*Э.Хеннан*

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Книга видного австралийского математика Э. Хеннана, известного советскому читателю по русскому переводу его книги «Анализ временных рядов», посвящена обсуждению связей между двумя кажущимися очень далекими разделами математики: теорией представлений групп и прикладной теорией вероятностей. С этой целью автор выбирает несколько теоретико-вероятностных тем (важнейшими из которых являются теория однородных случайных полей и многомерный статистический анализ), на примере которых последовательно иллюстрирует возможности применения теории представлений.

Книга интересна студентам старших курсов и аспирантам математических отделений университетов и педагогических институтов, научным работникам в области теории вероятностей, алгебры и функционального анализа, а также специалистам в области приложений теории вероятностей, желающим расширить свой математический кругозор.

ОГЛАВЛЕНИЕ


| | |
|---|---|
| Предисловие редактора перевода | 5 |
| 1. Введение | 9 |
| 2. Группы и их представления | 11 |
| 3.1. Представления конечных групп | 16 |
| 3.2. Тасование карт | 20 |
| 3.3. Приложение к генетике | 22 |
| 4. Конечные абелевы группы | 24 |
| 5.1. Коммутаторная алгебра | 24 |
| 5.2. Дисперсионный анализ | 33 |
| 5.3. Стационарные процессы второго порядка | 37 |
| 5.4. Вещественный случай, единственность дисперсионного анализа и пример | 41 |
| 6. Коммутативность коммутаторной алгебры | 43 |
| 7. "Склеивание" в схеме неполных блоков | 45 |
| 8.1. Непрерывные группы и мера Хаара | 50 |
| 8.2. Многомерный статистический анализ | Ыэ |
| 9.1. Компактные группы- | 57 |
| 9.2. Центральная предельная теорема | 58 |
| 10.1. Конечномерные представления классических групп Ли | 6U |
| 10.2. Распределение собственных значений ковариационной матрицы | 62 |
| 11.1. Локально компактные абелевы группы | 68 |
| 11.2. Стационарные процессы | 71 |
| 11.3. Центральные предельные теоремы | 72 |
| 12.1. Бесконечномерные представления групп | '// |
| 12.2. Анализ Фурье распределений вероятностей на локально компактных группах; | 84 |
| 12.3. Локально компактные абелевы группы и стационарные процессы | 85 |

13.1. Симметрические пространства 86
13.2. Стационарные процессы второго порядка на однородных пространствах 94
13.3. Фильтрация и «склеивание» 98
13.4. Безгранично делимые распределения на симметрических пространствах 106
14. Заключение 110
15. Некоторые библиографические замечания 110
Библиография 114

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю небольшая монография видного австралийского математика Э. Хеннана (известного в нашей стране по переведенной на русский язык книге «Анализ временных рядов», изд-во «Наука», М., 1964) входит в серию обзоров, регулярно заказываемых ученым различных стран редакцией журнала Journal of Applied Probability; эти обзоры затем публикуются в одном из номеров журнала и одновременно — в виде отдельной книжки лондонским издательством Methuen. Тема настоящей монографии кажется на первый взгляд довольно неожиданной — какое отношение имеет алгебраическая теория представлений групп к приложениям теории вероятностей? На самом деле, однако, значение теории представлений групп вовсе не ограничивается тем, что это один из интереснейших разделов современной алгебры (или, если речь идет о бесконечномерных представлениях, функционального анализа). С точки зрения приложений наиболее важно то, что эта кажущаяся абстрактной теория содержит общий математический аппарат, позволяющий наиболее просто и естественно учитывать количественно те или иные соотношения симметрии, заложенные в условиях задачи. Именно с этим связана громадная роль, которую играет теория представлений групп в теоретической физике (особенно в квантовой механике и теории элементарных частиц). Но ведь и среди задач, относящихся к теории вероятностей и математической статистике, очень много таких, которые характеризуются наличием определенных соотношений симметрии. Поэтому не удивительно, что аппарат теории представлений групп можно использовать при решении большого числа вероятностных и статистических задач, только часть из которых рассмотрена в настоящей книге.

Впрочем, книга Э. Хеннана и не претендует на полноту охвата материала. На русский язык уже переведена обстоятельная монография У. Гренандера [1] [1]), фактически посвященная одному специальному классу теоретико-вероятностных задач, важному для ряда приложений и тесно связанному с теорией представлений групп; хорошим дополнением к этой монографии может служить обзорная статья В. В. Сазонова и В. Н. Тутубалина [1], содержание которой практически не перекрывается содержанием настоящей книги. Задача, которую поставил перед собой Э. Хеннан, резко отличается от установок авторов указанных книги и статьи — он не стремится исчерпать ни одну из затронутых им тем, а хочет лишь на ряде конкретных примеров проиллюстрировать различные подходы к использованию аппарата представлений групп в теории вероятностей и математической статистике и попутно показать плодотворность и большое математическое изящество теоретико-групповых методов. Этой своей цели автор полностью достигает.

Формально книга Хеннана не предполагает у читателя никаких знаний по теории представлений групп; известные требования предъявляются к подготовке читателя в области теории вероятностей и математической статистики, но и они по существу довольно эле-

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к библиографии в конце книги.

ментарны. Так как, однако, эта книга написана очень сжато и большинство доказательств в ней только намечено или даже просто опущено, то ее никак нельзя отнести к разделу «легкого чтения»; овладение всем содержащимся в ней материалом требует большой работы и в ряде мест невозможно без обращения к оригинальным статьям, на которые ссылается автор.

В русском переводе книги, выполненном А. Л. Рухиным при участии Ю. С. Родман, исправлены многочисленные опечатки и некоторые небольшие погрешности английского оригинала; кроме того, пополнена библиография и слегка расширен раздел библиографических замечаний. В остальном книга печатается без изменений.

Редактор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. Э. Дж. Хеннану за присылку списка исправлений к книге, облегчившего работу над переводом,

*А. М. Яглом*

## 1. Введение

Настоящая работа задумана как введение в область некоторых математических идей, могущих иметь важное значение в приложениях теории вероятностей и в математической статистике. Для того чтобы иметь возможность на сравнительно небольшом числе страниц охватить широкий круг вопросов, нам пришлось опираться в ряде мест на эвристические соображения, рассчитывая, что читатели, привыкшие к математической строгости и знакомые с относящимися к излагаемым вопросам техническими деталями, не осудят нас за это. В ходе изложения мы намеренно не давали ссылок на оригинальные работы, если только они не казались необходимыми и если при этом не создавалось впечатление, что автор объявляет соответствующие результаты своими. Ссылки в конце статьи должны помочь заинтересовавшимся читателям в выборе дальнейшей литературы; одновременно они указывают основные источники, из которых заимствованы развиваемые здесь математические и статистические идеи. От читателя требуется некоторое знакомство с теорией групп, хотя в работе и приводятся основные определения. Начиная с рассмотрения конечномерного случая и прослеживая в дальнейшем аналогию с ним, автор надеялся облегчить понимание последующих довольно сложных в техническом отношении частей обзора.

Рассматриваемые в книге темы были в основном выбраны так, чтобы иметь отношение к проблемам математической статистики и прикладным вопросам теории вероятностей. С другой стороны, мы даже не пытались обсудить сколько-нибудь подробно существующие весьма общие теории (приложимые, например, к такому широкому классу групп, как произвольные локально компактные группы); в отношении таких теорий читателю можно порекомендовать книгу

Гренандера [1] [1]). Тем не менее мы не могли совсем не касаться общих проблем, связанных, например, с формулировкой центральной предельной теоремы для групп Ли, которую, конечно, нельзя считать относящейся к области приложений теории вероятностей, но которая может быть полезна специалистам в области приложений, так же как и классическая форма центральной предельной теоремы (и по той же самой причине, а именно потому, что достаточно общая постановка задачи позволяет избежать ненужного повторения доказательств для тех или иных конкретных случаев, встретившихся в прикладных задачах).

Расположение материала в работе выбрано таким, чтобы читатель постепенно переходил от более простых ко все более и более сложным идеям. Так, мы начинаем с изучения конечных групп и их конечномерных представлений (разделы 2, 3.1, 4, 5.1), затем переходим к исследованию непрерывных групп и их конечномерных представлений (разделы 8.1, 9.1, 10.1, 11.1) и заканчиваем общей теорией унитарных представлений некоторого широкого класса бесконечных групп (разделы 12.1, 12.3, 13.1).

Указанные разделы, посвященные развитию математического аппарата, тесно связаны с примыкающими к ним, в которых излагаются соответствующие статистические или теоретико-вероятностные приложения. В результате такого построения книги излагаемые здесь родственные приложения оказались оторванными друг от друга в тех случаях, когда они опираются на различный математический материал. Дело в том, что главное место в книге занимает несколько повторяющихся основных прикладных тем. Эти темы не являются единственно возможными и даже, быть может, не самыми важными. Внимание автора к ним объясняется в первую очередь его недостаточной осведомленностью в области других приложений. Первая из этих тем касается теории *стационарных в широком смысле процессов*, или, что то же самое, *стационарных*

[1]) См. также дополняющий эту книгу обзор Сазонова и Тутубалина [1]. — *Прим. ред.*

*процессов второго порядка* (разделы 5.2—5.4, 6, 7, 11.2, 12.3, 13.2, 13.3). В отличие от общепринятого смысла мы будем использовать этот термин для обозначения семейств случайных величин, зависящих от параметра, являющегося точкой пространства, на котором действует группа преобразований, при условии, что соответствующая ковариационная функция (зависящая от пары точек рассматриваемого пространства) инвариантна относительно одновременного применения одного и того же преобразования к обоим аргументам [1]). Область исследования таких процессов достаточно обширна, и она может рассматриваться как плод, выросший из некоторых специальных задач дисперсионного анализа. Вторая тема, которой мы будем заниматься, — обобщение предельных теорем теории вероятностей на ситуации, в которых «случайные величины» принимают значения из некоторой группы (разделы 3.2, 9.2, 11.3, 13.4). Третья тема посвящена многомерному статистическому анализу (разделы 8.2, 10.2).

## 2. Группы и их представления

Всюду далее через $G$ мы будем обозначать некоторую группу с элементами $g$, $h$, ... . Умножение в группе записывается как $gh$, единичный элемент обозначается буквой $e$, а обратный элемент — символом $g^{-1}$, так что $eg = ge = g$ и $g^{-1}g = gg^{-1} = e$ при всех $g \in G$.

Если $H$ — подгруппа группы $G$, то равенство

$$G = eH + g_2H + g_3H + \ldots + g_rH,$$

где $g_iH$ — правый класс смежности, означает, что эти классы не пересекаются и исчерпывают всю группу $G$. Целое число $r$ называется *индексом* подгруппы $H$ в $G$ и обозначается $r = [G:H]$. Если $H$ — нормальный делитель, т. е. $gHg^{-1} = H$ при всех $g \in G$, то множество

[1]) Более обычное название таких семейств случайных величин — *однородное в широком смысле случайное поле.* Заметим также, что вместо термина *ковариационная функция* в литературе на русском языке чаще употребляется термин *корреляционная функция* или *функция корреляции.* — *Прим. ред.*

классов смежности само имеет групповую структуру, так как $(g_iH)(g_jH) = g_kH$ при $g_ig_j \in g_kH$. Эта новая группа называется *факторгруппой* и обозначается $G/H$.

Мы предполагаем, что какие-то примеры групп уже известны читателю, другие появятся позже. Обозначим через $n$ порядок группы (число ее элементов), если это число конечно.

Под *представлением* группы $G$ понимается гомоморфное отображение $g \to A(g)$ этой группы в группу операторов, действующих в векторном пространстве $X$. Тот факт, что отображение является гомоморфизмом, означает, что

$$gh \to A(gh) = A(g)A(h),$$
$$g^{-1} \to A(g^{-1}) = \{A(g)\}^{-1},$$
$$e \to I,$$

где $I$ — тождественный (единичный) оператор, т. е. $Ix = x$ для всех $x \in X$. Если отображение, кроме того, взаимно однозначно, то оно называется изоморфизмом. На некоторое время мы ограничимся рассмотрением лишь конечномерных векторных пространств (скажем, размерности $N$), так что оператор $A(g)$ можно представить в виде квадратной матрицы порядка $N$. В этом случае будем говорить, что представление имеет *степень* $N$.

Существуют, конечно, группы, которые с самого начала определяются как группы матриц; так, например, $GL(N, R)$ — это группа всех невырожденных квадратных матриц порядка $N$ с вещественными элементами. Эта группа имеет и отличные от себя самой матричные представления, одно из которых мы здесь упомянем, так как оно нам понадобится в дальнейшем. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — компоненты вектора $x$ (рассматриваемого как столбец, составленный из этих вещественных чисел). Рассмотрим пространство всех однородных полиномов (форм) степени $f$ от переменных $x_j$. Всякий такой полином можно записать в виде

$$\sum F(i_1, i_2, \ldots, i)\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_f},$$

где суммирование ведется по всем $i_j$ от 1 до $N$ и $F(i_1, \ldots, i_f)$ — симметрическая функция своих аргументов. Подсчет числа возможных наборов (с повторениями) $f$ целых чисел $i_1, \ldots, i_f$, выбранных из совокупности чисел $1, 2, \ldots, N$, показывает, что эти полиномы образуют векторное пространство размерности $\binom{N+f-1}{f}$. Если мы теперь заменим $x$ на $y = (A^{-1})'x$, где $A \in GL(N, R)$, то исходная форма перейдет в

$$\sum F'(i_1, \ldots, i_f)\, y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_f},$$

где

$$F'(i_1, \ldots, i_f) = \sum_{i'_j} a(i_1, i'_1) \ldots a(i_f, i'_f)\, F(i'_1, \ldots, i'_f). \quad (1)$$

Здесь $a(i, j)$ — элемент $i$-й строки и $j$-го столбца матрицы $A$. Таким образом мы поставили в соответствие матрице $A$ оператор $A_f$, действующий в $\binom{N+f-1}{f}$-мерном пространстве «симметрических тензоров ранга $f$», т. е. функций $F(i_1, \ldots, i_f)$, которые не меняются при произвольной перестановке аргументов.

Нетрудно проверить, что операторы $A_f$ действительно задают представление группы $GL(N, R)$. Симметрические тензоры ранга $f$ образуют линейное подпространство пространства всех тензоров ранга $f$ (называемого $f$-кратным тензорным произведением $X$ на самого себя). Это линейное подпространство инвариантно относительно преобразования (1), т. е. отображается этим преобразованием на себя. Как преобразование полного тензорного пространства преобразование (1) записывается в виде

$$A_f = A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$$

и называется *$f$-кратным тензорным* (или *кронекеровским*) *произведением* представления $A$. Если в этом определении вместо вектора $x$, повторенного $f$ раз, подставить $f$ векторов $x, y, \ldots, z$ (не обязательно имеющих одинаковую размерность), а потом заменить их на $(A^{-1})'x$, $(B^{-1})'y$, ..., $(C^{-1})'z$, то мы получим линейное преобразование $A \otimes B \otimes \ldots \otimes C$ тензорного произведения векторных пространств $X$, $Y$, ..., $Z$.

Другим примером представления, который следует иметь в виду, служит *единичное представление*, получаемое, если приравнять $A(g)$ тождественному оператору при всех $g$.

Если произвести замену базиса в пространстве $X$, то матричная форма каждого из операторов $A(g)$ изменится на $PA(g)P^{-1} = B(g)$. Очевидно, что матрицы $B(g)$ снова задают представление группы $G$. Это новое представление называется *эквивалентным* исходному.

Займемся теперь анализом представлений, т. е. попытаемся разложить всякое представление на фундаментальные (неразложимые далее) компоненты. Если задано множество матриц $S$, то возможно, что с помощью замены базиса векторного пространства, в котором они действуют (т. е. с помощью перехода к эквивалентным матрицам), все наши матрицы можно одновременно привести к виду

$$\begin{bmatrix} \square & & & & & & \\ & \square & & & & & \\ & & \square & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \square \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где все элементы, лежащие вне квадратных блоков на главной диагонали, равны нулю (разумеется, не исключено, что больше одного такого блока получить невозможно). Это равносильно тому, что пространство $X$ представимо в виде прямой суммы подпространств

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k,$$

инвариантных относительно преобразований из $S$. В таком случае говорят, что множество матриц $S$ является прямой суммой составляющих блоков. Если подпространство $X_j$ не содержит подпространств (отличных от него самого и от нулевого подпространства), инвариантных относительно всех преобразований из $S$, то говорят, что множество $S$ *неприводимо* на этом подпространстве. Приводимость или неприводимость множества $S$ зависит от выбора используемого нами числового поля (элементы этого поля мы будем часто называть скалярами, хотя рассматриваться будут лишь поля вещественных и комплексных чисел). При расширении этого поля, например при переходе от поля вещественных чисел к полю комплексных чисел, неприводимое множество матриц может стать приводимым. Если это не происходит и $S$ оказывается неприводимым при любом расширении числового поля, то говорят, что множество $S$ *абсолютно неприводимо.* Далее, если для любого фиксированного поля скаляров можно привести множество $S$ к указанному выше виду, где все подпространства $X_j$ неприводимы, то $S$ называется *вполне приводимым.* В этом случае блоки вида

$$\begin{array}{l} p \text{ строк} \\ \\ N-p \text{ строк} \end{array} \begin{bmatrix} a & : & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ b & : & c \end{bmatrix},$$

где из четырех выделенных блоков только блок в верхнем правом углу состоит из одних нулей, не могут встретиться в нашем разложении. В самом деле, иначе подпространство $X_j$ соответствующих векторов с $p$ первыми нулевыми компонентами (т. е. столбцов с $p$ первыми строками, равными нулю) было бы инвариантным. Такого рода инвариантных подпространств, разумеется, не может быть, если множество $S$ содержит наряду с каждой матрицей $A$ эрмитово сопряженную к ней матрицу $A^*$ (получаемую из $A$ с помощью транспонирования и перехода к комплексно сопряженной матрице, если поле чисел комплексное). Поскольку все линейные комбинации произведений элементов множества $S$, так же как и тождественный оператор, представимы в виде (2), если в этом виде представимы сами элементы из $S$, всегда можно при решении задачи о приведении $S$ к виду (2) рассматривать вместо $S$ новое множество $R$, состоящее из элементов множества $S$, единичной матрицы и всех таких линейных комбинаций. Это множество $R$ называется *линейной ассоциативной алгеброй*, причем к этому названию добавляется еще прилагательное *симметрическая*, если $R$ замкнуто относительно перехода к эрмитово сопряженным элементам. Из того, что было сказано выше, следует, что всякое конечномерное представление такой симметрической алгебры вполне приводимо.

## 3.1. Представления конечных групп

В конце предыдущего раздела мы описали, как исходя из представления некоторой группы, построить соответствующую ему алгебру матриц. Оказывается, что эту алгебру можно рассматривать как представление некоторой абстрактной алгебры $R(G)$, построенной следующим образом. Рассмотрим формальные суммы

$$u = \sum u(g) \cdot g,$$

где $u(g)$ — произвольная последовательность скаляров, а суммирование ведется по всем элементам группы $G$. Линейные комбинации таких сумм определяются обычным образом; кроме того, используя групповое умножение, можно определить также и умножение наших сумм, ассоциативное и дистрибутивное относительно сложения. Мы будем обозначать это новое умножение звездочкой:

$$\begin{aligned} u * v &= \sum u(g) \cdot g \sum v(g) \cdot g = \\ &= \sum_g \Big\{ \sum_h u(gh^{-1})\, v(h) \Big\} g = \\ &= \sum_g \Big\{ \sum_h u(h)\, v(h^{-1}g) \Big\} g. \end{aligned}$$

Особо важную роль играют *унитарные представления* группы $G$, т. е. такие представления, что матрица $A(g)$ унитарна (или ортогональна, если поле скаляров вещественное) при всех $g \in G$. В этом случае мы будем писать $U(g)$ вместо $A(g)$, так что $U(g^{-1}) =$

$= U^*(g)$. Нетрудно показать, что каждое представление конечной группы эквивалентно унитарному представлению [1]). Если задано такое представление $U$ группы $G$ и каждому элементу $u$ алгебры $R(G)$ сопоставлена матрица $P(u) = \sum u(g) U(g)$, то, как легко видеть, для любой последовательности скаляров $\alpha_j$

$$P(u * v) = P(u) P(v), \quad P\left(\sum \alpha_j u_j\right) = \sum \alpha_j P(u_j);$$

кроме того, если положить $u^* = \sum \overline{u(g)} \cdot g^{-1}$, то

$$P(u^*) = P^*(u).$$

Именно эти факты мы и имели в виду, когда назвали $P$ представлением алгебры $R(G)$. Это представление симметрическое в том смысле, что здесь выполняется также и последнее равенство.

Очевидно, что приводимость некоторого представления группы $G$ эквивалентна приводимости соответствующего представления алгебры $R(G)$. Так как каждое представление симметрической алгебры $R(G)$ эквивалентно представлению $P(u)$ указанного вида, а последнее симметрично, то отсюда вытекает, что всякое представление конечной группы вполне приводимо. Остается еще разрешить следующие задачи: (а) построить все неприводимые представления и (б) определить, каким образом заданное представление из них конструируется.

(а) В некотором (не вполне удовлетворительном) смысле все неприводимые представления можно получить следующим образом. Рассмотрим *регулярное представление*

$$g \to A(g): \; A(g)\left\{\sum a(h) \cdot h\right\} = \sum a(h) g \cdot h,$$

при котором элементу $g$ группы $G$ сопоставляется указанный «левый сдвиг» на $R(G)$. Напомним, что алгебра $R(G)$ сама, в частности, является векторным

---

[1]) Для доказательства этого факта достаточно указать скалярное произведение, относительно которого матрица $A(g)$ была бы унитарна, т. е. найти такую эрмитову положительно определенную матрицу $H$, что $A(g) H A^*(g) = H$. Легко видеть, что в качестве $H$ можно взять $\sum\limits_{G} A(g) A^*(g)$.

пространством; вектор этого пространства $u$ (относительно базисных векторов $g$) можно представлять себе как столбец скаляров $u(g)$. При таком выборе базиса в $R(G)$ регулярное представление будет целиком состоять из матриц перестановок, т. е. таких матриц, элементами которых служат только нули и единицы, причем в каждой строке или столбце стоит единственная единица. Это представление группы $G$, так же как и всякое другое, разумеется, вполне приводимо, но оно обладает еще тем важным свойством, что содержит *любое* неприводимое представление. Иначе говоря, если мы преобразуем регулярное представление к виду (2.2) [1]), то любое неприводимое представление появится в качестве одного из блоков на главной диагонали. В действительности если поле скаляров комплексное (или все представления абсолютно неприводимы), то можно даже утверждать, что неприводимое представление степени $d$ содержится ровно $d$ раз в регулярном представлении, так что $\sum d^2 = n$.

Приведенный результат не дает полного ответа на вопрос о нахождении неприводимых представлений, так как остается еще решить задачу об эффективном разложении регулярного представления на неприводимые.

(б) Перенумеруем каким-либо образом все унитарные неприводимые представления группы $G$ и обозначим $r$-е из них через $U^{(r)}(g)$; пусть $u_{ij}^{(r)}(g)$ — элемент на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца матрицы $U^{(r)}(g)$. Тогда, обозначая степень представления через $d_r$, легко показать, что

$$\frac{1}{n}\sum_{G} u_{ij}^{(r)}(g)\, u_{kl}^{(s)}(g^{-1}) = \frac{1}{n}\sum u_{ij}^{(r)}(g)\, \overline{u_{kl}^{(s)}(g)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если верно хотя бы одно из неравенств } r \neq s,\ i \neq l,\ j \neq k, \\ d_r^{-1}, & \text{если } r = s,\ i = l,\ j = k \text{ и представление абсолютно неприводимо.} \end{cases}$$

[1]) Так мы обозначаем формулу (2) раздела 2.

Определим скалярное произведение любых двух функций $f_1$ и $f_2$ на $G$ формулой

$$(f_1,\ f_2)=\frac{1}{n}\sum f_1(g)\overline{f_2(g)},$$

так что относительно этого скалярного произведения все элементы матриц абсолютно неприводимых представлений взаимно ортогональны.

Назовем

$$\chi^{(r)}(g)=\operatorname{tr}\left\{A^{(r)}(g)\right\}=\operatorname{tr}\left\{A^{(r)}\left(hgh^{-1}\right)\right\} \tag{1}$$

(где $\operatorname{tr}A$ означает след матрицы $A$) *характером* $r$-го неприводимого представления. Из сказанного выше следует, что

$$(\chi^{(r)},\ \chi^{(s)})=\begin{cases}0, & \text{если}\quad r\neq s,\\ 1, & \text{если}\quad r=s \text{ и представление}\\ & \text{абсолютно неприводимо.}\end{cases}$$

Пусть $B(g)$ — произвольное представление, рассматриваемое над полем комплексных чисел (или заранее известно, что все неприводимые представления абсолютно неприводимы). Тогда, обозначая след матрицы $B(g)$ через $\chi(g)$, получаем, что $(\chi,\chi^{(r)})$ равно кратности $r$-го неприводимого представления в данном представлении. Таким образом, если известны характеры всех неприводимых представлений, то приведенную форму любого представления над полем комплексных чисел можно найти с помощью указанных соотношений (то же самое верно и в любом случае, когда все представления абсолютно неприводимы). Наконец, оказывается, что множество функций (т. е. векторов) $u_{ij}^{(r)}(g)$ полно в пространстве $R(G)$, т. е. что всякий элемент из $R(G)$ можно представить в виде их линейной комбинации (при тех же условиях, касающихся абсолютной неприводимости). В самом деле, поскольку $\sum d^2=n$, существует $n$ таких векторов $u_{ij}^{(r)}$, причем все они линейно независимы (в силу соотношений ортогональности), а число $n$ совпадает с размерностью векторного пространства $R(G)$.

Существуют специальные таблицы характеров (см., например, Литлвуд [1] [1]). При их составлении используется тот факт, что

$$\chi(hgh^{-1}) = \chi(g),$$

откуда видно, что характер $\chi(g)$ постоянен на *классах эквивалентности*, на которые распадается группа $G$ в силу соотношения эквивалентности $g \sim hgh^{-1}$. Мы будем обозначать множество элементов группы, принадлежащих $i$-му классу, через $C_i$, а число элементов в нем — через $h_i$. Число $r$ неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений конечной группы совпадает с числом классов эквивалентности. Обозначим через $\chi(C_i)$ значение характера на $i$-м классе.

