Д. тер Хаар

ОСНОВЫ ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКИ

Перевод с английского
В. А. УГАРОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

International Series of Monographs in Natural Philosophy, Volume 34

ELEMENTS OF HAMILTONIAN MECHANICS

Second Edition

D. ter Haar

University Reader in Theoretical Physics, Oxford

Pergamon Press

Основы гамильтоновой механики. Д. тер Хаар. Перевод с английского. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1974 г.

Книга представляет собой учебник теоретической механики для студентов-физиков и содержит минимум сведений из механики, который необходим для дальнейшего изучения теоретической физики. В основу книги положен курс лекций, который читался автором (известным физиком-теоретиком) в Оксфордском университете.

За границей книга выходила трижды (практически в неизменном виде) — в 1961, 1964 и 1971 гг.

Т $\frac{20302-078}{053(02)-74}$ 97-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Ньютоновская механика существует уже около трехсот лет: знаменитая книга Ньютона «Математические начала натуральной философии», где были сформулированы законы Ньютона, вышла в свет в 1687 г. С этой даты можно начинать отсчет эпохи «современной» физики. Выход этой книги имел исключительное значение для физики, потому что без преувеличения можно сказать, что с этого момента механика составляла основное содержание физики. Отражением этого является то, что вплоть до середины XIX века всю физическую картину природы пытались построить на базе законов механики.

Прошедшие триста лет не затронули первые принципы механики, но и не обошли механику стороной. Появились новые методы и открылись новые области применения. Применение основных принципов механики к различным проблемам привело к созданию почти независимых наук. В качестве примера можно привести «небесную механику» с ясно выраженным астрономическим уклоном и «теоретическую механику», вполне приспособленную для инженерных целей. Справедливости ради стоит все же вспомнить, что именно Ньютон свел «небесную» и «земную» механику в единую науку.

Триста лет развития механики означали также триста лет преподавания этой науки. И здесь время не прошло зря. Сложились традиции преподавания, появились отличные учебники и добротные монографии.

Но к началу XX века и в особенности в двадцатые годы ньютоновская механика оказалась в совершенно новой ситуации, обусловленной быстрым и глубоким развитием физики. Во-первых, уже в самом начале нашего века были обнаружены границы применимости ньютоновской механики. Со стороны релятивистских скоростей она должна была уступить место релятивистской механике. В области микромира она оказалась также бессильной, и ее место заняла квантовая механика. Поэтому все чаще и чаще для ньютоновской механики используют термин «классическая» механика, чтобы подчеркнуть существование квантовой механики (релятивистскую механику нередко также относят к «классической» механике).

Во-вторых, предыдущий XIX век широко раздвинул границы физики и углубил понимание физических явлений. Была создана теория электромагнитных явлений, включавшая в себя и теорию света (теория Максвелла); был найден теоретический подход к тепловым явлениям (термодинамика). Все эти проблемы уже вышли за рамки механики, и механика оказалась просто одним из разделов современной физики, правда, необыкновенно важным, открывающим путь к пониманию всей современной физики. Этим и определилось ее значение для современного физика. «Классическая механика» стала просто введением в физику, а при надлежащем уровне изложения — введением в теоретическую физику. Но классическая механика как введение в теоретическую физику, естественно, должна существенно отличаться от теоретической механики, необходимой инженерам. Теоретическая механика могла остаться по существу незатронутой в XX веке и фактически не претерпела заметных изменений. Классическая механика для физиков начала приобретать ясно очерченные контуры к тридцатым годам. Физикам был нужен особый курс ньютоновской механики, и такие курсы не заставили себя ждать: вспомним, например, книги Я. И. Френкеля и Л. Ландау и Л. Пятигорского.

Курс «механики для физиков» читается в университетах и désинститутах. Далеко не везде отказались от «теоретической» механики и перешли к «классической» механике, подразумевая под этим термином не просто изложение ньютоновской механики, а общую тенденцию курса как введения в теоретическую физику. Но переход к «классической» механике в этих учебных заведениях неизбежен: для физиков механика — все равно лишь первый раздел теоретической физики.

Учебник Д. тер Хаара представляет собой как раз курс классической механики. Он очень удачно перекрывает тот минимум сведений из механики, который необходим любому студенту-физику как в университете, так и в педагогическом вузе. Конечно, у наших студентов уже есть книги по классической механике. Это видно из списка литературы, приложенного к этой книге. Но у книги тер Хаара есть свои особенности и достоинства. Прежде всего — это выбор материала. Достаточно заглянуть в оглавление, чтобы увидеть некоторые интересные вопросы, сравнительно мало освещенные в нашей учебной литературе. Разумный отбор материала предопределен тем, что автор — известный физик-теоретик, понимающий запросы физиков-теоретиков к механике. Книга, как это видно из предисловия автора, имеет свою историю и написана весьма квалифицированно. Но тем не менее, если в книге только «все правильно», то это далеко еще не учебник. Студенту очень важно, как учебник написан. Автор не только квалифицированный специалист, но и опытный лектор. Книга написана просто, ясно и кратко. Конечно, как и всякий хороший учебник, она требует усилий со стороны читателя, но учиться по-серьезному — это всегда труд, и не малый. В конце каждой главы имеется подборка задач, частью довольно оригинальных. Это тоже очень удобно. К сожалению, перерешать все задачи при подготовке книги не удалось, поэтому ответов к задачам нет.

Нет сомнений в том, что книга тер Хаара будет полезной нашим студентам-физикам, — ведь студенту всегда полезно иметь под рукой несколько книг по учебному предмету. Преподаватели могут обнаружить в книге новый подход и свежие материалы. Один из способов увеличить эффективность обучения — возможность отослать студента по тому или иному вопросу к разумной книге. Книга тер Хаара вполне подходит для этой цели.

Русский перевод выполнен с издания 1971 г. С согласия автора и при его участии исправлены некоторые погрешности и введены два небольших математических дополнения. В заключение мне хотелось бы поблагодарить автора за внимание к русскому переводу книги. Мне хотелось бы также поблагодарить В. Л. Гинзбурга от имени всех тех, кому эта книга будет полезной, за содействие ее изданию.

В. Угаров

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В течение пяти лет мне пришлось читать курс лекций, посвященных классической механике, студентам старших курсов в Оксфордском университете. Этот курс состоял примерно из тридцати лекций, охватывающих все те вопросы, которые представлены в этой книге. На материал, соответствующий каждой главе книги, приходилось, грубо говоря, одинаковое количество времени — что-то около четырех лекций. Мне кажется, что предлагаемый курс достаточно полно охватывает все те аспекты классической механики, с которыми должен быть знаком любой современный физик, оставляя в тени многочисленные тонкости, которыми столь богата классическая механика. Поскольку логические акценты и выбор материала в моих лекциях заметно отличаются от того, что можно найти в существующих учебниках, среди которых наиболее известными и распространенными являются книга Корбена и Стеля и книга Голдстейна, я решил, что появление моих лекций в виде книги может оказаться небесполезным.

Я хотел бы отметить также, что при подготовке этой книги я широко пользовался своими конспектами лекций Г. А. Крамерса, которые он в свое время читал в Лейдене.

Мне очень приятно, что теперь моя книга появляется и в русском переводе. Я надеюсь, что она окажется полезной и для советских читателей. Мне хотелось бы поблагодарить В. А. Угарова за подготовку русского издания и исправление некоторых неточностей в оригинале.

Д. тер Хаар

Глава 1

НЬЮТОНОВСКАЯ МЕХАНИКА

В этой главе кратко рассмотрены законы Ньютона и их применение для случая центральных сил; особое внимание уделено силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Столь же кратко обсуждается рассеяние частиц в поле центральной силы. Устанавливаются некоторые общие свойства систем, образованных несколькими частицами, попарно взаимодействующими по центральному закону.

§ 1.1. Законы Ньютона

Основу классической механики составляют три закона Ньютона, с которых мы и начнем наше изложение. Мы будем считать, что все термины, входящие в формулировку этих законов, имеют вполне определенный смысл (на самом деле все они имеют скорее интуитивный смысл), поскольку мы просто не хотим вдаваться в дискуссии вокруг вводимых этими законами представлений. Выписывая законы Ньютона, мы заранее предполагаем, что существуют такие системы отсчета, в которых они справедливы. Такие системы называются *инерциальными системами* отсчета, и мы будем исходить из того, что все рассматриваемые векторы определены в одной из таких систем. Следует напомнить, что любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, также является инерциальной системой.

Сформулируем теперь законы Ньютона.

Lex prima. Если на частицу не действуют никакие силы, то она будет сохранять состояние своего движения, т. е. продолжать двигаться по прямой линии с постоянной скоростью.

Lex secunda. Если на частицу действуют силы, то скорость изменения ее импульса равна полной силе, действующей на нее. Импульс частицы определяется как произведение массы частицы на ее скорость.

Lex tertia. Когда две частицы взаимодействуют друг с другом, то сила, действующая со стороны первой частицы на вторую, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей со стороны второй частицы на первую. (Действие и противодействие, *actio est reactio.*)

Говоря о *частице*, мы будем иметь в виду на протяжении всей этой книги точечную частицу (материальную точку), т. е. объект, характеризуемый своей массой m, радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ *) и скоростью $\boldsymbol{v}$, определяемой производной от $\boldsymbol{x}$ по времени:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \qquad (1.101)$$

где через t обозначено время (временна́я координата).

До тех пор, пока мы не касаемся релятивистских эффектов, можно считать m постоянной величиной, характеризующей частицу. Именно эту массу называют в специальной теории относительности массой покоя.

В математической форме законы Ньютона записываются так:

$$\text{Lex prima:} \quad \text{Если } \boldsymbol{F} = 0, \text{ то } \boldsymbol{v} = \text{const}; \qquad (1.102)$$

$$\text{Lex secunda:} \quad \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}; \qquad (1.103)$$

$$\text{Lex tertia:} \quad \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}, \text{ или } \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0. \qquad (1.104)$$

В этих равенствах через $\boldsymbol{F}$ обозначена полная сила, действующая на частицу, а через $\boldsymbol{F}_{12}$ ($\boldsymbol{F}_{21}$) — сила, действующая на частицу 2 (1) со стороны частицы 1 (2).

При условии, что m является постоянной величиной, уравнение (1.103) можно переписать также в виде:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \qquad (1.105)$$

где через $\boldsymbol{a}$ обозначено ускорение частицы. Последняя форма второго закона Ньютона — сила равна произведению массы на ускорение — несколько более распространена, однако любопытно отметить, что сам Ньютон пользовался формулировкой (1.103), которая справедлива и в том слу-

*) Мы сохраняем введенное автором обозначение $\boldsymbol{x}$ для радиус-вектора, хотя в русской литературе принято писать $\boldsymbol{r}$; затруднений это не вызовет, а обозначение $\boldsymbol{x}$ имеет свои достоинства. — *Прим. перев.*

чае, если масса m — величина переменная, как это имеет место, например, при движении ракеты. С другой стороны, (1.103) можно записать в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}, \tag{1.103a}$$

определив $\boldsymbol{p}$ согласно (1.110). В такой форме уравнение движения справедливо и в релятивистской механике, однако импульс определяется там уже не согласно (1.110), а иначе.

Первый закон Ньютона — это закон инерции Галилея; отсюда возник термин «инерциальные системы».

Масса m, которую надлежит определять согласно (1.103), называется *инертной массой* частицы; было доказано экспериментальным путем, что инертная масса равна *тяжелой* (или гравитационной) *массе* частицы, которая в свою очередь пропорциональна весу частицы. Здесь следует заметить, что такая эквивалентность обоих сортов массы довольно естественно вытекает из общей теории относительности.

Прежде чем переходить к следствиям ньютоновских законов, мы хотели бы отметить, что иногда называют четвертым законом Ньютона правило, согласно которому силы, действующие на материальную точку, складываются по правилу сложения векторов. Такое предположение действительно молчаливо содержится в уравнениях (1.103) и (1.104), поскольку силы уже с самого начала обозначались как векторы.

Даже не зная конкретного вида сил, можно получить некоторые следствия из (1.103) и (1.104). Давайте начнем с рассмотрения системы, состоящей из двух частиц, где единственными силами, действующими на частицы, будут силы $\boldsymbol{F}_{12}$ и $\boldsymbol{F}_{21}$. Из (1.104) вытекает, что

$$\int_{t'}^{t''}(\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21})\,dt=0. \tag{1.106}$$

Поскольку $\boldsymbol{F}_{12}$ ($\boldsymbol{F}_{21}$) является единственной силой, действующей на первую (вторую) частицу, с помощью (1.103) можно написать:

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{dm_1\boldsymbol{v}_1}{dt}, \qquad \boldsymbol{F}_{21}=\frac{dm_2\boldsymbol{v}_2}{dt}, \tag{1.107}$$

и из (1.106) и (1.107) мы получим:

$$[m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2]_{t'}^{t''}=0, \tag{1.108}$$

или

$$\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{p}_1'' + \boldsymbol{p}_2'', \tag{1.109}$$

где импульс частицы определен равенством

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.110}$$

и где штрихи (и двойные штрихи) указывают на значения соответствующих величин, взятые в моменты времени t' и t''.

Равенство (1.109) выражает *закон сохранения импульса* *); мы только что доказали, что он справедлив для изолированной системы, состоящей из двух взаимодействующих частиц.

Займемся теперь движением одной частицы под действием силы $\boldsymbol{F}$ и найдем значение интеграла

$$I = \int_{t'}^{t''} (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}). \tag{1.111}$$

Используя (1.103) и вспомнив, что $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\,dt$, мы получим:

$$I = \int_{t'}^{t''} (m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})\,dt = \left[\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2\right]_{t'}^{t''} = T'' - T', \tag{1.112}$$

где мы ввели *кинетическую энергию* частицы T соотношением

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}), \tag{1.113}$$

причем точка над буквой (и соответственно две точки) означает и будет означать в дальнейшем по всей книге однократное (и двукратное) дифференцирование величин по времени.

Так как произведение $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})$ представляет собой работу, производимую силой над частицей в единицу времени, то из (1.113) вытекает, что полная работа сил, действующих на частицу в промежутке времени (t', t''), равна изменению кинетической энергии частицы. Из (1.112) можно вывести *закон сохранения энергии*, если только поле сил, действующих на частицу, *консервативно*. Поле сил называется консер-

*) В оригинале употреблен термин «линейный импульс» (linear momentum), который в английской литературе противопоставляется термину «угловой импульс» (по нашей терминологии — момент импульса). — *Прим. перев.*

вативным, если сила в каждой точке может быть получена из потенциальной функции U дифференцированием, а именно:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U, \tag{1.114}$$

где через ∇ обозначен оператор градиента, компонентами которого являются операторы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$.

В этом случае

$$\int_{t'}^{t''} (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}) = -\int_{t'}^{t''} (\nabla U \cdot d\boldsymbol{x}) = -U'' + U', \tag{1.115}$$

или, принимая во внимание (1.111) и (1.112),

$$T' + U' = T'' + U''. \tag{1.116}$$

Потенциал U носит название *потенциальной энергии*, и мы видим непосредственно из (1.116), что в том случае, когда функция U явно не зависит от t, *полная энергия* частицы E, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергии

$$E = T + U, \tag{1.117}$$

представляет собой *константу* (или интеграл) *движения*, т. е. такую величину, которая не меняется во время движения частицы.

Из (1.115) можно также усмотреть, что в случае консервативного поля сил интеграл, стоящий в левой части, не зависит от того, по какому пути движется частица, а зависит только от ее положения в начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала времени. Конечно, если бы этого не было, мы не смогли бы ввести потенциальную функцию. В итоге можно определить консервативное поле сил требованием, чтобы интеграл I (1.111) зависел бы только от положения частицы в моменты времени t' и t'', но не зависел бы от пути, проходимого частицей в промежутке времени между t' и t''.

Если мы имеем дело с одномерной консервативной системой, уравнение движения всегда решается квадратурой. Действительно, энергия в этом случае будет интегралом движения, и мы можем написать:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x), \tag{1.118}$$

или же, разрешая относительно $\dot{x}$,

$$\dot{x} = [(2/m)(E - U)]^{1/2}. \tag{1.119}$$

Из последнего равенства получаем непосредственным интегрированием:

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0} \{2\,[E - U(x)]/m\}^{-1/2}\, dx, \qquad (1.120)$$

где через x_0 обозначено положение частицы в момент времени t_0. Простейшим примером такого случая может служить одномерный гармонический осциллятор, который определяется видом своей потенциальной энергии. Для гармонического осциллятора

$$U = \frac{1}{2}\, ax^2. \qquad (1.121)$$

Интегрирование (1.120) приводит в этом случае к выражению

$$t - t_0 = (m/a)^{1/2} \arcsin\, [x\,(a/2E)^{1/2}],$$

или же

$$x = (2E/a)^{1/2} \sin 2\pi\nu\,(t - t_0), \qquad 2\pi\nu = (a/m)^{1/2}, \quad (1.122)$$

где через ν обозначена частота гармонического осциллятора и где в целях простоты записи принято, что x_0 равно нулю.

Заметим, что из (1.122) видно, что энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

§ 1.2. Центральное поле сил

Силы, действующие во многих физических системах, имеют одну характерную особенность — это центральные силы. Центральными силами называются такие силы, которые действуют вдоль линии, соединяющей тело, на которое действует сила, с телом, которое порождает действующую силу. Если ограничиться случаем одной частицы во внешнем поле сил, то центральным полем сил будет такое поле, в котором сила, действующая на частицу, всегда направлена по линии, соединяющей рассматриваемую частицу и некоторую фиксированную точку, называемую центром силового поля. Если выбрать начало координат в центре поля сил, то сила $\boldsymbol{F}$, действующая на частицу, будет иметь вид:

$$\boldsymbol{F} = f(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{x}. \qquad (1.201)$$

Вообще говоря, такое поле сил вовсе не обязано быть консервативным. Если же оно консервативно, то функция f, входящая в (1.201), должна зависеть только от расстояния от начала координат, т. е. от r:

$$\boldsymbol{F}=f(r)\,\boldsymbol{x}. \tag{1.202}$$

В этом можно убедиться с помощью соотношения (1.114), справедливого для поля консервативных сил, рассматривая компоненты $\boldsymbol{F}$. Имеем:

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}; \tag{1.203}$$

с другой стороны, поскольку должно выполняться условие (1.201), мы получим в сферических координатах r, θ, φ выражения

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial U}{\partial x}=fr\sin\theta\cos\varphi, \quad -\frac{\partial U}{\partial y}=fr\sin\theta\ \sin\varphi,\\ &-\frac{\partial U}{\partial z}=fr\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{1.204}$$

из которых следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial r}=-fr,\qquad \frac{\partial U}{\partial \theta}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi}=0. \tag{1.205}$$

Из двух последних равенств следует, что функция U зависит только от r; из первого равенства мы обнаруживаем, что условие (1.202) будет соблюдено, если определить U в виде:

$$U(\boldsymbol{x})=U(r)=-\int^{r} rf(r)\,dr. \tag{1.206}$$

Частными примерами задач с центральной силой являются изотропный гармонический осциллятор и кулоновское или гравитационное поле сил. В первом случае потенциал дается выражением

$$U=\frac{1}{2}ar^2, \tag{1.207}$$

а во втором — уравнением

$$U=-k/r. \tag{1.208}$$

Если константа k, входящая в (1.208), положительна, то мы имеем дело с силой притяжения; если же она отрицательна — с силами отталкивания. Потенциал (1.208) приводит, конечно, к силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния от начала координат.

Орбита (траектория) частицы, на которую действует сила вида (1.201), оказывается плоской, т. е. лежащей в некоторой плоскости. Это видно из следующих соображений (см. рис. 1). Согласно второму закону Ньютона ускорение частицы направлено по той же прямой, по которой направлена действующая на нее сила. Следовательно, как ускорение, так и скорость частицы — в начальный момент и все остальные моменты времени — будут оставаться в плоскости, проходящей через начало координат и начальную скорость частицы. Этот же самый результат можно выразить другими словами: никогда не может появиться компонента ускорения, перпендикулярная плоскости, проходящей через начало координат и скорость частицы, так что частица никогда не выйдет из этой плоскости. Эта плоскость называется *орбитальной*.

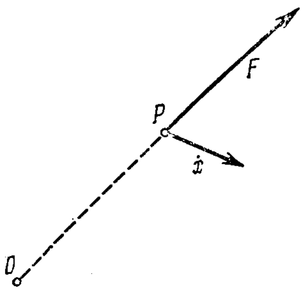

Рис. 1. Центральное силовое поле. O — центр силового поля; P — точка, где находится частица; $\dot{\boldsymbol{x}}$ — вектор скорости частицы; $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на частицу.

Можно доказать, что орбита частицы, движущейся в поле центральной силы, плоская, рассматривая также *момент импульса* частицы. Момент импульса частицы относительно начала координат — мы будем обозначать его буквой M — определяется соотношением

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{x}, m\dot{\boldsymbol{x}}]. \quad (1.209)$$

Иногда величину $\boldsymbol{M}$ называют угловым моментом. Этот термин естественно возникает при введении обобщенных координат, о которых речь пойдет в следующей главе.

Производная момента импульса по времени определяется равенством

$$\dot{\boldsymbol{M}} = [\dot{\boldsymbol{x}}, m\dot{\boldsymbol{x}}] + [\boldsymbol{x}, m\ddot{\boldsymbol{x}}] = 0 + [\boldsymbol{x}, f(x, y, z)\, \boldsymbol{x}] = 0, \quad (1.210)$$

причем мы учли в выкладках соотношения (1.105) и (1.201).

Таким образом, мы обнаружили, что для центрального поля вектор $\boldsymbol{M}$ представляет собой интеграл движения. Поскольку $\boldsymbol{M}$ — это вектор, фактически мы обнаружили три интеграла движения: три компоненты $\boldsymbol{M}$. Но поскольку вектор $\boldsymbol{M}$ постоянен, то из (1.209) ясно, что вектор $\boldsymbol{x}$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{M}$, а это и означает, что орбита частицы плоская.

Задача о движении частицы в поле центральной силы может быть, следовательно, сведена к двумерной (плоской) задаче. Решения исходных уравнений движения — трех дифференциальных уравнений второго порядка — должны содержать шесть постоянных интегрирования. За две из них могут быть выбраны направляющие косинусы вектора M; этими косинусами определяется нормаль к орбитальной плоскости. В остающейся двумерной задаче у нас возникают четыре постоянных интегрирования, которые вместе с двумя использованными направляющими косинусами и обеспечивают шесть необходимых констант движения в исходной задаче. Одной из четырех оставшихся констант будет, конечно, абсолютная величина вектора M.

Все то, что говорилось до сих пор, имеет совершенно общий характер и справедливо также и для сил, не являющихся консервативными. Но если силовое поле консервативно (а впредь мы будем это всегда предполагать), то одна из трех последних констант движения — это полная энергия, а две остальные возникают в результате интегрирования уравнений движения; эта операция всегда осуществима в случае центрального консервативного поля.

Направим ось z декартовой системы координат вдоль сохраняющегося вектора M, а в плоскости xy введем полярные координаты r и θ. Таким образом в орбитальной плоскости вводится система координат

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{1.211}$$

Уравнения движения, записанные в координатах x, y, имеют вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{r}\frac{dU}{dr}, \quad m\ddot{y} = -\frac{y}{r}\frac{dU}{dr}, \tag{1.212}$$

где потенциал U задан согласно (1.206), а сила определяется по (1.202).

Если через M обозначить абсолютную величину момента импульса, а через E — полную энергию частицы, то в соответствии с (1.209) и (1.117) можно записать:

$$M = m(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r). \tag{1.213}$$

Соотношения (1.213) могут быть, конечно, получены и непосредственно интегрированием (1.212).

Воспользовавшись полярными координатами, мы можем переписать (1.213) в виде:

$$M = mr^2\dot{\theta}, \tag{1.214}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 + U(r). \tag{1.215}$$

Соотношение (1.214) выражает так называемый *закон площадей*. Мы уже знаем, что M — постоянная величина. Чтобы выяснить физический смысл правой части (1.214), обратимся к рис. 2. Допустим, что частица сместилась за интервал времени t, $t+dt$ от точки P к точке Q. Из рис. 2 очевидно, что за время dt радиус-вектор, направленный к частице, «ометает» площадь «треугольника», равную $\frac{1}{2} r^2 \, d\theta$. Площадь, ометаемая радиус-вектором частицы в единицу времени, называется *секторной скоростью* точки. Мы получили, что секторная скорость частицы, во-первых, равна $\frac{1}{2} r^2\dot{\theta}$, а во-вторых, обнаружили ее постоянство согласно (1.214). Это обстоятельство иногда отмечают следующим образом: радиус-вектор частицы ометает равные площади за равные промежутки времени. Для случая, когда рассматривается гравитационное поле (1.208), этот результат известен под названием второго закона Кеплера, но мы только что выяснили, что он справедлив для любой центральной силы, в том числе и неконсервативной.

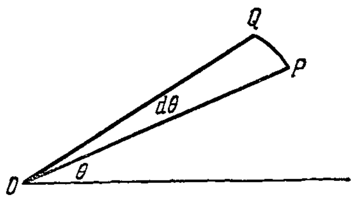

Рис. 2. Закон площадей. O — центр силового поля; P — положение движущейся частицы в момент времени t; Q — положение частицы в момент $t+dt$. Через θ обозначен полярный угол. «Треугольник» OPQ определяет площадь, «ометаемую» радиус-вектором, проведенным из O к движущейся частице.

Соотношение (1.215) определяет полную энергию частицы в полярных координатах; мы видим, что кинетическая энергия в полярных координатах имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2, \tag{1.216}$$

где два слагаемых в правой части относятся соответственно к радиальному движению частицы и к ее движению по окружности.

Исключая $\dot{\theta}$ из соотношений (1.214) и (1.215), мы приходим к выражению:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \qquad (1.217)$$

Последний член в правой части этого соотношения может быть назван центробежной потенциальной энергией. Абсолютное значение силы $F_{цб}$, соответствующей этому члену, определяется равенством

$$F_{цб} = -\frac{d}{dr}\frac{M^2}{2mr^2} = \frac{M^2}{mr^3} = \frac{mv_\perp^2}{r}, \qquad (1.218)$$

где через $v_\perp$ обозначена компонента скорости, перпендикулярная радиус-вектору, т. е. направленная по касательной к соответствующей координатной окружности ($M = mrv_\perp$). Выражение (1.218) представляет собой известное выражение для центробежной силы, действующей на частицу (см. формулу (4.302)). Обратите внимание на то, что центробежная сила возникает только при переходе к неинерциальной системе отсчета.

По своему общему виду (1.217) совпадает с выражением (1.118), которое было написано для одномерного случая, только теперь эквивалентная потенциальная энергия имеет вид $U(r) + M^2/2mr^2$, т. е. представляет собой сумму потенциальной энергии и центробежной потенциальной энергии. Уравнение (1.217) может быть, в точности так же, как и (1.118), решено в квадратурах, причем мы получим:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left[\frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{M^2}{m^2r^2}\right]^{1/2}}, \qquad (1.219)$$

где через r_0 обозначено значение r в момент t_0. Используя (1.214), можно переписать (1.219) так:

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{M\,dt}{mr^2} = \int_{r_0}^{r} \frac{M\,dr}{r^2\left\{2m\left[E - U(r)\right] - M^2r^{-2}\right\}^{1/2}}. \qquad (1.220)$$

Последнее уравнение определяет зависимость θ от r, т. е. дает уравнение траектории частицы. Две оставшиеся постоянные интегрирования теперь уже определены: ими будут значения θ и r в момент t_0.

Прежде чем переходить к количественному рассмотрению траекторий частицы, соответствующих определенному

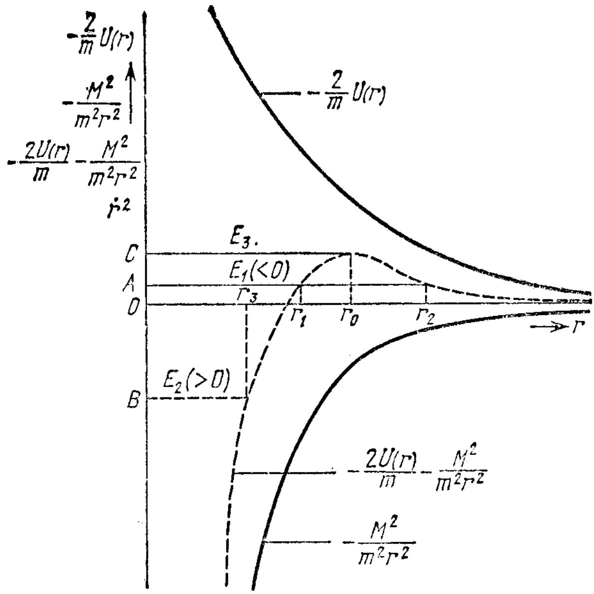

Рис. 3. Качественное исследование траекторий при движении в центральном потенциальном поле.

а) Зависимость потенциальной энергии, центробежной энергии и кинетической энергии от расстояния от центра силового поля. Кривая $\dot{r}^2$ имеет в точности такой же вид, что и кривая $-(2/m)\,U(r) - M^2/m^2r^2$, но с осью абсцисс, исходящей соответственно из точек A, B или C, вместо точки O. Положение оси абсцисс определяется значением E, а именно: A соответствует $E_1 < 0$; B соответствует $E_2 > 0$, точке C соответствует круговая орбита $E_3 < 0$.

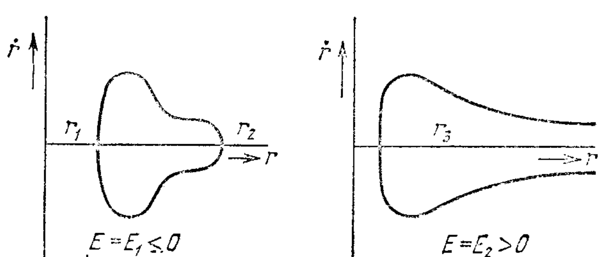

Рис. 3. б) Радиальная скорость $\dot{r}$ как функция расстояния от центра силового поля.

выбору потенциала U, а именно потенциалу (1.208), мы остановимся на качественном исследовании траекторий в том случае, когда $U(r)$ зависит от r по закону r^{-1}, для очень малых и очень больших значений r; для этих двух предельных случаев коэффициенты пропорциональности могут быть разными. Потенциал такого типа представляет интерес в задачах атомной физики. Действительно, наиболее удаленный («последний») электрон в атоме с зарядом ядра Z, находясь на большом расстоянии от ядра, будет находиться в потенциальном поле типа $(-e/r)$, поскольку заряд ядра Ze заэкранирован остальными

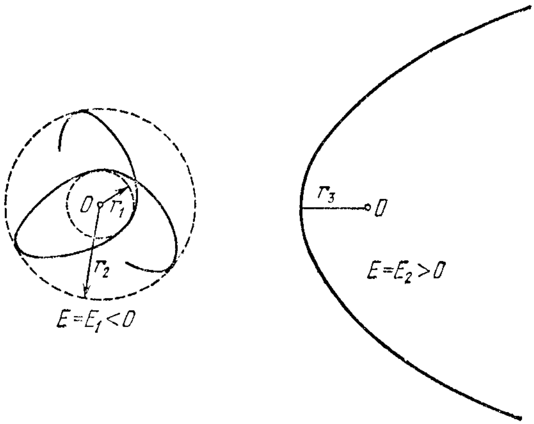

Рис. 3. в) Траектории частицы для отрицательных и положительных значений энергии E. O — центр силового поля.

$(Z-1)$ электронами; если же электрон находится вблизи ядра, т. е. все остальные электроны расположены дальше него, то он находится в потенциальном поле $-Ze/r$. На рис. 3а изображены графики функций $-2U(r)/m$, $-M^2/m^2r^2$ и их сумма (пунктир), а также функция $\dot{r}^2$ в зависимости от r. Последнюю функцию можно получить в явном виде, переписав (1.217) так:

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{M^2}{m^2r^2}. \qquad (1.221)$$

Следует заметить, что на рис. 3а ось абсцисс разная для разных значений E, когда строится график зависимости $\dot{r}^2$ от r. На рис. 3б приведен график функции $\dot{r}$ в зависимости от r для двух значений энергии E_1 и E_2, одно из которых положительно, а другое отрицательно. Как из рис. 3а, так и из рис. 3б видно, что при отрицательных значениях E траектория частицы не уходит на бесконечность и частица всегда находится между двумя значениями радиуса r, между r_1 и r_2. Вообще говоря, движение частицы будет происходить по розетке, общий вид которой изображен на рис. 3в. В предельном случае (соответствующем E_3 на рис. 3а), когда ось r только касается кривой $\dot{r}^2(r)$, движение происходит по круговой орбите. Если же значения E положительны, траектория становится открытой (инфинитной): у частицы оказывается достаточный запас энергии, чтобы уйти на бесконечность. Это различие между открытыми и закрытыми (инфинитными и финитными) траекториями, определяемое знаком энергии E, вновь обнаружится, когда мы займемся потенциалом вида $1/r$ (см. ниже исследование выражения (1.240)).

Во многих важных случаях уравнения движения существенно упрощаются, если ввести вместо r обратную ей величину $\sigma = 1/r$. Эта замена составляет основу метода Бине, который особенно полезен в том случае, когда потенциал U задан в виде (1.208).

Мы начнем с разложения силы $\boldsymbol{F}$, действующей на частицу в орбитальной плоскости, на две компоненты: $F_{\parallel}$ — вдоль радиус-вектора $\boldsymbol{x}$ и $F_{\perp}$ — перпендикулярно ему. Если введены полярные координаты (1.211), то это соответствует отысканию компонент $F_r = F_{\parallel}$ и $F_\theta = F_{\perp}$. Эти компоненты нужны нам для того, чтобы записать соответствующие проекции уравнения движения. Использование комплексных чисел очень упрощает задачу. Записав уравнение движения частицы в декартовых координатах

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y,$$

умножим второе из этих уравнений на i $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ и почленно сложим; мы получим:

$$m(\ddot{x} + i\ddot{y}) = F_x + iF_y. \tag{1.222}$$

Слева в (1.222) стоит вторая производная от комплексного числа $z = x + iy$, умноженная на m, а справа — комплексная сила $Z = F_x + iF_y = Re^{i\varphi}$. Переход к полярным координатам несложен; по формуле Эйлера

$$z = re^{i\theta};$$

таким образом, комплексное число z сводит координаты радиус-вектора точки (1.211) в одну формулу. Комплексная сила Z приложена в том месте, где находится частица, поэтому ее нужно разлагать по осям локальной ортогональной декартовой системы. Нетрудно сообразить, что в точке, соответствующей комплексному числу z, эта локальная система представляет собой повернутую на угол θ исходную систему осей (x, y); в этой новой системе координат комплексная сила выглядит уже как $Z' = F_r + iF_\theta$. Но

$$Z' = Re^{i(\varphi-\theta)} = Ze^{i\theta},$$

отсюда

$$F_x + iF_y = (F_r + iF_\theta)\, e^{i\theta}. \tag{1.223}$$

Таким образом, уравнение (1.222) можно записать в виде:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\theta}) = (F_{\parallel} + iF_{\perp})\, e^{i\theta},$$

или, производя дифференцирование в левой части,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + ir\ddot{\theta} + 2i\dot{r}\dot{\theta})\, e^{i\theta} = (F_{\parallel} + iF_{\perp})\, e^{i\theta}. \tag{1.224}$$

Приравнивая действительные и мнимые части обеих частей (1.224), получим:

$$F_{\perp} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{dM}{dt}, \tag{1.225}$$

$$F_{\parallel} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2). \tag{1.226}$$

Поскольку в рассматриваемом случае сила центральная, $F_{\perp}$ обращается в нуль и (1.225) сразу же приводит к (1.214). Вместе с тем из (1.212) вытекает, что левая часть (1.224) равна $-(dU/dr)\, e^{i\theta}$, так что (1.226) можно переписать в виде:

$$F_{\parallel} = -\frac{dU}{dr} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2). \tag{1.227}$$

Можно заметить, что из (1.225) вытекает обратная теорема: если величина $r^2\dot{\theta}$ постоянна, то компонента $F_{\perp}$ обращается в нуль и мы имеем дело с центральной силой.

