Холево А.С.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ.

(М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980)

Книга посвящена основаниям квантовой механики и тем ее вопросам, в которых существенную роль играют вероятностные и статистические представления. За последние годы в этой области был достигнут прогресс, во многом стимулированный новыми приложениями квантовой теории.

В книге в доступной и строгой форме обсуждаются вопросы вероятностной интерпретации, проблема скрытых параметров, кванто-вомеханические симметрии, теория канонических коммутационных соотношений и гауссовских состояний, соотношения неопределенностей и другие принципиальные границы точности квантового измерения.

Для математиков и физиков (студентов-старшекурсников, аспирантов, научных работников), интересующихся основаниями квантовой теории, ее связями *с* теорией вероятностей и математической статистикой, вопросами квантового измерения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ВВЕДЕНИЕ

Математическим аппаратом современной квантовой механики служит теория операторов в гильбертовом пространстве. Операторы играют здесь такую же основополагающую роль, что и функции в классической механике, теории вероятностей и статистике. Однако если в классических теориях использование математического аппарата функций базируется на интуитивно ясных предпосылках (которые кажутся настолько очевидными, что классическая механика как бы сливается с лежащей в основе ее математикой), то в квантовой теории ситуация носит иной характер.

Исторически «матричная механика» Гейзенберга и «волновая механика» Шредингера, непосредственно предшествовавшие современной квантовой теории, возникли как результат ряда удачных догадок, в ходе подбора математических объектов, способных отразить непонятные особенности, в частности, своеобразное сочетание дискретности и непрерывности в поведении микрообъектов. Разработанная позднее Борном и другими «вероятностная интерпретация» прояснила значение элементов операторного формализма, установив правила, по которым они должны связываться с реально наблюдаемыми величинами, однако и в этих постулатах оставалась, по видимости, значительная доля «произвола теоретиков». Основным доводом в пользу непривычного формализма продолжало оставаться поразительное соответствие построенных на его основе предсказаний с экспериментальными данными. Такая ситуация породила множество попыток, с одной стороны, найти классическую альтернативу квантовой механики, которая столь же удовлетворительно описывала бы существующий массив экспериментальных данных, с другой стороны, наоборот, обосновать с физических и философских позиций неизбежность новой механики в области явлений микромира. Появилась и продолжает пополняться обширная физико-философская литература, посвященная основаниям квантовой теории.

Наряду с этим ощущается потребность и в математически более определенном рассмотрении структуры квантовой теории и «словаря», устанавливающего соответствие между элементами формализма и физической реальности. Из работ такого характера в первую очередь следует упомянуть имеющиеся в русском переводе монографии фон Неймана «Математические основы квантовой механики» и Макки «Лекции по математическим основам квантовой механики». Настоящая книга примыкает к ним по направленности, но значительно отличается по содержанию и методологическим предпосылкам, учитывая недавний прогресс в математической теории квантового измерения.

Первые три главы книги образуют введение в основания квантовой механики, адресованное читателю, который интересуется структурой квантовой теории и ее связями с классической теорией вероятностей. Несмотря на математический характер изложения, оно не является чисто «аксиоматическим». Его цель — выявить происхождение основных элементов квантовомеханического формализма, оставаясь в рамках общепринятой вероятностной интерпретации и базируясь, насколько это возможно, на классических вероятностных концепциях.

Обращение к этим вопросам не было для автора самоцелью — разобраться в них оказалось необходимым для решения конкретных задач о границах точности квантовых измерений, возникших в приложениях. До недавнего времени к ним не было сколько-нибудь единого и четкого подхода. Методы математической статистики, приспособленные для решения аналогичных задач в классической вероятностной постановке, нуждались в радикальной переработке с позиций квантовой теории. Вторая часть книги — главы IV—VI — содержащая в основном новые результаты, посвящена квантовой теории оценивания — аналогу соответствующего раздела математической статистики.

Перейдем к изложению краткого содержания глав. В главе I вводятся основные понятия состояния и измерения. В отличие от традиционного способа изложения, когда это делается постулативно, здесь эти понятия выводятся из анализа статистического описания экспериментальной ситуации. Помимо чисто методических преимуществ, такой подход уже на начальной стадии приводит к содержательному расширению традиционной концепции квантового измерения, идущей от Дирака и фон Неймана. В математическом плане это приводит к произвольным (вообще говоря, неортогональным) разложениям единицы в гильбертовом пространстве вместо прежних ортогональных (спектральных мер) и к отказу от самосопряженности как необходимого атрибута наблюдаемой. Надо сказать, что неортогональные разложения единицы не являются какой-то «экзотикой» в физике; пример дают «переполненные» системы векторов типа «когерентных состояний», играющие все большую роль в теоретической физике и приложениях. Новая концепция измерения является стержнем всего дальнейшего изложения.

Цель первой главы состоит также в том, чтобы привлечь внимание к общему понятию статистической модели, которое может оказаться полезным и за пределами квантовой теории. Благодаря ему получает новое освещение проблема скрытых переменных *) (во всяком случае, тот ее аспект, который поддается математическому анализу).

Во второй главе вводится аппарат квантовой механики — элементы теории операторов в гильбертовом пространстве. Наряду с изложением традиционного материала (ядерные операторы, спектральная теория) много внимания уделено неортогональным разложениям единицы. Новым моментом здесь также является введение пространств $\mathscr{L}^2$, связанных с квантовым состоянием и играющих ту же роль, что гильбертовы пространства случайных величин с конечным вторым моментом в теории вероятностей. В этих пространствах получают про-

*) Мы предпочитаем говорить о «скрытых переменных», а не о «скрытых параметрах», чтобы избежать ненужных ассоциаций с параметрами в статистической теории оценивания. Такой перевод английского термина «hidden variables» представляется также более точным.

стое и естественное обоснование некоторые действия над неограниченными операторами.

Фундаментальную роль в квантовой теории играет понятие симметрии. В главе III на простейших квантовых моделях показано, каким образом свойства симметрии позволяют установить связь между физическими параметрами и вполне определенными разложениями единицы в гильбертовом пространстве. В частности, строятся разложения единицы, канонически отвечающие таким величинам, как угол поворота, фаза гармонического осциллятора, время достижения, а также паре величин координата — скорость. Измерения этих величин не имели определенного статута в квантовой механике, поскольку самосопряженных операторов (ортогональных разложений единицы) с необходимыми свойствами симметрии вообще не существует.

Квантовомеханическая природа объекта находит выражение в принципиальных ограничениях на возможности производимых над ним измерений. Прогресс физического эксперимента заставляет задуматься о необходимости правильного учета квантовомеханических ограничений на точность измерений. Важным типом таких ограничений являются известные соотношения неопределенностей для пар канонически сопряженных величин. Однако, если рассматривать соотношение неопределенностей не как априорный физический принцип, дающий порядковую оценку, а как строгое неравенство, являющееся математическим следствием основных положений квантовой теории, то ситуация оказывается простой только в случае канонической пары «координата — импульс». В главе IV строго устанавливаются соотношения неопределенностей «угол — угловой момент», «фаза — число квантов» и другие неравенства. Они оказываются тесно связанными с квантовым аналогом теоремы Ханта — Стейна, известной в математической статистике.

Высокая точность характерна, в частности, для измерений в квантовой оптике. Примером ситуации, в которой может оказаться необходимым учет квантовых ограничений, является передача сигнала по оптическому каналу связи, в котором уровень «квантового шума» сравним с уровнем классического теплового шума или превосходит его. Здесь возникают те же задачи, что и в обычной статистической теории связи, однако они уже не могут быть решены и даже правильно поставлены в рамках математической статистики в силу квантовомеханической природы носителя информации.

Глава V посвящена так называемым гауссовским состояниям, которые, в частности, возникают при описании оптического сигнала на фоне «квантового шума». Изложение построено так, чтобы проследить и в максимальной мере использовать замечательную аналогию с гауссовскими распределеииями теории вероятностей. Важную роль здесь играет понятие квантовой характеристической функции. В главе VI рассматривается задача измереиия среднего зиачения гауссовского состояния, которую можио интерпретировать как выделение сигнала из аддитивного квантового гауссовского шума. Дается вывод общих неравенств, подобных неравенству Рао — Крамера в математической статистике. С их помощью удается охарактеризовать иаиболее точное измерение среднего значения.

Настоящая книга, конечно, не может и не ставит цель заменнть стандартное руководство по квантовой механике; целый ряд важнейших вопросов, составляющих основное содержание таких курсов, в ней рассматривается фрагментарно, либо вообще не затрагивается (например, теория возмущений). Автор не стремился также охватить все, что относится к квантовым нзмерениям. Освещены только те вопросы, которые касаются статистики результатов измерения и не требуют рассмотрения изменения квантового состояния после измерений; в частности, отсутствует обсуждение последовательных измерений, квантовых случайных процессов и динамики «открытых» систем, в математической теории которых за последнее время достигнут определенный прогресс. Краткий обзор современного состояния этих и других вопросов, имеющих непосредственное отношение к излагаемому материалу, читатель найдет в комментарнях.

Желание совместить строгость рассуждений с доступностью заставило автора отказаться от наиболее общего и, быть может, математически наиболее «экономного» способа изложения. Было сочтено возможным не углубляться в вопросы, связанные с измеримостью и интегрированием; подробное и общее рассмотрение этих вопросов интересующийся читатель найдет в других работах, на которые даются ссылки в комментариях. Необходимым для понимания всего материала является владение основными понятиями теории вероятностей, а для глав IV и VI — и математической статистики.

Наиболее элементарной в техническом отношении является глава I, использующая лишь аппарат линейной алгебры. В главе II дается неформальный обзор сведений из теории операторов, причем теоремы, как правило, не доказываются, а сопровождаются пояснениями и примерами. Материал, необходимый для физических приложений в гл. III, излагается в §§ 1—6 гл. II; читателю, знакомому с функциональным анализом, будет достаточно бегло их просмотреть. С другой стороны, читатель, знающий квантовую механику, может опустить в гл. III подробное математическое рассмотрение таких вопросов, как гармонический осциллятор, угловой момент, спин, включенное для замкнутости изложения, и сосредоточиться на менее известных ему вещах.

В книге активно используется символика Дирака, но для обозначения скалярного произведения употребляются не угловые, а круглые скобки, как это принято в математической литературе. Угловые скобки, ассоциирующиеся с символом усреднения в статистической физике, обозначают другое скалярное произведение, задающее корреляционную функцию двух наблюдаемых. Для квантового состояния (оператора плотности) используется символ S (а не ρ), родственный символу P для классического состояния (распределения вероятностей). В остальном обозначения стандартны. Внутри каждой главы принята двойная нумерация формул; ссылка на параграф или формулу из другой главы содержит дополнительно номер этой главы.

Автор благодарен Д. П. Желобенко и Ю. М. Широкову, которые прочли рукопись книги и сделали ряд полезных замечаний.

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Состояния и измерения

В основе теоретической модели реального явления или объекта лежат в конечном счете данные опыта; совокупность всевозможных экспериментов вместе с полным описанием их результатов образует «остов» всякой теоретической модели. Рассмотрим схематизированное

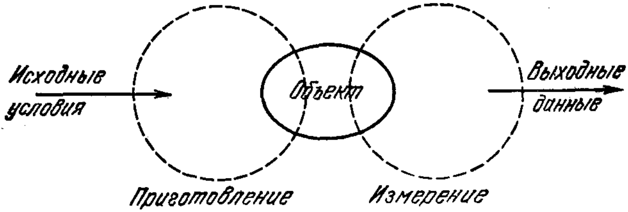

Рис. 1.

описание произвольного эксперимента и проследим, как отсюда возникают основные элементы теоретической модели.

Во всяком эксперименте можно выделить две основные стадии. В первой стадии, стадии *приготовления*, фиксируется определенная экспериментальная ситуация, т. е. устанавливаются исходные условия, задаются «входные данные» эксперимента. В следующей стадии *измерения* определенным образом «приготовленный» объект воздействует на тот или иной измерительный прибор, результатом чего в каждом индивидуальном эксперименте являются те или иные «выходные данные» (рис. 1).

Важнейшим условием, которому должен удовлетворять всякий научный эксперимент, является условие **воспроизводимости**, возможности неограниченного повторения данного измерения в данной экспериментальной ситуации. Рассмотрим последовательность одинаковых и независимых повторений некоторого эксперимента. Результаты подобных индивидуальных экспериментов, как правило, не будут строго одинаковы. Практически всегда получаемые результаты подвержены случайному разбросу, амплитуда которого варьируется в зависимости от характера эксперимента и природы исследуемого объекта. Наличие ошибок измерения является объективным фактом, мимо которого не может пройти ни одна разумная теория эксперимента.

Существуют, однако, обширные классы явлений, для которых разброс экспериментальных результатов оказывается настолько несущественным, что его вообще можно не принимать в расчет. Это относится, например, к механическому поведению макроскопических объектов или к процессам, протекающим в электрических цепях. Соответствующие теории — классическая механика и теория электрических цепей — исходят из предпосылки, что возможно сколь угодно точное, в идеале — абсолютно точное измерение параметров, характеризующих поведение объекта. В таких случаях говорят, что объект допускает детерминированное описание. Подчеркнем, что детерминированное описание обычно является лишь некоторым приближением к реальности, справедливым лишь постольку, поскольку оно согласуется с данными опыта.

Плодотворность детерминистических представлений в классической теоретической физике 18—19 вв. породила иллюзию универсальности детерминированного описания. Однако по мере проникновения экспериментальной физики в область явлений микромира становилась все более ясной неприменимость в этой области детерминированного описания, заимствованного из классической механики, и необходимость привлечения статистических концепций. Характерный пример ситуации, в которой приходится существенно учитывать разброс результатов измерения, дают эксперименты по рассеянию частиц. В подобных экспериментах невозможно точно предсказать, в каком направлении рассеется данная частица,— можно лишь говорить о вероятности рассеяния в том или ином направлении. Можно было бы привести целый ряд других примеров, однако заинтересованный читатель легко найдет их в курсах квантовой физики. В настоящее время необходимость статистического описания микромира можно считать общепризнанной.

Говоря о возможности статистического описания, мы подразумеваем, что рассматриваемое явление удовлетворяет следующему фундаментальному требованию, включающему в себя условие воспроизводимости, которое для удобства ссылок мы будем называть статистическим постулатом: *всякий эксперимент допускает в принципе неограниченное число повторений; индивидуальные результаты в последовательности одинаковых, независимых экспериментов могут быть различны, однако появление того или иного результата в достаточно длинной последовательности характеризуется определенной частотой* (устойчивость частот). Тогда, абстрагируясь от практической невозможности произвести неограниченную последовательность одинаковых экспериментов, можно принять, что результаты эксперимента допускают теоретическое описание в виде вероятностей тех или иных исходов. Точнее говоря, следует различать понятия индивидуального эксперимента, результатом которого являются конкретные данные, и эксперимента как совокупности всевозможных индивидуальных реализаций. Понимая эксперимент именно в этом смысле, естественно считать его конечным результатом распределение вероятностей. При этом детерминированная зависимость результатов эксперимента от входных данных уступает место статистической: функцией входных данных является распределение вероятностей результатов измерения.

Примером эксперимента как совокупности индивидуальных реализаций являются распространенные в физике наблюдения над пучками идентичных, независимых частиц. Предположим, что для регистрации частиц, рассеянных на некотором препятствии, используется экран-детектор, попадание в который индивидуальной частицы вызывает, например, почернение фотоэмульсии. Тогда в результате экспозиции достаточно интенсивного пучка частиц на экране образуется некоторое распределение темных и светлых пятен, которое по существу дает представление о плотности распределения вероятностей попадания индивидуальной частицы. Хорошо известные из оптики дифракционные картины, образующиеся при рассеянии естественного света (который есть не что иное, как хаотический поток огромного числа фотонов), дают визуальное представление плотности распределения вероятностей для индивидуального фотона.

Разумеется, статистическое описание не является прерогативой явлений микромира. При исследовании физических объектов, состоящих из огромного числа частиц, таких как газы, жидкости или кристаллы, экспериментатор имеет возможность варьировать по своему произволу лишь весьма ограниченное число входных данных — таких как объем, давление, температура. Огромное количество переменных, характеризующих подробности поведения составных частей системы, остается вне контроля исследователя; их неконтролируемые изменения могут оказывать влияние на индивидуальные результаты измерений, вызывая флуктуации, учет которых имеет существенное значение для понимания механизма явлений, происходящих в таких больших системах. Статистика наблюдений играет важнейшую роль в вопросах передачи информации, где флуктуации параметров физического носителя информации являются источником разного рода «шумов», искажающих сообщение.

Подобная ситуация может иметь место и в биологических исследованиях. Например, проводя апробацию какого-либо метода лечения, исследователь располагает лишь ограниченным набором «входных данных», характеризующих его пациентов (возраст, пол, группа крови и т. п.). Однако эффект лечения в каждом индивидуальном случае будет определяться, вообще говоря, не только этими «интегральными» параметрами, но и целым рядом других, неучтенных либо не поддающихся учету внутренних факторов. Таким образом, эффект лечения, или, на нашем языке, «результат измерения», не является, вообще говоря, однозначной функцией известных данных пациента; в таких случаях статистический подход бывает весьма уместным и плодотворным.

На этих двух примерах мы видели, что источником случайного разброса в результатах измерения может быть неопределенность значений некоторых «скрытых переменных», находящихся вне контроля экспериментатора. Природа статистичности поведения объектов микромира не столь ясна, хотя пятидесятилетний опыт успешного применения статистических концепций в квантовой теории несомненно свидетельствует о том, что они дают правильную картину.

Мы не будем затрагивать здесь вопроса о природе статистичности в микрофизике, хотя и коснемся некоторых математических аспектов соответствующей «проблемы скрытых переменных» в § 7. Основное внимание мы уделим здесь следствиям сформулированного выше статистического постулата для произвольного объекта, удовлетворяющего этому требованию. Мы покажем, что уже на таком общем уровне возникают фундаментальные понятия состояния и измерения, играющие, в частности, столь важную роль в квантовой теории.

Условно представим себе объект как «черный ящик», на «входе» которого могут создаваться те или иные исходные условия $\tilde{S}$. После того как объект приготовлен определенным образом, экспериментатор производит то или иное измерение и получает данные u. Выходные данные u могут иметь различный характер. Они могут быть дискретными, например, в том случае, когда измерительный прибор является пороговым устройством, регистрирующим наличие или отсутствие определенной частицы, либо непрерывными, если прибор имеет шкалу или несколько шкал. Выходными данными могут быть показания нескольких приборов. Наконец, результатом измерения может быть целая траектория — фотография следа частицы. Чтобы дать единообразное рассмотрение всевозможных ситуаций, мы примем, что *множество индивидуальных результатов измерения образует некоторое измеримое пространство U с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathscr{A}(U)$.* Измеримому подмножеству $B \subset U$ соответствует событие: результат измерения u лежит в B *).

*) Читатель, не знакомый с концепцией измеримости, может условно представлять себе U как область в многомерном пространстве, а B — как «достаточно хорошее» подмножество U. Однако у нас U может быть гораздо более сложным образованием — например, пространством непрерывных функций.

Согласно статистическому постулату, результат индивидуального эксперимента можно рассматривать как реализацию некоторой случайной величины, принимающей значения в U. Пусть $\mu_{\tilde{S}}(du)$ — распределение вероятностей этой случайной величины. Индекс $\tilde{S}$ отражает зависимость статистики результатов измерения от процедуры приготовления, т. е. от исходных условий эксперимента, так что

$$\mu_{\tilde{S}}(B) = \Pr\{u \in B \mid \tilde{S}\}, \qquad B \in \mathscr{A}(U),$$

есть *условная вероятность* получить результат $u \in B$ при исходных условиях $\tilde{S}$. Можно сказать, что полное статистическое описание результатов измерения дается отображением $\tilde{S} \to \mu_{\tilde{S}}(du)$, сопоставляющим конкретным исходным условиям $\tilde{S}$ распределение вероятностей $\mu_{\tilde{S}}$ на пространстве U результатов измерения. При этом следует подчеркнуть, что, давая полное описание результатов измерения, отображение $\tilde{S} \to \mu_{\tilde{S}}$ не содержит никаких указаний ни о конкретном механизме измерения, ни о его последствиях для рассматриваемого объекта. С этой точки зрения измерительные процедуры не различаются, если для любых исходных условий $\tilde{S}$ они приводят к одному и тому же распределению вероятностей $\mu_{\tilde{S}}$, хотя практически они могут осуществляться совершенно различными приборами. Каждой конкретной измерительной процедуре отвечает отображение $\tilde{S} \to \mu_{\tilde{S}}$, однако одно такое отображение может объединять в себе целый класс измерительных процедур, не различающихся статистикой результатов.

Точно так же исходные условия $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$ являются неразличимыми с точки зрения статистики результатов измерения, если $\mu_{\tilde{S}_1} = \mu_{\tilde{S}_2}$ для любого отображения $\tilde{S} \to \mu_{\tilde{S}}$, описывающего измерительную процедуру. Объединим неразличимые процедуры приготовления $\tilde{S}$ в классы эквивалентности $S = [\tilde{S}]$, которые назовем *состояниями*. Пусть $\mathfrak{S} = \{S\}$ — множество всевозможных состояний. Поскольку распределение вероятностей $\mu_{\tilde{S}}$ одинаково для всех $\tilde{S}$ из одного класса S, то его можно считать функцией состояния $\mu_{\tilde{S}}=\mu_S$. Отображение $S\to\mu_S$ из множества состояний в множество распределений вероятностей на пространстве результатов U будем называть измерением.

Статистический постулат налагает определенное ограничение на структуру множества состояний $\mathfrak{S}$ и описывающее измерениеотображение $S\to\mu_S$. Пусть $S_\alpha, \alpha=1, \ldots$ $\ldots, A$, — какие-либо состояния. Предположим, что экспериментатор не знает точно, в каком из этих состояний приготовлен объект, однако ему известны вероятности p_α того, что приготовленным состоянием является S_α, $\alpha=$ $=1, \ldots, A$. Фактически это означает, что в неограниченной последовательности индивидуальных экспериментов объект приготавливается в одном из состояний S_α, причем появление состояния S_α характеризуется соответствующей частотой. Физически это соответствует флуктуациям тех или иных параметров, характеризующих приготовительную процедуру. Пусть в каждом из индивидуальных экспериментов производится одно и то же измерение. Тогда согласно статистическому постулату и элементарным свойствам вероятностей появление того или иного результата u будет описываться распределением вероятностей $\mu(du)=\sum\limits_\alpha p_\alpha\mu_{S_\alpha}(du)$. Описанную выше ситуацию можно рассматривать как определенный способ приготовления состояния (смешивание), при котором значение некоторого параметра α не фиксируется точно, а выбирается согласно априорному распределению $\{p_\alpha\}$. Обозначим такое состояние-смесь следующим образом:

$$S=S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}), \tag{1.1}$$

так что для любого измерения $S\to\mu_S$ выполняется

$$\mu_S(du)=\sum_\alpha p_\alpha\mu_{S_\alpha}(du). \tag{1.2}$$

Таким образом, следует принять, что для каждого набора состояний $\{S_\alpha\}\subset\mathfrak{S}$ и распределения вероятностей $\{p_\alpha\}$ существует однозначно определенное состояние-смесь $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})$, характеризуемое соотношениями (1.2). Оказывается, что тогда *множество состояний можно есте-*

ственно отождествить с выпуклым подмножеством некоторого линейного пространства, так что будет выполняться

$$S(\{S_\alpha\},\ \{p_\alpha\}) = \sum_\alpha p_\alpha S_\alpha.$$

Для точной формулировки этого и ряда других утверждений нам потребуются сведения из теории выпуклости, изложению которых посвящается следующий параграф.

§ 2. Некоторые геометрические понятия

Пусть $S_1, \ldots, S_n$ — точки некоторого линейного пространства $\mathscr{L}$, $p_1, \ldots, p_n$ — набор вещественных чисел, удовлетворяющий условиям

$$p_j \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1,$$

т. е. конечное распределение вероятностей. Тогда точка

$$S = \sum_{j=1}^{n} p_j S_j$$

называется *выпуклой комбинацией* точек S_j с коэффициентами (весами) p_j. *Выпуклой оболочкой* множества точек $\mathscr{K} \subset \mathscr{L}$ называется совокупность выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек $\{S_j\} \subset \mathscr{K}$. Множество $\mathfrak{S}$ называется *выпуклым*, если оно совпадает со своей выпуклой оболочкой, т. е. содержит выпуклую комбинацию любого конечного набора своих точек. Если ограничиться двумя точками S_0, S_1, то совокупность их выпуклых комбинаций геометрически представляет собой отрезок, соединяющий эти точки:

$$\{S\colon\ S = p_0 S_0 + p_1 S_1;\quad p_0,\ p_1 \geqslant 0,\ p_0 + p_1 = 1\}.$$

Нетрудно убедиться, что множество $\mathfrak{S}$ выпукло тогда и только тогда, когда вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и соединяющий их отрезок.

Абстрактное множество $\mathfrak{S}$ назовем *пространством смесей*, если каждому конечному набору элементов $\{S_\alpha\} \subset \mathfrak{S}$ и распределению вероятностей $\{p_\alpha\}$ сопоставлен однозначный элемент-смесь $S(\{S_\alpha\},\ \{p_\alpha\})$. Примером пространства смесей является выпуклое множество, если смесь определяется как выпуклая комбинация.

Пусть F — отображение пространства смесей $\mathfrak{S}$ в какое-либо линейное пространство. Оно называется *аффинным*, если для любой смеси $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})$ выполняется

$$F(S(\{S_\alpha\},\{p_\alpha\})) = \sum_\alpha p_\alpha F(S_\alpha).$$

Очевидно, что образ выпуклого множества при аффинном отображении является выпуклым множеством. В линейных пространствах существует тесная связь между аффинными и линейными отображениями: именно, всякое аффинное отображение выпуклого множества $\mathfrak{S} \subset \mathscr{L}$ является сужением на $\mathfrak{S}$ отображения вида $T \to L(T) + L_0$; $T \in \mathscr{L}$, где L — линейное отображение. В частности, всякий аффинный функционал (т. е. отображение на вещественную прямую $\mathbb{R}$) с точностью до постоянного слагаемого совпадает с сужением на $\mathfrak{S}$ линейного функционала на $\mathscr{L}$.

Пространство смесей называется *отделимым*, если для любых двух элементов S_1, $S_2 \in \mathfrak{S}$ найдется аффинный функционал φ на $\mathfrak{S}$ такой, что $\varphi(S_1) \neq \varphi(S_2)$.

Примером отделимого пространства смесей является множество состояний из § 1. В самом деле, для любого измерения $S \to \mu_S$ и любого подмножества $B \in \mathscr{A}(U)$ функционал $S \to \mu_S(B)$ является аффинным в силу (1.2). По построению, для любых состояний S_1 и S_2 должно найтись измерение такое, что $\mu_{S_1} \neq \mu_{S_2}$, т. е. $\mu_{S_1}(B) \neq \mu_{S_2}(B)$ для некоторого B. Из следующего предложения вытекает, что всякое множество состояний можно рассматривать как выпуклое подмножество некоторого линейного пространства с операцией выпуклой комбинации в качестве смешивания.

Предложение 2.1. *Всякое отделимое пространство смесей $\mathfrak{S}$ взаимно-однозначно и аффинно отображается на выпуклое подмножество линейного пространства.*

Доказательство. Пусть $A(\mathfrak{S})$ — линейное пространство всех аффинных функционалов на $\mathfrak{S}$. Рассмотрим сопряженное пространство $\mathscr{L} = A(\mathfrak{S})'$ всех линейных функционалов на $A(\mathfrak{S})$. Для каждого $S \in \mathfrak{S}$ введем $\hat{S} \in \mathscr{L}$, полагая

$$\hat{S}(\varphi) = \varphi(S), \quad \varphi \in \mathscr{L}.$$

Отображение $S \to \hat{S}$ является аффинным, так как

$$\sum_j p_j \hat{S}_j(\varphi) = \sum_j p_j \varphi(S_j) = \varphi(S(\{S_j\}, \{p_j\})) = \\ = \hat{S}(\{S_j\}, \{p_j\})(\varphi),$$

и взаимно-однозначным, так как $\hat{S}_1(\varphi) = \hat{S}_2(\varphi)$ влечет $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$ для всех аффинных функционалов φ. Предложение доказано.

Простейшим примером выпуклого множества является *n-мерный симплекс*, который определяется как выпуклая оболочка $n+1$ точек общего положения в пространстве

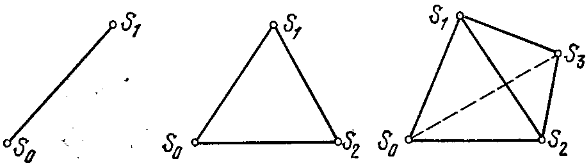

Рис. 2.

размерности $\geqslant n$ (точки $S_0, S_1, \ldots, S_n$ называются точками общего положения, если n векторов $\overrightarrow{S_0S_1}, \ldots, \overrightarrow{S_0S_n}$ линейно независимы). В случае $n = 1$ симплекс является отрезком, в случае $n = 2$ — треугольником, в случае $n = 3$ — тетраэдром (рис. 2). Точки $S_0, \ldots, S_n$ называются *вершинами* симплекса.

Фундаментальную роль в теории выпуклых множеств играет понятие крайней точки. Точка S называется *крайней точкой* выпуклого множества $\mathfrak{S}$, если она не является внутренней точкой отрезка, целиком лежащего в $\mathfrak{S}$, т. е. не может быть представлена в виде $S = p_0 S_0 + p_1 S_1$, где $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$; $S_0, S_1 \in \mathfrak{S}$ и $S_0 \neq S_1$.

Множество всех крайних точек назовем *остовом* выпуклого множества. В конечномерном линейном пространстве имеет место

Теорема 2.1. *Всякое компактное (ограниченное и замкнутое) выпуклое множество $\mathfrak{S}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.*

В произвольном выпуклом множестве одну и ту же точку S можно представить в виде выпуклой комбинации крайних точек, вообще говоря, разными способами. *Раз-*

ложение по крайним точкам однозначно для любой точки $S \in \mathfrak{S}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{S}$ *является симплексом.* Заметим, что крайними точками симплекса являются его вершины.

Теорема 2.1, определение и характеристическое свойство симплекса обобщаются и на бесконечномерный случай, однако аккуратное изложение этих вопросов потребовало бы больше места, чем позволяют рамки этой книги. В то же время для понимания следующих разделов достаточно приведенных выше конечномерных результатов. Остановимся лишь на одном примере, который встретится дальше.

Рассмотрим множество всевозможных распределений вероятностей $\mathfrak{P}(\Omega)$ на некотором фиксированном измеримом пространстве Ω. Это множество является выпуклым, так как всякая выпуклая комбинация или «смесь» распределений $P_j(d\omega)$, очевидно, является распределением на Ω:

$$P(A) = \sum_j p_j P_j(A), \qquad A \in \mathscr{A}(\Omega).$$

Всякой точке $\omega \in \Omega$ отвечает δ-распределение, сосредоточенное в точке ω:

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & A \ni \omega, \\ 0, & A \not\ni \omega. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что σ-алгебра $\mathscr{A}(\Omega)$ разделяет точки Ω, т. е. для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ существует $A \in \mathscr{A}(\Omega)$ такое, что $\omega_1 \in A$, $\omega_2 \notin A$. Тогда соответствие $\omega \to \delta_\omega$ является взаимно-однозначным. Крайними точками множества $\mathfrak{P}(\Omega)$ являются δ-распределения и только они. Очевидно, что для любого $P \in \mathfrak{P}(\Omega)$

$$P(A) = \int_\Omega P(d\omega)\, \delta_\omega(A), \qquad A \in \mathscr{A}(\Omega). \tag{2.1}$$

Это представление является непрерывным аналогом разложения по крайним точкам, причем роль набора коэффициентов p_j здесь играет распределение $P(d\omega)$. Представление (2.1) однозначно, так что выпуклое множество $\mathfrak{P}(\Omega)$ обладает свойством, характеризующим в конечномерном случае симплекс, и мы сохраним за ним это название.

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда $\Omega = \Omega_n$ состоит из конечного числа n точек ($\mathscr{A}(\Omega)$ является булевой алгеброй всех подмножеств Ω_n). Тогда множество

$$\mathfrak{P}_n = \left\{P = [p_1, \ldots, p_n]:\ p_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right\},$$

очевидно, является $(n-1)$-мерным симплексом с вершинами $[1, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 0, 1]$.

Для нас будет удобно записывать P в виде диагональной матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix}.$$

Тогда условия, характеризующие P, запишутся в виде

$$P \geqslant 0, \qquad \operatorname{Tr} P = 1, \tag{2.2}$$

где Tr обозначает *след матрицы*, т. е. сумму диагональных элементов.

Если X — случайная величина на Ω_n, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n$, то, полагая

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix},$$

получаем, что математическое ожидание величины X относительно распределения вероятностей P равно

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \operatorname{Tr} PX. \tag{2.3}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{Q}_n$ случайных величин, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x_j \leqslant 1$, т. е.

$$0 \leqslant X \leqslant I, \text{ где } I \text{ — единичная матрица.} \tag{2.4}$$

Тогда $\mathfrak{Q}_n$ будет выпуклым множеством — единичным гиперкубом, а его крайними точками — вершины гиперкуба, т. е. такие матрицы X, для которых x_j равно 0 или 1. Для таких матриц $X^2 = X$, так что крайними точками множества $\mathfrak{Q}_n$ являются проекционные матрицы.

Этот простейший пример позволяет естественно подойти к другому, который представляет основной интерес в связи с квантовой теорией.

Рассмотрим множество $\mathfrak{S}_n$ всех комплексных эрмитовых $n\times n$-матриц $S=[s_{mm'}]$, удовлетворяющих условиям типа (2.2):

$$S\geqslant 0, \qquad \mathrm{Tr}\, S=1. \tag{2.5}$$

Согласно *конечномерной спектральной теореме*, всякая эрмитова матрица представляется в виде

$$S=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j S_{\psi_j}, \tag{2.6}$$

где λ_j — (вещественные) собственные числа (без учета кратности), а $S_{\psi_j}=\psi_j\psi_j^*$ — взаимно-ортогональные проекторы *) на единичные собственные векторы матрицы S. Это называется *спектральным разложением* матрицы S. Из условий (2.5) следует, что собственные числа матрицы $S\in\mathfrak{S}_n$ образуют распределение вероятностей

$$\lambda_j\geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1.$$

В частности, $0\leqslant\lambda_j\leqslant 1$, и из (2.6) получаем

$$S-S^2=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(1-\lambda_j)\,S_{\psi_j}\geqslant 0.$$

При этом $S=S^2$ тогда и только тогда, когда $S=S_{\psi_k}$ для некоторого единичного вектора ψ_k, т. е. когда S является одномерным проектором.

Предложение 2.2. *Множество $\mathfrak{S}_n$ выпукло; его остов образуют одномерные проекторы.*

---

*) Подразумевается, что скалярное произведение векторов-столбцов $\varphi=[\varphi_m]$ и $\psi=[\psi_m]$ определяется как $\varphi^*\psi=\sum_{m=1}^{n}\bar\varphi_m\psi_m$, где φ^* — эрмитово сопряженный вектор-строка. Произведение столбца ψ на строку ψ^* является $n\times n$-матрицей с компонентами $[\psi_m\bar\psi_{m'}]$. Если ψ — единичный вектор, $\psi^*\psi=1$, то $S_\psi=\psi\psi^*$ является матрицей ортогонального проектирования на вектор ψ.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что оба условия (2.5) выдерживают образование выпуклых комбинаций. Докажем, что всякий одномерный проектор S является крайней точкой. Пусть

$$S=p_0S_0+p_1S_1;\quad p_0,\ p_1>0,\ p_0+p_1=1;\quad S_0,\ S_1\in\mathfrak{S}_n.$$

Возводя это соотношение в квадрат, вычитая S^2 из S и учитывая, что $S\geqslant S^2$ для $S\in\mathfrak{S}_n$, получаем

$$S-S^2=p_0(S_0-S_0^2)+p_1(S_1-S_1^2)+p_0p_1(S_0-S_1)^2\geqslant \\ \geqslant p_0p_1(S_0-S_1)^2.$$

Таким образом, из $S=S^2$ следует $S_0=S_1$, так что S является крайней точкой. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим спектральное разложение (2.6). Так как $S_{\psi_j}\in\mathfrak{S}_n$ и $S_{\psi_j}\neq S_{\psi_k}$ при $j\neq k$, то для матрицы S, являющейся крайней точкой множества $\mathfrak{S}_n$, сумма (2.6) может содержать только одно ненулевое слагаемое. Следовательно, $S=S_{\psi_j}$ для некоторого j, что и требовалось доказать.

Формула (2.6) дает один из вариантов разложения S по крайним точкам.

Рассмотрим также выпуклое множество $\mathfrak{X}_n$ всех $n\times n$-эрмитовых матриц X, удовлетворяющих ограничениям (2.4). Покажем, что *крайними точками множества $\mathfrak{X}_n$ являются проекторы, т. е. эрмитовы матрицы, удовлетворяющие условию $X^2=X$, и только они.* Доказательство того, что всякий проектор является крайней точкой, проводится так же, как для $\mathfrak{S}_n$; докажем, что всякая крайняя точка обязательно является проектором. Запишем спектральное разложение матрицы X:

$$X=\sum_{k=1}^{m}x_kE_k;\quad 0\leqslant x_k\leqslant 1,\ m\leqslant n, \tag{2.7}$$

где x_k — собственные числа X (с учетом кратности), E_k — проектор на собственное подпространство, отвечающее x_k. Пусть $x_1>x_2>\ldots>x_m$, тогда, применяя к сумме (2.7) преобразование Абеля и учитывая, что $E_1+\ldots+E_m=I$, имеем

$$X=(1-x_1)\cdot 0+\sum_{k=1}^{m-1}(x_k-x_{k+1})\cdot E_k'+x_m\cdot I, \tag{2.8}$$

где $E'_k = E_1 + \ldots + E_k$. Так как 0, I, а также E'_k принадлежат $\mathfrak{X}_n$, а все коэффициенты при них неотрицательны и в сумме составляют 1, то (2.8) является выпуклой комбинацией (несовпадающих) проекторов. Если X — крайняя точка, то сумма (2.8) должна состоять из одного слагаемого, так что матрица X должна быть проектором.

Еще раз подчеркнем, что разница между множествами $\mathfrak{P}_n$ и $\mathfrak{S}_n$ (соответственно между $\mathfrak{Q}_n$ и $\mathfrak{X}_n$) заключается в том, что во втором случае рассматриваются все эрмитовы матрицы, тогда как в первом — только диагональные или, что то же, одновременно диагонализуемые (коммутирующие) матрицы. Поэтому второй случай можно рассматривать как «некоммутативный» аналог первого; так, матрицу $S \in \mathfrak{S}_n$ можно назвать «некоммутативным распределением вероятностей», эрмитову матрицу X — «некоммутативной случайной величиной», задав среднее значение формулой типа (2.3). Дальше мы увидим, что здесь кроется нечто большее, чем простая аналогия.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть и случай вещественных симметричных матриц, однако для квантовой теории основной интерес представляет именно комплексный случай.

В заключение рассмотрим подробнее структуру выпуклого множества $\mathfrak{S}_n$ в простейшем «некоммутативном» случае $n = 2$. Всякая матрица $S \in \mathfrak{S}_2$ может быть записана в виде

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & 1-\theta_3 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

где θ_1, θ_2, θ_3 — вещественные числа, называемые *параметрами Стокса*. Условие $S \geqslant 0$ равносильно неравенству $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \leqslant 1$.

Таким образом, $\mathfrak{S}_2$ как выпуклое множество представляет собой шар в трехмерном вещественном пространстве; крайними точками являются матрицы (2.9), для которых точка $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ лежит на сфере $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$.

В случае $n > 2$ множество $\mathfrak{S}_n$ является уже некоторым собственным подмножеством $(n^2 - 1)$-мерного вещественного шара и дать ему компактное геометрическое описание представляется затруднительным.

§ 3. Определение статистической модели

Основываясь на рассуждениях § 1, введем следующее определение: *статистической моделью* назовем совокупность, состоящую из некоторого выпуклого множества $\mathfrak{S}$ и некоторого класса $\mathfrak{M}$ аффинных отображений $S \to \mu_S$ множества $\mathfrak{S}$ в множества распределений вероятностей на различных пространствах U. Элементы множества $\mathfrak{S}$ называются *состояниями*, а отображения из $\mathfrak{M}$ — *измерениями*. Проблему теоретического описания всякого объекта или явления, удовлетворяющего статистическому постулату, можно тогда сформулировать как задачу построения соответствующей статистической модели. Говоря подробнее, такое построение должно, во-первых, содержать описание математических объектов $\mathfrak{S}$ (множества теоретических состояний) и $\mathfrak{M}$ (множества теоретических измерений) и, во-вторых, устанавливать правила соответствия между реальными процедурами приготовления и измерения и теоретическими объектами, т. е. задавать вложение экспериментальных данных в статистическую модель.

В классической теории вероятностей и математической статистике рассматриваются статистические модели, в которых множество состояний $\mathfrak{S}$ имеет особо простую структуру. Квантовая теория имеет дело с радикально отличной статистической моделью. Мы рассмотрим эти модели в следующих параграфах.

В этой главе мы часто будем проводить рассмотрения на измерениях с конечным числом значений. В этом случае число возможных результатов индивидуального измерения конечно и распределение вероятностей результатов измерения задается конечным набором аффинных вещественных функций $\{\mu_S(u);\ u \in U\}$ на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющим условиям

$$\mu_S(u) \geqslant 0, \quad u \in U; \qquad \sum_{u \in U} \mu_S(u) = 1. \tag{3.1}$$

Здесь $\mu_S(u)$ — вероятность результата u относительно состояния S. Для любого $B \subset U$

$$\mu_S(B) = \sum_{u \in B} \mu_S(u).$$

Технически этот случай гораздо проще непрерывного и в то же время он позволяет понять основные положения теории. Практически измерения с конечным числом значений соответствуют измерительным процедурам, целью которых является некоторая классификация данных. В то же время легко представить себе, что измерения непрерывных величин могут быть аппроксимированы измерениями с конечным числом значений путем разбиения пространства U на достаточно мелкие части.

Измерения с двумя значениями будут называться *тестами*. Обозначая один из результатов теста 1, а другой — 0, получаем, что всякий тест определяется заданием одной функции на $\mathfrak{S}$ — например, вероятности получения 1, так как $\mu_S(0)=1-\mu_S(1)$. Вероятность $\mu_S(1)$ является аффинным функционалом на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющим условию $0\leqslant\mu_S(1)\leqslant 1$.

Пусть $S\to\mu_S(du)$ — измерение с произвольным пространством значений U. Тогда всякому измеримому подмножеству $B\subset U$ можно сопоставить тест $S\to\{\mu_S(\bar{B}), \mu_S(B)\}$, результат которого равен 0, если $u\,\overline{\in}\,B$, и 1, если $u\in B$. Таким образом, всякое измерение можно рассматривать как определенным образом согласованное семейство тестов.

§ 4. Классическая статистическая модель

В § 1 мы видели, что состояние можно рассматривать как сжатое описание исходных условий эксперимента. Попытаемся уточнить понятие «исходных условий», приняв дополнительно, что они допускают теоретическое описание в виде, вообще говоря, бесконечного «списка исходных данных» ω. Обозначим через $\Omega=\{\omega\}$ множество всех конкретных списков, отвечающих всевозможным вариантам исходных условий. Назовем Ω **фазовым пространством** объекта.

Далее, мы хотим учесть возможность того, что при повторении индивидуальных экспериментов входные данные могут испытывать случайные отклонения, обусловленные практической невозможностью в точности воспроизвести одинаковые условия либо неопределенностью некоторых параметров. Чтобы охватить такие ситуации, мы будем рассматривать распределения вероятностей на Ω

(следует, конечно, предположить, что в Ω выделена σ-алгебра $\mathscr{A}(\Omega)$ измеримых подмножеств; мы будем считать также, что $\mathscr{A}(\Omega)$ разделяет точки Ω, см. § 2).

Всякое распределение вероятностей P на Ω мы назовем *классическим состоянием*. Его следует интерпретировать как полное статистическое описание стадии приготовления. Всякому списку $\omega\in\Omega$ отвечает *чистое состояние*

$$\delta_\omega(A)=\begin{cases}1, & A\ni\omega,\\ 0, & A\not\ni\omega,\end{cases}\qquad A\in\mathscr{A}(U).$$

Согласно § 2 множество $\mathfrak{P}(\Omega)$ всех классических состояний является выпуклым множеством простейшей структуры — симплексом, а чистые состояния являются крайними точками этого множества.

Перейдем к измерениям. Всякое измерение со значениями в пространстве U описывается аффинным отображением

$$P\to\mu_P(du) \tag{4.1}$$

множества классических состояний $\mathfrak{P}(\Omega)$ в множество распределений вероятностей $\mathfrak{P}(U)$. Обозначим через $M_\omega(du)$ распределение вероятностей данного измерения относительно чистого состояния δ_ω (т. е. $M_\omega(du)=\mu_{\delta_\omega}(du)$). Рассмотрим смесь чистых состояний

$$P(d\omega)=\sum_\alpha p_\alpha\delta_{\omega_\alpha}(d\omega).$$

В силу аффинности отображения (4.1) распределение вероятностей данного измерения относительно такого состояния будет даваться формулой

$$\mu_P(B)=\int M_\omega(B)\,P(d\omega),\qquad B\in\mathscr{A}(U). \tag{4.2}$$

При некоторых дополнительных предположениях эта формула будет верна для любого классического состояния P. Мы не будем углубляться в этот вопрос, а просто ограничимся измерениями $P\to\mu_P$, которые задаются соотношениями (4.2), где $M_\omega(du)$ — п е р е х о д н а я   в е р о я т н о с т ь *) из Ω в U. Если P характеризует неопределенность

*) Т. е. функция аргументов $\omega\in\Omega$ и $B\in\mathscr{A}(U)$, которая измерима по ω при каждом фиксированном B и является распределением вероятностей как функция B при каждом фиксированном ω.

в исходных условиях эксперимента, то распределение вероятностей $M_\omega(du)$ описывает статистическую погрешность измерения, вносимую измерительным прибором. Формула (4.2) показывает, каким образом эти два источника случайности входят в итоговую статистику измерения. Условимся кратко обозначать через $\boldsymbol{M}$ набор вероятностей $\{M_\omega(du)\}$, а также задаваемое ими измерение (4.1).

В основе классической статистической модели, определение которой будет дано ниже, лежит допущение о полной наблюдаемости, согласно которому любые параметры объекта могут быть измерены с абсолютной точностью. Для того чтобы дать математическое выражение этому допущению, введем следующее понятие. Измерение $\boldsymbol{M}=\{M_\omega(du)\}$ называется *детерминированным*, если для любого $\omega \in \Omega$ и любого $B \in \mathscr{A}(U)$ имеет место альтернатива

$$M_\omega(B)=0 \quad \text{или} \quad M_\omega(B)=1.$$

Это означает, что если объект приготовлен в чистом состоянии, то для любого $B \in \mathscr{A}(U)$ результат измерения с вероятностью 1 принадлежит либо не принадлежит B. Это можно записать также в следующем виде:

$$M_\omega(B)^2=M_\omega(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U). \tag{4.3}$$

Раскроем смысл этого условия, ограничась для простоты измерениями с конечным числом значений. Такое измерение задается набором переходных вероятностей $\boldsymbol{M}=\{M_\omega(u);\ u \in U\}$, где $M_\omega(u)$ — вероятность результата u относительно чистого состояния δ_ω, удовлетворяющим условиям

$$M_\omega(u) \geqslant 0, \quad \sum_u M_\omega(u)=1; \qquad \omega \in \Omega. \tag{4.4}$$

Если $\boldsymbol{M}$ — детерминированное измерение, то $M_\omega(u)$ равно 0 или 1. Обозначая $\mathbf{1}_F(\omega)$ индикатор множества $F \subset \Omega$, т. е. функцию, равную 1 на F и 0 вне F, имеем

$$M_\omega(u)=\mathbf{1}_{\Omega_{(u)}}(\omega), \text{ где } \Omega_{(u)}=\{\omega\colon\ M_\omega(u)=1\}.$$

Из (4.4) вытекает, что множества $\Omega_{(u)}$ при разных u не пересекаются и в объединении составляют Ω, т. е. образуют *разбиение* пространства Ω. Поэтому для любого ω

есть единственное значение $u=u(\omega)$, для которого $M_\omega(u(\omega))=1$. При этом

$$M_\omega(B)=\sum_{u\in B} M_\omega(u)=\mathbf{1}_B(u(\omega)). \tag{4.5}$$

Функция $u(\omega)$ является случайной величиной на Ω со значениями в U; формула (4.5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между детерминированными измерениями и случайными величинами со значениями в U. Чтобы сделать эту связь еще более прозрачной, рассмотрим дискретную вещественную случайную величину $X(\omega)$ на Ω, принимающую конечное число значений $\{x\}$. Пусть $\Omega_{(x)}$ — подмножество Ω, на котором X принимает значение x, тогда

$$X(\omega)=\sum_x x\cdot\mathbf{1}_{\Omega_{(x)}}(\omega)=\sum_x xM_\omega(x). \tag{4.6}$$

Таким образом, случайной величине X однозначно сопоставляется детерминированное измерение $M=\{M_\omega(x)\}$, так что X принимает значение x тогда и только тогда, когда x является результатом измерения M.

Аналогичные, но технически более сложные рассмотрения можно провести и для измерений с непрерывным пространством значений U: при некоторых предположениях можно показать, что формула (4.5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между случайными величинами и детерминированными измерениями.

Мы можем теперь формализовать постулат полной наблюдаемости, приняв следующее определение:

Классической статистической моделью называется модель, в которой множеством состояний служит симплекс распределений вероятностей $\mathfrak{P}(\Omega)$ на «фазовом» пространстве Ω, а класс измерений $\mathfrak{M}$ содержит всевозможные детерминированные измерения.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}(U)$ всевозможных аффинных отображений вида (4.2). Оно, очевидно, является выпуклым множеством.

Предложение 4.1. *Детерминированные измерения образуют остов множества* $\mathfrak{M}(U)$.

Доказательство. Пусть $M=\{M_\omega(B)\}$ — детерминированное измерение, и пусть $M=p_0M^0+p_1M^1$, т. е.

$$M_\omega(B)=p_0M_\omega^0(B)+p_1M_\omega^1(B),\qquad B\in\mathcal{A}(U).$$

Возводя это равенство в квадрат и используя равенство $M_\omega(B) = M_\omega(B)^2$, получаем

$$p_0 M_\omega^0(B) + p_1 M_\omega^1(B) = \\ = p_0^2 M_\omega^0(B)^2 + p_1^2 M_\omega^1(B)^2 + 2p_0 p_1 M_\omega^0(B) M_\omega^1(B)$$

или

$$p_0 M_\omega^0(B)[1 - M_\omega^0(B)] + p_1 M_\omega^1(B)[1 - M_\omega^1(B)] + \\ + p_0 p_1 [M_\omega^0(B) - M_\omega^1(B)]^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая неравенство $M_\omega^0(B)[1 - M_\omega^0(B)] \geqslant 0$ и аналогичное неравенство для M^1, получаем $M_\omega^0(B) \equiv \equiv M_\omega^1(B)$, а это означает, что M является крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$.

Обратно, пусть $M = \{M_\omega(B)\}$ — крайняя точка множества $\mathfrak{M}(U)$. Пусть B_1 — фиксированное подмножество из $\mathscr{A}(U)$, $B_2 = U \setminus B_1$ — его дополнение. Положим

$$M_\omega^\pm(B) = M_\omega(B) \pm M_\omega(B_1) M_\omega(B \cap B_2) - \\ - M_\omega(B_2) M_\omega(B \cap B_1)]. \qquad (4.7)$$

Тогда $M_\omega(B) = \frac{1}{2} M_\omega^+(B) + \frac{1}{2} M_\omega^-(B)$. Покажем, что $\{M_\omega^\pm(B)\}$ являются переходными вероятностями из Ω в U. Для этого достаточно проверить, что $M_\omega^\pm(B)$, $B \in \mathscr{A}(U)$, для каждого $\omega \in \Omega$ являются распределениями вероятностей. Очевидно, что $M_\omega^\pm(U) = M_\omega(U) = 1$ и что $M_\omega^\pm(B)$ являются мерами по B, так как каждое из слагаемых в (4.7) является мерой. Остается проверить только, что $M_\omega^\pm(B) \geqslant 0$, а это следует из неравенства

$$M_\omega^\pm(B) \geqslant M_\omega(B \cap B_1)[1 \mp M_\omega(B_2)] + \\ + M_\omega(B \cap B_2)[1 \pm M_\omega(B_1)] \geqslant 0.$$

Из того, что M — крайняя точка, вытекает, что $M_\omega^\pm(B) = M_\omega(B)$, $B \in \mathscr{A}(U)$, т. е.

$$M_\omega(B_1) M_\omega(B \cap B_2) = M_\omega(B_2) M_\omega(B \cap B_1).$$

Полагая здесь $B = B_1$ и учитывая, что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, имеем $M_\omega(B_2) M_\omega(B_1) = 0$ или $M_\omega(B_1)[1 - M_\omega(B_1)] = 0$. Следовательно, $\{M_\omega(B)\}$ — детерминированное измерение.

Пусть $\{M^j\}$ — некоторый конечный набор измерений из $\mathfrak{M}(U)$ и $\{p_j\}$ — распределение вероятностей. Тогда выпуклая комбинация $\boldsymbol{M}=\{M_\omega(B)\}$, где

$$M_\omega(B)=\sum p_j M_\omega^j(B), \quad B\in\mathscr{A}(U),$$

описывает рандомизованное измерение, в котором с вероятностью p_j производится измерение $\boldsymbol{M}^j$. Физически это может соответствовать флуктуациям тех или иных параметров измерительного устройства. В простейшем случае, когда и Ω, и U конечны, $\mathfrak{M}(U)$ является компактным выпуклым подмножеством конечномерного пространства и из теоремы 2.1 вытекает, что всякий элемент множества $\mathfrak{M}(U)$ можно рассматривать как рандомизованное измерение. Аналогичный результат справедлив и для значительно более общего случая: при некоторых естественных ограничениях на пространства Ω и U можно показать, что всякое переходное распределение вероятностей $\{M_\omega(du)\}$ из Ω в U является «непрерывной выпуклой комбинацией» детерминированных измерений

$$M_\omega(B)=\int M_\omega^\alpha(B)\,Q(d\alpha), \quad B\in\mathscr{A}(U).$$

Эта формула описывает рандомизованное измерение, в котором $Q(d\alpha)$ является рандомизующим распределением на множестве детерминированных измерений. Таким образом, не ограничивая существенно общности, можно считать, что *в классической статистической модели измерения описываются всевозможными отображениями вида* (4.2) *множества состояний $\mathfrak{P}(\Omega)$ в множество $\mathfrak{P}(U)$, где U — достаточно произвольное пространство результатов измерения.*

В заключение этого раздела остановимся на описании тестов в классической модели. Всякий тест однозначно задается вероятностью единичного исхода $X(\omega)=M_\omega(1)$, которая является функцией на Ω, удовлетворяющей условиям

$$0\leqslant X(\omega)\leqslant 1. \tag{4.8}$$

Вероятность единичного исхода относительно классического состояния P равна

$$\int X(\omega)\,P(d\omega).$$

Для детерминированного теста $X(\omega)=0$ или 1, так что $X(\omega)=1_{\Omega_{(1)}}(\omega)$. Таким образом, детерминированный тест задает дихотомию фазового пространства $\Omega = \Omega_{(1)} \cup \Omega_{(0)}$; $\Omega_{(1)} \cap \Omega_{(0)} = \varnothing$.

Если пространство Ω конечно, $\Omega = \Omega_n$, то множество всевозможных классических тестов (4.8) является n-мерным единичным гиперкубом $\mathfrak{Q}_n$, а его крайними точками являются вершины гиперкуба (см. § 2). Вероятность единичного исхода для теста $\{X_\omega\}$ относительно состояния $\{P_\omega\}$ равна $\sum_\omega P_\omega X_\omega$.

§ 5. Редукция статистической модели. Классическая модель с ограничениями на множество измерений

Предположение о полной наблюдаемости, на котором основывается классическая статистическая модель, является определенной идеализацией, и выводы, к которым приводит это предположение, разумеется, должны сопоставляться с данными опыта. Фактически далеко не всякий воображаемый эксперимент является реально выполнимым, и возможность неограниченно увеличивать точность измерений представляется не столь безусловной. Не вдаваясь здесь в обсуждение природы ограничений на множество возможных измерений, изучим с общих позиций последствия для статистической модели, к которым приводит наличие таких ограничений.

Рассмотрим произвольную статистическую модель с множеством состояний $\mathfrak{S}$ и множеством измерений $\mathfrak{M}$. Два состояния S_1, S_2 назовем *неразличимыми*, если для любого измерения $S \to \mu_S$ из класса $\mathfrak{M}$ распределения вероятностей совпадают: $\mu_{S_1} = \mu_{S_2}$. Статистическую модель $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ назовем *отделимой*, если в ней нет неразличимых состояний $S_1 \neq S_2$. Допустим, что экспериментатор, проводящий измерения, не знает, в каком из состояний S_1, S_2 действительно приготовлен данный объект. С точки зрения такого экспериментатора, располагающего лишь статистикой всевозможных измерений, неразличимые состояния будут абсолютно идентичными, что и оправдывает этот термин.

Можно объединить неразличимые состояния S в классы эквивалентности $[S]$. Отображение $S \to [S]$ аффинно, и множество классов эквивалентности будет некоторым новым выпуклым множеством $\mathfrak{S}'$. Полагая $\mu_{[S]}=\mu_S$, где S — какой-либо представитель из класса $[S]$, получаем новую статистическую модель с множеством состояний $\mathfrak{S}'$ и измерений $\mathfrak{M}$. Эта модель совершенно эквивалентна исходной с точки зрения описания статистики результатов измерения, однако она уже является отделимой. Описанный переход от исходной модели к отделимой мы назовем *редукцией*. Фактически мы уже встретились с таким переходом в § 1; проведенные там рассуждения показывают, что именно отделимая статистическая модель является конечным продуктом анализа статистики измерений.

Интересным в этой тривиальной конструкции является то, что редуцированное множество состояний $\mathfrak{S}'$ может радикально отличаться от исходного множества $\mathfrak{S}$. В частности, если исходным множеством является классический симплекс $\mathfrak{P}(\Omega)$, то, подбирая соответствующим образом множество измерений $\mathfrak{M}$, в качестве $\mathfrak{S}'$ можно получить практически любое выпуклое множество. В частности, свойство однозначности представления по крайним точкам уже может не иметь места для редуцированных состояний из $\mathfrak{S}'$. Чтобы проиллюстрировать это положение, приведем простейший пример.

Рассмотрим некоторый условный объект, для которого имеются четыре различных варианта приготовления чистого состояния, т. е. $\Omega=\Omega_4$, так что всякое состояние задается вектором $[P_1, \ldots, P_4]$ из трехмерного симплекса $\mathfrak{P}_4$. В качестве измерений мы будем рассматривать только тесты. Рассмотрим 4-мерный гиперкуб $\mathfrak{Q}_4=\{[X_1, \ldots, X_4]: 0\leqslant X_j\leqslant 1,\ j=1, \ldots, 4\}$ и подмножество тестов $\mathfrak{M}$, получающееся от пересечения куба с гиперплоскостью

$$X_1+X_2=X_3+X_4. \tag{5.1}$$

Состояния $P=\{P_j\}$ и $Q=\{Q_j\}$ неразличимы относительно множества тестов $\mathfrak{M}$, если из (5.1) следует

$$\sum_j P_jX_j=\sum_j Q_jX_j,$$

т. е. если вектор $[P_j-Q_j]$ перпендикулярен гиперплоскости (5.1). Ортогональное дополнение к (5.1) является одномерным подпространством, натянутым на вектор $e=$ $=[1,\ 1,\ -1,\ -1]$, поэтому состояния $P=\{P_j\}$ и $Q=$

$=\{Q_j\}$ неразличимы тогда и только тогда, когда соответствующие векторы лежат на одной прямой с направляющим вектором e, для некоторого t

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1 + t, & P_3 &= Q_3 - t, \\ P_2 &= Q_2 + t, & P_4 &= Q_4 - t. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Если изобразить $\mathfrak{P}_4$ в виде тетраэдра, погруженного в трехмерное пространство (рис. 3), то числа P_j будут барицентрическими координатами точки внутри тетраэдра (P_j есть расстояние от точки до грани, противоположной вершине j), а уравнения (5.2) задают прямые, проходящие в направлении, соединяющем середины ребер [1, 2] и [3, 4]. Класс неразличимых состояний образуют точки тетраэдра, лежащие на любой такой прямой. Поэтому множество состояний можно отождествить с проекцией тетраэдра вдоль указанного направления на любую подходящую плоскость (см. рис. 3).

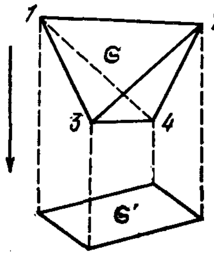

Рис. 3.

Множество состояний является в этом случае выпуклым четырехугольником на плоскости.

На этом примере уже видно, каким образом ограничения на множество тестов приводят к «склеиванию» состояний и возникновению новых выпуклых множеств, в которых нет однозначности представления по крайним точкам. Не входя пока в более подробное обсуждение этого вопроса, заметим, что ограничения на множество измерений могут возникнуть как отражение тех или иных эмпирических «законов симметрии». В нашем примере роль такого «закона» играет равенство (5.1); в статистических моделях квантовой механики, где существенную роль играет пространственно-временно́е описание объекта, на первый план выходят законы симметрии относительно групп кинематических и динамических преобразований (пространственных и временны́х сдвигов, поворотов, отражений).

Рассмотрим теперь пример, относящийся к квантовой механике, а именно к описанию квантовой частицы со спином 1/2. Мы увидим далее, что состояния такого объекта описываются двумерными матрицами вида (2.9). Как было показано в § 2, множество всех таких матриц $\mathfrak{S}_2$ можно представить как шар в трехмерном вещественном пространстве. Полезно проследить, какого рода ограничения могут привести к отображению классического симплекса на выпуклое множество, которое в смысле однозначности разложения по крайним точкам «противоположно» симплексу: вся граница его состоит из крайних точек и разложение является в высшей степени неоднозначным.

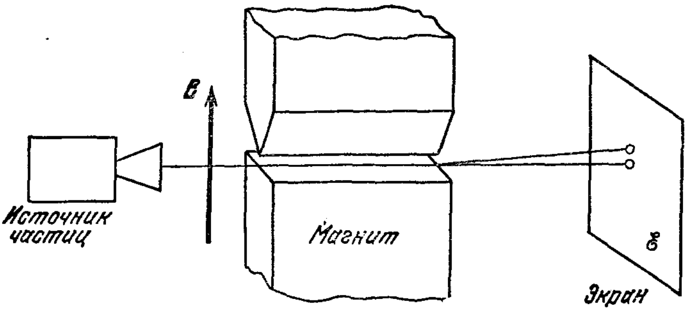

Рис. 4.

Рассмотрим схему эксперимента Штерна — Герлаха, который в свое время и привел к открытию спина. Пучок частиц (в опытах Штерна — Герлаха это были атомы серебра) пропускался между полюсами магнита, который создавал неоднородное магнитное поле B. Частицы, прошедшие через поле, оседали на пластинке $\mathscr{E}$, так что по распределению плотности вещества, осевшего на пластинке, можно было судить об отклонении частиц под действием неоднородного магнитного поля B (рис. 4).

Тогда как классическая теория предсказывала всевозможные отклонения, т. е. более или менее равномерное осаждение вещества на пластинке, в эксперименте наблюдалось четкое разделение отклонившихся частиц на два симметричных пучка. Используя атомы других веществ, можно было получить расщепление исходного пучка на другое число компонент $2j+1$, где j — целое или полуцелое число, называемое спином данного сорта атомов (при расщеплении на два пучка спин равен 1/2).

Рассмотрим модифицированный эксперимент Штерна — Герлаха, в котором вместо пластинки находится экран с отверстием, пропускающий верхний пучок и поглощающий нижний. Такого рода прибор можно назвать фильтром Штерна — Герлаха. Отфильтрованный пучок, который называется поляризованным в направлении $\boldsymbol{B}$, не распадается далее при повторном пропускании через поле с тем же направлением $\boldsymbol{B}$, однако распадается, если направление $\boldsymbol{B}$ будет другое. При пропускании через второй фильтр с противоположным направлением $\boldsymbol{B}$ отфильтрованный пучок полностью поглощается.

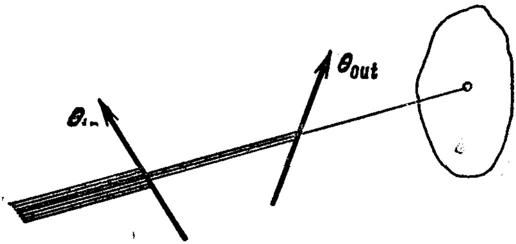

Рис. 5.

Схематизированное «полное описание» фильтра определяется заданием единичного вектора $\theta=[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ в трехмерном пространстве, указывающего ориентацию фильтра, т. е. направление $\boldsymbol{B}$ (все остальные параметры остаются фиксированными и поэтому могут быть исключены из описания). Рассмотрим следующий эксперимент: пучок частиц определенной интенсивности пропускается через фильтр θ_{in} (приготовление), затем выходящий пучок пропускается через фильтр θ_{out}, после чего с помощью того или иного детектора определяется интенсивность прошедшего пучка (измерение) (рис. 5). Отношение «выходной» интенсивности к половине «входной» интенсивности дает для индивидуальной частицы вероятность того, что частица, «приготовленная» фильтром θ_{in}, пройдет через θ_{out} (предполагается, что пучок, входящий в θ_{in}, является «хаотическим», так что ровно половина входящих частиц проходит через θ_{in}).

Пространством Ω в этом случае будет множество всевозможных направлений θ_{in}, т. е. единичная сфера $\mathbb{S}^2$ в трехмерном вещественном пространстве. Классическое состояние $P(d\theta)$ на $\mathbb{S}^2$ описывает «частично поляризованный» пучок, чистое состояние δ_θ соответствует полностью поляризованному, а равномерное распределение — хаотическому пучку.

Обозначим $P_{\theta_{\text{out}}}(\theta_{\text{in}})$ вероятность прохождения частицы в эксперименте на рис. 5. Из соображений симметрии естественно ожидать, что эта вероятность зависит только от величины угла φ между направлениями θ_{in} и θ_{out}, или от его косинуса, $\cos\varphi = t$. Итак, $P_{\theta_{\text{out}}}(\theta_{\text{in}}) = F(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Если направление θ_{out} совпадает с θ_{in}, то весь пучок, выходящий из первого фильтра, пройдет через второй. Если направление θ_{out} противоположно θ_{in}, то весь пучок поглотится вторым фильтром. Отсюда

$$F(1) = 1, \quad F(-1) = 0.$$

Вообще, для любого направления θ_{out} отклонившиеся частицы пойдут либо в направлении θ_{out}, либо в противоположном, откуда $F(t) + F(-t) = 1$, или $\frac{1}{2} - F(t) = -\frac{1}{2} + F(-t)$. Таким образом, $\frac{1}{2} - F(\ )$ является нечетной функцией t. Простейшей непрерывной функцией, удовлетворяющей этим условиям, является линейная функция

$$F(t) = \frac{1+t}{2}, \quad \text{откуда} \quad P_{\theta_{\text{out}}}(\theta_{\text{in}}) = \frac{1+\theta_{\text{out}}\cdot\theta_{\text{in}}}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2},$$

где $\theta_1 \cdot \theta_2$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$. Как мы увидим далее, именно такое выражение дает для вероятности $P_{\theta_{\text{out}}}(\theta_{\text{in}})$ квантовомеханическая модель в двумерном комплексном пространстве. Это распределение подтверждается и экспериментальными данными.

Таким образом, в нашем случае пространством Ω является сфера $\mathbb{S}^2$, а множество тестов $\mathfrak{M}$ является семейством функций вида $X(\theta) = \frac{1+\theta\cdot\theta_{\text{out}}}{2}$; $\theta_{\text{out}} \in \mathbb{S}^2$. Условие неразличимости двух классических состояний P_1, P_2 сводится к следующему:

$$\int \theta\cdot\theta_0 P_1(d\theta) = \int \theta\cdot\theta_0 P_2(d\theta), \qquad \theta_0 \in \mathbb{S}^2,$$

или $\int \theta P_1(d\theta) = \int \theta P_2(d\theta)$. Следовательно, состояния находятся во взаимно-однозначном аффинном соответствии с векторами, представимыми в виде $\int \theta P(d\theta)$, где P — распределение вероятностей на $\mathbb{S}^2$, т. е. с точками единичного шара в трехмерном пространстве, который изоморфен $\mathfrak{S}_2$. Соответствие $P \to S$, аффинно переводящее классические состояния P в квантовые S, дается формулой

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + \int \theta_3 P(d\theta) & \int (\theta_1 - i\theta_2) P(d\theta) \\ \int (\theta_1 + i\theta_2) P(d\theta) & 1 - \int \theta_3 P(d\theta) \end{bmatrix},$$

где $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$. Сопоставляя тесту, который характеризуется направлением $\theta_{\text{out}} = [\theta_1', \theta_2', \theta_3']$, матрицу

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + \theta_3' & \theta_1' - i\theta_2' \\ \theta_1' + i\theta_2' & 1 - \theta_3' \end{bmatrix},$$

получаем два выражения для условной вероятности получить результат $u = 1$ для теста $X(\cdot)$ в состоянии S:

$$\Pr\{1 \mid S\} = \operatorname{Tr} SX = \int X(\theta) P(d\theta).$$

Если угодно, мы дали явное построение модели со «скрытыми переменными» для частицы со спином 1/2. Мы продолжим обсуждение этого вопроса в § 7, а сейчас рассмотрим общую статистическую модель квантовой механики.

§ 6. Статистическая модель квантовой механики

Основным предметом нашего рассмотрения будет статистическая модель, в которой состояния описываются комплексными эрмитовыми матрицами S, удовлетворяющими условиям

$$S \geqslant 0, \quad \operatorname{Tr} S = 1$$

(*матрицами плотности*). Множество таких матриц $\mathfrak{S}_n$ является выпуклым подмножеством вещественного линейного пространства всех эрмитовых $n \times n$-матриц, причем крайними точками являются матрицы плотности вида $S_\psi = \psi\psi^*$ (см. § 2); они описывают *чистые состояния*. В дальнейшем для нас основной интерес будет представлять бесконечномерный аналог матрицы плотности, однако в этой главе мы ограничимся конечномерным случаем, чтобы объяснить некоторые принципиальные положения, не останавливаясь на технических трудностях, связанных с бесконечномерностью.

Помимо множества состояний, для задания статистической модели необходимо описать множество измерений. Согласно общему определению, всякое измерение с пространством результатов U описывается аффинным отображением множества состояний $\mathfrak{S}_n$ в множество распределений вероятностей на U. Предположим для начала, что множество U конечно, и рассмотрим в этом случае более подробно математическую структуру такого отображения.

Предложение 6.1. *Соотношение*

$$\mu_S(u) = \operatorname{Tr} SM_u, \qquad u \in U, \tag{6.1}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между аффинными отображениями $S \to \mu_S$ множества матриц плотности $\mathfrak{S}_n$ в множество распределений вероятностей на U и разложениями единицы, т. е. наборами эрмитовых матриц $\{M_u;\ u \in U\}$, удовлетворяющих условиям

$$M_u \geqslant 0, \qquad \sum_{u \in U} M_u = I. \tag{6.2}$$

Лемма 6.1. *Всякий аффинный функционал $\mu(S)$ на $\mathfrak{S}_n$ имеет вид $\mu(S) = \operatorname{Tr} SM$, где M — эрмитова матрица.*

Доказательство леммы. Множество матриц плотности порождает вещественное линейное пространство $\mathscr{L}$ всех эрмитовых матриц. Это означает, что всякая эрмитова матрица представляется в виде $T = \sum_j t_j S_j$, где t_j — вещественные числа, S_j — матрицы плотности (для доказательства достаточно рассмотреть спектральное разложение матрицы T). Построим по $\mu(S)$ функционал на $\mathscr{L}$, полагая

$$\mu(T) = \sum_j t_j \mu(S_j).$$

Для обоснования корректности этого определения необходимо показать, что сумма в правой части не зависит от способа представления T в виде линейной комбинации матриц плотности, т. е. что равенство $\sum_j t_j S_j = \sum_k t'_k S'_k$ влечет $\sum_j t_j \mu(S_j) = \sum_k t'_k \mu(S'_k)$. Перенося, если необходимо, некоторые слагаемые в другую часть равенства, мы можем считать, что $t_j \geqslant 0$ и $t'_k \geqslant 0$ (причем хотя бы одно из t_j и t'_k строго положительно). Беря след от получившегося равенства и учитывая, что $\operatorname{Tr} S_j = \operatorname{Tr} S'_k = 1$, получим $\sum_j t_j = \sum_k t'_k = \tau > 0$. Введем распределения вероятностей $p_j = t_j/\tau$, $p'_k = t'_k/\tau$. Тогда нам достаточно показать, что из $\sum_j p_j S_j = \sum_k p'_k S'_k$ следует $\sum_j p_j \mu(S_j) = \sum_k p'_k \mu(S'_k)$, а это вытекает из аффинности функционала $\mu(S)$.

По построению $\mu(T)$ является вещественным линейным функционалом на $\mathscr{L}$. Всякий такой функционал от $T = [t_{jk}]$, очевидно, имеет вид

$$\mu(T) = \sum_{j,\ k} t_{jk} m_{jk} = \operatorname{Tr} TM,$$

где $M = [m_{jk}]$, причем $m_{jk} = \overline{m_{kj}}$, так что $M = M^*$.

Лемма 6.2. *Пусть X — эрмитова матрица; $X \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr} SX \geqslant 0$ для всех $S \in \mathfrak{S}_n$.*

Доказательство. $X \geqslant 0$ означает, что $\psi^* X \psi \geqslant 0$ для всех (единичных) векторов ψ, т. е. $\operatorname{Tr} S_\psi X \geqslant 0$. Остается воспользоваться тем, что матрицы S_ψ образуют остов выпуклого множества $\mathfrak{S}_n$ (см. § 2).

Доказательство предложения. Согласно лемме 6.1, $\mu_S(u) = \operatorname{Tr} SM_u$, где $\{M_u\}$ — некоторый набор эрмитовых матриц. Из леммы 6.2 и неотрицательности функций $\mu_S(u)$ вытекает $M_u \geqslant 0$. Наконец, для любого S $\sum_u \mu_S(u) = \operatorname{Tr} S \left(\sum_u M_u\right) = 1$, откуда $\sum_u M_u = \mathrm{I}$. В самом деле, $\operatorname{Tr} S \left(\sum_u M_u - \mathrm{I}\right) = 0$ для всех $S \in \mathfrak{S}_n$, так что по лемме 6.2 $\sum_u M_u - \mathrm{I} \geqslant 0$ и одновременно $\sum_u M_u - \mathrm{I} \leqslant 0$. Предложение доказано.

Набор $\{M_u\}$ формально аналогичен набору переходных вероятностей $\{M_\omega(u)\}$, характеризовавших измерение в классической статистической модели. Там особую роль играли детерминированные измерения. Аналог условия детерминированности (4.3) в некоммутативном случае имеет вид

$$M_u^2 = M_u, \qquad u \in U, \tag{6.3}$$

Но это означает, что M_u для любого u является ортогональным проектором. Покажем, что (6.3) влечет равенство

$$M_u M_v = 0, \qquad u \neq v, \tag{6.4}$$

т. е. M_u, M_v являются проекторами на взаимно-ортогональные подпространства.

Лемма 6.3. *Если A, B, C — эрмитовы матрицы, $0 \leqslant B \leqslant C$ и $CA = 0$, то $BA = 0$.*

Доказательство. Из $CA = 0$ следует $A^*CA = 0$, так что $0 = A^*CA \geqslant A^*BA \geqslant 0$, откуда $A^*BA = 0$. Это можно записать как $(\sqrt{B}\,A)^*(\sqrt{B}\,A) = 0$, где $\sqrt{B}$ — положительный квадратный корень из матрицы $B \geqslant 0$. Отсюда $\sqrt{B}A = 0$ и $BA = 0$.

Чтобы вывести (6.4), запишем (6.3) в виде $(I - M_u) M_u = 0$ и заметим, что в силу (6.2) $0 \leqslant M_v \leqslant I - M_u$ при $u \neq v$. Остается применить лемму с $A = M_u$, $B = M_v$, $C = I - M_u$.

Таким образом, формальным аналогом классических детерминированных измерений в квантовой теории являются *ортогональные разложения единицы* $\{E_u\}$:

$$E_u E_v = \delta_{uv} E_u, \qquad \sum_{u \in U} E_u = I$$

(δ_{uv} — символ Кронекера). Соответствующие квантовые измерения мы называем *простыми*. Подобно тому как классическое детерминированное измерение задает разбиение фазового пространства Ω на непересекающиеся области $\Omega_{(u)}$, простое измерение задает разложение рассматриваемого унитарного векторного пространства $\mathscr{H}$ в сумму ортогональных пространств $\mathscr{H}_u = E_u(\mathscr{H})$. Пусть возможными результатами простого измерения $\{E_x\}$ является конечный набор вещественных чисел $\{x\}$, тогда этому измерению сопоставляется эрмитова матрица (оператор)

$$X = \sum_x x E_x. \tag{6.5}$$

Эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между простыми измерениями и эрмитовыми операторами в $\mathscr{H}$, аналогичное соответствию (4.6) между детерминированными измерениями и случайными величинами в теории вероятностей. Эрмитовы операторы поэтому играют в квантовой теории ту же роль, что случайные величины в теории вероятностей; они называются также квантовыми **наблюдаемыми** (см. § II.6). Среднее значение результатов измерения $\{E_x\}$ непосредственно выражается через соответствующую наблюдаемую по формуле

$$\sum_x x\mu_S(x) = \sum_x x \operatorname{Tr} SE_x = \operatorname{Tr} SX.$$

В обычном изложении квантовой теории отправным является понятие наблюдаемой и установленное выше выражение для среднего значения наблюдаемой. Это равносильно тому, что отправляться от простых измерений, задаваемых ортогональными разложениями единицы. Мы видели, однако, что общее статистическое описание измерения приводит, вообще говоря, к неортогональным разложениям единицы. Выделение простых измерений должно основываться на каких-то дополнительных соображениях; очевидно, что формальная аналогия с классической теорией вероятностей не является достаточным для этого основанием. В теории вероятностей исключительная роль детерминированных измерений обосновывается предложением 4.1, согласно которому статистика всякого измерения может быть выражена через статистику детерминированных измерений посредством подходящей рандомизации. Важно, однако, подчеркнуть, что аналог подобной теоремы в квантовой теории уже не верен.

Обозначим через $\mathfrak{M}(U)$ выпуклое множество всех разложений единицы $\{M_u;\ u \in U\}$.

Предложение 6.2. *Всякое ортогональное разложение единицы $\{E_u;\ u \in U\}$ является крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$. Обратное утверждение верно лишь для $U = \{0, 1\}$; если U состоит более чем из двух элементов, то существует крайняя точка множества $\mathfrak{M}(U)$, не являющаяся ортогональным разложением единицы.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается точно так же, как в классическом случае. Если $U = \{0, 1\}$, то всякое разложение единицы имеет вид $M_0 + M_1 = I$ и поэтому однозначно определяется оператором $M_1 = X$, который удовлетворяет единственному условию $0 \leqslant X \leqslant I$. Из § 2 известно, что крайними точками этого множество являются проекторы и только они. Таким образом, для крайних точек M_0 и M_1 являются проекторами, т. е. $\{M_0, M_1\}$ — ортогональное разложение единицы.

Пусть теперь $U=\{1, \ldots, d\}$, $d>2$. Рассмотрим сначала случай $n\equiv\dim\mathscr{H}=2$. Для наглядности можно считать, что матрицы плотности $S\in\mathfrak{S}_2$ описывают состояния частицы со спином 1/2 (см. § 5). Тогда состояние, приготовленное фильтром с направлением $\theta=[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$, задается матрицей плотности (2.9). В частности, матрица плотности

$$S_\alpha=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & e^{-i\alpha}\\ e^{i\alpha} & 1\end{bmatrix}=\psi_\alpha\psi_\alpha^*;\qquad \psi_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}e^{-i\alpha/2}\\ e^{i\alpha/2}\end{bmatrix},\qquad (6.6)$$

описывает состояние, приготовленное фильтром, направление которого лежит в плоскости θ_1, θ_2 и составляет угол α с осью θ_1. Рассмотрим d направлений $\alpha_u=2\pi u/d$, $u=1, \ldots, d$, делящих плоскость x, y на d равных углов (рис. 6), так что

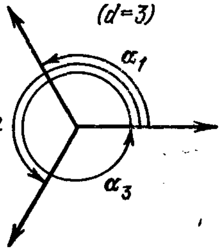

Рис. 6.

$$\sum_{u=1}^{d} e^{i\alpha_u}=0.\qquad (6.7)$$

Тогда набор матриц

$$M_u=\frac{2}{d}\,\psi_u\psi_u^*\qquad(\psi_u=\psi_{\alpha_u})\qquad (6.8)$$

образует неортогональное разложение единицы; в самом деле, $M_u\geqslant 0$, а тот факт, что $\sum\limits_u M_u=I$, вытекает из (6.7) и (6.6).

Покажем, что при $d=3$ разложение единицы (6.8) является крайней точкой. В самом деле, если

$$M_u=p_0M_u^0+p_1M_u^1;\qquad p_0,\ p_1>0,$$

то $M_u^0\leqslant p_0^{-1}M_u$, $M_u^1\leqslant p_1^{-1}M_u$, откуда $M_u^j=\lambda_u^j\psi_u\psi_u^*$. Условие нормировки $\sum\limits_u M_u^j=I$ вместе с (6.6) приводит к равенствам

$$\sum_{u=1}^{3}\lambda_u^j e^{i\frac{2\pi u}{3}}=0,\qquad \sum_{u=1}^{3}\lambda_u^j=2.$$

Первое означает, что λ_u^j являются сторонами треугольника, все углы которого равны $2\pi/3$, так что λ_u^j все равны между собой, а в силу второго равенства $\lambda_u^j = 2/3$. Таким образом, $M_u^0 = M_u^1 = M_u$ и $\{M_u\}$ является крайней точкой.

Докажем теперь, что для любой размерности $n \geqslant 2$ и любого $d \geqslant 3$ существует неортогональное разложение единицы, являющееся крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$. Разложим n-мерное пространство $\mathscr{H}_n$ в ортогональную сумму двумерного пространства $\mathscr{H}_2$ и его ортогонального дополнения $\mathscr{H}_{n-2}$ и обозначим через E проектор на $\mathscr{H}_{n-2}$. Построим в $\mathscr{H}_2$ неортогональное разложение единицы $\{M_u;\ u = 1,\ 2,\ 3\}$ по формуле (6.8) с $d = 3$. Тогда набор операторов

$$\tilde{M}_1 = M_1 \oplus 0,\ \ \tilde{M}_2 = M_2 \oplus 0,\ \ \tilde{M}_3 = M_3 \oplus E;\ \ \tilde{M}_u = 0,\ \ u > 3,$$

образует неортогональное разложение единицы в $\mathscr{H}$. Легко проверить, что оно является крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$.

Хотя приведенная в доказательстве конструкция может показаться искусственной, эти рассуждения показывают, что, в отличие от классической статистики, где детерминированные измерения образуют остов множества всевозможных измерений, статистическое описание эксперимента в квантовой теории не дает решающих оснований ограничиться ортогональными разложениями единицы. На самом деле мы далее увидим, что существует целый ряд физических измерений, которые естественно описываются неортогональными разложениями единицы. В рамках этой новой концепции получают простое разрешение некоторые «парадоксы» квантовой теории, связанные с измерениями таких физических величин, как время, угол, фаза, с совместными измерениями некоммутирующих наблюдаемых — координаты и импульса и т. п. Неортогональные разложения единицы дают адекватное математическое описание «косвенных» и последовательных измерений (см. комментарии к гл. II и III).

Основываясь на сказанном выше, мы назовем *статистической моделью квантовой механики* модель, в которой состояния описываются всевозможными матрицами плотности S, а измерения — всевозможными аффинными отображениями $S \to \mu_S$ матриц плотности в распределения вероятностей на пространстве результатов измерения.

В связи с этим определением важно еще раз подчеркнуть, что статистическая модель и основные ее элементы — состояния и измерения — являются математическими объектами. То обстоятельство, что некоторая совокупность результатов реальных экспериментов адекватно описывается данной статистической моделью $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$, означает, что существует вложение надлежащим образом обработанных экспериментальных данных в эту модель, т. е. каждой реальной процедуре приготовления сопоставляется некоторое теоретическое состояние $S \in \mathfrak{S}$, а каждому реальному измерению — теоретическое измерение $M \in \mathfrak{M}$. Мы дали здесь абстрактное описание статистической модели квантовой теории; в последующих главах будут установлены п р а в и л а с о о т в е т с т в и я, по которым физическим величинам сопоставляются те или иные математические объекты. Эти правила (основанные главным образом на идее симметрии и ковариантности) позволяют установить связь между некоторыми теоретическими состояниями, т. е. матрицами плотности, и их физическими прототипами и между теоретическими измерениями, т. е. разложениями единицы, и реальными измерениями физических величин.

Было бы, однако, наивно ожидать, что всякому теоретическому квантовому состоянию, т. е. произвольно взятой матрице плотности, должна автоматически соответствовать в природе некоторая реальная процедура приготовления, а всякому теоретическому квантовому измерению или наблюдаемой — некоторая реальная измерительная процедура, — этот вопрос нуждается в специальном изучении в каждом конкретном случае.

Поэтому в принципе не следует исключать возможность, что совокупность экспериментальных данных, адекватно описываемая статистической моделью квантовой теории, может допускать и существенно иную модель, «пересекающуюся» с квантовой (так что «пересечение» охватывает все экспериментальные данные). Впрочем, весь опыт развития квантовой теории, находящей все новые экспериментальные подтверждения, свидетельствует о том, что квантовая статистическая модель дает наиболее адекватное и компактное описание явлений микромира.

Теоретические концепции квантового состояния и измерения являются результатом определенной идеализации и отражают существенные черты реальных физических экспериментов. Любой общий результат, установленный в рамках квантовой теории для всех теоретических состояний и измерений, заведомо будет верен и для «реализуемых» состояний и измерений постольку, поскольку квантовая теория дает правильную модель реальности. В то же время подобные результаты было бы невозможно получить, не опираясь на математические концепции состояния и измерения.

