqslant -\infty} dt_1 \ldots dt_n \left\| \left[w\left(Q^{\beta}_{t_n}\right), \left[\cdots\left[w\left(Q^{\beta}_{t_1}\right), A\right]\cdots\right]\right]\right\| < \infty. \tag{7.10}$$

Заметим, что (7.10) выражает L^1-сходимость разложения Дайсона для $\tilde{\gamma}_0$. Условие (7.9) влечет за собой выпуклость функции

$$v:\ x \to \frac{1}{2}\alpha x^2 + w(x). \tag{7.11}$$

Теорема 7.3. *Если разложение Дайсона сходится (что имеет место в условиях теоремы 7.2), то пределы $\gamma_0(A)$ и $\tilde{\gamma}_0(A)$ существуют для всех $A \in \mathscr{A}$. Более того, существует $*$-автоморфизм γ алгебры $\mathfrak{M}_\beta$, такой что $\gamma(W(q_t)) = \gamma_0(W(q_t))$ и $\gamma^{-1}(W(q_t)) = \gamma_0(W(q_t))$ для всех t. Семейство $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, определяемое формулой*

$$X_t = \alpha_t \circ \gamma^{-1}\left(Q^{\beta}_0\right),$$

удовлетворяет уравнению Ланжевена с v, даваемым соотношением (7.11).

Следствие 7.4. *В условиях теоремы* 7.3 *существует вектор* $\Omega_\beta^w \in \mathscr{H}_\beta$, *такой что для всех* $\psi \in \mathscr{H}_\beta$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to \infty} \left\langle \psi, \exp\left(i\lambda X_t\right) \psi \right\rangle = \left\langle \Omega_\beta^w, e^{i\lambda Q_t^\beta} \Omega_\beta^w \right\rangle.$$

Литература *)

1. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum Stochastic processes, Publ. RIMS, Kyoto, 18 (1982), 97—133. [Русский перевод: см. наст. сб. с. 13—52.]
2. Benguria R., Kac M. Quantum Langevin Equation, Phys. Rev. Lett., 46 (1981), 1—4.
3. Cramer H. Stochastic processes as curves in Hilbert space, Theory Prob. Appl., 9 (1964), 169—179.
4. Doob J. L. The Brownian movement and stochastic equations, Selected papers on noise and stochastic processes, ed. Nelson Wax, Dover Publications, New York, 1954.
5. Evans D. E., Lewis J. T. Dilations of irreversible evolutions in Algebraic Quantum theory, Communications of the Dublin Institute for Advanced studies, Series A, 24 (1977).
6. Ford G. W., Kac M., Mazur P. Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators, Journ. Math. Phys., 6 (1965), 504—515.
7. Frigerio A., Lewis J. T. Non-Commutative Gaussian Processes, Preprint, Dublin Institute for Advanced Studies, (1980).
8. Garsia A. M., Rodemich E., Rumsey H. Jr. A real Variable Lemma and the Continuity of paths of some Gaussian Processes, Indiana University Mathematics Journal, 20 (1970), N 6.
9. Haag R., Hugenholtz N. M., Winnink M. On the equilibrium states in quantum statistical mechanics, Comm. Math. Phys., 5 (1967), 215—236.
10. Kampen N. G. van. Contribution to the quantum theory of light scattering, Mat.-Fys Medd. Dansk. Vid. Selek., 26 (1951), N 15.
11. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрическим группам движений, ДАН СССР, т. 26 (1940), 6—9.
12. Lamb H. Proc. London Math. Soc., 2 (1900), 88.
13. Langevin P. C. r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris, 146 (1908), 530.
14. Lewis J. T., Pulè J. V. Dunamical Theories of Brownian Motion, Proceedings International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, ed. H. Araki, 1975, Lect. Notes Phys., 39, 516—519.
15. Lewis J. T., Thomas L. C. How to make a heat baht, Functional Integration, ed. A. M. Arthurs, Proceedings of International Conference Cumberland Lodge, London, Oxford, Clarendon Press, 1974.
16. Lewis J. T. Thomas L. C. A characterization of regular solutions of a linear stochastic differential equation, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 30 (1974), 45—55.
17. Lewis J. T., Thomas L. C. On the existence of a class of stationary quantum stochastic processes, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, 22 (1975), 241—248.
18. Maassen H. On a class of quantum Langevin equations and the question of approach to equilibrium, Thesis, Groningen State University, 1982.
19. Nakazawa H. Preprint, Dublin Institute for Advanced Studies, 1983.

---

*) Звездочкой отмечена работа, добавленная при переводе. — *Прим. перев.*

20. Neveu A. Processus Aléatoires Gaussiens. Faculté de Sciences, Université de Montréal. Publication du Seminaire de Mathématique Supérieure, 34 (1968).
21. Schwabl F., Thirring W. Quantum Theory of Laser Radiation, Ergebn. Exakten Naturw., 36 (1984), 219—242.
22. Thomas L. C. Thesis, Oxford 1971.
23. Tropper M. M. Ergodic and quasideterministic properties of Finite-Dimensional Stochastic Systems, Journ, Stat. Phys., 17 (1977), 491—509.
24. Uhlenbeck E., Ornstein L. S. On the theory of the Brownian motion, Phys. Rev., 36 (1930), 823—841.
25. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной плоскости. — М.: Наука, 1964.
26*. Maassen H. Return to thermal equilibrium by the solution of a quantum Langevin equation, J. Stat. Phys., 34 (1984), 239—261.

КОНСТРУКЦИЯ КВАНТОВЫХ ДИФФУЗИЙ[1]

Р. Л. Хадсон
Отдел математики, Ноттингемский университет, Ноттингем, Великобритания

К. Р. Партасарати
Индийский статистический институт, Нью-Дели, Индия

0. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы исследуем квантовые стохастические дифференциальные уравнения вида

$$da = dA^{+}F + G\,dA + H\,dt, \tag{0.1}$$

где a — бозонный оператор уничтожения, удовлетворяющий коммутационному соотношению

$$[a, a^{+}] = 1. \tag{0.2}$$

Здесь $(A_t : t \geqslant 0)$ — некоммутативный аналог процесса броуновского движения, который мы называем квантовым броуновским движением, а F, G и H — «функции» некоммутирующих переменных a и a^{+}. Существенным требованием является сохранение коммутационного соотношения (0.2) для всех времен, поэтому процесс (a_t) можно рассматривать как квантовый случайный процесс в смысле работы [1] в отличие от квантового броуновского движения, удовлетворяющего коммутационному соотношению

$$\left[A_t, A_t^{+}\right] = t, \tag{0.3}$$

которое зависит от времени. Уравнение (0.1) подобно классическому стохастическому дифференциальному уравнению вида

$$dX = \sigma(X)\,dQ + m(X)\,dt, \quad X_0 = 0, \tag{0.4}$$

где Q — классическое броуновское движение. По этой причине мы называем процессы, удовлетворяющие уравнениям вида (0.1), квантовыми диффузиями. Мы найдем аналоги формулы Фейнмана — Каца для процесса (0.4) и полугруппы $(J_t : \mathrm{t} \geqslant 0)$ операторов в подходящем функциональном пространстве, ассоциированной с процессом (0.4),

$$(J_t f)(x) = E(f(x + X_t))$$

с инфинитезимальным оператором $\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + m(x)\frac{d}{dx}$.

---

[1] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Construction of quantum diffusions. In: Lect. Notes in Math., v. 1055, Springer-Verlag, 1984, p. 173—198.

Уравнение (0.1) может также рассматриваться как стохастическое обобщение обычного детерминистического уравнения эволюции в квантовой механике (уравнения Гейзенберга)

$$da = i\,[\mathscr{H}, a]\,dt. \tag{0.5}$$

Мы покажем, что, как и в случае (0.5), уравнение (0.1) имеет формальное решение, которое затем может быть положено в основу строгой формулировки, в виде семейства унитарных операторов эволюции, сплетающих значения a в моменты времени t и 0,

$$U_t a_0 = a_t U_t. \tag{0.6}$$

Эти операторы сами удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению

$$dU = \left(dA^+ L - L^+\, dA + \left(i\mathscr{H} - \frac{1}{2}\, L^+ L\right) dt\right) U, \tag{0.7}$$

подобно тому как операторы эволюции для (0.5) удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$dU = i\mathscr{H} U\, dt.$$

Однако даже в автономном случае, когда коэффициенты F, G и H уравнения (0.1) не зависят явно от времени, процесс (U_t) не обладает групповым свойством,

$$U_s U_t \neq U_{s+t};$$

вместо этого $U_t = U_{0t}$ является членом двупараметрического семейства стохастических эволюций $(U_{st};\ s \leqslant t)$.

С другой стороны, операторы U_t можно рассматривать как обобщение вейлевских операторов обычного канонического формализма, удовлетворяющее, в частности, некоторому коммутационному соотношению, которое в то же время оказывается квантовой версией формулы Ито для произведений, используемой в стохастическом дифференциальном исчислении. Содержание этой квантовой формулы Ито вкратце сводится к тому, что все нормально упорядоченные произведения дифференциалов равны нулю, тогда как $dA\, dA^+ = dt$.

Развиваемая здесь теория допускает значительные обобщения и видоизменения. Мы используем здесь квантовое броуновское движение с минимальной дисперсией $\sigma^2 = 1$ (см. [2]). В случае $\sigma^2 > 1$ формула Ито для произведений модифицируется следующим образом:

$$dA\, dA^+ = \operatorname{ch}^2 \alpha\, dt, \quad dA^+\, dA = \operatorname{sh}^2 \alpha\, dt, \quad \text{где} \quad \sigma^2 = \operatorname{ch} 2\alpha,$$

тогда как все остальные произведения дифференциалов равны нулю. Имеется аналогичная фермионная теория, которая однако оказывается менее богатой [2] из-за более ограничительного характера фермионных коммутационных соотношений. Предварительные сообщения о некоторых результатах этой работы были опубликованы в [7], [8]. Изложение в данной работе носит отчасти эвристический характер, и основное внимание уделяется квантовомеханическим аспектам. Имеется математически строгая версия настоящего изложения, [11], основанная на классическом стохастическом дифференциальном исчислении, однако она слишком длинна для включения в этот сборник[1].

В разд. 1 мы напоминаем основные понятия бозонного вторичного квантования в фоковском пространстве, необходимые для дальнейшего. В разд. 2 вводится квантовое броуновское движение и объясняется его связь с классическим броуновским движением. В разд. 3 мы вводим стохастические интегралы и показываем, в частности, что квантовое обобщение формулы Ито для стохастических дифференциалов произведения является в то же время обобщением вейлевского коммутационного соотношения. В разд. 4 мы определяем квантовые диффузии и устанавливаем их основные свойства. В разд. 5 анализируется случай, когда все коэффициенты основного уравнения (0.1) линейно зависят от своих переменных, так что уравнение допускает явное решение и описание всех интересных объектов, в частности операторов стохастической эволюции.

1. ФОКОВСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Фоковское пространство $\Gamma(\mathfrak{h})$ над гильбертовым пространством $\mathfrak{h}$ определяется как бесконечная прямая сумма гильбертовых пространств

$$\Gamma(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^{(n)}, \tag{1.1}$$

где $\mathfrak{h}^{(0)} = \mathbb{C}$ и $\mathfrak{h}^{(n)}$ для $n \geqslant 1$ является подпространством n-кратного тензорного произведения гильбертова пространства на себя, состоящим из всех симметричных тензоров

$$\mathfrak{h}^{(n)} = (\mathfrak{h} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h})_{\text{sym}}. \tag{1.2}$$

Для любого $f \in \mathfrak{h}$ соответствующий *экспоненциальный вектор*, или *когерентное состояние*, определяется как вектор в $\Gamma(\mathfrak{h})$ вида

$$\psi_f = \left(1,\ f,\ (2!)^{-1/2} f \otimes f,\ (3!)^{-1/2} f \otimes f \otimes f,\ \ldots\right); \tag{1.3}$$

в частности, *вакуумный вектор*

$$\psi_0 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots). \tag{1.4}$$

---

[1] См. также [14*]. — *Прим. перев.*

Экспоненциальные векторы образуют полное семейство в $\Gamma(\mathfrak{h})$ [4]. Фоковское пространство $\Gamma(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ над прямой суммой гильбертовых пространств естественным образом отождествляется с тензорным произведением фоковских пространств над каждым из слагаемых,

$$\Gamma(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = \Gamma(\mathfrak{h}_1) \otimes \Gamma(\mathfrak{h}_2), \tag{1.5}$$

так что для любых $f_1 \in \mathfrak{h}_1$, $f_2 \in \mathfrak{h}_2$

$$\psi_{(f_1, f_2)} = \psi_{f_1} \otimes \psi_{f_2}. \tag{1.6}$$

Используя тот факт [4], что экспоненциальные векторы линейно независимы, определим *оператор Вейля* $W(f)$, отвечающий элементу $f \in \mathfrak{h}$, как единственный унитарный оператор в $\Gamma(\mathfrak{h})$, такой что

$$W(f)\psi_g = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|f\|^2 - \langle f, g\rangle\right\}\psi_{g+f} \quad (f, g \in \mathfrak{h}). \tag{1.7}$$

Оператор уничтожения $a(f)$ и *оператор рождения* $a^{\dagger}(f)$ являются взаимно сопряженными операторами, которые получаются как замыкания операторов, чье действие на конечные линейные комбинации экспоненциальных векторов определяется из соотношений

$$a(f)\psi_g = \langle f, g\rangle\psi_g \qquad (f, g \in \mathfrak{h}), \tag{1.8}$$

$$a^{\dagger}(f)\psi_g = \frac{d}{dt}\psi_{g+tf}\big|_{t=0} \quad (f, g \in \mathfrak{h}). \tag{1.9}$$

Вторичное квантование сжатия T в $\mathfrak{h}$ определяется как сжатие $\Gamma(T)$ в $\Gamma(\mathfrak{h})$, для которого

$$\Gamma(T)\psi_f = \psi_{Tf} \quad (f \in \mathfrak{h}). \tag{1.10}$$

Введенные операторы обладают следующими свойствами:

a) $W(f)W(g) = \exp\{-i\operatorname{Im}\langle f, g\rangle\}W(f+g)$ (1.11)
(соотношение Вейля);

b) $f \to W(f)$ является сильно непрерывным отображением $\mathfrak{h}$ в $B(\Gamma(\mathfrak{h}))$, и семейство операторов $\{W(f) : f \in \mathfrak{h}\}$ является неприводимым;

c) оператор $a^{\dagger}(f) - a(f)$ является в существенном кососамосопряженным и

$$W(f) = \exp\{a^{\dagger}(f) - a(f)\}. \tag{1.12}$$

d) $a^{\dagger}(f)$ зависит от f линейно, а $a(f)$ антилинейно, причем на общем инвариантном подпространстве, состоящем из конечных линейных комбинаций производных экспоненциальных векторов конечных порядков, они удовлетворяют инфинитезимальной форме соотношения (1.11), а именно

$$[a(f), a(g)] = [a^{\dagger}(f), a^{\dagger}(g)] = 0, \tag{1.13}$$

$$[a(f), a^{\dagger}(g)] = \langle f, g\rangle; \tag{1.14}$$

e) *функториальные свойства вторичного квантования:*

$$\Gamma(ST)=\Gamma(S)\Gamma(T), \tag{1.15}$$

$$\Gamma(T^\dagger)=\Gamma(T)^\dagger, \tag{1.16}$$

$$\Gamma(I)=I, \tag{1.17}$$

где I — единичный оператор;

f) $$a(f)\Gamma(T)=\Gamma(T)a(T^\dagger f). \tag{1.18}$$

Преобразование Боголюбова — это вещественно-линейное преобразование T в $\mathfrak{h}$, сохраняющее мнимую часть скалярного произведения

$$\mathrm{Im}\langle Tf,\ T_g\rangle=\mathrm{Im}\langle f,\ g\rangle. \tag{1.19}$$

Если существует унитарный оператор U в $\Gamma(\mathfrak{h})$, такой что для всех $f\in\mathfrak{h}$

$$UW(f)U^{-1}=W(Tf),$$

то мы говорим, что U *реализует* преобразование T; в этом случае U единствен с точностью до фазового множителя. В частности, всякий унитарный оператор в $\mathfrak{h}$ является преобразованием Боголюбова, которое реализуется его вторичным квантованием.

Для краткости мы опускаем доказательство следующей теоремы, обобщающей утверждение о существенной кососамосопряженности операторов $a^\dagger(f)-a(f)$, $f\in\mathfrak{h}$.

Теорема 1.1. *Пусть L_0 и $\mathscr{H}_0$ — ограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}_0$, причем $\mathscr{H}_0$ самосопряжен. Пусть f — произвольный вектор гильбертова пространства $\mathfrak{h}$. Тогда следующий неограниченный оператор в $\mathfrak{h}_0\otimes\Gamma(\mathfrak{h})$*

$$T=L_0\otimes a^\dagger(f)-L_0^\dagger\otimes a(f)+i\mathscr{H}_0\otimes I, \tag{1.20}$$

областью определения которого является алгебраическое тензорное произведение $\mathfrak{h}_0$ и множества конечных линейных комбинаций производных экспоненциальных векторов конечных порядков, является в существенном кососамосопряженным. Более того, для любого $\psi\in\mathfrak{h}_0$ и $g\in\mathfrak{h}$ $\psi\otimes\psi_g$ является аналитическим вектором для T.

В оставшейся части этого параграфа $\mathfrak{h}$ является гильбертовым пространством $L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$. Разложению в прямую сумму $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_t\oplus\mathfrak{h}'_t$, где $\mathfrak{h}_t=L^2([0,\ t])$, $\mathfrak{h}'_t=L^2(\,]t,\ \infty[\,)$, соответствует разложение $\Gamma(\mathfrak{h})$ в тензорное произведение $\Gamma(\mathfrak{h})=\Gamma(\mathfrak{h}_t)\otimes\Gamma(\mathfrak{h}_t)$. Обозначим N_t алгебру фон Неймана $B(\Gamma(\mathfrak{h}_t))\otimes I$ в $\Gamma(\mathfrak{h})$. Очевидно,

$$N_s\subseteq N_t,\quad s\leqslant t. \tag{1.21}$$

В силу неприводимости семейства операторов Вейля, N_t порождается операторами Вейля $W(f)$ с $f \in \mathfrak{h}_t$; благодаря сильной непрерывности $W(f)$ как функции f и плотности $\bigcup_{t \geqslant 0} \mathfrak{h}_t$ в $\mathfrak{h}$ алгебра $\bigcup_{t \geqslant 0} N_t$ порождает $B(\Gamma(\mathfrak{h}))$ как алгебру фон Неймана; обозначим последнюю N, так что

$$N = \Big(\bigcup_{t \geqslant 0} N_t\Big)''. \tag{1.22}$$

Обозначим $\mathbf{E}_0(T)$ *вакуумное ожидание* оператора T в $\Gamma(\mathfrak{h})$,

$$\mathbf{E}_0(T) = \langle \psi_0, T\psi_0 \rangle. \tag{1.23}$$

Далее, *условным ожиданием относительно алгебры* N_t называется отображение $\mathbf{E}_t$ из N на N_t, такое что для $T \in N$, $\mathbf{E}_t(T)$ есть элемент $T_1 \otimes I$ алгебры N_t, где T_1 — единственный ограниченный оператор в $\Gamma(\mathfrak{h}_t)$, для которого

$$\left\langle \psi, T_1\phi \right\rangle = \left\langle \psi \otimes \psi_0', T\phi \otimes \psi_0' \right\rangle \quad (\psi, \phi \in \Gamma(\mathfrak{h}_t)); \tag{1.24}$$

здесь ψ_0' вакуумный вектор в $\Gamma(\mathfrak{h}_t')$. При этом имеют место обычные свойства условного ожидания, например

$$\mathbf{E}_0(S_1 T S_2) = \mathbf{E}_0(S_1 \mathbf{E}_t[T] S_2), \tag{1.25}$$

для любых $S_1, S_2 \in N_t$, $T \in N$, и *башенное свойство*

$$\mathbf{E}_s \circ \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_s \quad (0 \leqslant s \leqslant t). \tag{1.26}$$

2. КВАНТОВОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Квантовым броуновским движением мы называем пару $(\psi, (A_t\colon t \geqslant 0))$, состоящую из единичного *вектора состояния* ψ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$ и семейства операторов $(A_t\colon t \geqslant 0)$ в $\mathfrak{h}$, которое вместе с сопряженным семейством $(A_t^\dagger\colon t \geqslant 0)$ удовлетворяет следующим соотношениям a), b) и c):

a) $$A_0 = 0, \tag{2.1}$$

b) $$[A_s, A_t] = [A_s^\dagger, A_t^\dagger] = 0, \tag{2.2}$$

$$[A_s, A_t^\dagger] = s \wedge t, \tag{2.3}$$

где $s \wedge t$ — минимальное число из s и t. Здесь (2.2) и (2.3) означают, что для любого $t \geqslant 0$ вещественная и мнимая части

$$Q_t = A_t + A_t^\dagger, \tag{2.4}$$

$$P_t = i^{-1}(A_t - A_t^\dagger) \tag{2.5}$$

являются существенно самосопряженными на $\mathscr{D}(A_t)\cap\mathscr{D}(A_t^\dagger)$ и удовлетворяют эквивалентным коммутационным соотношениям

$$[Q_s,\ Q_t]=[P_s,\ P_t]=0, \tag{2.6}$$

$$[Q_s,\ P_t]=2is\wedge t \tag{2.7}$$

в том смысле, что соответствующие однопараметрические группы удовлетворяют соотношениям

$$e^{ixQ_s}e^{iyQ_t}=e^{iyQ_t}e^{ixQ_s}, \tag{2.8}$$

$$e^{ixP_s}e^{iyP_t}=e^{iyP_t}e^{ixP_s}, \tag{2.9}$$

$$e^{ixP_s}e^{iyQ_t}=e^{2ixys\wedge t}e^{iyQ_t}e^{ixP_s} \tag{2.10}$$

для всех $x, y\in\mathbb{R}$ и $s, t\geqslant 0$. Следствием этого является факт, что для любых $z_1, \ldots, z_n\in\mathbb{C}$ и $t_1, \ldots, t_n\geqslant 0$ оператор

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_jA_{t_j}^\dagger-\bar{z}_jA_{t_j}\right)=i\sum_{j=1}^{n}\left(-x_jP_{t_j}+y_jQ_{t_j}\right) \tag{2.11}$$

(где x_j и y_j — вещественная и мнимая части z_j) является существенно кососамосопряженным.

c) Для любых $z_1, \ldots, z_n\in\mathbb{C}$; $t_1, \ldots, t_n\geqslant 0$,

$$\left\langle\psi,\ \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(z_jA_{t_j}^\dagger-\bar{z}_jA_{t_j}\right)\right\}\psi\right\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n}\bar{z}_jz_kt_j\wedge t_k\right\}. \tag{2.12}$$

Если вектор ψ является циклическим для операторов $A_t^\dagger$, $t\geqslant 0$, (эквивалентно для операторов Q_t, $t\geqslant 0$), т. е. действие на ψ многочленов от этих операторов порождает плотное множество векторов в $\mathfrak{h}$, мы говорим, что квантовое броуновское движение $(\psi,\ (A_t\colon\ t\geqslant 0))$ является *циклическим*.

Заметим, что если $(\psi,\ (A_t\colon\ t\geqslant 0))$ — (циклическое) квантовое броуновское движение, то таковым является и $(\psi,\ (B_t\colon\ t\geqslant 0))$, где (B_t) связано с (A_t) *калибровочным преобразованием*

$$B_t=e^{-i\theta}A_t,\quad \theta\in[0,\ 2\pi[. \tag{2.13}$$

Квантовое броуновское движение обладает также тем свойством, что оно «начинается заново в каждый фиксированный момент времени» в том смысле, что $(\psi,\ (A_{s+t}-A_s,\ t\geqslant 0))$ является квантовым броуновским движением для любого $s\geqslant 0$.

Циклическое броуновское движение получится, если взять в качестве ψ вакуумный вектор ψ_0 в фоковском пространстве $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0}))$ над $L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ и в качестве A_t — фоковский оператор уничтожения, соответствующий индикаторной функции $\chi_{[0,t]}$ отрезка $[0, t]$,

$$A_t = a(\chi_{[0,t]}), \quad t \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Мы называем это *стандартным* квантовым броуновским движением. Заметим, что, как следует из (1.18), для стандартного квантового броуновского движения калибровочное преобразование (2.13) порождается действием вторичного квантования оператора умножения на $e^{i\theta}$ в $L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$:

$$\Gamma(e^{i\theta})^\dagger A_t \Gamma(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} A_t. \tag{2.15}$$

Объяснение термина «квантовое броуновское движение» состоит в следующем.

Рассмотрим каноническое (классическое) броуновское движение (X_t: $t \geqslant 0$), определенное на пространстве $\mathscr{C}$ вещественных непрерывных функций на $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обращающихся в нуль при $t = 0$, с мерой Винера w, так что

$$X_t(\omega) = \omega(t) \quad (\omega \in \mathscr{C}). \tag{2.16}$$

Пусть $(\psi, (A_t\colon t \geqslant 0))$ — циклическое квантовое броуновское движение в гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$. Тогда существует единственный изоморфизм D гильбертовых пространств $\mathfrak{h}$ и $L^2(\mathscr{C}, w)$, такой что для любых $t_1, \ldots, t_n \geqslant 0$

$$DQ_{t_1} \ldots Q_{t_n}\psi = X_{t_1} \ldots X_{t_n}. \tag{2.17}$$

В самом деле, из (2.11) и (2.12)

$$\langle \psi, Q_{t_1} \ldots Q_{t_n}\psi \rangle =$$

$$= i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} \left\langle \psi, \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} y_j Q_{t_j} \right\} \psi \right\rangle \Bigg|_{y_1 = \ldots = y_n = 0} =$$

$$= i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} y_j y_k t_j \wedge t_k \right\} \Bigg|_{y_1 = \ldots = y_n = 0} =$$

$$= \int X_{t_1} \ldots X_{t_n} \, dw,$$

откуда вытекает, что отображение (2.17) изометрично; поскольку оно определено на полной системе в $\mathfrak{h}$, образ которой является полной системой в $L^2(\mathscr{C}, w)$, оно однозначно продолжается до изоморфизма гильбертовых пространств. (В случае стандартного квантового броуновского движения изоморфизм D представляет собой *преобразование двойственности* [12].) Если преобразование D используется для отождествления соответствующих гильбертовых пространств, то, поскольку $\psi \equiv 1$, мы видим, что $(Q_t\colon t \geqslant 0)$ совпадает с классическим броуновским движением. Однако аналогичное рассуждение (или, эквивалентно, применение калибровочного преобразования (2.13) с $\theta = \pi/2$) показывает, что точно так же (P_t: $t \geqslant 0$) является классическим броуновским движением. Поскольку они не коммутируют между собой, а именно

$$[Q_s, P_t] = 2is \wedge t, \tag{2.18}$$

броуновские движения (Q_t) и (P_t) не могут быть совместно диагонализованы или реализованы как классические случайные процессы на одном и том же вероятностном пространстве. Калибровочные преобразования не являются симметриями классического броуновского движения. Одной из мотивировок для введения квантового броуновского движения является возможность использования калибровочных преобразований как симметрий.

Пусть $(\psi, (A_t))$ и $(\psi', (A'_t))$ — два циклических квантовых броуновских движения в гильбертовых пространствах $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$, и пусть соответствующие изоморфизмы между $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ и $L^2(\mathscr{C}, w)$ обозначаются D и D'. Тогда $D^{-1}D'$ является изоморфизмом между $\mathfrak{h}'$ и $\mathfrak{h}$, который отображает ψ' на ψ и сплетает A'_t и A_t. Таким образом, любые два циклических квантовых броуновских движения эквивалентны в смысле существования такого сплетающего изоморфизма; в частности, всякое циклическое квантовое броуновское движение эквивалентно в этом смысле стандартному квантовому броуновскому движению. Вообще для нециклического квантового броуновского движения существует изоморфизм между его гильбертовым пространством и тензорным произведением $\mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0}))$ фоковского пространства на гильбертово пространство «начальных значений» $\mathfrak{h}_0$, при котором вектор состояния отображается на $\phi_0 \otimes \psi_0$, где ϕ_0 — некоторый единичный вектор в $\mathfrak{h}_0$, а ψ_0 — фоковский вакуум. Этот изоморфизм сплетает операторы данного броуновского движения с операторами $I \otimes A_t$, где $(\varphi_0, (A_t))$ — стандартное квантовое броуновское движение.

В случае стандартного квантового броуновского движения $(\psi_0, (A_t))$ нетрудно доказать, используя сильную непрерывность по f семейства операторов Вейля $W(f)$, неприводимость этого семейства и плотность в каждом $\mathfrak{h}_t$ конечных линейных комбинаций функций $\chi_{[0, s]}$, $0 \leqslant s \leqslant t$, что операторы A_s, $s \leqslant t$, порождают алгебру N_t; таким образом, N_t представляет информацию о движении до момента t. Используя сведéние к стандартному квантовому броуновскому движению, мы можем перенести на произвольное квантовое броуновское движение структуру, состоящую из алгебр фон Неймана N и N_t, порождаемых всем движением и движением до момента t и связанных соотношением (1.21), вместе с отображениями условных ожиданий E_t из N на N_t, удовлетворяющими (1.25) и (1.26).

Квантовое броуновское движение в форме пары $(Q_t, P_t\colon t \geqslant 0)$ было введено в [3], где оно называлось «каноническим винеровским процессом». Отметим, что нормировка коммутационных соотношений в [3] отличается от принятой в настоящей работе.

3. ФОРМУЛА ИТО И ОБОБЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕЙЛЯ

Пусть $(\varphi_0, (A_t\colon t \geqslant 0))$ — стандартное квантовое броуновское движение. Из (2.14) и (1.8) получаем для любых $t \geqslant 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$:

$$A_t \psi_f = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \psi_f, \tag{3.1}$$

Это соотношение наводит на мысль о введении оператора $\frac{dA_t}{dt}$, действие которого на экспоненциальные векторы, отвечающие непрерывным $f \in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, дается формулой $\frac{dA_t}{dt} \psi_f = f(t)\psi_f$.

Этот оператор не замыкаем, однако формальное соотношение

$$dA\psi_f = f(t)\psi_f\, dt \tag{3.2}$$

подсказывает следующее:

Определение. Пусть $(M(t)\colon t \geqslant 0)$, $(F(t)\colon t \geqslant 0)$, $(G(t)\colon t \geqslant 0)$ и $(H(t)\colon t \geqslant 0)$ — семейства операторов в $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0}))$ со следующими свойствами:

a) Для любых $t \geqslant 0$, $M(t)$, $F(t)$, $G(t)$ и $H(t)$ принадлежат N_t или, если они не ограничены, присоединены к N_t (мы говорим, что эти семейства *согласованы* с $(N_t\colon t \geqslant 0)$).

b) Множество экспоненциальных векторов является сердцевиной для $M(t)$, $F(t)$, $G(t)$ и $H(t)$, $t \geqslant 0$, т. е. каждый из этих операторов является замыканием своего действия на линейные комбинации экспоненциальных векторов.

Для произвольных $f, g \in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ и $t \geqslant 0$ интеграл

$$\int_0^t \langle \psi_f, (\bar{f}(\tau)F(\tau) + G(\tau)g(\tau) + H(\tau))\psi_g\rangle\, d\tau$$

существует и равен $\langle \psi_f, M(t)\psi_g\rangle$.

Тогда мы говорим, что M — *стохастический интеграл*,

$$M(t)=\int_0^t \left(dA_\tau^\dagger F(\tau)+G(\tau)\,dA_\tau+H(\tau)\,d\tau\right). \tag{3.3}$$

То же самое в дифференциальных обозначениях записывается как

$$M(0)=0, \quad dM=dA^\dagger F+G\,dA+H\,dt. \tag{3.4}$$

Пример 1. Для произвольной $f\in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, $t\geqslant 0$, положим

$$f_t=f\chi_{[0,\,t]}; \tag{3.5}$$

тогда

$$a(f_t)=\int_0^t \overline{f(\tau)}\,dA_\tau, \quad a^\dagger(f_t)=\int_0^t dA_\tau^\dagger f(\tau). \tag{3.6}$$

Эта запись для полевых операторов была предложена в [3].

Пример 2. Для произвольной $f\in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, $t\geqslant 0$, положим

$$W_t(f)=W(f_t). \tag{3.7}$$

Тогда $W_t(f)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dW_t(f)=W_t(f)\left(dA_t^\dagger f(t)-\overline{f(t)}\,dA_t-\frac{1}{2}\,|f(t)|^2dt\right) \tag{3.8}$$

с начальным условием $W_0(f)=I$. В самом деле, комбинируя соотношение

$$\langle\psi_g,\ \psi_h\rangle=\exp\langle g,\ h\rangle \tag{3.9}$$

с (1.17), имеем

$$\langle\psi_g,\ W_t(f)\psi_h\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}\|f_t\|^2-\langle f_t,\ h\rangle+\langle g,\ h+f_t\rangle\right\}, \tag{3.10}$$

откуда, дифференцируя,

$$\frac{d}{dt}\langle\psi_g,\ W_t(f)\psi_h\rangle=\langle\psi_g,\ W_t(f)\psi_h\rangle\Big(\overline{g(t)}f(t)- \\ -\overline{f(t)}h(t)-\frac{1}{2}|f(t)|^2\Big). \tag{3.11}$$

Пример 3. Для $t\geqslant 0$

$$A_t^\dagger A_t=\int_0^t (dA^\dagger\cdot A+A^\dagger\cdot dA). \tag{3.12}$$

В самом деле, из (3.1), для $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi_f,\ A_t^\dagger A_t\psi_g\rangle = \frac{d}{dt}\langle A_t\psi_f,\ A_t\psi_g\rangle =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t \overline{f(\tau)}\,d\tau \int_0^t g(\tau)\,d\tau\right\}\langle\psi_f,\ \psi_g\rangle =$$
$$= \left\{\int_0^t \overline{f(\tau)}\,d\tau\cdot g(t) + \overline{f(t)}\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right\}\langle\psi_f,\ \psi_g\rangle =$$
$$= \langle A_t\psi_f,\ g(t)\,\psi_g\rangle + \langle\psi_f,\ \overline{f(t)}\,A_t\psi_g\rangle =$$
$$= \langle\psi_f,\ (A_t^\dagger g(t) + \overline{f(t)}\,A_t)\,\psi_g\rangle, \qquad (3.13)$$

откуда (3.12) получается интегрированием.

Как следует из (3.12) и аналогично доказываемой формулы

$$d\left(A^{\dagger m}A^n\right) = dA^\dagger\cdot mA^{\dagger(m-1)}A^n + A^{\dagger m}\cdot nA^{n-1}\,dA, \qquad (3.14)$$

квантовые стохастические дифференциалы могут вычисляться согласно обычному правилу дифференцирования произведений без появления поправок Ито, если только все выражения нормально упорядочены, т. е. операторы рождения предшествуют операторам уничтожения [9]. Последний член в (3.8) можно рассматривать либо как поправку Ито, либо как результат нормального упорядочения:

$$W_t(f) = \exp\left\{\int_0^t (dA_\tau^\dagger f(\tau) - \overline{f(\tau)}\,dA_\tau)\right\} = \exp\{a^\dagger(f_t) - a(f_t)\} =$$
$$= \exp(a^\dagger(f_t))\exp(-a(f_t))\exp\left(-\frac{1}{2}\|f_t\|^2\right) =$$
$$= \exp\left\{\int_0^t dA_\tau^\dagger f(\tau)\right\}\exp\left\{\int_0^t \overline{f(\tau)}\,dA_\tau\right\}\exp\left\{-\int_0^t |f(\tau)|^2\,d\tau\right\}. \qquad (3.15)$$

В общем случае произведение стохастических интегралов является стохастическим интегралом; если $M_0,\ N_0 = 0$ и

$$dM = dA^\dagger F + G\,dA + H\,dt, \qquad (3.16)$$
$$dN = dA^\dagger J + K\,dA + L\,dt, \qquad (3.17)$$

то

$$d(MN) = dA^\dagger(FN + MJ) + (GN + MK)\,dA +$$
$$+ (HN + ML + GJ)\,dt, \qquad (3.18)$$

т. е.

$$d(MN) = dM.N + M.dN + dM.dN, \qquad (3.19)$$

где $dM.dN$ вычисляется согласно билинейному распространению правила, что *произведения дифференциалов* dA^{+}, dA *и* dt *считаются равными нулю, за исключением того, которое не является нормально упорядоченным, а именно*

$$dA\,dA^{+}=dt. \tag{3.20}$$

Пример. Используя (3.8) и (3.19), получаем

$$\begin{aligned} d\{W_t(f)W_t(g)\}&=dW_t(f)W_t(g)+W_t(f)dW_t(g)+dW_t(f)dW_t(g)=\\ &=W_t(f)W_t(g)\Big\{dA_t^{\dagger}(f(t)+g(t))-\overline{(f(t)+g(t))}\,dA_t-\\ &\quad-\Big(\frac{1}{2}|f(t)|^2+\frac{1}{2}|g(t)|^2+\overline{f(t)}g(t)\Big)dt\Big\}=\\ &=W_t(f)W_t(g)\Big\{dA_t^{\dagger}(f(t)+g(t))-\overline{(f(t)+g(t))}\,dA_t-\\ &\quad-\Big(\frac{1}{2}|f(t)+g(t)|^2+i\,\mathrm{Im}\,\overline{f(t)}g(t)\Big)dt\Big\}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

откуда

$$\begin{aligned} d\exp(i\,\mathrm{Im}\langle f_t, g_t\rangle)\,W_t(f)W_t(g)&=\exp(i\,\mathrm{Im}\langle f_t, g_t\rangle)\cdot W_t(f)W_t(g)\times\\ \times\Big\{dA_t^{\dagger}(f(t)+g(t))&-\overline{(f(t)+g(t))}\,dA_t-\frac{1}{2}|f(t)+g(t)|^2dt\Big\}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

так что соотношение Вейля

$$W_t(f)W_t(g)=\exp(-i\,\mathrm{Im}\langle f_t, g_t\rangle)\,W_t(f+g) \tag{3.23}$$

следует из формулы Ито (3.19)

Полное доказательство формулы (3.19) слишком длинно (см. [11]), и мы будем рассуждать эвристически[1]. При этом равенство нулю нормально упорядоченных произведений дифференциалов будет следовать из (3.2), а (3.20) — из дифференциальной версии $[dA, dA^{+}]=dt$ соотношения (2.3).

Оператор Вейля $W_t(f)$ может быть представлен как непрерывное произведение

$$W_t(f)=\exp\Big\{\int_0^t(dA^{+}f-\bar{f}\,dA)\Big\}=\prod_0^t\exp\{dA^{+}f-\bar{f}\,dA\} \tag{3.24}$$

благодаря тому, что подынтегральное выражение коммутирует при разных временах. На самом деле легко видеть, используя сильную непрерывность $W(f)$ по f, что если f не-

---

[1] Более краткое доказательство см. в [14*]. — *Прим. перев.*

прерывна на $[0, t]$, то $W_t(f)$ является сильным пределом

$$W_t(f) = \lim_n \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{ f\left(\frac{j-1}{n}t\right)\left(A^+_{\frac{j}{n}t} - A^+_{\frac{j-1}{n}t}\right) - \right.$$

$$\left. - \bar{f}\left(\frac{j-1}{n}t\right)\left(A_{\frac{j}{n}t} - A_{\frac{j-1}{n}t}\right)\right\}. \qquad (3.25)$$

Введем обобщения этого стохастического непрерывного произведения

$$\overrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) = \overrightarrow{\prod_0^t} \exp\{dA^+L - L^+\,dA + i\mathcal{H}\,d\tau\}, \qquad (3.26)$$

$$\overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) = \overleftarrow{\prod_0^t} \exp\{dA^+L - L^+\,dA + i\mathcal{H}\,d\tau\}. \qquad (3.27)$$

Здесь стрелки → и ← указывают, что сомножители упорядочены слева направо или справа налево по возрастанию времени (направление произведения (3.24) несущественно, поскольку сомножители в нем коммутируют). Здесь L и $\mathcal{H}$ — операторнозначные функции времени t, которые мы предполагаем согласованными с (N_t), причем $\mathcal{H}$ самосопряжен. Предположим далее, что L и $\mathcal{H}$ — непрерывные функции в смысле равномерной топологии $B(\Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})))$. Как и (3.25), $\overrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H})$ и $\overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H})$ определяются как сильные пределы конечных произведений (которые определены согласно теореме 1.1)

$$\overleftrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) = \lim_n \overleftrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} \exp\left\{\left(A^+_{\frac{j}{n}t} - A^+_{\frac{j-1}{n}t}\right)L\left(\frac{j-1}{n}t\right) - \right.$$

$$\left. - L^+\left(\frac{j-1}{n}t\right)\left(A_{\frac{j}{n}t} - A_{\frac{j-1}{n}t}\right) + i\mathcal{H}\left(\frac{j-1}{n}t\right)\frac{t}{n}\right\}, \qquad (3.28)$$

где ↔ обозначает → или ←. Они удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям, обобщающим (3.8):

$$d\overrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) = W_t(L, \mathcal{H})\left(dA^+L - L^+\,dA + \left(i\mathcal{H} - \frac{1}{2}L^+L\right)dt\right) \qquad (3.39)$$

$$d\overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) = \left(dA^+L - L^+\,dA + \left(i\mathcal{H} - \frac{1}{2}L^+L\right)dt\right)\overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H}). \qquad (3.30)$$

Очевидно,

$$\overrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H})^+ = \overleftarrow{W}_t(-L, -\mathcal{H}).$$

Каждое правое произведение может быть записано как левое (и наоборот):

$$\overrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) = \overleftarrow{W}_t\big(\overrightarrow{W}_{\cdot}(L, \mathcal{H}) L(\cdot) \overrightarrow{W}_{\cdot}(L, \mathcal{H})^{-1}, \\ \overrightarrow{W}_{\cdot}(L, \mathcal{H}) \mathcal{H}(\cdot) \overrightarrow{W}_{\cdot}(L, \mathcal{H})^{-1}\big). \quad (3.31)$$

Формула Ито эквивалентна обобщению соотношения Вейля (1.11) вместе с (3.29) и (3.30), а именно

$$\overrightarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) \overrightarrow{W}_t(M, \mathcal{K}) = \overrightarrow{W}_t\big(\hat{L} + M, \ \hat{\mathcal{H}} + \mathcal{K} - \frac{1}{2i}(\hat{L}^+ M - M^+ \hat{L})\big) \quad (3.32)$$

$$\overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) \overleftarrow{W}_t(M, \mathcal{K}) = \overleftarrow{W}_t\Big(L + \check{M}, \ \mathcal{H} + \check{\mathcal{K}} - \frac{1}{2i}(L^+ \check{M} - \check{M}^+ L)\Big), \quad (3.33)$$

где

$$\hat{L}(t) = \overrightarrow{W}_t^{-1}(M, \mathcal{K}) L(t) \overrightarrow{W}_t(M, \mathcal{K}), \\ \hat{\mathcal{H}}(t) = \overrightarrow{W}_t^{-1}(M, \mathcal{K}) \mathcal{H}(t) \overrightarrow{W}_t(M, \mathcal{K}) \quad (3.34)$$

$$\check{M}(t) = \overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) M(t) \overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H})^{-1}, \\ \check{\mathcal{K}}(t) = \overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H}) \mathcal{K}(t) \overleftarrow{W}_t(L, \mathcal{H})^{-1}. \quad (3.35)$$

Эвристический вывод (3.32) и (3.33) из определения (3.28) может быть основан на формуле Кемпбелла — Бэкера — Хаусдорфа.

Квантовые диффузии строятся с помощью стохастических интегралов (3.3) и обобщенных операторов Вейля (3.26) и (3 27), в которых функции F, G, H, L и $\mathcal{H}$ принимают значения в множестве операторов в тензорном произведении $\mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0}))$ фоковского пространства и некоторого произвольного гильбертова пространства $\mathfrak{h}_0$. Эти функции согласованы в том смысле, что их значения в любой момент $t \geqslant 0$ принадлежат алгебре фон Неймана

$$N_t^0 = B(\mathfrak{h}_0) \otimes N_t, \quad t \geqslant 0. \quad (3.36)$$

Семейство таких алгебр вместе с алгеброй $N^0 = \mathrm{B}(\mathfrak{h}_0) \otimes N$, очевидно, наследует отношения (1.21) и (1.22). Более того, условные ожидания E_t, $t \geqslant 0$, порождают отображения $E_t^0 = I \otimes E_t$ из N^0 на N_t^0, для которых имеют место аналоги (1.25) и (1.26). (В дальнейшем, поскольку мы будем рассматривать E_t^0, а не E_t, мы не будем писать верхний индекс.) В этой ситуации (3.3) означает, что для любых

ϕ, $\chi \in \mathfrak{h}_0$ и f, $g \in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$

$$\langle \phi \otimes \psi_f, M_t \chi \otimes \psi_g \rangle = \int_0^t \langle \phi \otimes \psi_f, \overline{f(\tau)} F(\tau) + G(\tau) g(\tau) + + H(\tau) \chi \otimes \psi_g \rangle d\tau. \quad (3.37)$$

Заметим, что для любого единичного вектора $\phi \in \mathfrak{h}_0$ $(\phi \otimes \psi_0, (I \otimes A_t))$ является (нециклическим) квантовым броуновским движением, и более последовательным, хотя и более громоздким обозначением для стохастических дифференциалов, возникающих в (3.3), было бы $I \otimes dA^\dagger$, $dI \otimes A$.