Вычислим теперь $d^2\sigma/d\theta^2$. С помощью (1.214) находим:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} = \frac{d}{dt}\frac{1}{r}\bigg/\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}} = -\frac{m\dot{r}}{M}, \tag{1.228}$$

и, следовательно, принимая во внимание (1.227),

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{m\dot{r}}{M}\right)\bigg/\frac{d\theta}{dt} = -\frac{m\ddot{r}}{M\dot{\theta}} = \frac{1}{M\dot{\theta}}\left[\frac{dU}{dr} - mr\dot{\theta}^2\right] =$$

$$= -\sigma + \frac{1}{M\dot{\theta}}\frac{dU}{dr} = -\sigma + \frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dr}\frac{m}{M^2\sigma^2} = -\sigma - \frac{m}{M^2}\frac{dU}{d\sigma},$$

или же

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \sigma = -\frac{m}{M^2}\frac{dU}{d\sigma}. \qquad (1.229)$$

До сих пор мы не делали никаких предположений по поводу конкретного вида $U(r)$. Теперь мы займемся уже частным случаем, когда $U(r)$ задана в виде (1.208). В этом случае $U(\sigma) = -k\sigma$ и соотношение (1.229), представляющее собой дифференциальное уравнение траектории, приобретает совсем простой вид:

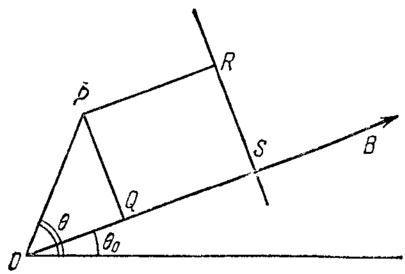

Рис. 4. Геометрическое место точек P является коническим сечением, если отношение $|\overrightarrow{OP}|$ к $|\overrightarrow{PR}|$ постоянно. Здесь O — центр силового поля; P — положение частицы. Углы PQO, PRS и RSQ — прямые. Вектор B — постоянная интегрирования уравнения (1.236).

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \sigma = \frac{mk}{M^2}.$$

Решение этого уравнения можно написать сразу:

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{mk}{M^2} + A\cos(\theta - \theta_0). \qquad (1.230)$$

Таким образом, траектория представляет собой коническое сечение (см. рис. 4). На рис. 4 длина отрезка OS равна A^{-1}. Нетрудно видеть, что

$$|\overrightarrow{OQ}| = r\cos(\theta - \theta_0), \qquad |\overrightarrow{PR}| = [1 - Ar\cos(\theta - \theta_0)]/A,$$

так что с учетом (1.230) мы получим:

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{PR}|} = \frac{rA}{1 - Ar\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{AM^2}{mk} = \text{const}. \qquad (1.231)$$

Геометрическое место всех точек P, удовлетворяющих (1.231), как раз и есть коническое сечение, что и доказывает наше утверждение. Немного позже мы выясним, при каких условиях траекторией частицы будут соответственно эллипс, парабола или гипербола. Конечно, уравнение (1.230) можно было бы получить непосредственно из (1.220), подставив в (1.220) вместо $U(r)$ выражение (1.208).

Желательно получить (1.230) еще и другим способом. Способ, о котором идет речь, использует векторное исчисление n, в частности, очень удобен для потенциала $1/r$. Уравнение движения (1.105) в этом случае имеет вид:

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{k\boldsymbol{x}}{r^3}, \tag{1.232}$$

где мы использовали (1.114) и (1.208). Вспомнив о том, что момент импульса $\boldsymbol{M}$, определенный согласно (1.209), представляет собой постоянный вектор, мы введем еще один вектор $\boldsymbol{Q}$, определив его следующим образом:

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{M},\ \dot{\boldsymbol{x}}]. \tag{1.233}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{Q}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{M}$, он лежит в орбитальной плоскости. Если принять во внимание (1.209), постоянство вектора $\boldsymbol{M}$, уравнение (1.232) и равенство $(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}) = r\dot{r}$, которое вытекает из тождества $r^2 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$, мы найдем нижеследующее выражение для производной по времени от $\boldsymbol{Q}$:

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = [\boldsymbol{M},\ \ddot{\boldsymbol{x}}] = -\frac{k}{r^3}\left[[\dot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{x}\right] = -k\left(\frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{r} - \boldsymbol{x}\frac{\dot{r}}{r^2}\right) = -k\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{x}}{r},$$

или же

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = -k\dot{\boldsymbol{x}}_0, \tag{1.234}$$

где через $\boldsymbol{x}_0$ обозначен единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}/r. \tag{1.235}$$

Уравнение (1.234) можно проинтегрировать; в результате интегрирования получим:

$$\boldsymbol{Q} + k\boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{B}, \tag{1.236}$$

где $\boldsymbol{B}$ — постоянный вектор.

Составив скалярное произведение обеих частей равенства (1.236) на $\boldsymbol{x}_0$, мы получим:

$$-\frac{M^2}{mr} + k = -B\cos(\theta - \theta_0), \tag{1.237}$$

причем $B = |\boldsymbol{B}|$; здесь предполагается, что вектор $\boldsymbol{B}$ образует угол θ_0 с осью x (в орбитальной плоскости), а вектор $\boldsymbol{x}_0$ — угол θ с той же осью x (сравните (1.211) и рис. 2). Для получения (1.237) мы воспользовались преобразованием:

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\cdot[\boldsymbol{M},\ \dot{\boldsymbol{x}}]\right) = \frac{1}{r}\left(\boldsymbol{M}\cdot[\dot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{x}]\right) = -\frac{M^2}{mr}. \tag{1.238}$$

Уравнение (1.237) совпадает с уравнением (1.230), если положить $B = AM^2/m$.

Возведем в квадрат обе части равенства (1.236). Поскольку $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен $\dot{\boldsymbol{x}}$, мы получим, что $\boldsymbol{Q}^2$ равно $M^2\dot{\boldsymbol{x}}^2$; следовательно,

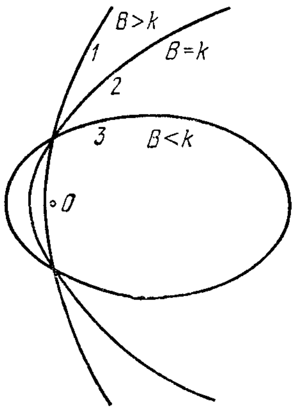

Рис. 5. Возможные траектории частиц с заданным моментом импульса. O — центр силового поля.

$$M^2\dot{\boldsymbol{x}}^2 + k^2 - \frac{2kM^2}{mr} = B^2, \quad (1.239)$$

где принято во внимание (1.238).

Уравнение (1.239) можно записать еще и в таком виде:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - \frac{k}{r} = \frac{(B^2 - k^2)\,m}{2M^2}. \quad (1.240)$$

Таким образом, мы получили еще одно выражение для энергии частицы. Из (1.240) видно, что если k положительно, то знак E, а значит и характер траектории, определяется величиной B (если же k отрицательно, E всегда положительно, а траектория всегда будет гиперболой). Если $B > k$, то частица может уйти на бесконечность с конечной скоростью; мы имеем дело с гиперболой (кривая *1* на рис. 5). Мы должны подчеркнуть в этом месте, что мы получили, конечно, только одну из двух ветвей гиперболы, поскольку r у нас — существенно положительная величина. Начало координат будет внутренним фокусом, если $k > 0$, и внешним, если $k < 0$. Если $B = k$, то скорость на бесконечности обращается в нуль, а траекторией является парабола (кривая *2*). Если $B < k$, траекторией будет эллипс (кривая *3*). Наконец, если $B = 0$, энергия достигает наименьшего значения, совместимого с заданным значением M, и траектория превращается в окружность.

Воспользовавшись равенством $M^2A/m = B$, которое превращает (1.237) в (1.230), мы обнаруживаем, что условия $B > k$, $B = k$ и $B < k$ соответствуют отношению $|\overrightarrow{OP}|$ к $|\overrightarrow{PR}|$ в (1.231), большему, равному и меньшему единицы; это еще раз показывает, что эти условия соответствуют гиперболическим, параболическим и эллиптическим траекториям соответственно.

Из (1.237) видно, что значение расстояния r для углов $\theta=\theta_0\pm\pi/2$, часто называемое *параметром p конического сечения*, не зависит от величины B, т. е. от энергии, а зависит только от момента импульса:

$$p=\frac{M^2}{mk}. \qquad (1.241)$$

Этот факт играл важную роль в выводах старой квантовой теории.

Рассмотрим еще апоцентрическое и перицентрическое значения r ($r_{\max}$ и $r_{\min}$) для случая эллипса. Они достигаются при $\theta=\theta_0+\pi$ и $\theta=\theta_0$ соответственно. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} r_{\min}&=\frac{M^2}{m(k+B)},\\ r_{\max}&=\frac{M^2}{m(k-B)}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.242)$$

Большая полуось a удовлетворяет уравнению

$$2a=r_{\min}+r_{\max}=-\frac{k}{E}, \quad \text{или} \quad E=-\frac{k}{2a}. \qquad (1.243)$$

Выразим теперь эксцентриситет эллипса ε и период обращения частицы по орбите τ через величины E, k и M. Из (1.242) и (1.240) вытекает соотношение для ε:

$$\varepsilon=\frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}}=\frac{B}{k}=\left[\frac{2M^2E}{mk^2}+1\right]^{1/2}. \qquad (1.244)$$

Мы снова обнаруживаем, что условие $B/k<1$ соответствует условию $\varepsilon<1$, т. е. эллипсу. Условие $B=k$ соответствует $\varepsilon=1$, т. е. параболе. Наконец, условие $B/k>1$ соответствует $\varepsilon>1$, т. е. гиперболе. Используя равенство $\varepsilon=B/k$ и (1.241), мы можем переписать (1.237) в совсем привычном виде:

$$\frac{p}{r}=1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0). \qquad (1.245)$$

Мы уже убедились в том, что второй закон Кеплера, с одной стороны, эквивалентен утверждению о том, что момент импульса M — величина постоянная; с другой стороны, он является просто законом площадей. Действительно, из (1.214) видно, что $M/2m$ — это просто секторная скорость. Полная площадь эллипса, которую ометает за полный период обращения частица, равна πab, или же $\pi a^2(1-\varepsilon^2)^{1/2}$, где через b обозначена малая полуось эллипса. Поэтому мы можем написать:

$$\pi a^2(1-\varepsilon^2)^{1/2}/\tau = M/2m;$$

а используя (1.243) и (1.244), имеем:

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}, \tag{1.246}$$

что сводится к третьему закону Кеплера, если подставить $k = GmM_\infty$, где G — постоянная тяготения, а M_∞ — масса (бесконечно тяжелого) центрального тела. Если масса центрального тела имеет конечное значение, равенство (1.246) должно быть несколько подправлено, как мы сейчас увидим.

В начале этого параграфа мы определили центральную силу как такую силу взаимодействия между частицами, которая направлена по линии, соединяющей две взаимодействующие частицы. С таким взаимодействием частиц мы очень часто сталкиваемся в физике; сейчас мы убедимся в том, что такая ситуация приводит к задаче о движении одной частицы во внешнем центральном поле, т. е. к той самой задаче, которую мы только что довольно подробно рассмотрели.

Пусть m_1 и m_2 — это массы двух рассматриваемых частиц, и пусть силы, с которыми частицы действуют друг на друга, могут быть получены из потенциала $U(r_{12})$, где r_{12} является расстоянием между двумя частицами. Нетрудно показать способом, использованным при выводе соотношения (1.206), что если рассматриваются консервативные силы, то они получаются из потенциальной функции, зависящей только от r_{12}.

Запишем уравнения движения для обеих частиц:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = -\nabla_1 U, \qquad m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = -\nabla_2 U. \tag{1.247}$$

Вводя центр инерции (центр масс) и относительные координаты с помощью равенств

$$\boldsymbol{X} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}, \tag{1.248а}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \tag{1.248б}$$

мы получим из (1.247):

$$(m_1+m_2)\ddot{\boldsymbol{X}} = 0, \tag{1.249}$$

$$\mu\ddot{\boldsymbol{x}} = -\nabla U, \tag{1.250}$$

где через μ обозначена *приведенная масса*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.251}$$

Уравнения (1.249) и (1.250) показывают, что движение двух частиц может быть описано как суперпозиция движения центра инерции, которое в нашем случае представляет собой просто свободное движение точки (1.249), и относительного движения (1.250), которое представляет собой движение частицы с приведенной массой, движущейся в центральном поле, определяемом заданной потенциальной энергией. Если масса одной из частиц существенно превосходит массу другой частицы, то приведенная масса приблизительно равна массе легкой частицы. Этим и объясняется тот факт, что третий закон Кеплера справедлив с большой степенью точности. Более точно его следовало бы записать так:

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k} = \frac{4\pi^2}{G(m+M_c)},$$

где M_c — это масса центрального тела (Солнца в нашей планетной системе). Если $M_c \gg m$, то правая часть последнего равенства сводится к постоянной величине $4\pi^2/GM_c$.

Мы закончим этот параграф вопросом о рассеянии частиц в поле центральной силы. То обстоятельство, что это поле зачастую создается другой частицей, означает лишь то, что мы должны вместо массы свободной частицы всюду вводить приведенную массу. Изучая рассеяние частиц, интересуются не столько фактическим процессом рассеяния, происходящим тогда, когда рассеиваемая частица находится вблизи рассеивающей частицы, сколько конечным результатом процесса рассеяния. Иначе говоря, мы заинтересованы в таких величинах, как поперечник (или сечение) рассеяния, или же вероятность того, что рассеяние произойдет на некоторый определенный угол. Начальные условия задаются энергией и моментом импульса падающих (рассеиваемых) частиц. Пусть v будет скоростью налетающих частиц на бесконечности, и пусть прицельное расстояние, т. е. кратчайшее расстояние, на котором падающая частица прошла бы около рассеивающего центра, если бы он не изменял ее движения, будет равно p (см. рис. 6). Выражая энергию и момент импульса через v и p,

$$E = \frac{1}{2} mv^2, \qquad M = mvp, \tag{1.252}$$

мы получим согласно (1.220) уравнение траектории в виде:

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{pv\,dr}{r^2\left[v^2 - (2U/m) - (p^2v^2/r^2)\right]^{1/2}}. \qquad (1.253)$$

Если выбрать за r_0 расстояние до точки наибольшего приближения к центру, т. е. значение r, для которого

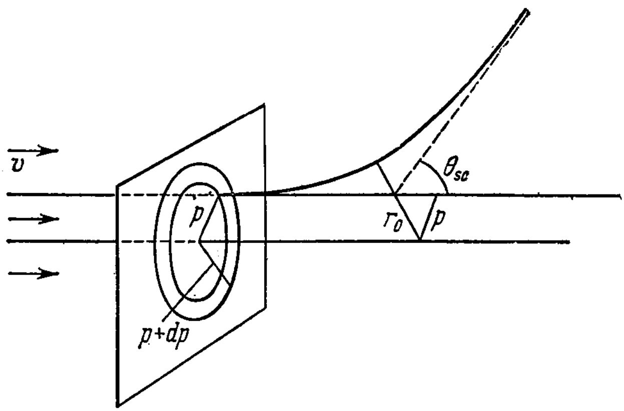

Рис. 6. Рассеяние в поле отталкивающей центральной силы. Через r_0 обозначено расстояние до точки максимального приближения; p — прицельный параметр; θ_{sc} — угол рассеяния.

$\dot{r} = 0$, т. е. значение r, удовлетворяющее уравнению

$$v^2 - \frac{2U(r)}{m} - \frac{p^2v^2}{r^2} = 0, \qquad (1.254)$$

то мы получим для угла рассеяния θ_{sc} (см. рис. 6; обратите внимание на то, что θ изменяется от π до θ_{sc}, когда r изменяется от ∞ до r_0 и снова до ∞):

$$\pi - \theta_{sc} = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{pv\,dr}{r^2\left[v^2 - (2U/m) - (p^2v^2/r^2)\right]^{1/2}}. \qquad (1.255)$$

Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$ для рассеяния на угол от θ_{sc} до $\theta_{sc} + d\theta_{sc}$ определяется как отношение числа частиц, рассеянных в единицу времени в этот интервал углов, к интенсивности падающего пучка. Интенсивность же падающего пучка определяется как полное число частиц, падающих на рассеивающий центр, приходящееся на единицу площади в единицу времени. Падающий пучок предполагается однородным. Из (1.255) видно, что угол рассеяния θ_{sc} является функцией прицельного расстояния p, и вместо того, чтобы интересоваться числом частиц, которые рассеиваются на заданный угол θ_{sc}, мы можем искать число падающих частиц, обладающих прицельным параметром в пределах от p до $p+dp$. Это число равно $2\pi I p\,dp$ (I — интенсивность падающего пучка), как это легко понять из рис. 6. Таким образом, мы получим для дифференциального сечения:

$$d\sigma = 2\pi p\,dp, \tag{1.256}$$

а разрешая (1.255), мы можем найти дифференциальное сечение, выраженное через угол θ_{sc}. Полное сечение рассеяния можно получить, интегрируя это выражение по всем возможным значениям θ_{sc} от 0 до π.

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда потенциал U имеет вид k/r, причем введем обозначения:

$$u = \frac{p}{r}, \qquad b = \frac{2k}{mv^2} = \gamma p. \tag{1.257}$$

Переменная u по существу есть переменная Бине; что касается величины b, то она представляет собой то расстояние, на котором абсолютная величина потенциальной энергии равна кинетической энергии частицы на бесконечности; другими словами, b — это расстояние наибольшего приближения частицы, обладающей скоростью v и нулевым моментом импульса, к отталкивающему центру рассеяния. Воспользовавшись этими переменными, можно получить из (1.255), положив $u_0 = p/r_0$:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{sc}}{2} = \int\limits_0^{u_0} \frac{du}{[1-\gamma u - u^2]^{1/2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\gamma}{(\gamma^2+4)^{1/2}},$$

или же

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_{sc}}{2} = \frac{1}{2}\gamma. \tag{1.258}$$

Обычно принято выражать $d\sigma$ в виде произведения элемента телесного угла $d\Omega \equiv 2\pi\sin\theta_{sc}\,d\theta_{sc}$, соответствующего рассеянию на углы от θ_{sc} до $\theta_{sc}+d\theta_{sc}$, и сечения рассеяния $R(\theta_{sc})$:

$$d\sigma = R(\theta_{sc})\,d\Omega = R(\theta_{sc})\cdot 2\pi\sin\theta_{sc}\,d\theta_{sc}. \tag{1.259}$$

Тогда для сечения рассеяния мы найдем из (1.256), (1.258) и (1.259):

$$R(\theta_{sc}) = \frac{1}{4} b^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta_{sc}}{2} \tag{1.260}$$

— знаменитую формулу рассеяния Резерфорда. Для этого конкретного процесса рассеяния полное сечение σ_{tot} $(=\int d\sigma = \int R\, d\Omega)$ расходится. Это обстоятельство связано с тем фактом, что кулоновский потенциал имеет длинный «хвост». Можно несколько по-иному взглянуть на этот результат, заметив, что, как бы ни было велико значение p, все равно рассеяние остается. Другими словами, мы могли бы ожидать бесконечное полное сечение рассеяния для любого потенциала, который не исчезает на больших расстояниях, в противоположность квантовомеханическому случаю, когда неисчезающий потенциал сам по себе еще недостаточен для того, чтобы полное сечение стало бесконечным.

Рассматривая процессы рассеяния, мы предполагали до сих пор, что рассеивающий центр неподвижен. В реальных экспериментах по рассеянию происходит рассеяние одной частицы на другой. В этом случае мы сталкиваемся с ситуацией, подобной той, какая рассматривалась несколько раньше в этом же параграфе; речь идет о задаче двух частиц, взаимодействующих между собой. Мы видели там, что относительное движение частиц выглядит так, как если бы центр масс всей системы покоился, а частица, масса которой равна приведенной массе, двигалась бы в силовом поле, порождаемом тем самым потенциалом, из которого получались силы, действующие между частицами.

Замена массы рассеиваемой частицы на приведенную массу — операция достаточно тривиальная. Тот факт, что только что полученные нами формулы для сечения рассеяния пригодны для случая, когда рассеивающие центры покоятся, тогда как в реальных экспериментах по рассеянию покоятся частицы мишени, имеет, конечно, существенное значение для анализа данных по рассеянию. Если частицы мишени покоятся, то это значит, что центр инерции системы будет двигаться, и данные по рассеянию, полученные в лабораторной системе отсчета, должны быть пересчитаны к системе центра инерции, прежде чем можно будет воспользоваться полученными нами формулами.

§ 1.3. Системы, состоящие из многих частиц

Теперь мы переходим к системам, состоящим из нескольких точечных масс. Мы будем предполагать, что сила $\boldsymbol{F}_i$, действующая на i-ю частицу, может быть получена из потенциальной функции $U(\boldsymbol{x}_i)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i U, \tag{1.301}$$

так что уравнения движения запишутся так:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{F}_i = -\nabla_i U. \tag{1.302}$$

Первое следствие предположения (1.301) состоит в том, что рассматриваемая система консервативна; это значит, что ее полная энергия E, определяемая равенством

$$E = T + U = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 + U, \tag{1.303}$$

является константой, поскольку

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_i m_i (\ddot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_i (\dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \nabla_i U) = 0.$$

Далее мы несколько ограничим класс рассматриваемых систем, предположив, что потенциальная энергия представляет сумму потенциальных энергий пар частиц и что сами эти потенциальные энергии зависят только от расстояний между соответствующими парами частиц r_{ij}:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{ij}(r_{ij}), \qquad U_{ij} = U_{ji}, \qquad U_{ii} = 0. \tag{1.304}$$

Одним из следствий только что выписанных уравнений будет то, что сила, действующая на каждую отдельную частицу, равна векторной сумме (центральных) сил, действующих на эту частицу со стороны всех остальных частиц; это означает, что силы, действующие в системе, *аддитивны*. Чтобы доказать это утверждение, мы отметим сначала, что сила $\boldsymbol{F}_{ij}$, действующая со стороны частицы j на частицу i, находится по правилу:

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\nabla_i U_{ij} = -\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\nabla_i r_{ij} = -\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\frac{\boldsymbol{x}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j. \tag{1.305}$$

Полная (суммарная) сила, действующая на i-ю частицу, найдется как

$$F_i = -\nabla_i U = -\sum_j \nabla_i U_{ij} = \sum_j F_{ij}, \qquad (1.306)$$

откуда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Если потенциальная энергия системы имеет вид (1.304), так что единственными силами, действующими на частицы, входящие в состав рассматриваемой системы, будут силы взаимодействия между частицами, то не только полная энергия E, но также полный импульс системы P и полный момент импульса системы M будут интегралами движения. Это можно доказать следующим образом. Запишем выражения для полного импульса системы и его производной по времени:

$$P = \sum_i m_i \dot{x}_i, \qquad (1.307)$$

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\sum_{i,j} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \frac{x_{ij}}{r_{ij}}, \qquad (1.308)$$

где мы использовали (1.305), (1.306) и (1.302). В выражении (1.308) индексы i и j немые, и мы вправе поменять i на j и наоборот — при этом двойная сумма не изменится. С другой стороны, если мы просто переменим местами индексы i и j в этой двойной сумме, сумма должна изменить свой знак, поскольку $x_{ij} = -x_{ji}$. Так как сумма оказывается равной самой себе с обратным знаком, она должна быть равна нулю; отсюда и вытекает, что P — постоянный вектор.

Аналогично, мы записываем выражения для полного момента импульса и его производной по времени:

$$M = \sum_i m_i [x_i, \dot{x}_i], \qquad (1.309)$$

$$\frac{dM}{dt} = \sum_i m_i [x_i, \ddot{x}_i] =$$
$$= -\sum_{i,j} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \left[x_i, \frac{x_{ij}}{r_{ij}}\right] = \sum_{i,j} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \frac{[x_i, x_j]}{r_{ij}}, \qquad (1.310)$$

где мы использовали (1.305), (1.306), (1.302) и определение $x_{ij} = x_i - x_j$.

С помощью тех же самых рассуждений, какие использовались при доказательстве того, что P — интеграл движения, можно показать, что и вектор $\boldsymbol{M}$ — константа движения.

Не лишено интереса непосредственное доказательство постоянства $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$ с помощью третьего закона Ньютона ($\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$), второго закона Ньютона и геометрических соображений. Мы предоставляем сделать это читателю в виде упражнения.

Как в классической, так и в квантовой механике играет важную роль так называемая *теорема вириала*, касающаяся среднего по времени от так называемого вириала Клаузиуса $\mathcal{V}$, определяемого как

$$\mathcal{V} = \sum_i (\boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{x}_i). \tag{1.311}$$

Вириал Клаузиуса можно переписать также в виде:

$$\mathcal{V} = \sum_i m_i (\ddot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \boldsymbol{x}_i) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2\right) - 2T. \tag{1.312}$$

Если рассматриваемая система не разлетается, иными словами — ни одна из величин $\boldsymbol{x}_i$ или $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ никогда не становится бесконечно большой, среднее по времени от первого члена, стоящего в правой части (1.312), будет равно нулю, и для этого случая можно записать:

$$\overline{2T + \mathcal{V}} = 0, \tag{1.313}$$

где черта над буквенным символом означает усреднение по времени:

$$\bar{f} = \lim_{T \to \infty} T^{-1} \int_t^{t+T} f(t)\, dt.$$

Если к тому же справедливо равенство (1.301), можно также написать, что

$$\mathcal{V} = -\sum_i (\boldsymbol{x}_i \cdot \nabla_i U). \tag{1.314}$$

В том довольно часто встречающемся случае, когда U представляет собой однородную функцию координат порядка g, можно воспользоваться теоремой Эйлера для таких функций и написать вместо правой части (1.314) $-gU$. Из сопоставления формул (1.313), (1.314) и (1.303) мы получаем:

$$2\bar{T} - g\bar{U} = 0, \qquad \bar{T} + \bar{U} = E,$$

вативным, если сила в каждой точке может быть получена из потенциальной функции U дифференцированием, а именно:

$$F = -\nabla U, \tag{1.114}$$

где через ∇ обозначен оператор градиента, компонентами которого являются операторы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$.

В этом случае

$$\int_{t'}^{t''} (F \cdot dx) = -\int_{t'}^{t''} (\nabla U \cdot dx) = -U'' + U', \tag{1.115}$$

или, принимая во внимание (1.111) и (1.112),

$$T' + U' = T'' + U''. \tag{1.116}$$

Потенциал U носит название *потенциальной энергии*, и мы видим непосредственно из (1.116), что в том случае, когда функция U явно не зависит от t, *полная энергия* частицы E, т. е. **сумма** кинетической и потенциальной энергии

$$E = T + U, \tag{1.117}$$

представляет собой *константу* (или интеграл) *движения*, т. е. такую величину, которая не меняется во время движения частицы.

Из (1.115) можно также усмотреть, что в случае консервативного поля сил интеграл, стоящий в левой части, не зависит от того, по какому пути движется частица, а зависит только от ее положения в начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала времени. Конечно, если бы этого не было, мы не смогли бы ввести потенциальную функцию. В итоге можно определить консервативное поле сил требованием, чтобы интеграл I (1.111) зависел бы только от положения частицы в моменты времени t' и t'', но не зависел бы от пути, проходимого частицей в промежутке времени между t' и t''.

Если мы имеем дело с одномерной консервативной системой, уравнение движения всегда решается квадратурой. Действительно, энергия в этом случае будет интегралом движения, и мы можем написать:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x), \tag{1.118}$$

или же, разрешая относительно $\dot{x}$,

$$\dot{x} = [(2/m)(E - U)]^{1/2}. \tag{1.119}$$

капли и показать, что ее ускорение стремится к некоторому конечному пределу, когда время стремится к бесконечности.

5. Частица, масса которой равна единице, движется в потенциальном поле с потенциальной функцией $U = -\mu r^{-n}$.

а) Показать, что частице можно сообщить некоторую конечную скорость в любой точке A (за исключением начала координат) так, что она уйдет на бесконечность, в том и только в том случае, когда $n > 0$.

б) Найти минимальную начальную скорость (скорость отрыва), необходимую для того, чтобы частица ушла на бесконечность, как функцию расстояния точки A от начала координат (это расстояние обозначим через a).

в) Пусть частица испускается со скоростью отрыва из точки A. Показать, что в любой точке своей траектории частица обладает скоростью, равной скорости отрыва; показать, что траектория частицы — если она не прямая линия — будет окружностью при $n = 4$; показать также, что траектория частицы — если она не прямая — не уходит в бесконечность, если $n > 2$.

6. Частица, масса которой равна единице, запускается из точки r_0 со скоростью v вдоль прямой, расстояние которой от начала координат (т. е. по нормали, опущенной из начала координат на прямую) равно p. На частицу действует сила притяжения $-N\boldsymbol{r}/r^3$. Показать, что если $N/r_0 \ll v^2$, то частица будет отклонена на угол, равный примерно $\pi - 2 \operatorname{arctg}(v^2 p/N)$.

7. Вывести соотношение (1.258), не прибегая к помощи (1.255)

Указание. Полное изменение импульса рассеиваемой частицы направлено по $\boldsymbol{r}_0$ (см. рис. 6) и равно $2mv\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{sc}}{2}\right)$. С другой стороны, сила, действующая в этом направлении, в любой момент времени равна $(k\cos\theta)/r$. Изменение импульса по данному направлению равно интегралу по времени от компоненты силы по данному направлению. Интегрирование по времени можно заменить интегрированием по углу θ, если воспользоваться (1.214). С учетом (1.252) формула (1.258) получается непосредственно.

8. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния точечной частицы на потенциальной функции, соответствующей рассеянию на жесткой сфере радиуса a.

9. Выразить дифференциальное сечение, полученное в предыдущей задаче, через энергию, теряемую рассеиваемой частицей.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

В этой главе мы начнем с рассмотрения связей, наложенных на систему; мы покажем, что связи можно ввести как предельный случай обычной потенциальной энергии. Затем обсуждается принцип Д'Аламбера и на его основе выводятся уравнения Лагранжа первого рода, которые используются в нескольких простых примерах. Выводится вариационный принцип Гамильтона, с помощью которого получаются уравнения Лагранжа второго рода, после того как вводятся обобщенные координаты. После этого рассматриваются циклические координаты, функция Рауса и скрытые массы. Далее кратко обсуждаются неголономные и неинтегрируемые связи и потенциалы, зависящие от скорости; специально рассмотрен случай движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В конце главы обсуждается связь между бесконечно малыми преобразованиями координат и законами сохранения.

§ 2.1. Связи

Рассматривается система из N частиц; $\boldsymbol{x}_i$ — радиус-вектор, проведенный к i-й частице ($i = 1, 2, \ldots, N$). Обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ силу, действующую на i-ю частицу. Полная сила, действующая на частицу, может быть разбита на две части: первая часть, $\boldsymbol{F}_i^{\text{int}}$, создается частицами, входящими в систему, вторая, $\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$, обусловлена действием внешнего поля сил:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{int}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}. \tag{2.101}$$

Рассматриваемая система имеет $3N$ степеней свободы, и если известны все $\boldsymbol{F}_i^{\text{int}}$ и $\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$, то в принципе возможно решить все уравнения движения. Часто, однако, невозможно задать заранее все $\boldsymbol{F}_i^{\text{int}}$ и $\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$. Более того, часть этих сил может иметь такую природу, что фактически число степеней свободы уменьшается и становится меньше, чем $3N$. Чтобы понять, как такое может случиться, обратимся к трем частным случаям, когда потенциальная энергия задается соответственно в виде:

$$U_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} a (x_1 - x_2 - l)^2; \tag{2.102}$$

$$\left.\begin{aligned} &U_2(x) = 0, \quad |x| < \frac{1}{2} L; \\ &U_2(x) = \frac{2x - L}{b^2 L}, \quad \frac{1}{2} L \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{2} L(1+b), \\ &U_2(x) = \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{2} L(1+b) < |x|; \end{aligned}\right\} \tag{2.103}$$

$$\left.\begin{aligned} &U_3(x, y, z) = \frac{1}{2} c(\alpha x + \beta y + \gamma z - d)^2, \\ &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.104}$$

Первый потенциал относится к одномерной системе, состоящей из двух частиц; второй — к одиночной частице, движущейся в одном измерении; третий — к одной частице, движущейся в трех измерениях. Мы будем исходить из того, что в рассматриваемых случаях действуют силы, обусловленные только этими потенциалами.

В первом случае, когда потенциал определен согласно (2.102), мы вводим в качестве новых переменных относительную координату $x_1 - x_2$ и координату центра инерции $(m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$. Как мы видели в § 1.2, координата центра инерции описывает равномерное и прямолинейное движение системы, а для относительной координаты мы имеем [ср. с (1.122)]:

$$x_1 - x_2 = l + \sqrt{\frac{2E}{a}} \sin \sqrt{\frac{a}{\mu}} (t - t_0), \tag{2.105}$$

где через E обозначена энергия относительного движения, а через μ — приведенная масса, вычисляемая согласно (1.251).

Перейдем теперь к пределу, когда a стремится к бесконечности при постоянном значении E. Мы видим, что частота колебаний разности $x_1 - x_2$ вокруг значения l возрастает, а амплитуда уменьшается. В пределе мы находим:

$$x_1 - x_2 = l; \tag{2.106}$$

это означает, что система ведет себя так, как если бы обе частицы находились на строго фиксированном расстоянии l

друг от друга. Если говорить на современном языке: степень свободы, соответствующая относительному движению, оказалась *замороженной*. Такое вымораживание степеней свободы имеет важное значение в тех случаях, когда используется квантовая механика. В классической же механике достаточно сказать, что на систему наложены *связи*;

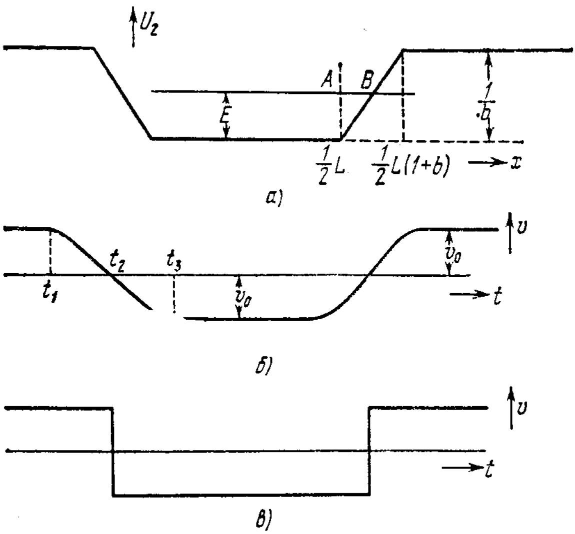

Рис. 7. *а*) Потенциал U_2, соответствующий двум стенкам конечной высоты, равной $1/b$.

б) Скорость частицы v в зависимости от времени для случая стенок конечной высоты.

в) Скорость частицы v в зависимости от времени для бесконечно высоких стенок.

для той системы, которую мы только что исследовали, связь задается уравнением (2.106).

Потенциал U_1 может быть следующим образом обобщен на три пространственных измерения:

$$U_1' = \frac{1}{2} a' \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l\right]^2, \qquad (2.107)$$

и тогда связь (2.106) заменится уже на

$$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| = l, \qquad (2.108)$$

если a' стремится к бесконечности. Доказательство того, что возникает именно эта связь, довольно непосредственно и предоставляется читателю, С другим случаем связи мы сталкиваемся в системе, в которой действует потенциал U_2 (см. рис. 7, *а*); этот случай соответствует физически двум стенкам высотой $1/b$. Движение частицы одномерное, и с помощью (1.120) можно найти зависимость ее координаты от времени. Нетрудно показать, что если энергия частицы E меньше, чем $1/b$, она будет двигаться взад — вперед между двумя стенками, от которых она будет отражаться. Когда частица достигает точки, соответствующей отметке A на рис. 7, *а* (скажем, в момент t_1), она замедляет свое движение до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль (допустим, в момент t_2 — отметка B на рис. 7, *а*). Затем она начинает обратное движение, ускоряясь от B к A, пока, наконец, ее скорость не достигает в точке A первоначального значения, но уже в противоположном направлении.