## 3.2. Тасование карт

Цель нашего первого (не особенно важного) примера — проиллюстрировать результат, который еще будет обсуждаться в дальнейшем. Пусть у нас имеется $m$ различных карт, которые мы много раз тасуем. Мы считаем, что каждое отдельное тасование выбирается независимо от остальных с постоянной вероятностью $p(g)$, $g \in S_m$, причем множество тех $g$, для которых $p(g) \neq 0$, не содержится ни в какой истинной (т. е. отличной от самой группы) подгруппе $S_m$, ни в классе смежности по такой подгруппе. Здесь $S_m$ — *симметрическая группа* степени $m$, т. е. группа всевозможных перестановок $m$ объектов. Эта группа обладает тем свойством, что всякое ее неприводимое представление над любым расширением поля рациональных чисел абсолютно неприводимо, и, следовательно, мы можем здесь использовать результаты раздела 3.1. Образуем *преобразование Фурье* — матрицу

$$\sum_{S_m} U^{(r)}(g)\, p(g) = \hat{p}(r),$$

где в соответствии со сказанным выше можно без ограничения общности считать, что $U^{(r)}$ — унитарное

[1]) Более краткие таблицы характеров некоторых важных групп можно найти в книге Мурнагана [1]. — *Прим. ред.*

представление. Тогда легко проверить, что верна теорема о свертке, т. е. если выбрать $g$ и $h$ из $S_m$ независимо и с вероятностями $p(g)$, $q(h)$, то преобразованием Фурье распределения вероятностей $gh$ будет $\hat{p}(r)\,\hat{q}(r)$. Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между $\hat{p}(r)$ и $p(g)$, так как если бы различные $p(g)$ и $q(g)$ имели одно и то же преобразование Фурье, то при любом $r$ выполнялось бы равенство

$$\sum_{S_m} U^{(r)}(g)\,[p(g) - q(g)] = 0,$$

что невозможно в силу полноты системы функций $u_{ij}^{(r)}$ в $R(G)$.

Если обозначить распределение, получающееся после $t$ последовательных независимых тасований, через $p_t(g)$, то $\hat{p}_t(r) = [\hat{p}(r)]^t$. Заметим, что все собственные значения матрицы $\hat{p}(r)$ по абсолютной величине меньше единицы. В самом деле, пусть $\lambda$ — собственное значение, $|x|$ — длина вектора $x$, а $\|A\|$ — норма матрицы $A$ (см. Халмош [1]). Тогда если $\hat{p}(r)x = \lambda x$, то

$$|\lambda|\,|x| = |\hat{p}(r)\,x| = \Big|\sum_r U^{(r)}(g)\,x p(g)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \|U^{(r)}(g)\|\,p(g)\,|x| = |x|,$$

так как все матрицы $U^{(r)}(g)$ унитарны и потому имеют единичную норму. Следовательно, $|\lambda| \leqslant 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $U^{(r)}(g)x = \lambda x$ при всех $g$, для которых $p(g) > 0$. Но элементы из $G$, для которых это верно, образуют класс смежности по совокупности элементов, определяемых из условия $U^{(r)}(g)x = x$, а такая совокупность представляет собой истинную подгруппу $G_0$ (если только индекс $r$ не относится к единичному представлению), так как наше представление неприводимо[1]).

---

[1]) Упомянутый класс смежности есть $G_0 g_0 = g_0 G_0$, где $U^{(r)}(g_0)x = \lambda x$. Так как элементы $g$, для которых $G_0 g_0 = g G_0$, образуют подгруппу, содержащую $G_0$, то она должна совпадать с $G$, т. е. $gG_0 = G_0 g$, и наша теорема оказывается неверной тогда и только тогда, когда множество, на котором $p(g) = 0$, является *нормальным* делителем или классом смежности по нему.

Итак, $|\lambda| < 1$. Отсюда следует, что $[\hat{p}(r)]^t$ сходится к нулевой матрице (за исключением случая индекса $r$, соответствующего единичному представлению, когда $[\hat{p}(r)]^t$ — единичная матрица при всех $t$). Окончательно получаем, что

$$[\hat{p}(r)]^t - \sum U^{(r)}(g) \frac{1}{m!} \to 0,$$

так как $(1/m!) \sum U^{(r)}(g)$ равно единице, если $r$ соответствует единичному представлению, и равно нулю в противном случае (что следует из результатов задачи (б) в разделе 3.1).

Таким образом, предельное распределение является равномерным распределением на группе $S_m$, т. е. в пределе все тасования колоды карт равновероятны. Анализ проведенного доказательства показывает, что для последнего результата указанное выше условие также и необходимо.

## 3.3. Приложение к генетике

Как будет видно из дальнейшего, особо важную роль играют *подстановочные представления*, в которых каждому элементу группы сопоставляется перестановка некоторого множества (число элементов которого равно степени представления). Матрицы таких представлений все состоят только из нулей и единиц, причем в их каждой строке и каждом столбце имеется лишь одна единица. Соответствующее представление унитарно (даже ортогонально) в естественной метрике. Характер $\chi(g)$ представления равен числу элементов, остающихся на месте при перестановке $g$. Можно разбить множество $T$ на классы транзитивности, включив два элемента в один класс тогда и только тогда, когда один из них можно перевести в другой с помощью некоторой перестановки. Эти классы эквивалентных элементов, очевидно, не пересекаются. Нетрудно показать, что число таких классов $k$ задается равенством

$$k = \frac{1}{n} \sum_{G} \chi(g) = \frac{1}{n} \sum h_i \chi(C_i).$$

Последний результат был использован Фишером [1], Джеймсом и Папазяном [1] и другими авторами для определения числа неэквивалентных типов «тетрад», т. е. четверок гаплоидных клеток, содержащих по одной из четырех нитей, на которые расщепляется пара хромосом диплоидной клетки в процессе мейоза. Мы можем рассматривать эти нити в некотором фиксированном порядке соответственно аллелям в некотором локусе, например $AAaa$. Тогда кроссинговер может изменять порядок аллелей в этом локусе. Существуют четыре различные перестановки, оставляющие этот порядок без изменения, так что общее число различных комбинаций здесь равно 6. Таким образом, если рассматривать эти комбинации как элементы множества $T$, то получится представление степени 6 симметрической группы перестановок четырех объектов. Если рассматривать одновременно $l$ локусов, то получится тензорное произведение представлений, являющееся представлением степени $6^l$ той же самой симметрической группы. $6^l$ элементов нового множества $T$ — это всевозможные различные (упорядоченные) множества, соответствующие четырем хромосомам, возникающим из пары хромосом в процессе мейоза, при котором допускаются все формы кроссинговера, не изменяющие порядок локусов вдоль хромосомы. Легко видеть, что если $\tilde{\chi}(g)$ — характер тензорного произведения представлений, а $\chi(g)$ — характер исходного представления, то $\tilde{\chi}(g) = \{\chi(g)\}^l$ (где $\chi(g)$ равно числу элементов из $T$, остающихся на месте при перестановке, соответствующей в нашем представлении элементу $g$). Следовательно, число «неэквивалентных типов тетрад» можно определить по формуле

$$k = \frac{1}{n} \sum h_i \chi^l (C_i).$$

Значения характеров на различных классах легко подсчитать, после чего последняя формула приводит к результату $k = (24)^{-1}(6^l + 9{,}2^l)$. Дальнейшее обсуждение этого и других аналогичных случаев можно найти в работе Джеймса и Папазяна [1].

## 4. Конечные абелевы группы

Если $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$, то группа $G$ называется *абелевой*. Понятно, что все неприводимые представления в этом случае должны быть одномерными, так что характеры неприводимых унитарных представлений задают гомоморфное отображение нашей группы в мультипликативную группу комплексных чисел, равных по модулю единице. Таким образом,

$$\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2),$$
$$\chi(e) = 1, \ \chi(g^{-1}) = \chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)}.$$

Если $\chi(g)$ и $\chi'(g)$ — два характера, то $\chi(g)\chi'(g)$ и $\chi^{-1}(g)$ — также характеры неприводимого представления, так что множество характеров само обладает групповой структурой при указанной операции умножения, причем характер $\chi(g) \equiv 1$ играет роль единичного элемента. Обозначим через $\widehat{G}$ группу характеров. Если элемент $g$ фиксировать, то функция $\chi(g)$ при $\chi$, пробегающем всю группу $\widehat{G}$, гомоморфно отображает $\widehat{G}$ в группу комплексных чисел, равных по модулю единице, и группу характеров абелевой группы $\widehat{G}$ можно отождествить с группой $G$.

Из того, что было сказано о произвольных конечных группах, следует, что существует достаточно много характеров в том смысле, что всякую функцию на $G$ можно представить в виде их линейной комбинации. Напомним также, что характеры удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$n^{-1} \sum_G \chi^{(i)}(g)\overline{\chi^{(j)}(g)} = \delta_i^j.$$

## 5.1. Коммутаторная алгебра

Для дальнейшего будет удобно рассматривать групповую алгебру как множество комплексных функций $a(g)$, определенных на группе и образующих векторное пространство, в котором сверх обычных векторных операций определено произведение

$$a * b(g) = \sum a(gh^{-1})\, b(h). \tag{1}$$

*Коммутаторная алгебра* данного представления состоит из всех матриц $B$, перестановочных с каждой матрицей данного представления. Если представление неприводимо, то все элементы этой алгебры (за исключением нулевой матрицы) невырождены; если же неприводимое представление рассматривается над полем комплексных чисел, то все элементы коммутаторной алгебры лишь числовым множителем отличаются от единичной матрицы. Эти утверждения составляют существо содержания леммы Шура. После приведения (приводимого) представления к простейшей форме мы получим прямую сумму неэквивалентных неприводимых подпредставлений, каждое из которых повторяется в сумме некоторое число раз. Расположим повторяющиеся блоки, соответствующие одной и той же неприводимой компоненте, один под другим вдоль главной диагонали. Тогда матрицы коммутаторной алгебры также распадутся в прямую сумму, и если числовое поле комплексное, то блок, соответствующий данному неприводимому представлению степени $N$, повторенному $p$ раз, будет иметь вид $A \otimes I_N$, где $I_N$ — единичная $N$-мерная матрица. Так, например, при $p = N = 2$ этот блок будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Если же поле чисел вещественное, то, хотя матрицы коммутаторной алгебры представимы в виде прямой суммы блоков, соответствующих составляющим попарно неэквивалентным неприводимым подпредставлениям, сами блоки уже не обязательно имеют такой простой вид. Разумеется, расширив затем поле скаляров до поля комплексных чисел, но не меняя представления группы $G$, мы сможем все же привести элементы коммутаторной алгебры к виду (2). Чаще всего мы будем иметь дело с полем комплексных чисел, так что коммутаторная алгебра будет алгеброй над этим полем.

Особо важен случай, когда все $p$ равны единице, так что элементы коммутаторной алгебры, рассматриваемой над полем комплексных чисел, можно одновременно привести к диагональному виду с помощью преобразования, зависящего лишь от представления, но не от отдельного элемента коммутаторной алгебры. Следует заметить, что если мы имеем дело с вещественными симметрическими матрицами, как это часто бывает в статистических приложениях, то расширение до поля комплексных чисел не связано ни с какими ограничениями. В самом деле, если вещественную симметрическую матрицу $A$ можно привести к диагональному виду преобразованием $A \to PAP^{-1}$, где $P$ — комплексная матрица, то существует такая вещественная матрица $Q$, что матрица $QAQ^{-1}$ также диагональна, причем $Q$ зависит лишь от $P$. Однако если матрица $A$ не симметрическая, то дело обстоит уже не так просто.

Специальный интерес представляют подстановочные представления, о которых уже шла речь в начале раздела 3.3 [1]). Обозначим через $gt$ ту точку, в которую переходит $t$ при перестановке $g$ (предполагая, как обычно, что все точки множества $T$ различимы). Соответствующую матрицу, у которой на пересечении $t$-й строки и $s$-го столбца стоит единица, если $g$ переводит точку $s$ в $t$, мы обозначим через $U(g)$. Мы используем здесь букву $U$, так как эта матрица ортогональна в естественной метрике. Точки множества $T$ можно взаимно однозначно сопоставить правым классам смежности группы $G$ по подгруппе $K$, оставляющей неподвижной некоторую точку $t_0$ [2]), считая, что точке $t$ соответствует класс смежности $gK$, если $gt = t_0$. Точки $(s, t)$ произведения $T \times T$ можно разбить на классы эквивалентности, относя две точки $(s_1, t_1)$ и

[1]) Мы считаем, что $G$ действует на $T$ транзитивно, т. е. для любых $s, t \in T$ найдется подстановка, переводящая $s$ в $t$. Если это не так, то можно разбить $T$ на классы эквивалентности и рассматривать действие группы $G$ на каждом классе в отдельности.

[2]) $K$ называется *стационарной подгруппой* точки $t_0$. Если мы будем исходить из другой точки, скажем $t_1$, то подгруппу $K$ при этом придется заменить на $gKg^{-1}$, где $gt_0 = t_1$.

$(s_2, t_2)$ к одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $gs_1 = s_2$, $gt_1 = t_2$. Отображение $(s, t) \to (gs, gt)$, очевидно, оставляет эти классы инвариантными. Эти классы могут быть также заданы с помощью их индикаторных функций $\chi(s, t)$, принимающих значение 1, если точка $(s, t)$ принадлежит характеризуемому классу, и 0 в противном случае. При этом $\chi(gs, gt) = \chi(s, t)$, т. е. эта функция двух аргументов инвариантна относительно преобразований группы. Из соотношения $U(g)\Gamma = \Gamma U(g)$ видно, что функция $\gamma(s, t)$, равная элементу, стоящему на пересечении $s$-й строки и $t$-го столбца матрицы $\Gamma$ из коммутаторной алгебры представления $U(g)$, $g \in G$, постоянна на классах эквивалентности произведения $T \times T$. Следовательно, $\gamma(s, t) = \sum_j \alpha_j \chi_j(s, t)$, где суммирование ведется по всем классам эквивалентности. Отсюда ясно, что функция $\gamma(s, t)$ также инвариантна относительно преобразований аргументов и, более того, все инвариантные функции можно получить таким образом. Изучение коммутаторной алгебры сводится поэтому к изучению структуры инвариантных функций двух аргументов. А эти функции в свою очередь можно привести во взаимно однозначное соответствие с функциями $f(t)$, определенными на $T$ и обладающими свойством *вращательной симметрии* относительно фиксированной точки $t_0$, т. е. такими, что $f(kt) = f(t)$ для всех $k$ из подгруппы $K$ группы $G$ (термин *вращательная симметрия*, вообще говоря, здесь не очень подходит, но мы его выбрали по аналогии с другими случаями, о которых будет идти речь ниже). Для того чтобы установить указанное соответствие, заметим, что функция $f(t) = \gamma(t, t_0)$ обладает свойством вращательной симметрии и для всякой функции $f$, обладающей этим свойством, функция двух аргументов $\gamma(s, t) = f(g_0 s)$, где $g_0 t = t_0$, инвариантна, так как

$$\gamma(gs, gt) = f(g_0 g^{-1} gs) = \gamma(s, t).$$

Для любой функции $p(t)$ можно построить соответствующую ей вращательно симметричную функцию, полагая

$$f(t) = \frac{1}{m} \sum_{k \in K} p(kt),$$

где $m$ — порядок подгруппы $K$. Множитель $m^{-1}$ здесь введен для того, чтобы отображение $p \to f$ было идемпотентным.

Функции $f(t)$, обладающие свойством вращательной симметрии, можно рассматривать также как функции $\tilde{f}(g)$ на $G$; для этого надо только положить

$$\tilde{f}(g) = f(t), \quad \text{если} \quad gt_0 = t, \tag{3}$$

так что $\tilde{f}(gk) = \tilde{f}(g)$. Вспомним теперь, что $f(kt) = f(t)$. Следовательно, функция $\tilde{f}(g)$, получаемая из $f(t)$ указанным способом, *двояко инвариантна*, а именно инвариантна и относительно левых, и относительно правых сдвигов: для $k \in K$

$$L_k\tilde{f}(g) = \tilde{f}(k^{-1}g),$$
$$R_k\tilde{f}(g) = \tilde{f}(gk).$$

(Определение оператора $L$ здесь выбрано так, чтобы выполнялось равенство $L_{k_1k_2} = L_{k_1}L_{k_2}$.)

Обратно, всякую функцию $\tilde{f}(g)$, удовлетворяющую соотношению $\tilde{f}(kgk') = \tilde{f}(g)$, можно рассматривать как функцию на $T$, задаваемую равенством (3), причем функция $f(t)$ здесь будет вращательно симметричной относительно $t_0$.

Итак, мы видим, что изучение коммутаторной алгебры подстановочного представления эквивалентно изучению инвариантных функций двух аргументов, заданных на $T \times T$, что в свою очередь эквивалентно изучению функций на $T$, вращательно симметричных относительно некоторой фиксированной точки. Изучение же этих последних равносильно изучению двояко инвариантных функций на $G$.

Заметим, что двояко инвариантные функции на $G$ образуют алгебру над полем комплексных чисел. В самом деле, линейная комбинация двух таких функций, очевидно, также двояко инвариантна, и если $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ — две такие функции, то

$$\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(kg_0k') = \sum_g \tilde{f}_1(kg_0k'g^{-1})\tilde{f}_2(g) = \sum_g \tilde{f}_1(g_0k'g^{-1})\tilde{f}_2(g) = $$
$$= \sum_g \tilde{f}_1(g_0g^{-1})\tilde{f}_2(gk') = \sum \tilde{f}_1(g_0g^{-1})\tilde{f}_2(g) = \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(g_0).$$

Выясним теперь, при каких условиях эта алгебра коммутативна, т. е. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$. Оказывается, это будет тогда и только тогда, когда коммутативна коммутаторная алгебра рассматриваемого представления. В самом деле,

$$\sum_g \tilde{f}_1(g_0g^{-1})\tilde{f}_2(g) = \sum_g \gamma_1(gg_0^{-1}t_0,\ t_0)\gamma_2(g^{-1}t_0,\ t_0),$$

где $\gamma_1(s, t)$ и $\gamma_2(s, t)$ — элементы матриц $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ коммутаторной алгебры, соответствующие функциям $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$. Последняя сумма равна

$$\sum_g \gamma_1(g_0^{-1}t_0,\ g^{-1}t_0)\gamma_2(g^{-1}t_0,\ t_0) = [G:K]\,\gamma_{12}(g_0^{-1}t_0,\ t_0),$$

где $\gamma_{12}(s, t)$ — элемент матрицы $\Gamma_1\Gamma_2$. Таким образом, алгебра двояко инвариантных функций, рассматриваемая над полем комплексных чисел, коммутативна, если ни одна неприводимая компонента данного представления не имеет кратности, большей единицы.

Укажем важный подкласс таких функций *для случая когда двояко инвариантные функции образуют коммутативную алгебру*. Рассмотрим фиксированное неприводимое представление $U^{(r)}(g)$ над полем комплексных чисел. При $g$, пробегающем подгруппу $K$, представление $U^{(r)}$ может уже оказаться приводимым и, в частности, может содержать одномерное (единичное) представление. В этом последнем случае мы будем говорить, что наше представление есть *представление класса* 1, и использовать для его обозначения верхний индекс $\lambda$ (вместо $r$). Если представление $U^{(\lambda)}(k)$ записано в приведенном виде, то элемент на главной диагонали, соответствующий одномерному представлению, тождественно равен единице на $K$, но на $G$ он принимает и отличные от единицы значения. Этот диагональный элемент $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$, очевидно, двояко инвариантен (все элементы той же строки, что и наш элемент, будут левоинвариантны, а того же столбца — правоинвариантны). Мы будем называть $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$ *зональной сферической функцией* [1]). Но в каждом неприводимом представлении $U^{(\lambda)}(g)$ при $g$, пробегающем $K$, единичное представление имеет кратность не большую единицы [2]); поэтому все зональные сферические функции ортогональны, т. е. $\left(\tilde{\varphi}^{(\lambda_1)}, \tilde{\varphi}^{(\lambda_2)}\right)=0$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ (см. раздел 3.1), в то время как $\left(\tilde{\varphi}^{(\lambda)}, \tilde{\varphi}^{(\lambda)}\right)=d_\lambda^{-1}$, где $d_\lambda$ — степень неприводимого представления содержащего $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}$.

Таким образом, существует столько же ортогональных функций $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$, сколько существует неприводимых представлений группы $G$, содержащих сужение единичного представления на подгруппу $K$. Если теперь мы вернемся к исходному подстановочному представлению, с помощью которого определялась подгруппа $K$, то увидим, что всякое такое неприводимое представление содержится в исходном, а все другие представления не содержатся. (Это утверждение является частным случаем принадлежащей Фробениусу

---

[1]) Строго говоря, следовало бы называть эту функцию *положительно определенной зональной сферической функцией.*

[2]) Схема доказательства этого факта такова. Подпространство $N$ пространства, в котором действуют операторы $U^{(\lambda)}(g)$, состоящее из всех векторов, инвариантных относительно преобразований $U^{(\lambda)}(k)$, инвариантно относительно любого оператора $\sum \tilde{f}(g)\, U^{(\lambda)}(g)$, где функция $\tilde{f}(g)$ двояко инвариантна. Если пространство $N$ не одномерно, то в силу того, что все эти операторы перестановочны друг с другом (и, следовательно, также и с сопряженными к ним), можно найти два вектора $x_1$ и $x_2$ из $N$, принадлежащих к взаимно ортогональным подпространствам, инвариантным относительно этих операторов. Нетрудно показать, что вектор $U^{(\lambda)}(g)x_1$ также ортогонален к $x_2$ при всех $g \in G$. Но множество $U^{(\lambda)}(g)x_1$ при $g \in G$ будет инвариантным подпространством, не содержащим $x_2$, что невозможно в силу неприводимости представления $U^{(\lambda)}(g)$.

теоремы взаимности.) Итак, существует столько же зональных сферических функций, сколько существует неприводимых компонент исходного представления, т. е. их число равно размерности коммутаторной алгебры как векторного пространства. Отсюда вытекает, что зональные сферические функции, будучи ортогональными и, следовательно, линейно независимыми, образуют базис в пространстве всех двояко инвариантных функций на $G$.

Известно, что элементы столбца матрицы неприводимого представления, содержащего зональную сферическую функцию, правоинвариантны относительно подгруппы $K$ и ортогональны (здесь предполагается, что представление уже записано в том базисе, в котором его сужение на подгруппу $K$ имеет приведенный вид). Мы будем использовать символ $\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g)$ $(i = 1, \ldots, d_\lambda)$ для $i$-й из этих обычных *сферических функций*, принадлежащих $\lambda$-му неприводимому представлению группы $G$ (класса 1), имеющему степень $d_\lambda$; при этом подразумевается, что зональная сферическая функция $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$ совпадает с одной из функций $\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g)$. Сферические функции[1]) могут рассматриваться как функции, определенные на $T$, так как $\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(gk) = \tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g)$, т. е. $\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g)$ постоянны на правых классах смежности по подгруппе $K$. Положим теперь $\varphi_i^{(\lambda)}(t) = \tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g)$, если $gt_0 = t$. Тогда

$$\frac{d_\lambda}{[G:K]} \sum_t \varphi_i^{(\lambda_1)}(t)\, \overline{\varphi_j^{(\lambda_2)}}(t) = 0,$$

если $i \neq j$ или $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а при $\lambda_1 = \lambda_2$ и $i = j$ эта сумма равна единице. Таким образом, $\{\varphi_i^{(\lambda)}(t)\}$ — ортогональная последовательность функций на $T$. Этих функций столько же, сколько элементов множества $T$, так что функции $\varphi_i^{(\lambda)}(t)$ образуют базис в линейном пространстве всех функций на $T$.

---

[1]) Следует подчеркнуть, что выбор какой-либо одной функции $\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g)$ произволен, поскольку произволен выбор ортогонального базиса. Это замечание, разумеется, не относится к зональным функциям $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$.

Заметим, наконец, что $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{1}{m}\sum_{K}\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g_1kg_2)=\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g_1)\,\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g_2). \tag{4}$$

В самом деле, левая часть этого уравнения равна

$$\frac{1}{m}\sum_{K}\left\{\sum_{i}\sum_{j}\overline{\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g_1^{-1})}\,\tilde{\varphi}_j^{(\lambda)}(g_2)\,u_{ij}^{(\lambda)}(k)\right\},$$

где матрица $U^{(\lambda)}$ предполагается разложенной на неприводимые блоки. Сумма

$$\frac{1}{m}\sum_{K}u_{ij}^{(\lambda)}(k)$$

равна нулю, если индекс $i$ (или $j$) не равен индексу строки (столбца), соответствующей единичному представлению, и равна единице, если выполняются оба указанные равенства. Отсюда сразу следует (4).

Если коммутаторная алгебра некоммутативна, то положение оказывается более сложным. В этом случае уже неверно, например, что неприводимое представление группы $G$ при сужении на подгруппу $K$ содержит единичное представление самое большее один раз. Однако из той же теоремы взаимности Фробениуса следует, что кратность некоторого неприводимого представления в заданном подстановочном представлении группы $G$ (матрицы которого — это перестановки точек из $T$) равна кратности единичного представления подгруппы $K$ в этом неприводимом представлении. Путем замены базиса можно преобразовать матрицы $\lambda$-го неприводимого представления группы $G$ так, что если рассматривать это представление лишь на подгруппе $K$, то единичные представления будут занимать первые $p_\lambda$ элементов главной диагонали. Пусть $\tilde{\varphi}_{ij}^{(\lambda)}(g)$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ p_\lambda)$ — элементы соответствующего главного минора этих матриц (конечно, если $g\in K$, то при $i\neq j$ эти элементы равны нулю, а при $i=j$ они равны единице). Назовем их и в этом случае *зональными сферическими функциями.*

Ясно, что они двояко инвариантны (относительно сдвигов на элементы подгруппы $K$) и ортогональны. Матрицы коммутаторной алгебры распадаются на блоки, соответствующие разложению данного представления на повторяющиеся неприводимые компоненты, и каждый блок является полной матричной алгеброй (т. е. алгеброй всех матриц заданной размерности), состоящей из матриц размерности $p_\lambda$, где $p_\lambda$ — кратность соответствующего $\lambda$-го неприводимого подпредставления. Как векторное пространство эта алгебра имеет размерность $p_\lambda^2$. Отсюда следует, что здесь также существует ровно столько зональных сферических функций, сколько надо, чтобы они могли составлять базис в пространстве всех двояко инвариантных функций на $G$ (действительно, как мы знаем, каждая такая функция порождается элементами коммутаторной алгебры). Если мы возьмем теперь функции $\tilde{\varphi}_{ij}^{(\lambda)}(g)$ $\left(i = 1, \ldots, d_\lambda;\ j = 1, \ldots, p_\lambda\right)$, то эти (обычные) *сферические функции* снова будут ортогональны и их число равно размерности данного представления, т. е. числу точек множества $T$. Поэтому они образуют базис в пространстве всех функций на $T$.

Как и раньше, можно рассматривать функции $\tilde{\varphi}_{ij}^{(\lambda)}(g)$ как $\varphi_{ij}^{(\lambda)}(t)$, определенные на $T$, причем если индексы $i$, $j$ пробегают значения $1, \ldots, p_\lambda$, то $\varphi_{ij}^{(\lambda)}(t)$ обладает вращательной симметрией относительно подгруппы $K$.