Особенно важный класс обобщенных операторов Вейля (3.26) возникает, когда «подынтегральные» выражения имеют вид

$$L(t) = L_0(t) \otimes I, \quad \mathscr{H}(t) = \mathscr{H}_0(t) \otimes I, \quad (3.38)$$

где L_0, $\mathscr{H}_0$ — функции со значениями в $B(\mathfrak{h}_0)$. Для этого случая строгое доказательство существования унитарнозначного процесса, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению (3.29), было получено в [11] классическими методами. В разд. 5 мы покажем, что подобные процессы существуют и в некоторых случаях, когда L_0 и $\mathscr{H}_0$ — неограниченные операторы.

4. КВАНТОВЫЕ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим квантовомеханическую бозонную систему с одной степенью свободы, описываемую оператором уничтожения a с сопряженным оператором рождения $a^\dagger$, удовлетворяющим коммутационному соотношению

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (4.1)$$

Прежде чем перейти к стохастическим эволюциям, которые нас и интересуют, полезно провести формальное рассмотрение вывода и решение уравнения движения Гейзенберга для детерминистической, но не обязательно автономной эволюции. Предположим, что эволюция гладкая, т. е. существует «функция» $H(t)$ некоммутирующих аргументов a и $a^\dagger$, удовлетворяющих (4.1), которую мы будем считать многочленом от a и $a^\dagger$ с коэффициентами, которые могут зависеть от времени, такая что

$$da = H\,dt; \quad (4.2)$$

следовательно,

$$da^\dagger = H^\dagger\,dt. \quad (4.3)$$

Поскольку соотношение (4.1) должно выполняться во все моменты времени, то

$$0 = d[a, a^\dagger] = [da, a^\dagger] + [a, da^\dagger] \quad (4.4)$$

(член $[da, da^\dagger]$ в (4.4) отсутствует, поскольку мы еще не рассматриваем стохастику). Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.4) и приравнивая нулю коэффициент при dt, мы получаем, что многочлен H должен удовлетворять уравнению

$$[H, a^\dagger] + [a, H^\dagger] = 0. \tag{4.5}$$

Этому условию удовлетворяет

$$H = i\,[\mathscr{H}, a], \tag{4.6}$$

где $\mathscr{H} = \mathscr{H}^\dagger$ — формально самосопряженный, возможно, зависящий от времени многочлен от a и $a^\dagger$ что легко проверяется с помощью тождества Якоби. На самом деле (4.6) является общим решением (4.5), ибо, подставляя

$$H = \sum_{m,\,n} \alpha_{mn} a^{\dagger m} a^n \tag{4.7}$$

в (4.5), получаем

$$(s+1)\,\alpha_{r,\,s+1} + (r+1)\,\bar{\alpha}_{s,\,r+1} = 0. \tag{4.8}$$

Полагая

$$\mathscr{H} = i \sum_{m,\,n} \frac{\alpha_{mn}}{m+l}\, a^{\dagger\, m+l} a^n, \tag{4.9}$$

получаем, что (4.8) влечет за собой $\mathscr{H} = \mathscr{H}^\dagger$, причем очевидно, что выполняется (4.6). Так мы приходим к уравнению Гейзенберга

$$da = i\,[\mathscr{H}, a]\, dt. \tag{4.10}$$

Формальным решением (4.10) является

$$a_t = U_t a_0 U_t^{-1}, \tag{4.11}$$

т. е.

$$a_t U_t = U_t a_0, \qquad 4.12)$$

где U_t — (унитарное) решение уравнения

$$dU = (i\mathscr{H}\, dt)\, U \tag{4.13}$$

с начальным условием $U_0 = I$. Заметим, что для любого многочлена

$$F = \sum \gamma_{mn} a^{\dagger\, m} a^n, \tag{4.14}$$

полагая

$$F_t = \sum \gamma_{mn} a_t^{\dagger m} a_t^n, \tag{4.15}$$

мы имеем из (4.12) для любого $t \geqslant 0$,

$$F_t U_t = U_t F_0. \tag{4.16}$$

В частности, комбинируя (4.13) и (4.16),

$$dU = U\,(i\mathscr{H}_0\, dt). \tag{4.17}$$

Напомним, что $\mathscr{H}$ может явно зависеть от времени, так что $\mathscr{H}_0$ сохраняет такую зависимость. Для автономной системы $\mathscr{H}_0$ не зависит от времени, и (4.17) может быть проинтегрировано

$$U_t = e^{it\mathscr{H}_0}. \tag{4.18}$$

В этом и только в этом случае

$$\mathscr{H}_t = \mathscr{H}_0, \tag{4.19}$$

поскольку U_t коммутирует с $\mathscr{H}_0$. Вообще решение уравнения (4.17) может быть представлено формально как непрерывное произведение

$$U_t = \overset{\rightarrow}{\prod_0^t} \exp(i\mathscr{H}_0(\tau)\,d\tau). \tag{4.20}$$

Рассмотрим теперь в том же духе стохастические эволюции вида

$$da = dA^+F + G\,dA + H\,dt, \tag{4.21}$$

$$da^+ = dA^+G^+ + F^+\,dA + H^+\,dt. \tag{4.22}$$

Здесь F, G и H, возможно, зависящие от времени многочлены от переменных a и a^+, $(\psi_0, (A_t\colon \mathrm{t} \geqslant 0))$ — квантовое броуновское движение, которое мы считаем стандартным. Решения a и a^+ находятся в тензорном произведении $\mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0}))$ вспомогательного гильбертова пространства $\mathfrak{h}_0$ и фоковского пространства, причем

$$a_0 = a^{(0)} \otimes I, \quad a_0^+ = a^{(0)\,+} \otimes I, \tag{4.23}$$

и согласованы в том смысле, что в момент t операторы a_t и a_t^+ присоединены к $B(\mathfrak{h}_0) \otimes N_t$. Многочлены F, G и H наследуют эту согласованность.

Мы предполагаем, что (4.1) имеет место для всех моментов времени. Дифференцируя это соотношение и используя на этот раз формулу Ито, получаем вместо (4.4)

$$0 = [da, a^+] + [a, da^+] + [da, da^+] = \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} &= [dA^+F + G\,dA + H\,dt,\ a^+] + [a,\ dA^+G^+ + F^+\,dA + H^+\,dt] + \\ &\quad + [dA^+F + G\,dA + H\,dt,\ dA^+G^+ + F^+\,dA + H^+\,dt] = \\ &= dA^+\{[F, a^+] + [a, G^+]\} + \{[G, a^+] + [a, F^+]\}\,dA + \\ &\quad + \{[H, a^+] + [a, H^+] + GG^+ - F^+F\}\,dt, \end{aligned} \tag{4.25}$$

где было использовано, что a и a^+, будучи согласованными, коммутируют с дифференциалами dA^+ и dA, направленными в будущее. Приравнивая коэффициенты при дифференциалах dA^+, dA и dt к нулю, получаем *ограничения* на F, G и H, обобщающие (4.5)

$$[F, a^+] + [a, G^+] = 0, \tag{4.26}$$

сопряженное уравнение, и

$$[H,\ a^{\dagger}]+[a,\ H^{\dagger}]=F^{\dagger}F-G^{\dagger}G. \tag{4.27}$$

Нетрудно проверить, что эти уравнения удовлетворяются, если положить

$$F=[L,\ a],\qquad G=[a,\ L^{\dagger}], \tag{4.28}$$

$$H=i\,[\mathscr{H},\ a]-\frac{1}{2}(L^{\dagger}La-2L^{\dagger}aL+aL^{\dagger}L), \tag{4.29}$$

где L — произвольный многочлен, а $\mathscr{H}=\mathscr{H}^{\dagger}$ — формально самосопряженный многочлен от a и $a^{\dagger}$, оба, возможно, зависящие от времени. На самом деле это есть общее решение:

Теорема 4.1. *Пусть F, G и H — многочлены от переменных a* и *$a^{\dagger}$, удовлетворяющие* (4.26) *и* (4.27). *Тогда существуют многочлены L и $\mathscr{H}$, причем $\mathscr{H}$ формально самосопряжен, такие что F, G и H даются соотношениями* (4.28) и (4.29).

Доказательство. Покажем сначала, что F и G могут быть выражены в форме (4.28). Полагая

$$F=\sum_{m,\,n}\alpha_{mn}a^{\dagger\,m}a^{n},\qquad G=\sum_{m,\,n}\beta_{mn}a^{\dagger\,m}a^{n}, \tag{4.30}$$

получаем из (4.26)

$$(s+l)\,\alpha_{rs+l}+(r+l)\,\bar{\beta}_{r+ls}=0,\ \ r,\ s=0,\ 1,\ \ldots. \tag{4.31}$$

Положим

$$L=-\sum_{m,\,n}\frac{\alpha_{mn}}{m+l}\,a^{\dagger\,m+l}a^{n}. \tag{4.32}$$

Используя (4.31)

$$L=\sum_{m,\,n}\frac{\bar{\beta}_{mn}}{n+l}\,a^{\dagger\,m}a^{n+l}, \tag{4.33}$$

так что

$$L^{\dagger}=\sum_{m,\,n}\frac{\beta_{mn}}{n+l}\,a^{\dagger\,n+l}a^{m}. \tag{4.34}$$

Из (4.32) и (4.34) ясно, что F и G даются соотношением (4.28).

Если F и G даются соотношением (4.28), то

$$H'=-\frac{1}{2}(L^{\dagger}La-2LaL^{\dagger}+aL^{\dagger}L) \tag{4.35}$$

удовлетворяет (4.27), а разность $H-H'$ удовлетворяет соответствующему однородному уравнению

$$[H-H',\ a^{\dagger}]+[a,\ (H-H')^{\dagger}]=0. \tag{4.36}$$

Но, как мы видели при выводе (4.6) из (4.5), из этого следует, что

$$H - H' = i\,[\mathscr{H}, a], \tag{4.37}$$

где $\mathscr{H} = \mathscr{H}^+$, так что H дается соотношением (4.25). □

Отметим, что пара $(L, \mathscr{H})$ определяется по F, G и H неединственным образом, а может быть преобразована по формуле

$$(L, \mathscr{H}) \to \left(L + f, \mathscr{H} - \frac{i}{2}(\bar{f}L - L^+ f) + \varepsilon\right), \tag{4.38}$$

где f и ε — числа, причем ε вещественно.

Используем теперь представление (4.28) и (4.29) коэффициентов F, G и H для формального построения решения уравнения (4.21). В самом деле, предположим, что решение существует, и пусть U_t — унитарный оператор

$$U_t = \overleftarrow{W}_t(L, \mathscr{H}), \tag{4.39}$$

так что, согласно (3.30), и обобщая (4.13),

$$dU_t = \left(dA^+L - L^+\,dA + \left(i\mathscr{H} - \frac{1}{2}\,L^+L\right)dt\right)U_t. \tag{4.40}$$

Тогда, если

$$a_t = U_t a_0 U_t^\dagger, \tag{4.41}$$

т. е.

$$a_t U_t = U_t a_0, \tag{4.42}$$

аналогично (4.11) и (4.12), мы имеем по формуле Ито

$$\begin{aligned} da &= dUa_0U^+ + Ua_0\,dU^+ + dUa_0\,dU^+ = \Big(dA^+L - L^+\,dA + \\ &\quad + \left(i\mathscr{H} - \frac{1}{2}L^+L\right)dt\Big)a + a\Big(-dA^+L + L^+dA - \\ &\quad - \left(i\mathscr{H} + \frac{1}{2}\,L^+L\right)dt\Big) + L^+aL\,dt = dA^+\,[L, a] + [a, L^+]\,dA + \\ &\quad + \left(i\,[\mathscr{H}, a] - \frac{1}{2}(L^+La - 2L^+aL + aL^+L)\right)dt = \\ &\qquad = dA^+F + G\,dA + H\,dt. \end{aligned}$$

Таким образом, a_t, даваемое формулой (4.41), является решением (4.21)! Конечно, (4.16) имеет место в этой новой ситуации, так что вместо (4.40) можно написать

$$dU_t = U_t\left(dA^+L_0 - L_0^\dagger\,dA + \left(i\mathscr{H}_0 - \frac{1}{2}\,L_0^\dagger L_0\right)dt\right), \tag{4.43}$$

эквивалентно вместо (4.39)

$$U_t = \overrightarrow{W}_t(L_0, \mathscr{H}_0). \tag{4.44}$$

Заметим, что L_0 и $\mathscr{H}_0$ — операторы во вспомогательном пространстве $\mathfrak{h}_0$.

Неединственность (4.38) пары $(L, \mathscr{H})$ можно рассматривать как стохастическое обобщение неединственности гамильтониана, обусловленной произволом в выборе нулевого уровня энергии. Из (3.33)

$$\overleftarrow{W}_t\left(L + f,\ \mathscr{H} + \varepsilon - \frac{i}{2}(\bar{f}L - fL^{+})\right) = \overleftarrow{W}_t(L,\ \mathscr{H})\,\overleftarrow{W}_t(f,\ \varepsilon).$$

Оператор $\overleftarrow{W}_t(f,\ \varepsilon)$ с точностью до фазового множителя совпадает с оператором Вейля $I \otimes W(f_t)$ и коммутирует с $a_0 = a^{(0)} \otimes I$. Таким образом, действие на a_0 операторов $\overleftarrow{W}_t\left(L + f,\ \mathscr{H} + \varepsilon - \frac{i}{2}(\bar{f}L - fL^{+})\right)$ приводит к тому же результату, что и действие $\overleftarrow{W}_t(L,\ \mathscr{H})$, как и следовало ожидать.

Отметим, что в отличие от детерминистического случая, даже если коэффициенты F, G и H из (4.21), и значит, L и $\mathscr{H}$ не зависят явно от времени, (U_t) не является полугруппой

$$U_s U_t \neq U_{s+t}. \tag{4.45}$$

Соответствующие операторы эволюции

$$U_{st} = U_t U_s^{-1}, \quad s \leqslant t, \tag{4.46}$$

удовлетворяющие соотношению

$$U_{st} U_{rs} = U_{rt}, \quad r \leqslant s \leqslant t, \tag{4.47}$$

могут быть выражены формулой

$$U_{st} = \overset{t}{\underset{s}{\overrightarrow{\prod}}} \exp(dA^{+}L_s - L_s\, dA + i\mathscr{H}_s), \quad s \leqslant t, \tag{4.48}$$

и сплетают a_t при разных t:

$$U_{st} a_s = a_t U_{st}, \quad s \leqslant t. \tag{4.49}$$

Семейство операторов

$$\tilde{U}_{st} = U_s^{-1} U_t \tag{4.50}$$

задает *обратную эволюцию*

$$\tilde{U}_{rs} \tilde{U}_{st} = \tilde{U}_{rt}, \quad r \leqslant s \leqslant t, \tag{4.51}$$

и может быть выражено формулой

$$\tilde{U}_{st} = \overset{t}{\underset{s}{\overrightarrow{\prod}}} \exp(dA^{+}L_0 - L_0\, dA + i\mathscr{H}_0\, dt), \quad s \leqslant t. \tag{4.52}$$

Квантовая диффузия может быть определена формально как процесс $(a_t\colon\ t \geqslant 0)$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению вида (4.21); мы показали формально, как строить соответствующий унитарнозначный процесс, с помощью которого исходный процесс выражается по формуле (4.41). Однако, как уже отмечалось, существование унитарного процесса, отвечающего операторам L_0 и $\mathscr{H}_0$, было строго установлено в случае, когда они ограничены [11]. С этой точки зрения более естественно определить квантовую диффузию по формуле (4.41) в терминах соответствующего унитарного процесса и рассматривать (4.21) как чисто формальное выражение, подобно тому как уравнение Гейзенберга (4.10) следует рассматривать как формальное из-за трудностей с областями определения, возникающих для реалистичных неполиномиальных гамильтонианов.

Квантовая диффузия порождает полугруппу отображений в банаховом пространстве $B(\mathfrak{h}_0)$. Отождествим $B(\mathfrak{h}_0)$ с $B(\mathfrak{h}_0)\otimes I$ и определим для любого $t\geqslant 0$ отображение J_t в $B(\mathfrak{h}_0)$ формулой

$$J_t(X)=E_0\left[U_tXU_t^{-1}\right],\quad t\geqslant 0. \tag{4.53}$$

Тогда, используя (4.50), (1.25) и (1.26), получаем для $s,t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}J_{s+t}(X)=E_0\left[U_{s+t}XU_{s+t}^{-1}\right]=E_0E_s\left[U_s\widetilde{U}_{ss+t}\cdot X\widetilde{U}_{ss+t}^{-1}U_s^{-1}\right]=\\ =E_0\left[U_sE_s\left[\widetilde{U}_{ss+t}X\widetilde{U}_{ss+t}^{-1}\right]U_s^{-1}\right]=J_sJ_t(X),\end{aligned} \tag{4.54}$$

где мы использовали (4.52) и тот факт, что квантовое броуновское движение начинается заново в момент s, чтобы получить

$$E_s\left[\widetilde{U}_{s,\,s+t}X\widetilde{U}_{s,\,s+t}^{-1}\right]=E_0\left[U_tXU_t^{-1}\right]=J_t(X).$$

Таким образом, (J_t: $t\geqslant 0$) является полугруппой, как утверждалось. Поскольку условное ожидание E_0 и пространственный автоморфизм $U_t\cdot U_t^{-1}$ являются вполне положительными отображениями, эта полугруппа состоит из вполне положительных отображений. Ее инфинитезимальный оператор находится с помощью вычислений, использующих формулу Ито

$$\begin{aligned}dJ_t(X)=E_0\left[d\left(U_tXU_t^{-1}\right)\right]=\\ =E_0E_t\Big[U_t\Big\{\Big(dA^{+}L_0-L_0^{+}\,dA+\Big(i\mathscr{H}_0-\frac{1}{2}L_0^{+}L_0\Big)dt\Big)X+\\ +X\Big(-dA^{+}L_0+L_0\,dA-\Big(i\mathscr{H}_0+\frac{1}{2}L_0^{+}L_0\Big)dt\Big)+L_0^{+}XL_0\Big\}U_t^{-1}\Big]=\\ =\Big(i[\mathscr{H}_0,X]-\frac{1}{2}L_0^{+}L_0X+L_0^{+}XL_0-\frac{1}{2}XL_0^{+}L_0\Big)dt.\end{aligned}$$

Отсюда $J_t=e^{t\mathscr{L}}$, где

$$\mathscr{L}(X)=i\left[\mathscr{H}_0,X\right]-\frac{1}{2}L_0^{+}L_0X+L_0^{+}XL_0-\frac{1}{2}XL_0^{+}L_0. \tag{4.55}$$

Это следует сравнить с общей формой инфинитезимального оператора равномерно непрерывной полугруппы вполне положительных отображений в $B(\mathfrak{h}_0)$:

$$\mathscr{L}(X) = i[\mathscr{H}_0, X] - \frac{1}{2}\sum_j \left(L_j^\dagger L_j X - 2L_j^\dagger X L_j + X L_j^\dagger L_j\right). \tag{4.56}$$

Ясно, что, вводя независимые квантовые броуновские движения, отвечающие каждому члену в сумме, можно построить стохастическое расширение этой полугруппы.

Другая полугруппа сжимающих операторов в $\mathfrak{h}_0$ получается по формуле

$$T_t = E_0[U_t]. \tag{4.57}$$

В самом деле, используя (4.50), (1.25), (1.26) и обновляющее свойство квантового броуновского движения, имеем для $s, t \geqslant 0$

$$T_{s+t} = E_0[U_{s+t}] = E_0E_s[U_s\tilde{U}_{s+t}] = E_0[U_sE_s\tilde{U}_{s+t}] = E_0[U_sT_t] = T_sT_t. \tag{4.58}$$

Инфинитезимальным оператором этой полугруппы является $i\mathscr{H}_0 - \frac{1}{2}L_0^\dagger L_0$, как видно из формулы

$$dU_t = U_t\left(dA^\dagger L_0 - L_0^\dagger\, dA + \left(i\mathscr{H}_0 - \frac{1}{2}L_0^\dagger L_0\right)dt\right), \tag{4.59}$$

если взять условное ожидание, отнесенное к нулевому моменту времени.

Если квантовая диффузия такова, что процесс $q_t = a_t + a_t^\dagger$ коммутирует с собой при разных временах, то имеет место аналог формулы Фейнмана — Каца для возмущений этой полугруппы, именно для неотрицательного потенциала V

$$\exp\left(t\left(i\mathscr{H}_0 - \frac{1}{2}L_0^\dagger L_0 - V(q_0)\right)\right) = E_0\left[\exp\left\{-\int_0^t V(q_\tau)\,d\tau\right\}U_t\right]. \tag{4.60}$$

В самом деле, при сделанном предположении можно написать

$$E_0\left[\exp\left\{-\int_0^{s+t} V(q_\tau)\,d\tau\right\}U_{s+t}\right] = E_0E_s\left[\exp\left\{-\int_0^{s} V(q_\tau)\,d\tau\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\int_s^{s+t} V(q_\tau)\,d\tau\right\}U_s\tilde{U}_{s,\,s+t}\right] = E_0E_s\left[\exp\left\{-\int_0^{s} V(q_\tau)\,d\tau\right\}U_s\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\int_s^{s+t} V(U_s^{-1}q_\tau U_s)\,d\tau\tilde{U}_{s,\,s+t}\right]=\right.$$

$$
\begin{aligned}
&= E_0\Bigg[\exp\Bigg\{-\int_0^s V(q_\tau)\,d\tau\Bigg\}U_s \times \\
&\times E_s\Bigg[\exp\Bigg\{-\int_s^{s+t} V(\tilde U_{s,\tau} q_0 \tilde U_{s,\tau}^{-1})\,d\tau\Bigg\}\tilde U_{s,s+t}\Bigg]\Bigg] = \\
&= E_0\Bigg[\exp\Bigg\{-\int_0^s V(q_\tau)\,d\tau\Bigg\}U_s \times \\
&\times E_0\Bigg[\exp\Bigg\{-\int_0^t V(U_\tau q_0 U_\tau^{-1})\,d\tau\Bigg\}U_t\Bigg]\Bigg] = \\
&= E_0\Bigg[\exp\Bigg\{-\int_0^s V(q_\tau)\,d\tau\Bigg\}U_s\Bigg]\cdot E_0\Bigg[\exp\Bigg\{-\int_0^t V(q_\tau)\,d\tau\Bigg\}U_t\Bigg],
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

откуда следует, что правая часть (4.60) является сжимающей полугруппой. Вычисление с помощью (4.59) инфинитезимального оператора показывает, что эта полугруппа совпадает с левой частью (4.60).

5. КОНСТРУКЦИЯ КВАНТОВЫХ ДИФФУЗИЙ — СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В этом разделе мы рассмотрим квантовые диффузии

$$da = dA^+F + G\,dA + H\,dt, \tag{5.1}$$

в которых каждый из коэффициентов F, G и H является линейной функцией вида $\alpha a + \beta a^+ + \gamma$. Для простоты рассмотрим только автономный случай, когда α, β, γ не зависят от времени.

Начнем со случая, когда F и G — скаляры

$$F = \lambda I, \quad G = \mu I, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}, \tag{5.2}$$

заметив, что ограничение (4.26) на F и G при этом выполняется и что второму ограничению (4.27) можно удовлетворить, положив, например,

$$H = \frac{1}{2}(|\lambda|^2 - |\mu|^2)a. \tag{5.3}$$

Тогда (5.1) и его сопряженное принимают вид

$$da = \lambda\,dA^+ + \mu\,dA + \frac{1}{2}(|\lambda|^2 - |\mu|^2)a\,dt, \tag{5.4}$$

$$da^+ = \bar\mu\,dA^+ + \bar\lambda\,dA + \frac{1}{2}(|\lambda|^2 - |\mu|^2)a^+\,dt. \tag{5.5}$$

Произведем над квантовым броуновским движением калибровочное преобразование

$$A_t \to e^{-i\theta} A_t, \tag{5.6}$$

и соответствующее преобразование процесса

$$a \to e^{-i\phi} a \tag{5.7}$$

(сохраняющее бозонные коммутационные соотношения (4.1)).

Полагая

$$\theta = \frac{1}{2}(\arg\lambda - \arg\mu), \quad \phi = \frac{1}{2}(\arg\lambda + \arg\mu), \tag{5.8}$$

мы переводим уравнения (5.4) и (5.5) в уравнения того же типа, но с вещественными и неотрицательными λ и μ. Рассмотрим теперь действие линейного канонического преобразования

$$\begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

которое также сохраняет соотношение (4.1). Коэффициенты преобразуются ковариантно:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Таким образом, в зависимости от выполнения соотношений $\lambda = \mu$, $\lambda < \mu$ или $\lambda > \mu$ пара (λ, μ) может быть преобразована подходящим выбором χ к одной из трех форм: (ρ, ρ) («нулевой»), $(0, \rho)$ («времениподобной») или $(\rho, 0)$ («пространственноподобной»), где ρ — неотрицательный параметр. Соответствующие канонические формы (5.4), которые мы обозначим как формы I, II и III, имеют вид

$$\text{(I)} \quad da = \rho(dA + dA^+), \tag{5.11}$$

$$\text{(II)} \quad da = \rho\, dA - \frac{1}{2}\rho^2 a\, dt, \tag{5.12}$$

$$\text{(III)} \quad da = \rho\, dA^+ + \frac{1}{2}\rho^2 a\, dt. \tag{5.13}$$

Обратимся к общему случаю, когда F, G и H — линейные функции от a и a^+. Из (4.26) следует, что

$$F = \alpha a + \beta a^+ + \lambda, \quad G = -\bar{\alpha} a - \gamma a^+ + \mu. \tag{5.14}$$

Подставляя эти выражения в правую часть (4.27), видим, что (4.27) может выполняться для линейной H, только если результирующее квадратичное выражение сводится к постоянной, т. е. коэффициенты при a^{+2} и a^+ (а также сопряженные коэффициенты при a^2 и a) равны нулю, а коэффициенты при $a^{\dagger}a$ и $aa^{\dagger}$ взаимно противоположны. Налагая эти условия, получаем

$$\bar{\alpha}\beta - \alpha\gamma = 0, \tag{5.15}$$

$$\bar{\alpha}\lambda + \bar{\lambda}\beta + \gamma\bar{\mu} + \alpha\mu = 0, \tag{5.16}$$

$$|\beta| = |\gamma|. \tag{5.17}$$

Из (5.17) и (5.15) следует, что можно положить

$$\beta = re^{i\theta}, \quad \gamma = re^{i\phi} (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta,\ \phi < 2\pi), \tag{5.18}$$

$$\alpha = \mp Re^{{}^1\!/_2 i(\theta-\phi)} \quad (R \geqslant 0). \tag{5.19}$$

Минус в (5.19) можно устранить калибровочным преобразованием

$$A_t \to -A_t = e^{-i\pi} A_t. \tag{5.20}$$

Если теперь произвести калибровочное преобразование

$$A_t \to e^{-{}^1\!/_2 i(\theta-\phi)} A_t, \quad a_t \to e^{-{}^1\!/_4 i(\theta+\phi)} a_t, \tag{5.21}$$

то коэффициенты α, β и γ становятся неотрицательными вещественными числами R, r и r соответственно. Условие (5.16) принимает вид

$$R(\lambda + \mu) + r(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) = 0. \tag{5.22}$$

Рассмотрим отдельно случаи $R \neq r$ и $R = r$. В первом случае из (5.22) следует

$$\lambda + \mu = 0, \tag{5.23}$$

и, следовательно, можно написать

$$F = Ra + ra^{+} + \lambda = -G \tag{5.24}$$

Далее, комплексное число

$$z = \frac{R\lambda - r\bar{\lambda}}{R^2 - r^2} \tag{5.25}$$

удовлетворяет соотношению

$$Rz + r\bar{z} = \lambda, \tag{5.26}$$

и, следовательно, замена переменных

$$a \to a - z \tag{5.27}$$

(сохраняющая коммутационное соотношение (4.1) между a и его сопряженным) устраняет константу λ из F и G. Применяя каноническое преобразование (5.9), находим, что пара коэффициентов (R, r) преобразуется по закону

$$\begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2\chi & \operatorname{sh} 2\chi \\ \operatorname{sh} 2\chi & \operatorname{ch} 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Поскольку «нулевой» случай $R=r$ пока исключается, пара (R, r) может быть преобразована к одной из форм $(0, \rho)$ или $(\rho, 0)$, где ρ — положительный параметр. Соответствующие канонические формы IV и V уравнения (5.1) имеют вид

$$\text{(IV)}\quad da=\rho(dA^{\dagger}a^{\dagger}-a^{\dagger}\,dA)+\frac{\rho^2}{2}\,a\,dt, \tag{5.29}$$

$$\text{(V)}\quad da=\rho(dA^{\dagger}a-a\,dA)-\frac{\rho^2}{2}\,a\,dt. \tag{5.30}$$

Здесь H выбиралось линейной функцией, чтобы удовлетворить условию (5.27) для данных F и G; любой другой выбор H должен отличаться от этого на слагаемое гамильтонова вида $i[\mathscr{H}, a]$.

Рассмотрим теперь случай $R=r$. Если R и r равны нулю, то мы возвращаемся к уже рассмотренному скалярному случаю; если нет, то из (5.22) следует, что вещественные части λ и μ взаимно противоположны, так что F и G могут быть записаны как

$$F=\rho(a+a^{\dagger})+w+iu,\qquad G=-\rho(a+a^{\dagger})-w-iv, \tag{5.31}$$

где w, u, v вещественны. Замена переменной вида (5.27), где $z=\frac{1}{2}\rho^{-1}w$, устраняет w. Каноническое преобразование вида (5.9), при котором $a+a^{\dagger}$ умножается на e^{χ}, переводит ρ в единицу (с другой стороны, его можно использовать для классификации коэффициентов (u, v) в (5.31), как в случаях I, II, III). Таким образом, в этом случае (5.1) приводится к шестой и последней канонической форме

$$\text{(VI)}\quad da=dA^{\dagger}(a+a^{\dagger}+iu)-(a+a^{\dagger}+iv)\,dA + \frac{1}{2}(u^2-v^2)\,a\,dt. \tag{5.32}$$

Каждый из этих случаев допускает явное решение. Введем обозначения

$$Q=A+A^{\dagger},\qquad P=-i(A-A^{\dagger}), \tag{5.33}$$

$$q=a+a^{\dagger},\qquad p=-i(a-a^{\dagger}). \tag{5.34}$$

Тогда решения уравнений (5.11), (5.12), (5.13), (5.30) и (5.31) находятся соответственно по формулам

$$\text{(I)}\quad q_t=q_0+2\rho Q_t,\quad p_t=p_0, \tag{5.35}$$

$$\text{(II)}\quad a_t=e^{-{}^1\!/_2\rho^2 t}a_0+\rho\int_0^t e^{-{}^1\!/_2\rho^2(t-\tau)}\,dA_{\tau}, \tag{5.36}$$

$$\text{(III)}\quad a_t=e^{{}^1\!/_2\rho^2 t}a_0+\rho\int_0^t e^{{}^1\!/_2\rho^2(t-\tau)}\,dA_{\tau}^{\dagger}, \tag{5.37}$$

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \rho P_t & -\operatorname{sh} \rho P_t \\ -\operatorname{sh} \rho P_t & \operatorname{ch} \rho P_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

$$(\mathrm{V})\quad a_t = a_0 e^{-i\rho P_t}, \tag{5.39}$$

$$(\mathrm{VI})\quad q_t = e^{{}^1\!/_2 (u^2 - v^2) t} q_0 + + (u + v) \int_0^t e^{{}^1\!/_2 (u^2 - v^2)(t-\tau)} \, dP_\tau, \tag{5.40a}$$

$$p_t = e^{{}^1\!/_2 (u^2 - v^2) t} (p_0 - q_0 P_t) + + (u - v) \int_0^t e^{{}^1\!/_2 (u^2 - v^2)(t-\tau)} \, dQ_\tau - - (u - v) \int_0^t \int_0^\tau e^{{}^1\!/_2 (u^2 - v^2)(t-\sigma)} \, dP_\sigma \, dP_\tau. \tag{5.40b}$$

Оператор L, для которого выполняются (4.28) и (4.29) с $\mathscr{H} = 0$, дается выражением

$$(\mathrm{I})\quad L = i\rho p, \tag{5.41}$$

$$(\mathrm{II})\quad L = \rho a, \tag{5.42}$$

$$(\mathrm{III})\quad L = -\rho a^+, \tag{5.43}$$

$$(\mathrm{IV})\quad L = \frac{1}{2} \rho (qp + pq), \tag{5.44}$$

$$(\mathrm{V})\quad L = -\rho a^+ a, \tag{5.45}$$

$$(\mathrm{VI})\quad L = -\frac{1}{2} q^2 + iva - iua^+. \tag{5.46}$$

В случае I оператор L является кососамосопряженным, тогда как в случаях IV и V — самосопряженным, благодаря чему в этих случаях уравнение (4.43) для соответствующего унитарного процесса U имеет простое решение. Например, в случае I формула (4.43) принимает вид

$$dU_t = U_t \left(i\rho p_0 dQ - \frac{1}{2} p_0^2 dt \right), \tag{5.47}$$

а решение дается формулой (напомним, что Q является классическим броуновским движением, для которого имеет место обычная формула Ито $(dQ)^2 = dt$)

$$(\mathrm{I})\quad U_t = e^{i\rho p_0 Q_t}. \tag{5.48}$$

Аналогично, в случаях (IV) и (V) находим

$$\text{(IV)}\quad U_t = \exp\left(\frac{i\rho}{2}(q_0p_0 + p_0q_0)P_t\right), \tag{5.49}$$

$$\text{(V)}\quad U_t = \exp\left(i\rho a_0^\dagger a_0 P_t\right). \tag{5.50}$$

В случае II унитарный процесс (U_t) явно строится следующим образом. Рассмотрим пространство $\mathfrak{h}_0$ начального значения $a^{(0)}$ как фоковское пространство над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}_0 = \Gamma(\mathbb{C})$, причем $a^{(0)} = a(1)$. Тогда

$$\mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})) = \Gamma(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})). \tag{5.51}$$

Для любого $f \in L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ имеем

$$\exp\left\{\rho\left(a^{(0)} \otimes a^\dagger(f) - a^{(0)\dagger} \otimes a(f)\right)\right\} = \Gamma(V(f)), \tag{5.52}$$

где $V(f)$ — оператор в $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$,

$$V(f)(z, g) = \left(\cos\theta z + \sin\theta \|f\|^{-1}\langle f, g\rangle,\ g - \|f\|^{-2}\langle f, g\rangle f + \right.$$
$$\left. + \cos\theta \|f\|^{-2}\langle f, g\rangle f - \sin\theta z \|f\|^{-1} f\right), \tag{5.53}$$

где $\theta = \rho\|f\|$. Используя (3.28), аппроксимируем U_t конечными произведениями

$$\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} \Gamma(V(\chi_j)) = \Gamma\left(\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} V(\chi_j)\right), \tag{5.54}$$

где $\chi_j = \chi_{\left]\frac{j-1}{n}t,\ \frac{j}{n}t\right]}$, и мы использовали (1.15). Путем прямого вычисления действия на (z, g), используя (5.53), мы находим, что $\overrightarrow{\prod\limits_{j=1}^{n}} V(\chi_j)$ сильно сходится при возрастании n к оператору

$$V_t(z, f) = (z', f'), \tag{5.55}$$

где

$$f'(s) = \rho z \chi_{[0,t]}(s) e^{-1/2\rho^2(t-s)} + f(s) -$$
$$-\rho^2 \chi_{[0,t]}(s) \int_0^t e^{-1/2\rho^2(\tau-s)} f(\tau)\, d\tau. \tag{5.56}$$

Можно проверить, что V_t унитарен. Из того факта, что морфизм вторичного квантования $V \to \Gamma(V)$ сильно непрерывен, вытекает, что конечные произведения (5.54), в самом деле, сходятся к унитарному оператору U_t. Операторы V_t по существу совпадают с элементами V_{0t} *время-ортогонального унитарного расширения* (V_{st}) полугруппы $\left(e^{-1/2\rho^2 t}\right)$ в смысле [5].

Операторы U_t в случае II, таким образом, реализуют преобразование Боголюбова V_t, даваемое формулой (5.55). Оператор (5.48) в случае I можно аналогично интерпретировать как реализацию преобразования Боголюбова в $\mathbb{C}\oplus L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, на этот раз неунитарного, а именно

$$V_t(z,\ f)=\left(z-2i\rho\,\mathrm{Im}\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau,\ f+2\rho\,\mathrm{Re}\,z\chi_{[0,\,t]}\right),\tag{5.57}$$

которое является элементом V_{0t} семейства преобразований Боголюбова

$$V_{st}(z,\ f)=\left(z-2i\rho\,\mathrm{Im}\int\limits_s^t f(\tau)\,d\tau,\ f+2\rho\,\mathrm{Re}\,z\chi_{[s,\,t]}\right).\tag{5.58}$$

Это есть семейство эволюций

$$V_{st}V_{rs}=V_{rt},\tag{5.59}$$

удовлетворяющих свойству евклидовой ковариантности [5]

$$(I\oplus S_r)\,V_{st}=V_{r+s,\,r+t}\,(I\oplus S_r),\tag{5.60}$$

где S_r сдвиг в $L^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$,

$$S_rf(s)=\begin{cases}0, & s\leqslant r,\\ f(s-r), & s>r.\end{cases}\tag{5.61}$$

В случае III рассмотрим аналогичное семейство неунитарных преобразований Боголюбова

$$V_t(z,\ f)=(z',\ f'),\tag{5.62}$$

$$z'=e^{1/2\rho^2 t}-\rho\int\limits_0^t e^{1/2\rho^2}\overline{f(\tau)}\,d\tau\tag{5.63a}$$

$$f'(s)=\rho\bar{z}\chi_{[0,\,t]}(s)\,e^{1/2\rho^2\,(t-s)}+f(s)-$$
$$-\rho^2\chi_{[0,\,t]}(s)\int\limits_0^t e^{1/2\rho^2\,(\tau-s)}f(\tau)\,d\tau.\tag{5.63}$$

Как и в случае II, они входят в двупараметрическое семейство преобразований Боголюбова (V_{st}), удовлетворяющее свойству евклидовой ковариантности. Используя рассуждения из [6], можно доказать, что существует единственный выбор V_{st}, который удовлетворяет соответствующему свойству ковариантности в фоковском пространстве. V_{0t} тогда и является искомым оператором U_t для случая III. Более подробное доказательство будет дано в другой статье.

В каждом из случаев I, II, III процесс (q_t: $t \geqslant 0$) коммутирует с собой при разных временах. Поэтому в каждом из этих случаев имеет место формула Фейнмана — Каца, именно

$$\exp\{-t(L_0^{+}L_0+V(q_0))\}=E_0\left[\exp\left\{-\int\limits_0^t V(q_\tau)\,d\tau\right\}U_t\right]. \qquad (5.64)$$

В случае I это по существу совпадает с обычной формулой Фейнмана — Каца, основанной на классическом броуновском движении. В случае II, как показано в [5], это есть по существу формула для «осцилляторного процесса» из [13].

Литература *)

1. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes, Publ. R. I. M. S. Kyoto 18, 1 (1982), 97—133 (перевод см. в настоящем сборнике).
2. Applebaum D., Hudson R. L. Fermion Itô's formula and stochastic evolutions, Commun. Math. Phys., 96 (1984), 473—496.
3. Cockroft A. M., Hudson R. L. Quantum mechanical processes, J. Multivariate Anal., 7 (1978), 107—124.
4. Guichardet A. Symmetric Hilbert spaces and related topics, Lect. Notes Math., 261, Springer, Berlin (1972).
5. Hudson R. L., Ion P. D. F., Parthasarathy K. R. Time-orthogonal unitary dilations and non-commutative Feynman — Kac formulae, Commun. Math. Phys., 83 (1982), 261—280.
6. Hudson R. L., Ion P. D. F., Parthasarathy K. R. Time orthogonal unitary dilations II, Publ. RIMS, 20 (1984), 607—633.
7. Hudson R. L., Karandikar R. L., Parthasarathy K. R. Towards a theory of noncommutative semimartingales adapted to Brownian motion and a quantum Itô's formula, in: Theory and application of random fields, ed. Kallianpur, Lect. Notes Control and Information Sciences, 49, Springer, Berlin (1983).
8. Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum diffusions, in: Theory and application of random fields, ed. Kallianpur, Lect. Notes Control and Information Sciences, 49, Springer, Berlin (1983).
9. Hudson R. L., Streater R. F. Itô's formula is the chain rule with Wick ordering, Physics letters, 86A (1981), 277—279.
10. Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups, Commun. Math. Phys., 48 (1976), 119—130.
11. Parthasarathy K. R., Hudson R. L. Non-commutative semimartingales and quantum diffusion processes adapted to Brownian motion, preprint, 1982.
12. Segal I. E. Tensor algebras over Hilbert spaces I, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 106—134.
13. Simon B. Functional integration and quantum physics, Academic Press, New York (1979).
14*. Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, Commun. Math. Phys., 93 (1984), 301—323.
15*. Hudson R. L., Lindsay J. M. Uses of non-Fock quantum Brownian motion and a quantum martingale representation theorem, Lect. Notes Math., 1136 (1985), 276—305.

---

*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

16*. Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Unification of Fermion and Boson stochastic calculus, Commun. Math. Phys., 104 (1986), 457—470.

17*. Barnett C., Streater R. F., Wilde I. The Itô — Clifford integral I, J. Funct. Anal., 48 (1982), 172—212.

18*. Streater R. F. The Itô — Clifford Integral II, Lect. Notes Math., 1136 (1985), 493—503.

19*. Gardiner C. W, Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: quantum stochastic differential equations and the master equation, Phys. Rev. A, 31 (1985), 3761—3774.

РЕШЕНИЕ В СМЫСЛЕ ИТО КВАНТОВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА [1]

В. фон Вальденфелс

Институт прикладной математики,
Гейдельбергский университет, Гейдельберг, ФРГ

Резюме. Рассматривается квантовое стохастическое дифференциальное уравнение $\dot{U}=A(t)U$, где $A(t)=A^1F(t)+A^2F^*(t)$, $F(t)$ — квантовый белый шум, а A^j — комплексные $d\times d$-матрицы с $(A^1)^*=-A^2$. Решение дается мультипликативным интегралом типа Ито и является квантовым аналогом классического процесса с независимыми приращениями на унитарной группе $U(d)$. Все интересные с точки зрения физики величины получаются из этого решения. Уравнение излучения — поглощения света для двухуровневого атома в приближении Вигнера — Вайскопфа является частным случаем нашего дифференциального уравнения при $d=2$.

ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\dot{U}(t)=A(t)U(t),\quad U(0)=1, \tag{1}$$

где

$$A(t)=A^1F(t)+A^2F^*(t). \tag{2}$$

A^1 и A^2 — комплексные $d\times d$-матрицы, такие что

$$(A^1)^*=-A^2. \tag{3}$$

$F(t)$ является квантовым белым шумом (ср. [2], [5], [6], [10]), удовлетворяющим формальным соотношениям

$$\begin{aligned}&[F(t),\ F^*(s)]=\gamma\delta(t-s),\\ &\mathbf{E}F(t)F^*(s)=(1+\theta)\gamma\delta(t-s),\\ &\mathbf{E}F^*(t)F(s)=\theta\gamma\delta(t-s),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\theta\geqslant 0$ и $\gamma>0$ — постоянные, а $\mathbf{E}$ обозначает (некоммутативное) математическое ожидание. Белый шум считается

---

[1] von Waldenfels W. Ito solution of the linear quantum stochastic differential equation describing light emission and absorption. — In: Lect. Notes in Math., v. 1055, Springer-Verlag, 1984, p. 384—404.

гауссовским, т. е. все нечетные моменты равны нулю, а четные выражаются через вторые моменты, как будет описано ниже.

Стохастическое дифференциальное уравнение (1) возникло из теории излучения — поглощения света двухуровневым атомом. В этом случае

$$A^1=\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

являются 2×2-матрицами, а $U(t)$ — оператор временно́й эволюции системы, состоящей из атома и электромагнитного поля в представлении взаимодействия. Использование δ-коррелированного шума равносильно аппроксимации Вигнера — Вайскопфа. При этом $\theta=[\exp(-\hbar\omega_0/kT)-1]^{-1}$ ($\hbar\omega_0$ есть разность энергий рассматриваемых уровней, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана). Таким образом, $T\to\infty$ означает, что $\theta\to\infty$.

Мы хотим придать смысл уравнению (1) и с этой целью рассмотрим классический предел $\theta\to\infty$. Для того чтобы предел был корректно определен, положим $\gamma\to 0$ и $\theta\gamma\to\gamma_0$. Тогда (4) переходит в

$$\begin{aligned}&[F(t),\ F^*(s)]=0,\\ &\mathbf{E}F(t)F^*(s)=\mathbf{E}F^*(s)F(t)=\gamma_0\delta(t-s).\end{aligned}\tag{5}$$

Условимся опускать индекс 0 у γ_0.

Теперь мы можем интерпретировать $F(t)$ в (5) как классический комплексный белый шум и рассматривать (1) как классическое стохастическое дифференциальное уравнение. Здесь возникает известная проблема: стохастическое дифференциальное уравнение может пониматься в разных смыслах. В литературе рассматриваются главным образом два подхода — Стратоновича и Ито. Решение Стратоновича оказывается более подходящим для данной физической задачи. Оно приводит к случайному процессу с независимыми стационарными мультипликативными приращениями на унитарной группе $U(d)$. Обычное решение Ито уравнения (1) имеет тот недостаток, что оно аппроксимируется неунитарными случайными матрицами и в общем случае не приводит к процессу на $U(d)$. Поэтому мы предлагаем модификацию решения Ито, которую называем мультипликативным интегралом Ито. Это приводит к процессу на $U(d)$ с независимыми стационарными приращениями, похожему на решение Ито, но более удобному.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы, используя принцип соответствия, перейти от классического случая к квантовому и построить решение уравнения (1) в виде мультипликативного интеграла Ито.