На рис. 7, *б* представлена скорость частицы как функция времени. Время t_1 соответствует координате частицы $x = {}^1/_2 L$, тогда как скорость частицы v в этой точке равна $v_0 = (2E/m)^{1/2}$. В момент времени t_2 скорость $v = 0$, а координата частицы равна $x = {}^1/_2 L + {}^1/_2 Eb^2 L$ (мы предполагаем, что $E < 1/b$, так что ${}^1/_2 L + {}^1/_2 Eb^2 L < {}^1/_2 L (1 + b)$). В момент t_3, соответствующий возвращению в точку A, скорость $v = -v_0$, а координата снова равна $x = {}^1/_2 L$. Время τ, проведенное частицей в «области стенки», определяемой неравенством ${}^1/_2 L \leqslant x \leqslant {}^1/_2 L (1 + b)$, можно получить из уравнения

$$\tau = 2 (t_2 - t_1) = 2 \int\limits_{^1/_2 L}^{^1/_2 L (1 + Eb^2)} \left[v_0^2 + \frac{2}{mb^2} - \frac{4x}{mb^2 L} \right]^{-1/2} dx,$$

упростив которое мы получим:

$$\tau = m v_0 b^2 L.$$

Из этих формул видно, что в пределе $b \to 0$ время $\tau \to 0$; частица просто отражается от стенки, а ее скорость меняется скачком, как это изображено на рис. 7, *в*. В этом предельном случае движение частицы ограничено интервалом

$$-\frac{1}{2} L \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} L; \tag{2.109}$$

другими словами, ее движение ограничено одномерным ящиком с упругими стенками.

Третий потенциал U_3 приводит к следующим уравнениям движения:

$$m\ddot{x} = c\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z - d), \tag{2.110а}$$

$$m\ddot{y} = c\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z - d), \tag{2.110б}$$

$$m\ddot{z} = c\gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z - d); \tag{2.110в}$$

если умножить (2.110а) на α, (2.110б) на β, (2.110в) на γ и затем сложить полученные уравнения, мы найдем, что решением полученного дифференциального уравнения будет

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - d = \sqrt{\frac{2E}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{m}}(t - t_0), \tag{2.111}$$

где через E обозначена энергия, соответствующая движению частицы перпендикулярно плоскости

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = d. \tag{2.112}$$

Если перейти к пределу $c \to \infty$, мы обнаружим, что движение частицы ограничено плоскостью, определяемой уравнением (2.112).

Подводя итоги, мы видим, что в трех разобранных случаях мы столкнулись со связями следующих типов: а) связи, которые фиксируют,расстояния между частицами, входящими в систему (первый случай); б) связи, которые требуют от частицы, чтобы она двигалась по заданной поверхности или вдоль заданной кривой (третий случай); в) связи, которые предписывают частице — или системе, состоящей из частиц, — движение в ограниченной области пространства (второй случай). Связи первых двух типов могут быть выражены в виде уравнений, которым должны удовлетворять координаты частицы (или частиц):

$$G_l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = 0. \tag{2.113}$$

Уравнения такого вида называются *кинематическими связями* или иногда *голономными кинематическими связями*. Связи последнего типа описываются неравенствами:

$$G_m(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \geqslant 0, \tag{2.114}$$

и тогда связи называются уже неудерживающими. Есть еще один вид связей, которые могут быть выражены только в дифференциальной форме; они называются неинтегрируемыми; к этому случаю связей относится чистое качение сферы по плоскости. В дальнейшем мы ограничимся исключительно голономными связями; лишь в § 2.5 совсем кратко коснемся неинтегрируемых связей.

Один из способов наложения связей на систему заключается в том, чтобы сказать, что рассматриваемая система обладает уже не $3N$ степенями свободы, а только s степенями, где число s определяется равенством

$$s = 3N - p, \tag{2.115}$$

причем через p обозначено число кинематических соотношений (2.113), которые должны удовлетворяться. Эти кинематические соотношения ведут к появлению некоторых сил, действующих в системе и обеспечивающих выполнение этих соотношений. Если обозначить эти силы через F'_i, то полную силу, действующую на i-ю частицу, можно представить в виде суммы, один член которой будет равен F'_i, а другой член F_i обязан действию всех иных источников. Тогда уравнение движения i-й частицы можно записать так [ср. (2.101)]:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + F'_i. \tag{2.116}$$

Неизвестными величинами являются здесь x_i и F'_i, т. е. $6N$ переменных, тогда как уравнений у нас всего $3N + p$, а именно $3N$ уравнений (2.116) и p уравнений (2.113). Нам необходимы еще дополнительные уравнения. Их можно получить, если воспользоваться принципом Д'Аламбера.

§ 2.2. Принцип Д'Аламбера

Вернемся к тем связям, которые возникли как предельные случаи потенциалов (2.102) и (2.104). Рассмотрим виртуальные перемещения частиц δx_i. Под виртуальными перемещениями мы будем понимать такие перемещения частиц, которые не нарушают кинематических соотношений. Найдем работу, совершаемую силами F'_i, когда частицы совершают виртуальные перемещения. Мы убедимся, что в двух разобранных случаях виртуальная работа, совершаемая силами, действующими со стороны связей, равна нулю.

В трехмерном случае (2.107) в систему входят две частицы, и две силы, действующие в системе, F'_1 и F'_2, равны по величине, противоположны по направлению (третий закон Ньютона!) и направлены вдоль прямой, соединяющей эти частицы. Следовательно,

$$F_1' = -F_2' = -a'(x_1 - x_2), \tag{2.201}$$

где a' — скалярная величина. Связь (2.106) в трехмерном случае принимает вид (2.108):

$$r_{12}^2 = (x_1 - x_2 \cdot x_1 - x_2) = l^2, \tag{2.202}$$

и виртуальные перемещения δx_1 и δx_2, не нарушающие уравнение связи (2.202), должны удовлетворять уравнению

$$(x_1 - x_2 \cdot \delta x_1 - \delta x_2) = 0. \tag{2.203}$$

Виртуальная работа δW, совершаемая силами связи, определяется как

$$\delta W = (F_1' \cdot \delta x_1) + (F_2' \cdot \delta x_2). \tag{2.204}$$

Используя выражения (2.201) и (2.203), мы получим:

$$\delta W = -a'(x_1 - x_2 \cdot \delta x_1) + a'(x_1 - x_2 \cdot \delta x_2) = \\ = -a'(x_1 - x_2 \cdot \delta x_1 - \delta x_2) = 0, \tag{2.205}$$

откуда и вытекает доказательство нашего утверждения.

В другом случае мы записываем уравнение связи (2.112) в виде:

$$(n \cdot x) = d, \tag{2.206}$$

где через n обозначен единичный вектор с направляющими косинусами α, β и γ. Сила, действующая со стороны связи F', направлена по нормали к плоскости (2.206), т. е.

$$F' = kn, \tag{2.207}$$

где k — скаляр; виртуальное перемещение удовлетворяет условию

$$(n \cdot \delta x) = 0. \tag{2.208}$$

Объединяя (2.207) и (2.208), мы находим виртуальную работу δW, совершаемую силой F':

$$\delta W = (F' \cdot \delta x) = k(n \cdot \delta x) = 0, \tag{2.209}$$

что и доказывает наше утверждение и в этом случае.

Теперь мы просто определим *механическую систему* как такую систему, в которой виртуальная работа, совершаемая силами связи, равна нулю. Это и есть принцип Д'Аламбера: «Виртуальная работа, совершаемая силами, действующими со стороны связей, равна нулю в любой механической системе». В последующем мы будем рассматривать исключительно механические системы.

Здесь мы использовали принцип Д'Аламбера таким образом, что определили механические системы как такие системы, для которых этот принцип справедлив. Другими словами, мы определили механические системы как такие системы, в которых силы, действующие со стороны связей, не могут совершать виртуальной работы. Можно, конечно, иначе ввести этот принцип (по существу этот другой способ очень мало отличается от того, что мы только что сделали), считая его просто гипотезой, которая оказывается фактически оправданной. Следует, конечно, помнить, что этот принцип теряет силу, как только мы хотим учесть влияние трения.

Принцип Д'Аламбера выражается уравнением

$$\sum_i (F_i' \cdot \delta x_i) = 0 \qquad (2.210)$$

при условии, что δx_i удовлетворяют p уравнениям

$$\sum_i (\delta x_i \cdot \nabla_i G_l) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, p, \qquad (2.211)$$

где G_l — функции, входящие в кинематические соотношения (2.113). Уравнения (2.211) определяют виртуальные перемещения, т. е. такие перемещения, при которых $x_i + \delta x_i$, так же как x_i, удовлетворяют соотношениям (2.113).

Используя (2.210) и (2.211), мы можем теперь уже найти еще $3N - p$ соотношений, которые вместе с (2.116) и (2.113) позволяют нам полностью определить движение всей системы частиц. Если никаких ограничений на значения δx_i нет, уравнения (2.210) совместны только с уравнениями $F_i' = 0$. Это в свою очередь приводит к исходным уравнениям движения ($m_i \ddot{x}_i = F_i$) для того случая, когда на систему не наложены никакие кинематические соотношения. Уравнения $F_i' = 0$ как раз и представляют нам недостающие $3N$ соотношений. Если же на систему наложены кинематические соотношения, тогда не все δx_i являются независимыми, но они обязаны удовлетворять (2.211). Тогда мы можем выбрать произвольно всего лишь $3N - p$ компонент δx_i из их общего числа $3N$, а оставшиеся p компонент найдутся уже из (2.211). Можно попытаться исключить p этих компонент из (2.210), добавив к ним p уравнений (2.211), умножив каждое из них на должным образом подобранный множитель λ_l. Тогда мы должны получить:

$$\sum_i \left(\delta x_i \cdot F_i' + \sum_l \lambda_l \nabla_i G_l\right) = 0. \qquad (2.212)$$

Множители λ_l мы выберем таким образом, чтобы коэффициенты при первых p компонентах δx_i обратились в нуль:

$$F_i' + \sum_l \lambda_l \nabla_i G_l = 0. \qquad (2.213)$$

Уравнения (2.213) справедливы для p компонент и позволяют определить все λ_l. Подставляя полученные множители λ_l в (2.212), мы видим, что сумма по i, которая вначале подразумевала суммирование $3N$ слагаемых ($i = 1, 2, \ldots, N$ и три слагаемых в каждом скалярном произведении), свелась уже к сумме $3N - p$ слагаемых. Но теперь уже оставшиеся $3N - p$ компонент δx_i независимы и (2.212) могут удовлетворяться только в том случае, если все коэффициенты при δx_i обращаются в нуль, т. е. если (2.213) справедливо для остающихся $3N - p$ компонент. Именно это уравнение и позволяет нам, в принципе, найти решение интересующих нас уравнений движения. У нас есть теперь $3N$ уравнений (2.116), p уравнений (2.113) и $3N$ уравнений (2.213) для $3N$ значений x_i, для $3N$ значений F_i' и p значений λ_l.

Изложенный метод называется методом неопределенных множителей или методом множителей Лагранжа. Сейчас мы выясним физический смысл множителей Лагранжа λ_l.

Из (2.213) и (2.116) мы приходим к *уравнениям движения Лагранжа первого рода*

$$m_i \ddot{x}_i = F_i - \sum_{l=1}^{p} \lambda_l \nabla_i G_l \qquad (2.214)$$

совместно с p кинематическими соотношениями (2.113). Мы хотели бы, однако, подчеркнуть, что, говоря об уравнениях Лагранжа, практически всегда подразумевают не уравнения (2.214), а уравнения Лагранжа второго рода, о которых речь будет идти в следующем параграфе.

Из (2.213) непосредственно видно, что λ_l тесно связаны с силами, возникающими из-за наличия связей. Мы покажем это на нескольких простых примерах. Возможно, простейшим примером будет наличие связи (2.206), которая ограничивает движение частицы плоскостью. В этом случае имеется всего лишь одно кинематическое соотношение и соответствующая функция G дается уравнением

$$G(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}) - d, \tag{2.215}$$

так что из (2.213) мы получаем:

$$\boldsymbol{F}' = -\lambda \boldsymbol{n}. \tag{2.216}$$

Мы обнаруживаем, что в этом случае λ — это просто абсолютная величина силы, обусловленной наличием связи.

Интересно отметить, что из (2.110) мы получаем для компоненты силы F_n, нормальной плоскости (2.112), в том случае, когда c имеет еще конечное значение:

$$F_n = m(\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n}) = c[(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}) - d]. \tag{2.217}$$

Множитель λ оказывается просто предельным значением выражения, стоящего в правой части (2.217).

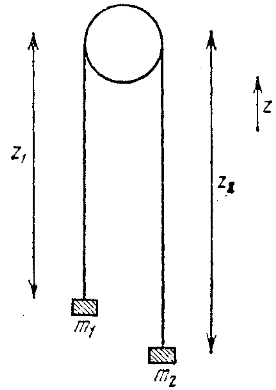

Рис. 8. Машина Атвуда.

Аналогичная ситуация возникает и в машине Атвуда, состоящей из двух масс m_1 и m_2, связанных между собой невесомой нитью заданной длины; нить перекинута через невесомый блок, вращающийся без трения (рис. 8). Запишем уравнение связи для этого случая:

$$G(z_1, z_2) \equiv z_1 + z_2 - l = 0. \tag{2.218}$$

Согласно (2.213) мы получим сейчас:

$$F_1' = -\lambda, \quad F_2' = -\lambda. \tag{2.219}$$

Уравнения же движения запишутся так:

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g - \lambda, \quad m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g - \lambda, \tag{2.220}$$

где g — ускорение силы тяжести. Из этих уравнений видно, что λ — это просто натяжение нити. Решить уравнения движения можно с помощью (2.218), и мы найдем, что более тяжелая масса, скажем, m_1, движется вниз с постоянным ускорением a, величина которого определяется по формуле

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \tag{2.221}$$

а натяжение нити λ равно

$$-\lambda = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{2.222}$$

Результат (2.221) интуитивно очевиден: «движущая» сила равна разности сил $m_1 g$ и $m_2 g$, тогда как инерциальные свойства системы описываются суммой масс m_1 и m_2.

В качестве последнего примера мы рассмотрим двухатомную молекулу (гантель), центр инерции которой ограничен в своем движении плоскостью. Уравнений связи в этом случае уже два:

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0, \\ G_2 &\equiv (m_1 \boldsymbol{x}_1 + m_2 \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{n}) - d = 0. \end{aligned} \tag{2.223}$$

Из (2.213) мы получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1' &= -2\lambda_1 (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) - \lambda_2 m_1 \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{F}_2' &= 2\lambda_1 (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) - \lambda_2 m_2 \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{2.224}$$

Из этих уравнений следует, что возникающие из-за наличия связи силы направлены вдоль оси молекулы. Силы эти пропорциональны λ_1 и подчиняются третьему закону Ньютона (действие равно противодействию). Возникают также силы связей, пропорциональные λ_2. Если мы составим их результирующую, действующую на центр инерции молекулы, мы получим:

$$\boldsymbol{F}'_{\text{ц. и. м.}} = -\lambda_2 (m_1 + m_2) \boldsymbol{n}. \tag{2.225}$$

Это выражение полностью аналогично силе связи, определяемой согласно (2.216), но теперь уже оно относится к центру инерции молекулы, а не к отдельной частице.

Вернемся теперь к обсуждению общего случая. Объединив (2.210) и (2.116), мы можем придать принципу Д'Аламбера вид:

$$\sum_i (m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{x}_i) = 0, \tag{2.226}$$

где $\delta \boldsymbol{x}_i$ удовлетворяют уравнениям (2.211). Рассмотрим теперь две возможные траектории системы. Это значит, что мы рассматриваем две траектории, для которых выполняются кинематические соотношения. Пусть, далее, одна из этих траекторий, а именно $x_i(t)$, соответствует действительному движению системы. Вторая возможная траектория описывается уравнением $x_i(t)+\delta x_i(t)$. Мы рассматриваем возможные траектории, достаточно близкие к действительной, и поэтому можем считать $\delta x_i(t)$ малыми величинами. Для вариаций $\delta \dot{x}_i$ скоростей мы найдем:

$$\delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt}(x_i+\delta x_i) - \frac{d}{dt} x_i = \frac{d}{dt}\delta x_i, \tag{2.227}$$

обнаружив при этом важную особенность вариационного исчисления: переставимость варьирования и дифференцирования. Если рассмотреть две траектории, проходимые в промежутке времени от t_1 до t_2, мы найдем из (2.226):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i \cdot \delta x_i)\, dt = 0, \tag{2.228}$$

поскольку подинтегральное выражение тождественно равно нулю в любой момент времени. С помощью (2.227), интегрируя первый член по частям, мы получим:

$$0 = \sum_i m_i (\dot{x}_i \cdot \delta x_i) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \sum_i (F_i \cdot \delta x_i) \right] dt, \tag{2.229}$$

где через T обозначена полная кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2. \tag{2.230}$$

Если же ограничиться системами, в которых силы F_i получаются из потенциальной энергии U,

$$F_i = -\nabla_i U, \tag{2.231}$$

так что

$$\sum_i (F_i \cdot \delta x_i) = -\delta U, \tag{2.232}$$

и такими вариациями δx_i, что

$$\delta x_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1 \quad \text{и при} \quad t = t_2, \tag{2.233}$$

то из (2.229), (2.232) и (2.233) мы получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U)\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0, \tag{2.234}$$

где через L обозначена *функция Лагранжа* (или *лагранжиан*), определяемая согласно равенству

$$L = T - U. \tag{2.235}$$

Уравнение (2.234) носит название *вариационного принципа Гамильтона*; оно годится в том случае, когда концы траекторий остаются без изменений, т. е. не варьируются. Принцип Гамильтона эквивалентен как принципу Д'Аламбера, так и исходным ньютоновским уравнениям движения, если только траектории, по которым движутся частицы, удовлетворяют кинематическим соотношениям. Преимущество принципа Гамильтона над двумя вышеупомянутыми формулировками законов движения состоит в том, что он не зависит от выбора координат, с помощью которых описывается система.

§ 2.3. Уравнения Лагранжа

Мы уже говорили о том, что кинематические соотношения ограничивают число степеней свободы рассматриваемой системы до $3N - p$ $(= s)$, и во многих случаях более удобно сразу ввести s независимых переменных, задание которых полностью определяет состояние системы, чем по-прежнему пользоваться N величинами x_i (т. е. $3N$ декартовыми координатами) наряду с кинематическими соотношениями и множителями λ_l. Следует отдавать себе отчет в том, что, переходя к *обобщенным координатам* q_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$, как принято называть такие новые параметры, мы, как и раньше, имеем дело с механическими системами, для которых справедлив принцип Д'Аламбера; однако эта гипотеза не выступает здесь уже столь очевидным образом. Обобщенные координаты q_k являются функциями всех x_i и обратно; что касается *обобщенных скоростей* $\dot{q}_k$, то они связаны с $\dot{x}_i$ соотношениями

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k. \tag{2.301}$$

Подставляя $\dot{x}_i$, выраженные через $\dot{q}_k$ согласно (2.301), в выражение (2.230) для кинетической энергии, мы получим:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \tag{2.302}$$

где a_{kl} являются функциями от q_k, определенными согласно формулам

$$a_{kl} = a_{lk} = \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right). \tag{2.303}$$

Из (2.302) видно, что T есть однородная квадратичная функция $\dot{q}_k$.

Вплоть до этого момента всюду предполагалось, что потенциальная энергия U зависит только от координат x_i; теперь, следовательно, потенциальная энергия будет функцией только обобщенных координат q_k, т. е. $U = U(q_k)$. Лагранжиан же будет функцией как q_k, так и $\dot{q}_k$ (в этой же главе ниже будет также кратко рассмотрен и потенциал, зависящий от скоростей):

$$L = L(q_k, \dot{q}_k) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k). \tag{2.304}$$

Применим теперь вариационный принцип Гамильтона к лагранжиану (2.304). Вариация лагранжиана запишется в виде:

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k, \tag{2.305}$$

тогда как граничные условия (2.233) здесь уже перепишутся так:

$$\delta q_k = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1 \quad \text{и при} \quad t = t_2. \tag{2.306}$$

Из вариационного принципа (2.234) мы получим теперь:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k\, dt =$$

$$= \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k\, dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] \delta q_k\, dt. \tag{2.307}$$

Мы воспользовались здесь тем обстоятельством, что δq_k и $\delta \dot{q}_k$ не независимы друг от друга: величины $\delta \dot{q}_k$ являются просто производными по времени от δq_k [ср. (2.227)].

Настало время, когда мы можем воспользоваться преимуществами, которые нам предоставляет введение обобщенных координат. Поскольку обобщенных координат ровно столько, сколько степеней свободы у системы, вариации δq_k являются независимыми функциями времени и уравнение (2.307) может быть удовлетворено только в том случае, если справедливы следующие s уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0, \qquad k=1, 2, \ldots, s. \tag{2.308}$$

Уравнения (2.308) называются *уравнениями Лагранжа второго рода* или чаще просто *уравнениями Лагранжа*. Поскольку вывод соотношений (2.308) не зависит от выбора координат, то, переходя от одних обобщенных координат q_k к другим q'_k, мы придем к уравнениям Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_k}-\frac{\partial L}{\partial q'_k}=0. \tag{2.309}$$

Прежде чем заниматься более подробным исследованием уравнений Лагранжа, мы введем *обобщенные импульсы* p_k, определив их равенствами

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{2.310}$$

Для декартовых координат обобщенные импульсы p_k совпадают с проекциями обычного импульса отдельных частиц. Используя обобщенные импульсы, можно переписать (2.308) в виде:

$$\dot{p}_k=\frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{2.311}$$

Применим теперь уравнения Лагранжа к исследованию некоторых физических систем. Прежде всего заметим, что для системы без связей в качестве обобщенных координат можно использовать декартовы координаты x_i. В этом случае лагранжиан имеет вид:

$$L=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-U(x_1, x_2, \ldots), \tag{2.312}$$

так что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m_i\dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}=m_i\dot{y}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}=m_i\dot{z}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\frac{\partial U}{\partial x_i}, \ \ldots,$$

и уравнения (2.308) сводятся к ньютоновским уравнениям движения (1.302).

В качестве следующего примера мы рассмотрим одну частицу в поле сферически симметричного потенциала $U(r)$. Здесь удобно выбрать в качестве обобщенных координат сферические координаты, т. е. положить $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ и $q_3 = \varphi$. Кинетическая энергия системы может быть представлена в виде:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2), \tag{2.313}$$

так что лагранжиан запишется так:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{2.314}$$

Выпишем обобщенные импульсы для этого случая:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{2.315}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \tag{2.316}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}. \tag{2.317}$$

Из (2.315) видно, что p_r представляет собой радиальный импульс, т. е. компоненту импульса в направлении радиус-вектора. Обобщенный импульс p_φ (2.317) представляет собой компоненту полного момента импульса относительно полярной оси. Если сферические координаты r, θ, φ связаны с декартовыми координатами обычными формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{2.318}$$

то p_φ равно z-компоненте момента импульса $\boldsymbol{M}$, определяемого согласно (1.209), в чем легко убедиться простой подстановкой переменных (2.318).

Квадрат абсолютной величины момента импульса M^2 может быть выражен через p_θ и p_φ:

$$M^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}. \tag{2.319}$$

Из уравнений Лагранжа мы получим:

$$\dot{p}_\varphi = 0, \tag{2.320}$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}. \tag{2.321}$$

Последнее уравнение дает:

$$\dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{mr^2 \sin^2\theta}. \qquad (2.322)$$

Сопоставляя (2.319), (2.320) и (2.322), мы обнаруживаем, что $\dot{M}=0$ или что $M^2=\text{const}$. Если мы выберем полярную ось таким образом, чтобы она в какой-то точке пересекала траекторию частицы, то увидим из (2.317), что в точке пересечения, где $\theta=0$, а r и $\dot{\varphi}$ конечны, обобщенный импульс p_φ обращается в нуль. А так как согласно (2.320) $\dot{p}_\varphi=0$, то p_φ всегда равно нулю. Из (2.319) вытекает тогда, что p_θ в этом случае будет полным моментом импульса. Соотношение (2.316) тогда совпадает с (1.214) и последнее уравнение движения

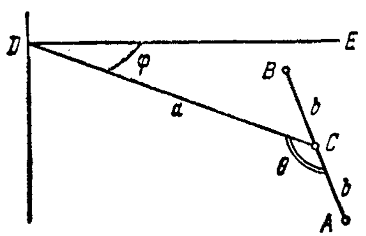

Рис. 9. Маятник Томсона — Тэта. Невесомый стержень AB может свободно вращаться в вертикальной плоскости, проходя через CD, а CD может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости CDE.

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r} \qquad (2.323)$$

сведется к (1.227), если принять во внимание (2.314), (2.315) и $p_\varphi=0$.

Вернемся теперь еще раз к машине Атвуда (рис. 8). Вместо двух координат z_1 и z_2 наряду со связью (2.218) мы введем одну обобщенную координату $q\,(=z_1)$, так что $z_2=l-q$. Потенциальная энергия дается уравнением

$$U = -m_1 g q - m_2 g (l-q), \qquad (2.324)$$

тогда как кинетическую энергию системы можно представить так:

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}^2. \qquad (2.325)$$

Уравнения Лагранжа (2.308) дают:

$$(m_1+m_2)\ddot{q} = (m_1-m_2) g \qquad (2.326)$$

в соответствии с (2.221). Мы не получили, конечно, выражения для натяжения нити, но можем его вычислить по силе, действующей на одну из масс, входящих в систему.

Наш последний пример — это так называемый маятник Томсона — Тэта (рис. 9), который состоит из двух равных масс m, закрепленных на концах невесомого стержня AB, длина которого равна $2b$. Середина этого стержня C прикреплена к концу невесомого стержня CD, длина которого равна a. Стержень CD может свободно двигаться в горизонтальной плоскости, а стержень AB может свободно вращаться в вертикальной плоскости, проходя через прямую CD. Система имеет две степени свободы, и в качестве обобщенных координат мы выберем угол φ между CD и заданным направлением DE в фиксированной горизонтальной плоскости и угол θ между AB и CD (см. рис. 9). Поскольку обе массы равны и центр инерции фиксирован в горизонтальной плоскости, потенциальная энергия в гравитационном поле (которое предполагается однородным) сводится к константе, которую можно считать равной нулю. Кинетическая энергия системы может быть получена из выражения

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2), \tag{2.327}$$

если воспользоваться следующими выражениями для x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2:

$$\begin{aligned} x_1&=a\cos\varphi+b\cos\theta\cos\varphi, & x_2&=a\cos\varphi-b\cos\theta\cos\varphi,\\ y_1&=a\sin\varphi+b\cos\theta\sin\varphi, & y_2&=a\sin\varphi-b\cos\theta\sin\varphi,\\ z_1&=b\sin\theta, & z_2&=-b\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.328}$$

Окончательно кинетическая энергия, а следовательно, и лагранжиан запишутся в виде:

$$\begin{aligned} L=T=\frac{1}{2}m[b^2\dot{\theta}^2+(a+b\cos\theta)^2\dot{\varphi}^2]+\\ +\frac{1}{2}m[b^2\dot{\theta}^2+(a-b\cos\theta)^2\dot{\varphi}^2]=\\ =mb^2\dot{\theta}^2+m(a^2+b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \tag{2.329}$$

С помощью (2.308) мы находим уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{p}_\varphi=0 \quad \text{или} \quad p_\varphi=\text{const}, \tag{2.330}$$

$$2mb^2\ddot{\theta}+2mb^2\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}^2=0. \tag{2.331}$$

Из (2.330), (2.331) и выражения для p_φ,

$$p_\varphi=2m(a^2+b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}, \tag{2.332}$$

мы находим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\theta}+\frac{p_{\varphi}^{2}\sin\theta\cos\theta}{4m^{2}(a^{2}+b^{2}\cos^{2}\theta)^{2}}=0, \tag{2.333}$$

из которого функция θ может быть найдена двойной квадратурой. Мы еще вернемся к (2.333) в следующем параграфе.

§ 2.4. Циклические координаты

Нередко бывает так, что какие-то координаты сами в лагранжиан не входят, а входят лишь их производные по времени. В предшествующих параграфах мы встречались с такими случаями; например, в лагранжиан (2.314) не входил полярный угол φ, а в лагранжиан (2.329) не входил угол φ, имеющий, правда, иной смысл. Такие координаты принято называть *циклическими* (или реже *игнорируемыми*). Появление первого термина связано с тем, что очень часто такими координатами оказываются углы (как это и было в двух приведенных примерах); что касается второго термина, то его происхождение станет ясным чуть позже.

Пусть q_s — игнорируемая координата. Тогда из (2.308) и (2.310) мы найдем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial L}{\partial q_s}=0=\frac{dp_s}{dt}, \tag{2.401}$$

или же

$$p_s=\text{const}. \tag{2.402}$$

Равенство (2.402) можно использовать для того, чтобы исключить (игнорировать) степень свободы, связанную с обобщенной координатой q_s. Делается это следующим образом. Равенство (2.402) определяет связь между $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{s-1}, \dot{q}_s, q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}$ и постоянной величиной p_s. Это равенство можно рассматривать как уравнение и разрешить его относительно $\dot{q}_s$, выразив эту величину через остальные переменные:

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{s-1}, q_1, \ldots, q_{s-1}; p_s), \tag{2.403}$$

где мы не должны забывать о том, что p_s — постоянная величина. Введем теперь так называемую функцию Рауса, определив ее следующим образом:

$$R=L-p_s\dot{q}_s. \tag{2.404}$$

Если воспользоваться теперь (2.402) и (2.403), мы найдем, что

$$R = R(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{s-1}, q_1, \ldots, q_{s-1}, p_s). \qquad (2.405)$$

Чтобы написать уравнения движения через функцию Рауса, составим вариацию

$$\delta L = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + p_s \delta \dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s,$$

откуда непосредственно вытекает выражение для δR:

$$\delta R = \delta (L - p_s \dot{q}_s) = \delta L - p_s \delta \dot{q}_s - \dot{q}_s \delta p_s =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} p_k \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s-1} \dot{p}_k \delta q_k - \dot{q}_s \delta p_s, \qquad (2.406)$$

причем мы использовали для p_k их выражение через (2.310), а также (2.401). Из (2.406) находим:

$$p_k = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}, \qquad \dot{p}_k = \frac{\partial R}{\partial q_k}, \qquad k = 1, \ldots, s-1, \qquad (2.407)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, s-1. \qquad (2.408)$$

Можно решить уравнения (2.408), и когда все p_k и q_k для $k = 1, \ldots, s-1$ будут найдены, можно воспользоваться уравнением

$$\dot{q}_s = -\frac{\partial R}{\partial p_s}, \qquad (2.409)$$

чтобы получить q_s в зависимости от времени. Отметим, что уравнения (2.408) по форме совпадают с уравнениями Лагранжа (2.308), но их на одно уравнение меньше; точно так же (2.407) по форме совпадают с (2.310) и (2.311).

Если циклических координат не одна, а несколько, можно всех их игнорировать одновременно, составив функцию Рауса

$$R = L - \sum_i p_i \dot{q}_i, \qquad (2.410)$$

где суммирование ведется по всем игнорируемым степеням свободы, Мы продемонстрируем применение функции Рауса на примере игнорирования степеней свободы, связанных с центром масс. Рассмотрим систему из N частиц с координатами $\boldsymbol{x}_i$ $(i=1, \ldots, N)$, потенциальная энергия которых зависит только от относительного расстояния между частицами:

$$U = U(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|). \tag{2.411}$$

Введем координаты центра масс

$$M\boldsymbol{X} = \sum_i m_i \boldsymbol{x}_i, \quad M = \sum_i m_i \tag{2.412}$$

и координаты относительно центра масс

$$\boldsymbol{x}_i' = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}, \tag{2.413}$$

которых остается всего лишь $3N-3$, поскольку они должны удовлетворять равенствам

$$\sum_i m_i \boldsymbol{x}_i' = 0, \tag{2.414}$$

как это сразу же вытекает из (2.412) и (2.413).

Кинетическую энергию системы можно представить в виде:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i) = \frac{1}{2} M (\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}) + \sum_i m_i (\dot{\boldsymbol{x}}_i' \cdot \dot{\boldsymbol{X}}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\boldsymbol{x}}_i' \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i') = T_1 + T_2, \tag{2.415}$$

где мы воспользовались (2.414) и где через T_1 и T_2 обозначены соответственно кинетическая энергия, связанная с движением центра масс, и кинетическая энергия, связанная с движением частиц относительно центра масс:

$$T_1 = \frac{1}{2} M (\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}), \quad T_2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\boldsymbol{x}}_i' \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i'). \tag{2.416}$$

Из (2.411) вытекает, что потенциальная энергия зависит только от $\boldsymbol{x}_i'$, так что лагранжиан

$$L = T - U = T_1 + T_2 - U \tag{2.417}$$

не содержит координат центра масс, которые оказываются, таким образом, игнорируемыми. Введем функцию Рауса

$$R = L - (\boldsymbol{P}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{X}}), \tag{2.418}$$

где

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} \tag{2.419}$$

представляет собой вектор полного импульса. Функция Рауса превращается тогда в

$$R = -T_1 + T_2 - U, \tag{2.420}$$

и уравнения (2.408) дают уравнения относительного движения, тогда как (2.409) описывает равномерное и прямолинейное движение центра масс.

В заключение этого параграфа мы коротко остановимся на одном вопросе, который в наше время почти полностью утратил актуальность, но вызывал огромный интерес на заре развития классической механики. Вернемся к маятнику Томсона — Тэта, о котором шла речь в предыдущем параграфе. Там оказалось, что угол φ был игнорируемой координатой. Мы обнаружили, что переменную φ можно исключить и получить уравнение движения (2.333) для оставшейся координаты θ. Конечно, то же самое уравнение можно было бы получить, если ввести функцию Рауса и игнорировать переменную φ способом, который мы только что описали. Если взглянуть на полученное дифференциальное уравнение (2.333), то видно, что хотя никакой потенциальной энергии у системы нет, уравнение (2.333) имеет в точности такой же вид, как уравнение одномерного движения в потенциальном поле. Обратив внимание на такие случаи, Герц пришел к выводу, что в сущности никакой потенциальной энергии не существует: она появляется только тогда, когда мы рассматриваем незамкнутую систему. Такая точка зрения уже неприемлема в наше время; действительно, можно подойти к этому вопросу с несколько другой стороны, как мы убедились в этом в самом начале этой главы: мы показали, что кинематические соотноше-

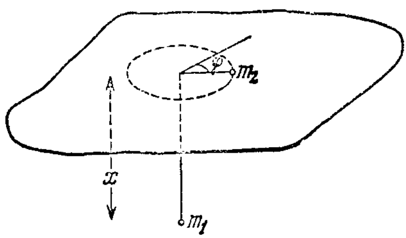

Рис. 10. Случай «скрытых» масс. Масса m_2 свободно движется в горизонтальной плоскости, а нить, связывающая массы m_1 и m_2, может двигаться без трения через отверстие в этой плоскости.

ния могут быть получены предельным переходом из подходящим образом выбранной потенциальной энергии.

В этой связи говорят иногда о *скрытых массах*; такие скрытые массы, как это предполагалось, вызывают посредством кинематических соотношений псевдопотенциальную энергию такого типа, с каким мы столкнулись в (2.333). Разберем очень простой пример, в котором и в самом деле скрытая масса создает такую псевдопотенциальную энергию (рис. 10). Две массы m_1 и m_2 связаны невесомой нитью длины l. Масса m_2 может свободно перемещаться по горизонтальной плоскости, нить может двигаться без трения через отверстие в плоскости, а масса m_1 движется вертикально. Система обладает двумя степенями свободы, и за обобщенные координаты мы примем величины x и φ (см. рис. 10). Лагранжиан системы запишется в виде:

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(l-x)^2\dot{\varphi}^2+m_1gx. \quad (2.421)$$

Координата φ — игнорируемая, и мы можем ее проигнорировать, составив функцию Рауса:

$$R=L-p_\varphi\dot{\varphi}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2-\frac{p_\varphi^2}{2m_2(l-x)^2}+m_1gx. \quad (2.422)$$

Исходная система свелась к одномерной, вместе с тем появился «псевдопотенциал» U':

$$U'(x)=\frac{p_\varphi^2}{2m_2(l-x)^2}. \quad (2.423)$$

§ 2.5. Неголономные связи. Потенциал, зависящий от скорости

Хотя у нас нет намерения входить в подробности, касающиеся неголономных связей, есть один интересный класс неголономных связей, на котором нам хочется хотя бы коротко остановиться. Речь идет о неинтегрируемых связях. В качестве примера физической системы, где встречаются такие связи, мы можем взять обруч (см. задачу № 4 к этой главе). Если через x и y обозначить координаты точки, в которой обруч касается земли, а через θ — угол, показывающий, на сколько повернулся обруч, условие чистого качения имеет вид:

$$\delta x^2+\delta y^2=R^2\delta\theta^2,$$

где через R обозначен радиус обруча.