## 5.2. Дисперсионный анализ

Этот пример применения теории представлений групп принадлежит Джеймсу [2] (см. также Манн [1]). Рассмотрим планирование эксперимента с множеством «ячеек» («планов»), отвечающих совокупности заданного экспериментального объекта и используемого способа обработки. Внутреняя симметрия эксперимента выражается в априорной инвариантности распределения вероятностей наблюдений относительно некоторой группы перестановок ячеек. Простым примером служит эксперимент с рандомизированными блоками. Если множество ячеек расположить в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют исследуемым способам обработки, а столбцы соответствуют «блокам» родственных экспериментальных объектов, то допустимыми преобразованиями будут перестановки строк, оставляющие столбцы без изменения, или перестановки столбцов, оставляющие без изменения строки, или произведения тех и других перестановок. Однако, например, две ячейки из одного и того же блока не могут быть переставлены в различные блоки. Симметрия в этом случае соответствует априорной модели, согласно которой все способы обработки эквивалентны в отношении производимого ими эффекта (или, точнее говоря, такой модели, в которой распределение вероятностей результатов наблюдений симметрично относительно различных способов обработки). Конечно, более точное априорное знание возможных эффектов обработки может оказаться полезным для сужения группы симметрии планирования. В таком случае описанная выше общая группа допустимых симметрий заменится некоторой своей подгруппой.

Коммутаторная алгебра представления группы симметрий данного планирования эксперимента в пространстве векторов, компоненты которых соответствуют всевозможным ячейкам, упорядоченным произвольным образом, была названа Джеймсом «алгеброй соотношений» (relationship algebra)[1]. Эта алгебра порождается единичной матрицей, «матрицей блоков» $B$ (содержащей единицу на пересечении $s$-й строки и $t$-го столбца, если $s$-я и $t$-я ячейки принадлежат одному блоку), и аналогично определенной «матрицей способов обработки» $T$. Коммутаторная алгебра всегда содержит также «универсальную матрицу» $G$, состоящую из одних единиц. В эксперименте с рандомизированными блоками $BT = TB = G$.

[1]) Проф. Джеймс отметил, что алгебра, порожденная «матрицами соотношений» (содержащими единицу на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца, если $i$-я и $j$-я ячейки связаны некоторым определенным образом, и нули на всех остальных местах) не всегда будет коммутаторной алгеброй группы симметрий некоторого планирования эксперимента. См. Джеймс [2] и Манн [1].

В случае когда алгебра соотношений коммутативна, дисперсионный анализ имеет особенно простой вид. В самом деле, если ограничиться случаем нормального распределения вероятностей результатов наблюдений, то достаточно будет знать лишь матрицу среднеквадратических ошибок наблюдений, принадлежащих различным ячейкам. Эта матрица по предположению принадлежит коммутаторной алгебре группы перестановок, и, следовательно, она полностью известна, если известны ее диагональные элементы после того, как она приведена к диагональному виду. Пусть $E_\lambda$ — идемпотентный оператор проектирования на подпространство, в котором действует $\lambda$-я неприводимая компонента (размерности $d_\lambda$) данного представления. Обозначим через $\mathbf{E}$ операцию осреднения (т. е. перехода к математическому ожиданию), и пусть $x$ — вектор наблюдений. Тогда

$$\frac{1}{d_\lambda}\mathbf{E}\,(x'E_\lambda x)=\frac{1}{d_\lambda}\mathbf{E}\,\mathrm{tr}\,(xx'E_\lambda)=\frac{1}{d_\lambda}\mathrm{tr}\,(\Gamma E_\lambda),$$

где $\Gamma$ — матрица среднеквадратических ошибок наблюдений. Выписанная величина — это собственное значение матрицы $\Gamma$, стоящее на месте, соответствующем $\lambda$-му неприводимому подпредставлению, когда матрица $\Gamma$ приведена к диагональному виду. Так как $\sum\limits_\lambda E_\lambda=I$ и $E_\lambda E_\mu$ — нулевая матрица (если $\lambda\neq\mu$), то полный средний квадрат (дисперсия) здесь распался на отдельные компоненты (эти компоненты имеют $d_\lambda$ степеней свободы). Если наши априорные знания более информативны, то группа симметрий заменится некоторой своей подгруппой и коммутаторная алгебра станет более обширной. При этом первоначальные неприводимые компоненты распадутся на суммы меньших новых «неприводимых компонент» и соответственно матрицы $E_\lambda$ уже не будут определять разложение дисперсии, а отвечающие им $d_\lambda$ степеней свободы разобьются на меньшие группы (разумеется, возникающая новая алгебра соотношений не обязана оставаться коммутативной).

Если же алгебра соотношений некоммутативна, то ситуация более сложна, так как собственные векторы матрицы Г здесь заранее неизвестны и поэтому собственные значения не определяют эту матрицу. Единичная матрица и здесь распадается на сумму попарно ортогональных «примитивных» идемпотентных элементов (здесь слово «примитивный» указывает на то, что они не распадаются далее на идемпотентные элементы алгебры). В случае когда рассматривается алгебра над полем комплексных чисел, являющаяся коммутаторной алгеброй представления группы, эти примитивные идемпотентные элементы осуществляют проектирование на подпространства, в которых действуют неприводимые представления (возможно, повторяющиеся). Этот факт иллюстрируется в работе Джеймса [2] на примере сбалансированного неполного блока. В этом случае матрицы блоков и способов обработки удовлетворяют соотношению

$$TBT = \lambda G + (r - \lambda) T,$$

где $\lambda$ — число блоков, в которых встречаются ячейки, соответствующие любым двум фиксированным способам обработки, а $r$ — число повторений способа обработки. Обозначим через $k$ число ячеек в блоке. Из написанного соотношения можно вывести таблицу умножения для всей алгебры и показать, что ее размерность равна 7, причем все ее элементы можно представить в виде линейных комбинаций 7 базисных элементов $I$, $B$, $G$, $T$, $BT$, $TB$ и $BTB$. Эта алгебра некоммутативна и, следовательно, должна содержать хотя бы одну подалгебру, изоморфную алгебре квадратных матриц второго порядка. С другой стороны, она не может содержать подалгебру матриц третьего порядка, так как размерность последней равна 9. Таким образом, вся алгебра изоморфна алгебре матриц, нормальная форма которых имеет вид

$$\begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix}.$$

Явный вид идемпотентных элементов указан в работе Джеймса [2]. Первые три элемента дают соответственно компоненты, отвечающие общему среднему, остаточной компоненте в блоках (без учета той части в разложении дисперсии, которая отвечает способу обработки) и ошибке внутри блоков. Четвертый идемпотентный элемент можно разбить на компоненту, соответствующую способам обработки в блоках без учета эффекта обработки в разложении дисперсии, и компоненту способов обработки, не учитывающую ту часть разложения дисперсии, которая отвечает ошибкам в блоках. Так как для описания этой части ковариационной матрицы нужны четыре постоянные, то две выбранные составляющие четвертой компоненты не исчерпывают всей доступной информации. В связи с этим обычно предлагается альтернативный подход, при котором четвертая компонента разбивается на компоненту способов обработки в блоках (игнорирующую способы обработки) и компоненту способов обработки (игнорирующую разбиение на блоки). Конечно, естественно также желать уменьшить число степеней свободы второй и третьей компонент, но такое уменьшение возможно лишь при наличии более полной априорной информации.

## 5.3. Стационарные процессы второго порядка

Теперь мы приступим к проблеме, математически эквивалентной задаче, которой мы только что занимались. Эта проблема рассматривалась многими авторами в различной степени общности (см. в первую очередь статью Яглома [2][1]); здесь мы ее рассмотрим отчасти из-за ее собственного математического интереса, а отчасти потому, что она представляет собой конечномерный аналог весьма важных моделей, о которых будет говориться в дальнейшем.

Рассмотрим множество $T$, на котором определен *стационарный в широком смысле процесс* $x(t)$, т. е.

---

[1]) А также примыкающие к этой статье работы [1, 3] того же автора. — *Прим. ред.*

семейство вещественных случайных величин $x(t)$ с ковариационной функцией $\gamma(s, t) = \mathbf{E}(x(s)x(t))$, удовлетворяющей условию

$$\gamma(gs,\ gt) = \gamma(s,\ t), \qquad g \in G,$$

где $G$ — некоторая транзитивная группа перестановок элементов множества $T$. Предположим (временно), что коммутаторная алгебра этого представления группы $G$ перестановками множества $T$ коммутативна. Термин *стационарный* здесь следует понимать как *стационарный относительно группы симметрий* $G$. Рассмотрим векторное пространство всех линейных комбинаций функций $x(t)$ с комплексными коэффициентами. Здесь функции $x(t)$ зависят не только от параметра $t$, но и от не выписываемой явно переменной $\omega$, принимающей значения из «выборочного пространства», образованного всеми возможными множествами $\{x(t)\}$, допустимыми с точки зрения имеющегося распределения вероятностей. Наше векторное пространство конечномерно, так как мы рассматриваем линейные комбинации лишь конечного числа функций. Рассмотрим суммы

$$\frac{d_\lambda}{[G:K]} \sum_t x(t)\,\overline{\varphi_i^{(\lambda)}(t)} = z_i^{(\lambda)}$$

и положим

$$x(t) = \sum_{i,\ \lambda} z_i^{(\lambda)} \varphi_i^{(\lambda)}(t). \tag{1}$$

(Здесь под $K$ снова понимается стационарная подгруппа некоторой точки $t_0$.) Тогда $z_i^{(\lambda)}$ будут случайными величинами. Мы знаем, что

$$\gamma(u,\ v) = \begin{cases} \gamma(g_0 u,\ t_0), & g_0 v = t_0, \\ \gamma(g t_0,\ t_0), & g t_0 = g_0 u = g_0 g_1^{-1} t_0, \quad g_1 u = t_0, \end{cases}$$

так что $\gamma(u, v)$ зависит только от множества $g_1^{-1} K g_0 \subset G$ преобразований, переводящих $v$ в $u$. Отсюда

$$\gamma(u,\ v) = \sum_\lambda f(\lambda)\,\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g), \tag{2}$$

поскольку функция $\gamma(gt_0, t_0)$ двояко инвариантна и, следовательно, представима в виде линейной комбинации зональных сферических функций. Кроме того,

$$\gamma(u,\ v) = \sum_{i,\lambda}\sum_{j,\mu} \varphi_i^{(\lambda)}(u)\,\overline{\varphi_j^{(\mu)}(v)}\,\mathbf{E}\left(z_i^{(\lambda)}\overline{z_j^{(\mu)}}\right) =$$
$$= \sum\sum \tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g_1^{-1})\,\overline{\tilde{\varphi}_j^{(\mu)}(g_0^{-1})}\,\mathbf{E}\left(z_i^{(\lambda)}\overline{z_j^{(\mu)}}\right). \qquad (3)$$

Но $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g) = \sum\limits_i \tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g_1^{-1})\overline{\tilde{\varphi}_i^{(\lambda)}(g_0^{-1})}$, так что, сравнивая равенства (2) и (3), получаем

$$\mathbf{E}\left(z_i^{(\lambda)}\overline{z_j^{(\mu)}}\right) = \begin{cases} f(\lambda), & \text{если} \quad i = j,\ \lambda = \mu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соотношение (1) (называемое *спектральным разложением*) дает, таким образом, представление процесса $x(t)$ в виде суммы ортогональных компонент с дисперсиями $\mathbf{E}\left(\left|z_i^{(\lambda)}\right|^2\right) = f(\lambda)$, где функция $f(\lambda)$ называется *спектральной плотностью.* Легко проверить, что $f(\lambda)$ равна величине $d_\lambda^{-1}\operatorname{tr}(\Gamma E_\lambda)$, упоминавшейся в предыдущем разделе, и $d_\lambda^{-1}x'E_\lambda x = d_\lambda^{-1}\sum\limits_i \left|z_i^{(\lambda)}\right|^2$, так что ситуация здесь лишь по форме, но не по существу отличается от той, которая встретилась нам при изучении дисперсионного анализа.

Если $G$ — абелева группа, так что и факторгруппа $G/K$ абелева, то можно положить $T = G$ и равенства (1) и (2) перейдут в

$$\begin{aligned} x(g) &= \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g)\,z(\chi), \\ z(\chi) &= \sum_G x(g)\,\overline{\chi(g)}, \end{aligned} \qquad (1')$$

$$\gamma(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} f(\chi)\,\chi(g), \qquad (2')$$

причем

$$\mathbf{E}\left(z(\chi)\,\overline{z(\chi')}\right) = 0, \quad \text{если} \quad \chi \neq \chi',$$
$$\mathbf{E}\left(|z(\chi)|^2\right) = f(\chi).$$

Случай, когда $G$ — это группа циклических перестановок $n$ объектов, важен для анализа временных рядов и рассматривается в книге Хеннана [1] (см. также следующий раздел).

Если коммутаторная алгебра некоммутативна, положение более сложно. Введем в рассмотрение величины

$$z_{ij}^{(\lambda)} = \frac{d_\lambda}{[G:K]} \sum_t x(t) \overline{\varphi_{ij}^{(\lambda)}(t)}, \quad i=1, \ldots, d_\lambda, \ j=1, \ldots, p_\lambda,$$

где $\lambda$ пробегает множество индексов, соответствующих неприводимым представлениям группы $G$, содержащим единичное представление подгруппы $K$. Тогда

$$x(t) = \sum_\lambda \sum_{i=1}^{d_\lambda} \sum_{j=1}^{p_\lambda} z_{ij}^{(\lambda)} \varphi_{ij}^{(\lambda)}(t).$$

Далее,

$$\gamma(s, t) = \sum_\lambda \sum_{i, j=1}^{p_\lambda} f_{ij}(\lambda)\, \tilde{\varphi}_{ij}^{(\lambda)}(g), \quad gt = s,$$

причем

$$\mathbf{E}\left(z_{i,j}^{(\lambda)} \overline{z_{i',j'}^{(\mu)}}\right) = \delta_\lambda^\mu \delta_j^{j'} f_{i,i'}(\lambda); \quad i, i' = 1, \ldots, p_\lambda.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, в представление ковариационной функции в виде суммы зональных сферических функций здесь входят также и постоянные, отличные от дисперсий компонент $z_{ij}^{(\lambda)}$.

Заметим, что

$$\gamma(s, t) = \sum_\lambda \operatorname{tr}\left\{F'(\lambda)\, \tilde{\Phi}^{(\lambda)}(g)\right\},$$

где матрица $F(\lambda)$ состоит из элементов $f_{ij}(\lambda)$ (штрих, как обычно, обозначает транспонирование), а матрица $\tilde{\Phi}^{(\lambda)}(g)$ — из элементов $\tilde{\varphi}_{ij}^{(\lambda)}(g)$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\gamma(s, t) = \sum_\lambda \operatorname{tr}\left\{F'(\lambda)\, E_\lambda U^{(\lambda)}(g)\, E_\lambda\right\},$$

где $E_\lambda$ — оператор проектирования на подпространство пространства, в котором действует оператор $U^{(\lambda)}$, соответствующее единичным представлениям подгруппы $K$. Аналогично

$$x(t) = \sum_{\lambda} \operatorname{tr}\{Z'(\lambda)\, U^{(\lambda)}(g)\, E_{\lambda}\},$$

где матрица $Z(\lambda)$ составлена из элементов $z_{ij}^{(\lambda)}$.

## 5.4. Вещественный случай, единственность дисперсионного анализа и пример

Следует заметить, что в описанном выше разбиении на $d_\lambda$ степеней свободы, соответствующих $\lambda$-й зональной сферической функции, есть некоторый произвол. Действительно, так как случайные величины $z_i^{(\lambda)}$ (где $\lambda$ фиксировано) имеют одну и ту же дисперсию и ортогональны, то мы можем, не зная функции $\gamma(s, t)$, заменить эти величины $z_i^{(\lambda)}$ любым другим набором случайных величин, получаемых из них с помощью ортогонального преобразования. Поэтому случай, когда все числа $d_\lambda$ равны единице, играет особую роль, так как тогда дисперсионный анализ определяется однозначно. Это происходит только тогда, когда группа $G$ абелева. Таким образом, возможность полного дисперсионного анализа зависит от коммутативности коммутаторной алгебры (т. е. от того, содержит или не содержит представление группы кратные неприводимые компоненты), в то время как его единственность (связанная с единственностью разбиения на степени свободы) зависит от коммутативности самой группы $G$.

Хотя выше анализ проводился над полем комплексных чисел, можно использовать методы дисперсионного анализа, приводящие к диагонализации ковариационной матрицы, но оперирующие лишь с полем вещественных чисел. Это возможно в силу указанного в разделе 5.1 обстоятельства, так как интересующий нас элемент коммутаторной алгебры веществен и симметричен. Существенное обобщение модели, обсужденной в предыдущих разделах, возникает в случае, когда в каждой точке $t$ производится два (или более) наблюдения, скажем $x(t)$ и $y(t)$. Мы предположим теперь, что

$$\gamma_x(s, t) = \mathbf{E}(x(s)\,x(t)),$$
$$\gamma_y(s, t) = \mathbf{E}(y(s)\,y(t)),$$
$$\gamma_{xy}(s, t) = \mathbf{E}(x(s)\,y(t))$$

— инвариантные функции двух аргументов из $T$. Анализ над полем комплексных чисел проводится, как и раньше, и, в случае когда коммутаторная алгебра коммутативна, все три матрицы (с элементами $\gamma_x(s, t)$, $\gamma_y(s, t)$, $\gamma_{xy}(s, t)$) можно одновременно привести к диагональному виду с помощью заранее известного преобразования.

В вещественном случае дело обстоит сложнее в отношении матрицы с элементами $\gamma_{xy}(s, t)$, которая несимметрична. Вещественные спектральные компоненты (получаемые из величин $z_i(\lambda)$ для каждого наблюдения) группируются попарно, причем (если только сами $z_i(\lambda)$ не вещественны) матрица математических ожиданий перекрестных произведений пары для процесса $x$ и соответствующей пары для процесса $y$ недиагональна. Проиллюстрируем сказанное примером. Рассмотрим два процесса $x(t)$ и $y(t)$, где $T$ — множество целых чисел по модулю $n$. Группа $G$ в нашем примере — это группа всех циклических перестановок $n$ объектов, а $K$ — единичная подгруппа.

В рассматриваемом случае все характеры имеют вид $\exp\{it\lambda_j\} = \exp\{i2\pi jt/n\}$ (приведенная формула дает значение $j$-го характера в точке $t$, причем множество этих точек находится здесь во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $G$). Таким образом, при использовании комплексного числового поля получаем для $j = 0, \ldots, n-1$

$$z_x(\lambda_j) = \frac{1}{n} \sum_t x(t) \exp\left\{-i\frac{2\pi jt}{n}\right\},$$

$$z_y(\lambda_j) = \frac{1}{n} \sum_t y(t) \exp\left\{-i\frac{2\pi jt}{n}\right\};$$

нижний индекс теперь показывает, с каким наблюдением мы имеем дело (поскольку этот индекс нам не понадобится для других целей). При этом единственными ненулевыми перекрестными произведениями будут

$$\mathbf{E}(z_x(\lambda_j)\overline{z_x(\lambda_j)}) = f_x(\lambda_j);$$
$$\mathbf{E}(z_y(\lambda_j)\overline{z_y(\lambda_j)}) = f_y(\lambda_j);$$
$$\mathbf{E}(z_x(\lambda_j)z_y(\lambda_j)) = f_{xy}(\lambda_j).$$

Ограничиваясь полем вещественных чисел, мы должны ввести в рассмотрение величины

$$u_x(\lambda_j) = \{z_x(\lambda_j) + \overline{z_x(\lambda_j)}\},$$
$$v_x(\lambda_j) = \frac{1}{i}\{z_x(\lambda_j) - \overline{z_x(\lambda_j)}\},$$

договорившись, что значение $u_x(\lambda_j)$ равно $z_x(\lambda_j)$, если $\lambda_j$ равно 0 или $\pi$. Аналогично определяются величины $u_y(\lambda_j)$ и $v_y(\lambda_j)$. Все величины $u_x(\lambda_j)$, $v_x(\lambda_j)$, так же как и $u_y(\lambda_j)$, $v_y(\lambda_j)$, ортогональны, и их средние квадраты попарно равны. Однако ненулевыми перекрестными произведениями величин $u_x$, $v_y$ и т. д. теперь будут

$$\mathbf{E}(u_x(\lambda_j)u_y(\lambda_j)) = \mathbf{E}(v_x(\lambda_j)v_y(\lambda_j)) = f_{xy}(\lambda_j) + f_{yx}(\lambda_j),$$
$$\mathbf{E}(u_x(\lambda_j)v_y(\lambda_j)) = -\mathbf{E}(v_x(\lambda_j)u_y(\lambda_j)) = \frac{1}{i}\{f_{yx}(\lambda_j) - f_{xy}(\lambda_j)\},$$

так что матрица, составленная из элементов $\gamma_{xy}(s, t)$, здесь не сводится к диагональной. Это известное обстоятельство, физически интерпретируемое в терминах соотношений фазы и когерентности между двумя наблюдаемыми фиксированной частоты $\lambda_j$, часто кажется непосвященным таинственным; оно, как мы видели, имеет сравнительно глубокий математический смысл.

## 6. Коммутативность коммутаторной алгебры

Вопрос о коммутативности коммутаторной алгебры исследовал Макларен в работе [1]. Ясно, что абсолютно неприводимые представления группы перестановок можно разбить на следующие три типа:

(1) Представления, эквивалентные вещественным представлениям.

(2) Представления, не относящиеся к типу (1), но эквивалентные комплексно сопряженным к себе представлениям, т. е. представлениям, получающимся из исходных при замене каждой матрицы комплексно сопряженной.

(3) Представления, не относящиеся ни к типу (1), ни к типу (2).

Будем рассматривать представления группы $G$ вещественными матрицами и интересоваться коммутативностью коммутаторной алгебры этого представления. Даже если эта алгебра некоммутативна, все равно возможно, что играющая наиболее важную роль в нашей теории ковариационная матрица тем не менее допускает представление в виде (2) предыдущего раздела (так как она, как мы знаем, не является совершенно произвольным элементом коммутаторной алгебры, а обязательно вещественна и симметрична). Разумеется, так будет всегда, когда все абсолютно неприводимые представления группы $G$ имеют кратность не более единицы. Оказывается, однако, что это верно и тогда, когда представления типов (1) и (3) входят в разложение не больше одного раза, а представления типа (2) входят дважды[1]). Конечно, нетрудно увидеть, что если какая-либо неприводимая компонента типа (2) или (3) входит в разложение, то в силу вещественности представления это же верно и для комплексно сопряженной компоненты, так что если представление типа (2) входит в разложение, то оно должно входить по крайней мере дважды.

Условия такого типа неудобны для практической проверки. Макларен упомянул также достаточное условие другого рода для приводимости ковариационной матрицы к диагональному виду заранее известным унитарным преобразованием, а именно чтобы группа $G$ переставляла всякую пару элементов из $T$. Более общим условием будет *слабая симметрия* множества $T$,

[1]) Это было доказано Маклареном с помощью соотношения, выражающего размерность векторного пространства вещественных симметрических матриц, перестановочных с данным представлением, в виде функции от кратностей неприводимых представлений различных типов.

т. е. существование такого взаимно однозначного отображения $\mu$ множества $T$ на себя, что для любых $s$ и $t$ равенства $\mu s = gt$, $\mu t = gs$ выполняются при некотором $g$[1]). Если $\mu$ — тождественное отображение, то это условие сводится к только что упомянутому условию Макларена. Докажем достаточность этого условия: для любой инвариантной функции $\gamma(s, t)$

$$\gamma(\mu t, \mu s) = \gamma(gs, gt) = \gamma(s, t),$$

откуда

$$\gamma_{12}(s, t) = \sum_u \gamma_1(s, u)\gamma_2(u, t) =$$
$$= \sum_u \gamma_2(\mu t, \mu u)\gamma_1(\mu u, \mu s) = \gamma_{21}(\mu t, \mu s) = \gamma_{21}(s, t).$$

Таким образом, выполнение искомого условия, а, следовательно, также и условия Макларена обеспечивает коммутативность коммутаторной алгебры. Поэтому для слабо симметричных пространств дисперсионный анализ приобретает желаемую простую форму, выраженную в соотношении (5.3.2).

## 7. «Склеивание» в схеме неполных блоков[2])

Обсуждаемая ниже задача о планировании при отсутствии некоторых ячеек, возможно, и не является практически важной в случае классической ситуации

---

[1]) Если такое отображение $\mu$ существует, то оно должно удовлетворять условиям $\mu G \mu^{-1} = G$ и $\mu^2 \in G$, так как легко видеть, что $\gamma(\mu g \mu^{-1} s, \mu g \mu^{-1} t) = \gamma(s, t)$ и, следовательно, перестановка $\mu g \mu^{-1}$ коммутирует со всеми элементами коммутаторной алгебры. Так как коммутаторная алгебра коммутаторной алгебры совпадает с алгеброй всех линейных комбинаций матриц представления, то $\mu g \mu^{-1} \in G$. Аналогично $\gamma(\mu^2 s, \mu^2 t) = \gamma(s, t)$, откуда $\mu^2 \in G$.

[2]) В оригинале вместо слова «склеивание» употреблен непереводимый термин «aliasing», предложенный Дж. Тьюки (J. W. Tukey) для обозначения аналогичного эффекта в спектральной теории стационарных процессов (и происходящий от слова «aliases», обозначающего клички, используемые преступником в дополнение к своему настоящему имени). — *Прим. ред.*

планирования экспериментов, когда число недостающих ячеек невелико[1]) и значения функции $\gamma(gt_0, t_0)$ можно оценить при любом $g$. Конечно, теория представления групп может быть полезной при решении уравнений для оценок недостающих данных наблюдений, но этим вопросом мы здесь заниматься не будем[2]). Рассматриваемая нами задача (точнее, ее бесконечномерный вариант) представляет, однако, большой интерес для теории стационарных процессов второго порядка, как это будет видно из дальнейшего. Здесь она обсуждается в значительной степени из-за эвристического значения предварительного рассмотрения конечномерного случая. Мы ограничимся ситуацией, когда коммутаторная алгебра коммутативна.

Рассмотрим ситуацию, когда наблюдаются не все точки $t \in T$, а лишь подмножество $ht_0, ht_1, \ldots, ht_p$, где $h$ пробегает некоторую подгруппу $H$ порядка $m$ группы $G$. Обозначим через $H_0$ множество $H \cap K$, состоящее из элементов группы $H$, оставляющих неподвижной точку $t_0$. Тогда по отношению к множеству $T_0 = Ht_0$ группа $H$ играет ту же роль, что и группа $G$ по отношению к множеству $T$.

Таким образом, здесь мы получаем разложение дисперсии вида

$$\frac{m}{c_r} f_0(r) = \sum_H \gamma(ht_0, t_0)\overline{\chi_H^{(r)}(h)},$$

где $\chi_H^{(r)}(h)$ — характер $r$-го неприводимого представления группы $H$ степени $c_r$. Можно, конечно, представить $f_0(r)$ в виде суммы членов, соответствующих некоторым зональным сферическим функциям на $H$ относительно $H \cap K$ (стоящим на диагонали матриц $r$-го неприводимого представления). Однако такое представление функции $f_0(r)$ не соответствует разбиению

---

[1]) Разумеется, она может иметь некоторое отношение к планированию экспериментов с какими-то отсутствующими наблюдениями типа многофакторного анализа со сгруппированными факторами.

[2]) Эта задача может рассматриваться как одна из задач теории прогнозирования или интерполяции.