§ 7. Замечания к проблеме скрытых переменных

Рассмотренные в § 5 примеры показывают, что наличие ограничений в распределениях вероятностей возможных измерений в классической модели может привести к возникновению выпуклых множеств состояний, радикально отличающихся от симплекса. Покажем, что на самом деле всякое выпуклое множество состояний можно рассматривать как результат редукции классической модели с надлежащим образом подобранными ограничениями. Для простоты мы предположим, что рассматриваемое множество состояний конечномерно, а результаты измерений могут принимать конечное число значений, но доказательство может быть обобщено и на общий случай.

Теорема 7.1. *Всякая отделимая статистическая модель, множество состояний которой является ограниченным замкнутым выпуклым подмножеством конечномерного пространства, а измерения имеют конечное число значений, является редукцией некоторой классической модели с ограничениями на множество измерений.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество состояний, $\mathfrak{M}$ — множество измерений модели. Обозначим через Ω остов множества $\mathfrak{S}$; соответственно крайние точки будут обозначаться буквой ω. Пусть $S \to \mu_S$ — данное измерение; тогда функция $\mu_\omega(u)$; $\omega \in \Omega$, $u \in U$, является переходной вероятностью*) из Ω в U. Таким образом, всякому изме-

*) В определении переходной вероятности требуется измеримость по аргументу ω; это здесь выполняется, так как $\mu_\omega(\cdot)$ является сужением аффинного функционала $\mu_S(\cdot)$ на множество крайних точек Ω, которое измеримо для любого замкнутого выпуклого множества.

рению $M\colon S \to \mu_S$ соответствует переходная вероятность $\tilde{M} = \{\mu_\omega(u)\}$, причем соответствие взаимно-однозначно: из теоремы 2.1 следует, что два аффинных функционала, совпадающие на крайних точках, совпадают на всем выпуклом множестве.

Рассмотрим Ω как фазовое пространство классической модели с ограничениями, в которой состояниями являются всевозможные распределения вероятностей на Ω, а измерения описываются переходными вероятностями вида $\tilde{M} = \{\mu_\omega(u)\}$, где $S \to \mu_S$ — всевозможные измерения исходной модели. Обозначим $\mathfrak{M}$ множество таких классических измерений. Покажем, что редукция этой модели совпадает с исходной.

Прежде всего заметим, что для любого распределения вероятностей P на Ω определен векторнозначный интеграл

$$\int_\Omega \omega P(d\omega) \tag{7.1}$$

как интеграл от функции со значениями в линейном пространстве, содержащем выпуклое множество $\mathfrak{S}$. Если

$$P = \sum_j p_j \delta_{\omega_j},$$

то

$$\int_\Omega \omega P(d\omega) = \sum_j p_j \omega_j, \tag{7.2}$$

так что $\int_\Omega \omega P(d\omega)$ представляет собой некоторую точку из $\mathfrak{S}$, т. е. состояние. В общем случае интеграл (7.1) является пределом конечных выпуклых комбинаций вида (7.2), и так как $\mathfrak{S}$ по предположению ограничено и замкнуто, то этот предел также принадлежит $\mathfrak{S}$. Интеграл (7.1) является непрерывным аналогом выпуклой комбинации чистых состояний. Так как всякий аффинный функционал на конечномерном пространстве, очевидно, непрерывен, то для всякого измерения

$$\mu_S(u) = \int_\Omega \mu_\omega(u) P(d\omega),$$

если

$$S = \int_\Omega \omega P(d\omega).$$

Пусть теперь P_1 и P_2 — два неразличимых классических состояния на Ω, так что

$$\int_\Omega \mu_\omega(u)\, P_1(d\omega) = \int_\Omega \mu_\omega(u)\, P_2(d\omega), \qquad u \in U,$$

для всех измерений $\tilde{M} = \{\mu_\omega(u)\}$. Согласно сказанному выше, это равенство можно переписать в виде

$$\mu_{S_1}(u) = \mu_{S_2}(u), \qquad u \in U,$$

где $S_j = \int_\Omega \omega P_j(d\omega)$, $j = 1, 2$. Из отделимости исходной модели вытекает тогда, что

$$S_1 \equiv \int_\Omega \omega P_1(d\omega) = \int_\Omega \omega P_2(d\omega) \equiv S_2.$$

Таким образом, классу неразличимых классических состояний $[P]$ взаимно-однозначно соответствует исходное состояние $\int \omega P(d\omega)$, где P — любой представитель класса. Это соответствие, очевидно, аффинно; более того, оно отображает множество классов $[P]$ на множество состояний $\mathfrak{S}$, так как для любого $\omega \in \Omega$ класс, содержащий чистое классическое состояние δ_ω, отображается в ω. Используя теорему 2.1, мы заключаем, что для любого $S \in \mathfrak{S}$ найдется конечное распределение вероятностей $\{p_j\}$ и $\omega_j \in \Omega$ такие, что $S = \left[\sum p_j \delta_{\omega_j}\right]$. Таким образом, редукция модели $(\mathfrak{P}(\Omega), \tilde{\mathfrak{M}})$ приводит к множеству состояний $\mathfrak{S}$ и множеству измерений $\mathfrak{M}$, так что

$$\int_\Omega \mu_\omega(u)\, P(d\omega) = \mu_{[P]}(u) \tag{7.3}$$

для любого измерения.

Рассмотрим эту конструкцию в наиболее интересном для нас случае квантовой теории. Пусть $\hat{\Omega}_n$ — единичная сфера в n-мерном комплексном пространстве векторов-столбцов ψ,

$$\hat{\Omega}_n = \{\psi\colon\ \psi^*\psi = 1\}.$$

Два вектора ψ, ψ' задают одно и то же состояние $S_\psi = \psi\psi^*$, если $\psi = \lambda\psi'$, где $|\lambda| = 1$. Обозначим через Ω_n множество соответствующих классов эквивалентности в $\hat{\Omega}_n$. Элементы множества Ω_n находятся во взаимно-однозначном соответствии с чистыми состояниями множества $\mathfrak{S}_n$. Множество Ω_n будет играть роль пространства Ω для классической модели с ограничениями, которую мы сейчас построим.

Пусть $P(d\psi)$ — распределение вероятностей на Ω_n. Тогда интеграл

$$S_P = \int \psi\psi^* P(d\psi)$$

определяет матрицу плотности $S_P \in \mathfrak{S}_n$. Покажем, что всякая матрица плотности представима в таком виде. Согласно (2.6), $S = \sum_j \lambda_j S_{\psi_j}$. Очевидно, что $S_{\psi_j} = \int \psi\psi^* \delta_{\psi_j}(d\psi)$, так что $S = S_P$, где $P = \sum_j \lambda_j \delta_{\psi_j}$. Таким образом, $P \to S_P$ является аффинным отображением симплекса $\mathfrak{P}(\Omega_n)$ на множество квантовых состояний.

Пусть $S \to \mu_S(u)$ — квантовое измерение. Согласно предложению 6.1,

$$\mu_S(u) = \operatorname{Tr} S M_u,$$

где $\{M_u\}$ — некоторое разложение единицы. Рассмотрим переходную вероятность из Ω_n в U:

$$M_\psi(u) \equiv \mu_{S_\psi}(u) = \psi^* M_u \psi. \tag{7.4}$$

Тогда для любого измерения

$$\int M_\psi(u) P(d\psi) = \mu_{S_P}(u).$$

Таким образом, статистическая модель квантовой теории является редукцией классической модели с множеством состояний $\mathfrak{P}(\Omega_n)$ и измерениями, которые задаются переходными вероятностями вида (7.4), где $\{M_u\}$ — произвольное разложение единицы.

Отметим, что в случае $n=2$ эта конструкция совпадает с классической моделью для экспериментов с частицей со спином 1/2, которая была построена в § 5. В этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между чистыми состояниями и точками сферы $\mathbb{S}^2$ (направлениями приготовляющего фильтра), дающими содержательное классическое описание процедуры приготовления состояния. В самом деле, как отмечалось в § 2, условие $\theta \in \mathbb{S}^2$ эквивалентно тому, что матрица (2.9) является одномерным проектором $S_\psi = \psi\psi^*$; таким образом, устанавливается соответствие между $\mathfrak{S}^2$ и Ω_2. Следовательно, всякое распределение вероятностей на Ω_2 можно рассматривать как распределение вероятностей на $\mathfrak{S}^2$, т. е. как классическое состояние в эксперименте, изображенном на рис. 5.

Возможность подобной содержательной интерпретации классической модели, формальная конструкция которой дается теоремой 7.1, для других квантовых объектов зависит от того, можно ли интерпретировать элемент $\psi \in \Omega_n$ как «полный список», дающий классическое описание процедуры приготовления. Мы не будем здесь углубляться в этот вопрос, однако заметим, что уже для частиц со спином $j > 1/2$ появляются векторы состояний ψ, для которых затруднительно дать интерпретацию с точки зрения экспериментов с вращающимися поляризующими фильтрами, как это было сделано для случая $j = 1/2$ в § 5.

Мы видели, что для всякой достаточно регулярной статистической модели можно, по крайней мере формально, построить классическую модель (с ограничениями на измерения), которая будет статистически эквивалентна исходной в том смысле, что выполняется соотношение (7.3) для распределений вероятностей всевозможных измерений. В этом смысле всякая статистическая модель, в том числе модель квантовой теории, формально эквивалентна некоторой модели со «скрытыми переменными». Роль набора «переменных» играет ω, пробегающая фазовое пространство Ω, а эпитет «скрытые» указывает на отсутствие полной наблюдаемости, которая выражается в наличии ограничений на измерения. Это утверждение, конечно, не означает возможность сведения квантовой механики к той или иной форме механики Ньютона, однако оно кажется противоречащим широкоизвестному тезису о невозможности введения «скрытых переменных» в квантовую теорию. В этом положении, высказанном фон Нейманом, речь также идет лишь о статистическом описании результатов квантовых измерений. Первоначальная, довольно спорная аргументация фон Неймана была впоследствии значительно усовершенствована и доведена до уровня весьма нетривиальных теорем (см. комментарии).

На самом деле здесь, конечно, нет противоречия. Чтобы доказать ту или иную теорему, надо формализовать понятие теории со скрытыми переменными. Конструкция теоремы 7.1 не обладает некоторыми дополнительными свойствами, которые постулируются при «доказательствах невозможности». В общих чертах эти дополнительные требования сводятся к тому, что квантовым наблюдаемым должны непременно соответствовать в теории со скрытыми переменными случайные величины, причем с сохранением определенных функциональных соотношений. Важно, однако, чтобы требования, предъявляемые к теории со скрытыми переменными, были в достаточной мере мотивированными с точки зрения общего статистического описания экспериментальной ситуации. На наш взгляд, конструкция теоремы 7.1 удовлетворяет этому требованию, тогда как упомянутые выше более сильные ограничения основываются скорее на догматическом следовании традиционной концепции наблюдаемой и формальных аналогиях с теорией вероятностей.

Впрочем, сведение к классической модели достигается в конструкции теоремы 7.1 ценой радикального увеличения размерности множества состояний (от 3 до ∞ в случае спина $^1/_2$) и очевидно, что оно лишь усложняет описание объекта, вводя массу «несущественных подробностей», не находящих прямого отражения в статистике измерений. Редукция является аффинным отображением, а при таком отображении количество крайних точек у выпуклого множества не может уменьшиться. Поэтому, если множество состояний в некоторой статистической модели имеет N крайних точек, то размерность симплекса эквивалентной классической модели должна быть не меньше $N-1$. Наибольший выигрыш в размерности дают строго выпуклые множества, такие как множество квантовых состояний.

* * *

Рассмотрения настоящей главы носят общий характер и применимы в любой ситуации, в которой можно считать выполненным «статистический постулат», гарантирующий саму возможность построения статистической модели. Мы видели, что возникновение «неклассических» моделей обуславливается наличием ограничений на возможные измерения. Квантовая теория является пока что единственным примером неклассической статистической модели реального класса объектов и явлений. Должна ли область применения неклассических моделей ограничиться явлениями микромира? В этой связи мы хотим привлечь внимание к подмеченным Н. Бором, на первый взгляд, быть может, неожиданным, но по существу весьма глубоким аналогиям между закономерностями микромира и явлениями живой природы. Как указывает Бор, требование наблюдаемости функционирующего биологического объекта накладывает принципиальные ограничения на возможные измерения, поскольку каждое из них предполагает какое-то воздействие на наблюдаемый объект.

Так же, как в квантовой физике «элементарность» наблюдаемого микрообъекта не позволяет пренебречь результатами воздействия на него измерительных приборов, целостность живых организмов является тем фундаментальным качеством, которое исключает произвольное вмешательство в ход биологических процессов. Полный «классический» анализ биологического объекта может оказаться несовместимым с самими проявлениями жизни. Так, можно представить себе несколько воздействий, каждое из которых в отдельности допустимо, но сочетание их уже не является допустимым; известны ситуации, в которых существенную роль играет порядок воздействий. Подобные соображения показывают, что при создании статистических моделей биологических объектов, например функционирующего нейрона, возможность неклассической модели, в структуре которой заложена информация о принципиальных ограничениях, связанных с наблюдаемостью функционирующего объекта, является достаточно реальной. Как бы то ни было, несомненным является то, что классическая модель, ведущая происхождение от классической механики, a priori не является единственно возможной и наиболее адекватной при статистическом моделировании немеханических объектов; принятие или непринятие той или иной модели должно в конечном счете основываться на данных опыта.

Комментарии к гл. I

§§ 1—3. Вопросам статистической интерпретации квантовой механики посвящено большое число работ; отметим здесь статью Фока [100], в которой, в частности, четко проводится разделение эксперимента на стадии, играющее важную роль в нашем изложении. В той или иной мере вопросы обоснования, интерпретации, измерений затрагиваются почти в любом курсе квантовой механики. С большой полнотой они обсуждаются в лекциях Фока [99], Мандельштама [67] и в книгах Бома [15], Блохинцева [11], [12], где можно также познакомиться с историей введения статистических концепций в физику микромира.

Понятие статистической модели в значительной мере навеяно исследованиями по основаниям квантовой механики с позиций частично упорядоченных пространств, предпринятыми Людвигом (см. статьи Харткемпера [105], Неймана [73] и Людвига [62] в сборнике «Основания квантовой механики и частично упорядоченные линейные пространства») и Дэвисом [38]—[41]. В работах Людвига основное внимание уделяется измерениям с двумя значениями. Общее определение измерения как аффинного отображения множества состояний в распределения вероятностей было сформулировано в работе автора [112] в рамках алгебраического подхода. Аксиоматический подход к квантовой теории, берущий за исходный элемент выпуклое множество состояний, был предложен Гаддером [30] (см. также Краузе [54]).

Теорема 2.1 доказана Минковским. Бесконечномерным аналогом этого результата является известная теорема Крейна—Мильмана. Изложение теории выпуклости можно найти в книгах Рокафеллара [88] и Валентайна [20]. Углубленное исследование структуры выпуклых множеств, вопросов разложимости по крайним точкам, теорию симплексов Шоке содержит монография Алфсена [1].

По поводу спектрального разложения эрмитовых матриц, а также других вопросов линейной алгебры см. Мальцев [66], Халмош [103].

§ 4. Со времени публикации основополагающей работы Колмогорова [51] появилось немало курсов теории вероятностей. Доступное введение, достаточное для целей настоящего изложения, дает учебник Гнеденко [34]. В математической статистике вместо термина «измерение» используются термины «стратегия» или «решающее правило». Рандомизованные стратегии были введены создателем теории статистических решений Вальдом [21] (см. также Фергюсон [98], Ченцов [128]).

§ 5. Весьма специальным типом ограничений на измерения является рассматриваемая в классической статистике «схема неполных наблюдений», когда доступными наблюдению считаются лишь случайные величины, измеримые относительно σ-подалгебры $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}(\Omega)$. Соответствующая редукция переводит симплекс $\mathfrak{P}(\Omega)$ в симплекс распределений вероятностей на $\mathscr{A}$, и «неклассические» множества состояний при этом не возникают.

Элементарное квантовомеханическое рассмотрение экспериментов с фильтрами Штерна—Герлаха дается в фейнмановских лекциях [97]. Другие модели со скрытыми переменными для частицы со спином 1/2 были предложены Беллом [9] и Кошеном и Шпеккером [52].

§ 6. Основы операторного формализма квантовой механики были изложены в классическом труде Дирака [37]. Идеи дираковского подхода в значительной мере пронизывают оригинальный курс Фейнмана [97], в котором, однако, существенное место занимают конечномерные спиновые модели. Интересно отметить, что Фейнман, по-видимому, одним из первых сделал попытку обратить внимание вероятностников на проблемы взаимоотношений между теорией вероятностей и квантовой механикой [96].

Математически строгое изложение основ квантовой механики, опирающееся на теорию гильбертова пространства, было предпринято фон Нейманом [101]. Ему принадлежит концепция оператора плотности. В книге фон Неймана получила также уточнение и развитие дираковская концепция наблюдаемой как оператора в гильбертовом пространстве. Эта книга послужила отправным пунктом для целого ряда попыток построения аксиоматического базиса квантовой теории, т. е. системы простых, физически интерпретируемых постулатов, из которых как следствие вытекал бы формализм гильбертова пространства. В идеале эта система должна была бы играть здесь ту же роль, что аксиоматика Колмогорова в теории вероятностей. В лекциях Макки [65] была сформулирована система постулатов, которая приводит к рассмотрению «логик высказываний», обобщающих булевы σ-алгебры теории вероятностей. Задача тогда сводится к математической характеризации логики проекторов в гильбертовом пространстве. Эта проблема обсуждалась многими авторами и получила решение в работе Пирона [80]. Подробному изложению оснований квантовой механики, использующему «логики высказываний», посвящена книга Яуха [134], а математические проблемы этого подхода рассматриваются в книге Варадарайана [22]. Хороший обзор попыток аксиоматизации квантовой механики дается в статье Вайтмана [19]. К сожалению, в отличие от булевых алгебр, которые органически вписываются в классическое исчисление вероятностей, «логики высказываний» представляют собой скорее объект самостоятельного исследования, нежели рабочий аппарат физической теории, которая имеет дело непосредственно с операторами. К тому же из постулатов Макки лишь исходные аксиомы 1—6 имеют бесспорное вероятностное толкование (по существу они очень близки к нашему определению статистической модели). В получающемся из них множестве «вопросов» (тестов) $\mathscr{L}$ затем просто постулируется существование ортогонального дополнения, что превращает $\mathscr{L}$ в «логику высказываний». Здесь фактически уже заложено априорное принятие традиционной концепции наблюдаемой. Удовлетворительное рассмотрение в рамках этого подхода вопросов, составляющих содержание настоящей книги, представляется весьма затруднительным или же вообще неосуществимым.

Общие разложения единицы (называемые также положительными операторнозначными мерами, в отличие от проекторнозначных мер — ортогональных разложений единицы) были введены в теорию квантового измерения Дэвисом и Льюисом [41] и Холево [113]—[116]. Дэвис и Льюис рассматривали последовательные измерения и показали, что статистика последовательности квантовых измерений допускает простое описание в терминах, вообще говоря, неортогонального разложения единицы на произведении пространств результатов отдельных измерений. Книга Дэвиса [39] содержит обзор результатов об «открытых» квантовых системах и квантовых случайных процессах, в которых существенную роль играет изменение состояния после измерения. Изложение в § 6 следует работам [113]—[116].

Рассмотрение квантовых систем с бесконечным числом степеней свободы (полей), а также систем с так называемыми правилами суперотбора приводит к существенному алгебраическому обобщению квантовой механики (см., например, Сигал [91], Боголюбов, Логунов, Тодоров [14]), в котором состояния определяются как положительные линейные функционалы на алгебре «наблюдаемых». Большая часть излагаемой здесь теории измерения также допускает соответствующее алгебраическое обобщение.

§ 7. Утверждение о невозможности введения скрытых переменных содержится в книге фон Неймана [101]. Яух [134] усовершенствовал рассуждения фон Неймана, пользуясь терминологией «логик высказываний». Наиболее интересный результат в этом направлении получили Кошен и Шпеккер [52], доказавшие, что «квантовая логика», т. е. логика проекторов в гильбертовом пространстве размерности больше 2, не допускает подходящего вложения в булеву алгебру (для размерности 2 такое вложение конструируется явно). Эта теорема интерпретируется авторами как доказательство невозможности введения скрытых переменных.

Однако эти, казалось бы, безупречные результаты не удовлетворили защитников «скрытых переменных», которые продолжали настаивать на своем. Значительное прояснение ситуации было достигнуто в работе Белла [9]. Он построил модель со скрытыми переменными для частицы со спином $^1/_2$ и продемонстрировал на ней далеко не очевидные физические следствия «естественных» математических предпосылок, которые безоговорочно принимались сторонниками «квантовых логик». Дальнейшее исследование привело к выделению интересного класса «локальных» теорий, статистические предсказания которых не могут быть тождественны предсказаниям квантовой теории (таким образом, конструкция теоремы 7.1 дает «нелокальную» теорию). Живое обсуждение всех этих вопросов можно найти в обзоре Вайтмана [19]. Белинфанте [8] проанализировал большое число моделей и разделил их на три категории. Согласно этой классификации, «неосуществимые» теории фон Неймана — Яуха и Кошена — Шпеккера попадают в «нулевой класс». «Первый класс» образуют непротиворечивые теории со скрытыми переменными, статистические предсказания которых тождественны предсказаниям квантовой теории. В книге Белинфанте вскрываются физические различия между теориями нулевого и первого классов и объясняется, почему существующие «доказательства невозможности» не являются решающим аргументом против скрытых переменных. Представителем теории первого класса является и предлагаемая здесь конструкция. Наконец, ко второму классу относятся физические модели, приводящие к предсказаниям, отличающимся от квантовой теории.

Подробное обсуждение аналогий между квантовой механикой и некоторыми аспектами поведения живых организмов можно найти в сборнике выступлений Бора [16] (см. также Бом [15]). Знаменитый «принцип дополнительности» Бора проливает свет на природу принципиальных ограничений в экспериментах с микрообъектами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Операторы в гильбертовом пространстве

В предыдущей главе статистическая модель квантовой теории была введена в ее простейшем конечномерном матричном варианте. Однако для описания многих наиболее интересных свойств квантовых объектов необходим бесконечномерный аналог этой модели, в котором роль матриц играют операторы в гильбертовом пространстве.

Гильбертово пространство — это комплексное линейное пространство $\mathscr{H}$ (векторы которого будут обозначаться буквами ψ, φ, ...) со скалярным произведением $(\varphi|\psi)$, полное относительно метрики $\|\varphi-\psi\| = \sqrt{(\varphi-\psi|\varphi-\psi)}$. Мы будем иметь дело только с сепарабельными пространствами, в которых ортонормированный базис является счетным (или конечным). По некоторым соображениям, которые станут ясными из дальнейшего, нам удобно будет считать скалярное произведение $(\varphi|\psi)$ линейным по второму аргументу ψ. Типичным примером такого гильбертова пространства является $\mathscr{L}^2(a, b)$-пространство комплексных функций $\psi(x)$, квадратично-интегрируемых по Лебегу на интервале (a, b), со скалярным произведением

$$(\varphi|\psi) = \int_a^b \overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,dx.$$

Отображение $\varphi \to \hat{\varphi}$ гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в гильбертово пространство $\hat{\mathscr{H}}$ называется *изометричным*, если

$$(\varphi|\psi) = (\hat{\varphi}|\hat{\psi}); \qquad \varphi,\ \psi \in \mathscr{H}.$$

Поскольку при этом $\|\varphi\| = \|\hat{\varphi}\|$, то изометричное отображение обязательно взаимно-однозначно. Если существует изометричное отображение $\mathscr{H}$ на $\hat{\mathscr{H}}$, то пространства $\mathscr{H}$ и $\hat{\mathscr{H}}$ и называются *изоморфными*. Например, пространство $\mathscr{L}^2(-\pi, \pi)$ изоморфно пространству l^2 квадратично-суммируемых последовательностей $c = \{c_k\}$ со скалярным произведением $(c \mid c') = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{c_k} c'_k$. Соответствующее отображение дается формулой

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

а его изометричность составляет содержание формулы Парсеваля. Различие между изоморфными пространствами несущественно с точки зрения общей теории гильбертовых пространств; всякое утверждение для одного из изоморфных пространств может быть в принципе переведено на язык другого. Однако фактически такой перевод может быть очень сложным; кроме того, удачный выбор конкретного гильбертова пространства может существенно упростить изучение того или иного объекта. Например, при изучении оператора дифференцирования в $\mathscr{L}^2(-\pi, \pi)$ выгодно перейти к изоморфному пространству коэффициентов Фурье l^2 и т. п.

Принятое выше соглашение о линейности скалярного произведения по второму аргументу связано с удобной символикой для обозначения векторов гильбертова пространства, введенной Дираком. Эта символика широко используется физиками, и мы также будем ее применять.

Согласно фундаментальной лемме Рисса — Фреше, *всякий непрерывный (относительно нормы $\|\cdot\|$) линейный функционал на $\mathscr{H}$ имеет вид $\varphi \to (\psi \mid \varphi)$, где ψ — некоторый вектор из $\mathscr{H}$*. Поэтому всякий вектор ψ можно рассматривать не только как элемент самого пространства $\mathscr{H}$, но и как элемент сопряженного пространства $\mathscr{H}^*$ непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{H}$. Условимся обозначать вектор ψ, рассматриваемый как элемент $\mathscr{H}$, через $|\psi)$, а тот же ψ, рассматриваемый как элемент сопряженного пространства $\mathscr{H}^*$, — через $(\psi|$. Отображение $|\psi) \to (\psi|$ взаимно-однозначно и антилинейно переводит $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}^*$ (антилинейность означает, что коэффициенты линейной комбинации меняются на комплексно сопряженные). В конечномерном случае $|\psi)$ соответствует вектору-столбцу $\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{bmatrix}$, а $(\psi|$ — вектору-строке $[\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots]$. При таком соглашении скалярное произведение трактуется как «внутреннее» произведение $(\varphi|$ на $|\psi)$ и формально получается графическим соединением символов $(\varphi|$ и $|\psi)$.

Удобство символики Дирака заключается в возможности наглядной записи операторов в виде «внешнего произведения». Напомним, что в конечномерном случае произведение столбца на строку той же размерности дает квадратную матрицу, т. е. оператор. Условимся понимать символ $|\varphi_1)(\varphi_2|$ как оператор, отображающий вектор $|\psi)$ в вектор $|\varphi_1)(\varphi_2|\psi)$, символ которого является результатом графического соединения исходных символов. Операторы вида $|\varphi_1)(\varphi_2|$ являются операторами ранга 1, отображающими $\mathscr{H}$ на одномерное подпространство. В частности, проектор на единичный вектор ψ записывается в виде

$$S_\psi = |\psi)(\psi|. \tag{1.1}$$

Конечные линейные комбинации (или, что то же, конечные суммы) операторов ранга 1

$$T = \sum_j |\varphi_j)(\psi_j| \tag{1.2}$$

описывают *операторы конечного ранга в* $\mathscr{H}$. Любая конечная совокупность операторов конечного ранга может рассматриваться как действующая в конечномерном подпространстве $\tilde{\mathscr{H}} \subset \mathscr{H}$; именно, в качестве $\tilde{\mathscr{H}}$ можно взять подпространство, порожденное всеми векторами $|\varphi_j)$, $|\psi_j)$ из записи (1.2) каждого из этих операторов. Поэтому алгебра конечной совокупности операторов конечного ранга сводится к матричной алгебре. Произведение операторов конечного ранга получается графическим соединением соответствующих символов, например

$$\left[\sum_j |\varphi_j)(\psi_j|\right]\cdot\left[\sum_k |\hat{\varphi}_k)(\hat{\psi}_k|\right] = \sum_{jk} |\varphi_j)(\psi_j|\hat{\varphi}_k)(\hat{\psi}_k|. \tag{1.3}$$

В пространстве $\mathscr{L}^2(a, b)$ операторы конечного ранга являются интегральными операторами с вырожденными ядрами; так, оператору (1.2) соответствует ядро

$$T(x', x) = \sum_j \varphi_j(x')\overline{\psi_j(x)}. \tag{1.4}$$

Ясно, что далеко не все представляющие интерес операторы попадают в этот класс. Одна из трудностей бесконечномерного случая состоит в том, что интересующие нас операторы могут быть не определены (и неопределяемы) на всем пространстве $\mathscr{H}$. Примером может служить оператор дифференцирования в $\mathscr{L}^2(a, b)$. Однако существует важный класс ограниченных операторов, естественной областью определения которых является все пространство. Оператор X называется *ограниченным*, если

$$\|X\psi\| \leqslant c\,\|\psi\|$$

для некоторой постоянной c и всех $\psi \in \mathscr{H}$. Геометрически это означает, что X переводит ограниченные подмножества пространства $\mathscr{H}$ в ограниченные подмножества. Наименьшее значение постоянной c, равное

$$\|X\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|X\psi\|}{\|\psi\|},$$

называется *нормой* оператора X.

Всякому ограниченному оператору X отвечает полуторалинейная (линейная по ψ, антилинейная по φ) форма на $\mathscr{H}$:

$$X(\varphi, \psi) = (\varphi \,|\, X\psi).$$

Это соотношение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между ограниченными операторами в $\mathscr{H}$ и полуторалинейными формами, непрерывными по паре переменных $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$. Рассмотрим форму $X^*(\varphi, \psi) = \overline{(\psi \,|\, X\varphi)}$. Отвечающий ей оператор называется (эрмитово) *сопряженным* к X и обозначается X^*, так что

$$(X^*\varphi \,|\, \psi) = (\varphi \,|\, X\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{H}. \tag{1.5}$$

Сопряжение $X \to X^*$ является антилинейным отображением, меняющим порядок сомножителей в произведении

$$(XY)^* = Y^* X^*$$

и сохраняющим норму

$$\|X\| = \|X^*\|. \tag{1.6}$$

Кроме того,

$$X^{**} \equiv (X^*)^* = X.$$

Переход к сопряженному оператору аналогичен переходу к эрмитово сопряженной матрице в конечномерном случае. Предоставляем читателю проверить, что для оператора конечного ранга

$$\left(\sum_j |\varphi_j)(\psi_j|\right)^* = \sum_j |\psi_j)(\varphi_j|.$$

Пусть U — изометричный оператор в $\mathscr{H}$, т. е.

$$(U\varphi \mid U\psi) = (\varphi \mid \psi); \qquad \varphi,\ \psi \in \mathscr{H};$$

тогда U ограничен; в силу (1.5) условие изометричности можно записать в виде

$$U^*U = \mathrm{I},$$

где I — единичный оператор. *Унитарным* называется изометричный оператор, отображающий $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$. Условие унитарности имеет вид

$$U^*U = UU^* = \mathrm{I}.$$

(Пример изометричного, но не унитарного оператора будет приведен в § III. 10.)

Оператор X называется *эрмитовым*, если отвечающая ему форма эрмитова:

$$(X\psi \mid \varphi) \equiv \overline{(\varphi \mid X\psi)} = (\psi \mid X\varphi); \qquad \varphi,\ \psi \in \mathscr{H}, \tag{1.7}$$

т. е. $X = X^*$. Поскольку эрмитова форма однозначно определяется своими «диагональными» значениями при $\varphi = \psi$, эрмитов оператор X однозначно определяется значениями $(\psi \mid X\psi)$, $\psi \in \mathscr{H}$. Поэтому для проверки какого-либо линейного соотношения между эрмитовыми формами или операторами достаточно убедиться в его выполнении для диагональных значений соответствующих форм. Мы будем часто этим пользоваться. Заметим, что норма эрмитова оператора вычисляется через диагональные значения по формуле

$$\|X\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{|(\psi \mid X\psi)|}{(\psi \mid \psi)}, \tag{1.8}$$

откуда видно, что в конечномерном случае норма эрмитова оператора равна максимуму модулей его собственных значений. В общем случае спектр оператора X также лежит в интервале $[-\|X\|,\ \|X\|]$, хотя само понятие спектра усложняется (см. § 3).

Пусть $\mathscr{H}_1$ (замкнутое) подпространство $\mathscr{H}$; тогда имеет место разложение в ортогональную сумму

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2,$$

где $\mathscr{H}_2$ — ортогональное дополнение к $\mathscr{H}_1$. Для всякого $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ положим $P\psi = \psi_1$. Тогда

$$P^2 = P, \quad P^* = P.$$

Обратно, всякий оператор в $\mathscr{H}$, удовлетворяющий этим условиям, является оператором (ортогонального) проецирования на подпространство $\mathscr{H}_1 = \{\psi\colon P\psi = \psi\}$. Мы будем называть такие операторы *проекторами*.

Пусть $\mathscr{H}_1$ — конечномерное подпространство; тогда проекция вектора ψ на $\mathscr{H}_1$ запишется в виде

$$|\psi_1) = \sum_j |e_j)(e_j|\psi), \tag{1.9}$$

где $\{e_j\}$ — любой ортонормированный базис в $\mathscr{H}_1$. Поэтому проектор на $\mathscr{H}_1$ является оператором конечного ранга вида

$$P = \sum_j |e_j)(e_j|. \tag{1.10}$$

Эта формула справедлива и для бесконечномерных подпространств, однако, поскольку здесь возникает бесконечный ряд операторов, необходимо уточнить понятие сходимости. Очевидно, сходимость по операторной норме здесь не подойдет, так как норма слагаемых не стремится к нулю:

$$\| |e_j)(e_j| \| = 1.$$

Полезными оказываются два других типа сходимости. Последовательность операторов $\{X_n\}$ *сходится к X сильно*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n\psi - X\psi\| = 0$ для любого вектора $\psi \in \mathscr{H}$, и *сходится к X слабо*, если $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi|X_n\psi) = (\varphi|X\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$. Для эрмитовых операторов это равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\psi|X_n\psi) = (\psi|X\psi)$, $\psi \in \mathscr{H}$. Соотношение между этими типами сходимости иллюстрируется диаграммой

$$\begin{matrix}\text{сходимость} \\ \text{по норме}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\text{сильная} \\ \text{сходимость}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\text{слабая} \\ \text{сходимость}\end{matrix}$$

Пусть $\{e_j\}$ — произвольная ортонормированная система в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ — порождаемое ею (замкнутое) подпространство. Поскольку для любого ψ ряд векторов (1.9) сходится в $\mathscr{H}$, то ряд операторов (1.10) сходится сильно и определяет проектор на $\mathscr{H}_1$. В частности, для любого ортонормированного базиса в $\mathscr{H}$

$$\mathrm{I} = \sum_j |e_j)(e_j|. \tag{1.11}$$

Это является равносильной записью векторного соотношения

$$|\psi) = \sum_j |e_j)(e_j|\psi), \qquad \psi \in \mathscr{H}, \tag{1.12}$$

выражающего полноту системы $\{e_j\}$.

Используя (1.11), имеем для любого ограниченного оператора X:

$$X = \left(\sum_j |e_j)(e_j|\right) X \left(\sum_k |e_k)(e_k|\right) = \\ = \sum_j \sum_k |e_j)(e_j|Xe_k)(e_k|, \tag{1.13}$$

где имеется в виду сильная сходимость. Здесь $(e_j|Xe_k)$ — *матричные элементы* оператора X; эта формула дает разложение ограниченного оператора в линейную комбинацию операторов ранга 1 — «матричных единиц» $\{|e_j)(e_k|\}$. Если X — оператор конечного ранга, то в подходящем базисе он имеет лишь конечное число отличных от нуля матричных элементов.

Эрмитов оператор называется *положительным* (обозначается $X \geqslant 0$), если

$$(\psi|X\psi) \geqslant 0, \qquad \psi \in \mathscr{H}.$$

Очевидно, что $X^*X \geqslant 0$ и $XX^* \geqslant 0$. Запись $X \geqslant Y$ означает, что $X - Y \geqslant 0$.

Следом положительного оператора X называется величина

$$\mathrm{Tr}\, X = \sum_j (e_j|Xe_j), \tag{1.14}$$

где $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Ряд состоит из неотрицательных слагаемых; как и в случае $\dim \mathscr{H} < \infty$, его сумма не зависит от выбора ортонормированного базиса, однако может быть бесконечной. Таким образом, если $X \geqslant 0$, то $0 \leqslant \mathrm{Tr}\, X \leqslant +\infty$.

Если X — не-положительный оператор, то определение следа по формуле (1.14) может оказаться некорректным; однако существует важный класс ядерных операторов, или операторов с конечным следом, для которых трудностей с определением следа не возникает. Мы рассмотрим этот класс в § 7, а пока заметим, что формула (1.14) дает корректное определение для следа оператора конечного ранга. В самом деле, для любого базиса $\{e_j\}$

$$\sum_j (e_j \mid \varphi)(\psi \mid e_j) = (\psi \mid \varphi), \tag{1.15}$$

откуда

$$\operatorname{Tr} \mid \varphi)(\psi \mid = (\psi \mid \varphi), \tag{1.16}$$

так что

$$\operatorname{Tr}\left(\sum_j \mid \varphi_j)(\psi_j \mid\right) = \sum_j (\psi_j \mid \varphi_j). \tag{1.17}$$

Отсюда, согласно (1.4), получаем формулу для следа интегрального оператора в $\mathscr{L}^2(a, b)$ с вырожденным ядром $T(x, y)$:

$$\operatorname{Tr} T = \int_a^b T(x, x)\, dx.$$

Из формул (1.17), (1.3) вытекают важные соотношения

$$\operatorname{Tr} T^* = \overline{\operatorname{Tr} T}, \quad \operatorname{Tr} TX = \operatorname{Tr} XT, \tag{1.18}$$

которые будут обобщены в § 7 на более широкий класс операторов.

§ 2. Состояния и измерения в квантовой теории

Оператором плотности называется положительный эрмитов оператор с единичным следом

$$S \geqslant 0, \qquad \operatorname{Tr} S = 1. \tag{2.1}$$

Примером оператора плотности является одномерный проектор (1.1). Как мы увидим в § 7, для всякого оператора плотности имеет место спектральное разложение

$$S = \sum_j s_j \mid \psi_j)(\psi_j \mid, \tag{2.2}$$

аналогичное разложению (I.2.6) в конечномерном случае. Ряд здесь сходится по норме операторов. Из (2.1) вытекает, что собственные значения оператора плотности удовлетворяют условиям

$$s_j \geqslant 0, \qquad \sum_j s_j = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ множество всех операторов плотности в $\mathscr{H}$; если $\{S_j\}$ — операторы плотности, а $\{p_j\}$ — конечное распределение вероятностей, то оператор $\sum_j p_j S_j$ удовлетворяет условиям (2.1). Таким образом, $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ — выпуклое множество.

Множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ играет роль м н о ж е с т в а с о с т о я н и й в квантовой механике. Из (2.2) вытекает, что в бесконечномерном случае справедлив аналог предложения 1.2.2: *одномерные проекторы* S_ψ; $\psi \in \mathscr{H}$, $(\psi|\psi) = 1$, *образуют остов множества* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Состояния, представимые одномерными проекторами, называются *чистыми*.

Перейдем к описанию квантовых измерений. Пусть U — измеримое пространство результатов (например, U — конечное множество или область в $\mathbb{R}^n$ с σ-алгеброй борелевских множеств). Следуя § 1.6, назовем *измерением со значениями в* U, или, короче, U-*измерением*, аффинное отображение $S \to \mu_S(du)$ выпуклого множества состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ в множество распределений вероятностей на U. Распределение вероятностей $\mu_S(du)$ интерпретируется как распределение вероятностей результатов измерения относительно состояния S. Далее мы установим аналог предложения 1.6.1, позволяющий описать измерения в терминах разложений единицы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. *Разложением единицы* на U называется семейство $M = \{M(B)\}$ эрмитовых операторов в $\mathscr{H}$, где B пробегает измеримые подмножества U, такое, что

1) $M(\varnothing) = 0$, $M(U) = I$;
2) $M(B) \geqslant 0$, $B \in \mathscr{A}(U)$;
3) для любого разбиения $B = \bigcup_j B_j$ ($B_j \cap B_k = \varnothing$ при $j \neq k$) $M(B) = \sum_j M(B_j)$, где ряд сходится в смысле слабой сходимости операторов (см. § 1).

Эти условия напоминают определение вероятностной меры (однако не с числовыми, а с операторными значениями), и разложения единицы называются иногда вероятностными операторными мерами или положительными операторно-значными мерами. Если U — конечное множество и $\{M_u;\ u \in U\}$ — набор эрмитовых операторов, удовлетворяющих условиям (I.6.2), т. е. разложение единицы в смысле § I.6, то формула

$$M(B) = \sum_{u \in B} M_u, \qquad B \subset U,$$

определяет операторно-значную меру на алгебре всех подмножеств U, т. е. разложение единицы в смысле сформулированного выше определения. Обратно, всякое разложение единицы на конечном U имеет такую структуру.

Частным, но весьма важным случаем являются *ортогональные разложения единицы*, удовлетворяющие кроме условий 1) — 3) также требованию

$$M(B_1)\, M(B_2) = 0, \text{ если } B_1 \cap B_2 = \varnothing.$$

Как и в конечномерном случае (см. § I.6), это равносильно условию

$$M(B)^2 = M(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U),$$

т. е. проекторно-значности меры $M(du)$.

Аналог предложения I.6.1 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между U-измерениями $S \to \mu_S(du)$ и разложениями единицы на U.

Теорема 2.1. *Пусть $S \to \mu_S$ — U-измерение. Тогда существует (единственное) разложение единицы $\mathbf{M} = \{M(B);\ B \in \mathscr{A}(U)\}$ в $\mathscr{H}$ такое, что для любого состояния S*

$$\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U). \tag{2.3}$$

Обратно, если $\mathbf{M} = \{M(B)\}$ — разложение единицы, то (2.3) *определяет U-измерение.*

Соотношение (2.3) мы будем иногда символически записывать в виде

$$\mu_S(du) = \operatorname{Tr} SM(du).$$

Заметим, что в правой части формулы (2.3) стоит след не-положительного (и не-эрмитова) оператора, который, однако, как мы покажем в § 7, является ядерным. Пока же заметим, что для чистого состояния

$$\mu_{S_\psi}(B) = (\psi \mid M(B)\, \psi),$$

так как согласно (1.16) $\mathrm{Tr}\,|\psi)(\psi|\,X=(\psi|\,X\psi)$. Измерения, отвечающие ортогональным разложениям единицы, мы условимся называть *простыми*. Всякое простое измерение является крайней точкой выпуклого множества $\mathfrak{M}(U)$ всех U-измерений (доказательство этого совершенно такое же, как в конечномерном случае; см. предложение I.6.2), однако обратное, конечно, неверно.

Наиболее интересным представляется случай, когда результатами измерений являются вещественные числа. В этом случае простые измерения описываются в терминах наблюдаемых, т. е. операторов в $\mathscr{H}$, которые являются аналогом случайных величин в классической теории вероятностей. Следующий параграф посвящен более детальному рассмотрению этой связи.

§ 3. Спектральное разложение ограниченных операторов

В конечномерном пространстве всякий эрмитов оператор X имеет спектральное разложение

$$X=\sum_k \lambda_k E_k, \tag{3.1}$$

где λ_k — собственные значения оператора X (без учета кратности), E_k — проекторы на инвариантные подпространства, отвечающие значениям λ_k. Набор проекторов $\{E_k\}$ образует ортогональное разложение единицы, так что

$$\sum_k E_k=I, \quad E_kE_j=0 \quad \text{при} \quad k\neq j. \tag{3.2}$$

Бесконечномерный аналог формулы (3.1) имеет место для вполне непрерывных эрмитовых операторов (см. § 7). Однако далеко не всякий ограниченный оператор вполне непрерывен и вообще имеет хотя бы один собственный вектор. Примером может служить оператор умножения на независимую переменную x в пространстве $\mathscr{L}^2(a,\ b)$, где $(a,\ b)$ — ограниченный интервал на прямой. Уравнение

$$x\psi(x)=\xi\psi(x) \tag{3.3}$$

имеет континуальный набор формальных решений

$$\psi_\xi(x)\sim\delta(x-\xi); \quad a<\xi<b, \tag{3.4}$$

однако им не соответствуют ненулевые векторы в $\mathscr{L}^2(a,\ b)$.

Тем не менее всякий эрмитов оператор в гильбертовом пространстве имеет спектральное разложение, в котором появляется уже непрерывный аналог суммы (3.1). Чтобы пояснить переход от суммы к интегралу, введем ортогональное разложение единицы на прямой, полагая

$$E(B)=\sum_{k:\,\lambda_k\in B} E_k, \quad B\in\mathscr{A}(\mathbb{R})$$

($\mathscr{A}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств *) в $\mathbb{R}$), или, формально,

$$E(d\lambda)=\left[\sum_k \delta(\lambda-\lambda_k)E_k\right]d\lambda. \tag{3.5}$$

Тогда соотношение (3.1) можно записать в виде

$$X=\int \lambda E(d\lambda). \tag{3.6}$$

Пусть теперь $E(d\lambda)$ — произвольное ортогональное разложение единицы в $\mathscr{H}$. Предположим, что оно сосредоточено на ограниченном множестве $\Lambda\subset\mathbb{R}$, т. е. $E(\Lambda)=I$. Тогда для любого $\psi\in\mathscr{H}$ носителем вероятностной меры $\mu_\psi(d\lambda)=\operatorname{Tr}S_\psi E(d\lambda)=(\psi\,|\,E(d\lambda)\psi)$ будет ограниченное множество Λ, и поэтому интеграл

$$\int \lambda(\psi\,|\,E(d\lambda)\psi)=\int \lambda\mu_\psi(d\lambda) \tag{3.7}$$

сходится. Этот интеграл определяет непрерывную эрмитову форму на $\mathscr{H}$, которой соответствует эрмитов оператор X, так что

$$(\psi\,|\,X\psi)=\int \lambda(\psi\,|\,E(d\lambda)\psi), \qquad \psi\in\mathscr{H}. \tag{3.8}$$

Таким образом, имеет место равенство (3.6), где интеграл понимается в смысле слабой сходимости. (Более детальный анализ показывает, что интеграл (3.6) сходится также в сильном смысле.)

Теорема 3.1 (спектральная теорема для ограниченных операторов). *Соотношение* (3.6) *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между эрмитовыми операторами X и ортогональными разложениями единицы $E(d\lambda)$ в $\mathscr{H}$, сосредоточенными на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}$.*

---

*) σ-алгебра борелевских множеств — это наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества.

Разложение единицы $E(d\lambda)$ называется также *спектральной мерой* оператора X.

Вернемся на время к операторам, отвечающим конечным разложениям единицы (3.5). Из (3.2) вытекает, что для любого многочлена $p(\lambda)$

$$p(X)=\sum_k p(\lambda_k)E_k=\int p(\lambda)E(d\lambda).$$

Аппроксимируя в общем случае интегралы суммами, можно показать, что для произвольного эрмитова оператора X выполняется

$$p(X)=\int p(\lambda)E(d\lambda).$$

Пользуясь этим, определим эрмитов оператор $f(X)$, где f — ограниченная измеримая функция, соотношением

$$(\psi|f(X)\psi)=\int f(\lambda)(\psi|E(d\lambda)\psi);\qquad \psi\in\mathscr{H}.$$

Отображение $f\to f(X)$ сохраняет алгебраические функциональные соотношения: линейная комбинация и произведение функций переходят соответственно в линейную комбинацию и произведение соответствующих операторов. Обозначая $\mathbf{1}_B(\lambda)$ индикатор множества $B\in\mathscr{A}(\mathbb{R})$, имеем

$$E(B)=\mathbf{1}_B(X).$$

Отображение $f\to f(X)$ сохраняет также отношения упорядоченности. Например, полагая

$$|X|=\int|\lambda|E(d\lambda), \tag{3.9}$$

имеем $\pm X\leqslant|X|$, так как $\pm x\leqslant|x|$ для всех $x\in\mathbb{R}$.

Из равенства

$$X^2=\int\lambda^2E(d\lambda)$$

вытекает, что

$$\|X\psi\|^2=\int\lambda^2(\psi|E(d\lambda)\psi).$$

В качестве примера рассмотрим оператор Q умножения на независимую переменную x в пространстве $\mathscr{L}^2(a, b)$, где (a, b) — ограниченный интервал. Имеем

$$Q=\int_a^b\xi E(d\xi), \tag{3.10}$$

где $E(B)=1_B(x)$. В самом деле, (3.10) означает, что

$$(\psi \mid Q\psi)=\int_a^b \xi\mu_\psi(d\xi), \tag{3.11}$$

где $\mu_\psi(B)=(\psi \mid E(B)\psi)=\int_a^b 1_B(x)\,|\psi(x)|^2\,dx=\int_B |\psi(x)|^2\,dx$,

так что $\mu_\psi(d\xi)=|\psi(\xi)|^2\,d\xi$ и равенство (3.10) очевидно. Таким образом, спектральной мерой оператора умножения на x является семейство проекторов $\{1_B(x);\ B\in\in\mathscr{A}((a,\ b))\}$.

Оператор умножения является типичным примером оператора с непрерывным спектром. Как мы видели, он не имеет собственных векторов в $\mathscr{L}^2(a,\ b)$, хотя уравнение (3.3) имеет интуитивно понятные формальные решения (3.4). В этой связи уместно сказать несколько слов о формализме Дирака применительно к операторам с непрерывным спектром. Следуя Дираку, обозначим через $|\xi)$ формальную собственную функцию (3.4). Набор $\{|\xi);\ \xi\in(a,\ b)\}$ является «ортонормированным» в том смысле, что

$$(\xi' \mid \xi)=\delta(\xi-\xi'),$$

и удовлетворяет формальному условию полноты

$$\int_a^b |\xi)(\xi|\,d\xi=I. \tag{3.12}$$

На самом деле (3.12) является сокращенной формой записи равенства

$$\int_a^b (\psi \mid \xi)(\xi \mid \psi)\,d\xi=(\psi \mid \psi), \qquad \psi\in\mathscr{H},$$

которое становится осмысленным, если понимать символ $(\xi \mid \psi)$ как

$$(\xi \mid \psi)=\int_a^b \delta(x-\xi)\psi(x)\,dx=\psi(\xi). \tag{3.13}$$

Таким образом, семейство $\{|\xi)\}$ является формальным континуальным аналогом ортонормированного базиса, а соотношение (3.12) является непрерывным аналогом условия полноты (1.11). Спектральное разложение оператора умножения на x в дираковских обозначениях имеет вид

$$Q=\int_a^b \xi\,|\,\xi)\,(\xi\,|\,d\xi \tag{3.14}$$

и выглядит как непосредственный континуальный аналог спектрального разложения с дискретным спектром. Фактически (3.14) означает, что

$$(\psi\,|\,Q\psi)=\int_a^b \xi\,(\psi\,|\,\xi)\,(\xi\,|\,\psi)\,d\xi, \qquad \psi\in\mathscr{H},$$

а это то же самое, что (3.11). Таким образом, мы получаем связь между (3.10) и (3.14), полагая

$$E\,(d\xi)=|\,\xi)\,(\xi\,|\,d\xi.$$

Конечно, это соотношение нельзя понимать буквально, так как проекторно-значная мера $E\,(d\xi)$ не является дифференцируемой (не имеет плотности) относительно меры Лебега $d\xi$. Однако скалярные меры $\mu_\psi(d\xi)=(\psi\,|\,E\,(d\xi)\,\psi)$ уже дифференцируемы относительно $d\xi$, причем

$$\mu_\psi(d\xi)=|\,\psi(\xi)\,|^2\,d\xi=(\psi\,|\,\xi)\,(\xi\,|\,\psi)\,d\xi.$$

Наглядность формализма Дирака дает определенные методические преимущества в изложении квантовой теории. По существу можно пользоваться этим формализмом в тех рамках, в которых он эквивалентен спектральному разложению.

§ 4. Спектральное разложение неограниченных операторов

Для квантовой механики важно обобщение спектральной теоремы на неограниченные операторы. Неограниченные операторы (за несущественным исключением) не могут быть определены на всем пространстве $\mathscr{H}$. Задание неограниченного оператора всегда подразумевает и описание области его определения. Пусть X — оператор с областью определения $\mathscr{D}(X)$. Он называется *симметричным*, если соответствующая полуторалинейная форма эрмитова на $\mathscr{D}(X)$:

$$(X\varphi\,|\,\psi)=(\varphi\,|\,X\psi); \qquad \varphi,\ \psi\in\mathscr{D}(X). \tag{4.1}$$

Наиболее важным, однако, является понятие самосопряженного оператора. Пусть X — оператор с плотной областью определения $\mathscr{D}(X)$. Обозначим через $\mathscr{D}(X^*)$ множество векторов φ, для которых выражение $(\varphi \mid X\psi)$ является непрерывным функционалом от ψ. Тогда по лемме Рисса — Фреше $(\varphi \mid X\psi) = (\varphi^* \mid \psi)$, где φ^* — некоторый вектор, определяемый однозначно, так как ψ пробегает плотное подмножество $\mathscr{H}$. Обозначим X^* оператор $\varphi \to \varphi^*$ с областью определения $\mathscr{D}(X^*)$. Он называется *сопряженным* к X. Таким образом,

$$(X^*\varphi \mid \psi) = (\varphi \mid X\psi); \qquad \psi \in \mathscr{D}(X), \ \varphi \in \mathscr{D}(X^*).$$

В частности, X — симметричный, если $X \subseteq X^*$, т. е. $\mathscr{D}(X) \subseteq \mathscr{D}(X^*)$ и $X\psi = X^*\psi$, $\psi \in \mathscr{D}(X)$.

Оператор X с плотной областью определения называется *самосопряженным*, если $X = X^*$, т. е. $\mathscr{D}(X^*) = \mathscr{D}(X)$ и выполняется равенство (4.1).

Иногда симметричный оператор X можно расширить до самосопряженного. Если это можно сделать и притом единственным способом, то X называется *существенно самосопряженным*. Симметричный оператор, не имеющий симметричных расширений, называется *максимальным*.

В качестве примера рассмотрим оператор $P_+ = i^{-1}\frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ с областью определения

$$\mathscr{D}(P_+) = \left\{\psi\colon\ \psi(0) = 0,\ \int_0^\infty \left|\frac{d}{dx}\psi(x)\right|^2 dx < \infty\right\}.$$

Тогда

$$(\varphi \mid P_+\psi) = i^{-1}\int_0^\infty \bar\varphi(x)\,\frac{d}{dx}\,\psi(x)\,dx = i^{-1}\overline{\varphi(0)}\,\psi(0) -$$

$$- i^{-1}\int_0^\infty \frac{d}{dx}\,\overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,dx = (P_+^*\varphi \mid \psi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(P_+^*), \tag{4.2}$$

где $P_+^* = i^{-1}\frac{d}{dx}$ с областью определения

$$\mathscr{D}(P_+^*) = \left\{\psi\colon\ \int_0^\infty \left|\frac{d}{dx}\psi(x)\right|^2 dx < \infty\right\}.$$

Таким образом, $P_+ \subset P_+^*$, $P_+ \neq P_+^*$. Оператор P_+ симметричен, но P_+^* не симметричен, так как для него слагаемое $i^{-1}\overline{\varphi(0)}\psi(0)$ в формуле типа (4.2) уже будет отлично от нуля. Можно показать, что P_+ максимален.

С другой стороны, оператор $P = i^{-1}\dfrac{d}{dx}$ в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ с областью определения

$$\mathscr{D}(P) = \left\{\psi:\ \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d}{dx}\psi(x)\right|^2 dx < \infty\right\}, \tag{4.3}$$

как будет показано ниже, является самосопряженным. Примером существенно самосопряженного оператора может служить сужение этого оператора на финитные бесконечно дифференцируемые функции.

Рассмотрим теперь интеграл типа (3.6), где $E(d\lambda)$ — произвольное ортогональное разложение единицы на прямой. Теперь нельзя ожидать, чтобы интеграл в правой части (3.8) сходился для всех $\psi \in \mathscr{H}$, однако он заведомо сходится, если ψ принадлежит подпространству

$$\mathscr{D} = \left\{\psi:\ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (\psi \mid E(d\lambda)\psi) < \infty\right\}. \tag{4.4}$$

Можно показать, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$ и эрмитова форма (3.7) определяет самосопряженный оператор X с $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}$, так что

$$(\psi \mid X\psi) = \int \lambda (\psi \mid E(d\lambda)\psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}, \tag{4.5}$$

$$\|X\psi\|^2 = \int \lambda^2 (\psi \mid E(d\lambda)\psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}. \tag{4.6}$$

Последнее равенство показывает, почему должно быть $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}$.

Теорема 4.1 (спектральная теорема для самосопряженных операторов). *Соотношения* (4.4), (4.5) *устанавливают взаимно-однозначное соответствие между самосопряженными операторами и ортогональными разложениями единицы в $\mathscr{H}$ (спектральными мерами).*

Рассмотрим (неограниченный) оператор Q умножения на x в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ с областью определения $\left\{\psi:\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty\right\}$. Для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(Q)$ выполняется $(\varphi | Q\psi) = \int x\overline{\varphi(x)}\psi(x)\,dx = (Q\varphi | \psi)$, так что Q симметричен. Для доказательства самосопряженности возьмем $\varphi \in \mathscr{D}(Q^*)$; тогда $\int x\bar{\varphi}\psi\,dx$ является непрерывным функционалом от ψ и по лемме Рисса – Фреше $\int x\bar{\varphi}\psi\,dx = \int \bar{h}\psi\,dx$, где $\int |h(x)|^2\,dx < \infty$. Отсюда $h = x\varphi$ и $\int |x\varphi(x)|^2\,dx < \infty$, так что $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$ и $\mathscr{D}(Q^*) = \mathscr{D}(Q)$. Рассуждая как в случае конечного интервала в § 3, находим его спектральную меру

$$E(B) = 1_B(x); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}), \tag{4.7}$$

или, формально,

$$E(d\xi) = |\xi)(\xi|\,d\xi,$$

где $|\xi)$; $-\infty < \xi < \infty$, – формальные собственные векторы оператора умножения, так что, в обозначениях Дирака,

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \xi\,|\xi)(\xi|\,d\xi.$$

В качестве следующего примера рассмотрим самосопряженный оператор $P = i^{-1}\frac{d}{dx}$ в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$. Этот оператор имеет континуальный набор формальных собственных векторов

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\eta x}; \qquad -\infty < \eta < \infty,$$

удовлетворяющий условиям ортогональности и полноты типа (3.12). Обозначая формальные собственные векторы через $|\eta)$; $-\infty < \eta < \infty$, мы можем ожидать, что P имеет спектральное разложение

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \eta\,|\eta)(\eta|\,d\eta.$$

Для того чтобы придать этим рассуждениям точный смысл, рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{\psi}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta x}\psi(x)\,dx \equiv (\eta|\psi),$$

которое изометрично отображает $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ на $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$. При этом, как известно, оператор P переходит в оператор умножения на η, причем $\mathscr{D}(P)$ переходит в соответствующую область определения. Отсюда вытекает, что P является самосопряженным, а спектральная мера $F(d\eta)$ оператора P получается обратным преобразованием Фурье спектральной меры (4.7), точнее,

$$(\psi \mid F(B)\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{B} \overline{\psi(x)}\, \psi(x')\, e^{i\eta(x-x')}\, d\eta\, dx'\, dx. \qquad (4.8)$$

Формально это можно записать как

$$(\psi \mid F(d\eta)\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)}\, \psi(x')\, e^{i\eta(x-x')}\, dx'\, dx\, d\eta =$$
$$= (\psi \mid \eta)(\eta \mid \psi)\, d\eta, \qquad (4.9)$$

или же

$$F(d\eta) = \mid \eta)(\eta \mid d\eta,$$

что согласуется с полученным формальным спектральным разложением оператора P. Отметим, что в обозначениях Дирака преобразование Фурье соответствует переходу от «базиса» $\{\mid \xi)\}$ к «базису» $\{\mid \eta)\}$:

$$(\eta \mid \psi) = \int (\eta \mid \xi)(\xi \mid \psi)\, d\xi,$$

поскольку

$$(\eta \mid \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\eta x} \delta(\xi - x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\eta\xi}.$$

Все сказанное в § 3 о функциях эрмитовых операторов переносится с очевидными изменениями на функции самосопряженных операторов. Рассмотрим, в частности, преобразование Фурье спектральной меры оператора X:

$$e^{itX} = \int e^{it\lambda} E(d\lambda). \qquad (4.10)$$

Непосредственно проверяется, что семейство $V_t = e^{itX}$, $-\infty < t < \infty$, является *группой унитарных операторов*, т. е.

$$V_0 = \mathrm{I}, \quad V_{t+s} = V_t V_s, \quad V_t^* = V_{-t}. \qquad (4.11)$$

Можно также показать, что семейство операторов $\{V_t\}$

сильно непрерывно по t, т. е. что для любого ψ формула

$$\psi_t = e^{itX}\psi, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4.12}$$

определяет непрерывную кривую в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Более того, *кривая* (4.12) *дифференцируема в* $\mathscr{H}$ *тогда и только тогда, когда* $\psi \in \mathscr{D}(X)$; *при этом* $\psi_t \in \mathscr{D}(X)$ *и*

$$\frac{d\psi_t}{dt} = iX\psi_t. \tag{4.13}$$

Верно и обратное утверждение, известное как теорема Стоуна.

Теорема 4.2. *Всякая сильно (слабо) непрерывная группа унитарных операторов имеет вид* $V_t = e^{itX}$, *где* X — *однозначно определенный самосопряженный оператор.*

Оператор X называется *инфинитезимальным оператором* группы $\{V_t\}$.

Найдем группу $\{e^{itP}\}$ в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$. Используя (4.10), (4.9), получаем

$$(\psi \mid e^{itP}\psi) = \frac{1}{2\pi} \int\int\int \overline{\psi(x)}\, \psi(x')\, e^{it\eta} e^{i\eta(x-x')}\, d\eta\, dx'\, dx = (\psi \mid \psi_t),$$

где $\psi_t(x) = \psi(x+t)$. Таким образом,

$$e^{itP}\psi(x) = \psi(x+t), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Перейдем теперь к рассмотрению симметричных, но не обязательно самосопряженных операторов. Имеет место следующее обобщение теоремы 4.1.

Теорема 4.3. *Для плотно определенного симметричного оператора* X *существует, вообще говоря, не единственное разложение единицы (спектральная мера)* $M(d\lambda)$ *такое, что*

$$\begin{gathered} \mathscr{D}(X) \subset \left\{\psi\colon \int \lambda^2 (\psi \mid M(d\lambda)\,\psi) < \infty\right\}; \\ (\psi \mid X\psi) = \int \lambda\, (\psi \mid M(d\lambda)\,\psi), \quad \psi \in \mathscr{D}(X); \\ \|X\psi\|^2 = \int \lambda^2 (\psi \mid M(d\lambda)\,\psi), \quad \psi \in \mathscr{D}(X). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Если же оператор X *максимален и включение в первом соотношении заменяется на равенство, то* $M(d\lambda)$ *определяется по* X *однозначно.*

В качестве примера рассмотрим оператор P_+ в пространстве $\mathscr{L}^2(0, \infty)$. Мы покажем, что его спектральная мера имеет вид

$$M(d\eta) = |\eta_+)(\eta_+|\, d\eta, \tag{4.15}$$

где $|\eta_+)$ — формальные собственные векторы оператора дифференцирования $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\eta x}$; $-\infty < \eta < \infty$, которые отличаются от $|\eta)$ только тем, что аргумент x меняется от 0 до ∞. Система $\{|\eta_+)\}$, очевидно, удовлетворяет формальному условию полноты

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\eta_+)(\eta_+|\, d\eta = \mathrm{I}, \tag{4.16}$$

но не ортогональна, так как

$$(\eta'_+ \,|\, \eta_+) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\eta-\eta')x}\, dx = \frac{1}{2}\delta(\eta-\eta') + \frac{1}{2\pi i}(\eta-\eta')^{-1}. \tag{4.17}$$

Поэтому разложение единицы (4.15) не является ортогональным. Подобные системы называются в физике «переполненными».

Разложение единицы (4.15) можно аккуратно определить с помощью формулы типа (4.8):

$$(\psi \,|\, M(B)\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_B \overline{\psi(x)}\, \psi(x')\, e^{i\eta(x-x')}\, dx'\, dx\, d\eta. \tag{4.18}$$

Продолжая функции, заданные на $(0, \infty)$, нулем на отрицательную полуось, мы получаем естественное вложение $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$. При этом $M(d\eta)$ является ограничением на $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ спектральной меры $F(d\eta)$ оператора P, т. е.

$$(\psi \,|\, M(d\eta)\psi) = (\tilde{\psi} \,|\, F(d\eta)\tilde{\psi}),$$

где $\tilde{\psi}$ — указанное продолжение функции ψ. Если $\psi \in \mathscr{D}(P_+)$, то $\tilde{\psi} \in \mathscr{D}(P)$, причем $\widetilde{P_+\psi} = P\tilde{\psi}$. Поэтому

$$(\psi \,|\, P_+\psi) = (\tilde{\psi} \,|\, P\tilde{\psi}) = \int \eta\, (\tilde{\psi} \,|\, F(d\eta)\tilde{\psi}) = \int \eta\, (\psi \,|\, M(d\eta)\psi),$$

$$\| P_+\psi \|^2 = \| P\tilde{\psi} \|^2 = \int \eta^2 (\tilde{\psi} \,|\, F(d\eta)\tilde{\psi}) = \int \eta^2 (\psi \,|\, M(d\eta)\psi),$$

откуда видно, что $M(d\eta)$ удовлетворяет соотношениям (4.14), характеризующим спектральную меру оператора P_+.

§ 5. О реализации измерения

В предыдущем параграфе мы видели, что неортогональное разложение единицы $\{M(B)\}$ в $\mathscr{H}$ может возникать как ограничение ортогонального разложения $\{E(B)\}$ в некотором более широком пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$:

$$M(B) = \tilde{E}\, E(B)\, \tilde{E}; \qquad B \in \mathscr{A}(U), \tag{5.1}$$

где $\tilde{E}$ — проектор из $\tilde{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H}$. Легко понять, что, проецируя таким образом любое, в частности, ортогональное разложение единицы, мы всегда получим некоторое разложение единицы в $\mathscr{H}$. Как показал Наймарк, верно и обратное утверждение.

Теорема 5.1. *Всякое разложение единицы* $\{M(B)\}$ *в* $\mathscr{H}$ *может быть продолжено до ортогонального разложения единицы* $\{E(B)\}$ *в более широком пространстве* $\tilde{\mathscr{H}}$, *так что будет выполняться* (5.1).

Основываясь на этом результате, мы покажем, что произвольное квантовое измерение $\boldsymbol{M}$ в определенном смысле сводится к простому измерению $\boldsymbol{E}$ над некоторой квантовой системой, включающей кроме исходного объекта некоторые дополнительные независимые «степени свободы».

Для этого нам понадобится понятие тензорного произведения гильбертовых пространств, служащее для математического описания системы квантовых объектов.

Пусть $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot|\cdot)_1$ и $(\cdot|\cdot)_2$ соответственно. Рассмотрим множество $\mathscr{L}$ формальных конечных линейных комбинаций элементов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$. Введем в линейном пространстве $\mathscr{L}$ положительно определенную эрмитову форму $(\cdot|\cdot)$, полагая

$$(\varphi_1 \times \varphi_2 \,|\, \psi_1 \times \psi_2) = (\varphi_1 \,|\, \psi_1)_1 \cdot (\varphi_2 \,|\, \psi_2)_2 \tag{5.2}$$

и продолжая ее на $\mathscr{L}$ по линейности. Пусть $\mathscr{N}$ — нулевое подпространство этой формы; тогда фактор-пространство $\mathscr{L}/\mathscr{N}$ является предгильбертовым пространством со скалярным произведением, определяемым формой (5.2). Пополнение $\mathscr{L}/\mathscr{N}$ и называется *тензорным произведением* гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ и обозначается $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Вектор пространства $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, соответствующий классу эквивалентности вектора $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathscr{L}$, обозначается $\psi_1 \otimes \psi_2$. Из (5.2) следует, что

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \mid \psi_1 \otimes \psi_2) = (\varphi_1 \mid \psi_1)_1 \cdot (\varphi_2 \mid \psi_2)_2 \tag{5.3}$$

Хорошую иллюстрацию этой абстрактной конструкции дает следующий пример. Пусть $\mathscr{H}_1 = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций $\psi_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $\mathscr{H}_2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций $\psi_2(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\mathscr{L}/\mathscr{N}$ состоит из конечных сумм вида

$$\psi(x, y) = \sum_j \psi_1^j(x)\, \psi_2^j(y),$$

причем

$$(\varphi \mid \psi) = \int\int \overline{\varphi(x, y)}\, \psi(x, y)\, d^n x\, d^m y,$$

а $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ состоит из всех квадратично интегрируемых функций $\varphi(x, y)$; $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, с тем же скалярным произведением. Вектор $\psi_1 \otimes \psi_2$ соответствует функции $\psi_1(x)\, \psi_2(y)$.

Вернемся к общему случаю. Если $\{e_1^j\}$ — базис в $\mathscr{H}_1$, а $\{e_2^k\}$ — базис в $\mathscr{H}_2$, то система $\{e_1^j \otimes e_2^k\}$ образует базис в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ (имеются в виду ортонормированные базисы). Рассмотрим элемент $\varphi = \sum_j \varphi_1^j \otimes \varphi_2^j \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Разлагая φ_2^j по базису $\{e_2^k\}$ и объединяя множители при каждом векторе e_2^k, получим $\varphi = \sum_k \psi_1^k \otimes e_2^k$, где ψ_1^k — некоторые однозначно определяемые векторы пространства $\mathscr{H}_1$. Заметим, что подпространства $\mathscr{H}_1 \otimes e_2^k \subset \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, состоящие из векторов вида $\psi_1 \otimes e_2^k$; $\psi_1 \in \mathscr{H}_1$, взаимно-ортогональны. Таким образом, фиксируя базис в $\mathscr{H}_2$, мы получаем разложение $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ в ортогональную сумму подпространств, изоморфных $\mathscr{H}_1$:

$$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = \sum_k \oplus \left[\mathscr{H}_1 \otimes e_2^k\right]. \tag{5.4}$$

Тензорное произведение операторов $X_1 \otimes X_2$, где X_j — ограниченный оператор в $\mathscr{H}_j$, определяется формулой

$$(X_1 \otimes X_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) = X_1\psi_1 \otimes X_2\psi_2$$

на элементах вида $\psi_1 \otimes \psi_2$ и однозначно продолжается на $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ по линейности и непрерывности.

Рассмотрим фиксированное разложение (5.4). Тогда всякий ограниченный оператор X в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ задается блочной матрицей $[X_{jk}]$, элементами которой являются операторы в $\mathscr{H}_1$, по формуле

$$X\left(\sum_k \psi_1^k \otimes e_2^k\right) = \sum_j \left(\sum_k X_{jk}\psi_1^k\right) \otimes e_2^j.$$

В частности, оператору $X_1 \otimes X_2$ соответствует матрица $[X_1 (e_2^j \mid X_2 e_2^k)_2]$.

Предложение 5.1. *Для любого измерения* $\boldsymbol{M} = \{M(B)\}$ *в* $\mathscr{H}$ *найдутся гильбертово пространство* $\mathscr{H}_0$, *чистое состояние* S_0 *в* $\mathscr{H}_0$ *и простое измерение* $\boldsymbol{E} = \{E(B)\}$ *в* $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$ *такие, что*

$$\mu^{\boldsymbol{E}}_{S\otimes S_0}(B) = \mu^{\boldsymbol{M}}_S(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U), \tag{5.5}$$

для любого состояния S *в* $\mathscr{H}$.

Здесь $\mu^{\boldsymbol{E}}_{S\otimes S_0}$ — распределение вероятностей измерения $\boldsymbol{E}$ относительно состояния $S \otimes S_0$, а $\mu^{\boldsymbol{M}}_S$ — распределение вероятностей измерения $\boldsymbol{M}$ относительно состояния S.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{E}$ — ортогональное разложение единицы в $\tilde{\mathscr{H}}$, существование которого утверждается в теореме 5.1. Расширяя дополнительно, если необходимо, пространство $\tilde{\mathscr{H}}$ и продолжая $\boldsymbol{E}$, мы можем считать, что $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \oplus \ldots$, причем так, что $\mathscr{H} = \mathscr{H} \oplus [0] \oplus [0] \oplus \ldots$ Тогда $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, где $\mathscr{H}_0 = l^2$ — пространство квадратично-суммируемых последовательностей $\{c_j;\ j = 1, 2, \ldots\}$. Пусть $S_0 = S_\psi$, где $\psi = \{1, 0, 0, \ldots\}$; тогда оператор $S \otimes S_0$ имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} S & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

и непосредственно очевидно, что для любого ограниченного оператора E в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$ выполняется $\operatorname{Tr}(S \otimes S_\psi) E = \operatorname{Tr} S\tilde{E}E\tilde{E}$. Учитывая (5.1), получаем (5.5).

Это предложение утверждает, что измерения $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{M}$ статистически эквивалентны в том смысле, что имеют одинаковые распределения вероятностей результатов для любого состояния S.

Мы будем называть тройку $(\mathscr{H}_0, S, \boldsymbol{E})$ *реализацией* измерения $\boldsymbol{M}$. Реализация соответствует простому измерению над системой $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, состоящей из исходной системы $\mathscr{H}$ и вспомогательных независимых «степеней свободы» $\mathscr{H}_0$ в фиксированном состоянии S_0. В классической статистике это соответствует рандомизированной процедуре, в которой вспомогательная система может рассматриваться как «рулетка», выдающая случайные числа в соответствии с законом распределения S_0. Роль $\mathscr{H}_0$ в квантовом случае будет более ясной в дальнейшем, когда мы рассмотрим некоторые примеры (см. § III.7).

§ 6. Соотношения неопределенностей и совместная измеримость

В квантовой теории наибольший интерес представляют измерения с вещественными значениями. Пусть $\boldsymbol{M}$: $S \to \mu_S(dx)$ такое измерение; тогда $\mu_S(dx)$ есть распределение вероятностей на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Важнейшими характеристиками такого распределения являются *среднее* и *дисперсия*

$$\mathsf{E}_S\{\boldsymbol{M}\} = \int x\mu_S(dx), \quad \mathsf{D}_S\{\boldsymbol{M}\} = \int (x - E_S\{\boldsymbol{M}\})^2 \mu_S(dx). \tag{6.1}$$

Эти величины определены и конечны, во всяком случае, если μ_S имеет конечный второй момент. В этом случае мы скажем, что *измерение* $\boldsymbol{M}$ *имеет конечный второй момент относительно состояния* S.

Наблюдаемой в квантовой механике называется самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$; мы, однако, будем применять этот термин к произвольному плотно определенному симметричному оператору. Согласно спектральным теоремам, соотношение $X = \int xM(dx)$ устанавливает соответствие между наблюдаемыми и измерениями. *Средним значением* $\mathsf{E}_S(X)$ *и дисперсией* $\mathsf{D}_S(X)$ *наблюдаемой* X мы будем называть величины (6.1), вычисленные по соответствующему измерению $M(dx)$. Из соотношений (4.5), (4.6), (4.14) для чистого состояния S_ψ получаем *)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{S_\psi}(X) &= (\psi \mid X\psi), \\ \mathsf{D}_{S_\psi}(X) &= \|(X - E_S(X))\,\psi\|^2 = \|X\psi\|^2 - (E_S(X))^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

при условии, что $\psi \in \mathscr{D}(X)$.

Если X — ограниченная наблюдаемая, то соответствующее простое измерение имеет конечный второй момент относительно любого состояния S, причем

$$\mathsf{E}_S(X) = \operatorname{Tr} SX, \tag{6.3}$$

$$\mathsf{D}_S(X) = \operatorname{Tr} S\,(X - E_S(X))^2. \tag{6.4}$$

Вообще, для ограниченной функции f

$$\int f(x)\,\mu_S(dx) = \operatorname{Tr} Sf(X). \tag{6.5}$$

Эти формулы будут установлены в следующем параграфе.

Рассмотрим пару наблюдаемых X_1 и X_2 и состояние S_ψ такое, что $\psi \in \mathscr{D}(X_1) \cap \mathscr{D}(X_2)$. Для любого вещественного c

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|(X_1 - \mathsf{E}_S(X_1))\,\psi - ic\,(X_2 - \mathsf{E}_S(X_2))\,\psi\|^2 = \\ = \mathsf{D}_{S_\psi}(X_1) + 2c\,\operatorname{Im}(X_1\psi \mid X_2\psi) + c^2\mathsf{D}_{S_\psi}(X_2), \end{aligned} \tag{6.6}$$

откуда

$$\mathsf{D}_{S_\psi}(X_1) \cdot \mathsf{D}_{S_\psi}(X_2) \geqslant |\operatorname{Im}(X_1\psi \mid X_2\psi)|^2, \tag{6.7}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда для некоторого c

$$[(X_1 - \mathsf{E}_S(X_1)) + c\,(X_2 - \mathsf{E}_S(X_2))]\,\psi = 0. \tag{6.8}$$

В предположении законности преобразований неравенство (6.7) можно переписать в виде

$$\mathsf{D}_S(X_1) \cdot \mathsf{D}_S(X_2) \geqslant \frac{1}{4}\left|\mathsf{E}_S(i[X_1, X_2])\right|^2, \tag{6.9}$$

где

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 \tag{6.10}$$

— *коммутатор* операторов X_1, X_2. Это неравенство называется **соотношением неопределенностей**. В § 9

---

*) Мы условимся в записи операторов, кратных единичному, опускать иногда символ I, так что $X - \mathsf{E}_S(X) = X - \mathsf{E}_S(X) \cdot I$ и т. п.

мы обобщим его на произвольные состояния и измерения с конечным вторым моментом.

Остановимся на интерпретации соотношения (6.9). Иногда можно встретить утверждение, что соотношение неопределенностей устанавливает ограничение на точность «совместного измерения» наблюдаемых X_1, X_2. Для того чтобы разобраться в справедливости подобной интерпретации, необходимо придать точный смысл понятию «совместной измеримости».

В реальных экспериментах довольно часто приходится производить совместное измерение нескольких величин. В таких случаях результатом измерения является набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$, могущий принимать значения в некоторой области Λ n-мерного пространства. Таким образом, математически совместные измерения должны описываться разложениями единицы $M(dx_1 \ldots dx_n)$ на $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

Обычно говорят об «одновременном» измерении нескольких величин. На самом деле моменты получения данных $x_1, \ldots, x_n$ не играют здесь существенной роли. Измерение может быть одновременным или последовательным, это, конечно, отразится на статистике измерения, но в любом случае она будет описываться некоторым аффинным отображением $S \to \mu_S(dx_1 \ldots dx_n)$. Важно лишь то, что все данные получены в одном эксперименте, отнесенном к определенному исходному состоянию S.

Рассмотрим вещественные измерения $M_1(dx_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}_1$; $M_2(dx_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}_2$. Мы скажем, что эти измерения *совместимы*, если существует измерение $M(dx_1\, dx_2)$ на $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 = \mathbb{R}^2$ такое, что

$$M_1(dx_1) = \int\limits_{\mathbb{R}_2} M(dx_1\, dx_2), \quad M_2(dx_2) = \int\limits_{\mathbb{R}_1} M(dx_1\, dx_2),$$

точнее, $M_1(B_1) = M(B_1 \times \mathbb{R}_2)$, $B_1 \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_1)$, и аналогично для M_2. По аналогии с теорией вероятностей можно сказать, что M_1, M_2 являются *маргинальными измерениями* для измерения M.

Рассмотрим теперь вопрос о совместной измеримости наблюдаемых, определяемых самосопряженными операторами

$$X_j = \int x_j E_j(dx_j); \qquad j = 1,\ 2.$$

Назовем их *совместимыми* (или *совместно измеримыми*), если совместимы измерения, описываемые их спектральными мерами $E_j(dx_j)$.

Предложение 6.1. *Наблюдаемые X_1, X_2 совместно измеримы тогда и только тогда, когда их спектральные меры $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ коммутируют, т. е. $[E_1(B_1), E_2(B_2)]=0$ для любых $B_j \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_j)$, $j=1, 2$.*

Доказательство. Для доказательства достаточности определим ортогональное разложение единицы на $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$, полагая

$$E(B_1 \times B_2) = E_1(B_1) \cdot E_2(B_2)$$

и продолжая $\boldsymbol{E}$ на $\mathscr{A}(\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2)$ стандартным образом. Тогда $\boldsymbol{E}_j$ являются маргинальными измерениями для $\boldsymbol{E}$.

Докажем необходимость. Пусть существует измерение $\boldsymbol{M}$, для которого $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ являются маргинальными измерениями. Нам надо доказать, что для любых B_1, $B_2 \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$ проекторы $E_1(B_1)$ и $E_2(B_2)$ коммутируют. Пусть $\bar{B}_j$ — дополнение множества B_j; $j=1, 2$; тогда мы можем изобразить следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccc}
E_1(B_1) & = & M(B_1 \times B_2) & + & M(B_1 \times \bar{B}_2) \\
+ & & + & & + \\
E_1(\bar{B}_1) & = & M(\bar{B}_1 \times B_2) & + & M(\bar{B}_1 \times \bar{B}_2) \\
\| & & \| & & \| \\
I & = & E_2(B_2) & + & E_2(\bar{B}_2),
\end{array} \tag{6.11}$$

где $E_1(B_1)E_1(\bar{B}_1) = E_2(B_2)E_2(\bar{B}_2) = 0$. Переписывая это соотношение в виде

$$\begin{aligned}
&[M(B_1 \times B_2) + M(B_1 \times \bar{B}_2)] \cdot [M(\bar{B}_1 \times B_2) + M(\bar{B}_1 \times \bar{B}_2)] = \\
&= [M(B_1 \times B_2) + M(\bar{B}_1 \times B_2)] \cdot [M(B_1 \times \bar{B}_2) + M(\bar{B}_1 \times \bar{B}_2)] = 0
\end{aligned}$$

и применяя несколько раз аналог леммы I.6.3 для гильбертова пространства, получаем, что произведение любых двух из операторов $M(B_1 \times B_2)$, $M(B_1 \times \bar{B}_2)$, $M(\bar{B}_1 \times B_2)$, $M(\bar{B}_2 \times \bar{B}_2)$ равно нулю. Отсюда $E_1(B_1)E_2(B_2) = M(B_1 \times B_2)^2 = E_2(B_2)E_1(B_1)$, и предложение доказано.

Аналогичный результат справедлив для любого конечного набора наблюдаемых

$$X_j = \int \lambda_j E(d\lambda_j); \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Если X_j совместно измеримы, то они могут быть представлены через измерение $E(dx_1 \dots dx_n) = \prod\limits_j E_j(dx_j)$ по формуле

$$X_j = \int \dots \int \lambda_j E(d\lambda_1 \dots d\lambda_n), \qquad j = 1, \dots, n. \tag{6.12}$$

Обратно, для всякого простого измерения формула (6.12) определяет набор совместно измеримых наблюдаемых.

Можно показать, что ограниченные наблюдаемые совместимы тогда и только тогда, когда соответствующие операторы *коммутируют*, т. е. $[X_j, X_k] = 0$. Для неограниченных операторов коммутатор может быть не определен; говорят, что они коммутируют, если коммутируют их спектральные меры. Это равносильно тому, что коммутируют порождаемые ими унитарные группы, т. е. $[e^{itX_j}, e^{isX_k}] \equiv 0$.

Формула (6.12) является обобщением спектрального разложения на коммутирующие семейства самосопряженных операторов. Основываясь на ней, можно определить функцию f от коммутирующих операторов как

$$f(X_1, \dots, X_n) = \int \dots \int f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) E(d\lambda_1 \dots d\lambda_n).$$

Возвращаясь к соотношению неопределенностей, заметим, что если правая часть отлична от нуля, то X_1 и X_2 не коммутируют и, следовательно, вообще совместно не измеримы. Поэтому нельзя говорить, что соотношения (6.9) устанавливают границы для точности совместного измерения X_1 и X_2.

Для того чтобы дать правильную интерпретацию, рассмотрим два набора, состоящие из большого числа экземпляров одного и того же объекта, приготовленного в одном и том же состоянии S. Тогда, если в первом наборе измеряется наблюдаемая X_1, а во втором — наблюдаемая X_2, то произведение дисперсий таких, независимо друг от друга произведенных измерений будет удовлетворять соотношению (6.9). Или иначе, предположим, что из самого описания процедуры приготовления известна одна из дисперсий, скажем, $\mathsf{D}_S(X_1)$ (например, однородный пучок частиц пропускается через отверстие определенного размера). Тогда наблюденное значение $\mathsf{D}_S(X_2)$ будет удовлетворять соотношению (6.9). Обе эти интерпретации весьма близки друг к другу, так как определение величины $\mathsf{D}_S(X_1)$ по первому набору можно рассматривать как предварительное определение характеристики приготовленного состояния.

Тем не менее, как мы увидим, соотношение неопределенностей имеет отношение и к точности совместного измерения, хотя эта связь не является столь прямолинейной, как это часто предполагается.

§ 7. Ядерные операторы и операторы Гильберта — Шмидта *)

Рассмотрим ограниченные операторы, диагональные в данном фиксированном базисе $\{e_j\}$:

$$X = \sum_j x_j \,|\, e_j)\,(e_j \,|, \tag{7.1}$$

где ряд сходится сильно. Любому свойству такого оператора X отвечает некоторое свойство последовательности $\{x_j\}$ его собственных значений.

Норма оператора X равна

$$\|X\| = \sup_j |x_j|; \tag{7.2}$$

эрмитовость X соответствует вещественности, а положительность — неотрицательности значений x_j. Любому классическому пространству последовательностей соответствует некоторый класс диагональных операторов. Пространство всех диагональных операторов с операторной нормой изоморфно пространству c ограниченных последовательностей с нормой (7.2). При этом операторам конечного ранга соответствуют последовательности с конечным числом ненулевых значений x_j. Заметим, что пополнение этого множества по норме (7.2) дает не все c, а подпространство c_0 последовательностей $\{x_j\}$, стремящихся к нулю. Поэтому пополнение по операторной норме множества диагональных операторов конечного ранга дает не все ограниченные операторы вида (7.1), а лишь операторы, у которых последовательность собственных значений стремится к нулю.

*) Материал, излагаемый в §§ 7—10 будет существенно использован только в гл. V, VI.

Другими важными пространствами последовательностей являются пространства l^1 и l^2, которым отвечают пространства диагональных операторов с нормами соответственно

$$\| X \|_1 = \sum_j | x_j | = \operatorname{Tr} | X |,$$

где $| X | = \sqrt{X^* X} = \sum_j | x_j | \, | e_j)(e_j |$, и

$$\| X \|_2 = \sqrt{\sum_j | x_j |^2} = \sqrt{\operatorname{Tr} X^* X}.$$

Мы собираемся определить «некоммутативные» аналоги этих пространств, не связанные с требованием диагональности, пополняя по соответствующим нормам пространство операторов конечного ранга.

Обозначим это пространство $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$; пространство всех ограниченных операторов будет обозначаться $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Индекс h внизу будет обозначать соответствующие вещественные пространства эрмитовых операторов. Пополнением $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по операторной норме $\| \cdot \|$ является пространство *вполне непрерывных* операторов. Мы не будем обсуждать здесь свойства этого важного класса и отметим лишь, что для эрмитовых вполне непрерывных операторов справедлив аналог конечномерной спектральной теоремы: всякий такой оператор допускает спектральное разложение вида (7.1), где $\{e_j\}$ — базис из его собственных векторов, а $\{x_j\}$ — собственные значения (стремящиеся к нулю).