Рассмотрим систему, в которой кроме p связей вида (2.113) действуют еще r неинтегрируемых связей типа

$$\sum_k a_k^{(j)}\,\delta q_k = 0, \qquad j = 1, \ldots, r. \tag{2.501}$$

В соотношениях (2.501) уже введены обобщенные координаты q_k, т. е. мы уже приняли во внимание наличие голономных связей.

Вариационный принцип (2.307) остается справедливым, так что мы можем написать

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right]\delta q_k\,dt = 0 \tag{2.502а}$$

вместе с условиями

$$\delta q_k = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1 \quad \text{и при} \quad t = t_2, \tag{2.502б}$$

но теперь уже δq_k больше не независимы, поскольку в любой момент времени они должны удовлетворять соотношениям (2.501). Выход из этого затруднения открывается снова в методе множителей Лагранжа, из которого в данном случае вытекает равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_k^{(j)}\right]\delta q_k\,dt = 0. \tag{2.503}$$

Теперь уже можно рассматривать δq_k в качестве независимых переменных (ср. рассуждения в § 2.2), и тогда мы получаем уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_k^{(j)} = 0 \tag{2.504}$$

в форме, которая является промежуточной между уравнениями Лагранжа первого и второго рода. Множители λ_j, как и раньше, связаны с силами, действующими со стороны связей, а сопоставляя (2.504) с (2.501), можно найти величины q_k и λ_j в зависимости от времени. Пример такого промежуточного случая можно найти в задаче 4, упомянутой выше (см. стр. 66).

До сих пор всюду предполагалось, что потенциальная энергия U зависит только от q_k. Однако вывод уравнений (2.308) не изменится и в том случае, если U зависит не только от q_k, но и от $\dot q_k$. В этом случае уравнения (2.308) примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial q_k}=0. \qquad (2.505)$$

Очень важным примером такого случая является движение заряженной точечной частицы в электромагнитном поле *). Через $\boldsymbol{E}$ мы обозначим напряженность электрического поля, а через $\boldsymbol{B}$ — магнитную индукцию; эти величины связаны со скалярным и векторным потенциалами формулами:

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=[\nabla,\ \boldsymbol{A}]. \qquad (2.506)$$

Уравнения движения могут быть получены из (2.505), если принять за потенциальную энергию выражение

$$U=e\varphi-e(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}). \qquad (2.507)$$

Действительно, используя формулу

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}, \qquad (2.508)$$

мы получим из (2.505):

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=-e\nabla\varphi-e\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+e[\dot{\boldsymbol{x}},\ [\nabla,\ \boldsymbol{A}]]=\boldsymbol{F}_L, \qquad (2.509)$$

где через $\boldsymbol{F}_L$ обозначена сила Лоренца:

$$\boldsymbol{F}_L=e\{\boldsymbol{E}+[\dot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{B}]\}. \qquad (2.510)$$

§ 2.6. Законы сохранения

Тот факт, что любой обобщенный импульс, соответствующий игнорируемой координате, является интегралом движения [см. (2.402)], подсказывает нам общую теорему о том, что если лагранжиан инвариантен относительно некоторой группы преобразований, включающей в себя бесконечно малые преобразования, то отсюда следует наличие какого-то закона сохранения **). В этом пара-

---

*) Формулы записаны в системе СИ.

**) Это утверждение связано с общей теоремой, принадлежащей Э. Нетер: любому непрерывному обратимому преобразованию координат, при котором функция действия S (см. гл. 6) данной гамильтоновой системы остается инвариантной, соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа этой системы. Функция действия $S=\int L\cdot dt$ отражает, естественно, инвариантные свойства лагранжиана. См. *Э. Нетер*, Инвариантные вариационные задачи, в сб. «Вариационные принципы механики», Физматгиз, 1959. — *Прим. перев.*

графе мы получим три закона сохранения с помощью таких соображений.

Рассмотрим преобразование

$$\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + \delta\boldsymbol{x}_i, \text{ или } q_k \to q_k + \delta q_k. \tag{2.601}$$

Эти преобразования изменяют лагранжиан, причем его изменение δL можно описать формулами:

$$\delta L = \sum_i (\nabla_i L \cdot \delta\boldsymbol{x}_i) \quad \text{или} \quad \delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{2.602}$$

Левая формула удобна в том случае, когда система описывается декартовыми координатами, правая — когда применяются обобщенные координаты q_k. Если группа преобразований, о которой шла речь в начале параграфа, может быть описана через изменение одной подходящим образом выбранной обобщенной координаты, скажем q_r, то для любого произвольного изменения q_r, т. е. для любого δq_r, лагранжиан не должен изменяться, т. е. $\delta L = 0$, и следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \tag{2.603}$$

откуда вытекает, что

$$p_r = \mathrm{const}. \tag{2.604}$$

В § 2.4 мы убедились в том, что для систем, потенциал которых зависит только от относительного расстояния между частицами, импульс, соответствующий координатам центра масс, является интегралом движения. Соответствующими обобщенными импульсами p_r будут, таким образом, три компоненты полного импульса системы. Чтобы показать это, мы замечаем, что для систем такого рода лагранжиан инвариантен относительно любого поступательного перемещения (трансляции), т. е. инвариантен относительно всех преобразований вида

$$\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.605}$$

где через $\boldsymbol{\varepsilon}$ обозначен произвольный вектор. Из (2.602) тогда следует, что

$$\delta L = 0 = \sum_i (\nabla_i L \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), \tag{2.606}$$

или же

$$\sum_i \nabla_i L = 0,$$

поскольку вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ — произвольный. Используя уравнения Лагранжа (2.308), получим:

$$\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \qquad (2.607)$$

или

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{P} = \text{const}. \qquad (2.608)$$

Мы видим, что закон сохранения полного импульса следует из того, что лагранжиан инвариантен относительно любых поступательных перемещений.

Теперь перейдем к случаю, когда лагранжиан инвариантен относительно вращения вокруг некоторой оси. Пусть эта ось параллельна некоторому вектору $\boldsymbol{n}$; через $\delta\varphi$ мы обозначили угол поворота вокруг этой оси. Координатой q_r, фигурирующей в (2.603), является, таким образом, угол φ, и следует ожидать, что соответствующий обобщенный импульс p_φ окажется интегралом движения. Этот импульс оказывается просто моментом импульса относительно этой оси.

Проще всего это обнаруживается, если вспомнить, что вращение вокруг $\boldsymbol{n}$ на угол $\delta\varphi$ соответствует преобразованию координат

$$\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + \delta\varphi\,[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}_i], \qquad (2.609)$$

и (2.602) может быть поэтому записано в виде:

$$\delta L = 0 = \sum_i \delta\varphi\,(\nabla_i L\cdot[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}_i]). \qquad (2.610)$$

Последнее выражение может быть преобразовано:

$$\delta\varphi \sum_i (\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{x}_i,\ \nabla_i L]) = \delta\varphi\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{d}{dt}\sum_i [\boldsymbol{x}_i,\ m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i]\right) = 0. \qquad (2.611)$$

Или же окончательно:

$$\left(\boldsymbol{n}\cdot\sum_i [\boldsymbol{x}_i,\ m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i]\right) = \text{const} = M_n, \qquad (2.612)$$

где через M_n обозначена компонента полного момента импульса системы (1.309) вдоль направления $\boldsymbol{n}$, Отсюда сразу же следует, что если лагранжиан инвариантен относительно любых вращений, то полный момент импульса системы сохраняется.

И, наконец, остановимся на том случае, когда лагранжиан инвариантен по отношению к изменению временной координаты, т. е. когда лагранжиан не зависит от времени явно:

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0. \tag{2.613}$$

В этом случае мы найдем, что

$$\frac{dL}{dt}=\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial t}=$$
$$=\sum_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k+\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt}=\sum_k \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right), \tag{2.614}$$

где в промежуточных выкладках использованы лагранжевы уравнения движения и (2.613). В том случае, который для нас особенно интересен, когда потенциальная функция U зависит только от координат q_k, а $\dot{q}_k$ входят только в кинетическую энергию, которая к тому же является однородной квадратичной функцией $\dot{q}_k$, мы получим:

$$\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=2T. \tag{2.615}$$

Тогда из равенства (2.614) вытекает:

$$\frac{d}{dt}\left(L-\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0=\frac{d}{dt}(T-U-2T), \tag{2.616}$$

откуда, наконец, можно заключить, что

$$E=T+U=\mathrm{const}, \tag{2.617}$$

где через E обозначена полная энергия системы.

Итак, если лагранжиан инвариантен относительно преобразования времени, то из этого обстоятельства вытекает закон сохранения энергии. Фактически этот результат представляет собой лишь частный случай первого закона сохранения, полученного выше, если декартовы координаты рассматривать на равных правах с временной координатой (ср. § 5.4).

ЗАДАЧИ

1. Рассмотреть движение сферического маятника с помощью уравнений Лагранжа первого рода.

2. Рассмотреть движение точечной частицы на наклонной плоскости в однородном поле тяжести с помощью уравнений Лагранжа первого рода.

3. Используя уравнения Лагранжа первого рода, рассмотреть движение частицы, ограниченной в своем движении линией пересечения поверхности сферы и заданной плоскости.

4. Исследовать движение обруча, катящегося по наклонной плоскости.

5. С помощью уравнений Лагранжа исследовать движение двух частиц, связанных гибкой нерастяжимой нитью, движущейся без трения. Одна из частиц движется по гладкому горизонтальному столу, а нить проходит через небольшое отверстие в столе к другой частице (см. рис. 10 на стр. 59).

6. Твердый однородный цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по наклонной плоскости клина массы M, который лежит на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Угол, составляемый наклонной плоскостью и горизонтом, равен ψ; движение происходит в плоскости, перпендикулярной горизонтальной плоскости, проходящей через нормаль к наклонной плоскости. Найти ускорение клина, используя уравнения движения Лагранжа.

7. Однородный стержень весом Mg и длиной L опирается одним концом на гладкую горизонтальную поверхность, а другим — на гладкую вертикальную стенку. В начальный момент стержень покоится, находясь в вертикальной плоскости, перпендикулярной стенке, составляя угол $60°$ с горизонтальной плоскостью. Интегрируя уравнения Лагранжа, определить движение стержня до того, пока он не ударится о горизонтальную поверхность.

8. Бусинка массы m свободно скользит по гладкой проволоке, изогнутой в виде окружности радиуса a, которая в свою очередь вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через одну из ее точек нормально к плоскости окружности. Исследуйте подробно движение бусинки и найдите выражение для реакции связи, действующей со стороны проволоки но бусинку.

Глава 3

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Довольно подробно рассматривается общая теория малых колебаний около положения равновесия; показывается, как вводятся нормальные координаты. Теория иллюстрируется на примерах малых колебаний двойного маятника, молекулярных колебаний в некоторых простых молекулах, нормальных колебаний одномерного кристалла. Рассмотрены двухатомные и линейные и нелинейные трехатомные молекулы типа A_2B. В заключение обсуждается простой случай колебаний около равновесного (устойчивого) движения.

§ 3.1. Теория малых колебаний

Мы начнем этот параграф с того, что займемся состояниями равновесия механических систем, т. е. систем, движение которых может быть описано уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \qquad (3.101)$$

Мы снова предположим, что потенциальная энергия U не зависит от обобщенных скоростей, так что лагранжиан L можно представить в виде:

$$L(q_k, \dot{q}_k) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k), \qquad (3.102)$$

где T — кинетическая энергия системы.

Состояния равновесия системы определяются как такие состояния, описываемые набором обобщенных координат $q_k^{(0)}$, для которых $\dot{q}_k = 0$ при $q_k = q_k^{(0)}$, причем и все высшие производные по времени от q_k также обращаются в нуль:

$$q_k = q_k^{(0)} \text{ и } \dot{q}_k = 0 \to \ddot{q}_k = 0, \ \dddot{q}_k = 0, \ \ddddot{q}_k = 0, \ \ldots \qquad (3.103)$$

Это означает, что если все частицы, составляющие систему, находятся в покое в положениях, соответствующих обобщенным координатам $q_k = q_k^{(0)}$, то они и всегда останутся в покое, т. е. условие $q_k = q_k^0$ вместе с $\dot{q}_k = 0$ при $t = t_0$ должно иметь следствием соблюдение равенств $q_k = q_k^0$ в любой последующий момент времени.

В предыдущей главе мы установили (см. (2.302)), что кинетическая энергия системы может быть записана в виде:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\,l} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \tag{3.104}$$

причем $a_{kl} (= a_{lk})$ в общем случае зависят от q_k. Если воспользоваться равенством (3.104) для кинетической энергии T, то из (3.101) можно получить:

$$\sum_l a_{kl} \ddot{q}_l + \sum_{l,\,m} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_m} \dot{q}_l \dot{q}_m - \frac{1}{2} \sum_{l,\,m} \frac{\partial a_{lm}}{\partial q_k} \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0. \tag{3.105}$$

Если ввести так называемые символы Кристоффеля $\left\{ {lm \atop k} \right\}$,

$$\left\{ {lm \atop k} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{lk}}{\partial q_m} + \frac{\partial a_{mk}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{lm}}{\partial q_k} \right], \tag{3.106}$$

то (3.105) можно переписать в виде:

$$\sum_l a_{kl} \ddot{q}_l + \sum_{l,\,m} \left\{ {lm \atop k} \right\} \dot{q}_l \dot{q}_m = F_k^g, \tag{3.107}$$

где мы ввели обобщенные силы F^g:

$$F_k^g = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \tag{3.108}$$

Символы Кристоффеля играют важную роль в римановой геометрии. С их значением для формулировки классической механики можно познакомиться в книгах: *А. Д. Мак-Коннел*, Введение в тензорный анализ, Физматгиз, 1963; *И. Сокольников*, Тензорный анализ, «Наука», Главная редакция физ.-мат. литературы, 1971.

Из условий (3.103), определяющих состояние равновесия, и равенства (3.105) вытекает, что необходимыми условиями равновесия являются равенства

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, s \quad \text{при} \quad q_l = q_l^{(0)} \qquad (l = 1, \ldots, s). \tag{3.109}$$

Это означает, что в положении равновесия потенциальная функция имеет экстремум, или, точнее, принимает стационарное значение. Существует, однако, несколько возможностей, некоторые из которых для случая $s=2$ иллюстрируются на рис. 11. Рис. 11, *а* соответствует абсолютному минимуму, и состояние равновесия устойчивое. Рис. 11, *г* соответствует абсолютному максимуму, а

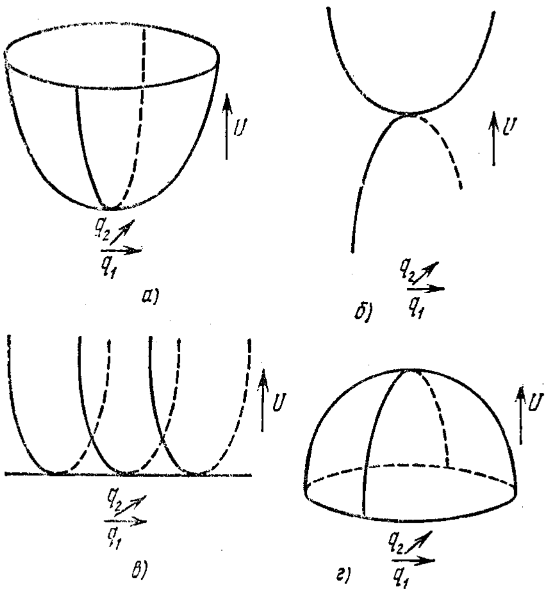

Рис. 11. Возможные формы поверхности уровня двумерной потенциальной энергии как функции обобщенных координат для различных состояний равновесия: *а*) устойчивое равновесие, *б*) неустойчивое равновесие, *в*) безразличное равновесие, *г*) неустойчивое равновесие.

рис. 11, *б* — седловой точке; в обоих последних случаях равновесие неустойчивое. Наконец, рис. 11, *в* соответствует безразличному равновесию.

Теперь мы займемся малыми отклонениями от положения равновесия. Для упрощения формул мы перенесем начало координат в q-пространстве так, чтобы для рассматриваемого состояния равновесия (не следует забывать, что может быть вовсе не один набор значений координат, удовлетворяющий условиям равновесия) все $q_k^{(0)}$ обратились в нуль. Это значит, что, когда мы будем рассматривать малые отклонения от положения равновесия, значения q_k будут малы, и мы можем воспользоваться разложением в ряд по этим малым величинам, ограничившись лишь несколькими первыми членами. Именно таким образом можно записать приближенные значения кинетической и потенциальной энергий:

$$U(q) = U(0) + \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \frac{1}{2}\sum_{k,\ l}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 q_k q_l + \ldots, \tag{3.110}$$

$$T(q,\ \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ l}\left[(a_{kl})_0 + \sum_m \left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_m}\right)_0 q_m + \ldots\right]\dot{q}_k \dot{q}_l. \tag{3.111}$$

Воспользовавшись (3.109), полагая $U(0)=0$ и опуская все члены в U третьего порядка и выше по q и все члены первого порядка и выше в T, мы получим следующее выражение для лагранжиана:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} b_{kl}q_k q_l, \tag{3.112}$$

где

$$c_{kl} = (a_{kl})_0 = c_{lk}, \quad b_{kl} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 = b_{lk}. \tag{3.113}$$

Уравнения Лагранжа (3.101) приводят к основным уравнениям теории малых колебаний:

$$\sum_l c_{kl}\ddot{q}_l + \sum_l b_{kl}q_l = 0, \qquad k = 1,\ \ldots,\ s. \tag{3.114}$$

Для решения этих уравнений мы будем искать собственные колебания системы, т. е. такие решения, при которых все q_k колеблются с одной и той же частотой. Это эквивалентно (как мы сейчас убедимся) отысканию другой совокупности координат, Q_m, таких, что в этих координатах уравнения движения приобретают простой вид:

$$\ddot{Q}_m + \lambda_m Q_m = 0, \qquad m = 1,\ \ldots,\ s. \tag{3.115}$$

Величины Q_m получаются из q_k линейным преобразованием, откуда следует, что если собственные колебания q_k удовлетворяют равенствам

$$q_k = A_k e^{i\omega t}, \tag{3.116}$$

где частота ω одинакова для всех q_k, то амплитуды A_k должны удовлетворять определенным уравнениям.

Чтобы убедиться во всем этом, мы исходим из (3.114). Умножая каждое из уравнений на постоянный множитель α_k и суммируя по k, получим:

$$\sum_{k,l} c_{kl}\alpha_k \ddot{q}_l + \sum_{k,l} b_{kl}\alpha_k q_l = 0.$$

Воспользовавшись симметрией коэффициентов c_{kl} и b_{kl}, заменим в последней сумме индекс k на l и наоборот. Тогда мы получим то же самое выражение, но в более удобном для дальнейшего виде:

$$\sum_{k,l} c_{kl}\alpha_l \ddot{q}_k + \sum_{k,l} b_{kl}\alpha_l q_k = 0. \tag{3.117}$$

Если это уравнение должно совпадать с (3.115), где Q_m является линейной комбинацией q_k,

$$Q_m = \sum_k \beta_k^{(m)} q_k, \tag{3.118}$$

то α_k и $\beta_k^{(m)}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_l b_{kl}\alpha_l = \lambda_m \beta_k^{(m)}, \qquad \sum_l c_{kl}\alpha_l = \beta_k^{(m)}, \tag{3.119}$$

или

$$\sum_l (b_{kl} - \lambda_m c_{kl})\,\alpha_l = 0, \qquad \sum_l c_{kl}\alpha_l = \beta_k^{(m)}. \tag{3.120}$$

Первая система уравнений, входящая в (3.120), будет иметь нетривиальные решения для α_l, т. е. решения, отличные от тривиального решения $\alpha_l = 0$, для $l = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$, лишь в том случае, если λ_m будет одним из корней уравнения, записанного в виде определителя:

$$|\, b_{kl} - \lambda_m c_{kl} \,| = 0,$$

или же:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda c_{11} & \ldots & b_{1s}-\lambda c_{1s} \\ b_{21}-\lambda c_{21} & \ldots & b_{2s}-\lambda c_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1}-\lambda c_{s1} & \ldots & b_{ss}-\lambda c_{ss} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.121}$$

Если λ_m — один из корней уравнения (3.121), то из (3.120) можно найти отношения величин α_k, а следовательно, и величин $\beta_k^{(m)}$, что и позволяет в конечном счете составить линейную комбинацию q_k, образующих Q_m, которые в свою очередь удовлетворяют (3.115).

Заметим прежде всего, что из теории линейных уравнений вытекает, что α_k должны быть пропорциональны минору k-го элемента любой строчки определителя (3.121). Отсюда следует, что отношения, которые мы находим для α_k, зависят от λ_m. Уравнение (3.121) имеет s корней, и таким образом найдется s наборов величин α_k ($\alpha_k^{(m)}$; $m = 1, 2, \ldots, s$) и, следовательно, s наборов $\beta_k^{(m)}$ и s величин Q_m. Описанная процедура проводится совершенно непосредственно лишь в том случае, когда корни λ_m невырожденные, т. е. если среди корней λ_m нет равных. Ситуация усложняется, когда есть кратные корни. Мы не станем разбирать здесь случай кратных корней, отсылая читателя к другим руководствам, а будем предполагать, что все корни различны. Если кратных корней нет, мы находим s различных значений λ_m, s различных наборов α_k и s величин Q_m. Мы отметим только, что даже в том случае, когда корни кратные, возможно найти такую совокупность различных Q_m, для которых $\alpha_k^{(m)}$ удовлетворяют к тому же (3.122). Вплоть до конца параграфа мы в целях простоты будем считать, что все корни (3.121) различны.

Мы начнем с доказательства того, что все λ_m действительны. Чтобы убедиться в этом, перепишем (3.119) так:

$$\sum_l b_{kl}\alpha_l^{(m)} = \lambda_m \sum_l c_{kl}\alpha_l^{(m)}, \tag{3.122}$$

где верхним индексом (m) отмечено, что для различных значений λ_m величины α_k различны. Умножая (3.122) на $\alpha_k^{(m)*}$ и суммируя по k, получим:

$$\sum_{k,\,l} b_{kl}\alpha_k^{(m)*}\alpha_l^{(m)} = \lambda_m \sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)*}\alpha_l^{(m)}. \tag{3.123}$$

Вычитая из полученного выражения (3.123) комплексно сопряженную ему величину, мы получим:

$$(\lambda_m - \lambda_m^*)\sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)*}\alpha_l^{(m)} = 0. \tag{3.124}$$

Поскольку $c_{kl} = c_{lk}$, а сами c_{kl} — действительные величины, сумма по k и l также действительная величина. Кроме того, эту сумму можно переписать в виде:

$$\sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)*}\alpha_l^{(m)} = \sum_{k,\,l} c_{kl}a_k^{(m)}a_l^{(m)} + \sum_{k,\,l} c_{kl}b_k^{(m)}b_l^{(m)}, \tag{3.125}$$

где через $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ обозначены действительная и мнимая части $\alpha_k^{(m)}$. Из физического смысла суммы

$$\frac{1}{2}\sum_{k,\,l} c_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l,$$

являющейся кинетической энергией, вытекает, что обе суммы в правой части (3.125) положительно определены. Но тогда из (3.121) следует

$$\lambda_m = \lambda_m^*, \tag{3.126}$$

другими словами, что все λ_m действительны. Ясно, что этот результат является следствием того, что кинетическая энергия является положительно определенной величиной.

Если все λ_m действительны, то из того, что $\alpha_k^{(m)}$ пропорциональны минорам определителя (3.121), следует возможность выбора всех $\alpha_k^{(m)}$ также действительными величинами. (Поскольку весь набор $\alpha_k^{(m)}$ для данного значения m можно умножить на общий множитель, который может быть и комплексным, мы не можем утверждать, что все $\alpha_k^{(m)}$ действительны; однако их *можно выбрать* действительными.) Мы будем предполагать, что сделан именно такой выбор $\alpha_k^{(m)}$ для заданного m. Мы выберем к тому же $\alpha_k^{(m)}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)}\alpha_l^{(m)} = 1. \tag{3.127}$$

Последнее уравнение называется условием *нормировки* $\alpha_k^{(m)}$. Если умножить (3.122) на $\alpha_k^{(n)}$ и просуммировать по k, мы получим:

$$\sum_{k,\,l} b_{kl}\alpha_l^{(m)}\alpha_k^{(n)} = \lambda_m \sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_l^{(m)}\alpha_k^{(n)}. \tag{3.128}$$

Вычитая из уравнения (3.128) это же самое уравнение, но в котором индексы m и n поменялись местами, мы придем к соотношению:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)}\alpha_l^{(n)} = 0; \tag{3.129}$$

из (3.129) следует, что при $m \neq n$

$$\sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)}\alpha_l^{(n)} = 0. \tag{3.130}$$

Таким образом, объединяя (3.127) и (3.130), мы приходим к следующим *условиям ортонормировки:*

$$\sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_k^{(m)}\alpha_l^{(n)} = \delta_{mn}, \tag{3.131}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера,

$$\delta_{mn} = 0,\ m \neq n; \qquad \delta_{mn} = 1,\ m = n. \tag{3.132}$$

Если умножить (3.131) на $\alpha_r^{(n)}$ и произвести суммирование по n, мы получим соотношение

$$\sum_k \left[\sum_{l,\,n} c_{kl}\alpha_l^{(n)}\alpha_r^{(n)}\right]\alpha_k^{(m)} = \alpha_r^{(m)}, \tag{3.133}$$

из которого непосредственно следует

$$\sum_{l,\,n} c_{kl}\alpha_l^{(n)}\,\alpha_r^{(n)} = \delta_{kr}. \tag{3.134}$$

Из (3.123) можно получить:

$$\lambda_m = \frac{{}^1/_2 \sum b_{kl}\alpha_k^{(m)}\alpha_l^{(m)}}{{}^1/_2 \sum c_{kl}\alpha_k^{(m)}\,\alpha_l^{(m)}}. \tag{3.135}$$

В (3.135) знаменатель дает значение кинетической энергии, когда $\dot{q}_k$ равны $\alpha_k^{(m)}$. Если $\alpha_k^{(m)}$ нормированы согласно (3.131), знаменатель превращается в 1/2. Числитель равен потенциальной энергии, если q_k равны $\alpha_k^{(m)}$. Если мы рассматриваем систему вблизи положения устойчивого равновесия (см. рис. 11, *а*), это выражение будет положительно определенным и все λ_m будут положительными. Если же мы находимся вблизи такого положения равновесия, которое изображено на рис. 11, *г*, числитель будет отрицательным и все λ_m окажутся отрицательными. В случае, соответствующем рис. 11, *б*, мы должны ожидать как положительные, так и отрицательные λ_m, тогда как в случае безразличного равновесия по крайней мере одна из λ_m обращается в нуль. В следующем параграфе мы столкнемся со всеми этими возможностями.

Вернемся теперь к Q_m, для которых мы имеем из (3.118) и (3.119):

$$Q_m = \sum_{k,\,l} c_{kl}\alpha_l^{(m)}q_k. \tag{3.136}$$

Умножая это равенство на $\alpha_r^{(m)}$, суммируя по m и используя (3.134), получим:

$$\sum_m \alpha_r^{(m)} Q_m = \sum_{k,\, l,\, m} c_{kl} \alpha_l^{(m)} \alpha_r^{(m)} q_k = q_r. \tag{3.137}$$

Совокупность равенств (3.136) и (3.137) и определяет преобразование от q_k к Q_m и наоборот.

Выразим кинетическую и потенциальную энергии системы через Q_m и $\dot{Q}_m$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\, l} c_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{k,\, l,\, m,\, n} c_{kl} \alpha_k^{(m)} \alpha_l^{(n)} \dot{Q}_m \dot{Q}_n = \frac{1}{2} \sum_m \dot{Q}_m^2, \tag{3.138}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,\, l} b_{kl} q_k q_l = \frac{1}{2} \sum_{k,\, l,\, m,\, n} b_{kl} \alpha_k^{(m)} \alpha_l^{(n)} Q_m Q_n =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m,\, n} \lambda_m \sum_{k,\, l} c_{kl} \alpha_k^{(m)} \alpha_l^{(n)} Q_m Q_n = \frac{1}{2} \sum_m \lambda_m Q_m^2, \tag{3.139}$$

где нами использованы соотношения (3.131) и (3.128).

Мы обнаружили, что преобразования (3.137) приводят как кинетическую энергию, так и потенциальную к сумме квадратов соответствующих переменных или, другими словами, приводят их к главным осям.

Уравнения движения переходят, конечно, в (3.115), решения которых можно записать в виде:

$$Q_m = Q_m^{(0)} e^{\pm i \omega_m t}, \tag{3.140}$$

где

$$\omega_m = \sqrt{\lambda_m}. \tag{3.141}$$

Мы обнаруживаем, что положительным значениям λ_m соответствуют действительные значения ω_m и, следовательно, настоящие колебания, тогда как отрицательные λ_m ведут к чисто мнимым ω_m и, следовательно, к монотонно возрастающей или убывающей амплитуде. Теперь мы уже в состоянии увидеть связь между видами потенциальной энергии в окрестности равновесного состояния (рис. 11) и устойчивостью равновесия.

Величины Q_m называются *нормальными координатами*, и каждой из них соответствует одна из *нормальных частот*. Если только одна из них отлична от нуля, мы получаем для q_k выражения типа (3.116), где общая частота ω просто равна ω_m, в то время как амплитуды A_k пропорциональны $\alpha_k^{(m)}$. В общем случае q_k представляют собой линейные комбинации различных Q_m, образуемые согласно (3.137).

§ 3.2. Двойной маятник

Теория, изложенная в предыдущем параграфе, будет проиллюстрирована на нескольких простых примерах. В качестве первого примера мы выбрали так называемый двойной маятник (рис. 12). В такой маятник входят две массы M и m; первая масса находится на фиксированном расстоянии a от точки подвеса P, а вторая — на фиксированном расстоянии b от первой массы. Мы можем ограничиться движением системы в одной плоскости, так что система будет обладать двумя степенями свободы. Более того, для упрощения вычислений мы будем считать $a = b$. В качестве обобщенных координат мы выберем углы φ и ψ (см. рис. 12). Потенциальная энергия системы U запишется в виде:

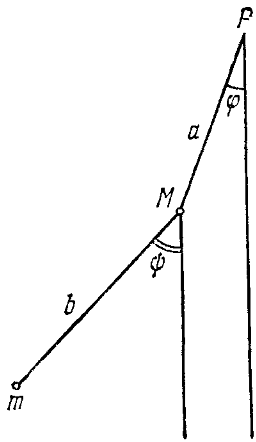

Рис. 12. Двойной маятник.

$$U = C - Mga\cos\varphi - \\ - mga(\cos\varphi + \cos\psi), \quad (3.201)$$

где C — константа, определяющая нуль потенциальной энергии, а g — ускорение силы тяжести.

Положения равновесия определятся из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = \mu ga\sin\varphi = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial\psi} = mga\sin\psi = 0. \quad (3.202)$$

Здесь через μ обозначена сумма масс обеих частиц:

$$\mu = m + M. \quad (3.203)$$

Уравнения (3.202) имеют четыре совокупности решений:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I})\ \varphi_{eq} = \psi_{eq} = 0; \qquad (\mathrm{II})\ \varphi_{eq} = 0,\ \psi_{eq} = \pi; \\ &(\mathrm{III})\ \varphi_{eq} = \pi,\ \psi_{eq} = 0;\ (\mathrm{IV})\ \varphi_{eq} = \psi_{eq} = \pi. \end{aligned} \quad (3.204)$$

Непосредственно видно, что решение (I) соответствует устойчивому равновесию, а потенциальная энергия в окрестности этого положения равновесия ведет себя так, как на рис. 11, *а*. Решения (II) и (III) соответствуют рис. 11, *б*, а решение (IV) — рис. 11, *г*. Если мы обозначим $q_1 = \varphi - \varphi_{eq}$, $q_2 = \psi - \psi_{eq}$, мы получим для потенциальной энергии системы в приближении малой амплитуды:

$$\begin{aligned} U - U_{eq} &= \frac{1}{2} ga\,[\mu q_1^2 + m q_2^2], && \text{(I)};\\ &= \frac{1}{2} ga\,[\mu q_1^2 - m q_2^2], && \text{(II)};\\ &= \frac{1}{2} ga\,[-\mu q_1^2 + m q_2^2], && \text{(III)};\\ &= \frac{1}{2} ga\,[-\mu q_1^2 - m q_2^2], && \text{(IV)}. \end{aligned} \qquad (3.205)$$

Нетрудно убедиться, что кинетическая энергия в том же приближении запишется следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \mu a^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot\psi^2 + m a^2 \dot\varphi \dot\psi \cos(\varphi - \psi),$$

или же

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} a^2\,[\mu \dot q_1^2 + 2m \dot q_1 \dot q_2 + m \dot q_2^2], && \text{(I), (IV)};\\ &= \frac{1}{2} a^2\,[\mu \dot q_1^2 - 2m \dot q_1 \dot q_2 + m \dot q_2^2], && \text{(II), (III)}. \end{aligned} \qquad (3.206)$$

Уравнение (3.121) для нашего случая запишется так:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \lambda\mu a^2 - \mu g a & \lambda m a^2 \\ \lambda m a^2 & \lambda m a^2 - m g a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(I)};\\ &\begin{vmatrix} \lambda\mu a^2 - \mu g a & -\lambda m a^2 \\ -\lambda m a^2 & \lambda m a^2 + m g a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(II)};\\ &\begin{vmatrix} \lambda\mu a^2 + \mu g a & -\lambda m a^2 \\ -\lambda m a^2 & \lambda m a^2 - m g a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(III)};\\ &\begin{vmatrix} \lambda\mu a^2 + \mu g a & \lambda m a^2 \\ \lambda m a^2 & \lambda m a^2 + m g a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(IV)}. \end{aligned} \qquad (3.207)$$

Из уравнения (3.207) вытекают алгебраические уравнения для λ:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && M a^2 \lambda^2 - 2\mu g a \lambda + \mu g^2 = 0;\\ &\text{(II), (III)} && M a^2 \lambda^2 - \mu g^2 = 0;\\ &\text{(IV)} && M a^2 \lambda^2 + 2\mu g a \lambda + \mu g^2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.208)$$

Корни этих уравнений — собственные значения λ — таким образом равны:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && \lambda_{1,2} = (\mu g/Ma)\left[1 \pm \sqrt{m/\mu}\right];\\
&(\mathrm{II}),\ (\mathrm{III}) && \lambda_{1,2} = \pm (g/a)\sqrt{\mu/M};\\
&(\mathrm{IV}) && \lambda_{1,2} = -(\mu g/Ma)\left[1 \pm \sqrt{m/\mu}\right],
\end{aligned}
\tag{3.209}
$$

причем мы использовали (3.203).