вектора наблюдений на ортогональные компоненты и потому не имеет особенного значения. Разумеется, если коммутаторная алгебра представления группы $H$ перестановками множества $T_0$ коммутативна, то зональные сферические функции могут заменить характеры. Аналогично если мы рассмотрим группу $H$ как действующую на множестве $T_g = Ht_g$, $gt_g = t_0$, то получим равенство

$$\frac{m}{c_r} f_g(r) = \sum_H \gamma(g^{-1}hgt_0, \ t_0)\overline{\chi_H^{(r)}(h)},$$

соответствующее дисперсионному анализу наблюдений из этого множества. Для упрощения мы будем использовать обозначение $f_i(r)$ в случае, когда $t_g = t_i$.

Наша цель — выразить $f_i(r)$, $i = 0, \ldots, p$, в терминах $f(\lambda)$ для всей группы $G$. Такая формула укажет нам степень смешивания, вводимую отсутствующими ячейками. Нужной нам формулой является формула следов Зельберга, согласно которой

$$\frac{1}{m} \sum_G \sum_H \gamma(g^{-1}hgt_0, \ t_0)\chi_H^{(r)}(h) = \\ = \sum_i n_i^{(r)} \sum_G \gamma(gt_0, \ t_0)\overline{\chi^{(i)}(g)}, \qquad (1)$$

где $\chi^{(i)}(g)$ — характер $i$-го неприводимого представления группы $G$, а $n_i^{(r)}$ — кратность $r$-го неприводимого представления группы $H$ в $i$-м неприводимом представлении группы $G$ при сужении его на $H$. Так как функция $\gamma(g^{-1}hgt_0, t_0)$ постоянна на классах смежности по стационарной подгруппе $H$ точки $gt_0$, а $\gamma(gt_0, t_0)$ двояко инвариантна относительно сдвигов на элементы из $K$, то

$$\frac{1}{n} \sum_G f_g(r) = \sum_\lambda n_\lambda^{(r)} \frac{c_r}{d_\lambda} f(\lambda) = \sum_\lambda k_\lambda^{(r)} f(\lambda), \qquad (2)$$

где $d_\lambda$ — степень $\lambda$-го неприводимого представления группы $G$ и

$$k_\lambda^{(r)} = n_\lambda^{(r)} \frac{c_r}{d_\lambda}.$$

Заметим, что $\sum\limits_r k_\lambda^{(r)} \equiv 1$. Верно также, что представлениями, порождающими ненулевой вклад в левую часть равенства (2), будут лишь представления класса 1; тем не менее мы сохраним используемые выше общие обозначения.

Запишем (2) в виде

$$\frac{1}{[G:H]} \sum_{G/H} f_g(r) = \sum_\lambda k_\lambda^{(r)} f(\lambda); \tag{3}$$

это возможно в силу инвариантности $f_g(r)$ на классах смежности группы $G$ по $H$. Последняя формула — та, которую мы разыскиваем. Чтобы проиллюстрировать ее применение, рассмотрим экспериментальную ситуацию, при которой возможен выбор $H$ и $t_0, \ldots, t_p$. Если число выбранных точек $t_i$ достаточно велико, то можно надеяться, что

$$\frac{1}{p+1} \sum_i f_i(r) \approx \frac{1}{[G:H]} \sum_{G/H} f_g(r),$$

тогда как при соответствующем выборе подгруппы $H$ можно надеяться, что величина $\sum k_\lambda^{(r)} f(\lambda)$ близка к некоторой плотности $f(\lambda)$, определяемой по заданному $r$. Во всяком случае, (3) показывает, какую информацию о «спектральной плотности» $f$ можно получить при том или ином выборе точек $t_i$.

Если $H$ — нормальный делитель группы $G$, то всякое неприводимое представление группы $G$, рассматриваемое на $H$, распадается на «сопряженные» неприводимые представления группы $H$ равных степеней, где слово «сопряженные» означает, что $H$ представляется в двух неприводимых инвариантных подпространствах матрицами $A(h)$ и $A(g^{-1}hg)$. (Это утверждение часто называется теоремой Клиффорда.) Если $H$ — нормальный делитель группы $G$, то

$$\sum_H \gamma(g^{-1}hgt_0, t_0)\overline{\chi_H^{(r)}(h)} = \sum_H \gamma(ht_0, t_0)\overline{\chi_H^{(r)}(ghg^{-1})},$$

где $g\tilde{h}g^{-1} \in H$ в силу определения нормального делителя. Таким образом,

$$\frac{c_r}{m}\sum_H \gamma(ht_0,\ t_0)\left\{\frac{1}{[G:H]}\sum_{G/H}\overline{\chi_H^{(r)}(ghg^{-1})}\right\}=\sum k_\lambda^{(r)} f(\lambda).$$

Согласно теореме Клиффорда, число $k_\lambda^{(r)}$ при заданном номере $\lambda$ неприводимого представления группы $G$ отлично от нуля только для представлений, сопряженных к заданному неприводимому представлению группы $H$, а для них всех оно принимает одно и то же значение. Следовательно,

$$\frac{c_r}{n}\sum_H \gamma(ht_0,\ t_0)\overline{\chi_0^{(r)}(h)}=\sum k_\lambda^{(r)} f(\lambda), \tag{4}$$

где $\chi_0^{(r)}(h)$ — характер представления группы $G$, индуцированного $r$-м неприводимым представлением группы $H$ с помощью способа, описываемого ниже.

Возьмем $m=[G:H]$ экземпляров векторного пространства $X^{(r)}$, в котором действует $r$-е неприводимое представление группы $H$ (уже не предполагаемой обязательно нормальным делителем группы $G$), и образуем их прямую сумму, которую можно рассматривать как пространство векторов-столбцов размерности $mc_r$, содержащих $m$ последовательно записанных векторов из $X^{(r)}$. Обозначим это новое пространство через $X_0^{(r)}$. Сопоставим теперь элементу $g \in G$ матрицу $U_0^{(r)}(g)$, составленную из $m^2$ блоков $c_r$-мерных субматриц с элементами типа $U^{(r)}(g_j g g_j^{-1})$, если $g_i g g_j^{-1} \in H$, и нулевыми элементами в противном случае. Здесь $g_i$ — элементы из левых классов смежности группы $G$ по $H$. Тогда ясно, что если $H$ — нормальный делитель группы $G$, то

$$\chi_0^{(r)}(h)=\operatorname{tr}\{U_0^{(r)}(h)\}=\sum_{G/H}\operatorname{tr}\{U^{(r)}(ghg^{-1})\}=\sum_{G/H}\chi_H^{(r)}(ghg^{-1}).$$

Понятно, что в этом случае (когда $H$ — нормальный делитель) формула (4) содержит полную информацию о плотности $f$. В самом деле, если мы выберем некоторое неприводимое представление группы $H$, отличное от $r$-го, скажем $s$-е, то число $k_\lambda^{(r)}$ будет отлично от нуля при $k_\lambda^{(s)}=0$ и будет равно нулю при $k_\lambda^{(s)} \neq 0$. Следовательно, соединение компонент полного разложения дисперсии описывается весьма просто. Явление, выраженное формулой (4), в теории стационарных процессов носит название «склеивание» (aliasing), а в планировании экспериментов и дисперсионном анализе оно называется «соединение», или «смешение» (confounding). Каждая компонента разложения дисперсии наблюдений складывается из компонент разложения, отвечающего всем ячейкам, наблюдаемым или нет — безразлично. Эти составляющие компоненты называют «соединенными» (confounded) или «склеенными» (aliased).

Случай, когда $G$ — абелева группа, особенно важен. Здесь формула (4) всегда верна. Этот случай мы еще обсудим в разделе 13.3.

В проведенных рассуждениях не учитывалась информация, содержащаяся в перекрестных произведениях наблюдений, принадлежащих двум различным множествам $Ht_i$, $Ht_j$. Возможно, найдется подмножество всего множества $\bigcup\limits_i Ht_i$, имеющее вид $H_1 s$, $s \in T$, и доступное обработке указанным методом. Более общим образом следует начинать с рассмотрения максимальной подгруппы $H_0$ группы $G$, оставляющей инвариантной все множество точек, в которых делаются наблюдения. Мы не будем, однако, касаться здесь этого вопроса.

## 8.1. Непрерывные группы и мера Хаара

*До сих пор* мы занимались *лишь* конечными группами. Рассмотрим теперь бесконечные группы, снабженные некоторой топологией, т. е. такие, на которых определено понятие непрерывности. (Мы будем далее рассматривать только сепарабельные группы, т. е. группы, удовлетворяющие второй аксиоме счетности.)

Потребуем, чтобы групповые операции $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$, $g \to g^{-1}$ были непрерывными функциями своих аргументов. (Многие важные топологические группы являются группами Ли, т. е. группами, на которых можно задать локальные координаты, позволяющие ввести обычную евклидову метрику и с ее помощью определить понятие непрерывности. Такие группы будут подробнее рассмотрены чуть ниже.)

Прежде всего нам надо определить операцию, которая позволила бы образовывать выражения, аналогичные $n^{-1} \sum f(g)$, для функций $f(g)$, заданных на группе. Если наша группа — аддитивная группа вещественных чисел, то такая операция, очевидно, определяется как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$. Существенное свойство последнего функционала — его инвариантность относительно сдвига интегрируемой функции. Это свойство однозначно определяет меру Лебега (с точностью до постоянного множителя). Если $G$ — локально компактная[1]) группа (только такие группы мы будем рассматривать в дальнейшем), то на ней также можно задать меру (интегрирование по которой в дальнейшем будет обозначаться символом $dg$), такую, что

$$\int\limits_G f(g)\, dg = \int\limits_G f(hg)\, dg \tag{1}$$

для всех $h$ и интегрируемых функций $f$. Эта мера, называемая (левоинвариантной) *мерой Хаара*, единственна с точностью до постоянного множителя. Важный класс локально компактных групп составляют компактные группы; на них мера Хаара может быть нормирована условием, что мера всей группы $G$ равна единице (это условие дальше всегда будет полагаться выполненным), после чего она становится

[1]) То есть группа, каждый элемент которой обладает компактной окрестностью.

однозначно определенной. Более того, для таких групп

$$\int_G f(gh)\,dg = \int_G f(g)\,dg, \tag{2}$$

так что левоинвариантная мера Хаара здесь также и правоинвариантна. Группа, для которой выполнены соотношения (1) и (2), называется *унимодулярной*. Из только что сказанного следует, что компактные группы всегда унимодулярны; легко видеть, что то же самое верно и для всех абелевых групп.

Другой важный класс унимодулярных групп составляют *полупростые группы Ли*. Под группой Ли понимается топологическая группа, являющаяся локально евклидовой, т. е. такой, что некоторую окрестность каждой ее точки можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторую область $p$-мерного евклидова пространства. Отсюда уже вытекает, что локальные координаты в группе можно ввести так, чтобы в области, в которой перекрываются две локальные координатные системы, координаты одной системы можно было выразить в виде аналитических функций от координат другой, причем координаты точки $g_1g_2^{-1}$ при этом будут аналитическими функциями координат точек $g_1$ и $g_2$.

*Касательным пространством* этого многообразия в точке $e$ называется $p$-мерное вещественное векторное пространство, определяемое следующим образом. Рассмотрим дифференцируемую кривую $g(t)$, зависящую от вещественного параметра $t$ со значениями в группе $G$, для которой $g(0) = e$. Пусть $g(t)$ имеет координаты $x^{(i)}(t)$, $i = 1, \ldots, p$, в локальной системе координат, связанной с точкой $e$. Тогда числа $[dx^{(i)}(t)/dt]_{t=0}$ можно рассматривать как компоненты вектора, касательного к кривой $x(t)$. Множество всех таких векторов и есть по определению касательное пространство. (На самом деле можно даже ограничиться рассмотрением кривых $g(t)$, образующих однопараметрическую подгруппу, т. е. таких, что $g(s+t) = g(s)g(t)$ и $g(-t) = \{g(t)\}^{-1}$.) Мы можем рассматривать компоненты этих векторов как координаты (относительно некоторого специального базиса) отображения пространства всех дифференцируемых функций $f(s)$, задаваемого формулой

$$f \to \left[\frac{d}{dt} f(g(t))\right]_{t=0}.$$

Упомянутый выше специальный базис задается с помощью отображения

$$f \to \left(\frac{\partial f(g)}{\partial x^{(i)}}\right)_{g=e}.$$

Таким образом, можно представлять себе касательное пространство как пространство линейных отображений дифференцируемых функций на $G$ в множество вещественных чисел, получаемых с помощью линейных дифференциальных операторов в точке $g = e$.

Другая операция, заданная для пары векторов касательного пространства, — *произведение Ли*, или *коммутатор*. Эта операция определяется с помощью сопоставления каждой паре однопараметрических подгрупп $x(t)$ и $y(t)$ (с касательными векторами $X$ и $Y$) кривой

$$z(t) = x(\sqrt{t})\, y(\sqrt{t})\, x^{-1}(\sqrt{t})\, y^{-1}(\sqrt{t}).$$

Если $Z$ — касательный вектор к кривой $z(t)$ в точке $e$, то мы будем писать

$$Z = [X, Y]$$

и называть $Z$ произведением Ли, или коммутатором векторов $X$ и $Y$. Ясно, что $[X, X]$ — это нулевой вектор; кроме того, легко показать, что

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Введенное произведение билинейно относительно своих аргументов, но не ассоциативно. Оно и не коммутативно, так как $[Y, X] = -[X, Y]$. Касательное пространство в точке $e$, рассматриваемое как векторное пространство с заданным произведением Ли, называется *алгеброй Ли* группы Ли. Элементы алгебры

Ли мы будем обозначать прописными латинскими буквами.

Важность групп Ли связана, с одной стороны, с их локально евклидовой топологией и вытекающими отсюда удобными аналитическими свойствами, позволяющими использовать разработанный аналитический аппарат, а с другой стороны, — с тем, что очень многие важные группы являются группами Ли. Полная линейная группа $GL(N, R)$ является, разумеется, группой Ли, причем в качестве координат здесь можно принять элементы матриц. Ее алгебру Ли $gl(N, R)$ можно отождествить с алгеброй всех квадратных матриц порядка $N$ (безразлично вырожденных или невырожденных) с произведением Ли двух таких матриц, задаваемым формулой

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Важный подкласс всех групп Ли составляют полупростые группы Ли; он по существу исчерпывается классическими собственными подгруппами матричных групп $GL(N, R)$ и $GL(N, C)$ (последняя состоит из всех невырожденных комплексных матриц порядка $N$) [1]. Он содержит, кроме унимодулярной группы $SL(N, R)$ (и $SL(N, C)$) всех матриц порядка $N$ с определителем, равным единице, также и матричные группы над полем вещественных (или комплексных) чисел, оставляющие инвариантной некоторую квадратичную (эрмитову) форму или же кососимметрическую (косоэрмитову) билинейную форму. Отсюда видна важность класса полупростых групп, содержащего, очевидно, в числе прочих (вещественную) ортогональную группу $O(N)$, унитарную группу $U(N)$, группу Лоренца (оставляющую в четырехмерном пространстве инвариантной квадратичную форму, определяе-

[1]) Полупростые группы Ли можно классифицировать в терминах их алгебр Ли, что, как показал Картан, в свою очередь можно свести к классификации всех компактных простых алгебр Ли (т. е. алгебр Ли компактных групп Ли, не содержащих нетривиальных идеалов). Если исключить пять особых случаев, то оказывается, что остаются только алгебры Ли ортогональной, унитарной и симплектической групп.

мую диагональной матрицей, содержащей на диагонали три раза число 1 и один раз число —1) и симплектическую группу (оставляющую инвариантной общую вещественную кососимметрическую билинейную форму). Важность этих полупростых групп Ли будет показана позже также и с другой точки зрения.

## 8.2. Многомерный статистический анализ

Рассмотрим матрицу

$$E = [e_{ij}], \; i = 1, \ldots, q; \; j = 1, \ldots, N,$$

составленную из случайных величин, имеющих плотность вероятности

$$|\Sigma|^{-N/2} (2\pi)^{-Nq/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\Sigma^{-1} EE'\}\right], \tag{1}$$

так что ее столбцы представляют $N$ наблюдений $q$-мерного нормального вектора с нулевым средним и ковариационной матрицей $\Sigma$. Плотность (1) инвариантна относительно (одновременных) преобразований

$$E \to AEP, \qquad \Sigma \to A\Sigma A',$$
$$A \in GL(q, R), \qquad P \in O(N).$$

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о том, что $B$ — нулевая матрица, для модели, задаваемой равенством

$$Y = BX + E,$$

где $X$ — некоторая $(p \times N)$-матрица. Хорошо известно, что отношение правдоподобия для этой гипотезы (обозначим его $\Lambda(N, p, q)$) зависит лишь от «углов», определяющих относительную ориентацию в $N$-мерном пространстве двух многомерных плоскостей, проходящих через начало координат и являющихся линейными оболочками векторов-строк матриц $Y$ и соответственно $X$. Если $B$ — нулевая матрица, то распределение, индуцированное в пространстве всех $q$-мерных плоскостей $N$-мерного пространства распределением элементов матрицы $E$, инвариантно относительно вращений этого пространства плоскостей (так как таким свойством обладает распределение элементов матрицы $E$). Можно показать, что эта инвариантная вероятностная мера единственна, но данный факт нам сейчас не понадобится.

Рассмотрим условное распределение критерия $\Lambda$ при фиксированном $X$. Это распределение не изменится, если произвести вращение, переводящее подпространство, порожденное строками матрицы $X$, в некоторое стандартное положение (скажем, в подпространство, натянутое на первые $p$ координатных осей). Следовательно, оно не зависит от матрицы $X$, а также от распределения ее элементов, когда $X$ не фиксировано. Если предположить, что и $X$, и $Y$ определяют инвариантно и независимо друг от друга распределенные плоскости, то распределение критерия $\Lambda$ можно будет получить как условное распределение при фиксированном $X$, или как условное при фиксированном $Y$, или как безусловное при $X$ и $Y$ нефиксированных. Так как и первая и вторая процедуры приводят, как мы видели, к тому же результату, что и третья, то обе они согласуются и между собой; поэтому распределение углов между независимыми плоскостями, а следовательно, и распределение критерия $\Lambda$ будут одним и тем же во всех случаях, когда одна из плоскостей распределена инвариантно независимо от распределения другой.

В случае когда $X$ — единичный вектор, наша задача сводится к проверке гипотезы о том, что столбцы матрицы имеют нулевые средние значения; в этом случае $\Lambda$, очевидно, сводится к $1-r^2$, где $r$ — множественный коэффициент корреляции между элементами единичного вектора и элементами строк матрицы $Y$. Эта статистика $r$ при нулевой гипотезе поэтому должна быть распределена как множественный коэффициент корреляции, так как последнее обстоятельство будет справедливо, если заменить единичный вектор инвариантно распределенным вектором, но фиксировать $Y$. Если $F$ — матрица, проектирующая в $(N-p_1)$-мерное подпространство пространства, порожденного строками матрицы $X$, а $BX(I-F)$ — нулевая матрица, то можно считать, что критерий $\Lambda$

зависит лишь от распределения углов между плоскостями, определяемыми матрицами $Y(I-F)$ и $X(I-F)$. Так как $P(I-F)=(I-F)P$, если $P$ — вращение плоскости, на которую проектирует матрица $I-F$, то равенство $Y(I-F)P=YP(I-F)$ определяет инвариантно распределенную плоскость в этом пространстве и новый критерий $\Lambda$, а именно $\Lambda(N-p_1, p-p_1, q)$ имеет указанное распределение. Выбрав $p=2$ и приняв в качестве первой строки матрицы $X$ единичный вектор, а в качестве второй — вектор, состоящий (скажем) из $N_1$ единиц и последующих $N_2$ чисел $-1$ (где $N_1+N_2=N$), а за матрицу $F$ взяв матрицу, проектирующую на подпространство, порожденное единичным вектором, мы получаем статистику, эквивалентную статистике Хотеллинга для проверки гипотезы о различии между двумя средними; при этом статистика $\Lambda(N-1, 1, q)$ снова имеет вид $1-r^2$, где $r$ — множественный коэффициент корреляции.

Использование свойств ортогональной группы для вывода распределений вероятностей, возникающих в многомерном статистическом анализе, получило большое развитие в трудах Джеймса, первая работа которого (Джеймс [1]) является фундаментальной в этой области. Позже мы вернемся к этому предмету. Геометрическая наглядность изложенных выше рассуждений, безусловно, очень важна и делает их предпочтительнее непосредственных аналитических выкладок, основанных на преобразовании координат, появляющемся в ходе доказательства совершенно неожиданно — как яйцо, извлекаемое из шляпы фокусника.

## 9.1. Компактные группы

Можно показать, что всякое представление компактной группы эквивалентно (в слегка расширенном смысле) унитарному представлению; поэтому в настоящем разделе мы будем рассматривать только унитарные представления. Замечательно то, что почти все теоремы, известные для случая конечных групп, сохраняют силу и в случае, о котором идет речь.

(а) Все неприводимые представления здесь можно получить с помощью операторов, действующих в *конечномерном пространстве.*

(б) Всякое представление вполне приводимо, т. е. пространство представления можно разложить в прямую сумму (вообще говоря, счетного числа) ортогональных конечномерных пространств, в каждом из которых действует неприводимое представление.

(в) Сохраняются соотношения ортогональности для неприводимых представлений, т. е.

$$\int\limits_G u_{ij}^{(r)}(g)\,\overline{u_{pq}^{(s)}(g)}\,dg = 0,$$

если только рассматриваемые два представления не эквивалентны. (В силу унитарности здесь $u_{qp}(g^{-1}) = \overline{u_{pq}(g)}$.) Кроме того,

$$\int\limits_G u_{ij}^{(r)}(g)\,\overline{u_{i'j'}^{(r)}(g)}\,dg = \begin{cases} \dfrac{1}{d_r}, & \text{если} \quad i = i', \ j = j', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(г) Существует «достаточно много» неприводимых представлений в том смысле, что если $f(g)$ — произвольная непрерывная функция на $G$, то ее можно равномерно аппроксимировать линейными комбинациями функций $u_{ij}^{(r)}(g)$. Этот факт составляет содержание теоремы Петера — Вейля, частным случаем которой (для случая когда $G$ — группа вращений окружности) является теорема Вейерштрасса.

Из сказанного выше, в частности, следует, что если представление $U(g)$ не единичное, то

$$\int\limits_G u_{ij}(g)\,dg = 0.$$

## 9.2. Центральная предельная теорема

Рассмотрим единичный вектор $x$ трехмерного пространства. Будем подвергать его в последовательные моменты времени случайным вращениям, каждое из которых выбирается независимо от остальных в соответствии с некоторым заданным на группе вращений $O_+(3)$ распределением вероятностей [1]). Таким образом, в момент $t$ мы получим вектор

$$A^{(t)}x = A_t A_{t-1} \ldots A_2 A_1 x.$$

Нахождение предельного распределения вектора $A^{(t)}x$ при $t \to \infty$ и произвольном $x$, очевидно, эквивалентно нахождению предельного распределения самой матрицы $A^{(t)}$. Как и раньше, предположим, что носитель вероятностной меры на группе вращений не содержится ни в каком собственном (т. е. отличном от всей группы) замкнутом нормальном делителе, ни в классе смежности по такому делителю. (Под носителем мы понимаем такое множество вращений, всякая окрестность точки которого имеет положительную меру, т. е. «наименьшее множество вращений, получающееся при исключении вращений, которых не может быть».) Точно так же, как и в случае, рассмотренном в разделе 3.2, здесь можно показать, что предельным распределением для $A^{(t)}$ будет мера Хаара на группе вращений. Получающийся отсюда результат представляет собой одну из форм центральной предельной теоремы.

Предельное распределение можно описать следующим образом. Рассмотрим вращение как поворот ортогональных осей некоторой прямоугольной системы координат. Введем в качестве координат на группе углы Эйлера $\varphi_1$, $\theta$, $\varphi_2$, где

$\varphi_1$ — угол, на который должна быть повернута ось $x$, чтобы она совпала с линией пересечения первоначальной плоскости $(x, y)$ с новым положением этой же плоскости после поворота,

$\varphi_2$ — угол между этой линией пересечения и новым положением оси $x$,

$\theta$ — угол между новой и старой осями $z$.

---

[1]) Под группой вращений $O_+(N)$ мы понимаем здесь связную компоненту ортогональной группы, содержащую единичную матрицу, т. е. множество всех ортогональных матриц с определителем, равным единице.

Первые два угла меняются между 0 и $2\pi$, а третий — между 0 и $\pi$. Инвариантное интегрирование функции $f(g)$ задается в этих координатах формулой

$$\int f(g)\,dg = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

## 10.1. Конечномерные представления классических групп Ли

Все неприводимые представления симметрической группы хорошо известны, и с их помощью можно вывести неприводимые компоненты представлений группы $GL(N, R)$ в тензорном пространстве. В самом деле, если $F(i_1, \ldots, i_f)$ — произвольный тензор (не обязательно симметрический), то представлением, индуцированным матрицей $A = [a(i, j)]$ в этом тензорном пространстве, будет отображение

$$F(i_1,\ \ldots,\ i_f) \to \sum_{i'_j} a(i_1,\ i'_1)\ \ldots\ a(i_f,\ i'_f)\, F(i'_1,\ \ldots,\ i'_f),$$

которое мы будем обозначать как

$$A \otimes A \otimes\ \ldots\ \otimes A \quad (f \text{ раз}).$$

Обертывающей алгеброй этого представления будет алгебра всех преобразований тензорного пространства, получаемых с помощью составления вещественных линейных комбинаций таких отображений (с различными матрицами $A$, но, разумеется, фиксированным числом $f$). Можно показать, что эта алгебра состоит из тех (бисимметрических) операторов

$$F(i_1,\ \ldots,\ i_f) \to \sum_{i'_j} a(i_1,\ \ldots,\ i_f;\ i'_1,\ \ldots,\ i'_f)\, F(i'_1,\ \ldots,\ i'_f),$$

у которых коэффициенты $a(i_1, \ldots, i_f;\ i'_1, \ldots, i'_f)$ инвариантны относительно одновременной одинаковой перестановки $f$ первых и $f$ последних индексов. Если $s$ — оператор, переставляющий индексы тензора $F$, то указанная инвариантность означает, что

$$AsF = sAF$$

при всех тензорах $F$, так что $A$ здесь — элемент коммутаторной алгебры соответствующего представления симметрической группы перестановок $f$ объектов. Оказывается, что алгебра всех бисимметрических преобразований совпадает со всей коммутаторной алгеброй этого представления симметрической группы. Таким образом, если известно, как это представление симметрической группы распадается на составляющие неприводимые блоки, то известно тем самым также и соответствующее разложение операторов $A$.