Перейдем к аналогу пространства l^1. Если X — эрмитов оператор, то оператор $| X |$ определяется соотношением (3.9); для произвольного ограниченного X положим

$$| X | = \sqrt{X^* X}.$$

Так как $| X |^2 = X^* X$, то для всех $\psi \in \mathscr{H}$ выполняется

$$\| \, | X | \psi \| = \| X \psi \|. \qquad (7.3)$$

Заметим, что если $T \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$, то $| T | \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$. Положим

$$\| T \|_1 = \operatorname{Tr} | T |. \qquad (7.4)$$

Докажем, что для любых $T, X \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$

$$| \operatorname{Tr} T X | \leqslant \| T \|_1 \cdot \| X \|. \qquad (7.5)$$

Поскольку $|T|$ — эрмитов оператор конечного ранга, то для него существует базис из собственных векторов $\{e_j\}$. Из (7.3) получаем $\|Te_j\| = \||T|e_j\| = (e_j||T|e_j)$, так что

$$|\operatorname{Tr} TX| = |\sum_j (X^*e_j|Te_j)| \leqslant \|X^*\| \cdot \sum_j \|Te_j\| = \|X\| \cdot \|T\|_1.$$

Полагая в (7.5) $X = E$, где E — проектор на подпространство, содержащее все векторы φ_j, ψ_j из представления $T = \sum_j |\varphi_j)(\psi_j|$, имеем $TX = T$, так что

$$|\operatorname{Tr} T| \leqslant \|T\|_1.$$

Это неравенство показывает, что естественной областью определения следа должно быть пополнение пространства $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по норме $\|\cdot\|_1$. Сформулируем конечный результат.

Теорема 7.1. *Соотношение* (7.4) *определяет норму на* $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$; *пополнение* $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ *по этой норме является банаховым пространством* $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$, *которое состоит из ограниченных операторов* T *таких, что* $\operatorname{Tr}|T| < \infty$. *Однозначное линейное непрерывное продолжение следа на* $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ *дается соотношением*

$$\operatorname{Tr} T = \sum_j (e_j|Te_j),$$

где ряд сходится к одному и тому же значению для любого ортонормированного базиса $\{e_j\}$.

Операторы класса $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ называются операторами с конечным следом или *ядерными*. Всякий ядерный оператор является вполне непрерывным. В самом деле, для $T \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$

$$\|T\| \leqslant \|T\|_1,$$

так как, согласно (7.3) и (1.8), $\|T\| = \||T|\| = \sup\limits_{\psi \neq 0} \frac{(\psi||T|\psi)}{(\psi|\psi)} \leqslant \operatorname{Tr}|T|$. Поэтому пополнение $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по норме $\|\cdot\|_1$ содержится в пополнении $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по норме $\|\cdot\|$.

Отсюда следует, что всякий эрмитов ядерный оператор имеет спектральное разложение

$$T = \sum_j t_j |e_j)(e_j|, \tag{7.6}$$

где ряд из собственных значений сходится абсолютно, так как $\sum_j |t_j| = \operatorname{Tr}|T|$. Ряд (7.6) сходится по норме $\|\cdot\|_1$; при этом

$$\operatorname{Tr} T = \sum_j t_j.$$

Полагая

$$T_+ = \sum_{t_j > 0} t_j |e_j)(e_j|, \quad T_- = {\sum_{0 > t_j}}' t_j |e_j)(e_j|,$$

имеем

$$T = T_+ - T_-, \quad |T| = T_+ + T_-, \tag{7.7}$$

так что

$$\|T\|_1 = \operatorname{Tr} T_+ + \operatorname{Tr} T_- = \|T_+\|_1 + \|T_-\|_1.$$

Всякий положительный оператор с конечным следом является ядерным и, следовательно, допускает спектральное разложение (7.6) с $t_j \geqslant 0$. В частности, всякий оператор плотности имеет спектральное разложение (2.2).

Сопряженным к пространству последовательностей l^1 является пространство всех ограниченных последовательностей c. Основываясь на неравенстве (7.5), можно установить некоммутативный аналог этого факта.

Теорема 7.2. *Если T — ядерный, X — ограниченный операторы, то TX и XT — ядерные операторы и имеют место соотношения* (1.18), (7.5). *Банахово пространство $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ является сопряженным к банахову пространству $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$, так что всякий непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ имеет вид $T \to \operatorname{Tr} TX$, где $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$.*

Для вещественных банаховых пространств эрмитовых операторов имеет место аналогичное утверждение: $(\mathfrak{T}_h^1(\mathscr{H}))^* = \mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$. Рассмотрим выражение $\operatorname{Tr} TX$, задающее двойственность пространств $\mathfrak{T}_h^1(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$. Оно обладает свойством, аналогичным тому, которое выражается леммой I.6.2: $\operatorname{Tr} TX \geqslant 0$ *для всех* $T \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда* $X \geqslant 0$. Отсюда, в частности, следует, что если $T \geqslant 0$ и $Y \geqslant X$, то $\operatorname{Tr} TX \leqslant \operatorname{Tr} TY$.

Теперь мы можем доказать теорему 2.1. Пусть $S \to \mu_S$ — некоторое измерение. Рассмотрим вещественную линейную оболочку множества состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Всякая линейная комбинация

$$T = \sum_j t_j S_j$$

операторов плотности является, очевидно, эрмитовым ядерным оператором. Обратно, пусть $T \in \mathfrak{T}_h^1(\mathscr{H})$; тогда согласно (7.7)

$$T = t_+ S_+ - t_- S_-,$$

где $t_\pm = \operatorname{Tr} T_\pm$, $S_\pm = (t_\pm)^{-1} T_\pm$ — операторы плотности. Таким образом, линейной оболочкой множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является пространство $\mathfrak{T}_h^1(\mathscr{H})$ эрмитовых ядерных операторов.

Фиксируем множество B и рассмотрим аффинный функционал $S \to \mu_S(B)$ на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Продолжим его до линейного функционала на $\mathfrak{T}_h^1(\mathscr{H})$, полагая

$$\mu(T) = \sum_j t_j \mu_{S_j}(B),$$

если $T = \sum_j t_j S_j$. Корректность такого продолжения обосновывается как и в конечномерном случае (см. лемму I.6.1). Этот функционал непрерывен, так как

$$|\mu(T)| \leqslant \mu(T_+) + \mu(T_-) = t_+ \mu(S_+) + t_- \mu(S_-) \leqslant$$
$$\leqslant t_+ + t_- = \operatorname{Tr}|T| = \|T\|_1.$$

Поэтому, согласно второй части теоремы 7.2, существует ограниченный оператор $M(B)$ такой, что $\mu(T) = \operatorname{Tr} TM(B)$, в частности, $\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B)$. Из того, что $0 \leqslant \mu_S(B) \leqslant \leqslant 1$, следует $0 \leqslant M(B) \leqslant I$, а из $\mu_S(\varnothing) = 0$, $\mu_S(U) = 1$ следует $M(\varnothing) = 0$, $M(U) = I$. Доказательство этих фактов совершенно аналогично конечномерному случаю и опирается на аналог леммы I.6.2. Для доказательства свойства 3) разложения единицы заметим, что для любого S вероятность $\mu_S(B)$ σ-аддитивна по аргументу B. Полагая $S = S_\psi$, имеем

$$(\psi | M(B) \psi) = \sum_j (\psi | M(B_j) \psi) \tag{7.8}$$

для любого разбиения $\{B_j\}$ множества B, а это и означает выполнение свойства 3).

Обратно, пусть $\{M(B)\}$ — разложение единицы в $\mathscr{H}$. Тогда формула (2.3) определяет семейство аффинных функционалов на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Остается проверить лишь σ-аддитивность функции $\mu_S(\cdot)$, т. е. доказать, что из (7.8) следует

$$\operatorname{Tr} SM(B) = \sum_j \operatorname{Tr} SM(B_j) \tag{7.9}$$

для любого оператора плотности S. Рассмотрим спектральное разложение (2.2) оператора S. Тогда

$$\operatorname{Tr} SM(B) = \sum_k s_k (\psi_k \mid M(B)\psi_k). \qquad (7.10)$$

С другой стороны, в силу (7.8) $(\psi_k \mid M(B)\psi_k) = \sum_j (\psi_k \mid M(B_j)\psi_k)$. Умножая это равенство на s_k, суммируя по k и меняя порядок суммирования по j и k, что возможно в силу неотрицательности слагаемых, получаем (7.9).

Мы можем доказать также формулу (6.5) для среднего значения. Используя (7.10), получаем

$$\int f(x)\,\mu_S(dx) = \sum_j s_j \int f(x)(\psi_j \mid E(dx)\psi_j) = \sum_j s_j (\psi_j \mid f(X)\psi_j) = \operatorname{Tr} Sf(X),$$

причем перестановка суммирования и интегрирования законна в силу абсолютной сходимости ряда и ограниченности функции f.

Рассмотрим теперь некоммутативный аналог пространства l^2. На $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ введем скалярное произведение

$$(T_1, T_2) = \operatorname{Tr} T_1^* T_2, \qquad (7.11)$$

которому соответствует норма

$$\|T\|_2 = \sqrt{(T, T)}. \qquad (7.12)$$

Теорема 7.3. *Пополнение предгильбертова пространства* $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ *со скалярным произведением* (7.11) *по норме* (7.12) *является гильбертовым пространством* $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ *операторов Гильберта—Шмидта, состоящим из ограниченных операторов* T *таких, что* $\operatorname{Tr} T^*T = \sum_j \|Te_j\|^2 < \infty$ *для любого ортонормированного базиса* $\{e_j\}$. *Для любых* $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ *произведение* $T_1 T_2$ *является ядерным оператором и скалярное произведение в* $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ *определяется формулой* (7.11). *При этом*

$$\|T_1 T_2\|_1 \leqslant \|T_1\|_2 \cdot \|T_2\|_2. \qquad (7.13)$$

Произведение ограниченного оператора X на оператор Гильберта — Шмидта T (в любом порядке) является оператором Гильберта — Шмидта, причем

$$\|TX\|_2 = \|XT\|_2 \leqslant \|X\| \cdot \|T\|_2. \tag{7.14}$$

Заметим, что

$$\|T\| \leqslant \|T\|_2,$$

так как

$$\|T\|^2 = \||T|\|^2 = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\||T|\psi\|^2}{\|\psi\|^2} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|T\psi\|^2}{\|\psi\|^2} \leqslant \operatorname{Tr} T^*T.$$

Поэтому всякий оператор Гильберта — Шмидта является вполне непрерывным. В частности, всякий эрмитов оператор Гильберта — Шмидта имеет спектральное разложение (7.6), где

$$\|T\|_2 = \sqrt{\sum_j |t_j|^2} < \infty.$$

Отметим также, что

$$\|T\|_2 \leqslant \|T\|_1^2,$$

поскольку

$$\operatorname{Tr} T^*T = \operatorname{Tr} |T|^2 = \sum_j \tau_j^2 \leqslant \left(\sum_j \tau_j\right)^2 = (\operatorname{Tr} |T|)^2,$$

где τ_j — собственные значения оператора $|T|$. Поэтому всякий ядерный оператор является оператором Гильберта — Шмидта. Таким образом,

$$\mathfrak{F}(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{T}^1(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{T}^2(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

В заключение рассмотрим операторы Гильберта — Шмидта в пространстве $\mathscr{L}^2(a, b)$. Пусть, для простоты, T — эрмитов оператор; тогда имеет место спектральное разложение (7.6) с $\sum_j t_j^2 < \infty$. Собственные функции образуют ортонормированный базис в $\mathscr{L}^2(a, b)$. Рассмотрим ядро

$$T(x', x) = \sum_j t_j e_j(x') \overline{e_j(x)}.$$

В силу того, что $\sum_j t_j^2 < \infty$ и $\int |e_j(x)|^2 dx = 1$, этот ряд сходится в $\mathscr{L}^2((a, b) \times (a, b))$ и определяет интегрируемую в квадрате функцию двух переменных x, x', причем

$$\operatorname{Tr} T^2 = \sum_j t_j^2 = \iint |T(x, x')|^2 \, dx \, dx'.$$

Для любой $\psi \in \mathscr{L}^2(a, b)$

$$T\psi(x') = \int_a^b T(x', x)\,\psi(x)\,dx. \tag{7.15}$$

Если T — ядерный оператор, то $\sum_j |t_j| < \infty$ и поэтому функция $T(x, x) = \sum_j t_j |e_j(x)|^2$ является интегрируемой. При этом

$$\operatorname{Tr} T = \int_a^b T(x, x)\,dx. \tag{7.16}$$

В обозначениях Дирака ядро должно записываться символом

$$(x' | T | x) = \sum_j t_j (x' | e_j)(e_j | x).$$

Из соотношения полноты (3.12) формально следует непрерывный аналог соотношения (1.13):

$$T = \iint |x')(x' | T | x)(x| \, dx' \, dx,$$

откуда получается дираковская форма соотношения (7.15):

$$(x' | T\psi) = \int (x' | T | x)(x | \psi)\,dx.$$

Если T — оператор Гильберта — Шмидта, то, как мы видели, ядро $(x' | T | x)$ является квадратично-интегрируемой функцией и эти выкладки имеют непосредственное математическое истолкование.

§ 8. Пространства $\mathscr{L}^2$, ассоциированные с квантовым состоянием

Многие важные квантовые наблюдаемые представляются неограниченными операторами. Однако неограниченность является источником определенных технических трудностей, порой весьма серьезных. Если в теории вероятностей определение суммы случайных величин не представляет затруднений, то для некоммутирующих неограниченных операторов сумма может иметь лишь тривиальную область определения. То обстоятельство, что в соотношении неопределенностей (6.7) мы рассмотрели лишь чистые состояния, также объясняется желанием избежать трудностей, связанных с неограниченностью. Теперь мы собираемся отбросить подобные ограничения и разработать аппарат, который позволил бы достаточно свободно оперировать неограниченными наблюдаемыми, в частности определить их средние значения и дисперсии относительно состояния, задаваемого любым оператором плотности.

В теории вероятностей важную роль играет гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом. В этом параграфе вводится некоммутативный аналог этой конструкции для произвольного оператора плотности. Соответствующее гильбертово пространство «квадратично-суммируемых» наблюдаемых оказывается весьма удобным; в частности, сумма таких наблюдаемых всегда определена и является квадратично-суммируемой наблюдаемой.

Пусть S — произвольный оператор плотности:

$$S=\sum_j s_j\,|\psi_j)(\psi_j|,$$

X — ограниченная вещественная наблюдаемая. Второй момент X, согласно (6.5), равен

$$\operatorname{Tr} SX^2=\sum_j s_j\,(X\psi_j\,|\,X\psi_j).$$

Если рассматривать это выражение как квадратичную форму от $X\in\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$, то соответствующая билинейная симметричная форма, которую мы обозначим $\langle X,\ Y\rangle_S$, будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\sum_j s_j\,[(Y\psi_j\,|\,X\psi_j)+(X\psi_j\,|\,Y\psi_j)]=\frac{1}{2}\operatorname{Tr} S\,(YX+XY)=$$
$$=\operatorname{Re}\operatorname{Tr} SYX.$$

Вводя симметризованное произведение

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX), \tag{8.1}$$

можно записать

$$\langle Y,\ X\rangle_S=\operatorname{Tr} S\,(Y\circ X). \tag{8.2}$$

Условимся операторы $X, Y \in \mathfrak{B}_h(\mathscr{K})$ считать *эквивалентными*, если $\langle X-Y, X-Y\rangle_S = 0$. Очевидно, X и Y эквивалентны тогда и только тогда, когда $X\psi_j = Y\psi_j$ при $s_j \neq 0$, или $XS = YS$. Обозначим через $\mathscr{L}^2_h(S)$ пополнение пространства классов эквивалентности операторов из $\mathfrak{B}_h(\mathscr{K})$ относительно скалярного произведения (8.2). Тогда $\mathscr{L}^2_h(S)$ является вещественным гильбертовым пространством, причем $\mathfrak{B}_h(\mathscr{K})$ естественно вкладывается в $\mathscr{L}^2_h(S)$. Дадим описание элементов этого пространства в терминах неограниченных операторов в $\mathscr{K}$.

Симметричный оператор X назовем *квадратично-суммируемым относительно оператора плотности* $S = \sum_j s_j |\psi_j)(\psi_j|$, если $\psi_j \in \mathscr{D}(X)$ при $s_j \neq 0$ и $\sum_j s_j \|X\psi_j\|^2 < \infty$. Два таких оператора X, Y будем считать *эквивалентными*, если $X\psi_j = Y\psi_j$ при $s_j \neq 0$.

Для квадратично-суммируемых X, Y сходится ряд

$$\frac{1}{2}\sum_j s_j [(Y\psi_j | X\psi_j) + (X\psi_j | Y\psi_j)] = \\ = \operatorname{Re}\sum_j s_j (Y\psi_j | X\psi_j) = \langle Y, X\rangle_S. \qquad (8.3)$$

Если X, Y ограничены, то они квадратично-суммируемы и сумма этого ряда $\langle Y, X\rangle_S$ совпадает со значением, даваемым формулой (8.2).

Теорема 8.1. *Элементы пространства $\mathscr{L}^2_h(S)$ являются классами эквивалентности квадратично-суммируемых операторов; именно, если $\{X_n\}$ — фундаментальная в смысле скалярного произведения (8.2) последовательность в $\mathfrak{B}_h(\mathscr{K})$, то найдется квадратично-суммируемый X такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \langle X_n - X, X_n - X\rangle_S = 0$, и, обратно, всякий квадратично-суммируемый оператор является пределом фундаментальной последовательности $\{X_n\} \subset \mathfrak{B}_h(\mathscr{K})$.*

Мы будем обозначать одной и той же буквой X и оператор, и соответствующий элемент пространства $\mathscr{L}^2$.

Используя понятие оператора Гильберта — Шмидта, можно дать другое описание квадратично-суммируемых операторов. Рассмотрим оператор

$$\sqrt{S} = \sum_j \sqrt{s_j}\, |\psi_j)(\psi_j|.$$

Очевидно, $\sqrt{S} \in \mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, так как $\|\sqrt{S}\|_2^2 = \mathrm{Tr}(\sqrt{S})^2 < \infty$. Обозначая через $\mathscr{R}(T)$ область значений оператора T, имеем

$$\mathscr{R}(\sqrt{S}) = \left\{\psi\colon \ \psi = \sum_j \sqrt{s_j}\, c_j \psi_j, \quad \sum_j |c_j|^2 < \infty\right\}.$$

Предложение 8.1. *Оператор X квадратично-суммируем тогда и только тогда, когда X продолжается на $\mathscr{R}(\sqrt{S})$ так, что $X\sqrt{S}$ является оператором Гильберта—Шмидта. При этом*

$$\langle Y, X\rangle_S = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(X\sqrt{S})(Y\sqrt{S})^*. \tag{8.4}$$

Доказательство. Если X квадратично-суммируем, то требуемое продолжение задается формулой

$$X\left(\sum_j \sqrt{s_j}\, c_j \psi_j\right) = \sum_j \sqrt{s_j}\, c_j X\psi_j, \qquad \sum_j |c_j|^2 < \infty,$$

причем ряд в правой части сходится сильно в силу квадратичной суммируемости. Оператор $X\sqrt{S}$ является оператором Гильберта—Шмидта, так как

$$\mathrm{Tr}\,(X\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) = \sum_j \|X\sqrt{S}\,\psi_j\|^2 = \sum_j s_j \|X\psi_j\|^2 < \infty.$$

Формула (8.4) получается аналогично из (8.3). Обратное утверждение очевидно.

Так как по теореме 7.3 произведение операторов Гильберта—Шмидта является ядерным оператором, то выражение

$$X \circ S \equiv \frac{1}{2}\left[(X\sqrt{S})\cdot\sqrt{S} + \sqrt{S}\cdot(X\sqrt{S})^*\right]$$

определяет ядерный оператор в $\mathscr{H}$. Используя это обозначение и соотношения (1.18), получаем еще одну формулу для скалярного произведения

$$\langle Y, X\rangle_S = \mathrm{Tr}\,(X\circ S)\,Y, \tag{8.5}$$

справедливую для ограниченного Y и $X \in \mathscr{L}_h^2(S)$.

Рассмотрим теперь коммутатор

$$[Y, X] = YX - XY$$

операторов X, Y. Если эти операторы эрмитовы, то $i[Y, X]$ также эрмитсв. Поэтому соотношение

$$[Y, X]_S = i \operatorname{Tr} S[Y, X] = 2 \operatorname{Im} \operatorname{Tr} SXY \tag{8.6}$$

определяет вещественную билинейную форму на $\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$. Воспользовавшись предложением 8.1, можно задать продолжение этой формы на $\mathscr{L}_h^2(S)$:

$$[Y, X]_S = 2 \operatorname{Im} \operatorname{Tr} (X\sqrt{S})(Y\sqrt{S})^*.$$

Для $X \in \mathscr{L}_h^2(S)$ соотношение

$$[X, S] \equiv (X\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S} - \sqrt{S} \cdot (X\sqrt{S})^*$$

определяет ядерный оператор. Воспользовавшись формулами (1.18), мы можем записать для ограниченного Y

$$[Y, X]_S = i \operatorname{Tr} [X, S] Y. \tag{8.7}$$

Эта форма является *кососимметричной* на $\mathscr{L}_h^2(S)$:

$$[Y, X]_S = -[X, Y]_S.$$

В частности,

$$[X, X]_S = 0, \qquad X \in \mathscr{L}_h^2(S). \tag{8.8}$$

Из (8.7) и (1.18) очевидно также, что

$$[I, X]_S \equiv 0. \tag{8.9}$$

Для дальнейшего будет удобно ввести комплексификацию пространства $\mathscr{L}_h^2(S)$. Рассмотрим комплексное скалярное произведение

$$\langle Y, X\rangle_S = \operatorname{Tr} S(Y^* \circ X) = \operatorname{Tr} (S \circ X) \cdot Y^* \tag{8.10}$$

на пространстве всех ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Его ограничение на вещественное подпространство $\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$ совпадает с вещественным скалярным произведением (8.2). Кососимметричная форма (8.6) является ограничением косоэрмитовой формы

$$[Y, X]_S = i \operatorname{Tr} S[Y^*, X] = i \operatorname{Tr} [X, S] \cdot Y^*. \tag{8.11}$$

Всякий ограниченный оператор представляется в виде

$$X = X_1 + iX_2,$$

где $X_1=\frac{1}{2}(X+X^*)$, $X_2=\frac{1}{2i}(X-X^*)$ — эрмитовы операторы. Непосредственно проверяется, что

$$\langle X,\ X\rangle_S=\langle X_1,\ X_1\rangle_S+\langle X_2,\ X_2\rangle_S.$$

Обозначая через $\mathscr{L}^2(S)$ пополнение $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ по скалярному произведению (8.10), имеем $\mathscr{L}^2(S)=\mathscr{L}^2_h(S)\oplus i\mathscr{L}^2_h(S)$.

Два других полезных комплексных скалярных произведения на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ даются формулами

$$\langle Y,\ X\rangle_S^+=\operatorname{Tr} SXY^*,\quad \langle Y,\ X\rangle_S^-=\operatorname{Tr} SY^*X. \tag{8.12}$$

Так как

$$\langle Y,\ X\rangle_S=\frac{1}{2}(\langle Y,\ X\rangle_S^+ + \langle Y,\ X\rangle_S^-),$$

то $\langle X,\ X\rangle_S^{\pm}\leqslant 2\langle X,\ X\rangle_S$. Поэтому, обозначая через $\mathscr{L}^2_{\pm}(S)$ пополнения $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ по скалярным произведениям (8.12), имеем $\mathscr{L}^2(S)\subseteq\mathscr{L}^2_{\pm}(S)$. Отметим очевидные формулы

$$\begin{gathered}\langle X,\ Y\rangle_S\pm\frac{i}{2}[X,\ Y]_S=\langle X,\ Y\rangle_S^{\pm},\\ [X,\ Y]_S=i(\langle X,\ Y\rangle_S-\langle X,\ Y\rangle_S^{+});\quad X,\ Y\in\mathscr{L}^2(S).\end{gathered} \tag{8.13}$$

§ 9. Соотношения неопределенностей для измерений с конечным вторым моментом

Предложение 9.1. *Скалярное произведение* $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_S$ *и форма* $[\cdot,\ \cdot]_S$ *связаны следующими эквивалентными неравенствами:*

1) $\langle X,\ X\rangle_S\geqslant\frac{i}{2}[X,\ X]_S,\quad X\in\mathscr{L}^2(S)$;

2) $\langle X,\ X\rangle_S\geqslant-\frac{i}{2}[X,\ X]_S,\quad X\in\mathscr{L}^2(S)$;

3) $\langle X_1,\ X_1\rangle_S+\langle X_2,\ X_2\rangle_S\geqslant[X_1,\ X_2]_S,\ X_1,\ X_2\in\mathscr{L}^2_h(S)$;

4) $\langle X_1,\ X_1\rangle_S\cdot\langle X_2,\ X_2\rangle_S\geqslant\frac{1}{4}[X_1,\ X_2]_S^2,\ X_1,\ X_2\in\mathscr{L}^2_h(S)$.

Доказательство. Для проверки 1), 2) достаточно заметить, что

$$\langle X,\ X\rangle_S\pm\frac{i}{2}[X,\ X]_S=\langle X,\ X\rangle_S^{\pm}\geqslant 0,\qquad X\in\mathscr{L}^2(S).$$

Полагая $X = X_1 + iX_2$, где $X_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$, и учитывая (8.8), находим

$$0 \leqslant \langle X, X\rangle_{\bar{S}} = \langle X_1, X_1\rangle_S + \langle X_2, X_2\rangle_S - [X_1, X_2]_S,$$

откуда вытекает, что 1) равносильно 3). Наконец, подставляя в 3) tX_1 вместо X_1, получаем

$$t^2 \langle X_1, X_1\rangle_S - t[X_1, X_2]_S + \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

что равносильно 4).

Из неравенства 4) легко получается **соотношение неопределенностей для наблюдаемых с конечным вторым моментом**. Если X такая наблюдаемая, которая задается плотно определенным симметричным оператором со спектральным разложением $X = \int \lambda M(d\lambda)$, то

$$\mathsf{E}_S(X) = \langle I, X\rangle_S, \tag{9.1}$$

$$\mathsf{D}_S(X) = \langle X - E_S(X), X - E_S(X)\rangle_S. \tag{9.2}$$

Докажем, например, второе соотношение. Учитывая (4.14) и (8.3), имеем

$$\mathsf{D}_S(X) \equiv \int (\lambda - \mathsf{E}_S(X))^2 \mu_S(d\lambda) = \\ = \sum_j s_j \int (\lambda - \mathsf{E}_S(X))^2 (\psi_j \mid M(d\lambda)\psi_j) = \\ = \sum_j s_j ((X - \mathsf{E}_S(X))\psi_j \mid (X - \mathsf{E}_S(X))\psi_j) = \\ = \langle X - \mathsf{E}_S(X), X - \mathsf{E}_S(X)\rangle_S,$$

причем все переходы законны в силу конечности второго момента.

Пусть X_1, X_2 — две такие наблюдаемые. Применяя 4) к $X_1 - \mathsf{E}_S(X_1)$, $X_2 - \mathsf{E}_S(X_2)$ и учитывая (8.9), получаем обобщение соотношения неопределенностей (6.7) в виде

$$\mathsf{D}_S(X_1) \cdot \mathsf{D}_S(X_2) \geqslant \frac{1}{4}[X_1, X_2]_S^2. \tag{9.3}$$

Из доказательства предложения 9.1 легко усмотреть, что равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда для некоторого вещественного c $X_1 - \mathsf{E}_S(X_1) + ic(X_2 - \mathsf{E}_S(X_2)) = 0$ в $\mathscr{L}^2(S)$, т. е.

$$[(X_1 - \mathsf{E}_S(X_1)) + ic(X_2 - \mathsf{E}_S(X_2))]S = 0,$$

Неравенство (9.3) относится к измерениям, которые задаются спектральными мерами наблюдаемых. Получим теперь обобщение соотношения неопределенностей на произвольные вещественные измерения.

В теории вероятностей элементами пространства $\mathscr{L}^2$ являются случайные величины с конечными вторыми моментами. В некоммутативном случае имеет место аналогичное соответствие между элементами пространства $\mathscr{L}^2_h(S)$ и вещественными измерениями с конечными вторыми моментами. Пусть $M = \{M(dx)\}$ — измерение, имеющее конечный второй момент относительно состояния S,

$$\int x^2 \mu_S(dx) < \infty,$$

где $\mu_S(dx) = \operatorname{Tr} SM(dx)$. Для такого измерения определены среднее и дисперсия (6.1). Покажем, что интеграл

$$X_M = \int xM(dx)$$

сходится в $\mathscr{L}^2_h(S)$ и определяет элемент этого пространства. Эту формулу можно рассматривать как некоторое обобщение спектрального соответствия на произвольные разложения единицы; если M — спектральная мера, то X_M является классом эквивалентности соответствующей наблюдаемой.

Определим интеграл

$$\int f(x)\, M(dx) \tag{9.4}$$

сначала для простых вещественных функций вида $f(x) = \sum_j f_j 1_{B_j}(x)$ как

$$\int f(x)\, M(dx) = \sum_j f_j M(B_j).$$

Имеет место неравенство

$$\left[\int f(x)\, M(dx)\right]^2 \leqslant \int f(x)^2\, M(dx). \tag{9.5}$$

В самом деле, для простой f это означает, что

$$\left[\sum_j f_j M(B_j)\right]^2 \leqslant \sum_j f_j^2 M(B_j),$$

и непосредственно следует из очевидного неравенства

$$\sum_j \left[f_j - \sum_k f_k M(B_k)\right] M(B_j) \left[f_j - \sum_k f_k M(B_k)\right] \geqslant 0.$$

Умножая (9.5) на S и беря след, получаем

$$\langle \int f(x)\,M(dx),\quad \int f(x)\,M(dx)\rangle_S \leqslant \int f(x)^2\,\mu_S(dx). \qquad (9.6)$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность простых функций, которая сходится к некоторой функции f в средне-квадратичном по мере $\mu_S(dx) = \operatorname{Tr} SM(dx)$,

$$\int (f_n(x) - f(x))^2\,\mu_S(dx) \to 0.$$

Тогда из неравенства (9.6), примененного к $f_n - f_m$, вытекает, что последовательность ограниченных операторов $\left\{\int f_n(x)\,M(dx)\right\}$ является фундаментальной в $\mathscr{L}_h^2(S)$. Предел этой последовательности является элементом $\mathscr{L}_h^2(S)$, который обозначается символом (9.4). Очевидно, что неравенство (9.6) сохраняется для любой f, квадратично-интегрируемой по мере $\mu_S(dx)$. Мы доказали

Предложение 9.2. *Для любой вещественной* $f \in \mathscr{L}^2(\mu_S)$ *интеграл* (9.4) *определен как предел последовательности* $\left\{\int f_n M(dx)\right\}$, *где* $\{f_n\}$ — *любая последовательность простых функций, сходящаяся к* f *в* $\mathscr{L}^2(\mu_S)$. *Для любой* $f \in \mathscr{L}^2(\mu_S)$ *имеет место неравенство* (9.6).

Если в качестве f брать комплексные функции, то $\int f(x)\,M(dx)$ будет уже элементом пространств $\mathscr{L}^2(S)$, $\mathscr{L}_{\pm}^2(S)$, а неравенство (9.6) заменится на

$$\langle \int f(x)\,M(dx),\quad \int f(x)\,M(dx)\rangle_S^{\pm} \leqslant \int |f(x)|^2\,\mu_S(dx). \qquad (9.7)$$

Отметим также формулу

$$\int f(x)\,\mu_S(dx) = \langle I,\ \int f(x)\,M(dx)\rangle_S,$$

которая очевидна для простых f и получается стандартным предельным переходом для $f \in \mathscr{L}^2(\mu_S)$. В частности, полагая $f(x) = x$, получаем аналог формулы (9.1):

$$\mathsf{E}_S\{M\} = \langle I,\ X_M\rangle_S.$$

Полагая в (9.5) $f(x) = x - \mathsf{E}_S\{M\}$, получаем неравенство

$$\mathsf{D}_S\{M\} \geqslant \langle X_M - \mathsf{E}_S\{M\},\ X_M - \mathsf{E}_S\{M\}\rangle_S. \qquad (9.8)$$

Согласно (9.2), равенство здесь имеет место, если M — спектральная мера плотно определенного симметричного оператора $X = X_M$.

Используя неравенства (9.8) и 4), получаем наиболее общую форму соотношения неопределенностей

$$\mathsf{D}_S\{M_1\}\cdot\mathsf{D}_S\{M_2\}\geqslant\frac{1}{4}[X_{M_1},\ X_{M_2}]_S^2,$$

справедливую для любых измерений с конечными вторыми моментами. Отметим, что это неравенство уже может быть отнесено и к совместным измерениям, когда $M_1(dx_1)$, $M_2(dx_2)$ суть маргинальные измерения по отношению к совместному измерению $M(dx_1,\ dx_2)$.

§ 10. Матричное представление неограниченных операторов. Коммутационный оператор состояния

Элементы пространств $\mathscr{L}^2$ естественно представляются бесконечными матрицами. Для простоты предположим сначала, что оператор плотности $S=\sum\limits_j s_j|\psi_j)(\psi_j|$ невырожден, так что $s_j>0$. Тогда *семейство матричных единиц*

$$E_{jk}=|\psi_j)(\psi_k|$$

образует ортогональный базис в пространствах $\mathscr{L}^2_\pm(S)$, $\mathscr{L}^2(S)$, *причем*

$$\langle E_{jk},\ E_{jk}\rangle_S^+=s_j,\quad \langle E_{jk},\ E_{jk}\rangle_S^-=s_k,\ \langle E_{jk},\ E_{jk}\rangle_S=\frac{1}{2}(s_j+s_k).$$

Докажем это для $\mathscr{L}^2(S)$ Для любого $X\in\mathscr{L}^2(S)$ $\langle E_{jk},\ X\rangle_S=\frac{1}{2}(s_j+s_k)(\psi_j|X\psi_k)$, так что

$$(\psi_j\mid X\psi_k)=\frac{\langle E_{jk},\ X\rangle_S}{\langle E_{jk},\ E_{jk}\rangle_S}.$$

Полнота системы $\{E_{jk}\}$ следует из того, что равенство $\langle E_{jk},\ X\rangle_S=0$ для всех j, k влечет $X\psi_k=0$ для всех k, т. е. $X=0$ в $\mathscr{L}^2(S)$.

Имеет место разложение по базису $\{E_{jk}\}$:

$$X=\sum_{jk}x_{jk}E_{jk}=\sum_{jk}x_{jk}|\psi_j)(\psi_k|,\tag{10.1}$$

где $x_{jk}=(\psi_j\mid X\psi_k)$ и ряд сходится в $\mathscr{L}^2(S)$. Таким образом, всякий квадратично-суммируемый оператор X однозначно (с точностью до эквивалентности) представляется матрицей $[(\psi_j\mid X\psi_k)]$. Это является некоторым обобщением матричного представления (1.13) на неограниченные операторы.

Рассмотрим вещественное пространство $\mathscr{L}_h^2(S)$. Поскольку $\mathscr{L}_h^2(S) \subset \mathscr{L}^2(S)$, разложение (10.1) имеет место и для $X \in \mathscr{L}_h^2(S)$, однако это не будет разложением в $\mathscr{L}_h^2(S)$, так как операторы E_{jk} не эрмитовы и коэффициенты x_{jk} комплексны. Поэтому введем новую систему

$$C_{jk} = \frac{1}{2}(E_{jk} + E_{jk}^*), \quad S_{jk} = \frac{1}{2i}(E_{jk} - E_{jk}^*).$$

Легко проверяется, что $\{C_{jk},\ j \leqslant k;\ S_{jk},\ j < k\}$ образуют ортогональный базис в $\mathscr{L}_h^2(S)$ и для $X \in \mathscr{L}_h^2(S)$ имеет место разложение

$$X = \sum_{j \leqslant k} \alpha_{jk} C_{jk} + \sum_{j < k} \beta_{jk} S_{jk},$$

где α_{jk}, β_{jk} — вещественны.

Пусть теперь некоторые собственные значения s_j оператора плотности S равны нулю. Условимся обозначать через J_0 множество индексов j, для которых $s_j = 0$, а через J_1 — остальные индексы, и будем считать, что s_j занумерованы так, что сначала идут ненулевые собственные значения. Тогда S представляется диагональной блочной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc:c} s_1 & & & 0 & \\ & \ddots & & & \\ & & s_j & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ \hdashline & & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Рассмотрим $\mathscr{L}_+^2(S)$. Поскольку $\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S^+ = 0$ при $j \in J_0$, то ортогональный базис в $\mathscr{L}_+^2(S)$ образуют операторы E_{jk}; $j \in J_1$, $k \in J_0 \cup J_1$. Следовательно, всякий элемент $\mathscr{L}_+^2(S)$ представляется матрицей вида

$$X = \left[\begin{array}{c:c} X_{11} & X_{10} \\ \hdashline \sim & \sim \end{array}\right],$$

где блоки X_{11}, X_{10}, соответствующие строкам с индексом $j \in J_1$, фиксированы, а остальные блоки, обозначенные символом $\sim$, произвольны (в частности, можно считать их нулевыми). Аналогично, элементы $\mathscr{L}_-^2(S)$ представляются матрицами вида

$$X = \left[\begin{array}{c:c} X_{11} & \sim \\ \hdashline X_{01} & \sim \end{array}\right].$$

Поскольку $\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S = \frac{1}{2}(s_j + s_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $j \in J_0$, $k \in J_0$, то базис в $\mathscr{L}^2(S)$ образуют операторы E_{jk}; $(j, k) \overline{\in} J_0 \times J_0$. Следовательно, элементы $\mathscr{L}^2(S)$ представляются матрицами вида

$$X = \left[\begin{array}{c:c} X_{11} & X_{10} \\ \hdashline X_{01} & \sim \end{array}\right].$$

Для элементов $\mathscr{L}^2_h(S)$ эта матрица удовлетворяет дополнительному условию эрмитовости $X_{11}^* = X_{11}$, $X_{10}^* = X_{01}$.

Особенно простую структуру имеют эти пространства в случае чистого состояния $S = |\psi_1)(\psi_1|$. Тогда элементы пространства $\mathscr{L}^2_+(S)$ можно рассматривать как векторы-строки:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ & \sim & \end{bmatrix}, \quad \sum_j |x_{1j}|^2 < \infty.$$

Если условиться считать несущественные коэффициенты равными нулю, то получается представление $X = |\psi_1)(\psi|$, $\psi \in \mathscr{H}$, так что $\mathscr{L}^2_+(S)$ оказывается изоморфным пространству непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{H}$. Аналогично, элементы пространства $\mathscr{L}^2_-(S)$ можно рассматривать как матрицы вида

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \\ x_{21} & \sim \\ \vdots & \end{bmatrix},$$

т. е. как векторы-столбцы, $X = |\psi)(\psi_1|$, так что $\mathscr{L}^2_-(\mathscr{H})$ изоморфно $\mathscr{H}$. Наконец, элементы $\mathscr{L}^2(S)$ представляются в виде

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & \sim & \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \tag{10.2}$$

т. е. $X = |\psi_1)(\varphi| + |\psi)(\psi_1|$, где φ, $\psi \in \mathscr{H}$. Элементы $\mathscr{L}^2_h(S)$ представляются эрмитовыми матрицами вида (10 2), т. е.

$$X = |\psi_1)(\psi| + |\psi)(\psi_1|, \qquad \psi \in \mathscr{H}, \tag{10.3}$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(S)$; из предложения 9.1 вытекает, что форма $[Y, X]_S$ непрерывна на $\mathscr{L}^2(S)$. Поэтому существует ограниченный комплексно-линейный оператор $\mathfrak{D}$ в $\mathscr{L}^2(S)$ такой, что

$$[Y, X]_S = \langle Y, \mathfrak{D} \cdot X\rangle_S. \tag{10.4}$$

Оператор $\mathfrak{D}$ назовем *коммутационным оператором* состояния S. Неравенства 1), 2) предложения 9.1 в терминах оператора $\mathfrak{D}$ принимают вид

$$1 \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D} \geqslant 0 \text{ в } \mathscr{L}^2(S), \tag{10.5}$$

откуда

$$\left(1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right) = \left(1 + \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)\left(1 - \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right) \geqslant 0.$$

Так как формы $[Y, X]_S$ и $\langle Y, X\rangle_S$ вещественны на вещественном подпространстве $\mathscr{L}^2_h(S)$, то это подпространство инвариантно относительно оператора $\mathfrak{D}$. Рассматриваемый в $\mathscr{L}^2_h(S)$, этот оператор является ограниченным вещественно-линейным кососимметричным оператором, удовлетворяющим условию $1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2 \geqslant 0$. Тождество (8.9) в терминах $\mathfrak{D}$ принимает вид

$$\mathfrak{D} \cdot \mathrm{I} = 0. \tag{10.6}$$

Дадим явное описание действия оператора $\mathfrak{D}$. Из (10.4), (8.5) и (8.7) вытекает, что для любого ограниченного Y^*

$$i\,\mathrm{Tr}[X, S] \cdot Y^* = \mathrm{Tr}(\mathfrak{D} \cdot X \circ S) \cdot Y^*,$$

откуда следует, что элемент $Z = \mathfrak{D} \cdot X \in \mathscr{L}^2(S)$ является решением операторного уравнения

$$Z \circ S = i[X, S]. \tag{10.7}$$

Пусть $\{s_j\}$ — собственные числа, $\{\psi_j\}$ — ортонормированные собственные векторы оператора плотности S. Рассмотрим матричное представление

$$X = \sum_{jk} x_{jk} E_{jk},$$

где $x_{jk} = (\psi_j \mid X\psi_k)$ и ряд сходится в $\mathscr{L}^2(S)$. Умножая уравнение (10.7) скалярно слева на ψ_j и справа на ψ_k, получаем

$$\frac{1}{2}(s_k + s_j)(\psi_j \mid Z\psi_k) = i(s_k - s_j)(\psi_j \mid X\psi_k),$$

откуда находятся матричные элементы оператора $Z = \mathfrak{D} \cdot X$:

$$(\psi_j \mid Z\psi_k) = \frac{2i(s_k - s_j)}{s_k + s_j}(\psi_j \mid X\psi_k).$$

Следовательно, действие оператора $\mathfrak{D}$ сводится к умножению матричных элементов x_{jk} оператора X на числа $\frac{2i(s_k - s_j)}{s_k + s_j}$:

$$\mathfrak{D}([x_{jk}]) = \left[\frac{2i(s_k - s_j)}{s_k + s_j} x_{jk}\right], \tag{10.8}$$

так что базис $\{E_{jk}\}$ является базисом из собственных векторов оператора $\mathfrak{D}$ в $\mathscr{L}^2(S)$. Поэтому для любой функции f действие оператора $f(\mathfrak{D})$ задается соотношением

$$f(\mathfrak{D})([x_{jk}]) = \left[f\left(\frac{2i(s_k - s_j)}{s_k + s_j}\right) x_{jk}\right].$$

В частности,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)([x_{jk}]) &= \left[\frac{2s_j}{s_k + s_j} x_{jk}\right], \\ \left(1 - \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)([x_{jk}]) &= \left[\frac{2s_k}{s_k + s_j} x_{jk}\right], \\ \left(1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right)([x_{jk}]) &= \left[\frac{4s_k s_j}{(s_k + s_j)^2} x_{jk}\right]. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Отсюда вытекает полезное утверждение.

Предложение 10.1. *Если состояние S — точное (т. е. все $s_j > 0$), то операторы $1 \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}$, $1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2$ невырождены.*

Отметим также полезную формулу

$$\left(1 \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right)^{-1}\left(1 \mp \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right). \tag{10.10}$$

Комментарии к гл. II

§ 1. Систематическое изложение теории гильбертова пространства см. в книгах: Ахиезер и Глазман [3], Рисс и Секефальви-Надь [86]. Модернизованное изложение функционального анализа, приспособленное к нуждам математической физики, дается в книге Рида и Саймона [85]. Богатый дополнительный материал можно найти в задачнике Халмоша [103]. Для «внешнего» произведения векторов в математической литературе используется менее выразительное обозначение $\bar{\varphi}\otimes\psi$.

§ 2. Обобщенные разложения единицы (на прямой) были введены Карлеманом и подробно изучены Наймарком [71], [72]. Теорема 2.1 доказана в работе автора [115].

§§ 3, 4. Доказательства спектральных теорем для эрмитовых и самосопряженных операторов можно найти в упомянутых выше книгах. Теорема 4.1 доказана фон Нейманом и Стоуном. По поводу спектрального разложения симметричных операторов см. Наймарк [71], Ахиезер и Глазман [3]. Дираковское разложение по формальным собственным векторам получает строгое обоснование в теории оснащенных гильбертовых пространств (см. Гельфанд и Виленкин [31], Боголюбов, Логунов, Тодоров [14]).

§ 5. Теорема 5.1 была доказана Наймарком в работе [72] путем явного построения ортогонального разложения единицы в прямой сумме копий исходного пространства $\mathscr{H}$. Предложенные впоследствии более элегантные доказательства (см., например, Ахиезер и Глазман [3]) являются и более формальными. По поводу тензорного произведения гильбертовых пространств см. Рид и Саймон [85].

Понятие реализации и его связь с рандомизированными процедурами математической статистики обсуждались в работах автора [113], [115], [122]. Другая возможность возникновения неортогональных разложений и «переполненных» систем векторов связана с так называемыми косвенными измерениями (Мандельштам [67]). При косвенном измерении объект $\mathscr{H}$ взаимодействует с «измерительным прибором» $\mathscr{H}_1$, который находится сначала в некотором «равновесном» состоянии S_1, затем с $\mathscr{H}_1$ «снимаются показания», т. е. производится простое измерение $E_1(du)$ в пространстве $\mathscr{H}_1$. Нетрудно показать (ср. Краус [55]), что распределение вероятностей результатов такой измерительной процедуры также описывается, вообще говоря, неортогональным разложением единицы в пространстве $\mathscr{H}$.

Мы оставляем в стороне вопрос о возможном механизме переноса информации с микроскопического на макроскопический уровень. Интересная точка зрения на этот вопрос развивается в работе Хеппа [110]. Поскольку измерительный прибор является макроскопическим объектом, т. е. системой с практически бесконечным числом степеней свободы, для его описания привлекаются специальные алгебры наблюдаемых. Для таких алгебр существуют так называемые дизъюнктные, или «макроскопически различимые», состояния. Взаимодействие микрообъекта с прибором переводит последний в одно из дизъюнктных состояний, отвечающих некоторому значению u результатов эксперимента. В работе Хеппа рассматривается ряд конкретных моделей, убедительно иллюстрирующих эту картину.

§ 6. Формальное соотношение неопределенностей для произвольных наблюдаемых было установлено Робертсоном [87], который обобщил соотношение неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса. Предложение 6.1 доказано в книге Дэвиса [39]. Обсуждение совместной измеримости с других точек зрения можно найти у фон Неймана [101], Урбаника [95], Варадарайана [22]. Относительно совместного спектрального разложения и функционального исчисления нескольких коммутирующих операторов см. Рисс и Секефальви Надь [86].

§ 7. Ядерные операторы и операторы Гильберта-Шмидта рассматриваются в книге Рида и Саймона [85]. Более подробное изложение читатель найдет у Шаттена [129], а также Гельфанда и Виленкина [31].

§ 8. Пространства $\mathscr{L}^2(S)$ были введены в работах автора [121], [123]. В последней работе, где рассматривается случай произвольной алгебры фон Неймана, содержится доказательство теоремы 8.1. Понятие квадратично-суммируемого оператора использовалось ранее в работах Холево [115] и Крауса и Шрётера [56].

§ 9. Строгое соотношение неопределенностей для самосопряженных операторов было получено Краусом и Шрётером [56]. Конструкция интеграла (9.4) дается в работе [123].

§ 10. Представление неограниченных операторов матрицами связано с известными трудностями (см., например, Ахиезер и Глазман [3]). Содержание этого параграфа показывает, что в тех вопросах, где важны лишь «вторые моменты», эти трудности несущественны и удовлетворительное матричное представление имеет место. Коммутационный оператор состояния был введен в работах Холево [121], [123], где рассматривались также состояния на алгебре фон Неймана. Существует простое соотношение между коммутационным оператором и модулярным оператором Томиты — Такесаки [98]; см. [123].

Глава III

СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. Статистическая модель и принцип относительности

Мы переходим к рассмотрению специфики статистического описания квантовомеханических объектов, обусловленной той исключительной ролью, которую играет в нем наличие пространственно-временной структуры. Обратимся сначала к классической механике. Фундаментальный принцип относительности Галилея гласит, что законы механики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета. Всякая система отсчета состоит из декартовой прямоугольной системы координат и часов, осуществляющих отсчет времени. Если (ξ, τ) — координаты материальной точки в фиксированной инерциальной системе отсчета, то переход к другой инерциальной системе отсчета описывается *преобразованием Галилея*

$$\begin{aligned} \xi' &= R\xi + x + v\tau, \\ \tau' &= \tau + t, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где R — ортогональная матрица (вращение), задающая положение осей новой декартовой системы координат относительно старой, x — вектор пространственного сдвига начала координат, v — вектор скорости, с которой движется старая система координат относительно новой, а t — разность хода часов в старой и новой системах отсчета. Совокупность всех преобразований вида (1.1) образует полную *галилееву группу*; она содержит подгруппу *кинематических* (одновременных) *преобразований*

$$\begin{aligned} \xi' &= R\xi + x + v\tau, \\ \tau' &= \tau, \end{aligned} \tag{1.2}$$

и *евклидову подгруппу* пространственных преобразований (движений)

$$\xi' = R\xi + x.$$

Математическая формулировка принципа относительности в классической механике состоит в том, что уравнения механики должны быть инвариантны при заменах переменных вида (1.1), описывающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это требование относится, конечно, к изолированному объекту; если же рассматривается движение в поле внешних сил, то этот принцип следует заменить ограниченным принципом инвариантности, учитывающим степень симметрии внешнего поля. Так, уравнения движения в потенциальном поле, не зависящем от времени, должны быть инвариантны относительно преобразований

$$\xi' = \xi + v\tau$$
$$\tau' = \tau + t;$$

если же поле, например, изотропно, то сюда следует присоединить повороты $\xi' = R\xi$ и т. п.

Переходя к квантовой механике, примем, что принцип равноправия инерциальных систем отсчета сохраняет свою справедливость и для микрообъектов. Однако мы не можем взять точную формулировку принципа относительности из классической механики, где параметры ξ, τ имеют непосредственный смысл как пространственно-временные координаты материальной точки; в ситуации, описываемой квантовой теорией, непосредственно данными можно считать статистические результаты экспериментов над рассматриваемым микрообъектом. С этой точки зрения подходящей словесной формулировкой принципа относительности представляется следующая: *статистика результатов любого эксперимента не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой проводится эксперимент.*

Дадим математическую формулировку принципа относительности. Предположим, что состояние квантового объекта приготовляется некоторой установкой, с которой связана система отсчета (ξ, τ) (рис. 7). После приготовления состояния S проводится измерение M, так что конечным результатом эксперимента является распределение вероятностей μ_S^M. Измерение осуществляется прибором, имеющим определенную ориентацию в пространстве-времени. Будем считать, что с ним также связана система отсчета $(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})$.

Предположим теперь, что положение и установки, и прибора изменяется одинаковым образом, так что связанные с ними системы отсчета подвергаются одному и тому же галилееву преобразованию g. Приготовление состояния S данной установкой с последующим преобразованием g положения установки можно рассматривать как некоторый новый способ приготовления gS; аналогично, измерение M, проведенное после преобразования g, можно

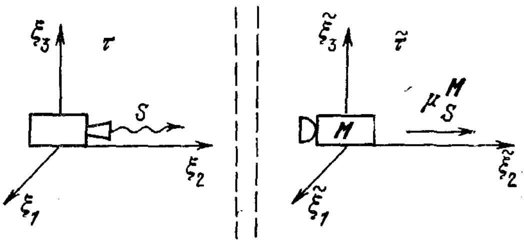

Рис. 7.

рассматривать как некоторое новое измерение gM. Однако, поскольку относительное положение прибора и установки не изменяется, должно быть

$$\mu_{gS}^{gM} = \mu_S^M \tag{1.3}$$

для любого состояния S и измерения M. Из равноправности всех систем отсчета следует также, что отображение $S \to gS$ (соответственно $M \to gM$) должно быть взаимнооднозначным отображением множества состояний (соответственно измерений) на себя. Отсюда вытекает, что отображение $S \to gS$ является аффинным: пусть $S = \sum_j p_j S_j$; тогда

$$\mu_{gS}^{gM} = \mu_S^M = \sum_j p_j \mu_{S_j}^M = \sum_j p_j \mu_{gS_j}^{gM}.$$

Поскольку gM пробегает всевозможные измерения, то, в силу отделимости рассматриваемой статистической модели, это означает, что

$$gS = \sum_j p_j (gS_j),$$

т. е. аффинность отображения $S \to gS$. Взаимно-однозначное аффинное отображение множества состояний на себя называется *автоморфизмом*. Примем также, что последовательное применение двух преобразований g_1, g_2 положения установки или прибора эквивалентно преобразованию g_1g_2, так что

$$g_1(g_2S) = (g_1g_2)S,$$
$$g_1(g_2M) = (g_1g_2)M. \tag{1.4}$$

Это означает, что заданы действия группы $G = \{g\}$, с одной стороны, как группы автоморфизмов $S \to gS$ множества состояний $\mathfrak{S}$ и, с другой стороны, как группы взаимно-однозначных преобразований $M \to gM$ множества измерений $\mathfrak{M}$, причем действия этих групп связаны условием (1.3). В этом и состоит математическая формулировка принципа относительности. В рассматриваемой нами нерелятивистской квантовой механике под группой G подразумевается галилеева группа, а $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ является статистической моделью квантовой теории.

Заметим, однако, что все эти рассуждения применимы и к любой другой группе симметрий G. Кроме того, мы пока не использовали специфику модели квантовой теории. Следующий результат, принадлежащий Вигнеру, раскрывает структуру автоморфизмов множества квантовых состояний.

Теорема 1.1. *Всякий автоморфизм множества квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ имеет вид*

$$S \to VSV^*, \tag{1.5}$$

где V — унитарный или антиунитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

(Оператор V, отображающий $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$, называется *антиунитарным*, если он антилинеен: $V(\lambda\varphi + \mu\psi) = \bar{\lambda}V\varphi + \bar{\mu}V\psi$ и удовлетворяет условию $(V\varphi \mid V\psi) = \overline{(\varphi \mid \psi)}$.)

Важно отметить, что оператор V определяется в (1.5) неоднозначно: V можно умножить на произвольное комплексное число, равное по модулю единице, не изменив состояния $\tilde{S} = VSV^*$. Рассмотрим произвольную группу симметрий G (ею может быть галилеева, евклидова или какая-либо другая группа). Из (1.4) тогда вытекает, что для любого состояния S

$$V_{g_2}V_{g_1}SV_{g_1}^*V_{g_2}^* = V_{g_2g_1}SV_{g_2g_1}^*,$$

где $V_g S V_g^* = gS$, откуда

$$V_{g_2} V_{g_1} = \omega(g_2, g_1) V_{g_2 g_1}; \qquad |\omega(g_2, g_1)| = 1. \tag{1.6}$$

Рассматриваемые нами группы являются непрерывными: в них естественно определяются понятия близости и сходимости. Практически не ограничивая общности, можно считать, что отображение $g \to V_g$ непрерывно в том смысле, что $(\varphi | V_{g'} \psi) \to (\varphi | V_g \psi)$ при $g' \to g$ для всех φ, $\psi \in \mathscr{H}$. Будет считать также, что V_e, где e — единица группы G, всегда выбирается так, что $V_e = I$. Кроме того, предположим, что группа является связной, т. е. любые два ее элемента можно соединить непрерывной кривой. Тогда ни один из операторов V_g не может быть антиунитарным — в противном случае можно было бы перейти непрерывным образом от линейного оператора $V_e = I$ к антилинейному оператору V_g. Итак, в предположении связности группы G, все операторы $\{V_g\}$ являются унитарными.

Семейство унитарных операторов $g \to V_g$; $g \in G$, в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условию (1.6), называется *проективным* (унитарным) *представлением группы* G в $\mathscr{H}$. Если $\omega \equiv 1$, то оно называется просто *унитарным*. Мы будем рассматривать только непрерывные в указанном выше смысле представления.

Одной из основных задач теории представлений является классификация представлений данной группы. Из сказанного выше видно, что, имея такую классификацию для некоторой группы симметрий G, мы можем описать все теоретически возможные квантовые объекты с данным типом симметрии. Особую роль играют *неприводимые* представления $g \to V_g$, для которых в пространстве $\mathscr{H}$ не существует нетривиального (замкнутого) подпространства, инвариантного относительно всех операторов V_g. Неприводимые представления являются в этом смысле минимальными, и при определенных условиях регулярности всякое представление может быть разложено в дискретную или непрерывную сумму (интеграл) неприводимых представлений. Условимся считать, что неприводимое (т. е. неразложимое) представление описывает «элементарный объект» с данным типом симметрии. Очевидно, что здесь решающую роль играет определение фундаментальной группы симметрий, которая включает в себя все физически значимые симметрии. Если в нерелятивистской квантовой механике эту роль играет полная галилеева группа, то в релятивистской ее заменяет группа Пуанкаре. Большое место занимают группы симметрий в попытках классификации элементарных частиц *).

Уравнения для свободных частиц в квантовой механике представляют собой по существу удобный способ описания неприводимых представлений соответствующих групп. Последовательный вывод квантовой динамики, основывающийся на принципе галилеевой относительности, представляет большой методический интерес, однако он требует привлечения ряда результатов теории проективных представлений, которые выходят за рамки настоящей книги. Ограничиваясь достаточно элементарными средствами, мы рассмотрим подробно лишь простейший случай нерелятивистской частицы в одном измерении, чтобы показать, каким образом соображения симметрии позволяют связать с механическими параметрами, такими как координата, скорость, время, энергия, те или иные квантово-теоретические измерения, т. е. разложения единицы в гильбертовом пространстве представления.

§ 2. Однопараметрические группы сдвигов. Соотношение неопределенностей «время—энергия»

Предположим, что установка, приготовляющая квантовое состояние, сдвигается параллельно себе по оси абсцисс на расстояние x, что описывается преобразованием $\xi' = \xi - x$ (рис. 8). Тогда, если исходное состояние объекта описывалось оператором плотности S, новое состояние будет иметь оператор плотности $S_x = V_x S V_x^*$, где $x \to V_x$ — непрерывное проективное представление группы сдвигов вещественной прямой. Для таких однопараметрических групп имеет место

*) К сожалению, элементарный объект (по Вигнеру — элементарная система) не есть то же самое, что элементарная частица в понимании физиков. Полностью ответить на вопрос, что же является математическим эквивалентом понятия элементарной частицы, по-видимому, сможет лишь будущая теория. Тем не менее, допуская вольность речи, мы иногда будем называть «частицей» элементарный квантовый объект в определенном здесь смысле.

Предложение 2.1. *Всякое непрерывное проективное представление $x \to V_x$ однопараметрической непрерывной группы сдвигов может быть сведено к унитарному, т. е.*

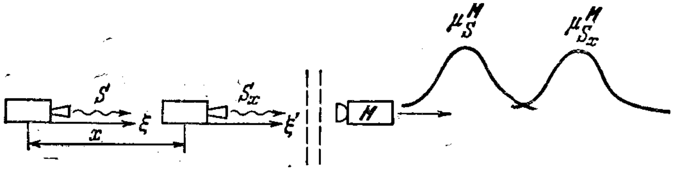

Рис. 8.

существует непрерывное семейство унитарных операторов $x \to U_x$ такое, что $V_x = \alpha_x U_x$, где $|\alpha_x| = 1$ и

$$U_{x_1} U_{x_2} = U_{x_1 + x_2}.$$

Операторы $\{U_x\}$ образуют группу унитарных операторов; по теореме Стоуна (см. § II.4), существует самосопряженный оператор P в $\mathscr{H}$ такой, что

$$U_x = \exp(-iPx), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Поэтому действие однопараметрической группы пространственных сдвигов на множестве квантовых состояний описывается формулой

$$S \to S_x = e^{-iPx} S e^{iPx}. \tag{2.1}$$

По причинам, которые мы выясним в дальнейшем, инфинитезимальный оператор P связывается с импульсом (количеством движения) рассматриваемого квантового объекта.

Все это относится не только к пространственным сдвигам, но и к любой другой однопараметрической подгруппе преобразований. Рассмотрим преобразование системы отсчета, при котором пространственная система координат остается неизменной, но сдвигается отсчет времени $\tau' = \tau - t$. Это соответствует тому, что все измерения начинаются на время t позже по сравнению с исходным отсчетом времени. Тогда оператор плотности также изменится по формуле типа (2.1). Обозначая соответствующий инфинитезимальный оператор через $-H$, имеем

$$S_t = e^{-iHt} S e^{iHt}. \tag{2.2}$$

Дифференцируя формально это соотношение по t, получаем

$$i\frac{dS_t}{dt}=[H,\ S_t];\qquad S_0=S. \tag{2.3}$$

В частности, если $S=|\psi)(\psi|$ — чистое состояние и $\psi\in\in\mathscr{D}(H)$, то $S_t=|\psi_t)(\psi_t|$, где $|\psi_t)=e^{-tHt}|\psi)$, так что соотношение (2.3) вытекает из формулы (II.4.13), которая принимает вид

$$i\frac{d\psi_t}{dt}=H\psi_t;\qquad \psi_0=\psi. \tag{2.4}$$

Это уравнение называется **уравнением Шредингера**, а оператор H, по причинам, которые станут ясны позднее, называется **оператором энергии** или *гамильтонианом*. Конкретный вид оператора H определяет динамику квантового объекта, т. е. закон изменения состояния во времени.

Мы получим строгую версию соотношения (2.3) в гл. VI, опираясь на математический аппарат, развитый в §§ 7, 8 предыдущей главы, а пока ограничимся рассмотрением чистых состояний.

Если X — ограниченная наблюдаемая, то для ее среднего значения $\mathsf{E}_t(X)=(\psi_t|X\psi_t)$, в силу (2.4), имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(X)=\left(\frac{d\psi_t}{dt}\middle|X\psi_t\right)+\left(X\psi_t\middle|\frac{d\psi_t}{dt}\right)=$$
$$=i(H\psi_t|X\psi_t)-i(X\psi_t|H\psi_t)=-2\,\mathrm{Im}\,(H\psi_t|X\psi_t). \tag{2.5}$$

(Дифференцирование здесь законно в силу ограниченности X.) Это можно также переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(X)=\mathsf{E}_t(i[H,\ X]), \tag{2.6}$$

если правая часть имеет смысл. Используя соотношение неопределенностей (II.6.7), получаем важное **неравенство Мандельштама—Тамма**

$$\mathsf{D}_t(X)\,\mathsf{D}_t(H)\geqslant\frac{1}{4}\left|\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(X)\right|^2.$$

В гл. VI мы обобщим это неравенство на произвольные состояния S_t и измерения M с конечными вторыми моментами:

$$\mathsf{D}_t\{M\}\,\mathsf{D}_t(H)\geqslant\frac{1}{4}\left|\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t\{M\}\right|^2. \tag{2.7}$$

Аналогичный результат имеет место для любой однопараметрической группы, например для группы пространственных сдвигов:

$$\mathsf{D}_x\{M\}\,\mathsf{D}_x(P) \geqslant \frac{1}{4}\left|\frac{d}{dx}\mathsf{E}_x\{M\}\right|^2.$$

Значение этих результатов состоит в том, что они позволяют получить принципиальную нижнюю границу для точности измерения физических параметров, существенно обобщающую обычное соотношение неопределенностей.

Рассмотрим сначала измерения параметра положения (координаты) квантового объекта. Если установка, приготовляющая квантовое состояние S, сдвигается параллельно себе на расстояние x, то новым состоянием будет S_x, определяемое соотношением (2.1). В этом смысле параметр x отражает информацию о положении микрообъекта. Предположим теперь, что истинное значение *параметра координаты* x неизвестно и должно быть определено по результатам измерений. Пусть $M = \{M(d\hat{x})\}$ — некоторое измерение, которое производится с целью оценки истинного значения x. Предположим, что измерение M не дает систематической погрешности; математически это означает, что среднее значение результата измерения равно значению измеряемой величины, т. е.

$$\mathsf{E}_x\{M\} = x, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Следуя терминологии, принятой в математической статистике, мы называем такие измерения несмещенными. Для несмещенного измерения $\frac{d}{dx}\mathsf{E}_x\{M\} \equiv 1$, так что наше неравенство принимает вид

$$\mathsf{D}_x\{M\} \geqslant \frac{1}{4\mathsf{D}_x(P)}. \tag{2.8}$$

Таким образом, для любого несмещенного измерения параметра координаты дисперсия ограничена снизу величиной, обратно пропорциональной дисперсии («неопределенности») импульса P.

Аналогичный результат имеет место и для измерений *параметра времени* t. Рассмотрим семейство состояний (2.2). Замена состояния S на S_t означает перенос во времени процедуры приготовления. Допустим, что нас интересует измерение момента осуществления некоторого события, связанного с данным объектом, причем этот момент обладает следующим свойством: перенос во времени процедуры приготовления исходного состояния приводит к точно такому же сдвигу момента осуществления рассматриваемого события. Таким свойством обладает, например, всякая величина типа «момента достижения» или «момента прохождения». Дисперсия любого несмещенного измерения такого момента времени ограничена снизу величиной, обратно пропорциональной «неопределенности» энергии H в исходном состоянии:

$$\mathrm{D}_t\{M\} \geqslant \frac{1}{4\mathrm{D}_t(H)}. \qquad (2.9)$$

В физической литературе долго дебатировался вопрос — применимо ли соотношение неопределенностей к *продолжительности* измерения t_2-t_1. В этой связи заметим, что величина t_2-t_1 вообще не фигурирует в нашем анализе; конечный результат эксперимента — распределение вероятностей результатов измерения — получается по истечении времени t_2-t_1, которое определяется конкретным механизмом измерения и, вообще говоря, может быть произвольным. Однако в тех случаях, когда продолжительность эксперимента обусловлена моментом наступления некоторого события (например, прохождения частицы), т. е. прибор работает в режиме ожидания, и эксперимент заканчивается, когда ожидаемое событие наступает, соотношения (2.7), (2.9), конечно, применимы к дисперсии статистической оценки возможной продолжительности измерения t_2-t_1.

§ 3. Кинематика квантовой частицы с одной степенью свободы

В случае одномерного движения система отсчета описывается парой переменных (ξ, τ), где ξ — пространственная, τ — временна́я координаты. Рассмотрим другую систему отсчета, сдвинутую относительно первой на расстояние x и движущуюся относительно нее со скоростью v. Переход к этой системе задается кинематическим преобразованием Галилея

$$\xi' = \xi - x - v\tau, \quad \tau' = \tau. \qquad (3.1)$$

Это равносильно изменению положения экспериментальной установки, при котором она сдвинута на расстояние x и движется со скоростью v относительно своего исходного положения. Совокупность всех таких преобразований образует группу $\mathbb{R}^2$, так как каждое преобразование задается парой параметров (x, v), причем произведение преобразований описывается соотношением

$$(x_1, v_1)(x_2, v_2) = (x_1 + x_2, v_1 + v_2).$$

В соответствии с общей схемой, изложенной в § 1, мы будем искать неприводимые проективные представления группы кинематических преобразований $(x, v) \to W_{x,v}$. Покажем, что, пользуясь произволом в выборе множителя перед $W_{x,v}$, можно всегда сделать так, что соотношение (1.6) будет иметь вид канонического коммутационного соотношения Вейля — Сигала

$$W_{x_1, v_1} W_{x_2, v_2} = \exp\left[-\frac{i\mu}{2}(x_1 v_2 - x_2 v_1)\right] W_{x_1+x_2, v_1+v_2}; \qquad \mu \neq 0. \tag{3.2}$$

Положим $V_x = W_{x,0}$, $U_v = W_{0,v}$. Преобразования

$$S \to V_x S V_x^*, \qquad S \to U_v S U_v^*$$

описывают изменение состояния соответственно при сдвиге начала координат на расстояние x и при переходе в систему координат с тем же началом, но движущуюся со скоростью v. Как было указано в предыдущем параграфе, всегда можно сделать так, чтобы семейства $\{V_x\}$, $\{U_v\}$ образовывали однопараметрические группы унитарных операторов:

$$V_{x_1} V_{x_2} = V_{x_1+x_2}, \qquad U_{v_1} U_{v_2} = U_{v_1+v_2}.$$

Рассмотрим теперь переход в систему отсчета, сдвинутую на расстояние x и движущуюся со скоростью v. Этот переход может быть совершен двумя различными способами:

$$(x, v) = (x, 0)(0, v) = (0, v)(x, 0),$$

причем результат не должен зависеть от способа перехода

$$S \to U_v V_x S V_x^* U_v^* = V_x U_v S U_v^* V_x^*$$

для любого S, откуда

$$U_v V_x = V_x U_v e^{i\eta(x, v)}, \tag{3.3}$$

где $\eta(x, v)$ — вещественная непрерывная функция своих аргументов. При $x=0$ или $v=0$, согласно (3.3), $1 = e^{i\eta(0, v)} = e^{i\eta(x, 0)}$, так что можно положить $\eta(x, 0) = \eta(0, v) = 0$. Умножая (3.3) на $U_{v'}$, получаем

$$\eta(x, v+v') = \eta(x, v) + \eta(x, v') \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Единственным непрерывным решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $\eta(x, 0) = 0$, является $\eta(x, v) = \eta(x)\cdot v$. Аналогично, $\eta(x+x', v) = \eta(x, v) + \eta(x', v)$ $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, откуда $\eta(x, v) = \mu x v$, где μ — некоторая вещественная постоянная, так что

$$U_v V_x = V_x U_v \cdot e^{i\mu x v}. \tag{3.4}$$

Выбирая множитель перед $W_{x, v}$ так, чтобы выполнялось

$$W_{x, v} = e^{\frac{i\mu x v}{2}} V_x U_v, \tag{3.5}$$

убеждаемся, что семейство $\{W_{x, v}\}$ удовлетворяет соотношению (3.2).

Покажем, что требование неприводимости исключает случай $\mu = 0$ при $\dim \mathscr{H} > 1$. Умножая (3.4) на V_x^*, получим

$$V_x^* U_v V_x = U_v e^{i\mu x v}. \tag{3.6}$$

По теореме Стоуна $U_v = \int e^{iv\lambda} G(d\lambda)$, где $G(d\lambda)$ — ортогональное разложение единицы в $\mathscr{H}$. Из (3.6) тогда следует, что для любого φ в $\mathscr{H}$

$$\int e^{iv\lambda} (\varphi \mid V_x^* G(d\lambda) V_x \varphi) = \int e^{iv(\lambda+\mu x)} (\varphi \mid G(d\lambda) \varphi).$$

В обеих частях этого равенства находятся преобразования Фурье вероятностных мер. В силу единственности, эти меры должны совпадать, т. е.

$$(\varphi \mid V_x^* G(B) V_x \varphi) = (\varphi \mid G(B_{-\mu x}) \varphi)$$

для любого множества $B \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$, где $B_{-x} = \{\xi - x \colon \xi \in B\}$ — сдвиг множества B на $-x$. Так как это выполнено для любого $\varphi \in \mathscr{H}$, то

$$V_x^* G(B) V_x = G(B_{-\mu x}). \tag{3.7}$$

В частности, если $\mu = 0$, то отсюда следует, что

$$V_x G(B) = G(B) V_x. \tag{3.8}$$

По построению

$$U_v G(B) = G(B) U_v,$$

Таким образом, всякое подпространство вида $\mathscr{H}_B = G(B)\mathscr{H}$ является инвариантным подпространством семейств $\{V_x\}$, $\{U_v\}$, а значит и $\{W_{x,v}\}$. Если существует B такое, что $\mathscr{H}_B \neq [0]$, $\mathscr{H}$, то $\mathscr{H}_B$ — нетривиальное инвариантное подпространство. В противном случае группа $\{U_v\}$ является скалярной и существование инвариантного подпространства при $\dim\mathscr{H} > 1$ легко доказывается.

Предложение 3.1. *Всякое непрерывное неприводимое проективное представление группы кинематических преобразований* (3.1) *задается семейством унитарных операторов* $\{W_{x,v}\}$, *удовлетворяющим соотношению Вейля — Сигала* (3.2), *где* μ — *вещественная постоянная, не равная нулю, если* $\dim\mathscr{H} > 1$.

В дальнейшем мы увидим, что параметр μ интерпретируется как масса, так что физический смысл имеют представления с $\mu > 0$.

§ 4. Канонические наблюдаемые. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Согласно теореме Стоуна, в пространстве представления $\mathscr{H}$ существуют самосопряженные операторы P и Q такие, что

$$V_x = e^{-ixP}, \qquad -\infty < x < \infty;$$
$$U_v = e^{i\mu vQ}, \qquad -\infty < v < \infty.$$

Операторы P и Q являются квантовыми наблюдаемыми; соответствующие ортогональные разложения единицы

$$Q = \int \xi E(d\xi), \qquad \frac{1}{\mu} P = \int \eta F(d\eta)$$

описывают некоторые квантовые измерения. Выясним их кинематический смысл. Для этого перепишем соотношения (3.2) в форме Вейля

$$V_x^* U_v V_x = e^{i\mu vx} U_v, \tag{4.1}$$
$$U_v^* V_x U_v = e^{-i\mu vx} V_x. \tag{4.2}$$

Рассмотрим для определенности первое соотношение. Вытекающую из него формулу (3.7) можно переписать в виде

$$V_x^* E(B) V_x = E(B_{-x}), \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}). \tag{4.3}$$

Предположим, что состояние S приготавливается некоторой установкой, с которой связана исходная система отсчета. Если установка сдвигается на расстояние x, то новое состояние в исходной системе описывается оператором плотности $S_x = V_x S V_x^*$. Распределение вероятностей наблюдаемой Q относительно состояния S_x:

$$\mu_{S_x}^E(B) = \operatorname{Tr} V_x S V_x^* E(B) = \mu_S^E(B_{-x}), \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}), \tag{4.4}$$

является сдвигом на x распределения вероятностей этой же наблюдаемой относительно состояния S (см. рис. 8). Таким образом, пространственный сдвиг установки, приготовляющей квантовое состояние S, находит отражение в таком же сдвиге распределения вероятностей наблюдаемой Q, независимо от характера приготовляемого состояния. Поэтому разложение единицы $E(d\xi)$ и ассоциируется с измерением физического параметра — координаты сдвига x.

Совершенно аналогично, из соотношения (4.2) вытекает

$$U_v^* F(B) U_v = F(B_{-v}). \tag{4.5}$$

Отсюда следует, что если установка движется относительно исходного положения со скоростью v, то распределение вероятностей наблюдаемой $\frac{1}{\mu} P$ является сдвигом на v исходного распределения, отвечающего неподвижной установке. Поэтому соответствующее спектральное разложение $F(d\eta)$ ассоциируется с измерением относительной скорости квантового объекта. Свойство, которое позволило связать разложение единицы $E(d\xi)$ с измерением координаты x, выражается соотношением (4.3) и называется *ковариантностью* $E(d\xi)$ по отношению к представлению $x \to V_x$ группы пространственных сдвигов. Всякое разложение единицы, удовлетворяющее требованию ковариантности, мы вправе ассоциировать с некоторым, более или менее точным измерением координаты x. Далее мы увидим, что существует бесконечно много даже ортогональных разложений единицы (т. е. простых измерений), удовлетворяющих требованию ковариантности (4.3).

Поэтому соответствие между физическими параметрами и квантовыми наблюдаемыми (измерениями) далеко не однозначно; одна и та же величина может быть измерена бесчисленным множеством способов. Тем не менее будет удобно, как это обычно делается, закрепить названия *наблюдаемая координаты* за инфинитезимальным оператором представления $v \to U_v$ и *наблюдаемая скорости* *) за оператором P/μ. Операторы P, Q называются *каноническими наблюдаемыми*.

Пусть $M = \{M(d\xi)\}$ — любое измерение, ковариантное по отношению к представлению группы пространственных сдвигов и имеющее конечный первый момент относительно состояний S_x. Из (4.4) вытекает

$$\mathsf{E}_x\{M\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi \mu_{S_x}^{M}(d\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi + x)\, \mu_S^M(d\xi) = \\ = \mathsf{E}_0\{M\} + x. \tag{4.6}$$

Таким образом, с точностью до постоянной, M является несмещенным измерением координаты x. Поэтому неравенство (2.8), ограничивающее точность измерения координаты, справедливо для любого ковариантного измерения параметра x. В частности, для наблюдаемой координаты Q получаем

$$\mathsf{D}_S(Q) \cdot \mathsf{D}_S(P) \geqslant 1/4. \tag{4.7}$$

Это неравенство называется соотношением неопределенностей Гейзенберга. К нему полностью применима интерпретация, данная в § II.6. В частности, из него вытекает, что наблюдаемые Q и P несовместимы, т. е. не существует процедуры, которая совместно реализовала бы измерения Q и P. Отсюда, однако, не следует, что физические параметры — координата сдвига x и относительная скорость v — в принципе не допускают совместного измерения! Мы рассмотрим этот вопрос подробно в § 7.

---

*) Для заряженной частицы оператор скорости имеет несколько другой вид, однако мы не будем вдаваться в этот вопрос (см., например, Яух [134]).

§ 5. Теорема единственности. Представление Шредингера

Каноническое коммутационное соотношение (3.2) и его обобщения играют фундаментальную роль в квантовой теории.

Всякое конкретное семейство унитарных операторов $(x, v) \to W_{x, v}$ в конкретном гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$, удовлетворяющее соотношению (3.2), называется *представлением канонического коммутационного соотношения* Вейля — Сигала. Имеет место важный результат, полученный Стоуном и фон Нейманом.

Теорема 5.1. *Всякие два непрерывных неприводимых представления $(x, v) \to W^{(j)}_{x, v}$; $j = 1, 2$, канонического коммутационного соотношения унитарно эквивалентны, т. е. $W^{(2)}_{x, v} = U^* W^{(1)}_{x, v} U$, где U — изометричный оператор, отображающий пространство $\mathscr{K}_2$ представления $(x, v) \to W^{(2)}_{x, v}$ на пространство $\mathscr{K}_1$ представления $(x, v) \to W^{(1)}_{x, v}$.*

Всякое непрерывное представление канонического коммутационного соотношения является дискретной прямой суммой неприводимых представлений.

Из этих утверждений вытекает, что всякое непрерывное представление унитарно эквивалентно представлению вида

$$(x, v) \to \begin{bmatrix} W^{(0)}_{x, v} & & 0 \\ 0 & W^{(0)}_{x, v} & \\ & & \ddots \end{bmatrix},$$

где $(x, v) \to W^{(0)}_{x, v}$ — фиксированное неприводимое представление. Таким образом, каноническое коммутационное соотношение по существу однозначно описывает кинематику (нерелятивистского) квантового объекта с одной степенью свободы, для данного значения параметра μ.

Мы докажем эту теорему в гл. V. Согласно ей достаточно построить хотя бы одно представление канонического коммутационного соотношения. Рассмотрим пространство $\mathscr{K} = \mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ комплексных квадратично-интегрируемых функций на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и семейство унитарных операторов в $\mathscr{K}$, действующих на функцию ψ по формуле

$$W_{x, v}\psi(\xi) = \exp\left[i\mu v\left(\xi - \frac{x}{2}\right)\right]\psi(\xi - x). \qquad (5.1)$$

Легко убедиться, что операторы $W_{x,v}$ удовлетворяют соотношению (3.2) и что семейство $(x, v) \to W_{x,v}$ непрерывно. Чтобы установить неприводимость, рассмотрим однопараметрические подгруппы $\{V_x\}$, $\{U_v\}$, действующие по формулам

$$V_x\psi(\xi) = \psi(\xi - x), \tag{5.2}$$

$$U_v\psi(\xi) = e^{i\mu v\xi}\psi(\xi). \tag{5.3}$$

Пусть $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}$, $\mathscr{L} \neq [0]$, $\mathscr{H}$, — инвариантное подпространство. Из того, что $\mathscr{L}$ является инвариантным подпространством группы $\{U_v\}$, следует, что существует подмножество $B \subset \mathbb{R}$ ненулевой лебеговой меры, дополнение к которому также имеет ненулевую лебегову меру, такое, что носители всех функций из $\mathscr{L}$ содержатся в B. Однако такое подпространство не может быть инвариантным подпространством группы сдвигов $\{V_x\}$.

Представление (5.1) канонического коммутационного соотношения в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ называется *представлением Шредингера*. Из формул (5.2), (5.3), учитывая, что $V_x = e^{-ixP}$, $U_v = e^{i\mu vQ}$, найдем канонические наблюдаемые в этом представлении

$$\begin{aligned} P\psi(\xi) &= i^{-1}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi), \quad \psi \in \mathscr{D}(P); \\ Q\psi(\xi) &= \xi\psi(\xi), \quad \psi \in \mathscr{D}(Q). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Во всяком случае, это заведомо имеет место для функций из пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой степени ξ. Отметим полезную формулу

$$W_{x,v} = \exp[i(\mu vQ - xP)], \tag{5.5}$$

где $\mu vQ - xP$ — самосопряженное расширение оператора $\mu v\xi - xi^{-1}\frac{d}{d\xi}$, заданного, например, на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Это вытекает из того, что семейство $t \to W_{tx,tv}$; $t \in \mathbb{R}$, где x, v фиксированы, образует, в силу (3.2), группу унитарных операторов, причем согласно (5.1)

$$\frac{d}{dt}W_{tx,tv}\psi(\xi)\big|_{t=0} = (\mu vQ - xP)\psi(\xi).$$

Оператор Q действует как оператор умножения на независимую переменную; поэтому можно сказать, что представление Шредингера «диагонализует» наблюдаемую координаты Q. Вводя дираковские обозначения (см. §§ II.3, II.4), можно условно написать

$$Q = \int \xi \,|\, \xi)\,(\xi \,|\, d\xi,$$

где $|\,\xi)$ — «вектор» физически нереализуемого состояния, в котором объект имеет точно определенную координату ξ. Для спектральной меры оператора Q имеет место формальное соотношение

$$E\,(d\xi) = |\,\xi)\,(\xi\,|\,d\xi,$$

откуда видно, что распределение вероятностей наблюдаемой координаты относительно состояния S дается формулой

$$\mu_S^E\,(d\xi) = (\xi\,|\,S\,|\,\xi)\,d\xi, \tag{5.6}$$

где $(\xi\,|\,S\,|\,\xi')$ — ядро оператора плотности S в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ (см. § II.7). Для чистого состояния $S_\psi = |\,\psi)\,(\psi\,|$

$$\mu_{S_\psi}^E\,(d\xi) = |\,(\xi\,|\,\psi)\,|^2\,d\xi.$$

Чем более сконцентрировано это распределение в некоторой точке $\bar{Q}$, т. е. чем меньше дисперсия $\mathsf{D}_S(Q)$, тем сильнее сходство рассматриваемого квантового объекта с классическим объектом, строго локализованным в пространстве (частицей).

С другой стороны, рассмотрим оператор $\frac{1}{\mu}P = \frac{1}{i\mu}\frac{d}{d\xi}$. Его формальные собственные функции $|\,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\eta\xi}$ описывают физически нереализуемые состояния, в которых объект имеет точно определенную скорость η/μ. Распределение вероятностей наблюдаемой P относительно состояния S дается формулой

$$\mu_S^F\,(d\eta) = (\eta\,|\,S\,|\,\eta)\,d\eta. \tag{5.7}$$

Заметим, что, переходя к преобразованию Фурье $\tilde{\psi}(\eta) = (\eta\,|\,\psi)$, мы получаем унитарно эквивалентное (так называемое *импульсное*) представление канонических коммутационных соотношений, в котором диагонален оператор P, а оператор Q задается оператором дифференцирования. Функция $(\eta|S|\eta')$ из формулы (5.7) является ядром оператора плотности S в этом представлении.

Из выражений для Q и P в представлении Шредингера непосредственно получаем $QP\psi - PQ\psi = i\psi$, например, для $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, так что на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$[Q, P] = i\mathrm{I}. \tag{5.8}$$

Это соотношение называется **каноническим коммутационным соотношением Гейзенберга**. В то время как правая часть его всюду определена, в левой находятся неограниченные операторы, и поэтому его нельзя распространить на всё $\mathscr{H}$. Формально соотношение (5.8) равносильно соотношению Вейля — Сигала, однако последнее предпочтительнее, так как формулируется в терминах ограниченных операторов (причем непосредственно связанных с представлением кинематической группы). Более строгая формулировка соотношения неопределенностей (5.8) имеет вид

$$2\,\mathrm{Im}\,(Q\psi\ P\psi) = (\psi|\psi), \quad \psi \in \mathscr{D}(Q) \cap \mathscr{D}(P),$$

и может быть непосредственно получена из (5.4). Отсюда, пользуясь общим соотношением неопределенностей (II.6.7), вновь получаем соотношение неопределенностей Гейзенберга (4.7).

Из соотношений неопределенностей вытекает, что чем более точно определенной является скорость объекта, т. е. чем меньше $\mathsf{D}_S(P)$, тем менее определенной становится локализация объекта в пространстве. Можно сказать, что в состояниях с $\mathsf{D}_S(P) \approx 0$ квантовый объект проявляет сходство с **классической волной**. Таким образом, в зависимости от приготовления исходного состояния, квантовый объект в измерениях может проявлять как черты классической частицы, так и классической волны.

§ 6. Состояния минимальной неопределенности. Соотношения полноты и ортогональности

Чистые состояния $S = S_\psi$, для которых достигается знак равенства в соотношении неопределенностей (4.7), называются *состояниями минимальной неопределенности*. Согласно (II.6.8) это имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого вещественного c

$$[(Q-\bar{Q})+ic(P-\bar{P})]\psi=0 \quad (\bar{Q}=\mathsf{E}_S(Q),\ \bar{P}=\mathsf{E}_S(P)). \tag{6.1}$$

Покажем, что для каждого $c>0$ это уравнение имеет существенно единственное решение $\psi\in\mathscr{L}^2(-\infty,\ \infty)$.