В разд. 1 рассматривается классический предел. В разд. 2 устанавливаются квантовые аналоги понятия случайной величины и случайного процесса в рамках алгебраической квантовой стохастики. В разд. 3 излагается некоторый аппарат: гауссовы функционалы, алгебры Вейля, фоковское представление. В разд. 4 мы находим решение квантового стохастического дифференциального уравнения (1) в виде мультипликативного интеграла Ито.

Эта статья является усовершенствованной версией части препринта [10], который содержит конструкцию мультипликативного интеграла Ито и решение Стратоновича уравнения (1). Теорема разд. 4 настоящей работы, где дается мультипликативное решение Ито, содержит теоремы 4.2 и 4.3 работы [10]. Идея этой новой версии возникла из дискуссий с Л. Аккарди. Решение Стратоновича в [10] носило эвристический и предварительный характер; строгие доказательства даны в [11][1]).

1. КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Итак, рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (1), где $A(t)$ дается формулой (2), а $F(t)$ — комплексный гауссовский белый шум с

$$\mathbf{E}F(t)\overline{F}(s)=\gamma\delta(t-s).$$

Имея в виду дальнейшие обобщения, рассмотрим сначала понятие случайной матрицы со значениями в $U(d)$, группе всех унитарных $d\times d$-матриц. Случайная матрица U задается распределением p, т. е. вероятностной мерой на $U(d)$. Связь между U и p устанавливается соотношением

$$\mathbf{E}f(U)=\int p(du)f(u)=p(f),$$

где f — произвольная непрерывная функция на $U(d)$.

Пусть $K(U(d))$ — алгебра непрерывных функций на $U(d)$, порождаемая единицей и функциями

$$u\to u_{ik},\quad u\to\bar{u}_{ik}.$$

Поскольку $K(U(d))$ содержит постоянную функцию и разделяет точки $U(d)$ и поскольку $U(d)$ есть компакт, то применима теорема Стоуна — Вейерштрасса, так что $K(U(d))$ плотна в банаховом пространстве всех непрерывных функций на $U(d)$ с равномерной нормой. Поэтому вероятностная мера определяется своими значениями на $K(U(d))$, т. е. момен-

---

[1]) Более явный подход к решению уравнения (1) излагается в [12*], [13*]. — *Прим. перев.*

тами

$$\int p(du)\,u_{i_1k_1}\ \dots\ u_{i_nk_n}\bar{u}_{i_{n+1}k_{n+1}}\ \dots\ \bar{u}_{i_{n+m}k_{n+m}}.$$

В тензорных обозначениях

$$p(f_{n,m})=\int p(du)\,f_{n,m}(u),$$

где

$$f_{n,m}(u)=u^{\otimes n}\otimes u^{-\otimes m}.$$

Если даны две независимые случайные матрицы U и V с распределениями p и q, то распределение произведения UV задается сверткой $p*q$, где

$$\int (p*q)(du)\,f(u)=\iint p(du)\,q(dv)\,f(uv).$$

Поскольку

$$f_{n,m}(uv)=f_{n,m}(u)\,f_{n,m}(v),$$

то

$$(p*q)(f_{n,m})=p(f_{n,m})\,q(f_{n,m}).$$

Сверточной полугруппой на $U(d)$ называется семейство $(p_t)_{t\geqslant 0}$ вероятностных мер на $U(d)$, такое что

$$p_0=\delta_1,\quad p_{s+t}=p_s*p_t.$$

Если предположить, что $t\to p_t(f)$ непрерывно для всех непрерывных f на $U(d)$, то тогда

$$p_t(f_{n,m})=\exp A_{n,m}t,$$

где $A_{n,m}$ — некоторая матрица из $(\mathbb{C}^{d\cdot d})^{\oplus(n+m)}$.
Матрицы $A_{n,m}$ характеризуют полугруппу p_t.

Другой способ характеризации полугруппы состоит в задании инфинитезимального оператора a. Для гладкой функции f он определяется соотношением

$$\frac{d}{dt}\,p_t(f)=p_t(af)=\int p_t(du)(af)(u).$$

Если a — дифференциальный оператор второго порядка, то это есть так называемое уравнение Фоккера — Планка.

Случайный процесс $U(t)$ на $U(d)$ задается конечномерными распределениями $p_{t_1,\dots t_n}$, которые являются вероятностными мерами на $U(d)^n$ и связаны с $U(t)$ соотношениями

$$\int p_{t_1,\dots,t_n}(du_1,\ \dots,\ du_n)\,f(u_1,\ \dots,\ u_n)=\mathbf{E}f(U(t_1),\ \dots,\ U(t_n)),$$

где $f\colon U(d)^n\to\mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция.

Мультипликативные приращения процесса $U(t)$ определяются как $U(t,s)=U(t)\,U(s)^*$. Предположим, что $U(0)=1$

и $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$, тогда функция f может быть представлена в виде

$$f(U(t_1), \ldots, U(t_n)) = g(U(t_1, t_0), \ldots, U(t_n{}'t_{n-1})).$$

Таким образом, процесс $U(t)$ может быть также задан вероятностными мерами $\tilde{p}_{0, t_1, \ldots, t_n}$ на $U(d)^n$, связанными с $U(t, s)$ соотношениями

$$\mathbf{E}g(U(t_1, t_0), \ldots, U(t_n, t_{n-1})) = \int \tilde{p}_{0, t_1, \ldots, t_n}(du_1, \ldots, du_n) \times \\ \times g(u_1, \ldots, u_n).$$

Если

$$\tilde{p}_{0, t_1, \ldots, t_n} = \tilde{p}_{0, t_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{p}_{t_{n-1}, t_n},$$

то процесс называется процессом с независимыми мультипликативными приращениями. Если, кроме того,

$$\tilde{p}_{s, t} = p_{t-s},$$

то говорят о процессе со стационарными независимыми мультипликативными приращениями. При этом p_t образуют сверточную полугруппу. Таким образом, соответствующие величины $A_{n, m}$ или инфинитезимальный оператор a характеризуют процесс.

Вернемся к уравнению (1) и попытаемся решить его методом мультипликативного интеграла Ито. Рассмотрим разбиения $z = \{T_0 = 0 < T_1 < \ldots < T_n = T\}$ фиксированного интервала $[0, T]$ и положим

$$A_z(t) = \frac{1}{\Delta T_k} A_k = \frac{1}{\Delta T_k}(A^1 F_k + A^2 F_k^*),$$

если $T_{k-1} < t \leqslant T_k$, где

$$\Delta T_k = T_k - T_{k-1}, \quad F_k = \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} F(\tau)\, d\tau.$$

Здесь F_k, $k = 1, \ldots, N$,— независимые комплексные гауссовы случайные величины с

$$\mathbf{E}F_k \bar{F}_l = \gamma \delta_{kl} \Delta T_k, \quad \gamma = 2\,\mathrm{Re}\,\gamma.$$

Уравнение

$$\frac{d}{dt} U_z(t) = A_z(t) U_z(t)$$

решается в явном виде. Используя тот же метод, что и в квантовом случае, который будет описан в разд. 4, мы получаем следующий результат.

Теорема. *Если* $\|z\| = \max\{T_k - T_{k-1}\colon k = 1, \ldots, N\}$ *стремится к нулю, то* $U_z(t)$ *сходится по распределению и в сред-*

неквадратичном к процессу $U(t)$ *с независимыми стационарными приращениями, такому что*

$$p_t(f_{n,m}) = \exp \mathbf{A}_{n,m} t,$$

где $\mathbf{A}_{n,m}$ *даются соотношением*

$$\mathbf{A}_{n,m} = \gamma \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} n_j (A^1 A^2 + A^2 A^1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{n+m} n_j (\overline{A}^1 \overline{A}^2 + \overline{A}^2 \overline{A}^1) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} n_{i,j} (A^1 \otimes A^2 - A^2 \otimes A^1) +$$

$$+ \sum_{n+1 \leqslant i < j \leqslant n+m} n_{i,j} (\overline{A}_1 \otimes \overline{A}_2 + \overline{A}_2 \otimes \overline{A}_1) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{n+m} n_{i,j} (A^1 \otimes \overline{A}^1 +$$

$$+ A^2 \otimes \overline{A}^2) \Big\}.$$

Здесь

$$n_j(A) = 1_{j-1} \otimes A \otimes 1_{n+m-j-1},$$

$$n_{i,j}(A \otimes B) = 1_{i-1} \otimes A \otimes 1_{j-i-1} \otimes B \otimes 1_{n+m-j-1}.$$

Инфинитезимальный оператор дается соотношением

$$a = \gamma (D_P^2 + D_Q^2),$$

где $P = \frac{1}{2}(A^1 + A^2)$, $Q = \frac{i}{2}(A^1 - A^2)$ *и* $D_P f(u) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} (f(e^{Pt} u) - f(u))$ — *правоинвариантная производная.*

2. ПОНЯТИЕ КВАНТОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА $U(d)$

В классической теории вероятностей обычно имеют дело с вероятностной мерой, заданной на σ-алгебре. Для обобщения более подходящим является определение вероятностной меры как функционала на пространстве функций, например на коммутативной C^*-алгебре непрерывных функций на компактном множестве. В квантовой стохастике коммутативная C^*-алгебра заменяется некоммутативной. Аналогом вероятностной меры является состояние.

Для наших целей, однако, удобно отправляться от более общего понятия $*$-алгебры. Комплексная алгебра $\mathfrak{A}$ с единицей и инволюцией $*\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, такой что $(x^*)^* = x$ для всех $x \in \mathfrak{A}$, $1^* = 1$, $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $(xy)^* = y^* x^*$ для $x, y \in \mathfrak{A}$ называется $*$-алгеброй. Аналогом вероятностной меры является состояние на $\mathfrak{A}$, т. е. линейный функционал $\omega\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, такой что $\omega(x^* x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$ и $\omega(1) = 1$.

Поскольку мы будем использовать только алгебраические свойства некоммутативной алгебры, можно говорить об алгебраическом подходе к квантовой стохастике.

Определим понятие независимости. Простейший случай независимости элементов $x, y \in \mathfrak{A}$ — это когда они коммутируют и $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. Этот случай, однако, не является самым общим.

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ суть $*$-подалгебры $\mathfrak{A}$, и пусть ω — состояние на $\mathfrak{A}$. Подалгебры называются *независимыми* или *ω-независимыми*, если ω обращается в нуль на $*$-идеале, порождаемом элементами $[x_i, x_j]$, $x_i \in \mathfrak{A}_i$, $x_j \in \mathfrak{A}_j$, $i \neq j$, и если

$$\omega(x_1 \ldots x_n) = \omega(x_1) \ldots \omega(x_n).$$

Замечание. Из неравенства Шварца легко следует, что условие неравенства ω нулю на идеале, порожденном $[x_i, x_j]$, $x_i \in \mathfrak{A}_i$, $x_j \in \mathfrak{A}_j$, $i \neq j$, эквивалентно условию

$$\omega([x_i, x_j]^* [x_i, x_j]) = 0$$

для $x_i \in \mathfrak{A}_i$, $x_j \in \mathfrak{A}_j$ $i \neq j$. (Л. Аккарди, устное сообщение).

Пример. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$ и $\omega = \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_n$, тогда алгебры $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ независимы относительно ω.

Общий случай может быть сведен к этому примеру в следующем смысле. Обозначим I $*$-идеал, порождаемый элементами $[x_i, x_j]$, $x_i \in \mathfrak{A}_i$, $x_j \in \mathfrak{A}_j$, $i \neq j$, и обозначим $\mathfrak{A}^0$ $*$-алгебру, порождаемую алгебрами $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$. Поскольку ω равно нулю на I, оно определяет состояние $\tilde{\omega}$ на $\mathfrak{A}/I$. Поскольку $\mathfrak{A}_i/I$ коммутируют, то существует гомоморфизм η: $\bigotimes_{i=1}^{n} (\mathfrak{A}_i/I) \to \mathfrak{A}^0/I$. Обозначим $\tilde{\omega}_i$ ограничение $\tilde{\omega}$ на $\mathfrak{A}_i/I$. Формула в определении 2.1 показывает, что $\tilde{\omega} \circ \eta = \tilde{\omega}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\omega}_n$.

Пусть $\mathbb{C}^{d \times d}$ — множество всех комплексных $d \times d$-матриц, и пусть $\mathfrak{A}^{d \times d}$ — множество матриц с коэффициентами в $*$-алгебре $\mathfrak{A}$. Имеем

$$\mathfrak{A}^{d \times d} = \mathbb{C}^{d \times d} \otimes \mathfrak{A},$$

$$A = (A_{ik})_{i,\, k=1,\, \ldots,\, d} = \sum_{i,\, k=1}^{d} e_{ik} \otimes A_{ik},$$

где e_{ik} — матричные единицы, т. е. матрицы с единицей на месте (i, k) и остальными элементами, равными нулю. Алгебра $\mathfrak{A}^{d \times d}$ является $*$-алгеброй с инволюцией

$$A^* = \left(\sum e_{ik} \otimes A_{ik}\right)^* = \sum e_{ki} \otimes A_{ik}^* \quad \text{или} \quad A^* = (A_{ik})^* = \left(A_{k,\, i}^*\right).$$

При этом $(AB)^* = B^*A^*$. Нам потребуется также операция сопряжения

$$\bar{A} = \sum e_{ik} \otimes A^*_{ik} = (A^*_{i,k})_{i,\ k=1,\ \ldots,\ d}.$$

Имеем $\bar{A}\bar{B} = \overline{AB}$, если элементы A_{ik} и B_{ik} коммутируют. Очевидно, $\bar{A}$ совпадает с комплексным сопряжением, если $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$.

Предположим, что $A^1, \ldots, A^n$ являются $\mathfrak{A}^{d\times d}$-матрицами. Положим

$$A^1 \otimes \ldots \otimes A^n = \sum e_{i_1k_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_nk_n} \otimes A^1_{i_1k_1}\ \ldots\ A^n_{i_nk_n}.$$

Более общим образом будем использовать обозначение $\otimes_{m\in M} A^m$, где M — некоторое множество индексов. Если $M' \subset M$, то можно определить оператор $\eta_{M'}$ соотношением

$$\eta_{M'}\left(\otimes_{m\in M'} A^m\right) = \otimes_{m\in M} B^m,$$

где $B^m = A^m$ для $m \in M'$ и $B^m = 1$ для $m \notin M'$. Для $M' = \{i\}$ будем обозначать $\eta_{\{i\}} = \eta_i$ и т. д. Таким образом, $A^1 \otimes \ldots \otimes A^n = (A^1 \otimes 1\ \ldots\ \otimes 1) \cdot (1 \otimes A^2 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) \ldots (1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes A^n) = \eta_1(A^1)\ \ldots\ \eta_n(A^n)$. Заметим, что порядок сомножителей существен. Пусть ω — состояние на $\mathfrak{A}$. Тогда отображение P_ω: $\mathfrak{A}^{d\times d} \to \mathbb{C}^{d\times d} \otimes \mathfrak{A} \to \mathbb{C}^{d\times d}$ определяется формулой

$$P_\omega(A) = P_\omega\left(\sum e_{lk} \otimes A_{lk}\right) = \sum e_{lk}\omega(A_{ik}).$$

Следуя вероятностным обозначениям, мы будем часто писать $P_\omega(A) = \omega(A)$. Таким образом, если $A = (A_{ik})$, то $\omega(A) = P_\omega(A) = (\omega(A_{ik}))$. Отображение P_ω обладает следующими свойствами условного ожидания (ср. [1], [8] с. 101, [9]).

Предложение 2.1. *Отображение P_ω обладает следующими свойствами: для любых $A, B \in \mathbb{C}^{d\times d} \otimes \mathfrak{A}$ и $a, b \in \mathbb{C}^{d\times d}$ выполнены соотношения*

(i) $P_\omega(A^*) = P_\omega(A)^*$,

(ii) $P_\omega(\bar{A}) = P_\omega(A)^-$,

(iii) $P_\omega(A^*A) \geqslant 0$,

(iv) $P_\omega(A^*)P_\omega(A) \leqslant P_\omega(A^*A)$,

(v) $P_\omega(aAb) = aP_\omega(A)B$.

Здесь $\geqslant 0$ обозначает положительную определенность матрицы, и $a \in \mathbb{C}^{d\times d}$ отождествляется с $a \otimes 1 \in \mathfrak{A}^{d\times d} = \mathbb{C}^{d\times d} \otimes \mathfrak{A}$.

Доказательство. Свойства (i), (ii), (v) очевидны. Пусть $x \in \mathbb{C}^{d\times d}$, тогда

$$\langle x \mid (A^*A)\,x\rangle = \sum_i \langle x \mid A^*e_i\rangle\langle e_i \mid Ax\rangle = \sum_i (\langle e_i \mid Ax\rangle)^* \cdot \langle e_i \mid Ax\rangle,$$

где $e_1, \ldots, e_d$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^d$. Отсюда следует (iii). Чтобы получить (iv), надо применить (iii) и (v) к выражению $(A - P_\omega(A) \otimes 1)^* (A - P_\omega(A) \otimes 1)$, где 1 — единица $\mathfrak{A}$.

Следствие. *Пусть A есть $\mathfrak{A}^{d\times d}$-матрица, и a, b — две $\mathbb{C}^{d\times d}$-матрицы такие что $b \leqslant a$; тогда*

$$P(A^*bA) \leqslant P(A^*aA).$$

Доказательство. Достаточно доказать в случае $b = 0$. Тогда $a = u^*\alpha u$, где u унитарная, а α диагональная матрица с неотрицательными элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ на диагонали. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i u^* e_{ii} u$$

и

$$A^*aA = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i A^* u^* e_{ii} u A = \sum_i \alpha_i (e_{ii} u A)^* (e_{ii} u A).$$

Остается применить (iii).

Пусть $\mathfrak{F} = \mathbb{C}\langle x_i, i \in I\rangle$ — свободная алгебра с единицей $\mathbb{1}$, порождаемая элементами x_i, $i \in I$, над множеством комплексных чисел, т. е. алгебра всех некоммутативных многочленов от x_i. Гомоморфизм η алгебры $\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}$ определяется заданием образов $\eta(x_i)$. Мы отразим это в обозначениях:

$$\eta\colon \mathfrak{F} \longmapsto \mathfrak{A}, \quad x_i \to \eta(x_i), \quad f \in \mathfrak{F} \longmapsto f((\eta(x_i)_{i \in I})).$$

Пусть $(P_j)_{i \in I}$ — семейство многочленов в $\mathfrak{F}$. Алгебра, порождаемая элементами $(x_i)_{i \in I}$ с определяющими соотношениями $P_j(x_i, i \in I) = 0$, $j \in J$, является факторалгеброй свободной алгебры $\mathbb{C}\langle x_i, i \in I\rangle$ по идеалу A, порожденному P_j, $j \in J$. Положим

$$x_i = x_i + A.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — другая алгебра, порождаемая элементами $(a_i)_{i \in I}$. Отображение η: $x_i \to a_i$ продолжается до гомоморфизма алгебры, порождаемой элементами x_i с определяющими соотношениями $P_j(x_i, i \in I) = 0$, если a_j удовлетворяют этим же соотношениям, т. е. $P_j(a_i, i \in I) = 0$ для всех $j \in J$. Обозначим этот гомоморфизм $x_i \longmapsto a_i$, $i \in I$.

Свободная $*$-алгебра, порождаемая элементами $(x_i)_{i \in I}$ — это свободная алгебра, порождаемая элементами x_i, $\overset{*}{x}_i$, $i \in I$, с инволюцией $x_i \longmapsto \overset{*}{x}_i$, $\overset{*}{x}_i \longmapsto x_i$. Пусть P_j, $j \in J$ — семейство многочленов в свободной $*$-алгебре, порождаемой x_i, $i \in I$. Тогда $*$-алгебра, порождаемая элементами x_i, $i \in I$, с соотношениями $P_j(x_i, i \in I) = 0$ является факторалгеброй свободной $*$-алгебры, порождаемой x_i, $i \in I$, по $*$-идеалу A, порождаемому P_j, $j \in J$.

Теперь мы собираемся обобщить понятие вероятностной меры на $U(d)$ на квантовый случай. Вероятностная мера p на $U(d)$ может быть определена как состояние на $C(U(d))$, C^*-алгебре всех непрерывных функций на $U(d)$. Как отмечалось в разд. 1, $*$-подалгебра $K(U(d))$, порожденная функциями

$$\xi_{ik}\colon\ u \in U(d) \to u_{ik}, \qquad \bar{\xi}_{ik}\colon\ u \in U(d) \to \bar{u}_{ik},$$

плотна в $C(U(d))$. Поэтому вероятностная мера на $U(d)$ может рассматриваться как состояние на $K(U(d))$.

Квантовым аналогом $K(U(d))$ является $*$-алгебра $\mathcal{K}(U(d))$, порождаемая элементами x_{ik}, $i, k = 1, \ldots, d$, с определяющими соотношениями

$$\sum x_{ik} \overset{*}{x}_{jk} = \delta_{ij}, \qquad \sum \overset{*}{x}_{ki} x_{kj} = \delta_{ij}.$$

Обозначим через x $\mathcal{K}(U(d))^{d \times d}$-матрицу $(x_{i,k})$, тогда эти соотношения записываются в виде

$$xx^* = x^*x = 1.$$

Квантовым аналогом вероятностной меры на $U(d)$ является состояние на $\mathcal{K}(U(d))$.

Отображение $x_{ik} \in \mathcal{K}(U(d)) \to \xi_{ik} \in K(U(d))$ определяет $*$-гомоморфизм η из $\mathcal{K}(U(d))$ в $K(U(d))$. Поэтому если p — состояние на $K(U(d))$, то функционал $p \circ \eta$ является состоянием на $\mathcal{K}(U(d))$. Рассмотрим другой типичный пример. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (в физическом контексте оно может описывать тепловой резервуар), и пусть U — унитарный оператор в $\mathbb{C}^d \otimes \mathcal{H}$. Тогда U может быть записан в виде

$$U = \sum e_{ik} \otimes U_{ik}, \qquad U_{ik} \in B(\mathcal{H}).$$

Соотношения $UU^* = U^*U = 1$ означают, что отображение $x_{ik} \to U_{ik}$ может быть продолжено до гомоморфизма алгебры $\mathcal{K}(U(d))$ в $B(\mathcal{H})$, C^*-алгебру всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Запишем этот гомоморфизм в виде

$$f \in \mathcal{K}(U(d)) \longmapsto f(U) \in B(\mathcal{H}).$$

Пусть ρ — оператор плотности в $\mathcal{H}$. Тогда соотношение

$$f \in \mathcal{K}(U(d)) \longmapsto \operatorname{Tr} \rho f(U)$$

задает состояние на $\mathcal{K}(U(d))$.

Нетрудно ввести норму N на $\mathcal{K}(U(d))$, которая превращает $\mathcal{K}(U(d))$ в нормированную алгебру, а после пополнения — в C^*-алгебру. Положим $N(f) = \sup\{\|\eta(f)\|\}$, где η пробегает всевозможные $*$-гомоморфизмы алгебры $\mathcal{K}(U(d))$ в C^*-алгебры. Имеем $N(f)<\infty$, поскольку $N(x_{ik})\leqslant 1$ для всех i, k.

$*$-алгебра $\mathcal{K}(U(d))$ порождается одночленами

$$\overset{w_1}{x}_{i_1k_1}\ \dots\ \overset{w_n}{x}_{i_nk_n},$$

где $w_i=1,\ 2$ и $\overset{1}{x}_{ik}=x_{ik}$, $\overset{2}{x}_{ik}=\overset{*}{x}_{ik}$. Эти элементы являются компонентами тензорной матрицы

$$\overset{w}{x}=x^{w_1}\otimes\dots\otimes x^{w_n},$$

где $x^1=x$, $x^2=\bar{x}$. Таким образом,

$$\overset{w}{x}=\sum e_{i_1k_1}\otimes\dots\otimes e_{i_nk_n}\otimes \overset{w_1}{x}_{i_1k_1}\ \dots\ \overset{w_n}{x}_{i_nk_n}.$$

Если α — линейный функционал на $\mathcal{K}(U(d))$, то $\alpha(x^w)$ есть следующая матрица:

$$\alpha\left(\overset{w_n}{x}_{i_1k_1}\ \dots\ \overset{w_n}{x}_{i_nk_n}\right)\equiv\alpha\left(\overset{w}{x}\right)=$$

$$=\sum e_{i_1k_1}\otimes\dots\otimes e_{i_nk_n}\alpha\overset{w_1}{x}_{i_1k_1}\ \dots\ \overset{w_n}{x}_{i_nk_n}.$$

Таким образом, α определяется заданием всех матриц $\alpha(x^w)$.

Пусть α и β — два линейных функционала на $\mathcal{K}(U(d))$. Определим свертку $\alpha*\beta$ следующим образом: рассмотрим $*$-гомоморфизм

$$\Delta\colon\ (U(d))\rightarrow\mathcal{K}(U(d))\otimes\mathcal{K}(U(d)),$$

порождаемый отображениями

$$x_{ik}\rightarrow\sum x_{ij}\otimes x_{jk},\quad \overset{*}{x}_{ik}\rightarrow\sum\overset{*}{x}_{ij}\otimes x_{jk},$$

и положим

$$\alpha*\beta=(\alpha\otimes\beta)\circ\Delta,$$

тогда имеем

$$(\alpha*\beta)(x^w)=\alpha(x^w)\,\beta(x^w).$$

Из этой формулы легко получить, что свертка ассоциативна и что функционал δ_1: $x_{ik}\rightarrow\delta_{ik}$ является единицей для свертки.

Если $(\pi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ — сверточная полугруппа линейных функционалов на $\mathcal{K}(U(d))$, т. е. $\pi_0=\delta_1$, $\pi_{s+t}=\pi_s*\pi_t$, и если $t\rightarrow\pi_t(f)$ непрерывно для любой $f\in\mathcal{K}(U(d))$, то $\pi_t(x^w)=$ $=\exp\mathcal{A}_w t$ для некоторой $\left(\mathbb{C}^{d\times d}\right)^{\otimes n}$-матрицы $\mathcal{A}_w$. Совокупность всех матриц $\mathcal{A}_w$ однозначно характеризует полугруппу π_t.

Классический процесс приращений на $U(d)$ определяется вероятностной мерой на компактном подмножестве Ω компактного пространства $U(d)^{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$, задаваемом соотношением

$$\Omega=\{u:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to U(d): u(t,\ t)=1,\ u(t,\ s)=u(s,\ t),$$
$$u(t,\ s)u(s,\ r)=u(t,\ r)\text{ для всех } r,\ s,\ t\in\mathbb{R}_+\}.$$

Пусть $K(\Omega)$ есть $*$-алгебра функций на Ω, порождаемая функциями

$$\xi_{ik}(t,\ s)\colon\ u\to u_{ik}(t,\ s),\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ d;\ t,\ s\in\mathbb{R}_+.$$

Эта алгебра $K(\Omega)$ плотна в $C(\Omega)$, пространстве всех непрерывных функций на Ω. Обозначим $K(\Omega)$ $*$-алгебру, порождаемую элементами $x_{ik}(t,s)$; $i,\ k=1,\ldots,d$; $t,\ s\in\mathbb{R}_+$, с определяющими соотношениями

$$x_{ik}(t,\ t)=\delta_{ik},$$
$$x_{ik}(t,\ s)=\overset{*}{x}_{ki}(s,\ t),$$
$$\sum x_{ij}(t,\ s)x_{jk}(s,\ r)=x_{ik}(t,\ r).$$

Если ввести $\mathscr{K}(\Omega)^{d\times d}$-матрицу $x(t,\ s)=(x_{ik}(t,s))$, то эти условия принимают вид

$$x(t,\ t)=1,$$
$$x(t,\ s)=x(s,\ t)^*,$$
$$x(t,\ s)x(s,\ r)=x(t,\ r).$$

Квантовым аналогом классического процесса приращений на $U(d)$ является состояние π на $\mathscr{K}(\Omega)$.

Пусть $(U(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ — семейство унитарных операторов в $\mathbb{C}^d\otimes\mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Пусть $U(0)=1$; положим $U(t,\ s)=U(t)U(s)^*$, тогда $U(t,\ s)=\sum e_{ik}\otimes U_{ik}(t,\ s)$. Отображение $x_{ik}(t,\ s)\to U_{ik}(t,\ s)$ определяет гомоморфизм алгебры $\mathscr{K}(\Omega)$ в $B(\mathscr{H})$. Если обозначить $f(U)$ образ $f\in\mathscr{K}(\Omega)$ при этом гомоморфизме, то оператор плотности ρ в $\mathscr{H}$ определяет состояние на $\mathscr{K}(\Omega)$ по формуле $\pi(f)=\operatorname{Tr}\rho f(U)$. Обозначим $\mathscr{K}_{s,t}$ $*$-подалгебру алгебры $\mathscr{K}(\Omega)$, порождаемую функциями $x_{ik}(s,t)$.

Замечание. Отображение $x_{ik}\longmapsto x_{ik}(t,\ s)$ определяет $*$-изоморфизм из $\mathscr{K}(U(d))$ на $\mathscr{K}_{s,t}$.

Доказательство. В матричных обозначениях это отображение записывается как $x\longmapsto x(t,\ s)$, откуда $x^*\longmapsto x(t,\ s)^*=x(s,\ t)$. Поэтому соотношение $xx^*=1$ переходит $x(t,\ s)\times x(s,\ t)=x(t,\ t)=1$, и $x^*x=1$ в $x(s,\ t)x(t,\ s)=x(s,\ s)=1$. Следовательно, отображение продолжается до гомоморфизма. Остается доказать, что оно является изоморфизмом. Для этого определим гомоморфизм η: $\mathscr{K}_{s,t}\to\mathscr{K}(U(d))$, такой что

$x_{ik}(t, s) \to x_{ik}$. Положим $U(\tau) = x$ для $\tau = t$ и $U(\tau) = 1$ для $\tau \neq t$, и пусть $U(\tau, \sigma) = U(\tau) U(\sigma)^*$. Отображение $x_{ik}(\tau, \sigma) \to U_{ik}(\tau, \sigma)$ продолжается до гомоморфизма из $\mathscr{K}(\Omega)$ в $\mathscr{K}(U(d))$, ограничение которого η на $\mathscr{K}_{s,t}$ имеет желаемое свойство.

Если π — состояние на $\mathscr{K}(\Omega)$, то обозначим $\pi_{s,t}$ состояние на $\mathscr{K}(U(d))$, которое является образом ограничения π на $\mathscr{K}_{s,t}$ при этом изоморфизме. $\pi_{s,t}$ является квантовым аналогом распределения приращения $U(t, s) = U(t) U(s)^*$, если $U(t)$, $t \geqslant 0$ — классический случайный процесс на $U(d)$.

Состояние π на $\mathscr{K}(\Omega)$ определяет квантовый аналог процесса с независимыми приращениями на $U(d)$, если $*$-подалгебры $\mathscr{K}_{0,t_1}$; $\mathscr{K}_{t_1,t_2}$ $\ldots$, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots t_n$, π-независимы в смысле определения 2.1.

Имеем

$$\pi_{t,r} = \pi_{t,s} * \pi_{s,r} \quad \text{при } r \leqslant s \leqslant t,$$
$$\pi_{t,t} = \delta_1.$$

Состояние π на $\mathscr{K}(\Omega)$ определяет квантовый аналог процесса с независимыми и стационарными приращениями, если приращения π-независимы и $\pi_{t,s} = \omega_{t-s}$. Состояния ω_t образуют сверточную полугруппу на $\mathscr{K}(U(d))$. Если для $f \in \mathscr{K}(U(d))$ функция $t \to \omega_t(f)$ является непрерывной, то $\omega_t(x^w) = \exp \mathscr{A}_w(t)$ и матрицы $\mathscr{A}_w$ определяют ω_t однозначно.

Лемма 2.1. *Состояние π на $\mathscr{K}(\Omega)$ определяет квантовый аналог процесса с независимыми и стационарными приращениями, такой что $t \to \omega_t(f)$ непрерывна, тогда и только тогда, когда*

$$\pi\left(x^{w_1}(t_{j_1}, s_{j_1}) \otimes \ldots \otimes x^{w_n}(t_{j_n}, s_{j_n})\right) = \prod_{p=1}^{r} \eta_{M_p}(\exp \mathscr{A}_{w(p)}(t_p - s_p)).$$

Здесь $s_1 < t_1 \leqslant s_2 \leqslant t_2 \ldots \leqslant s_r < t_r$, $M_p = \{q : q = 1, \ldots, n; j_q = p\}$ *и* $w(p)$ *является ограничением* w *на* M_p, *т. е.* $w(p) = \prod_{q \in M_p} w_q$, *где произведение упорядочено слева направо. Оператор* η_{M_p} *был определен выше.*

Доказательство. $\mathscr{K}(\Omega)$ порождается элементами вида $x^{w_1}_{i_1k_1}(\tau_1, \sigma_1), \ldots, x^{w_n}_{i_mk_m}(\tau_m, \sigma_m)$, где можно предположить, что $\tau_k < \sigma_k$ для $k = 1, \ldots, m$. Имеется конечное число интервалов $[s_p, t_p[$, $s_p < t_p$, $p = 1, \ldots, r$, таких что всякий интервал $[\tau_k, \sigma_k[$ является объединением интервалов $[s_p, t_p[$, где p пробегает подмножество чисел $1, \ldots r$. Коэффициенты $x^{w_k}(\tau_k, \sigma_k)$ можно выразить через коэффициенты

$x^{\omega_k}(t_p, s_p)$ для тех p, для которых $[t_p, s_p[$ содержится в $[\tau_k, \sigma_k[$. Поэтому можно ограничиться случаем в формулировке леммы, когда все интервалы не пересекаются. Остальное является очевидным.

Мы будем использовать обычные вероятностные обозначения. Если $\mathfrak{A}$ — $*$-алгебра, и из контекста ясно, о каком состоянии ω идет речь, то мы пишем $\omega(f) = \mathbf{E}f$, где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание. Введенное понятие квантового аналога процесса на $U(d)$ может показаться крайне абстрактным, однако это не так. Возвращаясь к рассмотренной ситуации, обозначим через $\mathscr{H}$ гильбертово пространство теплового резервуара, и пусть $(u(t))_{t \geqslant 0}$ — семейство унитарных операторов в $\mathbb{C}^d \otimes \mathscr{H}$. Пусть $A^1, \ldots, A^n$ — эрмитовы $d \times d$-матрицы, тогда положим $A^k(t) = U(t)^* A^k U(t)$. Для физики представляют интерес моменты

$$\operatorname{Tr} \rho A^1(t_1) \ \ldots \ A^n(t_n),$$

которые могут быть записаны в виде

$$\sum \operatorname{Tr} \rho \left(U(0, t_1)_{i_0 k_0} U(t_1, t_2)_{i_1, k_1} \ \ldots\right.$$

$$\ldots \ \left. U(t_{n-1}, t_n)_{i_{n-1}, k_{n-1}}, \ U(t_{n, 0})_{i_n k_n}\right) A^1_{k_0, i_1} \ \ldots \ A^n_{k_{n-1}, i_n} e_{i_0, k_n} =$$

$$= \sum \left[\pi \left(x_{i_0 k_0}(0, t_1) \ \ldots \ x_{i_n k_n}(t_n, 0)\right)\right] A^1_{k_0, i_1} \ \ldots \ A^n_{k_{n-1}, i_n} e_{i_0, k_n},$$

где $e_{i_0 k_n}$ — матричная единица. Таким образом, π содержит всю информацию о моментах величин $A_k(t)$ и ничего более.

3. ГАУССОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ

Нам понадобятся некоторые результаты общей квантовой стохастики [3], [6]. Сначала напомним понятие гауссова функционала. Пусть V — комплексное векторное пространство, $T(V)$ — его тензорная алгебра и β — билинейная форма на V. *Гауссов функционал* на V, соответствующий форме β; это линейный функционал на $T(V)$ со свойствами

$$\begin{aligned}
&\gamma(1) = 1,\\
&\gamma(x_1 \otimes x_2) = \beta(x_1, x_2),\\
&\gamma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2m-1}) = 0,\\
&\gamma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2m}) = \sum_{\{S_1, \ldots, S_m\}} \beta(x_{S_1}) \ \ldots \ \beta(x_{S_m}).
\end{aligned}$$

Здесь $\{S_1, \ldots, S_m\}$ пробегает всевозможные попарные разбиения множества $\{1, \ldots, 2m\}$, причем если $S = \{i < j\}$ такая пара, то мы полагаем $\beta(x_S) = \beta(x_i, x_j)$. Гауссов функционал обращается в нуль на идеале, порождаемом элементами

$$x \otimes y - y \otimes x - \beta(x, y) + \beta(y, x) \quad (x, y \in V).$$

Фактор $T(V)$ по этому идеалу является алгеброй, порожденной V с определяющими соотношениями

$$xy - yx = \beta(x, y) - \beta(y, x) \quad (x, y \in V).$$

Это — специальный случай алгебры Вейля В общем случае алгебра Вейля порождается V с определяющими соотношениями

$$xy - yx = \alpha(x, y) \quad (x, y \in V),$$

где α — некоторая кососимметричная билинейная форма на V.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\mathcal{H}^*$ — его сопряженное (см. [7]). Существует антилинейное отображение $f \in \mathcal{H} \to f^* \in \mathcal{H}^*$, такое что $f^*(g) = \langle f, g\rangle$ для всех $g \in \mathcal{H}$. Мы полагаем $V = \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$ и определяем $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ соотношением

$$(f_1^* + g_1,\ f_2^* + g_2) \to \langle f_1, g_2\rangle - \langle f_2, g_1\rangle$$

Обозначим $\mathfrak{W}(H)$ алгебру Вейля, порождаемую $H^* \otimes H$ с определяющим соотношением $xy - yx = \alpha(x, y)$.

Как это делается в физике, введем

$$B(f) = f^* + I,$$
$$B^*(g) = g + I,$$

где I — идеал, определяющий $\omega(H)$. Тогда

$$[B(f),\ B(g)] = [B^*(f),\ B^*(g)] = 0,$$
$$[B(f),\ B^*(g)] = \langle f, g\rangle.$$

Отображение $B(f) \to B^*(f)$ определяет инволюцию на $\mathfrak{W}(H)$ и превращает $\mathfrak{W}(H)$ в $*$-алгебру.

Теперь определим фоковское представление алгебры $\mathfrak{W}(H)$. Обозначим $T_S(H)$ пространство всех симметричных тензоров на H,

$$T_S(H) = \mathbb{C} \oplus H \oplus (H \otimes_S H) \oplus (H \otimes_S H \otimes_S H) \oplus \ldots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_S^n(H),$$

где $T_S^n(H) \subset T^n(H)$ — подпространство тензоров степени n, порождаемое симметричными тензорами, или, эквивалентно, элементами вида $f^{\otimes n}$, $f \in H$. Для $f, g \in H$ положим

$$B^*(f)\colon T_S^n(H) \to T_S^{n+1}(H),$$
$$g^{\otimes n} \mapsto \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(f \otimes g^{\otimes n} + g \otimes f \otimes g^{\otimes n-1} + \ldots + g^{\otimes n} \otimes f\right),$$
$$B(f)\colon T_S^n(H) \to T_S^{n-1}(H),$$
$$g^{\otimes n} \mapsto \sqrt{n}\,\langle f, g\rangle\, g^{\otimes (n-1)},$$

Поскольку

$$[B(f),\ B(g)] = [B^*(f),\ B^*(g)] = 0,$$
$$[B(f),\ B^*(g)] = \langle f,\ g\rangle,$$

то отображение

$$f^* + g \in H^* \oplus H \longmapsto B(f) + B^*(g)$$

определяет представление $\mathfrak{W}(H)$ в пространстве линейных преобразований в $T_S(H)$. Поскольку представление является взаимно однозначным, обозначения $B(f)$, $B^*(f)$ согласуются с исходным определением.

Пусть K: $H \times H \to \mathbb{C}$ — эрмитова положительно определенная форма на H. Рассмотрим гауссов функционал γ_K на $T(H^* \oplus H)$, соответствующий билинейной форме

$$\beta_K(f_1^* + g_1,\ f_2^* + g_2) = K(f_1,\ g_2) + \langle f_1,\ g_2\rangle + K(f_2,\ g_1).$$

Поскольку

$$\beta_K(f_1^* + g_1,\ f_2^* + g_2) - \beta_K(f_2^* + g_2,\ f_1^* + g_1) =$$
$$= \langle f_1,\ g_2\rangle - \langle g_2,\ f_1\rangle = \alpha(f_1^* + g_1,\ f_2^* + g_2),$$

функционал γ_K обращается в нуль на идеале, определяющем $\mathfrak{W}(H)$, и может рассматриваться как функционал на $\mathfrak{W}(H)$. Пусть $h_1, h_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H; используя обозначения Дирака, введем элементы пространства $T_S(H)$:

$$1 = |\,0\rangle \in T_S^0(H),$$
$$|\,n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}\,\sqrt{n_2!}\,\ldots} B^*(h_1)^{n_1} B^*(h_2)^{n_2}\ \ldots\ |\,0\rangle.$$

Эти векторы образуют ортонормированный базис в фоковском пространстве $F(H)$, которое определяется как пополнение $T_S(H)$.

Предположим, что существует ортонормированный базис $h_1, h_2, \ldots$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, такие что эрмитова положительная форма K дается выражением

$$K(f,\ g) = \sum \lambda_i \langle f,\ h_i\rangle\langle h_i,\ g\rangle.$$

Тогда, рассматривая $\varphi \in \mathfrak{W}(H)$ как оператор на $T_S(H)$, имеем

$$\gamma_K(\varphi) = C_{K_{\{n\}}} \sum \exp\left(-\sum n_k\mu_k\right) \langle \{n\}\,|\,\varphi\,|\,\{n\}\rangle,$$

где $\{n\} = \{n_1, n_2, \ldots\}$ пробегает всевозможные последовательности неотрицательных целых чисел,

$$\lambda_k = \frac{1}{e^{\mu_k} - 1}$$

и

$$C_K = \prod_k (1 - e^{-\mu_k}).$$

Такое представление для γ_K, однако, может иметь место лишь если $C_K > 0$.

Важный частный случай состояния γ_K — это состояние γ_θ с

$$K(f,\ g) = \theta \langle f,\ g \rangle, \quad \theta \geqslant 0.$$

Тогда

$$(*) \qquad \gamma_\theta(\varphi) = (1 - z)^{\dim H} \sum_{\{n\}} z^{n_1 + n_2 + \ldots} \langle \{n\} \,|\, \varphi \,|\, \{n\} \rangle,$$

где

$$\theta = \frac{z}{1 - z}.$$

Это представление может иметь место, лишь если $\dim H < \infty$ или $\theta = 0$, $z = 0$.

Пусть A^1, A^2 — две $\mathbb{C}^{d \times d}$-матрицы с $(A^1)^* = -A^2$. Определим для $f \in H$ оператор

$$A(f) = A^1 B(f) + A^2 B^*(f)$$

на $T_S(H) \otimes \mathbb{C}^d$.

Лемма 3.1. *Для всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $g \in T_S(H)$ *степенной ряд*

$$\sum \frac{t^k}{k} A(f)^k g$$

сходится по норме пространства $F(H) \otimes \mathbb{C}^d$ *к вектору* $W(t)f$. *Оператор* $f \to W(t)f$ *продолжается единственным образом до унитарного оператора из* $F(H) \otimes \mathbb{C}^d$ *в* $F(H) \otimes \mathbb{C}^d$. *Имеют место соотношения*

$$W(s - t) = W(s)\, W(t),$$
$$W(t)^* = W(-t),$$
$$W(0) = 1.$$

Мы полагаем $W(t) = \exp tA(f)$.

Доказательство. Положим $F_n = \bigotimes_{k=0}^{n} T_S^k(H)$. Имеем $A(f)$: $F_n \otimes \mathbb{C}^d \to F_{n+1} \otimes \mathbb{C}^d$ и $\|A(f)g\| \leqslant \sqrt{n+1}\, C \|g\|$ для $g \in F_n \otimes \mathbb{C}^d$. Поэтому

$$\left\| \frac{t^k}{k!} A(f)^k g \right\| \leqslant \frac{C^k t^k}{k!} \sqrt{(n+1) \ldots (n+k)}\, \|g\|.$$

Следовательно, степенной ряд сходится по норме. Для $g, h \in F_n \otimes \mathbb{C}^d$

$$\langle W(s)\,g,\ W(t)\,h\rangle = \sum_{p,\ q} \frac{1}{p!\,q!}\, s^q t^q \langle A^p g,\ A^q h\rangle = \langle g,\ W(t-s)\,h\rangle,$$

поскольку

$$\langle A^p g,\ A^q h\rangle = (-1)^p \langle g,\ A^{p+q} h\rangle.$$

Из этого соотношения получаем остальные утверждения леммы.