Мы нашли, что в случае (I) оба значения λ положительны (поскольку $m < \mu$); в случаях (II) и (III) одно значение λ положительно, а другое отрицательно; в случае же (IV) оба значения λ отрицательны. Этот результат находится в полном соответствии с рассуждениями в связи с (3.135). Очень поучительно взглянуть на нормальные координаты в случаях (I), (II) и (III). Мы найдем их из (3.136) и (3.131). Второе из этих двух уравнений определяет нормировку $\alpha_k^{(m)}$; если не принимать в расчет нормировку, мы обнаружим, что Q_m не обязательно приводят одновременно кинетическую и потенциальную энергию к виду (3.138) и (3.139). Очень просто найти отношения $\alpha_k^{(m)}$ и довольно утомительно добиваться их нормировки. Выпишем окончательный результат:

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{aligned}
Q_1 &= a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\mu}}}\,\left[\sqrt{\mu}\cdot q_1 - \sqrt{m}\cdot q_2\right],\\
Q_2 &= a\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\mu}}}\,\left[\sqrt{\mu}\cdot q_1 + \sqrt{m}\cdot q_2\right];
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{aligned}
Q_1 &= a\sqrt{\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{M\mu}}\,\left[\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{\mu}{m}}\right)q_1 + \sqrt{\frac{m}{\mu}}\,q_2\right],\\
Q_2 &= a\sqrt{\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\sqrt{M\mu}}\,\left[\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{\mu}{m}}\right)q_1 - \sqrt{\frac{m}{\mu}}\,q_2\right];
\end{aligned}
\tag{3.210}
$$

$$
(\mathrm{III})\quad
\begin{aligned}
Q_1 &= a\sqrt{\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\sqrt{M\mu}}\,\left[\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{\mu}{m}}\right)q_1 - \sqrt{\frac{m}{\mu}}\,q_2\right],\\
Q_2 &= a\sqrt{\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{M\mu}}\,\left[\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{\mu}{m}}\right)q_1 + \sqrt{\frac{m}{\mu}}\,q_2\right].
\end{aligned}
$$

Чтобы понять, какой вид движения соответствует нормальным колебаниям (модам), начнем с первого случая (I). Если реализуется только первая мода колебаний Q_1, то Q_2 должно равняться нулю, откуда следует, что q_1 и q_2 должны быть противоположного знака и амплитуда q_2

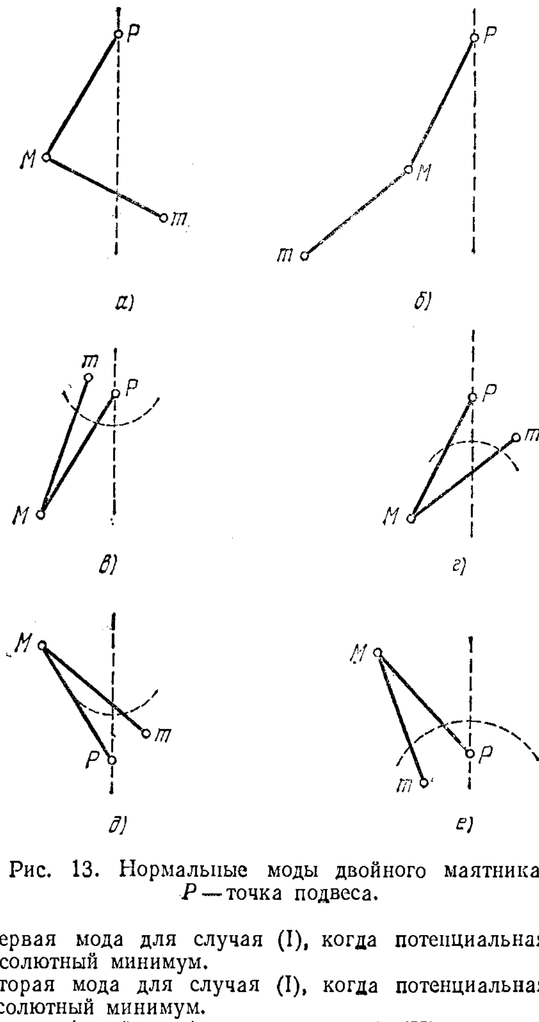

Рис. 13. Нормальные моды двойного маятника. P — точка подвеса.

а) Первая мода для случая (I), когда потенциальная энергия имеет абсолютный минимум.

б) Вторая мода для случая (I), когда потенциальная энергия имеет абсолютный минимум.

в) Первая (устойчивая) мода для случая (II), когда потенциальная энергия имеет седлообразную точку.

г) Вторая (нестабильная) мода для случая (II), когда потенциальная энергия имеет седлообразную точку.

д) Первая (устойчивая) мода для случая (III), когда потенциальная энергия имеет седлообразную точку.

е) Вторая (неустойчивая) мода для случая (III), когда потенциальная энергия имеет седлообразную точку.

На рис. *в*, *г*, *д*, *е* кривая, описываемая центром масс двух масс m и M, изображена пунктирной линией.

больше амплитуды q_1 в $\sqrt{\mu/m}$ раз. Это означает, что рассматриваемая мода выглядит примерно так, как это изображено на рис. 13, *а*. Аналогичным образом мы получим для второй моды картинку, приведенную на рис. 13, *б*. В случаях (II) и (III) мы сталкиваемся с одной устойчивой модой (соответствующей положительному значению λ_1) и одной неустойчивой модой (для отрицательного значения λ_2). Эти моды изображены на рис. 13, *в—е*.

Мы хотим обратить внимание читателей на то обстоятельство, что устойчивая мода в случае (II), например, включает в себя движение обеих масс M и m. С первого взгляда может показаться, что масса M будет оставаться в покое. Однако если масса M имеет конечное значение, то при движении массы m на нее будет оказываться некоторое действие; поэтому устойчивая мода реализуется только в том случае, когда обе массы движутся (в противоположном направлении) таким образом, что потенциальная энергия фактически возрастает. Любопытно отметить, что если $M \to \infty$, стабильная мода действительно соответствует движению только одной массы m.

В предельном случае $M \to 0$ мы найдем для случая (I), что для первой моды $\lambda_1 \to \infty$: масса m расположена на вертикали под точкой подвеса P (в этом случае $q_1 = -q_2$), тогда как масса M колеблется с бесконечно большой частотой. Для второй моды мы находим, что $q_1 = q_2$ и $\lambda_2 = g/2a$: система колеблется так, как если бы у нас был обычный маятник длиной $2a$!

§ 3.3. Молекулярные колебания

Теория малых колебаний играет важную роль при изучении колебаний молекул. В этом параграфе мы довольно подробно разберем колебания двухатомных молекул, таких, например, как HCl, нелинейных трехатомных молекул с симметричной равновесной конфигурацией, таких как H_2O, и, наконец, линейных трехатомных молекул типа CO_2. В большинстве рассуждений предполагается, что взаимодействия между атомами, входящими в молекулу, аддитивны и что они могут быть описаны межатомным потенциалом, общий вид которого приведен на рис. 14.

Начнем с двухатомной молекулы, которую мы будем представлять себе в виде гантели, т. е. системы, образованной двумя массами m_1 и m_2, взаимодействующими между собой по центральному закону с потенциалом $U(r)$. Лагранжиан такой системы запишется в виде:

$$L=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)+U(r_{12}), \quad (3.301)$$

где $r_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ и где x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 — декартовы координаты первой и второй частиц. За обобщенные координаты мы примем координаты центра масс X, Y и Z и сферические координаты r, θ и φ для относительных координат:

$$MX=m_1x_1+m_2x_2,$$
$$MY=m_1y_1+m_2y_2,$$
$$MZ=m_1z_1+m_2z_2,$$
$$M=m_1+m_2; \quad (3.302)$$
$$r\sin\theta\cos\varphi=x_1-x_2,$$
$$r\sin\theta\sin\varphi=y_1-y_2,$$
$$r\cos\theta=z_1-z_2.$$

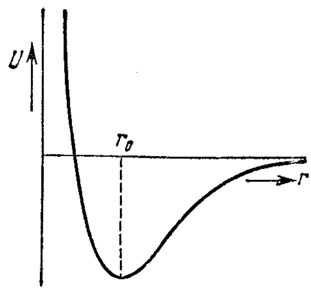

Рис. 14. Межатомный потенциал U в зависимости от расстояния между атомами r; r_0 — положение равновесия.

Перепишем лагранжиан в обобщенных координатах:

$$L=\frac{1}{2}M(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)+\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)-U(r), \quad (3.303)$$

где через μ обозначена приведенная масса,

$$\mu=m_1m_2/M. \quad (3.304)$$

Положение равновесия находится из условия:

$$\frac{\partial U}{\partial r}=0, \quad (3.305)$$

откуда $r=r_0$ (см. рис. 14). Остальные пять координат можно выбрать произвольно. Допустим, что мы выбрали X_0, Y_0, Z_0, θ_0 и φ_0. Определитель — уравнение для определения λ_m — теперь имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\mu-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\mu r_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\mu r_0^2\sin^2\theta_0 \end{vmatrix}=0, \quad (3.306)$$

где

$$b=\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0}. \tag{3.307}$$

Стандартными методами (которые лишь слегка усложняются тем, что корень $\lambda=0$ — пятикратный) мы найдем следующие значения λ_m и соответствующие им Q_m [или, может быть, точнее: мы найдем, что мы можем выбрать Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 и Q_6 в том виде, который приведен в (3.308)]:

$$\begin{array}{llll}\lambda_1=0, & Q_1=X\sqrt{M}; & \lambda_4=b/\mu, & Q_4=r\sqrt{\mu};\\ \lambda_2=0, & Q_2=Y\sqrt{M}; & \lambda_5=0, & Q_5=r_0\sqrt{\mu}\,\theta;\\ \lambda_3=0, & Q_3=Z\sqrt{M}; & \lambda_6=0, & Q_6=r_0\sqrt{\mu}\sin\theta_0\,\varphi.\end{array} \tag{3.308}$$

Из шести нормальных координат пять — циклические: Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 и Q_6. Из них Q_1, Q_2 и Q_3 соответствуют трансляциям, тогда как Q_5 и Q_6 соответствуют поворотам. Единственная нециклическая координата Q_4 соответствует колебаниям вдоль оси молекулы.

Представляет интерес свести рассматриваемую задачу сначала к двумерной, а затем и к одномерной. Этого можно добиться, игнорируя сначала Z и φ, а затем игнорируя Y и θ, используя в обоих случаях подходящим образом выбранную функцию Рауса, по методу, изложенному в § 2.4. В исходной задаче было шесть степеней свободы, пять из которых (три трансляционные и две вращательные) были циклическими. В двумерном случае мы опускаем в лагранжиане (3.303) члены $\frac{1}{2}M\dot{Z}^2$ и $\frac{1}{2}\mu r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$. Теперь уже остаются четыре степени свободы, соответствующие Q_1, Q_2, Q_4 и Q_5, три из которых (две трансляционные Q_1 и Q_2 и одна вращательная Q_5) являются циклическими. Одномерный случай, который получается отбрасыванием членов $\frac{1}{2}M\dot{Y}^2$ и $\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2$, имеет две степени свободы Q_1 и Q_2, из которых Q_1 — трансляционная (циклическая) степень. В этом случае очень несложно избавиться от циклических степеней свободы, но это далеко не всегда так. В общем случае исключение движения центра масс, например, системы многих частиц приводит к уравнениям куда более сложным, чем исходные.

Сейчас мы займемся трехатомными молекулами, но ограничимся лишь типом A_2B. Прежде всего мы рассмотрим молекулу A_2B, равновесная конфигурация которой нелинейна (см. рис. 15, *а*). Примером такой молекулы служит молекула воды. Обозначим через $\boldsymbol{x}$ радиус-вектор атома B (массу его обозначаем через m_B) и через $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — радиус-векторы атомов A (с массами m_A). Координатные

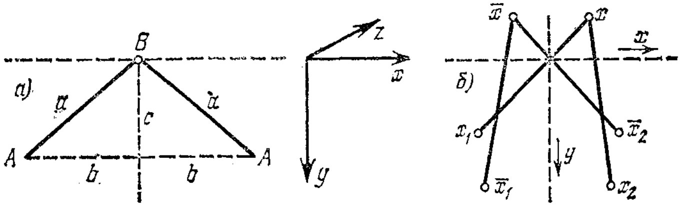

Рис. 15. *а*) Равновесная конфигурация молекулы A_2B; *б*) две неравновесные конфигурации молекулы A_2B с одинаковой потенциальной энергией.

оси можно выбрать таким образом, что в положении равновесия

$$\begin{gathered} x = y = z = 0; \\ x_1 = b, \quad y_1 = c, \; z_1 = 0; \quad x_2 = -b, \; y_2 = c, \; z_2 = 0. \end{gathered} \tag{3.309}$$

Кинетическая энергия молекулы представится в виде:

$$T = \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{3.310}$$

а потенциальная энергия ($a^2 = b^2 + c^2$, см. рис. 15, *а*)

$$U = \frac{1}{2} \alpha [(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}| - a)^2 + (|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}| - a)^2] + \\ + \frac{1}{2} \beta (|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| - 2b)^2. \tag{3.311}$$

Можно воспользоваться в качестве координат величинами: x, y, z, $x_1 - b$, $y_1 - c$, z_1, $x_2 + b$, $y_2 - c$ и z_2. Если обозначить эти координаты штрихованными буквами x', y', z', x_1', y_1', z_1', x_2', y_2' и z_2', то в предельном случае малых колебаний придем к следующему выражению для потенциальной энергии:

$$U = \frac{\alpha}{2a^2} [b^2 (x' - x_1')^2 + c^2 (y' - y_1')^2 + \\ + 2bc (y' - y_1')(x' - x_1') + b^2 (x' - x_2')^2 + c^2 (y' - y_2')^2 - \\ - 2bc (x' - x_2')(y' - y_2')] + \frac{1}{2} \beta (x_1' - x_2')^2. \tag{3.312}$$

Заметим, что координаты z', z'_1 и z'_2 — циклические. Этого следовало ожидать, поскольку трехмерные задачи с девятью степенями свободы обладают шестью циклическими степенями свободы (три вращательные и три трансляционные), тогда как двумерные задачи с шестью степенями свободы имеют три циклические степени свободы (одну вращательную и две трансляционные), причем в обоих случаях у нас остаются три нециклические степени свободы.

Удобно ввести другой набор координат по формулам:

$$\begin{aligned} &q_1 = x', && q_2 = y', && q_3 = z', \\ &q_4 = \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2), && q_5 = \frac{1}{2}(x'_1 - x'_2), && q_6 = \frac{1}{2}(y'_1 - y'_2), \\ &q_7 = \frac{1}{2}(y'_1 + y'_2), && q_8 = \frac{1}{2}(z'_1 - z'_2), && q_9 = \frac{1}{2}(z'_1 + z'_2). \end{aligned} \tag{3.313}$$

Для выяснения смысла введения этих координат рассмотрим две конфигурации молекулы, изображенные на рис. 15, *б*, где

$$\begin{aligned} &\bar{x} = -x, \quad \bar{x}_1 = -x_2, \quad \bar{x}_2 = -x_1; \\ &\bar{y} = y, \quad \bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = y_1; \\ &\bar{z} = z, \quad \bar{z}_1 = z_2, \quad \bar{z}_2 = z_1 \\ &(\text{или } \bar{z} = -z, \quad \bar{z}_1 = -z_2, \quad \bar{z}_2 = -z_1). \end{aligned} \tag{3.314}$$

Из соображений симметрии непосредственно вытекает, что потенциальная энергия в обоих случаях одна и та же. Из этого следует, что потенциальная энергия должна быть инвариантной при следующих преобразованиях:

$$\begin{aligned} &q_1 \to -q_1, \quad q_2 \to q_2, \quad q_3 \to q_3 \quad (\text{или } q_3 \to -q_3), \\ &q_4 \to -q_4, \quad q_5 \to q_5, \quad q_8 \to q_8 \quad (\text{или } q_8 \to -q_8), \\ &q_6 \to -q_6, \quad q_7 \to q_7, \quad q_9 \to q_9 \quad (\text{или } q_9 \to -q_9). \end{aligned} \tag{3.315}$$

Это означает, что в потенциальную энергию не должны входить члены, содержащие произведения следующих трех групп переменных: (q_1, q_4, q_6), (q_2, q_5, q_7) и (q_3, q_8, q_9). Но это в свою очередь означает, что секулярное уравнение может быть представлено в виде произведения, что позволяет нам найти как собственные значения, так и нормальные моды колебаний. Потенциальная энергия, записанная через q_i, имеет вид:

$$\begin{aligned} U = (\alpha/a^2)\,[b^2(q_1^2 + q_4^2 + q_6^2 - 2q_1q_4) + c^2(q_2^2 + q_5^2 + q_7^2 - 2q_2q_7) - \\ - 2bc\,(q_1q_6 + q_2q_5 - q_4q_6 - q_5q_7)] + 2\beta q_3^2, \end{aligned} \tag{3.316}$$

а секулярное уравнение может быть факторизовано на три более простых уравнения:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && \begin{vmatrix} \lambda\nu-1 & 1 & \gamma \\ 1 & \lambda\mu-1 & -\gamma \\ \gamma & -\gamma & \lambda\mu-\gamma^2 \end{vmatrix} = 0, \\
&(\mathrm{II}) && \begin{vmatrix} \lambda\nu-\gamma^2 & \gamma & \gamma^2 \\ \gamma & \lambda\mu-1-\beta' & -\gamma \\ \gamma^2 & -\gamma & \lambda\mu-\gamma^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.317) \\
&(\mathrm{III}) && \begin{vmatrix} \lambda m_B & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda m_A & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda m_A \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mu &= m_A a^2/\alpha b^2, & \gamma &= c/b, \\
\nu &= m_B\mu/2m_A, & \beta' &= \beta a^2/\alpha b^2.
\end{aligned} \qquad (3.318)
$$

В нормальных колебаниях, соответствующих уравнению (3.317, I), только q_1, q_4 и q_6 отличны от нуля; для уравнения (3.317, II) отличны от нуля q_2, q_5 и q_7; в случае же (3.317, III) отличны от нуля q_3, q_8 и q_9.

Оказывается, что все λ в группе (III) равны нулю, что соответствует тому факту, что все три z-координаты — циклические. Нормальные координаты могут быть выбраны таким образом, чтобы соответствовать трансляции в z-направлении и вращениям вокруг осей x и y.

Из совокупности λ группы (I) два значения равны нулю; они соответствуют трансляциям вдоль оси x и вращению вокруг оси z. Поучительно убедиться в том, что на самом деле для этих двух движений q_2 и q_5 обращаются в нуль (ср. рис. 16, *а* и *б*). Третье значение λ, отличное от нуля, соответствует нормальному колебанию вида, изображенного на рис. 16, *в*.

Из совокупности λ группы (II) одно значение, соответствующее трансляции в направлении оси y, обращается в нуль (рис. 16, *г*); два других отличны от нуля (рис. 16, *д* и *е*). Мы предоставляем читателю определение нормальных координат для различных случаев; это не очень веселое, но достаточно простое упражнение.

Теперь мы займемся линейной молекулой типа A_2B, примером которой может служить CO_2. На первый взгляд, можно ожидать, что появятся четыре собственных значения, отличных от нуля, поскольку теперь остались только две циклические координаты, соответствующие вращению. Это соответствует, конечно, пяти степеням свободы жесткой линейной структуры, такой как молекула типа гантели. Оказалось, что именно так можно рассматривать двухатомную молекулу, о которой шла речь в начале этого параграфа. Более того, можно было ожидать также,

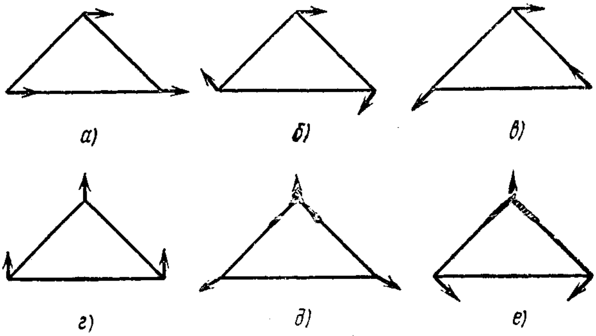

Рис. 16. Нормальные моды нелинейной трехатомной молекулы в плоскости; *а*, *б*, *в* соответствуют корням (3.317, I); *г*, *д*, *е* соответствуют корням (3.317, II).

что о поведении линейной молекулы можно судить по предыдущему случаю, считая в нем c равным нулю. Оказалось, однако, что, вместо четырех отличных от нуля собственных значений, мы получаем только два таких значения. На рис. 17 изображены шесть нормальных мод

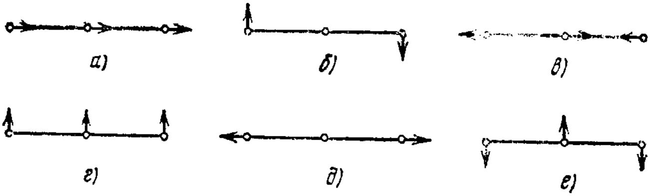

Рис. 17. Нормальные моды линейной трехатомной молекулы в плоскости.

линейной молекулы типа A_2B в плоскости, соответствующей шести модам рис. 16. Собственные значения, соответствующие рис. 17, *а*, *б*, *г*, *е*, стали теперь равными нулю, тогда как собственные значения, соответствующие движениям, выводящим частицы из плоскости, остались равными нулю. Причины такого поведения собственных значений состоят в следующем. Мода, изображенная на рис. 17, *е*, соответствует смещениям такого характера, что изменение расстояния между любой парой атомов, образующих молекулу, будет квадратичной функцией смещений атомов, и таким образом первый неисчезающий член в потенциальной энергии (3.311) будет квадратичным; при малых колебаниях этим членом можно пренебречь.

Мы знаем, что те моды движения, которые нарушают линейность молекулы (примером может служить мода, изображенная на рис. 17, *е*), обладают отличной от нуля частотой. Поэтому нам следует заняться нецентральными силами. Простейшим случаем будет потенциал вида

$$U=\frac{1}{2}\alpha\left[(x_1'-x')^2+(x_2'-x')^2\right]+\frac{1}{2}\beta\left[(y_1'-y')^2+(z_1'-z')^2+\right.$$
$$\left.+(y_2'-y')^2+(z_2'-z')^2\right]+\frac{1}{2}\gamma(x_1'-x_2')^2, \qquad (3.319)$$

где α, β и γ — постоянные, а x', y', z', ... — те же самые координаты, которые мы использовали в (3.312). Секулярное уравнение в случае линейной молекулы также может быть разложено на множители (факторизовано); каждый из множителей соответствует одной из трех координатных осей. Снова вводя q_1 согласно (3.313) и группируя теперь уже q_1, q_4, q_5, а также q_2, q_6, q_7 и, наконец, q_3, q_8, q_9, мы найдем три группы собственных значений. Первые три собственных значения будут корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda m_B-2\alpha & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & 2\lambda m_A-2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda m_A-2\alpha-4\gamma \end{vmatrix}=0, \qquad (3.320)$$

а двум другим группам соответствует один и тот же триплет собственных значений, благодаря тому, что теперь задача симметрична по y и z. Эти три двукратно вырожденных собственных значения будут корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda m_B-2\beta & 0 & -2\beta \\ 0 & 2\lambda m_A-2\beta & 0 \\ -2\beta & 0 & 2\lambda m_A-2\beta \end{vmatrix}=0. \qquad (3.321)$$

Здесь мы нашли уже шесть собственных значений, отличных от нуля *), а именно те, которые соответствуют

*) Поскольку использованные сейчас группы q_i отличаются от тех групп, которыми мы пользовались в (3.317), моды, соответствующие рис. 17, *а*, *в*, *д*, соответствуют (3.320), а соответствующие рис. 17, *б*, *г*, *е* — соотношению (3.321).

рис. 17, *в* и 17, *д* (решениям (3.320)), и те, которые соответствуют рис. 17, *б* и 17, *е* (решениям (3.321); эти собственные значения двукратно вырождены). То обстоятельство, что у нас теперь оказалось два отличных от нуля собственных значения, в значительной мере связано с тем, что потенциал (3.319) уже не инвариантен относительно вращений; такой потенциал не очень приемлем с физической точки зрения.

Можно подправить дело, воспользовавшись несколько иным потенциалом:

$$U = \frac{1}{2}\alpha\left[(x_1' - x')^2 + (x_2' - x')^2\right] + \frac{1}{2}\beta\left[(y_1' - y')^2 + (z_1' - z')^2 + (y_2' - y')^2 + (z_2' - z')^2 - \frac{1}{2}(y_1' - y_2')^2 - \frac{1}{2}(z_1' - z_2')^2\right] + \frac{1}{2}\gamma(x_1' - x_2')^2. \tag{3.322}$$

В этом случае только двукратно вырожденное собственное значение, соответствующее рис. 17, *б*, обращается в нуль, и мы действительно остаемся с четырьмя собственными значениями, отличными от нуля. Секулярное уравнение оказывается достаточно простым, и нормальные координаты могут быть в конце концов найдены. Но все это мы оставляем в качестве упражнения читателю.

§ 3.4. Нормальные колебания одномерного кристалла

В качестве последнего примера малых колебаний около положения равновесия мы рассмотрим случай одномерного кристалла. Одномерный кристалл представляет собой систему точечных масс, которые по предположению находятся в равновесии, если все расстояния между ними равны. Мы начнем с того случая, когда массы всех частиц, образующих кристалл, одинаковы и равны M, а затем перейдем к случаю, когда кристалл образован последовательно чередующимися частицами с разными массами M и m. Мы не можем здесь останавливаться на всех аспектах этой задачи, имеющей колоссальное значение для установления термодинамических свойств твердого тела, и вынуждены отослать читателя к специальной литературе.

Чтобы избежать рассмотрения явлений на границе кристалла, мы будем предполагать, что «кристалл» имеет форму окружности, так что N-я точечная масса граничит с первой. Это предположение делает нашу задачу эквивалентной задаче о бесконечном кристалле, на который наложены периодические граничные условия:

$$q_{j+N}=q_j; \tag{3.401}$$

через q_j здесь обозначено смещение j-й точечной массы от положения равновесия.

Если все массы одинаковы, кинетическая энергия системы запишется в виде:

$$T=\frac{1}{2}M\sum_j \dot{q}_j^2, \tag{3.402}$$

и если предположить к тому же, что силы, действующие между отдельными массами, гармонические и действуют только между ближайшими соседями, то потенциальная энергия запишется равенством

$$U=\frac{1}{2}\alpha\sum_j (q_j-q_{j+1})^2. \tag{3.403}$$

Мы видим, что потенциальная энергия квадратична по q_j, так что можно применить теорию малых колебаний, развитую в первом параграфе этой главы. Можно воспользоваться известными методами из теории определителей для определения собственных значений и, следовательно, нормальных координат. Однако более удобно воспользоваться тем обстоятельством, что следует ожидать нормальные колебания с длинами волн, начиная от периода «решетки» до удвоенной длины кристалла. Исходя из этих соображений, мы введем совокупность координат, определенных следующим образом:

$$Q_k=\sqrt{\frac{M}{N}}\sum_j e^{2\pi ikj/N}q_j. \tag{3.404}$$

Если воспользоваться равенством

$$\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(j-m)k/N}=N\delta_{jm}, \tag{3.405}$$

мы можем разрешить (3.404) относительно q_j и найдем:

$$q_j=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_k e^{-2\pi ikj/N}Q_k. \tag{3.406}$$

Подставляя эти выражения для q_j в формулы, определяющие T и U, и используя (3.405), получим:

$$T=\frac{1}{2}\sum_k \dot{Q}_k Q_{-k}, \qquad (3.407)$$

$$U=\frac{1}{2}\frac{4\alpha}{M}\sum_k Q_k Q_{-k}\sin^2\frac{\pi k}{N}. \qquad (3.408)$$

Заметим, что, хотя мы не привели полностью T и U к виду (3.138) и (3.139), уравнения движения имеют уже вид (3.115); уравнения движения для Q_k следуют из уравнений Лагранжа для Q_{-k} и наоборот. Собственные частоты определяются равенствами

$$\omega_k=2\left(\frac{\alpha}{M}\right)^{1/2}\sin\frac{\pi|k|}{N}. \qquad (3.409)$$

Обратим внимание на то, что Q_k — комплексные величины и что, таким образом, каждой Q_k соответствуют две степени свободы. Совокупность Q_k отнюдь не переопределяет систему, поскольку соблюдаются равенства

$$Q_k=Q^*_{-k}. \qquad (3.410)$$

Из (3.404) видно также, что Q_k удовлетворяют уравнению, тождественному уравнению (3.401) для q_j, а именно:

$$Q_k=Q_{k+N}, \qquad (3.411)$$

и мы можем, следовательно, ограничить k интервалом (мы будем считать N четным числом)

$$0\leqslant k\leqslant {}^1/_2 N \qquad (3.412)$$

и получим ${}^1/_2N+1$ независимых Q_k, соответствующих N независимым действительным координатам [обратите внимание, что из (3.410) и (3.411) вытекает, что Q_0 и $Q_{N/2}$ действительны], за которые мы можем принять действительные и мнимые части Q_k:

$$Q_k=R_k+iS_k. \qquad (3.413)$$

Если выразить кинетическую и потенциальную энергию через R_k и S_k, мы получим:

$$T=\frac{1}{2}\sum_k(\dot{R}_k^2+\dot{S}_k^2), \quad U=\frac{1}{2}\sum_k\omega_k^2(R_k^2+S_k^2); \qquad (3.414)$$

теперь мы уже получили суммы только квадратов величин R_k, S_k, $\dot{R}_k$ и $\dot{S}_k$.

Выясним теперь физический смысл нормальных колебаний. Для этого в выражении (3.406) мы положим все Q_k, за исключением одной, равными нулю. Отличную от нуля Q_k положим равной $A\exp(i\omega_k t)$. Тогда мы получим:

$$q_j(t) = (MN)^{-1/2} A \exp 2\pi i\,[\nu_k t - (kj/N)], \quad 2\pi\nu_k = \omega_k. \tag{3.415}$$

Из (3.415) видно, что нормальные колебания представляют собой бегущие волны, волновыми числами которых будут k/aN, где через a обозначен период решетки.

Из (3.409), прежде всего, вытекает, что одна собственная частота, ω_0, обращается в нуль. Эта «частота» соответствует трансляции всего «кристалла» как целого. Во-вторых, мы видим, что для малых k можно приближенно написать:

$$\omega_k = 2\pi k\alpha^{1/2}/NM^{1/2}; \tag{3.416}$$

это выражение совпадает со спектром звуковых волн (см. гл. 8). Наконец, наибольшая собственная частота $\omega_{N/2}$ соответствует длине волны, равной $2a$, т. е. тому случаю, когда две соседние точечные массы всегда движутся в противоположных направлениях. Если бы мы использовали R_k и S_k вместо Q_k для описания нормальных мод, мы получили бы вместо бегущих волн стоячие волны.

Случай, когда «кристалл» образован линейной цепочкой из двух сортов чередующихся масс, оказывается более сложным *). Кинетическая и потенциальная энергии теперь уже запишутся так:

$$T = \frac{1}{2} M \sum_j \dot{q}_{2j}^2 + \frac{1}{2} m \sum_j \dot{q}_{2j+1}^2, \tag{3.417}$$

$$U = \frac{1}{2}\alpha \sum_j [(q_{2j} - q_{2j+1})^2 + (q_{2j} - q_{2j-1})^2]. \tag{3.418}$$

Вместо одной группы координат (3.404) или (3.406) мы введем две группы (в последующем повсюду будут использоваться комплексные переменные, и R_k теперь уже будут комплексными переменными, в отличие от (3.413), где они были действительными):

$$q_{2j} = \sqrt{\frac{2}{NM}} \sum_k e^{-4\pi i jk/N} Q_k \tag{3.419}$$

*) Сравните с методом, использованным в книге Ч. Киттеля «Введение в физику твердого тела», М., Физматгиз, 1963, стр. 132.

и

$$q_{2j+1}=\sqrt{\frac{2}{Nm}}\sum_k e^{-2\pi i(2j+1)k/N}R_k. \qquad (3.420)$$

Кинетическая и потенциальная энергии перепишутся в этих координатах так:

$$T=\frac{1}{2}\sum_k(\dot{Q}_k\dot{Q}_{-k}+\dot{R}_k\dot{R}_{-k}), \qquad (3.421)$$

$$U=\frac{1}{2}\alpha\sum_k\left[\frac{2Q_kQ_{-k}}{M}+\frac{2R_kR_{-k}}{m}-\frac{4(R_kQ_{-k}+R_{-k}Q_k)}{(mM)^{1/2}}\cos\frac{2\pi k}{N}\right]. \qquad (3.422)$$

Мы снова обнаруживаем, что моды с различными значениями k не связаны между собой, но величины Q_k и R_k с одним и тем же k — связаны. Уравнение для собственных значений при заданном k имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{2\alpha}{M}-\omega_k^2 & -\frac{2\alpha}{\sqrt{mM}}\cos\frac{2\pi k}{N} \\ -\frac{2\alpha}{\sqrt{mM}}\cos\frac{2\pi k}{N} & \frac{2\alpha}{m}-\omega_k^2 \end{vmatrix}=0; \qquad (3.423)$$

из него мы получаем значения ω_k^2:

$$\omega_k^2=\alpha\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\pm\left\{\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)^2-\frac{4}{mM}\sin^2\frac{2\pi k}{N}\right\}^{1/2}\right]. \qquad (3.424)$$

Для заданного значения ω_k отношение Q_k/R_k получается обычным путем, и мы приходим к результату:

$$\frac{Q_k}{R_k}=\sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{\alpha\cos(2\pi k/N)}{\alpha-{}^1/_2M\omega_k^2}=\sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{\alpha-{}^1/_2m\omega_k^2}{\alpha\cos(2\pi k/N)}. \qquad (3.425)$$

Из (3.424) и (3.425) можно выяснить физическую природу нормальных координат. Если в (3.424) выбрать нижний знак, то ω_k^2 всегда меньше, чем $2\alpha/m$, и меньше, чем $2\alpha/M$, так что Q_k и R_k имеют одинаковый знак: две соседние массы движутся в фазе [см. (3.419) и (3.420)]. При $k\to 0$ собственные частоты ω_k пропорциональны k, и мы имеем дело со звуковыми волнами. Та ветвь спектра собственных частот, которая соответствует нижнему знаку, называется поэтому *акустической ветвью.*

Если взять верхний знак, т. е. верхнюю ветвь, ω_k^2 всегда больше, чем $2\alpha/m$ и $2\alpha/M$, и две соседние массы будут двигаться в противоположных направлениях. Если две эти массы обладают различными электрическими зарядами, как это имеет место, например, в кристаллах галогенидов щелочных металлов, нормальные колебания связаны с колебаниями дипольного электрического момента. Поэтому ветвь колебаний, соответствующая верхнему знаку в (3.424), называется *оптической ветвью*. В галогенидах щелочных металлов этой ветви соответствуют лежащие в инфракрасной области частоты, называемые частотами остаточных лучей (Reststrahlen).

Другие свойства нормальных колебаний в кристаллах остаются читателю для самостоятельного рассмотрения.

§ 3.5. Колебания около равновесного движения

Существует немало задач, когда нас интересует устойчивость не только положения равновесия, но также и устойчивость равновесного (устойчивого) движения. Эти проблемы вышли на первый план при исследовании орбит частиц в ускорителях.

Здесь мы займемся простым двумерным случаем *) частицы, движущейся по круговой орбите под действием центрального потенциала $U(r)$, задаваемого формулой

$$U = -Ar^{-\alpha}, \tag{3.501}$$

где A и α — постоянные, а r — расстояние от центра. Нас интересует вопрос, насколько устойчиво такое движение по окружности радиуса r_0. Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Ar^{-\alpha}, \tag{3.502}$$

где через θ обозначен полярный угол, а уравнения Лагранжа имеют вид:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \alpha A r^{-\alpha-1} = 0, \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{3.503}$$

Если мы имеем дело с движением по кругу, то $\dot{r} = 0$; поэтому из второго уравнения следует, что $\dot{\theta} = \text{const}$. Положим $\dot{\theta} = \omega_0$. Тогда из первого уравнения мы получим:

$$mr_0\omega_0^2 = \alpha A r_0^{-\alpha-1}. \tag{3.504}$$

Теперь мы рассмотрим колебания около этого равновесного движения, характеризуемого величинами r_0 и ω_0, связанными между собой соотношением (3.504). Для

*) *Г. Голдстейн*, Классическая механика, Гостехиздат, 1957.