В представлении Шредингера уравнение (6.1) принимает вид

$$\left[(\xi-\bar{Q})+c\left(\frac{d}{d\xi}-i\bar{P}\right)\right](\xi\mid\psi)=0. \tag{6.2}$$

Решая его и используя условие нормировки $\int|(\xi\mid\psi)|^2\,d\xi=1$, получаем

$$(\xi\mid\psi)=\frac{k}{\sqrt[4]{\pi c}}\exp\left[i\bar{P}\xi-\frac{(\xi-\bar{Q})^2}{2c}\right],$$

где $|k|=1$, $c>0$. Полагая $k=\exp\left(-\frac{i\bar{Q}\bar{P}}{2}\right)$, $c=2\sigma^2$ и обозначая соответствующий вектор состояния $|\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2)$, имеем

$$(\xi\mid\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\exp\left[i\bar{P}\left(\xi-\frac{\bar{Q}}{2}\right)-\frac{(\xi-\bar{Q})^2}{4\sigma^2}\right]. \tag{6.3}$$

Смысл параметров $\bar{P}$, $\bar{Q}$, σ^2 очевиден; $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ являются средними значениями наблюдаемых P и Q, а

$$\sigma^2=\mathsf{D}_S(Q)=[4\mathsf{D}_S(P)]^{-1}.$$

Состояния минимальной неопределенности $|\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2)\times\times(\sigma^2;\ \bar{Q},\ \bar{P}|$ называются иногда «волновыми пакетами». Особую роль играет *основное состояние* с нулевыми средними значениями

$$(\xi\mid 0,\ 0;\ \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\sigma^2}\right). \tag{6.4}$$

Вектор состояния $|\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2)$ получается из основного действием оператора сдвига $W_{\bar{Q},\ \bar{P}/\mu}$:

$$|\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2)=W_{\bar{Q},\ \bar{P}/\mu}|0,\ 0;\ \sigma^2). \tag{6.5}$$

Покажем, что для любого фиксированного σ^2 семейство векторов $\{|\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2);\ (\bar{P},\bar{Q})\in\mathbb{R}^2\}$ обладает свойством п о л н о т ы

$$\iint|\bar{P},\ \bar{Q};\ \sigma^2)(\sigma^2;\ \bar{Q},\ \bar{P}|\frac{d\bar{P}\,d\bar{Q}}{2\pi}=1. \tag{6.6}$$

В отличие от формальных соотношений типа (II.3.12), (II.4.16), это равенство, если понимать интеграл в смысле слабой сходимости, имеет непосредственное истолкование, так как $|\bar{P}, \bar{Q}; \sigma^2)$ является обычным вектором гильбертова пространства. Однако эти векторы не ортогональны при различных значениях параметров $\bar{P}, \bar{Q}$; более того, между ними существуют линейные соотношения. Можно сказать, что семейство $\{|\bar{P}, \bar{Q}; \sigma^2)\}$ является «переполненной» системой векторов.

Свойство полноты (6.6) вытекает из так называемых соотношений ортогональности для неприводимых представлений канонических коммутационных соотношений. Подобные соотношения имеют общую природу и выполняются для неприводимого представления достаточно произвольной группы. Мы установим эти соотношения, для интересующего нас частного случая, элементарными средствами.

Предложение 6.1. *Пусть* $(x, v) \to W_{x,v}$ — *непрерывное неприводимое представление канонических коммутационных соотношений* (3.2) *в пространстве* $\mathscr{H}$. *Матричные элементы* $(\psi | W_{x,v}\psi)$ *являются квадратично-интегрируемыми функциями от* (x, v). *Если* $\{e_j\}$ — *базис в* $\mathscr{H}$, *то функции*

$$\left\{\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}\,(e_j | W_{x,v}e_k)\right\}$$

образуют базис в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$ *комплексных квадратично-интегрируемых функций от* (x, v), *так что*

$$\frac{1}{2\pi}\iint \overline{(e_j | W_{x,v}e_k)}\,(e_l | W_{x,v}e_m)\,dx\,dv = \frac{1}{\mu}\,\delta_{jl}\,\delta_{km} \qquad (6.7)$$

(всюду имеются в виду ортонормированные базисы).

Доказательство. В силу теоремы Стоуна — фон Неймана мы можем иметь дело с представлением Шредингера. Согласно (5.1), для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\varphi | W_{x,v}\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{ixy}{2}}\int \overline{\varphi(\xi)}\,e^{iy\xi}\psi(\xi - x)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{ixy}{2}}\iint \overline{\varphi(\xi)}\,\tilde{\psi}(\eta)\,e^{i\eta\xi}e^{-i(\eta x - y\xi)}\,d\xi\,d\eta, \qquad (6.8)$$

где $\tilde{\psi}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi(\xi)\,e^{-i\eta\xi}\,d\xi$, а $y = \mu v$. Так как φ, ψ

квадратично-интегрируемы, то $\check{\psi}$ также квадратично-интегрируема и $\overline{\varphi(\xi)}\,\tilde{\psi}(\eta)\,e^{i\eta\xi}\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Поэтому интеграл в (6.8) имеет смысл как преобразование Фурье $\mathscr{F}$ квадратично-интегрируемой функции и функция $(\varphi\,|\,W_{x,v}\psi)$ принадлежит $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Если $\{e_j\}$ — базис в $\mathscr{H}$, то функции $\overline{e_j(\xi)}\,\tilde{e}_k(\eta)\,e^{i\eta\xi}$ образуют базис в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Поэтому их преобразования Фурье $\mathscr{F}[\bar{e}_j(\xi)\,\tilde{e}_k(\eta)\,e^{i\eta\xi}]$ также образуют базис в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e_j\,|\,W_{x,v}e_k)=$ $=e^{\frac{ixy}{2}}\mathscr{F}[\overline{e_j(\xi)}\,\tilde{e}_k(\eta)\,e^{i\eta\xi}]$ образуют базис в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$ функций от переменных x, $y=\mu v$, откуда, в частности, следует (6.7).

Разлагая произвольные векторы φ, ψ, ... по базису $\{e_j\}$, получаем

$$\frac{\mu}{2\pi}\int\!\!\int\overline{(\varphi_1\,|\,W_{x,v}\psi_1)}\,(\varphi_2\,|\,W_{x,v}\psi_2)\,dx\,dv=\overline{(\varphi_1\,|\,\varphi_2)}\,(\psi_1\,|\,\psi_2). \tag{6.9}$$

Полагая $\psi_1=\psi_2=\psi$, где $(\psi\,|\,\psi)=1$, получаем

$$\frac{\mu}{2\pi}\int\!\!\int(\varphi_2\,|\,W_{x,v}\psi)\,(\psi\,|\,W_{x,v}\varphi_1)\,dx\,dv=(\varphi_2\,|\,\varphi_1),$$

т. е.

$$\frac{\mu}{2\pi}\int\!\!\int W_{x,v}\,|\,\psi)\,(\psi\,|\,W^*_{x,v}\,dx\,dv=\mathrm{I}, \tag{6.10}$$

где интеграл понимается в смысле слабой сходимости. Таким образом, для любого единичного вектора ψ семейство $\{W_{x,v}\,|\,\psi);\ (x,\ v)\in\mathbb{R}^2\}$ является «переполненной» системой векторов. Это, в частности, верно и для семейства векторов состояний минимальной неопределенности, которые получаются из вектора основного состояния $|0,\ 0;\ \sigma^2)$.

§ 7. Совместные измерения координаты и скорости

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга вытекает, что наблюдаемые скорости P/μ и координаты Q несовместимы. Не существует измерения $M(dx\,dv)$ такого, чтобы измерения $E(dx)$ и $F(dv)$ были по отношению к нему маргинальными, т. е. выполнялось

$$E(dx)=\int M(dx\,dv),\qquad F(dv)=\int M(dx\,dv).$$

Можно ли, основываясь на этом, утверждать, что квантовая теория принципиально исключает возможность совместного измерения координаты и скорости объекта? Последовательное проведение такой точки зрения привело бы к выводам, которые находятся в очевидном противоречии с опытом. Поясним это утверждение.

Практически в эксперименте измеряется часто не сама скорость v, а пропорциональная ей величина — импульс mv, где m — «классическая масса» объекта. Мы объясним смысл величины m позднее, а пока будем рассматривать ее просто как некоторый коэффициент пропорциональности. Полагая $\hbar = m/\mu$, введем *наблюдаемую импульса* $p = \hbar P$. Обозначая $q = Q$, имеем

$$[q,\ p] = i\hbar \tag{7.1}$$

и соотношение неопределенностей

$$\mathsf{D}(q)\,\mathsf{D}(p) \geqslant \hbar^2/4. \tag{7.2}$$

В этих соотношениях $\hbar \neq 0$. Если же $\hbar = 0$, то соотношение (7.1) превращается в условие $[q,\ p] = 0$, характерное для классических теорий, где все наблюдаемые совместимы. Представляется очевидным, что в классическом пределе $\hbar \to 0$ наблюдаемые q и p должны в каком-то смысле «становиться совместно измеримыми». Как согласовать это с несовместимостью q и p при любых сколь угодно малых $\hbar \neq 0$?

Этот «парадокс» можно сформулировать еще более отчетливо, если рассмотреть «макроскопический объект», состоящий из большого числа N квантовых частиц, канонические наблюдаемые которых удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[q_j,\ p_k] = i\hbar\delta_{jk},\quad [q_j,\ q_k] = [p_j,\ p_k] = 0. \tag{7.3}$$

Тогда «макроскопические наблюдаемые» — координата центра масс $q = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_j$ и полный импульс $p = \sum_{j=1}^{N} p_j$ — удовлетворяют тому же коммутационному соотношению (7.1), что и «микроскопические наблюдаемые». Таким образом, соотношения (7.1), (7.2) имеют место и для любой макроскопической степени свободы. Поскольку $\hbar \neq 0$ (хотя оно и очень мало в макроскопическом масштабе), следовало бы признать принципиальную невозможность совместного измерения координаты и импульса и в классической механике.

Очевидно, однако, что такой вывод противоречит экспериментальной практике классической физики, которая повсеместно имеет дело с совместными измерениями. Совместные измерения координат и импульсов встречаются и в экспериментах над микрообъектами; например, по траектории заряженной частицы в камере Вильсона определяются и координата, и импульс частицы (по радиусу кривизны траектории в магнитном поле). По существу, даже в тех случаях, когда измеряется только импульс, экспериментатор располагает и некоторой информацией о локализации «частицы» — например, что она находится в момент измерения в пределах экспериментальной установки. Включая эту информацию в результаты измерения, можно говорить, что здесь также производится некоторое совместное измерение импульса и координаты. Очевидно, однако, что во всех подобных случаях идет речь не о точном, а о каком-то «приближенном» измерении, результаты которого имеют некоторый случайный разброс. Поскольку подобные измерения являются обычными в физике, они должны иметь отражение в математическом формализме теории, претендующей на полное описание явлений микромира.

Вопрос о «приближенных» совместных измерениях координаты и скорости находит естественное решение в рамках новой концепции квантового измерения, развитой в гл. I, II. Согласно этой концепции, совместное измерение параметров координаты x и скорости v, как и измерение любой пары величин, описывается некоторым разложением единицы $M(dx\,dv)$ в $\mathscr{H}$, причем совместное распределение вероятностей измерения относительно состояния S дается формулой $\mu_S^M(dx\,dv) = \operatorname{Tr} SM(dx\,dv)$. Чтобы выделить из разложений единицы те, которые действительно могут соответствовать совместным измерениям координаты и скорости, мы привлечем соображения ковариантности, аналогичные тем, которые использовались в § 3 для выяснения кинематического смысла наблюдаемых P и Q. Предположим, что состояние S приготовляется некоторой установкой, с которой связана исходная система отсчета. Если теперь такая же установка движется со скоростью v и находится в точке x относительно исходной системы, то приготовляемое ей состояние описывается оператором плотности

$$S_{x,v}=W_{x,v}SW^*_{x,v}.$$

Пусть разложение единицы $M(dx\,dv)$ описывает совместное измерение координаты и скорости; тогда естественно потребовать, чтобы распределение вероятностей измерения $M(dx\,dv)$ относительно «сдвинутого» состояния $S_{x,v}$ было сдвигом на вектор (x, v) исходного распределения, т. е.

$$\mu^M_{S_{x,v}}(B)=\mu^M_S(B_{-x,-v}),$$

где $B_{-x,-v}=\{(\xi-x,\ \eta-v):\ (\xi,\ \eta)\in B\}$ — сдвиг на вектор

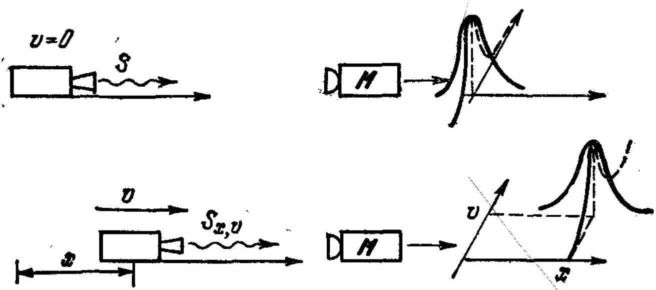

Рис. 9.

— (x, v) множества B (рис. 9), причем это должно выполняться для любого состояния S.

Это равносильно условию

$$W^*_{x,v}M(B)W_{x,v}=M(B_{-x,-v});\qquad B\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^2),\tag{7.4}$$

которое аналогично условиям ковариантности (4.3), (4.5) для измерений координаты и скорости. Измерения, удовлетворяющие условию (7.4), называются ковариантными по отношению к представлению $(x, v)\to W_{x,v}$ кинематической группы.

Приведем весьма общий пример разложения единицы, удовлетворяющего условию ковариантности (7.4). Пусть ψ — единичный вектор в $\mathscr{H}$. Рассмотрим операторнозначную меру

$$M(B)=\iint\limits_B W_{x,v}|\psi)(\psi|W^*_{x,v}\frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi};\qquad B\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^2).$$

Интеграл здесь понимается в смысле слабой сходимости; он сходится в силу квадратичной интегрируемости матричных элементов представления (предложение 6.1). Это соотношение действительно задает измерение: $M(B) \geqslant 0$ в силу положительности подынтегральной функции, σ-аддитивность вытекает из свойств определенного интеграла, а условие нормировки $M(\mathbb{R}^2) = I$ равносильно соотношению полноты (6.10) для семейства векторов $\{W_{x,v}|\psi)\}$; $(x, v) \in \mathbb{R}^2\}$. Мы условимся записывать эту формулу в виде

$$M(dx\,dv) = W_{xv}|\psi)(\psi|W_{xv}^* \frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi}. \tag{7.5}$$

Ковариантность этого измерения по отношению к представлению $(x, v) \to W_{x,v}$ является прямым следствием канонического коммутационного соотношения (3.2) Распределение вероятностей результатов измерения относительно состояния S имеет вид

$$\mu_S(dx\,dv) = (\psi|W_{xv}^* S W_{xv}\psi)\frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi}. \tag{7.6}$$

Особенно важным является *каноническое измерение*, соответствующее выбору в качестве ψ вектора основного состояния $|0, 0; \sigma^2)$. Тогда, согласно (6.5),

$$M(dx\,dv) = |\mu v, x; \sigma^2)(\sigma^2; x, \mu v|\frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi}, \tag{7.7}$$

а распределение вероятностей имеет вид

$$\mu_S(dx\,dv) = (\sigma^2; x, \mu v|S|\mu v, x; \sigma^2)\frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi}. \tag{7.8}$$

Дадим идеализированное описание эксперимента, который можно рассматривать как реализацию измерения (7.5) в смысле § II.5. Кроме исходного пространства $\mathcal{H}$ и определенных в нем операторов P, Q введем идентичное пространство $\mathcal{H}_0$ и операторы P_0, Q_0 в $\mathcal{H}_0$, удовлетворяющие каноническому коммутационному соотношению. Рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ и действующие в нем операторы

$$\tilde{P} = P \otimes I_0 + I_0 \otimes P_0, \qquad \tilde{Q} = Q \otimes I_0 - I \otimes Q_0, \tag{7.9}$$

где I_0 — единичный оператор в $\mathcal{H}_0$. Для определенности можно рассматривать представления Шредингера $Q = \xi_1$,

$P=i^{-1}\frac{d}{d\xi_1}$ в $\mathscr{H}=\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ и $Q_0=\xi_2$, $P_0=i^{-1}\frac{d}{d\xi_2}$ в $\mathscr{H}_0=$ $=\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, где ξ_1, ξ_2 — независимые переменные; тогда $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0=\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$ и

$$\tilde{P}=i^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right),\quad \tilde{Q}=\xi_1-\xi_2.$$

Наблюдаемые $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ коммутируют и, следовательно, они совместно измеримы в смысле § II.6 *), т. е. существует ортогональное разложение единицы $E(dx\,dv)$, которое является совместной спектральной мерой операторов $\tilde{P}/\mu$, $\tilde{Q}$.

Пусть вспомогательная степень свободы $\mathscr{H}_0$ описывается состоянием $S_0=|\bar{\psi})(\bar{\psi}|$, где вектор $\bar{\psi}$ задается в представлении Шредингера функцией $\overline{\psi(\xi_2)}=(\xi_2|\bar{\psi})$, комплексно сопряженной к функции $\psi(\xi)=(\xi|\psi)$ вектора ψ из (7.5). В частности, если ψ — основное состояние, то $\bar{\psi}=\psi$. Мы покажем, что совокупность $(\mathscr{H}_0, S_0, E)$ является реализацией измерения (7.5), однако прежде выясним ее кинематический смысл. Рассмотрим движение квантовой «частицы» в плоскости ξ_1, ξ_2, и пусть $P=P_{\xi_1}$, $Q=Q_{\xi_1}$ — канонические наблюдаемые, соответствующие оси ξ_1. Введем новую систему координат ξ_1', ξ_2', повернутую относительно исходной на угол $-\pi/4$ (рис. 10). Канонические наблюдаемые вдоль новых осей найдутся по формулам

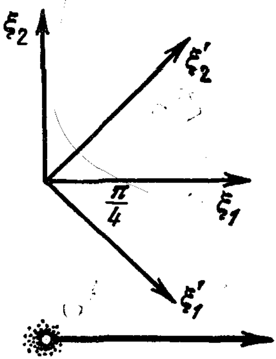

Рис. 10.

$$P_{\xi_2'}=i^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2'}=\left(i\sqrt{2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)=\sqrt{2}^{-1}(P_{\xi_1}+P_{\xi_2}),$$
$$Q_{\xi_1'}=\xi_1'=\sqrt{2}^{-1}(\xi_1-\xi_2)=\sqrt{2}^{-1}(Q_{\xi_1}-Q_{\xi_2}).$$

Пусть теперь состояние частицы приготовлено таким образом, что степень свободы ξ_2 описывается состоянием S_0.

*) Это вытекает из того, что коммутируют унитарные группы $\{e^{i\xi\tilde{Q}}\}$, $\{e^{i\eta\tilde{P}}\}$.

Если S_0 — основное состояние, то это означает, что частица совершает движение вдоль оси ξ_1, а перемещения вдоль направления ξ_2 обусловлены лишь неустранимыми квантовыми флуктуациями. Наблюдаемые $P_{\xi_2'}$, $Q_{\xi_1'}$ относятся к взаимно перпендикулярным направлениям и допускают совместное измерение. С точностью до несущественного масштабного множителя они совпадают с $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$.

Предложение 7.1. *Совокупность* $(\mathscr{H}_0, S_0, E\,(dx\,dv))$, *где* E — *совместное спектральное разложение операторов* $\tilde{P}/\mu$, $\tilde{Q}$, *образует реализацию измерения* (7.5) *в том смысле, что*

$$\mu^E_{S\otimes S_0}(dx\,dv) = \mu^M_S(dx\,dv)$$

для любого состояния S *в* $\mathscr{H}$.

Доказательство*). Рассмотрим характеристическую функцию (преобразование Фурье) распределения вероятностей измерения E относительно состояния $S\otimes S_0$. Согласно формуле (II.6.5), оно равно

$$\iint e^{i(\xi x+\eta\mu v)}\mu^E_{S\otimes S_0}(dx\,dv) = \operatorname{Tr}\, S\otimes S_0 e^{i(\xi\tilde{Q}+\eta\tilde{P})}$$

(коэффициент μ введен для удобства обозначений). Учитывая (7.9), получаем, что это равно

$$\operatorname{Tr} S e^{i(\xi Q+\eta P)}\cdot(\overline{\psi}\,|\,e^{i(-\xi Q_0+\eta P_0)}\overline{\psi}).$$

Преобразуем второй сомножитель, используя (5.5), (5.1). Имеем

$$(\overline{\psi}\,|\,e^{i(-\xi Q_0+\eta P_0)}\overline{\psi}) =$$
$$= (\overline{\psi}\,|\,W_{-\eta,\,-\xi/\mu}\overline{\psi}) = \int \psi(\lambda)\, e^{-i\xi\left(\lambda+\frac{\eta}{2}\right)}\overline{\psi(\lambda+\eta)}\,d\lambda =$$
$$= \overline{(\psi\,|\,W_{-\eta,\,\xi/\mu}\psi)} = \overline{\operatorname{Tr} S_\psi e^{i(\xi Q_0+\eta P_0)}}.$$

Вводя обозначение

$$\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S] = \operatorname{Tr} S e^{i(\eta P+\xi Q)}, \tag{7.10}$$

мы можем записать характеристическую функцию в виде

$$\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S]\cdot\overline{\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S_\psi]}.$$

*) В доказательстве нам придется использовать след ядерных операторов (§ II.7) и некоторые факты, которые будут доказаны в гл. V.

Дальнейшие рассуждения опираются на свойства «некоммутативного преобразования Фурье» (7.10), которые мы установим в гл. V. В частности, в § V.3 будет доказано, что для любого оператора плотности функция (7.10) квадратично-интегрируема. Поэтому определено обратное (обычное) преобразование Фурье характеристической функции

$$\frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint e^{-i(\xi x+\eta\mu v)}\mathcal{F}_{\eta,\xi}[S]\overline{\mathcal{F}_{\eta,\xi}[S_\psi]}\,d\eta\,d\xi, \qquad (7.11)$$

которое дает плотность распределения вероятностей $\mu^E_{S\otimes S_0}$. Используя свойство 3) из § V.3, имеем

$$e^{i(\xi x+\eta\mu v)}\mathcal{F}_{\eta,\xi}[S_\psi]=\mathcal{F}_{\eta,\xi}[W_{x,v}S_\psi W^*_{x,v}].$$

Согласно равенству Парсеваля (V.3.5) для некоммутативного преобразования Фурье, выражение (7.11) равно

$$\frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint \mathcal{F}_{\eta,\xi}[S]\overline{\mathcal{F}_{\eta,\xi}[W_{x,v}S_\psi W^*_{x,v}]}\,d\eta\,d\xi=$$
$$=\frac{\mu}{2\pi}\operatorname{Tr}SW_{x,v}S_\psi W^*_{x,v}=(\psi\,|\,W^*_{x,v}SW_{x,v}\psi)\frac{\mu}{2\pi},$$

что совпадает с плотностью распределения (7.6).

Теперь мы покажем, что каноническое измерение является в некотором смысле наилучшим среди всех ковариантных измерений координаты — скорости вида (7.5). Заметим, что всякое ковариантное измерение дает несмещенные, с точностью до постоянной, значения параметров x, v:

$$\mathsf{E}_x\{M\}\equiv\iint\hat{x}\mu^M_{S_{x,v}}(d\hat{x}\,d\hat{v})=x_0+x,$$
$$\mathsf{E}_v\{M\}\equiv\iint\hat{v}\mu^M_{S_{x,v}}(d\hat{x}\,d\hat{v})=v_0+v.$$

Из ковариантности также следует, что в предположении конечности вторых моментов маргинальные дисперсии

$$\mathsf{D}_x\{M\}\equiv\iint(\hat{x}-\mathsf{E}_x\{M\})^2\mu^M_{S_{x,v}}(d\hat{x}\,d\hat{v}),$$
$$\mathsf{D}_v\{M\}\equiv\iint(\hat{v}-\mathsf{E}_v\{M\})^2\mu^M_{S_{x,v}}(d\hat{x}\,d\hat{v})$$

не зависит от параметров x, v и равны своему значению для исходного состояния S. Тогда для любого ковариантного измерения вида (7.5) в силу доказанного предложения и соотношений (7.9)

$$\mathsf{D}_x\{M\} = \mathsf{D}_S(Q) + \mathsf{D}_{S_0}(Q_0),\quad \mathsf{D}_v\{M\} = \frac{1}{\mu^2}(\mathsf{D}_S(P) + \mathsf{D}_{S_0}(P_0)). \qquad (7.12)$$

В качестве меры точности совместного измерения параметров x и v возьмем взвешенную сумму маргинальных дисперсий

$$\mathscr{R}\{M\} = g_x \mathsf{D}_x\{M\} + g_v \mathsf{D}_v\{M\}, \qquad (7.13)$$

где g_x, $g_v > 0$ — произвольные коэффициенты. Подставляя сюда (7.12), учитывая соотношение неопределенностей $\mathsf{D}_{S_0}(Q_0)\,\mathsf{D}_{S_0}(P_0) \geqslant 1/4$ и неравенство $\alpha+\beta \geqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$ (α, $\beta \geqslant 0$), получаем, что

$$\mathscr{R}\{M\} \geqslant g_x \mathsf{D}_S(Q) + g_v \mathsf{D}_S(P/\mu) + \mu^{-1}\sqrt{g_x g_v}, \qquad (7.14)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда S_0 — основное состояние $|0,\ 0;\ \sigma^2)(\sigma^2;\ 0,\ 0|$, где

$$\sigma^2 \equiv \mathsf{D}_{S_0}(Q_0) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{g_v}{g_x}},\qquad \mathsf{D}_{S_0}(P_0) = \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{g_x}{g_v}}. \qquad (7.15)$$

В гл. IV мы покажем, что этот результат справедлив в классе всех ковариантных измерений координаты — скорости.

Чтобы рассмотреть классический предел, положим $\mu = m/\hbar$, $p = \hbar P$. Тогда (7.14) принимает вид

$$\mathscr{R}\{M\} \geqslant g_x \mathsf{D}_S(q) + g_v \mathsf{D}_S(p/m) + \hbar m^{-1}\sqrt{g_x g_v}.$$

Считая, что при $\hbar \to 0$ $\mathsf{D}_S(p) \sim \mathrm{const}$, $m \sim \mathrm{const}$, из (7.15) получаем $\mathsf{D}_{S_0}(q_0) \sim \hbar$, $\mathsf{D}_{S_0}(p_0) \sim \hbar$, так что дисперсии добавочных членов, обеспечивающих коммутативность операторов $\tilde{p} = p \otimes I_0 + I \otimes p_0$, $\tilde{q} = q \otimes I_0 - I \otimes q_0$, стремятся к нулю и измерение $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ переходит в классическое измерение наблюдаемых p, q.

§ 8. Динамика квантовой частицы с одной степенью свободы

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы показать, что принцип галилеевой относительности позволяет описать не только кинематику квантовой частицы, но и все возможные динамики, т. е. развитие состояния во времени. Изложение будет неполным и нестрогим, так как аккуратное проведение доказательств с неограниченными операторами увело бы нас в сторону от основного содержания.

Для того чтобы охватить и временну́ю эволюцию квантового состояния, необходимо рассмотреть полную галилееву группу преобразований системы отсчета

$$\xi' = \xi + x + v\tau,$$
$$\tau' = \tau + t.$$

Каждое такое преобразование характеризуется тремя параметрами (x, v, t), причем закон умножения дается формулой

$$(x_1, v_1, t_1)(x_2, v_2, t_2) = (x_1 + x_2 + v_1 t_2, v_1 + v_2, t_1 + t_2).$$

Согласно общей схеме, мы должны найти всевозможные неприводимые проективные представления $(x, v, t) \to W_{x,v,t}$ галилеевой группы. Основываясь на общей теории проективных представлений, можно показать, что за счет выбора несущественных числовых множителей соотношение (1.6) для галилеевой группы всегда можно привести к виду

$$\begin{aligned} W_{x_1, v_1, t_1} W_{x_2, v_2, t_2} = \\ = \exp\left[-\frac{i\mu}{2}(x_1 v_2 - x_2 v_1 + t_2 v_1 v_2)\right] \times \\ \times W_{x_1 + x_2 + v_1 t_2,\, v_1 + v_2,\, t_1 + t_2}, \end{aligned} \qquad (8.1)$$

где $\mu \neq 0$. Ограничение этой формулы на группу кинематических преобразований $W_{x,v} \equiv W_{x,v,0}$; $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, как и следовало ожидать, совпадает с каноническим коммутационным соотношением. Воспользуемся тем, что мы уже знаем описание представлений кинематической группы и исследуем связь между кинематикой и динамикой, т. е. семейством $\{W_{x,v}\}$ и однопараметрической унитарной группой временны́х сдвигов $V_t \equiv W_{0,0,t}$; $t \in \mathbb{R}$. Пользуясь формулой (8.1), получаем соотношение

$$V_t^* W_{x,v} V_t = W_{x-vt,\, v},$$

которое дает связь между $\{V_t\}$ и $\{W_{x,v}\}$.

Полагая здесь поочередно $x=0$ и $v=0$, получаем два основных соотношения:

$$V_t^* U_v V_t = W_{-vt,\, v}, \tag{8.2}$$

$$V_t^* V_x V_t = V_x. \tag{8.3}$$

Приведем эвристические аргументы, которые показывают, что эти соотношения определяют вид инфинитезимального оператора H унитарной группы $V_t = e^{-itH}$, задающей временную эволюцию состояния. Именно, из соотношения (8.2) вытекает, что

$$H = \frac{P^2}{2\mu} + \mathrm{v}(Q), \tag{8.4}$$

где $\mathrm{v}(\cdot)$ — некоторая вещественная функция, а дополнительный учет (8.3) приводит к однозначно (с точностью до несущественной аддитивной постоянной) определенному гамильтониану

$$H = \frac{P^2}{2\mu}. \tag{8.5}$$

Полагая $X=Q$ в формуле (2.6), имеем

$$\frac{d}{dt} \mathsf{E}_t(Q) = \mathsf{E}_t(i[H, Q]). \tag{8.6}$$

С другой стороны, учитывая, что $Q = (i\mu)^{-1} \frac{d}{dv} U_v \big|_{v=0}$, и соотношение (8.2), получаем

$$\frac{d}{dt} \mathsf{E}_t(Q) = (i\mu)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial v} \mathsf{E}_t(U_v) \big|_{v=0} = \\ = (i\mu)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau\, \partial v} \mathsf{E}_t(W_{-v\tau,\, v}) \big|_{\tau=v=0}.$$

Согласно (5.5), $W_{-v\tau,\, v} = \exp i(\mu v Q + v\tau P)$, откуда

$$\frac{d}{dt} \mathsf{E}_t(Q) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\tau} \mathsf{E}_t(\mu Q + \tau P) \big|_{\tau=0} = \frac{1}{\mu} \mathsf{E}_t(P). \tag{8.7}$$

Сравнивая (8.6) и (8.7), имеем

$$\frac{1}{\mu} \mathsf{E}_t(P) = \mathsf{E}_t(i[H, Q]).$$

Так как состояние S_t произвольно, то мы имеем основание написать формальное соотношение

$$\frac{1}{\mu} P = i[H, Q].$$

Это соотношение можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение относительно H; его общее решение представляется в виде суммы частного решения H_0 и общего решения v однородного уравнения

$$[\mathrm{v},\ Q]=0.$$

На рассматриваемом здесь формальном уровне общее решение этого уравнения имеет вид $\mathrm{v}=\mathrm{v}(Q)$, где $\mathrm{v}(\cdot)$ — произвольная вещественная функция. Покажем, что можно взять H_0 в виде $H_0=\frac{P^2}{2\mu}$. Для этого заметим, что для любой дифференцируемой функции $f(\cdot)$ имеют место соотношения

$$i[f(Q),\ P]=-f'(Q),\quad i[Q,\ f(P)]=-f'(P). \tag{8.8}$$

Первое соотношение вытекает из того, что в представлении Шредингера $\left[f(x)\frac{d}{dx}-\frac{d}{dx}f(x)\right]\psi(x)=-f'(x)\psi(x)$; второе совершенно аналогично получается в импульсном представлении. Полагая в нем $f(P)=\frac{P^2}{2\mu}$, получаем $i\left[Q,\ \frac{P^2}{2\mu}\right]=$ $=-\frac{P}{\mu}$, что и требовалось. Таким образом, мы получили (8.4) как формальное следствие (8.2). Условие (8.3) в терминах инфинитезимальных операторов имеет вид

$$[H,\ P]=0,$$

откуда $\mathrm{v}(Q)=\mathrm{const}$ и $H=\frac{P^2}{2\mu}+\mathrm{const}$.

Таким образом, требование галилеевой относительности однозначно определяет вид гамильтониана свободной квантовой частицы; если рассматривается движение во внешнем потенциальном поле, не зависящем от времени, то условие пространственной однородности (8.3) следует опустить и требование ограниченной галилеевой относительности (8.2) дает общий вид гамильтониана во внешнем поле (8.4).

Установим теперь смысл константы μ и членов, входящих в гамильтониан. Рассмотрим состояние S, для которого распределение вероятностей наблюдаемой координаты (5.6) концентрируется вблизи среднего значения $\mathsf{E}(Q)$. Высокая степень локализации в пространстве позволяет рассматривать квантовый объект в данном состоянии S как «частицу» с координатой $\mathsf{E}(Q)$. Согласно (8.7), скорость этой частицы

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(Q)=\mathsf{E}_t\left(\frac{P}{\mu}\right);$$

это еще раз подтверждает, что оператор P/μ должен ассоциироваться с наблюдаемой скорости. Так как объект проявляет себя как классическая частица, то может быть экспериментально измерена его «классическая масса» m; классический импульс, который определяется как произведение массы на скорость, равен

$$m\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(Q)=\mathsf{E}_t(\hbar P),$$

где $\hbar=m/\mu$. Таким образом, оператор $p=\hbar P$ представляет наблюдаемую импульса. Дифференцируя это соотношение, получаем согласно (2.6)

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{E}_t(Q)=\hbar\mathsf{E}_t(i[H,\ P]).$$

По формулам (8.8), (8.4) получаем $i[H,\ P]=i[\mathrm{v}(Q),\ P]=-\mathrm{v}'(Q)$, откуда вытекает «уравнение Ньютона» для рассматриваемого «почти классического» объекта

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{E}_t(Q)=-\mathsf{E}_t(\hbar\mathrm{v}'(Q)).$$

Отсюда видно, что функцию $\hbar\mathrm{v}(Q)=V(Q)$ можно интерпретировать как классическую потенциальную энергию. Формулу (8.4) можно тогда рассматривать как аналог классической формулы

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(q),$$

представляющей полную энергию частицы в виде суммы кинетической и потенциальной. Полагая здесь

$$p=\hbar P,\quad q=Q,\quad V(Q)=\hbar\mathrm{v}(Q),$$

получаем $E=\hbar H$, где H — гамильтониан. Динамическое уравнение (2.4) в представлении Шредингера принимает вид

$$i\frac{\partial\psi_t(x)}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi_t(x)}{\partial x^2}+\frac{V(x)}{\hbar}\psi_t(x).$$

Отношение $\hbar = m/\mu$ существенным образом входит в это уравнение и, следовательно, может быть определено из экспериментов, в которых обнаруживаются неклассические (волновые) свойства данного квантового объекта. Величина $\hbar$ оказывается универсальной постоянной, пропорциональной постоянной Планка h, а именно $\hbar = h/2\pi$. Наличие такой универсальной постоянной показывает, что существует некоторая естественная единица массы; постоянная $\hbar$ есть коэффициент, связывающий единицу массы, принятую в классической физике, с этой естественной единицей. Если же условиться измерять массу в естественных единицах, то можно считать $\hbar = 1$ и мы будем иногда пользоваться этим соглашением.

§ 9. Наблюдаемая времени

Одна из известных трудностей интерпретации квантовой механики связана с невозможностью сопоставить ряду физических величин самосопряженный оператор, т. е. наблюдаемую в том смысле, который вкладывает в это понятие традиционная концепция измерения. К таким величинам относится, в частности, время. Временны́е измерения столь же обычны в экспериментальной практике, как и измерения координаты, импульса, энергии, и отсутствие их математического эквивалента означало бы серьезный дефект теории. Мы покажем здесь, что измерения времени находят естественное место в квантовой механике, если воспользоваться неортогональными разложениями единицы. Таким образом, упомянутая трудность не является органическим недостатком квантовой теории, а обусловлена узостью традиционной концепции наблюдаемой.

Рассмотрим время t как параметр семейства состояний

$$S_t = V_t S V_t^*,$$

характеризующий временно́й отсчет в процедуре приготовления состояния. Напомним, что для любого несмещенного измерения $M(d\hat{t})$ параметра t имеет место соотношение

$$\mathsf{D}_t\{M\} \geqslant \frac{\hbar^2}{4\mathsf{D}_t(E)}, \tag{9.1}$$

где $E = \hbar H$. Несмещенное измерение можно рассматривать как более или менее точное измерение времени t, а (9.1) является «соотношением неопределенностей», ограничивающим точность такого измерения. Однако существуют ли вообще несмещенные измерения параметра времени t? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим условие ковариантности измерения $M(d\hat{t})$ по отношению к группе временных сдвигов

$$V_t^* M(B) V_t = M(B_{-t}); \qquad -\infty < t < \infty, \tag{9.2}$$

аналогичное условию (4.3) для измерений координаты. Это условие означает, что перенос во времени процедуры приготовления отражается в соответствующем сдвиге распределения вероятностей измерения

$$\mu_{S_t}^M(B) = \mu_S^M(B_{-t}); \qquad -\infty < t < \infty.$$

Отсюда при условии конечности первого момента вытекает несмещенность с точностью до постоянной

$$\mathsf{E}_t\{M\} = \mathsf{E}_0\{M\} + t.$$

Поэтому вопрос сводится к построению разложения единицы, удовлетворяющего условию ковариантности (9.2).

Типичным для квантовой механики является случай, когда энергия E ограничена снизу, $E \geqslant \varepsilon_0 \cdot I$; это можно усмотреть из формулы (8.4), определяющей общий вид гамильтониана, и из того, что потенциал $v(\cdot)$ обычно ограничен снизу. При этом условии *не существует ковариантных измерений, которые задавались бы ортогональными разложениями единицы.* В этом и заключается математическая формулировка утверждения, что времени t не соответствует наблюдаемая в традиционном смысле.

Чтобы это доказать, предположим противное и рассмотрим унитарную группу

$$V_\varepsilon = \int e^{i\varepsilon\tau/\hbar} M(d\tau),$$

где $M(d\tau)$ — ковариантное простое измерение. В терминах этой группы условие ковариантности (9.2) принимает вид

$$V_t^* V_\varepsilon V_t = e^{i\varepsilon t/\hbar} V_\varepsilon,$$

или

$$V_\varepsilon^* V_t V_\varepsilon = e^{-i\varepsilon t/\hbar} V_t.$$

Дифференцируя по t при $t=0$ и учитывая, что $V_t=e^{-itE/\hbar}$, получаем

$$V_\varepsilon^* E V_\varepsilon = E+\varepsilon, \qquad -\infty<\varepsilon<\infty.$$

Отсюда следует, что оператор $E+\varepsilon$ имеет ту же нижнюю границу, что и E, т. е. $E+\varepsilon I\geqslant \varepsilon_0 I$, где ε произвольно. Устремляя ε к $-\infty$, мы тогда получили бы, что $\mathscr{D}(E)=[0]$, так как $(\psi|E\psi)=\infty$ для любого $\psi\neq 0$.

Мы укажем неортогональное разложение единицы, удовлетворяющее условию ковариантности (9.2).

Соотношение (9.2) удобно рассматривать в «энергетическом» представлении, которое диагонализует оператор энергии E. Для определенности мы подробно рассмотрим случай свободной частицы в одном измерении. Так как энергия и импульс свободной частицы массы m связаны соотношением $E=\frac{p^2}{2m}$, то в импульсном представлении,

$$\tilde{\psi}(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{-i\xi\eta/\hbar}\psi(\xi)\,d\xi,$$

оператор энергии будет задаваться умножением на $\eta^2/2m$. Полагая $\varepsilon=\eta^2/2m$, имеем

$$(\tilde{\psi}|\tilde{\psi})=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\psi}(\eta)|^2\,d\eta=$$

$$=\sqrt{\frac{m}{2}}\left[\int_0^\infty|\tilde{\psi}(\sqrt{2m\varepsilon})|^2\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}+\int_0^\infty|\tilde{\psi}(-\sqrt{2m\varepsilon})|^2\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right]=$$

$$=\int_0^\infty|\psi_\varepsilon|^2\,d\varepsilon, \qquad (9.3)$$

где

$$\psi_\varepsilon=\sqrt[4]{\frac{m}{2\varepsilon}}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}(\sqrt{2m\varepsilon})\\ \tilde{\psi}(-\sqrt{2m\varepsilon})\end{bmatrix}, \qquad \varepsilon\geqslant 0, \qquad (9.4)$$

а $|\psi_\varepsilon|^2=\psi_\varepsilon^*\psi_\varepsilon$ — евклидова норма двумерного вектора $\psi_\varepsilon\in\mathbb{C}^2$. Формула (9.4) определяет изометрический переход от импульсного представления $\tilde{\psi}(\eta)$ *к энергетическому представлению* ψ_ε, в котором гамильтониан задается умножением на переменную ε, а группа временны́х сдвигов $\{V_t\}$ — умножением на $\{\exp(-i\varepsilon t/\hbar)\}$. Пространство энергетического представления есть, таким образом, пространство $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0, \infty)$ функций на $(0, \infty)$ со значениями в $\mathbb{K}=\mathbb{C}^2$ и с интегрируемым квадратом нормы (9.3).

Рассмотрим в этом пространстве оператор $T = i\hbar \frac{d}{d\varepsilon}$ с областью определения

$$\mathscr{D}(T) = \left\{ \psi_\varepsilon:\ \psi_0 = 0,\ \int_0^\infty \left| \frac{d}{d\varepsilon} \psi_\varepsilon \right|^2 d\varepsilon < \infty \right\}.$$

Как и оператор P_+ в $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ (см. § II.4), он является симметричным. На соответствующем подпространстве имеет место аналог коммутационного соотношения Гейзенберга

$$[T, H] = i\hbar.$$

Неортогональная спектральная мера $M(d\tau)$ оператора T строится аналогично спектральной мере P_+ (см. (II.4.18)), так что

$$(\psi \mid M(d\tau)\psi) = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \psi_\varepsilon^* \psi_{\varepsilon'} e^{i(\varepsilon' - \varepsilon)\tau/\hbar} d\varepsilon\, d\varepsilon' \right) \frac{d\tau}{2\pi\hbar}. \quad (9.5)$$

Отсюда непосредственно вытекает выполнение свойства ковариантности (9.2) для $M(d\tau)$.

Пусть $\psi \in \mathscr{D}(T)$; тогда среднее и дисперсия наблюдаемой T в состоянии S_ψ, согласно (II.6.2), равны

$$\mathsf{E}_{S_\psi}(T) = \hbar i \int_0^\infty \psi_\varepsilon^* \frac{d}{d\varepsilon} \psi_\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$\mathsf{D}_{S_\psi}(T) = \hbar^2 \int_0^\infty \left| \frac{d}{d\varepsilon} \psi_\varepsilon \right|^2 d\varepsilon - \mathsf{E}_{S_\psi}(T)^2.$$

Переходя по формуле (9.3) обратно к импульсному представлению, находим

$$\mathsf{E}_{S_\psi}(T) = m\hbar i \int_{-\infty}^\infty \overline{\frac{\tilde\psi(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}} \frac{d}{d\eta} \frac{\tilde\psi(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}\, d\eta,$$

$$\mathsf{D}_{S_\psi}(T) = (m\hbar)^2 \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{d}{d\eta} \frac{\tilde\psi(\eta)}{\sqrt{|\eta|}} \right|^2 \frac{d\eta}{|\eta|} - \mathsf{E}_{S_\psi}(T)^2,$$

откуда видно, что в импульсном представлении

$$T=\frac{m\hbar i}{\sqrt{|\eta|}}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\sqrt{|\eta|}}=m\,|p|^{-1/2}q\,|p|^{-1/2},$$

причем

$$\mathscr{D}(T)=\left\{\tilde{\psi}(\eta):\ \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{d\eta}\frac{\tilde{\psi}(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}\right|^2\frac{d\eta}{|\eta|}<\infty\right\}.$$

По аналогии с наблюдаемыми координаты и импульса, оператор T можно назвать *канонической наблюдаемой времени*. Впрочем, мы увидим в следующей главе, что и в этом случае существует бесконечно много ковариантных измерений параметра t; еще более широким является класс несмещенных измерений. Чтобы это показать, заметим, что область определения оператора T состоит из векторов состояний, для которых конечна дисперсия $\mathsf{D}_{S_\psi}(T)$. Необходимым условием для этого является равенство $\tilde{\psi}(0)=0$ (в представлении Шредингера это соответствует тому, что $\int_{-\infty}^{\infty}(x\,|\,\psi)\,dx=0$). Это условие не выполняется, например, для вектора состояния

$$\tilde{\psi}(\eta)\sim\exp\left[-\frac{(\eta-\bar{p})^2}{4\sigma_p^2}\right], \tag{9.6}$$

которое описывает «волновой пакет» со средним импульсом $\bar{p}$, для которого $\mathsf{D}_{S_\psi}(T)=\infty$. Однако отсюда не следует делать вывод, что параметр t («время прохождения волнового пакета») не может быть измерен с конечной дисперсией; существуют несмещенные измерения с конечной дисперсией, не удовлетворяющие условию ковариантности. Предполагая, что $\bar{p}\neq 0$, рассмотрим наблюдаемую $\hat{T}=\frac{m}{\bar{p}}q=\frac{m\hbar}{\bar{p}}i\frac{d}{d\eta}$. По формуле (8.7) имеем

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(\hat{T})=\frac{m}{\bar{p}}\frac{d}{dt}\mathsf{E}_t(q)=\frac{1}{\bar{p}}\mathsf{E}_t(p)=1,$$

т. е. $\hat{T}$ дает несмещенное, с точностью до постоянной, измерение параметра t. Это соответствует измерению «времени прохождения» посредством измерения координаты волнового пакета (при условии, что известна средняя скорость $\bar{p}/m$). Дисперсия этого измерения для волнового пакета (9.6) конечна, однако возрастает как $\sigma_p^2 t^2/\bar{p}^2$ при $t \to \infty$, тогда как для ковариантного измерения дисперсия не зависела бы от t.

Обращаясь к общему случаю, предположим, что гамильтониан задается оператором умножения на независимую переменную в некотором пространстве $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0, \infty)$, где $\mathbb{K}$ — некоторое конечно- или бесконечномерное гильбертово пространство; таким образом, пространство представления

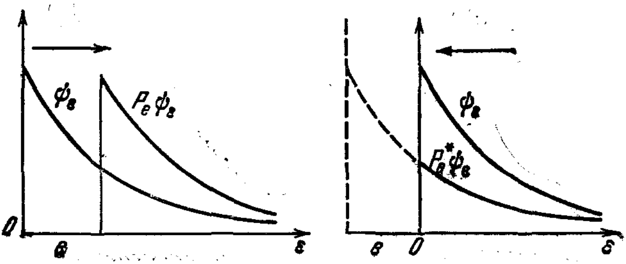

Рис. 11.

состоит из $\mathbb{K}$-значных функций ψ_ε на $(0, \infty)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty |\psi_\varepsilon|^2 d\varepsilon < \infty$, где $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{K}$. Тогда оператор

$$T = \hbar i \frac{d}{d\varepsilon}; \quad \mathscr{D}(T) = \left\{\psi_\varepsilon : \psi_0 = 0; \int\limits_0^\infty \left|\frac{d}{d\varepsilon}\psi_\varepsilon\right|^2 d\varepsilon < \infty\right\}, \quad (9.7)$$

является максимальным симметричным в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0, \infty)$. Соответствующее разложение единицы является ковариантным и несмещенным измерением параметра времени t.

Время и энергия, подобно координате и импульсу, являются в механике «сопряженными величинами». В квантовой теории сопряженность координаты и импульса находит выражение в канонических соотношениях Вейля (4.1), (4.2) (и в вытекающем из них соотношении неопределенностей Гейзенберга). Рассмотрим, что соответствует соотношениям Вейля в случае пары «время — энергия». Невозможность ввести самосопряженный оператор времени тесно связана с тем обстоятельством, что сдвиги на полупрямой

$(0, \infty)$ образуют не группу, как в случае прямой, а **полугруппу**. Рассмотрим операторы сдвига в $\mathscr{L}^2_K(0, \infty)$

$$P_e \psi_\varepsilon = \begin{cases} \psi_{\varepsilon - e}, & \varepsilon \geqslant e, \\ 0, & \varepsilon < e \end{cases}$$

(рис. 11). Семейство $\{P_e;\ e \geqslant 0\}$ образует полугруппу изометрических операторов в $\mathscr{L}^2_K(0, \infty)$. Операторы P_e необратимы, хотя $P_e^* P_e = I$, $e \geqslant 0$. Легко убедиться непосредственно, что

$$P_e = \int e^{ie\tau/\hbar} M(d\tau),$$

где $M(d\tau)$ — разложение единицы (9.5), отвечающее оператору $T = i\hbar \frac{d}{d\varepsilon}$. В этом смысле $P_e = \exp(ieT/\hbar)$, хотя T не является самосопряженным оператором. Полугруппа $\{P_e\}$ связана с динамической группой $\{V_t\}$ соотношениями

$$V_t^* P_e V_t = e^{iet/\hbar} P_e, \quad P_e^* V_t P_e = e^{-iet/\hbar} V_t;$$
$$-\infty < t < \infty, \ 0 \leqslant e, \tag{9.8}$$

формально совпадающими с соотношениями Вейля (4.1), (4.2).

Как и с любой наблюдаемой, с наблюдаемой времени можно связать свое, «временнóе» представление, в котором оператор времени диагонален; подобно тому как импульсное представление является преобразованием Фурье представления Шредингера, *временнóе представление* определяется как преобразование Фурье энергетического представления:

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^\infty e^{i\varepsilon t/\hbar} \psi_\varepsilon \, d\varepsilon.$$

Таким образом, пространство временнóго представления оказывается связанным с известным в математике **классом Харди** $\mathscr{H}^2$ для полуплоскости.

§ 10. Квантовый осциллятор

Формальное выражение для гамильтониана дается соотношением (8.4); однако для того, чтобы это выражение определяло динамику, т. е. унитарную группу $V_t = e^{-itH}$, $t \in \mathbb{R}$, оператор H должен быть существенно самосопряженным. Доказательство этого свойства для различных потенциалов $V(\cdot)$ является одной из основных математических задач квантовой механики. Другой важной задачей является спектральный анализ гамильтониана. Этим задачам посвящена обширная литература, указания на которую можно найти в комментариях. Поскольку их рассмотрение не входит в наши цели, мы ограничимся простейшим, но весьма важным и необходимым для дальнейшего примером квантового гармонического осциллятора.

Рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m\hbar}(p^2 + m^2\omega^2 q^2). \tag{10.1}$$

В классической механике такое выражение для энергии соответствует осциллятору с массой m и частотой ω. Условимся всюду далее считать $m = 1$, так что $\hbar = 1/\mu$. В представлении Шредингера оператор энергии принимает вид

$$E = \frac{1}{2}\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \omega^2\xi^2\right). \tag{10.2}$$

Поскольку E представляет собой сумму неограниченных операторов, возникает вопрос, определяют ли выражения (10.1), (10.2) существенно самосопряженный оператор.

Прежде всего отметим, что выражение (10.2) определено на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Это пространство инвариантно относительно операторов p и q и любых полиномов от p и q, в частности относительно H. Введем на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ операторы

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip).$$

Заметим, что $(\varphi \mid a\psi) = (a^*\varphi \mid \psi)$ для $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, что оправдывает обозначение a^* для второго оператора (хотя, если считать областью определения оператора a пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то область определения a^* будет шире $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). В дальнейшем мы построим расширения операторов a и a^*, так что a^* в точности будет сопряженным к a.

Операторы a и a^* удовлетворяют на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ коммутационному соотношению

$$[a, a^*] = \mathrm{I}. \tag{10.3}$$

Выражая оператор E через a и a^*, имеем $E=\frac{\hbar\omega}{2}(aa^*+$ $+a^*a)=\hbar\omega\left(a^*a+\frac{1}{2}\right)$, откуда

$$E=\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right), \tag{10.4}$$

где $N=a^*a$. Теперь, пользуясь коммутационным соотношением (10.3), мы определим собственные числа и собственные векторы операторов N и E и построим их самосопряженные расширения. Из (10.3) вытекает, что на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ имеют место соотношения

$$Na^n=a^n(N-n),\ Na^{*n}=a^{*n}(N+n);\ n=1,\ 2,\ \ldots \tag{10.5}$$

Заметим теперь, что вектор основного состояния $|0)\equiv$ $\equiv\left|0\ ,0,\ \frac{\hbar}{2\omega}\right)$, определяемый в представлении Шредингера функцией

$$(\xi\,|\,0)=\left(\frac{\pi\hbar}{\omega}\right)^{-1/4}\exp\left(-\frac{\omega\xi^2}{2\hbar}\right),$$

удовлетворяет соотношению $(\omega q+ip)\,|\,0)=0$, откуда

$$a\,|\,0)=0,\quad N\,|\,0)=0,$$

так что $|0)$ является собственным вектором оператора N, отвечающим нулевому собственному значению. Применяя второе из соотношений (10.5), получаем $N(a^*)^n\,|\,0)=$ $=n\,(a^*)^n\,|\,0)$, так что вектор $|\,\psi_n)=(a^*)^n\,|\,0)$ является собственным вектором оператора N, отвечающим собственному значению n; $n=0,\ 1,\ \ldots$ Поскольку оператор N симметричен, система $\{\,|\,\psi_n)\}$ ортогональна. Чтобы построить ортонормированную систему, найдем $\alpha_n=\sqrt{(\psi_n\,|\,\psi_n)}$. Имеем $\alpha_0=\sqrt{(0\,|\,0)}=1$ и $\alpha_n^2=(\psi_{n-1}\,|\,aa^*\psi_{n-1})=$ $=(\psi_{n-1}\,|\,(N+1)\,\psi_{n-1})=n\alpha_{n-1}^2$, откуда $\alpha_n=1/\sqrt{n!}$. Итак, последовательность

$$|\,n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\,|\,0);\qquad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{10.6}$$

является ортонормированной системой собственных векторов оператора N. В представлении Шредингера

$$(\xi \mid n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\right]^{n}\left(\omega\xi-\hbar\frac{d}{d\xi}\right)^{n}\left(\frac{\pi\hbar}{\omega}\right)^{-1/4}\exp\left(-\frac{\omega\xi^{2}}{2\hbar}\right)=$$
$$=\sqrt{\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\frac{1}{2^{n}n!}}H_{n}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\xi\right)\exp\left(-\frac{\omega\xi^{2}}{2\hbar}\right);$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{10.7}$$

где $H_n(\cdot)$ — многочлены Эрмита. Известно, что функции (10.7) образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid n)(n \mid = \mathrm{I}. \tag{10.8}$$

Таким образом, найден базис из собственных векторов оператора N. Поскольку E выражается через N по формуле (10.4), то этот же базис является базисом из собственных векторов оператора E, причем

$$E \mid n)=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\mid n); \qquad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Эта формула показывает, что энергия квантового осциллятора может принимать дискретный ряд значений $\frac{1}{2}\hbar\omega$, $\frac{3}{2}\hbar\omega, \ldots, \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \ldots$ В физике принято называть n числом квантов, так что вектор $|n)$ описывает «состояние с n квантами». В силу соотношения полноты (10.8), всякий вектор ψ разлагается по системе $\{|n)\}$:

$$|\psi)=\sum_{n=0}^{\infty} |n)(n \mid \psi),$$

где $(n \mid \psi)$; $n=0, 1, \ldots,$ — квадратично-суммируемая последовательность коэффициентов. Поэтому состояния и наблюдаемые могут быть представлены бесконечными матрицами, действующими в пространстве l^2. Это представление называется *представлением Фока*, или «представлением по числам заполнения». Изометрический переход между этим представлением и представлением Шредингера задается формулами

$$(n \mid \psi) = \int (n \mid \xi)(\xi \mid \psi)\, d\xi, \quad (\xi \mid \psi) = \sum_n (\xi \mid n)(n \mid \psi),$$

где ядро $(\xi \mid n) = \overline{(n \mid \xi)}$ определяется соотношением (10.7).

В представлении Фока легко строятся самосопряженные расширения операторов N и E. Рассмотрим подпространство

$$\mathscr{D}(N) = \left\{ \psi \colon \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |(n \mid \psi)|^2 < \infty \right\}$$

и определим на нем оператор N соотношением

$$N \mid \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} n \mid n)(n \mid \psi),$$

а E определим через N по формуле (10.4). Согласно спектральной теореме II.4.1, определенные так операторы являются самосопряженными расширениями исходных операторов, заданных на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Можно показать, что эти расширения единственны.

Оператор N называется *наблюдаемой числа квантов*. В представлении Фока он имеет диагональную форму, так как

$$N \mid n) = n \mid n). \tag{10.9}$$

Выясним, какой вид имеют в этом представлении канонические наблюдаемые. Вместо p и q удобнее рассматривать их линейные комбинации a и a^*. Из определения базиса $\{ \mid n) \}$ и коммутационного соотношения (10.3) вытекает

$$a \mid n) = \sqrt{n-1} \mid n-1), \quad a^* \mid n) = \sqrt{n+1} \mid n+1).$$

Таким образом, оператор a уменьшает, а оператор a^* увеличивает «число квантов» на единицу. В соответствии с этим a называется «оператором уничтожения», а a^* — «оператором рождения» квантов. Естественной максимальной областью определения операторов a и a^* является подпространство

$$\mathscr{D}(a)=\mathscr{D}(a^*)=\left\{\psi:\ \sum_{n=0}^{\infty} n\,|(\psi|n)|^2<\infty\right\}.$$

Рассматриваемые как операторы с этой областью определения, a и a^* являются взаимно сопряженными: $(a)^*=a^*$, $(a^*)^*=a$.

Благодаря тому, что гамильтониан H в представлении Фока диагонален, динамика квантового осциллятора в этом представлении описывается особенно просто. Имеем

$$V_t|\psi)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega(n+1/2)t}|n)(n|\psi).$$

Чистые состояния, отвечающие векторам $|n)$, являются стационарными, так как зависимость от t входит в них лишь через несущественный фазовый множитель.

Особенно наглядно динамика квантового осциллятора описывается в терминах операторов a и a^*. Замечая, что $\mathscr{D}(a)$ является инвариантным подпространством V_t, положим

$$a(t)=V_t^*aV_t,\quad a(t)^*=V_t^*a^*V_t.$$

Тогда прямой подсчет показывает, что

$$a(t)=e^{-i\omega t}a,\quad a(t)^*=e^{i\omega t}a^*. \tag{10.10}$$

Формулы, определяющие операторы a, a^* через p и q, аналогичны формулам, определяющим комплексную амплитуду классического осциллятора через импульс и координату, а уравнения (10.10) аналогичны уравнениям для комплексных амплитуд классического осциллятора. Выражая p и q через a и a^* по формулам (справедливым по крайней мере на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$)

$$p=\frac{a-a^*}{2i}\sqrt{2\hbar\omega},\quad q=\frac{a+a^*}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}, \tag{10.11}$$

получаем для $p(t)=V_t^*pV_t$, $q(t)=V_t^*qV_t$:

$$p(t)=p\cos\omega t-\omega q\sin\omega t,\quad q(t)=q\cos\omega t+\frac{p}{\omega}\sin\omega t,$$

т. е. соотношения, аналогичные решениям уравнений движения классического осциллятора *).

Важную роль в теории классического осциллятора играет понятие фазы θ, которая определяется из соотношения $a = |a| e^{i\theta}$, где a — комплексная амплитуда. Рассмотрим вопрос об описании фазы гармонического осциллятора в квантовой теории. Для операторов рождения-уничтожения имеют место легко проверяемые формулы **)

$$a = P|a|, \quad a^* = |a| P^*,$$

где $|a| = \sqrt{a^* a} \equiv \sqrt{N}$, а операторы P, P^* определяются соотношениями

$$P|0) = 0, \quad P|n) = |n-1), \quad P^*|n) = |n+1).$$

Используя (10.8), можно получить матричное представление

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1)(n|, \quad P^* = \sum_{n=1}^{\infty} |n)(n-1|.$$

Операторы P, P^* являются ограниченными, взаимно сопряженными и удовлетворяют соотношениям

$$P^*P = \mathrm{I} - |0)(0|, \quad PP^* = \mathrm{I}, \quad [P, P^*] = |0)(0|,$$

$$[P, N] = P, \quad [P^*, N] = -P^*.$$

Используя соотношение $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta}\, d\theta = \delta_{nn'}$, можно написать

$$P = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\theta} M(d\theta), \quad P^* = \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\theta} M(d\theta), \tag{10.12}$$

где $M(d\theta)$ — неортогональное разложение единицы, определяемое символическими матричными элементами

$$(n|M(d\theta)|n') = e^{i(n-n')\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{10.13}$$

*) Способ записи динамических уравнений, при котором во времени меняются не состояния, а наблюдаемые, называется «картиной (представлением) Гейзенберга».

**) Эти формулы дают так называемое полярное разложение операторов a и a^*.

т. е. $(n|M(B)|n') = \int_B e^{i(n-n')\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$, $B \subset \mathscr{A}([0, 2\pi))$. Покажем, что $M(d\theta)$ можно ассоциировать с измерением параметра фазы гармонического осциллятора.

Параметр фазы гармонического осциллятора аналогичен параметру времени, измерения которого рассматривались в предыдущем параграфе, однако энергия осциллятора $E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ принимает дискретный, а не непрерывный ряд значений. Рассмотрим семейство состояний

$$S_\theta = e^{iN\theta} S e^{-iN\theta}, \tag{10.14}$$

где N — оператор числа квантов. Параметр θ в семействе (10.14) естественно назвать *параметром фазы* осциллятора. Так как собственные значения оператора N — целые, то $e^{iN\theta} = e^{iN(\theta + 2k\pi)}$, так что естественной областью значений параметра фазы является интервал $[0, 2\pi)$, а отображение $\theta \to e^{iN\theta}$ задает унитарное представление группы сдвигов этого интервала по модулю 2π.

Разложение единицы (10.13) по построению удовлетворяет условию ковариантности

$$e^{-iN\theta} M(B) e^{iN\theta} = M(B_{-\theta}),$$

где $B_{-\theta}$ — сдвиг множества $B \subset [0, 2\pi)$ по модулю 2π. Поэтому P называется «оператором фазы», а $M(d\theta)$ ассоциируется с измерением фазы. Назовем его *каноническим измерением фазы*.

Фаза и число квантов являются сопряженными величинами, подобно координате и импульсу или времени и энергии. Группа унитарных операторов $\{e^{iN\theta};\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ и дискретная полугруппа $\{P^n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ связаны коммутационными соотношениями

$$e^{-i\theta N} P^n e^{i\theta N} = e^{i\theta n} P^n, \quad P^n e^{iN\theta} (P^*)^n = e^{i\theta n} e^{iN\theta};$$

$$0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которые можно рассматривать как дискретный аналог соотношений (9.8) для времени — энергии.

Как и с наблюдаемой времени, с наблюдаемой фазы можно связать свое представление; оно состоит из функций вида

$$\psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta}(n\,|\,\psi); \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Таким образом, пространство *фазового представления* есть класс Харди $\mathscr{H}^2$ для единичного круга.

Мы видели, что различным квантовым физическим величинам, в том числе и таким, которые не задаются самосопряженными операторами, отвечают представления канонического коммутационного соотношения в различных функциональных пространствах. Согласно теореме Стоуна — фон Неймана, все эти представления унитарно эквивалентны; переходы между различными представлениями описываются соответствующими ядрами. В силу этого выбор представления в конечном счете не играет существенной роли; все, что можно получить в одном представлении, переводится на язык другого и в принципе может быть получено чисто алгебраически из канонического коммутационного соотношения. Однако правильный выбор представления, адекватного конкретной задаче, часто позволяет упростить выкладки и получить результат кратчайшим и наиболее естественным путем.

§ 11. Представление по когерентным состояниям

Замечательным свойством оператора уничтожения является существование «переполненной» непрерывной системы собственных векторов. Вводя комплексные числа $z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\bar{Q} + i\hbar\bar{P})$, положим $W_z = W_{\bar{Q},\,\hbar\bar{P}}$. Напомним, что $m=1$, так что $\hbar = 1/\mu$. Соотношение Вейля — Сигала примет вид

$$W_{z_1}W_{z_2} = \exp(i\,\mathrm{Im}\, z_1\bar{z}_2)\, W_{z_1+z_2}. \tag{11.1}$$

Обозначая $|z) = \left|\bar{P},\ \bar{Q};\ \frac{\hbar}{2\omega}\right)$, имеем из (6.5)

$$|z) = W_z\,|0), \tag{11.2}$$

где $|0)$ — вектор основного состояния. Из уравнения (6.2), определяющего вектор состояния минимальной неопределенности, вытекает

$$a|z) = z|z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{11.3}$$

Таким образом, векторы $|z)$ являются собственными векторами оператора a. Однако, в отличие от собственных векторов любого самосопряженного оператора, они неортогональны; из (11.1), (11.2) можно получить

$$(z_1|z_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\bar{z}_1 z_2)\right] \neq 0. \tag{11.4}$$

Состояния $|z)(z|$ называются иногда *когерентными состояниями* квантового осциллятора (это название происходит из квантовой оптики, где такие состояния играют большую роль). Таким образом, когерентные состояния образуют подсемейство состояний минимальной неопределенности, отвечающее фиксированному значению параметра $\sigma^2 = \frac{\hbar}{2\omega}$ и характеризующееся специальным выбором комплексной структуры на плоскости параметров $(\bar{P}, \bar{Q})$.

Свойство полноты (6.6) в терминах когерентных состояний принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |z)(z| \frac{d^2z}{\pi} = I, \tag{11.5}$$

где $d^2z = \frac{1}{2}d\bar{P}\,d\bar{Q}$. Используя «переполненную» систему $\{|z)\}$, построим новое представление, в котором диагонален оператор рождения a^*.

Применяя разложение (11.5) к вектору ψ, получаем

$$|\psi) = \int |z)(z|\psi)\frac{d^2z}{\pi}.$$

Эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между векторами $\psi \in \mathscr{H}$ и функциями комплексного переменного $\psi(z) = (z|\psi)$. При этом

$$(\psi|\varphi) = \int\limits_{\mathbb{C}} (\psi|z)(z|\varphi)\frac{d^2z}{\pi}.$$

Отсюда вытекает, что пространство $\mathscr{K}$ взаимно-однозначно и изометрично отображается в пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{C})$ квадратично-интегрируемых функций комплексного переменного z. Опишем образ пространства $\mathscr{K}$ при этом отображении. Полагая в (11.4) $z_2=0$, получаем, что вектор основного состояния $|0)$ отображается в функцию $(z|0)=\exp(-|z|^2/2)$. Следовательно,

$$(z|n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}(z|a^n|0)=\frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}e^{-|z|^2/2}, \qquad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{11.6}$$

Так как всякий $\psi\in\mathscr{K}$ представляется в виде

$$|\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n|n), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2=(\psi|\psi)<\infty,$$

то $\psi(z)=(z|\psi)$ представляется в виде

$$\psi(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n!}}\bar{z}^n\right)e^{-|z|^2/2}.$$

Таким образом, искомое пространство $\mathscr{E}^2(\mathbb{C})$ состоит из функций вида $\psi(z)=\overline{f(z)}e^{-|z|^2/2}$, где $f(z)$ — целая функция такая, что $\int|f(z)|^2e^{-|z|^2}d^2z=\int|\psi(z)|^2d^2z<\infty$. Скалярное произведение в $\mathscr{E}^2(\mathbb{C})$ дается формулой

$$(\psi_1|\psi_2)=\int_{\mathbb{C}}\overline{\psi_1(z)}\,\psi_2(z)\,\frac{d^2z}{\pi}=\int_{\mathbb{C}}\overline{f_1(z)}\,f_2(z)\,e^{-|z|^2}\frac{d^2z}{\pi}.$$

Всякий ограниченный оператор A задается в $\mathscr{E}^2(\mathbb{C})$ ядром $(z_1|A|z_2)$, так что

$$A=\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}|z_1)(z_1|A|z_2)(z_2|\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}.$$

В частности, для операторов W_z из (11.1), (11.4) получаем

$$(z_1|W_z|z_2)=\exp\left[-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z|^2+|z_2|^2)+\bar{z}_1z_2+\bar{z}_1z-\bar{z}z_2\right].$$

Оператор рождения задается в этом пространстве умножением на $\bar{z}$, так как $(z \mid a^*\psi) = \bar{z}(z \mid \psi)$; оператор уничтожения имеет вид $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{2}$.

Представление в пространстве $\mathcal{E}^2(\mathbb{C})$ иногда называется *представлением Баргмана*. Изометрический переход между представлениями Баргмана и Фока дается ядром (11.6); между представлениями Баргмана и Шредингера — ядром

$$(\xi \mid z) = (\pi\hbar/\omega)^{-1/4} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\,\xi - z\right)^2\Big/2 - |z|^2/2\right],$$

которое получается из формулы (6.3).

Неортогональное разложение единицы (7.7) в терминах комплексной переменной z принимает вид

$$M(d^2z) = |z)(z| \frac{d^2z}{\pi}.$$

Применяя формально к равенству (11.5) операторы a и a^* и учитывая (11.3), получаем «спектральные разложения»

$$a^* = \int_{\mathbb{C}} \bar{z} M(d^2z), \qquad a = \int_{\mathbb{C}} z M(d^2z).$$

Этим соотношениям легко придать точный смысл. Заметим, что для $\psi \in \mathscr{D}(a^*)$

$$\|a^*\psi\|^2 = \int |z|^2 |(\psi \mid z)|^2 \frac{d^2z}{\pi}. \tag{11.7}$$

В самом деле, согласно (11.3), (11.5) $\|a^*\psi\|^2 = \int |(a^*\psi \mid z)|^2 \frac{d^2z}{\pi} = \int |z|^2 |(\psi \mid z)|^2 \frac{d^2z}{\pi}$. Таким образом,

$$\mathscr{D}(a^*) = \left\{\psi: \int |z|^2 |(\psi \mid z)|^2 \frac{d^2z}{\pi} < \infty\right\}. \tag{11.8}$$

Для любого $\psi \in \mathscr{D}(a^*)$ сходится интеграл $\int |z|^2 (\psi \mid M(d^2z)\psi)$, а следовательно, и интегралы $(\varphi \mid a^*\psi) = \int \bar{z}(\varphi \mid M(d^2z)\psi)$, $(\varphi \mid a\psi) = \int z(\varphi \mid M(d^2z)\psi)$. Резюмируя, можно сказать, что оператор a^* и разложение единицы $M(d^2z)$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} \mathscr{D}(a^*) = \left\{\psi: \int |z|^2 (\psi \mid M(d^2z)\psi) < \infty\right\}; \\ \|a^*\psi\|^2 = \int |z|^2 (\psi \mid M(d^2z)\psi), \quad \psi \in \mathscr{D}(a^*); \\ (\varphi \mid a^*\psi) = \int z(\varphi \mid M(d^2z)\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(a^*), \end{gathered} \tag{11.9}$$

подобными тем, которые связывают максимальный симметричный оператор и его спектральную меру (см. § II. 4).

Однако оператор a^* не является самосопряженным или даже симметричным. Одним из следствий этого является то, что должна быть уточнена формула для функций от оператора a^*. Применяя к равенству (11.5) слева оператор a^m, а справа — оператор $(a^*)^n$, получаем

$$a^m (a^*)^n = \int\limits_{\mathbb{C}} z^m \bar{z}^n M(d^2z).$$

Важно заметить, что порядок операторов a и a^* в левой части играет существенную роль, так как a и a^* не коммутируют! Такой порядок, при котором все операторы a^* следуют за a, называется нормальным. Отсюда можно получить формулы типа

$$F(a, a^*) = \int F(z, \bar{z}) M(d^2z)$$

для функций $F(\cdot, \cdot)$, разлагающихся в достаточно быстро сходящийся степенной ряд по z и $\bar{z}$, причем под $F(a, a^*)$ понимается нормально упорядоченное выражение.

Далеко не всякий оператор в гильбертовом пространстве обладает спектральным разложением типа (11.9). Выясним, благодаря какому свойству оператора a^* такое разложение оказывается возможным. Для этого необходимо напомнить понятие нормального оператора. Ограниченный оператор X называется *нормальным*, если $[X, X^*] = 0$; это равносильно тому, что $\|X\psi\|^2 = \|X^*\psi\|^2$, $\psi \in \mathscr{H}$. Плотно определенный (неограниченный) оператор X нормален, если $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}(X^*)$ и $\|X\psi\|^2 = \|X^*\psi\|^2$, $\psi \in \mathscr{D}(X)$. *Для нормального оператора существует единственное ортогональное разложение единицы* $E(d^2z)$ на $\mathbb{C}$ такое, что

$$\mathscr{D}(X) = \left\{\psi: \int |z|^2 (\psi \mid E(d^2z)\psi) < \infty\right\};$$

$$\|X\psi\|^2 = \int |z|^2 (\psi \mid E(d^2z)\psi), \quad \psi \in \mathscr{D}(X);$$

$$(\varphi \mid X\psi) = \int z (\varphi \mid E(d^2z)\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(X).$$

Таким образом, нормальные операторы, как и самосопряженные, «диагонализуемы», но могут иметь комплексный спектр.

Плотно определенный оператор Y в $\mathscr{H}$ назовем *субнормальным*, если он расширяется до нормального оператора X в некотором гильбертовом пространстве $\tilde{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$, т. е. $Y\psi = X\psi$, $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. *Оператор субнормален тогда и только тогда, когда существует разложение единицы* $M(d^2z)$ такое, что

$$\mathscr{D}(Y) \subseteq \left\{\psi: \int |z|^2 (\psi \mid M(d^2z)\psi) < \infty\right\};$$

$$\|Y\psi\|^2 = \int |z|^2 (\psi \mid M(d^2z)\psi), \quad \psi \in \mathscr{D}(Y); \tag{11.10}$$

$$(\varphi \mid Y\psi) = \int z (\varphi \mid M(d^2z)\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(Y).$$

В самом деле, если X — нормальное расширение оператора Y, то разложение единицы

$$M(d^2z) = \tilde{E}E(d^2z)\tilde{E},$$

где $\tilde{E}$ — проектор на исходное гильбертово пространство, удовлетворяет соотношениям (11.10). Обратно, пусть существует разложение единицы $M(d^2z)$, удовлетворяющее условиям (11.10). Пусть $E(d^2z)$ — построенное по теореме Наймарка (см. § II. 5) ортогональное разложение единицы в расширенном пространстве. Тогда оператор $X = \int zE(d^2z)$ с соответствующей областью определения будет нормальным оператором, причем $\|X\psi\|^2 = \int |z|^2 (\psi \mid E(d^2z)\psi) = \int |z|^2 (\psi \mid M(d^2z)\psi) = \|Y\psi\|^2$ для $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. Из последнего соотношения (11.10) вытекает, что $\tilde{E}X\psi = Y\psi$ для $\psi \in \mathscr{D}(Y)$, так что $\|X\psi\|^2 = \|\tilde{E}X\psi\|^2$, откуда $X\psi = \tilde{E}X\psi = Y\psi$, $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. Таким образом, X является расширением оператора Y.

Примером субнормального (ограниченного) оператора является оператор P^*, сопряженный к оператору фазы P гармонического осциллятора. Его нормальное расширение наглядно изображается блочной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}
\ddots & & & & & & & \\
\ddots & \ddots & 0 & & & 0 & & \\
 & \ddots & 0 & & & & & \\
0 & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 1\ \ 0 & & & & \\
\hdashline
 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & 0 \\
 & 0 & & & & 1 & 0 & \\
 & & & & & 0 & \ddots & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right],$$

причем исходный оператор P^* изображается блоком, находящимся в правом нижнем углу.

Из соотношений (11.9) и доказанного утверждения вытекает, что оператор рождения субнормален. Построим его нормальное расширение. Для этого рассмотрим коммутирующее расширение (7.9) пары операторов P, Q. В терминах операторов a, a^* оно запишется в виде

$$\tilde{a} = a \otimes I_0 + I \otimes a_0^*, \qquad \tilde{a}^* = a^* \otimes I_0 + I \otimes a_0.$$

Операторы $\tilde{a}$, $\tilde{a}^*$ нормальны. Пусть $|0)_{00}(0|$ — оператор плотности основного состояния в $\mathscr{H}_0$. Отождествим $\mathscr{H}$ с подпространством пространства $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, состоящим из векторов вида $|\psi) \otimes |0)_0$, $\psi \in \mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{H} \subset \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$ и оператор $\tilde{a}^*$ является нормальным расширением a^*, так как

$$\tilde{a}^*[|\psi) \otimes |0)_0] = a^*|\psi) \otimes |0)_0 + |\psi) \otimes a_0|0)_0 = a^*|\psi).$$

§ 12. Квантовая частица в трех измерениях. Случай нулевого спина

В реальном случае трехмерного координатного пространства роль фундаментальной группы симметрий играет полная галилеева группа преобразований (1.1) и речь идет об описании всех неприводимых представлений этой группы. Однако специфика трехмерного случая в полной мере проявляется уже при рассмотрении группы кинематических преобразований

$$\xi' = \boldsymbol{R}\xi + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t. \tag{12.1}$$

Параметрами этой группы являются вектор переноса $\boldsymbol{x}$, относительная скорость $\boldsymbol{v}$ и матрица вращения $\boldsymbol{R}$, и задача заключается в описании всех неприводимых представлений $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{R}) \to W_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{R}}$ этой группы.

Опишем конструкцию неприводимого представления, *которая базируется на представлении подгруппы*, отвечающей поступательным степеням свободы:

$$\xi' = \xi + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t. \tag{12.2}$$

Как в одномерном случае, можно показать, что всякое проективное представление $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \to W_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}}$ группы преобразований (12.2) может быть сведено к представлению канонического коммутационного соотношения Вейля — Сигала

$$W_{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1} W_{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_2} = \exp\left[-\frac{i\mu}{2}(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1)\right] W_{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2}. \tag{12.3}$$

Представление Шредингера для (12.3) в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$ задается формулой

$$W_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}} \psi(\xi) = \exp\left[i\mu v \cdot \left(\xi - \frac{\boldsymbol{x}}{2}\right)\right] \psi(\xi - \boldsymbol{x}).$$

Как и в одномерном случае, это представление неприводимо, и всякое неприводимое представление унитарно эквивалентно представлению Шредингера. Канонические наблюдаемые в этом представлении имеют вид $q_j = \xi_j$, $p_j = \hbar i^{-1} \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$; $j = 1, 2, 3$; они удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга

$$[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad [p_j, p_k] = [q_j, q_k] = 0; \ j, k = 1, 2, 3. \tag{12.4}$$

Для любого вращения R *определим оператор* W_R в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$, полагая

$$W_R\psi(\xi) = \psi(R^{-1}\xi). \tag{12.5}$$

Тогда $R \to W_R$, очевидно, является унитарным представлением группы вращений, а формула

$$(x, v, R) \to W_{x, v, R} = W_{x, v} W_R$$

определяет проективное представление группы (12.1) в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Это представление неприводимо, так как неприводимым является даже его ограничение на группу преобразований (12.2).

Как мы увидим далее, эта конструкция не исчерпывает всех неприводимых представлений кинематической группы; она отвечает так называемому случаю «нулевого спина». Рассмотрим этот случай подробнее.

Остановимся на действии представления (12.5) группы вращений в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Заметим, что всякое вращение является вращением вокруг некоторой оси n. В самом деле, вращение задается трехмерной ортогональной матрицей R. Поскольку характеристическое уравнение для R имеет третий порядок, оно имеет хотя бы один вещественный корень. Как все собственные числа ортогональной матрицы, этот корень равен по модулю единице. Поскольку рассматриваются лишь собственные вращения ($\det R = 1$), то мы приходим к заключению, что существует хотя бы одно собственное значение матрицы R, равное единице. Если n — соответствующий собственный вектор, то $Rn = n$. Это означает, что ось n остается неподвижной при преобразовании R, так что R является вращением вокруг оси n на некоторый угол φ. Положим $R = R_{n, \varphi}$. Семейство $\{R_{n, \varphi};\ -\infty < \varphi < \infty\}$ образует группу вращений вокруг фиксированной оси n, а операторы $V_\varphi = W_{R_{n, \varphi}}$ — представление этой группы, т. е. однопараметрическую группу унитарных операторов в $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$. По теореме Стоуна

$$V_\varphi = \exp(-i\varphi L_n/\hbar),$$

где L_n — самосопряженный оператор. Чтобы найти выражение для L_n в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$, достаточно рассмотреть вращения вокруг оси $n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{3} n_j^2 = 1\right)$ на бесконечно малые углы φ. Нетрудно найти, что матрица такого вращения дается приближенным выражением

$$R_{n,\varphi}^{-1} \approx I + \varphi \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} = I + \varphi \sum_{j=1}^{3} n_j D_j, \qquad (12.6)$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В частности, матрица бесконечно малого вращения вокруг j-й координатной оси e_j дается приближенным выражением $I + \varphi D_j$. Отсюда следует, например, для e_3

$$V_\varphi \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \approx \psi(\xi_1 + \varphi\xi_2, \xi_2 - \varphi\xi_1, \xi_3) \approx$$
$$\approx \left[1 - \varphi\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\right] \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Поэтому на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\hbar i^{-1}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) = L_3, \qquad (12.7)$$

где $L_3 \equiv L_{e_3}$, или

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = L_3,$$

и аналогично для $L_1 \equiv L_{e_1}$, $L_2 \equiv L_{e_2}$. Вводя векторные обозначения $q = [q_1, q_2, q_3]$ и т. д., эти соотношения можно записать в виде

$$q \times p = L, \qquad (12.8)$$

напоминающем определение **углового момента** (момента импульса) в классической механике. Рассматривая бесконечно малое вращение (12.6) вокруг оси n, получаем

$$\sum_{j=1}^{3} n_j L_j = L_n. \qquad (12.9)$$

Оператор L_n называется *наблюдаемой углового момента вокруг оси* $\boldsymbol{n}$. Из (12.9) можно получить соотношение

$$W_{R_{n},\varphi}=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j L_j\right], \tag{12.10}$$

где $\varphi_j=\varphi n_j$, $j=1, 2, 3$, задающее в параметрической форме операторы представления W_R через операторы углового момента относительно трех координатных осей L_1, L_2, L_3.

Используя коммутационные соотношения (12.4) и выражения (12.8) (или непосредственно аналитическое выражения для L_j в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$), получаем на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$[L_1, L_2]=i\hbar L_3,\quad [L_2, L_3]=i\hbar L_1,\quad [L_3, L_1]=i\hbar L_2. \tag{12.11}$$

Мы получили эти соотношения в конкретном представлении, однако можно показать, что на самом деле коммутационные соотношения (12.11) являются чисто алгебраическим следствием того факта, что операторы $W_R=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sum\varphi_j L_j\right]$ образуют представление группы вращений. Операторы L_1, L_2, L_3, подчиненные коммутационным соотношениям (12.11), порождают а л г е б р у Л и группы вращений. Всякому конкретному представлению группы вращений отвечает конкретное представление алгебры Ли, т. е. операторов L_1, L_2, L_3. Алгебра Ли является более простым объектом, чем сама группа, поэтому можно надеяться получить описание всех представлений группы через представления алгебры Ли. Мы рассмотрим этот подход в § 13.

Выделим в пространстве некоторую ось и будем рассматривать вращения на всевозможные углы φ вокруг этой оси. Поскольку результаты вращений на углы, различающиеся на $2\pi k$, не отличаются друг от друга, мы можем считать, что параметр φ пробегает интервал $[0, 2\pi)$, рассматриваемый как группа сдвигов по модулю 2π. Тогда $\varphi\to V_\varphi=\exp(-i\varphi L/\hbar)$ является унитарным представлением этой группы (здесь L — оператор углового момента относительно выбранной оси). Пусть S — исходное состояние объекта, приготавливаемое установкой, которая имеет определенное положение в пространстве. Тогда состояние, приготавливаемое той же установкой, повернутой на угол φ вок уг выделенной оси, дается соотношением

$$S_\varphi = V_\varphi S V_\varphi^*, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{12.12}$$

Измерение $\{M(B)\}$ со значениями в $[0, 2\pi)$, удовлетворяющее условию ковариантности

$$V_\varphi^* M(B) V_\varphi = M(B_{-\varphi}); \qquad B \in \mathscr{A}([0, 2\pi)), \tag{12.13}$$

где $B_{-\varphi}$ — сдвиг множества B по модулю 2π, можно рассматривать как измерение *угла поворота* — параметра φ в семействе (12.12). Мы построим некоторое каноническое решение уравнения (12.12), ограничившись случаем нулевого спина.

Переходя к сферическим координатам

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta;$$

$$\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \ 0 \leqslant \theta < \pi,$$

и полагая $\psi(x, y, z) = \psi(\varphi, \theta, \rho)$, получим

$$\|\psi\|^2 = \int\int\int |\psi(\varphi, \theta, \rho)|^2 \, d\varphi \, (\sin\theta \, d\theta)(\rho^2 \, d\rho).$$

Отсюда видно, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\varphi \otimes \mathscr{H}_\theta \otimes \mathscr{H}_\rho$, где $\mathscr{H}_\varphi = \mathscr{L}^2([0, 2\pi))$, а $\mathscr{H}_\theta$, $\mathscr{H}_\rho$ — гильбертовы пространства функций от θ и ρ с соответствующими весами. Выражение (12.7) для оператора углового момента можно записать в виде $L = \hbar i^{-1} \frac{\partial}{\partial\varphi}$. Этот оператор в пространстве $\mathscr{L}^2([0, 2\pi))$ с областью определения

$$\mathscr{D}(L) = \left\{\psi\colon \psi(0) = \psi(2\pi), \ \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{d\varphi} \psi(\varphi) \right|^2 d\varphi < \infty \right\}$$

является самосопряженным *). Обозначим через Φ эрмитов оператор умножения на независимую переменнную φ. Операторы L, Φ удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению

$$[\Phi, L] = i\hbar,$$

*) Это можно установить, переходя к пространству l^2 коэффициентов Фурье функций $\psi \in \mathscr{L}^2([0, 2\pi))$ (ср. § IV.9).

однако не на $\mathscr{D}(L)$, а на более узком множестве $\mathscr{D}_0(L) =$

$$= \left\{\psi\colon\ \psi(0) = \psi(2\pi) = 0,\ \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{d\varphi}\,\psi(\varphi)\right|^2 d\varphi < \infty\right\},$$ поскольку

оператор Φ выводит функцию $\psi \in \mathscr{D}(L)$ за пределы этого подпространства.

Более полезным является унитарный оператор $U = e^{i\Phi}$, удовлетворяющий соотношению

$$V_\varphi^* U V_\varphi = e^{i\varphi} U. \tag{12.14}$$

Вводя дискретную унитарную группу U^m; $m = 0, \pm 1, \dots$, получим аналог коммутационных соотношений для фазы (см. § 10)

$$V_\varphi^* U^m V_\varphi = e^{im\varphi} U^m, \quad U^m V_\varphi U^{-m} = e^{im\varphi} V_\varphi;$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ m = 0,\ \pm 1,\ \dots$$

Рассмотрим спектральное разложение

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \varphi E(d\varphi), \quad U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} E(d\varphi).$$

Ортогональное разложение единицы

$$E(B) = 1_B(\varphi);\ B \in \mathscr{A}([0,\ 2\pi)), \tag{12.15}$$

удовлетворяет соотношению ковариантности (12.13). Таким образом, измерение параметра угла вращения может быть описано ортогональным разложением единицы и эрмитов оператор Φ (или унитарный оператор U) определяет *каноническую наблюдаемую угол поворота*.