Существует, однако, еще более тесная связь между коммутаторной алгеброй и данным представлением группы. Подробное изложение этого вопроса заняло бы слишком много места; для дальнейшего достаточно знать, что тензорное пространство распадается на сумму неприводимых подпространств, инвариантных относительно бисимметрических преобразований, следующим образом. Рассмотрим разбиение числа $f$ на целочисленные слагаемые:

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_N, \quad f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_N \geqslant 0,$$

где $N$ — размерность исходного векторного пространства, над которым строится пространство тензоров ранга $f$ (это означает, что все индексы $i_j$ тензора $F(i_1, \ldots)$ пробегают значения от 1 до $N$). Расположим целые числа от 1 до $f$ в $N$ строках, в $j$-й из которых имеется ровно $f_j$ столбцов; например, при $N = 3$ разбиению $f = 6 = 3 + 2 + 1$ соответствует расположение

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | |
| 6 | | |

Рассмотрим все тензоры вида $cF$, где $c$ — оператор

$$c = \sum_q \sum_p \delta_q q \cdot p;$$

здесь $p$ пробегает все перестановки индексов тензора $F$, оставляющие строки диаграммы инвариантными, а $q$ — все перестановки, действующие аналогичным образом по отношению к столбцам; $\delta_q = +1$ в случае четной перестановки $q$ и $\delta_q = -1$ в случае нечетной. При этом мы получим в точности все неприводимые подпространства пространства тензоров ранга $f$, в котором действует порождаемое тензорным произведением матриц представление группы $GL(N, R)$. На самом деле таким путем получаются все неприводимые подпространства тензорного пространства, если заменить поле $R$ любым расширением поля рациональных чисел. В частности, таким образом можно получить и все неприводимые представления группы $GL(N, C)$ [1]). Эти представления остаются неприводимыми, если эту группу заменить унимодулярной группой $SL(N, C)$ (то же самое верно и в отношении $SL(N, R)$, если исходить из $GL(N, R)$) или унитарной группой $U(N)$. Последний факт особенно важен, так как унитарная группа компактна.

## 10.2. Распределение собственных значений ковариационной матрицы

Рассмотрим снова матрицу $EE'$ раздела 8.2 и займемся задачей получения распределения ее собственных значений. Если $\Sigma = I$, то это сравнительно нетрудно сделать, так как плотность вероятности зависит здесь лишь от этих собственных значений. Соответствующее этому случаю распределение получено Андерсоном [1, стр. 430]. В случае $\Sigma \neq I$ Джеймс [3] следующим образом подошел к задаче нахождения искомого распределения. Плотность распределения собственных значений, очевидно, не меняется при замене $E$ на $HE$ (где $H$ — ортогональная матрица) в выражении для плотности вероятности элементов матрицы $E$, так как при этом не меняются сами соб-

[1]) Обвертывающая алгебра представления группы $GL(N, R)$ в пространствах тензоров ранга $f$, рассматриваемая над полем комплексных чисел, очевидно, совпадает с обвертывающей алгеброй группы $GL(N, C)$.

ственные значения. Поэтому искомая плотность не изменится и при замене исходной гауссовой плотности смесью плотностей (т. е. их линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами, в сумме равными единице), в каждом из слагаемых которой матрица $E$ заменена на некоторое $HE$ (а $\Sigma$ всюду одно и то же). Следовательно, распределение собственных значений матрицы $EE'$ совпадает с их распределением в случае исходной плотности

$$f(\Sigma,\ EE') = \\ = \int\limits_{O(q)} \frac{1}{|\Sigma|^{N/2}(2\pi)^{Nq/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}HEE'H'\right)\right] d\mu(H), \quad (1)$$

где $O(q)$ — это $q$-мерная ортогональная группа, а $\mu$ — мера Хаара на ней. Но теперь плотность $f(\Sigma, EE')$ зависит лишь от собственных значений матриц $\Sigma$ и $EE'$ в силу двоякой инвариантности меры Хаара (которая позволяет заменить $H$ на $HH_1$, где $H_1EE'H_1$ — каноническая форма матрицы $EE'$) и свойств следа произведения матриц ($\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}HEE'H') = \operatorname{tr}(H'\Sigma^{-1}HEE')$). Таким образом, плотность распределения собственных значений матрицы $EE'$ равна

$$\frac{(2\pi)^{Nq/2} f(\Sigma,\ EE')}{\exp\left[\operatorname{tr}(EE')/2\right]} f_0,$$

где $f_0$ — та же плотность, отвечающая случаю $\Sigma = I$, вид которой, как было уже указано, известен. Задача свелась тем самым к вычислению интеграла (1). Разлагая экспоненциальную функцию в степенной ряд, можно еще упростить задачу, сведя ее к вычислению интеграла

$$\int\limits_{O} \{\operatorname{tr}(AHBH')\}^f d\mu(H),$$

где $A$ и $B$ — симметрические положительно определенные матрицы, а $f$ — неотрицательное целое число.

Но $A$ и $B$ можно считать симметрическими тензорами ранга 2, на которые группа преобразований $GL(q, R)$ действует по формуле

$$A \to LAL'.$$

Величина же $\{\mathrm{tr}(AB)\}^f$ представляет собой однородный полином степени $2f$, каждый из членов которого имеет степень $f$ относительно элементов матрицы $A$ и степень $f$ относительно элементов матрицы $B$. Иначе говоря, это элемент тензорного произведения двух пространств тензоров ранга $2f$, первое из которых есть $f$-кратное произведение на себя пространства симметрических тензоров $A$, а второе аналогичным образом определяется по $B$. Обозначим эти пространства через $V_{2f}(A)$ и $V_{2f}(B)$. Надо помнить, однако, что они не будут полными тензорными пространствами ранга $2f$ над $q$-мерным векторным пространством, так как $A$ и $B$ сами являются симметрическими тензорами и, кроме того, одна и та же матрица $A$ (и аналогично для $B$) входит в произведение $f$ раз. Вследствие этого при применении совокупности преобразований из группы $GL(q, R)$ указанные пространства не распадаются в прямую сумму всех неприводимых компонент пространства тензоров ранга $2f$, соответствующих всевозможным разбиениям числа $2f$ на целые слагаемые, а только, как можно показать, в прямую сумму компонент, соответствующих разбиениям вида

$$2f = 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_q; \quad f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_q \geqslant 0,$$

причем каждая такая компонента входит в сумму лишь один раз. Каждое такое неприводимое подпространство мы обозначим символом $V_{2f,\,p}(A)$, где индекс $p$ обозначает конкретное разбиение числа $2f$ на четные слагаемые.

Заметим, что если заменить $B$ на $LBL'$, а $A$ — на $L^{-1'}AL^{-1}$ (в этом случае говорят, что $B$ преобразуется когредиентно, а $A$ контрагредиентно), то величина $\mathrm{tr}(AB)$ не изменится. Далее, $\{\mathrm{tr}(AB)\}^f$ — элемент тензорного произведения пространств $V_{2f}(A)$ и $V_{2f}(B)$; следовательно, его можно представить в виде

$$\{\mathrm{tr}\,(AB)\}^f = \sum_i \sum_j C_{i,\,j} Z_{2f,\,p_i}(A)\, Z_{2f,\,p_j}(B),$$

где $Z_{2f,\,p_i}(A)$ — вектор в неприводимом подпространстве пространства тензоров ранга $2f$, соответствующий разбиению $p_i$ числа $2f$. Однако так как левая часть этого равенства инвариантна относительно одновременного контраградиентного и соответственно коградиентного преобразования тензоров $A$ и $B$, то сумма справа может содержать лишь члены, в которых индексы $p_i$ и $p_j$ совпадают[1]). Таким образом,

$$\{\mathrm{tr}(AB)\}^f = \sum_p C_p Z_{2f,p}(A) Z_{2f,p}(B).$$

Если ограничиться ортогональными матрицами $L$, то $V_{2f,p}(A)$ и $V_{2f,p}(B)$ распадутся дальше на инвариантные подпространства, скажем $V_{2f,p,i}(A)$ и $V_{2f,p,j}(B)$, причем опять же в сумме произведений элементов из этих подпространств могут встретиться лишь члены с равными индексами $i$ и $j$, так что

$$\{\mathrm{tr}(AB)\}^f = \sum_i \sum_p C_{p,i} Z_{2f,p,i}(A) Z_{2f,p,i}(B).$$

Если теперь мы проинтегрируем последнее выражение по $O(q)$, то интеграл от $Z_{2f,p,i}(HBH')$ будет равен нулю, за исключением того случая, когда этот вектор принадлежит одномерному инвариантному подпространству, т. е. когда он постоянен. Но при каждом $p$ в сумму входит лишь одно слагаемое, отвечающее такому подпространству[2]), так что окончательно

$$\int\limits_{O(q)} \{\mathrm{tr}(AHBH')\}^f d\mu(H) = \sum_p C_p Z_p(A) Z_p(B),$$

[1]) Это следует из рассмотрения унитарной подгруппы группы $GL(q, C)$, относительно которой два тензорных пространства $V_{2f,p_i}(A)$, $V_{2f,p_j}(B)$ остаются неприводимыми. Если $p_i = p_j$, то в тензорном произведении существует инвариант, а именно $\{\mathrm{tr}(AB)\}^f$; если же $p_i \neq p_j$, то такого инварианта не может быть. Действительно, кратность инварианта равна кратности единичного представления в разложении рассматриваемого тензорного произведения, определяемой с помощью интегрирования характера представления по (компактной) унитарной группе. Но характер тензорного произведения равен произведению характеров, которое при $p_i \neq p_j$ и соответственно контраградиентном и коградиентном преобразовании тензоров $A$ и $B$ представляет собой скалярное произведение неэквивалентных неприводимых характеров и потому равно нулю. Если же $i = j$, то это скалярное произведение равно единице и, следовательно, здесь существует единственный инвариант.

[2]) См. ниже раздел 13.1.

где $p$ пробегает множество всех разбиений числа $2f$ вида

$$2f = 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_p,\ f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_p \geqslant 0,$$

а $C_{p,1}$ для краткости заменено на $C_p$.

Как мы помним, элементы $Z_p(A)$ — это полиномы от элементов тензора $A$, являющиеся векторами неприводимого подпространства тензоров ранга $2f$ (соответствующего разбиению $p$), инвариантными относительно подгруппы $O(q)$. Для $f$ от 1 до 4 их вид указан в работе Джеймса [3], а их построение в общем случае обсуждается в работе Джеймса [4]. Тем самым проблему нахождения распределения собственных значений ковариационной матрицы можно считать решенной.

Читатель должен почувствовать, что рассуждения этого раздела родственны тем, которые приводились в разделе 5.1. Мы обсудим здесь причины этого родства на эвристическом уровне строгости, отчасти из-за того, что более строгий анализ невозможен без использования фактов, о которых будет говориться только позже. Отметим прежде всего, что все наши рассмотрения могли бы ограничиться случаем, когда определители матрицы $\Sigma$ и $EE'$ равны единице, так как эти определители зависят только от собственных значений матриц. Унимодулярные матрицы образуют полупростую группу Ли $SL(q, R)$, а пространство всех положительно определенных унимодулярных матриц можно рассматривать как пространство классов смежности группы $SL(q, R)$ по подгруппе $O_+(q)$; в самом деле, группа $SL(q, R)$, очевидно, порождает транзитивные преобразования указанного пространства

$$A \to LAL',\ L \in SL(q,\ R),$$

а стационарной подгруппой точки $A = I$ служит группа $O_+(q)$. Функция

$$\gamma(A,\ B) = \exp\{-c\,\mathrm{tr}(A^{-1}B)\}, \qquad c > 0, \tag{2}$$

очевидно, является инвариантной функцией двух аргументов. Соответствующая ей двояко инвариантная функция имеет вид

$$\tilde{\gamma}(D) = \exp\{-c \operatorname{tr}(DD')\};$$

положив $D = B^{1/2}A^{-1/2}$, мы получим (2).

Если функция $\tilde{\gamma}(D)$ имеет интегрируемый квадрат по мере Хаара на группе $SL(q, R)$, то

$$\tilde{\gamma}(D) = \int_{\Lambda} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(D)\,\psi(\lambda)\,d\lambda,$$

где $d\lambda$ — «планшерелева» (т. е. удовлетворяющая формуле Планшереля) мера на пространстве всех неприводимых унитарных представлений группы $SL(q, R)$ класса 1, а $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(D)$ — (положительно определенная) зональная сферическая функция. Следовательно,

$$\int_{O_+} \tilde{\gamma}\left(H'B^{1/2}HA^{-1/2}\right) d\mu(H) =$$

$$= \int_{\Lambda} \psi(\lambda) \int_{O_+} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(H'B^{1/2}HA^{-1/2}\right) d\mu(H)\,d\lambda,$$

где $\mu(H)$ — нормированная мера Хаара на $O_+$. Но

$$\int_{O_+} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(H'B^{1/2}HA^{-1/2}\right) d\mu(H) = \int_{O_+} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(B^{1/2}HA^{-1/2}\right) d\mu(H) =$$

$$= \tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(B^{1/2}\right)\tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(A^{-1/2}\right),$$

откуда

$$\int_{O_+} \tilde{\gamma}\left(H'B^{1/2}HA^{-1/2}\right) d\mu(H) = \int_{\Lambda} \psi(\lambda)\,\tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(B^{1/2}\right)\overline{\tilde{\varphi}^{(\lambda)}\left(A^{1/2}\right)}\,d\lambda.$$

Даже несмотря на неточность этих рассуждений (которую было бы нетрудно устранить), принадлежащая Джеймсу формулировка результатов в терминах функций $Z_p(A)$ все равно кажется более предпочтительной, поскольку она «скроена» так, чтобы подходить к специальному (аналитическому) виду возникающих здесь функций. Функция $Z_p(A)$ определяет зональную сферическую функцию в том смысле, что выражение $Z_p(CC')/Z_p(I)$, рассматриваемое как функция от $C$, является зональной сферической функцией, отвечающей неприводимому представлению, порождающему это выражение. Однако оно не будет положительно определенной зональной сферической функцией, так как представление не унитарно (и не эквивалентно унитарному).

Рассмотрения настоящего раздела можно распространить на другие задачи многомерного статистического анализа и, в частности, на задачу о распределении (нецентральном) канонических корреляций и об аналогичных распределениях, возникающих в связи с так называемой *когерентностью* (представляющей собой статистику, описывающую зависимость между двумя стационарными временными рядами в определенной узкой полосе частот). Обсуждение этих обобщений можно найти в работе Джеймса [5].

## 11.1. Локально компактные абелевы группы

Теория представлений локально компактных абелевых групп непосредственно обобщает классический гармонический анализ функций, заданных на вещественной оси. Введем снова в рассмотрение множество характеров $\widehat{G}$, элементами которого служат непрерывные отображения $\chi$ группы $G$ в группу комплексных чисел, равных по модулю единице. Как и раньше, это множество наделяется групповой структурой, т. е. рассматривается как группа характеров. Более того, если ввести в $\widehat{G}$ топологию, слабейшую из тех, относительно которых все функции $\chi(g)$ при фиксированном $g$ непрерывны, то группа $\widehat{G}$ сама станет локально компактной. Таким образом, на $\widehat{G}$, как и на $G$, можно определить двояко инвариантную меру. Теорема Понтрягина о двойственности гласит, что $G$ в свою очередь будет группой характеров для $\widehat{G}$. Если группа $G$ компактна, то группа $\widehat{G}$ дискретна. Если группа $G$ равна прямому произведению двух групп $G_1$ и $G_2$, то ее группа характеров равна прямому произведению двух соответствующих групп характеров.

Если функция $f(g)$ интегрируема по мере Хаара $dg$ (т. е. $f \in L_1(G)$), определим ее преобразование Фурье формулой

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(g)\overline{\chi(g)}\,dg.$$

Если, например, функция $f$ положительно определена, т. е.

$$\sum_i \sum_j f(g_i^{-1} g_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0$$

для всех конечных последовательностей элементов группы $g_i$ и комплексных чисел $z_i$, то

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(g)\,d\chi$$

при условии, что меры Хаара на группах $G$ и $\hat{G}$ нормированы соответствующим образом (что мы в дальнейшем будем предполагать выполненным). Более того, здесь справедлива обычная теорема Планшереля, согласно которой

$$\int_G f_1(g) f_2(g)\,dg = \int_{\hat{G}} \hat{f}_1(\chi)\hat{f}_2(\chi)\,d\chi, \tag{1}$$

если только функции $f_1$ и $f_2$ обе имеют интегрируемый квадрат по мере $dg$, т. е. $f_1, f_2 \in L_2(G)$. В этом случае их преобразования Фурье $\hat{f}$ принадлежат $L_2(\hat{G})$. Если функция $f(g)$ непрерывна и положительно определена (хотя, быть может, и несуммируема), то она допускает представление в виде

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g)\,dm(\chi), \tag{2}$$

где $m$ — некоторая мера на $\hat{G}$. Обратно, всякая функция, представимая в таком виде, положительно определена на $G$. Разумеется, если мера $m$ абсолютно непрерывна, ее производная Радона — Никодима относительно меры $d\chi$ равна $\hat{f}$.

Рассмотрим, наконец, обобщение формулы суммирования Пуассона. Если $H$ — замкнутая подгруппа группы $G$, то можно задать инвариантные меры на абелевых группах $H$ и $G/H$ так, чтобы выполнялось равенство $\int\limits_G = \int\limits_{G/H} \int\limits_H$. Пусть $f(g)$ — непрерывная, интегрируемая и положительно определенная функция. Тогда [1])

$$\int\limits_H f(h)\,dh = \int\limits_{(G/H)^\wedge} \hat{f}(\alpha)\,d\alpha,$$

где $d\alpha$ — инвариантная мера на $(G/H)^\wedge$. В случае когда $G$ — аддитивная группа вещественных чисел, а $H$ — подгруппа целых чисел, $G/H$ обращается в аддитивную группу вещественных чисел по модулю 1. Группа $\hat{G}$ здесь изоморфна $G$, так как каждый характер $\chi(x)$ имеет вид $e^{ixy}$. Так как $H$ — дискретная группа, то $\hat{H}$ компактна; она изоморфна группе $G/H$, что видно из сопоставления числу $n$ характера $\chi(n)=e^{i2\pi n\theta}$, $0\leqslant \theta < 1$. Обратно, группа $(G/H)^\wedge$ изоморфна группе $H$. Если $f$ удовлетворяет указанным выше условиям, то мы получаем формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n).$$

Можно выписать и более общее соотношение

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(\Delta n)\, e^{in\,\Delta 2\pi\theta} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{\Delta} + 2\pi\theta\right),$$

которое представляет собой частный случай формулы

$$\int\limits_H f(g_0 h)\,\chi'(g_0 h)\,dh = \int\limits_{(G/H)^\wedge} \hat{f}(\alpha\chi')\,d\alpha,$$

где $\chi' \in \hat{H}$, а меры Хаара на группах и подгруппах нормированы соответствующим образом.

[1]) Для удобства мы будем писать $(G/H)^\wedge$ вместо того, чтобы располагать символ перехода к группе характеров над всем выражением.

Следует заметить, что в рассмотренном нами частном случае мера Хаара на множестве целых чисел приписывает вес 1 каждому целому числу. Инвариантная же мера на группе характеров нормирована условием, что мера всей этой группы равна единице. Оказывается что так же должно быть в случае любых дискретных абелевых групп и их групп характеров, если требовать, чтобы была верна формула обращения.

## 11.2. Стационарные процессы

Рассмотрим стационарный случайный процесс второго порядка $x(g)$, заданный на локально компактной абелевой группе $G$, т. е. процесс, для которого

$$\gamma(g_1, g_2) = \mathbf{E}(x(g_1)\, x(g_2)) = \gamma(gg_1, gg_2), \quad g \in G$$

(предполагается, что фигурирующее здесь математическое ожидание конечно). Тогда $\gamma(g_1, g_2) = \gamma(g_2^{-1}g_1, e)$, так что вместо $\gamma(g_1, g_2)$ можно просто писать $\gamma(g_2^{-1}g_1)$. Предположим еще, что функция $\gamma(g)$ непрерывна в точке $g = e$ (откуда уже легко следует ее непрерывность во всех точках). Легко видеть, что эта функция положительно определена, как и должно быть в случае любой ковариационной функции. Поэтому

$$\gamma(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g)\, dm(\chi),$$

где $m(\chi)$ — так называемая *спектральная мера* процесса. Как будет видно из дальнейшего, это представление ковариационной функции соответствует дисперсионному анализу процесса $x(g)$, играющему в некоторых специальных случаях очень важную роль в практических приложениях. Частный случай, когда мера $m(\chi)$ абсолютно непрерывна, представляет наибольший интерес.

В действительности мы обычно не в состоянии наблюдать значения функции $\gamma(g)$ при всех $g$, а в лучшем случае можем оценить лишь часть последовательности $\{\gamma(g_0 h)\}$, где $h$ пробегает некоторую дискретную подгруппу $H \subset G$. В таком случае можно оценить также величину

$$\sum_H \gamma(g_0 h) \chi'(g_0 h),$$

которая (в предположении, что ряд $\sum_H |\gamma(g_0 h)|$ сходится) в свою очередь равна

$$\int_{(G/H)^\wedge} \hat{\gamma}(\alpha\chi')\, d\alpha.$$

Таким образом, саму спектральную плотность $\hat{\gamma}$ непосредственно нельзя наблюдать, но можно представить ее в «склеенном» виде, причем «склеивание» имеет здесь особенно простую форму. Для частного случая, когда $G$ — аддитивная группа вещественных чисел, получаем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma(n\Delta)\, e^{in2\pi\theta} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi(n+\theta)}{\Delta}\right),$$

где (рискуя создать путаницу) мы обозначили в правой части функцию $\hat{\gamma}$ буквой $f$, чтобы достичь согласия с общепринятым обозначением спектральной плотности. Эффект «склеивания» здесь полностью аналогичен разобранному в разделе 7.

## 11.3. Центральные предельные теоремы

Множество всех вероятностных мер на локально компактной группе $G$ образует полугруппу относительно операции свертывания в качестве группового умножения. В настоящем разделе мы будем обозначать через $\mu\nu$ свертку двух мер $\mu$ и $\nu$. Таким образом, если $E$ — измеримое множество относительно меры $\mu\nu$, то

$$\mu\nu(E) = \int_G \mu(Ex^{-1})\, d\nu(x).$$

Рассматриваемая полугруппа содержит единицу — меру $e$, целиком сосредоточенную в одной точке, а именно в единице группы. Эта мера $e$ идемпотентна, т. е. такова, что $e^2 = e$. Однако помимо нее существует еще много других идемпотентных мер, например мера Хаара на некоторой компактной подгруппе группы $G$. Полугруппу всех мер можно снабдить слабой топологией, т. е. слабейшей из всех топологий, относительно которых непрерывны все функционалы вида $\int f(g)\,d\mu(g)$, где задающая функционал функция $f$ непрерывна и ограничена. Исходная группа $G$ вкладывается в получаемую топологическую полугруппу $S$ с помощью отображения, сопоставляющего элементу $g$ вероятностную меру, целиком в нем сосредоточенную; эту меру мы будем также обозначать символом $g$. Ясно, что в таком случае $\mu g(E) = \mu(Eg^{-1})$.

Естественно желание получить обобщенные формы предельных теорем теории вероятностей (например, усиленного закона больших чисел или центральной предельной теоремы), применимые к вероятностным мерам на группе $G$. В разделе 9.2 было указано, как с помощью теории представлений можно получить центральную предельную теорему для мер на компактной группе вращений трехмерного пространства. Ясно также, что теорема полученного там вида будет справедлива и для мер на произвольной компактной группе. В самом деле, в случае компактной группы, используя те же методы, можно показать, что всегда найдется такой элемент $g$ нашей группы, что последовательность $\{\mu^n g^{-n}\}$ сходится к инвариантной мере на некоторой замкнутой подгруппе группы $G$.

Отметим еще, что теория представлений в действительности явно не использовалась при доказательстве многих важных результатов о вероятностях на группах, полученных в последние годы. Вместо этого упомянутые доказательства основывались обычно на теории топологических полугрупп и, в частности, использовали экспоненциальные формулы для полугрупп операторов $T_t$:

$$T_t f(g) = \int\limits_H f(g)\,d\mu_t(g),$$

где $\mu_t(g)$ — однопараметрическая полугруппа мер, а $T_t$ — операторы в пространстве непрерывных функций на $G$ (равных нулю вне компактного множества). Данная последовательность $\{\mu^n\}$ вкладывалась в однопараметрическое семейство $\mu_t$ с помощью соотношения $\mu_1 = \mu$.

Эти методы, однако, не входят в круг вопросов, которым посвящен наш обзор, и поэтому в дальнейшем мы не будем на них останавливаться. Мы ограничимся здесь лишь кратким обсуждением работы Клосса [2] о центральной предельной теореме на компактных абелевых группах. Эта теория широко использует методы преобразований Фурье, которые представляют собой частный случай общих идей, рассматриваемых в нашей книге. Мы будем следовать работам Клосса [2, 3].

Заметим, что между мерами $\mu$ и их характеристическими функциями

$$\Phi_\mu(\chi) = \int\limits_G \chi(g)\, d\mu(g)$$

существует взаимно однозначное соответствие, при котором $\mu\nu \to \Phi_\mu \Phi_\nu$. Более того, $\mu_n \to \mu$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{\mu_n}(\chi) \to \Phi_\mu(\chi)$ для каждого характера $\chi$. Легко охарактеризовать *устойчивые законы*, т. е. законы, совпадающие со своими степенями. Действительно, функция $\Phi_\mu(\chi)$ в этом случае должна равняться своему квадрату и, следовательно, она может принимать лишь значения 0 и 1. Если $\omega(\mu)$ — носитель меры $\mu$, то множество $\omega(\mu)$ является подгруппой и из равенства

$$\Phi_\mu(\chi) = \int\limits_{\omega(\mu)} \chi(g)\, d\mu(g) = 1$$

следует, что $\chi(g) \equiv 1$, если $g \in \omega(\mu)$. Ясно, что последнее условие также и достаточно для устойчивого закона. Множество характеров $\chi$, равных единице на $\omega(\mu)$, называется *аннулятором* подгруппы $\omega(\mu)$. Итак, для устойчивых распределений $\mu$ функция $\Phi_\mu(\chi)$ равна единице на аннуляторе множества $\omega(\mu)$ и нулю вне его. Устойчивые распределения содержатся в более широком классе мер, инвариантных на классах смежности по некоторой подгруппе $H$ группы $G$. Для таких мер, очевидно, $\mu h = \mu$ при $h \in H$. Эти меры называются $H$-равномерными (и строго $H$-равномерными, если $H$ — наибольшая из групп, обладающих указанным свойством). В их случае $\Phi_\mu(\chi)$, разумеется, уже не обязана принимать лишь два значения. Однако необходимым и достаточным условием $H$-равномерности остается равенство функции $\Phi_\mu$ нулю вне аннулятора множества $H$.

Устойчивые распределения, таким образом, известны: они исчерпываются мерами Хаара на замкнутых подгруппах группы $G$. Следуя ходу рассуждений, принятому при рассмотрении предельных теорем в классическом случае, естественно рассмотреть теперь *безгранично делимые распределения*, т. е. такие распределения $\mu$, для которых существует «корень $n$-й степени» $\nu$ (так что $\nu^n = \mu$) при любом натуральном $n$. Этот класс, очевидно, включает все устойчивые распределения (для которых $\nu = \mu$), но также еще, например, и закон Пуассона, приписывающий положительный вес $a^k e^{-a}/k!$ каждому элементу вида $g^k$, где $g$ — какой-то фиксированный элемент группы $G$, имеющий бесконечный порядок (если $g$ имеет конечный порядок, то это определение нужно видоизменить очевидным образом). Такому распределению соответствует характеристическая функция $\exp\{a(\chi(g) - 1)\}$. Можно показать, что всякое безгранично делимое распределение строго $H$-равномерно.