Мы сохраним обозначение γ_θ для функционала на $B(F(H))$, определяемого соотношением (*). Нам понадобится следующая

Лемма 3.2. *Пусть* $H = \mathbb{C}^n$ *и* $e_1, \ldots, e_n$ — *стандартный базис. Положим* $b_k = B(e_k)$, $b_k^* = B^*(e_k)$. *Пусть*

$$\Lambda_q = \sum_{k=1}^{n} \left(A_{qk}^1 b_k + A_{qk}^2 b_k^*\right), \quad q = 1, \ldots, p,$$

где $A_{q,k}^{1,2} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ *таковы, что* $\left(A_{q,k}^1\right)^* = -A_{qk}^2$. *Тогда для всех* $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma_\theta\left(e^{t\Lambda_1} \ldots e^{t\Lambda_p}\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 0}^{\infty} \frac{t^{i_1 + \ldots + i_p}}{i_1! \ldots i_p!}\, \gamma_\theta\left(\Lambda_1^{i_1} \ldots \Lambda_p^{i_p}\right) =$$
$$= F(t) = \sum F_n t^n,$$

где ряд сходится абсолютно. Положим

$$a_{qk} = \|A_{qk}^1\| = \|A_{qk}^2\|,$$
$$a_k = \sum_q a_{qk},$$
$$\tilde{F}(t) = \sum \tilde{F}_n t^n = \exp \frac{t^2}{2} (1 + 2\theta) \sum a_k^2.$$

Тогда $\|F_n\| \leqslant \tilde{F}$ *для* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. По определению (*) и лемме 3.1 для $t \geqslant 0$ имеем

$$\gamma\left(e^{t\Lambda_1} \ldots e^{t\Lambda_p}\right) = \sum_{\{l\}} (1 - z)^a z^{l_1 + \ldots + l_n} \times$$
$$\times \sum_{i_1 = 0}^{\infty} \sum_{i_p = 0}^{\infty} \frac{t^{i_1 + \ldots + i_p}}{i_1! \ldots i_p!} \left\langle l_1, \ldots, l_n \middle| \Lambda_1^{i_1} \ldots \Lambda_p^{i_p} \middle| l_1, \ldots, l_n \right\rangle,$$

где порядок суммирования существен. Далее,

$$\Lambda_1^{i_1} \ldots \Lambda_p^{i_p} = M_1 M_2 \ldots M_N,$$

где $N = i_1 + \ldots + i_p$ и $M_1 = \Lambda_1, \ldots, M_{i_1} = \Lambda_1, M_{i_1+1} = \Lambda_2, \ldots$

$$M_q = \sum_{k=1}^{n} B_{qk}^1 b_k + B_{qk}^2 b_k^* = \sum_{k,\ \alpha=1,\ 2} B_{qk}^{\alpha} b^{\alpha}$$

и $b_k^1 = b_k$, $b_k^2 = b_k^*$. Поэтому

$$M_1 \ldots M_N = \sum_{k_1, \ldots, k_N} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} B_{1k_1}^{\alpha_1} \ldots B_{Nk_N}^{\alpha_N} b_{k_1}^{\alpha_1} \ldots b_{k_N}^{\alpha_N},$$

и для операторных норм $\mathbb{C}^{d \times d}$-матриц имеет место оценка

$$\| \langle l_1, \ldots, l_n | M_1 \ldots M_N | l_1, \ldots, l_n \rangle \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_N}} \left\| B_{1k_1}^1 \right\| \ldots \left\| B_{N,\ k_N}^n \right\| \left\langle l_1, \ldots, l_n \right| b_{k_1}^1 \ldots b_{k_N}^N \left| l_1, \ldots, l_N \right\rangle,$$

поскольку $\left\langle \{l\} \right| b_{k_1}^{\alpha_1} \ldots b_{k_N}^{\alpha_N} \left| \{l\} \right\rangle \geqslant 0$. Обозначая

$$c_{qk} = \left\| B_{qk}^1 \right\| = \left\| B_{qk}^2 \right\|, \ q = 1, \ldots, N, \quad k = 1, \ldots, n,$$

перепишем сумму в виде

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n} c_{1,\ k_1} \ldots c_{N,\ k_N} \left\langle l_1, \ldots, l_n \right| \tilde{b}_{k_1} \ldots \tilde{b}_{k_N} \left| l_1, \ldots, l_n \right\rangle,$$

где $\tilde{b}_k = b_k + b_k^*$. Поскольку $\tilde{b}_k$ коммутируют, последняя сумма равна

$$\langle l_1, \ldots, l_n | \left(\sum c_{1,\ k} \tilde{b}_k \right) \ldots \sum \left(c_{N,\ k} \tilde{b}_k \right) | l_1, \ldots, l_n \rangle =$$

$$= \left\langle l_1, \ldots, l_n \right| \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_p^{i_p} \left| l_1, \ldots, l_n \right\rangle,$$

где $\lambda_q = \sum a_{qk} \tilde{b}_k$. Поэтому

$$\sum_{\{l\}} (1-z)^n z^{l_1 + \ldots + l_p} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_p=0}^{\infty} \frac{t^{i_1 + \ldots + i_p}}{i_1! \ldots i_p!} \times$$

$$\times \left\| \left\langle \{l\} \right| \Lambda_1^{i_1} \ldots \Lambda_p^{i_p} \left| \{l\} \right\rangle \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i_1, \ldots, i_p=0} \frac{t^{i_1 + \ldots + i_p}}{i_1! \ldots i_p!} \gamma_\theta \left(\lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_p^{i_p} \right) = \gamma_\theta \left(e^{t\lambda} \right),$$

где

$$\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = \sum a_{qk} \tilde{b}_k = \sum a_k \tilde{b}_k.$$

Поскольку b_k независимы относительно γ_θ, то

$$\gamma\left(e^{t\lambda}\right)=\prod_{k=1}^{n}\gamma_\theta\left(e^{ta_kb_k}\right)$$

и

$$\gamma_\theta\left(e^{ta_kb_k}\right)=\exp\frac{t^2}{2}(1+2\theta)a_k^2,$$

так что

$$\gamma_\theta\left(e^{t\lambda}\right)=\exp\frac{t^2}{2}(1+2\theta)\sum a_k^2.$$

4. РЕШЕНИЕ КВАНТОВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ИТО

Мы будем решать дифференциальное уравнение (1), где $A(t)$ дается соотношением (2), а $F(t)$ определяется условиями (3), (4), или в другой форме

$$[F(f),\ F^*(g)]=\gamma\langle f,\ g\rangle, \tag{5}$$

$$\mathbf{E}F(f)F^{*}(g)=(1+\theta)\gamma\langle f,\ g\rangle, \tag{6}$$

где $f, g\in L^2(\mathbb{R})$. Операторы $F(f)$, $F^*(f)$ были строго определены в разд. 3 как элементы алгебры $\mathfrak{W}(L^2(\mathbb{R}))$, математическое ожидание $\mathbf{E}$ соответствует гауссову функционалу γ_θ. Поскольку, по-видимому, не существует прямого способа определения решения уравнения (1), мы будем искать некоторое приближение, а затем докажем его сходимость. Фиксируем его отрезок $[0, T]$ и разбиение

$$z=\{T_0=0<T_1<\ldots<T_N=T\}. \tag{7}$$

Обозначим

$$\Delta T_k=T_k-T_{k-1}, \tag{8}$$

$$\|z\|=\max\{\Delta T_k : k=1,\ \ldots,\ N\}. \tag{9}$$

$$\chi_k=1_{]T_{k-1},\ T_k]}. \tag{10}$$

Положим

$$F_k=F(\chi_k)=\int_{T_{k-1}}^{T_k}F(t)\,dt \tag{11}$$

и

$$A_k=\int_{T_{k-1}}^{T_k}A(t)\,dt=A^1F_k+A^2F_k^*. \tag{12}$$

Поскольку

$$[F_k,\ F_l^*]=\gamma\,\Delta T_k\delta_{kl}, \tag{13}$$

$$\mathbf{E}F_kF_l^*=(1+\theta)\,\Delta T_k\delta_{kl}, \tag{14}$$

элементы

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\gamma\,\Delta T_k}}\,F_k \tag{15}$$

порождают $*$-подалгебру $\mathfrak{W}(L^2(0, T))$, изоморфную $\mathfrak{W}(\mathbb{C}^N)$. Поскольку

$$\mathbf{E} b_k b_l^* = (1+\theta)\,\delta_{kl}, \tag{16}$$

то математическое ожидание $\mathbf{E}$ определяет на $\mathfrak{W}(\mathbb{C}^N)$ гауссов функционал γ_θ. Переходя к фоковскому представлению, будем рассматривать b_k и F_k как операторы на $T_S(\mathbb{C}^N)$. Положим

$$A_z(t) = \frac{1}{\Delta T_k}\,A_k \tag{17}$$

для $T_{k-1} < t \leqslant T_k$. Тогда решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}U_z(t) = A_z(t)\,U_z(t), \quad U_z(0) = 1 \tag{18}$$

является функция, равная

$$U_z(t) = \exp\frac{t - T_{k-1}}{T_k}\,A_k \exp A_{k-1} \ldots \exp A_1 \tag{19}$$

при $T_{k-1} \leqslant t < T_k$, а экспоненты, определенные в лемме 3.1, являются унитарными операторами в $F(\mathbb{C}^N) \otimes \mathbb{C}^d$. Фиксируем состояние γ_θ на $B(F(\mathbb{C}^N))$, тогда функция $U_z(t)$, как было объяснено в разд. 2, определяет квантовый аналог случайного процесса. Мы докажем сходимость семейства процессов $U_z(t)$ при $\|z\| \to 0$.

Нам понадобятся некоторые общие факты. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство и $H' \subset H$ — его подпространство. Тогда $F(H) = F(H') \otimes F(H \ominus H')$, $B(F(H)) = B(F(H') \otimes B(F(H \ominus H'))$. Мы можем вложить $B(F(H'))$ в $B(F(H))$ по формуле $X \to X \otimes 1$. Определим вложение $\mathfrak{W}(H')$ в $B(F(H'))$, отождествляя $B(f)$, $B^*(f) \in \mathfrak{W}(H')$, $f \in H'$ с соответствующими элементами $\mathfrak{W}(H)$. Возвращаясь к лемме 3.1, мы можем отождествить элементы $A(f) \in \mathfrak{W}(H') \otimes \mathbb{C}^d$, где $f \in H'$, с элементами $A(f) \in \mathfrak{W}(H) \otimes \mathbb{C}^d$. Затем мы отождествляем $\exp A(f) \in B(F(H') \otimes \mathbb{C}^d)$ с элементами $\exp A(f) \in B(F(H) \otimes \mathbb{C}^d)$.

Пусть z — разбиение отрезка $[0, T]$, и пусть H_z — подпространство $L^2(0, T)$, порождаемое функциями χ_k, $k=1, \ldots, N$. Если $z' < z$ — более мелкое разбиение, то $H_{z'} \supset H_z$. Рассуждая, как выше, мы можем рассматривать $U_z(t, s)$, унитарный оператор в $F(H_z) \otimes \mathbb{C}^d$, как унитарный оператор в $F(H_{z'}) \otimes \mathbb{C}^d$. Таким образом, $U_z(t, s)$ и $U_{z'}(t, s)$ могут рассматриваться как операторы в одном пространстве.

Докажем сначала лемму, которая в классическом случае влечет за собой сходимость в среднеквадратичном.

Лемма 4.1. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ *определены соотношением*

$$\varphi(x) = x^{w_1}(t_1, s_1) \otimes \ldots \otimes x^{w_n}(t_n, s_n), \quad s_j < t_j,$$

тогда для $z' < z$

$$\mathbf{E}\,\|(\varphi(U_z) - \varphi(U_{z'}))^*(\varphi(U_z) - \varphi(U_{z'}))\| \leqslant C^2 + T\|z\| \exp C\|z\|,$$

где $C = 2\gamma(1 + 2\theta)n^2\|A^1\|^2$, *а* $\|\cdot\|$ *обозначает норму матрицы из* $(\mathbb{C}^{d \times d})^{\otimes n}$.

Доказательство. Согласно (19),

$$U_z(t, s) = U_z(t)\,U_z(s)^* =$$

$$= \begin{cases} \exp\dfrac{t - T_{k-1}}{\Delta T_k} \exp A_{k-1} \ldots \exp A_{l-1} \exp\dfrac{T - s}{\Delta T_l} A_l \\ \qquad\qquad \text{для } T_{l-1} \leqslant s \leqslant T_l \leqslant \ldots \leqslant T_{k-1} \leqslant t \leqslant T_k \\ \exp\dfrac{t - s}{\Delta T_k} A_k \quad \text{для } T_{k-1} \leqslant s \leqslant t \leqslant T_k. \end{cases} \tag{20}$$

Определим $U_k(t)$ как решение уравнения

$$\frac{d}{dt} U_k(t) = \frac{1}{\Delta T_k} A_k \chi_k(t) U_k(t), \quad U_k(0) = 0,$$

так что

$$U_k(t) = \begin{cases} \exp A_k, & t \geqslant T_k, \\ \exp\dfrac{t - T_{k-1}}{\Delta T_k} A_k, & T_{k-1} \leqslant t \leqslant T_k, \\ 1, & t \leqslant T_{k-1}. \end{cases} \tag{21}$$

Тогда для $s \leqslant t$

$$U_k(t, s) = U_k(t)\,U_k(s)^* = \exp \tau A_k, \tag{22}$$

где

$$\tau = \frac{1}{\Delta T_k} \left| [s, t] \cap [T_{k-1}, T_k] \right|. \tag{23}$$

Сравнивая (20), (22) и (23), находим, что

$$U_z(t, s) = U_N(t, s) \ldots U_1(t, s). \tag{24}$$

Поскольку матричные элементы $(U(t, s))_{i,j}$ коммутируют для разных k, то

$$\varphi(U_z) = \varphi(U_N) \ldots \varphi(U_1) = \varphi_N \ldots \varphi_1. \tag{25}$$

Пусть

$$\begin{aligned} z' = \{0 = T_0 = T_{1,0} < T_{1,1} < \ldots < T_{1,\nu_1} = T_2 = \\ = T_{2,0} < T_{2,1} < \ldots < T_{2,\nu_2} = T_3 = T_{3,0} < \ldots \\ = T_{N-1} = T_{N,0} < T_{N,1} \ldots T_{N,\nu_N} = T_N = T\} \end{aligned} \tag{26}$$

— более мелкое разбиение. Тогда аналогично (25)

$$\varphi(U_{z'}) = \psi_N \, \ldots \, \psi_1, \tag{27}$$

где

$$\psi_k = \varphi\left(U_{k,\, \nu_k}\right) \ldots \varphi(U_{k,\,1}). \tag{28}$$

Поскольку φ_k и ψ_k унитарны, то

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{E}\,(\varphi(U_z) - \varphi(U_{z'}))^* (\varphi(U_z) - \varphi(U_{z'})) \| = \\ &= \left\| 2 - \mathbf{E}\left(\varphi_1^* \ldots \varphi_N^* \psi_n \ldots \psi_1\right) - \mathbf{E}\,(\ldots)^* \right\|. \end{aligned} \tag{29}$$

Для $x \in (\mathbb{C}^{d \times d})^{\otimes n}$ положим

$$W_k(X) = \varphi_k^* X \psi_k. \tag{30}$$

Таким образом, W_k переводит $(\mathbb{C}^{d \times d})^{\otimes n}$-матрицу в ограниченный оператор на $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n} \otimes F(H)$. Следовательно, $\mathbf{E}W_k$ переводит $(\mathbb{C}^{d \times d})^{\otimes n}$-матрицу в такую же матрицу. В силу независимости,

$$\mathbf{E}\left(\varphi_1^* \ldots \varphi_N^* \psi_N \ldots \psi_1\right) = \left(\mathbf{E}W_1\right) \ldots \left(\mathbf{E}W_N\right)(1), \tag{31}$$

где 1 обозначает (nd)-единичную матрицу.

Определим X_k соотношением

$$\mathbf{E}W_k(1) = \mathbf{E}\varphi_k^* \psi_k = 1 - X_k. \tag{32}$$

Тогда (29) переходит в

$$\begin{aligned} &\| ((X_1 + (\mathbf{E}W_1) X_2 + \ldots \\ &\ldots + (\mathbf{E}W_1) \ldots (\mathbf{E}W_{n-1})(X_N)) + (\ldots)^* \|. \end{aligned} \tag{33}$$

Согласно п. (iv) предложения 2.1,

$$(\mathbf{E}W_k(X))^* (\mathbf{E}W_k(X)) \leqslant \mathbf{E}W_k(X)^* W_k(X),$$

а по следствию из этого предложения

$$\begin{aligned} &\| (\mathbf{E}W_k)(X) \|^2 = \| \mathbf{E}W_k(X)^* \mathbf{E}W_k(X) \| \leqslant \| \mathbf{E}W_k(X)^* W_k(X) \| = \\ &= \| \mathbf{E}\psi_k^* X^* X \psi_k \| \leqslant \| X^* X \| \, \| \mathbf{E}\psi_k^* \psi_k \| = \| X \|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно

$$\| \mathbf{E}W_k(X) \| \leqslant \| X \| \tag{34}$$

и (33) дает

$$\| \mathbf{E}\,(\varphi(U_z) - \varphi(U_{z'}))^* (\varphi(U_z) - \varphi(U_{z'})) \| \leqslant 2\,(\| X_1 \| + \ldots + \| X_N \|), \tag{35}$$

где остается вычислить $\|X_k\|$.

Имеем

$$\varphi_k = \varphi_k^{(1)} \ldots \varphi_k^{(n)}, \tag{36}$$

где

$$\varphi_k = \exp \eta_j \left(\tau_k^{(j)} A_k\right) = \exp B^{(j)}, \tag{37}$$

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\Delta T} \left| [s_j,\ t_j] \cap [T_{k-1},\ T_k] \right|. \tag{38}$$

Аналогично

$$\psi_k = \varphi_{k,\,\nu_k} \dots \varphi_{k,\,1}, \tag{39}$$

где

$$\varphi_{k,\,l} = \varphi^{(1)}_{k,\,l} \dots \varphi^{(n)}_{k,\,l}, \tag{40}$$

$$\varphi^{(j)}_{k,\,l} = \exp \eta_j \left(\tau^{(j)}_{k,\,l} A_{k,\,l}\right) = \exp B_l^{(j)}, \tag{41}$$

$$\tau^{(j)}_{k,\,l} = \frac{1}{\Delta T_{k,\,l}} \left| [s_j,\ t_j] \cap [T_{k,\,l-1},\ T_{k,\,l}] \right|. \tag{42}$$

Применим лемму 3.2 к выражению $\mathbf{E}\varphi^*\psi$ и покажем, что в соответствующем разложении все члены первого, второго и третьего порядка исчезают. Поскольку все нечетные члены равны нулю, следует рассмотреть только члены второго порядка. Имеем

$$\varphi_k^* = 1 - \sum_{\alpha} B^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum B^{(\alpha)2} + \sum_{\alpha > \beta} B^{(\alpha)} B^{(\beta)} + \dots$$

$$= 1 + B + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > \beta} [B^{(\alpha)},\ B^{(\beta)}] + \dots,$$

где $B = \sum B^{(j)}$ и

$$\psi_k = \exp B^{(1)}_{\nu_k} \dots \exp B^{(n)}_{\nu_k} =$$

$$\vdots$$

$$= \exp B_1^{(1)} \dots \exp B_1^{(n)} =$$

$$= 1 + \sum B_\nu^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum \left(B_\nu^{(\beta)}\right)^2 + \sum_{(r,\,\alpha) < (s,\,\beta)} B_r^{(\alpha)} B_s^{(\beta)} + \dots =$$

$$= 1 + B + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \sum_{(r,\,\alpha) < (s,\,\beta)} \left[B_r^{(\alpha)},\ B_s^{(\beta)}\right] + \dots,$$

где $(r, \alpha) < (s, \beta)$ означает, что множитель, содержаший $B_r^{(\alpha)}$, находится левее множителя, содержащего $B_s^{(\beta)}$. Мы здесь использовали то обстоятельство, что $B^{(\alpha)} = \sum\limits_l B_l^{(\alpha)}$. Тогда

$$\varphi_k^* \psi_k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > \beta} [B^{(\alpha)},\ B^{(\beta)}] + \frac{1}{2} \sum_{(r,\,\alpha) < (s,\,\beta)} \left[B_r^{(\alpha)},\ B_s^{(\beta)}\right] + \dots$$

и

$$\mathbf{E}\varphi_k^* \psi_k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > \beta,\, l} \mathbf{E}\left[B_l^{(\alpha)},\ B_l^{(\beta)}\right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta,\, l} \mathbf{E}\left[B_l^{(\alpha)},\ B_l^{(\beta)}\right] + \dots =$$

$$= 1 + R_k,$$

так что члены первого, второго и третьего порядка равны нулю. Применяя лемму 3.2, получим после некоторых вычислений

$$\| R_k \| = \| X_k \| \leqslant \exp C \,\Delta T_k - 1 - C\,\Delta T_k \leqslant \frac{C^2\,\Delta T_k^2}{2} \exp C\,\Delta T_k, \tag{43}$$

где

$$C = 2\gamma (1 + 2\theta) n^2 \| A^1 \|^2. \tag{44}$$

Окончательно правая часть в (35) мажорируется величиной

$$\sum C^2\,\Delta T_k^2 \exp C\,\Delta T_k \leqslant C^2 T \| z \| \exp C \| z \|, \tag{45}$$

и лемма доказана.

Пусть z — разбиение отрезка $[0, T)$. Оператор $U_z(t, s)$ определяет состояние π_z на $\mathscr{K}(\Omega)$. При $\|z\| \to 0$ из последней леммы следует, что $\pi_z(f)$ сходятся к состоянию $\pi(f)$ на $\mathscr{K}(\Omega)$, которое вычисляется в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $\|z\| \to 0$, *тогда состояние* π_z, *отвечающее процессу* $U_z(t)$, *слабо сходится на* $\mathscr{K}(\Omega)$ *к состоянию* π, *описывающему квантовый аналог случайного процесса на* $U(d)$ *с независимыми приращениями. Соответствующая полугруппа* $(\omega_t)_{t \geqslant 0}$ *дается соотношением* $(\omega_t)(x^w) = \exp \mathscr{A}_w(t)$, *для* $x^w = x^{w_1} \otimes \ldots \otimes x^{w_n}$, *где*

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_w = \gamma \Big\{ & \frac{1}{2} \sum_{k \in M'} \eta_k ((1 + \theta) A^1 A^2 + \theta A^2 A^1) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k \in M''} \eta_k (\theta \bar{A}^1 \bar{A}^2 + (1 + \theta) \bar{A}^2 \bar{A}^1) + \\
& + \sum_{k < l;\ k,\ l \in M'} \eta_{k, l} ((1 + \theta) A^1 \otimes A^2 + \theta A^2 \otimes A^1) + \\
& + \sum_{k < l;\ k,\ l \in M''} \eta_{k, l} (\theta \bar{A}_1 \otimes \bar{A}_2 + (1 + \theta) \bar{A}^2 \otimes \bar{A}^1) + \\
& + \sum_{k < l;\ k \in M',\ l \in M''} \eta_{k, l} ((1 + \theta) A^1 \otimes \bar{A}^1 + \theta A^2 \otimes \bar{A}^2) + \\
& + \sum_{k < l;\ k \in M'',\ l \in M'} \eta_{k, l} (\theta \bar{A}^1 \otimes A^1 + (1 + \theta) \bar{A}^2 \otimes A^2)\Big),
\end{aligned}$$

причем

$$M' = \{ i = 1, \ldots, n \colon w_i = 1 \},$$
$$M'' = \{ i = 1, \ldots, n \colon w_i = 2 \}.$$

Доказательство. Возвращаясь к лемме 2.1, положим

$$\varphi = x^{w_1} (t_{j_1}, s_{j_1}) \otimes \ldots \otimes x^{w_n} (t_{j_n}, s_{j_n}),$$

где $s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \ldots \leqslant s_r < t_r$.

Достаточно доказать сходимость π_z к π на функциях такого вида. По лемме 4.1 и неравенству Шварца достаточно рассматривать лишь разбиения, которые являются более мелкими, чем разбиение

$$z_0=\{0\leqslant s_1<t_1\leqslant s_2<t_2\ldots\leqslant s_r<t_r\leqslant T\}.$$

Пусть $z=\{T_0=0<T_1\ \ldots\ <T_N=T\}$ разбиение, такое что $z<z_0$. Тогда, согласно (26), $\varphi(U_z)=\varphi(U_N)\ \ldots\ \varphi(U_1)$ и, в силу независимости, $\mathrm{E}\varphi(U_z)=\mathrm{E}\varphi(U_N)\ \ldots\ \mathrm{E}\varphi(U_1)$. Разобьем множество $\{1,\ \ldots,\ N\}$ на подмножества следующим образом. Пусть E_p, $p=1,\ \ldots,\ r$, — множество всех $k=1,\ \ldots,\ N$, таких что $[T_{k-1},T_k[$ содержится в $[s_p,t_p[$, и пусть E_0 — множество k, таких что $[T_{k-1},T_k[$ не содержится в каком-либо из отрезков $[s_p,t_p[$, $p=1,\ \ldots,\ r$, и, таким образом, не пересекается ни с одним из этих отрезков. Тогда множества E_p, $p=0,1,\ \ldots,\ r$, попарно не пересекаются и их объединение совпадает с $\{1,\ \ldots,\ N\}$. Имеем

$$U_k(t_p-s_p)=\begin{cases}\exp A_k, & k\in E_p,\\ 1, & k\notin E_p.\end{cases}$$

Поэтому $\mathrm{E}\varphi(U_k)$ в обозначениях леммы 2.1 имеет вид $\eta_{M_p}C$, где C — некоторая матрица. Следовательно, $\mathrm{E}\varphi(U_k)$ коммутируют, если k принадлежит различным M_p Отсюда

$$\mathbf{E}(U_z)=\prod_{p=1}^{r}\prod_{k\in E_p}\mathbf{E}\varphi(U_k)=\prod_{p=1}^{\nu}M_p\prod_{k\in E_p}\mathbf{E}\varphi(U_k),$$

где

$$\varphi_p(x)=x^{w_{\alpha_1}}(t_p-s_p)\otimes\ \ldots\ x^{w_{\alpha_\nu}}(t_p-s_p),$$

если $E_p=\{\alpha_1<\ \ldots\ <\alpha_\nu\}$. Остается доказать, что

$$\prod_{k\in E_p}\mathbf{E}\varphi_p(U_k)\rightarrow\exp A_{w_p}t$$

Таким образом, все может быть сведено к случаю

$$\varphi(x)=x^{w_1}(T,\ 0)\otimes\ \ldots\ x^{w_n}(T,\ 0),$$

в обозначениях леммы 2.1.

и достаточно рассмотреть эквидистантное разбиение z: $T_k=\frac{k}{N}T$, $k=0,\ \ldots,\ N$. Тогда $\mathbf{E}\varphi(U_z)=(E\varphi(U_1))^N$, и с помощью леммы 3.2 получаем

$$\mathbf{E}\varphi(U_1)=\mathbf{E}\left[(\exp A_1)^{w_1}\otimes\ \dots\ \otimes(\exp A_1)^{w_n}\right]=\mathbf{E}\mathscr{B},$$

$$\mathscr{B}=1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbf{E}\left(A_1^{w_k}\right)^2+\sum_{k<l}\eta_{k,\,l}\mathbf{E}\left(A_1^{w_k}\otimes A_1^{w_l}\right)+R=$$

$$=1+\mathscr{B}_w\frac{T}{N}+R,$$

где

$$\|R\|\leqslant e^{CT/N}-1-C\frac{T}{N}\leqslant\frac{1}{2}C^2T^2/N^2e^{CT/N},$$

причем $C=n^2\gamma\|A^1\|$. Поэтому $\mathbf{E}\varphi(U_z)\to\exp\gamma\mathscr{B}_wT$, где

$$\mathscr{B}_w=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbf{E}\left(a^{w_k}\right)^2+\sum_{k<l}\eta_{k,\,l}\mathbf{E}\left(a^{w_k}\otimes a^{w_l}\right)$$

и $a=A^1b+A^2b^*$. Здесь b, b^* — элементы, порождающие $\mathfrak{W}(\mathbb{C})$, $[b,b^*]=1$, $\mathbf{E}bb^*=1+\theta$. Если учесть, что $\bar{a}=\bar{A}^1b^*+\bar{A}^2b$, то легко получается, что $\gamma\mathscr{B}_w=\mathscr{A}_w$. Теорема доказана.

Я благодарен Л Аккарди за продолжительные и плодотворные обсуждения. Выражаю также признательность А. ван Энтер, Ф. Хааке, Г. Хегерфельдту и Дж ван Хеммену за стимулирующие беседы.

Литература *)

1. Accardi L., Cecchini C. Conditional Expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki, J. Funct. Analysis, 45 (1982), 245—273.
2. Cockroft A. M., Hudson R. L. Quantum mechanical Wiener process, J. Multivariate Analysis, 7 (1977), 107—124.
3. Giri N., Waldenfels W. V. An algebraic version of the central limit theorem, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 42 (1978), 129—134.
4. Haake F. Statistical treatment of open systems by generalized master equations. Springer Tracts in Modern Physics, 66. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York (1973).
5. Haken H. Laser theory. Handbuch für Physik, vol. XXV/2c. Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, New York (1970).
6. Ion P. D. F., Waldenfels W. V. Zeitgeordnete Momente des weissen klassischen und des weissen Quantenrauschens. In: Probability measures on Groups, p. 212, Proceedings, Oberwolfach 1981. Ed. H. Heyer. Lect. Notes Math., 928. Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, New York (1982).
7. Neveu J. Processus aléatoires gaussiens. Les Presses de l'Université de Montréal, 1968.
8. Sakai S. C*-Algebras and W*-Algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebicte. Band 60, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

---

*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

9. Umegaki H. Conditional expectation in an operator algebra, Tohoku Math. J., 6 (1954), 177—181.
10. Waldenfels W. V. Light emission and absorption as a quantum stochastic process. Sonderforschungsbereich 123. Preprint N 176. Universität Heidelberg, 1982.
11. Waldenfels W. V. Stratonovich solution of the quantum stochastic differential equation describing light emission and absorption, Lect. Notes Math., 1109 (1984), 155.
12*. Waldenfels W. V. Spontaneous light emission described by a quantum stochastic differential equation. Lect. Notes Math., 1136 (1985), 516—534.
13*. Maassen H. Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels. Lect. Notes Math., 1136 (1985, 361—374.

ИЕРАРХИЯ СВОСТВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ K- СИСТЕМ[1]

В. Шрёдер
Математический институт, Тюбингенский университет
Тюбинген, ФРГ

Резюме. Для W^*-K-системы, являющейся некоммутативным обобщением классического понятия K-системы, вводится иерархия свойств перемешивания, включающая понятие перемешивания произвольного порядка. С помощью подходящего модулярного оператора ГНС-конструкция для W^*-K-системы приводит к аналогу K-системы в гильбертовом пространстве и, таким образом, к лебегову спектру. В заключение обсуждается некоторый класс примеров, основанных на квазисвободных состояниях канонических антикоммутационных соотношений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие K-системы, введенное А. Н. Колмогоровым [7] в 1958 г., открыло новые возможности для изучения преобразований, сохраняющих меру: вероятностные идеи, развитые для стационарных случайных процессов, были перенесены в эргодическую теорию (ср. [14]).

Определение (см., например, [3], [7]). Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство и ϕ — представление группы $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ взаимно однозначными измеримыми преобразованиями Ω, сохраняющими меру μ. Предположим, что существует σ-подалгебра $\Sigma_K \subset \Sigma$, такая что

$$\Sigma_K \subseteq \phi_t \Sigma_K \quad \text{для всех } t \geqslant 0,$$

$\bigvee \{\phi_t \Sigma_K : t \geqslant 0\} = \Sigma$, т. е. Σ порождается σ-подалгебрами $\phi_t \Sigma_K$, $t \geqslant 0$,

и, наконец, имеет место следующее обобщение закона нуля — единицы:

$$\bigcap \{\phi_t \Sigma_K : t \leqslant 0\} = \{\phi, \Omega\}.$$

Тогда $(\Omega, \Sigma, \mu, \phi; \Sigma_K)$ называется *K-системой.*

---

[1] Schröder W. A hierarchy of mixing properties for non-commutative K-systems. In: Lect. Notes on Math., Springer-Verlag, v. 1055, 1984, p. 340—351.

Плодотворность этого понятия в эргодической теории обусловлена не только его тесной связью с понятием энтропии Колмогорова — Синая, но и хорошими свойствами перемешивания *К*-системы. В самом деле, имеет место следующая цепочка импликаций:

$$\begin{array}{llll} & \text{Бернуллиева система} & & \\ \Rightarrow & K\text{-система} & & \\ \Leftrightarrow & K\text{-перемешивание} & \Rightarrow & \\ \Rightarrow & \text{перемешивание произвольного} & & \left\{\begin{array}{l}\text{однородный}\\ \text{лебегов}\\ \text{спектр}\end{array}\right. \\ & \text{порядка} & & \\ \Rightarrow & \text{сильное перемешивание} & \Leftarrow & \\ \Rightarrow & \text{слабое перемешивание} & & \\ \Rightarrow & \text{эргодичность} & & \end{array}$$

(см., например, [3], рассмотрение в духе функционального анализа имеется в [4]).

Полезность понятия *К*-системы в классической эргодической теории мотивировала введение подходящего аналога в некоммутативной эргодической теории, имеющей дело с моделями квантовой физики. Начиная с 1973 г. Г. Эмх разрабатывал эту идею в серии публикаций (см [5] и цитированную там литературу). В некоммутативной теории мы рассматриваем пару $(\mathfrak{A}, \varphi)$, где $\mathfrak{A}$ есть *W^*-алгебра с точным нормальным состоянием* φ, как обобщение вероятностного пространства. Если к тому же имеется представление α группы $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$, оставляющими φ инвариантным, то тройка $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$ называется *W^*-системой.* Концепция *К*-системы может быть тогда обобщена следующим образом:

Определение. Пусть $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$ является W^*-системой и $\mathfrak{A}_K$ есть W^*-подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, такая что

(K1) $\mathfrak{A}_K \subseteq \alpha_t \mathfrak{A}$ для всех $t \geqslant 0$;

(K2) $\bigvee \{\alpha_t \mathfrak{A}_K : t \geqslant 0\} = \mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ порождается подалгебрами $\alpha_t \mathfrak{A}_K$, $t \geqslant 0$.

Тогда $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ называется *расширяющейся W^*-системой.* Далее $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ обладает *свойством нуля — единицы*, если

(K3) $\bigcap \{\alpha_t \mathfrak{A}_K : t \leqslant 0\} = \mathbb{C}I$.

В этом случае $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ называется *W^*-К-системой.*

Понятие *обобщенного К-потока*, введенное ранее Г. Эмхом [5], включает еще одно свойство, которое мы называем *гипотезой условного ожидания:*

(K4) существует (с необходимостью единственное) условное ожидание системы $(\mathfrak{A}, \varphi)$ на $\mathfrak{A}_K$, т. е. проектор единичной нормы из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_K$, оставляющий φ инвариантным (см. [16])

Эта гипотеза автоматически выполняется, если $\mathfrak{A}$ коммутативна. Она имеет место и для ряда некоммутативных примеров ([5], [6], [9], [13]) и определенно находит мотивировку в приложениях W^*-K-систем к неравновесной статистической механике. Однако имеются причины, по которым интересно рассматривать W^*-K-системы, не предполагая априори выполнения гипотезы условного ожидания. Одна из них заключается просто в наличии разнообразных W^*-K-систем, не удовлетворяющих этой гипотезе (см., например, разд. 4). Среди них W^*-K-системы $(\mathfrak{A}, \varphi, \sigma; \mathfrak{A}_K)$, где σ — группа модулярных автоморфизмов, ассоциированная с $(\mathfrak{A}, \varphi)$. Согласно теореме Такесаки [16], в подобных случаях гипотеза условных ожиданий не может выполняться.

Другая причина заключается в нашем намерении расширить диапазон возможных приложений, включив и равновесную квантовую статистическую механику. Напомним, что ряд классических моделей равновесной статистической механики являются K-системами, например, идеальный газ (см. [3], с. 281). Однако в алгебраическом формализме квантовая равновесная система обычно описывается W^*-системой $(\mathfrak{A}, \varphi, \sigma)$, где σ обозначает группу модулярных автоморфизмов, ассоциированную с $(\mathfrak{A}, \varphi)$. Если теперь имеется W^*-подалгебра $\mathfrak{A}_K \subseteq \mathfrak{A}$, такая что $(\mathfrak{A}, \varphi, \sigma; \mathfrak{A}_K)$ образует W^*-K-систему, то гипотеза условного ожидания не может выполняться.

Таким образом, как с точки зрения приложений, так и чисто по математическим причинам представляется интересным развить эргодическую теорию для W^*-K-систем, не зависящую от гипотезы условного ожидания. В этой статье мы остановимся на свойствах перемешивания W^*-K-систем. Мы собираемся расширить результаты Г. Эмха для обобщенных K-потоков [5] и исследовать, в какой мере W^*-K-системы укладываются в иерархию свойств перемешивания, аналогичную упомянутой выше. Доказательства, которые большей частью опущены, содержатся в [13].

2. ГИЛЬБЕРТОВЫ K-СИСТЕМЫ

Следуя классическим работам Колмогорова [7] и Синая [15], можно попытаться исследовать W^*-K-системы в терминах унитарной группы, получаемой ГНС-конструкцией.

Если $(\Omega, \Sigma, \mu, \phi; \Sigma_K)$ — K-система, то унитарное представление U в $\mathscr{H} := L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, определяемое соотношением $U_t f = f \circ \phi^{-1}_t$ для $f \in \mathscr{H}$, $t \in \mathbb{T}$, действует на замкнутое пространство $\mathscr{H}_K := L^2(\Omega, \Sigma_K, \mu)$ следующим образом:

(H1) $\mathscr{H}_K \subseteq U_t \mathscr{H}_K$ для всех $t \geqslant 0$;

(H2) $\bigvee \{U_t \mathscr{H}_K : t \geqslant 0\} = \mathscr{H}$;

(H3) $\bigcap \{U_t \mathscr{H}_K : t \leqslant 0\} = \mathbb{C}\xi$.

Здесь $\bigvee\{U_t\mathcal{H}_K : t \geqslant 0\}$ обозначает наименьшее замкнутое пространство $\mathcal{H}$, содержащее все $U_t\mathcal{H}_K$, и $\xi \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначает функцию, тождественно равную единице на Ω.

Эта структура будет играть важную роль в дальнейшем, поэтому мы введем специальное определение.

Определение. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\xi \in \mathcal{H}$ — единичный вектор и U — унитарное представление группы $\mathbb{T}$ в $\mathcal{H}$, оставляющее ξ инвариантным. Если замкнутое подпространство $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}$ таково, что четверка $(\mathcal{H}, \xi, U; \mathcal{H}_K)$ удовлетворяет свойствам (H1)—(H3), то $(\mathcal{H}, \xi, U; \mathcal{H}_K)$ называется *гильбертовой К-системой*.

Как показывает теорема фон Неймана (см., например, [3], с 457), это понятие тесно связано с хорошо известным понятием *однородного лебегова спектра* ([3], [7], [15]): если $(\mathcal{H}, \xi, U; \mathcal{H}_K)$ — гильбертова K-система, то U имеет однородный лебегов спектр на ортогональном дополнении $\mathbb{C}\xi$ в $\mathcal{H}$.

Данной W^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с точным нормальным состоянием φ ГНС-конструкция канонически сопоставляет единственное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с единичным вектором ξ, причем $\mathfrak{A}$ может рассматриваться как алгебра фон Неймана в $\mathcal{H}$, вектор ξ является циклическим и отделяющим для $\mathfrak{A}$, а

$$\varphi(x) = \langle x\xi \mid \xi\rangle \text{ для всех } x \in \mathfrak{A}.$$

Мы называем $(\mathcal{H}, \xi)$ *ГНС-парой*, ассоциированной с $(\mathfrak{A}, \varphi)$.

Далее, если $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$ есть W^*-система, то для $\mathbb{T}$ имеется единственное унитарное представление U в $\mathcal{H}$, такое что

$$\alpha_t(x) = U_t x U_t^* \text{ и}$$

$$U_t\xi = \xi \text{ для всех } x \in \mathfrak{A},\ t \in T.$$

Мы называем $(\mathcal{H}, \xi, U)$ *ГНС-системой*, ассоциированной с $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$. Если ограничение U на ортогональное дополнение $\mathbb{C}\xi$ в $\mathcal{H}$ имеет однородный лебегов спектр, то мы говорим, что $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$ имеет *однородный лебегов спектр*.

Применим эту конструкцию к анализу W^*-K-системы $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha, \mathfrak{A}_K)$; для этого наделим ГНС-систему $(\mathcal{H}, \xi, U)$, соответствующую системе $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$, структурой гильбертовой K-системы. При выполнении гипотезы условного ожидания Г. Эмх показал в [5], что $(\mathcal{H}, \xi, U; \overline{\mathfrak{A}_K\xi})$, где $\overline{\mathfrak{A}_K\xi}$ — замыкание $\mathfrak{A}_K\xi$ в $\mathcal{H}$, образует гильбертову K-систему. Выполняется ли это без гипотезы условного ожидания? Конечно, трудность представляет лишь доказательство свойства (H3). Оказывается, что свойство (H3) выполняется не для всех W^*-K-систем. Наиболее ярко это проявляется в следующей ситуации,

Предложение. *Пусть* $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ *есть* W^*-K-*система, такая что* α *является группой модулярных автоморфизмов, ассоциированных с* $(\mathfrak{A}, \varphi)$. *Тогда* $\overline{\mathfrak{A}_K\xi} = \overline{\mathfrak{A}\xi} = \mathscr{H}$.

Этот результат показывает, что подпространство $\overline{\mathfrak{A}_K\xi}$ должно быть модифицировано с помощью модулярного оператора Δ, отвечающего паре $(\mathfrak{A}, \xi)$.

Теорема. *Пусть* $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ *есть* W^*-K-*система,* $(\mathscr{H}, \xi, U)$ — *ГНС-система, ассоциированная с* $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$, *и* Δ — *модулярный оператор, отвечающий* $(\mathfrak{A}, \varphi)$. *Если положить* $\mathscr{H}_K := \overline{(\Delta + I)^{1/2}\mathfrak{A}_K\xi}$, *то* $(\mathscr{H}, \xi, U; \mathscr{H}_K)$ *является гильбертовой* K-*системой.*

Можно показать, что при выполнении гипотезы условного ожидания $\overline{(\Delta + I)^{1/2}\mathfrak{A}_K\xi} = \overline{\mathfrak{A}_K\xi}$. Таким образом, отсюда следует результат Г. Эмха [5]. Из замечаний в начале раздела немедленно вытекает

Следствие. *Если* $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ *есть* W^*-K-*ситема, то* $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$ *имеет однородный лебегов спектр.*

Доказательство теоремы. Заметим сначала, что $U_t\mathscr{H}_K = \overline{(\Delta + I)^{1/2}(\alpha_t\mathfrak{A}_K)\xi}$ для всех $t \in \mathbb{T}$, потому что каждый U_t, $t \in \mathbb{T}$, коммутирует с Δ. Подпространство $(\Delta + I)^{1/2}\bigcup\{(\alpha_t\mathfrak{A}_K)\xi\colon t \geqslant 0\} \subseteq \bigvee\{U_t\mathscr{H}_K\colon t \geqslant 0\}$ плотно в $(\Delta + I)^{1/2}\mathfrak{A}\xi$ в силу следующих соображений: $\bigcup\{\alpha_t\mathfrak{A}_K\colon t \geqslant 0\}$ плотно в $\mathfrak{A}$ в сильной $*$-топологии $s^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$, а не $\mathfrak{A}$ норма $x \to \|(\Delta + I)^{1/2}x\xi\| = (\varphi(x^*x) + \varphi(xx^*))^{1/2}$ порождает топологию, более слабую, нежели $s^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$. Поскольку $\overline{(\Delta + I)^{1/2}\mathfrak{A}\xi} = \mathscr{H}$, то мы доказали (H2).

Свойство (H3) прямо вытекает из следующего результата мартингального типа.

Лемма. *Пусть* $(\mathfrak{A}, \varphi)$ *есть* W^*-*алгебра с точным нормальным состоянием,* $(\mathscr{H}, \xi)$ — *ассоциированная ГНС-пара и* Δ — *соответствующий модулярный оператор. Если* $(\mathfrak{A}_\nu)_{\nu \in I}$ — *убывающая сеть* W^*-*подалгебр* $\mathfrak{A}$, *то*

$$\bigcap_{\nu \in I}\overline{(\Delta + I)^{1/2}\mathfrak{A}_\nu\xi} = \overline{(\Delta + I)^{1/2}\bigcup_{\nu \in I}\mathfrak{A}_\nu\xi}.$$

Набросок доказательства: рассмотрим область определения $\mathscr{H}^\#$ оператора $\Delta^{1/2}$ в $\mathscr{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_\#$, которое на плотном подпространстве $\mathfrak{A}\xi \subseteq \mathscr{H}^\#$ задано соотношением

$$\langle x\xi \,|\, y\xi\rangle_\# = \varphi(y^*x) + \varphi(x^*y) = \langle x\xi \,|\, y\xi\rangle + \langle\Delta^{1/2}x\xi \,|\, \Delta^{1/2}y\xi\rangle = \langle(\Delta + I)^{1/2}x\xi \,|\, (\Delta + I)^{1/2}y\xi\rangle, \quad x,\ y \in \mathfrak{A},$$

Если обозначить $\overline{\mathfrak{A}_\nu\xi^\#}$ замыкание $\mathfrak{A}_\nu\xi$ в $\mathscr{H}^\#$, то, очевидно,

$$\overline{\mathfrak{A}_\nu\xi^\#} = (\Delta + \mathrm{I})^{-1/2}\,\overline{(\Delta + \mathrm{I})^{1/2}\,\mathfrak{A}_\nu\xi.}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \overline{\mathfrak{A}_\nu\xi^\#} = \overline{\left(\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_\nu\right)\xi^\#.}$$

Однако это немедленно вытекает из следующего наблюдения, которое может быть получено из работы Рейфеля и Ван Даэле [11]: если $\mathfrak{A}_\nu^{sa}$ обозначает самосопряженную часть $\mathfrak{A}_\nu$, то

$$\overline{\mathfrak{A}_\nu\xi^\#} = \overline{\mathfrak{A}_\nu^{sa}\xi} + i\overline{\mathfrak{A}_\nu^{sa}\xi},\quad \{0\} = \overline{\mathfrak{A}_\nu^{sa}\xi} \cap i\overline{\mathfrak{A}_\nu^{sa}\xi} \text{ и}$$

$$\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \overline{\mathfrak{A}_\nu^{sa}\xi} = \overline{\left(\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_\nu^{sa}\right)\xi},$$

что и требовалось доказать

В случае когда для каждого $\nu \in I$ имеется условное ожидание $\mathbf{E}_\nu$ системы $(\mathfrak{A}, \varphi)$ на $\mathfrak{A}_\nu$, мы снова имеем $\overline{(\Delta + \mathrm{I})^{1/2}\,\mathfrak{A}_\nu\xi} = \overline{\mathfrak{A}_\nu\xi}$, и получаем известный результат (см., например, [5])

$$\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \overline{\mathfrak{A}_\nu\xi} = \overline{\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_\nu\xi},$$

или, эквивалентно

$$\lim_{\nu\in I} \mathbf{E}_\nu(x) = \mathbf{E}_\infty(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{A}$$

в топологии $s^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$, где E_∞ обозначает условное ожидание $(\mathfrak{A}, \varphi)$ на $\bigcap_{\nu\in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_\nu$. (Очевидно, наше наблюдение наводит на мысль о введении обобщенного условного ожидания для произвольной W^*-подалгебры $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, используя проекцию на $\overline{(\Delta + \mathrm{I})^{1/2}\mathfrak{B}\xi}$. Этот вопрос будет рассмотрен в другом месте.)