Возвращаясь к декартовым координатам и предполагая, что осью вращения является $\boldsymbol{e}_3$, мы можем записать разложение единицы (12.15) в виде

$$E(B) = 1_{K(B)}(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3),$$

где $K(B)$ — клин в трехмерном пространстве, описываемый соотношениями

$$K(B) = \{[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3]\colon\ -\infty < \xi_3 < \infty,\ \xi_1 = r\cos\varphi,$$
$$\xi_2 = r\sin\varphi,\ 0 \leqslant r < \infty,\ \varphi \in B\}.$$

§ 13. Неприводимые представления группы вращений и понятие спина

Представление группы вращений (12.5) в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$ не является неприводимым; например, всякая сферически симметричная функция инвариантна относительно преобразований (12.5). Можно было бы сослаться и на общую теорему теории представлений, утверждающую, что у компактной группы, какой является группа вращений, все неприводимые представления конечномерны. Мы видели в § 12, что задача описания всех неприводимых проективных представлений группы вращений приводит к рассмотрению неприводимых представлений алгебры Ли, порождаемой соотношениями

$$[J_1, J_2] = i\hbar J_3, \ [J_2, J_3] = i\hbar J_1, \ [J_3, J_1] = i\hbar J_2. \quad (13.1)$$

Оказывается, что для любой конечной размерности $d \geqslant 2$ существует одно неприводимое представление соотношений (13.1); ему соответствует неприводимое проективное представление группы вращений, которое может быть построено по формуле

$$\boldsymbol{R} \to U(\boldsymbol{R}) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j J_j\right], \quad (13.2)$$

где φ_j — параметры вращения $\boldsymbol{R}$, определяемые как в формуле (12.10). Приведем подробно построение этого представления в простейшем случае $d=2$.

Вводя операторы $\sigma_j = \frac{2}{\hbar} J_j$, перепишем соотношения (13.1) в виде

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2.$$

Полагая $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, получим

$$[\sigma_3, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm, \quad [\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3. \quad (13.3)$$

Из первого соотношения вытекает, что если вектор ψ является собственным вектором эрмитова оператора σ_3 с собственным значением λ, то $\sigma_-\psi$ будет собственным вектором σ_3 с собственным значением $\lambda - 1$, а $\sigma_+\psi$ — собственным вектором с собственным значением $\lambda + 1$. В самом деле,

$$\sigma_3\sigma_-\psi = (-\sigma_- + \sigma_-\sigma_3)\,\psi = (\lambda - 1)\,\sigma_-\psi$$

и аналогично для $\sigma_+\psi$.

Учитывая двумерность представления и то, что $\sigma_+ = \sigma_-^*$, получим, что операторы σ_j в базисе из собственных векторов оператора σ_3 должны иметь матрицы вида

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\mu} & 0 \end{bmatrix}.$$

Из второго соотношения (13.3) вытекает $\lambda = |\mu|^2$, $\lambda - 2 = -|\mu|$, откуда $\lambda = 1$, $|\mu| = 1$, так что $\mu = e^{i\alpha}$. Умножая второй из векторов базиса на несущественный фазовый множитель, можно добиться, чтобы $\mu = 1$, так что

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{13.4}$$

Матрицы (13.4) называются *матрицами Паули*; легко проверить, что они удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_1\sigma_2 = 2i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = 2i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = 2i\sigma_2, \tag{13.5}$$

более ограничительным, чем коммутационные соотношения (13.3). Всякая эрмитова 2×2-матрица однозначно записывается в виде вещественной линейной комбинации единичной матрицы и матриц Паули:

$$X = \alpha I + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3;$$

в частности, всякая матрица плотности представляется в виде

$$S = \frac{1}{2}\,(I + \theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3),$$

где θ_1, θ_2, θ_3 — параметры Стокса (см. § 1.2). Наличие соотношений (13.5) делает весьма удобными алгебраические вычисления с матрицами, представленными в таком виде. В частности, для операторов представления (13.2) получаем

$$U(\boldsymbol{R}) = \exp\left[-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\sigma_j\right] =$$

$$= I\cdot\cos\frac{\varphi}{2} - i\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\sigma_j\varphi^{-1}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}. \tag{13.6}$$

Построенное двумерное представление является проективным и не может быть сведено к унитарному, так как, например, для вращений на углы π и $-\pi$ вокруг оси e_3 получаем соответственно операторы представления $-i\sigma_3 \neq i\sigma_3$.

В случае произвольной размерности $d=2j+1$ введем операторы $J_0=\hbar^{-1}J_3$, $J_\pm=\hbar^{-1}(J_1\pm iJ_2)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[J_0,\ J_\pm]=\pm J_\pm,\quad [J_+,\ J_-]=2J_0.$$

Рассуждая как в двумерном случае, можно показать, что спектр оператора J_0 состоит из чисел $-j,\ -j+1,\ \ldots$ $\ldots,\ j-1,\ j$. Обозначим $\{|m)\}$ ортонормированный базис из собственных векторов оператора J_0, так что $J_0|m)=$ $=m|m)$, т. е.

$$J_0=\sum_{m=-j}^{j} m|m)(m|. \tag{13.7}$$

Можно показать, что операторы $J_\pm$ действуют в этом базисе по формулам

$$J_+|m)=\sqrt{(j-m)(j+m-1)}\,|m+1),$$
$$J_-|m)=\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|m-1),$$

из которых можно получить формулы для J_1, J_2, а также для операторов представления $U(\boldsymbol{R})$.

Неприводимые представления группы вращений принято нумеровать числом j, связанным с размерностью соотношением $j=(d-1)/2$. Таким образом, $j=0,\ 1/2,\ 1,$ $3/2,\ \ldots$ Представления, отвечающие целым значениям j, унитарны, тогда как для полуцелых j представления являются существенно проективными.

Теперь можно описать всевозможные неприводимые представления кинематической группы для трехмерной частицы. Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}^d$ — комплексное унитарное пространство размерности $d=2j+1$ и $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3)$ — пространство вектор-функций $\psi(\xi)$ на $\mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{K}$ и с интегрируемым квадратом нормы

$$\|\psi\|^2=\iiint|\psi(\xi)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3.$$

Будем рассматривать операторы $U(\boldsymbol{R})$ как действующие в пространстве $\mathbb{K}$, тогда формула

$$V_{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{R}} = \exp\left[i\mu v\cdot\left(\xi-\frac{x}{2}\right)\right] U(\boldsymbol{R})\,\psi\left(R^{-1}(\xi-\boldsymbol{x})\right)$$

определяет неприводимое представление кинематической группы в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3)$. Подчеркнем, что здесь $U(\boldsymbol{R})$ действует на компоненты вектора $\psi(\xi)$ в каждой точке ξ.

Размерность пространства $\mathbb{K}$ (или число j), как и связанная с массой постоянная $\mu = m/\hbar$, однозначно, с точностью до унитарной эквивалентности, характеризует неприводимое представление, т. е. тип квантового объекта в трех измерениях. Число j называется *спином*. Поскольку операторы J_k удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и операторы углового момента L_k, их можно представлять себе как наблюдаемые некоего «внутреннего» углового момента частицы. Если игнорировать внешние степени свободы, то (чистое) состояние частицы со спином j будет описываться вектором $(2j+1)$-мерного унитарного пространства $\mathbb{K}$ с действующим в нем представлением группы вращений $\boldsymbol{R} \to U(\boldsymbol{R})$. В частности, при $j = 1/2$ мы приходим к статистической модели частицы со спином $1/2$, подробно рассмотренной в § I.5.

Обратимся еще раз к эксперименту, изображенному на рис. 5, и вычислим теоретически вероятность $P_{\text{out}}(\text{in})$, используя теорию представлений. Пусть $S = |\,\text{in})(\text{in}\,|$ — оператор плотности в двумерном унитарном пространстве $\mathscr{H}$, описывающий состояние частицы после прохождения первого фильтра, $E = |\,\text{out})(\text{out}\,|$ — тест, описывающий второй фильтр. Если φ — угол между направлениями двух фильтров, то первый фильтр можно перевести во второй вращением $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n},\,\varphi}$ вокруг соответствующей оси $\boldsymbol{n}$. Не ограничивая общности, можно принять, что $|\,\text{in}) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Из формулы (13.6) тогда следует

$$P_{\text{out}}(\text{in}) = \operatorname{Tr} SE = |\,(\text{in}\,|\,\text{out})\,|^2 = \cos^2\varphi/2,$$

т. е. выражение для условной вероятности прохождения через второй фильтр, использованное в § I.5.

Остается объяснить, почему взаимодействие с внешним магнитным полем приводит к расщеплению пучка частиц в эксперименте Штерна — Герлаха. В отсутствие внешнего поля все пространственные направления равноправны, поэтому любому состоянию $\psi \in \mathcal{H}$ отвечает одно и то же значение энергии, определяемое внешними степенями свободы. Поскольку мы условились их игнорировать, то можно принять, что эта энергия равна нулю. Включение внешнего поля *нарушает симметрию*; гамильтониан, описывающий поведение спина во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{B}=[B_1, B_2, B_3]$, имеет вид

$$H=-\lambda(\sigma_1 B_1+\sigma_2 B_2+\sigma_3 B_3).$$

Мы не имеем здесь возможности вывести эту формулу и только заметим, что, как и должно быть, этот гамильтониан инвариантен относительно поворотов вокруг оси $\boldsymbol{B}$, т. е. $[H, U(\boldsymbol{R})]=0$ для любого поворота $\boldsymbol{R}$ вокруг $\boldsymbol{B}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\boldsymbol{B}=[0, 0, B]$. Тогда $H=-\lambda B\sigma_3$ и мы видим, что H имеет два собственных значения $\pm\lambda B$. Таким образом, вместо состояний с одинаковой энергией ε_0 получилось два состояния с энергиями $\varepsilon_0 \pm \lambda B$. Частицы с разными энергиями по-разному отклоняются неоднородным магнитным полем, что и приводит к расщеплению пучка в эксперименте Штерна — Герлаха.

Это рассуждение дает предельно упрощенное представление о том, каким образом квантовая теория может объяснить структуру энергетических уровней, опираясь по существу лишь на свойства симметрии. Рассмотрение более сложных моделей требует более детального знакомства с теорией представлений и приближенными методами квантовой механики и выходит за рамки этой книги.

Комментарии к гл. III

§ 1. Значение групп симметрий для квантовой теории хорошо известно (см., например, Вейль [24], Вигнер [26]). Идея применения теории представлений для классификации квантовых частиц принадлежит Вигнеру [25], который рассмотрел случай релятивистской группы Пуанкаре (неоднородной группы Лоренца); в этой связи см. также Боголюбов, Логунов, Тодоров [14], Варадарайан [23], Гельфанд, Минлос, Шапиро [32], Широков [131]. Классификацию нерелятивистских квантовых «частиц» в терминах представлений группы Галилея осуществили Инёню и Вигнер [44] и Баргман [4], который развил общую теорию проективных представлений. Подробное обсуждение читатель найдет в книге Яуха [134]. Доступное введение в теорию симметрии элементарных частиц можно найти в лекциях Боголюбова [13].

Особо важную роль в квантовой теории играют динамические симметрии, т. е. симметрии гамильтониана, связанные с законами сохранения. О динамических симметриях в квантовой механике см. Малкин и Манько [136].

По поводу теоремы Вигнера см. Баргман [6], Варадарайан [22], Кэдисон [58], Хунцикер [126].

Для описания нестабильных квантовых объектов могут быть привлечены полугруппы Пуанкаре и Галилея, содержащие только положительно-временны́е сдвиги (см. Цванцигер [127], Ланц и др. [59]). Введение полугруппы вместо группы можно мотивировать тем, что в общем описании эксперимента измерение следует за приготовлением и поэтому не может быть перенесено на произвольный более ранний момент времени.

§ 2. Неравенство Мандельштама—Тамма получено в работе [68]. Чтобы получить из него соотношение неопределенностей «время — энергия», авторы вводят «стандартное время» Δt, определяемое соотношением $\mathsf{E}_{t+\Delta t}(X)-\mathsf{E}_t(X)=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\mathsf{D}_\tau(X)\,d\tau$. Интегрирование неравенства тогда дает $\Delta t\cdot\Delta H\geqslant 1/2$, где $\Delta H=\sqrt{\mathsf{D}_t(H)}$. Фок и Крылов [57] указали, однако, что такое неравенство не может рассматриваться как аналог обычного соотношения неопределенностей «координата — импульс», поскольку «стандартное время» не является атрибутом какой-либо измерительной процедуры; в определении Δt величины $\mathsf{E}_\tau(X)$, $\mathsf{D}_\tau(X)$; $t\leqslant\tau\leqslant t+\Delta t$, не могут быть получены из одного «ансамбля» микрообъектов, так как измерение величины X в момент t меняет состояние и делает непригодным уравнение свободной эволюции (2.2). От этих трудностей свободна интерпретация соотношения (2.7), использующая понятие несмещенного измерения, аналогичное несмещенным оценкам в классической статистике. Эта интерпретация была дана Хелстромом [108], [109], который независимо получил неравенство Мандельштама—Тамма в контексте квантовой теории оценивания. Относительно других подходов см., например, Экстейн и Сигерт [132], Вигнер [27], Малкин, Манько [136].

§ 3. Предложение 3.1 является частным случаем теоремы, описывающей общий вид мультипликатора $\omega(g_2, g_1)$ на аддитивной группе $\mathbb{R}^d$ (см., Баргман [4], Яух [134], Варадарайан [23]).

§ 4. Обсуждение «локализуемости» квантовомеханических объектов, основанное на соотношениях типа (4.3) проводится в книге Яуха [134], где, однако, рассматриваются только ортогональные разложения единицы (см. также комментарии к § IV. 11).

§ 5. Теорема единственности была доказана в работе фон Неймана [102]. Ее можно рассматривать как частный случай «теоремы импримитивности» Макки [64] (см. Яух [134]).

§ 6. Состояния минимальной неопределенности были введены Шредингером. Соотношение полноты получено Баргманом [5] и Глаубером [33]. См. также Каррутерс и Нието [45], Переломов [79].

§ 7. Совместные измерения обсуждались с разных точек зрения многими авторами; см. фон Нейман [101], Гордон и Люиселл [35], Ше и Хеффнер [130], Пруговецки [83], Дэвис [38]. Настоящее изложение следует работам Холево [114], [117] и Хелстрома [109].

§ 8. Уравнение, предложенное первоначально Шредингером и положившее начало современной квантовой механике, соответствует задаче на собственные значения $H\psi=\lambda\psi$. Шредингер пришел к нему, пытаясь найти дифференциальное уравнение для стационарных «волн материи» де Бройля.

Связь уравнения Шредингера с представлениями группы Галилея была осознана позже (Инёню и Вигнер [44], Баргман [5]). В этом параграфе мы в основном следуем книге Яуха [134]. Тот факт, что квантовый гамильтониан имеет тот же вид, что и классическая энергия с заменой классических величин на соответствующие операторы, является одной из форм «принципа соответствия».

Наметим здесь совсем кратко еще одну линию, связывающую квантовую механику с теорией вероятностей. Формальная замена it на t переводит уравнение Шредингера в параболическое уравнение теории диффузионных процессов, а унитарную группу $\{V_t\}$ — в некоторую сжимающую полугруппу в гильбертовом пространстве. Основываясь на этом, можно установить связь между квантовой динамикой и некоторым диффузионным случайным процессом (формула Фейнмана — Каца — Нелсона). Полевой аналог этой формулы является важным аналитическим орудием конструктивной теории поля. В работах Нелсона [74], [75] делается попытка рассмотреть диффузионный процесс как динамическую модель квантовой теории со скрытыми переменными.

§ 9. Невозможность введения наблюдаемой времени в рамках традиционной концепции измерения обстоятельно обсуждалась Оллкоком [77]. В этой статье, в частности, рассматриваются и восходящие к Паули попытки использовать оператор $i\hbar\frac{d}{d\varepsilon}$, который, однако, отвергается как несамосопряженный. Материал настоящего параграфа взят из статьи автора [124].

§ 10. По поводу математических проблем квантовой динамики см. Рид и Саймон [85], где можно найти дальнейшие ссылки. Осциллятор рассматривается почти во всех учебниках квантовой механики. Мы следуем Дираку [37] (см. также Люиселл [63], где можно найти интересное описание формальной алгебры операторов рождения и уничтожения).

Корректное определение оператора фазы дали Каррутерс и Нието [45] (см. также Волкин [28]). По поводу полярного разложения см., например, Рид и Саймон [85], относительно класса Харди см., например, Халмош [104].

§ 11. Представление по «когерентным состояниям» для многих степеней свободы рассматривали Баргман [5], Глаубер [33], Клаудер и Сударшан [49]. Аналогичное представление для случая свободного поля рассматривал Березин [10].

Ограниченные субнормальные операторы ввел Халмош (см., например, [104]). См. также Секефальви-Надь [89].

§§ 12, 13. О применениях представлений группы вращений в квантовой механике см. Вигнер [26], Яух [134], Макки [65]. Систематическое изучение представлений группы вращений проводится в книгах Гельфанда, Минлоса, Шапиро [32] и Желобенко [42].

КОВАРИАНТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

§ 1. Параметрические группы симметрий и ковариантные измерения

Все рассматривавшиеся нами группы симметрий являются *параметрическими группами преобразований*. Это означает, что задано некоторое параметрическое множество $\Theta=\{\theta\}$, т. е. непрерывное многообразие в конечномерном пространстве, и элементы группы $G=\{g\}$ действуют как непрерывные взаимно-однозначные отображения множества Θ на себя, g: $\theta\to g\theta$. Более того, группа G также предполагается параметризованной так, что групповое произведение g_1g_2 (композиция преобразований) является непрерывным в этой параметризации.

Таковы группа сдвигов вещественной прямой $\mathbb{R}$, группа сдвигов интервала $[0, 2\pi)$ по модулю 2π, изоморфная группе поворотов единичной окружности $\mathbb{T}$, а также группа вращений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. В последнем примере естественно рассматривать действие группы лишь на единичные векторы (направления) в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, группу вращений можно рассматривать также как группу преобразований (движений) единичной сферы $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$.

Пусть G — параметрическая группа преобразований множества Θ и $g\to V_g$ — непрерывное проективное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть $M(d\theta)$ — измерение со значениями в Θ, т. е. разложение единицы в $\mathscr{H}$ на борелевских подмножествах Θ. Измерение $M(d\theta)$ назовем *ковариантным* по отношению к представлению $g\to V_g$, если

$$V_g^*M(B)V_g=M(B_{g^{-1}}) \tag{1.1}$$

для любого борелевского $B\subset\Theta$, где

$$B_g=\{\theta:\ \theta=g\theta',\ \theta'\in B\}$$

— сдвиг подмножества B под действием преобразования g. В предыдущей главе мы не раз встречались с этим понятием рассматривая конкретные группы симметрий. Его значение для квантовой теории состоит в том, что оно позволяет установить связь между физическими параметрами микрообъекта и разложениями единицы в гильбертовом пространстве.

Чтобы еще раз пояснить это, рассмотрим следующий пример. Пусть состояние микрообъекта S приготовляется установкой, с которой мы свяжем фиксированный репер (систему координат) θ_0. Затем установка поворачивается как целое вокруг начала координат, так что ее новая ориентация задается репером $\theta = g\theta_0$, где g — элемент группы вращений. Тогда состояние микрообъекта описывается новым оператором плотности $S_\theta = V_g S V_g^*$. Предположим, что над приготовленным таким образом микрообъектом производится измерение, описываемое разложением единицы $M(d\hat{\theta})$. Это означает просто, что распределение вероятностей результатов измерения $\hat{\theta}$ дается формулой

$$\Pr\{\hat{\theta} \in B \mid \theta\} = \operatorname{Tr} S_\theta M(B), \quad B \in \mathscr{A}(\Theta),$$

где $\mathscr{A}(\Theta)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств Θ. Если $M(d\hat{\theta})$ обладает свойством ковариантности (1.1), то $\operatorname{Tr} S_\theta M(B) = \operatorname{Tr} S V_g^* M(B) V_g = \operatorname{Tr} S M(B_{g^{-1}})$, откуда $\Pr\{\hat{\theta} \in B \mid \theta\} = \Pr\{\hat{\theta} \in B_{g^{-1}} \mid \theta_0\}$, или, заменяя B на B_g,

$$\Pr\{\hat{\theta} \in B_g \mid g\theta_0\} = \Pr\{\hat{\theta} \in B \mid \theta_0\}.$$

Это означает, что изменение ориентации установки находит адекватное отражение в изменении распределения вероятностей результатов ковариантного измерения.

Подобные рассуждения применимы к любому (вообще говоря, многомерному) параметру θ, с которым связана определенная группа симметрий G. Таким образом, всякое разложение единицы $M(d\theta)$, обладающее свойством ковариантности (1.1), дает статистическое описание результатов некоторого теоретически допустимого измерения параметра θ. Для любого параметра существует бесчисленное множество измерений, различающихся хотя бы своей точностью. Естественно возникают вопросы описания всех теоретических измерений, ковариантных по отношению к данному представлению, и выделения среди них таких, которые можно было бы назвать «наиболее точными», или «оптимальными».

Последняя задача оказывается тесно связанной с нахождением крайних точек выпуклого множества ковариантных измерений. Чтобы это пояснить, заметим, что типичная мера точности $\mathscr{R}\{M\}$, такая как среднеквадратичное отклонение, является аффинным функционалом измерения M. Это означает, что для любой смеси измерений $M=\sum\limits_{\alpha} p_\alpha M_\alpha$ выполняется

$$\mathscr{R}\{M\}=\sum_{\alpha} p_\alpha \mathscr{R}\{M_\alpha\}.$$

Известная теорема выпуклого анализа утверждает, что при определенных условиях регулярности (см. комментарии) аффинный функционал достигает минимума в крайней точке выпуклого множества. Поэтому оптимальные измерения следует искать среди крайних точек множества измерений. На этом пути проясняется роль «канонических» наблюдаемых координаты, времени, угла и других физических параметров — они оказываются типичными представителями в семействе оптимальных измерений этих параметров. Отметим, что ситуация, когда существуют простые ковариантные измерения, является скорее исключением, хотя и охватывает некоторые важные случаи.

С этой главы изложение приобретает более математический характер. В следующем параграфе мы докажем несколько общих теорем об измерениях, относящихся к произвольной группе симметрий, а затем применим их в конкретных примерах.

§ 2. Структура ковариантного измерения

Говорят, что группа преобразований G действует *транзитивно* на Θ, если всякая точка θ_0 может быть переведена во всякую другую точку θ некоторым преобразованием $g\in G$. Для транзитивной параметрической группы непрерывное отображение $g\to g\theta_0=\theta(g)$ является отображением группы G на все множество Θ. Это отображение взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда *стационарная подгруппа* G_0, оставляющая на месте точку θ_0, является тривиальной, т. е. сводится к тождественному преобразованию. Рассмотрим группу сдвигов прямой $\mathbb{R}$. Фиксируем «начало отсчета» $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Всякая точка $\theta \in \mathbb{R}$ получается некоторым сдвигом x точки θ_0: $\theta = \theta_0 + x$. Отображение $x \to \theta_0 + x = \theta(x)$, очевидно, является взаимно-однозначным. Это же верно и для группы поворотов $\mathbb{T}$. Рассмотрим теперь группу вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Фиксируем направление («полюс») $\boldsymbol{n}_0 \in \mathbb{S}^2$. Всякое направление $\boldsymbol{n}$ может быть получено из $\boldsymbol{n}_0$ некоторым вращением $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{n}_0$; отображение $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{R})$ не является взаимно-однозначным, так как $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}_0)$, где $\boldsymbol{R}_0$ — любое вращение вокруг оси $\boldsymbol{n}_0$.

Так как множества Θ и G являются непрерывными многообразиями в конечномерном пространстве, то можно рассматривать меры на их борелевских подмножествах. Мера $\mu(dg)$ на группе G называется *лево-* (*право-*) *инвариантной*, если она не изменяется при левых (правых) сдвигах борелевских множеств $A \subset G$:

$$\mu(gA) = \mu(A) \text{ (соответственно } \mu(Ag) = \mu(A)), \quad g \in G,$$

где $gA = \{g': g' = gg'', g'' \in A\}$ — левый сдвиг множества A, $Ag = \{g': g' = g''g, g'' \in A\}$ — правый сдвиг множества A. Из общей теории непрерывных групп известно, что *на всякой параметрической группе существует левоинвариантная мера*. Если существует *инвариантная* (т. е. лево- и правоинвариантная) мера, то группа называется *унимодулярной*. Если группа компактна (т. е. является ограниченным и замкнутым подмножеством конечномерного пространства), то всякая односторонне инвариантная мера является инвариантной (в этом случае мы всегда будем нормировать ее так, что $\mu(G) = 1$). В дальнейшем мы будем иметь дело только с унимодулярными группами.

Если G_0 также унимодулярна, то на Θ существует мера ν, инвариантная относительно сдвигов

$$\nu(B_g) = \nu(B); \qquad g \in G, \ B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Если G_0 компактна (что мы и будем далее предполагать), то эта мера может быть построена как образ инвариантной меры μ на G при отображении

$$\nu(B) = \mu(\theta^{-1}(B)),$$

где $\theta^{-1}(B)=\{g\colon g\theta_0\in B\}$ — прообраз борелевского подмножества $B\subset\Theta$. Для любой интегрируемой функции f

$$\int_G f(g\theta_0)\,\mu(dg)=\int_\Theta f(\theta)\,\nu(d\theta). \tag{2.1}$$

Инвариантность ν следует из левоинвариантности μ. В силу правоинвариантности μ полученная таким образом мера ν *не зависит от выбора исходной точки* θ_0, так как если $\theta_1=g_1\theta_0$, то

$$\nu(B)=\mu\{g\colon g\theta_0\in B\}=\mu\{gg_1\colon gg_1\theta_0\in B\}=\mu\{g\colon g\theta_1\in B\}.$$

Классическим примером инвариантной меры является мера Лебега dx на группах сдвигов $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$. В случае группы вращений инвариантная мера ν на $\mathbb{S}^2$ с точностью до множителя совпадает с евклидовой площадью на единичной сфере. Выражение для элемента инвариантной меры μ на группе вращений будет приведено в § 5.

Предложение 2.1. *Пусть $M(d\theta)$ — измерение, ковариантное по отношению к проективному унитарному представлению $g\to V_g$ группы G. Для любого состояния S и любого борелевского $B\subset\Theta$*

$$\int_G \operatorname{Tr} V_g S V_g^* M(B)\,\mu(dg)=\nu(B). \tag{2.2}$$

Доказательство. Используя (2.1), получаем

$$\int_G \operatorname{Tr} V_g S V_g^* M(B)\,\mu(dg)=\int_G \operatorname{Tr} SM(B_{g^{-1}})\,\mu(dg)=$$
$$=\int_G\int_\Theta 1_B(g\theta_0)\,\mu_S(d\theta_0)\,\mu(dg),$$

где $\mu_S(d\theta)=\operatorname{Tr} SM(d\theta)$ — распределение вероятностей измерения $M(d\theta)$. Используя соотношение (2.1) и тот факт, что мера ν не зависит от выбора θ_0, получаем, что это равно

$$\int_\Theta \mu_S(d\theta_0)\int_G 1_B(g\theta_0)\,\mu(dg)=\nu(B).$$

Используя этот результат, мы получим теорему, дающую описание ковариантных измерений в случае конечномерного представления $g\to V_g$. Требование конечномерности позволяет избежать ряда технических трудностей;

как мы далее убедимся, ковариантные измерения имеют аналогичную структуру и в бесконечномерном случае.

Нам понадобятся интегралы от операторнозначных функций. В конечномерном случае оператор задается своей матрицей, имеющей конечное число компонент, и интеграл легко определяется покомпонентно.

Теорема 2.1. *Пусть измерение $M(d\theta)$ ковариантно по отношению к конечномерному представлению $g \to V_g$. Тогда существует эрмитов положительный оператор P_0, коммутирующий со всеми операторами $\{V_g;\ g \in G_0\}$ подпредставления стационарной подгруппы G_0 точки θ_0 такой, что, полагая*

$$P(g\theta_0) = V_g P_0 V_g^*, \tag{2.3}$$

имеем

$$M(B) = \int_B P(\theta)\, \nu(d\theta) \tag{2.4}$$

для любого борелевского $B \subset \Theta$.

Примечание. В силу условия $[P_0, V_g] = 0$, $g \in G_0$, формула (2.3) действительно определяет однозначную операторную функцию на Θ. Мы будем символически записывать (2.4) в виде

$$M(d\theta) = V_g P_0 V_g^* \nu(d\theta), \tag{2.5}$$

подразумевая, что g и θ связаны соотношением $g\theta_0 = \theta$. Такое разложение единицы не может быть ортогональным, поэтому в конечномерном случае ковариантных простых измерений вообще не существует.

Доказательство. Пусть $d = \dim \mathscr{H}$. Полагая в (2.2) $S = d^{-1}I$, получаем $\operatorname{Tr} M(B) = d^{-1}\nu(B)$. Отсюда следует, что положительная операторнозначная мера $M(d\theta)$ дифференцируема по скалярной мере $\nu(d\theta)$, так что

$$M(B) = \int_B P(\theta)\, \nu(d\theta), \tag{2.6}$$

где $P(\cdot)$ — определенная однозначно ν-почти всюду положительная операторнозначная функция, называемая плотностью меры $M(d\theta)$ по мере $\nu(d\theta)$. Для доказательства фиксируем базис $\{e_j\}$ в $\mathscr{H}$ и рассмотрим матричные элементы $(e_i | M(B) e_j)$. Как функции множества B, они являются комплекснозначными мерами, которые мажорируются мерой ν, точнее,

$$|(e_i|M(B)e_j)| \leqslant d^{-1}\nu(B), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta). \tag{2.7}$$

В самом деле, из положительности оператора $M(B)$ и неравенства Коши — Буняковского следует

$$|(e_i|M(B)e_j)| \leqslant \sqrt{(e_i|M(B)e_i)(e_j|M(B)e_j)}$$

и $0 \leqslant (e_i|M(B)e_i) \leqslant d^{-1}\nu(B)$, так как

$$\operatorname{Tr} M(B) \equiv \sum_i (e_i|M(B)e_i) = d^{-1}\nu(B).$$

Из теоремы Радона — Никодима для скалярных мер вытекает, что

$$(e_i|M(B)e_j) = \int_B p_{ij}(\theta)\,\nu(d\theta),$$

где $p_{ij}(\cdot)$ — скалярная плотность, определенная однозначно ν-почти всюду и удовлетворяющая, в силу (2.7), неравенству $|p_{ij}(\theta)| \leqslant d^{-1}$. Пусть $P(\theta) = \sum_{ij} p_{ij}(\theta)|e_i)(e_j|$ — оператор, имеющий матрицу $[p_{ij}(\theta)]$ в базисе $\{e_j\}$; тогда имеет место (2.6). Положительность $P(\theta)$ ν-почти всюду следует из положительности операторов $M(B)$.

Из условия ковариантности (2.1) вытекает

$$\int_B V_g^* P(\theta) V_g \nu(d\theta) = \int_{B_{g^{-1}}} P(\theta)\,\nu(d\theta) = \int_B P(g^{-1}\theta)\,\nu(d\theta),$$

откуда, в силу единственности плотности,

$$V_g^* P(\theta) V_g = P(g^{-1}\theta)$$

для ν-почти всех θ. Полагая $P_0 = P(\theta_0)$, получаем (2.3), (2.4).

Таким образом, формула (2.4) устанавливает взаимно-однозначное аффинное соответствие между двумя выпуклыми множествами: множеством всех ковариантных Θ-измерений $\mathfrak{M}(\Theta)$ и множеством $\mathfrak{P}$ эрмитовых операторов P_0 в $\mathscr{H}$, удовлетворяющих условиям:

1) $[P_0, V_g] = 0$, $g \in G_0$, где G_0 — стационарная подгруппа точки θ_0;

2) $P_0 \geqslant 0$;

3) $\int\limits_{\Theta} V_g P_0 V_g^* \nu(d\theta) \equiv \int\limits_{G} V_g P_0 V_g^* \mu(dg) = \mathrm{I}$.

Наиболее неудобным здесь представляется последнее условие; оказывается, что в случае неприводимого представления оно упрощается и множество $\mathfrak{P}$ допускает очень простое описание.

Пусть $g \to V_g$ — неприводимое представление группы G в пространстве $\mathscr{H}$. Предположим сначала, что группа G компактна; из общей теоремы теории представлений вытекает, что всякое неприводимое представление G конечномерно, так что $d = \dim \mathscr{H} < \infty$. Для неприводимого представления имеют место соотношения ортогональности

$$\int (\psi_1 | V_g \varphi_1)(\varphi_2 | V_g^* \psi_2) \mu(dg) = c(\varphi_2 | \varphi_1)(\psi_1 | \psi_2), \tag{2.8}$$

где c — коэффициент, зависящий от нормировки инвариантной меры μ и равный d^{-1} для принятой нами нормировки $\mu(G) = 1$.

Так как всякий оператор T в конечномерном пространстве является оператором конечного ранга, $T = \sum\limits_i |\varphi_1^i)(\varphi_2^i|$, то из (2.8) и выражения (II.1.17) для следа оператора конечного ранга вытекает

$$\int (\psi_1 | V_g T V_g^* \psi_2) \mu(dg) = d^{-1} (\psi_1 | \psi_2) \operatorname{Tr} T,$$

или

$$\int V_g T V_g^* \mu(dg) = d^{-1} \operatorname{Tr} T \cdot \mathrm{I}. \tag{2.9}$$

В частности, если S — оператор плотности, то

$$\int V_g S V_g^* \mu(dg) = d^{-1} \mathrm{I}. \tag{2.10}$$

Беря след от обеих частей этого равенства и замечая, что $\operatorname{Tr} V_g S V_g^* = \operatorname{Tr} S = 1$, убеждаемся в правильности соответствия нашей нормировки значению $c = d^{-1}$. Если взять $c = 1$, то это соответствует нормировке

$$\mu(G) = \dim \mathscr{H} = d. \tag{2.11}$$

Из (2.9) видно, что условие 3) в неприводимом случае эквивалентно тому, что $\operatorname{Tr} P_0 = d$; в совокупности с условием 2) это означает, что $d^{-1} \cdot P_0$ является оператором плотности. Таким образом, множество $\mathfrak{P}$ можно описать как множество операторов вида $P_0 = d \cdot S_0$, где S_0 — произвольный оператор плотности, коммутирующий с операторами $\{V_g;\ g \in G_0\}$. Отсюда вытекает

Предложение 2.2. *Пусть $g \to V_g$ — неприводимое представление компактной группы G. Соотношение*

$$M(d\theta) = d \cdot V_g S_0 V_g^* \nu(d\theta) \qquad (\theta = g\theta_0) \tag{2.12}$$

устанавливает взаимно-однозначное аффинное соответствие между ковариантными измерениями и операторами плотности S_0, коммутирующими с операторами $\{V_g;\ g \in G_0\}$, где G_0 — стационарная подгруппа точки θ_0. В частности, крайними точками множества измерений будут те, которые отвечают одномерным проекторам $S_0 = S_{\psi_0}$, т. е.

$$M(d\theta) = d \cdot V_g |\psi_0)(\psi_0| V_g^* \nu(d\theta).$$

Условие $[S_{\psi_0}, V_g] = 0$, $g \in G_0$, соответствует здесь тому, что

$$V_g |\psi_0) = \lambda_g |\psi_0), \qquad g \in G_0,$$

где $|\lambda_g| = 1$.

Соотношения ортогональности (2.8) имеют место и для некомпактных параметрических групп и их неприводимых представлений при условии квадратичной интегрируемости матричных элементов $(\psi_1 | V_g \psi_2)$, $g \in G$. Нормируя теперь μ так, что $c = 1$, получаем для любого оператора плотности S

$$\int V_g S V_g^* \mu(dg) = I \tag{2.13}$$

в смысле слабой сходимости. Опираясь на этот факт, установим характеризацию ковариантных измерений, аналогичную формуле (2.12). Теперь мы предполагаем, что меры μ и ν нормированы так, что выполнено (2.13) (для компактной группы это соответствовало бы нормировке (2.11)).

Теорема 2.2. *Соотношение*

$$M(B) = \int_B V_g S_0 V_g^* \nu(d\theta) \qquad (\theta = g\theta_0) \tag{2.14}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между измерениями $\{M(B)\}$, ковариантными по отношению *к неприводимому квадратично-интегрируемому представлению $g \to V_g$ группы G, и операторами плотности P_0, коммутирующими с операторами $\{V_g;\ g \in G_0\}$. Интеграл в* (2.14) *понимается в смысле слабой сходимости; если $\nu(B) < \infty$, то интеграл можно понимать как интеграл Бохнера функции со значениями в $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$.*

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим совместные измерения координаты — скорости (см. § III.7). Группа G здесь является группой сдвигов $(\xi,\ \eta) \to (\xi + x,\ \eta + v)$ плоскости $\Theta = \mathbb{R}^2$. Стационарная подгруппа точки $\theta_0 = (0,\ 0)$ тривиальна, так что $\Theta = G$.

Как было показано в гл. III, всякое непрерывное неприводимое проективное представление этой группы $(x,\ v) \to W_{x,v}$ унитарно эквивалентно представлению Шредингера с некоторым значением $\mu \neq 0$. Следовательно, оно является квадратично-интегрируемым (предложение III.6.1), причем значению $c = 1$ отвечает инвариантная мера $\frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi}$. Используя доказанную теорему, получаем, что *всякое измерение $M(dx\,dv)$, ковариантное по отношению к представлению $(x,\ v) \to W_{x,v}$, имеет вид*

$$M(dx\,dv) = W_{x,v} S_0 W_{x,v}^* \frac{\mu\,dx\,dv}{2\pi},$$

а крайними точками являются измерения вида (III.7.5).

Мера точности $\mathscr{R}\{M\} = g_x \mathsf{D}_x\{M\} + g_v \mathsf{D}_v\{M\}$ является аффинным функционалом ковариантного измерения M; можно показать (см. комментарии), что необходимые условия регулярности выполняются и $\mathscr{R}\{M\}$ действительно достигает минимума в крайней точке множества ковариантных измерений. Отсюда вытекает

Предложение 2.3. *Каноническое измерение* (III.7.7) *является оптимальным в классе всех ковариантных измерений координаты — скорости в смысле меры точности $\mathscr{R}\{M\}$.*

Доказательство теоремы 2.2. Основная техническая трудность заключается в доказательстве бесконечномерного аналога соотношения (2.6). Мы будем использовать свойства следа в классе ядерных операторов, рассмотренные в § II.7.

Лемма 2.1. *Пусть M — положительный эрмитов оператор, $\{T_n\}$ — монотонно неубывающая последовательность эрмитовых ядерных операторов, слабо сходящаяся к единичному оператору. Тогда* $\operatorname{Tr} T_n M \uparrow \operatorname{Tr} M$; *в частности, если* $\sup\limits_n \operatorname{Tr} T_n M < \infty$, *то M — ядерный.*

Доказательство. Пусть $\{e_j\}$ — некоторый базис в $\mathscr{H}$; тогда

$$\mathrm{Tr}\, T_n M = \mathrm{Tr}\sqrt{M}\, T_n \sqrt{M} = \sum_j (\sqrt{M}\, e_j \mid T_n \sqrt{M}\, e_j).$$

В силу свойств последовательности $\{T_n\}$ имеем $(\sqrt{M}\, e_j \mid T_n \sqrt{M}\, e_j) \uparrow (\sqrt{M}\, e_j \mid \sqrt{M}\, e_j) = (e_j \mid M e_j)$. По известной теореме о монотонной сходимости $\sum_j (\sqrt{M}\, e_j \mid T_n \sqrt{M}\, e_j) \uparrow \sum_j (e_j \mid M e_j) = \mathrm{Tr}\, M$.

Лемма 2.2. *Пусть $\{M(B)\}$ — ковариантное измерение. Тогда $\mathrm{Tr}\, M(B) = \nu(B)$. В частности, если $\nu(B) < \infty$, то $M(B)$ — ядерный оператор.*

Доказательство. Выберем расширяющуюся последовательность компактных множеств $\{B_n\}$, покрывающую Θ. Рассмотрим операторы

$$T_n = \int_{B_n} V_g S V_g^* \mu(dg), \tag{2.15}$$

где S — произвольный оператор плотности. Так как $\mu(B_n) < \infty$, и $\| V_g S V_g^* \|_1 = \mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* = 1$, то интеграл (2.15) определен как интеграл Бохнера от функции со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ ядерных операторов, так что T_n — ядерный. Так как $V_g S V_g^* \geqslant 0$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$, то $T_n \leqslant T_{n+1}$. Кроме того, $T_n \to I$ слабо в силу (2.13). Последовательность $\{T_n\}$ удовлетворяет условию леммы 2.1, и, значит, $\mathrm{Tr}\, M(B) = \lim_n \mathrm{Tr}\, T_n M(B)$. Но в силу (2.2)

$$\lim_n \mathrm{Tr}\, T_n M(B) = \lim_n \int_{B_n} \mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* M(B)\, \mu(dg) = \nu(B),$$

и лемма доказана.

Пусть $\{e_j\}$ — базис в $\mathscr{H}$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 2.1, из леммы 2.2 получаем

$$|(e_i \mid M(B) e_j)| \leqslant \nu(B), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta),$$

откуда по теореме Радона — Никодима для скалярных мер

$$(e_i \mid M(B) e_j) = \int_B p_{ij}(\theta)\, \nu(d\theta), \tag{2.16}$$

где $p_{ij}(\theta)$ — определенная однозначно ν-почти всюду плотность, удовлетворяющая неравенству $|p_{ij}(\theta)| \leqslant 1$. Из положительности оператора $M(B)$ вытекает положительная определенность бесконечной матрицы $[p_{ij}(\theta)]$ при ν-почти всех θ. Так как по лемме 2.2 $\sum_i (e_i \mid M(B) e_i) = \mathrm{Tr}\, M(B) = \nu(B)$, то $\sum_i p_{ii}(\theta) = 1$ при ν-почти всех θ. Таким образом, $[p_{ij}(\theta)]$ является матрицей оператора плотности

$$P(\theta) = \sum_{ij} p_{ij}(\theta) \mid e_i)(e_j \mid.$$

Из (2.15) вытекает, что для любого $\psi \in \mathcal{H}$

$$(\psi \mid M(B)\psi) = \int_B (\psi \mid P(\theta)\psi)\,\nu(d\theta),$$

т. е. что

$$M(B) = \int_B P(\theta)\,\nu(d\theta)$$

в смысле слабой сходимости. Утверждение об интегрируемости по Бохнеру вытекает из стандартных рассуждений, и мы опускаем его доказательство. Из условия ковариантности, как при доказательстве теоремы 2.1, получаем $P(\theta) = V_g P(\theta_0) V_g^*$. Полагая $P(\theta_0) = S_0$, получаем представление (2.14).

Обратно, если S_0 — оператор плотности, удовлетворяющий условиям теоремы, то, определяя $M(B)$ по формуле (2.14), где интеграл понимается в смысле слабой сходимости, мы получаем семейство операторов $\{M(B)\}$, обладающее всеми свойствами разложения единицы. В самом деле, $M(B) \geqslant 0$, так как подынтегральная функция положительна. Счетная аддитивность вытекает из соответствующего свойства интеграла:

$$\int_{\bigcup_i B_i} (\psi \mid P(\theta)\psi)\,\nu(d\theta) = \sum_i \int_{B_i} (\psi \mid P(\theta)\psi)\,\nu(d\theta),$$

если $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Наконец, условие нормировки $M(\Theta) = I$ вытекает из (2.13). Теорема доказана.

§ 3. Измерение параметров в ковариантном семействе состояний

Пусть θ — вообще говоря, многомерный параметр, описывающий определенные аспекты приготовления состояния (например, положение экспериментальной установки). Каждому θ из области допустимых значений Θ соответствует свой оператор плотности S_θ, так что имеется семейство $\{S_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ состояний в $\mathcal{H}$. Допустим, что на параметрическом множестве Θ действует группа преобразований $g\colon\ \theta \to g\theta$, которая имеет представление $g \to V_g$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Семейство $\{S_\theta\}$ называется *ковариантным* по отношению к этому представлению, если

$$S_{g\theta} = V_g S_\theta V_g^*; \qquad \theta \in \Theta,\ g \in G.$$

Фиксируем «начало отсчета» θ_0; состояние $S_{\theta_0} = S$ должно быть инвариантно относительно подпредставления стационарной подгруппы G_0 точки θ_0: $S = V_g S V_g^*$, $g \in G_0$, так что можно написать

$$S_\theta = V_g S V_g^* \qquad (\theta = g\theta_0). \tag{3.1}$$

Предположим теперь, что объект находится в одном из состояний $\{S_\theta\}$, но истинное значение параметра θ неизвестно и задача заключается в том, чтобы по возможности точно оценить это значение, основываясь на измерениях, допускаемых квантовой теорией. Мы рассмотрим этот вопрос, руководствуясь идеями статистической теории оценивания.

Зададимся некоторой *функцией отклонения* $W_\theta(\hat{\theta})$, которая дает численную меру отклонения наблюдавшегося значения $\hat{\theta}$ от истинного θ. Мы предположим, что $W_\theta(\hat{\theta})$ — непрерывная функция своих аргументов, причем $W_\theta(\hat{\theta}) \geqslant W_\theta(\theta)$. Естественно предположить также, что функция отклонения *инвариантна*:

$$W_{g\theta}(g\hat{\theta}) = W_\theta(\hat{\theta}); \qquad g \in G; \qquad \theta,\ \hat{\theta} \in \Theta.$$

Для всех рассматриваемых нами групп существуют «естественные» функции отклонения (например, квадратичное отклонение $(\hat{\theta}-\theta)^2$ для группы сдвигов $\mathbb{R}$). Примечательно, однако, что, как будет показано, конечный результат — «наиболее точное» измерение — в значительной мере не зависит от конкретного выбора функции $W_\theta(\hat{\theta})$, определяющей точность измерения.

Среднее отклонение результатов измерения $M = \{M(d\hat{\theta})\}$ при условии, что истинным значением является θ, равно

$$\mathscr{R}_\theta\{M\} = \int W_\theta(\hat{\theta})\, \mu_{S_\theta}(d\hat{\theta}), \tag{3.2}$$

где $\mu_{S_\theta}(d\hat{\theta}) = \operatorname{Tr} S_\theta M(d\hat{\theta})$ — распределение вероятностей измерения M относительно состояния S_θ. Желая найти наилучшее измерение параметра θ, следовало бы потребовать, чтобы M минимизировало среднее отклонение (3.2) при всех возможных значениях $\theta \in \Theta$. Однако из математической статистики хорошо известно, что подобное требование обычно невыполнимо: то, что хорошо для одних значений θ, будет плохо для других. Чтобы ввести разумное понятие оптимальности, следует пойти на компромисс и образовать некоторый функционал от величин $\mathscr{R}_\theta\{M\}$, $\theta \in \Theta$, который служил бы «интегральной» мерой точности.

Следуя классической теории оценивания, можно предложить два разных функционала.

При *байесовском подходе* берется среднее величин $\{\mathscr{R}_\theta\{M\}\}$ по некоторому *априорному распределению* $\pi(d\theta)$. Измерение, минимизирующее эту меру точности:

$$\mathscr{R}_\pi\{M\} = \int \mathscr{R}_\theta\{M\}\,\pi(d\theta),$$

называется *байесовским*. Величина $\mathscr{R}_\pi\{M\}$ дает среднюю ошибку в ситуации, когда θ является случайным параметром с известным распределением $\pi(d\theta)$. В частности, если Θ компактно и о θ «заранее ничего не известно», то в качестве $\pi(d\theta)$ принято брать «равномерное распределение» на Θ, т. е. нормированную инвариантную меру $\nu(d\theta)$.

При *минимаксном подходе* берется максимальное отклонение

$$\hat{\mathscr{R}}\{M\} = \max_\theta \mathscr{R}_\theta\{M\}.$$

Минимизирующее его измерение называется *минимаксным*. Измерение, на котором достигается минимум той или иной меры точности, мы будем называть также оптимальным.

Ограничившись здесь случаем компактной группы, мы покажем, что для ковариантного семейства состояний как байесовская, так и минимаксная меры точности достигают минимума на ковариантном измерении. Этот факт является некоммутативным аналогом известной теоремы Ханта — Стейна в математической статистике.

Среднее отклонение, а значит, и байесовская мера точности являются аффинными функционалами на выпуклом множестве всех Θ-измерений $\mathfrak{M}(\Theta)$. *В случае компактного Θ и непрерывной функции отклонения $W_\theta(\hat{\theta})$* выполнены условия, при которых *байесовская мера точности достигает минимума в крайней точке множества* $\mathfrak{M}(\Theta)$. Доказательство этого утверждения, а также подробное рассмотрение вопросов интегрируемости мы здесь проводить не будем (см. комментарии).

Теорема 3.1. *Минимум байесовской меры точности $\mathscr{R}_\nu\{M\}$ с инвариантным априорным распределением и минимаксной меры точности $\hat{\mathscr{R}}\{M\}$ по всем Θ-измерениям* *достигается на множестве ковариантных измерений. Для ковариантного измерения* M *среднее отклонение* $\mathscr{R}_\theta\{M\}$ *не зависит от* θ, *так что*

$$\mathscr{R}_\nu\{M\} = \hat{\mathscr{R}}\{M\} \equiv \mathscr{R}_\theta\{M\}, \qquad \theta \in \Theta. \tag{3.3}$$

Доказательство. Введем измерение $M_g = \{M_g(d\hat{\theta})\}$, полагая

$$M_g(B) = V_g^* M(B_g) V_g, \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta),$$

и заметим, что измерение M ковариантно тогда и только тогда, когда $M_g = M$, $g \in G$. Из ковариантности семейства $\{S_\theta\}$ и инвариантности функции отклонения $W_\theta(\hat{\theta})$ получаем

$$\mathscr{R}_\theta\{M_g\} = \mathscr{R}_{g\theta}\{M\}. \tag{3.4}$$

В частности, для ковариантного измерения $\mathscr{R}_\theta\{M\}$ не зависит от θ, так что выполняется (3.3). Рассмотрим байесовскую меру точности

$$\mathscr{R}_\nu\{M\} = \int \mathscr{R}_\theta\{M\}\,\nu(d\theta).$$

Используя (3.4), получаем $\mathscr{R}_\nu\{M\} = \mathscr{R}_\nu\{M_g\}$.

Введем «усредненное» измерение $\bar{M}$, полагая

$$\bar{M}(B) = \int_G M_{g^{-1}}(B)\,\mu(dg).$$

(В конечномерном случае определение этого интеграла очевидно.) Так как $\mathscr{R}_\nu\{M\}$ — аффинный функционал измерения, то $\mathscr{R}_\nu\{\bar{M}\} = \int \mathscr{R}_\nu\{M_{g^{-1}}\}\,\mu(dg) = \mathscr{R}_\nu\{M\}$ и $\max\limits_\theta \mathscr{R}_\theta\{M\} \geqslant \mathscr{R}_\nu\{M\} = \mathscr{R}_\nu\{\bar{M}\}$. Но усредненное измерение, очевидно, ковариантно, так что

$$\mathscr{R}_\nu\{\bar{M}\} \equiv \mathscr{R}_\theta\{\bar{M}\} = \max_\theta \mathscr{R}_\theta\{\bar{M}\}.$$

Таким образом, для любого измерения M мы построили ковариантное измерение $\bar{M}$ с тем же значением байесовской меры точности и с, возможно, меньшим значением минимаксной меры. Поэтому минимум этих функционалов достигается на ковариантном измерении.

Теорема 3.1 сводит проблему оптимального измерения к минимизации среднего отклонения

$$\mathscr{R}_{\theta_0}\{M\}=\int W_{\theta_0}(\theta)\,\mu_{S_{\theta_0}}(d\theta)$$

по всем ковариантным измерениям. Рассмотрим этот вопрос, предполагая, что $\dim\mathscr{H}<\infty$. Тогда мы находимся в условиях теоремы 2.1 и $\mathscr{R}_{\theta_0}\{M\}$ можно переписать в виде

$$\mathscr{R}_{\theta_0}\{M\}=\int W_{\theta_0}(\theta)\,\mathrm{Tr}\,V_g^*SV_gP_0\nu(d\theta)=\mathrm{Tr}\,\hat{W}_0P_0,$$

где

$$\hat{W}_0=\int\limits_{\Theta} W_{\theta_0}(\theta)\,V_g^*SV_g\nu(d\theta)=\int\limits_{G} W_{\theta_0}(g\theta_0)\,V_g^*SV_g\mu(dg) \tag{3.5}$$

— оператор, коммутирующий с $\{V_g;\ g\in G_0\}$. Основываясь на аналогиях с классической статистикой, можно назвать $\hat{W}_0$ оператором апостериорного отклонения. Таким образом, необходимо найти

$$\min\mathrm{Tr}\,\hat{W}_0P_0 \tag{3.6}$$

по всем эрмитовым операторам P_0 из множества $\mathfrak{P}$ (см. § 2) или же по крайним точкам этого множества.

Эта задача имеет простое решение в случае неприводимого представления, когда $\mathfrak{P}$ состоит из операторов, коммутирующих с $\{V_g;\ g\in G_0\}$ и таких, что

$$P_0\geqslant 0,\quad \mathrm{Tr}\,P_0=d.$$

Обозначим $\hat{\omega}_{\min}$ наименьшее собственное значение оператора $\hat{W}_0$, а через $\hat{E}_{\min}$ — проектор на соответствующее инвариантное подпространство. Тогда $\hat{W}_0\geqslant\hat{\omega}_{\min}\cdot I$, откуда

$$\mathrm{Tr}\,\hat{W}_0P_0\geqslant\hat{\omega}_{\min}\,\mathrm{Tr}\,P_0=\hat{\omega}_{\min}\,d.$$

Равенство здесь достигается, если

$$P_0=\hat{E}_{\min}\frac{d}{\hat{d}_{\min}}, \tag{3.7}$$

где $\hat{d}_{\min}$ — размерность инвариантного подпространства, соответствующего минимальному собственному значению $\hat{\omega}_{\min}$. Так как $\hat{W}_0$ коммутирует с $\{V_g;\ g\in G_0\}$, то это же верно и для $\hat{E}_{\min}$, так что оператор (3.7) удовлетворяет всем необходимым условиям. Сформулируем полученный результат.

Предложение 3.1. *Пусть $g \to V_g$ — неприводимое представление компактной группы G преобразований множества Θ. Тогда оптимальным является ковариантное измерение*

$$M_*(d\theta) = \frac{d}{\hat{d}_{\min}} \cdot V_g \hat{E}_{\min} V_g^* \nu(d\theta) \qquad (\theta = g\theta_0).$$

Минимум среднего отклонения равен $\hat{\omega}_{\min} \cdot d$, где $\hat{\omega}_{\min}$ — минимальное значение, $\hat{E}_{\min}$ — проектор на соответствующее инвариантное подпространство оператора апостериорного отклонения (3.5).

В классической статистике, помимо байесовского и минимаксного, существуют и другие подходы к определению точности оценок параметров, например, основанные на понятии несмещенности и неравенстве Рао — Крамера. Мы рассмотрим их в гл. VI, а сейчас коротко остановимся на некоммутативном аналоге метода максимального правдоподобия. Формально критерий максимального правдоподобия соответствует байесовскому с равномерным априорным распределением и функцией отклонения

$$W_{\theta_0}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \neq \theta_0, \\ -\infty, & \theta = \theta_0. \end{cases}$$

Точнее, определим дельта-функцию на Θ формальным соотношением

$$\int \delta_{\theta_0}(\theta) f(\theta) \nu(d\theta) = f(\theta_0)$$

для любой непрерывной f. Тогда взятая с обратным знаком байесовская мера отклонения, соответствующая функции $W_{\theta_0}(\theta) = -\delta_{\theta_0}(\theta)$, имеет вид

$$\int \operatorname{Tr} S_\theta M(d\theta). \tag{3.8}$$

Этому выражению можно придать прямой смысл, если Θ — компактное множество и пространство $\mathcal{H}$ конечномерно. В этом случае, рассуждая как и при доказательстве теоремы 2.1, можно показать, что операторная мера $M(d\theta)$ дифференцируема относительно скалярной меры

$m(d\theta) = \mathrm{Tr}\, M(d\theta)$, так что $M(d\theta) = P(\theta)\, m(d\theta)$, и интеграл (3.8) можно определить как

$$\int \mathrm{Tr}\, S_\theta M(d\theta) = \int (\mathrm{Tr}\, S_\theta P(\theta))\, m(d\theta). \qquad (3.9)$$

Измерение, максимизирующее этот функционал, называется *измерением максимального правдоподобия*. Можно показать, что для ковариантного семейства состояний $S_\theta = V_g S V_g^*$ максимум величины (3.9) достигается на ковариантном измерении. Для ковариантного измерения (2.5) функционал (3.9) принимает вид $\mathrm{Tr}\, SP_0$. Таким образом, ковариантное измерение максимального правдоподобия имеет вид (2.5), где P_0 — решение задачи

$$\max \mathrm{Tr}\, SP_0; \qquad P_0 \in \mathfrak{P}.$$

В случае неприводимого представления $g \to V_g$ решение этой задачи совершенно аналогично решению задачи (3.6) и измерение максимального правдоподобия имеет вид

$$M(d\theta) = \frac{d}{d_{\max}} V_g E_{\max} V_g^* \nu(d\theta) \qquad (\theta = g\theta_\theta),$$

где $E_{\max}$ — проектор на собственное подпространство, отвечающее максимальному собственному числу оператора $S = S_{\theta_0}$, а $d_{\max}$ — размерность этого подпространства.

§ 4. Оценивание чистого состояния

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство конечной размерности n. Обозначим через Θ единичную сферу в $\mathscr{H}$; элементами Θ являются векторы $|\theta) \in \mathscr{H}$, имеющие единичную длину: $(\theta|\theta) = 1$. Множество Θ является параметрическим: пусть $\{e_j\}$ — базис в $\mathscr{H}$, тогда

$$|\theta) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j\, |e_j),$$

где θ_j — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n} |\theta_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} [(\mathrm{Re}\,\theta_j)^2 + (\mathrm{Im}\,\theta_j)^2] = 1. \qquad (4.1)$$

Группа G всех унитарных операторов в $\mathscr{H}$ действует как компактная транзитивная группа преобразований единичной сферы Θ по формуле $U|\theta)=|U\theta)$, $U\in G$. Инвариантная мера на Θ совпадает с евклидовой площадью на $2n$-мерной вещественной сфере (4.1).

Всякому $\theta\in\Theta$ отвечает чистое состояние

$$S_\theta=|\theta)(\theta|; \tag{4.2}$$

параметризация здесь не является точной, так как различным векторам, отличающимся на множитель, по модулю равный единице, соответствует одно и то же состояние. Ее можно сделать точной, потребовав, например, чтобы $\operatorname{Im}\theta_1=0$, но это нам не понадобится.

Если рассматривать действие самих операторов U в $\mathscr{H}$ как представление группы G, то семейство (4.2) ковариантно по отношению к этому представлению:

$$US_\theta U^*=|U\theta)(U\theta|=S_{U\theta}.$$

Представление $U\to U$ является, конечно, неприводимым.

Предположим, что рассматриваемый квантовый объект приготовлен в чистом состоянии, относительно которого больше «ничего не известно», и требуется по результатам квантовых измерений с максимальной точностью оценить истинное состояние объекта. Мы можем сформулировать это как задачу измерения параметра θ в семействе состояний (4.2); в силу упомянутой неоднозначности, речь будет идти по существу об оценивании чистого состояния S_θ.

Простейшей инвариантной функцией отклонения является

$$\delta=1-|(\theta|\hat{\theta})|^2;$$

мы рассмотрим более общие функции отклонения вида

$$W_\theta(\hat{\theta})=W(\delta). \tag{4.3}$$

Опишем измерения параметра θ, ковариантные по отношению к представлению $U\to U$ унитарной группы G. Фиксируем θ_0, например $\theta_0=e_1$, и рассмотрим стационарную подгруппу G_0 точки θ_0. Очевидно, что она состоит из унитарных операторов вида

$$U_0=\left[\begin{array}{c:c}\lambda & 0\\ \hdashline 0 & U_0'\end{array}\right],$$

где $|\lambda|=1$, а U_0' — произвольный унитарный оператор в ортогональном дополнении к вектору $|\theta_0)$. Эрмитов оператор P_0 коммутирует со всеми $U_0 \in G_0$ тогда и только тогда, когда

$$P_0 = \alpha |\theta_0)(\theta_0| + \beta I,$$

где α, β — вещественные числа, т. е.

$$P_0 = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & & & 0 \\ & \beta & & \\ & & \beta & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Оператор P_0 принадлежит множеству $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда $P_0 \geqslant 0$, $\operatorname{Tr} P_0 = n$, а это приводит к ограничениям $n\beta + \alpha = n$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \geqslant 0$, т. е.

$$\beta = 1 - \frac{\alpha}{n}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant n.$$

Из теоремы 2.1 вытекает, что всякое ковариантное измерение параметра θ имеет вид

$$M(d\theta) = U[I + \alpha(|\theta_0)(\theta_0| - n^{-1}I)]U^* \nu(d\theta),$$

где ν — инвариантная мера на единичной сфере Θ, нормированная так, что $\nu(\Theta) = 1$, и α — вещественный параметр, пробегающий отрезок $0 \leqslant \alpha \leqslant n$.

Отсюда следует, что множество ковариантных измерений как выпуклое множество является отрезком с крайними точками

$$M^*(d\theta) = I \cdot \nu(d\theta)$$

и

$$M_*(d\theta) = nU|\theta_0)(\theta_0|U^* \nu(d\theta) = n|\theta)(\theta|\nu(d\theta). \tag{4.4}$$

Первое разложение единицы соответствует измерительной процедуре, при которой результат выбирается наугад в соответствии с равномерным распределением ν на Θ. Измерение (4.4) является, очевидно, измерением максимального правдоподобия для семейства (4.2).

Предложение 4.1. *Измерение* (4.4) *является оптимальным для любой функции отклонения вида* (4.3), *где* $W(\cdot)$ — *произвольная неубывающая функция, не равная тождественно постоянной.*

Доказательство. Поскольку мера точности является аффинным функционалом измерения, достаточно показать, что

$$\mathscr{R}\{M_*\} < \mathscr{R}\{M^*\},$$

т. е. что

$$\int W_{\theta_0}(\theta)\, n\, |(\theta_0|\theta)|^2 \nu(d\theta) < \int W_{\theta_0}(\theta)\, \nu(d\theta).$$

Полагая $r = |(\theta_0|\theta)|$, перепишем это в виде

$$n \int W(1-r^2)\, r^2 \nu(d\theta) < \int W(1-r^2)\, \nu(d\theta).$$

В силу доказываемой ниже леммы, это эквивалентно неравенству

$$n \int_0^1 W(1-r^2)\, r^2 d(1-r^2)^{n-1} > \int_0^1 W(1-r^2)\, d(1-r^2)^{n-1},$$

или

$$\int_0^1 W(1-r^2)\left[(n-1)(1-r^2)^{n-2} - n(1-r^2)^{n-1}\right] dr^2 < 0.$$

Переходя к переменной $\delta = 1 - r^2$, имеем

$$\int_0^1 W(\delta)\, d(\delta^{n-1} - \delta^n) < 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1 (\delta^{n-1} - \delta^n)\, dW(\delta) > 0,$$

что, очевидно, выполняется для неубывающей функции $W(\delta)$, поскольку $\delta^{n-1} - \delta^n > 0$ при $0 < \delta < 1$.

Чтобы проиллюстрировать выигрыш от применения оптимального измерения, приведем значения среднего отклонения для простейшей функции $W(\delta) = \delta$:

$$\mathscr{R}\{M_*\} = n \int_0^1 \delta(1-\delta)\, d\delta^{n-1} = \frac{n-1}{n+1},$$

$$\mathscr{R}\{M^*\} = \int_0^1 \delta\, d\delta^{n-1} = \frac{n-1}{n}.$$

Отношение $\mathscr{R}\{M_*\}/\mathscr{R}\{M^*\} = \frac{n}{n+1}$ минимально и равно 2/3 для двумерного гильбертова пространства и стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, в бесконечномерном гильбертовом пространстве не существует лучшего способа оценить неизвестное чистое состояние, чем простое угадывание.

Лемма 4.1. *Для любой функции $F(\cdot)$ вещественного переменного r*

$$\int_{\Theta} F(|(\theta_0 \mid \theta)|)\, \nu(d\theta) = -\int_0^1 F(r)\, d(1-r^2)^{n-1}.$$

Доказательство. Выберем базис $\{e_j\}$, так что $e_1 = \theta_0$, и обозначим $(e_j \mid \theta) = \alpha_j + i\beta_j$, так что

$$\Theta = \left\{\alpha_j,\ \beta_j\colon\ \sum_j (\alpha_j^2 + \beta_j^2) = 1\right\}$$

и $r = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$. Мы докажем лемму, если установим, что

$$\int\limits_{\alpha_1^2+\beta_1^2 > \rho^2} \nu(d\theta) = (1-\rho^2)^{n-1}, \tag{4.5}$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$F_m(\rho,\ R) = \int\limits_{\substack{x_1^2+x_2^2 \geqslant \rho^2\\ x_1^2+\ldots+x_m^2 \leqslant R^2}} \!\!\ldots\!\! \int dx_1 \ldots dx_m.$$

Площадь единичной сферы в терминах этого интеграла равна, очевидно, $\left.\dfrac{\partial F_m(0,\ R)}{\partial R}\right|_{R=1}$; поэтому нормированная площадь фигуры, вырезаемой на единичной сфере неравенством $x_1^2 + x_2^2 \geqslant \rho^2$, дается выражением

$$\left.\frac{\partial F_m(\rho,\ R)}{\partial R}\right|_{R=1} : \left.\frac{\partial F_m(0, R)}{\partial R}\right|_{R=1}.$$

Но эта нормированная площадь как раз и есть нужный нам интеграл (4.5), если $m = 2n$. Имеем

$$F_m(\rho,\ R) = \int \ldots \int \left\{ \iint\limits_{\rho^2 \leqslant x_1^2+x_2^2 \leqslant R^2 - x_3^2 - \ldots - x_m^2} dx_1\, dx_2 \right\} dx_3 \ldots dx_m =$$

$$= \int \ldots \int \pi\left(R^2 - \rho^2 - x_3^2 - \ldots - x_m^2\right) dx_3 \ldots dx_m,$$

интегрирование ведется по области, где подынтегральное выражение неотрицательно, т. е. $x_3^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant R^2 - \rho^2$. Обозначая через $S_{m-2}(r) = cr^{m-3}$ площадь сферы $x_3^2 + \ldots + x_m^2 = r^2$, имеем

$$F_m(\rho,\ R) = c\pi \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} (R^2 - \rho - r^2)\, S_{m-2}(r)\, dr = c_1 (R^2 - \rho^2)^{m/2},$$

откуда $\frac{\partial}{\partial R} F_m(\rho,\ R)\Big|_{R=1} = c_2 (1-\rho^2)^{(m-2)/2}$, так что

$$\frac{\partial}{\partial R} F_{2n}(\rho,\ R)\Big|_{R=1} : \frac{\partial}{\partial R} F_{2n}(0,\ R)\Big|_{R=1} = (1-r^2)^{n-1},$$

и соотношение (4.5) доказано

§ 5. Измерение параметров ориентации

Рассмотрим пример, приведенный в § 1. Пусть некоторая установка приготовляет состояние S, инвариантное относительно вращений вокруг некоторой оси $\boldsymbol{n}_0$:

$$S = \sum_{m=-j}^{j} s_m \,|\, m)\,(m\,|,$$

где $|\,m)$ — собственные векторы оператора углового момента J_0 вокруг оси $\boldsymbol{n}_0$ (см. § III.13). Если установка затем поворачивается так, что ось $\boldsymbol{n}_0$ принимает новое положение $\boldsymbol{n} = g\boldsymbol{n}_0$, где g — элемент группы вращений, то приготавливаемое ею состояние будет описываться оператором плотности $S_{\boldsymbol{n}} = V_g S V_g^*$, где $g \to V_g$ — рассматриваемое неприводимое представление группы вращений в $(2j+1)$-мерном гильбертовом пространстве Ориентация квантового объекта задается в этом случае единичным вектором $\boldsymbol{n}$, указывающим направление оси симметрии. Предположим, что истинное направление $\boldsymbol{n}$ неизвестно и производятся измерения $M(dn)$ с целью оценить это направление $\boldsymbol{n}$. Таким образом, мы имеем семейство состояний $\{S_{\boldsymbol{n}};\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{S}^2\}$, где $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, которое ковариантно по отношению к представлению $g \to V_g$ группы вращений. Используя подход, развитый в § 3, рассмотрим, как точно можно оценить в этой ситуации истинное направление оси симметрии $\boldsymbol{n}$. Мы будем пользоваться следующей функцией отклонения:

$$W_{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}) = |\,\boldsymbol{n} - \hat{\boldsymbol{n}}\,|^2 = 2\,[1 - \boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}], \tag{5.1}$$

которая, очевидно, инвариантна. В качестве априорного распределения в байесовской мере точности возьмем нормированную евклидову площадь $\nu(dn)$ на сфере $\mathbb{S}^2$.

Так как представление $g \to V_g$ неприводимо, то согласно предложению 2.2 всякое ковариантное измерение имеет вид

$$M(dn) = (2j+1) V_g S_0 V_g^* \nu(dn) \qquad (\boldsymbol{n} = g\boldsymbol{n}_0),$$

где S_0 — оператор плотности, коммутирующий с V_g; $g \in G_0$. Подгруппа G_0 состоит из вращений вокруг оси $\boldsymbol{n}_0$, так что S_0 имеет диагональную матрицу в базе $\{|m)\}$.

Согласно предложению 3.1, чтобы решить задачу оптимального измерения параметра $\boldsymbol{n} \in \mathbb{S}^2$, следует найти минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор оператора апостериорного отклонения

$$\hat{W}_0 = 2 \int_G [1 - \boldsymbol{n}_0 \cdot g\boldsymbol{n}_0] V_g^* S V_g \mu(dg),$$

где $\mu(dg)$ — нормированная инвариантная мера на группе вращений. Как показано далее, для любого состояния S

$$\hat{W}_0 = \frac{2}{2j+1}\left[I - \frac{\operatorname{Tr} SJ_0}{j(j+1)} J_0\right], \tag{5.2}$$

где J_0 — оператор углового момента вокруг оси $\boldsymbol{n}_0$ (для сокращения обозначений мы полагаем $\hbar = 1$). Тем самым минимальное собственное значение оператора $\hat{W}_0$ равно $2(1 - |\bar{J}_0|/(j+1))$, где $\bar{J}_0 = \operatorname{Tr} SJ_0$, а соответствующий собственный вектор есть $|j)$ или $|-j)$, в зависимости от того, $\bar{J}_0 > 0$ или $\bar{J}_0 < 0$. Таким образом, мы доказали

Предложение 5.1. *Ковариантное измерение*

$$M_*(dn) = (2j+1) V_g |\pm j)(\pm j| V_g^* \nu(dn) \qquad (\boldsymbol{n} = g\boldsymbol{n}_0)$$

является байесовским и минимаксным измерением направления $\boldsymbol{n}$ оси симметрии для функции отклонения (5.1), *причем знак выбирается в соответствии со знаком среднего углового момента $\bar{J}_0 = \mathsf{E}_S(J_0)$. Минимум средней ошибки равен* $2[1 - |\bar{J}_0|/(j+1)] \geq 2/(j+1)$.

Простое угадывание, которому соответствует разложение единицы $M^*(dn) = I \cdot \nu(dn)$, дает среднее отклонение $\mathscr{R}\{M^*\} = \operatorname{Tr} \hat{W}_0 = 2$, так что

$$\frac{\mathscr{R}\{M_*\}}{\mathscr{R}\{M^*\}} = 1 - \frac{|\bar{J}_0|}{j+1}.$$

Выигрыш от применения оптимального измерения тем больше, чем больше отношение $|\bar{J}_0|/(j+1)$, и равен нулю, если данное состояние имеет нулевой средний момент

Заметим, что байесовское измерение совпадает с измерением максимального правдоподобия, лишь если вектор $|\pm j)$ является собственным вектором S с максимальным собственным значением.

Рассмотрим теперь задачу определения ориентации микрообъекта, не предполагая симметрии исходного состояния. Ориентация установки однозначно описывается репером $\theta=\{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3\}$ в $\mathbb{R}^3$. Фиксируем начальный репер $\theta_0=\{\boldsymbol{n}_1^0, \boldsymbol{n}_2^0, \boldsymbol{n}_3^0\}$. Вращение g однозначно определяется репером $\theta=g\theta_0$, в который оно переводит начальный репер θ_0. Поэтому множество всех реперов g можно отождествить с группой вращений G. Определим отклонение репера $\hat{\theta}=\{\hat{\boldsymbol{n}}_1, \hat{\boldsymbol{n}}_2, \hat{\boldsymbol{n}}_3\}$ от репера θ формулой

$$W_\theta(\hat{\theta})=\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{n}_i-\hat{\boldsymbol{n}}_i|^2=2\sum_{i=1}^{3}[1-\boldsymbol{n}_i\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_i]. \tag{5.3}$$

Рассмотрим оператор апостериорного отклонения

$$\hat{W}_0=2\sum_{i=1}^{3}\int[1-\boldsymbol{n}_i^0\cdot g\boldsymbol{n}_i^0]\,V_g^*SV_g\mu(dg).$$

Воспользовавшись формулой (5.2), имеем

$$\hat{W}_0=\frac{2}{2j+1}\sum_{i=1}^{3}\left[1-\frac{\bar{J}_i}{j(j+1)}J_i\right]=$$

$$=\frac{2}{2j+1}\left[3-\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\bar{J}_i^2}}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{3}\alpha_iJ_i\right],$$

где J_i — оператор углового момента вокруг оси $\boldsymbol{n}_i$, $\bar{J}_i=\doteq \mathsf{E}_S(J_i)$ и $\alpha_i=\bar{J}_i/\sqrt{\sum\bar{J}_i^2}$. Оператор $\sum_{i=1}^{3}\alpha_iJ_i$ является оператором углового момента вокруг оси $\boldsymbol{n}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3\boldsymbol{e}_3$; его максимальное собственное значение равно j. Обозначим через $|j;\,\boldsymbol{n})$ соответствующий собственный вектор.

Предложение 5.2. *Ковариантное измерение*

$$M_*(d\theta)=(2j+1)\,V_g\,|\,j;\ \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n};\ j\,|\,V_g^*\nu(d\theta)\qquad(\theta=g\theta_0)$$

является байесовским и минимаксным измерением ориентации $\theta=\{\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \boldsymbol{n}_3\}$ *для функции отклонения* (5.3). *Минимум среднего отклонения равен* $2\left[3-\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}\bar{J}_i^2/(j+1)}\right]$.

Выигрыш от применения оптимального измерения определяется величиной

$$\frac{\mathcal{R}\{M_*\}}{\mathcal{R}\{M^*\}}=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}\bar{J}_i^2}}{j+1}$$

и имеет тот же характер зависимости от параметров, что и в предыдущей задаче.

Для доказательства формулы (5.2) вычислим матричные элементы оператора $\hat{W}_0$ в базисе $\{|\,m)\}$. Для этого нам понадобятся матричные элементы операторов представления. Пусть $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\psi<2\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ — углы Эйлера, задающие вращение g. Нормированная мера задается в этих параметрах соотношением $\mu(dg)=(8\pi^2)^{-1}\,d\cos\theta\,d\psi\,d\varphi$. Имеем (см. комментарии)

$$(n\,|\,V_g\,|\,m)=e^{-im\psi-in\varphi}P^j_{mn}(\cos\theta),$$

$$P^j_{mn}(t)=K\,(1-t)^{\alpha/2}\,(1+t)^{\beta/2}\,P_s^{\alpha\beta}(t),$$

где $P_s^{\alpha\beta}$ — многочлены Якоби, $\alpha=|\,n-m\,|$, $\beta=|\,n+m\,|$, $s=j-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $K=\text{const}$. Выполняя интегрирование по φ и ψ и замечая, что $1-\boldsymbol{n}_0\cdot g\boldsymbol{n}_0=1-\cos\theta$, получаем

$$(m|\,\hat{W}_0\,|\,m')=\delta_{mm'}\sum_{n=-j}^{j}(n\,|\,S\,|\,n)\int_{-1}^{1}(1-t)\left|P^j_{mn}(t)\right|^2dt.$$

Остается вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1}(1-t)\left|P^j_{mn}(t)\right|^2dt=K^2\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta}\left|P_s^{\alpha\beta}(t)\right|^2dt,$$

где константа K определяется условием нормировки $K^2\int(1-t)^{\alpha}\times(1+t)^{\beta}\left|P_s^{\alpha\beta}(t)\right|^2dt=\frac{2}{2j+1}$. Используя рекуррентные соотношения для многочленов Якоби, получаем

$$(1-t)\,P_s^{\alpha\beta}(t)=\left[1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4j(j+1)}\right]P_s^{\alpha\beta}(t)+AP_{s+1}^{\alpha\beta}(t)+BP_{s-1}^{\alpha\beta}(t),$$

где A и B — некоторые постоянные. Так как многочлены $\left\{P_s^{\alpha\beta};\ s=0,\ 1,\ \ldots\right\}$ образуют ортогональную систему на интервале $(-1,\ 1)$ с весом $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, то в силу условия нормировки искомый интеграл равен коэффициенту при $P_s^{\alpha\beta}$ в предыдущей формуле, умноженному на $2/(2j+1)$, т. е.

$$\frac{2}{2j+1}\left[1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4j(j+1)}\right]=\frac{2}{2j+1}\left[1-\frac{nm}{j(j+1)}\right].$$

Отсюда

$$\hat{W}_0=\sum_{m,\,m'}|m)(m|\hat{W}_0|m')(m'|=$$

$$=\frac{2}{2j+1}\left[I-\frac{1}{j(j+1)}\sum_{n=-j}^{j}n\,(n|S|n)\sum_{m=-j}^{j}m\,|m)(m|\right].$$

Учитывая тот факт, что $J_0=\sum n\,|n)(n|$, получаем (5.2).

§ 6. Измерение угла поворота в случае спиновых степеней свободы

В предыдущих двух параграфах рассматриваемые представления группы симметрий были неприводимыми, что позволило использовать результаты из §§ 2, 3, дающие полное описание ковариантных измерений и решение байесовской и минимаксной задач. Теперь мы переходим к рассмотрению серии примеров, в которых группа является однопараметрической (группа сдвигов интервала $[0,\ 2\pi)$ по модулю 2π или группа сдвигов прямой) и любое нетривиальное представление с необходимостью является приводимым. Отсутствие полной классификации ковариантных измерений позволит в этом случае дать частичное решение байесовской и минимаксных задач — лишь для семейств чистых состояний.

Предположим, что установка, приготовляющая состояние микрообъекта, поворачивается на угол φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, вокруг фиксированной оси, например e_3. Тогда состояние объекта описывается оператором плотности $S_\varphi=V_\varphi S V_\varphi^*$, где S — исходное состояние, V_φ — оператор представления группы вращений, отвечающий повороту на угол φ вокруг оси e_3. Речь идет об оценивании истинного значения параметра φ по результатам квантовых измерений. Мы предположим, что пространственные степени свободы объекта не рассматриваются и измерение затрагивает только спиновые степени свободы. Тогда, согласно § III.13, состояния описываются матрицами плотности в гильбертовом пространстве конечной размерности $d=2j+1$, где j — значение спина, и семейство состояний приобретает вид

$$S_\varphi = e^{-iJ\varphi} S e^{iJ\varphi}; \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{6.1}$$

Здесь J — спиновый оператор углового момента относительно оси e_3, задаваемый диагональной матрицей в базисе из своих собственных векторов $\{|m)\}$:

$$J = \sum_{m=-j}^{j} m\,|m)\,(m|,$$

так что $J\,|m) = m\,|m)$, $e^{iJ\varphi}\,|m) = e^{im\varphi}\,|m)$; мы считаем $\hbar = 1$.

Операторы $V_\varphi = e^{-iJ\varphi}$ образуют представление однопараметрической группы поворотов вокруг оси e_3; измерения, ковариантные по отношению к представлению $\varphi \to V_\varphi$, можно рассматривать как более или менее точные измерения параметра угла поворота φ. Теорема 2.1 позволяет описать ковариантные измерения. Согласно этой теореме, всякое ковариантное измерение имеет вид

$$M(d\varphi) = e^{-iJ\varphi} P_0 e^{iJ\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi},$$

где P_0 — оператор, принадлежащий выпуклому множеству $\mathfrak{P}$. Поскольку стационарная подгруппа G_0 в этом случае тривиальна, условие 1) отпадает. Рассмотрим условие нормировки $\int M(d\varphi) = I$. Пусть $p_{mm'} = (m\,|\,P_0\,|\,m')$; тогда

$$(m\,|\,M(d\varphi)\,|\,m') = e^{i(m'-m)\varphi} p_{mm'} \frac{d\varphi}{2\pi}. \tag{6.2}$$

Интегрируя по φ и используя условие нормировки $\int M(d\varphi) = I$, получаем $p_{mm} = 1$. Таким образом, *всякое ковариантное измерение задается матричными элементами*

(6.2), *где матрица* $[p_{mm'}]$ *принадлежит выпуклому множеству*

$$\mathfrak{P} = \{[p_{mm'}]\colon [p_{mm'}] \geqslant 0,\ p_{mm} = 1\}.$$

Если бы удалось охарактеризовать крайние точки этого множества, то мы получили бы описание крайних точек множества ковариантных измерений. Легко показать, что *всякая матрица вида* $[\gamma_m \bar{\gamma}_{m'}]$, *где* $|\gamma_m| = 1$, *является крайней точкой* $\mathfrak{P}$. Для доказательства достаточно заметить, что множество матриц вида $d^{-1}P$, где $P \in \mathfrak{P}$, является выпуклым подмножеством множества всех матриц плотности, а матрицы вида $d^{-1}[\gamma_m \bar{\gamma}_{m'}]$ являются матрицами некоторых одномерных проекторов, т. е. крайними точками множества всех матриц плотности. Соответствующее измерение имеет матричное представление

$$(m \mid M(d\varphi) \mid m') = e^{i(m'-m)\varphi} \gamma_m \bar{\gamma}_{m'} \frac{d\varphi}{2\pi}. \qquad (6.3)$$

Оказывается, что таких измерений достаточно для оценивания параметра φ в семействе чистых состояний

$$S_\varphi = e^{-iJ\varphi} \mid \psi)(\psi \mid e^{iJ\varphi}; \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Положим $\psi_m = (m \mid \psi)$; если $\psi_m = 0$, то символ $\psi_m / |\psi_m|$ обозначает произвольное комплексное число, равное по модулю единице.

Теорема 6.1. *Ковариантное измерение*

$$(m \mid M_*(d\varphi) \mid m') = e^{i(m'-m)\varphi} \frac{\psi_m \bar{\psi}_{m'}}{|\psi_m| \, |\psi_{m'}|} \frac{d\varphi}{2\pi} \qquad (6.4)$$

является оптимальным при любой функции отклонения $W_\varphi(\hat{\varphi}) = W(\hat{\varphi} - \varphi)$, *где* $W(\cdot)$ — *четная* 2π-*периодичная непрерывная функция такая, что*

$$\int_0^{2\pi} W(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (6.5)$$

Заметим, что всякая функция, удовлетворяющая условию теоремы, разлагается в ряд Фурье

$$W(\varphi) = w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k \cos k\varphi, \text{ где } w_k \geqslant 0;\ k = 1, 2, \ldots, \qquad (6.6)$$

так что, например, $W(\varphi)=4\sin^2\frac{\varphi}{2}=2(1-\cos\varphi)$ охватывается условиями теоремы. Формально этим условиям удовлетворяет и обобщенная функция

$$-\delta(\varphi\,(\mathrm{mod}\,2\pi))=-\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi,$$

которой соответствует измерение максимального правдоподобия. На самом деле доказательство теоремы позво-

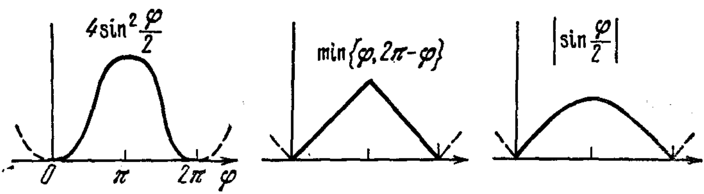

Рис. 12.

ляет охватить любые периодические обобщенные функции с $w_k\geqslant 0$. В качестве других примеров приведем

$$\min\{\varphi,\ 2\pi-\varphi\}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\varphi}{(2k+1)^2},\qquad 0\leqslant\varphi<2\pi;$$

$$\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\varphi}{4k^2-1}$$

(рис. 12). Квадратичное отклонение $\min\{\varphi^2,\ (2\pi-\varphi)^2\}=$ $=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\varphi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi$, в этот класс не попадает.

Нетрудно дать абстрактную характеристику функций, удовлетворяющих условию (6.5). Заметим, что $w_0-W(\varphi)$, $-\infty<\varphi<\infty$, является преобразованием Фурье четной неотрицательной меры, сосредоточенной в целочисленных точках, и, следовательно, является положительно определенной функцией. Отсюда следует, что 2π-периодичная непрерывная функция $W(\cdot)$ удовлетворяет условию (6.5) тогда и только тогда, когда для любых комплексных c_j таких, что $\sum\limits_j c_j = 0$, выполняется

$$\sum_{j,k} W(\varphi_j - \varphi_k) c_j \bar{c}_k \leqslant 0$$

для любых φ_j.

Теорема 6.1 показывает, что оптимальное измерение (6.4) обладает весьма желательным свойством: оно нечувствительно к выбору меры отклонения в достаточно широком классе функций.

Доказательство. Согласно замечанию после теоремы 3.1 достаточно искать минимум среднего отклонения $\mathscr{R}_0\{M\}$ среди ковариантных измерений. Используя (6.2), имеем

$$\mathscr{R}_0\{M\} = w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \sum_{m,m'} e^{i(m'-m)\varphi} \psi_{m'} \bar{\psi}_m p_{mm'} \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Рассмотрим коэффициент при w_k

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \sum_{m,m'} e^{i(m'-m)\varphi} \psi_{m'} \bar{\psi}_m p_{mm'} \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m': \\ |m-m'|=k}} \bar{\psi}_m p_{mm'} \psi_{m'}.$$

В силу положительной определенности $|p_{mm'}| \leqslant \leqslant \sqrt{p_{mm} p_{m'm'}} = 1$, так что

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m': \\ |m-m'|=k}} \bar{\psi}_m p_{mm'} \psi_{m'} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m': \\ |m-m'|=k}} |\psi_m| |\psi_{m'}|, \qquad (6.7)$$

причем равенство достигается при $p_{mm'} = \frac{\psi_m}{|\psi_m|} \cdot \frac{\bar{\psi}_{m'}}{|\psi_{m'}|}$. Отсюда следует, что $\mathscr{R}_0\{M\} \geqslant \mathscr{R}_0\{M_*\}$ и

$$\min \mathscr{R}_0\{M\} = w_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sum_{\substack{m,m': \\ |m-m'|=k}} |\psi_m| |\psi_{m'}|. \qquad (6.8)$$

Поскольку значение k не может превышать размерности пространства, ряд в правой части фактически содержит конечное число членов и сходится для любых w_k.