Клосс, применяя результаты Ханта [1] (которые широко использовались и в интересной работе Вэна [1]), рассмотрел компактные абелевы группы Ли (заметим, что этот класс групп довольно скуден: всякая такая группа обязательно является произведением конечной абелевой группы на группу тора — прямое произведение некоторого числа групп вращений окружности). Рассмотрим алгебру Ли группы $G$. Элементами ее служат касательные векторы $X$ к групповому многообразию в точке $e$, определяющие линейные отображения пространства дифференцируемых функций на этом многообразии (см. раздел 8.1). Таким образом, если $X$ — касательный вектор, а $f$ — дифференцируемая функция, то определен элемент $Xf(e)$. Точно так же, если $f$ — дважды дифференцируемая функция, то имеет смысл $YXf$, где $Y$ и $X$ — касательные векторы. Возможно взаимно однозначное и взаимно непрерывное (на самом деле даже дифференцируемое) отображение окрестности нуля алгебры Ли (т. е. множества векторов вида $tX$ при $t \leqslant a$, где $a$ — некоторое положительное число) на окрестность точки $e$ группы $G$ с помощью экспоненциального отображения, при котором образом вектора $X$, касательного к однопараметрической подгруппе $g(t)$, будет точка $g = g(1)$, $g = \exp X$. Этот факт позволяет использовать компоненты $x_i$ вектора $X$ относительно данного базиса $X_i$ (где $i = 1, \ldots, p$, а $p$ — размерность группы $G$) как канонические координаты окрестности точки $e$ группы $G$. Таким образом, если $g = \exp X$ и $X = \sum_{i=1}^{p} x_i X_i$, можно использовать числа $x_i$, $i = 1, \ldots, p$, в качестве координат точки $g$.

Если мера $\mu$ безгранично делима и $H$ — подгруппа, относительно которой $\mu$ строго $H$-равномерна, то $\mu$ известна, если задана характеристическая функция индуцированной меры (которую мы обозначим через $\mu/H$) на факторгруппе $G/H$. Под индуцированной мерой мы понимаем здесь меру, которая приписывает множеству $E$ из $G/H$ меру $\mu$ множества всех элементов группы $G$, отображаемых в $E$ при естественном гомоморфизме, т. е. отображении, сопоставляющем всякому элементу класс смежности, его содержащий. Если $\nu = \mu/H$, то $\Phi_\nu(\chi)$ нигде не обращается в нуль. В самом деле, если $\chi$ содержится в аннуляторе множества $H$, то

$$\Phi_\nu(\chi) = \int_{G/H} \chi(k)\, d\nu(k) = \int_G \chi(g)\, d\mu(g) = \Phi_\mu(\chi) \neq 0$$

(второе равенство следует непосредственно из определения меры $\nu$). Так как группа характеров прямого произведения групп равна прямому произведению групп характеров, то группа характеров факторгруппы $G/H$ совпадает с аннулятором множества $H$. Отсюда следует наше утверждение. Характеристическая функция $\Phi_\nu(\chi)$ задается с помощью следующей формулы, верной для некоторой ветви функции $\log \Phi_\nu$:

$$\log \Phi_\nu(\chi) = \sum_i a_i \{X_i\chi\}(e) + \sum_i \sum_j a_{ij} \{X_i X_j \chi\}(e) + \\ + \int_{G \setminus \{e\}} \left[\chi(g) - 1 - \sum_i \{X_i\chi\}(e)\, x_i(g)\right] dM(g),$$

где $G \setminus \{e\}$ обозначает множество $G$ без точки $e$, $M(g)$ — положительная мера на этом множестве, а $a_{ij}$ — элементы некоторой симметрической матрицы. Под $\{X_i\chi\}(e)$ здесь понимается значение функции $X_i\chi$ в точке $e$, где $X_i$ — дифференциальный оператор, действующий на группе характеров. Аналогия с классическим результатом видна, например, из сопоставления с формулами в книге Лоэва [1, стр. 323].

## 12.1. Бесконечномерные представления групп

Классический пример гильбертова пространства — пространство всех функций $x(t)$, заданных на множестве $T$, на котором определена мера $m(t)$, и удовлетворяющих условию

$$\int_T |x(t)|^2\, dm(t) < \infty.$$

Множество $\mathscr{H}$ всех таких функций образует векторное пространство над полем комплексных чисел. Если положить

$$(x_1, x_2) = \int_T x_1(t)\, \overline{x_2(t)}\, dm(t),$$

$$|x|^2 = (x, x),$$

то для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $|x_n - x_m| \to 0$ при $m, n \to \infty$, будет существовать элемент $x \in H$, для которого $|x_n - x| \to 0$. Неотрицательное число $|x|$ называется *нормой* вектора $x$.

Векторное пространство, в котором задана операция скалярного умножения $(x_1, x_2)$, обладающая обычными свойствами, полное относительно сходимости по норме, называется *гильбертовым пространством*[1]). Под линейным оператором в таком пространстве понимается линейное отображение этого пространства на самого себя. Особо важно для нас будет множество $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ ограниченных линейных операторов $A$, для которых существует конечное наименьшее положительное число $\|A\|$, удовлетворяющее условию

$$|Ax| \leqslant \|A\| |x| \quad \text{при всех} \quad x \in \mathscr{H}.$$

Пространство $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, очевидно, является алгеброй, и, как можно показать, оно полно относительно метрики, порождаемой нормой $\|A\|$, так что если $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$, то найдется такой оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, что $\|A_n - A\| \to 0$. Кроме того, если $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|.$$

Алгебра, состоящая из элементов $x$, для которых определена норма с указанными выше свойствами, называется *банаховой алгеброй*[2]). Банахова алгебра $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ обладает еще дополнительным свойством симметрии, заключающимся в том, что она замкнута относительно *инволюции*[3]) $A \to A^*$, где $A^*$ определяется из соотношения $(Ax, y) = (x, A^*y)$, верного при всех $x, y \in \mathscr{H}$, так что сопряженный оператор $A^*$ — это естественное обобщение эрмитово сопряженной матрицы. Оператор $A$ называется *унитарным*, если $(Ax, Ay) = (x, y)$ при всех $x, y \in \mathscr{H}$.

Дальнейшие важные примеры банаховых алгебр можно получить следующим образом. Рассмотрим ло-

---

[1]) В дальнейшем будут рассматриваться лишь *сепарабельные гильбертовы пространства*, т. е. такие, в которых существует не более счетного числа ортогональных элементов, линейная оболочка которых совпадает со всем пространством.

[2]) В русской научной литературе вместо термина *банахова алгебра* чаще употребляется термин *нормированное кольцо*. — *Прим. ред.*

[3]) В теории банаховых алгебр операция $A \to A^*$ называется инволюцией, если она обладает свойствами 1) $(A^*)^* = A$, 2) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ и 3) $(AB)^* = B^* A^*$. — *Прим. ред.*

кально компактную группу $G$ и множество $L_1(G)$ всех функций $u(g)$ на группе, для которых

$$|u| = \int_G |u(g)|\, dg < \infty. \tag{1}$$

Это множество образует векторное пространство над полем комплексных чисел; в нем можно определить произведение (свертку) $u * v$ при помощи равенства

$$u * v(g) = \int_G u(gh)\, v(h^{-1})\, dh = \int_G u(h)\, v(h^{-1}g)\, dh.$$

Получаемая алгебра является банаховой алгеброй относительно нормы (1). Она называется $L_1$-алгеброй или алгеброй суммируемых функций на группе $G$, обозначается $L_1(G)$ и представляет собой естественное обобщение алгебры $R(G)$, введенной в разделе 3.1 (если рассматривать в качестве элементов алгебры $R(G)$ не $u$, а $u(g)$). $L_1$-алгебра также симметрична относительно соответственно выбранной инволюции, которую, например, в случае компактных или коммутативных групп можно задать равенством

$$u^*(g) = \overline{u(g^{-1})}.$$

Изучение абстрактных банаховых алгебр привело к более глубокому пониманию многих проблем, тесно связанных с математической статистикой. Основной результат здесь — теорема Гельфанда о представлениях коммутативных банаховых алгебр, согласно которой всегда существует непрерывный гомоморфизм такой алгебры в алгебру всех непрерывных функций на локально компактном хаусдорфовом [1]) пространстве, обращающихся в нуль на бесконечности. Те коммутативные банаховы алгебры, для которых это отображение — изоморфизм, называются *полупростыми* [2]). (Все указанные выше алгебры полупростые.)

[1]) Под хаусдорфовым пространством мы понимаем пространство, в котором предел сходящейся последовательности определен однозначно.

[2]) Отметим, что термин *полупростой* здесь имеет другой смысл, чем в теории групп Ли.

Если банахова алгебра содержит единицу (как, например, алгебра $L_1(G)$ для компактных групп $G$), то соответствующее хаусдорфово пространство компактно. Вообще же говоря, «каноническая форма» коммутативной банаховой алгебры — алгебра обращающихся в нуль на бесконечности непрерывных функций на локально компактном пространстве[1]).

Под *унитарным представлением* $U(g)$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ понимается гомоморфное отображение $g \to U(g)$ группы $G$ в пространство всех унитарных операторов, действующих в $\mathscr{H}$, слабо непрерывное в том смысле, что функция $(U(g)x, y)$ непрерывна как функция от $g$ при всех $x, y \in \mathscr{H}$. *Неприводимое представление* здесь снова определяется как такое представление, для которого в $\mathscr{H}$ не существует замкнутого инвариантного подпространства. Два представления $U(g)$ и $V(g)$ называются *эквивалентными*, если существует такое унитарное отображение $W$ одного пространства представления в другое, что $U(g) = WV(g)W^{-1}$. Можно определить *коммутаторную алгебру* данного представления как алгебру всех ограниченных линейных операторов $A$, действующих в $\mathscr{H}$ и таких, что $AU(g) = U(g)A$. Тогда нетрудно показать, что представление $U(g)$ неприводимо тогда и только тогда, когда коммутаторная алгебра содержит лишь операторы, отличающиеся от тождественного только скалярным множителем. Если же эта алгебра коммутативна, то соответствующее представление называется *представлением с однократным спектром*.

Если представление $U$ равно прямой сумме представлений $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ (так что пространство $\mathscr{H}$ разлагается в сумму ортогональных подпространств, в каждом из которых действует некоторое отображение $U^{(j)}$) и каждое из представлений $U^{(j)}$ неприводимо, то коммутаторная алгебра представления $U$ коммутативна тогда и только тогда, когда все $U^{(j)}$ неэквива-

[1]) Отображение алгебры $L_1(G)$, где группа $G$ локально компактна и абелева, в алгебру непрерывных функций достигается путем сопоставления функции ее преобразования Фурье (ср. раздел 11.1).

лентны. Этот результат хорошо согласуется с интуицией, приобретенной в конечномерном случае. Если задано произвольное конечномерное представление $U$, то всегда можно построить представление с однократным спектром, *квазиэквивалентное* ему в том смысле, что каждое подпредставление $U$ содержит подпредставление, эквивалентное некоторому подпредставлению соответствующего представления с однократным спектром. Представления, квазиэквивалентные в указанном смысле некоторым представлениям с однократным спектром, называются *представлениями типа* I.

В бесконечномерном случае не все представления имеют тип I; например, в этом случае можно построить представление $U$, не являющееся представлением с однократным спектром и такое, что всякое представление, квазиэквивалентное $U$, обязательно также и эквивалентно $U$. Так как теория таких представлений крайне сложна и в некоторых важных отношениях пока еще остается весьма неполной, мы ограничимся здесь лишь рассмотрением групп, *все представления которых имеют тип* I. Этот класс *групп типа* I содержит, в частности, все компактные и все коммутативные группы, а также все связные полупростые группы Ли. Для таких групп всегда можно единственным образом разложить данное представление в прямой интеграл по неприводимым представлениям. Под этим понимается следующее.

Можно найти локально компактное пространство $R$ с борелевской мерой $m$ на нем и сопоставить каждому $r \in R$ определенное гильбертово пространство $\mathcal{H}_r$ и представление $U^{(r)}(g)$ группы $G$, действующее в $\mathcal{H}_r$. *Топологический прямой интеграл* $\mathcal{H}$ этих пространств $\mathcal{H}_r$ определяется тогда как замыкание (относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$, которое будет указано чуть ниже) линейной оболочки всевозможных функций $f(r)$ со значениями в $\mathcal{H}_r$ (при обычном определении линейных комбинаций функций), таких, что скалярное произведение в $\mathcal{H}_r$ векторов $f(r)$ и $g(r)$, т. е. числовая функция $(f(r), g(r))_r$, для любых рассматриваемых $f$ и $g$ непрерывно зависит от $r$. Скалярное произведение в этом пространстве $\mathscr{H}$ определяется формулой

$$(f, g) = \int_R (f(r), g(r))_r \, dm(r).$$

Можно задать отображение пространства представления $\mathscr{H}_U$ (в котором действует заданное представление $U(g)$ группы $G$) на $\mathscr{H}$, сохраняющее скалярное произведение и такое, что если $x \to f(r)$, то $U(g)x \to \to U^{(r)}(g)f(r)$ (последнее утверждение справедливо всюду, за исключением, быть может, подмножества в $R$ нулевой $m$-меры). В таком случае мы будем писать

$$U(g) = \int_R \oplus U^{(r)}(g).$$

Меру $m$ нет необходимости специально указывать в наших обозначениях, так как она сама по себе не существенна. На самом деле играет роль лишь запас множеств нулевой меры в том смысле, что если $m'$ — другая мера с тем же запасом множеств нулевой меры, то существует отображение, сохраняющее скалярное произведение, соответствующего мере $m'$ разложения $\mathscr{H}$ в прямой интеграл на аналогичное разложение для $m$, при котором соответствующие компоненты представления $U(g)$ эквивалентны. Это отображение имеет вид

$$f(r) \to \sqrt{\rho(r)}\, f(r),$$

где $\rho(r)$ — производная Радона — Никодима меры $m$ по мере $m'$. Если представление принадлежит типу I, то его разложение в прямой интеграл можно однозначно определить так, чтобы почти все компоненты этого разложения были неприводимы (по существу это достигается за счет расширения семейства борелевских множеств), а если, кроме того, оно еще и с однократным спектром, то оно разлагается в прямой интеграл по неэквивалентным и неприводимым компонентам. Если же представление не принадлежит типу I, приходится иметь дело с патологическим обстоятельством, заключающимся в том, что последний факт здесь оказывается неверным. Это один важный аргумент в пользу рассмотрения лишь групп типа I.

Другая причина заключается в том, что в настоящее время не существует конструктивной теории неприводимых представлений для каких-либо других групп. Верно, однако, что независимо от того, принадлежит данная группа типу I или нет, всегда существует достаточно много ее неприводимых представлений в том смысле, что для любого $g \in G$ всегда найдется такое представление, что для него $U(g)$ не будет тождественным оператором.

Можно подойти к разложению в прямой интеграл по неприводимым представлениям и с другой стороны. Рассмотрим лишь представления типа I с однократным спектром. В качестве $R$ в таком случае можно взять множество $\hat{G}$ всех неприводимых унитарных представлений группы $G$; можно показать, что здесь меру $m$ всегда можно выбрать так, чтобы множество всех проекционных операторов вида $E(S)f(r) = \varphi_S(r)f(r)$ (где $\varphi_S(r)$ — индикатор множества $S \subset G$ и $m(S) \neq 0$) совпадало с множеством всех проекционных операторов, коммутирующих со всеми операторами $U(g)$. Таким образом, символ разложения в прямой интеграл вектора $x \in \mathscr{H}$ можно здесь заменить символом

$$x = \int\limits_{\hat{G}} dE(r)\,x; \tag{2}$$

отображение же $x \to U(g)x$ можно описывать не как $f(r) \to U^{(r)}(g)f(r)$, а как

$$x \to U(g)\,x = \int\limits_{\hat{G}} U^{(r)}(g)\,dE(r)\,x. \tag{3}$$

Семейство проекционных операторов $E(S)$ образует «проекторнозначную меру», определенную на $\hat{G}$, в том смысле, что

(I) $E(\varnothing) = 0$, $E(\hat{G}) = I$ (где $\varnothing$ означает пустое множество),

(II) $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$,

(III) $E(\bigcup\limits_j S_j) = \sum\limits_{\oplus} E(S_j)$, если $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Если группа принадлежит типу I, то любое представление $U(g)$ можно представить в виде прямой суммы не более чем счетного числа представлений с однократным спектром $U^{(i)}(g), i=0, 1, \ldots,$ дизъюнктных в том смысле, что ни одно подпредставление какого-либо из них не эквивалентно ни одному подпредставлению другого. Прямая сумма содержит $U^{(i)}(g)$ ровно $i$ раз, за исключением представления $U^{(0)}(g)$, содержащегося счетное число раз. Разумеется, некоторые из $U^{(i)}(g)$ (например, $U^{(0)}(g)$) могут и отсутствовать. Каждое из $U^{(i)}(g)$, будучи представлением с однократным спектром, само допускает каноническое разложение в прямой интеграл по неэквивалентным неприводимым компонентам.

## 12.2. Анализ Фурье распределений вероятностей на локально компактных группах

Если $P(g)$ — распределение вероятностей, можно определить его *преобразование Фурье* $\widehat{P}(r)$ как оператор

$$\widehat{P}(r)\, x = \int U^{(r)}(g)\, x\, dP(g),$$

где $x$ принадлежит пространству $\mathscr{H}^{(r)}$, в котором действует неприводимое представление $U^{(r)}$. Этот оператор линеен и ограничен в $\mathscr{H}^{(r)}$, причем он однозначно определяет меру $P$ (последнее следует из того, что существует достаточно много неприводимых представлений). Композиции распределений вероятностей (т. е. свертке соответствующих вероятностных мер) отвечает произведение операторов $\widehat{P}(r)$; кроме того, верна «теорема непрерывности», согласно которой последовательность распределений $P_n$ слабо сходится к распределению $P$ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность преобразований Фурье $\widehat{P}_n(r)$ сходится (в смысле сильной операторной топологии) при любом $r$ к пределу $\widehat{P}(r)$, являющемуся преобразованием Фурье распределения $P$ (под сходимостью в смысле сильной операторной топологии понимается сходимость $|[P_n(r)-P(r)]x|$ к нулю при всяком $x \in \mathscr{H}^{(r)}$).

Приведенные факты позволяют развить аппарат анализа Фурье распределений вероятностей на локально компактных группах. В частности, Гренандер [1] использовал этот аппарат для доказательства того, что если элементы $g_i$, $i=1,\ldots,n$, выбираются независимо друг от друга в соответствии с некоторыми распределениями вероятностей $P_i$, $i=1,\ldots,n$, то элемент $(g_1g_2\ldots g_n)$ сходится по вероятности при $n\to\infty$, если только $\sum\limits_1^\infty \|\widehat{P}_n(r)-I\|<\infty$ для каждого неприводимого представления.

## 12.3. Локально компактные абелевы группы и стационарные процессы

Если $G$ — локально компактная абелева группа, то формулы (12.1.2) и (12.1.3) становятся особенно простыми. Прежде всего здесь существует спектральная мера $E(S)$, заданная на борелевских множествах группы характеров $\widehat{G}$, такая, что

$$U(g)=\int\limits_{\widehat{G}}\chi(g)\,dE(\chi). \tag{1}$$

Этот результат согласуется с формулой (12.1.3), так как в рассматриваемом случае все неприводимые унитарные представления группы $G$ одномерны. Рассмотрим теперь процесс $x(g)$, о котором шла речь в разделе 11.2, и образуем гильбертово пространство $\mathscr{H}$, являющееся замыканием линейной оболочки случайных величин $x(g)$, $g\in G$, относительно нормы, порождаемой скалярным произведением $\gamma(g_1,\ g_2)$. Тогда оператор

$$U(g_0)\,x(g)=x(g_0g)$$

продолжается с помощью соотношений линейности и непрерывности на все пространство $\mathscr{H}$ и при этом, как легко видеть, он оказывается унитарным. В силу (1) мы получаем

$$x(g) = U(g)\,x(e) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)\,dE(\chi)\,x(e),$$

что можно переписать также в виде

$$x(g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)\,dz(\chi). \tag{2}$$

Ясно, что, введя обозначение $z(S) = E(S)\,x(e)$, мы будем иметь

$$\mathbf{E}\left(z(S_1)\overline{z(S_2)}\right) = 0 \quad \text{при} \quad S_1 \cap S_2 = \varnothing. \tag{3}$$

Полагая $\mathbf{E}(\|z(S)\|^2) = m(S)$, получаем

$$\gamma(g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)\,(dE(\chi)\,x(e),\ x(e)) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)\,dm(\chi) \tag{4}$$

в полном согласии с результатом раздела 11.2.

Заметим еще, что в действительности формулы (1)—(3) менее важны, чем (4), так как, вообще говоря, процесс $z(S)$ нельзя построить явно, а наблюдения позволяют оценить лишь функцию $\gamma(g)$; исходя из ее значений, можно оценить значения меры $m(S)$ или ее производной, ибо $m(S)$ связана с $\gamma(g)$ формулой (4).

## 13.1. Симметрические пространства

Перейдем теперь к рассмотрению специальной ситуации, имеющей интересные приложения в прикладной теории вероятностей.

Предметом нашего изучения будут так называемые *симметрические пространства* Картана. Эти пространства определяются как римановы многообразия, в которых геодезическая симметрия относительно каждой точки многообразия является изометрией. Под словами «$T$ — риманово многообразие» понимается, что пространство $T$ можно локально отобразить (аналитическим образом) на евклидово пространство, а на касательном к $T$ пространстве в любой его точке задана положительно определенная квадратичная форма, с помощью которой можно непротиворечиво определить понятие геодезического расстояния.

Геодезическая симметрия $\mu$ относительно некоторой фиксированной точки определяется следующим образом. Рассмотрим геодезическую линию, соединяющую данную точку с фиксированной, и сопоставим любой данной точке точку, лежащую на той же геодезической и симметричную ей относительно фиксированной точки. Это отображение в случае симметрического пространства должно быть изометрией, т. е. оно должно сохранять риманову структуру. Картан расклассифицировал такие симметрические пространства, указав их связь с полупростыми группами Ли, расклассифицированными им еще раньше.

Оказывается, что симметрические (односвязные) пространства можно разбить на три типа. Первый тип — евклидовы пространства. Второй называется «компактным типом», и типичным его примером служит единичная сфера $S_{n-1}$ в $n$-мерном пространстве. Наконец, третий тип называется «некомпактным типом» и его примером служит множество точек четырехмерного пространства, удовлетворяющих соотношению

$$t^2-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=1, \qquad t\geqslant 1.$$

Геодезические линии, проходящие через точку $(1, 0, 0, 0)$, являются образующими гиперболоида [1]. Назовем это пространство $L_3$ пространством Лобачевского, так как это трехмерное обобщение двумерного пространства, эквивалентного неевклидовой плоскости, построенной Лобачевским. Всякое симметрическое пространство можно представить как топологическое произведение пространств трех указанных типов (содержащее не более одного множителя каждого типа). Структура симметрических пространств

[1] Все геодезические линии здесь представляют собой линии пересечения этого гиперболоида с плоскостями, проходящими через начало координат.

евклидова типа не нуждается в дальнейших пояснениях. Пространства же компактного и некомпактного типов можно описать следующим образом.

Рассмотрим связную полупростую группу Ли $G$ и заданный на ней инволютивный автоморфизм [1]) (т. е. автоморфизм, квадрат которого совпадает с тождественным отображением). Тогда симметрическое пространство (компактного или некомпактного типов) изометрично совокупности классов смежности $G/K$, где $K$ — компактная подгруппа в $G$, каждый элемент которой переводится в себя заданным автоморфизмом и которая содержит единичную компоненту замкнутой подгруппы всех неподвижных точек автоморфизма (единичной компонентой называется связная компонента, содержащая единичный элемент).

Симметрическое пространство $T$ изометрично пространству классов смежности $G/K$ при введении некоторой, по существу однозначно определенной, римановой метрики в касательном пространстве к $G/K$ в точке, соответствующей единичному классу смежности (после чего это касательное пространство можно перевести в касательное пространство в любой другой точке, например, с помощью левого сдвига). Обозначим через $t_0$ точку, которая отображается в единичный элемент пространства $G/K$.

Для двумерной сферы $S_2$ группой $G$ служит группа всех вращений, а группой $K$ — группа вращений вокруг фиксированной оси. Геодезическая симметрия $\mu_0$ в этом случае, разумеется, осуществляется при помощи поворота вокруг этой оси на 180°. В случае пространства Лобачевского за $G$ можно принять группу унимодулярных комплексных матриц второго порядка, а в качестве $K$ — соответствующую двумерную собственную (с определителем, равным 1) унитарную подгруппу. Инволютивный автоморфизм здесь можно задать формулой $A \to A^{*-1}$, где $A$ — унимоду-

[1]) Если рассматривать $G$ как группу изометрий пространства $G/K \sim T$, то эти инволютивные автоморфизмы можно задать формулой $g \to \mu_0 g \mu_0$, где $\mu_0$ — геодезическая симметрия относительно точки $t_0$, соответствующей единичному классу смежности из $G/K$.

лярная комплексная матрица, а звездочка означает эрмитово сопряжение (т. е. переход к транспонированной комплексно сопряженной матрице). То же пространство можно определить и как пространство классов смежности группы Лоренца по трехмерной ортогональной группе. Про симметрическое пространство $T = G/K$ говорят, что оно *однородно относительно группы* $G$ (однородно в том смысле, что группа $G$ транзитивно действует на множестве $T$).

Читатель может заметить аналогию между этими симметрическими пространствами и рассматривавшимися в разделе 5.1 конечными множествами $T$, на которых действует конечная группа подстановок. В разделе 6 был рассмотрен случай, когда существует такое взаимно однозначное отображение $\mu$ множества $T$ на себя, что $\mu^2 \in G$, $\mu G \mu^{-1} = G$ и для любой пары точек $s$ и $t$ найдется элемент $g \in G$, удовлетворяющий соотношениям $gs = \mu t$, $gt = \mu s$. Если такое отображение существует, то коммутаторная алгебра соответствующего «подстановочного представления» коммутативна. Само подстановочное представление оказывалось эквивалентным представлению $G$, индуцированному единичным представлением подгруппы $K$, и из «теоремы взаимности» Фробениуса следовало, что единственные неприводимые компоненты этого подстановочного представления — те неприводимые представления группы $G$, которые при сужении на $K$ содержат один раз ее единичное представление. Этот факт играл основную роль в развитой в разделе 5.1 теории зональных и обычных сферических функций. Заметим, что если $\xi$ — вектор одномерного подпространства пространства, в котором действует неприводимое представление, инвариантного относительно всех преобразований этого представления $U^{(r)}(g)$, отвечающих элементам подгруппы $K$, то

$$\xi^* U^{(r)}(g)\, \xi$$

пропорционально зональной сферической функции, а величина

$$x_i^* U^{(r)}(g)\, \xi,$$

где $x_i$ — это $i$-й базисный вектор пространства представления, пропорциональна $i$-й обычной сферической функции.