3. СВОЙСТВА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

3.1. Закон нуля — единицы как свойство перемешивания

Из теоремы предыдущего раздела на самом деле следует гораздо больше, чем просто наличие однородного лебегова спектра, поскольку для реализации структуры *гильбертовой K-системы* в $(\mathscr{H}, \xi, U)$ мы нашли специальное подпространство $\overline{(\Delta + \mathrm{I})^{1/2}\mathfrak{A}_K\xi}$, тесно связанное с подалгеброй $\mathfrak{A}_K$. Эта связь позволит нам дать прямое доказательство эквивалентности некоторых сильных условий перемешивания и свойства нуля — единицы. В несколько отличной форме такая эквивалентность возникает в теории квазилокальных алгебр, где она играет важную роль (см., например, [2], с. 118). Мы даем здесь другое доказательство, эффективно использующее мартингальную лемму из разд. 2.

Теорема. *Пусть* $(\mathfrak{A}, \varphi)$ *есть* W^**-алгебра с точным нормальным состоянием и* $(\mathfrak{A}_\nu)_{\nu\in I}$ — *убывающая сеть* W^**-подалгебр* $\mathfrak{A}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) $\bigcap\{\mathfrak{A}_\nu\colon \nu\in I\} = \mathbb{C}I$,

(в) $\lim\limits_{\nu\in I} \sup\{|\varphi(xy)-\varphi(x)\varphi(y)|\colon\ y\in\mathfrak{A}_\nu,\ \|y\|\leqslant 1\} = 0$ для всех $x\in\mathfrak{A}$,

(c) $\lim\limits_{\nu\in I} \sup\{|\varphi(xz)-\varphi(x)\varphi(z)|\colon\ z\in\mathfrak{A}_\nu^{sa},\ \varphi(z^2)\leqslant 1\} = 0$ для всех $x\in\mathfrak{A}$.

Доказательство. Чтобы доказать (a)⇒(c), обозначим Q_ν, $\nu\in I$, ортогональный проектор в $\mathcal{H}^\#$ на $\overline{\mathfrak{A}_\nu\xi^\#}$. Тогда по мартингальной лемме из разд. 2 сеть $(Q_\nu)_{\nu\in I}$ сходится сильно в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}^\#)$ к проектору $P^\#$ на $\mathbb{C}\xi$. Пусть теперь $x\in\mathfrak{A}$ и $\varepsilon>0$. Поскольку отображения

$$\mathfrak{A}\xi\to\mathbb{C},\quad z\xi\to\langle xz\xi\,|\,\xi\rangle_\#$$

ограничены относительно нормы $\|\cdot\|_\#$, то найдется $\eta\in\mathcal{H}^\#$, такой что $\langle xz\xi\,|\,\xi\rangle_\# = \langle z\xi\,|\,\eta\rangle_\#$ для всех $z\in\mathfrak{A}$. Выберем далее $\mu\in I$ так, чтобы

$$\|(Q_\mu-P^\#)\eta\|_\#\leqslant\varepsilon\sqrt{2}.$$

Поскольку $Q_\mu y\xi = y\xi$ для всех $y\in\mathfrak{A}_\mu$, то мы имеем

$$\langle xy\xi\,|\,\xi\rangle_\# - \frac{1}{2}\langle x\xi\,|\,\xi\rangle_\#\cdot\langle y\xi\,|\,\xi\rangle_\# = \langle y\xi\,|\,(Q_\mu-P^\#)\eta\rangle_\#.$$

Используя соотношения

$$\varphi(ab) = \frac{1}{2}\langle ab\xi\,|\,\xi\rangle_\# \quad \text{для всех } a,\ b\in\mathfrak{A} \text{ и}$$

$$\varphi(a^2) = \frac{1}{2}\|a\xi\|_\#^2 \quad \text{для всех } a\in\mathfrak{A}^{sa},$$

получаем

$$|\varphi(xy)-\varphi(x)\varphi(y)|\leqslant\varepsilon\varphi(y^2)^{1/2},$$

что доказывает (c). Доказательство остальных утверждений более или менее стандартно и может быть найдено в [13].

Следствие. *Расширяющаяся* W^**-система* $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha; \mathfrak{A}_K)$ *удовлетворяет закону нуля — единицы тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих двух условий:*

(а) *для любого* $x \in \mathfrak{A}$

$$\sup \{ |\varphi(\alpha_t(x)z) - \varphi(x)\varphi(z)| : z \in \mathfrak{A}_K^{\mathrm{sa}}, \ \varphi(z^2) \leqslant 1 \} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \pm\infty,$$

(б) *для любого нормального состояния* ψ *на* $\mathfrak{A}$

$$\|(\alpha_{t*}(\psi) - \varphi) \restriction \mathfrak{A}_K \| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty,$$

где α_{t*}, $t \in \mathbb{T}$, *обозначает отображение, предсопряженное к* α_t.

3.2. Перемешивание произвольного порядка

В классической эргодической теории доказывается, что K-системы обладают свойством перемешивания произвольного порядка (см., например, [1], [3] с. 25). Чтобы получить некоммутативное обобщение этого результата, введем

Определение. W^*-система $(\mathfrak{A}, \varphi, \alpha)$ имеет *W^*-перемешивание произвольного порядка*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется следующее: для данных $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$, такое что

$$\left| \varphi(x_0\alpha_{t_1}(x_1) \ldots \alpha_{t_1+\ldots+t_n}(x_n y_n) \ldots \alpha_{t_1}(y_1) y_0) - \prod_{\nu=0}^{n} \varphi(x_\nu y_\nu) \right| < \varepsilon,$$

как только $t_\nu \leqslant -m$ для всех $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Будем это кратко записывать в виде

$$\lim_{t_1, \ldots, t_n \to -\infty} \varphi(x_0\alpha_{t_1}(x_1) \ldots \alpha_{t_1+\ldots+t_n}(x_n y_n) \ldots \alpha_{t_1}(y_1) y_0) = \prod_{\nu=0}^{n} \varphi(x_\nu y_\nu).$$

Выражения

$$\varphi(x_0\alpha_{t_1}(x_1) \ldots \alpha_{t_1+\ldots+t_n}(x_n y_n) \ldots \alpha_{t_1}(y_1) y_0)$$

известны в теории некоммутативных случайных процессов под названием «корреляционные ядра».

В теории квазилокальных алгебр можно найти другую некоммутативную версию перемешивания произвольного порядка (см. [10], следствие 2.4, с. 198). Это понятие формулируется в терминах C^*-алгебр и связано с более богатой структурой квазилокальной алгебры. W^*-алгебраическое обобщение классического результата о том, что всякая K-система обладает свойством перемешивания произвольного порядка, по-видимому, ранее не формулировалось. Комбинируя классическое рассуждение Блюма и Хансона [1] и используя специальные свойства относительно слабо компактных подмножеств предсопряженного пространства W^*-алгебры, мы можем доказать следующий результат.

Теорема. *Всякая W^*-K-система имеет свойство W^*-перемешивания произвольного порядка.*

Этот результат указывает место W^*-K-систем в иерархии свойств перемешивания, аналогичной классической (см. разд. 1), потому что W^*-перемешивание произвольной степени, очевидно, влечет за собой *сильное перемешивание*:

$$\lim_{|t|\to\infty} \varphi(x\alpha_t(y)) = \varphi(x)\varphi(y); \quad x, \ y \in \mathfrak{A},$$

которое в свою очередь влечет разные более слабые формы перемешивания (см., например, [5]). Для обобщенных K-потоков свойство сильного перемешивания и его следствия отмечались в [5].

4. КВАЗИСВОБОДНЫЕ W^*-K-СИСТЕМЫ НАД КАНОНИЧЕСКИМИ АНТИКОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

Используя квазисвободное представление канонических антикоммутационных соотношений (КАС), мы находим новый класс W^*-K-систем. Этот класс дает множество примеров, в которых гипотеза условного ожидания не может выполняться.

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, оператор $R \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ таков, что R и $1-R$ строго положительные, и пусть S — унитарное представление $\mathbb{T}$ в $\mathscr{H}$, коммутирующее с R. Такая тройка $(\mathscr{H}, R, S)$ через представление КАС порождает $^*W$-систему хорошо известным способом: пусть $A(\mathscr{H})$ — КАС-алгебра над $\mathscr{H}$, ω^R — калибровочно-инвариантное квазисвободное состояние на $A(\mathscr{H})$, соответствующее R. Обозначим через $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H})$ W^*-алгебру, порождаемую ГНС-представлением $A(\mathscr{H})$, отвечающим состоянию ω^R, и будем обозначать нормальное продолжение ω^R на $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H})$ тем же символом. Наконец, пусть $\mathfrak{A}^R(S_t)$, $t \in \mathbb{T}$, есть нормальное продолжение квазисвободного автоморфизма $A(\mathscr{H})$, порождаемого S_t. Тогда $(\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}), \omega^R, \mathfrak{A}^R(S))$ называется *квазисвободной W^*-системой*, отвечающей $(\mathscr{H}, R, S)$.

Предложение. *Предположим, что для данной тройки $(\mathscr{H}, R, S)$ имеется замкнутое подпространство $\mathscr{H}_K \subseteq \mathscr{H}$ со свойствами:*

$$\mathscr{H}_K \subseteq S_t\mathscr{H}_K \quad \text{для всех } t \geqslant 0,$$
$$\bigvee \{S_t\mathscr{H}_K\colon t \geqslant 0\} = \mathscr{H},$$
$$\bigcap \{S_t\mathscr{H}_K\colon t \leqslant 0 = \{0\}.$$

Пусть $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}_K)$ *есть* W^**-подалгебра алгебры* $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H})$, *порождаемая алгеброй* $A(\mathscr{H}_K)\subseteq A(\mathscr{H})$, *тогда* $(\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}), \omega^R, \mathfrak{A}^R(S); \mathfrak{A}^R(\mathscr{H}_K))$ *является* W^**-K-системой.*

Доказательство, которое требует других рассуждений, нежели в случае ККС (канонических коммутационных соотношений) ([5], [6]), можно найти в [9], [13].

Такие *квазисвободные* W^**-K-системы* обладают рядом интересных свойств:

(1) Они дают первые примеры W^*-K-систем, которые не обладают свойством слабой обратимости [5].

(2) Для квазисвободных W^*-K-систем имеется простой критерий выполнения гипотезы условного ожидания: именно, она выполняется тогда и только тогда, когда проекция $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_K$ коммутирует с R.

(3) Если $R\in\{S_t\colon t\in\mathbb{T}\}''\setminus\mathbb{C}I$, то подалгебра $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}_K)$ отнюдь не совпадает с областью значений условного ожидания в $(\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}), \omega^R)$, точнее, если $\mathfrak{B}$ есть W^*-подалгебра алгебры $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H})$, содержащая $\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}_K)$ и являющаяся областью значений условного ожидания в $(\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}), \omega^R)$, то $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^R(\mathscr{H})$.

(4) Пусть $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ и $R=(I+e^{-H})^{-1}$, где H — самосопряженный инфинитезимальный оператор S. Тогда $S_t=R^{it}(I-R)^{-it}$ для всех $t\in\mathbb{R}$, и, таким образом, $\mathfrak{A}^R(S)$ является группой модулярных автоморфизмов, ассоциированной с $(\mathfrak{A}^R(\mathscr{H}), \omega^R)$. Таким образом, мы получаем первый пример, когда группа модулярных автоморфизмов образует W^*-K-систему.

(5) Квазисвободные W^*-K-системы возникают как марковские расширения некоторых (однопараметрических полугрупп) вполне положительных обобщенно свободных операторов в КАС-алгебре [9], [13]. Технически отличный случай ККС рассмотрен в [6].

Я рад выразить благодарность моим коллегам из Тюбингенского университета, в частности Б. Кюммереру за многочисленные плодотворные обсуждения и С. Руийсенаарсу за усовершенствование в теореме разд. 2.

Литература *)

1. Blum J. R., Hanson D. L. An elementary proof that automorphisms of Kolmogorov are mixing of all orders. In: Ergodic theory. Wright F. B. (ed), 71—73. New York: Academic Press, 1963.
2. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.

---

*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

3. Корнфельд И. П., Фомин С. Б., Синай Я. Г. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980.
4. Derndinger R., Nagel R., Palm G. 13 lectures on ergodic theory, Manuscript, Tübingen, 1982.
5. Emch G. G. Generalized K-flows, Commun. Math. Phys., 49 (1976), 191—215.
6. Emch G. G., Albeverio S., Eckmann J.-P. Quasi-free generalized K-flows, Rep. Math. Phys., 13 (1978), 73—85.
7. Колмогоров А. Н. Новый метрический инваринт транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, ДАН СССР, т. 119 (1958), 861—864.
8. Kümmerer B. Markov dilations of completely positive operators on W*-algebras, Semesterbericht Funkctionalanalysis, Tübingen, Wintersemester 1981/82, 175—186.
9. Kümmerer B., Schröder W. A Markov dilation of a non-quasifree Bloch evolution, Commun. Math. Phys., 90 (1983), 251—262.
10. Lanford III O. E., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, Commun. Math. Phys., 13 (1969), 194—215.
11. Rieffel M. A., van Daele A. The commutation theorem for tensor products of von Neumann algebras, Bull. London Math. Soc., 7 (1975), 257—260.
12. Schröder W. Non-commutative Kolmogorov-flows, Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen, Wintersemester 1981/82, 161—174.
13. Schröder W. W*-K-systems, Thesis, Tübingen, 1983.
14. Синай Я. Г. Вероятностные идеи в эргодической теории. Междунар. математический конгресс (1962), 540—559.
15. Синай Я. Г. Динамические системы со счетным лебеговым спектром I, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 6 (1961), 899—924.
16. Takesaki M. Conditional expectations in von Neumann algebras, J. Funct. Anal., 9 (1972), 306—321.

17*. Kümmerer B. Markov Dilations on W*-Algebras, J. Funct. Anal., 63 (1985), 139—177.

18*. Kümmerer B., Schröder W. A new construction of unitary dilations singular coupling to white noise, Lect. Notes Math., 1136 (1985), 332—347.

ПРИМЕРЫ МАРКОВСКИХ РАСШИРЕНИЙ НАД 2×2-МАТРИЦАМИ[1])

Б. Кюммерер
Математический институт, Тюбингенский университет, Тюбинген, ФРГ

Резюме. Строятся и обсуждаются некоторые явные примеры марковских расширений полугрупп вполне положительных отображений в W^*-алгебре 2×2-матриц. В частности, получено непрерывное марковское расширение некоторой полугруппы неквазисвободных отображений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этом разделе дается мотивировка для изучения расширений на W^*-алгебрах и краткий обзор современного состояния теории. Затем формулируются основные определения и строится пример для дальнейшего обсуждения.

1.1. Мотивировка

Изучение расширений вполне положительных отображений в W^*-алгебрах представляет интерес по крайней мере для трех областей: теории унитарных расширений в гильбертовом пространстве, теории случайных процессов и физики необратимых процессов.

Унитарные расширения сжатий в гильбертовом пространстве представляют собой блестящий пример метода расширений в функциональном анализе и стимулируют его дальнейшее развитие. Унитарные расширения дают мощный инструмент в изучении структуры и спектральной теории несамосопряженных сжатий в гильбертовом пространстве (см. монографию [13]), и расширения вполне положительных отображений в W^*-алгебрах могут оказаться полезными в анализе таких отображений

Построение и изучение случайных процессов является важным аспектом теории вероятностей. Определение случайного стационарного процесса, отвечающего полугруппе дважды стохастических переходных операторов, получается из нашего определения расширения в п. 1.3, если все рассматриваемые W^*-алгебры являются коммутативными. С этой точки зрения некоммутативная теория расширений может рассматриваться как составная часть некоммутативной теории веро-

---

[1]) Kümmerer B. Examples of Markov dilations over the 2×2 matrices. In: Lect. Notes in Math., v. 1055, Springer-Verlag, 1984, p. 228—244.

ятностей, где расширение рассматривается как некоммутативный (или квантовый) случайный процесс.

В квантовой статистической механике обычно принимается, что необратимая эволюция может быть математически описана полугруппой вполне положительных отображений в C^*-алгебре. В этом контексте расширение рассматриваемой полугруппы можно считать частичным описанием окружения данной необратимой квантовой системы, и, таким образом, расширения могут быть использованы для получения некоторых представлений о механизме необратимости.

1.2. Ретроспективный обзор

В коммутативных W^*-алгебрах расширение можно построить для любой однопараметрической полугруппы вполне положительных дважды стохастических операторов. В теории вероятностей это известно как колмогоровская реконструкция случайного процесса по его переходным вероятностям. В терминах функционального анализа это построение было проведено в [6].

Если W^*-алгебра некоммутативна, то построение расширений оказывается более сложным. На алгебрах канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений (ККС и КАС) квазисвободные вполне положительные отображения получаются действием функтора вторичного квантования из сжатий в («одночастичном») гильбертовом пространстве. Этот функтор, примененный к унитарному расширению исходного сжатия, приводит к расширениям этих отображений, см. [2], [4]. В работе [1] Аккарди, Фриджерио и Льюис развили теорию возмущений для расширений, которая при применении к квазисвободным отображениям дает расширение некоторых возмущений квазисвободных отображений.

В работе [8] мы начали исследования по общей теории расширений, которые вскрыли тесную связь между вполне положительным отображением и его минимальным марковским расширением, существенно обусловленную свойством марковости, как указывалось в примере из работы [14]. Мы показали, как строятся марковские расширения для большого класса вполне положительных отображений.

В настоящей статье мы рассмотрим некоторые расширения над 2×2-матрицами. Хотя этот случай и является частным, все результаты и их интерпретацию можно принять за образец и значительно обобщить. В частности, это относится к непрерывному расширению, полученному в разд. 4. Оно указывает метод нахождения непрерывных марковских расширений, тогда как построение работы [8] применимо только к дискретному случаю.

Наша работа основывается на статьях [8]—[11], и я хотел бы воспользоваться возможностью поблагодарить В. Шрёдера за плодотворное сотрудничество, приведшее к появлению работ [9], [10] (и не только их).

1.3. Определения

Рассмотрим пару $(\mathfrak{A}, \varphi)$, где $\mathfrak{A}$ является W^*-алгеброй, а φ — точное нормальное состояние на $\mathfrak{A}$. *Морфизм* $T\colon (\mathfrak{A}_1, \varphi_1) \to (\mathfrak{A}_2, \varphi_2)$ — это сохраняющее единицу вполне положительное отображение $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, такое что $T^*\varphi_2 = \varphi_1$. Отсюда вытекает, что T нормально. Морфизм $T\colon (\mathfrak{A}, \varphi) \to (\mathfrak{A}, \varphi)$ называется *морфизмом пары* $(\mathfrak{A}, \varphi)$. Морфизм $P\colon (\mathfrak{A}_1, \varphi_1) \to (\mathfrak{A}_2, \varphi_2)$ называется *условным ожиданием*, если существует (с необходимостью единственное) вложение $i\colon (\mathfrak{A}_2, \varphi_2) \to (\mathfrak{A}_1, \varphi_1)$, такое что $P \cdot i = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}_2}$. В частном случае, когда $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$, $\varphi_2 = \varphi_1|_{\mathfrak{A}_2}$, оператор P является условным ожиданием в обычном смысле и мы пишем

$$P\colon (\mathfrak{A}_1, \varphi_1) \to \mathfrak{A}_2.$$

Тройка $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ называется *дискретной* (*непрерывной*) *динамической системой*, если $t \to T_t$ является (поточечно слабо $*$-непрерывным) представлением полугруппы $\mathbb{T}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ морфизмами пары $(\mathfrak{A}, \varphi)$, причем $T_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$. В дискретном случае $T_t = (T_1)^t$, и мы иногда пишем $(\mathfrak{A}, \varphi, T_1)$ вместо $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$.

Если каждый морфизм T_t, $t \in \mathbb{T}_+$, является $*$-автоморфизмом, то мы называем $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ *обратимой динамической системой* и рассматриваем представление $\mathbb{T}_+$ как расширение до представления $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $(\mathbb{T} = \mathbb{R})$. Сформулируем теперь наше центральное

Определение. *Расширением* динамической системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ мы называем совокупность $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t; P)$, где $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t)$ — обратимая динамическая система, а $P\colon (\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}) \to (\mathfrak{A}, \varphi)$ — условное ожидание с соответствующим вложением $i\colon (\mathfrak{A}, \varphi) \to (\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi})$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{A}, \varphi) \arrow[r, "T_t"] \arrow[d, "i"'] & (\mathfrak{A}, \varphi) \\
(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}) \arrow[r, "\hat{T}_t"'] & (\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}) \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

коммутирует для всех $t \in \mathbb{T}_+$.

Если $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ — дискретная динамическая система и если диаграмма коммутирует только для $t = 0$, $t = 1$, то мы называем $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t; P)$ *расширением первого порядка* для $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$.

Если $I \subseteq \mathbb{T}$, то мы обозначаем $\mathfrak{A}_I := \bigvee_{t \in I} \hat{T}_t i(\mathfrak{A})$ W^*-подалгебру $\hat{\mathfrak{A}}$, порожденную алгеброй $\bigcup_{t \in I} \hat{T}_t i(\mathfrak{A})$. Заметим, что условное ожидание P_I системы $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi})$ на $\mathfrak{A}_I$ существует (см., например, [8], 2.1.3). Расширение $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t; P)$ системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ называется *минимальным*, если $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{(-\infty, \infty)}$, и *марковским*, если для всех $x \in \mathfrak{A}_{[0, \infty)}$: $P_{[0]}(x) = P_{(-\infty, 0]}(x)$.

1.4. Полугруппы над 2 × 2-матрицами

Далее $\mathfrak{A}$ обозначает W^*-алгебру всех 2×2-матриц и φ — фиксированное точное неследовое состояние на $\mathfrak{A}$. Таким образом, можно считать, что

$$\varphi(x) = \eta x_{11} + (1 - \eta) x_{22}, \quad x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

для некоторого вещественного числа η, $0 < \eta < {}^1\!/_2$.

Нетрудно доказать ([8], 2.1.8; см. также [7], § 2), что если динамическая система $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$ имеет расширение, то каждый морфизм R_t коммутирует с элементами группы модулярных автоморфизмов σ_t^{φ}. В [3] показано, что всякая непрерывная динамическая система $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$, удовлетворяющая этому условию, имеет вид $R_t\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} x_{11} + (1 - e^{-\nu t})(1 - \eta)(x_{22} - x_{11}) & e^{-(\lambda - i\omega)\, t}\, x_{12} \\ e^{-(\lambda + i\omega)\, t}\, x_{21} & x_{22} + (1 - e^{-\nu t})\, \eta\, (x_{11} - x_{22}) \end{pmatrix}$$

где ω, λ, ν — вещественные числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \nu \leqslant 2\lambda$.

В физике такие отображения известны как «эволюции Блоха», описывающие релаксацию частицы со спином ${}^1\!/_2$ в магнитном поле при конечной температуре. Более подробно об этом см. [10].

Варилли [14] построил расширение этой непрерывной динамической системы, не обладающее марковским свойством (ср. [9]). Однако в соответствии с замечанием в п. 1.2 представляется желательным найти расширение этой динамической системы, которое обладает марковским свойством.

Удобно разложить операторы полугруппы R_t в следующем виде. Положим $S_t\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} x_{11} + (1 - e^{-\nu t})(1 - \eta)(x_{22} - x_{11}) & e^{-(\nu/2 - i\omega)\, t}\, x_{12} \\ e^{-(\nu/2 + i\omega)\, t}\, x_{21} & x_{22} + (1 - e^{-\nu t})\, \eta x_{22} \end{pmatrix}$$

и T_t: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{11} & e^{-(\lambda-\nu/2)\,t}\,x_{12} \\ e^{-(\lambda-\nu/2)\,t}\,x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда $(\mathfrak{A}, \varphi, S_t)$ и $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ являются непрерывными динамическими системами и $R_t = S_t \cdot T_t = T_t \cdot S_t$ для $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Удобство этого разложения обусловлено тем, что $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как C^*-алгебру канонических антикоммутационных соотношений над одномерным гильбертовым пространством $\mathbb{C}$. Тогда S_t оказывается квазисвободным вполне положительным отображением, отвечающим сжатию $z \to \to e^{-(\nu/2+i\omega)t}z$ на $\mathbb{C}$ (ср. [4]). Поэтому для динамической системы $(\mathfrak{A}, \varphi, S_t)$ марковское расширение может быть построено с помощью «механизма квазисвободного расширения», и если удастся построить марковское расширение для $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$, то можно будет скомбинировать эти расширения как в [14], [9], чтобы получить искомое расширение для $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$. Поэтому в дальнейщем мы в основиом рассматриваем динамическую систему $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$.

2. ДИСКРЕТНОЕ РАСШИРЕНИЕ

В этом разделе обсуждается расширение для дискретной версии динамической системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$.

2.1. Конструкция дискретного расширения

Положим

$$T\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}\colon \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{11} & \rho x_{12} \\ \rho x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } \rho := e^{-(\lambda-\nu/2)}.$$

Тогда $T = T_t$ для $t = 1$, и $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ является дискретной динамической системой. Как обычно, для унитарного U в W^*-алгебре $\mathcal{M}$ мы обозначим через $\operatorname{Ad} U$ внутренний автоморфизм $\mathcal{M}$, задаваемый соотношением $\operatorname{Ad} U(x) = U^* x U$.

Пусть $\psi \in \mathbb{R}$ таково, что $\frac{1}{2}(e^{-i\psi} + e^{i\psi}) = \rho$; введем два унитарных оператора в $\mathfrak{A}$:

$$U_\psi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix}, \quad U_{-\psi} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix}.$$

Тогда для $x \in \mathfrak{A}$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Ad} U_{-\psi}(x) + \frac{1}{2} \operatorname{Ad} U_\psi(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{1}{2}(e^{-i\psi} + e^{i\psi})\,x_{12} \\ \frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi})\,x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = T(x).$$

Это представление T в виде выпуклой комбинации порождает расширение T согласно следующей общей процедуре, описанной в ([8], 4.3.2—4.3.6). Положим $X := \{-1, 1\}$ и обозначим μ вероятностную меру на X, заданную формулой $\mu(\{-1\}) = \frac{1}{2} = \mu(\{1\})$. Тогда $\mathcal{D} := L^\infty(X, \mu)$ является двумерной коммутативной W^*-алгеброй и W^*-алгебра $\mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A} \otimes \mathcal{D}$ может быть записана так же, как $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$. Используя любое из этих представлений $\mathfrak{A}_1$, определим конструкцию расширения первого порядка следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \otimes \mathcal{D} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A},\\
&\varphi_1 = \varphi \otimes \mu = \frac{1}{2}\varphi \oplus \frac{1}{2}\varphi,\\
&i_1\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1\colon\ x \to x \otimes I = x \oplus x,\\
&P_1\colon \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}\colon\ x \otimes f \to \mu(f)\, x,\ \ x \oplus y \to \frac{1}{2}(x + y),\\
&T_1\colon \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1\colon\ x \oplus y \to \operatorname{Ad} U_{-\psi}(x) \oplus \operatorname{Ad} U_{\psi}(x).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что определенная таким образом система $(\mathfrak{A}_1, \varphi_1, T_1; P)$ является расширением первого порядка для $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$.

Далее действуем следующим образом: положим $\hat{X} := X^{\mathbf{Z}}$. Тогда $\hat{\mu} := \otimes\mu$ является вероятностной мерой на $\hat{X}$. W^*-алгебра $\hat{\mathcal{D}} := L^\infty(\hat{x}, \hat{\mu})$ может быть также записана как бесконечное W^*-тензорное произведение $\hat{\mathcal{D}} = \bigotimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{D}$. Положим

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A} \otimes \hat{\mathcal{D}},\\
&\hat{\varphi} := \varphi \otimes \hat{\mu},\\
&i\colon \mathfrak{A} \to \hat{\mathfrak{A}}\colon\ x \to x \otimes I,\\
&P\colon \hat{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}\colon\ x \otimes f \to \hat{\mu}(f) \cdot x.
\end{aligned}$$

Пусть σ обозначает правый сдвиг в $\hat{\mathcal{D}} = \bigotimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{D}$, тогда определим автофорфизм в $\hat{\mathfrak{A}}$ по формуле $\hat{\sigma} := \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma$. Если теперь представить $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \otimes \hat{\mathcal{D}}$ как

$$\hat{\mathfrak{A}} = \Big(\bigotimes_{-N} \mathcal{D}\Big) \otimes (\mathfrak{A} \otimes \mathcal{D}) \otimes \Big(\bigotimes_{N} \mathcal{D}\Big),$$

то средний сомножитель отождествляется с алгеброй $\mathfrak{A}_1$ расширения первого порядка, и мы можем определить на $\hat{\mathfrak{A}}$ автоморфизм $\hat{T}_1 := \mathrm{Id} \otimes T_1 \otimes \mathrm{Id}$ как тривиальное продолжение T_1 на $\mathfrak{A}_1$. Наконец, положим $\hat{T} := \hat{T}_1 \cdot \hat{\sigma}$.

Предложение. *Система* $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}; P)$ *является минимальным марковским расширением системы* $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$.

Доказательство этого предложения дано в ([9], § 4) и в ([8], 4.3.5).

2.2. Физическая интерпретация

Будем рассматривать алгебру $\mathfrak{A} = M_2$ как алгебру наблюдаемых частицы со спином $^1/_2$, массой m и электрическим зарядом e, так что компоненты спина описываются матрицами Паули σ_x, σ_y, σ_z. Тогда T_t описывают релаксацию z-компоненты спина.

Вводя магнитное поле $B := \frac{m}{e}\psi$ и гамильтонианы $H_{\pm} := = \pm\frac{e}{2m}B\cdot\sigma_z$, получаем $\operatorname{Ad} U_{\pm\psi}(x) = e^{-iH_{\pm}}xe^{iH_{\pm}}$ для $x \in \mathfrak{A}$. Таким образом, $\operatorname{Ad} U_{\pm}$, соответственно $\operatorname{Ad} U_{-\psi}$, описывает действие магнитного поля величины B, соответственно $-B$, на z-компоненту спина в течение единицы времени. Интерпретируя μ как распределение вероятностей, мы можем считать, что динамическая система $(\mathfrak{A}_1, \varphi_1, T_1)$ описывает ситуацию, когда автоморфизмы $\operatorname{Ad} U_{\psi}$ и $\operatorname{Ad} U_{-\psi}$ действуют с вероятностью $^1/_2$.

Следовательно, построенное расширение первого порядка является моделью спиновой системы в магнитном поле за единицу времени. Магнитное поле принимает значения $-B$ и B с вероятностью $^1/_2$. Таким образом, множество $X = \{-1, 1\}$ возникает как фазовое пространство классической системы, которая представляет магнитное поле с двумя возможными значениями $-B$ и B, а $\mathscr{D}$ является алгеброй наблюдаемых этой классической системы. В то же время она оказывается центром алгебры $\mathfrak{A}_1$, которая рассматривается как алгебра наблюдаемых составной системы с состоянием $\varphi\otimes\mu$. Наконец, T_1 следует рассматрнвать как эволюцию составной системы за единицу времени.

Обращаясь к полному расширению, представим динамическую систему $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T})$ в более наглядном виде

$$\left.\begin{array}{r} (\mathfrak{A}, \varphi) \\ \otimes \\ \ldots\otimes(\mathscr{D}, \mu)\otimes(\mathscr{D}, \mu)\otimes(\mathscr{D}, \mu) \end{array}\right\} T_1 \quad \otimes(\mathscr{D}, \mu)\otimes(\mathscr{D}, \mu)\otimes\ldots$$

$$\xrightarrow[\sigma]{\qquad\qquad}$$

Ограничение $\hat{T}$ на центр алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ является канонически сопряженным к правому сдвигу σ на $\hat{\mathscr{D}}$. Таким образом, оно естественно интерпретируется как марковский процесс, описывающий случайное магнитное поле с двумя возможными значениями B и $-B$ и с переходной вероятностью $^1/_2$. Наблюдаемые центра алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ оказываются классическими наблюдаемыми, связанными с марковским процессом, описывающим это магнитное поле.

Учитывая интерпретацию, данную выше для расширения первого порядка, мы видим, что T_1 описывает взаимодействие спиновой системы со значением марковского процесса в нулевой момент времени. Таким образом, полное расширение является моделью частицы со спином $^1/_2$ в случайном магнитном поле, принимающем значения B или $-B$ в направлении оси z с вероятностью $^1/_2$ и изменяющем свое значение через единицу времени с вероятностью $^1/_2$.

2.3. Дополнительное обсуждение

Согласимся далее записывать элементы алгебры $\mathfrak{A}\otimes\mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ — произвольная W^*-алгебра, в виде 2×2-матриц с элементами из $\mathscr{M}$. Определим унитарный элемент u в $\mathscr{D} = L^\infty(X, \mu)$ соотношениями $u(-1) = e^{-i\psi}$ и $u(1) = e^{i\psi}$. Тогда

$$U := U_{-\psi} \oplus U_{\psi} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

является унитарным элементом в $\mathfrak{A}_1$, таким что $T_1 = \mathrm{Ad}\cdot U$.

Чтобы получить аналогичное представление для $\hat{T}_1$, запишем точку $\xi \in \hat{X} = X^{\mathrm{Z}}$ в виде двусторонней последовательности $(\xi_k)_{k\in \mathrm{Z}}$ с $\xi_k \in \{-1, 1\}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда тривиальное продолжение u до элемента $\hat{\mathscr{D}}$ дается формулой

$$v((\xi_k)_{k\in \mathrm{Z}}) := \begin{cases} e^{-i\psi}, & \xi_0 = -1, \\ e^{i\psi}, & \xi_0 = 1, \end{cases}$$

определяющей унитарный элемент в $\hat{\mathscr{D}} = L^\infty(\hat{X}, \hat{\mu})$.
Полагая

$$V := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in M_2 \otimes \hat{\mathscr{D}} = \hat{\mathfrak{A}},$$

мы получаем $\hat{T}_1 = \mathrm{Ad}\, V$ и, следовательно, $\hat{T} = \mathrm{Ad}\, V\cdot\hat{\sigma}$. Это позволяет найти более явное выражение для $\hat{T}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Если x — элемент алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, то

$$\hat{T}^n(x) = V^*\cdot\hat{\sigma}(V^*)\ \dots\ \hat{\sigma}^{n-1}(V^*)\cdot\hat{\sigma}^n(x)\cdot\hat{\sigma}^{n-1}(V)\ \dots\ \hat{\sigma}(V)\cdot V =$$
$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & v^*\sigma(v^*)\dots\sigma^{n-1}(v^*) \end{pmatrix}\cdot\hat{\sigma}^n(x)\cdot\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma^{n-1}(v)\dots\sigma(v)\cdot v \end{pmatrix} =$$
$$= AdV_n\cdot\hat{\sigma}^n(x),$$

где

$$V_n := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & v_n \end{pmatrix}, \quad v_n := \sigma^{n-1}(v) \ldots \sigma(v) \cdot v, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Легко доказывается, что унитарные элементы $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют свойству коцикла

$$v_{n+m} = \sigma^n(v_m) \cdot v_n, \quad n, \ m \in \mathbb{N}.$$

Полагая $v_0 := I$, $v_{-n} := \sigma^{-n}(v_n^*)$, мы получаем полный унитарный левый коцикл группы автоморфизмов $(\sigma^n)_{n \in Z}$.

Таким образом, основными ингредиентами нашего расширения являются обратимая динамическая система $(\hat{\mathscr{D}}, \hat{\mu}\ \sigma)$ — бернуллиевский сдвиг с веротностью $^1/_2$ и унитарный левый коцикл для σ. Более детальное рассмотрение показывает, что марковское свойство расширения отражается в том, что унитарные элементы v_n и $\sigma^n(v_m)$, n, $m \in \mathbb{N}$, рассматриваемые как случайные величины на $(\hat{X}, \mu)$, статистически независимы. В разд. 3 мы покажем, что это характерно для общей структуры любого марковского расширения системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$.

Вычисление элементов коцикла дает подсказку для нахождения непрерывного расширения.

Если $m \in \mathbb{N}$, $\xi = (\xi_k)_{k \in Z} \in \hat{X}$, то

$$\sigma^m(v)((\xi_k)_{k \in Z}) = \begin{Bmatrix} e^{-i\psi}, & \xi_m = -1 \\ e^{i\psi}, & \xi_m = 1 \end{Bmatrix} = e^{i\xi_m \psi}.$$

Таким образом, v_n является функцией на $\hat{X}$, задаваемой формулой

$$v_n((\xi_k)_{k \in Z}) := e^{i\xi_{n-1}\varphi} \ \ldots \ e^{i\xi_0 \psi} = e^{i\psi\left(\sum\limits_{m=0}^{n-1} \xi_m\right)}.$$

На вероятностном пространстве $(\hat{X}, \hat{\mu})$ введем случайные величины

$$X_n((\xi_k)_{k \in Z}) := \xi_n, \quad (n \geqslant 0),$$

$$B_n((\xi_k)_{k \in Z}) := \sum_{m=0}^{n-1} \xi_m, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Очевидно, $B_n = \sum\limits_{m=0}^{n-1} X_m$, $X_n = B_{n+1} - B_n (n \in \mathbb{N})$ и $(X_n)_{n \geqslant 0}$ является случайной последовательностью бросаний симметричной монеты, тогда как $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ есть соответствующее случайное блуждание на одномерной решетке, т. е. дискретный аналог броуновского движения. Элементы коцикла записываются в виде $v_n = e^{i\psi B_n}$.

3. ОБЩАЯ СТРУКТУРА МИНИМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО РАСШИРЕНИЯ СИСТЕМЫ ($\mathfrak{A}$, φ, T_t)

В этом разделе мы докажем теорему, которая полностью описывает структуру минимального марковского расширения динамической системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$. В дискретном случае соответствующая структура была описана в п. 2.3. Для упрощения обозначений положим $\alpha := (\lambda - \nu/2)$, так что T_t дается формулой

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{11} & e^{-\alpha t} x_{12} \\ e^{-\alpha t} x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема. (A) *Пусть* $(\mathscr{C}, \tau, \sigma_t)$ *— непрерывная динамическая обратимая система, где* τ *— точное нормальное следовое состояние. Пусть* $(v_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *— слабо* $*$*-непрерывный унитарный левый коцикл для* $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. *Для* $I \subseteq \mathbb{R}$ *обозначим* $\mathscr{C}_I$ W^**-подалгебру* $\mathscr{C}$, *порождаемую элементами* $\{v_t\}_{t \in I}$, *и* Q_I *— условное ожидание* $(\mathscr{C}, \tau)$ *на* $\mathscr{C}_I$. *Если коцикл* $(v_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *удовлетворяет условиям*

$$(\alpha)\, \tau(v_1) = e^{-\alpha},\ \alpha > 0;\ \tau(v_t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$(\beta)\, \mathscr{C} = \mathscr{C}_{(-\infty, \infty)},$$

$$(\gamma)\, Q_{(-\infty, 0]}(x) = \tau(x) \cdot \mathrm{I} \text{ для всех } x \in \mathscr{C}_{[0, \infty)},$$

то мы получаем минимальное марковское расширение $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t; P)$ *системы* $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$, *полагая*

$$\hat{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C},\quad \hat{\varphi} := \varphi \otimes \tau,\quad \hat{T}_t := Ad V_t \cdot \hat{\sigma}_t,$$

где

$$V_t := \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & v_t \end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_t := \mathrm{Id}\mathfrak{A} \otimes \sigma_t,$$

и определяя P *как условное ожидание* $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi})$ *на* $(\mathfrak{A}, \varphi)$ *по формуле* $x \otimes \rho \to \tau(y) \cdot x$ $(x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathscr{C})$.

(B) *Обратно, всякое минимальное марковское расширение системы* $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ *имеет вид, описанный в* (A).

Доказательство утверждения (A): Записывая свойство коцикла в виде $\sigma_t(v_s) = v_{t+s} \cdot v_t^*$, получим, что $\sigma_t(\mathscr{C}_{(-\infty, 0]}) = \mathscr{C}_{(-\infty, t]}$. Таким образом, свойство (γ) влечет

$$Q_{(-\infty, t]}(\sigma_t(x)) = \tau(x) \cdot \mathrm{I}$$

для всех $x \in \mathscr{C}_{[0, \infty)}$. Отсюда получаем для всех $t_1, t_2 \geqslant 0$:

$$\tau(v_{t_1+t_2}) = \tau(\sigma_{t_1}(v_{t_2}) \cdot v_{t_1}) =$$

$$= \tau(Q_{(-\infty, t_1]}[\sigma_{t_1}(v_{t_2}) \cdot v_{t_1}]) =$$

$$= \tau(\tau(v_{t_2}) \cdot \mathrm{I} \cdot v_{t_1}) = \tau(v_{t_1}) \cdot \tau(v_{t_2}).$$

Из этого функционального уравнения вместе с непрерывностью и свойством (α) выводим $\tau(v_t) = e^{-\alpha t}$ для $t \geqslant 0$.

Поскольку $t \to v_t$ — левый коцикл для $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, унитарная функция $t \to V_t$ является левым коциклом для группы автоморфизмов $(\hat{\sigma}_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Отсюда легко получаем, что $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t)$ является непрерывной обратимой динамической системой. Для данного

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$$

получаем

$$\hat{T}_t i(x) = \operatorname{Ad} V_t \cdot (\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma_t)(x \otimes \mathrm{I}) = \operatorname{Ad} V_t (x \otimes \mathrm{I}) =$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cdot \mathrm{I} & x_{12} \cdot v_t \\ x_{21} \cdot v_t^* & x_{22} \cdot \mathrm{I} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}.$$

Отсюда вытекает свойство расширения

$$P\hat{T}_t i(x) = P \begin{pmatrix} x_{11} \cdot \mathrm{I} & x_{12} \cdot v_t \\ x_{21} \cdot v_t^* & x_{22} \cdot \mathrm{I} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau(x_{11} \cdot \mathrm{I}) & \tau(x_{12} \cdot v_t) \\ \tau(x_{21} \cdot v_t^*) & \tau(x_{22} \cdot \mathrm{I}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11} & e^{-\alpha t} \cdot x_{12} \\ e^{-\alpha t} \cdot x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = T_t(x)$$

(здесь i обозначает вложение $\mathfrak{A}$ в $\hat{\mathfrak{A}}$, соответствующее P). Легко проверить (см., например, [8], 5.13), что W^* — подалгебра $\hat{\mathfrak{A}}$, порожденная $i(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \otimes I$ и $\hat{T}_t i(\mathfrak{A})$, совпадает с $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}_{\{t\}}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Отсюда по свойству (β) $\mathfrak{A}_{(-\infty, \infty)} = \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}_{(-\infty, \infty)} = \hat{\mathfrak{A}}$, что доказывает минимальность.

Далее $\mathfrak{A}_{(-\infty, 0]} = \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}_{(-\infty, 0]}$, откуда $P_{(-\infty, 0]} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \otimes Q_{(-\infty, 0]}$, и для любого элемента

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}_{[0, \infty)} = \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}_{[0, \infty)}, \quad x_{ij} \in \mathscr{C}_{[0, \infty)},$$

получаем с помощью (γ):

$$P_{(-\infty, 0]}(x) = \begin{pmatrix} Q_{(-\infty, 0]}(x_{11}) & Q_{(-\infty, 0]}(x_{12}) \\ Q_{(-\infty, 0]}(x_{21}) & Q_{(-\infty, 0]}(x_{22}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau(x_{11}) \cdot \mathrm{I} & \tau(x_{12}) \cdot \mathrm{I} \\ \tau(x_{21}) \cdot \mathrm{I} & \tau(x_{22}) \cdot \mathrm{I} \end{pmatrix} = P_{[0]}(x),$$

что доказывает марковское свойство.