Это замечание позволяет распространить доказательство теоремы на обобщенные функции отклонения, удовлетворяющие условию $w_k \geqslant 0$. Таким образом, (6.4) является измерением максимального правдоподобия.

Для функции отклонения $W(\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}$ из (6.8) получаем

$$\min \mathscr{R}_0\{M\} = 2\left[1 - \sum_{m=-j+1}^{j} |\psi_m||\psi_{m-1}|\right] =$$
$$= |\psi_{-j}|^2 + |\psi_j|^2 + \sum_{m=-j+1}^{j} (|\psi_m| - |\psi_{m-1}|)^2. \qquad (6.9)$$

Мы вновь убеждаемся, что понятие «наиболее точного» (оптимального) измерения зависит от исходного состояния S, т. е. от априорной информации; всякое измерение вида (6.4) является оптимальным для соответствующего начального состояния S. В частности, если $\psi_m \geqslant 0$, то $\psi_m/|\psi_m| = 1$ и оптимальное измерение определяется соотношением

$$(m|M(d\varphi)|m') = e^{i(m'-m)\varphi}\frac{d\varphi}{2\pi}. \qquad (6.10)$$

Мы будем называть это *каноническим измерением угла поворота*. Отметим, что это определение относится к фиксированному базису $\{|m)\}$; в новом базисе $|m)' = \gamma_m|m)$ измерение (6.4) имеет каноническую форму (6.10).

§ 7. Соотношение неопределенностей «угол — угловой момент»

В § III.2 было установлено общее неравенство

$$\mathsf{D}_\theta\{M\}\,\mathsf{D}_\theta(A) \geqslant \frac{1}{4}\left|\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta\{M\}\right|^2, \qquad (7.1)$$

ограничивающее дисперсию измерения параметра сдвига θ в семействе состояний

$$S_\theta = e^{iA\theta}Se^{-iA\theta}.$$

С помощью этого неравенства мы получили соотношения неопределенностей для несмещенных измерений параметров координаты x и времени t. Угол φ является параметром сдвига в семействе (6.1), и поэтому можно ожидать наличия соотношения, ограничивающего «неопределенность» угла φ через неопределенность углового момента $\mathsf{D}(J)$. Однако то обстоятельство, что естественной областью определения угла φ является не вся прямая $\mathbb{R}$, а группа сдвигов $\mathbb{T}$ интервала $[0, 2\pi)$ по модулю 2π, вносит существенные изменения в трактовку неравенства (7.1), которые заставляют искать другой путь для установления соотношения неопределенностей «угол — угловой момент».

В самом деле, значения угла $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ следует рассматривать как совпадающие, а значения $\varphi\approx 0$ и $\varphi\approx\approx 2\pi$ — как «близкие». С точки зрения естественного определения «близости» множество Θ следует представлять себе не как интервал $[0, 2\pi)$, а как единичную окружность $\mathbb{T}$. В связи с этим возникает вопрос — как задать меру «неопределенности» случайной величины φ, принимающей значения в $\mathbb{T}$? Обычная дисперсия $\mathsf{D}(\varphi)=\int\limits_0^{2\pi}(\varphi-\mathsf{E}(\varphi))^2 P(d\varphi)$ в данном случае не подходит; так, симметричное относительно точки $\varphi=\pi$ распределение P, сосредоточенное на краях интервала $[0, 2\pi)$, будет иметь дисперсию $\approx\pi^2$, тогда как всякая разумная мера неопределенности такого распределения должна быть близка к нулю.

Рассмотрим комплексную величину $e^{i\varphi}$, пробегающую единичную окружность. Ее дисперсия равна

$$\mathsf{D}(e^{i\varphi})=\int\limits_0^{2\pi}|e^{i\varphi}-\mathsf{E}(e^{i\varphi})|^2 P(d\varphi)=1-|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|^2,$$

где $\mathsf{E}(e^{i\varphi})=\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}P(d\varphi)$, а $P(d\varphi)$ — распределение угла φ. Введем следующую меру неопределенности распределения угла φ:

$$\Delta(\varphi)=\frac{\mathsf{D}(e^{i\varphi})}{|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|^2}\equiv|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|^{-2}-1. \tag{7.2}$$

Заметим, что $\Delta(\varphi)=\infty$ для равномерного распределения на $[0, 2\pi)$ и $\Delta(\varphi)=0$ для вырожденных распределений; величина $|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|$ равна расстоянию от центра единичной окружности, на которой сосредоточено распределение $e^{i\varphi}$, до геометрического центра масс этого распределения.

Другое обстоятельство, побуждающее отказаться от использования неравенства (7.1), связано с тем, что понятие несмещенности для измерений, принимающих значения в $\mathbb{T}$, уже не может играть прежней роли; в частности, из ковариантности измерения уже не следует его несмещенность. Пусть $\mu_\varphi(d\hat{\varphi})$ — распределение вероятностей ковариантного измерения $M=\{M(d\hat{\varphi})\}$ относительно состояния S_φ. Предполагая для простоты, что это распределение имеет плотность $p_\varphi(\hat{\varphi})$, из условия ковариантности получаем

$$p_\varphi(\hat{\varphi})=p_0((\hat{\varphi}-\varphi)\,(\mathrm{mod}\,2\pi)).$$

Используя это соотношение, получаем

$$\mathsf{E}_\varphi\{M\}=\mathsf{E}_0\{M\}+\varphi+\left[\pi-2\pi\int\limits_{2\pi-\varphi}^{2\pi}p_0(\hat{\varphi})\,d\hat{\varphi}\right],$$

так что $\frac{d}{d\varphi}E_\varphi\{M\}=1+2\pi p_0(2\pi-\varphi)\neq 1$. Конечно, мы можем подставить это в неравенство (7.1) и получить некоторую границу для дисперсий ковариантных измерений, содержащую, кроме дисперсий, функцию $p_0(2\pi-\varphi)$, однако это вряд ли можно считать аналогом соотношения неопределенностей. Мы пойдем по другому пути и получим неравенство для меры неопределенности, задаваемой формулой (7.2), которое будет иметь форму соотношения неопределенностей:

$$\Delta(\varphi)\,\mathsf{D}(J)\geqslant 1/4. \tag{7.3}$$

Пусть $|\psi)=\sum\limits_{m=-j}^{j}\psi_m|m)$ — вектор чистого состояния и $\Delta(\varphi)$ — неопределенность (7.2) для распределения вероятностей результатов измерения $P(d\varphi)=(\psi|M(d\varphi)\psi)$.

Предложение 7.1. *Для любого ковариантного измерения* M *угла* φ

$$\Delta(\varphi)\geqslant$$
$$\geqslant\left[1-\frac{1}{2}(|\psi_{-j}|^2+|\psi_j|^2)\right]^{-1}\left[\frac{1}{4}\mathsf{D}(J)^{-1}+\frac{1}{2}(|\psi_{-j}|^2+|\psi_j|^2)\right].$$

Соотношение неопределенностей (7.3) получается отсюда, если отбросить неотрицательные слагаемые $\frac{1}{2}(|\psi_{-j}|^2+|\psi_j|^2)$.

Доказательство. Пусть M — ковариантное измерение (6.2). Тогда $\mathsf{E}(e^{i\varphi})=\sum\limits_{m=-j+1}^{j}\bar{\psi}_{m-1}\psi_m\rho_{m-1,m}$, откуда, согласно (6.7),

$$|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|\leqslant\mathsf{E}_*(e^{i\varphi})=\sum_{m=-j+1}^{j}|\psi_{m-1}||\psi_m|,$$

где звездочкой отмечено математическое ожидание, отвечающее распределению $P_*(d\varphi)=(\psi|M_*(d\varphi)\psi)$ оптимального измерения (6.4). Поэтому

$$\Delta(\varphi)\geqslant\Delta_*(\varphi)$$

и нам достаточно рассмотреть измерение M_*.

Введем операторы

$$E_\pm=\int_0^{2\pi}e^{\pm i\varphi}M_*(d\varphi).$$

Используя (6.4) и полагая $\gamma_m=\psi_m/|\psi_m|$, получаем

$$\begin{aligned}E_-&=\sum_{m=-j+1}^{j}\gamma_{m-1}\bar{\gamma}_m|m-1)(m|,\\E_+&=\sum_{m=-j+1}^{j}\bar{\gamma}_m\gamma_{m-1}|m)(m-1|.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Отметим, что, выбирая новый базис $|m)'=\gamma_m|m)$, мы всегда можем привести $E_\pm$ к каноническому виду

$$E_-=\sum_m|m-1)(m|,\quad E_+=\sum_m|m)(m-1|.$$

Из (7.4) легко получаем, что $E_-=E_+^*$ и

$$E_-E_+=I-|j)(j|,\quad E_+E_-=I-|-j)(-j|;\tag{7.5}$$

$$[E_-,\ J]=E_-,\quad [E_+,\ J]=-E_+.\tag{7.6}$$

Введем операторы $C=\frac{1}{2}(E_+ + E_-)$, $S=\frac{i}{2}(E_+ - E_-)$. Из (7.5) и (7.6) получаем соответственно

$$\begin{gathered} C^2+S^2=I-\frac{1}{2}[|j)(j|+|-j)(-j|], \\ [C,\ S]=\frac{i}{2}[-|j)(j|+|-j)(-j|]; \end{gathered} \tag{7.7}$$

$$[C,\ J]=iS,\quad [S,\ J]=-iC. \tag{7.8}$$

Из двух последних соотношений и соотношения неопределенностей (II.6.9) получаем

$$\mathsf{D}(C)\,\mathsf{D}(J)\geqslant\frac{1}{4}\bar{S}^2,\quad \mathsf{D}(S)\,\mathsf{D}(J)\geqslant\frac{1}{4}\bar{C}^2, \tag{7.9}$$

где $\bar{A}=(\psi|A\psi)$ — среднее значение наблюдаемой A относительно состояния $S=|\psi)(\psi|$.

Легко видеть, что $\mathsf{E}_*(e^{i\varphi})=\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}(\psi|M(d\varphi)\psi)=\bar{E}_-=$ $=\bar{C}+i\bar{S}$, откуда

$$|\mathsf{E}_*(e^{i\varphi})|^2=\bar{C}^2+\bar{S}^2,\quad \Delta_*(\varphi)=(1-\bar{C}^2-\bar{S}^2)/(\bar{C}^2+\bar{S}^2).$$

Используя первое из соотношений (7.7) и тот факт, что $\mathsf{D}(C)=\overline{C^2}-\bar{C}^2$, $\mathsf{D}(S)=\overline{S^2}-\bar{S}^2$, получаем

$$\Delta_*(\varphi)=\frac{\mathsf{D}(C)+\mathsf{D}(S)+\frac{1}{2}\overline{(|j)(j|+|-j)(-j|)}}{\bar{C}^2+\bar{S}^2}.$$

Применив неравенство (7.9), получаем

$$\Delta_*(\varphi)\geqslant\frac{1}{4}\mathsf{D}(J)+\frac{1}{2}(|\psi_{-j}|^2+|\psi_j|^2)\cdot|\mathsf{E}_*(e^{i\varphi})|^{-2},$$

поскольку $\overline{|j)(j|}=|\psi_j|^2$. Учитывая, что $|\mathsf{E}_*(e^{i\varphi})|^{-2}=$ $=\Delta_*(\varphi)+1$, приходим к искомому неравенству.

Установим также соотношение между средним отклонением (6.9) и неопределенностью результатов измерения угла $\Delta(\varphi)$. Для любого ковариантного измерения M

$$\mathscr{R}_0\{M\}=\mathsf{E}\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)=\mathsf{E}(|e^{i\varphi}-1|^2)=2(1-\operatorname{Re}\mathsf{E}(e^{i\varphi}))\geqslant$$
$$\geqslant 2(1-|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|\geqslant 1-|\mathsf{E}(e^{i\varphi})|^2=\frac{\Delta(\varphi)}{1+\Delta(\varphi)}.$$

Используя соотношение неопределенностей, получаем нижнюю границу для минимального среднего отклонения (6.9)

$$\mathscr{R}_0\{M\} \geqslant \frac{1}{4\left[\mathsf{D}(J)+\frac{1}{4}\right]}.$$

§ 8. Измерение фазы гармонического осциллятора. Соотношение неопределенностей «фаза—число квантов»

Пусть $\mathscr{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство, $\{|n);\ n=0,\ 1,\ \ldots\}$ — ортонормированный базис и N — оператор числа квантов:

$$N=\sum_{n=0}^{\infty} n\,|n)\,(n|.$$

Рассмотрим семейство состояний

$$S_\theta = e^{iN\theta} S e^{-iN\theta}; \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

где θ — параметр фазы квантового осциллятора (см. § III.10). Охарактеризуем измерения, ковариантные по отношению к представлению $\theta \to e^{iN\theta}$ группы сдвигов по модулю 2π. Так как представление бесконечномерно, то теорема 2.1 здесь непосредственно неприменима, однако из доказываемой ниже теоремы 10.1 вытекает, что ковариантные измерения имеют здесь ту же структуру, что и в случае угла поворота:

$$(n\,|\,M(d\theta)\,|\,n') = e^{i(n-n')\theta} p_{nn'} \frac{d\theta}{2\pi},$$

где $[p_{nn'}]$ — бесконечная положительно определенная матрица с единицами на диагонали. Из общих результатов § 10 вытекает также, что *измерение*

$$(n\,|\,M_*(d\theta)\,|\,n') = e^{i(n-n')\theta} \frac{\psi_n}{|\psi_n|} \cdot \frac{\bar{\psi}_{n'}}{|\psi_{n'}|} \frac{d\theta}{2\pi} \tag{8.1}$$

является оптимальным для любой функции отклонения, удовлетворяющей условиям теоремы 6.1, *и для исходного состояния* $S=|\psi)(\psi|$, *где* $\psi=\sum_n \psi_n|n)$.

Если $\psi_n \geqslant 0$, то мы получаем каноническое измерение фазы (III.10.13). Заметим, что всякое измерение вида (8.1) приводится к каноническому заменой базиса $|n)' = \frac{\psi_n}{|\psi_n|}|n)$. Вводя оператор фазы (III.10.12) для измерения (8.1):

$$P = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} M_* (d\theta), \quad P^* = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} M_* (d\theta)$$

и соответствующие операторы $C = \frac{1}{2}(P + P^*)$, $S = \frac{i}{2} \times \times (P^* - P)$, удовлетворяющие соотношениям

$$C^2 + S^2 = I - \frac{1}{2}|0)(0|, \quad [C, S] = \frac{i}{2}|0)(0|,$$

$$[C, N] = iS, \quad [S, N] = -iC,$$

можно доказать аналог предложения 7.1: *неопределенность распределения вероятностей для любого ковариантного измерения фазы относительно чистого состояния* $|\psi)(\psi|$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Delta(\theta) \geqslant \left[1 - \frac{1}{2}|(\psi|0)|^2\right]^{-1} \left[\frac{1}{4}\mathsf{D}(N)^{-1} + \frac{1}{2}|(\psi|0)|^2\right].$$

Его следствием является соотношение неопределенностей «фаза — число квантов»:

$$\Delta(\theta)\,\mathsf{D}(N) \geqslant 1/4,$$

где $\Delta(\cdot)$ определяется по формуле (7.2).

§ 9. Измерение угла поворота в случае пространственных степеней свободы

Полагая $\hbar = 1$, рассмотрим семейство состояний

$$S_\varphi = e^{-iL\varphi} S e^{iL\varphi}; \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{9.1}$$

где L — оператор углового момента вокруг фиксированной оси (см. § III.12). Опуская несущественные аргументы, мы можем считать, что $L = i^{-1}\frac{d}{d\alpha}$ в пространстве $\mathscr{L}^2(0, 2\pi)$

с областью определения $\mathscr{D}(L)=\left\{\psi\colon\ \psi(0)=\psi(2\pi),\right.$ $\left.\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{d}{d\alpha}\psi(\alpha)\right|^2 d\alpha<\infty\right\}$. Функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\alpha}$, $m=0, \pm 1, \ldots$, образуют ортонормированный базис из собственных векторов оператора L. Обозначая m-й собственный вектор через $|m)$, будем иметь

$$L|m)=m|m), \qquad m=0,\ \pm 1,\ \ldots$$

Операторы $\{e^{-iL\varphi}\}$ образуют бесконечномерное представление группы поворотов окружности, и нас интересуют измерения M, ковариантные по отношению к представлению $\varphi\to e^{-iL\varphi}$. Из доказываемого в следующем параграфе общего результата вытекает, что, как и в рассмотренных выше случаях,

$$(m\,|\,M(d\varphi)\,|\,m')=e^{i(m'-m)\varphi}p_{mm'}\frac{d\varphi}{2\pi},$$

где $[p_{mm'}]$ — бесконечная в обе стороны положительно определенная матрица с единицами на диагонали.

Пусть в формуле (9.1) $S=|\psi)(\psi|$. Из результатов § 10 вытекает, что *измерение*

$$(m\,|\,M_*(d\varphi)\,|\,m')=e^{i(m'-m)\varphi}\gamma_m\bar{\gamma}_{m'}\frac{d\varphi}{2\pi}, \tag{9.2}$$

где $\gamma_m=(m\,|\,\psi)/|(m\,|\,\psi)|$, *является оптимальным для любой функции отклонения, удовлетворяющей условию* (6.5). Переходя к новому базису $|m)'=\gamma_m|m)$, получаем

$$'(m\,|\,M_*(d\varphi)\,|\,m')'=e^{i(m'-m)\varphi}\frac{d\varphi}{2\pi},$$

или, более строго,

$$'(m\,|\,M_*(B)\,|\,m')'=\int\limits_B e^{i(m'-m)\varphi}\frac{d\varphi}{2\pi}, \qquad B\in\mathscr{A}\big([0,\ 2\pi)\big).$$

Это разложение единицы ортогонально; в самом деле, для любых $B_1, B_2 \in \mathscr{A}([0, 2\pi))$ таких, что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $'(m \mid M_*(B_1) M_*(B_2) \mid m')' =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{B_1} e^{i(n-m)\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{B_2} e^{i(m'-n)\varphi'} \frac{d\varphi'}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} 1_{B_1}(\varphi) e^{-in\varphi} 1_{B_2}(\varphi)\, d\varphi = 0$$

в силу равенства Парсеваля для рядов Фурье.

Покажем, что *отвечающий спектральной мере $M_*(d\varphi)$ эрмитов оператор совпадает с канонической наблюдаемой угла поворота*, введенной в § III.12. Для этого заметим, что оператор $U = \int e^{i\varphi} M_*(d\varphi)$ имеет матричные элементы $[\delta_{m+1-m'}]$, т. е. $U \mid m) = \mid m+1)$. Но это совпадает с действием оператора умножения $e^{i\alpha}$ на базисные функции $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\alpha}\right\}$. Таким образом, $U = e^{i\Phi}$, где Φ — оператор умножения на независимую переменную в $\mathscr{L}^2([0, 2\pi))$.

Каждое из ортогональных разложений единицы (9.2) описывает некоторую наблюдаемую, которая дает наиболее точное измерение угла для соответствующего семейства состояний. Таким образом, существует бесконечно много наблюдаемых угла поворота, которые, впрочем, получаются одна из другой простым изменением базиса $\mid m)' = \gamma_m \mid m)$, где $\mid \gamma_m \mid = 1$. Поскольку мы не знаем всех крайних точек множества ковариантных измерений, остается открытым интересный вопрос — все ли крайние точки являются в этом случае простыми измерениями.

Чтобы установить соотношения неопределенностей «угол — угловой момент», введем эрмитовы операторы

$$C = \frac{1}{2}(U + U^*), \quad S = \frac{i}{2}(U^* - U),$$

удовлетворяющие соотношениям

$$C^2 + S^2 = I, \quad [C, S] = 0,$$
$$[C, L] = iS, \quad [S, L] = -iC.$$

Имеем

$$\mathsf{E}_*(e^{i\varphi}) = \bar{C} + i\bar{S}, \quad \mathsf{D}_*(e^{i\varphi}) = \mathsf{D}(C) + \mathsf{D}(S),$$

откуда, вновь вводя постоянную Планка $\hbar$, получаем, **как** выше,

$$\Delta(\varphi)\,\mathrm{D}(L) \geqslant \hbar^2/4,$$

где $\Delta(\cdot)$ определяется формулой (7.2).

§ 10. Ковариантные измерения параметра поворота. Случай произвольного представления группы $\mathbb{T}$

В §§ 6—9 мы имели дело с различными представлениями одной и той же группы поворотов окружности $\mathbb{T}$, или группы сдвигов по модулю 2π интервала $[0, 2\pi)$. Рассмотрим теперь эти случаи с общей точки зрения. Из предложения III.2.1 вытекает, что произвольное проективное представление группы $\mathbb{T}$ имеет вид $\varphi \to e^{-iA\varphi}$, где A — самосопряженный оператор, спектр которого должен быть сосредоточен в точках вида $m = k + a_0$, где k — целые числа, a_0—несущественный постоянный добавок. Спектральное разложение оператора A имеет вид

$$A = \sum_m mE_m. \tag{10.1}$$

Здесь E_m — проектор на собственное подпространство $\mathscr{H}_m$, отвечающее собственному значению m. Имеем

$$\mathscr{H} = \sum_m \oplus \mathscr{H}_m, \tag{10.2}$$

$$\|\psi\|^2 = \sum_m \|\psi_m\|^2, \qquad \psi = \sum_m \psi_m, \tag{10.3}$$

где $\psi_m = E_m\psi$ — компонента вектора ψ в пространстве $\mathscr{H}_m$. Мы будем писать $\psi = [\psi_m]$. Отметим, что $e^{iA\varphi}\psi = [e^{im\varphi}\psi_m]$.

Ограниченный оператор K в $\mathscr{H}$ задается «ядром» — блочной матрицей $[K_{mm'}]$, где $K_{mm'} = E_m K E_{m'}$ — оператор из $\mathscr{H}_{m'}$ в $\mathscr{H}_m$. Положительному оператору соответствует положительно определенное ядро $[K_{mm'}] \geqslant 0$; единичный оператор задается ядром $[\delta_{mm'} I_m]$, где I_m — единичный оператор в $\mathscr{H}_m$. Отметим, что мы получим случаи, рассматривавшиеся в §§ 6, 8, 9, если $m = -j, -j+1, \ldots, j$; $m = 0, 1, \ldots$ и $m = 0, \pm 1, \ldots$ соответственно, причем во всех этих случаях $\dim E_m = 1$.

Теорема 10.1. *Измерения, ковариантные относительно представления* $\varphi \to e^{-iA\varphi}$ *группы* $\mathbb{T}$, *описываются ядрами*

$$M(B)=\left[K_{mm'}\int\limits_B e^{i(m'-m)\varphi}\frac{d\varphi}{2\pi}\right];\qquad B\in\mathscr{A}([0,\ 2\pi)),$$

где $[K_{mm'}]$ — *произвольное положительно определенное ядро такое, что* $K_{mm}=I_m$.

Доказательство. Согласно формуле (2.2)

$$\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Tr} e^{-iA\varphi}Se^{iA\varphi}M(B)\,d\varphi=\operatorname{mes}B,$$

где mes обозначает меру Лебега на прямой. Возьмем в качестве оператора плотности S оператор S_m, действующий в пространстве $\mathscr{H}_m$, т. е. $S_mE_m=E_mS_m=S_m$. Тогда $e^{-iA\varphi}S_me^{iA\varphi}=S_m$ и, обозначая через Tr_m след в пространстве $\mathscr{H}_m$, имеем

$$\operatorname{Tr}_m S_mM_{mm}(B)=(2\pi)^{-1}\operatorname{mes}B,$$

где $M_{mm'}(B)=E_mM(B)E_{m'}$. Поскольку это выполняется для произвольного S_m в $\mathscr{H}_m$, то

$$M_{mm}(B)=I_m\frac{\operatorname{mes}B}{2\pi}. \tag{10.4}$$

Из положительности оператора $M(B)$ и неравенства Коши — Буняковского

$$|(\psi_m\,|\,M_{mm'}(B)\,\psi_{m'})|\leqslant\frac{\operatorname{mes}B}{2\pi}\|\psi_m\|\,\|\psi_{m'}\|,$$

откуда, аналогично доказательству теоремы 2.2, получаем

$$(\psi_m\,|\,M_{mm'}(B)\,\psi_{m'})=\int\limits_B(\psi_m\,|\,p_{mm'}(\varphi)\,\psi_{m'})\frac{d\varphi}{2\pi},$$

где $p_{mm'}(\cdot)$ — ограниченная операторнозначная функция, $\|p_{mm'}(\varphi)\|\leqslant 1$ почти всюду. Из (10.4) вытекает, что $p_{mm}(\varphi)\equiv\equiv I_m$; из того, что $M(B)\geqslant 0$, следует $[p_{mm'}(\varphi)]\geqslant 0$ почти всюду. Из ковариантности измерения вытекает, что

$$p_{mm'}(\varphi)=e^{i(m'-m)\varphi}p_{mm'}(0).$$

Полагая $K_{mm'}=p_{mm'}(0)$, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь задачу оценивания параметра сдвига (поворота) φ в семействе состояний

$$S_\varphi = e^{-iA\varphi} S e^{iA\varphi}; \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{10.5}$$

где $S = |\psi)(\psi|$, $\psi = [\psi_m]$, — чистое состояние. Пусть функция отклонения $W(\hat{\varphi} - \varphi)$ непрерывна и удовлетворяет условию (6.5); тогда

$$W(\varphi) = w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k \cos k\varphi \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{ik\varphi},$$

где $\sum\limits_k |v_k| < \infty$, $v_k \leqslant 0$ при $k \neq 0$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 6.1, имеем

$$\mathscr{R}_0\{M\} = \sum_{m, m'} v_{m-m'} (\psi_m | K_{mm'} \psi_{m'}) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{m, m'} v_{m-m'} \|\psi_m\| \|\psi_{m'}\|,$$

причем равенство достигается при

$$K_{mm'} = \frac{|\psi_m)(\psi_{m'}|}{\|\psi_m\| \|\psi_{m'}\|}. \tag{10.6}$$

Аналогичные рассуждения проходят и для функции отклонения $W(\hat{\varphi} - \varphi) = -\delta((\hat{\varphi} - \varphi) \pmod{2\pi}) \left(v_m \equiv \frac{1}{2\pi}\right)$, если предположить, что $\sum\limits_m \|\psi_m\| < \infty$.

Положительная операторнозначная мера, отвечающая ядру (10.6),

$$M_0(d\varphi) = \frac{|\psi_m)(\psi_{m'}|}{\|\psi_m\| \|\psi_{m'}\|} e^{i(m'-m)\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}$$

не является измерением, если $\dim \mathscr{H}_m > 1$ для некоторого m, так как тогда

$$E_0 \equiv \int M_0(d\varphi) = \sum_m \frac{|\psi_m)(\psi_m|}{(\psi_m | \psi_m)} \neq I.$$

Оператор E_0 является проектором на подпространство, порожденное компонентами ψ_m начального вектора ψ.

В силу этого мера $M_0(d\varphi)$ может быть продолжена до разложения единицы в $\mathscr{K}$ (без изменения величины меры точности) по формуле

$$M_*(d\varphi) = M_0(d\varphi) \oplus M_1(d\varphi), \tag{10.7}$$

где $M_1(d\varphi)$ — произвольное разложение единицы в ортогональном дополнении к $E_0(\mathscr{K})$. Добавок $M_1(d\varphi)$ никак не проявляется в статистике измерения относительно исходного семейства состояний (10.5), поскольку оно сосредоточено на подпространстве $E_0(\mathscr{K})$. Можно положить, например,

$$M_1(d\varphi) = (\mathrm{I} - E_0)\,\mu(d\varphi),$$

где μ — произвольное распределение вероятностей. Конечно, M_* будет ковариантно лишь, если ковариантно M_1.

Если $\dim \mathscr{K}_m = \mathrm{const}$, то пространства $\mathscr{K}_m$ изоморфны между собой. Пусть $\{U_{mm'}\}$ — согласованная система изометрических отображений $\mathscr{K}_{m'}$ на $\mathscr{K}_m$, так что $U_{mm} = \mathrm{I}_m$ и $U_{mm'}U_{m'm''} = U_{mm''}$. Ядро $[U_{mm'}]$ удовлетворяет условиям теоремы 10.1. Рассмотрим соответствующее измерение

$$M(d\varphi) = [U_{mm'}e^{i(m'-m)\varphi}]\frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Считая, что отображение $U_{mm'}$ «отождествляет» пространства $\mathscr{K}_{m'}$ и $\mathscr{K}_m$, получаем «каноническое» измерение

$$M(d\varphi) = [\mathrm{I}_m e^{i(m'-m)\varphi}]\frac{d\varphi}{2\pi}. \tag{10.8}$$

Конечно, оно зависит от способа отождествления пространств $\{\mathscr{K}_m\}$.

Измерение (10.8) будет оптимальным для данного семейства состояний (10.5), если $(\psi_m | U_{mm'}\psi_{m'}) \equiv (\psi_m | \psi_{m'}) = \|\psi_m\|\|\psi_{m'}\|$, т. е. если при данном способе отождествления все компоненты ψ_m исходного вектора ψ коллинеарны, более того, $\psi = \sum\limits_m \alpha_m e$, где $\alpha_m \geqslant 0$, а e — фиксированный вектор из $\mathscr{K}_m$.

§ 11. Ковариантные измерения параметра сдвига на прямой

Наиболее важными примерами параметров сдвига на всей прямой являются координата x и время t. Мы рассмотрим ковариантные измерения параметра сдвига сначала с общей точки зрения.

Рассмотрим произвольное проективное унитарное представление группы сдвигов $\mathbb{R}$. Согласно предложению III.2.1, оно всегда сводится к унитарному представлению

$$x \to e^{-iAx}, \tag{11.1}$$

где A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. В общем случае спектральная теорема фон Неймана позволяет утверждать, что A *может быть реализован как оператор умножения на независимую переменную в непрерывной сумме гильбертовых пространств*. Мы дадим описание этой конструкции в частном случае, когда оператор A «имеет спектральный тип $d\lambda$». Как и все содержание этого параграфа, построение будет носить формальный характер, так как строгое обоснование заняло бы слишком много места. Полезно рассматривать результаты этого параграфа как непрерывный аналог результатов § 10, когда расстояние между собственными значениями оператора A стремится к нулю и они непрерывно заполняют некоторый интервал Λ вещественной прямой.

Пусть для почти любого $\lambda \in \Lambda$ задано гильбертово пространство $\mathscr{H}_\lambda$ со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)_\lambda$ и нормой $\|\psi_\lambda\|_\lambda^2 = (\psi_\lambda|\psi_\lambda)_\lambda$; $\psi_\lambda \in \mathscr{H}_\lambda$. *Непрерывной суммой* пространств $\mathscr{H}_\lambda$ относительно меры $d\lambda$

$$\mathscr{H} = \int_\Lambda \oplus \mathscr{H}_\lambda \, d\lambda \tag{11.2}$$

называется пространство, состоящее из функций $\psi = [\psi_\lambda]$, где $\psi_\lambda \in \mathscr{H}_\lambda$, таких, что

$$\|\psi\|^2 \equiv \int_\Lambda \|\psi_\lambda\|_\lambda^2 \, d\lambda < \infty. \tag{11.3}$$

Скалярное произведение в $\mathscr{H}$ определяется формулой

$$(\varphi|\psi) = \int_\Lambda (\varphi_\lambda|\psi_\lambda)_\lambda \, d\lambda, \tag{11.4}$$

Таким образом, мы предполагаем, что наше *пространство $\mathscr{H}$ разлагается в непрерывную сумму* (11.2), *а оператор A действует в $\mathscr{H}$ как оператор умножения на* λ:

$$A\psi = [\lambda\psi_\lambda], \text{ если } \psi = [\psi_\lambda].$$

Отсюда следует, что $e^{iAx}\psi = [e^{i\lambda x}\psi_\lambda]$. Формулы (11.2) — (11.3) являются непрерывным аналогом соотношений (10.2) — (10.3).

Мы будем рассматривать операторы K в $\mathscr{H}$, задаваемые ядрами $[K(\lambda, \lambda')]$, где $K(\lambda, \lambda')$ — оператор из $\mathscr{H}_{\lambda'}$ в $\mathscr{H}_\lambda$, по формуле

$$K\psi = \left[\int_\Lambda K(\lambda, \lambda')\,\psi_{\lambda'}\,d\lambda'\right]. \tag{11.5}$$

Этому соответствию можно придать непосредственный смысл, если оператор K — ядерный (ср. § II.7); для эрмитова ядерного оператора $K = \sum_j \varkappa_j |\psi^j)(\psi^j|$, очевидно, $K(\lambda, \lambda') = \sum_j \varkappa_j |\psi^j_\lambda)(\psi^j_{\lambda'}|$. Здесь $\psi^j = [\psi^j_\lambda]$, так что $K^j(\lambda, \lambda') = |\psi^j_\lambda)(\psi^j_{\lambda'}|$ есть оператор из $\mathscr{H}_{\lambda'}$ в $\mathscr{H}_\lambda$, действующий по формуле

$$K^j(\lambda, \lambda')\,\psi_\lambda = \psi^j_\lambda\,(\psi^j_{\lambda'}\,|\,\psi_{\lambda'})_{\lambda'}.$$

Однако мы будем пользоваться формальным соответствием между операторами и ядрами и в тех случаях, когда K не является ядерным; например, единичному оператору будем сопоставлять ядро $[\delta(\lambda - \lambda')\,I_\lambda]$, где I_λ — единичный оператор в $\mathscr{H}_\lambda$.

Положительным операторам K соответствуют положительно определенные ядра

$$\iint (\psi_\lambda\,|\,K(\lambda, \lambda')\,\psi_{\lambda'})_\lambda\,d\lambda\,d\lambda' \geqslant 0; \qquad \psi = [\psi_\lambda]. \tag{11.6}$$

Подставляя вместо ψ_λ выражение $f(\lambda)\,\psi_\lambda$, где $f(\cdot)$ — произвольная скалярная функция, получаем, что (11.6) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\psi = [\psi_\lambda]$ скалярное ядро $(\psi_\lambda\,|\,K(\lambda, \lambda')\,\psi_{\lambda'})_\lambda$ является положительно определенным. Отсюда следует, что для положительно определенного ядра $[K(\lambda, \lambda')]$ выполняется

$$|(\psi_\lambda | K(\lambda, \lambda') \psi_{\lambda'})_\lambda|^2 \leqslant \leqslant (\psi_\lambda | K(\lambda, \lambda) \psi_\lambda)_\lambda \cdot (\psi_{\lambda'} | K(\lambda', \lambda') \psi_{\lambda'})_{\lambda'} \qquad (11.7)$$

для почти всех $\lambda, \lambda' \in \Lambda$.

Приведем непрерывный аналог теоремы 10.1, дающий *общий вид измерения, ковариантного относительно представления* (11.1) *группы сдвигов*:

$$M(dx) = [K(\lambda, \lambda') e^{i(\lambda' - \lambda)x}] \frac{dx}{2\pi}, \qquad (11.8)$$

где $[K(\lambda, \lambda')]$ — *положительно определенное ядро, удовлетворяющее условию* $K(\lambda, \lambda) = I_\lambda$. Формально легко проверяется, что (11.8) действительно является разложением единицы: $M(dx) \geqslant 0$ в силу положительной определенности ядра $[K(\lambda, \lambda') e^{i(\lambda' - \lambda)x}]$, и $\int M(dx) = [\delta(\lambda - \lambda') I_\lambda] = I$.

Пусть $S = |\psi)(\psi|$, где $\psi = [\psi_\lambda]$, — чистое состояние. Обозначая через $\Phi_\psi^M(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} (\psi | M(dx) \psi)$ характеристическую функцию распределения вероятностей результатов измерения M относительно состояния S, получаем, интегрируя (11.8),

$$\Phi_\psi^M(\lambda) = \int (\psi_\mu | K(\mu, \mu - \lambda) \psi_{\mu - \lambda}) \, d\mu. \qquad (11.9)$$

Интеграл сходится, поскольку, в силу (11.7) и условия $K(\lambda, \lambda) = I_\lambda$,

$$|(\psi_\mu | K(\mu, \mu - \lambda) \psi_{\mu - \lambda})| \leqslant \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu - \lambda}\|_{\mu - \lambda} \qquad (11.10)$$

и обе функции в правой части квадратично-интегрируемы. Если дополнительно предположить, что

$$\int\limits_\Lambda \|\psi_\lambda\|_\lambda \, d\lambda < \infty, \qquad (11.11)$$

то характеристическая функция оказывается интегрируемой и тогда распределение вероятностей измерения имеет плотность

$$p_\psi^M(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix\lambda} \Phi_\psi^M(\lambda) \, d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi} \iint (\psi_\lambda | K(\lambda, \lambda') \psi_{\lambda'}) e^{i(\lambda' - \lambda)x} \, d\lambda \, d\lambda'.$$

Это согласуется с выражением для $M(dx)/dx$, которое формально получается непосредственно из (11.8).

Рассмотрим случай, когда $\dim \mathscr{H}_\lambda = \text{const}$. Пусть $\{U(\lambda, \lambda')\}$ — согласованное семейство изометрических отображений $\mathscr{H}_{\lambda'}$ на $\mathscr{H}_\lambda$; $\lambda', \lambda \in \Lambda$. Тогда $[U(\lambda, \lambda')]$ является ядром, определяющим ковариантное измерение. Отождествляя между собой пространства $\mathscr{H}_\lambda$, получаем «каноническое измерение»

$$M(dx) = [I_\lambda e^{i(\lambda' - \lambda)x}] \frac{dx}{2\pi}.$$

Обратимся теперь к проблеме оценивания параметра сдвига x в ковариантном семействе состояний

$$S_x = e^{-iAx} S e^{iAx}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Так как группа $G = \mathbb{R}$ некомпактна, то мы уже не можем применить теорему 3.1. Более того, байесовская мера точности с «равномерным распределением» dx вообще не определена. Можно было бы доказать аналог теоремы 3.1 для минимаксного критерия, однако мы ограничимся рассмотрением *минимума среднего отклонения*

$$\mathscr{R}_x\{M\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\hat{x} - x)\, \mu_{S_x}^M(d\hat{x})$$

в классе ковариантных измерений. В силу ковариантности, эта величина фактически не зависит от x, так что нужно минимизировать

$$\mathscr{R}_0\{M\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\, \mu_S^M(dx).$$

Мы предположим, что функция отклонения является вещественной непрерывной отрицательно определенной функцией, т. е. имеет вид

$$W(x) = -\int e^{i\lambda x} \tilde{W}(d\lambda),$$

где $\tilde{W}(d\lambda)$ — положительная симметричная мера на прямой. Тогда для ковариантного измерения (11.8) имеем

$$\mathscr{R}_0\{M\} = -\int \Phi_\psi^M(\lambda)\, \tilde{W}(d\lambda).$$

В силу неравенства (11.10)

$$\operatorname{Re}\Phi_\psi^M(\lambda) \leqslant \Phi_*(\lambda) \equiv \int \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}\, d\mu,$$

так что

$$\mathscr{R}_0\{M\} \geqslant -\iint \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}\, d\mu \tilde{W}(d\lambda) = \mathscr{R}_0\{M_0\},$$

где

$$M_0(dx) = \left[\frac{|\psi_\lambda)_\lambda \cdot {}_{\lambda'}(\psi_{\lambda'}|}{\|\psi_\lambda\|_\lambda \cdot \|\psi_{\lambda'}\|_{\lambda'}} e^{i(\lambda'-\lambda)x}\right]\frac{dx}{2\pi}.$$

Как и в дискретном случае, мера $M_0(dx)$, вообще говоря, не является разложением единицы, так как $\int M_0(dx) = E_0 \neq I_0$ (равенство будет лишь в случае $\dim \mathscr{H}_\lambda \equiv 1$), но ее можно продолжить до разложения единицы, добавляя произвольное разложение единицы в ортогональном дополнении пространства $E_0(\mathscr{H})$:

$$M_*(dx) = M_0(dx) \oplus \ldots \tag{11.12}$$

В частности, мы будем использовать продолжение

$$M_*(dx) = \\ = \left[\frac{|\psi_\lambda)_\lambda \cdot {}_{\lambda'}(\psi_{\lambda'}|}{\|\psi_\lambda\|_\lambda \cdot \|\psi_{\lambda'}\|_{\lambda'}} e^{i(\lambda'-\lambda)x}\right]\frac{dx}{2\pi} \oplus (I - E_0)\,\delta(x)\,dx, \tag{11.13}$$

где $\delta(x)\,dx$ — скалярная мера, сосредоточенная в нуле.

Таким образом, *измерения вида* (11.12) (в частности, измерение (11.13)) *являются оптимальными для любой функции отклонения указанного выше вида.*

Рассмотрим теперь метод максимального правдоподобия. Предположим, что исходное состояние удовлетворяет условию (11.11), так что характеристическая функция $\Phi_\psi^M(\lambda)$ интегрируема и существует непрерывная плотность $p_\psi^M(x)$. Формальная байесовская мера точности с функцией отклонения $W(x) = -\delta(x)$ и априорным распределением $\pi(dx) = dx$ имеет вид

$$-p_\psi^M(0) = -\int \Phi_\psi^M(\lambda)\, d\lambda = -\iint (\psi_\lambda | K(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'})\, d\lambda\, d\lambda';$$

она должна быть минимизирована по всем положительно определенным ядрам $[K(\lambda, \lambda')]$, удовлетворяющим условию $K(\lambda, \lambda) = I_\lambda$. Очевидно, что *решение этой задачи также дается измерением вида* (11.12).

Рассмотрим, наконец, представляющий наибольший интерес случай квадратичной функции отклонения

$$W(\hat{x}-x)=(\hat{x}-x)^2.$$

Достаточно рассматривать только измерения с конечным вторым моментом, для которых величина

$$\mathscr{R}_0\{M\}=\int x^2\mu_S^M(dx)$$

конечна. Как известно из теории вероятностей, конечность второго момента эквивалентна существованию второй производной характеристической функции в нуле, причем

$$\int x^2\mu_S^M(dx)=-\frac{d^2}{d\lambda^2}\Phi_\psi^M(\lambda)\,|_{\lambda=0}=-\frac{d^2}{d\lambda^2}\operatorname{Re}\Phi_\psi^M(\lambda)\,|_{\lambda=0}.$$

Предположим, что исходное состояние таково, что функция $\|\psi_\lambda\|_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, дифференцируема,

$$\int\limits_\Lambda\left|\frac{d}{d\lambda}\|\psi_\lambda\|_\lambda\right|^2 d\lambda<\infty,$$

и $\psi_\lambda=0$ на краях интервала Λ (если интервал бесконечный, то это условие считается выполняющимся автоматически). Это означает, что, продолжая $\|\psi_\lambda\|_\lambda$ нулем вне интервала Λ, мы получаем дифференцируемую функцию на всей прямой.

Тогда для измерения (11.12) характеристическая функция $\Phi_*(\lambda)$ дважды дифференцируема в нуле, причем

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\Phi_*(\lambda)\,|_{\lambda=0}=\frac{d^2}{d\lambda^2}\int\limits_\Lambda\|\psi_\mu\|_\mu\,\|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}\,d\mu=-\int\limits_\Lambda\left|\frac{d}{d\lambda}\|\psi_\lambda\|_\lambda\right|^2 d\lambda.$$

Рассмотрим функции $\operatorname{Re}\Phi_\psi^M(\lambda)$ и $\Phi_*(\lambda)$. Они связаны неравенством $\operatorname{Re}\Phi_\psi^M(\lambda)\leqslant\Phi_*(\lambda)$, дважды дифференцируемы в нуле, и $\operatorname{Re}\Phi_\psi^M(0)=\Phi_*(0)$. Отсюда следует, что $\frac{d^2}{d\lambda^2}\Phi_*(\lambda)\,|_{\lambda=0}\geqslant\frac{d^2}{d\lambda^2}\operatorname{Re}\Phi_\psi^M(\lambda)\,|_{\lambda=0}$, так что $\mathscr{R}_0\{M\}\geqslant\mathscr{R}_0\{M_*\}$. Таким образом, *измерение* (11.12) *имеет наименьшее среднеквадратичное отклонение в классе всех ковариантных измерений параметра сдвига x.*

Не ограничивая общности, мы можем считать измерения несмещенными. Тогда из полученного результата вытекает достижимая граница для дисперсии ковариантного измерения

$$\mathsf{D}\{M\} \geqslant \int\limits_{\Lambda} \left| \frac{d}{d\lambda} \| \psi_\lambda \|_\lambda \right|^2 d\lambda. \tag{11.14}$$

В качестве первого примера рассмотрим измерения параметра координаты в случае одной степени свободы. В этом случае роль оператора A играет оператор импульса P, который диагонализируется в импульсном представлении

$$\psi = [\tilde{\psi}(\eta)]; \quad \|\psi\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\eta)|^2 d\eta,$$

$$P\psi = [\eta\tilde{\psi}(\eta)].$$

Таким образом, пространство $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ разлагается в непрерывную сумму одномерных пространств $\mathscr{H}_\eta$; в этом случае $\Lambda = (-\infty, \infty)$.

Оптимальное измерение параметра x в семействе состояний

$$S_x = e^{-iPx} |\psi_0)(\psi_0| e^{iPx}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

дается ортогональным разложением единицы

$$M_*(dx) = [\gamma_\eta \bar{\gamma}_{\eta'} e^{i(\eta' - \eta)x}] \frac{dx}{2\pi}, \tag{11.15}$$

где $\gamma_\eta = \tilde{\psi}_0(\eta)/|\tilde{\psi}_0(\eta)|$. Ему соответствует существенно самосопряженный оператор

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x M_*(dx) = \left[\gamma_\eta i \frac{d}{d\eta} \bar{\gamma}_\eta\right].$$

Соотношение (11.15) является «ядерной» записью формулы типа (II.4.9):

$$(\psi | M_*(dx) \psi) = \left[\int\int \overline{\tilde{\psi}(\eta)}\, \tilde{\psi}(\eta')\, \gamma_\eta \bar{\gamma}_{\eta'} e^{i(\eta' - \eta)x} d\eta\, d\eta' \right] \frac{dx}{2\pi}.$$

Если $\tilde{\psi}_0(\eta) > 0$, то $\gamma_\eta \equiv 1$ и мы получаем разложение единицы вида (II.4.9), отвечающее канонической наблюдаемой координаты $Q = i\frac{d}{d\eta}$ в импульсном представлении. Оптимальное измерение отличается от канонического множителями γ_η, учитывающими априорную информацию об исходном состоянии.

Рассмотрим теперь измерения параметра времени t в семействе состояний

$$S_t = e^{-iEt} | \psi_0)(\psi_0 | e^{iEt}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Оператор энергии E ограничен снизу; мы примем, что он имеет непрерывный спектр, лежащий на положительной полупрямой $\Lambda = (0, \infty)$. Точнее, мы предполагаем, что пространство $\mathcal{H}$ разлагается в непрерывную сумму

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty \oplus \mathcal{H}_\varepsilon \, d\varepsilon,$$

так что E действует в $\mathcal{H}$ как оператор умножения на ε: $E\psi = [\varepsilon\psi_\varepsilon]$.

Оптимальное измерение параметра t дается неортогональным разложением единицы

$$M_*(dt) = \left[\frac{|\psi_\varepsilon)_\varepsilon \cdot {}_{\varepsilon'}(\psi_{\varepsilon'}|}{\|\psi_\varepsilon\|_\varepsilon \cdot \|\psi_{\varepsilon'}\|_{\varepsilon'}} e^{i(\varepsilon' - \varepsilon)t} \right] \frac{dt}{2\pi} \oplus (I - E_0)\, \delta(t)\, dt,$$

которому отвечает симметричный оператор

$$\int_{-\infty}^{\infty} t M_*(dt) = \left[\frac{|\psi_\varepsilon)_\varepsilon}{\|\psi_\varepsilon\|_\varepsilon} i \frac{d}{d\varepsilon} \frac{{}_\varepsilon(\psi_\varepsilon|}{\|\psi_\varepsilon\|_\varepsilon} \right].$$

Если $\dim \mathcal{H}_\varepsilon = \mathrm{const}$ и пространства $\mathcal{H}_\varepsilon$ каким-то образом отождествляются, то можно ввести «каноническое измерение»

$$M(dt) = [I_\varepsilon e^{i(\varepsilon' - \varepsilon)t}] \frac{dt}{2\pi} \oplus \ldots,$$

которому отвечает симметричный оператор $T = i\frac{d}{d\varepsilon}$. Таким образом, мы вновь приходим к конструкции § III.9.

Комментарии к гл. IV

§ 1. Теории непрерывных групп посвящена книга Понтрягина [82]. Подробное изложение теории компактных параметрических групп и их представлений, адресованное как математикам, так и физикам, дается в книге Желобенко [42]. Общей теории представлений посвящена книга Кириллова [48].

Понятие ковариантного измерения является обобщением на неортогональные разложения единицы важного понятия системы импримитивности, введенного Мерреем и фон Нейманом и подробно изученного Макки [64]. Изложение результатов Макки с приложениями к квантовой теории можно найти у Варадарайана [23] и Яуха [134]. Ковариантные измерения возникают также из «ковариантных инструментов», рассмотренных Дэвисом [38].

В работе Бауэра [7] доказана теорема: пусть $\mathfrak{M}$ — выпуклое компактное подмножество отделимого локально выпуклого пространства и f — полунепрерывный снизу аффинный функционал на $\mathfrak{M}$. Тогда f достигает минимума в крайней точке $\mathfrak{M}$. Относительно применений этой теоремы в вопросах существования оптимального квантового измерения см. Холево [122].

§ 2. По поводу инвариантного интегрирования и соотношений ортогональности см. Понтрягин [82], Кириллов [48], Варадарайан [23]. Описание ковариантных измерений получено в работах автора [115], [122], [125] (см. также Дэвис [38]).

Относительно теоремы Радона — Никодима и интеграла Бохнера см., например, Данфорд и Шварц [36]. Тот факт, что $\mathcal{R}\{M\} = g_x \mathrm{D}_x\{M\} + g_v \mathrm{D}_v\{M\}$ достигает минимума в крайней точке, вытекает из теоремы 7.1 работы [118].

§ 3. Математическая статистика (см., например, Крамер [53], Фергюсон [98]) является естественной базой для статистической теории измерений в классических системах. Если неизвестный параметр θ принимает конечное число значений, то говорят о «различении гипотез»; если же θ непрерывен — об «оценивании».

На возможность и плодотворность перенесения идей математической статистики в теорию квантового измерения указал Хелстром в работе [106], посвященной задаче различения двух квантовых состояний. Холево [113], [114] ввел общие разложения единицы как некоммутативный аналог рандомизированных статистических процедур. Подробное изложение результатов квантовой теории различения гипотез и оценивания на теоретико-физическом уровне содержится в книге Хелстрома [109]. Рассмотрение общей байесовской задачи, с исследованием возникающих здесь проблем интегрирования, провел Холево [118], [122]. Квантовый аналог метода максимального правдоподобия введен в работах [115], [118]. Связь с классическим методом максимального правдоподобия подробно рассматривается в [122].

§ 4. Задача оценивания чистого состояния рассматривалась Хелстромом [108], [109], который показал, что (4.4) является измерением максимального правдоподобия. Результаты этого параграфа принадлежат автору.

§ 5. Измерения параметров ориентации были рассмотрены в работе Холево [125]. Векторы $\{|j;\, n)\}$ являются «когерентными векторами» для представления группы вращений, рассмотренными Переломовым [78], [79], который ввел «когерентные состояния» для произвольных непрерывных групп. Формулы для матричных элементов представления группы вращений выводятся в книгах Вигнера [26] и Гельфанда, Минлоса, Шапиро [32].

§§ 6 — 10. Измерения угла поворота рассматривал Хелстром [108], [109], доказавший оптимальность измерения (6.4) по критерию максимального правдоподобия и для функции отклонения $4\sin^2\frac{\varphi}{2}$. *Теорема 6.1 и предложение 7.1 получены автором* [125]. Операторы C, S, $E_{\pm}$ были введены Каррутерсом и Нието [45], которые получили также соотношения неопределенностей для C и S.

§ 11. О непрерывных суммах гильбертовых пространств см., например, Гельфанд и Виленкин [31]. Материал этого параграфа взят из работы Холево [124], где рассмотрены также измерения координат трехмерной нерелятивистской частицы и фотона. Исследования Ньютона и Вигнера [76] (см. также Вайтман [18], Варадарайан [23]) показывают, что релятивистские квантовые объекты с нулевой массой (фотон) «нелокализуемы» в том смысле, что на координатном пространстве не существует системы импримитивности, т. е. ортогонального разложения единицы, удовлетворяющего подходящему условию ковариантности. Этот вывод плохо согласуется с экспериментальными доказательствами локализуемости фотонов. Вопрос был рассмотрен далее Яухом и Пироном [135], которые указали на две возможности теоретического описания локализуемости фотонов. Первая из них, которой отдают предпочтение Яух и Пирон, использует неаддитивную проекторнозначную «меру»; см. Амрейн [2]. Вторая возможность, использующая ковариантное неортогональное разложение единицы, была рассмотрена в работе автора [124], где было также получено строгое соотношение неопределенностей для координат фотона.

ГАУССОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ

§ 1. Квазиклассические состояния квантового осциллятора

Рассмотрим квантовый объект с одной степенью свободы, например осциллятор с каноническими наблюдаемыми $q=Q$ и $p=\hbar P$. Основное состояние $|0)(0|$ является состоянием минимальной неопределенности, в котором Q и P имеют нулевые средние значения. Состояние

$$|\bar{P},\ \bar{Q})(\bar{Q},\ \bar{P}|=W_{\bar{Q},\ \hbar\bar{P}}|0)(0|W^*_{\bar{Q},\ \hbar\bar{P}} \tag{1.1}$$

(где для сокращения обозначений положено $|\bar{P},\ \bar{Q})\equiv\equiv\left|\bar{P},\ \bar{Q};\ \frac{\hbar}{2\omega}\right)$, ω — частота осциллятора) можно рассматривать как результат внешнего воздействия на основное состояние, «смещающего» средние значения канонических наблюдаемых, но не изменяющего их неопределенностей.

Предположим теперь, что это воздействие носит случайный характер, т. е. параметры воздействия $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ являются случайными величинами с некоторым распределением $\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q})$. Тогда с точки зрения экспериментатора, которому доступны наблюдения только над данным квантовым объектом, но не над источником воздействия, определяющим значения $\bar{P}$, $\bar{Q}$ в индивидуальном эксперименте, состояние квантового объекта описывается оператором плотности

$$S=\int|\bar{P},\ \bar{Q})(\bar{Q},\ \bar{P}|\,\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q}), \tag{1.2}$$

представляющим собой усреднение операторов плотности (1.1), соответствующих индивидуальным значениям случайных величин $\bar{P}$, $\bar{Q}$, по их распределению вероятностей. При этом среднее значение любого измерения M

получается усреднением по распределению $\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q})$ средних значений $\mathsf{E}_{\bar{P},\bar{Q}}\{M\}$, отвечающих состояниям (1.1):

$$\mathsf{E}_S\{M\} = \int \mathsf{E}_{\bar{P},\bar{Q}}\{M\}\,\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q}).$$

В частности, средние значения канонических наблюдаемых в этом состоянии равны средним значениям классического распределения $\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q})$,

$$\mathsf{E}_S(P) = \int \bar{P}\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q}), \quad \mathsf{E}_S(Q) = \int \bar{Q}\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q}).$$

Состояния вида (1.2) называются *квазиклассическими*; формула (1.2) определяет аффинное отображение симплекса распределений вероятностей μ в выпуклое множество квантовых состояний. Можно показать, что это отображение взаимно-однозначно; отсюда вытекает, что не всякое квантовое состояние представимо в виде (1.2), где μ — распределение вероятностей; в противном случае квантовые состояния образовывали бы симплекс.

Предположим, что объект подвергается большому числу независимых одинаковых случайных воздействий, так что результирующее воздействие характеризуется параметрами $\bar{P} = \sum_{j=1}^{s} \bar{P}_j$, $\bar{Q} = \sum_{j=1}^{s} \bar{Q}_j$, где $(\bar{P}_j, \bar{Q}_j)$ — независимые одинаково распределенные пары случайных величин. Тогда в силу классической центральной предельной теоремы распределение $\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q})$ будет близко к гауссовскому, а в пределе $s \to \infty$ будет равно ему. Получаемые таким образом состояния являются частным случаем гауссовских состояний, которые будут подробно изучены в настоящей главе.

Введем комплексную переменную $\zeta = \dfrac{\omega\bar{Q} + i\hbar\bar{P}}{\sqrt{2\hbar\omega}}$ (см. § III.11) и рассмотрим специальное квазиклассическое гауссовское состояние

$$S = \frac{1}{\pi\bar{N}} \int |\zeta)(\zeta|\, e^{-|\zeta|^2/\bar{N}}\, d^2\zeta. \tag{1.3}$$

Вещественный параметр $\bar{N}$, как мы сейчас покажем, равен среднему значению наблюдаемой числа квантов N (III.10.9). Вычислим матричные элементы оператора S

в базисе $\{|n)\}$ из собственных векторов оператора N. Имеем

$$(n|S|m)=\frac{1}{\pi\bar{N}}\int(n|\zeta)(\zeta|m)\,e^{-|\zeta|^2/\bar{N}}\,d^2\zeta;$$

учитывая формулу (III.11.6) и полагая $\zeta=re^{i\varphi}$, получаем

$$(n|S|m)=\frac{1}{\pi\bar{N}}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\varphi}\,d\varphi\int_0^{\infty}r\,dr\cdot r^{n+m}e^{-r^2\frac{\bar{N}+1}{\bar{N}}}=$$

$$=\delta_{nm}\cdot\frac{1}{\bar{N}+1}\left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}+1}\right)^n.$$

Отсюда следует, что оператор S диагонален в представлении Фока, а именно

$$S=\frac{1}{\bar{N}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}+1}\right)^n|n)(n|. \qquad (1.4)$$

Вычисляя среднее значение наблюдаемой числа квантов

$$\frac{1}{\bar{N}+1}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}+1}\right)^n,$$

убеждаемся, что оно совпадает с $\bar{N}$.

В статистической физике большую роль играют так называемые *гиббсовские состояния*, которые определяются следующим образом. Если энергия объекта может принимать дискретный ряд значений $\{E_n\}$, то гиббсовское состояние является смесью чистых состояний с определенными значениями энергии, причем вес состояния, отвечающего значению E_n, пропорционален $e^{-E_n/kT}$. Здесь T — физический параметр, имеющий смысл температуры, k — коэффициент пропорциональности (постоянная Больцмана). В статистической физике показывается, что гиббсовское состояние — это равновесное состояние, к которому приходит объект в результате неограниченно долгого взаимодействия с бесконечной средой (термостатом), поддерживаемой при постоянной температуре T. Учитывая, что для гармонического осциллятора $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$, получаем, что состояние (1.3) является гиббсовским для гармонического осциллятора с частотой ω

при температуре T, если положить

$$\bar{N}=\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}.$$

Принято говорить, что состояние (1.3) описывает «тепловой шум» квантового осциллятора, находящегося в состоянии теплового равновесия с термостатом при температуре T. Средние значения канонических наблюдаемых в этом состоянии равны нулю, так как гауссовское распределение в (1.3) имеет нулевое среднее.

Предположим, что осциллятор, находящийся в состоянии теплового равновесия, подвергается внешнему воздействию, описываемому оператором $W_{\bar{a}}$, где $\bar{a}$ — «комплексная амплитуда» воздействия (см. § III.11). Тогда его состоянием будет

$$S_{\bar{a}}=W_{\bar{a}}SW_{\bar{a}}^{*}. \tag{1.5}$$

Учитывая (III.11.1), получаем

$$S_{\bar{a}}=\frac{1}{\pi\bar{N}}\int|\zeta)(\zeta|e^{-|\zeta-\bar{a}|^2/\bar{N}}\,d^2\zeta, \tag{1.6}$$

так что канонические наблюдаемые принимают ненулевые значения, зависящие от амплитуды воздействия $\bar{a}$ (именно, $\mathsf{E}_S(Q)=\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\operatorname{Re}\bar{a},\ \mathsf{E}_S(P)=\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\operatorname{Im}\bar{a}$).

Состояния (1.6) и их многомерные аналоги используются в квантовой оптике для описания излучения оптических квантовых генераторов (лазеров). Известно, что электромагнитное поле математически эквивалентно бесконечному набору осцилляторов. Для наших целей можно ограничиться конечным набором осцилляторов с частотами ω_j; $j=1, \ldots, s$. Пусть P_j, Q_j; $j=1, \ldots, s$ — канонические наблюдаемые такого «поля излучения». Тогда «фоновое» тепловое излучение в отсутствие внешних источников описывается оператором плотности

$$S=\bigotimes_j S^{(j)}, \tag{1.7}$$

где $S^{(j)}$ — гиббсовское состояние (1.3) j-го осциллятора со средним числом квантов $\bar{N}_j=(e^{\hbar\omega_j/kT}-1)^{-1}$. Воздействие источника на поле, находящееся в состоянии S, приводит к изменению состояния излучения. Если принять простейшую модель воздействия (1.5), то результирующее состояние излучения будет определяться оператором плотности

$$S_{\bar{a}} = \bigotimes_j S_{\bar{a}_j}^{(j)}, \tag{1.8}$$

где $S_{\bar{a}_j}^{(j)}$ — состояния вида (1.6) для j-го осциллятора. Многомерный параметр $\bar{a} = [\bar{a}_j]$ характеризует источник излучения. Подобная модель применяется для описания излучения лазерного источника.

Состояния типа (1.7), (1.8) обладают привлекательными аналитическими свойствами, представляющими интерес как для физических моделей, так и чисто в математическом плане. Поскольку все эти свойства в конечном счете обусловлены «гауссовостью» состояния, нам будет удобно принять более общую точку зрения и отвлечься от конкретного вида состояний излучения (1.7), (1.8). В этой главе мы введем и изучим общий класс квантовых гауссовских состояний, обладающих замечательными аналогиями с гауссовскими распределениями теории вероятностей.

§ 2. Каноническое коммутационное соотношение для многих степеней свободы

Преобразуем каноническое коммутационное соотношение (III.3.2) для одной степени свободы, вводя двухкомпонентные векторы $z = [x, y]$, кососимметричную форму

$$\Delta(z, z') = xy' - x'y$$

и полагая $V(z) = W_{-x, y/\mu}$. Соотношение (III.3.2) примет тогда форму

$$V(z)\, V(z') = e^{\frac{i}{2}\Delta(z, z')}\, V(z + z'). \tag{2.1}$$

В случае s степеней свободы поступим аналогично. Пусть x_k, y_k — пара вещественных чисел; положим $z_k = [x_k, y_k]$ и $z = [z_1, \ldots, z_s]$. Таким образом, z — $2s$-мерный вещественный вектор. Введем билинейную кососимметричную форму

$$\Delta(z, z') = \sum_{k=1}^{s} (x_k y'_k - x'_k y_k).$$

По аналогии со случаем $s=1$ мы называем *представлением канонического коммутационного соотношения* (с s степенями свободы) всякое непрерывное семейство унитарных операторов $z \to V(z)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$, удовлетворяющее соотношению (2.1).

Канонические наблюдаемые P_k, Q_k; $k=1, \ldots, s$, получаются отсюда следующим образом. Учитывая, что в силу кососимметричности

$$\Delta(z, z) \equiv 0, \tag{2.2}$$

получаем, что семейство $\{V(tz), -\infty < t < \infty\}$ при фиксированном z является группой унитарных операторов. По теореме Стоуна

$$V(z) = e^{iR(z)}, \tag{2.3}$$

где $R(z)$ — самосопряженный оператор.

Из (2.1), (2.3) имеем

$$e^{itR(z)}e^{isR(z')} = e^{its\Delta(z, z')}e^{isR(z')}e^{itR(z)}. \tag{2.4}$$

Дифференцирование этого равенства по t и s в точке $t=s=0$ дает формальное соотношение

$$[R(z), R(z')] = -i\Delta(z, z')\,\mathrm{I}. \tag{2.5}$$

Мы получим его строгую версию в § 4. Пусть e_k — $2s$-мерный вещественный вектор $[z_1, \ldots, z_s]$, для которого $z_j=0$ при $j \neq k$ и $z_k=[1, 0]$, а h_k — аналогичный вектор, для которого $z_k=[0, 1]$. Полагая $R(e_k)=P_k$, $R(h_k)=Q_k$ и учитывая, что

$$\Delta(e_k, h_l) = \delta_{kl}, \quad \Delta(e_k, e_l) = \Delta(h_k, h_l) = 0, \tag{2.6}$$

получаем

$$[P_k, Q_l] = -i\delta_{kl}, \quad [P_k, P_l] = [Q_k, Q_l] = 0,$$

что эквивалентно коммутационным соотношениям Гейзенберга (III.7.3) для s степеней свободы.

Отметим, что $z = \sum_k (x_k e_k + y_k h_k)$, так что

$$R(z) = \sum_k (x_k P_k + y_k Q_k),$$

где в правой части имеется в виду самосопряженное расширение соответствующего оператора. Используя это обозначение, имеем

$$V(z) = \exp\left[i \sum_{k=1}^{s} (x_k P_k + y_k Q_k)\right].$$

Операторы $R(z)$ будем также называть *каноническими наблюдаемыми*.

Полезно рассмотреть «бескоординатную» форму этой конструкции. Отвлечемся от конкретного вида формы $\Delta(z, z')$ и координатной записи векторов z. Пусть Z — вещественное линейное пространство и $\Delta(z, z')$ — кососимметричная невырожденная билинейная форма на Z. Это означает, что $\Delta(z, z') = -\Delta(z', z)$ и равенство $\Delta(z, z') = 0$ для всех z влечет $z' = 0$. Такая пара (Z, Δ) называется *симплектическим пространством*. Для любого симплектического пространства можно определить представление канонических коммутационных соотношений $z \to V(z)$ как семейство унитарных операторов $\{V(z), z \in Z\}$, удовлетворяющих соотношениям (2.1) для всех $z, z' \in Z$.

При таком подходе нет даже необходимости требовать конечномерности Z. Однако, если предположить, что Z конечномерно, то его размерность обязательно оказывается четной: $\dim Z = 2s$. Для доказательства введем какое-либо скалярное произведение α на Z и будем обозначать соответствующее евклидово пространство (Z, α). Пусть $\mathscr{D}$ — оператор формы Δ в (Z, α), так что

$$\Delta(z, z') = \alpha(z, \mathscr{D}z'); \quad z, z' \in Z. \tag{2.7}$$

В силу свойств формы Δ, $\mathscr{D}$ — невырожденный кососимметричный ($\mathscr{D}^* = -\mathscr{D}$) в (Z, α) оператор. По известной теореме линейной алгебры, в (Z, α) существует ортонормированный базис $\tilde{e}_1, \tilde{h}_1; \tilde{e}_2, \tilde{h}_2, \ldots$, в котором $\mathscr{D}$ имеет матрицу вида

$$\left[\begin{array}{cc:cc:c} 0 & d_1 & & & \\ -d_1 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{0} & \\ \hdashline & & 0 & d_2 & \\ \multicolumn{2}{c:}{0} & -d_2 & 0 & \\ \hdashline & & & & \ddots \end{array}\right], \quad d_j > 0, \tag{2.8}$$

в частности, Z обязательно должно быть четномерным.

Далее, мы будем иметь дело только с конечномерным случаем (хотя настоящее поле описывается бесконечным набором осцилляторов).

Базис $\{e_j, h_j;\ j=1, \ldots, s\}$ в (Z, Δ) называется *симплектическим*, если для него выполняются соотношения (2.6). В симплектическом базисе форма Δ имеет канонический вид $\Delta(z, z') = \sum_{j=1}^{s} (x_j y'_j - x'_j y_j)$, где $z = \sum_j (x_j e_j + y_j h_j)$, $z' = \sum_j (x'_j e_j + y'_j h_j)$. Он играет ту же роль для симплектического пространства, что ортонормированный базис — для евклидова пространства. Для любого симплектического базиса наблюдаемые $P_j = R(e_j)$, $Q_j = R(h_j)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга.

Примером симплектического базиса может служить построенный в начале этого параграфа базис $\{e_j, h_j\}$ в пространстве $2s$-мерных векторов-строк. Однако в любом симплектическом пространстве существует бесконечно много симплектических базисов. В самом деле, пусть α — любое скалярное произведение в Z; тогда базис $e_j = \frac{1}{\sqrt{d}}\tilde{e}_j$, $h_j = \frac{1}{\sqrt{d}}\tilde{h}_j$ является симплектическим в силу (2.6) — (2.8). Полагая $a_j = d_j^{-1}$, получаем отсюда

Предложение 2.1. *Симплектическое пространство (Z, Δ) обязательно имеет четную размерность $2s$. Для любого скалярного произведения α в (Z, Δ) существует симплектический базис $\{e_j, h_j;\ j=1, \ldots, s\}$, в котором α имеет диагональную матрицу вида*

$$\left[\begin{array}{cc:cc:c} a_1 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{0}} & \\ 0 & a_1 & & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{0}} & a_2 & 0 & \\ & & 0 & a_2 & \\ \hdashline & & & & \ddots \end{array}\right], \qquad a_j > 0.$$

Переход от одного симплектического базиса к другому задается *симплектическим оператором* T, удовлетворяющим условию

$$\Delta(Tz, Tz') = \Delta(z, z'); \qquad z, z' \in Z. \tag{2.9}$$

Для всякого симплектического оператора $|\det T| = 1$. В самом деле, пусть α — произвольное скалярное произведение в Z; тогда (2.9) принимает вид

$$\alpha(Tz, \mathscr{D}Tz') = \alpha(z, \mathscr{D}z'); \qquad z, z' \in Z,$$

т. е. $T^*\mathscr{D}T = \mathscr{D}$, где T^* — оператор, сопряженный к T в евклидовом пространстве (Z, α). Отсюда, учитывая, что $\det T^* = \det T$ и $\det \mathscr{D} \neq 0$, получаем $|\det T| = 1$. Таким образом, *симплектические преобразования сохраняют меру Лебега в симплектическом пространстве.*

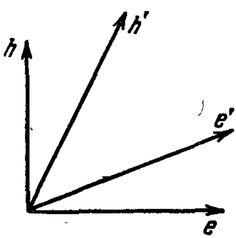

Рис. 13.

Пусть $z = \sum\limits_{j=1}^{s} (x_j e_j + y_j h_j)$ — разложение элемента z по симплектическому базису. Введем меру Лебега Z, полагая

$$d^{2s}z = dx_1\, dy_1 \ldots dx_s\, dy_s.$$

Из сказанного выше вытекает, что это определение не зависит от выбора симплектического базиса в (Z, Δ).

Для иллюстрации рассмотрим простейший случай $\dim Z = 2$ (одна степень свободы). Пусть $\{e, h\}$ — симплектический базис в (Z, Δ) и x, y — координаты вектора z. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Тогда базис $\{e, h\}$ изобразится в виде двух взаимно перпендикулярных ортов (рис. 13), однако это отражает лишь произвол в выборе системы координат и не соответствует каким-либо реальным свойствам симплектического базиса (угол и длина в симплектическом пространстве не определены). По существу это означает, что мы вводим в Z скалярное произведение $\alpha(z, z') = xx' + yy'$, связанное с данным базисом, как в предложении 2.1. Другой базис $\{e', h'\}$ будет симплектическим тогда и только тогда, когда $\Delta(e', h') = 1$. Из инвариантности определения элемента меры Лебега в симплектическом базисе следует, что пара векторов $\{e', h'\}$ образует симплектический базис тогда и только тогда, когда построенный на них ориентированный параллелограмм имеет площадь $+1$.

§ 3. Теорема единственности. Преобразование Вейля

Пусть $z \to V(z)$ (непрерывное) представление канонического коммутационного соотношения, $f(z)$ — интегрируемая по мере Лебега комплекснозначная функция на симплектическом пространстве (Z, Δ). Сопоставим ей ограниченный оператор в пространстве представления

$$V(f) = (2\pi)^{-s} \int f(z)\, V(-z)\, d^{2s}z \tag{3.1}$$

(нетрудно показать, что интеграл определен в смысле Бохнера). Соответствие $f \to V(f)$ называется *преобразованием Вейля.* Легко проверяются следующие свойства:

1) $V(f(z))^* = V\left(\overline{f(-z)}\right)$;

2) $V(f_1)\, V(f_2) = V(f_1 \times f_2)$, где

$$f_1 \times f_2(z) = (2\pi)^{-s} \int f_1(w)\, f_2(z-w)\, e^{\frac{i}{2}\Delta(w, z)}\, d^{2s}w;$$

3) $V(f(z))\, V(w) = V\left(f(z+w)\, e^{\frac{i}{2}\Delta(w, z)}\right)$,

$$V(w)^*\, V(f(z))\, V(w) = V(f(z))\, e^{i\Delta(w, z)}.$$

Кроме того, соответствие $f \to V(f)$ является взаимно-однозначным: $V(f) = 0$ влечет $f = 0$ почти всюду. В самом деле, из 3) получаем

$$\int e^{i\Delta(w, z)} f(z)\, (\varphi \mid V(-z)\, \psi)\, d^{2s}z = 0; \qquad w \in Z,\ \varphi,\ \psi \in \mathscr{H},$$

откуда, в силу взаимной однозначности обычного преобразования Фурье, $f(z)\,(\varphi \mid V(-z)\,\psi) \equiv 0$ и $f(z) = 0$ почти всюду.

Отсюда вытекает, что если $z \to V_j(z)$, $j = 1, 2,$ — два представления канонического коммутационного соотношения, то можно установить взаимно-однозначное соответствие

$$V_1(f) \leftrightarrow V_2(f),$$

которое, в силу свойств 1), 2), сохраняет алгебраические операции и эрмитово сопряжение. Фактически имеет место более сильное утверждение, а именно теорема единственности Стоуна — фон Неймана для s степеней свободы.

Теорема 3.1. *Всякие два неприводимых представления канонического коммутационного соотношения унитарно* *эквивалентны. Всякое (непрерывное) представление является дискретной прямой суммой неприводимых представлений.*

Доказательство. Введем скалярное произведение на Z

$$j(z,\ z')=\sum_{k=1}^{s}(x_k x_k'+y_k y_k'),$$

где $[x_k,\ y_k]$, $[x_k',\ y_k']$ — компоненты векторов z, z' в каком-либо симплектическом базисе, и рассмотрим функцию

$$f_0(z)=e^{-\frac{1}{4}j(z,\ z)}.$$

Положим $P=V(f_0)$. Так как $f_0>0$, то $P\neq 0$. Используя свойства 2), 3) и учитывая, что $d^{2s}z=\prod_k dx_k\,dy_k$, после некоторых вычислений получаем важное равенство

$$PV(w)P=f_0(w)P. \tag{3.2}$$

Отсюда $P^2=P$. Кроме того, из вещественности f_0 и свойства 1) вытекает, что $P^*=P$. Таким образом, P является ортогональным проектором на некоторое подпространство $\mathscr{M}$ пространства представления $\mathscr{K}$.

Если $\varphi,\ \psi\in\mathscr{M}$, то, используя (2.1), (3.2), получаем

$$\begin{aligned}(V(z)\varphi\,|\,V(w)\psi)&=(V(z)P\varphi\,|\,V(w)P\psi)=\\&=e^{\frac{i}{2}\Delta(w,\ z)}(\varphi\,|\,PV(w-z)P\psi)=\\&=e^{\frac{i}{2}\Delta(w,\ z)}f_0(w-z)(\varphi\,|\,\psi).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{M}$. Тогда из (3.3) вытекает, что подпространства $\mathscr{M}_\alpha=[V(z)e_\alpha]$, порожденные векторами вида $V(z)e_\alpha$; $z\in Z$, взаимно ортогональны. По построению, $\mathscr{M}_\alpha$ являются инвариантными подпространствами представления $z\to V(z)$; поэтому, если представление неприводимо, то $\dim\mathscr{M}=1$. Верно и обратное — если представление $z\to V(z)$ приводимо, то $\dim\mathscr{M}>$ >1. В самом деле, пусть $\mathscr{K}=\mathscr{K}_1\oplus\mathscr{K}_2$ — разложение пространства представления на инвариантные подпространства. Применяя изложенную выше конструкцию к каждому из подпространств $\mathscr{K}_j$, мы получили бы в каждом из них проектор $P_j \neq 0$, причем $P = P_1 \oplus P_2$, так что $\dim \mathcal{M} > 1$.

Заметим теперь, что P действует как оператор ранга 1 в $\mathcal{M}_\alpha$:

$$PV(z)\,e_\alpha = PV(z)\,Pe_\alpha = f_0(z)\,e_\alpha;$$

$$P\psi = c(\psi)\,e_\alpha, \qquad \psi \in \mathcal{M}_\alpha;$$

поэтому $\{V(z)\}$ действует неприводимо в $\mathcal{M}_\alpha$. Имеем $\mathcal{H} = \left[\sum_\alpha \oplus \mathcal{M}_\alpha\right] \oplus \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0$ — ортогональное дополнение суммы $\sum_\alpha \oplus \mathcal{M}_\alpha$ в $\mathcal{H}$. Так как $\sum_\alpha \oplus \mathcal{M}_\alpha$ инвариантно, то $\mathcal{H}_0$ также инвариантно относительно $\{V(z)\}$; кроме того, $P\mathcal{H}_0 = 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{H}_0 = [0]$, так как, применяя всю конструкцию к $\{V(z)\}$, действующему в $\mathcal{H}_0$, мы получили бы $P = 0$ в противоречие с тем, что $f_0 \neq 0$.

Это доказывает, что всякое представление разлагается в прямую ортогональную сумму неприводимых представлений, действующих в пространствах $\mathcal{M}_\alpha$.

Пусть $z \to V_j(z)$ — неприводимые представления в пространствах $\mathcal{H}_j$; $j = 1, 2$. Операторы $P_j = V_j(f_0)$ являются одномерными проекторами на векторы $e_j \in \mathcal{H}_j$, причем $\mathcal{H}_j = [V(z)\,e_j]$. Определим оператор U из $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}_1$, полагая $UV_2(z)\,e_2 = V_1(z)\,e_1$. Оператор U отображает плотное множество в $\mathcal{H}_2$ на плотное множество в $\mathcal{H}_1$, сохраняя скалярное произведение, так как по формуле (3.3)

$$(V_1(z)\,e_1 \mid V_1(w)\,e_1) = \exp\left[\frac{i}{2}\Delta(w,\ z)\right] f_0(z - w) = \\ = (V_2(z)\,e_2 \mid V_2(w)\,e_2).$$

Следовательно, он продолжается до изометричного оператора из $\mathcal{H}_2$ на $\mathcal{H}_1$. По построению

$$U^* V_1(z)\,U = V_2(z), \qquad z \in Z.$$

Теорема доказана.

Ограничимся теперь неприводимыми представлениями. Сформулируем многомерную версию предложения III.6.1, которая доказывается совершенно аналогично.

Предложение 3.1. *Пусть $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонического коммутационного соотноше-*

ния (2.1) *в пространстве* $\mathcal{H}$. *Матричные элементы* $(\varphi \mid V(z)\,\psi)$ *являются квадратично-интегрируемыми функциями от* z. *Если* $\{e_j\}$ — *ортонормированный базис в* $\mathcal{H}$, *то функции* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e_j \mid V(z)\, e_k)\right\}$ *образуют ортонормированный базис в пространстве* $\mathcal{L}^2(Z)$ *комплексных квадратично-интегрируемых функций от* z.

Пусть T — ядерный оператор в пространстве представления. Сопоставим ему функцию

$$\mathcal{F}_z[T] = \operatorname{Tr} TV(z), \qquad z \in Z. \tag{3.4}$$

Как мы увидим, отображение $T \to \mathcal{F}_z[T]$ является своеобразным «некоммутативным» аналогом преобразования Фурье, обратным к преобразованию Вейля (3.1).

Следующие свойства непосредственно вытекают из общих свойств следа и канонического коммутационного соотношения:

1) $\mathcal{F}_0[T] = \operatorname{Tr} T, \qquad |\mathcal{F}_z[T]| \leqslant \|T\|_1;$

2) $\mathcal{F}_z[T^*] = \overline{\mathcal{F}_{-z}[T]};$

3) $\mathcal{F}_z[TV(w)] = \mathcal{F}_{z+w}[T] \cdot e^{\frac{i}{2}\Delta(z,\, w)},$
$\mathcal{F}_z[V(w)^*\, TV(w)] = \mathcal{F}_z[T] \cdot e^{i\Delta(z,\, w)}.$

Имеет место «формула Парсеваля».

Теорема 3.2. *Соответствие* $T \to \mathcal{F}_z[T]$ *продолжается до изометрического отображения пространства операторов Гильберта—Шмидта* $\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ *на пространство* $\mathcal{L}^2(Z)$, *так что*

$$\operatorname{Tr} T_1^* T_2 = (2\pi)^{-s} \int \overline{\mathcal{F}_z[T_1]}\, \mathcal{F}_z[T_2]\, d^{2s}z. \tag{3.5}$$

Доказательство. Если мы докажем, что для эрмитова ядерного оператора T выполняется

$$\operatorname{Tr} T^2 = (2\pi)^{-s} \int |\mathcal{F}_z[T]|^2\, d^{2s}z,$$

то формула (3.5) для ядерных операторов получится отсюда по линейности. Имеем

$$T = \sum_j t_j\, |e_j)(e_j|,$$

где $\sum_j |t_j| < \infty$ и $\{|e_j)\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора T, причем ряд сходится в смысле нормы ядерных операторов. Отсюда

$$\mathcal{F}_z[T] = \sum_j t_j (e_j | V(z) e_j). \tag{3.6}$$

Используя предложение 3.1, получаем, что функциональный ряд (3.6) сходится в среднеквадратичном в $\mathcal{L}^2(Z)$ и

$$(2\pi)^{-s} \int |\mathcal{F}_z[T]|^2 d^{2s}z = \sum_j t_j^2 |(e_j | e_j)|^2 = \mathrm{Tr}\, T^2.$$

Таким образом, соответствие $T \to \mathcal{F}_z[T]$ изометрично отображает множество ядерных операторов, как подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$, в гильбертово пространство $\mathcal{L}^2(Z)$. Так как функции $\mathcal{F}_z[|e_j)(e_k|] = (e_k | V(z) e_j)$, согласно предложению 3.1, являются базисными в $\mathcal{L}^2(Z)$, то образ этого отображения содержит плотное множество. Поэтому соответствие $T \to \mathcal{F}_z[T]$ продолжается по непрерывности до изометричного отображения $\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ на $\mathcal{L}^2(Z)$.

Следствие 3.1. *Состояние S является чистым тогда и только тогда, когда*

$$(2\pi)^{-s} \int |\mathcal{F}_z[S]|^2 d^{2s}z = 1.$$

Доказательство. По теореме 3.2

$$(2\pi)^{-s} \int |\mathcal{F}_z[S]|^2 d^{2s}z = \mathrm{Tr}\, S^2 = \sum_j s_j^2,$$

где s_j — собственные значения оператора плотности. Но $s_j \geqslant 0$, $\sum_j s_j = 1$, откуда следует, что $\sum_j s_j^2 \leqslant 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда одно из s_j равно единице, а остальные — нули. Это означает, что S — одномерный проектор, т. е. оператор плотности чистого состояния.

Следствие 3.2 (формула обращения). *Для любого оператора Гильберта — Шмидта T*

$$T = (2\pi)^{-s} \int \mathcal{F}_z[T] V(-z) d^{2s}z, \tag{3.7}$$

где интеграл сходится в слабом смысле.

Доказательство. Полагая в (3.5) $T_1 = |\varphi)(\psi|$ и учитывая, что $\overline{(\psi|V(z)\varphi)} = (\varphi|V(z)^*\psi) = (\varphi|V(-z)\psi)$, получаем

$$(2\pi)^{-s}\int \mathcal{F}_z[T](\varphi|V(-z)\psi)\,d^{2s}z = \\ = \mathrm{Tr}\,|\psi)(\varphi|T = (\varphi|T\psi), \qquad (3.8)$$

а это и означает выполнение (3.7) в смысле слабой сходимости.

Это следствие показывает, что преобразования $T \to f(z) = \mathcal{F}_z[T]$ и $f \to T = V(f)$ являются взаимно обратными, так что

$$T = V(\mathcal{F}_z[T]).$$

В частности, соответствие $T \to \mathcal{F}_z[T]$ является взаимно-однозначным. Из (3.7) можно получить связь между ядром оператора T в любом неприводимом представлении и функцией $\mathcal{F}_z[T]$.

Для иллюстрации рассмотрим представление Шредингера в случае $s=1$. Установим формулу для ядра оператора Гильберта — Шмидта T в $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$:

$$(\xi|T|\xi') = (2\pi)^{-1}\int \mathcal{F}_{\xi-\xi', y}[T]\,e^{-\frac{i}{2}(\xi+\xi')y}\,dy, \qquad (3.9)$$

где

$$\mathcal{F}_{x,y}[T] = \mathrm{Tr}\,TV(x, y) \equiv \mathrm{Tr}\,TW_{-x, y/\mu}.$$

В самом деле, для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ из (III.5.1)

$$(\varphi|V(-x, -y)\psi = \int (\varphi|\xi)\,e^{-iy\left(\xi-\frac{x}{2}\right)}(\xi-x|\psi)\,d\xi, \qquad (3.10)$$

поэтому в силу (3.8)

$$\iint (\varphi|\xi)(\xi|T|\xi')(\xi'|\psi)\,d\xi\,d\xi' = \\ = (2\pi)^{-1}\iiint \mathcal{F}_{x,y}[T](\varphi|\xi)\,e^{-iy\left(\xi-\frac{x}{2}\right)}(\xi-x|\psi)\,dx\,dy\,d\xi,$$

причем все функции квадратично-интегрируемы, так что возможна замена порядка интегрирования. Полагая $\xi' = \xi - x$ и пользуясь произволом в выборе φ и ψ, получаем (3.9). Аналогично, используя (3.4), (II.7.16), можно получить, что

$$\mathcal{F}_{x,y}[T] = \int (\xi+x|T|\xi)\,e^{iy\left(\xi+\frac{x}{2}\right)}\,d\xi.$$

Исключая из подобных соотношений $\mathcal{F}_z[T]$, можно получать связи между ядрами оператора T в различных представлениях.