исследования колебаний положим:

$$r = r_0 + q_1, \qquad \dot{\theta} = \omega_0 + q_2. \tag{3.505}$$

Подставляя (3.505) в (3.503) и пренебрегая членами второго порядка относительно q_i, мы получим (члены нулевого порядка сокращаются в силу (3.504)):

$$\begin{aligned} &m\ddot{q}_1 - m\omega_0^2 q_1 - 2mr_0\omega_0 q_2 - \alpha(\alpha+1) A r_0^{-\alpha-2} q_1 = 0, \\ &mr_0^2 \dot{q}_2 + 2mr_0\omega_0 \dot{q}_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.506}$$

Если мы предположим теперь, что q_1 и q_2 периодичны во времени с одной и той же частотой,

$$q_1 = A_1 e^{i\omega t}, \qquad q_2 = A_2 e^{i\omega t}, \tag{3.507}$$

аналогично (3.116), то мы придем к следующему секулярному уравнению для ω:

$$\begin{vmatrix} m(-\omega^2 - \omega_0^2) - \alpha(\alpha+1) A r_0^{-\alpha-2} & -2mr_0\omega_0 \\ 2mr_0\omega_0\omega & mr_0^2\omega \end{vmatrix} = 0. \tag{3.508}$$

Из этого уравнения найдется один нулевой корень, соответствующий слегка смещенной равновесной круговой орбите, где $(r_0 + A_1)$ и $(\omega_0 + A_2)$ удовлетворяют тому же уравнению, которому раньше удовлетворяли величины r_0 и ω_0, т. е. уравнению (3.504). Уравнение, которому удовлетворяют остальные корни, имеет вид:

$$\omega^2 = (2 - \alpha)\,\omega_0^2. \tag{3.509}$$

Отсюда видно, что при условии $\alpha < 2$ орбита будет устойчивой.

Обратим внимание на то, что секулярное уравнение (3.508) куда более сложно, чем (3.121), поскольку здесь ω входит не только через ω^2, но и в первой степени. Это не удивительно, поскольку мы занимаемся уже не положениями равновесия, а равновесным движением.

ЗАДАЧИ

1. Исследуйте *) малые колебания однородного прямого стержня в вертикальной плоскости; стержень подвешен на невесомой нерастяжимой нити, прикрепленной к одному из его концов.

---

*) В этой и следующих задачах «исследуйте» означает: вычислите собственные частоты нормальных колебаний и найдите вид нормальных колебаний.

2. Исследуйте малые колебания следующей системы: однородный прямой стержень свободно вращается около фиксированной точки, в которой закреплен один из его концов; на другом его конце на невесомой и нерастяжимой нити подвешена точечная масса. Колебания происходят в вертикальной плоскости.

3. Однородный круговой диск подвешен к неподвижной точке с помощью невесомой нерастяжимой нити, закрепленной в одной из точек граничной окружности диска. Исследовать малые колебания этой системы под действием силы тяжести. Колебания происходят в вертикальной плоскости.

4. На тонкой гладкой тяжелой проволочке, согнутой в форме окружности, может скользить бусинка. Исследуйте малые колебания системы в поле тяжести, если проволочка, закрепленная в одной из своих точек, раскачивается в своей плоскости, а бусинка скользит по проволоке.

5. Невесомая нерастяжимая нить длиной $(2\sqrt{2}+1)a$ закреплена своими концами в точках A и D, отстоящих друг от друга на расстояние $3a$ на одном и том же горизонтальном уровне Две частицы с одинаковыми массами m закреплены на нити соответственно в точках B и C, причем $AB=CD=\sqrt{2}\,a$. Частица с массой m подвешена на невесомой нерастяжимой нити длиной a к массе, находящейся в точке B, и другая частица той же массы m подвешена аналогичным образом к C. Исследуйте малые колебания этой системы под действием силы тяжести в вертикальной плоскости, в которой расположены все нити.

6. Невесомая нить длиной $4a$ растянута до натяжения T между двумя заданными точками; три частицы, каждая из которых обладает массой μ, закреплены в точках, делящих нить на четыре равные части.

Пренебрегая влиянием силы тяжести, исследуйте малые продольные и малые поперечные колебания системы.

7. Невесомая нить длиной $4a$ растянута между двумя фиксированными точками A и B до натяжения T. Частица массы m закреплена в ее середине C. Две другие частицы массой m прикреплены к нити в точках D и E, являющихся серединами отрезков AC и CB. Когда система покоится, мгновенно сообщают небольшие поперечные скорости в одном и том же направлении частицам D и E. Найти смещение частицы C как функцию времени.

8. Однородный твердый прямой стержень AB лежит на гладком горизонтальном столе. Концы стержня A и B привязаны невесомыми нитями к фиксированным точкам стола C и D. При равновесии точки $CABD$ лежат на одной прямой. Исследовать малые поперечные колебания стержня.

9. Три частицы с различными массами подвешены на невесомой нерастяжимой нити, один из концов которой закреплен. Докажите, что если периоды трех нормальных мод совпадают с периодами простых маятников длиной λ_1, λ_2, λ_3, то сумма $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ равна расстоянию от точки подвеса до самой нижней частицы.

10. На каждую из двух параллельных горизонтальных проволочек надето закрепленное невесомыми растяжками кольцо массы m; когда кольцо смещается на расстояние y от положения равновесия, на него действует возвращающая сила λy. Когда кольца находятся в положении равновесия, линия, соединяющая их, перпендикулярна обеим проволочкам, а расстояние между ними равно l. Однородная струна с линейной плотностью ρ растянута между кольцами до натяжения T. Исследовать нормальные колебания системы.

11. Однородный твердый брусок массы M и длины L, шириной которого мы пренебрегаем, симметрично подвешен на двух вертикальных струнах, каждая из которых имеет коэффициент упругости α; расстояние между струнами равно x $(x < L)$. При равновесии брусок занимает горизонтальное положение. Показать, что при условии $x = L/\sqrt{3}$ возможно возбудить такие колебания бруска в вертикальной плоскости, при которых наперед заданная точка бруска останется в покое.

12. Однородная струна длиной L и линейной плотностью ρ лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Один ее конец жестко закреплен в некоторой точке A плоскости, а другой прикреплен к кольцу массы M, которое скользит по гладкому горизонтальному стерженьку, расположенному в этой плоскости на расстоянии l от точки A. Натяжение струны равно T. Найти уравнение, определяющее период малых колебаний системы.

13. Металлический блок массой $3m$ имеет внутри сферическую полость радиуса a, где скользит, без вращения, шар массы m, радиус которого мал по сравнению с a. Блок скользит по гладкой горизонтальной плоскости. К блоку прикреплена горизонтальная пружина, коэффициент упругости которой равен $4mg/a$; другой конец пружины закреплен. Исследовать малые колебания системы, когда она движется вдоль направления пружины.

14. Однородный тонкий полый цилиндр массой $2m$ и радиусом $2a$ катится по абсолютно шершавой горизонтальной плоскости. Внутри него катится второй однородный тонкий полый цилиндр массы m и радиуса a, у которого в одной из точек на поверхности закреплена частица с массой $2m$. Исследовать малые колебания этой системы, если скольжения между цилиндрами нет.

15. Ромб, образованный четырьмя одинаковыми стержнями длиной $2L$, соединенными на шарнирах, расположен симметрично в вертикальной плоскости над мягко закрепленным цилиндром радиуса a; ромб находится в равновесии, когда все стержни наклонены под одним и тем же углом ψ к горизонтальной плоскости и когда нижние стержни не касаются цилиндра. Определить значение ψ и вычислить частоту малых колебаний ромба, когда эти колебания симметричны, через величину ψ.

16. Карманные часы лежат на гладком горизонтальном столе. Предположив, что они совершают колебания с малой амплитудой и что они показывают точное время, когда корпус часов неподвижен, вычислите, насколько быстрее пойдут часы в условиях задачи.

17. $ABCD$ — однородная квадратная пластинка со стороной $2a$. Угол A может без трения скользить вдоль закрепленного горизонтального стержня. Угол B привязан невесомой нерастяжимой нитью длиной $a/3$ к неподвижной точке, так что при равновесии пластинка висит в вертикальной плоскости перпендикулярно стержню, нить расположена вертикально, сторона CD — горизонтально и ниже AB. Исследовать малые колебания системы.

18. Рассмотреть одномерный «кристалл», состоящий из N атомов, расположенных по окружности (см. § 3.4). Допустим, что в момент $t=0$ один из атомов смещается на малое расстояние d. Описать последующее движение атомов кристалла.

19. Тонкая проволочка массы M изогнута в виде винтовой линии $x=a\cos\psi$; $y=a\sin\psi$; $z=a\psi\operatorname{tg}\beta$ и может свободно вращаться вокруг оси z, направленной горизонтально. Длина проволочки выбрана так, чтобы центр масс лежал на оси z. По проволочке скользит без трения кольцо массы m. Проволочка покоится, когда кольцу, находящемуся в самом нижнем положении, сообщается горизонтальная скорость $a\omega$ вдоль проволочки. Показать, что, если ω не слишком велико, плоскость, проходящая через кольцо и ось, колеблется как математический маятник длиной

$$\frac{a(M+m\sin^2\beta)}{M\cos^2\beta+m\sin^2\beta}$$

и что проволочка поворачивается на угол

$$\frac{m\omega T\sin^2\beta\cos\beta}{M\cos^2\beta+m\sin^2\beta}$$

за каждый период T движения маятника.

20. Однородный стержень AB длиной $2l$ и массой m движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, причем один из его концов ограничен в своем движении горизонтальной линией LM; это движение происходит с постоянным ускорением a. Найти период малых колебаний стержня около его относительного положения равновесия.

21. Исследовать малые колебания маятника Томсона — Тэта (см. § 3.2) около равновесного движения.

22. Частица ограничена в своем движении гладкой поверхностью, заданной уравнениями

$$x=\rho\cos\psi,\quad y=\rho\sin\psi,\quad z=b\sin\theta,$$

где $\rho=a+b\cos\theta \quad (a>b)$.

Доказать, что в том случае, когда никаких сил, кроме реакций связи, нет, движение вокруг внешнего экваториального круга будет устойчивым; если же это движение будет слегка возмущено, новая траектория будет пересекать экватор на расстояниях $\pi\sqrt{b(a+b)}$.

Показать также, что движение вокруг внутреннего экваториального круга нестабильно и что, если это движение слегка возмущено, траектория частицы будет пересекать внешний экваториальный круг под углом $2\operatorname{arctg}\sqrt{b/a}$.

Глава 4

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

После введения углов Эйлера выводятся два уравнения движения твердого тела: одно — описывающее его поступательное движение, другое — его вращательное движение. Получено выражение для кинетической энергии твердого тела, записанное через его моменты инерции и угловые скорости, отнесенные к главным осям тела. Выведены уравнения Эйлера и прилагаются к рассмотрению твердых тел, на которые не действуют внешние силы, и к рассмотрению тяжелого симметричного волчка. Обсуждается прецессия и нутация земной оси, обусловленная солнечными и лунными силами тяготения. В последнем параграфе рассматриваются силы Кориолиса и их влияние на свободное падение тел и движение сферического маятника (маятник Фуко).

§ 4.1. Введение

До сих пор рассматривались системы, состоящие из многих точечных частиц, которые в общем имели ту особенность, что каждая из этих частиц могла двигаться в известной степени независимо. В этой главе мы займемся системами частиц, которые уже не могут быть расположены вдоль прямой и которые обладают той особенностью, что расстояние между любой парой частиц остается всегда неизменным. Такие системы называют *твердыми телами.*

Твердое тело имеет шесть степеней свободы. В этом можно убедиться двумя способами. Во-первых, можно просто ожидать три поступательные и три вращательные степени свободы у твердого тела. Этот интуитивный подход требует, конечно, более строгого обоснования. Возьмем для начала три частицы, не лежащие на одной прямой. Положение каждой из этих частиц может быть определено заданием трех ее координат, но в случае твердого тела есть еще три связи типа (2.108), которые оставляют системе всего лишь шесть степеней свободы (ср. рассуждения в § 3.3 по поводу трехатомной молекулы). Положение каждой следующей частицы в системе снова определится тремя координатами, но расстояния этой частицы до первых трех частиц заданы и поэтому не возникает никаких новых степеней свободы.

В качестве шести обобщенных координат, определяющих конфигурацию твердого тела, мы выберем три координаты центра масс X, Y и Z и три угла θ, φ и ψ, характеризующих ориентацию тройки взаимно перпендикулярных осей в пространстве. Очевидно, что три первые степени свободы соответствуют поступательным степеням свободы, тогда как второй триплет соответствует вращательным степеням свободы. Чтобы определить угловые координаты, мы выбираем три координатные оси X, Y и Z жестко связанными с телом, тогда как через x, y, z обозначены оси, неподвижные в пространстве (см. рис. 18). Угол θ определяется просто как угол между осями z и Z. Угол φ — это угол между осью x и линией узлов, которая определяется как линия пересечения двух плоскостей: oxy и OXY. Наконец, угол ψ представляет собой угол между линией узлов и осью X. Введенные таким образом углы называются углами Эйлера.

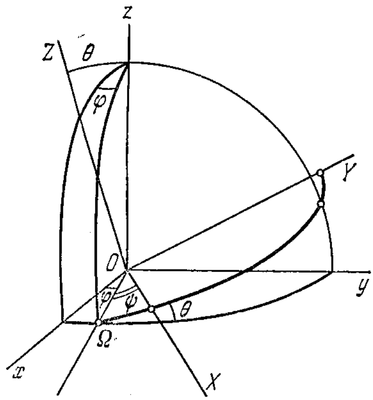

Рис. 18. Углы Эйлера. Система координат XYZ жестко связана с телом, система xyz неподвижна в пространстве.

Следует предупредить читателя, что в литературе нет единообразия ни в определении, ни в обозначении углов Эйлера. Использованное здесь определение — наиболее распространенное, но если вам приходится сопоставлять те или иные выражения в разных руководствах, непременно следует проверить определение углов Эйлера.

Для будущего удобно получить выражения для косинусов углов между одной из осей x, y, z и одной из осей X, Y, Z. Эти выражения легко получаются из рис. 18, если воспользоваться формулами косинусов и синусов сферической тригонометрии:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \tag{4.101}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}, \tag{4.102}$$

где через a, b, c обозначены длины дуг сферического треугольника ABC, а через A, B, C — углы между соответствующими дугами (см. рис. 19).

Результаты представлены в табл. 1. Каждая из величин, приведенных в таблице, — это значение косинуса угла между осью, указанной в верхней части соответствующего столбца, и осью, указанной в левой части соответствующей строки. Стоит отметить, что результаты, сведенные в табл. 1, могут быть также получены более непосредственно, если заметить, что преобразование от осей XYZ к осям xyz можно расщепить на три последовательных вращения: поворот на угол ψ вокруг оси Z, поворот вокруг оси X на угол θ и поворот на угол φ вокруг оси z.

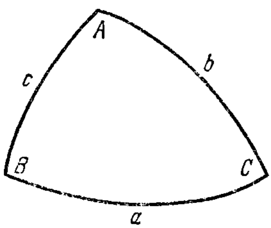

Рис. 19. Сферический треугольник.

Таблица 1

Косинусы углов между осями, жестко связанными с телом, и фиксированными пространственными осями, выраженные через углы Эйлера

	X	Y	Z
x	$\cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi$	$-\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
y	$\cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi$	$-\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\sin\theta$	$\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

В дальнейшем будет удобнее описывать движение твердого тела через угловые скорости вращения относительно осей X, Y, Z, чем через производные $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$. Тем не менее, поскольку $\dot\theta$, $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ войдут в уравнения Лагранжа, необходимо иметь связь между этими двумя наборами угловых скоростей. Если p, q и r (или же ω_1, ω_2 и ω_3) являются угловыми скоростями вращения тела относительно осей X, Y и Z, мы найдем:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p = \dot\theta \cos\psi + \dot\varphi \sin\theta \sin\psi, \\ \omega_2 &= q = -\dot\theta \sin\psi + \dot\varphi \sin\theta \cos\psi, \\ \omega_3 &= r = \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Эти уравнения можно получить, если помнить, что $\dot\theta$, $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ представляют собой угловые скорости вращения вокруг линии узлов $O\Omega$, вокруг оси z и вокруг оси Z соответственно.

Теперь мы найдем уравнения движения твердого тела в системе отсчета, неподвижной в пространстве, другими словами, в инерциальной системе. В конце концов нам понадобятся эти уравнения и в той системе отсчета, которая жестко связана с телом. Для получения этих уравнений мы воспользуемся принципом Д'Аламбера (2.226):

$$\sum_i (m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{x}_i) = 0, \tag{4.104}$$

где через $\boldsymbol{F}_i$ обозначены внешние силы, действующие на частицу, и где перемещения $\delta\boldsymbol{x}_i$ таковы, что кинематические соотношения не нарушаются. Последнее требование накладывает довольно сильные ограничения и означает фактически, что допустимы только два типа $\delta\boldsymbol{x}_i$:

$$\text{(I)}\ \delta\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \text{(II)}\ \delta\boldsymbol{x}_i = [\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{x}_i], \tag{4.105}$$

соответствующих трансляциям и вращениям тела.

Комбинируя (4.104) и (4.105, I), получим:

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i\right) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i \boldsymbol{F}_i\right), \tag{4.106}$$

или же, поскольку $\boldsymbol{\varepsilon}$ — произвольный вектор,

$$M \ddot{\boldsymbol{X}}_{\text{ц.и.}} = \dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}_{\text{рез}}, \tag{4.107}$$

где через M обозначена полная масса системы:

$$M = \sum_i m_i. \tag{4.108}$$

Через $\boldsymbol{X}_{\text{ц.и.}}$ обозначен вектор, компонентами которого являются координаты центра масс (центра инерции):

$$\boldsymbol{X}_{\text{ц.и.}} = \sum_i m_i \boldsymbol{x}_i / M, \tag{4.109}$$

а через $\boldsymbol{F}_{\text{рез}}$ — результирующая сила, действующая на тело:

$$\boldsymbol{F}_{\text{рез}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i. \tag{4.110}$$

С другой стороны, если скомбинировать (4.104) и (4.105, II), мы получим:

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i [\boldsymbol{x}_i,\ m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i]\right) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i [\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{F}_i]\right), \tag{4.111}$$

или, поскольку $\boldsymbol{\varepsilon}$ — снова произвольный вектор,

$$\dot{\boldsymbol{J}} = \overrightarrow{\mathscr{M}}, \tag{4.112}$$

где через $\boldsymbol{J}$ обозначен полный момент импульса тела,

$$\boldsymbol{J} = \sum_i [\boldsymbol{x}_i,\ m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i], \tag{4.113}$$

а через $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ — полный (вращающий) момент сил, действующих на тело:

$$\overrightarrow{\mathscr{M}} = \sum_i [\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{F}_i]. \tag{4.114}$$

Уравнения (4.107) и (4.112) являются основными уравнениями движения твердого тела. Первое из них выражает тот факт, что центр масс твердого тела движется так, как если бы вся масса тела была сосредоточена именно в этой точке и все силы действовали бы на нее. Второе уравнение определяет производную по времени от момента импульса тела, которая равна полному моменту сил, действующих на тело. Обе эти величины — полный момент импульса и полный момент сил — вычислены относительно одной и той же точки, за которую выбрано начало координат как в (4.113), так и в (4.114).

Займемся на время чистым вращением твердого тела. Мгновенное вращение можно охарактеризовать вектором ω, компоненты которого определяются согласно (4.103). Скорости частиц, образующих твердое тело, можно найти по формуле [ср. (4.105, II)]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = [\omega,\ \boldsymbol{x}_i]. \tag{4.115}$$

Из (4.113) и (4.115) вытекает (имея в виду, что $r_i^2 = (\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i)$), что

$$\boldsymbol{J} = \sum_i m_i [\boldsymbol{x}_i,\ [\omega,\ \boldsymbol{x}_i]] = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega - \sum_i m_i \boldsymbol{x}_i (\boldsymbol{x}_i \cdot \omega). \tag{4.116}$$

Мы можем переписать полученное равенство еще и так:

$$J_k = \sum_{l=x,\,y,\,z} D_{kl}\omega_l, \qquad k=x,\ y,\ z, \tag{4.117}$$

где введено обозначение:

$$D_{kl} = \sum_i m_i\,(r_i^2\delta_{kl} - x_{ik}x_{il}), \qquad k,\ l=x,\ y \text{ или } z. \tag{4.118}$$

Из (4.116) или (4.117) видно, что в общем случае вектор $\boldsymbol{J}$ и вектор $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают по направлению.

Тензор второй валентности (второго ранга) D_{kl} (4.118) называется тензором инерции. Его диагональные элементы носят название *моментов инерции*, а недиагональные элементы — моментов девиации. Эти же самые элементы, взятые с обратным знаком, называются также иногда произведениями инерции. Очень поучительно перейти сейчас к случаю непрерывного распределения масс. Формально это означает, что сумму по точечным массам m_i мы заменим на интеграл от плотности массы ρ по объему тела. Мы получим тогда для компонент тензора инерции:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \int \rho\,(y^2+z^2)\,d^3\boldsymbol{x}, & D_{xy} &= -\int \rho xy\,d^3\boldsymbol{x} = D_{yx},\\ D_{yy} &= \int \rho\,(z^2+x^2)\,d^3\boldsymbol{x}, & D_{yz} &= -\int \rho yz\,d^3\boldsymbol{x} = D_{zy},\\ D_{zz} &= \int \rho\,(x^2+y^2)\,d^3\boldsymbol{x}, & D_{zx} &= -\int \rho zx\,d^3\boldsymbol{x} = D_{xz}, \end{aligned} \tag{4.119}$$

где через $d^3\boldsymbol{x}$ обозначен элемент объема $dx\,dy\,dz$.

Причина, вызвавшая возникновение термина «момент девиации», состоит в том, что, если недиагональные элементы тензора инерции отличны от нуля, появляются «силы», стремящиеся изменить направление $\boldsymbol{J}$ [(ср. (4.205)], если только вектор $\boldsymbol{J}$ не направлен вдоль какой-нибудь из трех главных осей (см. ниже).

Хорошо известно из теории тензоров второй валентности, что для симметричного тензора всегда можно подобрать такую ориентацию осей, что тензор инерции превратится в диагональный тензор. Преобразование к таким осям носит название преобразования к главным осям, а про тензор говорят, что он приводится к главным осям. Следует подчеркнуть, что в общем случае, когда ориентация твердого тела меняется во времени, меняется со временем и ориентация его главных осей в пространстве. Если только не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что оси XYZ, жестко связанные с телом, совпадают с главными осями тензора инерции. Тот факт, что эти оси всегда совпадают с главными осями, указывает на возможные преимущества описания движения твердого тела в системе XYZ по сравнению с таким же описанием в системе xyz, неподвижной в пространстве.

Если (4.117) записать в системе координат, совпадающей с главными осями, эти равенства упрощаются:

$$J_k = D_k \omega_k, \tag{4.120}$$

или

$$J_x = Ap, \quad J_y = Bq, \quad J_z = Cr, \tag{4.121}$$

где через A, B и C обозначены *главные моменты инерции* тела.

Из (4.120) или (4.121) видно, что при вращении тела вокруг какой-либо из его главных осей вектор момента импульса $\boldsymbol{J}$ совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

С помощью (4.115) можно получить выражение для кинетической энергии вращательного движения в виде:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left([\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}_i] \cdot [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}_i]\right) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} D_{kl} \omega_k \omega_l, \tag{4.122}$$

или же, если оси x, y, z направлены вдоль главных осей,

$$T = \frac{1}{2} Ap^2 + \frac{1}{2} Bq^2 + \frac{1}{2} Cr^2. \tag{4.123}$$

Если тело движется с линейной скоростью $\boldsymbol{v}$ и одновременно вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, вместо (4.115) мы получим:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}_i], \tag{4.124}$$

а (4.122) заменится на

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,l} D_{kl} \omega_k \omega_l + (\boldsymbol{v} \cdot [\boldsymbol{\omega}, M \boldsymbol{X}_{\text{ц.и.}}]), \tag{4.125}$$

где M и $\boldsymbol{X}_{\text{ц.и.}}$ определяются согласно (4.108) и (4.109). Если выбрать начало координат в центре масс, последний член в правой части (4.125) обращается в нуль и кинетическая энергия превращается в сумму энергий поступательного и вращательного движения:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,l} D_{kl} \omega_k \omega_l. \tag{4.126}$$

есть еще три связи типа (2.108), которые оставляют системе всего лишь шесть степеней свободы (ср. рассуждения в § 3.3 по поводу трехатомной молекулы). Положение каждой следующей частицы в системе снова определится тремя координатами, но расстояния этой частицы до первых трех частиц заданы и поэтому не возникает никаких новых степеней свободы.

В качестве шести обобщенных координат, определяющих конфигурацию твердого тела, мы выберем три координаты центра масс X, Y и Z и три угла θ, φ и ψ, характеризующих ориентацию тройки взаимно перпендикулярных осей в пространстве. Очевидно, что три первые степени свободы соответствуют поступательным степеням свободы, тогда как второй триплет соответствует вращательным степеням свободы. Чтобы определить угловые координаты, мы выбираем три координатные оси X, Y и Z жестко связанными с телом, тогда как через x, y, z обозначены оси, неподвижные в пространстве (см. рис. 18). Угол θ определяется просто как угол между осями z и Z. Угол φ — это угол между осью x и линией узлов, которая определяется как линия пересечения двух плоскостей: oxy и OXY. Наконец, угол ψ представляет собой угол между линией узлов и осью X. Введенные таким образом углы называются углами Эйлера.

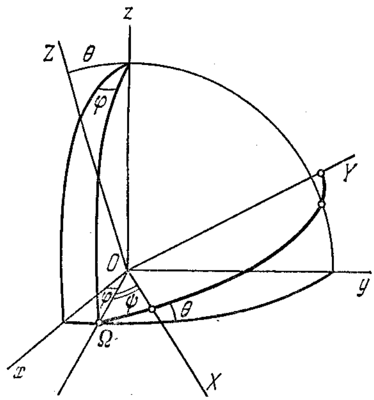

Рис. 18. Углы Эйлера. Система координат XYZ жестко связана с телом, система xyz неподвижна в пространстве.

Следует предупредить читателя, что в литературе нет единообразия ни в определении, ни в обозначении углов Эйлера. Использованное здесь определение — наиболее распространенное, но если вам приходится сопоставлять те или иные выражения в разных руководствах, непременно следует проверить определение углов Эйлера.

Для будущего удобно получить выражения для косинусов углов между одной из осей x, y, z и одной из осей X, Y, Z. Эти выражения легко получаются из рис. 18, или же в компонентах, если воспользоваться (4.121):

$$A\dot{p}+(C-B)\,qr=\mathscr{M}_1,$$
$$B\dot{q}+(A-C)\,pr=\mathscr{M}_2, \qquad (4.206)$$
$$C\dot{r}+(B-A)\,pq=\mathscr{M}_3.$$

Эти уравнения и называются *уравнениями Эйлера*.

Начнем с того, что рассмотрим случай $\vec{\mathscr{M}}=0$, т. е. случай, когда нет вращательных моментов (моментов сил). Мы еще раз напомним, что поступательное движение, описываемое (4.107), не рассматривается. Когда $\vec{\mathscr{M}}=0$, мы получим вместо (4.206):

$$A\dot{p}+(C-B)qr=0,$$
$$B\dot{q}+(A-C)pr=0, \qquad (4.207)$$
$$C\dot{r}+(B-A)qp=0,$$

где точки над буквами относятся к производным по времени в системе XYZ. Теперь становится ясным преимущество использования уравнений движения в системе XYZ: выбрав однажды оси координат вдоль главных осей тензора инерции, мы можем быть уверены в том, что они всегда будут совпадать с этими осями. Но это было бы совсем не так, если бы мы работали в системе xyz. Два интеграла движения системы (4.207) могут быть найдены немедленно. Умножая каждое из уравнений (4.207) на p, q и r соответственно и складывая их, мы найдем:

$$\frac{1}{2}Ap^2+\frac{1}{2}Bq^2+\frac{1}{2}Cr^2=\text{const}; \qquad (4.208)$$

этот интеграл — интеграл энергии [ср. (4.123)].

Умножая уравнения (4.207) на Ap, Bq и Cr соответственно и затем складывая их, мы получим:

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=\text{const}; \qquad (4.209)$$

это равенство показывает, что абсолютная величина полного момента импульса является интегралом движения. Воспользовавшись двумя полученными интегралами движения (4.208) и (4.209), можно выразить общее решение уравнений (4.207) через эллиптические интегралы. Но мы не станем этого делать, а вместо этого рассмотрим несколько частных случаев.

Прежде всего мы отметим, что можно найти решение уравнений (4.207) в форме

$$p = \mathrm{const} = p_0, \quad q = 0, \quad r = 0 \tag{4.210а}$$

или же в виде

$$q = \mathrm{const} = q_0, \quad p = 0, \quad r = 0, \tag{4.210б}$$

а также в виде

$$r = \mathrm{const} = r_0, \quad p = 0, \quad q = 0. \tag{4.210в}$$

Эти решения соответствуют вращениям с постоянной угловой скоростью вокруг трех главных осей. Можно показать, что (4.210) определяют те единственные случаи, когда (4.207) при трех неравных главных моментах инерции имеют решение

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const},$$

или же

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0. \tag{4.211}$$

Чтобы убедиться в этом, подставляем (4.211) в (4.207) и обнаруживаем, что эти уравнения можно решить, если по крайней мере две из трех величин p_0, q_0 и r_0 обращаются в нуль. Мы напомним в этой связи наше замечание об источниках происхождения термина «момент девиации» в предыдущем параграфе.

Интересно выяснить устойчивость вращения (4.210). Это можно сделать тем же самым способом, каким мы пользовались, исследуя малые колебания в предыдущей главе; итак, мы положим:

$$p = p_0 + \pi, \quad q = \xi, \quad r = \rho, \tag{4.212}$$

подставим эти выражения в (4.207) и отбросим члены, квадратичные по π, ξ и ρ. В результате получим:

$$\begin{aligned} A\dot{\pi} &= 0, \\ B\dot{\xi} + (A - C)\, p_0 \rho &= 0, \\ C\dot{\rho} + (B - A)\, p_0 \xi &= 0. \end{aligned} \tag{4.213}$$

Первое уравнение приводит к малым колебаниям нулевой частоты и к решению $\pi = \mathrm{const}$, $\xi = 0$, $\rho = 0$, т. е. к решению, которое снова имеет вид (4.210а), но теперь уже со слегка изменившейся угловой скоростью вращения вокруг оси X. Последние два уравнения системы (4.213) дают для частоты малых колебаний ω уравнение

$$BC\omega^2=(A-C)(A-B)p_0^2, \tag{4.214}$$

из которого мы заключаем, что решение (4.210а) устойчиво при условии, если A будет наибольшим или наименьшим из трех главных моментов инерции. Вращения вокруг двух главных осей, соответствующих наибольшему и наименьшему моментам инерции, являются, таким образом, устойчивыми равновесными вращениями, тогда как вращение вокруг третьей главной оси, с которой связан промежуточный главный момент инерции, является неустойчивым равновесным движением.

Второй частный случай, который нас интересует, — это случай, когда $A=B\neq C$. Последнее уравнение (4.207) становится совсем простым:

$$C\dot{r}=0, \quad \text{или} \quad r=\text{const}=r_0. \tag{4.215}$$

Полагая $A=B$ в первых двух уравнениях, получим:

$$\begin{aligned} A\dot{p}+(C-A)qr_0&=0,\\ A\dot{q}+(A-C)pr_0&=0. \end{aligned} \tag{4.216}$$

Решения (4.216) имеют вид:

$$\begin{aligned} p&=p_0\cos[(C-A)r_0t/A],\\ q&=q_0\sin[(C-A)r_0t/A]. \end{aligned} \tag{4.217}$$

Полученное решение дает прецессию вектора $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси Z. Это можно усмотреть также, записав уравнение движений в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=-[\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\omega}], \tag{4.218}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор с компонентами 0, 0 и $(C-A)r_0/A$.

Земля дает нам хороший пример тела, для которого $A=B$. Для Земли $(C-A)/A$ составляет около 1/300, а r_0 имеет порядок 1 сутки$^{-1}$. Таким образом, период прецессии составляет около одного года.

Теперь мы займемся некоторыми случаями, когда уже есть моменты сил. Первый из них — тяжелый симметричный волчок. Имеется в виду тело, у которого $A=B$, а одна из точек оси симметрии закреплена. Если обозначить через l расстояние между точкой закрепления и центром масс волчка, через m — массу волчка, потенциальная энергия волчка запишется в виде:

$$U = W\cos\theta, \qquad W = mgl, \tag{4.219}$$

где g — ускорение силы тяжести (которое в этой задаче считается константой) и где ось z направлена по вертикали, так что θ будет одним из эйлеровских углов.

Кинетическая энергия волчка запишется в форме:

$$T = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Cr^2, \tag{4.220}$$

или же, если воспользоваться (4.103),

$$T = \frac{1}{2} A (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} C (\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2. \tag{4.221}$$

Лагранжиан задачи теперь уже выглядит так:

$$L = \frac{1}{2} A (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} C (\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 - W\cos\theta, \tag{4.222}$$

и мы сразу обнаруживаем в нем две циклические координаты φ и ψ, так что

$$\begin{aligned} p_\psi &= \mathrm{const} = C(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi), \\ p_\varphi &= \mathrm{const} = A\dot\varphi\sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi). \end{aligned} \tag{4.223}$$

Первое из этих уравнений эквивалентно равенству $Cr = \mathrm{const}$, которое следует из последнего уравнения Эйлера, поскольку $A = B$ и $\mathcal{M}_3 = 0$.

В задачу входят три степени свободы, и следует ожидать шесть постоянных интегрирования. Две из них мы уже нашли, это p_ψ и p_φ, а третьей будет энергия E:

$$E = \frac{1}{2} A (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} C (\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 + W\cos\theta. \tag{4.224}$$

С помощью (4.223) можно исключить $\dot\varphi$ и $\dot\psi$:

$$E = \frac{1}{2} A\dot\theta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2C} + W\cos\theta. \tag{4.225}$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано:

$$t = \int\limits_{z(0)}^{z(t)} [f(z)]^{-1/2} dz, \tag{4.226}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &f(z) = (1 - z^2)(\alpha - az) - (\beta - bz)^2, \\ &CA\alpha = 2CE - p_\psi^2, \quad A\beta = p_\varphi, \quad Aa = 2W, \quad Ab = p_\psi, \end{aligned} \tag{4.227}$$

а также

$$z = \cos\theta. \qquad (4.228)$$

В принципе из уравнения (4.226) можно найти θ в зависимости от времени. Из (4.223) мы можем уже найти φ и ψ как функции времени. Все три угла выражаются через эллиптические интегралы. Не так уж интересно обсуждение полного решения во всех деталях, но физический смысл решения можно понять из (4.226). Функция $f(z)$ представляет собой кубический полином относительно z, и ее поведение видно на рис. 20. Из (4.228) следует, что значения z лежат в интервале между -1 и $+1$. В этих точках функция $f(z)$ не положительна [см. (4.227)].

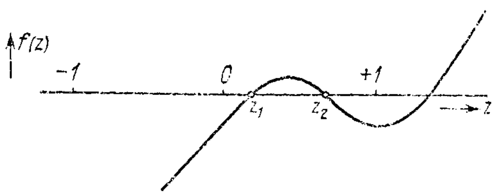

Рис. 20. График функции $f(z)$, определенной согласно (4.227).

Из (4.226) следует, что $f(z)$ не может быть отрицательной с физической точки зрения. Но это значит, что значения z лежат между значениями z_1 и z_2 или что значения θ заключены в соответствующих пределах θ_1 и θ_2: ось волчка обнаруживает *нутацию*. Физически возможные пределы изменения z часто оказываются еще более ограниченными, чем это предполагалось до сих пор во всех наших рассуждениях. Если, например, мы имеем дело с обычным волчком на столе, то угол θ всегда должен быть меньше $\pi/2$ и z должно быть положительным.

В общем случае $\dot{\varphi}$ не равно нулю; это соответствует *прецессии* волчка. Возможное движение иллюстрируется на рис. 21. Пересечение оси волчка со сферой, центр которой находится в точке закрепления волчка, описывает некоторую кривую типа изображенного на рис. 21. Окружность ABC соответствует углу $\theta = \theta_2$, а окружность DEF — углу $\theta = \theta_1$.