Доказательство утверждения (B): Предположим теперь, что $(\widehat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t; P)$ — минимальное марковское расширение для $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$. В ([8], 5.13, 5.14) мы доказали, что $(\widehat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}) = (\mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}, \varphi \otimes \tau)$ для некоторой W^*-алгебры $\mathscr{C}$ с точным нормальным состоянием τ. Согласно ([8], 2.3.3), можно предположить, что τ — след. Далее, в ([8], 5.13, 5.14) показано, что для любого $t \in \mathbb{R}$ существует унитарный v_t в $\mathscr{C}$, такой что для $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$

$$\hat{T}_t \begin{pmatrix} x_{11} \cdot \mathrm{I} & x_{12} \cdot \mathrm{I} \\ x_{21} \cdot \mathrm{I} & x_{22} \cdot \mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cdot \mathrm{I} & x_{12} \cdot v_t \\ x_{21} \cdot v_t^* & x_{22} \cdot \mathrm{I} \end{pmatrix};$$

откуда

$$\hat{T}_t(x \otimes \mathrm{I}) = V_t^*(x \otimes \mathrm{I}) V_t = \operatorname{Ad} V_t(x \otimes \mathrm{I}), \text{ где } V_t := \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & v_t \end{pmatrix}.$$

Для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ получаем

$$V_{t_1+t_2}^* \cdot (x \otimes \mathrm{I}) \cdot V_{t_1+t_2} = \hat{T}_{t_1+t_2}(x \otimes \mathrm{I}) = \hat{T}_{t_1} \cdot \hat{T}_{t_2}(x \otimes \mathrm{I}) =$$
$$= \hat{T}_{t_1}(V_{t_2}^* \cdot (x \otimes \mathrm{I}) \cdot V_{t_2}) = \hat{T}_{t_1}(V_{t_2}^*) \cdot V_{t_1}^* \cdot (x \otimes \mathrm{I}) \cdot V_{t_1} \cdot \hat{T}_{t_1}(V_{t_2}),$$

откуда следует $V_{t_1+t_2} = V_{t_1} \cdot \hat{T}_{t_1}(V_{t_2})$ в силу инвариантности элементов $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ относительно $(\hat{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ([8], 3 1.4, см. также (5.14). Поэтому, $t \to V_t^*$ является слабо $*$-непрерывным унитарным левым коциклом для $(\hat{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Поэтому $\operatorname{Ad} V_t^* \cdot \hat{T}_t$ является поточечно слабо $*$-непрерывной группой $*$-автоморфизмов системы $(\widehat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi})$, оставляющей инвариантным каждый элемент алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathrm{I}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ad} U_t^* \cdot \hat{T}_t = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma_t$ для некоторой группы автоморфизмов σ_t системы $(\mathscr{C}, \tau)$.

Таким образом, мы нашли непрерывную обратимую динамическую систему $(\mathscr{C}, \tau, \sigma_t)$, и из свойства коцикла для $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$ является поточечно слабо $*$-непрерывной группой циклом для группы автоморфизмов $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Из свойства расширения мы видим, что $\tau(v_t) = e^{-\alpha t}$ для $t \geqslant 0$, откуда следует свойство (α). Как в доказательстве утверждения (A), мы видим, что минимальность $\widehat{\mathfrak{A}}$ влечет за собой условие (β). Наконец, те же рассуждения, что и при доказательстве утверждения (A), показывают, что $\mathfrak{A}_{[0, \infty)} = \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}_{[0, \infty)}$ и $\mathfrak{A}_{(-\infty, 0]} = \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C}_{(-\infty, 0]}$, откуда $P_{(-\infty, 0]} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \otimes Q_{(-\infty, 0]}$. Поэтому, для данного $x \in \mathscr{C}_{[0, \infty)}$, $\mathrm{I} \otimes x$ является элементом $\mathfrak{A}_{[0, \infty)}$ и из марковского свойства получаем

$$\mathrm{I} \otimes Q_{(-\infty, 0]}(x) = P_{(-\infty, 0]}(\mathrm{I} \otimes x) = P_{[0]}(\mathrm{I} \otimes x) = \mathrm{I} \otimes \tau(x) \cdot \mathrm{I},$$

откуда следует (γ). ■

ПРИМЕЧАНИЯ

(1). Мы доказали теорему для непрерывных расширений, но такие же рассуждения годятся и для дискретных расширений.

(2). В условии (α) можно опустить требование $\tau(v_t) \in \mathbb{R}$, используя $v_t' := \frac{|\tau(v_t)|}{\tau(v_t)} \cdot v_t$ вместо v_t. Поэтому (α) по существу является условием нормировки.

(3). Если заменить условие (α) условием (α'): $\tau(v_t) = e^{-\alpha t}$ и опустить (γ), то получится структурная теорема для необязательно марковских расширений. Эта теорема полностью описывает расширение системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$ в терминах свойств обратимой динамической системы $(\mathscr{C}, \tau, \sigma_t)$, причем ($\alpha$) отражает свойство расширения, (β) свойство минимальности, а (γ) марковское свойство расширения.

В [8] мы получили дискретные расширения путем построения расширения первого порядка, которое затем продолжалось до марковского расширения. Это не имеет аналога в непрерывном случае, и доказанная теорема может рассматриваться как подходящее обобщение. Расширение первого порядка заменяется коциклом (v_t), как видно из рассуждений в разд. 2.

4. МАРКОВСКОЕ РАСШИРЕНИЕ (ДЛЯ $\mathfrak{A}$, φ, T_t)

В разд. 2 мы показали, что бериуллиевский сдвиг может быть использован для построения расширения дискретной динамической системы $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$. В качестве непрерывного аналога мы используем обобщенный случайный процесс белого шума. Мы собираемся построить непрерывную обратимую динамическую систему $(\mathscr{C}, \tau, \sigma_t)$, удовлетворяющую условиям теоремы разд. 3. В этом специфическом примере ситуации, описанной в разд. 3, мы будем сохранять введенные там обозначения.

На $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}'(\mathbb{R})$, пространстве, сопряженном к пространству Шварца $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, существует вероятностная мера $\hat{\mu}$, такая что для любого $f \in \mathfrak{S}$

$$\int_{\mathfrak{S}'} e^{i\langle f', f\rangle} d\hat{\mu}(f') = e^{-\alpha \|f\|^2},$$

где $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda$, λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$ (см. [5], с. 122). Положим $\mathscr{C} := L^\infty(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$ и определим состояние τ формулой

$$\tau(x) := \int_{\mathscr{C}'} x(f') d\hat{\mu}(f') \quad \text{для} \quad x \in \mathscr{C},$$

Отображения s_t^*, сопряженные к правым сдвигам s_t на $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, образуют группу преобразований $(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$, сохраняющих меру, и, таким образом, порождают непрерывную обратимую динамическую систему $(\mathscr{C}, \tau, \sigma_t)$.

Отождествим $L^\infty(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$ с ГНС-представлением алгебры $\mathscr{C}$, отвечающим состоянию τ, в гильбертовом пространстве $L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$. Элемент $f \in \mathfrak{S}$, рассматриваемый как функция на $\mathfrak{S}'$, принадлежит $L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$ и имеет норму $\left(\int |f|^2 d\lambda\right)^{1/2}$ ([5], с. 151). Таким образом, мы получаем вложение $\mathfrak{S}$ в $L^2(\mathfrak{S}', \mu)$, которое является изометрией в L^2 — норме на $\mathfrak{S} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ и поэтому может быть продолжено до изометрического вложения $L^2(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$. Обозначим канонический образ характеристикой функции $\chi_{[0, t]} \in L^2(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$ через $B(0, t)$. Далее, для $t \geqslant 0$ обозначим $(f_n(0, t))_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность пробных функций из $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$, такую что

$$\lim_{n \to \infty} f_n(0, t) = \chi_{[0, t]} \quad \text{в} \quad L^2(\mathbb{R}),$$

и обозначим $B_n(0, t)$ канонический образ $f_n(0, t)$ в $L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$. Тогда имеем

$$\lim_{n \to \infty} B_n(0, t) = B(0, t) \quad \text{в} \quad L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu}).$$

Семейство случайных величин $(B(0, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ на $(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$ описывает процесс броуновского движения ([5], с. 151). По аналогии с дискретным случаем мы можем определить унитарные элементы, образующие нужный нам коцикл: положим для $t \in \mathbb{R}$

$$v_t := e^{iB(0, t)} := \lim_{n \to \infty} e^{iB_n(0, t)},$$

где предел берется в $L^2(\mathfrak{S}', \hat{\mu})$. Тогда v_t — унитарный элемент в $L^\infty(\mathfrak{S}', \hat{\mu}) = \mathscr{C}$.

Предложение. *Функция $t \to v_t$ является слабо $*$-непрерывным унитарным коциклом группы $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, который удовлетворяет условиям (α), (β), (γ) в части (A) структурной теоремы разд. 3.*

Доказательство, использующее стандартную технику теории броуновского движения, содержится в [11].

Как в разд. 3, положим

$$\hat{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A} \otimes \mathscr{C},$$

$$\hat{\varphi} := \varphi \otimes \tau,$$

$$\hat{T}_t := \mathrm{Ad}\, V_t \cdot \hat{\sigma}_t, \quad \text{где} \quad V_t := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & v_t \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_t := \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma_t,$$

$$P: (\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}) \to \mathfrak{A}: \ x \otimes y \to \tau(y) \cdot x, \quad x \in \mathfrak{A}, \quad y \in \mathscr{C}.$$

Из предложения и теоремы разд. 3 мы получаем желаемый результат.

Теорема. *Система* $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t; P)$ *является минимальным марковским расширением для* $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$.

Интерпретация, данная в разд. 2.2 для дискретного расширения, имеет естественный непрерывный аналог. Динамическая система $(\mathscr{C}, \tau, \sigma_t)$ описывает внешнее магнитное поле, имеющее характер белого шума. Для $\alpha > 0$ гамильтониан

$$H_\alpha := \frac{1}{2\alpha} B(0, \alpha) \cdot \sigma_z = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} B(0, \alpha) & 0 \\ 0 & -B(0, \alpha) \end{pmatrix} \text{ на } \hat{\mathfrak{A}}$$

описывает влияние этого магнитного поля на частицу со спином $\frac{1}{2}$ за время α, где α рассматривается как единица времени. Это отвечает следующей формуле для дискретного случая, которая легко вытекает из 2.3: для $x \in i(\mathfrak{A})$ имеем

$$\hat{T}^n(x) = \mathrm{Ad}\, V_n(x) = e^{-iH_n} \cdot x e^{iH_n}, \quad \text{где} \quad H_n := \frac{1}{2} \psi B_n \cdot \sigma_z.$$

Если обозначать через N производящий оператор $\hat{\sigma}_t$, то тогда $N + [H_\alpha, \cdot]$ является производящим оператором динамической системы $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi}, \hat{T}_t^\alpha)$ и при $\alpha \to 0$ $\hat{T}_t^\alpha$ сходится сильно к $\hat{T}_t$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, наше расширение интерпретируется как описание частицы со спином $\frac{1}{2}$ в магнитном поле, флуктуирующем как белый шум (ср. [12]).

5. МАРКОВСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ДЛЯ ОБЩЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$

В заключение мы покажем, как результаты разд. 4 могут быть использованы для получения минимального марковского расширения динамической системы $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$. Как показывает обсуждение в п. 1.4, это — наиболее общая система на $\mathfrak{A}$, для которой мы можем надеяться найти расширение.

Искомое расширение для $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$ получается склеиванием квазисвободного расширения для $(\mathfrak{A}, \varphi, S_t)$ и расширения для $(\mathfrak{A}, \varphi, T_t)$, полученного в разд. 4. Поскольку эта конструкция носит скорее технический, чем идейный характер, и вполне аналогична конструкции из [9], мы ограничимся указанием основных шагов и отсылаем читателя к работе [9] за подробностями и доказательствами. Все рассуждения остаются применимыми и для случая непрерывного времени.

Отправляясь от унитарного расширения полугруппы $z \to e^{-(\mu/2+i\omega)t} \cdot z$ в одномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}$, мы получаем применением КАС-функтора минимальное марковское расширение $(\mathcal{N}, \omega, \hat{S}_t; E)$ для $(\mathfrak{A}, \varphi, S_t)$ ([4], [9] разд. 2). Вложение, соответствующее E, будет обозначаться j. Положим

$$\tilde{\mathfrak{A}} := \mathcal{N} \otimes \mathcal{C} \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi} := \omega \otimes \tau.$$

Тогда $j \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ является вложением $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \otimes \mathcal{C}$ в $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{C}$, и существует автоморфизм $\tilde{R}_t$ системы $(\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\varphi})$, такой что для $x \in \mathfrak{A}$

$$\tilde{R} \cdot j_0(x \otimes I_{\mathcal{C}}) = (\hat{R}_t \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \cdot (j \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \cdot \hat{T}_t(x \otimes \mathrm{I}_{\mathcal{C}}).$$

Явное выражение для $\tilde{R}_t$, имеющее еще более технический характер, может быть найдено в § 4 работы [9].

Поскольку $E \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ является условным ожиданием из $(\mathfrak{A}, \tilde{\varphi})$ на $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\varphi})$, то полагая $\tilde{P} := P \cdot (E \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$, мы получаем условное ожидание из $(\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\varphi})$ на $(\mathfrak{A}, \varphi)$.

Теорема. *Система* $(\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\varphi}, \tilde{R}_t; \tilde{P})$ *является минимальным марковским расширением для* $(\mathfrak{A}, \varphi, R_t)$.

Как в [9], или используя ([8], 3.3.6), мы видим, что $(\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\varphi}, \tilde{S}_t)$ является обобщенной K-системой, если только $0 \neq \mu \neq 2\lambda$, в частности, инвариантное подпространство является одномерным.

Литература *)

1. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum Stochastic Processes, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982), 97—133 (перевод см. в настоящем сборнике, стр 13—52).
2. Emch G. G., Albeverio S., Eckmann J.-P. Quasi-Free Generalized K-Flows, Rep. Math. Phys., 13 (1978), 73—85.
3. Emch G. G., Varilly J. C. On the Standard Form of the Block Equation, Lett. Math. Phys., 3 (1979), 113—116.

---

*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим, перев,*

4. Evans D. E. Completely Positive Quasi-Free Maps on the CAR Algebra, Comm. Math. Phys., 70 (1979), 53—68.
5. Hida T. Brownian Motion. Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1980.
6. Kern M., Nagel R., Palm G. Dilations of Positive Operators: Construction and Ergodic Theory, Math. Z., 156 (1977), 256—277.
7. Kümmerer B. Markov Dilations of Completely Positive Operators on W*-Algebras, «Topics in Modern Operator Theory», Proc. Timisoara — Herculane 1982, Birkhäuser Verlag, Basel 1983.
8. Kümmerer B. A Dilation Theory for Completely Positive Operators on W*-Algebras, Thesis, Tübingen 1982.
9. Kümmerer B., Schröder W. A Markov Dilation of a Non-Quasifree Bloch Evolution, Commun. Math. Phys., 90 (1983), 252—262.
10. Kümmerer B., Schröder W. A Survey of Markov Dilations for the Spin-Relaxation and Physical Interpretation, Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen, Wintersemester 1981/82, 187—213.
11. Kümmerer B. A Non-Commutative Example of a Continuous Markov Dilation. Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen, Wintersemester 1982/83, 61—91.
12. Lewis J. T., Thomas L. C. How to Make a Heat Bath. In «Functional Integration», Proc. Cumberland Lodge, London, Clarendon Press, Oxford 1975, 97—123.
13. С.-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Пер. с франц. — М.: Мир, 1970.
14. Varilly J. C. Dilation of a Non-Quasifree Dissipative Evolution, Lett. Math. Phys., 5 (1981), 113—116.
15*. Kümmerer B. Markov Dilations on W*-Algebras, J. Funct. Anal., 63 (1985), 139—177.
16*. Kümmerer B., Schröder W. A new construction of unitary dilations: singular coupling to white noise, Lect. Notes Math., 1136 (1985); 332—347.
17*. Frigerio A. Covariant Markov dilations of quantum dynamical semigroups, Publ. RIMS Kyoto Univ., 21 (1985), 657—675.
18*. Alicki R., Fannes M. Dilations of quantum dynamical semigroups with classical Brownian motion. Lett. Math. Phys., 11 (1986), 259—262.

О ДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ И ДЕЙСТВИЯХ КОМПАКТНЫХ ГРУПП[1] [2]

Ула Браттели

Институт математики, Трондхеймский университет,
Трондхейм, Норвегия

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра или алгебра фон Неймана. Если $\mathcal{A}$ представляет наблюдаемые некоторой физической системы, то временна́я эволюция системы часто может быть задана динамической полугруппой на $\mathcal{A}$ [18]. В частном случае обратимой эволюции динамическая полугруппа может быть продолжена до однопараметрической группы автоморфизмов $\mathcal{A}$. В этой статье мы рассмотрим проблему классификации динамических полугрупп и групп автоморфизмов, а также их производящих операторов, почти не затрагивая вопрос о физическом происхождении этих полугрупп.

Приведем основные определения: отображение $t \to S_t$ множества неотрицательных вещественных чисел в множестве ограниченных линейных операторов из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ называется *полугруппой*, если $S_0 = 1$ и $S_{t+s} = S_t S_s$ для $t, s \geqslant 0$. Если $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, полугруппа всегда предполагается *сильно непрерывной*, т. е. отображение $t \to S_t(A)$ непрерывно по норме для любого $A \in \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана, то всегда предполагается, что отображение $A \to S_t(A)$ σ-слабо непрерывно для любого $t \geqslant 0$ и что отображение $t \to S_t(A)$ σ-слабо непрерывно для любого $A \in \mathcal{A}$. *Производящий оператор H* полугруппы S определяется как оператор с областью определения[1]

$$D(H) = \left\{ A \in \mathcal{A} \mid \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(A - S_t(A)) \text{ существует} \right\},$$

так что

$$H(A) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(A - S_t(A)),$$

---

[1] Bratteli O. On dynamical semigroups and compact group actions. — In: Lect. Notes in Math., v. 1055, Springer-Verlag, 1984, p. 46—61.

[2] По существу здесь дается определение инфинитезимального оператора. Производящим оператором называется замыкание инфинитезимального оператора, если оно существует. Поскольку далее рассматривается замыкаемый случай, речь всюду идет о производящем операторе. — *Прим. перев.*

где пределы берутся в топологии нормы, если $\mathcal{A}$ есть C^*-алгебра и в σ-слабой топологии, если $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана. Множество $D(H)$ плотно в $\mathcal{A}$ в подходящей топологии, и мы пишем $S_t = e^{-tH}$ [15].

Полугруппа S_t называется *динамической полугруппой*, если каждый S_t является вполне положительным сжатием, т. е. $S_t \otimes 1$ положителен и имеет норму $\leqslant 1$ как оператор на $\mathcal{A} \otimes M_n$ для любого n, где M_n — C^*-алгебра комплексных $n \times n$-матриц. S_t называется *группой автоморфизмов*, если каждый S_t является $*$-автоморфизмом $\mathcal{A}$. Это сводится к тому, что каждый S_t обратим и как S_t, так и S_t^{-1} являются вполне положительными сжатиями [11]. В этом случае можно расширить определение S_t на $t \in \mathbb{R}$, полагая $S_{-t} = S_t^{-1}$, и тогда $S_{t+s} = S_t S_s$ для всех t, $s \in \mathbb{R}$.

Конечно, можно рассматривать и более общие классы полугрупп, например положительные или сильно положительные полугруппы. Мы не будем здесь этого делать по двум причинам: эти более общие случаи редко возникают в физических приложениях и о них не так много известно. Некоторые подробности можно найти в [5], [7], [12].

Если S — группа автоморфизмов, то ее производящий оператор H является *$*$-дифференцированием*, т. е. $D(H)$ есть $*$-алгебра, и $H(AB) = H(A)B + AH(B)$, $H(A^*) = H(A)^*$ для всех A, $B \in D(H)$. Если H — производящий оператор динамической полугруппы, то $D(H)$ замкнуто относительно действия инволюции и $H(A^*) = H(A)^*$, но $D(H)$ не обязательно является алгеброй; вообще $D(H)$ может не содержать $*$-алгебры, являющейся сердцевиной для H [12]. Однако если $X_1, \ldots, X_n$ — элементы $D(H)$, такие что $X_i^* X_j \in D(H)$ для всех i, j, то имеет место неравенство для $n \times n$-матриц

$$\left[H\left(X_i\right)^* X_j + X_i^* H\left(X_j\right) - H\left(X_i^* X_j\right)\right] \geqslant 0,$$

следующее из обобщенного неравенства Шварца. Оператор H, определенный на $*$-алгебре $D(H)$ и удовлетворяющий таким матричным неравенствам, называется *вполне диссипативным*. Одним из препятствий для изучения динамических полугрупп является то обстоятельство, что их производящие операторы не всегда вполне диссипативны, т. е. $D(H)$ не всегда алгебра.

Эта работа построена следующим образом: в разд. 2 мы излагаем довольно полную классификацию полугрупп, непрерывных по норме, т. е. таких, для которых оператор H ограничен. В разд. 3 мы сначала упоминаем о скорее неудовлетворительных попытках классификации всех замкнутых дифференцирований на некоторых C^*-алгебрах. Затем мы показываем, что если C^*-алгебра снабжена некоторой гладкой структурой, т. е. некоммутативным аналогом C^∞-структуры дифференцируемого многообразия, то дифференцирования, которые определены на гладких элементах, могут быть расклассифицированы при некоторых, пока что довольно специальных условиях [8]. В разд. 4 делается первый шаг в соответствующей классификации вполне диссипативных операторов [9], [10].

2. ПОЛУГРУППЫ, НЕПРЕРЫВНЫЕ ПО НОРМЕ

Это полугруппы, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{t\to 0}\|1-S_t\|=$ $=0$ и характеризуемые тем, что $D(H)=\mathscr{A}$ и $\|H\|<\infty$ [11]. Таким образом, производящий оператор непрерывной по норме группы $*$-автоморфизмов является ограниченным дифференцированием, а производящий оператор непрерывной по норме динамической полугруппы — ограниченным вполне диссипативным оператором. В любом случае H *диссипативен*, т. е. $H(X)^*X+X^*H(X)-H(X^*X)\geqslant 0$ для всех X. Известно, что всюду определенный диссипативный оператор замкнут и, следовательно, ограничен и что он является производящим оператором полугруппы, удовлетворяющей обобщенному неравенству Шварца [17], [21]

$$e^{-tH}(X^*X)\geqslant e^{-tH}(X)^*\,e^{-tH}(X).$$

Эта полугруппа является динамической полугруппой, если H вполне диссипативен, и группой $*$-автоморфизмов, если H — дифференцирование. Классификация непрерывных по норме полугрупп, таким образом, сводится к классификации ограниченных вполне диссипативных операторов и ограниченных дифференцирований. Относительно их известно следующее:

Если $\mathscr{A}$ есть C^*-алгебра в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и δ — ограиниченное дифференцирование в $\mathscr{A}$, то δ продолжается по σ-слабой непрерывности на алгебру фон Неймана $\mathscr{A}''$, порождаемую $\mathscr{A}$ в $\mathscr{H}$ [20]. Далее, существует оператор $L=L^*\in\mathscr{A}''$, такой что

$$\delta(A)=i(LA-AL)=i[L,\ A]$$

для всех $A\in\mathscr{A}$ [23]. Говорят, что δ порождается оператором L. Если $\mathscr{A}$ — простая C^*-алгебра, то L может быть найден в алгебре множителей $M(\mathscr{A})$ алгебры $\mathscr{A}$, т. е. L в $\mathscr{H}$ может быть выбран так,что $L\mathscr{A}\subseteq\mathscr{A}$, $\mathscr{A}L\subseteq\mathscr{A}$ [24]. Известно, что существуют C^*-алгебры с ограниченными дифференцированиями, которые не порождаются множителями; сепарабельные C^*-алгебры с соответствующим свойством могут быть даже охарактеризованы [16], именно следующие два условия эквивалентны для сепарабельной $\mathscr{A}$:

(i) все ограниченные дифференцирования в $\mathscr{A}$ порождаются элементами из $M(\mathscr{A})$,

(ii) $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$, где $\mathscr{A}_1$ есть C^*-алгебра, в которой любая центральная последовательность тривиальна, а $\mathscr{A}_2$ — (ограниченная) прямая сумма простых C^*-алгебр (последовательность $A_n \in \mathscr{A}$ называется *центральной*, если она ограничена и $\lim\limits_{n \to \infty} [A_n, B] = 0$ для всех $B \in \mathscr{A}$. Центральная последовательность $\{A_n\}$ называется *тривиальной*, если существует ограниченная последовательность $\{C_n\}$ из центра $M(\mathscr{A})$, такая что $\lim\limits_{n \to \infty} (A_n - C_n) B = 0$ для всех $B \in \mathscr{A}$).

Этот результат не распространяется на несепарабельные C^*-алгебры, так как все ограниченные дифференцирования алгебры фон Неймана порождаются элементами этой алгебры.

Если $\mathscr{A}$ есть C^*-алгебра в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и H — ограниченный вполне диссипативный оператор на $\mathscr{A}$, то существует вполне положительное отображение K: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}''$ и самосопряженные элементы $L, R \in \mathscr{A}''$, такие что

$$- H(A) = i[L, A] + \{R, A\} + K(A)$$

для всех $A \in \mathscr{A}$, где $\{R, A\} = RA + AR$ [14]. Заметим, что и обратно, $-i[L, \cdot]$, $-\{R, \cdot\}$ и $-K(\cdot)$ порождают вполне положительные полугруппы $e^{itL} \cdot e^{-itL}$, $e^{tR} \cdot e^{-tR}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n$ на $\mathscr{A}''$.

Таким образом, классификация непрерывных по норме полугрупп является почти завершенной, по крайней мере, если $\mathscr{A}$ есть алгебра фон Неймана.

3. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ * -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Первая трудность, которая встречается при изучении неограниченных дифференцирований, состоит в том, что они могут не быть замыкаемыми [11], [13]. Поэтому мы ограничимся рассмотрением замкнутых дифференцирований, однако даже при этом ограничении единственными бесконечномерными C^*-алгебрами, для которых имеется полная классификация, являются алгебра $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathscr{H})$ всех компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, где всякое дифференцирование δ имеет вид $\delta = \mathrm{ad}(iL)$ с симметричным оператором L [11], и некоторые абелевы C^*-алгебры, допускающие только тривиальные дифференцирования. Если $\mathscr{A} = C_0(\Omega)$ есть абелева C^*-алгебра со спектром Ω, $E \in \mathscr{A}$ — проектор и δ — замкнутое дифференцирование, то простое рассуждение [11] показывает, что $E \in D(\delta)$ и $\delta(E) = 0$. Используя этот факт, можно показать, что $\mathscr{A}$ не имеет ненулевых замкнутых дифференцирований, если Ω вполне несвязно или даже если Ω имеет плотное открытое вполне несвязное подмножество [2]. Класс локально компактных хаусдорфовых пространств Ω, таких что $\mathscr{A} = C_0(\Omega)$, допускает только нулевые дифференцирования, не охарактеризован, однако известно, что существует связное компактное хаусдорфово пространство Ω, такое, что $C_0(\Omega)$ не допускает нетривиальных замкнутых дифференцирований [3]! (В этом примере Ω неметризуемо)

В некоторых случаях удается классифицировать обширные классы неограниченных дифференцирований. Если δ — дифференцирование, то элемент $X = X^* \in D(\delta)$ называется *регулярным*, если существует состояние ω, такое что $|\omega(X)| = \|X\|$ и $\omega(\delta(X)) = 0$. δ называется *квазирегулярным*, если внутренность множества регулярных элементов в $D(\delta)_{\text{s. a.}}$ (множество самосопряженных элементов в $D(\delta)$) плотна в $D(\delta)_{\text{s. a.}}$. В частности, производящие операторы квазирегулярны (в самом деле, все $X = X^* \in D(\delta)$ регулярны, если δ — производящий оператор).

Теорема 3.1 [4], [19], [25]. *Пусть δ — замкнутое дифференцирование в абелсвой C^*-алгебре $\mathscr{A} = C[0. 1]$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *δ квазирегулярно;*

(ii) *$D(\delta)$ содержит строго монотонную функцию;*

(iii) *существует функция $\lambda \in C[0, 1]$ и гомеоморфизм θ отрезка $[0, 1]$ (иначе, $*$-автоморфизм θ пространства $C[0, 1]$), такие что δ является продолжением дифференцирования*

$$\theta \circ \lambda \frac{d}{dx} \circ \theta^{-1}.$$

Известно, что область определения этого дифференцирования не всегда является сердцевиной для δ [4], так что эту классификацию нельзя считать завершенной. Неизвестно, верны ли аналогичные результаты для C^*-алгебры $C([0, 1] \times \times [0, 1])$.

C^*-алгебра $\mathscr{A}$ называется AF-алгеброй (почти конечной алгеброй), если существует возрастающая последовательность $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подалгебр, таких что $\bigcup\limits_n \mathscr{A}_n$ плотно в $\mathscr{A}$ [6].

Теорема 3.2 [11], [13], [26]. *Пусть δ — замкнутое $*$-дифференцирование в AF-алгебре $\mathscr{A}$. Тогда существует возрастающая последовательность $\{\mathscr{A}_n\}$ конечномерных подалгебр $\mathscr{A}$, такая что $\bigcup\limits_n \mathscr{A}_n$ плотна в $\mathscr{A}$ и*

$$\bigcup_n \mathscr{A}_n \subseteq D(\delta).$$

Для любого n существует $H_n \in \mathscr{A}$, такой что

$$\delta(A) = [H_n, A]$$

для $A \in \mathscr{A}_n$. Поэтому δ является аппроксимативно внутренним на $\bigcup_n \mathscr{A}_n$ в том смысле, что

$$\delta(A) = \lim_n [H_n, A]$$

для $A \in \bigcup_n \mathscr{A}_n$.

Опять-таки $\bigcup_n \mathscr{A}_n$ не всегда является сердцевиной δ, и остается открытым вопрос — можно ли выбрать $\bigcup_n \mathscr{A}_n$ так, чтобы это было сердцевиной, в случае когда δ — производящий оператор.

Таким образом, результаты по общей классификации замкнутых неограниченных $*$-дифференцирований носят, можно сказать, рудиментарный характер, и перспективы не очень обнадеживают. Однако обе предыдущие теоремы показывают, что ситуация проясняется, если $D(\delta)$ фиксируется с самого начала. Классический пример дают векторные поля на дифференцируемом многообразии Ω. Пусть $C^\infty(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в $C_0(\Omega)$; векторным полем называется дифференцирование в $C_0(\Omega)$ с областью определения $D(\delta) = C^\infty(\Omega)$. Хорошо известно, что локально такое дифференцирование имеет вид

$$\delta = \sum_{k=1}^{d} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где d есть размерность Ω. Еще более специальный случай получается при рассмотрении гладкого и эргодичного действия группы Ли G на абелеву C^*-алгебру $\mathscr{A}$. Тогда ассоциированное действие на спектре Ω алгебры $\mathscr{A}$ транзитивно, т. е. Ω является однородным пространством для G и, в частности, Ω есть многообразие. Тогда $C^\infty(\Omega) = \{$множество C^∞-элементов для действия G на $\mathscr{A}\} = \bigcap_{n_1, \ldots, n_d} D\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} \ldots \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{n_d}\right)$, где $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}$ — базис для действия алгебры Ли группы G на $\mathscr{A}$.

Некоммутативным аналогом такой ситуации служит C^*-алгебра, на которой гладко и эргодично действует группа Ли G. Гладкость получается автоматически, если G компактна. Мы будем рассматривать компактную абелеву группу

G, которая не обязательно является группой Ли. Если τ — действие группы G на C^*-алгебру $\mathscr{A}$, то введем обозначения:

$\mathscr{A}_n =$ $*$-алгебра элементов, n раз дифференцируемых относительно однопараметрических подгрупп τ; $n = 1, 2, \ldots, +\infty$.

$\mathscr{A}_F =$ $*$-алгебра G-конечных элементов $=$
$= \{A \in \mathscr{A} \mid \mathbb{C}\tau_G(A)$ конечномерно$\} =$
$= \{A \in \mathscr{A} \mid A$ имеет конечный спектр Арвесона относительно $\tau\} =$
$=$ линейная оболочка $A^\tau(\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, где $A^\tau(\gamma) =$
$= \{A \in \mathscr{A} \mid \tau_g(A) = \langle \gamma, g \rangle A\}$ и $\widehat{G}$ — двойственная группа к G.

Имеем

$$\mathscr{A}_F \subseteq \mathscr{A}_\infty \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A},$$

и все эти $*$-алгебры плотны в $\mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A}_F$ более удобна, чем $\mathscr{A}_\infty$, если G не является группой Ли; например, если $G = \mathbb{D} = \overset{\infty}{\times} \mathbb{Z}_2$ — группа Кантора, то $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{A}$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $G = \mathbb{T}^d$ есть d-мерный тор, τ эргодично и точно и $\mathscr{A}$ абелева. Тогда $\mathscr{A} \cong C(\mathbb{T}^d)$ и G действует как группа сдвигов. Если $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, d$, есть базис для действия алгебры Ли $\mathbb{R}^d$ группы $\mathbb{T}^d$ на $\mathscr{A}$, то любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{A}_F \to \mathscr{A}$ имеет вид

$$\delta = \sum_{k=1}^{d} A_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где $A_k \in \mathscr{A}$ $\Big($причем $A_k = -iz_i^{-1}\delta(z_k)$, если $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — производящие операторы, определенные соотношениями $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_d^{n_d}\right) = i n_k z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_d^{n_d}$ для $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{T} = \{z \in C \mid |z| = 1\}\Big)$. Если теперь τ — эргодическое и точное действие группы $G = \mathbb{T}^d$ на произвольной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, то можно по-прежнему определить производящие операторы $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, но теперь легко видеть, что линейная комбинация

$$\sum_k A_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

является дифференцированием тогда и только тогда, когда A_k принадлежит центру $\mathscr{A}$. Таким образом, если $\mathscr{A}$ проста, то единственными дифференцированиями такого вида являются операторы, для которых A_k суть скаляры, т. е. производящие операторы однопараметрических подгрупп действия $\mathbb{T}^d$ на $\mathscr{A}$.

Но если $\mathcal{A}$ проста, то $\mathcal{A}$ имеет «много» внутренних дифференцирований и имеет место следующий результат.

Теорема 3.3 [8]. *Пусть G — компактная абелева группа, и пусть τ — эргодическое действие G как группы $*$-автоморфизмов простой C^*-алгебры $\mathcal{A}$. Пусть δ: $\mathcal{A}_F \to \mathcal{A}$ есть $*$-дифференцирование. Тогда δ имеет единственное разложение*

$$\delta = \delta_0 + \tilde{\delta},$$

где δ_0 — инфинитезимальный оператор однопараметрической подгруппы действия τ, $\bar{\delta}$ — аппроксимативно внутреннее дифференцирование (т. е. существует сеть $H_\nu \in \mathcal{A}$, такая что $\tilde{\delta}(A) = \lim\limits_{\nu} [H_\nu, A]$ для всех $A \in \mathcal{A}_F$).

Доказательство в самых общих чертах следующее: пусть δ_0 есть инвариантная часть δ, т. е.

$$\delta_0(A) = \int\limits_G dg \tau(g) \delta(\tau(-g)(A))$$

для всех $A \in \mathcal{A}_F$. Если положить

$$\delta_\gamma(A) = \int\limits_G dg \overline{\langle \gamma, g \rangle} \tau(g) \delta(\tau(-g) A)$$

для $\gamma \in \hat{G}$, $A \in \mathcal{A}_F$, то имеет место формальное разложение Фурье $\delta = \sum\limits_{\gamma \in \widehat{G}} \delta_\gamma$. Затем прямое алгебраическое рассуждение, использующее структуру эргодических действий компактных абелевых групп, показывает, что все δ_γ, где $\gamma \neq 0$, являются внутренними, тогда как δ_0 является внутренним, только если $\delta_0 = 0$.

Теорема 3.3 имеет обобщения на случай, когда $\mathcal{A}$ не проста и когда $\mathcal{A}_F$ заменяется на $\mathcal{A}_\infty$ или $\mathcal{A}_n$. Подробности см. в [8].

Пример 3.4. Если в теореме 3.3 $G = \mathbb{T}^d$, то $\delta_0 = \sum\limits_{k=1}^{d} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, где α_k — вещественные числа. Если $G = \mathbb{D} = \overset{\infty}{\times} \mathbb{Z}_2$ — канторова группа, то G вполне несвязна, так что должно быть $\delta_0 = 0$, т. е. все дифференцирования δ: $\mathcal{A}_F \to \mathcal{A}$ в этом случае аппроксимативно внутренние. В свете теоремы 3.2 это неудивительно, так как $\mathcal{A}$ обязательно AF-алгебра и $\mathcal{A}_F$ является объединением возрастающей последовательности конечномерных подалгебр.

Дифференцирование $\tilde{\delta}$ в теореме 3.3 является внутренним, если $\delta(\mathcal{A}_F) \subseteq \mathcal{A}_F$ и $\tilde{G}$ — конечно порожденная (т. е. G — группа Ли). Если $G = \mathbb{T}^d$ и $\delta(\mathcal{A}_\infty) \subseteq \mathcal{A}_\infty$, то $\tilde{\delta}$ является внутренним для «почти всех» эргодических действий в зависимости от теоретико-числовых свойств параметров, определяющих действие. Например, если $G = \mathbb{T}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_i \in \in C, |z_i| = 1\}$, то существуют унитарные элементы $U, V \in \mathcal{A}$, такие что $\tau(z_1, z_2)(U) = z_1 U$, $\tau(z_1, z_2)(V) = z_2 V$ и $VU = = e^{2\pi i \theta} UV$ для $\theta \in [0, 1)$. Число θ параметризует все точные эргодические действия группы $\mathbb{T}^2$, и $\mathcal{A}$ является простой тогда и только тогда, когда θ иррационально ($\mathcal{A}$ тогда является так называемой алгеброй иррациональных обозначений). Если θ — плохо аппроксимируемое иррациональное число, т. е.

$$\left|\theta - \frac{m}{n}\right| \geqslant C n^{-(2+\varepsilon)}$$

для всех натуральных m, n и некоторых $C > 0$, $\varepsilon > 0$, и если $\delta(\mathcal{A}_\infty) \subseteq \mathcal{A}_\infty$, то можно показать, что $\tilde{\delta}$ внутреннее дифференцирование [8]. Известно, что все иррациональные алгебраические числа плохо аппроксимируемы (теорема Рота) и что множество плохо аппроксимируемых чисел θ в $[0, 1]$ имеет меру Лебега 1 (теорема Хинчина) [27].

4. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ВПОЛНЕ ДИССИПАТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

За исключением случая конечномерных C^*-алгебр, который охватывается результатами, сформулированными в конце разд. 2, по-видимому, нет общих результатов по классификации вполне диссипативных операторов. Результаты, которые мы опишем в этом разделе, возникли в результате попыток получить разложение, аналогичное теореме 3.3 для дифференцирований. Первым шагом в этом направлении будет характеризация диссипативных операторов, которые инвариантны относительно τ, т. е. аналогов δ_0 из теоремы 3.3. Пока что ничего не известно об аналоге $\bar{\delta}$ в диссипативном случае.

Фактически мы исследуем инвариантные вполне диссипативные операторы H в несколько более общей ситуации, чем в теореме 3.3, т. е. вместо того, чтобы предполагать τ эргодичным, мы предполагаем, что H обращается в нуль на неподвижной алгебре $\mathcal{A}^\tau$ действия τ. Для полугрупп это означает, что e^{-tH} коммутирует с τ и обращается в единицу на $\mathcal{A}^\tau$. Если e^{-tH} — автоморфизм, то оказывается полезной следующая версия теоремы двойственности Понтрягина:

Теорема 4.1 ([1], приложение C). *Пусть G — компактная абелева группа, и пусть τ — действие группы G на C^*-алгебре*

$\mathscr{A}$ (или алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$), *такое что неподвижная алгебра* $\mathscr{A}^\tau$ *проста* (*или* $\mathscr{M}^\tau$ — *фактор*). *Пусть* α *есть* $*$-*автоморфизм алгебры* $\mathscr{A}$, *такой что*

(i) $\alpha\tau(g)=\tau(g)\alpha$ *для всех* $g\in G$,

(ii) $\alpha(X)=X$ *для всех* $X\in\mathscr{A}^\tau$.

Тогда существует $g\in G$, *такой что* $\alpha=\tau(g)$.

Это утверждение не имеет места для неабелевой G, например для эргодического действия $G=S_3$ на M_2 [22]. Тот факт, что инвариантная часть δ_0 дифференцирования δ в теореме 3.3 является производящим оператором однопараметрической подгруппы $\tau(G)$, может рассматриваться как инфинитезимальная версия теоремы 4.1.

Теорема 4.1 имеет аналог для вполне положительных отображений.

Теорема 4.2 ([9], теорема 4.2). *Пусть* G — *компактная абелева группа, и пусть* τ — *действие* G *на* C^*-*алгебре* $\mathscr{A}$ (*или алгебре фон Неймана* $\mathscr{M}$), *такое что* $\mathscr{A}^\tau$ *проста* (*или* $\mathscr{M}^\tau$ — *фактор*). *Пусть* $S\colon \mathscr{A}\to\mathscr{A}$ — *вполне положительное отображение, такое что*

(i) $S\tau(g)=\tau(g)S$ *для всех* $g\in G$,

(ii) $S(X)=X$ *для всех* $X\in\mathscr{A}^\tau$.

Тогда существует вероятностная мера μ *на* G, *такая что*

$$S(X)=\int_G d\mu(g)\,\tau(g)(X).$$

Инфинитезимальная версия этой теоремы, которая, в частности, дает классификацию вполне диссипативных операторов, коммутирующих с эргодическим действием, выглядит следующим образом.

Теорема 4.3 ([9], следствие 5.8). *Пусть* G — *компактная абелева группа и* τ — *точное действие* G *на* C^*-*алгебре* $\mathscr{A}$. *Предположим, что либо* $\mathscr{A}^\tau$ *проста, либо существует точное представление* π_0 *алгебры* $\mathscr{A}^\tau$, *такое что* $\pi(\mathscr{A}^\tau)''$ — *фактор, где* π — *представление Стайнспринга, ассоциированное с* $\pi_0\circ p\left(p=\int_G dg\tau(g)\right)$. *Пусть* $H\colon D(H)\subseteq\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ — *плотно определенное, замкнутое,* $*$-*линейное отображение. Тогда следующие условия* (1)—(4) *эквивалентны*:

(1) а. $\mathscr{A}_F\subseteq D(H)$, $\mathscr{A}_F$ — *сердцевина для* H, *и выполняются матричные неравенства*

$$[H(X_i^*X_j)]\leqslant[H(X_i)^*X_j+X_i^*H(X_j)]$$

для всевозможных конечных наборов $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}_F$.

b. $H\tau(g) = \tau(g)H$ *для всех* $g \in G$.

c. $H(X) = 0$ *для всех* $X \in \mathcal{A}^\tau$.

(2) $\mathcal{A}_F \subseteq D(H)$, $\mathcal{A}_F$ — *сердцевина для* H, *и существует отрицательно определенная функция* λ *на* $\hat{G}$ *со значениями в* $\mathbb{C}$, *такая что* $\lambda(0) = 0$ *и* $H(X) = \lambda(\gamma)X$ *для всех* $X \in \mathcal{A}^\tau(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$. (λ *называется отрицательно определенной, если имеют место матричные неравенства* $[\lambda(\gamma_j - \gamma_i) - \lambda(\gamma_i) - \lambda(\gamma_j) \leqslant 0$

для всех конечных последовательностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \hat{G}$.)

(3) H *является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы* $\exp(-tH)$ *на* $\mathcal{A}$, *такой что*

a. $\exp(-tH)$ *вполне положителен для всех* $t \geqslant 0$;

b. $\tau(g)\exp(-tH) = \exp(-tH)\tau(g)$ *для всех* $g \in G$, $t \geqslant 0$;

c. $\exp(-tH)(X) = X$ *для всех* $X \in \mathcal{A}^\tau$, $t \geqslant 0$.

(4) *Существует сверточная полугруппа* $\{\mu_t \mid t \geqslant 0\}$ *вероятностных мер на* G, *такая что* H — *производящий оператор сильно непрерывной полугруппы* S_t, *определяемой соотношением*

$$S_t(X) = \int_G d\mu_t(g)\,\tau(g)(X)$$

для всех $X \in \mathcal{A}$, $t \geqslant 0$ (μ_t *называется сверточной полугруппой мер, если* $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$ *при* $t, s \geqslant 0$, $\mu_0 = \delta$ *и* $t \to \mu_t$ *непрерывно*).

Далее, если G — d*-мерный тор* $\mathbb{T}^d$ *и* $\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^d$ — *производящие операторы действий канонических однопараметрических подгрупп* $\mathbb{T}^d$ *на* $\mathcal{A}$, *то условия* (1)—(4) *эквивалентны также следующему:*

(5) $\mathcal{A}_F \subseteq D(H)$, $\mathcal{A}_F$ *является сердцевиной для* H *и существует тройка* (b, a, μ), *где* $b = (b_1, \ldots, b_d)$ — *набор вещественных чисел,* $a = [a_{ij}]$ — *вещественная положительная* $d \times d$*-матрица, а* μ — *неотрицательная ограниченная мера на*

$$\mathbb{T}^d \setminus \{0\} = \{x = (x_i) \mid -\pi < x_i < \pi,\ x \neq 0\},$$

такая что

$$H(X) = \left\{\sum_{k=1}^d b_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{T}^d \setminus \{0\}} \frac{d\mu(x)}{\|x\|^2}\left[1 + \sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \exp\left(\sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]\right\} X,$$

где $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^d x_k^2$.