Используя эту формулу и соотношение (III.6.3), получаем для оператора плотности состояния минимальной неопределенности (1.1):

$$\mathcal{F}_{x,y}[|\bar{P}, \bar{Q})(\bar{Q}, \bar{P}|] = \\ = \exp\left[i(x\bar{P} + y\bar{Q}) - \frac{1}{4}\left(\frac{\hbar}{\omega}x^2 + \frac{\omega}{\hbar}y^2\right)\right]. \qquad (3.11)$$

§ 4. Характеристическая функция состояния. Моменты

Рассмотрим преобразование $\mathcal{F}_z[T]$ для эрмитова ядерного оператора T. Если $T \geqslant 0$, то $\mathcal{F}_z[T]$ обладает следующим свойством *Δ-положительной определенности*: для любого n, любых $z_1, \ldots, z_n \in Z$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k \mathcal{F}_{z_j - z_k}[T] \exp\frac{i}{2}\Delta(z_j, z_k) \geqslant 0. \qquad (4.1)$$

В самом деле, в силу (2.1) и (3.4) эта сумма есть не что иное, как $\operatorname{Tr} T\left(\sum_k c_k V(z_k)\right)^* \left(\sum_j c_j V(z_j)\right)$, что, очевидно, всегда неотрицательно.

Преобразование $\mathcal{F}_z[S]$ оператора плотности S назовем *характеристической функцией* S по аналогии с характеристическими функциями распределений вероятностей. Следующая теорема является некоммутативным аналогом известной теоремы Бохнера — Хинчина.

Теорема 4.1. *Для того чтобы функция $\mathcal{F}(z)$ была характеристической функцией квантового состояния, необходимо и достаточно выполнение условий:*

1) $\mathcal{F}(0) = 1$, *$\mathcal{F}(z)$ непрерывна в нуле;*

2) *$\mathcal{F}(z)$ является Δ-положительно определенной.*

Доказательство. Пусть S — оператор плотности; тогда $\mathcal{F}_0[S] = \operatorname{Tr} S = 1$; условие 2) следует из положительности S. Для доказательства непрерывности заметим, что

$$\mathcal{F}_z[S] = \sum_j s_j (e_j | V(z) e_j),$$

где s_j — собственные значения, e_j — собственные векторы оператора S. В силу непрерывности представления $z \to V(z)$ каждое слагаемое ряда является непрерывной функцией по z; кроме того, ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как $|(e_j \mid V(z)\, e_j)| \leqslant 1$ и $\sum_j s_j < \infty$. Таким образом, $\mathcal{F}_z[S]$ непрерывна при всех $z \in Z$.

Докажем достаточность. Прежде всего покажем, что непрерывность в нуле и Δ-положительная определенность влекут равномерную непрерывность функции $\mathcal{F}(z)$ при всех z (аналогичный факт имеет место в теории вероятностей для характеристических функций). Для этого рассмотрим условие (4.1) для $n=3$ и значений z, равных 0, z_1, z_2. Тогда условие (4.1) означает положительную определенность эрмитовой формы от переменных c_1, c_2, c_3 с матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathcal{F}(-z_1) & \mathcal{F}(-z_2) \\ \mathcal{F}(z_1) & 1 & \mathcal{F}(z_1 - z_2)\, e^{\frac{i}{2}\Delta(z_1, z_2)} \\ \mathcal{F}(z_2) & \mathcal{F}(z_2 - z_1)\, e^{\frac{i}{2}\Delta(z_2, z_1)} & 1 \end{bmatrix}.$$

По критерию Сильвестра получаем

$$1 - \mathcal{F}(z_1)\, \mathcal{F}(-z_1) \geqslant 0,$$

$$1 + 2\operatorname{Re} \overline{\mathcal{F}(z_1)}\, \mathcal{F}(z_2)\, \overline{\mathcal{F}(z_2 - z_1)\, e^{\frac{i}{2}\Delta(z_1, z_2)}} - \\ - |\mathcal{F}(z_2)|^2 - |\mathcal{F}(z_1)|^2 - |\mathcal{F}(z_2 - z_1)|^2 \geqslant 0.$$

Из первого неравенства следует, что

$$\mathcal{F}(-z) = \overline{\mathcal{F}(z)} \tag{4.2}$$

и

$$|\mathcal{F}(z)|^2 \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Преобразуя второе неравенство, получаем

$$|\mathcal{F}(z_2) - \mathcal{F}(z_1)|^2 \leqslant 1 - |\mathcal{F}(z_2 - z_1)|^2 - \\ - 2\operatorname{Re} \overline{\mathcal{F}(z_1)}\, \mathcal{F}(z_2) \left[1 - \overline{\mathcal{F}(z_2 - z_1)}\, e^{\frac{i}{2}\Delta(z_2, z_1)}\right].$$

Учитывая (4.2), (4,3), находим окончательно

$$|\mathcal{F}(z_2) - \mathcal{F}(z_1)|^2 \leqslant 4 \left| 1 - \overline{\mathcal{F}(z_2 - z_1)}\, e^{\frac{i}{2}\Delta(z_2, z_1)} \right|,$$

откуда и следует высказанное утверждение.

Мы построим некоторое гильбертово пространство и состояние в нем, для которого $\mathcal{F}(z)$ является характеристической функцией. Рассмотрим оператор $\hat{V}_0(z)$, действующий на функцию $\psi(w)$, $w \in Z$, по формуле

$$\hat{V}_0(z)\psi(w) = \exp\left[-\frac{i}{2}\Delta(z, w)\right]\psi(z+w).$$

Непосредственно проверяется, что операторы $\{\hat{V}_0(z); z \in Z\}$ удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению (2.1). Теперь мы выделим такое гильбертово пространство $\hat{\mathcal{K}}$, в котором операторы $\hat{V}_0(z)$ унитарны. Рассмотрим линейное пространство $\hat{\mathcal{K}}_0$ функций вида

$$\psi(w) = \left[\sum_k c_k V(z_k)\right] 1(w) \equiv \sum_k c_k \exp\left[-\frac{i}{2}\Delta(z_k, w)\right],$$

где $1(w)$ — функция, тождественно равная единице. Введем в $\hat{\mathcal{K}}_0$ полуторалинейную форму

$$(\psi^{(1)} \mid \psi^{(2)}) = \sum_{j,\,k} c_j^{(2)} \bar{c}_k^{(1)} \mathcal{F}(z_j^{(2)} - z_k^{(1)}) \exp\left[\frac{i}{2}\Delta(z_j^{(2)}, z_k^{(1)})\right],$$

если $\psi^{(\alpha)} = \left[\sum_j c_j^{(\alpha)} V(z_j^{(\alpha)})\right] 1$, $\alpha = 1, 2$. В силу Δ-положительной определенности

$$(\psi \mid \psi) \geqslant 0, \qquad \psi \in \hat{\mathcal{K}}_0.$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что

$$\left(\hat{V}_0(z)\psi_1 \mid \hat{V}_0(z)\psi_2\right) = (\psi_1 \mid \psi_2), \qquad \psi_1, \psi_2 \in \hat{\mathcal{K}}_0, \qquad (4.4)$$

для любого $z \in Z$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{K}}$ пополнение фактор-пространства $\hat{\mathcal{K}}_0/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{\psi: (\psi \mid \psi) = 0\}$. В силу (4.4) операторы $\hat{V}_0(z)$ продолжаются до унитарных операторов $\hat{V}(z)$ в $\hat{\mathcal{K}}$. Таким образом, $z \to \hat{V}(z)$ является проективным унитарным представлением канонического коммутационного соотношения в $\hat{\mathcal{K}}$. Установим его непрерывность.

Для этого достаточно проверить непрерывность функций $\left(\psi^{(1)} \mid \hat{V}(\cdot)\, \psi^{(2)}\right) = \left(\psi^{(1)} \mid \hat{V}_0(\cdot)\, \psi^{(2)}\right)$, когда $\psi^{(\alpha)}$ пробегают плотное множество $\mathscr{H}_0/\mathscr{N}$. Но тогда

$$\left(\psi^{(1)} \mid \hat{V}_0(z)\, \psi^{(2)}\right) = $$
$$= \sum_{j,k} C_j^{(2)} \bar{c}_k^{(1)} \exp\left[\frac{i}{2} \Delta\left(z_j^{(2)} + z,\; z_k^{(1)} - z\right)\right] \mathscr{F}\left(z_j^{(2)} + z - z_k^{(1)}\right)$$

и непрерывность вытекает из непрерывности функции $\mathscr{F}(z)$.

Отметим еще, что

$$\left(1 \mid \hat{V}(z)\, 1\right) = \mathscr{F}(z). \tag{4.5}$$

По теореме 3.1 построенное представление унитарно эквивалентно прямой дискретной сумме копий некоторого неприводимого представления $z \to V(z)$ в пространстве $\mathscr{H}$:

$$\hat{V}(z) = U^{-1} \begin{bmatrix} V(z) & & 0 \\ & V(z) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} U.$$

Оператор U изометрически отображает $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \oplus \ldots$ Положим

$$U1 = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \ldots \tag{4.6}$$

и $S = \sum_j |\psi_j)(\psi_j|$. Очевидно, что $S \geqslant 0$ и

$$\operatorname{Tr} S = \sum_j (\psi_j \mid \psi_j) = (U1 \mid U1) = (1 \mid 1) = 1.$$

Таким образом, S — оператор плотности. Из (4.5) и (4.6) получаем

$$\mathscr{F}(z) = \left(1 \mid \hat{V}(z)\, 1\right) = \sum_j (\psi_j \mid V(z)\, \psi_j) = \operatorname{Tr} S V(z),$$

так что $\mathscr{F}(z)$ является характеристической функцией S. Теорема доказана.

Отметим интересный факт, не имеющий аналога в классической теории вероятностей. Так как всякий оператор плотности является оператором Гильберта — Шмидта, то по теореме 3.2 $\mathscr{F}(z)$ квадратично-интегрируема. В сочетании с доказанной теоремой это означает, что непрерывность и Δ-положительная определенность функции $\mathscr{F}(z)$ влекут квадратичную интегрируемость. Заметим, что если сразу наложить условие квадратичной интегрируемости, то доказательство теоремы 4.1 значительно упрощается. Пользуясь теоремой 3.2, введем оператор Гильберта — Шмидта $S = V(\mathscr{F})$. Из условий 1), 2) вытекает, что $S \geqslant 0$ и $\operatorname{Tr} S = 1$, т. е. S — оператор плотности, и по формуле обращения $\mathscr{F}(z) = \mathscr{F}_z[S]$.

В теории вероятностей известны соотношения, связывающие моменты распределения с производными его характеристической функции. Аналогичные соотношения имеют место и здесь. Пусть

$$R(z) = \int \lambda E_z(d\lambda)$$

— спектральное разложение самосопряженного оператора $R(z)$. Рассмотрим распределение вероятностей на прямой

$$\mu_S^z(B) = \operatorname{Tr} SE_z(B); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}).$$

Функция $\mathscr{F}_{tz}[S]$, $-\infty < t < \infty$, является классической характеристической функцией распределения $\mu_S(d\lambda)$, так как

$$\mathscr{F}_{tz}[S] = \operatorname{Tr} Se^{itR(z)} = \int e^{it\lambda}\mu_S^z(d\lambda).$$

Предположим, что n-й абсолютный момент распределения μ_S^z конечен; тогда, как известно из теории вероятностей, $\mathscr{F}_{tz}[S]$ n раз дифференцируема и n-й момент распределения вероятностей μ_S^z равен

$$m_n(z) = i^{-n} \frac{d^n}{dt^n} \mathscr{F}_{tz}[S]\,|_{t=0}. \tag{4.7}$$

Если n четно, то, обратно, из существования производной n-го порядка в нуле следует конечность n-го момента.

Из (4.7) видно, что $m_n(z)$ является однородным полиномом от z степени n. Для нас наибольший интерес представляет *среднее значение*

$$m_1(z) \equiv m(z) = \mathsf{E}_S(R(z)),$$

которое является линейной функцией от z, и *второй момент* $m_2(z)$, который является квадратичной формой от z. Вводя симметричную билинейную форму

$$m_2(z, z') = -\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s} \mathscr{F}_{tz+sz'}[S]|_{t=s=0},$$

определим *корреляционную функцию* состояния формулой

$$\alpha(z, z') = m_2(z, z') - m(z)\, m(z'), \tag{4.8}$$

так что

$$\alpha(z, z) = m_2(z) - m(z)^2 = \mathsf{D}_S(R(z)).$$

Рассмотрим гильбертово пространство квадратично-суммируемых операторов $\mathscr{L}^2(S)$ (см. § II.8). Так как $m_2(z) = \int \lambda^2 \mu_S^z(d\lambda)$, то, согласно (II.9.9), $m_2(z) < \infty$ тогда и только тогда, когда $R(z) \in \mathscr{L}^2(S)$. Мы скажем, что S — *состояние с конечными вторыми моментами*, если $m_2(z) < \infty$ для всех $z \in Z$. Для такого состояния, согласно (II.9.1), (II.9.2),

$$m(z) = \langle I, R(z)\rangle_S, \quad m_2(z, z') = \langle R(z), R(z')\rangle_S.$$

Корреляционная функция записывается в виде

$$\alpha(z, z') = \langle R(z) - m(z), R(z') - m(z')\rangle_S, \tag{4.9}$$

где для краткости полагается $m(z) \cdot I \equiv m(z)$.

Установим строгую версию соотношения (2.5):

$$[R(z), R(z')]_S = \Delta(z, z'); \qquad z, z' \in Z. \tag{4.10}$$

Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть $M(d\lambda)$ — измерение с конечными вторыми моментами относительно состояния S и $X_M = \int \lambda M(d\lambda)$. Рассмотрим семейство ограниченных операторов*

$$V_t = \int e^{it\lambda} M(d\lambda).$$

Тогда $X_M = i^{-1} \frac{d}{dt} V_t|_{t=0}$ в смысле сходимости в $\mathscr{L}^2_{\pm}(S)$.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\frac{V_t - 1}{it} \to X_M \text{ в } \mathscr{L}^2_{\pm}(S) \text{ при } t \to 0.$$

В силу неравенства (II.9.7) для этого достаточно установить, что

$$\frac{e^{i\lambda t}-1}{it} \to \lambda \text{ в } \mathscr{L}^2(\mu_S).$$

Очевидно, что имеет место поточечная сходимость; кроме того,

$$\left|\lambda - \frac{e^{i\lambda t}-1}{it}\right|^2 \leqslant 4\lambda^2,$$

так как $\left|\frac{e^{i\lambda t}-1}{it}\right| = \left|\frac{\sin \lambda t/2}{t/2}\right| \leqslant \lambda$. Так как $\int \lambda^2 \mu_S(d\lambda) < \infty$, то по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\int \left|\lambda - \frac{e^{i\lambda t}-1}{it}\right|^2 \mu_S(d\lambda) \to 0 \text{ при } t \to 0,$$

что и требовалось установить.

Из этой леммы вытекает, что если $m_2(z) < \infty$, то

$$R(z) = i^{-1}\frac{d}{dt} V(tz)\,|_{t=0} \text{ в } \mathscr{L}^2_{\pm}(S). \tag{4.11}$$

Беря след обеих частей равенства (2.4) с оператором плотности S и учитывая, что $V(z)^* = V(-z)$, получаем

$$\langle V(-tz),\ V(sz')\rangle_S^- = e^{its\Delta(z,\,z')}\langle V(-tz),\ V(sz')\rangle_S^+.$$

Отсюда, в силу (4.11),

$$-\langle R(z),\ R(z')\rangle_S^- = i\Delta(z,\ z') - \langle R(z),\ R(z')\rangle_S^+.$$

Учитывая (II.8.13), получаем (4.10). Принимая во внимание (II.8.9), можно также написать

$$\Delta(z,\ z') = [R(z) - m(z),\ R(z') - m(z')]_S. \tag{4.12}$$

Из формул (4.9), (4.12) и предложения II.9.1 вытекает, что корреляционная функция состояния с конечными вторыми моментами удовлетворяет эквивалентным неравенствам

$$\alpha(z,\ z)\,\alpha(z',\ z') \geqslant \frac{1}{4}\Delta(z,\ z')^2,$$
$$\alpha(z,\ z) + \alpha(z',\ z') \geqslant \Delta(z,\ z'). \tag{4.13}$$

Первое из этих неравенств есть, конечно, соотношение неопределенностей для наблюдаемых $R(z)$, $R(z')$.

Кроме того, для любых $z_j \in Z$

$$\left[\alpha(z_j,\ z_k) \pm \frac{i}{2}\Delta(z_j,\ z_k)\right] \geqslant 0. \tag{4.14}$$

Лемма 4.2. *Если S — оператор плотности состояния с конечными вторыми моментами, то*

$$\mathcal{F}_z[SR(z_1)] = \left[-\frac{1}{2}\Delta(z,\ z_1) - i\nabla_{z_1}\right]\mathcal{F}_z[S],$$

$$\mathcal{F}_z[R(z_1)S] = \left[-\frac{1}{2}\Delta(z,\ z_1) - i\nabla_{z_1}\right]\mathcal{F}_z[S],$$

$$\mathcal{F}_z[S\cdot R(z_1)] = -i\nabla_{z_1}\mathcal{F}_z[S], \tag{4.15}$$

$$\mathcal{F}_z[[R(z_1),\ S]] = \Delta(z,\ z_1)\mathcal{F}_z[S], \tag{4.16}$$

где ∇_{z_1} — *производная по направлению* z_1: $\nabla_{z_1}\mathcal{F}(z) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(z+tz_1)|_{t=0}$.

Доказательство. Так как $R(z_1) \in \mathcal{L}^2(S)$, то по предложению II.8.1 операторы $SR(z_1), \ldots$ в левой части доказываемых равенств являются ядерными и имеют квадратично-интегрируемые преобразования $\mathcal{F}_z[SR(z_1)], \ldots$ Достаточно проверить первую формулу. Имеем

$$\mathcal{F}_z[SR(z_1)] = \operatorname{Tr}(SR(z_1))V(z) = \langle V(-z),\ R(z_1)\rangle_{\bar{S}}.$$

Согласно (4.11)

$$\mathcal{F}_z[SR(z_1)] = i^{-1}\frac{d}{dt}\langle V(-z),\ V(tz_1)\rangle_{\bar{S}}|_{t=0} =$$
$$= i^{-1}\frac{d}{dt}\operatorname{Tr} SV(tz_1)V(z)|_{t=0}.$$

Используя каноническое коммутационное соотношение, получаем

$$\mathcal{F}_z[SR(z_1)] = i^{-1}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_{z+tz_1}[S]e^{\frac{i}{2}t\Delta(z_1,\ z)}\Bigg|_{t=0},$$

что и требовалось.

Было бы нетрудно распространить эти формулы на более широкий класс операторов S, однако это нам не понадобится.

§ 5. Гауссовские состояния

Найдем характеристическую функцию квазиклассического состояния (1.2). Учитывая формулу (3.11), получаем

$$\mathscr{F}_{x,y}[S] =$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\hbar}{\omega}x^2+\frac{\omega}{\hbar}y^2\right)\right]\int \exp[i(\bar{P}x+\bar{Q}y)]\,\mu(d\bar{P}\,d\bar{Q}) =$$
$$= \mathscr{F}_0(x,\ y)\cdot\tilde{\mu}(x,\ y), \qquad (5.1)$$

где $\mathscr{F}_0(x,\ y)$ — квантовая характеристическая функция основного состояния $|0)(0|$, а $\tilde{\mu}(x,\ y)$ — классическая характеристическая функция распределения вероятностей μ.

Рассмотрим гауссовское квазиклассическое состояние (1.7). Перейдем к вещественным переменным, полагая $\zeta=\dfrac{\omega\beta+i\hbar\alpha}{\sqrt{2\hbar\omega}}$, $\bar{a}=\dfrac{\omega\bar{Q}+i\hbar\bar{P}}{\sqrt{2\hbar\omega}}$, и запишем его оператор плотности в виде

$$S_{\bar{P},\bar{Q}}=\frac{1}{2\pi\bar{N}}\iint|\alpha,\ \beta)(\beta,\ \alpha|\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\bar{N}}\left[\frac{\hbar}{\omega}(\alpha-\bar{P})^2+\frac{\omega}{\hbar}(\beta-\bar{Q})^2\right]\right\}d\alpha\,d\beta. \qquad (5.2)$$

Характеристическая функция входящего сюда гауссовского распределения имеет известный вид $\tilde{\mu}(x,\ y)=$ $=\exp\left[i(\bar{P}x+\bar{Q}y)-\frac{1}{2}\left(\bar{N}\frac{\omega}{\hbar}x^2+\bar{N}\frac{\hbar}{\omega}y^2\right)\right]$, так что согласно (5.1)

$$\mathscr{F}_{x,y}\left[S_{\bar{P},\bar{Q}}\right]=\exp\left[i(\bar{P}x+\bar{P}y)-\frac{1}{2}(\sigma_P^2x^2+\sigma_Q^2y^2)\right], \qquad (5.3)$$

где

$$\sigma_P^2=\frac{\omega}{\hbar}\left(\bar{N}+\frac{1}{2}\right),\quad \sigma_Q^2=\frac{\hbar}{\omega}\left(\bar{N}+\frac{1}{2}\right),$$

поэтому $\bar{N}=\sigma_P\sigma_Q-1/2$.

В случае нескольких степеней свободы характеристическая функция состояния (1.8) будет, очевидно, произведением сомножителей типа (5.2):

$$\prod_k \exp\left[i(\bar{P}_kx_k+\bar{Q}_ky_k)-\frac{1}{2}(\sigma_{Pk}^2x_k^2+\sigma_{Qk}^2y_k^2)\right]. \qquad (5.4)$$

Мы видим, что характеристическая функция квантового состояния (5.2) имеет ту же аналитическую форму, что и характеристическая функция классического гауссовского распределения (хотя дисперсии σ_P^2, σ_Q^2 уже не произвольные числа, а подчинены соотношению неопределенностей $\sigma_P^2\sigma_Q^2 \geqslant 1/4$).

Основываясь на этой аналогии, введем следующее общее определение. Пусть $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонического коммутационного соотношения на симплектическом пространстве (Z, Δ). Состояние S в пространстве представления $\mathcal{H}$ назовем *гауссовским*, если оно имеет характеристическую функцию вида

$$\mathcal{F}_z[S] = \exp\left[im(z) - \frac{1}{2}\alpha(z, z)\right], \tag{5.5}$$

где $m(z)$ — линейная форма, $\alpha(z, z')$ — билинейная симметричная форма на Z. Функция (5.5) бесконечно дифференцируема, и поэтому все моменты гауссовского состояния конечны. Из (4.7), (4.8) следует, что $m(z)$ совпадает со средним значением, а $\alpha(z, z')$ — с корреляционной функцией состояния.

Теорема 5.1. *Для того чтобы функция вида* (5.5) *была характеристической функцией состояния, необходимо и достаточно, чтобы билинейная форма* $\alpha(z, z')$ *удовлетворяла одному из эквивалентных соотношений* (4.13), (4.14).

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что α является корреляционной функцией состояния. Для доказательства достаточности нужно лишь проверить Δ-положительную определенность функции (5.5):

$$\sum_{j,k} c_j\bar{c}_k \exp\left[im(z_j) - im(z_k) - \frac{1}{2}\alpha(z_j - z_k, z_j - z_k) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\Delta(z_j, z_k)\right] \geqslant 0.$$

Полагая $b_j = c_j \exp\left[im(z_j) - \frac{1}{2}\alpha(z_j, z_j)\right]$, перепишем это в виде

$$\sum_{j,k} b_j\bar{b}_k \exp\left[\alpha(z_j, z_k) + \frac{i}{2}\Delta(z_j, z_k)\right] \geqslant 0.$$

Заметим, что матрица

$$\left[\alpha(z_j,\ z_k)+\frac{i}{2}\Delta(z_j,\ z_k)\right]$$

положительно определена; остается сослаться на один результат Шура, утверждающий, что положительная определенность матрицы $[a_{jk}]$ влечет положительную определенность матрицы $[\exp a_{jk}]$.

Обозначим гауссовское состояние со средним $m(z)$ и корреляционной функцией $\alpha(z, z')$ через S_m и покажем, что S_m можно рассматривать как результат «воздействия» на состояние $S=S_0$, описываемого некоторым унитарным «оператором сдвига». Так как форма Δ невырождена, то существует вектор $m_\Delta \in Z$ такой, что

$$m(z)=\Delta(m_\Delta,\ z), \qquad z\in Z.$$

Покажем, что

$$S_m=V(m_\Delta)^*\,SV(m_\Delta).$$

Для этого достаточно проверить, что характеристическая функция состояния в правой части совпадает с характеристической функцией состояния S_m. Используя свойство 3) преобразования $T\to\mathcal{F}_z[T]$ (см. § 3), имеем

$$\mathcal{F}_z[V(m_\Delta)^*\,SV(m_\Delta)]=\mathcal{F}_z[S]\,e^{i\Delta(m_\Delta,z)}=\mathcal{F}_z[S_m],$$

что и требовалось.

Определим вектор $m_\alpha\in Z$ соотношением

$$m(z)=\alpha(m_\alpha,\ z), \qquad z\in Z.$$

Тогда $m_\alpha=-\mathscr{D}m_\Delta$, где $\mathscr{D}$ — оператор, определяемый соотношением (2.7), так что

$$S_m=V(\mathscr{D}^{-1}m_\alpha)\,SV(\mathscr{D}^{-1}m_\alpha)^*. \tag{5.6}$$

Условия (4.13) на форму α налагают определенное ограничение на оператор $\mathscr{D}$. Полагая в (4.13) $z'=-\frac{1}{2}\mathscr{D}z$, получаем

$$I+\frac{1}{4}\mathscr{D}^2\geqslant 0 \text{ в } (Z,\ \alpha). \tag{5.7}$$

Пусть $\{e_j, h_j\}$ — симплектический базис, в котором $\mathscr{D}$ имеет матрицу (2.7). Тогда из (5.7) получаем

$$a_j \equiv d_j^{-1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Так как

$$\alpha(z, z) = \sum_j a_j (x_j^2 + y_j^2),$$

где $[x_j, y_j]$ — координаты вектора z в этом базисе, то характеристическая функция состояния принимает вид

$$\prod_j \exp\left[i(\bar{P}'_j x_j + \bar{Q}'_j y_j) - \frac{a_j}{2}(x_j^2 + y_j^2)\right]. \tag{5.8}$$

Здесь $\bar{P}'_j = \mathsf{E}_{S_m}(P'_j)$, $\bar{Q}'_j = \mathsf{E}_{S_m}(Q'_j)$, $a_j = \mathsf{D}_{S_m}(Q'_j) = \mathsf{D}_{S_m}(P'_j)$, где $P'_j = R(e_j)$, $Q'_j = R(h_j)$.

Заметим, что если мы с самого начала исходим из коммутационных соотношений для данного набора канонических наблюдаемых P_k, Q_k, то новые канонические наблюдаемые P'_j, Q'_j, в которых характеристическая функция гауссовского состояния имеет простейшую форму (5.8), вообще говоря, не совпадают с исходными и получаются из них линейным каноническим (т. е. сохраняющим коммутационные соотношения) преобразованием. Так, например, чтобы привести к виду (5.8) характеристическую функцию (5.4) состояния набора осцилляторов, необходимо произвести каноническое преобразование $x_j \to \sqrt{\frac{\sigma_{Pj}}{\sigma_{Qj}}} x_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{\hbar}} x_j$, $y_j \to \sqrt{\frac{\sigma_{Qj}}{\sigma_{Pj}}} = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_j}} y_j$, так что $P'_j = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_j}} P_j$, $Q'_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{\hbar}} Q_j$. В этих канонических наблюдаемых характеристическая функция $\operatorname{Tr} S \exp i\left[\sum_j (P'_j x_j + Q'_j y_j)\right]$ будет иметь вид (5.8), где $a_j = \sigma_{Pj}\sigma_{Qj} = \bar{N}_j + 1/2$. В общем случае преобразование к новым переменным будет более сложным.

Тот факт, что характеристическая функция (5.5) разбивается на произведение сомножителей, отвечающих коммутирующим парам новых канонических наблюдаемых $\{P'_j, Q'_j\}$, означает, что пространство представления $\mathscr{H}$ можно представить в виде тензорного произведения

$$\mathscr{H} = \bigotimes_j \mathscr{H}'_j, \tag{5.9}$$

где $\mathscr{H}'_j$ — пространство, в котором неприводимо действуют операторы $V_j(x_j, y_j) = \exp i(P'_j x_j + Q'_j y_j)$, так что состояние S представляется в виде

$$S_m = \bigotimes_j S'_j,$$

где S'_j — гауссовские состояния в пространствах $\mathscr{H}_j$ с характеристическими функциями простейшего вида

$$\exp\left[i(\bar{P}'_j x_j + \bar{Q}'_j y_j) - \frac{a_j}{2}(x_j^2 + y_j^2)\right].$$

Еще раз подчеркнем, что разложение (5.9) определяется самим гауссовским состоянием и не обязано совпадать с разложением, порождаемым исходными каноническими наблюдаемыми.

Найдем собственные значения оператора S_m. Учитывая соотношение (5.6), достаточно ограничиться случаем нулевого среднего, так как преобразование (5.6) не изменяет собственных значений. Согласно (1.4), состояние $S_{0,0}$ для j-й степени свободы имеет собственные значения вида

$$\frac{1}{\bar{N}_j + 1}\left(\frac{\bar{N}_j}{\bar{N}_j + 1}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.10}$$

где $\bar{N}_j = \sigma_{Pj}\sigma_{Qj} - 1/2 = a_j - 1/2$. Тензорное произведение таких состояний будет иметь в качестве собственных чисел всевозможные произведения вида

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\bar{N}_j + 1}\left(\frac{\bar{N}_j}{\bar{N}_j + 1}\right)^{n_j}, \quad n_j = 0, 1, \ldots$$

В частности, максимальное собственное значение равно

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\bar{N}_j + 1} = \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{a_j + 1/2}.$$

Состояние является чистым тогда и только тогда, когда это произведение равно единице. Так как $a_j \geqslant 1/2$, то это выполняется только, если все $a_j = 1/2$ или

$$\det \frac{1}{2}\mathscr{D} = 1,$$

§ 6. Характеристическое свойство гауссовских состояний

Пусть $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонического коммутационного соотношения в пространстве $\mathscr{H}$ и S — состояние в $\mathscr{H}$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(S)$, ассоциированное с состоянием S.

Лемма 6.1. *Система $\{V(z);\ z \in Z\}$ замкнута в $\mathscr{L}^2(S)$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathscr{L}^2(S)$ таков, что

$$\langle V(z),\ X\rangle_S = 0,\ z \in Z. \tag{6.1}$$

Так как $\mathscr{L}^2(S)$ является комплексификацией вещественного пространства $\mathscr{L}^h_2(S)$, то $X = X_1 + iX_2$, где $X_j \in \mathscr{L}^2_h(S)$. В силу предложения II.8.1, операторы $X_j\sqrt{S}$ и $\sqrt{S}X_j = (X_j\sqrt{S})^*$ являются операторами Гильберта—Шмидта. Поэтому $S \circ X = S \circ X_1 + i\, S \circ X_2$ является ядерным оператором и (6.1) можно записать в виде

$$\operatorname{Tr} V(z)\,(S \circ X) = 0, \qquad z \in Z.$$

Таким образом, $\mathscr{F}_z[S \circ X] \equiv 0$; по формуле обращения (3.7) имеем $S \circ X = 0$. Поэтому для любого ограниченного Y, согласно формуле (II.8.5),

$$\langle Y,\ X\rangle_S = \operatorname{Tr} Y^*\,(S \circ X) = 0,$$

так что $X = 0$ в $\mathscr{L}^2(S)$.

Если состояние S имеет конечные вторые моменты, то $R(z) \in \mathscr{L}^2(S)$ для всех $z \in Z$. Обозначим через $\mathfrak{R}$ подпространство $\mathscr{L}^2_h(S)$, порождаемое операторами вида

$$c + R(z); \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad z \in Z.$$

Если $\mathfrak{R}_0$ — одномерное подпространство $\mathfrak{R}$, натянутое на единичный оператор, то $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \oplus \mathfrak{R}_1$, где $\mathfrak{R}_1$ — пространство операторов вида

$$R(z) - m(z), \qquad z \in Z,$$

где $m(z)$ — среднее значение состояния. Это видно из того, что $\langle R(z) - m(z),\ I\rangle_S = m(z) - m(z) \equiv 0$. В силу (4.9) *отображение*

$$z \to R(z) - m(z) \tag{6.2}$$

является изометрией евклидова пространства $(Z,\ \alpha)$ на подпространство $\mathfrak{R}_1 \subset \mathscr{L}^2_h(S)$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_1$ ограничение коммутационного оператора $\mathfrak{D}$ состояния S, определяемого формулой (II.10.4), на подпространство $\mathfrak{R}_1$, так что

$$[Y,\ X]_S = \langle Y,\ \mathfrak{D}_1 X\rangle_S; \qquad X,\ Y \in \mathfrak{R}_1.$$

Учитывая определение (2.7) оператора $\mathscr{D}$, перепишем (4.12) в виде

$$\alpha(z,\ \mathscr{D}z') = \langle R(z) - m(z),\ \mathfrak{D}(R(z') - m(z'))\rangle_S; \quad z,\ z' \in Z.$$

Это означает, что при изометрии (6.2) оператор $\mathscr{D}$ переходит в $\mathfrak{D}_1$, т. е.

$$R(\mathscr{D}z) - m(\mathscr{D}z) = \mathfrak{D}_1(R(z) - m(z)). \tag{6.3}$$

Теорема 6.1. *Состояние S с конечными вторыми моментами является гауссовским тогда и только тогда, когда подпространство $\mathfrak{R}$ (или $\mathfrak{R}_1$) является инвариантным подпространством коммутационного оператора $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_0) = [0]$ в силу (II.10.6); поэтому инвариантность подпространства $\mathfrak{R}_1$ эквивалентна инвариантности $\mathfrak{R}$.

Пусть S — гауссовское состояние. Мы покажем, что $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$ на $\mathfrak{R}$ и, таким образом, $\mathfrak{R}_1$ является инвариантным подпространством оператора $\mathfrak{D}$. Согласно (6.3) нам нужно показать, что

$$\mathfrak{D}(R(z) - m(z)) = R(\mathscr{D}z) - m(\mathscr{D}z), \qquad z \in Z. \tag{6.4}$$

В силу определения коммутационного оператора и того факта, что $\mathfrak{D}(I) = 0$, это равносильно равенству

$$[X,\ R(z)]_S = \langle X,\ R(\mathscr{D}z) - m(\mathscr{D}z)\rangle_S, \qquad X \in \mathscr{L}^2(S). \tag{6.5}$$

В силу леммы 5.1, достаточно проверить это равенство для $X = V(-w)$. Но из (4.16), (II.8.7) следует

$$[V(-w),\ R(z)]_S = i\Delta(w,\ z)\mathscr{F}_w[S],$$

а из (4.15), (II.8.5)

$$\langle V(-w),\ R(z)\rangle_S = -i\nabla_z\mathscr{F}_w[S].$$

Таким образом, достаточно проверить, что характеристическая функция гауссовского состояния $\mathscr{F}_w[S] =$

$= \exp\left[im(w) - \frac{1}{2}\alpha(w, w)\right]$ удовлетворяет соотношению

$$i\Delta(z, w)\mathcal{F}_w[S] = -i\left[\nabla_{\mathscr{D}z} + m(\mathscr{D}z)\right]\mathcal{F}_w[S], \tag{6.6}$$

что легко устанавливается непосредственным вычислением с учетом определения оператора $\mathscr{D}$.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1) \subset \mathfrak{R}_1$. Тогда $\mathfrak{D}(R(z) - m(z)) = R(\mathscr{D}_1 z) - m(\mathscr{D}_1 z)$, где $\mathscr{D}_1$ — некоторый линейный оператор в Z. Обозначая через α корреляционную функцию состояния S, имеем

$$\alpha(z, \mathscr{D}_1 w) = \langle R(z) - m(z), \mathfrak{D}(R(w) - m(w))\rangle_S = \\ = [R(z) - m(z), R(w) - m(w)]_S = \Delta(z, w),$$

так что $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}$, где $\mathscr{D}$ определяется соотношением (2.7). Таким образом, выполняется (6.4) и, следовательно, характеристическая функция состояния S удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.6). Оператор $\mathscr{D}$ невырожден, так что, заменяя z на $\mathscr{D}^{-1}z$ в (6.6), мы получим

$$-\alpha(w, z)\mathcal{F}_w[S] = [\nabla_z - im(z)]\mathcal{F}_w[S]. \tag{6.7}$$

Пусть $\{z_j\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве (Z, α) и $[w_j]$ — компоненты вектора w в этом базисе. Уравнение (6.7) в координатной форме имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial w_j} - im(z_j)\right]\mathcal{F}_w[S] = -w_j\mathcal{F}_w[S], \qquad j = 1, \ldots, 2s.$$

Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $\mathcal{F}_0[S] = 1$, является $\exp\left[i\sum_j w_j(z_j) - \frac{1}{2}\sum_j w_j^2\right] = \exp\left[im(w) - \frac{1}{2}\alpha(w, w)\right]$. Теорема доказана.

Примечание. Пусть S_m — гауссовский оператор плотности со средним m и корреляционной функцией α. Рассмотрим соотношение (6.5) для ограниченных X. Из (II.8.5), (II.8.7) тогда вытекает

$$i[R(z), S_m] = (R(\mathscr{D}z) - m(\mathscr{D}z)) \circ S_m, \tag{6.8}$$

где $\mathscr{D}$ — оператор, определяемый соотношением (2.7).

Рассмотрим теперь семейство $\{S_\theta\}$ гауссовских состояний с фиксированной корреляционной функцией α и средним значением вида

$$m(z)=\sum_{j=1}^{n}\theta_j m_j(z),$$

где $\theta=[\theta_1, \ldots, \theta_n]\in\mathbb{R}^n$ — произвольный вещественный вектор, $m_j(z)$ — фиксированные линейные функции на Z. Введем элементы $m_j\in Z$, определяемые соотношением

$$m_j(z)=\alpha(m_j, z), \qquad z\in Z.$$

Предложение 6.1. *Семейство $\{S_\theta\}$ сильно дифференцируемо как функция со значениями в пространстве $\mathfrak{T}^1(\mathscr{K})$ ядерных операторов, и*

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta_j}=i[R(\mathscr{D}^{-1}m_j),\ S_\theta]=(R(m_j)-m(m_j))\cdot S_\theta. \tag{6.9}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой (5.6), мы можем написать

$$S_\theta=V\left(\sum_j\theta_j\mathscr{D}^{-1}m_j\right)S_0V\left(\sum_j\theta_j\mathscr{D}^{-1}m_j\right)^*.$$

Давая параметру θ_j приращение t, имеем

$$S_{\theta+t\delta_j}=e^{itR(\mathscr{D}^{-1}m_j)}S_\theta\, e^{-itR(\mathscr{D}^{-1}m_j)},$$

где δ_j — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме j-й, равной единице. Таким образом, $S_t=S_{\theta+t\delta_j}$; $t\in\mathbb{R}$, является однопараметрическим семейством состояний вида (III.2.2), причем инфинитезимальный оператор $R(\mathscr{D}^{-1}m_j)$ унитарной группы $\exp itR(\mathscr{D}^{-1}m_j)$; $t\in\mathbb{R}$, принадлежит $\mathscr{L}^2(S)$, так что выполнены все условия предложения VI.2.1, которое будет доказано в следующей главе. Из него вытекает сильная дифференцируемость семейства и равенство (III.2.3), которое в данном случае переходит в первое из равенств (6.9). Второе получается из формулы (6.8).

В качестве примера рассмотрим квазиклассические состояния осциллятора с характеристической функцией (5.3), где роль параметров $[\theta_j]$ играют средние значения $\bar{P}$, $\bar{Q}$. Тогда z является двумерным вектором с компонентами x, y,

$$\Delta(z, z')=xy'-x'y,$$

а среднее значение и корреляционная функция даются формулами

$$m(z) = \bar{P}x + \bar{Q}y, \ \alpha(z, z) = \sigma_P^2 x^2 + \sigma_Q^2 y^2.$$

Отсюда

$$m_P = \frac{1}{\sigma_P^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad m_Q = \frac{1}{\sigma_Q^2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

так что

$$R(m_P) - m(m_P) = \sigma_P^{-2}(P - \bar{P}),$$

$$R(m_Q) - m(m_Q) = \sigma_Q^{-2}(Q - \bar{Q});$$

$$\mathscr{D} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_P^{-2} \\ -\sigma_Q^{-2} & 0 \end{bmatrix},$$

и соотношения (6.9) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\bar{P}, \bar{Q}}}{\partial \bar{P}} &= i\left[Q, \ S_{\bar{P}, \bar{Q}}\right] = \sigma_P^{-2}(P - \bar{P}) \circ S_{\bar{P}, \bar{Q}}, \\ \frac{\partial S_{\bar{P}, \bar{Q}}}{\partial \bar{Q}} &= -i\left[P, S_{\bar{P}, \bar{Q}}\right] = \sigma_Q^{-2}(Q - \bar{Q}) \circ S_{\bar{P}, \bar{Q}}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Соотношение (6.4) переходит в

$$\mathfrak{D}(P) = -\sigma_Q^{-2}(Q - \bar{Q}), \quad \mathfrak{D}(Q) = \sigma_P^{-2}(P - \bar{P}). \tag{6.11}$$

Комментарии к гл. V

§ 1. Формула (1.2) дает так называемое P-представление Глаубера [33] (см. также Клаудер и Сударшан [49]). Квантование электромагнитного поля, т. е. представление его в виде бесконечного набора квантовых осцилляторов в форме, удобной для применений в квантовой оптике, описывается в книгах Люиселла [63], Клаудера, Сударшана [49], Хелстрома [109]. Там же можно найти обсуждение равновесного состояния поля и состояния «сигнал плюс шум».

§ 2. Бескоординатный подход к каноническим коммутационным соотношениям для полей разработан Сигалом [91] (случай конечного числа степеней свободы подробно рассмотрен Кастлером [46]). По поводу симплектических пространств и приведения к каноническому виду кососимметричной матрицы, см. Мальцев [66].

§ 3. В случае бесконечного числа степеней свободы аналог теоремы Стоуна — фон Неймана уже не имеет места (Сигал [91]). С этим связаны некоторые «расходимости» в теории квантовых полей. Математически строгое изложение проблематики этой теории дается в книге

Боголюбова, Логунова, Тодорова [14]. Преобразование Вейля [24] и обратное преобразование изучали Лупиас и Миракль-Соль [61], Пул [84], Холево [111].

Применение преобразования Вейля позволяет наиболее выпукло выявить аналогии и различия между классической и квантовыми механиками (см. Широков [137]).

§ 4. Характеристическая функция состояния была введена (для полей) Сигалом [90], который обобщил частную конструкцию Мойэла [70].

§ 5. Общее определение гауссовского состояния (для полей) было дано Манюсо и Вербером [69]. В теории поля такие состояния называются квази- или обобщенно свободными. В квантовой статистике имеет место некоммутативный аналог центральной предельной теоремы, в котором роль предельных законов играют гауссовские состояния (см. Кашен и Хадсон [47]).

Доказательство упомянутого результата Шура см. в задачнике Полиа и Сегё [81], отд. VII, задача 36.

§ 6. Характеристическое свойство гауссовских состояний установлено автором [121], [123].

Глава VI

НЕСМЕЩЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 1. Квантовый канал связи

Рассмотрим идеализированную схему передачи сообщений, изображенную на рис. 14. В отсутствие сигнала **носитель информации** $\mathscr{C}$ (например, электромагнитное поле) находится в некотором состоянии S. Обычно принимается, что S — равновесное (гиббсовское) состояние при данной температуре. Передача сигнала осуществляется воздействием **источника сообщений** $\mathscr{T}$ на систему $\mathscr{C}$,

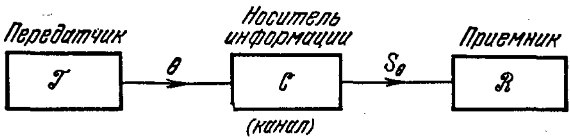

Рис. 14.

что приводит к изменению ее состояния. Если имеется возможность варьировать какой-либо параметр (совокупность параметров) источника $\mathscr{T}$, то результирующее состояние носителя информации $\mathscr{C}$ будет функцией S_θ этого параметра θ.

Если носитель информации описывается классически, то его состояния суть распределения вероятностей $P_\theta(d\omega)$ на фазовом пространстве Ω системы $\mathscr{C}$. Подобные каналы связи рассматриваются в классической теории информации. Если же носитель информации является квантовомеханической системой, то его состояния описываются операторами плотности S_θ в соответствующем гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и тогда говорят о **квантовом канале связи**. С созданием источников когерентного излучения — лазеров — появилась принципиальная возможность создания систем связи, работающих в оптическом диапазоне. Если в радиотехническом диапазоне частот «энергия фотона» $\hbar\omega$ пренебрежимо меньше средней тепловой энергии kT и поле излучения может описываться классически, то в оптическом диапазоне квантовые эффекты приобретают значительную роль и последовательное описание носителя информации — поля излучения — требует привлечения квантовой теории. Принимая упрощенное описание поля как конечного набора квантовых осцилляторов (что обычно оправдано в рассматриваемых вопросах), мы видим, что в отсутствие сигнала поле описывается гауссовским состоянием (V.1.7) с нулевым средним значением, а воздействие источника отражается в появлении ненулевого среднего $\bar{a}$, которое играет роль передаваемого сигнала. Это является квантовым аналогом широко используемой в теории информации модели сигнала на фоне аддитивного гауссовского шума.

Заключительным звеном в системе связи является приемник $\mathscr{R}$, назначением которого является получение оценки $\hat{\theta}$ истинного значения сигнала θ, по наблюдениям за системой $\mathscr{C}$. Отвлекаясь от подробностей реализации процедуры оценки, можно сказать, что приемник осуществляет некоторое измерение параметра θ в семействе состояний S_θ. Весьма важным является вопрос о наилучшем возможном способе приема, т. е. об оптимальном в каком-то смысле измерении параметра θ, а также о принципиальных границах точности его измерения.

В гл. IV мы рассмотрели аналогичные вопросы для кинематических параметров ковариантных семейств квантовых состояний, используя байесовский и минимаксный критерии оптимальности. Здесь мы рассмотрим иной подход, основанный на понятии несмещенности. Этот подход не предполагает существования априорного распределения у параметра θ и годится для семейств состояний, не обладающих какой-либо симметрией.

Пусть $\{S_\theta\}$ — семейство квантовых состояний, где $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$ пробегает некоторую область $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, и $M(d\theta_1 \ldots d\theta_n)$ — измерение со значениями в Θ. Измерение называется *несмещенным*, если

$$\int \hat{\theta}_j \mu_\theta (d\hat{\theta}_1 \ldots d\hat{\theta}_n) = \theta_j, \qquad \theta = [\theta_1, \ldots, \theta_n] \in \Theta,$$

где μ_θ — распределение вероятностей измерения относительно состояния S_θ:

$$\mu_\theta(B) = \mathrm{Tr}\, S_\theta M(B), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Это означает, что измерение не имеет систематической погрешности. В этой главе мы будем рассматривать в основном несмещенные измерения.

Мы будем всегда предполагать, что **вторые моменты измерения конечны**, т. е.

$$\int \hat{\theta}_j^2 \mu_\theta (d\hat{\theta}_1 \ldots d\hat{\theta}_n) < \infty, \qquad \theta \in \Theta.$$

В качестве функции отклонения будет использоваться **квадратичная форма**

$$W_\theta (\hat{\theta}) = \sum_{j,k} g_{jk} (\theta_j - \hat{\theta}_j)(\theta_k - \hat{\theta}_k),$$

где $G = [g_{jk}]$ — некоторая вещественная невырожденная положительно определенная *весовая матрица*. Точность измерения будет определяться *полным среднеквадратичным отклонением*

$$\Sigma_\theta \{M\} = \int W_\theta (\hat{\theta}) \mu_\theta (d^n \hat{\theta})$$

(где $d^n\hat{\theta}$ то же самое, что $d\hat{\theta}_1 \ldots d\hat{\theta}_n$). Подчеркнем, что для многомерного параметра определение среднеквадратичного отклонения существенно зависит от выбора весовой матрицы. Для одномерного параметра $\Sigma_\theta \{M\} = g \cdot \mathsf{D}_\theta \{M\}$, где $\mathsf{D}_\theta \{M\}$ — дисперсия несмещенного измерения M.

Вводя *матрицу ковариации* измерения

$$B_\theta \{M\} = \left[\int (\hat{\theta}_j - \theta_j)(\hat{\theta}_k - \theta_k) \mu_\theta (d^n \hat{\theta}) \right] \equiv [b_{jk} \{M\}], \tag{1.1}$$

имеем

$$\Sigma_\theta \{M\} = \mathbf{Tr}\, G B_\theta \{M\} = \sum_{j,k} g_{jk} b_{jk} \{M\};$$

здесь $\mathbf{Tr}$ — след матрицы.

Несмещенное измерение называется *наилучшим* (для данного значения параметра θ), если оно минимизирует $\Sigma_\theta \{M\}$ среди всех несмещенных измерений. Если существует измерение, минимизирующее $\Sigma_\theta \{M\}$ для всех $\theta \in \Theta$, то оно называется *равномерно наилучшим*.

В этой главе мы получим ряд общих границ для среднеквадратичного отклонения несмещенного измерения и применим их в задаче оценивания параметров среднего значения гауссовского состояния.

§ 2. Нижняя граница для дисперсии измерения одномерного параметра

Пусть $\{S_\theta\}$ — семейство состояний, параметризованное одномерным параметром θ. Мы установим здесь общую границу для дисперсии несмещенного измерения, которая является некоммутативным аналогом неравенства Рао — Крамера, хорошо известного в математической статистике.

Относительно семейства $\{S_\theta\}$ мы предположим следующее:

1) *Семейство* $\{S_\theta\}$ *сильно дифференцируемо по* θ *как функция со значениями в банаховом пространстве ядерных операторов*; обозначим $\frac{d}{d\theta}S_\theta$ производную семейства.

При этом условии для любой ограниченной наблюдаемой X

$$\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta(X) = \operatorname{Tr}\frac{d}{d\theta}S_\theta \cdot X, \tag{2.1}$$

где $\mathsf{E}_\theta(X) = \operatorname{Tr} S_\theta X$ — среднее значение X относительно состояния S_θ. (Возможность дифференцирования под знаком следа вытекает из теоремы II.7.2.)

2) *Линейный функционал от* X, *определяемый формулой* (2.1), *продолжается до непрерывного функционала на* $\mathscr{L}_h^2(S_\theta)$, *т. е.*

$$\left|\operatorname{Tr}\frac{d}{d\theta}S_\theta \cdot X\right|^2 \leqslant c\cdot\operatorname{Tr} S_\theta X^2, \qquad X \in \mathfrak{B}_h(\mathscr{H}),$$

где c — *некоторая постоянная.*

При этом предположении существует оператор $L_\theta \in \mathscr{L}_h^2(S_\theta)$ такой, что

$$\frac{d}{d\theta}S_\theta = S_\theta \circ L_\theta \equiv \frac{1}{2}(S_\theta L_\theta + L_\theta S_\theta). \tag{2.2}$$

В самом деле, из 2) по лемме Рисса — Фреше следует, что $\operatorname{Tr}\frac{d}{d\theta}S_\theta \cdot X = \langle L_\theta, X\rangle_{S_\theta}$ для всех ограниченных X, где $L_\theta \in \mathscr{L}_h^2(S_\theta)$. В силу (II.8.5) это равносильно соотношению (2.2).

Оператор L_θ называется *симметричной логарифмической производной* семейства $\{S_\theta\}$. Отметим, что

$$\langle I, L_\theta\rangle_{S_\theta} = \operatorname{Tr}\frac{d}{d\theta}S_\theta = \frac{d}{d\theta}\operatorname{Tr} S_\theta = 0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим измерение $M(d\theta)$. Пусть $\mu_\theta(d\hat\theta) = \operatorname{Tr} S_\theta M(d\hat\theta)$ — распределение вероятностей этого измерения относительно состояния S_θ. Предположим, что выполнены условия:

1) $\int \hat\theta^2 \mu_\theta(d\hat\theta) < \infty$;

2) *справедливо соотношение*

$$\frac{d}{d\theta}\int \hat\theta \mu_\theta(d\hat\theta) = \int \hat\theta \frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta), \tag{2.4}$$

где $\frac{d\mu_\theta}{d\theta}$ — *мера конечной вариации, определяемая формулой*

$$\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(B) = \operatorname{Tr}\frac{d}{d\theta}S_\theta \cdot M(B), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Предложение 2.1. *При сформулированных предположениях имеет место неравенство*

$$\mathsf{D}_\theta\{M\}\,\mathsf{D}_\theta(L) \geqslant \left[\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta\{M\}\right]^2, \tag{2.5}$$

где $\mathsf{D}_\theta\{\cdot\}$ — *дисперсия относительно состояния* S_θ.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$X_M = \int \hat\theta M(d\hat\theta) \in \mathscr{L}_h^2(S_\theta). \tag{2.6}$$

В силу (II.9.8)

$$\mathsf{D}_\theta\{M\} \geqslant \langle X_M - \mathsf{E}_\theta\{M\},\ X_M - \mathsf{E}_\theta\{M\}\rangle_{S_\theta}.$$

По формуле Коши — Буняковского, учитывая (2.3), получаем

$$\langle X_M - \mathsf{E}_\theta\{M\},\ X_M - \mathsf{E}_\theta\{M\}\rangle_{S_\theta}\cdot\langle L_\theta, L_\theta\rangle_{S_\theta} \geqslant$$
$$\geqslant \langle X_M - \mathsf{E}_\theta\{M\},\ L_\theta\rangle_{S_\theta}^2 = \langle X_M, L_\theta\rangle_{S_\theta}^2.$$

Так как интеграл (2.6) определяется как предел в $\mathscr{L}_h^2(S_\theta)$ интегральных сумм, то

$$\langle X_M, L_\theta\rangle_{S_\theta} = \langle \int \hat\theta M(d\hat\theta),\ L_\theta\rangle_{S_\theta} =$$
$$= \int \hat\theta \langle M(d\hat\theta),\ L_\theta\rangle_{S_\theta} = \int \hat\theta \frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta). \tag{2.7}$$

Воспользовавшись соотношением (2.4), получаем

$$\langle X_M,\ L_\theta\rangle_{S_\theta}=\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta\{M\}, \tag{2.8}$$

откуда и следует (2.5).

Для несмещенного измерения (2.5) переходит в

$$\mathsf{D}_\theta\{M\}\geqslant \mathsf{D}_\theta(L_\theta)^{-1}. \tag{2.9}$$

По существу, для доказательства (2.9) нужно лишь, чтобы выполнялось

$$\int \hat\theta\,\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta)=1 \ \text{ или } \ \langle X_M,\ L_\theta\rangle_{S_\theta}=1. \tag{2.10}$$

Мы будем называть это свойство *локальной несмещенностью* в точке θ.

Следствие 2.1. *Для любого семейства состояний* $\{S_\theta\}$, *удовлетворяющего условиям* 1), 2), *и любого локально несмещенного измерения с конечным вторым моментом имеет место неравенство* (2.9).

Условие (2.10) обычно гораздо легче проверить, чем (2.4).

Некоторое достаточное условие для (2.4) дает

Предложение 2.2. *Пусть семейство* $\{S_\theta\}$ *сильно дифференцируемо в* $\mathfrak{T}^1(\mathscr{K})$ *в некотором интервале значений* θ, *причем* $-T\leqslant$ $\leqslant\frac{d}{d\theta}S_\theta\leqslant T$, *где* T — *ядерный оператор. Пусть измерение* M *таково, что* $\int|\hat\theta|\,\mu(d\hat\theta)<\infty$, *где* $\mu(d\hat\theta)=\mathrm{Tr}\,TM(d\hat\theta)$. *Тогда имеет место соотношение* (2.4).

Доказательство. По формуле конечных приращений

$$\frac{\mu_{\theta+\Delta\theta}(B)-\mu_\theta(B)}{\Delta\theta}=\frac{d}{d\theta}\mu_{\theta+h\Delta\theta}(B)=\mathrm{Tr}\,\frac{d}{d\theta}S_{\theta+h\Delta\theta}\cdot M(B),\qquad 0<h<1,$$

откуда

$$\left|\frac{\mu_{\theta+\Delta\theta}(B)-\mu_\theta(B)}{\Delta\theta}\right|\leqslant \mathrm{Tr}\,TM(B)=\mu(B),\qquad B\in\mathscr{A}(\Theta),$$

и, значит, $\left|\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(B)\right|\leqslant\mu(B)$. Поэтому интеграл $\int\hat\theta\,\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta)$ определен и конечен. Для любого конечного c

$$\int\limits_{|\hat\theta|\leqslant c}\hat\theta\,\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta)=\mathrm{Tr}\,\frac{d}{d\theta}S_\theta\cdot\int\limits_{|\hat\theta|\leqslant c}\hat\theta M(d\hat\theta)=\frac{d}{d\theta}\int\limits_{|\hat\theta|\leqslant c}\hat\theta\mu_\theta\,(d\hat\theta).$$

С другой стороны,

$$\left|\frac{1}{\Delta\theta}\left[\int\limits_{|\hat\theta|>c}\hat\theta\mu_{\theta+\Delta\theta}(d\hat\theta)-\int\limits_{|\hat\theta|>c}\hat\theta\mu_\theta(d\hat\theta)\right]-\int\limits_{|\hat\theta|>c}\hat\theta\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta)\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{|\hat\theta|>c}|\hat\theta|\,\mu(d\hat\theta).$$

Таким образом, левая часть стремится к нулю при $c\to\infty$ равномерно по $\Delta\theta$, что и доказывает наше предложение.

В заключение рассмотрим пример оценивания параметра $\bar{Q}$ в семействе гауссовских квазиклассических состояний (V.5.2) (параметр $\bar{P}$ может при этом иметь любое фиксированное значение). В силу предложения V.6.1 это семейство удовлетворяет условиям 1), 2). Из (V.6.10) получаем симметричную логарифмическую производную

$$L_{\bar Q}=\sigma_{\bar Q}^{-2}(Q-\bar Q),$$

так что $\mathsf{D}_{\bar Q}(L_{\bar Q})=\sigma_{\bar Q}^{-2}$. Неравенство (2.9) дает следующую границу для дисперсии локально несмещенного измерения:

$$\mathsf{D}_{\bar Q}\{M\}\geqslant\sigma_{\bar Q}^{2}=\frac{\hbar}{\omega}\left(\bar N+\frac{1}{2}\right). \tag{2.11}$$

Эта граница, очевидно, достигается для любого значения $\bar Q$ на простом измерении $E(d\bar Q)$, отвечающем наблюдаемой Q. Пользуясь символикой Дирака (см. § III.5), мы можем написать

$$E(d\bar Q)=|\bar Q)(\bar Q|\,d\bar Q,$$

где $|\bar Q)$ — формальные собственные векторы оператора Q.

Так как $X_E=Q$, то условие локальной несмещенности для измерения $E(d\bar Q)$, очевидно, выполняется. Таким образом, *измерение канонической наблюдаемой Q является равномерно наилучшим несмещенным измерением параметра $\bar Q$ в семействе гауссовских состояний* $\{S_{\bar P,\,\bar Q}\}$. Аналогичное утверждение имеет место и для измерений параметра $\bar P$.

§ 3. Случай параметра сдвига

В § III 2 мы анонсировали неравенство

$$\mathsf{D}_\theta\{M\}\,\mathsf{D}_\theta(A) \geqslant \frac{1}{4}\left|\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta\{M\}\right|^2 \qquad (3.1)$$

для дисперсии измерения параметра сдвига θ в семействе состояний вида

$$S_\theta = e^{iA\theta} S e^{-iA\theta}. \qquad (3.2)$$

Теперь мы дадим строгое доказательство этого неравенства и сравним его с полученным выше неравенством (2.5).

Прежде всего установим условие, при котором семейство (3.2) удовлетворяет необходимым требованиям 1), 2).

Предложение 3.1. *Пусть оператор A квадратично-суммируем относительно исходного состояния S; тогда он квадратично-суммируем относительно состояний S_θ, $-\infty < \theta < \infty$. Семейство $\{S_\theta\}$ сильно дифференцируемо как функция θ со значениями в банаховом пространстве ядерных операторов $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$, причем имеет место уравнение*

$$\frac{d}{d\theta} S_\theta = i\,[A,\ S_\theta], \qquad (3.3)$$

где коммутатор понимается в смысле § II.8.

Это предложение дает строгую версию формального соотношения (III.2.3).

Доказательство. Докажем сначала, что из $A \in \mathscr{L}_h^2(S)$ следует $A \in \mathscr{L}_h^2(S_\theta)$. Как было сказано перед формулировкой теоремы Стоуна в § II.4, из того, что $\psi \in \mathscr{D}(A)$, следует $V_\theta\psi \in \mathscr{D}(A)$ и $AV_\theta\psi = V_\theta A\psi$, где $V_\theta = e^{iA\theta}$. Поэтому из $\mathscr{D}(A) \supset \mathscr{R}(\sqrt{S})$ следует, что $\mathscr{D}(A) \supset \mathscr{R}(V_\theta\sqrt{S}\,V_\theta^*) = \mathscr{R}(\sqrt{S_\theta})$ и оператор $A\sqrt{S_\theta} = AV_\theta\sqrt{S}\,V_\theta^* = V_\theta A\sqrt{S}\,V_\theta^*$ является оператором Гильберта — Шмидта вместе с оператором $A\sqrt{S}$. Остается сослаться на предложение II.8.1.

Положим теперь

$$S_\theta = T_\theta R_\theta,$$

где $T_\theta = V_\theta\sqrt{S}$, $R_\theta = \sqrt{S}\,V_\theta^*$ — операторы Гильберта — Шмидта. Покажем, что семейства $\{T_\theta\}$, $\{R_\theta\}$ сильно дифференцируемы как функции со значениями в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, причем

$$\frac{d}{d\theta} T_\theta = -iAT_\theta, \quad \frac{d}{d\theta} R_\theta = iR_\theta A. \tag{3.4}$$

Достаточно рассмотреть семейство $\{T_\theta\}$. Имеем

$$\left\| \frac{T_{\theta+\Delta\theta} - T_\theta}{\Delta\theta} + iAT_\theta \right\|_2 = \| F_{\Delta\theta}(A) \cdot AT_\theta \|_2,$$

где функция $F_{\Delta\theta}(x) = (\Delta\theta \cdot x)^{-1} (e^{i\Delta\theta \cdot x} - 1 - i\Delta\theta \cdot x)$ обладает свойствами

$$|F_{\Delta\theta}(x)| \leqslant \text{const};$$

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} F_{\Delta\theta}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\| F_{\Delta\theta}(A) \| \leqslant \text{const}; \tag{3.5}$$

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} F_{\Delta\theta}(A)\psi = 0, \quad \psi \in \mathscr{H}. \tag{3.6}$$

Покажем, что $\| F_{\Delta\theta}(A)\, AT_\theta \|_2 \to 0$, когда $\Delta\theta \to 0$.

Заметим, что $Q = AT_\theta \in \mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, поэтому Q можно аппроксимировать операторами конечного ранга $\tilde{Q}$. Из (3.6) вытекает, что $\| F_{\Delta\theta}(A)\tilde{Q} \|_2 \to 0$ при $\Delta\theta \to 0$. С другой стороны, согласно (II.7.14)

$$\| F_{\Delta\theta}(A)(Q - \tilde{Q}) \|_2 \leqslant \| F_{\Delta\theta}(A) \| \cdot \| Q - \tilde{Q} \|_2,$$

что в силу (3.5) может быть сделано сколь угодно малым. Это доказывает соотношения (3.4).

Предложение вытекает теперь из следующего простого факта: если $S_\theta = T_\theta \cdot R_\theta$, где $\{T_\theta\}$, $\{R_\theta\}$ сильно дифференцируемы как функции со значениями в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, то $\{S_\theta\}$ сильно дифференцируемо как функция со значениями в $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ и

$$\frac{d}{d\theta} S_\theta = \frac{dT_\theta}{d\theta} \cdot R_\theta + T_\theta \cdot \frac{dR_\theta}{d\theta}.$$

В самом деле,

$$\frac{S_{\theta+\Delta\theta} - S_\theta}{\Delta\theta} = \frac{T_{\theta+\Delta\theta} - T_\theta}{\Delta\theta} R_{\theta+\Delta\theta} + T_\theta \cdot \frac{R_{\theta+\Delta\theta} - R_\theta}{\Delta\theta}.$$

По доказанному, $\Delta\theta^{-1}(T_{\theta+\Delta\theta}-T_\theta)\to\frac{dT_\theta}{d\theta}$, $\Delta\theta^{-1}(R_{\theta+\Delta\theta}-R_\theta)\to\frac{dR_\theta}{d\theta}$ в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$; семейство $\{R_\theta\}$, будучи дифференцируемым, является непрерывным, так что $R_{\theta+\Delta\theta}\to R_\theta$ в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$. Дальнейшее вытекает из неравенства (II.7.13), связывающего ядерную норму и норму Гильберта — Шмидта. Предложение доказано.

Предложение 3.2. *Пусть инфинитезимальный оператор A в семействе* (3.2) *принадлежит $\mathscr{L}^2_h(S)$, а измерение $\mathbf{M}$ удовлетворяет условиям* 1), 2) *из* § 2. *Тогда имеет место неравенство* (3.1).

Доказательство. Если X — ограниченная наблюдаемая, то из (2.1) и (3.3) следует, что

$$\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta(X)=[A,\ X]_{S_\theta}. \tag{3.7}$$

В частности, полагая $X=M(B)$, получаем

$$\frac{d}{d\theta}\mu_\theta(B)=[A,\ M(B)]_{S_\theta},\qquad B\in\mathscr{A}(\Theta).$$

Используя это соотношение, докажем аналог равенства (3.7) для измерения, удовлетворяющего условиям 1), 2):

$$\frac{d}{d\theta}\mathsf{E}_\theta\{\mathbf{M}\}=[A,\ X_{\mathbf{M}}]_{S_\theta}, \tag{3.8}$$

где $X_{\mathbf{M}}$ определяется в (2.6).

В силу условия 2) $\frac{d}{d\theta}E_\theta\{\mathbf{M}\}=\int\hat\theta\,\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta)$. Рассуждая как при доказательстве предложения 2.1, получаем

$$\int\hat\theta\,\frac{d\mu_\theta}{d\theta}(d\hat\theta)=\int\hat\theta\,[A,\ M(d\hat\theta)]_{S_\theta}=[A,\ X_{\mathbf{M}}]_{S_\theta},$$

т. е. (3.8).

Из неравенства (II.9.8) и соотношения неопределенностей (II.9.3) следует

$$\mathsf{D}_\theta\{\mathbf{M}\}\,\mathsf{D}_\theta(A)\geqslant\frac{1}{4}[X_{\mathbf{M}},\ A]^2_{S_\theta}.$$

Подставляя в правую часть (3.8), получаем (3.1).

Заметим теперь, что из (3.3), (3.7) вытекает выполнение для семейства $\{S_\theta\}$ условия 2) из § 3:

$$\left|\mathrm{Tr}\,\frac{d}{d\theta}S_\theta\cdot X\right| = \left|[A,\ X]_{S_\theta}\right|^2 \leqslant 4\,\langle A,\ A\rangle_{S_\theta}\langle X,\ X\rangle_{S_\theta}$$

в силу предложения II.9.1.

Таким образом, если оператор A в семействе (3.2) квадратично суммируем, а несмещенное измерение M удовлетворяет условиям 1), 2), то для дисперсии измерения справедливы две нижние границы: неравенство (2.9) и неравенство

$$\mathsf{D}_\theta\{M\} \geqslant [4\mathsf{D}_\theta(A)]^{-1}. \tag{3.9}$$

Для того чтобы сравнить эти границы, найдем связь между симметричной логарифмической производной семейства (3.2) и инфинитезимальным оператором A. Сравнивая соотношения (2.2) и (3.3), получаем

$$S_\theta \circ L_\theta = i[A,\ S_\theta] \tag{3.10}$$

или, что равносильно,

$$\langle X,\ L_\theta\rangle_{S_\theta} = [X,\ A]_{S_\theta}$$

для любого ограниченного эрмитова X. В силу определения коммутационного оператора $\mathfrak{D}_\theta$ состояния S_θ (см. § II.10) отсюда следует

$$L_\theta = \mathfrak{D}_\theta(A). \tag{3.11}$$

Эта формула дает операторное решение уравнения (2.2) для частного случая семейства вида (3.2). На самом деле L_θ можно записать с помощью коммутационного оператора, отвечающего какому-либо частному значению θ, например $\theta = 0$. Из (3.10) и (3.2) вытекает

$$S \circ (e^{-iA\theta}L_\theta e^{iA\theta}) = i[A,\ S],$$

откуда, рассуждая как при выводе (3.11), получаем

$$L_\theta = e^{iA\theta}\mathfrak{D}(A)\,e^{-iA\theta},$$

где $\mathfrak{D}$ — коммутационный оператор состояния $S = S_0$.

Покажем, что *граница* (2.9), *использующая симметричную логарифмическую производную, всегда не хуже границы* (3.9) *и совпадает с ней в случае чистых состояний.* Для этого нам надо доказать, что $\frac{1}{4}\mathsf{D}_\theta(A)^{-1} \leqslant \mathsf{D}_\theta(L_\theta)^{-1}$, причем в случае чистых состояний имеет место знак равенства. Имеем

$$\mathsf{D}_\theta(A) = \langle A - \bar{A},\ A - \bar{A}\rangle_{S_\theta},$$

где $\bar{A} = \mathsf{E}_\theta(A)$; используя (3.11), получаем

$$\frac{1}{4}\mathsf{D}_\theta(L_\theta) = \frac{1}{4}\langle \mathfrak{D}_\theta(A),\ \mathfrak{D}_\theta(A)\rangle_{S_\theta} = \frac{1}{4}\langle \mathfrak{D}_\theta(A-\bar{A}),\ \mathfrak{D}_\theta(A-\bar{A})\rangle_{S_\theta} = -\frac{1}{4}\langle (A-\bar{A}),\ \mathfrak{D}_\theta^2(A-\bar{A})\rangle_{S_\theta}.$$

Учитывая тот факт, что $I + \frac{1}{4}\mathfrak{D}_\theta^2 \geqslant 0$, получаем, что $\mathsf{D}_\theta(A) \geqslant \frac{1}{4}\mathsf{D}_\theta(L_\theta)$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left(I + \frac{1}{4}\mathfrak{D}_\theta^2\right)(A - \bar{A}) = 0. \tag{3.12}$$

Для того чтобы раскрыть смысл этого условия, рассмотрим матричное представление оператора $A \in \mathscr{L}^2(S)$, отвечающее спектральному разложению оператора плотности:

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_j & \\ 0 & & \ddots & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Согласно (II.10.9) действие оператора $I + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2$ задается умножением элемента матрицы в j-й строке и k-м столбце на $4s_j s_k (s_j + s_k)^{-1}$ $(s_j + s_k > 0)$. Поэтому условие $(I + 1/4\ \mathfrak{D}^2) \cdot X = 0$ равносильно условию $SXS = 0$; в частности, (3.12) означает

$$SAS = \bar{A} \cdot S^2.$$

Обозначая через E проектор на ортогональное дополнение к нулевому подпространству оператора S, получаем

$$EAE = \bar{A} \cdot E.$$

Это означает, что матрица оператора A должна иметь вид

$$A=\left[\begin{array}{ccc:c} \bar{A} & & & \\ & \ddots & 0 & \sim \\ & & \bar{A} & \\ 0 & & \ddots & \\ \hdashline & \sim & & \sim \end{array}\right],$$

где значком $\sim$ обозначены блоки, которые могут быть произвольными.

В случае чистого состояния левый верхний блок состоит из одного элемента, так что матрица A всегда имеет требуемую форму, и утверждение доказано.

Отметим, что в примере с гауссовскими состояниями $\{S_{\bar{P},\bar{Q}}\}$ неравенство (3.9) дает вместо (2.11) лишь

$$\mathsf{D}_{\bar{Q}}\{M\}\geqslant(2\sigma_{\bar{P}})^{-2}.$$

В силу соотношения неопределенностей, $(2\sigma_P)^{-2}$ не превосходит σ_Q^2, причем равенство достигается только в случае чистого гауссовского квазиклассического состояния, т. е. для состояния минимальной неопределенности.

§ 4. Измерение силы, действующей на пробный объект

Как пример применения результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим вопрос об измерении постоянной силы, действующей на квантовомеханический объект массы m, по наблюдениям за этим объектом. Потенциал постоянной силы F равен $V(x)=-Fx$, поэтому динамика объекта описывается гамильтонианом

$$H=\frac{1}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}-Fq\right). \tag{4.1}$$

Записывая уравнение Шредингера в импульсном представлении

$$i\,\frac{\partial\tilde{\psi}_t(\eta)}{\partial t}=-\frac{\eta^2\tilde{\psi}_t(\eta)}{2m\hbar}-iF\,\frac{\partial\tilde{\psi}_t(\eta)}{\partial\eta},$$

находим его решение

$$\tilde{\psi}_t(\eta)\equiv V_t\tilde{\psi}_0(\eta)=\tilde{\psi}_0(\eta-Ft)\exp\left(-\frac{i\eta^2 t}{2m\hbar}+\frac{i\eta F t^2}{2m\hbar}-\frac{iF^2t^3}{6m\hbar}\right).$$

Отсюда, пользуясь легко устанавливаемой формулой для оператора сдвига в импульсном представлении

$$W_{x,\,v}\tilde{\psi}(\eta)=\exp\left[-\frac{ix}{\hbar}\left(\eta-\frac{mv}{2}\right)\right]\tilde{\psi}(\eta-mv),$$

находим следующую формулу для оператора эволюции $V_t=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}-Fq\right)\right]$:

$$V_t=W_{\frac{Ft^2}{2m},\,\frac{Ft}{m}}\cdot V_t^0\cdot\exp\left(\frac{iF^2t^3}{12m\hbar}\right);\tag{4.2}$$

здесь

$$W_{\frac{Ft^2}{2m},\,\frac{Ft}{m}}=\exp\frac{i}{\hbar}\left(Ftq-\frac{Ft^2}{2m}\,p\right)\tag{4.3}$$

— оператор сдвига, соответствующий кинематическому преобразованию $(x,\ v)\to\left(x+\frac{Ft^2}{2m},\ v+\frac{Ft}{m}\right)$; $V_t^0=\exp\left(-\frac{ip^2}{2m\hbar}\right)$ — оператор свободной эволюции, а последняя экспонента является несущественным для дальнейшего фазовым множителем.

Формула (4.2) имеет простой физический смысл. В классической механике уравнения движения в поле постоянной силы F имеют вид

$$p(t)=p+Ft,$$

$$q(t)=q+\frac{p}{m}\,t+\frac{Ft^2}{2m}.$$

Преобразование $(p,\ q)\to(p(t),\ q(t))$ можно представить как суперпозицию двух преобразований: кинематического сдвига $(p,\ q)\to\left(p+Ft,\ q+\frac{Ft^2}{2m}\right)$ и преобразования $(p,\ q)\to\left(p,\ q+\frac{p}{m}\,t\right)$, которое соответствует свободному движению. Формула (4.2) является квантовомеханическим аналогом этого факта (из нее следуют операторные уравнения для наблюдаемых $p(t)=V_t^*pV_t$, $q(t)=V_t^*qV_t$, которые имеют точно такой же вид, как классические).

В итоге можно сказать, что за время t состояние S перейдет в состояние

$$V_t^*SV_t=W^*_{\frac{Ft^2}{2m},\,\frac{Ft}{m}}\cdot S_t^0\cdot W_{\frac{Ft^2}{2m},\,\frac{Ft}{m}},$$

где $S_t^0 = (V_t^0)^* S V_t^0$ — состояние, в которое перешел бы объект при отсутствии силы. Обозначая результирующее состояние S_F и учитывая (4.3), имеем

$$S_F = e^{iFA} S_t^0 e^{-iFA}, \tag{4.4}$$

где

$$A = \frac{t}{\hbar}\left(q - \frac{p}{2m}\,t\right). \tag{4.5}$$

Рассмотрим теперь вопрос — с какой точностью можно оценить величину силы F, действовавшей на объект в интервале времени $(0, t)$, по измерениям, относящимся к моменту t? Проведенный анализ показывает, что это сводится к оцениванию параметра сдвига F в семействе состояний (4.4), так что к этой задаче полностью применимы результаты предыдущих параграфов.

В предположении, что оператор (4.5) имеет конечный второй момент относительно состояния S_t^0, для дисперсии любого несмещенного измерения M силы F выполняется неравенство (3.9). Выразим входящую в него величину $\mathsf{D}_{S_t^0}(A)$ через дисперсии, относящиеся к исходному состоянию S. Имеем

$$\mathsf{D}_{S_t^0}(A) = \frac{t^2}{\hbar^2}\,\mathsf{D}_S\left(q^0(t) - \frac{p^0(t)}{2m}\,t\right), \tag{4.6}$$

где $q^0(t) = (V_t^0)^* q V_t^0$, $p^0(t) = (V_t^0)^* p V_t^0$. Дифференцируя уравнения свободного движения (III.8.2) по x и (III.8.3) по v, получаем операторные уравнения, аналогичные уравнениям свободного движения в классической механике:

$$\begin{aligned} p^0(t) &= p, \\ q^0(t) &= q + \frac{p}{m}\,t. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Подставляя это в (4.6), получаем окончательно *неравенство для дисперсии любого несмещенного измерения M силы F*:

$$\mathsf{D}_F\{M\} \geqslant \frac{\hbar^2}{4t^2\mathsf{D}_S\left(q + \frac{p}{2m}\,t\right)}, \tag{4.8}$$

которое имеет место в предположении, что p и q имеют конечные вторые моменты относительно состояния S.

Предположим дополнительно, что *q и p некоррелированы относительно исходного состояния S*, т. е. при $t=0$

$$\langle q-\mathsf{E}_S(q),\ p-\mathsf{E}_S(p)\rangle_S=0. \tag{4.9}$$

Тогда неравенство (4.8) принимает вид

$$\mathsf{D}_F\{M\}\geqslant\frac{\hbar^2}{4t^2}\left[\mathsf{D}_S(q)+\frac{t^2}{4m^2}\mathsf{D}_S(p)\right]^{-1}. \tag{4.10}$$

Заметим, что в силу соотношения неопределенностей максимальное значение правой части равно $\frac{\hbar m}{2t^3}$ и достигается при $\mathsf{D}_S(p)=\frac{\hbar m}{t}$, $\mathsf{D}_S(q)=\frac{\hbar t}{4m}$. Таким образом, при наименее выгодных для экспериментатора исходных условиях

$$\mathsf{D}_F\{M\}\geqslant\frac{\hbar m}{2t^3}. \tag{4.11}$$

Приготовляя соответствующим образом начальное состояние, можно в принципе добиться измерения F со сколь угодно высокой точностью при фиксированном t. Чтобы это показать, рассмотрим наблюдаемые вида

$$B=\alpha\frac{2mq}{t^2}+\beta\frac{p}{t}\qquad(\alpha+\beta=1),$$

которые удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению с A:

$$[A,\ B]=iI.$$

Более точно, соответствующие унитарные группы удовлетворяют соотношению Вейля типа (III.4.1):

$$e^{iAt}e^{iBs}e^{-iAt}=e^{-ist}e^{iBs}.$$

Это легко следует из выражений для A и B, которые являются линейными комбинациями p и q, и соотношения Вейля — Сигала (III.3.2). Отсюда, как и в § III.4, вытекает, что наблюдаемая B задает ковариантное и, значит, несмещенное (с точностью до постоянной) измерение параметра F в семействе (4.4). Чтобы получить несмещенное измерение, следует вычесть из p и q их средние значения $\mathsf{E}_{S_t^0}(p)=\mathsf{E}_S(p)$, $\mathsf{E}_{S_t^0}(q)=\mathsf{E}_S(q)+\frac{t}{m}\mathsf{E}_S(p)$. Учитывая (4.7) и (4.9), получаем дисперсию

$$\mathsf{D}_{S_t^0}(B)=\mathsf{D}_S\left(\alpha\frac{2m\left(q+\frac{t}{m}p\right)}{t^2}+\beta\frac{p}{t}\right)=$$
$$=\frac{4m^2}{t^4}\mathsf{D}_S(q)\,\alpha^2+\frac{\mathsf{D}_S(p)}{t^2}(2\alpha+\beta)^2.$$

Минимум этой величины при условии $\alpha+\beta=1$ достигается при $\alpha=-\mathsf{D}_S(p)\left[\frac{4m^2}{t^2}\mathsf{D}_S(q)+\mathsf{D}_S(p)\right]^{-1}$, т. е. на несмещенной оценке

$$B_*=t^{-1}\left[\mathsf{D}_S(p)^{-1}+\frac{t^2}{4m^2}\mathsf{D}_S(q)^{-1}\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{p-\mathsf{E}_S(p)}{\mathsf{D}_S(p)}-\frac{t}{2m}\frac{q-\frac{p}{m}t-\mathsf{E}_S(q)}{\mathsf{D}_S(q)}\right],\qquad(4.12)$$

и равен

$$\mathsf{D}_{S_t^0}(B_*)=t^{-2}\left[\mathsf{D}_S(p)^{-1}+\frac{t^2}{4m^2}\mathsf{D}_S(q)^{-1}\right]^{-1}\equiv$$
$$\equiv\frac{\mathsf{D}_S(q)\cdot\mathsf{D}_S(p)}{t^2\left[\mathsf{D}_S(q)+\frac{t^2}{4m^2}\mathsf{D}_S(p)\right]}.\qquad(4.13)$$

Как и должно быть, эта величина удовлетворяет неравенству (4.10), причем равенство достигается, если S — состояние минимальной неопределенности.

Из (4.13) видно, что дисперсия измерения силы B_* стремится к нулю, если одна из величин $\mathsf{D}_S(p)$, $\mathsf{D}_S(q)$ стремится к нулю. Пусть $\mathsf{D}_S(p)\approx 0$, т. е. исходное состояние имеет почти точно определенный импульс $\mathsf{E}_S(p)$, тогда из (4.12) следует, что $B_*\approx\frac{p-\mathsf{E}_S(p)}{t}$. В этом случае наблюдаемая $\frac{p-\mathsf{E}_S(p)}{t}$ дает почти точное значение измеряемой силы, что, очевидно, согласуется с «полуклассическими» соображениями, основанными на законе сохранения импульса $F\cdot t=\Delta p$. Если же $\mathsf{D}_S(q)\approx 0$, то из (4.12) следует, что

$$B_*\approx\frac{2m}{t^2}\left(q-p\frac{t}{m}-\mathsf{E}_S(q)\right).\qquad(4.14)$$

С точки зрения классических аналогий смысл этого выражения также понятен: $q-p\frac{t}{m}$ есть значение координаты при $t=0$, которое привело бы к значению q в момент t при отсутствии силы. В квантовой механике $q-p\frac{t}{m}=V^0_{-t}q(V^0_{-t})^*$ имеет аналогичный смысл, однако характер измерительной процедуры, отвечающей наблюдаемым типа (4.14), (4.12) уже не очевиден, поскольку q и p являются несовместимыми наблюдаемыми.

Не затрагивая здесь вопроса о практической реализуемости, укажем принципиальную возможность измерения произвольной линейной комбинации координаты q и импульса p в квантовой механике. Устранив несущественный коэффициент, можно считать, что речь идет об измерении наблюдаемой вида $q\cos\tau+p\sin\tau$ $(0<\tau<2\pi)$. Из теории квантового осциллятора (§ III.10) известно, что

$$q\cos\tau+p\sin\tau=\tilde{V}^*_\tau q\tilde{V}_\tau, \tag{4.15}$$

где $\tilde{V}_\tau$ — унитарные операторы, описывающие динамику осциллятора с частотой $\omega=1$. Поэтому измерение наблюдаемой (4.15) в состоянии S эквивалентно измерению q в состоянии $\tilde{V}_\tau S\tilde{V}^*_\tau$. Таким образом, если в течение промежутка времени $[t,\ t+\tau]$ объект находится в подходящем квадратичном потенциальном поле, то распределение вероятностей его координаты в момент $t+\tau$ будет таким же, как распределение вероятностей наблюдаемой $q\cos\tau+p\sin\tau$ в момент t. (Если речь идет об исходной задаче измерения силы, то действие силы в промежутке $[t,\ t+\tau]$ должно быть каким-либо образом исключено — например, посредством экранирования или перевода движения в плоскость, перпендикулярную направлению силы.)

В заключение покажем, что *если исходное состояние S — гауссовское, то наблюдаемая* (4.12) *дает наилучшее несмещенное измерение, а величина* (4.13) — *нижнюю границу дисперсий в классе всех локально несмещенных измерений параметра силы F.*

Найдем симметричную логарифмическую производную L_F семейства $\{S_F\}$. Согласно предыдущему параграфу, достаточно это сделать для $F=0$. В силу (3.11)

$$L_0=\mathfrak{D}_0(A),$$

где $\mathfrak{D}_0$ — коммутационный оператор состояния S_t^0. Напомним, что $S_t^0 = (V_t^0)^* S V_t^0$. Из определений коммутационного оператора тогда вытекает, что

$$\mathfrak{D}_0(A) = V_t^0 \mathfrak{D}((V_t^0)^* A V_t^0)(V_t^0)^*,$$

где $\mathfrak{D}$ — коммутационный оператор исходного гауссовского состояния S. Используя выражение (4.5) для оператора A и формулы (V.6.11), находим

$$L_0 = t\left[\frac{p - \mathsf{E}_S(p)}{\mathsf{D}_S(p)} - \frac{t}{2m}\,\frac{q - \frac{p}{m}t - \mathsf{E}_S(q)}{\mathsf{D}_S(q)}\right],$$

так что $B_* = L_0/\mathsf{D}_0(L_0)$ и $\mathsf{D}_{S_t^0}(L_0)^{-1} = \mathsf{D}_0(L_0)^{-1} = \mathsf{D}_{S_t^0}(B_*)$. Неравенство (2.9) дает

$$\mathsf{D}_F\{M\} \geqslant t^{-2}\left[\mathsf{D}_S(p)^{-1} + \frac{t^2}{4m^2}\mathsf{D}_S(q)^{-1}\right]^{-1}$$

для любого локально несмещенного измерения M параметра F.