Теперь мы собираемся выяснить, в какой мере можно перенести эту теорию на случай симметрических пространств. Кажется естественным ожидать, что такое перенесение возможно, так как геодезическая симметрия относительно точки $t_0$ (обозначаемая символом $\mu_0$), очевидно, удовлетворяет всем перечисленным выше условиям[1]), причем $\mu_0^2 = e$. Зельберг [1] рассмотрел также и общие *слабо симметрические пространства*, для которых $\mu_0^2 \in G$, но $\mu_0^2$ не обязательно совпадает с $e$; мы здесь, однако, ограничимся случаем обычных симметрических пространств.

Основную роль снова играют неприводимые унитарные представления класса 1 (содержащие единичное представление подгруппы $K$). Если $U^{(\lambda)}(g)$ — такое представление[2]), можно рассмотреть функцию

$$\varphi^{(\lambda)}(t) = \left(U^{(\lambda)}(g)\,\xi,\ \xi\right),\quad gt_0 = t, \tag{1}$$

где $\xi$ — вектор гильбертова пространства, в котором действует $U^{(\lambda)}(g)$, инвариантный относительно всех операторов $U^{(\lambda)}(k)$ при $k \in K$. Так как

$$\left(U^{(\lambda)}(k_1 g k_2)\,\xi,\ \xi\right) = \left(U^{(\lambda)}(g)\,\xi,\ \xi\right),$$

то легко видеть, что функция $\varphi^{(\lambda)}(t)$ зависит лишь от преобразования, переводящего $t_0$ в $t_1$ (т. е. от класса смежности, содержащего $g$), что оправдывает наши обозначения. Более того, она инвариантна относительно левых сдвигов на элементы из $K$:

$$\varphi^{(\lambda)}(kt) = \varphi^{(\lambda)}(t),\qquad k \in K,$$

где под $kt$ понимается класс смежности $kgK$, так что $\varphi^{(\lambda)}(t)$ на самом деле зависит лишь от «обобщенного

---

[1]) Пусть $g_0$ переводит середину геодезической линии, соединяющей $s$ и $t$, в точку $t_0$, а $g_1$ удовлетворяет соотношению $g_1\mu_0 = \mu_0 g_0$. Тогда если $g = g_1^{-1} g_0$, то $\mu_0 s = gt$, $\mu_0 t = gs$ (см. также сноску на стр. 92).

[2]) Множество $\Lambda$ представлений класса 1 теперь уже не обязательно счетно.

расстояния» между точкой $t_0$ и траекторией $Kt$, на которой лежит $t$.

Функции $\varphi^{(\lambda)}(t)$ (определяемые однозначно с точностью до постоянного множителя для каждого неприводимого представления класса 1) называются (положительно определенными) *зональными сферическими функциями.* Они положительно определены в том смысле, что если их рассматривать как функции $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$ на $G$ (постоянные на классах смежности группы $G$ по $K$), то

$$\sum_i \sum_j \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g_i^{-1}g_j)z_i\bar{z}_j \geqslant 0 \tag{2}$$

при любом выборе $n$ элементов $g_i$ группы $G$ и последовательности $n$ комплексных чисел $z_i$ [1]).

В случае двумерного евклидова пространства $R_2$ зональные сферические функции имеют вид

$$J_0(\lambda\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda\alpha\cos\theta}\,d\theta,$$

где $\alpha$ — расстояние от точки, для которой определяется значение сферической функции, до начала координат, а $\lambda$ — вещественное число. Группой $G$ здесь, разумеется, служит группа евклидовых движений плоскости. В случае сферы $S_2$ эти функции имеют вид

$$P_\lambda(\cos\theta),$$

где $P_\lambda$ — полином Лежандра степени $\lambda$, а $\theta$ — угол поворота, переводящего фиксированную точку (скажем, северный полюс) в данную точку сферы. Здесь неприводимые представления, порождающие сферические функции по формуле (1), можно перенумеровать целыми неотрицательными числами. Для плоскости Лобачевского $L_2$ [2]) они имеют вид

$$P_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r), \quad \text{где} \quad \nu(\lambda) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)^{1/2}, \qquad \lambda \geqslant 0;$$

[1]) Начиная с этого момента, положительно определенную зональную сферическую функцию для всех $\lambda$ мы будем считать однозначно определенной условием нормировки $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(e) = 1$.

[2]) Плоскость $L_2$ — это подмножество пространства $L_3$, получающееся, если положить $x_3 \equiv 0$.

$r$ — геодезическое расстояние от точки, в которой вычисляется значение сферической функции, до точки $(1, 0, 0)$, а $P_{\nu(\lambda)}$ — функция Лежандра.

Если $\xi$ — тот же вектор, что и в формуле (1), можно образовать выражения вида

$$\varphi_n^{(\lambda)}(t) = \left(U^{(\lambda)}(g)\,\xi,\ x_n\right),$$

где $\{x_n\}$ — последовательность векторов, образующих ортогональный базис пространства, в котором действует представление $U^{(\lambda)}$. Функции $\varphi_n^{(\lambda)}(t)$ называются (обычными) *сферическими функциями*. В то время как функция $\varphi^{(\lambda)}(t)$ зависит лишь от расстояния между точками $t_0$ и $t$ (при соответствующем определении понятия расстояния), функции $\varphi_n^{(\lambda)}(t)$ в общем случае уже зависят от самой точки $t$.

В случае двумерного евклидова пространства за обычные сферические функции можно принять функции $J_n(\lambda\alpha)e^{-in\varphi}$. В случае сферы $S_2$ такими сферическими функциями будут сферические гармоники

$$Y_{\lambda,n}(\theta,\ \varphi) = e^{in\varphi}P_\lambda^n(\cos\theta); \qquad \lambda = 0,\ 1,\ \ldots;$$
$$n = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm\lambda,$$

где $P_\lambda^n$ обозначает присоединенную функцию Лежандра. В случае плоскости Лобачевского $L_2$ эти сферические функции имеют вид

$$\left\{(-1)^n \frac{\Gamma(\nu(\lambda)+1-|n|)}{\Gamma(\nu(\lambda)+1+|n|)}\right\}^{1/2} e^{-in\varphi}P_{\nu(\lambda)}^n(\operatorname{ch} r),$$
$$n = 0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

где $\varphi$ — координата точки окружности $\left(x_1^2 + x_2^2\right) = t^2 - 1 = \text{const}$, а $r$ — геодезическое расстояние от точки $(1, 0, 0)$ до этой окружности.

Для функций, заданных на симметрических пространствах, сохраняется большая часть классического анализа Фурье. Рассмотрим, например, пространство $L(G)$ всех (комплекснозначных) функций $f$ с компактным носителем, двояко инвариантных в том смысле, что $f(k_1 g k_2) = f(g)$ при всех $k_1, k_2 \in K$. Тогда можно определить преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int f(g)\, \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\, dg;$$

при этом, если

$$f_1 * f_2(g) = \int f_1(gh^{-1}) f_2(h)\, dh,$$

то

$$(f_1 * f_2)^{\wedge} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2.$$

Введем обозначение $\tilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}$ и заметим, что операция свертывания, разумеется, коммутативна, если и $f_1$, и $f_2$ принадлежат $L(G)$.

Будем говорить, что мера $\mu$, заданная на группе $G$, позитивна, если

$$\int (f * \tilde{f})\, d\mu \geqslant 0, \qquad f \in L(G).$$

Тогда справедлива

Теорема Планшереля. *Если $\mu$ — произвольная позитивная мера на группе $G$, то ей соответствует такая однозначно определяемая мера $\hat{\mu}$ на множестве $\Lambda$, что для любых функций $f, f_1, f_2 \in L(G)$*

(1) *$\hat{f}$ имеет интегрируемый квадрат модуля относительно меры $\hat{\mu}$,*

(2) $\int f_1 * \tilde{f}_2\, d\mu = \int \hat{f}_1 \overline{\hat{f}_2}\, d\hat{\mu}$.

Если через $\mu_e$ обозначить меру, сосредоточенную в единице нашей группы (т. е. приписывающую вес единица точке $g = e$ и нулевой вес любому борелевскому множеству, не содержащему $e$), то в силу теоремы Планшереля

$$f_1 * \tilde{f}_2(e) = \int f_1(g)\, \overline{f_2(g)}\, dg = \int \hat{f}_1 \overline{\hat{f}_2}\, d\lambda,$$

где через $d\lambda$ обозначена мера (называемая *мерой Планшереля*), соответствующая мере $\mu_e$. Гомоморфизм $f \to \hat{f}$ (где $f \in L(G)$), описываемый сформулированной теоремой, продолжается до изоморфизма пространства всех двояко инвариантных функций на $G$, имеющих интегрируемый квадрат модуля, на пространство всех функций, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры $d\lambda$. Для таких двояко инвариантных функций справедливо также равенство

$$f(g) = \int \hat{f}(\lambda) \overline{\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)}\, d\lambda,$$

являющееся аналогом известной формулы обращения теории интегралов Фурье.

Верна также и обобщенная теорема Бохнера, согласно которой для всякой непрерывной двояко инвариантной положительно определенной функции $\tilde{\varphi}(g)$

$$\tilde{\varphi}(g) = \int \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\, d\hat{\mu}(\lambda), \qquad (3)$$

где $\hat{\mu}$ — положительная мера конечной полной вариации, которую мы будем называть *спектральной мерой*.

Наконец, всякую непрерывную функцию на группе $G$ можно равномерно аппроксимировать на любом компактном множестве линейными комбинациями функций вида $(U^{(r)}(g)\eta, \eta)$, где $U^{(r)}$ — неприводимое унитарное представление группы $G$. В частности, все функции из пространства $L(G)$ можно равномерно аппроксимировать «тригонометрическими полиномами» относительно зональных сферических функций.

## 13.2. Стационарные процессы второго порядка на однородных пространствах

Рассмотрим семейство случайных величин $x(t)$, заданных на симметрическом пространстве $T$, на котором транзитивно действует группа $G$ преобразований Ли[1]).

---

[1]) За $G$ не обязательно принимать группу всех изометрических преобразований множества $T$, так что, например, $\mu_0$ может и не принадлежать $G$. Однако по-прежнему верно, что существует такой элемент $g \in G$, что $\mu_0 s = gt$, $\mu_0 t = gs$ для всех $s$ и $t$ из $T$.

Как обычно, стационарную (компактную) подгруппу точки $t_0$ мы обозначим через $K$. Предположим, что процесс $x(t)$ стационарен в том смысле, что непрерывная функция

$$\gamma(s, t) = \mathbf{E}(x(s)\,x(t))$$

является инвариантной функцией двух аргументов. Образуем, как и раньше, гильбертово пространство $\mathcal{H}$, представляющее собой замыкание по норме $|x(t)| = \sqrt{\gamma(t, t)}$ множества всех комплексных линейных комбинаций величин $x(t)$. Скалярным произведением в $\mathcal{H}$ элементов $x(s)$ и $x(t)$ тогда будет, разумеется, $(x(s), x(t)) = \gamma(s, t)$.

Область определения оператора $U(g)$, задаваемого формулой

$$U(g)\,x(t) = x(gt),$$

можно расширить до всего пространства $\mathcal{H}$. При этом $U(g)$ оказывается унитарным оператором в $\mathcal{H}$, так как

$$(U(g)\,x(s),\ U(g)\,x(t)) = \gamma(s, t) = (x(s),\ x(t)).$$

Спектральная теория, так же как и в разделе 5, опирается на разложение представления $U(g)$ группы $G$ на неприводимые компоненты. Здесь также можно показать, что $U(g)$ — представление с однократным спектром, причем доказательство близко к тому, которое было приведено в разделе 6. Отображение $x(s) \to x(\mu_0 s)$ можно распространить на все пространство $\mathcal{H}$. Ясно, что получаемый таким образом линейный оператор $M$ унитарен. Если теперь $K$ — некоторый оператор из коммутаторной алгебры представления $U(g)$ и $u, v \in \mathcal{H}$, то

$$(Ku,\ v) = (KM\bar{v},\ M\bar{u}),$$

где через $\bar{u}$ и $\bar{v}$ обозначены случайные величины, комплексно сопряженные $u$ и $v$ (при $u = x(s)$ и $v = x(t)$ это проверяется легко, а любые $u$ и $v$ можно представить как пределы линейных комбинаций таких величин [1])). Если $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{H}$, то для операторов $A$ и $B$, принадлежащих коммутаторной алгебре представления $U(g)$,

$$A\varphi_j = \sum_k \alpha_{kj}\varphi_k, \qquad \sum_k |\alpha_{kj}|^2 < \infty,$$

$$BA\varphi_j = \sum_k \alpha_{kj}\left\{\sum_i \beta_{ik}\varphi_i\right\} = \sum_i \left\{\sum_k \alpha_{kj}\beta_{ik}\right\}\varphi_i = $$
$$= \sum_i (\beta\alpha)_{ij}\,\varphi_i, \qquad \sum_i |\beta_{ik}|^2 < \infty,$$

где $\beta$ и $\alpha$ — соответственно определенные матрицы. Таким образом,

$$(BA\varphi_j,\ \varphi_i) = (\beta\alpha)_{ij},$$
$$(B\varphi_k,\ \varphi_i) = \beta_{ik},$$
$$(A\varphi_j,\ \varphi_k) = \alpha_{kj},$$

так что

$$(BA\varphi_j,\ \varphi_i) = \sum_k (B\varphi_k,\ \varphi_i)(A\varphi_j,\ \varphi_k) =$$
$$= \sum_k (BM\bar{\varphi}_i,\ M\bar{\varphi}_k)(AM\bar{\varphi}_k,\ M\bar{\varphi}_j) = (ABM\bar{\varphi}_i,\ M\bar{\varphi}_j),$$

ибо $M$ — унитарный оператор. Отсюда

$$(BA\varphi_j,\ \varphi_i) = (AB\varphi_j,\ \varphi_i)$$

и, следовательно,

$$AB = BA.$$

Таким образом, представление $U(g)$ разлагается единственным образом в прямой интеграл по неэквивалентным неприводимым подпредставлениям. Более

---

[1]) $(Kx(s),\ x(t)) = (KMx(\mu_0 s),\ Mx(\mu_0 t)) =$
$$= (KMU(g)\,x(t),\ MU(g)\,x(s)) = (KU(g_1)\,Mx(t),\ U(g_1)\,Mx(s)) =$$
$$= (KMx(t),\ Mx(s))$$

и, следовательно,

$$\left(K\sum \alpha_j x(s_j),\ \sum \beta_k x(t_k)\right) = \sum\sum \alpha_j\bar{\beta}_k\,(Kx(s_j),\ x(t_k)) =$$
$$= \sum\sum \alpha_j\beta_k\,(KMx(t_k),\ Mx(s_j)) = \left(KM\sum \bar{\beta}_k x(t_k),\ M\sum \bar{\alpha}_j x(s_j)\right).$$

того, можно показать, что в этот интеграл входят только те представления $U^{(\lambda)}(g)$, для которых $U^{(\lambda)}(k)$, $k \in K$, содержит единичное представление группы $K$ (и притом точно один раз, так как более одного раза единичное представление группы $K$ содержаться не может).

Итак, мы имеем разложение

$$U(g) = \int_{\Lambda} \oplus U^{(\lambda)}(g).$$

Как уже было отмечено, для всякого $\lambda \in \Lambda$ существует единственная (положительно определенная) зональная сферическая функция $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)$ и

$$\gamma(s, t) = \int_{\Lambda} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\, d\hat{\mu}(\lambda), \qquad gt = s,$$

где $\hat{\mu}(\lambda)$ — положительная мера на множестве $\Lambda$ всех неприводимых представлений, порождающих зональные сферические функции. Сам процесс $x(t)$ допускает представление в виде

$$x(t) = \sum_i \int_{\Lambda} \varphi_i^{(\lambda)}(t)\, dz_i(\lambda),$$

где $\varphi_i^{(\lambda)}(t)$ — обычная $i$-я сферическая функция, связанная с $\varphi^{(\lambda)}(t)$, а $z_i$ — случайная функция множества, удовлетворяющая соотношению

$$\mathbf{E}\left(z_i(\Lambda_1)\overline{z_j(\Lambda_2)}\right) = \delta_i^j \hat{\mu}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2), \quad \Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda.$$

Эти результаты следуют из формул (12.1.2) и (12.1.3), если положить в них $x = x(t_0)$ и $g$ выбрать удовлетворяющим соотношению $gt_0 = t$. В самом деле, в этом случае

$$x(t) = U(g)\, x(t_0) = \int_{\Lambda} U^{(\lambda)}(g)\, d(E_\lambda x) =$$

$$= \sum_i \int_{\Lambda} \varphi_i^{(\lambda)}(t)\, dz_i(\lambda),$$

так как $U(k)x(t_0) = x(t_0)$.

В случае когда группа $G$ компактна, множество $\Lambda$ счетно; поэтому, например, для случая единичной сферы трехмерного пространства мы получаем

$$x(\theta, \varphi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=-\lambda}^{\lambda} z_i(\lambda) Y_{\lambda, i}(\theta, \varphi),$$

$$\mathbf{E}\left(z_i(\lambda)\overline{z_j(\mu)}\right) = \delta_i^j \delta_\lambda^\mu f(\lambda),$$

$$\gamma(\theta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2\lambda+1}{4} f(\lambda) P_\lambda(\cos\theta).$$

Все проведенные рассуждения можно перенести на случай произвольной локально компактной группы $G$ типа I, действующей на однородном пространстве $T$, с помощью метода, вполне аналогичного упомянутому в конце раздела 5.3 в связи с обсуждением ситуации с некоммутативной коммутаторной алгеброй; за деталями этого вывода читатель отсылается к работе Яглома [2]. Разумеется, и коммутативный случай также рассмотрен здесь в неполном объеме; на самом деле он включает в себя и все так называемые слабо симметрические пространства, описанные Зельбергом [1], — римановы многообразия, являющиеся однородными пространствами относительно некоторой локально компактной группы преобразований $G$ с изометрией $\mu$, удовлетворяющей условиям $\mu G \mu^{-1} = G$, $\mu^2 \in G$ и $\mu s = gt$, $\mu t = gs$ для всех $s$ и $t$ при некотором выборе $g$. Обсуждение понятия сферических функций на таких пространствах можно найти в работах Зельберга [1] и Тамагавы [1].

## 13.3. Фильтрация и «склеивание»

Рассмотрим снова гильбертово пространство $\mathscr{H}$, представляющее собой замыкание линейной оболочки множества величин $x(t)$. Как и раньше, ограничимся случаем, когда $T$ — симметрическое пространство.

Под *фильтром* будем понимать замкнутый, не обязательно ограниченный оператор $A$, определенный на некоторой области $\mathscr{D}$ в $\mathscr{H}$ (которую мы будем считать содержащей $x(t_0)$) и удовлетворяющий соотношению

$$AU(g)x = U(g)Ax, \qquad x \in \mathscr{H}, \quad g \in G.$$

Все операторы, принадлежащие коммутаторной алгебре, будут, таким образом, фильтрами. В случае евклидовых пространств фильтрами будут все операторы сдвига. В случае общих симметрических пространств некомпактного типа среди операторов $U(g)$ фильтрами будут лишь операторы вида $U(k)$ для некоторых $k \in K$ (поскольку центр группы $G$ здесь обязательно содержится в $K$). Ясно, что оператор $A$ определен для всех $x(t)$, так как если $gt_0 = t$, то

$$\| Ax(t) \| = \| AU(g)x(t_0) \| = \| U(g)Ax(t_0) \| = \| Ax(t_0) \|$$

в силу унитарности оператора $U(g)$ [1]).

Таким образом, множество случайных величин $y(t) = Ax(t)$ определено на всем $T$ и представляет собой стационарный случайный процесс. Существуют, однако, и такие линейные операторы $A$, что процесс $Ax(t)$ стационарен, но они тем не менее не коммутируют со всеми операторами $U(g)$. Мы специально выделили множество фильтров из-за их простоты, к разъяснению которой мы сейчас и перейдем.

Для описания действия $A$ на $x(t)$ выразим спектральную меру $\hat{\mu}_y(\lambda)$ процесса $y(t)$ через спектральную меру $\hat{\mu}(\lambda)$ процесса $x(t)$. Так как наше представление $U(g)$ — представление с однократным спектром, мы можем единственным образом представить вектор $x(t_0)$ в виде функции $f(\lambda)$, где при всяком $\lambda$ значение $f(\lambda)$ принадлежит пространству, в котором действует неприводимое представление $U^{(\lambda)}(g)$. Так как $U(k)x(t_0) = x(t_0)$, то почти все (относительно меры $m$ на множестве $\Lambda$) значения $f(\lambda)$ должны быть инвариантны относительно всех операторов $U^{(\lambda)}(k)$. Но поскольку вектор $Ax(t_0)$ также инвариантен относительно действия всех операторов $U(k)$, этот вектор

[1]) Отсюда ясно, что множество $\mathscr{D}$ должно быть плотно в $\mathscr{H}$; однако существуют примеры, показывающие, что оно не обязано совпадать со всем $\mathscr{H}$.

можно представить в виде $u(\lambda)f(\lambda)$, где $u(\lambda)$ — комплексное число. Но тогда если $gt_0 = t$, то

$$U(g)\,Ax(t_0) = Ax(t) = u(\lambda)\,U^{(\lambda)}(g)\,f(\lambda),$$

так что действие оператора $A$ сводится к умножению «неприводимой компоненты» вектора $x(t)$, соответствующей неприводимому представлению $U^{(\lambda)}(g)$ группы $G$, на комплексное число $u(\lambda)$. Таким образом,

$$y(t) = Ax(t) = \sum_i \int_\Lambda u(\lambda)\,\varphi_i^{(\lambda)}(t)\,dz_i(\lambda),$$

откуда

$$\gamma_y(s,\ t) = \int_\Lambda |u(\lambda)|^2\,\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\,d\hat{\mu}(\lambda), \qquad gt = s.$$

Назовем функцию $u(\lambda)$ *передаточной функцией* фильтра, а ее модуль $|u(\lambda)|$ — *амплитудной характеристикой*, или *коэффициентом усиления*. Причины, делающие использование фильтров важным, связаны как раз с тем, что в этом случае, если задан фильтр, можно определить влияние соответствующего линейного преобразования на спектр, даже если мы не знаем сам спектр. Дело в том, что линейное преобразование сводится здесь к умножению спектра на функцию $|u(\lambda)|^2$, зависящую лишь от выбранного фильтра.

В число наиболее важных операторов, коммутирующих с операторами сдвига (в случае $T$, совпадающего с вещественной осью), входят дифференциальные операторы. Если теперь мы рассмотрим плоскость как однородное пространство относительно группы всевозможных движений, то уже не *все* дифференциальные операторы будут коммутировать со всеми такими движениями, а только полиномы от оператора Лапласа $\Delta$ (и, разумеется, единичный оператор $I$).

Это положение сохраняется (в обобщенном смысле) и в общем случае. В самом деле, в случае всех пространств, рассматривавшихся нами выше в качестве примеров (евклидовы пространства, сфера, пространство Лобачевского $L_3$), любой дифференциальный оператор, коммутирующий с операторами сдвига, можно снова представить в виде полинома от оператора $I$ и оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta$, являющегося естественным обобщением оператора Лапласа на плоскости. В этих случаях функцию $u(\lambda)$ легко найти — она имеет вид $p(\lambda_\Delta)$, где $p$ — полином (тот же, какой берется от оператора $\Delta$), а $\lambda_\Delta$ находится из соотношения

$$\Delta\varphi_i^{(\lambda)}(t) = \lambda_\Delta \varphi_i^{(\lambda)}(t),$$

справедливого, поскольку все сферические функции являются собственными функциями оператора $\Delta$. Для сферы $S_2$ оператор $\Delta$ равен

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

так что, как легко видеть, $\lambda_\Delta$ для сферической функции $Y_{\lambda,n}(\theta, \varphi)$ здесь равно $-\lambda(\lambda+1)$. Таким образом, действие оператора $\sum_j \alpha_j \Delta^j$ сводится к умножению «спектральной плотности» $f(\lambda)$ (заменяющей меру $F(\lambda)$ в рассматриваемом случае дискретного спектра) на

$$\left|\sum_j \alpha_j \{\lambda(\lambda+1)\}^j\right|^2.$$

В общем случае ситуация более сложна; так, например, если симметрическое пространство не евклидово и его ранг равен $l$ (т. е. оно имеет подмногообразие, содержащее каждую геодезическую, его касающуюся, и представляющее собой плоское пространство[1]) размерности $l$, но не имеет подобного же подмногообразия размерности, большей $l$), то на нем найдется уже $l$ таких операторов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$, что

[1]) Это означает, что тензор кривизны равен нулю, так что если двумерное векторное подпространство касательного пространства в точке $t_0$ отобразить с помощью экспоненциального отображения на многообразие $T$, то гауссова кривизна получающегося сечения $T$ будет равна нулю.

каждый дифференциальный оператор, коммутирующий со всеми операторами сдвига, можно представить в виде полинома от этих операторов и оператора $I$.

Операция дифференцирования (в среднем квадратичном) процесса $x(t)$, разумеется, может и не быть определена. Для того чтобы она имела смысл, надо, чтобы сходился интеграл

$$\int |u(\lambda)|^2 d\hat{\mu}(\lambda).$$

От последнего замечания естественно перейти к определению (скажем, для симметрических пространств ранга 1) процесса $x(t)$, удовлетворяющего соотношению

$$\sum \alpha_j \Delta^j x(t) = n(t), \tag{1}$$

где $n(t)$ — «белый шум», т. е. такой стационарный процесс, что его спектральной мерой $d\hat{\mu}(\lambda)$ служит однозначно определенная положительная мера $d\lambda$ на множестве $\Lambda$, для которой верна формула Планшереля. В таком случае, очевидно,

$$d\hat{\mu}_x(\lambda) = \left| \sum \alpha_j \lambda_\Delta^j \right|^{-2} d\lambda. \tag{2}$$

Это определение, разумеется, может и не быть корректным, так как мера $d\lambda$ не обязательно конечна; и поэтому такой процесс $n(t)$ может и не существовать. Однако всегда можно показать, что спектральная функция должна иметь вид (2), если только процесс $x(t)$ удовлетворяет соотношению (1), понимаемому в смысле равенства

$$\int_T \left[ \sum \alpha_j \Delta^j x(t) \right] f(t)\, d\mu(t) = \int_T f(t)\, dN(t),$$

где $f(t)$ принадлежит некоторому специальным образом выбранному подклассу функций на пространстве $T$, а процесс $N(t)$ (зависящий фактически уже не от точки, а от множества пространства $T$) таков, что

$$\mathbf{E}\{N(T_1)\, N(T_2)\} = \mu(T_1 \cap T_2)$$

для любых двух измеримых множеств $T_1$ и $T_2$ (интегрирование по $d\mu(t)$ здесь имеет смысл интегрирования по фактически единственной инвариантной мере на $T$).

Еще один важный вопрос, заслуживающий специального обсуждения, возникает, когда значения процесса $x(t)$ наблюдаются не на всем многообразии $T$, а на некотором его подмножестве. Вопрос, который мы хотим обсудить, касается связи между «спектром» наблюдаемого процесса и спектром полного (не наблюдаемого) процесса $x(t)$. Ясно, что для того, чтобы само понятие спектра было применимо к наблюдаемой части процесса, необходимо существенно ограничить природу упомянутого подмножества. Случай, когда $G$ — абелева группа, уже был рассмотрен выше.