Ось Земли обнаруживает и нутацию, и прецессию. В этом случае вращательные моменты, действующие на земную ось, обусловлены силами притяжения со стороны Солнца и Луны. Для начала мы рассмотрим только влияние Солнца. Решение задачи удобно проводить, исходя из уравнения движения, промежуточного между уравнениями Эйлера (4.207) и уравнениями (4.112). Вместо того чтобы пользоваться системой координатных осей, неподвижных в пространстве, (4.112), или же жестко связанных с Землей, (4.207), мы воспользуемся несколько иной системой (см. рис. 22): ось ζ направляется вдоль оси Земли, ось ξ — вдоль линии узлов, т. е. пересечения экваториальной плоскости Земли с плоскостью орбиты Земли при ее движении вокруг Солнца (эта плоскость, называемая плоскостью эклиптики, конечно, в той же степени является и плоскостью солнечной орбиты при движении Солнца вокруг Земли; для обсуждаемой темы удобнее

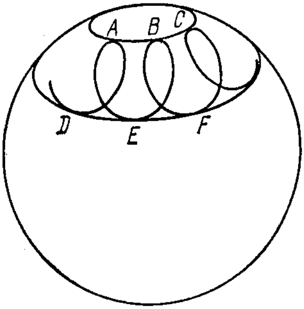

Рис. 21. Нутация и прецессия тяжелого симметричного волчка.

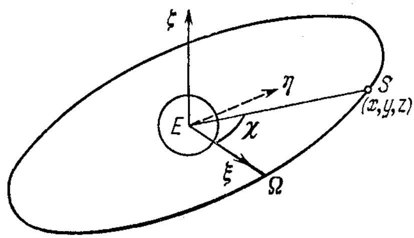

Рис. 22. Орбита Солнца вокруг Земли. E — центр Земли, S — некоторое положение Солнца на его орбите вокруг Земли, $E\Omega$ — линия узлов.

именно последняя точка зрения). Что касается оси η, то она выбирается так, чтобы оси ζ, η, ξ составляли правую тройку ортогональных осей.

Уравнения движения запишутся теперь так:

$$\dot{\boldsymbol{J}} + [\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{J}] = \overrightarrow{\mathcal{M}}, \qquad (4.229)$$

где через $\boldsymbol{\omega}_0$ обозначен вектор угловой скорости осей ξ, η и ζ (компоненты этого вектора в системе ξ, η, ζ мы обозначим через ω_ξ, ω_η и ω_ζ). Поскольку ось ζ направлена по оси симметрии Земли, справедливо соотношение (4.120), и можно написать:

$$J_\xi = Ap, \quad J_\eta = Aq, \quad J_\zeta = Cr, \qquad (4.230)$$

где мы считаем, что $B = A$, а p, q и r — компоненты угловой скорости Земли.

Компоненты момента силы $\vec{\mathcal{M}}$ можно найти по формуле

$$\vec{\mathcal{M}} = [X, F], \tag{4.231}$$

где X — радиус-вектор Солнца, записанный в системе ξ, η, ζ (его компонентами будут X, Y, Z), а F — сила, действующая со стороны Солнца на Землю. Для того чтобы определить F, мы замечаем, что она может быть записана в виде:

$$F = \nabla_X U(X), \tag{4.232}$$

где U — гравитационный потенциал, создаваемый Землей, а ∇_X — вектор градиента с компонентами $\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}$. Записывая (4.232), мы использовали третий закон Ньютона.

Потенциал U определяется интегралом:

$$U(X) = -GM_{\odot} \int \frac{\rho(x)\, d^3x}{|x - X|}, \tag{4.233}$$

где $\rho(x)$ — плотность вещества в точке x где-то внутри Земли, G — гравитационная постоянная, а $M_{\odot}$ — масса Солнца. Разлагая модуль $|x - X|^{-1}$ по степеням $|x|/|X|$, мы получим с точностью до членов порядка R^{-3} ($R = |X|$):

$$U = -\frac{GMM_{\odot}}{R} + \frac{GM_{\odot}}{R^3}\left[-\left(\alpha + \frac{1}{2}\gamma\right) + \frac{3}{2}\frac{X^2+Y^2}{R^2}\alpha + \frac{3}{2}\frac{Z^2}{R^2}\gamma\right], \tag{4.234}$$

где через M обозначена масса Земли, а коэффициенты α и γ определяются по формулам

$$\alpha = \int \rho x^2\, d^3x = \int \rho y^2\, d^3x, \quad \gamma = \int \rho z^2\, d^3x. \tag{4.235}$$

Используя соотношения

$$A = B = \alpha + \gamma, \quad C = 2\alpha, \tag{4.236}$$

мы получим:

$$U = -\frac{GMM_{\odot}}{R} - GM_{\odot}(C - A)\frac{X^2 + Y^2 - 2Z^2}{2R^5}. \tag{4.237}$$

Первый член не дает вклада в $\vec{\mathcal{M}}$, а из второго члена с помощью (4.231), (4.232) и (4.237) можно получить:

$$\mathcal{M}_{\xi} = \frac{3GM_{\odot}(C - A)\,YZ}{R^5}, \quad \mathcal{M}_{\eta} = \frac{3GM_{\odot}(A - C)\,XZ}{R^5}, \quad \mathcal{M}_{\zeta} = 0. \tag{4.238}$$

Обозначим через χ угол между ES и осью ξ (т. е. солнечную долготу; см. рис. 22), а через δ — угол между плоскостью эклиптики и экваториальной плоскостью. Тогда, принимая во внимание (4.101), можно написать:

$$X = R\cos\chi,\quad Y = R\sin\chi\cos\delta,\quad Z = R\sin\chi\sin\delta. \tag{4.239}$$

Эти формулы поясняются на рис. 23; последний рисунок аналогичен рис. 18, если на рис. 18 считать $\theta = \delta$, $\psi = \chi$ и $\varphi = 0$; следует, конечно, помнить, что оси XYZ на рис. 18 жестко связаны с твердым телом, тогда как теперь только ось ζ жестко связана с Землей, а линия узлов вращается в $\xi\eta$-плоскости; сами же оси ξ, η поворачиваются относительно Земли.

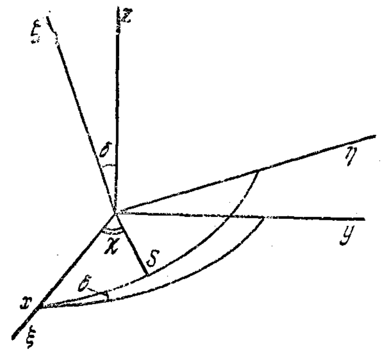

Рис. 23. Положение Солнца на его орбите вокруг Земли определяется углами δ (угол между плоскостью эклиптики и экваториальной плоскостью Земли) и χ (солнечная долгота).

Полагая

$$K = 3GM_{\odot}(C - A)/R^3, \tag{4.240}$$

можно переписать уравнение (4.229) в компонентах следующим образом:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + Cr\omega_\eta - Aq\omega_\zeta &= K\sin^2\chi\sin\delta\cos\delta, \\ A\dot{q} + Ap\omega_\zeta - Cr\omega_\xi &= K\sin\chi\cos\chi\sin\delta, \\ C\dot{r} + Aq\omega_\xi - Ap\omega_\eta &= 0. \end{aligned} \tag{4.241}$$

Чтобы найти компоненты ω_0, мы заметим, что единственным различием между системой осей ξ, η, ζ и системой осей, жестко связанных с главными осями инерции Земли, будет то, что система $\xi\eta\zeta$ поворачивается вокруг оси ζ относительно второй системы. Но это значит, что

$$\omega_\xi = p,\quad \omega_\eta = q,\quad \omega_\zeta = r - \dot{\psi}, \tag{4.242}$$

т. е. $\omega_\zeta \neq r$.

Из третьего уравнения (4.241) и равенств (4.242) следует:

$$r = \text{const} = \Omega, \tag{4.243}$$

где через Ω обозначена угловая скорость суточного вращения Земли.

На этой стадии разумно ограничиться приближенными решениями уравнений (4.241). Это можно сделать, если вспомнить, что в первом приближении $\omega_\zeta = 0$, $p = 0$ и $q = 0$ (положение земной оси по отношению к плоскости эклиптики меняется не слишком заметно), так что членами второго порядка от этих величин можно пренебречь. В том же самом приближении можно пренебречь первыми производными по времени от p и q. Действительно, можно показать, что $\dot{p}$ и $\dot{q}$ меньше, чем q или ω_ζ, на множитель порядка отношения периода обращения Солнца вокруг Земли к периоду обращения Земли вокруг ее собственной оси [см., например, *А. Вебстер*, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, § 96, ГТТИ, 1933]. Пренебрегая всеми членами высшего порядка, мы получим из двух первых уравнений (4.241):

$$\begin{aligned} p &= -(K/C\Omega)\sin\chi\cos\chi\sin\delta, \\ q &= (K/C\Omega)\sin^2\chi\sin\delta\cos\delta. \end{aligned} \tag{4.244}$$

Из сопоставления рис. 18 и 23 и формул (4.103) следует, что, положив $\psi = 0$, $\theta = \delta$,

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= -(K/C\Omega)\sin\chi\cos\chi\sin\delta, \\ \dot{\varphi} &= (K/C\Omega)\sin^2\chi\cos\delta. \end{aligned} \tag{4.245}$$

Правильная аппроксимация требует, чтобы мы записали для солнечной долготы χ:

$$\chi = \lambda_0 + \omega t, \tag{4.246}$$

где ω соответствует периоду в один год. Заметим, что среднее по времени от величины $\dot{\delta}$ дает нуль: в нашем приближении никакого секулярного вклада в нутацию земной оси нет. Для секулярной прецессии мы получим выражение

$$\overline{\dot{\varphi}} = K\cos\delta/2C\Omega, \tag{4.247}$$

где мы заменили член $\sin^2\chi$ его средним по времени, равным половине.

До сих пор мы учитывали только влияние Солнца. Аналогичные вычисления можно провести для действия Луны на Землю. Так как лунная орбита расположена практически в плоскости эклиптики, то в первом приближении можно просто заменить K на K', где K' получается из (4.240), где $M_\odot$ и R заменятся на массу Луны и расстояние от Земли до Луны соответственно. Масса Луны значительно меньше, чем масса Солнца, однако

Луна расположена намного ближе к Земле, так что величина K' почти вдвое превосходит K.

Найдем период прецессии согласно (4.247):

$$\frac{K\cos\delta}{2C\Omega}=\frac{GM_{\odot}}{R^3}\frac{1}{\Omega}\frac{C-A}{C}\frac{3\cos\delta}{2}=$$
$$=\frac{3\cos\delta}{2}\frac{\omega}{\Omega}\frac{C-A}{C}\omega\approx\frac{1}{80\,000}\omega, \qquad (4.248)$$

где использован третий закон Кеплера (1.246) и следующие численные значения: $C/(C-A)=300$, $\Omega/\omega=365$, $\delta=23^\circ$. Различие между получаемым таким образом периодом (около 80 000 лет) и наблюдаемым периодом (26 000 лет) легко объясняется влиянием Луны.

§ 4.3. Вращающиеся системы отсчета. Силы Кориолиса

В предыдущем параграфе мы вывели уравнения Эйлера, воспользовавшись формулой (4.203), определяющей связь между производной по времени от вектора в системе координат, неподвижной в пространстве, и производной по времени от того же вектора во вращающейся системе отсчета. В этом параграфе мы применим ту же самую формулу (4.203), но уже к (4.107), а не к (4.112). Специально мы остановимся на движении материальных точек на поверхности Земли. Если на частицу массы m действует сила F, то уравнение движения частицы имеет вид:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{xyz}=\frac{F}{m}, \qquad (4.301)$$

а используя дважды (4.203), мы найдем во вращающейся системе отсчета:

$$m\ddot{x}=-2m[\omega,\ \dot{x}]-m\{[\dot{\omega},\ x]-[\omega,\ [\omega,\ x]]\}+F, \qquad (4.302)$$

где точка означает дифференцирование в системе XYZ, т. е. $(d/dt)_{XYZ}$.

Во всех случаях, которые рассматриваются далее, ω — это вектор угловой скорости вращения, соответствующий суточному вращению Земли. С достаточной степенью точности можно положить тогда $\omega=0$. Выражение $[\omega,\ [\omega,\ x]]$, как это легко видеть, определяет центробежное ускорение. Его компонента вдоль радиус-вектора, проведенного из центра Земли к точке земной поверхности, равная $\Omega^2R\cos\varphi$ (где Ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси; R — радиус Земли; φ — широта точки на поверхности Земли), составляет около $0{,}003g\cos\varphi$ (g —

ускорение силы тяжести) и должна приниматься во внимание наряду с обычным ускорением силы тяжести. Вместе с тем поправка эта составляет не более 0,3 % от g, поэтому ею можно пренебречь во многих задачах; именно так мы и поступим в дальнейшем. Мы также пренебрежем остальными компонентами вектора $[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}]]$.

Тогда у нас останется следующее (приближенное) уравнение движения:

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -2m[\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{x}}] + \boldsymbol{F}. \qquad (4.303)$$

Первый член в правой части — это так называемая *сила Кориолиса*. Если частица движется в северном полушарии в направлении на север, то на нее будет действовать сила, направленная на восток. Это обстоятельство имеет значение при рассмотрении течения рек и для понимания законов образования и циркуляции циклонов. Мы же ограничимся двумя простыми механическими примерами, в которых силы Кориолиса имеют существенное значение. Первый пример — это падение частиц в поле тяжести Земли, точнее — траектория частицы, брошенной с некоторой высоты. Второй пример — маятник Фуко.

Выберем сейчас координатные оси следующим образом: пусть ось z направлена вдоль радиус-вектора, идущего от центра Земли к точке на ее поверхности, где будет производиться эксперимент; ось y направим по касательной к окружности постоянной широты в направлении «запад — восток»; ось x направим по касательной к меридиану в направлении «север — юг» (напомним, что направления выбранных таким образом осей x, y, z в разных точках Земли различные). Вектор $\boldsymbol{\omega}$ имеет в этой системе осей компоненты $-\Omega\cos\varphi$, 0, $\Omega\sin\varphi$, где, как и раньше, Ω — угловая скорость вращения Земли, а φ — широта места, где проводится опыт. Запишем уравнение (4.303) в компонентах:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega\sin\varphi\,\dot{y} + F_x/m, \\ \ddot{y} &= -2\Omega\cos\varphi\,\dot{z} - 2\Omega\sin\varphi\,\dot{x} + F_y/m, \\ \ddot{z} &= 2\Omega\cos\varphi\,\dot{y} + F_z/m. \end{aligned} \qquad (4.304)$$

В первой задаче можно считать $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$ (где при желании можно подправить g на центробежное ускорение, о котором только что шла речь). Можно проинтегрировать первое и третье уравнение из (4.304) и подставить полученный результат во второе уравнение

(4.304), принимая во внимание начальные условия ($x = y = 0$, $z = h$ и $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ при $t = 0$):

$$\ddot{y} = -4\Omega^2 y + 2\Omega \cos\varphi\, gt. \qquad (4.305)$$

Можно пренебречь членом, содержащим Ω^2, по сравнению с другими членами; тогда мы найдем величину смещения Δy для точки, где окажется на Земле падающая частица, относительно той точки, куда бы она упала, если бы Земля не вращалась ($\Omega = 0$):

$$\Delta y = \frac{1}{3}\, \Omega \cos\varphi\, gT^3; \qquad (4.306)$$

здесь через T обозначено время, необходимое частице, чтобы упасть на Землю,

$$T \approx (2h/g)^{1/2}. \qquad (4.307)$$

Подставив (4.307) в (4.306) и полагая $h = 10^2$ *м*, мы найдем для Δy величину около 0,02 *м*. Физическая причина этого отклонения очень проста: частица падает из точки, где линейная скорость в направлении запад — восток была больше, чем на Земле.

Второй пример — это маятник, обладающий двумя степенями свободы. Наиболее строгий метод решения этой задачи — рассмотрение сферического маятника и решение уравнений Лагранжа для этого случая. Однако из геометрии задачи видно, что производная $\dot{z}$ должна быть величиной второго порядка малости, если пользоваться приближением малых колебаний (z будет отличаться от своего равновесного значения только на величину, содержащую квадрат амплитуды). Кроме того, из теории простого маятника можно ожидать, что величины F_x/m и F_y/m будут равны соответственно $-gx/l$ и $-gy/l$, где через l обозначена длина маятника. Если пренебречь $\dot{z}$ во втором из уравнений (4.304), первые два уравнения той же системы дадут:

$$\ddot{x} - 2\Omega \sin\varphi\, \dot{y} = -gx/l, \quad \ddot{y} + 2\Omega \sin\varphi\, \dot{x} = -gy/l. \qquad (4.308)$$

Заметим, что (4.308) сводятся к уравнениям движения обычного маятника, если положить $\Omega = 0$.

Решение системы (4.308) дает простое гармоническое колебание, но такое, что плоскость колебаний равномерно поворачивается с угловой скоростью $\Omega \sin\varphi$. Это видно сразу же, если ввести систему координат x', y', вращающуюся с угловой скоростью $\Omega \sin\varphi$ относительно системы x, y. Если поступить таким образом, члены, пропорциональные Ω, исчезают. Другими словами: эти члены являются двумерными аналогами ускорения Кориолиса.

Аналитически можно найти решение, если ввести комплексную переменную

$$u = x + iy. \tag{4.309}$$

Через эту переменную система (4.308) запишется в виде:

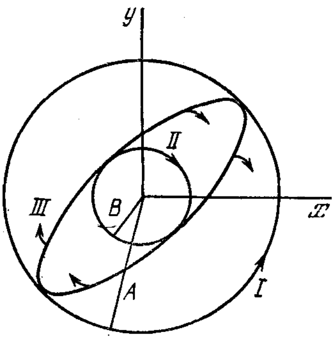

Рис. 24. Опыт Фуко с маятником. Эллипс III — та самая кривая, которую описывает нижняя точка маятника.

$$\ddot{u} + 2i\Omega \sin\varphi\, \dot{u} + gu/l = 0. \tag{4.310}$$

Если искать решение в форме

$$u = Ae^{i\omega t}, \tag{4.311}$$

то, пренебрегая членами, содержащими Ω^2, мы получим:

$$\omega = \pm\omega_0 - \Omega\sin\varphi, \quad \omega_0 = (g/l)^{1/2}, \tag{4.312}$$

или же

$$u = (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t})e^{-i\Omega\sin\varphi t}. \tag{4.313}$$

Сумма, стоящая в скобках, представляет эллиптическую орбиту (см. рис. 24): член $Ae^{i\omega_0 t}$ соответствует движению по кругу I, член $Be^{-i\omega_0 t}$ — движению по кругу II в обратном направлении. Эллипс III представляет собой сумму двух первых движений. Множитель $e^{-i\Omega\sin\varphi t}$ показывает, что этот эллипс вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\Omega\sin\varphi$.

Такое вращение плоскости колебаний маятника было экспериментально показано Фуко в его знаменитом эксперименте 1851 г. в Пантеоне. За этот опыт Фуко получил в 1855 г. медаль Копли от Королевского Общества.

ЗАДАЧИ

1. Твердое тело, способное свободно вращаться около фиксированной точки O, находится в покое, когда на него действует импульсная пара сил *) с компонентами ε, ε, 1 вдоль главных осей инерции тела

*) Импульсной парой называется вращающий момент, действующий в течение бесконечно малого промежутка времени: вращающий момент = постоянной $\times\ \delta(t - t_0)$, где через t_0 обозначен момент времени, когда прилагается вращающий момент.

в точке O; предполагается, что ε — малая величина. Предполагая, что $C > B > A$, показать, что наклон мгновенной оси вращения относительно оси C в последующем движении с точностью до первого порядка по ε всегда меньше или равен $k\varepsilon$, где k — число, зависящее только от отношений C/A и B/A. Найти число k, если $C=3A$ и $B=2A$.

2. Главные моменты инерции твердого тела относительно некоторой заданной точки равны A, B и C $(A < B < C)$, а соответствующие компоненты угловой скорости — ω_1, ω_2 и ω_3. Показать, что выражения $A(C-A)\omega_1^2+B(C-B)\omega_2^2$ и $C(C-A)\omega_3^2+B(B-A)\omega_2^2$ являются интегралами движения. Допустив, что эти интегралы выражены через отношение $C-B$ к $B-A$ и, кроме того, заданы начальные условия для ω_1: $\omega_1=\omega_0$ и $\dot{\omega}_1=0$ при $t=0$, найти зависимость ω_1 от времени.

3. Пользуясь функцией Рауса, исключить циклические координаты для случая симметричного волчка, вращающегося вокруг неподвижной точки, и получить дифференциальное уравнение, являющееся уравнением движения для нециклических координат.

4. Пусть T — кинетическая энергия вращающегося твердого тела, а J — величина его момента импульса [ср. выражения (4.208) и (4.209)]. Доказать, что если $J^2=2TC(1+\varepsilon)$, где ε — малая величина, и если $A > B > C$, то ω_1 и ω_2 совершают простые гармонические колебания. Рассчитать период этого движения и найти поправку с точностью до членов, пропорциональных $\sqrt{\varepsilon}$, к амплитуде колебаний с частотой ω_1.

5. Рассмотреть волчок массы M, центр масс которого при вертикальном положении волчка находится на высоте h; аксиальный момент инерции волчка равен C, поперечный момент инерции A; волчок вращается на шероховатой плоскости, ось волчка направлена по вертикали, n — угловая скорость волчка.

Показать, что если $C^2n^2 < 4AMgh$, то возможным движением вблизи вертикали будет движение, при котором проекция центра масс волчка на горизонтальную плоскость приблизительно описывается уравнением логарифмической спирали:

$$r=r_0\exp\frac{\sqrt{4AMgh-C^2n^2}}{Cn}\,\theta.$$

6. Твердый однородный прямой круговой конус массы M и высотой h имеет при вершине угол полураствора α. Конус свободно вращается вокруг своей оси симметрии. В некоторый момент времени одна из точек окружности основания конуса закрепляется. Доказать, что ось, вокруг которой будет вращаться конус, составляет угол β с осью конуса, причем $\beta=5\operatorname{tg}\alpha/(2+3\operatorname{tg}^2\alpha)$.

7. На сферу радиуса a и массы M помещены грузы так, что центр масс системы по-прежнему совпадает с центром сферы, но главные моменты инерции равны уже A, A, C. Показать, что возможно устойчивое движение, при котором сфера катится по шероховатой горизонтальной плоскости, так что ось C (т. е. та ось, которой соответствует момент инерции C) наклонена под постоянным

углом α и с постоянной угловой скоростью прецессии ω описывает конус вокруг вертикальной оси, проходящей на расстоянии c от центра сферы. Найти компоненту угловой скорости ω вдоль оси C для этого устойчивого движения.

8. Один конец оси симметричного волчка закреплен, а другой свободно скользит по легкому направляющему желобу, выполненному в форме окружности, лежащей в вертикальной плоскости с центром в точке, где находится закрепленный конец оси; эта окружность может вращаться вокруг вертикального диаметра, который неподвижен. Показать, что если желоб вращается относительно своего неподвижного вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω, то ($K=\mathrm{const}$)

$$A\dot{\theta}^2 = K + 2(Cn\omega - Mgh)\cos\theta - A\omega^2\cos^2\theta.$$

Здесь C — аксиальный момент инерции волчка; n — угловая скорость; θ — соответствующий угол Эйлера.

Показать, что можно выбрать начальные условия таким образом, что θ монотонно уменьшается от своего начального значения α (>0) и стремится к нулю при $t\to\infty$. Найти θ как функцию времени для этого случая.

9. Симметричный волчок, масса которого равна M, расстояние центра масс от точки опоры h, аксиальный момент инерции C и поперечный момент инерции A, вращается на шероховатой горизонтальной плоскости. Его ось составляет угол θ_0 ($\theta_0\neq 0$) с вертикалью, ориентированной вверх. Задана угловая скорость волчка n относительно его оси, причем $C^2n^2 \gg 4AMgh$. Показать, что центр масс опускается вниз примерно на расстояние $2Mgh^2A\sin^2\theta_0/C^2n^2$ и что наблюдается прецессия волчка с угловой скоростью

$$\frac{Mgh}{Cn}\left(1-\cos\frac{Cnt}{A}\right).$$

10. Круговой диск радиуса a вращается на гладком столе вокруг вертикального диаметра. Найти условие устойчивости движения.

11. Тонкий диск радиуса a и массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг нормали, проходящей через его центр, который закреплен. Показать, что небольшое возмущение движения диска приведет к тому, что ось диска начнет прецессировать с частотой ω в системе отсчета, связанной с телом, и с частотой 2ω в лабораторной системе.

Допустив, что движение возмущено конечным моментом импульса J относительно диаметра, найти максимальный угол отклонения оси.

12. Тонкий круговой диск радиуса a катится по шероховатому горизонтальному столу. Пусть θ и ψ — угловые координаты его оси, отнесенные к вертикали и заданной вертикальной плоскости, а n — угловая скорость диска относительно его оси. Найти уравнения движения для величин θ, ψ и n.

Найти условия устойчивости движения диска, если диску сообщено вращение с угловой скоростью ω относительно вертикального диаметра.

(5.102) и определением (5.103), мы убедимся, что

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial r_k} \delta r_k = \sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k p_k \delta r_k, \tag{5.106}$$

так что

$$\delta H = \sum_k r_k \delta p_k - \sum_k \dot{p}_k \delta q_k = \sum_k \dot{q}_k \delta p_k - \sum_k \dot{p}_k \delta q_k. \tag{5.107}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{5.108}$$

Полученные уравнения движения называются *уравнениями Гамильтона* или *каноническими уравнениями движения*.

При выводе уравнений (5.108) мы все время пользовались, пока это было возможно, совокупностью координат q_k, r_k, чтобы подчеркнуть тот факт, что мы оперируем с набором $2s$ независимых переменных. Очень часто, когда излагают теорию уравнений Лагранжа и уравнений Гамильтона, на это обстоятельство не обращают должного внимания, и вместо (5.104), (5.105) и (5.106) можно увидеть:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L, \tag{5.104'}$$

$$\delta H = \sum_k p_k \delta \dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k \delta p_k - \delta L, \tag{5.105'}$$

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k p_k \delta \dot{q}_k. \tag{5.106'}$$

Фактически и мы воспользуемся этими выражениями, когда перейдем к рассмотрению гамильтоновского формализма для сплошных сред (гл. 8). Кроме того, мы повсюду предполагаем, что L не зависит от времени явно; если это так, то это будет справедливо и по отношению к H.

Мы хотели бы обратить внимание на сходство (5.104), (5.107) и (5.108), с одной стороны, и (2.404) [или (2.410)], (2.406), (2.407) и (2.409) — с другой.

Выясним теперь физический смысл H. Еще раз допустим, что кинетическая энергия T — однородная квадратичная функция $\dot{q}_k$ и что потенциальная энергия U совсем не зависит от $\dot{q}_k$. Из теоремы Эйлера об однородных функциях мы получим:

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k p_k \dot{q}_k, \tag{5.109}$$

19. Частица массы m может свободно перемещаться по гладкому горизонтальному столу, закрепленному на поверхности Земли на широте λ. Движение происходит в потенциальном поле $U = \frac{1}{2} mp^2r^2$, где через r обозначено расстояние от точки O. В момент времени $t=0$ частице, находящейся в точке O, сообщается скорость u. Показать, что при подходящем выборе полярных координат уравнение траектории частицы будет иметь вид:

$$pr = u \sin\left(\frac{p\theta}{\omega \sin\lambda}\right),$$

где пренебрежено квадратами отношения ω/p; ω — угловая скорость вращения Земли.

20. Исследовать движение ротора Фуко, представляющего собой твердый цилиндр, вращающийся вокруг своей оси и подвешенный за ось в точке, проходящей через центр тяжести цилиндра. Ось ориентирована в направлении с востока на запад.

21. Гироскопический компас представляет собой гироскоп, вращающийся вокруг своей оси и способный свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Предполагая, что центр гироскопа покоится относительно вращающейся Земли, показать, что ось гироскопа, если она направлена на север, может сохранять свое положение относительно Земли.

Угловая скорость гироскопа относительно его оси равна n, угловая скорость Земли ω, причем $n \gg \omega$. Показать, что если ось слегка возмущена, то она будет колебаться относительно истинного направления на север с периодом, приблизительно равным $2\pi \sqrt{A/Cn\omega \cos\lambda}$, где A и C — поперечный и аксиальный моменты инерции гироскопа, а λ — широта точки, где находится гироскоп.

Глава 5

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе прежде всего будет рассказано о том, как можно описать движение механической системы с s степенями свободы в $2s$-мерном фазовом пространстве. Канонические уравнения выводятся из уравнений Лагранжа. Канонические преобразования обсуждаются весьма кратко, более подробно рассматриваются свойства скобок Пуассона, их инвариантность относительно канонических преобразований, их значение для отыскания интегралов движения и связь с бесконечно малыми контактными преобразованиями. Бегло рассмотрен случай движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В последнем параграфе принцип наименьшего действия выводится из вариационного принципа Гамильтона и обсуждается вопрос о том, как можно рассматривать время на равных правах со всеми остальными координатами q_k.

§ 5.1. Уравнения Гамильтона

На протяжении последних глав мы убедились в том, что уравнения Лагранжа во многих случаях являются весьма подходящим способом описания поведения механических систем. Уравнения Лагранжа представляют собой систему s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако нередко оказывается удобным перейти к системе $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В функции Лагранжа $L(q_k, \dot{q}_k)$ величины q_k и $\dot{q}_k$ не являются независимыми переменными, поскольку $\dot{q}_k$ — это производные по времени от q_k. Простейший путь перехода к независимым переменным состоит в том, чтобы ввести s новых переменных, r_k, согласно соотношениям

$$\dot{q}_k = r_k. \tag{5.101}$$

Уравнения (5.101) представляют собой s обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих между собой $2s$ переменных q_k и r_k. Лагранжиан представляет собой теперь функцию тех же самых $2s$ переменных, $L(q_k, r_k)$, а уравнения Лагранжа (2.308) теперь уже превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial r_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \tag{5.102}$$

Уравнения (5.101) и (5.102) совместно образуют систему $2s$ уравнений первого порядка, и таким образом поставленная задача решена. Как и раньше, состояние механической системы полностью определено, если в определенный момент времени заданы значения всех q_k и r_k. Однако, если в гл. 2 мы рассматриваем траекторию системы как кривую в s-мерном q-пространстве, теперь траектория системы представляется уже как кривая в $2s$-мерном (q, r)-пространстве.

Удобно вместо совокупности переменных q_k, r_k ввести другую совокупность переменных, с помощью которых уравнения движения приобретают более симметричный вид, чем уравнения (5.101) и (5.102). Мы снова обращаемся к обобщенным импульсам p_k, определяемым по (2.310); теперь (2.310) запишутся так:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial r_k}. \tag{5.103}$$

Эти соотношения, или, точнее, эти s уравнений совместно с тривиальными равенствами $q_k = q_k$ и есть те уравнения, с помощью которых мы совершаем преобразование от q_k, r_k к q_k, p_k. Если мы хотим записать уравнения движения через переменные q_k, p_k, нам следует вместо лагранжиана $L(q_k, r_k)$ ввести *гамильтониан* системы, определив его следующим образом:

$$H = \sum_k p_k r_k - L. \tag{5.104}$$

Теперь уже мы рассматриваем вариацию H,

$$\delta H = \sum_k p_k \delta r_k + \sum_k r_k \delta p_k - \delta L. \tag{5.105}$$

Если воспользоваться уравнениями движения (5.101), (5.102) и определением (5.103), мы убедимся, что

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial r_k} \delta r_k = \sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k p_k \delta r_k, \tag{5.106}$$

так что

$$\delta H = \sum_k r_k \delta p_k - \sum_k \dot{p}_k \delta q_k = \sum_k \dot{q}_k \delta p_k - \sum_k \dot{p}_k \delta q_k. \tag{5.107}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{5.108}$$

Полученные уравнения движения называются *уравнениями Гамильтона* или *каноническими уравнениями движения.*

При выводе уравнений (5.108) мы все время пользовались, пока это было возможно, совокупностью координат q_k, r_k, чтобы подчеркнуть тот факт, что мы оперируем с набором $2s$ независимых переменных. Очень часто, когда излагают теорию уравнений Лагранжа и уравнений Гамильтона, на это обстоятельство не обращают должного внимания, и вместо (5.104), (5.105) и (5.106) можно увидеть:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L, \tag{5.104'}$$

$$\delta H = \sum_k p_k \delta \dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k \delta p_k - \delta L, \tag{5.105'}$$

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k p_k \delta \dot{q}_k. \tag{5.106'}$$

Фактически и мы воспользуемся этими выражениями, когда перейдем к рассмотрению гамильтоновского формализма для сплошных сред (гл. 8). Кроме того, мы повсюду предполагаем, что L не зависит от времени явно; если это так, то это будет справедливо и по отношению к H.

Мы хотели бы обратить внимание на сходство (5.104), (5.107) и (5.108), с одной стороны, и (2.404) [или (2.410)], (2.406), (2.407) и (2.409) — с другой.

Выясним теперь физический смысл H. Еще раз допустим, что кинетическая энергия T — однородная квадратичная функция $\dot{q}_k$ и что потенциальная энергия U совсем не зависит от $\dot{q}_k$. Из теоремы Эйлера об однородных функциях мы получим:

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k p_k \dot{q}_k, \tag{5.109}$$

а из (5.104′) и (2.235)

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = 2T - (T - U) = T + U, \qquad (5.110)$$

откуда видно, что H — это просто полная энергия, выраженная через переменные p_k и q_k.

Если H не зависит от времени явно, то из (5.108) непосредственно вытекает, что энергия является интегралом движения,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \qquad (5.111)$$

Могут спросить, в чем значение канонических уравнений движения. Здесь можно сослаться на два обстоятельства. Первое из них заключается в том, что квантовая механика (как старая квантовая механика, так и современная — волновая или матричная) основывается скорее на гамильтоновом формализме, чем на лагранжевом; следует отметить, однако, что лагранжев формализм оказывается чрезвычайно полезным для полевой теории. Второе же обстоятельство состоит в том, что формализм Гамильтона особенно удобен для теории возмущений, т. е. для рассмотрения таких систем, для которых невозможно получить точные решения уравнений движения. Поскольку такие системы являются скорее правилом, чем исключением, то очевидно, что для теории возмущений имеется необъятная область применения — как в классической, так и в квантовой механике. Мы вернемся к теории возмущений в гл. 7, но в оставшейся части этой главы и в следующей главе мы подготовим весь формальный аппарат, необходимый для того, чтобы перейти к теории возмущений. Наконец, нельзя не упомянуть и тот факт, что статистическая механика широко использует гамильтонов подход; $2s$-мерное (p, q)-пространство в статистической механике называется *фазовым пространством*.

Из того обстоятельства, что уравнения Лагранжа инвариантны относительно преобразований от одной совокупности переменных q_k к другой q'_k [см. (2.309)], немедленно вытекает, что если определить p'_k согласно формуле

$$p'_k = \frac{\partial L(q', \dot{q}')}{\partial \dot{q}'_k}, \qquad (5.112)$$

то уравнения движения, записанные через переменные

q'_k, p'_k, будут иметь вид:

$$\dot{q}'_k = \frac{\partial H(p', q')}{\partial p'_k}, \qquad \dot{p}'_k = -\frac{\partial H(p', q')}{\partial q'_k}. \tag{5.113}$$

Теперь, когда для описания нашей системы выбрана совокупность $2s$ координат, безусловно существуют более общие преобразования от одной совокупности координат к другой. Такими преобразованиями мы займемся в следующем параграфе.

§ 5.2. Канонические преобразования

Очень часто найти решения уравнений движения (5.108) оказывается невозможным. Одним из возможных способов упрощения уравнений может быть преобразование от совокупности переменных p_k и q_k к другой совокупности переменных, скажем, α_k и β_k ($k = 1, 2, \ldots, s$). Если окажется, что в новых переменных уравнения движения проще, мы должны считать это за успех. Мы не станем заниматься всеми возможными преобразованиями, а ограничимся лишь *каноническими* или *контактными преобразованиями*, которые определяются как такие преобразования, которые и в новых переменных оставляют уравнения движения в канонической форме. Итак, если уравнениями

$$p_k = p_k(\alpha, \beta), \qquad q_k = q_k(\alpha, \beta) \tag{5.201}$$

задаются канонические преобразования от переменных p и q к переменным α, β, то уравнения движения, записанные через переменные α и β, должны иметь вид

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k}, \qquad \dot{\beta}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k}, \tag{5.202}$$

где через $\bar{H}$ обозначен гамильтониан (энергия), выраженный в переменных α и β.