§ 5. Граница для матрицы ковариации измерения многомерного параметра, основанная на симметричной логарифмической производной

Рассмотрим семейство состояний $\{S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}\}$, зависящее от параметра $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$, пробегающего область Θ в n-мерном пространстве. Например, это может быть семейство гауссовских состояний $\{S_{\bar{P}, \bar{Q}}\}$ с двумерным параметром $[\bar{P}, \bar{Q}]$. Мы предположим, что выполнены следующие условия:

1) *семейство* $\{S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}\}$ *сильно дифференцируемо по* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *как функция со значениями в банаховом пространстве ядерных операторов;*

2) *существует некоторая постоянная* c *такая, что*

$$\left|\operatorname{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta \cdot X\right|^2 \leqslant c \cdot \operatorname{Tr} S_\theta X^2; \qquad X \in \mathfrak{B}_h(\mathscr{H}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Как и в случае одномерного параметра, при этих условиях существуют *симметричные логарифмические производные* L_θ^j; $j = 1, \ldots, n$, определяемые как элементы пространства $\mathscr{L}_h^2(S_\theta)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = S_\theta \circ L_\theta^j. \tag{5.1}$$

Нас будут интересовать измерения многомерного параметра $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$ в семействе состояний $\{S_\theta\}$. Как и в случае одномерного параметра, *мы ограничимся измерениями с конечными вторыми моментами, удовлетворяющими условию локальной несмещенности*

$$\int \hat{\theta}_j \frac{\partial \mu_\theta}{\partial \theta_k}(d^n\hat{\theta}) = \delta_{jk}; \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

где
$$\mu_\theta(B) = \operatorname{Tr} S_\theta M(B),$$
$$\frac{\partial \mu_\theta}{\partial \theta_k}(B) = \operatorname{Tr} \frac{\partial}{\partial \theta_k} S_\theta \cdot M(B), \quad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

В силу конечности вторых моментов, интегралы

$$X_M^j = \int \hat{\theta}_j M(d^n\hat{\theta})$$

определяют элементы пространства $\mathscr{L}_h^2(S_\theta)$. Рассуждая как в (2.7), получаем другую формулировку условия локальной несмещенности

$$\langle X_M^j, L_\theta^k \rangle_{S_\theta} = \delta_{jk}. \tag{5.2}$$

Введем *информационную матрицу*

$$\boldsymbol{J}_\theta = \left[\langle L_\theta^j, L_\theta^k \rangle_{S_\theta} \right],$$

которая является матрицей Грама системы $\{L_\theta^j\}$. *Мы предположим, что матрица $\boldsymbol{J}_\theta$ невырождена. Тогда для матрицы ковариации* (1.1) *любого локально несмещенного измерения имеет место многомерный аналог неравенства* (2.9):

$$\boldsymbol{B}_\theta\{M\} \geqslant \boldsymbol{J}_\theta^{-1}. \tag{5.3}$$

Это означает, что для любого вектора-строки $\boldsymbol{v} = [v_1, \ldots, v_n]$ выполняется

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}_\theta\{M\}\boldsymbol{v}^* \geqslant \boldsymbol{v}\boldsymbol{J}_\theta^{-1}\boldsymbol{v}^*,$$

где $\boldsymbol{v}^*$ — эрмитово сопряженный вектор-столбец. Так как обе матрицы вещественны, то, не ограничивая общности, можно считать компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ вещественными.

Доказательство опирается на следующий элементарный факт.

Лемма 5.1. *Пусть* $\{X^j\}$, $\{Y^j\}$, $j=1, \ldots, n$, — *биортогональные системы векторов в некотором гильбертовом пространстве, т. е.*

$$\langle X^j, Y^k\rangle = \delta_{jk},$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle$ — *скалярное произведение, и матрица Грама* $\mathbf{\Gamma}_Y = [\langle Y^j, Y^k\rangle]$ *невырождена. Тогда матрица Грама системы* $\{X^j\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{\Gamma}_X \geqslant \mathbf{\Gamma}_Y^{-1}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Вводя векторы $X = \sum_j u_j X^j$, $Y = \sum_k v_k Y_k$, имеем

$$\langle X, Y\rangle = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^*.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\boldsymbol{u}\mathbf{\Gamma}_X\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{v}\mathbf{\Gamma}_Y\boldsymbol{v}^* = \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle \geqslant (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^*)^2,$$

откуда, полагая $\boldsymbol{v} = \mathbf{\Gamma}_Y^{-1}\boldsymbol{u}$, получаем (5.4).

Для доказательства (5.3) прежде всего заметим, что

$$\boldsymbol{B}_\theta\{\boldsymbol{M}\} \geqslant \boldsymbol{B}, \tag{5.5}$$

где $\boldsymbol{B} = \left[\langle X_{\boldsymbol{M}}^j - \theta_j, X_{\boldsymbol{M}}^k - \theta_k\rangle_{S_\theta}\right]$ — матрица Грама системы $\left\{X_{\boldsymbol{M}}^j - \theta_j\right\}$. В самом деле, полагая в неравенстве (II.9.6) $f(\hat\theta) = \sum_{j=1}^n v_j(\hat\theta_j - \theta_j)$, имеем

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}_\theta\{\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{v}^* = \int\left|\sum_j v_j(\hat\theta_j - \theta_j)\right|^2 \mu_\theta(d^n\hat\theta) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j,k} v_j v_k \langle X_{\boldsymbol{M}}^j - \theta_j, X_{\boldsymbol{M}}^k - \theta_k\rangle_{S_\theta} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^*$$

для любого вектора $\boldsymbol{v} = [v_1, \ldots, v_n]$. Далее, замечая, что

$$\langle I, L_\theta^k\rangle_{S_\theta} = 0$$

аналогично (2.3), и учитывая (5.2), получаем

$$\langle X_M^j - \theta_j,\ L_\theta^k \rangle = \delta_{jk}. \tag{5.6}$$

Применяя доказанную лемму, имеем

$$\boldsymbol{B} \geqslant \boldsymbol{J}_\theta^{-1}.$$

Учитывая (5.5), получаем доказываемое неравенство (5.3).

Из этого неравенства сразу получается простая нижняя граница для среднеквадратичной погрешности $\Sigma_\theta\{M\} = \mathbf{Tr}\, \boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_\theta\{M\}$, где $\boldsymbol{G}$ — весовая матрица:

$$\Sigma_\theta\{M\} \geqslant \mathbf{Tr}\, \boldsymbol{G}\boldsymbol{J}_\theta^{-1} \tag{5.7}$$

Для двухпараметрического семейства гауссовских состояний $\{S_{\bar{P},\ \bar{Q}}\}$ с характеристической функцией (V.5.3) симметричные логарифмические производные даются формулами (V.6.10):

$$L^Q = \sigma_{\bar{Q}}^{-2}(Q - \bar{Q}), \quad L^P = \sigma_{\bar{P}}^{-2}(P - \bar{P}), \tag{5.8}$$

так что

$$\boldsymbol{J}_{\bar{P},\ \bar{Q}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{P}}^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{Q}}^{-2} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Матричное неравенство (5.3) дает два скалярных неравенства:

$$\mathsf{D}_P\{M\} \geqslant \sigma_P^2, \quad \mathsf{D}_Q\{M\} \geqslant \sigma_Q^2,$$

где

$$\mathsf{D}_P\{M\} = \int (y - \bar{P})^2 \mu_{\bar{P},\ \bar{Q}}(dx\, dy),$$

$$\mathsf{D}_Q\{M\} = \int (x - \bar{Q})^2 \mu_{\bar{P},\ \bar{Q}}(dx\, dy)$$

— маргинальные дисперсии измерения параметров $\bar{P}$ и $\bar{Q}$. Отсюда для любых весов g_P, g_Q

$$g_P \mathsf{D}_P\{M\} + g_Q \mathsf{D}_Q\{M\} \geqslant g_P \sigma_P^2 + g_Q \sigma_Q^2. \tag{5.10}$$

Мы увидим, однако, ниже, что эта граница является недостижимой, и получим лучшую, достижимую границу, которая учитывает невозможность точного совместного измерения наблюдаемых P и Q.

§ 6. Граница, основанная на правой логарифмической производной

В отличие от классической математической статистики, в некоммутативной теории существует несколько различных вариантов неравенства Рао — Крамера, использующих разные определения логарифмической производной. Предположим, как и в § 5, что *семейство* $\{S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}\}$ *сильно дифференцируемо по* $\theta_1, \ldots, \theta_n$, однако вместо условия 2) потребуем

2′) *существует некоторая постоянная с такая, что*

$$\left|\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta \cdot X\right|^2 \leqslant c \cdot \mathrm{Tr}\, S_\theta X X^*; \qquad X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}),\ j = 1, \ldots, n.$$

Это означает, что комплексно-линейный функционал

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j} E_\theta(X) = \mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta \cdot X$$

на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ продолжается до непрерывного функционала на комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2_+(S_\theta)$. По лемме Рисса — Фреше существуют элементы $\tilde{L}^j_\theta \in L^2_+(S_\theta)$ такие, что

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta X = \langle \tilde{L}^j_\theta,\ X\rangle^+_{S_\theta}, \qquad X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}),$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta = (\tilde{L}^j_\theta)^* S_\theta, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta = S_\theta \tilde{L}^j_\theta. \tag{6.1}$$

Операторы $\tilde{L}^j_\theta$ называются *правыми логарифмическими производными* семейства $\{S_\theta\}$. Отметим, что

$$\langle I,\ \tilde{L}^j_\theta\rangle^+_{S_\theta} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Введем *правую информационную матрицу*

$$\tilde{\mathbf{J}}_\theta = \left[\langle \tilde{L}^j_\theta,\ \tilde{L}^k_\theta\rangle^+_{S_\theta}\right]$$

и предположим, что она невырождена.

Рассмотрим измерение $M(d\theta_1 \ldots d\theta_n)$ с конечными вторыми моментами, удовлетворяющее условию локальной несмещенности. Аналогично соотношениям (5.6) получаем

$$\langle X^j_M - \theta_j,\ \tilde{L}^k_\theta\rangle^+_{S_\theta} = \delta_{jk}.$$

Отсюда, опираясь на лемму 5.1 и используя (II.9.7) вместо (II.9.6), получаем другое неравенство для матрицы *ковариации измерения:*

$$B_\theta\{M\} \geqslant \tilde{J}_\theta^{-1}. \tag{6.2}$$

Важно, однако, отметить, что здесь $\tilde{J}_\theta$ уже является, вообще говоря, комплексной эрмитовой матрицей, так что в равносильной записи соотношения (6.2):

$$vB_\theta\{M\}v^* \geqslant v\tilde{J}_\theta^{-1}v^* \tag{6.3}$$

ограничение только вещественными векторами v приводит к «менее информативному» неравенству, не учитывающему мнимую часть матрицы $\tilde{J}_\theta^{-1}$.

Прежде чем применить этот результат к оцениванию параметров в семействе гауссовских состояний $\{S_{\bar{P},\bar{Q}}\}$, найдем общее соотношение, связывающее симметричную и *правую логарифмические производные.*

В силу (5.1), (6.1) для любого ограниченного X выполняется

$$\langle L_\theta^j, X\rangle_{S_\theta} = \langle \tilde{L}_\theta^j, X\rangle_{S_\theta}^+. \tag{6.4}$$

Замечая, что согласно (II.8.13)

$$\langle Y, X\rangle_S^+ = \langle Y, X\rangle_S + \frac{i}{2}[Y, X]_S = \left\langle Y, \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)X\right\rangle_S, \tag{6.5}$$

получаем искомое соотношение

$$\left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)\tilde{L}_\theta^j = L_\theta^j. \tag{6.6}$$

Если оператор $\left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)$ невырожден, что в силу предложения II.10.1 выполняется, когда S_θ — точное состояние, то мы получаем

$$\tilde{L}_\theta^j = \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)^{-1} L_\theta^j. \tag{6.7}$$

Тогда

$$\tilde{J}_\theta = \left[\left\langle L_\theta^j, \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)^{-1} L_\theta^k\right\rangle_{S_\theta}\right]. \tag{6.8}$$

Фактически нужна матрица $\tilde{J}_\theta^{-1}$. Очень простое выражение для нее получается в следующем частном случае: *предположим, что подпространство* $\mathscr{L}_\theta$ *пространства*

$\mathscr{L}^2(S_\theta)$, *натянутое на симметричные логарифмические производные, инвариантно относительно оператора* $\mathfrak{D}_\theta$:

$$\mathfrak{D}_\theta(\mathscr{L}_\theta) \subset \mathscr{L}_\theta. \tag{6.9}$$

Тогда $\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)$ является эрмитовым оператором, для которого $\mathscr{L}_\theta$ — инвариантное подпространство. Поэтому можно считать, что $\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)$ действует в $\mathscr{L}_\theta$ и $\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)^{-1}$ в соотношении (6.8) есть обратный к этому оператору в $\mathscr{L}_\theta$. Тогда $\tilde{J}_\theta$ — матрица квадратичной формы оператора $\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)^{-1}$ в базисе $\{L_\theta^j\}$ и, как известно из линейной алгебры,

$$\tilde{J}_\theta^{-1} = J_\theta^{-1}\left[\left\langle L_\theta^j,\ \left(\mathrm{I}+\frac{i}{2}\mathfrak{D}_\theta\right)L_\theta^k\right\rangle_{S_\theta}\right]J_\theta^{-1},$$

где $J_\theta = [\langle L_\theta^j,\ L_\theta^k\rangle_{S_\theta}]$ — матрица Грама базиса $\{L_\theta^j\}$. Вводя вещественную кососимметричную матрицу

$$D_\theta = \left[\langle L_\theta^j,\ \mathfrak{D}L_\theta^k\rangle_{S_\theta}\right] = \left[[L_\theta^j,\ L_\theta^k]_{S_\theta}\right],$$

находим окончательно

$$\tilde{J}_\theta^{-1} = J_\theta^{-1}\left[J_\theta + \frac{i}{2}D_\theta\right]J_\theta^{-1} = J_\theta^{-1} + \frac{i}{2}J_\theta^{-1}D_\theta J_\theta^{-1}. \tag{6.10}$$

Обратимся к примеру гауссовского семейства $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$. Пользуясь формулами (6.6) и (V.6.11), можно найти

$$\begin{aligned} \tilde{L}^Q &= (4\sigma_P^2\sigma_Q^2-1)^{-1}\left[4\sigma_P^2(Q-\overline{Q})-2i(P-\overline{P})\right],\\ \tilde{L}^P &= (4\sigma_P^2\sigma_Q^2-1)^{-1}\left[4\sigma_Q^2(P-\overline{P})+2i(Q-\overline{Q})\right]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Эти соотношения имеют смысл, если $4\sigma_P^2\sigma_Q^2 \neq 1$, т. е. состояния $S_{\overline{P},\overline{Q}}$ не являются чистыми. Тогда, как следует из (V.5.10), все собственные значения оператора плотности $S_{\overline{P},\overline{Q}}$ положительны, т. е. состояния $S_{\overline{P},\overline{Q}}$ являются точными. Таким образом, условие $4\sigma_P^2\sigma_Q^2 \neq 1$ равносильно невырожденности оператора $1+\frac{i}{2}\mathfrak{D}_{\overline{P},\overline{Q}}$. Из (6.11) можно получить $\tilde{J}_{\overline{P},\overline{Q}}$, однако вычисления являются довольно трудоемкими. Заметим, однако, что подпространство $\mathscr{L}_{\overline{P},\overline{Q}}$, порожденное симметричными логарифмическими производными $L^Q = \sigma_Q^{-2}(Q-\bar{Q})$ и $L^P = \sigma_P^{-2}(P-\bar{P})$, совпадает с подпространством $\mathfrak{R}_1$ (см. § V.6) и поэтому инвариантно относительно коммутационного оператора $\mathfrak{D}_{\bar{P},\bar{Q}}$. Это также непосредственно следует из формул (V.6.11). Поэтому можно применить соотношение (6.10). Матрица $\boldsymbol{J}_{\bar{P},\bar{Q}}$ дается выражением (5.9); учитывая, что

$$[P, Q]_S = 1, \quad [Q, Q]_S = [P, P]_S = 0$$

в силу (V.4.10), получаем

$$\boldsymbol{D}_{\bar{P},\bar{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда, согласно (6.10),

$$\tilde{\boldsymbol{J}}^{-1}_{\bar{P},\bar{Q}} = \begin{bmatrix} \sigma_P^2 & i/2 \\ -i/2 & \sigma_Q^2 \end{bmatrix}.$$

Выбирая в качестве $\boldsymbol{v}$ в соотношении (6.3) комплексный вектор $[\sqrt{g_P}, i\sqrt{g_Q}]$, получаем новую границу для среднеквадратичного отклонения

$$g_P \mathsf{D}_P\{M\} + g_Q \mathsf{D}_Q\{M\} \geqslant g_P\sigma_P^2 + g_Q\sigma_Q^2 + \sqrt{g_P g_Q}, \tag{6.12}$$

где $\mathsf{D}_P\{M\}$, $\mathsf{D}_Q\{M\}$ — маргинальные дисперсии измерения $M(d\bar{P}\,d\bar{Q})$. Эта граница, очевидно, лучше, чем (5.10). Она совпадает с границей (III.7.14) и достигается на совместном каноническом измерении координаты и импульса

$$M(d\bar{P}\;d\bar{Q}) = |\bar{P}, \bar{Q})(\bar{Q}, \bar{P}|\frac{d\bar{P}\;d\bar{Q}}{2\pi}.$$

Напомним, что это измерение реализуется парой коммутирующих наблюдаемых:

$$\tilde{P} = P\otimes I_0 + I\otimes P_0, \quad \tilde{Q} = Q\otimes I_0 - I\otimes Q_0 \tag{6.13}$$

в пространстве $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$, где вспомогательная степень свободы P_0, Q_0 описывается основным состоянием $|0, 0; \frac{1}{2}\sqrt{g_P/g_Q})$. Характеристическая функция этого состояния имеет вид

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\sqrt{g_P/g_Q}\,x^2 + \sqrt{g_Q/g_P}\,y^2\right)\right].$$

Поскольку P_0, Q_0 имеют нулевые средние значения, это измерение является несмещенным; далее будет показано, что оно удовлетворяет условию локальной несмещенности. Следовательно, оно является *равномерно наилучшим локально несмещенным совместным измерением параметров* $\bar{P}$, $\bar{Q}$ *в гауссовском семействе* $\{S_{\bar{P},\bar{Q}}\}$.

Неравенства (5.3) и (6.2), основанные на разных определениях логарифмической производной, дают две существенно разные границы для среднеквадратичного отклонения. Именно, выше мы видели, что для гауссовского двухпараметрического семейства граница (6.2) лучше, чем (5.3). Покажем теперь, что *для любого однопараметрического семейства граница* (5.3) *предпочтительнее* (6.2). Достаточно показать, что всегда

$$\langle L_\theta,\ L_\theta\rangle_{S_\theta} \leqslant \langle \tilde{L}_\theta,\ \tilde{L}_\theta\rangle^+_{S_\theta}.$$

Для этого найдем матричное представление правой и симметричной логарифмической производных в базисе из собственных векторов $\{\psi_j\}$ оператора плотности S_θ. Умножая уравнения (5.1), (6.1) на $(\psi_j|$ и $|\psi_k)$, находим

$$(\psi_j \mid L_\theta\psi_k) = 2\,(s_j+s_k)^{-1}\left(\psi_j \,\middle|\, \frac{dS_\theta}{d\theta}\,\psi_k\right),$$

$$\left(\psi_j \,\middle|\, \tilde{L}_\theta\psi_k\right) = s_j^{-1}\left(\psi_j \,\middle|\, \frac{d}{d\theta}\,S_\theta\psi_k\right).$$

Отсюда

$$\langle L_\theta,\ L_\theta\rangle_{S_\theta} = 2\sum_{j,k}\frac{\left|\left(\psi_j \,\middle|\, \frac{d}{d\theta}\,S_\theta\psi_k\right)\right|^2}{s_j+s_k},$$

$$\langle \tilde{L}_\theta,\ \tilde{L}_\theta\rangle^+_{S_\theta} = \sum_{j,k} s_j^{-1}\left|\left(\psi_j \,\middle|\, \frac{d}{d\theta}\,S_\theta\psi_k\right)\right|^2 = \\ = \frac{1}{2}\sum_{j,k}(s_j^{-1}+s_k^{-1})\left|\left(\psi_j \,\middle|\, \frac{d}{d\theta}\,S_\theta\psi_k\right)\right|^2.$$

Так как $2\,(s_j+s_k)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}\,(s_j^{-1}+s_k^{-1})$, то $\langle L_\theta, L_\theta\rangle_{S_\theta} \leqslant \langle \tilde{L}_\theta, \tilde{L}_\theta\rangle^+_{S_\theta}$ и требуемое неравенство установлено.

Аналогично можно ввести левую логарифмическую производную. Соответствующая информационная матрица является комплексно сопряженной к $\tilde{J}_\theta$, так что результирующее неравенство для матрицы ковариации получается просто переходом к комплексно сопряженным величинам в (6.2).

В рассмотренном выше примере мы получили границу (6.12) для среднеквадратичного отклонения, искусственно подбирая вектор $\boldsymbol{v}$ в неравенстве (6.3). Можно, однако, получить из (6.2) и общую границу для $\Sigma_\theta\{M\}$ с произвольной весовой матрицей G. Заметим, что *)

$$\tilde{J}_\theta^{-1} = \operatorname{Re} \tilde{J}_\theta^{-1} + i \operatorname{Im} \tilde{J}_\theta^{-1}, \quad (\tilde{J}_\theta^{-1})^{\mathsf{T}} = \operatorname{Re} \tilde{J}_\theta^{-1} - i \operatorname{Im} \tilde{J}_\theta^{-1},$$

где $\operatorname{Re} \tilde{J}_\theta^{-1}$ — вещественная симметричная, $\operatorname{Im} \tilde{J}_\theta^{-1}$ — вещественная кососимметричная матрицы. Так как $B_\theta\{M\}$ вещественна и симметрична, то из (6.2) вытекает

$$B_\theta\{M\} \geqslant \operatorname{Re} \tilde{J}_\theta^{-1} \pm i \operatorname{Im} \tilde{J}_\theta^{-1}.$$

Полагая $X = B_\theta\{M\} - \operatorname{Re} \tilde{J}_\theta^{-1}$, имеем

$$\Sigma_\theta\{M\} \geqslant \operatorname{Tr} G(\operatorname{Re} \tilde{J}_\theta^{-1}) + \min\{\operatorname{Tr} GX\colon X \geqslant \pm i \operatorname{Im} \tilde{J}_\theta^{-1}\}. \qquad (6.14)$$

Чтобы получить явное выражение для минимума, воспользуемся следующим приемом. Для любой матрицы M, которая подобна диагональной,

$$M = T \begin{bmatrix} \mu_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix} T^{-1},$$

можно определить функции от M; положим, в частности,

$$\operatorname{abs} M = T \begin{bmatrix} |\mu_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\mu_n| \end{bmatrix} T^{-1}.$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, $\operatorname{abs} M \neq |M| \equiv \sqrt{M^* M}$; если же M эрмитова, то $\operatorname{abs} M = |M|$.

Диагонализуемым является произведение эрмитовых матриц GR, из которых одна, например G, строго

*) Значок $^{\mathsf{T}}$ обозначает транспонирование матрицы.

положительно определена. В самом деле, $GR = \sqrt{G}(\sqrt{G}R\sqrt{G})\sqrt{G}^{-1}$, так что GR подобна эрмитовой матрице $\sqrt{G}R\sqrt{G}$, которая в свою очередь подобна диагональной. Отметим, что

$$\operatorname{abs}(GR) = \sqrt{G}\,|\sqrt{G}\,R\,\sqrt{G}\,|\,\sqrt{G}^{-1}. \qquad (6.15)$$

Лемма 6.1. *Пусть R — эрмитова матрица; тогда*

$$\min\{\mathrm{Tr}\,GX:\ X \geqslant \pm R\} = \mathrm{Tr}\,\operatorname{abs}(GR),$$

причем минимум достигается для $X = G^{-1}\operatorname{abs}(GR)$.

Доказательство. Так как $X \geqslant \pm R$, то $\sqrt{G}X\sqrt{G} \geqslant \geqslant \sqrt{G}R\sqrt{G}$ и $e^*\sqrt{G}\,X\sqrt{G}\,e \geqslant |e^*\sqrt{G}\,R\sqrt{G}\,e|$ для любого вектора-столбца e. Пусть $\{e_j\}$ — базис из собственных векторов эрмитовой матрицы $\sqrt{G}\,R\sqrt{G}$, а $\{\mu_j\}$ — ее собственные значения. Тогда

$$\mathrm{Tr}\,GX = \mathrm{Tr}\,\sqrt{C}\,X\sqrt{G} = \sum_j e_j^*\sqrt{G}\,X\sqrt{G}\,e_j \geqslant \sum_j |\mu_j| =$$
$$= \mathrm{Tr}\,|\sqrt{G}\,R\,\sqrt{G}\,| = \mathrm{Tr}\,\operatorname{abs} GR.$$

Подстановка $X = G^{-1}\operatorname{abs} GR$, очевидно, дает нижнюю границу, и надо проверить только, что $G^{-1}\operatorname{abs} GR \geqslant \pm R$. Учитывая (6.15), перепишем левую часть в виде $\sqrt{G}^{-1}|\sqrt{G}\,R\sqrt{G}\,|\sqrt{G}^{-1}$. Тогда доказываемое неравенство сводится к неравенству $|X| \geqslant \pm X$ для эрмитовой матрицы $X = \sqrt{G}\,R\sqrt{G}$, которое вытекает из скалярного неравенства $|x| \geqslant \pm x$ и определения функций эрмитовой матрицы (см. (II 3.9)).

Из (6.14) и доказанной леммы вытекает искомое неравенство для среднеквадратичного отклонения

$$\Sigma_\theta\{M\} \geqslant \mathrm{Tr}\,G\,\mathrm{Re}\,\tilde{J}_\theta^{-1} + \mathrm{Tr}\,\operatorname{abs}(iG\,\mathrm{Im}\,\tilde{J}_\theta^{-1}). \qquad (6.16)$$

В случае (6.9) из (6.10) получаем $\mathrm{Re}\,\tilde{J}_\theta^{-1} = J_\theta^{-1}$, $\mathrm{Im}\,\tilde{J}_\theta^{-1} = = \frac{1}{2}J_\theta^{-1}D_\theta J_\theta^{-1}$, так что

$$\Sigma_\theta\{M\} \geqslant \mathrm{Tr}\,G J_\theta^{-1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\operatorname{abs}(iGJ_\theta^{-1}D_\theta J_\theta^{-1}). \qquad (6.17)$$

Предоставляем читателю вновь получить отсюда границу (6.12) для гауссовского семейства $\{S_{\bar{P},\bar{Q}}\}$.

§ 7. Общая граница для среднеквадратичного отклонения

Выше были получены две существенно различные границы для среднеквадратичного отклонения. В этом разделе мы постараемся раскрыть механизм ситуации и получим общее неравенство, из которого эти границы вытекают как частные случаи.

Рассмотрим семейство состояний $\{S_\theta\}$, где $\theta=[\theta_1, \ldots, \theta_n]$ — многомерный параметр. Мы будем предполагать, что это семейство удовлетворяет условиям 1), 2) из § 5. Все наши рассмотрения будут носить локальный характер, т. е. относиться к фиксированной точке θ_0. Поэтому мы условимся всюду опускать индекс θ_0; например, будем писать S вместо S_{θ_0}, будем также писать $\langle\cdot, \cdot\rangle_S$ вместо $\langle\cdot, \cdot\rangle_{S_{\theta_0}}$ и т. п. В частности, симметричные логарифмические производные в точке θ_0 будут обозначаться L_j; $j=1, \ldots, n$.

Мы будем рассматривать измерения $M(d\theta_1\ldots d\theta_n)$ параметра θ с конечным вторым моментом относительно состояния S, удовлетворяющие условию локальной несмещенности.

Полагая

$$X_j=\int(\hat\theta_j-\theta_{0j})\,M\left(d\hat\theta_1\ldots d\hat\theta_n\right)\equiv X^j_M-\theta_{0j}, \tag{7.1}$$

запишем условие локальной несмещенности в виде (5.6):

$$\langle L_j, X_k\rangle_S=\delta_{jk}; \qquad j, k=1, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Мы будем существенно использовать одно общее неравенство для измерений с конечными вторыми моментами. Пусть $\boldsymbol{B}\{M\}=[b_{jk}\{M\}]$ — матрица ковариаций такого измерения. Тогда

$$\boldsymbol{B}\{M\}\geqslant\left[\langle X_j, X_k\rangle_S^{\pm}\right]\equiv[\langle X_j, X_k\rangle_S]\pm\frac{i}{2}[[X_j, X_k]_S]. \tag{7.3}$$

Это неравенство вытекает из (II.9.7), если положить $f(\theta)=\sum_j c_j\theta_j$, где c_j — произвольные комплексные числа.

Положим

$$\varkappa_{jk}=b_{jk}\{M\}-\langle X_j, X_k\rangle_S. \tag{7.4}$$

Тогда неравенство (7.3) примет вид

$$[\varkappa_{jk}] \geqslant \pm \frac{i}{2}[[X_j,\ X_k]_S]. \tag{7.5}$$

Среднеквадратичное отклонение в этих обозначениях равно

$$\Sigma\{M\} \equiv \sum_{j,k} g_{jk} b_{jk}\{M\} = \sum_{j,k} g_{jk}[\varkappa_{jk} + \langle X_j,\ X_k\rangle_S]. \tag{7.6}$$

Характеризующие измерение переменные $X_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$ и вещественная симметричная матрица $\mathbf{K} = [\varkappa_{jk}]$ подчинены двум ограничениям (7.2) и (7.5). *Мы получим нижнюю границу для среднеквадратичного отклонения, найдя минимум выражения* (7.6) *по всевозможным* X_j; $j = 1, \ldots, n$, *и* $\mathbf{K} = [\varkappa_{jk}]$, *удовлетворяющим ограничениям* (7.2), (7.5). Эта граница будет достижимой, если минимизирующие ее значения X_j^*; $j = 1, \ldots, n$, $[\varkappa_{jn}^*]$ соответствуют некоторому измерению по формулам (7.1), (7.4).

Наши дальнейшие рассуждения опираются на следующую лемму.

Лемма 7.1. *Элементы* $X_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$; $j = 1, \ldots, n$, *и симметричная вещественная матрица* $[\varkappa_{jk}]$ *удовлетворяют условию* (7.5) *тогда и только тогда, когда существуют элементы* $Y_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$; $j = 1, \ldots, n$, *и симметричный*) оператор* $\mathfrak{F}$ *в* $\mathscr{L}_h^2(S)$ *такие, что*

1) $X_j = \mathfrak{F} Y_j$; $j = 1, \ldots, n$;

2) $\varkappa_{jk} = \langle Y_j,\ \mathfrak{F}(I - \mathfrak{F}) Y_k\rangle_S$; $j, k = 1, \ldots, n$;

3) $\mathfrak{F} \geqslant \mathfrak{F}\left(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)\mathfrak{F}$ *в* $\mathscr{L}^2(S)$, *где* $\mathfrak{F}$ — *комплексно-линейное продолжение исходного оператора из* $\mathscr{L}_h^2(S)$ *в* $\mathscr{L}^2(S)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathscr{L}$ — подпространство $\mathscr{L}_h^2(S)$, порождаемое элементами X_j; $j = 1, \ldots, n$. Введем симметричный оператор $\mathfrak{K}$ в $\mathscr{L}$

*) Всюду здесь имеются в виду ограниченные симметричные операторы в вещественном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_h^2(S)$. Всякий такой оператор $\mathfrak{A}$ продолжается до эрмитова оператора в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2(S)$ по формуле $\mathfrak{A}(X_1 + iX_2) = \mathfrak{A}X_1 + i\mathfrak{A}X_2$; $X_1, X_2 \in \mathscr{L}_h^2(S)$.

по формуле

$$\langle X_j,\ \mathfrak{K}X_k\rangle_S = \varkappa_{jk}.$$

Тогда неравенство (7.4) можно записать в форме

$$\langle Y,\ \mathfrak{K}Y\rangle_S \geqslant \pm \frac{i}{2}\langle Y, \mathfrak{D}Y\rangle_S, \qquad Y \in \mathscr{L} \oplus i\mathscr{L}. \tag{7.7}$$

Определим симметричный оператор $\mathfrak{F}$ в $\mathscr{L}_h^2(S)$, полагая

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} (\mathrm{I} + \mathfrak{K})^{-1} & \text{на } \mathscr{L}, \\ 0 & \text{на } \mathscr{L}_h^2(S) \ominus \mathscr{L}. \end{cases}$$

Полагая $Y_j = (I + \mathfrak{K})X_j$, имеем $X_j = \mathfrak{F}Y_j$ и

$$\varkappa_{jk} = \langle X_j,\ \mathfrak{K}X_k\rangle_S = \langle Y_j,\ \mathfrak{F}\mathfrak{K}\mathfrak{F}Y_k\rangle_S = \langle Y_j,\ \mathfrak{F}(I - \mathfrak{F})Y_k\rangle_S,$$

так что условия 1), 2) выполнены и остается проверить 3).

Учитывая, что для построенного выше оператора $\mathfrak{F}$ вектор $\mathfrak{F}X$, $X \in \mathscr{L}_h^2(S)$, всегда лежит в $\mathscr{L}$, подставим в (7.7) $Y = \mathfrak{F}X$, $X \in \mathscr{L}^2(S)$. Используя получающееся неравенство, имеем

$$\left\langle X,\ \mathfrak{F}\left(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)\mathfrak{F}X\right\rangle_S \leqslant \langle X,\ \mathfrak{F}(I + \mathfrak{K})\mathfrak{F}X\rangle_S = \langle X,\ \mathfrak{F}X\rangle_S,$$

что и требовалось.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ и Y_j; $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям леммы. Соотношение (7.5), которое надо доказать, запишется в виде

$$[\langle Y_j,\ \mathfrak{F}(I - \mathfrak{F})Y_k\rangle_S] \geqslant \pm \frac{i}{2}[[\mathfrak{F}Y_j,\ \mathfrak{F}Y_k]_S] = \\ = \pm \frac{i}{2}[\langle Y_j,\ \mathfrak{F}\mathfrak{D}\mathfrak{F}Y_k\rangle_S].$$

Достаточно доказать, что

$$\mathfrak{F}(I - \mathfrak{F}) \geqslant \pm \frac{i}{2}\mathfrak{F}\mathfrak{D}\mathfrak{F},$$

но это равносильно условию 3). Лемма доказана.

Подставляя теперь соотношения 1), 2) в (7.6), получаем

$$\Sigma\{M\} = \sum_{j,k} g_{jk}\langle Y_j,\ \mathfrak{F}Y_k\rangle_S. \tag{7.8}$$

Остается минимизировать это выражение по всем $Y_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$; $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющим условию

$$\langle L_j,\ \mathfrak{F}Y_k\rangle = \delta_{jk}, \tag{7.9}$$

которое равносильно условию локальной несмещенности, и по всем симметричным $\mathfrak{F}$ в $\mathcal{L}_h^2(S)$, удовлетворяющим условию 3).

Заметим, что оператор $\mathfrak{F}$ положителен, точнее,

$$0 \leqslant \mathfrak{F} \leqslant I. \tag{7.10}$$

В самом деле, складывая соотношение 3), отвечающее знаку $+$, с соотношением, отвечающим знаку $-$, получаем $\mathfrak{F} \geqslant \mathfrak{F}^2$ или $\mathfrak{F}(I-\mathfrak{F}) \geqslant 0$, что равносильно (7.10). Поэтому симметричная билинейная форма $\langle X, \mathfrak{F}Y\rangle_S$ на $\mathcal{L}_h^2(S)$ является положительно определенной и определяет псевдоскалярное произведение (т. е. произведение, скалярный квадрат которого может обращаться в нуль для ненулевого вектора X).

Найдем сначала минимум выражения (7.8) по всем Y_j; $j=1, \ldots, n$, удовлетворяющим условию (7.9). Прежде всего заметим, что для данного $\mathfrak{F}$ хотя бы один набор Y_j; $j=1, \ldots, n$, удовлетворяющий (7.9), существует тогда и только тогда, когда матрица

$$\boldsymbol{F} = [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S]$$

невырождена; это есть просто необходимое и достаточное условие линейной независимости векторов L_j; $j=1, \ldots, n$, относительно псевдоскалярного произведения $\langle X, \mathfrak{F}Y\rangle_S$. Поэтому мы должны предположить, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет этому условию. Тогда по лемме 5.1

$$[\langle Y_j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S] \geqslant [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S]^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1},$$

причем равенство достигается при

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}^{-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Sigma\{M\} \geqslant \inf \operatorname{Tr} \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{-1}, \tag{7.11}$$

где нижняя грань берется по симметричным операторам $\mathfrak{F}$ в $\mathcal{L}_h^2(S)$, удовлетворяющим условию 3) *леммы* 7.1.

Если эта нижняя грань достигается на операторе $\mathfrak{F}_*$, то соответствующие оптимальные векторы X_j^*; $j=1, \ldots$

..., n, и матрица $\mathbf{K}_* = [\varkappa^*_{jk}]$ в (7.6) даются выражениями

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{bmatrix} = F_*^{-1} \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_* L_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}_* L_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_* = F_*^{-1} [\langle L_j, \mathfrak{F}_* (I - \mathfrak{F}_*) L_k \rangle_S] F_*^{-1}, \tag{7.12}$$

где $F_* = [\langle L_j, \mathfrak{F}_* L_k \rangle_S]$. Ниже мы сможем найти оптимальный оператор $\mathfrak{F}_*$ в одном частном случае, а сейчас выясним, в каком отношении к неравенству (7.11) находятся границы (5.7) и (6.16).

Из второго неравенства (7.10) вытекает, что

$$F = [\langle L_j, \mathfrak{F} L_k \rangle_S] \leqslant [\langle L_j, L_k \rangle_S] = J.$$

Отсюда $F^{-1} \geqslant J^{-1}$ и мы получаем неравенство (5.7), отвечающее симметричной логарифмической производной.

Чтобы получить неравенство (6.16), заметим, что условие 3) леммы 7.1 может быть записано в виде

$$0 \leqslant \left(I \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}\right) \mathfrak{F} \left(\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}\right) \leqslant \left(\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}\right). \tag{7.13}$$

В самом деле, умножая неравенство 3) справа и слева на $\sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}}$, получаем

$$\left(\sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}}\, \mathfrak{F} \sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}}\right)^2 \leqslant \sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}}\, \mathfrak{F} \sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}},$$

откуда $0 \leqslant \sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}}\, \mathfrak{F} \sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}} \leqslant \mathrm{I}$. Вновь умножая справа и слева на $\sqrt{\mathrm{I} \pm \frac{i}{2} \mathfrak{D}}$, получаем (7.12).

Вспоминая формулу (6.5), имеем

$$F = \left[\left\langle \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2} \mathfrak{D}\right) \tilde{L}_j, \mathfrak{F} \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2} \mathfrak{D}\right) \tilde{L}_k \right\rangle_S\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left[\left\langle \tilde{L}_j, \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2} \mathfrak{D}\right) \tilde{L}_k \right\rangle_S\right] = \tilde{J},$$

так что $F^{-1} \geqslant \tilde{J}^{-1}$, и мы получаем неравенство, отвечающее правой логарифмической производной.

Покажем, что *в случае, когда пространство $\mathscr{L}$, порожденное симметричными логарифмическими производными L_j; $j = 1, \ldots, n$, инвариантно относительно коммутационного* *оператора $\mathfrak{D}$ состояния S, неравенство* (7.11) *совпадает с границей* (6.17). Для этого мы докажем утверждение, которое понадобится и в дальнейшем.

Предложение 7.1. *Пусть $\mathfrak{M}$-замкнутое инвариантное подпространство оператора $\mathfrak{D}$, содержащее симметричные логарифмические производные L_j; $j=1, \ldots, n$. Тогда нижняя грань в* (7.11) *не изменится, если считать операторы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ действующими не в $\mathscr{L}_h^2(S)$, а в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что всякому оператору $\mathfrak{F}$, удовлетворяющему условию 3) леммы 7.1, отвечает оператор $\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}$ в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}\left(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}\right)\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}, \tag{7.14}$$

где $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$ — ограничение оператора $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{M}$ (т. е. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}} = E\mathfrak{D}E$, где E — проектор на $\mathfrak{M}$), и такой, что

$$\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S = \langle L_j, \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}L_k\rangle_S, \tag{7.15}$$

и, обратно, такому $\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}$ соответствует $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3), которое нам удобно записать в виде (7.14). Пусть E — проектор на $\mathfrak{M}$; тогда E коммутирует с $\mathfrak{D}$. Умножая (7.14) справа и слева на E и полагая $\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} = E\mathfrak{F}E$, получаем

$$0 \leqslant \left(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}\right)\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}\left(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}\right) \leqslant I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}, \tag{7.16}$$

что равносильно (7.14). Условие (7.15) при этом выполняется, так как $EL_j = L_j$; $j=1, \ldots, n$.

Обратно, если $\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}$ — оператор в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию (7.14), которое можно записать в виде (7.16), то, продолжая его нулем на ортогональное дополнение к $\mathfrak{M}$, получаем оператор $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий всем необходимым условиям.

Если теперь $\mathscr{L}$ является инвариантным подпространством $\mathfrak{D}$, то можно считать, что оператор $\mathfrak{F}$ действует в $\mathscr{L}$. В базисе L_j; $j=1, \ldots, n$, операторам $\mathfrak{F}$, $I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}$ отвечают матрицы $\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{J}^{-1}\left(\boldsymbol{J} \pm \frac{i}{2}\boldsymbol{D}\right)$, поэтому условие (7.14) в матричной форме принимает вид

$$FJ^{-1}\left(J\pm\frac{i}{2}D\right)J^{-1}F\leqslant F,$$

или, учитывая невырожденность матрицы F,

$$F^{-1}\geqslant J^{-1}\pm\frac{i}{2}J^{-1}DJ^{-1}.$$

Тогда (7.11) равносильно неравенству

$$\sum\{M\}\geqslant\min\left\{\mathrm{Tr}\,GF^{-1}:\ F^{-1}\ \text{вещественная симметричная и}\ F^{-1}\geqslant J^{-1}\pm\frac{i}{2}J^{-1}DJ^{-1}\right\}.$$

Учитывая лемму 6.1, получаем, что правая часть совпадает с границей (6.17). Оптимальная матрица F_* дается формулой

$$F_*^{-1}=J^{-1}+\frac{1}{2}G^{-1}\,\mathrm{abs}\,(iGJ^{-1}DJ^{-1}).$$

Используя (7.12) и учитывая, что

$$[\mathfrak{F}_*L_1,\ \ldots,\ \mathfrak{F}_*L_n]=[L_1,\ \ldots,\ L_n]J^{-1}F_*,$$

получаем

$$\begin{bmatrix}X_1^*\\ \vdots\\ X_n^*\end{bmatrix}=J^{-1}\begin{bmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{K}_*=\frac{1}{2}G^{-1}\,\mathrm{abs}\,(iGJ^{-1}DJ^{-1}). \tag{7.17}$$

Если найдется измерение $M_*(d\theta_1\ \ldots\ d\theta_n)$, отвечающее таким X_j^*; $j=1,\ \ldots,\ n$, и $\mathbf{K}_*=[\varkappa_{jk}^*]$ по формулам (7.1) и (7.4), то оно является наилучшим локально несмещенным измерением параметра θ в точке θ_0. Такая ситуация имеет место в гауссовском случае, к рассмотрению которого мы переходим.

§ 8. Канонические измерения

В примерах из §§ 5, 6 мы нашли наилучшие несмещенные измерения параметров среднего значения гауссовского состояния в случае одной степени свободы. В однопараметрическом случае для этого использовалось неравенство (2.9), основанное на симметричной логарифмической производной, а в двухпараметрическом — неравенство

(6.2), основанное на правой логарифмической производной. Общим в обоих случаях является то, что наблюдаемые, определяющие наиболее точное измерение, являются линейными функциями канонических наблюдаемых P, Q.

Теперь нашей задачей будет обобщение этих результатов на произвольные гауссовские состояния для любого конечного числа степеней свободы. Мы покажем, что в общем случае равномерно наилучшее несмещенное измерение параметров среднего значения гауссовского состояния находится в классе канонических измерений, который будет описан в этом параграфе. Грубо говоря, канонические измерения соответствуют линейным функциям канонических наблюдаемых, однако с учетом возможной некоммутативности компонент, как в (6.13). С этим существенным дополнением теорему, которую мы докажем в § 9, можно рассматривать как некоммутативный аналог известного результата *математической статистики*, утверждающего, что наилучшие несмещенные оценки параметров среднего значения гауссовского распределения являются линейными функциями от наблюдений.

Пусть (Z, Δ) — симплектическое пространство и $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонических коммутационных соотношений в $\mathcal{H}$. Измерение $M(d\theta_1 \dots d\theta_n)$ параметра $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]$ назовем *каноническим*, если для любого состояния S в $\mathcal{H}$ с конечными вторыми моментами

1) измерение M имеет конечные вторые моменты, так что определены величины

$$\theta_{0j} = \int \theta_j \mu_S(d\theta_1 \dots d\theta_n);$$
$$b_{jk} = \int (\theta_j - \theta_{0j})(\theta_k - \theta_{0k}) \mu_S(d\theta_1 \dots d\theta_n); \qquad j, \ k = 1, \dots, n;$$

2) элементы $X_M^j = \int \theta_j M(d\theta_1 \dots d\theta_n)$ из $\mathcal{L}_h^2(S)$ лежат в подпространстве канонических наблюдаемых $\mathfrak{R}$, так что

$$X_M^j = R(z_j); \qquad j = 1, \dots, n;$$

3) числа $\varkappa_{jk} = b_{jk} - \alpha(z_j, z_k)$, где α — корреляционная функция состояния S, не зависят от выбора S.

Из общего неравенства (7.5) тогда вытекает, что

$$[\varkappa_{jk}] \geqslant \pm \frac{i}{2}[\Delta(z_j, z_k)]. \tag{8.1}$$

Набор элементов $z_1, \ldots, z_n$ и симметричная матрица чисел $[\varkappa_{jk}]$ называются параметрами канонического измерения.

Предложение 8.1. *Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — произвольные элементы из Z, $[\varkappa_{jk}]$ — симметричная матрица, удовлетворяющая условию* (8.1). *Тогда существует каноническое измерение с параметрами $z_1, \ldots, z_n$; $[\varkappa_{jk}]$.*

Мы дадим доказательство при упрощающем предположении, что $z_1, \ldots, z_n$ образуют базис в Z.

Доказательство. Помимо представления $z \to V(z)$ канонических коммутационных соотношений в пространстве $\mathscr{H}$, рассмотрим представление $z \to V_0(z)$ в пространстве $\mathscr{H}_0$, отвечающее кососимметричной форме $\Delta_0(z, z') = -\Delta(z, z')$, так что

$$V_0(z) V_0(z') = e^{-\frac{i}{2}\Delta(z, z')} V_0(z+z'). \tag{8.2}$$

Канонические наблюдаемые $R_0(z)$ в $\mathscr{H}_0$ удовлетворяют соотношению

$$[R_0(z),\ R_0(z')] = i\Delta(z,\ z')\, I_0.$$

Рассмотрим семейство операторов $\tilde{V}(z) = V(z) \otimes V_0(z)$; $z \in Z$, в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$. В силу (V.2.1) и (8.2) оно является коммутирующим, так что $z \to \tilde{V}(z)$ является унитарным представлением аддитивной группы Z. Применяя теорему Стоуна, получаем

$$\tilde{V}(z) = e^{i\tilde{R}(z)}, \tag{8.3}$$

где $\tilde{R}(z)$ — самосопряженное расширение оператора

$$R(z) \otimes I_0 + I \otimes R_0(z).$$

Так как $\{\tilde{V}(z);\ z \in Z\}$ — коммутирующее семейство, то операторы

$$\tilde{R}(z_j) = R(z_j) \otimes I_0 + I \otimes R_0(z_j); \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8.4}$$

коммутируют и имеют совместную спектральную меру $E(d\theta_1 \ldots d\theta_n)$. Согласно (8.3)

$$\tilde{V}\left(\sum_j t_j z_j\right) = \int \exp\left(i \sum_j t_j \theta_j\right) E(d\theta_1 \ldots d\theta_n). \tag{8.5}$$

Определим в Z билинейную симметричную форму $\varkappa(\cdot, \cdot)$, полагая $\varkappa(z_j, z_k) = \varkappa_{jk}$ (здесь мы используем упрощающее предположение). Из условия (8.1) вытекает, что форма $\varkappa$ удовлетворяет условию (V.4.14). Поэтому, согласно теореме V.5.1, $\varkappa$ является корреляционной функцией гауссовского состояния S_0 в $\mathscr{H}_0$ с характеристической функцией

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\varkappa(z, z)\right].$$

Для любого состояния S в $\mathscr{H}$ формула

$$\mu^{E}_{S\otimes S_0}(B) \equiv \operatorname{Tr} S\otimes S_0 E(B), \qquad B\in\mathscr{A}(\Theta),$$

определяет распределение вероятностей на Θ, причем отображение $S\to\mu^{E}_{S\otimes S_0}$ является, очевидно, аффинным. Согласно теореме II.2.1, существует измерение $M(d\theta_1\ldots d\theta_n)$ в $\mathscr{H}$ такое, что

$$\mu_S(B) = \mu^{E}_{S\otimes S_0}(B), \qquad B\in\mathscr{A}(\Theta), \tag{8.6}$$

где $\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B)$ — распределение вероятностей M относительно состояния S. Другими словами, M — это измерение, реализацией которого является описанная выше тройка $(\mathscr{H}_0, S_0, E)$. Покажем, что M является каноническим измерением с параметрами $z_1, \ldots, z_n$; $[\varkappa_{jk}]$.

Введем характеристическую функцию

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \int \exp i\left(\sum_j t_j\theta_j\right)\mu_S(d\theta_1\ldots d\theta_n)$$

распределения вероятностей μ_S. Как известно из теории вероятностей, моменты распределения μ_S связаны с производными φ, а именно

$$b_{jk} = -\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_j\,\partial t_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right]\Bigg|_{t_j=0}. \tag{8.7}$$

В силу (8.5)

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \operatorname{Tr} S\otimes S_0\tilde{V}\left(\sum_j t_j z_j\right) = \operatorname{Tr} SV\left(\sum_j t_j z_j\right)\cdot\operatorname{Tr} S_0\tilde{V}_0\left(\sum_j t_j z_j\right).$$

В правой части стоит произведение характеристических функций состояний с конечными вторыми моментами. Учитывая (8.7) и аналогичную формулу для корреляционной функции квантового состояния, вытекающую из (V.4.7), получим $b_{jk} = \alpha(z_j, z_k) + \varkappa_{jk}$, так как

$$\operatorname{Tr} S_0 V\left(\sum_j t_j z_j\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k} t_j t_k \varkappa_{jk}\right).$$

Остается показать, что $\int \theta_j M(d\theta_1 \ldots d\theta_n) = R(z_j)$; $j = 1, \ldots, n$. В силу линейности соотношения (8.6) по S получаем

$$\operatorname{Tr} TM(B) = \operatorname{Tr}(T \otimes S_0) E(B)$$

для любого ядерного оператора T. Полагая $T = YS$, где Y — ограниченный оператор, S — оператор плотности, находим

$$\langle M(B), Y\rangle_S = \langle E(B), Y \otimes I\rangle_{S \otimes S_0}.$$

Отсюда для любой простой функции $f(\cdot)$

$$\left\langle \int f(\theta) M(d\theta), Y\right\rangle_S = \left\langle \int f(\theta) E(d\theta), Y \otimes I\right\rangle_{S \otimes S_0}.$$

Переходя к пределу в среднеквадратичном, получаем

$$\langle X_M^j, Y\rangle_S = \left\langle \int \theta_j E(d\theta), Y \otimes I\right\rangle_{S \otimes S_0} =$$
$$= \langle \tilde{R}(z_j), Y \otimes I\rangle_{S \otimes S_0} = \langle R(z_j), Y\rangle_S + \langle R_0(z_j), I\rangle_{S_0} =$$
$$= \langle R(z_j), Y\rangle_S,$$

так как S_0 имеет нулевое среднее. Поскольку это выполняется для всех ограниченных Y, имеем $X_M^j = R(z_j)$ в $\mathscr{L}_h^2(S)$.

Вернемся к случаю одной степени свободы P, Q. Очевидно, что измерение наблюдаемой $Q = \int \theta E(d\theta)$ является каноническим измерением с параметрами

$$X_E^Q = Q, \quad \varkappa_{QQ} = 0.$$

В данном случае вектор X_E^Q не образует базис в двумерном пространстве канонических наблюдаемых, поэтому конструкция предложения 8.1 непосредственно неприменима. Однако измерение Q можно рассматривать как «предельный случай» измерений

$$Q \otimes I_0 + I \otimes Q_0,$$

где вспомогательная степень свободы описывается состояниями S_0 с $\mathsf{D}_{S_0}(Q_0) \to 0$.

Совместное измерение (6.13) является каноническим измерением с параметрами

$$X_M^P = P, \quad X_M^Q = Q;$$

$$\varkappa_{PP} = \frac{1}{2}\sqrt{g_P/g_Q}, \quad \varkappa_{QQ} = \frac{1}{2}\sqrt{g_Q/g_P}, \quad \varkappa_{PQ} = 0.$$

В § III.7 была дана кинематическая интерпретация совместного измерения (6.13) в случае, когда Q является координатой, а P — импульсом квантовой частицы. Здесь

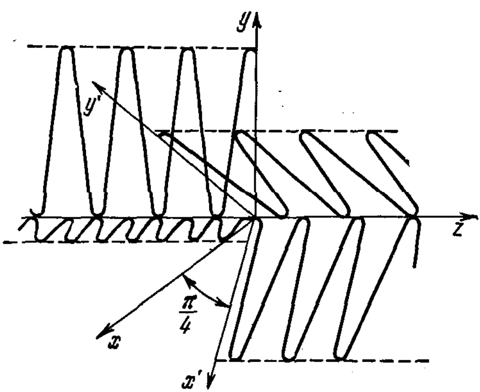

Рис. 15.

для нас представляет интерес другой случай, когда P и Q возникают из представления квантового электромагнитного поля в виде суммы гармонических компонент

$$E(t) \sim q \cos \omega t + p\omega^{-1} \sin \omega t,$$

соответствующих разным частотам ω. Дадим описание мысленного эксперимента, который отвечает совместному каноническому измерению (6.13). Рассмотрим плоскую монохроматическую волну $E(t)$, распространяющуюся в направлении z, как показано на рис. 15. Разлагая ее по двум взаимно ортогональным осям x, y, получим

$$E_x(t) \sim q_x \cos \omega t + p_x\omega^{-1} \sin \omega t,$$

$$E_y(t) \sim q_y \cos \omega t + p_y\omega^{-1} \sin \omega t.$$

Пусть $E(t) = E_x(t)$, и предположим, что $E_y(t)$ описывается вакуумным состоянием S_0; физически это означает, что волна поляризована в направлении x, а колебания поля вдоль оси y обусловлены лишь неустранимыми квантовыми флуктуациями. Вводя в плоскости x, y новые оси x', y', имеем

$$E_{x'}(t) \sim \frac{q_x + q_y}{\sqrt{2}} \cos \omega t + \frac{p_x + p_y}{\sqrt{2}} \omega^{-1} \sin \omega t,$$

$$E_{y'}(t) \sim \frac{q_x - q_y}{\sqrt{2}} \cos \omega t + \frac{p_x - p_y}{\sqrt{2}} \omega^{-1} \sin \omega t.$$

Ортогональные компоненты $E_{x'}(t)$ и $E_{y'}(t)$ могут быть разделены с помощью двоякопреломляющего фильтра; совместное измерение коммутирующих наблюдаемых

$$\tilde{p} = p_x + p_y, \quad \tilde{q} = q_x - q_y$$

и дает нужную процедуру.

Рассмотрим общее каноническое измерение вида (8.4). Производя симплектическое преобразование в Z, можно свести семейство операторов (8.4) к набору пар операторов $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ типа (6.13); поэтому можно предположить, что всякое каноническое измерение, например, в оптическом диапазоне в принципе может быть реализовано устройством, состоящим из конечного числа линейных оптических фильтров. Было бы интересно более подробно исследовать этот вопрос, однако это выходит за рамки настоящей книги.

§ 9. Измерение параметров среднего значения гауссовского состояния

Рассмотрим семейство гауссовских состояний $\{S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}\}$ с корреляционной функцией α и средним значением

$$m(z) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j m_j(z), \tag{9.1}$$

где $m_j(\cdot)$ — известные линейные функции на симплектическом пространстве Z, а θ_j — неизвестные вещественные параметры, которые подлежат оцениванию по наблюдениям над рассматриваемой квантовой системой. Например,

$S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}$ может быть состоянием поля излучения, представляющим смесь (V.1.8) фонового излучения и сигнала, в котором неизвестными являются амплитуды θ_j аддитивных компонент сигнала $m_j(z)$. Мы будем предполагать, что функции $m_j(\cdot)$ линейно независимы.

Теорема 9.1. *Равномерно наилучшее локально несмещенное измерение параметров $\theta_1, \ldots, \theta_n$ среднего значения гауссовского состояния может быть найдено в классе канонических измерений.*

Доказательство. В силу предложения V.6.1 семейство $\{S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}\}$ удовлетворяет условиям, при которых имеет место граница (7.11), причем симметричные логарифмические производные даются формулой

$$L_j = R(m_j) - m(m_j), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{9.2}$$

где $m_j \in Z$ определяются из уравнений

$$m_j(z) = \alpha(m_j, z), \qquad z \in Z.$$

Фиксируем значения θ_{0j}, т. е. среднее значение $m(\cdot)$, и заметим, что в силу характеристического свойства гауссовских состояний, выражаемого теоремой V.6.1, пространство канонических наблюдаемых $\mathfrak{R}_1$ инвариантно относительно коммутационного оператора $\mathfrak{D}$. Поэтому, согласно предложению 7.1, в (7.11) можно считать, что оператор $\mathfrak{F}$ действует в $\mathfrak{R}_1$. Обозначая через $\mathcal{F}$ оператор, отвечающий $\mathfrak{F}$ при изометрии $z \leftrightarrow R(z) - m(z)$, так что

$$\mathfrak{F}(R(z) - m(z)) = R(\mathcal{F}z) - m(\mathcal{F}z),$$

имеем

$$\Sigma_{\theta_0}\{M\} \geq \inf \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{-1} \equiv \Sigma_*, \tag{9.3}$$

где

$$\boldsymbol{F} = [\alpha(z_j, \mathcal{F}z_k)], \tag{9.4}$$

и нижняя грань берется по всем симметричным операторам в Z, удовлетворяющим условию

$$0 \leq \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathscr{D}\right)\mathcal{F}\left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathscr{D}\right) \leq \left(\mathrm{I} + \frac{i}{2}\mathscr{D}\right) \tag{9.5}$$

в комплексификации пространства (Z, α). Здесь $\mathscr{D}$ — оператор в Z, отвечающий коммутационному оператору $\mathfrak{D}$ по формуле (V.6.4).

Покажем, что нижняя грань в (9.3) достигается. Множество операторов $\mathcal{F}$ в конечномерном пространстве, удовлетворяющих условию (9.5), является, очевидно, замкнутым. Оно ограничено, так как из (9.5), аналогично (7.10), следует $0 \leqslant \mathcal{F} \leqslant \mathrm{I}$. Таким образом, множество $\{\mathcal{F}\}$ компактно. Функция $\mathcal{F} \to \operatorname{Tr} \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{-1}$ является суперпозицией непрерывной функции (9.4) и функции $\boldsymbol{F} \to \operatorname{Tr} \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{-1}$, которая полунепрерывна снизу, будучи верхней гранью семейства непрерывных функций $\boldsymbol{F} \to \operatorname{Tr} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}+\varepsilon \mathbf{I})^{-1}$; $\varepsilon > 0$. По известной теореме анализа функция, полунепрерывная снизу, достигает минимума на компактном множестве.

Пусть $\mathcal{F}_*$ — оператор в Z, на котором этот минимум достигается, и $\boldsymbol{F}_*$ — соответствующая ему матрица. Тогда оптимальные векторы X_j^*, согласно (7.12) и (9.2), даются формулами

$$X_j^* = R(z_j^*) - m(z_j^*), \quad j = 1, \ldots, n, \quad \begin{bmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_*^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_* m_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_* m_n \end{bmatrix}. \tag{9.6}$$

Отметим, что система $\{z_j^*\}$ является по построению биортогональной к векторам $\{m_j\}$, представляющим компоненты среднего значения в (Z, α):

$$m_k(z_j) \equiv \alpha(z_j^*, m_k) = \delta_{jk}. \tag{9.7}$$

Отсюда, в частности, $m(z_j^*) = \theta_{0j}$.

Элементы X_j^*; $j = 1, \ldots, n$, и матрица $\boldsymbol{K}_* \equiv [\varkappa_{jk}^*] = \boldsymbol{F}_*^{-1} [\alpha(m_j, \mathcal{F}_*(\mathrm{I} - \mathcal{F}_*) m_k)] \boldsymbol{F}_*^{-1}$ по построению удовлетворяют условию (7.5), которое в силу того, что

$$[X_j^*, X_k^*]_S = [R(z_j^*) - m(z_j^*), R(z_k^*) - m(z_k^*)]_S = \Delta(z_j^*, z_k^*),$$

сводится к неравенству

$$[\varkappa_{jk}^*] \geqslant \pm \frac{i}{2} [\Delta(z_j^*, z_k^*)].$$

Согласно предложению 8.1, существует каноническое измерение $M_*(d\theta_1 \ldots d\theta_n)$ с параметрами $X_{M_*}^j = R(z_j^*)$, $j = 1, \ldots, n$; $\boldsymbol{K}_* = [\varkappa_{jk}^*]$. Оно является локально несмещенным, так как согласно (9.7)

$$\langle L_j, X_{M_*}^k \rangle_S = \langle R(m_j) - m(m_j), R(z_k^*) \rangle_S = \alpha(m_j, z_k^*) = \delta_{jk}.$$

Поскольку параметры измерения $M_*(d\theta_1 \ldots d\theta_n)$ не зависят от фиксированных вначале значений θ_{0j}, оно является равномерно наилучшим среди всех локально несмещенных измерений. Теорема доказана.

Теорема эта устанавливает принципиальный факт каноничности наилучшего измерения, однако не дает явного выражения для оператора $\mathcal{F}_*$, через который определяются параметры наилучшего измерения. Явное решение этой задачи было получено в некоторых частных случаях. Рассмотрим подпространство $Z_{\mathcal{L}} \subset Z$, порождаемое векторами m_j; $j=1, \ldots, n$ (оно соответствует подпространству $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_h^2(S)$ при изометрии $z \leftrightarrow R(z) - m(z)$), и предположим, что оно является инвариантным подпространством оператора $\mathscr{D}$. В частности, это очевидным образом выполняется, если $n = 2s \equiv \dim Z$, так что $Z_{\mathcal{L}} = Z$. Тогда $\mathcal{L}$ будет инвариантным подпространством коммутационного оператора $\mathfrak{D}$ и формулы (7.17) с учетом (9.2) дают $X_j^* = R(z_j^*) - \theta_{0j}$, $j = 1, \ldots, n$, где

$$\begin{bmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \text{ и } \boldsymbol{K}_* = \frac{1}{2} \boldsymbol{G}^{-1} \operatorname{abs}(i\boldsymbol{G}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{J}^{-1}),$$

где, в силу (V.4.9), (V.4.12) и (9.2),

$$\boldsymbol{J} \equiv [\langle L_j, L_k \rangle_S] = [\alpha(m_j, m_k)], \quad \boldsymbol{D} \equiv [[L_j, L_k]_S] = [\Delta(m_j, m_k)].$$

Вспоминая доказательство предложения 8.1, можно сказать, что наилучшее измерение реализуется коммутирующим семейством наблюдаемых

$$\tilde{R}_j = R(z_j^*) \otimes I_0 + I \otimes R_j^0,$$

где R_j^0 — вспомогательные канонические наблюдаемые в пространстве $\mathcal{H}_0$ с состоянием S_0 такие, что

$$[R_j^0, R_k^0] = i\Delta(z_j^*, z_k^*) I_0, \quad \mathsf{E}_{S_0}(R_j^0) = 0, \quad [\langle R_j^0, R_k^0 \rangle_S] = \boldsymbol{K}_*.$$

В рассматриваемом случае биортогональная система $\{z_j^*\}$ лежит в подпространстве $Z_{\mathcal{L}}$, порождаемом системой $\{m_j\}$, и не зависит от выбора весовой матрицы $\boldsymbol{G}$, которая входит лишь в выражение для матрицы $\boldsymbol{K}_*$. В общем случае $Z_{\mathcal{L}}$ не будет инвариантным подпространством оператора $\mathcal{F}_*$; векторы z_j^* могут лежать за пределами подпространства $Z_{\mathcal{L}}$ и зависеть от выбора матрицы $\boldsymbol{G}$.

Теорема 9.1 позволяет также установить любопытное свойство гауссовских состояний, позволяющее охарактеризовать их как «наименее информативные» или «наименее выгодные» с точки зрения экспериментатора. Рассмотрим другое семейство состояний $\{S'_{\theta_1, \ldots, \theta_n}\}$ с конечными вторыми моментами, причем предположим, что состояние $S'_{\theta_1, \ldots, \theta_n}$ имеет то же среднее значение (9.1) и корреляционную функцию α, а в остальном совершенно произвольно.

Рассмотрим локально несмещенное каноническое измерение $M(d\theta_1 \ldots d\theta_n)$ с параметрами $z_1, \ldots, z_n$; $[\varkappa_{jk}]$. Тогда среднеквадратичное отклонение результатов измерения, вычисленное относительно состояния $S'_{\theta_1, \ldots, \theta_n}$, равно

$$\Sigma'_\theta\{M\} = \sum_{j,k} g_{jk}[\varkappa_{jk} + \alpha(z_j, z_k)]$$

в силу (7.6) и пунктов 1), 2) определения канонического измерения. Поскольку $\varkappa_{jk}$ не зависят от состояния в силу пункта 3) того же определения, а α по предположению совпадает с корреляционной функцией гауссовского состояния $S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}$, то $\Sigma'_\theta\{M\} = \Sigma_\theta\{M\}$, где $\Sigma_\theta\{M\}$ — среднеквадратичное отклонение, вычисленное относительно $S_{\theta_1, \ldots, \theta_n}$. Так как минимум величины $\Sigma_\theta\{M\}$ по каноническим измерениям совпадает с минимумом по всем измерениям (теорема 9.1), то он равен величине Σ_* из (9.3). Поэтому

$$\min\{\Sigma'_\theta\{M\}:\ M \text{ — локально несмещенные канонические измерения}\} = \Sigma_*.$$

Отсюда следует, что $\min\limits_M \sum'_\theta\{M\} \leqslant \sum_*$, где минимум берется уже по всем локально несмещенным измерениям и

$$\max_{\{S'_\theta\}} \min_M \sum\nolimits'_\theta\{M\} = \sum\nolimits_*.$$

Таким образом, при данной априорной информации о моментах, гауссовские состояния являются наихудшими в смысле среднеквадратичного отклонения измерения параметров $\theta_1, \ldots, \theta_n$ среднего значения. Это можно наглядно интерпретировать, рассмотрев «игру», в которой экспериментатор стремится минимизировать среднеквадратичное отклонение $\Sigma'_\theta\{M\}$, исходя из осторожного предположения, что фактическое состояние может оказаться для него наихудшим в данном классе. С этой точки зрения предположение о гауссовости в задаче оценивания среднего при отсутствии априорных данных о моментах выше второго порядка представляется оправданным.

Комментарии к гл. VI

§ 1. Основные понятия и проблемы математической теории передачи сообщений Шеннона — Колмогорова формулируются в докладе Колмогорова [51]. На необходимость учета квантовой природы носителя информации при изучении оптических каналов указывал еще изобретатель голографии Габор [29]. Математические модели квантовых каналов связи обсуждались Холево [112], Ингарденом [43], Дэвисом [40]. Информационные характеристики рассматривались в работах Холево [116], Линдблада [60].

§§ 2, 3. По поводу классического неравенства Рао — Крамера см. Крамер [53]. Обстоятельное «геометрическое» исследование неравенства Рао — Крамера содержится в книге Ченцова [128]. Предложения 2.1 и 3.2 являются строгими версиями соответственно неравенств Хелстрома [107], [109] и Мандельштама — Тамма [68].

§ 4. Постановка задачи об оценивании силы, действующей на пробный объект, мотивирована работой Брагинского и Воронцова [17], в которой обсуждался вопрос об обнаружении силы и была получена граница типа (4.11) как условие обнаружения.

§§ 5, 6. Неравенство (5.3) является строгой версией результата Хелстрома [107], [109]. Неравенство (6.2) получено в работе Юна и Лэкса [133]. Оптимальность канонического измерения в гауссовском семействе $\left\{S_{\overline{P},\,\overline{Q}}\right\}$ установлена в работах Холево [117], Юна и Лэкса [133].

Лемма 6.1, принадлежащая Белавкину и Гришанину, приводится в работе Стратоновича [92], посвященной квантовой теории обнаружения и оценивания.

§§ 7—9. Материал взят из работ Холево [115], [120] — [122]. Лемма 7.1 доказана в работах [120], [122], посвященных байесовской задаче. Канонические измерения были введены в [112]. Полное доказательство предложения 8.1 можно найти в [122]. Исследование других случаев, в которых оптимальный оператор $\mathcal{F}_*$ находится в явном виде, можно найти в работах [121], [122]. Применения к конкретным пространственно-временны́м моделям сигналов рассматриваются, например, в книге Хелстрома [109].

Известно, что гауссовское состояние имеет максимальную квантовую энтропию $-\operatorname{Tr} S \log S$ при фиксированных первых и вторых моментах (ср. Люиселл [63]). Это служит другой иллюстрацией того факта, что гауссовские состояния являются в данной задаче измерения «наименее информативными».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ *)

1. Алфсен (Alfsen E. M.). Compact convex sets and boundary integrals. — Ergebnisse der Math. 57: Springer-Verlag, 1971.
2. Амрейн (Amrein W. O.) Localizability for particles of mass zero. — Helv. Phys. Acta **42**, N 1, 1969, 149—190.
3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
4. Баргман (Bargmann V.). On unitary ray representations of continuous groups. — Ann. Math. **59**, N 1, 1954, 1—46.
5. Баргман (Bargmann V.). On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I. — Commun. Pure Appl. Math. **14**, N 3, 1961, 187—214.
6. Баргман (Bargmann V.). Note on Wigner's theorem on symmetry operations. — J. Math. Phys. 5, 1964, 862—868.
7. Бауэр (Bauer H.). Minimalstellen von functionen und extremalpunkte. — Arch. Math. **9**, 1958, 389—393.
8. Белинфанте (Belinfante F. I.). A survey of hidden variables theories: Pergamon Press, 1973.
9. Белл (Bell J.). On the problem of hidden variables in quantum mechanics. — Rev. Mod. Phys. **38**, 1966, 447—452.
10. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
11. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. — М.: Высшая школа, 1961.
12. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики. — М.: Наука, 1966.
13. Боголюбов Н. Н. Лекции по теории симметрии элементарных частиц. — М.: Изд-во МГУ, 1966.
14. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров Н. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
15. Бом (Bohm D.). Квантовая теория. — М.: Наука, 1965 (1951).
16. Бор (Bohr N.). Атомная физика и человеческое познание. — М.: ИЛ, 1961.
17. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И. Квантовомеханические ограничения в макроскопических экспериментах и современная экспериментальная техника. — УФН **114**, вып. 1, 1974.
18. Вайтман (Wightman A. S.). On the localizability of quantum-mechanical system. — Rev. Mod. Phys., **34**, 1962, 845—872.

---

*) Для переводных книг, а также для некоторых отечественных монографий в скобках указан год первого издания.

19. Вайтман (Wightman A. S.). Hilbert's sixth problem: mathematical treatment of the axioms of physics. — Proc. symp. in pure math. **28**, pt. 1, 1977, 147—240.
20. Валентайн (Valentine F.). Convex sets. — NY: Mc Graw-Hill Book company, 1964.
21. Вальд (Wald A.). Статистические решающие функции (с. сб. «Позиционные игры». — М.: Наука, 1967) (1950).
22. Варадарайан (Varadarajan V. S.). Geometry of quantum theory. — Amsterdam: Van Nostrand, 1968.
23. Варадарайан (Varadarajan V. S.). Geometry of quantum theory, II. Quantum theory of covariant systems. — NY: Van Nostrand, 1970.
24. Вейль (Weyl H.). Теория групп и квантовая механика. — Харьков: ОНТИ ДНТВУ, 1938 (1928).
25. Вигнер (Wigner E. P.). Unitary representations of the inhomoheneous Lorentz group. — Ann. Math. **40**, N 1, 1939, 149—204.
26. Вигнер (Wigner E. P.). Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров. — М.: Физматгиз, 1961 (1959).
27. Вигнер (Wigner E. P.). On the time-energy uncertaity relation (in «Aspects of quantum theory». — Eds. A. Salam, E. P. Wigner: Cambr. Univ. Press, 1972).
28. Волкин (Volkin H. C.). Phase operators and phase relations for photon states. — J. Math. Phys. **14**, N 12, 1973, 1965—1976.
29. Габор (Gabor D.), Communication theory and physics. — Phil. Mag. **41**, 1950, 1161—1187.
30. Гаддер (Gudder S.). Convex structures and operational quantum mechanics. — Commun. Math. Phys. **29**, N 3, 1973, 249—264.
31. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
32. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
33. Глаубер (Glauber R.). Оптическая когерентность и статистика фотонов (в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика». — М.: Мир, 1966) (1963).
34. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.
35. Гордон, Люиселл (Gordon J. P., Louisell W.). Simultaneous measurements of noncommuting observables (in «Physics of quantum electronics», P. Kelley, M. Lax, B. Tannenwald, eds. — NY: Mc Graw-Hill, 1966), 833—840.
36. Данфорд, Шварц (Dunford N., Schwartz I.). Линейные операторы, I. — М.: ИЛ, 1962.
37. Дирак (Dirac P. A. M.). Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979 (1930).
38. Дэвис (Davies E. B.). On repeated measurements of continuous observables in quantum mechanics. — J. Funct. Anal. **6**, 1970, 318—346.
39. Дэвис (Davies E. B.). Quantum theory of open systems. — London: Academic Press, 1976.

40. Дэвис (Davies E. B.). Quantum communication systems. — IEEE Trans. Inform: Theory IT — 23, N 7, 1977, 530—534.
41. Дэвис, Льюис (Davies E. B., Lewis J. T.). An operational approach to quantum probability. — Commun. Math. Phys. 17, N 3, 1970, 239—260.
42. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
43. Ингарден (Ingarden R. S.). Quantum information theory. — Rept. Math. Phys. 10, N 1, 1976, 43—72.
44. Инёню, Вигнер (Inönu E., Wigner E. P.). Representations of Galilei group. — Nuovo Cim. 9, 1952, 705—718.
45. Карругерс, Нието (Carruthers P., Nieto M. M.). Phase and angle variables in quantum mechanics. — Rev. Mod. Phys. 40, N 2, 1968, 411—440.
46. Кастлер (Castler D.). The C^*-algebras of a free Boson field. — Commun. Math. Phys. 1, N 1, 1965, 14—48.
47. Кашен, Хадсон (Cushen C. D., Hudson R. L.). A quantum mechanical central limit theorem. — J. Appl. Prob. 8, 1971, 454—469.
48. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.
49. Клаудер, Сударшан (Klauder I. R., Sudarshan E. C. G.). Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970 (1968).
50. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974 (1933).
51. Колмогоров А. Н. Теория передачи информации. — М.: Изд-во АН СССР, 1957.
52. Кошен, Шпеккер (Kochen S., Specker E. P.) The problem of hidden variables in quantum mechanics. — J. Math. Mech. 17, N 1, 1967, 59—88.
53. Крамер (Gramer H.). Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975 (1946).
54. Краузе (Krause U.). The inner orthogonality of convex sets in axiomatic quantum mechanics (in «Foundation of quantum mechanics and ordered linear spaces». — Lecture Notes in Phys. 29, 1974, 269—280).
55. Краус (Kraus K.). Operations and effects in the Hilbert space formulation of quantum theory (in «Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces». — Lecture Notes in Phys. 29, 1974, 206—229).
56. Краус, Шрётер (Kraus K., Schröter I.). Expectation values of unbounded observables. — Int. J. Theor Phys. 7, N 6, 1973, 431—442.
57. Крылов Н. С., Фок В. А. О двух основных толкованиях соотношения неопределенностей для энергии и времени. — ЖЭТФ 17, № 2, 1947, 93—107.
58. Кэдисон (Kadison R. V.). Transformation of states in operator theory and dynamics. — Topology 3, suppl. 2, 1965, 177—198.
59. Ланц, Лугиато, Рамелла (Lanz L., Lugiato L. A., G. Ramella). On the quantum mechanical treatment of decaying nonrelativistic systems. — Int. J. Theor. Phys. 8, N 5, 1973, 341—352.
60. Линдблад (Lindblad G.). Entropy, information and quantum measurements. — Commun. Math. Phys. 33, N 4, 1973, 305—322.

61. Лупиас, Миракль-Соль (Loupias G., Miracle-Sole S.). C^*-algebres des systemes canoniques.—Commun. Math Phys. **2**, N 1, 1966, 31—42.
62. Людвиг (Ludwig G.). Measuring and preparing process (in «Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces».—Lecture Notes in Phys. **29**, 1974, 122—161).
63. Люиселл (Louisell W.). Излучение и шумы в квантовой электронике.—М.: Наука, 1972 (1964).
64. Макки (Mackey G. W.). Imprimitivity for representations of locally compact groups.—Proc. Natl. Acad. Sci. USA **35**, N 4, 1949, 537—545.
65. Макки (Mackey G. W.). Лекции по математическим основам квантовой механики.—М.: Мир, 1965 (1963).
66. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.—М.: Наука, 1970.
67. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.—М.: Наука, 1972 (1939).
68. Мандельштам Л. И., Тамм И. Е. Соотношение неопределенностей энергия—время в нерелятивистской квантовой механике.—Изв. АН СССР (серия физич.) **9**, № 1—2, 1945, 122—128.
69. Манюсо, Вербер (Manuceau J., Verbeure A.). Quasifree states of the CCR.—Commun. Math. Phys. **9**, N 4, 1968, 293—302.
70. Мойэл (Moyal J.). Квантовая механика как статистическая теория.—сб. «Вопросы причинности в квантовой механике».—М., 1955.
71. Наймарк М. А. О самосопряженных расширениях второго рода симметричного оператора.—Изв. АН СССР (серия матем.) **4**, № 1, 1940, 53—104.
72. Наймарк М. А. Спектральные функции симметричного оператора.—Изв. АН СССР (серия матем.) **4**, № 3, 1940, 277—318.
73. Нейман (Neumann H.). The structure of ordered Banach spaces in axiomatic quantum mechanics (in «Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces».—Lecture Notes in Phys. **29**, 1974, 116—121).
74. Нелсон (Nelson E.). Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics.—Phys. Rev. **150**, N 4, 1966, 1079—1085.
75. Нелсон (Nelson E.). Dynamical theories of Brownian motion.—Princeton, 1967.
76. Ньютон, Вигнер (Newton T. D., Wigner E. P.). Localized states for elementary systems.—Rev. Mod Phys. **21**, 1949, 400—406.
77. Оллкок (Allcock G. R.). The time of arrival in quantum mechanics.—Ann. Phys. **53**, N 2, 1969, 253—348.
78. Переломов А. М. Coherent states for arbitrary Lie group.—Commun. Math. Phys. **26**, N 3, 1972, 222—236.
79. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения.—УФН **123**, № 1, 1977, 23—53.
80. Пирон (Piron C.). Axiomatique quantique.—Helv. Phys. Acta **37**, N 415, 1964, 439—468.
81. Полиа и Сегё (Polya G., Szegö G.). Задачи и теоремы из анализа.—II.—М.: ГИТТЛ, 1956.
82. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.—М.: Наука, 1970.
83. Пруговецки (Prugovecki E.). On a theory of measurement of incompatible observables in quantum mechanics.—Canad. J. Phys. **45**, N 6, 1967, 2173—2219.

84. Пул (Pool J. C. T.). Mathematical aspects of Weyl correspondence. — J. Math. Phys. 7, N 1, 1966, 66—76.
85. Рид, Саймон (Reed M., Simon B.). Методы современной математической физики, т. I. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977 (1972).
86. Рисс, Секефальви-Надь (Riesz F., Sz-Nagy B.). Лекции по функциональному анализу (перев. с франц.). — М.: Мир, 1979 (1953).
87. Робертсон (Robertson H. P.). The uncertainty principle. — Phys. Rev. 34, N 1, 1929, 163—164.
88. Рокафеллар (Rockafellar R.). Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973 (1970).
89. Секефальви-Надь (Sz-Nagy B.). Продолжение операторов в гильбертовом пространстве с выходом из этого пространства. — Математика 9, № 6, 1965, 109—144.
90. Сигал (Segal I.). A generating functional for the states of a linear Boson field. — Canad. J. Math. 13, N 1, 1961, 1—18.
91. Сигал (Segal I.). Математические проблемы релятивистской физики. — М.: Мир, 1968 (1963).
92. Стратонович Р. Л. The quantum generalization of optimal statistical estimation and testing hypotheses. — J. Stoch. 1, 1973, 87—126.
93. Такесаки (Takesaki M.). Tomita's theory of modular Hilbert algebras. — Lecture Notes in Math. 128, 1972.
94. Ульман (Uhlmann A.). The transition probability in the state space of a C^*-algebra. — Rept. Math. Phys. 9, N 2, 1976, 273—279.
95. Урбаник (Urbanik K.). Joint probability distribution of observables in quantum mechanics. — Studia Math. 21, N 1, 1961, 117—133.
96. Фейнман (Feynmann R. P.). Concept of probability in quantum mechanics. — Proc. 2d Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab. — Berkeley, 1951, 533—541.
97. Фейнман, Лейтон, Сэндс (Feynmann R. P., Leighton R. B., Sands M.). Квантовая механика (I). — ФЛФ, т. 8. — М.: Мир, 1966 (1965).
98. Фергюсон (Ferguson T. S.). Mathematical statistics: a decision theoretic approach. — NY: Academic Press, 1967.
99. Фок В. А. Начала квантовой механики. — М.: Наука, 1976 (1932).
100. Фок В. А. Об интерпретации квантовой механики. — УФН 62, № 4, 1957, 461—474.
101. фон Нейман (von Neumann J.). Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964 (1932).
102. фон Нейман (von Neumann J.). Die eidentigkeit der Schrödingerschen operatoren. — Math. Ann. 104, N 3, 1931, 570—578.
103. Халмош (Halmos P. R.). Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963 (1958).
104. Халмош (Halmos P. R.). Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970 (1967).
105. Харткемпер (Hartkämper A.). Axiomatics of preparing and measuring processes (in «Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces». — Lecture Notes in Phys. 29, 1974, 107—115).

106. Хелстром (Helstrom C. W.). Detection theory and quantum mechanics.—Inform. Contr. **10**, N 3, 1967, 254—291.
107. Хелстром (Helstrom C. W.). Minimum mean square error estimation in quantum statistics.—Phys. Lett. **25A**, 1967, 101—102.
108. Хелстром (Helstrom C. W.). Estimation of a displacement parameter of a quantum system.—Int. J. Theor. Phys. **11**, N 6, 1974, 357—378.
109. Хелстром (Helstrom C. W.). Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.—М.: Мир, 1979 (1976).
110. Хепп (Hepp. K.). Quantum theory of measurement and macroscopic observables.—Helv. Phys. Acta **45**, 1972, 237—248.
111. Холево А. С. О квантовых характеристических функциях — Пробл. передачи информ. **6**, № 4, 1970, 44—48.
112. Холево А. С. К математической теории квантовых каналов связи.—Пробл. передачи информ. **8**, № 1, 1972, 63—71.
113. Холево А. С. Аналог теории статистических решений в некоммутативной теории вероятностей.—Тр. Моск. матем. об-ва **26**, 1972, 133—149.
114. Холево А С. Statistical problems in quantum physics.—2^d Japan—USSR symp. on probab. theory.—Kyoto, 1972, **I**, 22—40.
115. Холево А. С. Statistical decision theory for quantum systems.— J. Multiv. Anal. **3**, N 4, 1973, 337—394.
116. Холево А. С. Информационные акспекты квантового измерения,—Пробл. передачи информ. **9**, № 2, 1973, 31—42.
117. Холево А. С. Оптимальные квантовые измерения.—Теор. и матем. физика **13**, № 3, 1973, 184—199.
118. Холево А. С. О некоммутативном аналоге метода максимального правдоподобия.—Междунар. конф. по теор. вероятн. и матем. статист. Тезисы докладов.—Вильнюс, 1973, **2**, 317—320.
119. Холево А. С. Об одном обобщении неравенства Рао—Крамера.—Теор. вероятн. и ее примен. **18**, № 2, 1973, 371—375.
120. Холево А. С. Some statistical problems for quantum Gaussian states.—IEEE Trans. Inform. Theory **IT—21**, N 5, 1975, 533—543.
121. Холево А. С. Noncommutative analogs of Cramer—Rao inequality in the quantum measurement theory.—3^d Soviet—Japan symp. on Probability theory.—Tashken, 1975 (Lecture Notes in Math. **550**, 1976, 194—222).
122. Холево А. С. Исследования по общей теории статистических решений.—Тр. МИАН **124**.—М.: Наука, 1976.
123. Холево А. С. Commutation superoperator of a state and its applications in the noncommutative statistics.—Rept. Math. Phys. **12**, N 2, 1977, 251—271.
124. Холево А. С. Estimation of shift parameter of a quantum state.—Rept. Math. Phys. **13**, N 3, 1978, 287—307.
125. Холево А. С. Covariant measurements and uncertainty relations.—Rept. Math. Phys. **16**, № 3, 1980, с. 289—304.
126. Хунцикер (Hunziker W.). A note on symmetry operations in quantum mechanics.—Helv. Phys. Acta **45**, N 2, 1972, 233—236.
127. Цванцигер (Zwanziger D.). Representations of the Lorentz Group corresponding to unstable particles.—Phys. Rev. **131**, N 6, 1963, 2818—2819.

128. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — М.: Наука, 1972.
129. Шаттен (Schatten R.). Norm ideals of completely continuous operators. — Berlin: Springer-Verlag, 1960.
130. Ше, Хеффнер (She C. Y., Heffner H.). Simultaneous measurements of noncommuting observables. — Phys. Rev. **152**, N 4, 1966, 1103—1110.
131. Широков Ю. М. Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. — ЖЭТФ, вып. 5, 1957, 1196—1214.
132. Экстейн, Сигерт (Ekstein H., Siegert A. I. F.). On a reinterpretation of decay experiments. — Ann. Phys. **68**, 1971, 509—520.
133. Юн, Лэкс (Yuen H. P. H., Lax M.). Multiple-parameter quantum estimation and measurement of non-selfadjoint observables. — IEEE Trans. **IT — 19**, N 6, 1973, 740—750.
134. Яух (Jauch J. M.). Foundations of quantum mechanics. — Mass.: Addison-Wesley Publ. Comp., South Reading, 1968.
135. Яух Пирон (Jauch J. M., Piron C.). Generalized localizability. — Helv. Phys Acta 45, 1967, 559—570.
136. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М.: Наука, 1979.
137. Широков Ю. М. Квантовая и классическая механика в представлении фазового пространства. — ФЭЧ и АЯ **10**, вып. 1, 1979, 5—50.
138. Мардиа (Mardia K.) Статистический анализ угловых наблюдений. — М.: Наука, 1978 (1972).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Семенович Холево

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