Тройка, о которой говорится в (5), *однозначно определяется по H, и может быть любой тройкой с указанными свойствами.*

Основную трудность в доказательстве теоремы 4.3 составляет доказательство импликации $(1) \Rightarrow (2)$, поскольку если λ отрицательно определенная, то из теоремы Шёнберга вытекает, что $\gamma \to \exp(-t\lambda(\gamma))$ — положительно определенная функция для всех $t \geqslant 0$, откуда по теореме Бохнера следует существование сверточной полугруппы. Эквивалентность $(2) \Leftrightarrow (5)$ является следствием представления Леви — Хинчина отрицательно определенной функции. Импликация $(1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (2)$ следует из более общего результата в [9], который был далее обобщен в [10]. Вместо того чтобы формулировать эти общие результаты, мы разберем довольно специальный случай, охватывающий, впрочем, теорему 3.3 и допускающий обобщение, из которого следует импликация $(1) \Rightarrow (2)$ теоремы 4.3.

Пусть снова G — компактная абелева группа, действующая как группа τ автоморфизмов C^*-алгебры $\mathscr{A}$, и пусть $\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$, минимальные спектральные подпространства. Поскольку $\mathscr{A}^{\tau}\mathscr{A}^{\tau}(\gamma) \subseteq \mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$ и $\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)\mathscr{A}^{\tau} \subseteq \mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$, т. е. $\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$ является двусторонним модулем над $\mathscr{A}^{\tau}$, получаем, что $\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)^*$ является идеалом в $\mathscr{A}^{\tau}$. Относительно τ и $\mathscr{A}$ мы сделаем специальное предположение, что $\mathscr{A}$ имеет единицу 1 и идеал $\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$ плотен в $\mathscr{A}^{\tau}$, и, таким образом, равен $\mathscr{A}^{\tau}$ для любого $\gamma \in \hat{G}$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.4 ([10], лемма 1.5). *Предположим, что* $1 \in \mathscr{A}$ *и* $\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)\mathscr{A}^{\tau}(\gamma)^* = \mathscr{A}^{\tau}$ *для всех* $\gamma \in \hat{G}$. *Для любого A из центра $\mathscr{A}^{\tau}$ существует единственный элемент $\alpha_{\gamma}(A)$ из центра $\mathscr{A}^{\tau}$ со свойством*

$$\alpha_{\gamma}(A)X = XA$$

для всех $X \in \mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$. *Более того,* $\gamma \to \alpha_{\gamma}$ *является представлением $\hat{G}$ в группе автоморфизмов центра $\mathscr{A}^{\tau}$.*

Доказательство. Существует конечный набор $X_k \in \mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$, такой что $1 = \sum_k X_k X_k^*$ (см. [9], доказательство леммы 4.4). Если A принадлежит центру $\mathscr{A}^{\tau}$, то положим

$$\alpha_{\gamma}(A) = \sum_k X_k A X_k^*.$$

Тогда $\alpha_{\gamma}(A) \in \mathscr{A}^{\tau}(\gamma)\mathscr{A}^{\tau}\mathscr{A}^{\tau}(-\gamma) \subseteq \mathscr{A}^{\tau}$ и если $B \in \mathscr{A}^{\tau}$, то существуют Y_i, $Z_i \in \mathscr{A}^{\tau}(\gamma)$, такие что $B = \sum_i Y_i Z_i^*$, следовательно,

$$\alpha_\gamma(A)B = \sum_{ki} X_k A X_k^* Y_i Z_i^* = \sum_{ki} X_k X_k^* Y_i A Z_i^* =$$
$$= \sum_i Y_i A Z_i^* = \sum_{ki} Y_i A Z_i^* X_k X_k^* = \sum_{ki} Y_i Z_i^* X_k A X_k^* = B\alpha_\gamma(A),$$

где во втором и последнем равенстве было использовано, что A принадлежит коммутанту $\mathscr{A}^\tau$. Аналогичные выкладки показывают, что

$$\alpha_\gamma(A)X = XA, \quad X \in \mathscr{A}^\tau(\gamma),$$

и

$$\alpha_\gamma(A)\alpha_\gamma(B) = \alpha_\gamma(AB), \quad A,\ B \in \mathrm{centre}\left(\mathscr{A}^\tau\right).$$

Единственность $\alpha_\gamma(A)$ видна из того, что

$$\alpha_\gamma(A) = \sum_k \left(\alpha_\gamma(A)X_k\right)X_k^* = \sum_k X_k A X_k^*,$$

и поэтому групповое свойство $\alpha_{\gamma_1+\gamma_2} = \alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}$ вытекает из того, что $\mathscr{A}^\tau(\gamma_1)\mathscr{A}^\tau(\gamma_2) \subseteq \mathscr{A}^\tau(\gamma_1+\gamma_2)$.

Построив группу автоморфизмов α_γ, мы можем доказать следующий результат.

Теорема 4.5 (см. [10], теорема 1). *Предположим, что* $1 \in \mathscr{A}$ *и* $\mathscr{A}^\tau(\gamma)\mathscr{A}^\tau(\gamma)^* = \mathscr{A}$ *для всех* $\gamma \in \hat{G}$. *Пусть* H: $D(H) \subseteq \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ — *плотно определенное, замкнутое, *-линейное отображение.*

Следующие условия эквивалентны:

(1) a. $\mathscr{A}_F \subseteq D(H)$, $\mathscr{A}_F$ — *сердцевина для* H, *и выполняются матричные неравенства*

$$\left[H\left(X_i^* X_j\right)\right] \leqslant \left[H\left(X_i\right)^* X_j + X_i^* H\left(X_j\right)\right]$$

для любого конечного набора $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{A}_F$.

b. $H\tau(g) = \tau(g)H$ *для всех* $g \in G$.

c. $H(X) = 0$ *для всех* $X \in \mathscr{A}^\tau$.

(2) $\mathscr{A}_F \subseteq D(H)$, $\mathscr{A}_F$ *сердцевина для* H *и существует отображение* L *из* $\hat{G}$ *в центр* $\mathscr{A}^\tau$ *со свойствами:*

a. $H(X) = L(\gamma)X$, *где* $X \in \mathscr{A}^\tau(\gamma)$.

b. *выполняются матричные неравенства*

$$\left[\alpha_{\gamma_i}\left(L\left(\gamma_j - \gamma_i\right)\right) - L\left(\gamma_i\right)^* - L\left(\gamma_j\right)\right] \leqslant 0$$

для всех конечных наборов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *в* $\hat{G}$.

c. $L(0) = 0$.

(3) H *является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы* $\exp(-tH)$ *на* $\mathscr{A}$, *такой что:*

a. $\exp(-tH)$ *вполне положителен для всех* $t \geqslant 0$.

b. $\tau(g)\exp(-tH) = \exp(-tH)\tau(g)$ *для всех* $g \in G$, $t \geqslant 0$.

c. $\exp(-tH)(X) = X$ *для всех* $X \in \mathscr{A}^\tau$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. Мы покажем, что $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Нетривиальным является лишь доказательство того, что $\mathscr{A}_F \subseteq D(H)$, т. е. $\mathscr{A}^\tau(\gamma) \subseteq D(H)$ для всех $\gamma \in \hat{G}$. Но $\mathscr{A}^\tau \in D(H)$ и $H|_{\mathscr{A}^\tau} = 0$ в силу (3c). Кроме того, поскольку $\exp(-tH)$ коммутирует с $P_\gamma = \int dg\, \overline{(\gamma, g)}\, \tau(g)$, имеем $P_\gamma(D(H)) \subseteq D(H)$ и, в силу того что $P_\gamma(D(H)) \in \mathscr{A}^\tau(\gamma)$, получаем, что $D(H) \cap \mathscr{A}^\tau(\gamma)$ плотно в $\mathscr{A}^\tau(\gamma)$. Покажем теперь, что $\mathscr{A}^\tau D(H) \subseteq D(H)$ и $D(H)\mathscr{A}^\tau \subseteq D(H)$ и, кроме того,

$$\exp(-tH)(AB) = A\exp(-tH)(B),$$
$$\exp(-tH)(BA) = \exp(-tH)(B)\,A$$

для $A \in \mathscr{A}^\tau$, $B \in \mathscr{A}$. Но эти равенства следуют из [9], лемма 4.3, и тогда требуемые включения получаются дифференцированием. Следовательно, множество $D(H) \cap \mathscr{A}^\tau(\gamma)$ плотно в $\mathscr{A}^\tau(\gamma)$ и инвариантно относительно левого и правого умножения на $\mathscr{A}^\tau$. Поскольку $1 \in \mathscr{A}^\tau = \mathscr{A}^\tau(\gamma)\mathscr{A}^\tau(\gamma)^*$, то $D(H) \cap \cap \mathscr{A}^\tau(\gamma) = \mathscr{A}^\tau(\gamma)$.

$(1) \Rightarrow (2)$ (см. также [9], [10]). Для любого $\gamma \in \hat{G}$ найдем конечный набор $X_1, \ldots, X_n$ в $\mathscr{A}^\tau(\gamma)$, такой что

$$\sum_k X_k X_k^* = 1$$

и положим

$$L(\gamma) = \sum_k H(X_k)\, X_k^*.$$

Тогда $L(\gamma) \in \mathscr{A}^\tau(\gamma)\mathscr{A}^\tau(-\gamma)^* = \mathscr{A}^\tau$. Теперь простое рассуждение ([9], лемма 5.3), использующее неравенство Шварца для положительных билинейных форм

$$X,\ Y \in \mathscr{A}_F \to \omega(H(X^*)Y + X^*H(Y) - H(X^*Y))$$

для любого состояния ω на $\mathscr{A}$, показывает, что

$$H(XY) = XH(Y), \quad H(YX) = H(Y)X$$

для всех $X \in \mathscr{A}^\tau$, $Y \in \mathscr{A}_F$. Таким образом, если $X \in \mathscr{A}^\tau(\gamma)$, то мы имеем

$$H(X) = \sum_k X_k X_k^* H(X) = \sum_k H(X_k X_k^* X) =$$
$$= \sum_k H(X_k)\, X_k^* X = L(\gamma)\, X.$$

Если $Y \in \mathscr{A}^\tau$, $X \in \mathscr{A}^\tau(\gamma)$, то

$$YL(\gamma)X = YH(X) = H(YX) = L(\gamma)YX,$$

и, следовательно, $L(\gamma)$ принадлежит центру $\mathscr{A}^\tau$. Поскольку $H|_{\mathscr{A}^\tau} = 0$, то $L(0) = 0$. Остается доказать матричное неравенство (2b). Если $X_i \in \mathscr{A}^\tau(\gamma_i)$, то

$$\begin{aligned} &H(X_i^*)X_j + X_i^*H(X_j) - H(X_i^*X_j) = \\ &= X_i^*L(\gamma_i)^*X_j + X_i^*L(\gamma_j)X_j - L(\gamma_i - \gamma_j)X_i^*X_j = \\ &= X_i^*\{L(\gamma_i)^* + L(\gamma_j) - \alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))\}X_j^*. \end{aligned}$$

Таким образом, свойство полной диссипативности H и некоторые манипуляции с матрицами показывают, что

$$[L(\gamma_i)^* + L(\gamma_j) - \alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))] \geqslant 0$$

для любого набора $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \hat{G}$.

(2)$\Rightarrow$(3): (см. также [10], леммы 1.6 — 1.8). Операторы $L(\gamma_i)^*$, $L(\gamma_j)$ и $\alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))$ лежат в абелевой C^*-алгебре — центре $\mathscr{A}^\tau$. Таким образом, теорема Шура о положительных матрицах и ((2)b) влекут за собой неравенство

$$[t^m\{L(\gamma_i)^* + L(\gamma_j) - \alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))\}^m] \geqslant 0$$

для $m = 0, 1, \ldots$; $t \geqslant 0$. Умножая его слева на матрицу $[e^{-tL(\gamma_i)}\delta_{ij}]$ и слева на сопряженную, получаем

$$[e^{-tL(\gamma_i)^*}t^m\{L(\gamma_i)^* + L(\gamma_j) - \alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))\}^m e^{-tL(\gamma_j)}] \geqslant 0.$$

Разделим на $m!$ и просуммируем по m от 0 до ∞. Тогда сумма больше или равна нулевого члена, т. е.

$$[e^{-t\alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))}] \geqslant [e^{-tL(\gamma_i)^*}e^{-tL(\gamma_j)}].$$

Если $X_i \in \mathscr{A}^\tau(\gamma_i)$, то, умножая это справа на

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & \ldots & 0 \\ X_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

и слева на сопряженную матрицу, получаем

$$\sum_{ij} X_i^* e^{-t\alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))}X_j \geqslant \sum_{ij} X_i^* e^{-tL(\gamma_i)^*}e^{-tL(\gamma_j)}X_j.$$

Здесь

$$X_i^* e^{-t\alpha_{\gamma_i}(L(\gamma_j - \gamma_i))}X_j = e^{-tL(\gamma_j - \gamma_i)}X_i^*X_j.$$

Таким образом, *определяя* e^{-tH} на $\mathscr{A}_F$ соотношением

$$e^{-tH}\Bigl(\sum_{\gamma} X_\gamma\Bigr) = \sum_{\gamma} e^{-tL(\gamma)} X_\gamma$$

для $X_\gamma \in \mathscr{A}^\tau(\gamma)$, мы можем записать полученное неравенство в виде

$$e^{-tH}(X^*X) \geqslant e^{-tH}(X^*)\, e^{-tH}(X)$$

для всех $X \in \mathscr{A}_F$. Аналогично,

$$[e^{-tH}(X_i^* X_j)] \geqslant [e^{-tH}(X_i^*)\, e^{-tH}(X_j)].$$

Пока еще не было доказано, что e^{-tH} ограничен. Однако геометрия вложения подпространств $\mathscr{A}^\tau(\gamma)$ в $\mathscr{A}$ имеет свойства, которые обеспечивают ограниченность оператора e^{-tH}. В самом деле, если B: $\mathscr{A}_F \to \mathscr{A}$ — любое линейное отображение со свойствами

(i) $B(X^*X) \geqslant 0$ для $X \in \mathscr{A}_F$,

(ii) для любого $\gamma \in \hat{G}$ существует $C_\gamma > 0$, такое что

$$\|B(X)\| < C_\gamma \|X\| \quad \text{для} \quad X \in \mathscr{A}^\tau(\gamma),$$

то тогда $\|B(X)\| \leqslant C_0 \|X\|$ для всех $X \in \mathscr{A}_F$ ([10], лемма 1.8). Поэтому определенные выше отображения e^{-tH} ограничены, и доказательство теоремы 4.5 завершено.

Эта работа была написана во время визита автора к Дж. А. Эллиоту в Оттавском уннверситете при поддержке Канадского научно-исследовательского совета по естественным наукам.

Литература

1. Araki H., Haag R., Kastler D., Takesaki M. Extensions of KMS states and chemical potential, Commun. Math. Phys. 53 (1977), 97—134.
2. Batty C. J. K. Unbounded derivations of commutative C*-algebras, Commun. Math. Phys. 61 (1978), 419—425.
3. Batty C. J. K. A connected space without derivations, preprint.
4. Batty C. J. K. Derivations on compact spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981), 299—330.
5. Batty C. J. K., Robinson D. W. Positive one-parameter semigroups on ordered Banach spaces, Acta Appl. Math. (в печати).
6. Bratteli O. Inductive limits of finite dimensional C*-algebras, Trans. Amer. Math Soc. 171 (1972), 195—234.
7. Bratteli O., Digernes T., Robinson D. W. Positive semigroups on ordered Banach spaces, J. Operator Theory 9 (1983), 371—400.
8. Bratteli O., Elliott G. A., Jørgensen P. E. T. Decomposition of unbounded derivations into invariant and approximately inner parts (в печати).
9. Bratteli O., Evans D. E. Dynamical semigroups commuting with compact abelian actions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 3 (1983).
10. Bratteli O., Jørgensen P. E. T., Kishimoto A., Robinson D. W. A C*-algebraic Schoenberg Theorem. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33 (1984), 155—187.
11. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.

12. Bratteli O., Robinson D. W. Positive C_0-semigroups on C*-algebras, Math. Scand. 49 (1981), 259—274.
13. Bratteli O., Robinson D. W. Unbounded derivations of C*-algebras 1, Commun. Math. Phys. 42 (1975), 253—268.
14. Christensen E., Evans D. E. Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups, J. London Math. Soc. (2), 20 (1978), 358—368.
15. Davies E. B. One-parameter Semigroups, Academic Press, London (1980).
16. Elliott G. A. Some C*-algebras with outer derivations III, Ann. Math. 106 (1977), 121—143.
17. Evans D. E., Hanche-Olsen H. The generators of positive semigroups, J. Funct. Anal. 32 (1979), 207—212.
18. Evans D. E., Lewis J. T. Dilations of Irreversible Evolutions in Algebraic Quantum Theory, Comm. Dublin Inst. Adv. Studies, Ser. A, 24 (1977).
19. Goodman F. Closed derivations in commutative C*-algebras, Ph. D. thesis, University of California, Berkley (1978).
20. Kadison R. V. Derivations of operator algebras, Ann. Math. 83 (1966), 280—293.
21. Kishimoto A. Dissipations and derivations, Commun. Math. Phys. 47 (1976), 25—32.
22. Longo R. Private communication.
23. Sakai S. Derivations of W*-algebras, Ann. Math. 83 (1966), 273—279.
24. Sakai S. Derivations of simple C*-algebras, J. Funct. Anal. 2 (1968), 202—206.
25. Sakai S. The Theory of Unbounded Derivations in C*-alrebras, Copenhagen and Newcastle-upon Tyne University, Lecture Notes (1977).
26. Sakai S. On one-parameter subgroups of *-automorphisms on operator algebras and the corresponding unbounded derivations, Amer. J. Math. 98 (1976), 427—440.
27. Schmidt W. M. Diophantine Approximation, Lect. Notes Math., 785, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980).

ПРОЦЕСС КВАНТОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ТРАЕКТОРИЙ[1]

Дж. М. Проспери
Национальный институт ядерной физики,
Миланский университет, Милан — Италия

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье обсуждаются некоторые обобщения квантовой механики, придающие этой теории большую гибкость и внутреннюю согласованность, причем рассмотрению измерительного процесса уделено должное внимание. В частности, дается краткий обзор более общего подхода к понятию наблюдаемой и редукции квантового состояния, разработанного Людвигом [1], а также другими авторами [2], [3]. Хотя такой подход излагается в книгах [4], [5], он еще не является достаточно известным. Затем, опираясь на эти идеи, мы покажем, что можно ввести формализм для описания наблюдений, результатом которых является целая траектория, отражающая изменение данной величины на некотором интервале времени, а не просто значение этой величины в какой-то момент времени. Излагаемый подход к непрерывным наблюдениям основан на работах Баркиелли, Ланца, Лупиери и автора [6] — [9].

Мы попытаемся также разъяснить полезность этого нового формализма для правильного понимания соотношения между квантовомеханическим типом описания, который применим к малым системам, и классическим, применимым к обычным макроскопическим телам. Картина, однако, все еще не является полной, поскольку недостает достаточно реалистичного примера, согласующегося с общими требованиями инвариантности.

План изложения следующий. В разд. 1 мы напоминаем основные постулаты стандартной формулировки квантовой механики, а в разд. 2 вводим более общую версию, основанную на новых понятиях наблюдаемой и редукции состояния. В разд. 3 мы кратко анализируем роль измерительного прибора и показываем, что явное введение прибора с необходимостью приводит к формулировкам разд. 2 В разд. 4 обсуждается соотношение между классическим и квантовым опи-

---

[1] Prosperi G. M. The quantum measurement process and the observation of continuous trajectories. — In: Lect. Notes in Math., 1984, p. 301—326.

санием и вводятся основные идеи относительно непрерывных наблюдений. В разд. 5 и 6 мы рассматриваем пример непрерывного наблюдения, которое описывает приближенное[1] измерение координаты, и в разд. 7 наша схема распространяется на весьма общую ситуацию.

1. СТАНДАРТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Общие логические основы стандартной квантовой механики сводятся к набору постулатов, или правил, которые формулируются, например, следующим образом:

i) *Состояния*: со всякой физической системой связывается определенное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. *Состояние* W системы представляется *статистическим оператором* $\hat W$ в $\mathscr{H}$, который удовлетворяет условиям

$$\hat W \in T(\mathscr{H}), \qquad \hat W^{\dagger} = \hat W, \qquad \hat W \geqslant 0, \qquad \mathrm{Tr}\, \hat W = 1, \tag{1.1}$$

т. е. является ядерным, эрмитовым положительным и имеет единичный след.

ii) *Наблюдаемые*: всякой наблюдаемой A (набору совместимых наблюдаемых $A_1, A_2, \ldots, A_p$) сопоставляется самосопряженный оператор $\hat A$ в $\mathscr{H}$ (набор коммутирующих самосопряженных операторов $\hat A_1, \hat A_2, \ldots, \hat A_p$). Эквивалентно, в силу спектральной теоремы

$$\hat A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \hat E^{A}(d\lambda),$$

$$\hat A_s = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \lambda_s \hat E^{(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_p)}(d\lambda_1 \ldots d\lambda_p), \qquad s = 1, 2, \ldots, p, \tag{1.2}$$

всякой наблюдаемой (набору совместимых наблюдаемых) сопоставляется проекторнозначная мера, т е. отображение из совокупности борелевских множеств $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ на прямой $\mathbb{R}$ ($\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ в пространстве $\mathbb{R}^p$) в совокупность проекционных операторов в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условиям

$$\hat E^{A}(\mathbb{R}) = 1 \qquad (\hat E^{A}(\mathbb{R}^p) = 1), \tag{1.3}$$

$$\hat E^{A}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} T_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat E^{A}(T_j); \quad T_j \in \mathscr{B}, \quad T_i \cap T_j = \varnothing, \quad i \neq j. \tag{1.4}$$

iii) *Временна́я эволюция*: временна́я эволюция системы описывается в терминах однопараметрической группы унитарных операторов. В картине Гейзенберга

$$\hat W_H = \hat W, \quad \hat A_H(t) = e^{i\hat H t} \hat A e^{-i\hat H t}, \tag{1.5}$$

---

[1] В оригинале — Coarse-grained. — *Прим. перев.*

Поскольку мы в основном будем работать в картине Гейзенберга, мы опускаем индекс H.

iv) *Распределения вероятностей*: если система приготовлена в состоянии W в момент $t=0$, то вероятность получить значение из множества $T \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ для наблюдаемой A (из $T \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ для $A \equiv (A_1, A_2 \ldots, A_p)$) в момент t

$$P(A \in T,\ t \mid W) = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}^A(T,\ t)\,\hat{W}\right). \tag{1.6}$$

v) *Редукция состояния*: если в момент t_0 для наблюдаемой

$$\hat{A} = \sum_i \lambda_i \hat{E}_i^A \tag{1.7}$$

с чисто дискретным спектром получено определенное значение λ_j, то в результате такого измерения состояние системы преобразуется согласно правилу

$$\hat{W} \to \hat{W}_j = \frac{\hat{E}_j^A(t_0)\,\hat{W}\hat{E}_j^A(t_0)}{\mathrm{Tr}\left(\hat{E}_j^A(t_0)\,\hat{W}\right)}. \tag{1.8}$$

Сформулированные правила имеют ряд следствий. Во-первых, если величина A была измерена в момент t_0, но результат измерения не принимался во внимание, то исходный статистический оператор $\hat{W}$ должен преобразоваться в

$$\hat{\hat{W}} = \sum_j P(A = \lambda_j,\ t_0 \mid W)\,\hat{W}_j = \sum_j \hat{E}_j^A(t_0)\,\hat{W}\hat{E}_j^A(t_0). \tag{1.9}$$

Очевидно,

$$\hat{\hat{W}} \neq \hat{W} \equiv \sum_{i,\ j} \hat{E}_i^A(t_0)\,\hat{W}\hat{E}_j^A(t_0). \tag{1.10}$$

Это различие ответственно за так называемую статистическую несводимость квантовой механики и за тот факт, что всякое осмысленное утверждение в квантовой механике должно относиться к специфическим наблюдениям, производимым над объектом, и, таким образом, не столько к объекту самому по себе, сколько к изменениям, производимым данным объектом в измерительном устройстве.

Второе следствие, представляющее для нас особенный интерес, это выражение для совместной вероятности наблюдения $A = \lambda_{j_1}$ в момент $t_1 > 0$ и $A = \lambda_{j_2}$ в последующий момент времени t_2:

$$P\left(\lambda_{j_1},\ t_1;\ \lambda_{j_2},\ t_2 \mid W\right) = P\left(\lambda_{j_1},\ t_1 \mid W\right) P\left(\lambda_{j_2},\ t_2 \mid W_{j_1}\right) = \\ = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}_{j_2}^A(t_2)\,\hat{E}_{j_1}^A(t_1)\,\hat{W}\hat{E}_{j_1}^A(t_1)\right). \tag{1.11}$$

Для вероятности наблюдения последовательности результатов $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_N}$ в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$

имеем формулу Вигнера

$$P(\lambda_{j_1}, t_1; \ldots; \lambda_{j_N}, t_N) = \\ = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}^A_{j_N}(t_N) \ldots \hat{E}^A_{j_1}(t_1)\,\hat{W}\hat{E}^A_{j_1}(t_1) \ldots \hat{E}^A_{j_N}(t_N)\right). \quad (1.12)$$

Наиболее спорным является постулат редукции v). Даже если не касаться проблем, связанных с уравнением (1.10), очевидно, что этот постулат не является достаточно общим. Он может относиться только к крайне идеализированному прибору, который производит минимальное возмущение, согласующееся с полученной информацией. В самом деле, заметим, во-первых, что немедленное повторение измерения дает тот же самый результат, если имеет место (1.8). Далее, предположим, что имеется другая наблюдаемая B, совместимая с A. Обозначим $\hat{E}^{(A,\,B)}_{j,\,l}$ их общее спектральное разложение, так что

$$\hat{A} = \sum_{j,\,l} \lambda_j \hat{E}^{(A,\,B)}_{j,\,l}, \quad \hat{B} = \sum_{j,\,l} \mu_l \hat{E}^{(A,\,B)}_{j,\,l}, \quad (1.13)$$

$$\hat{A} = \sum_{j} \lambda_j \hat{E}^{(A)}_{j}, \quad \hat{E}^{(A)}_{j} = \sum_{l} \hat{E}^{(A,\,B)}_{j,\,l}. \quad (1.14)$$

Тогда модификация состояния системы из-за одновременного измерения A и B представляется соотношением

$$\hat{W} \to \hat{W}_{jl} = \hat{E}^{(A,\,B)}_{jl}(t_0)\,\hat{W}\hat{E}^{(A,\,B)}_{jl}/\mathrm{Tr}\left(\hat{E}^{(A,\,B)}_{jl}(t_0)\,\hat{W}\right). \quad (1.15)$$

Если информация о B не учитывается, то

$$\hat{W} \to \sum_{l} P(A=\lambda_j,\, B=\mu_l;\, t_0 \,|\, W)\,\hat{W}_{jl}\Big/\sum_{l} P(A=\lambda_j,\, B=\mu_l;\, t_0 \,|\, W) = \\ = \sum_{l} \hat{E}^{(A,\,B)}_{jl}(t_0)\,\hat{W}\hat{E}^{(A,\,B)}_{jl}(t_0)/\mathrm{Tr}\left(\hat{E}^{A}_{j}(t_0)\,\hat{W}\right) \neq \hat{W}_j. \quad (1.16)$$

Это соотношение показывает, что постулат v) неприменим к прибору, предназначенному для измерения A и B, если он используется только для измерения A. Такое устройство не является прибором, измеряющим A с минимальным возмущением.

С этими свойствами измерительного аппарата связано и то обстоятельство, что постулат v) в его настоящей форме не допускает естественного обобщения на случай наблюдаемой с непрерывным спектром. Наконец, поскольку прибор является физической системой, он также может быть включен в картину, и при этом внутренняя согласованность набора правил i)—v) представляется отнюдь не очевидной. На самом деле оказывается, что при достаточно общем определении измерительного прибора такая согласованность требует подходящего обобщения не только постулата v), но даже постулатов ii) и iv).

2. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И РОЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРИБОРА

Обобщение правил квантовой механики, которое позволяет преодолеть ограниченность обычного формализма и по крайней мере имеет внутреннюю согласованность, было разработано рядом авторов, среди них Людвигом [1] (которому принадлежат многие первоначальные идеи), Хеллвигом, Краусом, Харткампером, Нейманом, Хаагом и Кастлером, Эдвардсом, Льюисом, Дэвисом, Холево, Пруговечки [2], [3]. Это обобщение существенно опирается на понятия теста[1], операции, тестзначной меры и операционнозначной меры.

Тест — это ограниченный эрмитов оператор, такой что

$$0 \leqslant \hat{F} \leqslant 1, \tag{2.1}$$

а *тестзначной мерой* (т. з. м.) на $\mathbb{R}^p$ называется отображение $\hat{F}(T)$ из $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ в множество тестов в $\mathscr{H}$, такое что

$$\hat{F}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} T_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{F}(T_j); \quad T_i \cap T_j = \varnothing,\ i \neq j. \tag{2.2}$$

Аналогично, *операцией* называется линейное отображение $\mathscr{J}$ пространства ядерных операторов $T(\mathscr{H})$ в себя, которое является положительным и не увеличивает след, т. е.

$$\mathscr{J}\hat{X} \geqslant 0; \quad \mathrm{Tr}(\mathscr{J}\hat{X}) \leqslant \mathrm{Tr}\,\hat{X}, \quad \text{для} \quad \hat{X} \geqslant 0, \tag{2.3}$$

а *операционнозначной мерой* (о. з. м.) называется отображение $\mathscr{J}(T)$ из $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ в множество операций, такое что

$$\mathscr{J}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} T_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{J}(T_j); \quad T_i \cap T_j = \varnothing, \quad i \neq j. \tag{2.4}$$

Отметим, что проекционный оператор $\hat{E}$ является частным случаем теста, а проекторнозначная мера $\hat{E}(T)$ — частным случаем т. з. м. Поскольку $\hat{E}(T)$ идемпотентен, то из (2.2) следует

$$\hat{E}(T)\,\hat{E}(S) = \hat{E}(T \cap S) = \hat{E}(S)\,\hat{E}(T), \tag{2.5}$$

тогда как в общем

$$\hat{F}(T)\,\hat{F}(S) \neq \hat{F}(S)\,\hat{E}(T). \tag{2.6}$$

Далее, всякой операции $\mathscr{J}$ (о. з. м. $\mathscr{J}(T)$) соответствует тест (т. з. м.), определяемые соотношением

$$\mathrm{Tr}(\hat{F}\hat{X}) = \mathrm{Tr}(\mathscr{J}\hat{X}) \quad \text{или} \quad \mathrm{Tr}(\hat{F}(T)\,\hat{X}) = \mathrm{Tr}(\mathscr{J}(T)\,\hat{X}). \tag{2.7}$$

---

[1] В оригинале используется термин «эффект», предложенный Людвигом. — *Прим. перев.*

Утверждение следует из (2.3). Более того, из хорошо известного факта, что сопряженным к пространству $T(\mathscr{H})$ является пространство всех ограниченных операторов $B(\mathscr{H})$, следует, что

$$\hat{F} = \mathscr{J}^T \hat{I} \quad \text{или} \quad \hat{F}(T) = \mathscr{J}^T(T)\hat{I}, \tag{2.8}$$

где $\mathscr{J}^T$ — сопряженное отображение, определяемое соотношением

$$\operatorname{Tr}(\hat{Y}(\mathscr{J}\hat{X})) = \operatorname{Tr}((\mathscr{J}^T\hat{Y})\hat{X}); \qquad \forall \hat{X} \in \mathrm{T}(\mathscr{H}), \quad \hat{Y} \in B(\mathscr{H}), \tag{2.9}$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор в $\mathscr{H}$.

Анализируя взаимодействие между системой и измерительным прибором, Краус [2] показал, что всякая операция имеет вид

$$\mathscr{J}\hat{X} = \sum_l \hat{\Gamma}_l X \hat{\Gamma}_l^\dagger, \quad \text{где} \quad \hat{\Gamma}_l \in B(\mathscr{H}), \tag{2.10}$$

если потребовать, что отображение $\mathscr{J}$ вполне положительно, а не просто положительно. Для того чтобы отображение (2.10) было операцией, необходимо также, чтобы выполнялось

$$\sum_l \hat{\Gamma}_l^\dagger \hat{\Gamma}_l \leqslant \hat{I}, \tag{2.11}$$

причем тест, связанный с $\mathscr{J}$, дается формулой

$$\hat{F} = \sum_l \hat{\Gamma}_l^\dagger \hat{\Gamma}_l. \tag{2.12}$$

Отметим, что соответствие между операциями и тестами (о. з. м. и т. з. м.) не является взаимно однозначным, но одному и тому же тесту (т. з. м.) отвечает бесчисленное множество операций (о. з. м.). В частности, любому тесту $\hat{F}$ можно сопоставить операцию

$$\mathscr{J}\hat{X} = \hat{F}^{1/2}\hat{X}\hat{F}^{1/2}. \tag{2.13}$$

Аналогично, любой т. з. м. $\hat{F}(T)$ можно сопоставить о. з. м.[1]

$$\mathscr{J}(T)\hat{X} = \int_T \hat{F}^{1/2}(d\lambda)\hat{X}\hat{F}^{1/2}(d\lambda). \tag{2.14}$$

В дальнейшем нас особенно будет интересовать случай, когда т. з. м. $\hat{F}(T)$ имеет плотность относительно положительной скалярной меры $\mu(T)$:

$$\hat{F}(d\lambda) = \hat{f}(\lambda)\, d\mu(\lambda). \tag{2.15}$$

---

[1] Выражению (2.14) не всегда можно придать однозначный смысл; например, этого нельзя сделать, если $\hat{F}(d\lambda)$ — обычная спектральная мера квантовой наблюдаемой с непрерывным спектром. — *Прим. перев.*

В этом случае соотношение (2.14) можно записать в виде

$$\mathcal{J}(T)\hat{X} = \int_T d\mu(\lambda)\hat{f}^{1/2}(\lambda)\hat{X}\hat{f}^{1/2}(\lambda). \tag{2.16}$$

Теперь постулаты ii), iv) и v) заменяются на следующие:

ii′) Всякой наблюдаемой A (набору совместимых наблюдаемых $A_1, A_2, \ldots, A_p$) сопоставляется нормированная т. з. м. $\hat{F}^A(T)$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$).

iv′) Если система приготовлена в состоянии W в момент $t = 0$, то вероятность получить значение наблюдаемой A из множества $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (соответственно из $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ для $A \equiv (A_1, A_2, \ldots, A_p)$) в момент t равна

$$P(A \in T, t \mid W) = \operatorname{Tr}\{\hat{F}^A(T, t) \mid \hat{W}\}. \tag{2.17}$$

v′) Данной процедуре S_A измерения A сопоставляется нормированная о. з. м. $\mathcal{J}_{S_A}(T)$, которая связана с $\hat{F}^A(T)$ соотношением

$$\hat{F}^A(T) = \mathcal{J}^T_{S_A}(T)\hat{I}. \tag{2.18}$$

Если в момент t_0 была выполнена процедура S_A и получено некоторое значение из множества T, то состояние системы преобразуется по формуле

$$\hat{W} \to \mathcal{J}_{S_A}(T, t_0)\hat{W}/\operatorname{Tr}\{\mathcal{J}_{S_A}(T, t_0)\hat{W}\}. \tag{2.19}$$

Отметим, что соотношение (1.8) является частным случаем (2.19). Говоря о нормированных т. з. м. и о. з. м., мы имеем в виду, что $F^A(T)$ и $\mathcal{J}_{S_A}(T)$ должны удовлетворять очевидным условиям

$$\hat{F}^A(\mathbb{R}) = \hat{I}, \quad \operatorname{Tr}\{\mathcal{J}_{T_A}(\mathbb{R})\hat{X}\} = \operatorname{Tr}\hat{X}. \tag{2.20}$$

«Временна́я эволюция» о. з. м., появляющаяся в уравнении (2.19), определяется соотношением

$$\mathcal{J}_{S_A}(T, t)\hat{X} = e^{i\hat{H}t}\{\mathcal{J}_{S_A}(T)(e^{-i\hat{H}t}\hat{X}e^{i\hat{H}t})\}e^{-i\hat{H}t}, \tag{2.21}$$

причем имеют место равенства

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\{\mathcal{J}_{S_A}(T, t)\hat{W}\} &= \operatorname{Tr}\{\hat{F}^A(T, t)\hat{W}\} = \\ &= \operatorname{Tr}\{\mathcal{J}_{S_A}(T)\hat{W}(t)\} = \operatorname{Tr}\{\hat{F}^A(T)\hat{W}(t)\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Используя (2.19), мы можем записать обобщение формулы Вигнера

$$\begin{aligned}P(A \in T_1, t_1; \ldots; A \in T_N, t_N \mid W) &= \\ &= \operatorname{Tr}\{\mathcal{J}_{S_A}(T_N, t_N) \ldots \mathcal{J}_{S_A}(T_1, t_1)\hat{W}\}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Отметим, что соотношения (2.19) и (2.23) годятся как для дискретного, так и для непрерывного спектра, где под спектром наблюдаемой понимается носитель соответствующей т. з. м. $\hat{F}^A(T)$. Заметим также, что соотношения

$$\mathcal{T}_{S_A}(T_1, t_1; \ldots; T_N, t_N) = \mathcal{T}_{S_A}(T_N, t_N) \ldots \mathcal{T}_{S_A}(T_1, t_1) \qquad (2.24)$$

и

$$\hat{F}^A(T_1, t_1; \ldots; T_N, t_N) = \mathcal{T}^T_{S_A}(T_1, t_1) \ldots \mathcal{T}^T_{S_A}(T_N, t_N)\,\hat{I} \qquad (2.25)$$

задают соответственно о. з. м. и т. з. м. на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, причем $\hat{F}^A(T_1, t_1; \ldots; T_N, t_N)$ сводится к проекционному оператору, только если A — интеграл движения. Таким образом, наша обобщенная формулировка позволяет рассматривать с единой точки зрения как одномоментные измерения, так и последовательности измерений.

Если $\hat{F}^A(T)$ задается соотношением (2.15), а $\mathcal{T}_{S_A}(T)$ — соотношением (2.16), то формула (2.23) может быть переписана в терминах *плотности вероятности*

$$p(\lambda_1, t_1; \ldots; \lambda_N, t_N \mid W) =$$
$$= \operatorname{Tr}\{\hat{f}^{1/2}(\lambda_N, t_N) \ldots \hat{f}^{1/2}(\lambda_1, t_1)\,\hat{W}\hat{f}^{1/2}(\lambda_1, t_1) \ldots \hat{f}^{1/2}(\lambda_N, t_N)\}, \qquad (2.26)$$

а формула (2.25) — в терминах *плотности тестов*

$$\hat{f}_A(\lambda_1, t_1; \ldots; \lambda_N, t_N) = \hat{f}^{1/2}(\lambda_1, t_1) \ldots$$
$$\ldots \hat{f}^{1/2}(\lambda_{N-1}, t_{N-1})\,\hat{f}(\lambda_N, t_N)\,\hat{f}^{1/2}(\lambda_{N-1}, t_{N-1}) \ldots \hat{f}^{1/2}(\lambda_1, t_1). \qquad (2.27)$$

Заметим, что

$$\int d\mu(\lambda_1) \ldots d\mu(\lambda_N)\, p(\lambda_1, t_1; \ldots; \lambda_N, t_N \mid W) = 1, \qquad (2.28)$$

$$\int d\mu(\lambda_N)\, p(\lambda_1, t_1; \ldots; \lambda_N, t_N \mid W) = p(\lambda_1, t_1; \ldots, \lambda_{N-1}, t_{N-1} \mid W), \qquad (2.29)$$

но в общем

$$\int d\mu(\lambda_n)\, p(\lambda_1, t_1; \ldots; \lambda_n, t_n; \ldots; \lambda_N, t_N \mid W) \neq$$
$$\neq p(\lambda_1, t_1; \ldots; \lambda_{n-1}, t_{n-1}; \lambda_{n+1}, t_{n+1}; \ldots; \lambda_N, t_N \mid W), \qquad (2.30)$$

что отражает направленность времени, вводимую измерением.

Необходимость подобного обобщения квантовой механики обсуждается в следующем разделе, посвященном явному рассмотрению измерительного прибора. Это обсуждение дает также метод, который в принципе позволяет найти т. з. м. $\hat{F}^A(T)$ и о. з. м. $\mathcal{T}_{S_A}(T)$, соответствующие данной измерительной процедуре, если задана т. з. м., описывающая выделенные свойства прибора.

В заключение этого раздела рассмотрим два очень простых примера т. з. м., которые будут использованы в дальнейшем. Оба они относятся к частице с одной степенью свободы. Первая т. з. м. определяется соотношением

$$\widehat{F}_x(T) = \int_T d\mu(x)\hat{f}(x), \tag{2.31a}$$

где

$$\hat{f}(x) = \exp[-\alpha(x-\hat{q})^2], \quad d\mu(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} dx, \tag{2.31b}$$

и отвечает «приближенному измерению координаты». Аналогично, вторая т. з. м. определяется соотношением

$$\widehat{F}_{xp}(T) = \int_T \frac{dx\,dp}{2\pi\hbar}\hat{f}(x, p), \tag{2.32a}$$

где

$$\hat{f}(x, p) = C\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p\hat{q} - x\hat{p})\right]\exp[-\alpha(\hat{q}^2 + \varkappa^2\hat{p}^2)] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p\hat{q} - x\hat{p})\right] = C\exp\{-\alpha[(x-\hat{q})^2 + \varkappa^2(p-\hat{p})^2]\}, \tag{2.32b}$$

$$C^{-1} = \mathrm{Tr}\,\{\exp[-\alpha(\hat{q}^2 + \varkappa^2\hat{p}^2)]\}, \tag{2.32c}$$

и отвечает «приближенному совместному измерению координаты и импульса». Символы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ в уравнениях (2.31) и (2.32) обозначают обычные операторы координаты и импульса.

3. ВВЕДЕНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРИБОРА

Теперь мы явно введем в рассмотрение прибор, с помощью которого над системой производится определенное наблюдение. С общей точки зрения прибор сам является системой, взаимодействующей некоторое время с объектом, в результате чего в ней происходят различные изменения.

Обозначая объект индексом I, а прибор индексом II, запишем гамильтониан составной системы в виде

$$\widehat{H} = \widehat{H}_I + \widehat{H}_{II} + \widehat{H}_{\text{int}} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_{\text{int}}. \tag{3.1}$$

Тогда мы можем описать взаимодействие между I и II как процесс рассеяния, предполагая, что предел

$$\lim_{\substack{t'' \to +\infty \\ t' \to -\infty}} e^{i\widehat{H}_0 t''} e^{-i\widehat{H}(t''-t')} e^{-i\widehat{H}_0 t'} = \widehat{U} \tag{3.2}$$

в смысле слабой или сильной сходимости существует.

Обозначим A_{II} положение указателя или любую другую величину, с помощью которой мы меряем изменение, происшедшее в II, и пусть $\hat{F}^A_{\text{II}}(T)$ — соответствующая т. з. м. согласно постулату ii′). Предположим также, что перед взаимодействием система II находится в состоянии W_{II}, а система I — в состоянии W_{I}. Пусть в момент t_0 процесс взаимодействия заканчивается и производится наблюдение A_{II}. Имеем

$$P(A_{\text{II}} \in T,\ t_0 | W_{\text{I}} W_{\text{II}}) = \operatorname{Tr}\{\hat{F}^A_{\text{II}}(T,\ t_0) \hat{U} \hat{W}_{\text{I}} \hat{W}_{\text{II}} \hat{U}^{+}\}, \tag{3.3}$$

где мы использовали картину взаимодействия, т. е.

$$\hat{F}^A_{\text{II}}(T,\ t) = \exp(i\hat{H}_{\text{II}} t) \hat{F}^A_{\text{II}}(T) \exp(-i\hat{H}_{\text{II}} t).$$

Принимая во внимание соотношение

$$e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{U} = \hat{U} e^{-i\hat{H}_0 t}, \tag{3.4}$$

которое вытекает из (3.2), мы можем переписать правую часть уравнения (3.3) в виде

$$P(A_{\text{II}} \in T,\ t_0 | W_{\text{I}} W_{\text{II}}) = \operatorname{Tr}^{\text{I}}\{\hat{F}^A_{\text{I}}(T,\ t_0) \hat{W}_{\text{I}}\} = P(A_{\text{I}} \in T,\ t_0 | W_{\text{I}}), \tag{3.5}$$

где

$$\hat{F}^A_{\text{I}}(T,\ t_0) = e^{i\hat{H}_{\text{I}} t_0} \operatorname{Tr}^{\text{II}}\{\hat{W}^{1/2}_{\text{II}} e^{i\hat{H}_{\text{II}} t_0} \hat{U}^{+} \hat{F}^A_{\text{II}}(T) \hat{U} e^{-i\hat{H}_{\text{II}} t_0} \hat{W}^{1/2}_{\text{II}}\} e^{-i\hat{H}_{\text{I}} t_0}, \tag{3.6}$$

очевидно, является т. з. м.; здесь Tr, Tr^{I} и Tr^{II} обозначает взятие следа по $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{I}} \otimes \mathrm{H}_{\text{II}}$, $\mathscr{H}_{\text{I}}$ и $\mathscr{H}_{\text{II}}$, гильбертовым пространствам составной системы, системы I и системы II.