Теперь мы рассмотрим случай, когда $T$ — произвольное симметрическое пространство, а процесс $x(t)$ наблюдается на подмножестве точек вида $Ht_0, \ldots$ $\ldots, Ht_n$, где $H$ — некоторая дискретная подгруппа группы $G$ (так что если группа $G$ компактна, то $H$ конечна). Мы ограничимся лишь случаем, когда пространство классов смежности $G/H$ компактно (в топологии, индуцированной топологией группы $G$). Начнем с естественного обобщения формулы суммирования Пуассона, которая, как мы видели в разделе 11, в случае абелевой группы позволяет получить искомую связь. Этим обобщением будет формула следов Зельберга, которая (в формальной записи) утверждает, что

$$\int\limits_{G/H} \left\{ \sum_{h \in H} \overline{\chi^{(r)}(h)}\, \tilde{\gamma}(x^{-1}hx) \right\} dx = \sum_{\lambda} n_{\lambda}^{(r)} \int\limits_{G} \tilde{\gamma}(g)\, \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\, dg. \tag{3}$$

Здесь $\chi^{(r)}(h)$ — характер $r$-го ($\nu$-мерного, где $\nu < \infty$) неприводимого представления группы $H$, $dx$ — элемент инвариантной меры на пространстве $G/H$ (однозначно определяемой, как и в разделе 11.1, если выбрать меру на $H$, приписывающую единичный вес каждому элементу этой подгруппы), а $n_\lambda^{(r)}$ — кратность $\lambda$-го неприводимого представления группы $G$ в представлении, индуцированном (в объясненном ниже смысле) $r$-м неприводимым представлением группы $H$.

Для того чтобы объяснить, что значит здесь «индуцированное», рассмотрим пространство всех измеримых функций $\theta(g)$ на $G$ со значениями, являющимися векторами $\nu$-мерного пространства, в котором действует данное неприводимое представление группы $H$, таких что

$$\theta(hg) = U^{(r)}(h)\,\theta(g).$$

Определим скалярное произведение в этом пространстве формулой

$$(\theta_1,\ \theta_2) = \int\limits_{G/H} (\theta_1(x),\ \theta_2(x))\,dx,$$

где под знаком интеграла стоит скалярное произведение в пространстве представления $U^{(r)}(h)$. Индуцированное представление $U_{(r)}(g)$ тогда будет иметь вид [1])

$$U_{(r)}(g_1)\,\theta(g) = \theta(gg_1).$$

Можно показать, что оператор $U_{(r)}$ разлагается в дискретную прямую сумму неприводимых компонент, каждая из которых повторяется лишь конечное число

---

[1]) Для того чтобы выявить аналогию с определением индуцированного представления, использовавшимся в разделе 7, можно для рассматривавшегося там случая конечных групп рассматривать не саму функцию $\theta(g)$, а лишь ее значения на отдельных «типичных элементах» $g_i$ классов смежности $G/H$ (так как при заданном представлении группы $H$ функция $\theta(g)$ определяется этими значениями однозначно). Если теперь представить эти значения $\theta(g_i)$ в виде вектора с векторными компонентами, то мы придем к формализму раздела 7. При выполнении условий «теоремы взаимности» Фробениуса числа $n_\lambda^{(r)}$ будут кратностями $r$-го неприводимого представления в сужении $\lambda$-го неприводимого представления группы $G$ на $H$.

раз. Формула (3) получается при помощи вычисления следа оператора

$$\int \tilde{\gamma}(g)\, U_{(r)}(g)\, dg$$

двумя различными способами, первый из которых опирается на рассмотрение представления $U_{(r)}(g)$ как индуцированного, а второй — на его рассмотрение в виде дискретной прямой суммы неприводимых компонент.

Если $\tilde{\gamma}(g)$ — функция с интегрируемым квадратом, то равенство (3) безусловно выполняется и его можно записать в виде

$$\int_{G/H} \left\{ \sum_{h \in H} \overline{\chi^{(r)}(h)}\, \tilde{\gamma}(x^{-1}hx) \right\} dx = \sum_{\lambda} n_{\lambda}^{(r)} f(\lambda),$$

где функция $f(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\gamma}(g) = \int_{\Lambda} \overline{\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)}\, f(\lambda)\, d\lambda.$$

Таким образом, формулу (3) можно интерпретировать точно так же, как и аналогичную формулу в разделе 7. Левую часть этой формулы можно надеяться определить, оценивая выражение в фигурных скобках по данным на достаточно большом подмножестве множества $\bigcup_i Ht_i$, а затем аппроксимируя интеграл по $dx$ суммой, распространенной по достаточно большому числу точек из $G/H$. Знание чисел $n_{\lambda}^{(r)}$ позволяет тогда сказать, чтó именно мы знаем о спектральной плотности $f(\lambda)$. Формула (3), конечно, не дает исчерпывающий ответ на наш вопрос, так как она верна лишь при некоторых дополнительных условиях (см. Зельберг [1]) и, кроме того, ограничивается случаем лишь конечномерных неприводимых представлений группы $H$. Если группа $G$ компактна, то все эти условия выполнены и формула кажется дающей удовлетворительный ответ на поставленный вопрос. В этом частном случае $n_{\lambda}^{(r)}$ совпадает с кратностью $r$-го неприводимого представления группы $H$

в сужении $\lambda$-го неприводимого представления группы $G$ на $H$, что можно увидеть из сравнения характеров этих представлений [1]).

Если $H$ — нормальный делитель группы $G$, то

$$\int\limits_{G/H} \chi_H^{(r)}(xhx^{-1})\,dx = \chi_0^{(r)}(h)$$

можно снова интерпретировать как характер представления группы $G$, индуцированного $r$-м неприводимым представлением группы $H$. Следовательно, в этом наиболее выгодном случае формула приобретает более простой вид

$$\sum_H \gamma(ht_0,\ t_0)\,\chi_0^{(r)}(h) = \sum_\lambda n_\lambda^{(r)} f(\lambda),$$

где все выражения в левой части можно оценить.

## 13.4. Безгранично делимые распределения на симметрических пространствах

Последнее рассматриваемое нами приложение принадлежит Ганголли, который охарактеризовал все безгранично делимые (изотропные) вероятностные меры на симметрических пространствах. На самом деле он перенес на этот случай значительную часть теории безгранично делимых распределений, развитой ранее для случая вещественной оси. Для общих симметрических пространств евклидова типа эти результаты также являются классическими и хорошо известны. Ганголли рассматривал симметрические пространства компактного типа, но мы здесь ограничимся случаем пространств некомпактного типа. Следует заметить, однако, что всякую связную компактную группу Ли $G$ можно рассматривать как сим-

[1]) Следует заметить, что левую часть обсуждаемой формулы можно записать и в другом виде (см. Зельберг [1]), позволившем Зельбергу вычислить ее правую часть. При рассмотренном же нами (не слишком реальном) использовании этой формулы ее левая часть предполагается оцениваемой по данным наблюдений, а числа $n_\lambda^{(r)}$ считаются известными.

метрическое пространство компактного типа. Упомянутое выше условие изотропности (строго определенное ниже) требует инвариантности вероятностной меры $\mu$ относительно отображения $g \to g_0 g g_0^{-1}$, т. е. ее постоянства на классах сопряженных элементов. Для абелевых групп $G$ это условие всегда выполняется, так что часть результатов Клосса, обсуждавшихся в разделе 11.3, следует и из рассуждений Ганголли.

Ганголли рассматривал класс конечных регулярных борелевских мер $\mu(t)$ на пространстве $T$, для которых

$$\mu(kE) = \mu(E) \quad \text{при} \quad k \in K \tag{1}$$

для всех измеримых множеств $E$. Это условие и есть условие изотропности. Каждая такая мера индуцирует некоторую меру $\tilde{\mu}$ на $G$ (где $T = G/K$), удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{\mu}(kSk') = \tilde{\mu}(S), \quad k, k' \in K, \tag{2}$$

где $S$ — измеримое подмножество в $G$. Преобразование Фурье определяется тогда формулой

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_G \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\, d\tilde{\mu}(g). \tag{3}$$

Ганголли показал, что достаточно рассматривать это преобразование лишь для некоторого подкласса всех положительно определенных зональных сферических функций (соответствующих в случае комплексной полупростой группы Ли $G$ так называемым главным сериям ее представлений). Для того чтобы объяснить этот факт, нужно детализировать природу множества, пробегаемого параметром $\lambda$. Можно показать, что всякий элемент группы $G$ представим в виде произведения

$$g = kan,$$

где $k \in K$, $a$ принадлежит некоторой односвязной абелевой подгруппе $A$ группы $G$, а алгебра Ли подгруппы $N$, пробегаемой элементом $n$, нильпотентна в том смысле, что линейное отображение

$$Z \to [N, Z]$$

нильпотентно ($N$ и $Z$ принадлежат алгебре Ли группы $N$). Это разложение называется разложением Ивасавы. Например, в случае комплексной унимодулярной группы $k$ — унитарная матрица, $a$ — вещественная диагональная матрица, а $n$ — треугольная матрица с нулями над главной диагональю и единицами на ней. Все эти матрицы, разумеется, унимодулярны.

Алгебра Ли группы $A$ обозначается через $\mathfrak{h}_{p_0}$ и является абелевой алгеброй Ли в том смысле, что коммутатор любых двух ее элементов равен нулю. Параметр $\lambda$ определяет вещественный линейный функционал, заданный на алгебре $\mathfrak{h}_{p_0}$, рассматриваемой как вещественное векторное пространство.

Вероятностная мера $\mu$, удовлетворяющая условию (2), называется *безгранично делимой*, если она равна $\nu_j^j$ (т. е. $j$-й степени некоторой меры $\nu_j$) при любом $j$. Оказывается, что мера $\mu$ безгранично делима тогда и только тогда, когда

$$\hat{\mu}(\lambda) = \exp\{P_D(\lambda)\} - \int\limits_{|g|>0} \{1 - \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\}\, dL(g),$$

где $|g|$ — геодезическое расстояние от $t_0$ до $gt_0$, $L$ — положительная мера, удовлетворяющая условию (2) и такая, что

$$\int\limits_G \frac{|g|^2}{1+|g|^2}\, dL(g) < \infty,$$

а $P_D(\lambda)$ — собственное значение некоторого дифференциального оператора в частных производных второго порядка $D$, соответствующее собственному вектору $\varphi^{(\lambda)}(t)$. Оператор $D$ — эллиптический оператор, обращающий в нуль константы и коммутирующий с операторами левых сдвигов. Так же как и в разделе 11.3, его можно представить в виде симметрического однородного полинома второй степени относительно элементов алгебры Ли группы $G$ (с добавлением слагаемого, кратного единичному оператору), рассматриваемых как дифференциальные операторы на пространстве бесконечно дифференцируемых функций на $G$, инвариантных относительно правых сдвигов на элементы из $K$.

Функция $\{1 - c\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\}$, $c > 0$, равна преобразованию Фурье вероятностной меры

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-c} \frac{c^j \tilde{\mu}_g^j}{j!}, \tag{4}$$

где $\tilde{\mu}_g$ — мера с носителем $KgK$, индуцированная нормированной мерой Хаара на группе $K \times K$. Меру (4) естественно назвать «мерой Пуассона с размером скачка $g$ и интенсивностью скачков $c$». Аналогия с классической ситуацией здесь очевидна.

Ганголли показал, что мера $\tilde{\mu}$ (удовлетворяющая условию (2)) безгранично делима тогда и только тогда, когда

$$\hat{\mu}(\lambda) = \exp\{-\Psi(\lambda)\},$$

где

$$\Psi(\lambda) = \lim_j \int \{1 - \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(g)\}\, dL_j(g),$$

а меры $L_j$ удовлетворяют тем же самым условиям, что и $L$. Он также указал, что такая мера $\tilde{\mu}$ безгранично делима тогда и только тогда, когда для всякого положительного числа $j$ найдется $r_j$ таких вероятностных мер $\tilde{\mu}_{j,r}$, $r = 1, \ldots, r_j$ (удовлетворяющих условию (2)), что

(I) $\hat{\mu}_j(\lambda) = \prod\limits_1^{r_j} \hat{\mu}_{j,r}(\lambda) \to \hat{\mu}(\lambda)$,

(II) $\max\limits_{1 \leqslant r \leqslant r_j} |\hat{\mu}_{j,r}(\lambda) - 1| \to 0$ равномерно по $\lambda$ на компактных множествах пространства всех вещественных линейных функционалов на $\mathfrak{h}_{p_0}$.

## 14. Заключение

Мы надеемся, что настоящий обзор выявил возможность широких приложений теории представлений групп в статистике и теории вероятностей. Безусловно, существуют также многие приложения, неизвестные автору. Некоторые же другие вопросы были опущены сознательно. В качестве примера напомним, что в разделе 7 не обсуждались уравнения для оценки недостающих наблюдений в задаче о планировании эксперимента с неполными блоками. Аналогом этого опущенного вопроса в применении к стационарным процессам второго порядка на симметрических пространствах является вопрос о прогнозе или интерполяции таких процессов. Эта последняя задача рассматривалась уже для случая некоторых локально компактных абелевых групп (см. Хелсон и Лауденслагер [1]), и надо думать, что проблемы интерполяции на общих симметрических пространствах (так же как и задачи прогнозирования в случае симметрических пространств некомпактного типа) еще привлекут внимание в недалеком будущем.

Нам кажется, что использование теории представлений в теории вероятностей и статистике очень привлекательно; этим нашим чувством нам и хотелось заразить читателей нашей книги.

## 15. Некоторые библиографические замечания [1])

Разделы 2 и 3.1. Все сказанное здесь можно найти в книге Г. Вейля [1]. Автор широко использовал эту книгу и книгу Холла [1]. См. также Кэртис и Райнер [1] {и Мурнаган [1]; ряд классических результатов теории представлений групп можно найти в сборнике статей Фробениуса [1]}.

Раздел 3.2. Приведенное здесь доказательство почти точно повторяет доказательство аналогичной

[1]) Ссылки, включенные в основной текст, здесь, как правило, не повторяются. {Дополнительные замечания в фигурных скобках принадлежат редактору перевода. — *Ред.*}

теоремы для компактных групп, принадлежащее Каваде и Ито [1]. См. также Гренандер [1].

Раздел 5.1. Терминология и некоторые соображения здесь заимствованы из работы Зельберга [1]. Теорему Фробениуса о взаимности можно найти в книге Холла [1, стр. 318] {см. также Фробениус [1]}. Общая теория связи представления группы с его коммутаторной алгеброй развита в первую очередь в книге Г. Вейля [1, гл. III и IX].

Раздел 5.2. Основные ссылки приведены в тексте раздела. Первым, кто осознал теоретико-групповую природу рассматриваемой ситуации, был, по-видимому, Джеймс [2]. См. также Манн [1]. {Подробное изложение обсуждаемых в этом разделе задач математической статистики см. у Дюге [1].}

Раздел 5.3. Тесная связь между дисперсионным анализом и общей теорией стационарных процессов второго порядка, вероятно, была замечена многими авторами. См., например, Хеннан [2] и Макларен [1].

Раздел 6. Понятие слабой симметрии принадлежит Зельбергу [1].

Раздел 7. Рассмотренные здесь приложения являются, по всей видимости, новыми. Обсуждение формулы следов Зельберга можно найти в работах Зельберга [1] и Макки [1] {а также в книге Гельфанда, Граева и Пятецкого-Шапиро [1]}. Автор узнал бо́льшую часть того, что он знает по этому поводу, из второй из указанных работ.

Раздел 8.1. Топологическим группам посвящена обширная литература. Общие топологические группы рассмотрел Понтрягин [1]. Шевалле [1] подробно изложил теорию групп Ли {которой посвящена также книга Чеботарева [1]}. Источником основных сведений автора о полупростых группах Ли была книга Хелгасона [1].

Раздел 8.2. Все опущенные здесь подробности можно найти в книге Андерсона [1].

Разделы 9.1 и 9.2. Теория представлений компактных групп рассматривается, в частности, в книгах Наймарка [2] и Люмиса [1]; см. также Г. Вейль [1]. Теорема раздела 9.2 представляет собой частный случай теоремы Кавады и Ито [1], детальное доказательство которой содержится в книге Гренандера [1]. Дальнейшее обобщение этой теоремы содержится в работе Клосса [1]. Теория представлений группы $O_+(3)$ очень подробно, ясно и наглядно изложена в статье Гельфанда и Шапиро [1] {и в книге Гельфанда, Минлоса и Шапиро [1]}.

Раздел 10.1. Теория представлений классических групп Ли изложена в книге Г. Вейля [1]. Другой ценный источник сведений в этой области, широко использованный автором, — монография Бёрнера [1]. В нашем обзоре речь идет в основном о группе $GL(N, R)$, но Вейль и Бёрнер рассматривали также и тензорные представления других классических полупростых групп Ли. Стоит заметить, что такие представления не обязательно унитарны, но зато они выделены в другом отношении — элементами их матриц служат полиномы от элементов матриц исходной группы.

Раздел 11.1. В качестве пособий при изучении локально компактных абелевых групп и гармонического анализа на них можно порекомендовать книги Люмиса [1], Наймарка [2], А. Вейля [1] {и Райкова [1]}. Автор наиболее широко использовал книгу Люмиса.

Раздел 11.2. Изложенное здесь понятие стационарного процесса первым, по-видимому, рассмотрел Кампе де Ферье [1].

Раздел 12.1. Значительную информацию о бесконечномерных представлениях групп можно почерпнуть в книгах Наймарка [1, 2]. {Основная работа о бесконечномерных представлениях классических групп, положившая начало всей теории таких представлений, принадлежит Гельфанду и Наймарку [1].} Автор использовал также обзор Макки [1].

Раздел 13.1. Основной источник здесь — книга Хелгасона [1]; см. также Макки [1] {и более ранние статьи Гельфанда [1] и Крейна [1]}. Теорема Планшереля в приведенной здесь форме заимствована из работы Годемана [1].

Раздел 13.2. Основной работой по данному вопросу является статья Яглома [2]. {См. также Яглом [1, 3]. Родственный класс случайных процессов на однородных пространствах был изучен в последние годы Ганголли [2, 3].}

Раздел 13.3. Кое-что из содержания этого раздела, по-видимому, ново. Здесь снова широко использовалась книга Хелгасона [1]. Своими познаниями относительно формулы следов Зельберга автор обязан работам Зельберга [1], Тамагавы [1] и Макки [1]. См. также Гельфанд и Пятецкий-Шапиро [1], Годеман [2] {и Гельфанд, Граев и Пятецкий-Шапиро [1]}.

Раздел 13.4. Этот раздел целиком основан на статье Ганголли [1].

# БИБЛИОГРАФИЯ [1])


Андерсон Т.

1. Введение в многомерный статистический анализ, Физматгиз, М., 1963.

Бёрнер (Boerner H.)

1. Representations of groups, Amsterdam, 1963.

Вейль А.

1. Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М., 1950.

Вейль Г.

1. Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.

Вэн (Wehn O. F.)

1. Probabilities on Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 48 (1962), 791—795.

Ганголли (Gangolli R.)

1. Isotropic infinitely divisible distributions on symmetric spaces, *Acta Math.*, **111** (1964), 213—246.

*2. Abstract harmonic analysis and Lévy's Brownian motion of several parameters. Proc. Fifth Berkley Symp. Math. Stat. and Probab., vol. 2, part I (1967), 13—30.

*3. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes, related to Lévy's Brownian motion of several parameters, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sec. B, № 2 (1967), 121—225.

Гельфанд И. М.

*1. Сферические функции на симметрических римановых пространствах, *ДАН СССР*, **70**, № 1 (1950), 5—8.

Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.

*1. Теория представлений и автоморфные функции (Обобщенные функции, вып. 6), «Наука», М., 1966.

Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.

*1. Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.

Гельфанд И. М., Наймарк М. А.

*1. Унитарные представления классических групп, *Труды МИАН им. В. А. Стеклова*, **36** (1950), 1—288.

Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И.

1. Теория представлений и теория автоморфных функций, *УМН*, **14**, № 2 (86) (1959), 171—194.


---

[1]) Работы, отмеченные звездочкой, добавлены при переводе. — *Прим. перев.*

Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.
1. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения, *УМН*, **7**, № 1 (47) (1952), 3—117.

Годеман (Godement R.)
1. Introduction aux travaux de A. Selberg, *Séminaire Bourbaki*, **144** (1957), 1—16.
2. La formule des traces de Selberg, *Séminaire Bourbaki*, **244** (1962), 1—10.

Гренандер У.
1. Вероятности на алгебраических структурах, «Мир», М., 1965.

Джеймс (James A. T.)
1. Normal multivariate analysis and the orthogonal group, *Ann. Math. Statist.*, **25** (1954), 40—75.
2. The relationship algebra of an experimental design, *Ann. Math. Statist.*, **28** (1957), 993—1002.
3. The distribution of the latent roots of the covariance matrix, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 151—158.
4. Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices, *Ann. Math.*, **74** (1961), 459—469.
5. Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples, *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 475—501.

Джеймс, Папазян (James A. T., Papazian H. P.)
1. Enumeration of quad types in diploids and tetraploids, *Genetics*, **46** (1961), 817—829.

Дюге Д.
*1. Теоретическая и прикладная статистика, «Наука», М., 1970.

Зельберг А.
1. Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах, приложения к теории рядов Дирихле, *Математика*, **1** : 4 (1957), 3—28.

Кавада, Ито (Kawada Y., Itô K.)
1. On the probability distribution on a compact group, *Proc. Phys.-Mat. Soc. Japan*, **22** (1940), 977—998.

Кампе де Ферье (Kampé de Fériet J.)
1. Analyse harmonique des fonctions aléatories stationnaires d'ordre 2 définies sur un group abélien localement compact, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **226** (1948), 868—870.

Клосс Б. М.
1. О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах, *Теория вероятн. и ее примен.*, **4** (1959), 255—290.
2. Предельные распределения на бикомпактных абелевых группах, *Теория вероятн. и ее примен.*, **6** (1961), 392—421.
3. Устойчивые распределения на локально бикомпактных группах, *Теория вероятн. и ее примен.*, **7** (1962), 237—257.

Крейн М. Г.

*1. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, I, II, *Укр. матем. ж.*, **1**, № 4 (1949), 64—98; **2**, № 1 (1950), 10—59.

Кэртис Ш., Райнер Т.

1. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.

Литлвуд (Littlewood D. E.)

1. The theory of group characters, Oxford, 1950.

Лоэв М.

1. Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.

Люмис Л.

1. Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956.

Макки Дж.

1. Бесконечномерные представления групп, *Математика*, **6** : 6 (1962), 57—103.

Макларен (McLaren A. D.)

1. On group representations and invariant stochastic processes, *Proc. Camp. Phil. Soc.*, **59** (1963), 431—450.

Манн (Mann H. A.)

1. The algebra of a linear hypothesis, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 1—15.

Мурнаган Ф. Д.

*1. Теория представлений групп, ИЛ, М., 1950.

Наймарк М. А.

1. Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
2. Нормированные кольца, 2-е изд., «Наука», М., 1968.

Понтрягин Л. С.

1. Непрерывные группы, Гостехиздат, М.—Л., 1954.

Райков Д. А.

*1. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, *Труды МИАН им. В. А. Стеклова,* **14** (1945), 1—86.

Сазонов В. В., Тутубалин В. Н.

*1. Распределения вероятностей на топологических группах, *Теория вероятн. и ее примен.,* **11**, № 1 (1966), 3—55.

Тамагава (Tamagawa T.)

1. On Selberg's trace formula, *J. Fac. Sci. Tokyo*, sec. I, **8** (1960), 363.

Фишер (Fischer R. A.)

1. The theory of linkage in polysomic inheritance, *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* **B 233** (1947), 55—87.

Фробениус Г.

*1. Теория характеров и представлений групп, Харьков, 1937.

Халмош П.

1. Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

Хант (Hunt G. A.)
1. Semigroups of measures in Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 264—293.

Хеннан Э. (Hannan E. J.)
1. Анализ временных рядов, «Наука», М., 1964.
2. Applications of the representations theory of groups and algebras to some statistical problems, Research Reports (Part I), Summer Research Unstitute, Australian Mathematical Society, 1961.

Хелгасон С.
1. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», М., 1964.

Хелсон, Лауденслагер (Helson H., Lowdenslager D.)
1. Prediction theory and Fourier series in several variables, *Acta Math.*, **99** (1958), 167—202.

Холл М.
1. Теория групп, ИЛ, М., 1962.

Чеботарев Н. Г.
*1. Теория групп Ли, ОНТИ, М.—Л., 1940.

Шевалле К.
1. Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1, 1948; т. 2, 3, 1958.

Яглом А. М.
*1. Положительно определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах, *ДАН СССР*, **135**, № 6 (1960).
2. Second-order homogeneous random fields, Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probab., vol. 2 (1961), 593—622.
*3. Спектральные представления для различных классов случайных функций, Труды 4-го Всесоюз. матем. съезда, т. 1 (1963), 250—271.

# ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие редактора перевода . . . . . . . . . . . . . 5

1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
2. Группы и их представления . . . . . . . . . . . 11
3.1. Представления конечных групп . . . . . . . . . 16
3.2. Тасование карт . . . . . . . . . . . . . . . . 20
3.3. Приложение к генетике . . . . . . . . . . . . . 22
4. Конечные абелевы группы . . . . . . . . . . . . 24
5.1. Коммутаторная алгебра . . . . . . . . . . . . 24
5.2. Дисперсионный анализ . . . . . . . . . . . . . 33
5.3. Стационарные процессы второго порядка . . . . . 37
5.4. Вещественный случай, единственность дисперсионного анализа и пример . . . . . . . . . . . . . . . 41
6. Коммутативность коммутаторной алгебры . . . . . 43
7. «Склеивание» в схеме неполных блоков . . . . . . 45
8.1. Непрерывные группы и мера Хаара . . . . . . . . 50
8.2. Многомерный статистический анализ . . . . . . . 55
9.1. Компактные группы . . . . . . . . . . . . . . . 57
9.2. Центральная предельная теорема . . . . . . . . 58
10.1. Конечномерные представления классических групп Ли 60
10.2. Распределение собственных значений ковариационной матрицы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
11.1. Локально компактные абелевы группы . . . . . . 68
11.2. Стационарные процессы . . . . . . . . . . . . 71
11.3. Центральные предельные теоремы . . . . . . . . 72
12.1. Бесконечномерные представления групп . . . . . 77
12.2. Анализ Фурье распределений вероятностей на локально компактных группах . . . . . . . . . . . . . . 84
12.3. Локально компактные абелевы группы и стационарные процессы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
13.1. Симметрические пространства . . . . . . . . . 86
13.2. Стационарные процессы второго порядка на однородных пространствах . . . . . . . . . . . . . . . 94
13.3. Фильтрация и «склеивание» . . . . . . . . . . 98
13.4. Безгранично делимые распределения на симметрических пространствах . . . . . . . . . . . . . . 106
14. Заключение . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
15. Некоторые библиографические замечания . . . . . 110

Библиография . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114