Соотношение (3.5) показывает, что наблюдение величины $\hat{A}_{\text{II}}$ над системой II в момент t_0 после взаимодействия эквивалентно описывается как наблюдение величины A_{I} над системой I, отвечающей, т. з. м. $\hat{F}^A_{\text{I}}(T)$. Это показывает по существу согласованность постулатов ii′) и v′) с достаточно общим описанием измерительного процесса. Заметим, что, даже если $\hat{F}^A_{\text{II}}(T)$ — проекторнозначная мера, в общем случае $\hat{F}^A_{\text{I}}(T)$ оказывается тестзначной мерой, если только на $\hat{U}$ не налагаются некоторые очень специальные и нереалистические предположения. Поэтому исходные постулаты ii) и iv) обычной формулировки квантовой механики являются на самом деле несогласованными.

Пусть теперь в последующий момент времени t производится второе наблюдение над системой I. Если явно не вводить второй прибор, то можно написать формулу

$$P(B_{\text{I}} \in S,\ t;\ A_{\text{II}} \in T,\ t_0 | W_{\text{I}} W_{\text{II}}) = \\ = \operatorname{Tr}\{\hat{F}^B_{\text{I}}(S,\ t) \hat{F}^A_{\text{II}}(T,\ t_0) \hat{U} \hat{W}_{\text{I}} \hat{W}_{\text{II}} \hat{U}^{+}\} \tag{3.7}$$

для совместной вероятности наблюдения $A_{\mathrm{II}} \in T$ в момент t_0 и $B_{\mathrm{I}} \in S$ в момент t. Здесь B_{I} обозначает новую наблюдаемую, а $\widehat{F}_{\mathrm{I}}^{B}(S)$ — соответствующую т. з. м.; мы приняли здесь во внимание, что $\widehat{F}_{\mathrm{I}}^{B}(S, t) = \exp(i\widehat{H}_{\mathrm{I}}t)\widehat{F}_{\mathrm{I}}^{B}(T)\exp(-i\widehat{H}_{\mathrm{I}}t)$ коммутирует с $\widehat{F}_{\mathrm{II}}^{A}(T, t_0)$ даже при $t \neq t_0$.

Соотношение (3.7) может быть записано в виде

$$P(B_{\mathrm{I}} \in S,\ t;\quad A_{\mathrm{II}} \in T,\ t_0 \,|\, W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{II}}) = \\ = \mathrm{Tr}^{\mathrm{I}}\{\widehat{F}_{\mathrm{I}}^{B}(S,\ t)\,\mathscr{J}_{\mathrm{I}}^{A}(T,\ t_0)\,\widehat{W}_{\mathrm{I}}\}, \tag{3.8}$$

где

$$\mathscr{J}_{\mathrm{I}}^{A}(T,\ t_0)\,\widehat{W}_{\mathrm{I}} = \mathrm{Tr}^{\mathrm{II}}\{\widehat{F}_{\mathrm{II}}^{A}(T,\ t_0)\,\widehat{U}\widehat{W}_{\mathrm{I}}\widehat{W}_{\mathrm{II}}\widehat{U}^{+}\} = \\ = \mathrm{Tr}^{\mathrm{II}}\{[\widehat{F}_{\mathrm{II}}^{A}(T,\ t_0)]^{1/2}\,\widehat{U}\,\widehat{W}_{\mathrm{II}}^{1/2}\widehat{W}_{\mathrm{I}}\widehat{W}_{\mathrm{II}}^{1/2}\,\widehat{U}^{+}\,[\widehat{F}_{\mathrm{II}}^{A}(T,\ t_0)]^{1/2}\} \tag{3.9}$$

задает о. з. м. Отметим, что

$$\widehat{F}_{\mathrm{I}}^{A}(T,\ t_0) = \mathscr{J}_{\mathrm{I}}^{T}(T,\ t_0)\,\widehat{I}. \tag{3.10}$$

Наконец, из (3.5) и (3.8) получаем формулу

$$P(B_{\mathrm{I}} \in S,\ t \,|\, A_{\mathrm{I}} \in T,\ t_0;\ W^{\mathrm{I}}) = \frac{\mathrm{Tr}^{\mathrm{I}}\left\{\widehat{F}_{\mathrm{I}}^{B}(S,\ t)\,\mathscr{J}_{\mathrm{I}}^{A}(T,\ t_0)\widehat{W}_{\mathrm{I}}\right\}}{\mathrm{Tr}^{\mathrm{I}}\left\{\mathscr{J}_{\mathrm{I}}^{A}(T,\ t_0)\widehat{W}_{\mathrm{I}}\right\}} \tag{3.11}$$

для вероятности наблюдения $B_{\mathrm{I}} \in S$ в момент t при условии, что в момент t_0 наблюдалось $A_{\mathrm{I}} \in T$.

Соотношение (3.11) показывает, что постулат v′) фактически можно рассматривать как следствие постулатов ii′) и iv′), примененных к составной системе I + II. И снова, для того чтобы $\mathscr{J}_{\mathrm{I}}^{A}(T)$ имело вид (1.8), приходится наложить специальные и нереалистичные предположения.

Наконец, заметим, что соотношения (3.6) и (3.9) дают явные выражения для т. з. м. и о. з. м., отвечающих данной измерительной процедуре, в терминах характеристик прибора, если определен физический смысл формальной наблюдаемой A_{II}, отвечающей $\widehat{F}_{\mathrm{II}}(T)$. С другой стороны, если II макроскопическая система, то выбор $\widehat{F}_{\mathrm{II}}^{A}(T)$ должен быть очевиден на основании принципа соответствия.

4. КВАНТОВЫЙ И КЛАССИЧЕСКИЙ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ¹)

Как уже отмечалось, различие между (1.9) и (1.10) отражает тот факт, что всякое утверждение в квантовой механике должно относиться к определенному эксперименту, выполняемому над объектом, т. е. к показаниям определенного

---

¹) Изложение в этом и следующих разделах носит эвристический характер. — *Прим. перев.*

прибора. Невозможно придать однозначный смысл утверждению о значениях какой-либо величины вне зависимости от используемого для ее измерения прибора.

В противоположность этому в классической физике состояние системы описывается в терминах набора переменных

$$z \equiv (z_1, z_2, \ldots), \qquad (4.1)$$

которым в каждый момент времени приписываются определенные значения, независимо от способа наблюдения. Переменные z определяют состояние системы и обычно изменяются во времени детерминистически согласно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_j}{dt} = f_j(z_1, z_2, \ldots). \qquad (4.2)$$

Обычно подразумевается, что квантовое описание применимо к малым системам, таким как частицы, атомы или молекулы, а классическое описание — к макроскопическим телам. Однако, как подчеркивал Бор, для интерпретации квантовой механики существенно, что экспериментальные установки и результаты экспериментов описываются в классических терминах; с другой стороны, макроскопические тела состоят из частиц, атомов и молекул. Поэтому важной является проблема объяснения соотношения между этими двумя видами описания.

В общих чертах решение этой проблемы может быть основано на разнице масштабов, характерных для этих двух видов описания. Методы квантовой статистической механики, примененные к системам из очень большого числа элементарных составляющих, должны, по крайней мере в принципе, привести к практически точно определенным значениям так называемых макроскопических величин и уравнениям вида (4.2) для этих величин. На самом деле в таких терминах можно получить весьма удовлетворительное описание измерения необратимого процесса, и мы отсылаем читателя к соответствующей литературе [10].

Однако такое решение представляется недостаточным. В самом деле, оно предполагает, что квантовая механика является действительно фундаментальной теорией, а классическая физика — аппроксимацией. Но если использование классического описания макроскопического тела существенно для интерпретации самой квантовой механики, то возможность классического описания должна появляться на гораздо более фундаментальном уровне в теории, претендующей на применимость как к малым, так и большим телам.

Контраст между квантовым и классическим описаниями становится не таким резким, если, следуя Людвигу [11], мы примем более общее понятие классического описания, заменив детерминистические уравнения типа (4.2) на статистический закон для допустимых траекторий $z(t)$. Предположим тогда, что перед моментом t_0 большая система приготовляется определенным образом или имеет предысторию, обозначаемую символом W. Обозначим Y пространство допустимых траекторий, Σ — подходящую σ-алгебру подмножеств Y и M_{t_0} — событие из Σ, отвечающее ограничениям траектории $z(t)$ при $t > t_0$. Тогда классическая динамика должна быть выражена как совокупность правил для построения вероятностной меры $P(M_{t_0} \mid W, t_0)$ на пространстве траекторий $z(t)$, $t > t_0$.

Связь между классическим и квантовым описанием находится, если, обобщая соотношения (2.23)—(2.25), мы допустим, что $P(M_{t_0} \mid W, t_0)$ может быть записана в виде

$$P(M_{t_0} \mid W, t_0) = \mathrm{Tr}(\hat{F}_{t_0}(M_{t_0})\hat{W}), \tag{4.3}$$

где $\hat{W}$ — статистический оператор, описывающий приготовление, а $\hat{F}_{t_0}(M_{t_0})$ — т. з. м. в гильбертовом пространстве системы, вычисленные в соответствии с квантовой механикой многих тел. Мы должны также предположить, что имеется о. з. м. $\mathcal{J}(t_1, t_0; N_{t_0}^{t_1})$, такая что

$$P(M_{t_1} \cap N_{t_0}^{t_1} \mid W, t_0) = \mathrm{Tr}\{\hat{F}_{t_1}(M_{t_1})\mathcal{J}(t_1, t_0; N_{t_0}^{t_1})\hat{W}\}, \tag{4.4}$$

или, эквивалентно[1],

$$\hat{F}_{t_0}(M_{t_1} \cap N_{t_0}^{t_1}) = \mathcal{J}^T(t_1, t_0; N_{t_0}^{t_1})\hat{F}_{t_1}(M_{t_1}), \tag{4.5}$$

в частности

$$\hat{F}_{t_0}(N_{t_0}^{t_1}) = \mathcal{J}^T(t_1, t_0; N_{t_0}^{t_1})\hat{I}. \tag{4.6}$$

Здесь $N_{t_0}^{t_1}$ обозначает элемент Σ, описывающий ограничения на траекторию $z(t)$ при $t \in (t_0; t_1)$.

Заметим, что условие нормировки записывается в виде

$$\hat{F}_t(Y) = \hat{I} \text{ или } \mathrm{Tr}\{\mathcal{J}(t_1, t_0; Y)\hat{W}\} = \mathrm{Tr}\,\hat{W}, \tag{4.7}$$

так что (4.5) эквивалентно соотношению

$$\mathcal{J}(t_2, t_0; M_{t_1}^{t_2} \cap N_{t_0}^{t_1}) = \mathcal{J}(t_2, t_1; M_{t_1}^{t_2})\mathcal{J}(t_1, t_0; N_{t_0}^{t_1}). \tag{4.8}$$

Из (4.4) и (4.8), полагая $N_{t_0}^{t_1} = Y$ и

$$\mathcal{G}(t_1, t_0) = \mathcal{J}(t_1, t_0; Y), \tag{4.9}$$

---

[1] На самом деле соотношения (4.5) и (4.6) следуют из (4.4), если дополнительно предположить, что $\hat{F}_{t_0}(\cdot)$ плотна в пространстве $B(\mathscr{H})$ ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. В противном случае (4.5), (4.6) можно ввести как исходные предположения, из которых будет следовать (4.5).

получаем

$$P(M_{t_1} \mid W,\ t_0) = \mathrm{Tr}\,\{\hat{F}_{t_1}(M_{t_1})\,\mathcal{G}(t_1,\ t_0)\,\hat{W}\} \tag{4.10}$$

и

$$\mathcal{J}\left(t_2,\ t_0;\ M_{t_1}^{t_2}\right) = \mathcal{J}\left(t_2,\ t_1;\ M_{t_1}^{t_2}\right)\mathcal{G}(t_1,\ t_0), \tag{4.11}$$

где $\mathcal{G}(t_1, t_0)$ играет роль оператора эволюции в пространстве состояний. На языке квантовой механики рассмотренные выше т. з. м. и о. з. м. описывают наблюдение над данной системой, которое протекает в течение определенного отрезка времени.

Таким образом, встает проблема фактического построения объектов со свойствами, выражаемыми соотношениями (4.4)—(4.11). Эта проблема и будет рассматриваться нами в дальнейшем. Отметим, что в этих соотношениях нет ничего, что было бы характерно для макроскопических величин, и на самом деле те примеры, которые нам удалось полностью рассчитать, относятся к очень простым системам. Следует заметить, что получаемые нами общие результаты могут быть интерпретированы как действительно соответствующие классическому описанию больших систем, не зависящему от наблюдателя, только при выполнении некоторых дополнительных требований, таких как релятивистская инвариантность (см в связи с этим замечания в [9]).

5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТЫ

Наиболее прямой путь к построению математических объектов типа $\hat{F}_{t_0}(M_{t_0})$ и $\mathcal{J}\left(t_1,\ t_0;\ M_{t_0}^{t_1}\right)$, описывающих наблюдение непрерывных траекторий данной величины A, состоит в переходе к подходящему пределу при $N \to \infty$ в уравнениях (2.23)—(2.27), так что интервал наблюдения (t_0, t_N) остается фиксированным. Для определенности рассмотрим приближенное измерение координаты, определяемое уравнением (2.31), и разделим интервал (t_0, t_1) на N равных частей, полагая

$$\tau_0 = t_0, \quad \tau_n = t_0 + n\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{t_1 - t_0}{N}. \tag{5.1}$$

Тогда уравнение (2.26) может быть записано в виде

$$p(x_1,\ \tau_1;\ \ldots;\ x_N,\ \tau_N \mid W) = \mathrm{Tr}\left\{\exp\left[-\frac{\alpha}{2}(x_N - \hat{q}(\tau_N))^2\right] \ldots \right.$$
$$\exp\left[-\frac{\alpha}{2}(x_1 - \hat{q}(\tau_1))^2\right] \cdot \hat{W} \cdot \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(x_1 - \hat{q}(\tau_1))^2\right] \ldots$$
$$\left. \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(x_N - \hat{q}(\tau_N))^2\right]\right\}, \tag{5.2}$$

где вводится плотность вероятности, нормированная как

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{N/2}\int dx_1 \ldots dx_N p(x_1, \tau_1; \ldots; x_N, \tau_N \,|\, W) = 1. \tag{5.3}$$

Если в уравнении (5.2) положить

$$\alpha = \gamma\varepsilon \tag{5.4}$$

и перейти к пределу при $N \to \infty$, то мы получим *функциональную плотность вероятности*

$$p(t_1, t_0; [x(t)] \,|\, W) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{T \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(x(t) - \hat{q}(t))^2\right] \cdot \hat{W} \times\right.$$

$$\left.\times T^* \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(x(t) - \hat{q}(t))^2\right]\right\}, \tag{5.5}$$

где T и T^* обозначают временнóе и антивременнóе упорядочение соответственно.

Точно так же мы можем ввести *функциональную плотность операций*

$$f(t_1, t_0; [x(t)])\,\hat{X} =$$

$$= T \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[dt\,(x(t) - \hat{q}(t))^2\right] \cdot \hat{X} \times\right.$$

$$\left.\times T^* \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(x(t) - \hat{q}(t))^2\right]\right. \tag{5.6}$$

и *функциональную плотность тестов*

$$\hat{f}(t_1, t_0; [x(t)]) = f^T(t_1, t_0; [x(t)])\,\hat{I} =$$

$$= T^* \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(x(t) - \hat{q}(t))^2\right] \times$$

$$\times T \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(x(t) - \hat{q}(t))^2\right]. \tag{5.7}$$

В силу (5.3) условие нормировки для (5.5) имеет вид

$$\int d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{t_1}\, p(t_1, t_0; [x(t)] \,|\, W) = 1, \tag{5.8}$$

где «мера» определена символическим выражением

$$d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{t_1} = \left(\frac{\gamma\varepsilon}{\pi}\right)^{N/2}\prod_{s=1}^{N} dx_s. \tag{5.9}$$

Мы можем тогда определить о. з. м.

$$\mathcal{J}\left(t_1,\ t_0;\ N_{t_0}^{t_1}\right)=\int\limits_{N_{t_0}^{t_1}} d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{t_1} f(t_1,\ t_0;\ [x(t)]), \qquad (5.10)$$

и т. з. м.

$$\hat{F}_{t_0}(M_{t_0})=\int\limits_{M_{t_0}} d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{\infty} \hat{f}(\infty,\ t_0;\ [x(t)]) \qquad (5.11)$$

с распределением вероятностей

$$P(M_{t_0}\,|\,W,\ t_0)=\int\limits_{M_{t_0}} d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{\infty}\, p(\infty,\ t_0;\ [x(t)]\,|\,W)=$$
$$=\mathrm{Tr}\,\{\hat{F}_{t_0}(M_{t_0})\,\hat{W}\}, \qquad (5.12)$$

которые формально удовлетворяют всем необходимым требованиям.

Все эти рассуждения, конечно, носят эвристический характер. Чтобы придать точный смысл введенным выше объектам, необходимо определить функциональное пространство Y и σ-алгебру подмножеств, для которых пределы в уравнениях (5.10), (5.11) действительно существуют.

Опираясь на теорию обобщенных случайных процессов [12], [13], введем пространство E пробных функций с компактным носителем и возьмем за Y алгебраически сопряженное пространство E^*. Для любой $h(t)\in E$ введем *сглаживание*

$$x_h=\int dt\,h(t)\,x(t) \qquad (5.13)$$

и рассмотрим подмножества пространства E^* вида

$$C\left(h_1,\ \ldots,\ h_l;\ B^{(l)}\right)=\left\{x(t)\in E^*:\left(x_{h_1},\ \ldots,\ x_{h_l}\right)\in B^{(l)}\right\}, \qquad (5.14)$$

где l — произвольное натуральное число, $h_1,\ \ldots,\ h_l$ — элементы E, а $B^{(l)}$ — борелевское подмножество в $\mathbb{R}^l$. Подмножества такого вида называются *цилиндрическими*.

Интегралы вида (5.10) — (5.12) оказываются корректно определенными для таких цилиндрических подмножеств. Тогда Σ может быть отождествлена с σ-алгеброй, порожденной этими множествами, и, по теореме Ленарда [9], $P(\,\cdot\,|\,W,\ t_0)$, $\hat{F}_{t_0}(\,\cdot\,)$ и $\mathcal{J}(t_1,\ t_0;\ \cdot\,)$ однозначно продолжаются на $\sum\limits_{t_0}^{\infty}$ или $\sum\limits_{t_0}^{t_1}$, где $\sum\limits_{t_0}^{t_1}$ есть σ-подалгебра, порождаемая цилиндрическими подмножествами с пробными функциями с носителем из интервала $(t_0,\ t_1)$.

Чтобы показать существование интегралов (5.10)—(5.12) для цилиндрического множества, воспользуемся соответствующей плотностью. Так, в случае уравнения (5.12) мы можем написать

$$P\left(C\left(h_1, \ldots, h_l; B^{(l)}\right) \mid W, t_0\right) = \\ = \int\limits_{B^{(l)}} dx_1 \ldots dx_l p(x_1, h_1; \ldots; x_l, h_l \mid W, t_0), \quad (5.15)$$

где

$$p(x_1, h_1; \ldots; x_l, h_l \mid W, t_0) = \\ = \lim_{t_1 \to \infty} \int d\mu_G [x(t)]_{t_0}^{t_1} \prod_{s=1}^{l} \delta\left(x_s - x_{h_s}\right) \cdot p(t_1, t_0; [x(t)] \mid W). \quad (5.16)$$

Правая часть уравнения (5.16) легко вычисляется с помощью формализма фейнмановского интеграла по траекториям. Мы можем написать

$$\left\langle q_1, t_1 \middle| T \exp\left[-\frac{\gamma}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} dt (x(t) - \hat{q}(t))^2\right] \middle| q_0, t_0 \right\rangle = \\ = \int d\mu_F [q(t)]_{t_0}^{t_1} \exp \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \left[iL(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\gamma}{2}(x(t) - q(t))^2\right], \quad (5.17)$$

где $L(q, \dot{q})$ — классический лагранжиан частицы, а

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle \quad (5.18)$$

обозначает собственные векторы $\hat{q}(t)$. Далее,

$$d\mu_F [q(t)]_{t_0}^{t_1} = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}\right)^{N/2} \prod_{s=1}^{N-1} dq(\tau_s), \quad (5.19)$$

где

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1. \quad (5.20)$$

Подставляя (5.17) в (5.5), а (5.5) в (5.16), мы приходим к выражению, содержащему следующий интеграл:

$$\int d\mu_G [x(t)]_{t_0}^{t_1} \prod_{s=1}^{l} \delta\left(x_s - x_{h_s}\right) \exp\left\{-\frac{\gamma}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \left[(x(t) - q(t))^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + (x(t) - q'(t))^2\right]\right\} = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{\gamma\varepsilon}{\pi}\right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N} dx(\tau_j) \times \\ \times \prod_{s=1}^{l} \delta\left(x_s - \varepsilon \sum_{j=1}^{N} h_s(\tau_j)\, x(\tau_j)\right) \exp\left\{-\frac{\gamma\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{N} \left[(x(\tau_j) - q(\tau_j))^2 + \right.\right.$$

$$+(x(\tau_l)-q'(\tau_l))^2]\Big\}=g^{-1/2}\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{l/2}\times$$

$$\times\exp\Big[-\gamma\sum_{ss'}(x_s-Q_s)g^{-1}_{ss'}(x_{s'}-Q_{s'})-$$

$$-\frac{\gamma}{4}\int_{t_0}^{t_1}dt\,(q(t)-q'(t))^2\Big], \quad (5.21)$$

где

$$Q_s=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}dt h_s(t)(q(t)+q'(t)), \quad (5.22a)$$

$$g_{ss'}=\int_{t_0}^{t_1}dt h_s(t)h_{s'}(t), \quad g=\det g_{ss'}. \quad (5.22b)$$

Используя этот результат, имеем окончательно

$$p(x_1,\ h_1;\ x_2, h_2;\ \ldots;\ x_l,\ h_l\,|\,W,\ t_0)=$$

$$=\lim_{t_1\to\infty}\int dq_0dq'_0dq_1dq'_1\delta(q_1-q'_1)\langle q_0,\ t_0|\,\hat{W}\,|q'_0,\ t_0\rangle\times$$

$$\times\int d\mu_F[q(t)]_{t_0}^{t_1}\int d\mu^*_F[q'(t)]_{t_1}^{t_1}\times$$

$$\times g^{-1/2}\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^l\exp\Big\{-\gamma\sum_{ss'}(x_s-Q_s)g^{-1}_{ss'}(x_{s'}-Q_{s'})+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}dt\Big[i(L(q,\ \dot{q})-L(q',\ \dot{q}'))-\frac{\gamma}{4}(q-q')^2\Big]\Big\}. \quad (5.23)$$

Это выражение является корректно определенным и конечным. Аналогично можно рассмотреть и правые части формул (5.10) и (5.11). Заметим, что тройка

$$\{E^*,\ \Sigma^{\infty}_{t_0},\ P(\cdot\,|\,W,\ t_0)\} \quad (5.24)$$

образует обобщенный случайный процесс [12], [13]. То, что процесс оказывается обобщенным, видно из того, что при замене $h_s(t)$ на дельта-функцию $\delta(t-t_s)$ диагональные матричные элементы g_{ss} обращаются в бесконечность и правая часть уравнения (5.23) теряет смысл.

Назовем тройки

$$\{E^*,\ \Sigma^{\infty}_{t_0},\ \hat{F}_{t_0}(\cdot)\}\ \text{и}\ \{E^*,\ \Sigma^{t_1}_{t_0},\ \mathcal{T}(t_1,\ t_0;\ \cdot)\} \quad (5.25)$$

соответственно *тестзначным случайным процессом* (т. з. с. п.) и *операционнозначным случайным процессом* (о. з. с.п.). Заметим, что если бы мы вычислили правую часть (5.12) для множества, определенного соотношениями

$$a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{5.26}$$

(что можно сделать, используя уравнение (5.17)), то она окажется равной нулю. Это отражает тот факт, что соотношение (5.26) налагает несчетное множество ограничений, и не вызывает удивления в свете теории обобщенных случайных процессов.

6. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Введем *характеристический функционал*, соответствующий функциональной плотности вероятности (5.5) по формуле

$$G(t_1, t_0; [\xi(t)] \mid W) = \\ = \int d\mu_G [x(t)]_{t_0}^{t_1} p(t_1, t_0; [x(t)] \mid W) \cdot \exp\left[i \int_{t_0}^{t_1} dt \xi(t) x(t)\right]. \tag{6.1}$$

В терминах этого функционала конечномерные плотности выражаются по формуле

$$p(x_1, h_1; \ldots; x_l, h_l \mid W, t_0) = \\ = \int d\mu_G [x(t)]_{t_0}^{t_1} \frac{1}{(2\pi)^l} \int dk_1 \ldots dk_l \times \\ \times \exp\left[-i \sum_{s=1}^{l} k_s \left(x_s - \int_{t_0}^{t_1} dt h_s(t) x(t)\right)\right] p(t_1, t_0; [x(t)] \mid W) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^l} \int dk_1 \ldots dk_l G\left(t_1, t_0; \sum_s k_s h_s(t)\right) \times \\ \times \exp\left(-i \sum_{s=1}^{l} x_s k_s\right), \tag{6.2}$$

а моменты находятся по формуле

$$\langle x(t') x(t'') \ldots x(t^{(n)}) \rangle = \\ = (-i)^n \frac{\delta^n G(t_1, t_0; [\xi(t)] \mid W)}{\delta\xi(t')\delta\xi(t'') \ldots \delta\xi(t^{(n)})}\bigg|_{\xi=0}, \tag{6.3a}$$

или

$$\langle x_{h_1} x_{h_2} \ldots x_{h_n} \rangle = \\ = (-i)^n \int dt' \, dt'' \ldots dt^{(n)} h_1(t') \ldots h_n(t^{(n)}) \cdot \frac{\delta^n G(t_1, t_0; [\xi] \mid W)}{\delta\xi(t') \ldots \delta\xi(t^{(n)})}\bigg|_{\xi=0}. \tag{6.3b}$$

Характеристический функционал в свою очередь может быть выражен через *характеристический оператор*, имеющий ряд привлекательных свойств. Определим его соотношением

$$\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi(t)]) = \\ = \int d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{t_1} f(t_1,\ t_0;\ [x(t)]) \exp\left[i\int_{t_0}^{t_1} dt\,\xi(t)\,x(t)\right], \tag{6.4}$$

так что

$$G(t_1,\ t_0;\ [\xi(t)]\,|\,W) = \operatorname{Tr}\{\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi(t)])\,\widehat{W}\}. \tag{6.5}$$

Из уравнения

$$\int d\mu_G\,[x(t)]_{t_0}^{t_1} \exp\int_{t_0}^{t_1} dt\left\{-\frac{\gamma}{2}\,[(x(t)-q(t))^2 + \right. \\ \left. + (x(t)-q'(t))^2] + i\xi(t)\,x(t)\right\} = \\ = \exp\int_{t_0}^{t_1} dt\left[-\frac{\gamma}{4}(q(t)-q'(t))^2 + \right. \\ \left. + \frac{i}{2}\,\xi(t)(q(t)+q'(t)) - \frac{1}{4\gamma}\,\xi^2(t)\right] \tag{6.6}$$

получаем явное выражение

$$\langle q_1,\ t_1\,|\,(\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi(t)])\,\widehat{W})\,|\,q_1',\ t_1\rangle = \\ = \int dq_0\,dq_0'\,\langle q_0,\ t_0\,|\,\widehat{W}\,|\,q_0',\ t_0\rangle \int d\mu_F\,[q]_{t_0}^{t_1} \times \\ \times \int d\mu_F^*\,[q']_{t_0}^{t_1} \exp\int_{t_0}^{t_1} dt\left\{i\,[L(q,\ \dot q) - L(q',\ \dot q')] - \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{4}(q-q')^2 + \frac{i}{2}\,\xi(q+q') - \frac{1}{4\gamma}\xi^2\right\}. \tag{6.7}$$

Заметим, что

$$\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [0]) = \mathcal{J}(t_1,\ t_0;\ E^*) \equiv \mathcal{G}(t_1,\ t_0). \tag{6.8}$$

Кроме того, из уравнения

$$f(t_2,\ t_1;\ [x(t)])\,f(t_1,\ t_0;\ [x(t)]) = f(t_2,\ t_0;\ [x(t)]), \tag{6.9}$$

которое вытекает из (5.6) и эквивалентно (4.8), получаем

$$\mathcal{G}(t_2,\ t_1;\ [\xi(t)])\,\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi(t)]) = \mathcal{G}(t_2,\ t_0;\ [\xi(t)]). \tag{6.10}$$

Уравнение (6.10) может быть записано в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}(t,\ t_0;\ [\xi]) = \mathcal{H}(t;\ [\xi])\,\mathcal{G}(t,\ t_0;\ [\xi]), \tag{6.11}$$

где

$$\mathscr{K}(t;\ [\xi]) = \frac{\partial}{\partial t'}\mathscr{G}(t',\ t;\ [\xi])\,|_{t=t'}. \qquad (6.12)$$

Вместе с очевидным условием

$$\mathscr{G}(t_0,\ t_0;\ [\xi]) = 1, \qquad (6.13)$$

которое вытекает, например, из (6.7), уравнение (6.11) определяет характеристический оператор по формуле

$$\mathscr{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi]) = T\exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t_1} dt\mathscr{K}(t;\ [\xi])\right\}. \qquad (6.14)$$

Явное выражение для *инфинитезимального оператора* $\mathscr{K}(t;\ [\xi])$ может быть получено из уравнения (6.7). Мы получаем соотношение

$$\mathscr{K}(t;\ [\xi])\hat{W} = -\frac{\gamma}{4}[\hat{q}(t),\ [\hat{q}(t),\ \hat{W}]] +$$

$$+\frac{i}{2}\xi(t)\{\hat{q}(t),\ \hat{W}\} - \frac{1}{4\gamma}\xi^2(t), \qquad (6.15)$$

которое будет далее значительно обобщено.

Наконец, из соотношений (6.3a), (6.5), (6.8), (6.15) и из соотношения

$$\frac{\delta}{\delta\xi(t)}\mathscr{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi]) = \mathscr{G}(t_1,\ t;\ [\xi])\mathscr{K}(t;\ [\xi])\mathscr{G}(t,\ t_0;\ [\xi]), \qquad (6.16)$$

которое следует из (6.14), получаем первые и вторые моменты

$$\langle x(t)\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{q}(t)\mathscr{G}(t,\ t_0)\hat{W}), \qquad (6.17a)$$

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \frac{1}{2\gamma}\delta(t-t') +$$

$$+\frac{1}{2}\theta(t-t')\mathrm{Tr}(\hat{q}(t)\mathscr{G}(t,\ t')\{\hat{q}(t'),\ \mathscr{G}(t',\ t_0)\hat{W}\}) +$$

$$+\frac{1}{2}\theta(t'-t)\mathrm{Tr}(\hat{q}(t')\mathscr{G}(t',\ t)\{\hat{q}(t),\ \mathscr{G}(t,\ t_0)\hat{W}\}). \qquad (6.17b)$$

Появление дельта-функции в уравнении (6.17b) вновь указывает на то, что случайный процесс (5.24) является обобщенным.

В частности, из уравнения (6.17b) получаем

$$(\Delta x_h)^2 \equiv \langle(x_h - \langle x_h\rangle)^2\rangle = \frac{1}{2\gamma}\int\limits_{t_0}^{t_1} dt h^2(t) +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} dt\int\limits_{t_0}^{t} dt' h(t)h(t')\,\mathrm{Tr}\,[(\hat{q}(t) - \langle x(t)\rangle) \times$$

$$\times\mathscr{G}(t,\ t')\{(\hat{q}(t') - \langle x(t')\rangle),\ \mathscr{G}(t',\ t_0)\hat{W}\}]. \qquad (6.18)$$

Полагая $h(t) = \frac{1}{\Delta t}\chi_{(\bar t,\, \bar t+\Delta t)}(t)$ (где $\chi_{(a,\, b)}(t)$ — характеристическая функция интервала (a, b)) и устремляя Δt к нулю, получаем из (6.18)

$$(\Delta x_h)^2 \cong \frac{1}{2\gamma\,\Delta t} + \mathrm{Tr}\,[(\hat q(\bar t) - \langle x(\bar t)\rangle)^2\, \hat W]. \tag{6.19}$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части (6.19) есть обычная дисперсия квантово-механической наблюдаемой координаты; отметим также, что

$$(\Delta x_h)^2\,\Delta t \gtrsim \frac{1}{2\gamma}. \tag{6.20}$$

7. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ НАБЛЮДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Мы можем заменить приближенное измерение координаты (2.31) приближенным совместным измерением координаты и импульса (2.32) и рассуждать далее совершенно аналогично. Вместо траекторий $[x(t)]$ в пространстве $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ мы теперь имеем траектории $[x(t),\ p(t)]$ в пространстве $\mathbb{R}^2_{xp} \times \mathbb{R}_t$, а вместо выражения (5.5) — плотность

$$p(t_1,\ t_0;\ [x,\ p]\,|\,W) =$$
$$= \mathrm{Tr}\left\{T\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,[(x(t) - \hat q(t))^2 + \varkappa^2(p(t) - \hat p(t))^2]\right]\hat W \times\right.$$
$$\left.\times\, T^{*}\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,[(x(t) - \hat q(t))^2 + \varkappa^2(p(t) - \hat p(t))^2]\right]\right\} \tag{7.1}$$

относительно формальной меры

$$d\mu_G[x,\ p] = \lim_{N\to\infty}\prod_{s=0}^{N}\left(\frac{\gamma\varkappa\varepsilon}{\pi}\,dx(t_s)\,dp(t_s)\right). \tag{7.2}$$

Пространство E является теперь пространством двухкомпонентных функций $(h(t),\ k(t))$, и используя фейнмановский интеграл в пространстве фазовых траекторий

$$\langle q_1,\ t_1\,|\,T\exp\left\{-\frac{\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\,[(x(t) - \hat q(t))^2 + \varkappa^2(p(t) - \hat p(t))^2]\right\}|\,q_0,\ t_0\rangle =$$
$$= \int\prod_{t_0<t<t_1}\frac{dq'(t)\,dp'(t)}{2\pi\hbar}\exp\int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\frac{i}{\hbar}[p'\dot q' - H(q',\ p')] -\right.$$
$$\left.-\,\frac{\gamma}{2}[(x - q')^2 + \varkappa^2(p - p')^2]\right\}, \tag{7.3}$$

мы можем получить непосредственное обобщение соотношения (5.23), положив

$$x_h = \int dt h(t)\, x(t), \qquad p_k = \int dt k(t)\, p(t). \tag{7.4}$$

Аналогично, характеристический оператор определяется соотношением

$$\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\xi,\ \eta]) = \\ = \int d\mu_G[x,\ p]\, f(t_1,\ t_0;\ [x,\ p])\exp\left[i\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\xi x + \eta p)\right], \tag{7.5}$$

а производящий оператор имеет вид

$$\mathcal{K}(t;\ \xi(t),\ \eta(t))\,\widehat{W} = -\frac{\gamma}{4}([\hat q(t),\ [\hat q(t),\ \widehat{W}]] + \\ + \varkappa^2[\hat p(t),\ [\hat p(t),\ \widehat{W}]]) + \frac{i}{2}\xi(t)\{\hat q(t),\ \widehat{W}\} + \\ + \frac{i}{2}\eta(t)\{\hat p(t),\ \widehat{W}\} - \frac{1}{4\gamma}\left(\xi^2(t) + \frac{1}{\varkappa^2}\eta^2(t)\right). \tag{7.6}$$

Соотношение (7.6) представляет особый интерес, так как оно допускает обобщение на случай наблюдения траекторий приближенного совместного измерения произвольного набора некоммутирующих наблюдаемых.

Пусть $\widehat{A}_1,\ \widehat{A}_2,\ \ldots,\ \widehat{A}_n$ — набор самосопряженных, не обязательно коммутирующих операторов, Δ_{ij} — положительная $n \times n$-матрица с $\det \Delta_{ij} = 1$, а Δ^{ij} — обратная матрица. Определим оператор в $T(\mathcal{H})$ соотношением

$$\mathcal{K}(t;\ \vec{\xi}(t)) = -\frac{\gamma}{4}\Delta^{ij}[\widehat{A}_i(t),\ [\widehat{A}_j(t),\ \cdot\,]] + \\ + \frac{i}{2}\xi^j(t)\{\widehat{A}_j(t),\ \cdot\,\} - \frac{1}{4\gamma}\xi^i(t)\Delta_{ij}\xi^j(t) \tag{7.7}$$

(где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам), которое естественным образом обобщает соотношение (7.6). Покажем, что инфинитезимальный оператор (7.7) определяет о. з. с. п., который может быть интерпретирован как непрерывное приближенное измерение величин A_1, A_2, .., ..., A_n. Заметим сначала, что, полагая

$$\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\vec{\xi}]) = T\exp\int_{t_0}^{t_1} dt\,\mathcal{K}(t;\ \vec{\xi}(t)), \tag{7.8}$$

$$f(t_1,\ t_0;\ [\vec{x}]) = \int \prod_{t_0<t<t_1}\left[\left(\frac{\pi\varepsilon}{\gamma}\right)^{n/2}\frac{d\xi^1(t)\,\ldots\,d\xi^n(t)}{(2\pi)^n}\right]\times \\ \times\mathcal{G}(t_1,\ t_0;\ [\vec{\xi}(t)])\exp\left[-i\int_{t_0}^{t_1} dt\,\xi^j(t)\,x_j(t)\right], \tag{7.9}$$

$$\mathcal{J}(t_1, t_0; N_{t_0}^{t_1}) = \\ = \int\limits_{N_{t_0}^{t_1}} \prod_t \left[\left(\frac{\gamma\varepsilon}{\pi}\right)^{n/2} dx_1(t)\ldots dx_n(t)\right] f(t_1, t_0; [\vec{x}(t)]), \tag{7.10}$$

мы получаем величины, удовлетворяющие уравнениям (6.10), (6.9) и (4.8). Далее, подставляя (7.9) в (7.10), получаем отображение

$$\mathcal{J}(t_1, t_0; E^*) = \mathcal{G}(t_1, t_0; [\vec{0}]) = \\ = T\exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\Delta^{ij}\int\limits_{t_0}^{t_1} dt\,[\hat{A}_i(t), [\hat{A}_j(t), \cdot\,]]\right\}. \tag{7.11}$$

которое, очевидно, сохраняет след. Наконец

$$f(t+\varepsilon, t; [\vec{x}])\,\hat{W} = \\ = \left(\frac{\pi\varepsilon}{\gamma}\right)^{n/2}\frac{1}{(2\pi)^n}\int d\xi^1\ldots d\xi^n \exp\{\varepsilon\mathcal{H}(t, \vec{\xi}) - i\varepsilon\xi^j x_j(t)\}\,\hat{W} = \\ = \hat{f}_\varepsilon^{1/2}(\vec{x}, t)\,\hat{W}\hat{f}_\varepsilon^{1/2}(\vec{x}, t), \tag{7.12}$$

где

$$\hat{f}_\varepsilon(\vec{x}, t) = \exp[-\gamma\varepsilon(x_i(t) - \hat{A}_i(t))\Delta^{ij}(x_j(t) - \hat{A}_j(t))]. \tag{7.13}$$

Из соотношений (6.9), (7.12) вытекает, что отображение $f(t_1, t_0; [\vec{x}])$ положительно; этим доказательство нашего утверждения завершается.

Соотношение (7.7), однако, еще не дает самую общую форму производящего оператора, для которого (7.8)—(7.10) определяют о. з. с. п. Несколько более общий класс дается формулой

$$\mathcal{H}(t; \vec{\xi}(t)) = \mathcal{L}(t) + i\xi^j(t)\mathcal{R}_j(t) - \frac{1}{4\gamma}\xi^i(t)\Delta_{ij}\xi^j(t), \tag{7.14}$$

где Δ_{ij} такая же, как и выше.

Прежде всего заметим, что $\mathcal{L}(t) = \mathcal{H}(t; \vec{0})$ является инфинитезимальным оператором семейства отображений $\mathcal{G}(t_1, t_0) = \mathcal{J}(t_1, t_0; E^*)$. Для того чтобы эти отображения были положительны и сохраняли след, мы должны предположить, что $\mathcal{L}(t)$ имеет вид, предложенный Линдбладом [14]

$$\mathcal{L}(t)\hat{X} = \\ = -i[\hat{H}_1(t), \hat{X}] - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}(\{\hat{V}_s^\dagger(t)\hat{V}_s(t), X\} - 2\hat{V}_s(t)\hat{X}\hat{V}_s^\dagger(t)), \tag{7.15}$$

где $H_1 = \hat{H}_1^\dagger$. Тогда из положительности $f(t_1, t_0; [\vec{x}])$ вытекает, что

$$\mathscr{R}_j(t)\hat{X} = \frac{1}{2}\left(\hat{R}_j(t)\hat{X} + \hat{X}\hat{R}_j^\dagger(t)\right) \tag{7.16}$$

(см. [9]), где

$$\hat{R}_j(t) = \sum_{s=1}^{m} c_{js}\hat{V}_s(t) + c_{j_0}\hat{I}, \tag{7.17}$$

и, кроме того, матрица

$$\alpha_{sr} \equiv \delta_{sr} - \frac{\gamma}{2} c_{is}^* \Delta^{ij} c_{jr} \tag{7.18}$$

должна быть положительной.

Тогда получаем

$$f(t+\varepsilon, t; [\vec{x}])\hat{W} =$$
$$= \exp[\varepsilon \mathscr{L}'(t)]\left(\hat{U}_\varepsilon(\vec{x}, t)\hat{f}_\varepsilon^{1/2}(\vec{x}, t)\hat{W}\hat{f}_\varepsilon^{1/2}(\vec{x}, t)\hat{U}_\varepsilon^\dagger(\vec{x}, t)\right), \tag{7.19}$$

где $\mathscr{L}'(t)$ — некоторый инфинитезимальный оператор типа (7.15), а $\hat{U}_\varepsilon(\vec{x}, t)$ — унитарный оператор, являющиеся довольно сложными функциями от $\hat{H}_1$ и $\hat{R}_j$; $j = 1, \ldots, n$. Оператор

$$\hat{f}_\varepsilon(\vec{x}, t) = f^T(t+\varepsilon, t; [\vec{x}])\hat{I} \tag{7.20}$$

является плотностью т. з. м. и дается формулой

$$\hat{f}_\varepsilon(\vec{x}, t) = \hat{\Omega}\exp\left[-\gamma\varepsilon(x_i - \hat{A}_i(t))\Delta^{ij}(x_j - \hat{A}_j(t))\right]\hat{\Omega}^+, \tag{7.21}$$

где

$$\hat{A}_i(t) = \frac{1}{2}\left(\hat{R}_i(t) + \hat{R}_i^\dagger(t)\right),$$

а $\hat{\Omega}$ — некоторый оператор, явное выражение для которого мы не приводим, но который обращается в единичный, если $\hat{R}_j(t)$ — самосопряженные операторы.

Литература *)

1. Ludwig G. Commun. Math. Phys., 4 (1967), 331; 9 (1968); 1; Lect. Notes Phys., 4, Springer (1970).
2. Kraus K. Lect. Notes Phys., 29, Springer (1970), p. 206.
3. Hellwig K.-E., Kraus K. Commun. Math. Phys., 11 (1969), 214; 16 (1970), 142; Hartkämper A. Lect. Notes Phys., 29, Springer (1970), p. 107; Neumann H. ibid. p. 116 and p. 316; Haag R., Kastler D. J. Math. Phys., 5 (1964), 848; Edwards C. M. Commun. Math. Phys., 16 (1970), 207; 20 (1971), 26; Davies A. S., Lewis J. T. Commun. Math.

---

*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

Phys., 17 (1970), 239; Holevo A. S. J. Multivariate Anal., 3 (1973); 337; Rep. Mat. Phys., 13 (1978), 379; 16 (1979), 385; Prugovečki E. J. Math. Phys., 17 (1976), 517; 18 (1977), 219.

4. Davies E. B. Quantum theory of open systems, Academic Press (1976).
5. Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980.
6. Barchielli A., Lanz L., Prosperi G. M. Nuovo Cimento, 72B (1982), 79.
7. Barchielli A. Nuovo Cimento, 74B (1983), 113.
8. Lupieri G. Generalized stochastic processes and continual observation in quantum mechanics, J. Math. Phys., 24 (1983), 2325—2339.
9. Barchielli A., Lanz L., Prosperi G. M. Statistics of continuous trajectories in quantum mechanics: operation-valued stochastic processes, Found. Phys., 13 (1983), 779—812.
10. Lanz L., Prosperi G. M., Sabbatini A. Nuovo Cimento 2B (1971), 184; George C., Prigogine I., Rosenfeld L. Dansk. Mat. Fys. Medd., 38 (1972), 1; Cimi M., De Maria M., Mattioli G., Nicolò F. Found. Phys., 9 (1979), 479; Hepp K. Helv. Phys. Acta, 45 (1972), 234.
11. Ludwig G. Lect. Notes Phys., 29, Springer (1973), p. 122; Makroskopische Systeme und Quantenmechanik, Notes in Math. Phys. (Marburg, 1972).
12. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 4, — М.: Физматгиз, 1961.
13. Reed M. C. Lect. Notes Phys., 25, Springer (1973), p. 2.
14. Lindblad G. Commun. Math. Phys., 48 (1976), 119.
15*. Холево А. С. Об измерениях параметров квантового случайного процесса, ТМФ, 57 (1983), 424—435.
16*. Barchielli A. Continuous observations in quantum mechanics: an application to gravitational-wave detectors, Phys. Rev. D, 32 (1985), 347.
17*. Barchielli A., Lupieri G. Quantum stochastic calculus, operationvalued stochastic processes and continued measurements in quantum mechanics, J. Math. Phys., 26 (1985), 2222—2230.
18*. Barchielli A., Lupieri G. Dilations of operation valued stochastic processes. Lect. Notes Math., 1136 (1985), 57—66.

СОДЕРЖАНИЕ