Нетрудно найти простые примеры канонических преобразований. Такие преобразования, как

$$q_k = \alpha_k, \qquad p_k = -\beta_k$$

или же

$$q_k = -\alpha_k, \qquad p_k = \beta_k,$$

очевидно, являются каноническими.

Точно так же точечные преобразования

$$\beta_k = \beta_k(q_1, \ldots, q_s), \qquad \alpha_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_k} \tag{5.203}$$

оказываются каноническими, как мы убедились в этом в конце предыдущего параграфа.

Теперь мы покажем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы преобразование от p_k и q_k к переменным α_k и β_k было каноническим, является существование такой функции $W(q_k, \beta_k)$ от q_k и β_k, что

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \qquad \alpha_k = -\frac{\partial W}{\partial \beta_k}. \tag{5.204}$$

Для доказательства необходимости мы прежде всего вспоминаем, что из основ теории вариаций вытекает равенство

$$\delta \frac{dW}{dt} - \frac{d}{dt} \delta W = 0, \tag{5.205}$$

которое можно развернуть следующим образом:

$$-\sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k \dot{q}_k \delta p_k + \sum_k \dot{\alpha}_k \delta \beta_k - \sum_k \dot{\beta}_k \delta \alpha_k = 0. \tag{5.206}$$

Из уравнений (5.108) можно получить:

$$-\sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k \dot{q}_k \delta p_k = \delta H, \tag{5.207}$$

а сопоставляя (5.206) и (5.207), мы находим:

$$\delta H = \delta \bar{H} = -\sum_k \dot{\alpha}_k \delta \beta_k + \sum_k \dot{\beta}_k \delta \alpha_k, \tag{5.208}$$

— выражение, из которого сразу же следуют уравнения (5.202), поскольку H и $\bar{H}$ — это одна и та же функция, но выраженная через разные переменные.

Мы должны теперь показать, что если преобразования канонические, то можно найти функцию $W(q, \beta)$ такую, что удовлетворяются уравнения (5.204). Эти уравнения, конечно, и определяют само преобразование.

Для того чтобы найти функцию $W(q, \beta)$, мы покажем сначала, как получаются канонические уравнения движения из модифицированного принципа Гамильтона, а именно из условия

$$\int L\, dt = \text{extremum}, \tag{5.209}$$

где теперь, в отличие от исходного соотношения (2.234), подынтегральное выражение считается функцией $2s$ переменных. Снова вводя переменные r_k, чтобы подчеркнуть этот факт, опять рассматривается задача об экстремуме интеграла

$$\delta \int L(q_k, r_k)\, dt = 0, \tag{5.210}$$

где (5.101) выступают как дополнительные условия.

В гл. 2 мы уже сталкивались с тем, как нужно пользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа, чтобы решать вариационные задачи с дополнительными условиями. Однако сейчас возникают некоторые осложнения, и мы рассмотрим всю процедуру в деталях. Если мы подробно распишем (5.210), мы найдем под знаком интеграла вариации δq_k и δr_k, которые теперь уже будут функциями t; поэтому мы явно отметим эту зависимость, написав $\delta q_k(t)$ и $\delta r_k(t)$. Эти функции времени не независимы; они должны удовлетворять условию

$$\delta \dot{q}_k(t) - \delta r_k(t) = 0, \tag{5.211}$$

где, так же как и в гл. 2, через $\delta \dot{q}_k$ обозначены производные по времени от δq_k. От ограничений, наложенных на вариации δq_k и δr_k, можно избавиться обычным путем, умножая левую часть каждого из s уравнений (5.211) на множитель λ_k, зависящий от времени, затем складывая эти выражения и добавляя полученную сумму к подынтегральному выражению в (5.210). Таким образом мы приходим к новой задаче на экстремум:

$$\delta \int \left[L + \sum_k \lambda_k (\dot{q}_k - r_k)\right] dt = 0. \tag{5.212}$$

Теперь уже вариации q_k и r_k могут рассматриваться как независимые, и, как это следует из выражения для коэффициентов перед δr_k,

$$\lambda_k = \frac{\partial L}{\partial r_k}. \tag{5.213}$$

Следовательно, (5.212) перепишется так:

$$\delta \int \left[L + \sum_k \frac{\partial L}{\partial r_k} (\dot{q}_k - r_k)\right] dt = 0. \tag{5.214}$$

Воспользовавшись (5.103) и (5.104), мы обнаруживаем, что пришли к вариационному принципу:

$$\delta \int \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H\right) dt = 0, \tag{5.215}$$

где подинтегральная функция зависит от $2s$ переменных p_k и q_k и где $\dot{q}_k$ — функции тех же самых переменных, определяемые уравнениями

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{5.216}$$

Расписывая явно вариацию подинтегрального выражения в (5.215), интегрируя члены, содержащие $\delta\dot{q}_k$, по частям и принимая во внимание, что благодаря (2.306) проинтегрированные члены обращаются в нуль, мы получим:

$$\int \sum_k \left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] dt = 0, \tag{5.217}$$

откуда и вытекают уравнения (5.108). Мы показали таким образом, что вариационный принцип (5.215) эквивалентен каноническим уравнениям движения (5.108).

Если преобразование от переменных p_k, q_k к переменным α_k, β_k каноническое, то вариационный принцип (5.215) должен вести к тем же самым уравнениям, но уже в переменных α_k и β_k:

$$\delta \int \left(\sum_k \alpha_k \dot{\beta}_k - \bar{H}\right) dt = 0, \tag{5.218}$$

где $\bar{H}$ — та же самая функция, что и H, но выраженная уже через переменные α_k и β_k. Уравнения (5.215) и (5.218) могут быть одновременно справедливыми только при условии

$$C\left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H\right) = \sum_k \alpha_k \dot{\beta}_k - \bar{H} + \frac{d}{dt} W(q, \beta), \tag{5.219}$$

где C — отличная от нуля постоянная. Поскольку $H = \bar{H}$, то и уравнения (5.204) удовлетворяются; тем самым доказательство завершено.

Функция $W(q, \beta)$ называется *производящей* (порождающей) *функцией*, так как уравнения (5.204) порождают канонические преобразования. Можно рассмотреть другие порождающие функции. Фактически существуют четыре различные комбинации двух наборов s переменных: q_k, β_k; q_k, α_k; p_k, β_k и p_k, α_k, которые очевидным образом подходят для нашей цели. Четыре производящие функции и соответствующие уравнения, определяющие преобразования переменных, мы здесь выпишем:

$$\text{(a)}: \ W(q_k, \beta_k); \ p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \qquad \alpha_k = -\frac{\partial W}{\partial \beta_k}; \ W;$$

$$\text{(b)}: \ S(q_k, \alpha_k); \ p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \qquad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}; \qquad W = S - \sum_k \alpha_k \beta_k;$$

$$\text{(c)}: \ T(p_k, \beta_k); \ q_k = -\frac{\partial T}{\partial p_k}, \ \alpha_k = -\frac{\partial T}{\partial \beta_k}; \quad W = T + \sum_k p_k q_k;$$

$$\text{(d)}: \ U(p_k, \alpha_k); \ q_k = -\frac{\partial U}{\partial p_k}, \ \beta_k = \frac{\partial U}{\partial \alpha_k};$$

$$W = U + \sum_k p_k q_k - \sum_k \alpha_k \beta_k. \tag{5.220}$$

Мы привели здесь также соотношения между соответствующей производящей функцией и функцией W, которая согласно теореме, доказанной в начале этого параграфа, всегда существует для любого канонического преобразования.

Преобразования, определяемые согласно (5.220), являются примерами *преобразований Лежандра*, играющих важную роль в термодинамике.

Рассмотрим несколько весьма простых преобразований:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && W = \sum_k q_k \beta_k; \\ &\text{(II)} && T = -\sum_k p_k \beta_k; \\ &\text{(III)} && U = \sum_k p_k \alpha_k; \\ &\text{(IV)} && S = \sum_k \alpha_k Q_k(q). \end{aligned} \tag{5.221}$$

Из первого преобразования вытекает, что

$$p_k = \beta_k, \qquad q_k = -\alpha_k; \tag{5.222}$$

именно это преобразование и было кратко рассмотрено в начале этого параграфа; оно приводит к совокупности переменных, в которой «старые» импульсы превращаются в «новые» координаты, а старые координаты превращаются в новые импульсы. Из этого преобразования видно, что едва ли имеет смысл придерживаться терминов «импульсы» и «координаты» для величин α_k и β_k. Куда лучше называть их *канонически сопряженными переменными*.

Обратим внимание на то, что для преобразования (5.222) не существует производящей функции T. Из (5.220) и (5.222) непосредственно следует, что в этом случае $T \equiv 0$.

Второе преобразование — это тождественное преобразование

$$q_k = \beta_k, \qquad \alpha_k = p_k. \tag{5.223}$$

В этом случае мы найдем, что $W \equiv 0$. Это в точности такое же преобразование, какое порождается функцией

$$S = \sum_k \alpha_k q_k. \tag{5.224}$$

Третье преобразование

$$q_k = -\alpha_k, \ \beta_k = p_k \tag{5.225}$$

совпадает с первым.

Последнее преобразование точечное, так же как и преобразование (5.203),

$$\beta_k = Q_k(q_k), \ p_k = \sum_l \alpha_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_k}. \tag{5.226}$$

Мы не станем рассматривать здесь никаких других преобразований, потому что в следующей главе нам придется заняться обширным классом преобразований типа (5.220 b).

§ 5.3. Скобки Пуассона и Лагранжа; бесконечно малые преобразования

Канонические уравнения движения (5.108) описывают поведение p_k и q_k. Из этих уравнений движения можно найти и уравнение движения для любой функции $F(p_k, q_k)$ этих переменных (для простоты мы будем полагать, что функция F не зависит явно от времени). Нетрудно убедиться в том, что

$$\dot{F} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right), \tag{5.301}$$

где использованы уравнения (5.108) и принято во внимание сделанное предположение о том, что $\partial F / \partial t = 0$.

Если ввести обозначение

$$\{f,\ g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right) = -\{g,\ f\}, \qquad (5.302)$$

то (5.301) можно переписать в виде

$$\dot{F} = \{F,\ H\}. \qquad (5.303)$$

Комбинация $\{f,\ g\}$ носит наименование *скобок Пуассона*. Удобство выражения (5.303) заключается в том, что оно не зависит от выбора координат, потому что, как мы сейчас докажем, скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований. В этом параграфе мы выведем некоторые свойства скобок Пуассона, а также связанных с ними *скобок Лагранжа*, которые определяются соотношением

$$[f,\ g] = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial f}\frac{\partial p_k}{\partial g} - \frac{\partial p_k}{\partial f}\frac{\partial q_k}{\partial g}\right) = -[g,\ f]. \qquad (5.304)$$

Скобки Лагранжа также инвариантны относительно канонических преобразований. Сравнивая (5.302) и (5.304), можно заметить, что скобки Лагранжа в некотором смысле являются обратной величиной скобок Пуассона. Это утверждение можно уточнить следующим образом. Если γ_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2s)$ — набор $2s$ независимых функций от p_k и q_k, то можно доказать прямой подстановкой справедливость равенства

$$\sum_k \{\gamma_k,\ \gamma_l\}\,[\gamma_k,\ \gamma_m] = \delta_{lm}, \qquad (5.305)$$

где δ_{kl} — символы Кронекера, определенные согласно (3.132).

Вычислим так называемые фундаментальные скобки, т. е. скобки, примененные к p_k и q_k. Поскольку p_k и q_k являются независимыми переменными, мы можем написать:

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_l} = \delta_{kl}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}. \qquad (5.306)$$

Из (5.302), (5.304) и (5.306) нетрудно получить, что

$$\{q_k,\ p_l\} = \delta_{kl}, \quad \{q_k,\ q_l\} = 0, \quad \{p_k,\ p_l\} = 0; \qquad (5.307)$$

$$[q_k,\ p_l] = \delta_{kl}, \quad [q_k,\ q_l] = 0, \quad [p_k,\ p_l] = 0. \qquad (5.308)$$

Равенства (5.307) и (5.308) определяют инвариантное свойство канонических переменных. Действительно, вычисляя $\partial\bar{H}(\alpha,\ \beta)/\partial\alpha_i$, мы получим:

$$\frac{\partial\bar{H}}{\partial\alpha_i}=\sum_k\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial\alpha_i}\right]=\sum_k\left[\dot{q}_k\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}-\dot{p}_k\frac{\partial q_k}{\partial\alpha_i}\right]=$$
$$=\sum_{k,\ j}\left\{\left[\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}\frac{\partial q_k}{\partial\beta_j}-\frac{\partial q_k}{\partial\alpha_i}\frac{\partial p_k}{\partial\beta_j}\right]\dot{\beta}_j+\left[\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}\frac{\partial q_k}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial q_k}{\partial\alpha_i}\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_j}\right]\dot{\alpha}_j\right\}=$$
$$=\sum_j[\beta_j,\ \alpha_i]\,\dot{\beta}_j+\sum_j[\alpha_j,\ \alpha_i]\,\dot{\alpha}_j, \tag{5.309}$$

откуда сравнением (5.309) с (5.202) следует, что

$$[\beta_j,\ \alpha_i]=\delta_{ij},\quad [\alpha_j,\ \alpha_i]=0. \tag{5.310}$$

Последние фундаментальные скобки Лагранжа $[\beta_i,\ \beta_j]$ также обращаются в нуль, как это следует из рассмотрения $\partial\bar{H}/\partial\beta_i$.

Аналогично, для величин α_k, β_k выполняются соотношения:

$$\{\beta_j,\ \alpha_i\}=\delta_{ij},\quad \{\alpha_i,\ \alpha_j\}=0,\quad \{\beta_i,\ \beta_j\}=0. \tag{5.311}$$

Для доказательства составим выражение для $\dot{\alpha}_i$:

$$\dot{\alpha}_i=\sum_k\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_k}\dot{p}_k\right]=\sum_k\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right]=$$
$$=\sum_{k,\ j}\left\{\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_k}\frac{\partial\alpha_j}{\partial p_k}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial\alpha_j}{\partial q_k}\right]\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}+\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_k}\frac{\partial\beta_j}{\partial p_k}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial\beta_j}{\partial q_k}\right]\frac{\partial H}{\partial\beta_j}\right\}=$$
$$=\sum_j\{\alpha_i,\ \alpha_j\}\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}+\sum_j\{\alpha_i,\ \beta_j\}\frac{\partial H}{\partial\beta_j}. \tag{5.312}$$

Из сопоставления (5.202) и (5.312) (а также из аналогичного выражения для $\dot{\beta}_i$) вытекают приведенные выражения (5.311).

Мы доказали, что фундаментальные скобки удовлетворяют соотношениям (5.307) и (5.308) независимо от выбора канонических переменных. Это означает, что при переходе от переменных p_k, q_k к переменным α_i, β_i выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\{q_k,\ p_l\}'=\{q_k,\ p_l\}=\delta_{kl},\quad \{q_k,\ q_l\}'=\{q_k,\ q_l\}=0,\\ \{p_k,\ p_l\}'=\{p_k,\ p_l\}=0.\end{gathered} \tag{5.313}$$

Строго говоря, мы доказали это утверждение для α_i и β_i, но точно такое же доказательство годится и тогда, когда мы рассматриваем скобки (5.313). В (5.313) мы отметили скобки Пуассона, записанные в переменных α_i,

β_i, штрихом. Соотношения, сходные с (5.313), справедливы также и для скобок Лагранжа.

Теперь мы покажем, что скобки, которые до сих пор были определены через канонические переменные специального вида p_k и q_k, инвариантны относительно канонических преобразований. Мы проведем доказательство для скобок Пуассона; другими словами, мы хотим доказать:

$$\{f, g\}' = \{f, g\}; \tag{5.314}$$

доказательство для скобок Лагранжа нетрудно получить тем же самым методом или же принимая во внимание тот факт, что (5.305) справедливо независимо от выбора канонических переменных.

До начала доказательства отметим, что

$$\{p_k, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad \{q_k, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}. \tag{5.315}$$

Если вместо f подставить сюда H, то с учетом (5.303) уравнения (5.315) сведутся к уравнениям движения (5.108). Теперь займемся выражением $\{f, g\}'$:

$$\begin{aligned}
\{f, g\}' &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\frac{\partial g}{\partial \beta_i}\right) = \\
&= \sum_{i,k}\left[\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \beta_i} + \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \beta_i}\right)\right] = \\
&= \sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\{f, q_k\}' + \sum_k \frac{\partial g}{\partial p_k}\{f, p_k\}'.
\end{aligned} \tag{5.316}$$

Полагая в (5.316) сначала $f \equiv q_l$, а затем $f \equiv p_l$, и используя (5.313) и (5.315), мы найдем:

$$\begin{aligned}
\{q_l, g\}' &= \sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\{q_l, q_k\}' + \sum_k \frac{\partial g}{\partial p_k}\{q_l, p_k\}' = \\
&= \sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\{q_l, q_k\} + \sum_k \frac{\partial g}{\partial p_k}\{q_l, p_k\} = \\
&= \frac{\partial g}{\partial p_l} = \{q_l, g\};
\end{aligned} \tag{5.317}$$

$$\begin{aligned}
\{p_l, g\}' &= \sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\{p_l, q_k\}' + \sum_k \frac{\partial g}{\partial p_k}\{p_l, p_k\}' = \\
&= \sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\{p_l, q_k\} + \sum_k \frac{\partial g}{\partial p_k}\{p_l, p_k\} = \\
&= -\frac{\partial g}{\partial q_l} = \{p_l, g\}.
\end{aligned} \tag{5.318}$$

Имея в виду инвариантность скобок $\{q_l, g\}$ и $\{p_l, g\}$, мы получаем из (5.316), воспользовавшись соотношениями (5.315):

$$\{f, g\}' = \sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k}\{f, q_k\} + \sum_k \frac{\partial g}{\partial p_k}\{f, p_k\} =$$
$$= \sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right] = \{f, g\}; \qquad (5.319)$$

этим и завершается наше доказательство.

Перейдем теперь к интегралам движения; здесь нам понадобится так называемое тождество Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \qquad (5.320)$$

Доказательство соотношения (5.320) утомительно, но несложно, и мы оставим его читателю; отметим только полезное соотношение:

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \qquad (5.321)$$

Из равенства (5.303) следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы функция F была бы интегралом движения, будет условие

$$\{F, H\} = 0. \qquad (5.322)$$

Если воспользоваться формулой (5.320), положив там $f \equiv F$, $g \equiv G$ и $h \equiv H$, где H — гамильтониан системы, а F и G — интегралы движения, мы найдем:

$$\{H, \{F, G\}\} = -\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{F, H\}\} = 0; \qquad (5.323)$$

другими словами: если функции F и G являются интегралами движения, то их скобка Пуассона также будет интегралом движения. Очень часто таким способом можно построить новые интегралы движения; очень часто, но далеко не всегда. Мы вскоре в этом убедимся.

В качестве примеров интегралов движения мы можем упомянуть полный момент импульса и полный импульс системы частиц. Мы остановимся на свойствах этих величин несколько подробнее.

Начнем с вектора момента импульса системы частиц $\boldsymbol{M}$. Допустим, что система может быть описана декартовыми координатами x_i, так что обобщенными импульсами будут обычные импульсы p_i. Вектор полного момента импульса определяется согласно (1.309) и записывается через x_i и

$\boldsymbol{p}_l$ в виде:

$$\boldsymbol{M}=\sum_l [\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{p}_l]. \tag{5.324}$$

Из (5.324) и (5.307) нетрудно получить, что

$$\{M_x, M_y\}=M_z, \{M_y, M_z\}=M_x, \{M_z, M_x\}=M_y. \tag{5.325}$$

Можно доказать также и следующие соотношения:

$$\{M^2, M_x\}=0, \{M^2, M_y\}=0, \{M^2, M_z\}=0; \tag{5.326}$$

$$\begin{gathered}\{P_x, M_x\}=0, \{P_y, M_y\}=0, \{P_z, M_z\}=0;\\ \{P_x, M^2\}=0, \{P_y, M^2\}=0, \{P_z, M^2\}=0;\\ \{P_x, M_y\}=\{M_x, P_y\}=P_z,\\ \{P_y, M_z\}=\{M_y, P_z\}=P_x,\\ \{P_z, M_x\}=\{M_z, P_x\}=P_y,\end{gathered} \tag{5.327}$$

где через $\boldsymbol{P}$ обозначен полный импульс системы:

$$\boldsymbol{P}=\sum_l \boldsymbol{p}_l. \tag{5.328}$$

Из (5.328) и (5.307) вытекает, что для любой пары компонент P_k и P_l вектора $\boldsymbol{P}$ мы получим: $\{P_k, P_l\}=0$.

В гл. 2 рассматривалась связь между бесконечно малыми преобразованиями и интегралами движения. Мы еще раз вернемся к этой связи, но на этот раз с точки зрения уравнений Гамильтона.

Допустим, что гамильтониан H инвариантен относительно бесконечно малых преобразований такого вида, что только одна из обобщенных координат изменяется (скажем, q_{k_0}), тогда как все остальные координаты и все импульсы остаются без изменения; это означает, что

$$\delta H=0, \quad \text{если} \quad q_{k_0}\to q_{k_0}+\delta q_{k_0}, \tag{5.329}$$

или же

$$\frac{\partial H}{\partial q_{k_0}}=0. \tag{5.330}$$

Из (5.330) и (5.315) вытекает, что

$$\{H, p_{k_0}\}=0, \tag{5.331}$$

и p_{k_0} оказывается, таким образом, интегралом движения. (Можно, конечно, сразу из (5.330) и (5.108) получить, что $\dot{p}_{k_0}=0$, т. е. что p_{k_0} — константа.)

Часто можно указать целый класс преобразований, включающий в себя бесконечно малые преобразования, относительно которого гамильтониан H остается инвариантным; однако не всегда легко найти ту конкретную координату q_{k_0}, которая соответствует этим бесконечно малым преобразованиям; поэтому не всегда сразу ясно, какая функция координат и импульсов будет интегралом движения.

Два простейших случая, которыми мы и ограничимся, — трансляционная и поворотная инвариантность. В двух этих случаях мы сможем найти конкретную q_{k_0}, соответствующую бесконечно малым преобразованиям. Обсуждая трансляционную и поворотную инвариантность, мы будем предполагать, что можем обойтись декартовыми координатами $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Начнем с трансляционной инвариантности. Это значит, что гамильтониан H инвариантен относительно преобразований

$$\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{5.332}$$

Координаты q_{k_0}, которые нас интересуют, — это, конечно, три компоненты радиус-вектора центра масс системы, так что компоненты вектора полного импульса системы $\boldsymbol{P}$, определяемого согласно (5.328), оказываются интегралами движения. Это можно доказать следующим образом. С одной стороны, мы имеем:

$$\{\boldsymbol{P}, H\} = \sum_i \{\boldsymbol{p}_i, H\} = -\sum_i \nabla_i H, \tag{5.333}$$

где мы воспользовались (5.315). С другой стороны, из изменения δH гамильтониана при преобразованиях (5.332)

$$\delta H = \sum_i (\delta \boldsymbol{x}_i \cdot \nabla_i H) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i \nabla_i H\right), \tag{5.334}$$

и из требования, чтобы $\delta H = 0$ для любого $\boldsymbol{\varepsilon}$, вытекает, что $\sum_i \nabla_i H$ обращается в нуль; таким образом, из (5.333) мы и получаем, что три компоненты $\boldsymbol{P}$ являются интегралами движения.

Мы увидим ниже, что про вектор $\boldsymbol{P}$ можно сказать, что он порождает трансляцию. В этой связи интересно рассмотреть изменение функции f от координат $\boldsymbol{x}_i$ при преобразовании (5.332). Мы найдем:

$$\delta f = \sum_i (\delta \boldsymbol{x}_i \cdot \nabla_i f) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i \nabla_i f\right) = (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \{f, \boldsymbol{P}\}). \tag{5.335}$$

Очень сходна ситуация и для поворотной инвариантности. Здесь нас интересует преобразование

$$\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{x}_i], \quad i = 1, \ldots, N; \ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{n}\,\delta\theta, \tag{5.336а}$$

соответствующее вращению вокруг оси, параллельной единичному вектору $\boldsymbol{n}$, на угол $\delta\theta$. Преобразование (5.336а) справедливо для всех векторов в декартовой системе координат, так что, определяя изменение в гамильтониане или какой-либо иной функции от $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{p}_i$, мы должны помнить, что импульсы $\boldsymbol{p}_i$ преобразуются в точности так же, а именно согласно формуле

$$\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_i + [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}_i], \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{5.336б}$$

Координаты q_{k_0}, которые мы хотим найти, — это углы; соответствующие интегралы движения — компоненты момента импульса. В рассматриваемом случае мы имеем прежде всего:

$$\{\boldsymbol{M}, H\} = \left\{\sum_i [\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{p}_i], H\right\} = -\sum_i [\boldsymbol{x}_i, \nabla_i H] + \\ + \sum_i [\nabla_{pi} H, \boldsymbol{p}_i] = -\sum_i [\boldsymbol{x}_i, \nabla_i H], \tag{5.337}$$

где через ∇_{pi} обозначен символический вектор с компонентами $\partial/\partial p_{xi}$, $\partial/\partial p_{yi}$, $\partial/\partial p_{zi}$, а также учтен тот факт, что в декартовых координатах гамильтониан H содержит импульсы $\boldsymbol{p}_i$ лишь в комбинациях $\boldsymbol{p}_i^2/2m$, так что $\nabla_{pi} H = \boldsymbol{p}_i/m_i$.

Вместо (5.334) мы получим теперь:

$$\delta H = \sum_i ([\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{x}_i] \cdot \nabla_i H) + \sum_i ([\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}_i] \cdot \nabla_{pi} H) = \\ = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i [\boldsymbol{x}_i, \nabla_i H]\right) + \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i [\boldsymbol{p}_i, \nabla_{pi} H]\right) = \\ = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_i [\boldsymbol{x}_i, \nabla_i H]\right). \tag{5.338}$$

Из того, что $\delta H = 0$ для любого $\boldsymbol{\varepsilon}$, вытекает, что $\{\boldsymbol{M}, H\} = 0$, так что три компоненты вектора полного момента импульса $\boldsymbol{M}$ будут интегралами движения, если гамильтониан H инвариантен относительно вращений.

Выясним сейчас, в каком смысле про момент импульса $\boldsymbol{M}$ можно сказать, что он порождает вращения. Для дальнейших рассуждений полезно найти изменение δf функции $f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{p}_i)$ при преобразовании (5.336). Для величины

δf мы находим:

$$\delta f = \sum_i (\delta x_i \cdot \nabla_i f) + \sum_i (\delta p_i \cdot \nabla_{pi} f) =$$
$$= \sum_i ([\varepsilon,\ x_i] \cdot \nabla_i f) + \sum_i ([\varepsilon,\ p_i] \cdot \nabla_{pi} f) =$$
$$= \left(\varepsilon \cdot \sum_i [x_i,\ \nabla_i f]\right) + \left(\varepsilon \cdot \sum_i [p_i,\ \nabla_{pi} f]\right) =$$
$$= (\varepsilon \cdot \{f,\ M\}). \tag{5.339}$$

Допустим на мгновение, что гамильтониан H инвариантен как по отношению к трансляциям, так и по отношению к вращениям. Пусть мы нашли, что интегралами движения являются M_x, M_y и P_x. Тогда можно воспользоваться результатом, полученным нами ранее, а именно тем, что скобки Пуассона двух интегралов движения снова дают интеграл движения; комбинируя этот результат с (5.325), мы докажем, что компонента M_z должна быть также интегралом движения, а в сочетании с (5.327) мы докажем, что P_z, и тогда уже и P_y, также должны быть интегралами движения. Таким образом, мы выяснили, что если две компоненты вектора момента импульса являются интегралами движения, то третья компонента также будет интегралом движения. Но это не верно для вектора импульса, поскольку $\{P_x,\ P_y\} = 0$. Коль скоро мы нашли P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, мы исчерпали все возможности полностью. Никаких новых интегралов движения из скобок Пуассона, содержащих шесть этих величин, получить уже нельзя.

Из того, что $\{M_x,\ M_y\} = M_z$, и из соотношения $\{p_k, p_l\} = 0$ вытекает, что две компоненты вектора момента импульса не могут быть одновременно каноническими импульсами. С другой стороны, $\{M^2,\ M_x\} = 0$, так что абсолютная величина полного момента импульса может быть каноническим импульсом одновременно с одной из своих компонент (ср. задачу о движении в поле центральной силы, § 2.3, и хорошо известную ситуацию в квантовой механике).

В предыдущем параграфе мы видели, что производящая функция

$$S = \sum_k \alpha_k q_k \tag{5.340}$$

приводит к тождественным преобразованиям, т. е.

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \alpha_k, \quad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = q_k. \tag{5.341}$$

Рассмотрим теперь бесконечно малые преобразования, порождаемые функцией

$$S=\sum_k \alpha_k q_k + \varepsilon f(\alpha, q), \tag{5.342}$$

где ε — бесконечно малая величина, а f — произвольная функция α_k и q_k. Преобразование, порождаемое функцией (5.342), имеет вид:

$$p_k=\alpha_k+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad \beta_k=q_k+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial \alpha_k}, \tag{5.343}$$

так что с точностью до первого порядка по ε оно эквивалентно преобразованию:

$$\alpha_k=p_k-\varepsilon\frac{\partial f(p, q)}{\partial q_k}, \quad \beta_k=q_k+\varepsilon\frac{\partial f(p, q)}{\partial p_k}. \tag{5.344}$$

Теперь мы займемся несколькими специальными случаями бесконечно малых преобразований. Первый интересующий нас случай возникает, если $\varepsilon=\delta t$ и $f=H(\alpha, q)$, где H — гамильтониан системы. Тогда из (5.344) мы имеем:

$$\beta_k-q_k=\delta q_k=\delta t\,\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \alpha_k-p_k=\delta p_k=-\delta t\,\frac{\partial H}{\partial q_k}; \tag{5.345}$$

другими словами: *гамильтониан порождает движение системы в фазовом пространстве во времени.*

В качестве второго частного случая мы выберем $f=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}))$, где $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}_i)$ — полный импульс системы, определяемый согласно (5.328), и где $\boldsymbol{\alpha}$ — векторы, связанные с $\boldsymbol{p}_i$ точно так же, как α_k связаны с p_k. Выражение для f может быть записано еще и так:

$$f=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}))=\left(\boldsymbol{n}\cdot\sum_i \boldsymbol{\alpha}_i\right), \tag{5.346}$$

и мы получим из (5.344):

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{p}_i, \quad \boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{5.347}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\boldsymbol{n}$ и где $\boldsymbol{\beta}_i$ — векторы, канонически сопряженные с $\boldsymbol{\alpha}_i$. Выражения (5.347) совпадают с соотношениями (5.332), которые описывают трансляции.

Последний пример получится, если положить

$$f=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}))=\left(\boldsymbol{n}\cdot\sum_i[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i]\right), \tag{5.348}$$

где $\boldsymbol{M}$ — полный момент импульса, определяемый согласно (5.324). Из (5.344) мы получим теперь:

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{p}_i+[\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}_i], \quad \boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{x}_i+[\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{x}_i], \tag{5.349}$$

где опять же $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\boldsymbol{n}$. Выражения (5.349) совпадают с (5.336) и соответствуют, таким образом, вращению.

Только что проведенные рассуждения разъясняют, что мы имели в виду, когда утверждали, что полный импульс и полный момент импульса порождают соответственно трансляции и вращения.

Изменение произвольной функции $F(p, q)$ от p_k и q_k при преобразованиях, порождаемых функцией S (5.342), определяется равенством

$$\delta F=\sum_k\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k\right]=$$
$$=\varepsilon\sum_k\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}\right]=\varepsilon\{F, f\}. \qquad (5.350)$$

Можно сравнить это выражение с (5.335) и (5.339), которые получаются подстановкой выражений (5.346) и (5.348) для f соответственно в (5.350) с учетом того, что $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\boldsymbol{n}$.

Интересный частный случай получится, если подставить в (5.350) вместо функции F гамильтониан H. Мы получим тогда:

$$\delta H=\varepsilon\{H, f\}, \qquad (5.351)$$

и мы видим, что любой интеграл движения порождает бесконечно малые преобразования, оставляющие гамильтониан H инвариантным, поскольку, если f интеграл движения, то $\{H, f\}=0$. Это как раз теорема, обратная той, которую мы доказали чуть раньше: всегда можно найти интеграл движения, если известны бесконечно малые преобразования, оставляющие H инвариантным.

В заключение этого параграфа мы разберем движение точечной заряженной частицы в электромагнитном поле. Уравнения движения мы выберем в форме, вытекающей из (5.108) и (5.315):

$$\dot q_k=\{q_k, H\}, \qquad \dot p_k=\{p_k, H\}, \qquad (5.352)$$

— в форме, являющейся частным случаем (5.303). Гамильтониан этой задачи можно получить из лагранжиана [см. (2.507)]:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2-e\varphi+e(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}), \qquad (5.353)$$

откуда сначала мы найдем:

$$\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{x}}+e\boldsymbol{A}, \qquad (5.354)$$

а затем уже и гамильтониан:

$$H = (\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}) - L = (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2/2m + e\varphi. \tag{5.355}$$

Уравнения движения примут вид:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{x},\ H\}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{p},\ H\}, \tag{5.356}$$

или

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})/m, \tag{5.357}$$

что совпадает с (5.354), а также

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -e\nabla\varphi + (e/m)\,[(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}),\ [\nabla,\ \boldsymbol{A}]], \tag{5.358}$$

что эквивалентно (2.509) и может быть, следовательно, приведено к виду:

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = e\left\{\boldsymbol{E} + [\dot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{B}]\right\}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = [\nabla,\ \boldsymbol{A}]. \tag{5.359}$$

§ 5.4. Вариационные принципы; время и энергия как канонически сопряженные переменные

Мы доказали в гл. 2, что принцип Д'Аламбера может быть выражен в форме (2.229), которая, если воспользоваться (2.232), эквивалентна выражению

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,(T - U)\,dt = \left[\sum_i m_i\,(\dot{\boldsymbol{x}}_i\cdot\delta\boldsymbol{x}_i)\right]_{t_1}^{t_2}; \tag{5.401}$$

в (5.401) $\delta\boldsymbol{x}_i$ — любые вариации $\boldsymbol{x}_i$, совместимые с кинематическими соотношениями. Для того круга вопросов, к которому мы переходим, очень существенно подчеркнуть, что при выводе (5.401) рассматривались такие вариации, при которых время не варьировалось. Другими словами, сравнивались точки на исходной и новой траекториях в одни и те же моменты времени (точки A_n и B_n на рис. 25).

В гл. 2 мы убедились также в том, что если сравниваются две допустимые траектории при условии $\delta\boldsymbol{x}_i = 0$ как при $t = t_1$, так и при $t = t_2$, уравнение (5.401) эквивалентно соотношению

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt = 0 \tag{5.402}$$

— выражению, из которого совершенно непосредственно вытекают уравнения Лагранжа (2.308).

Теперь мы рассмотрим вариации орбит иного типа, а именно такие, когда сравниваются x_i в момент t с $x_i+\Delta x_i$ в момент $t+\Delta t$ (точки A_n и C_n на рис. 25). На рис. 25 A_1, A_2, ...— точки исходной траектории, которые проходятся соответственно в моменты времени t_1, t_2, ...; B_1, B_2, ...— точки на новой траектории, которые проходятся в те же самые моменты времени t_1, t_2, ...; C_1, C_2, ...— точки на новой траектории, которые проходятся в варьированные моменты времени $t_1+\Delta t_1$, $t_2+\Delta t_2$,... Каждой точке A_n исходной траектории сопоставляется точка B_n в тот же самый момент времени на новой траектории на равных правах с точкой C_n в варьированное время на новой траектории, так что можно записать:

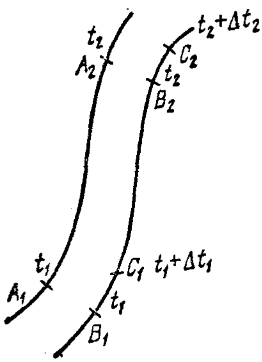

Рис. 25. Вариация траекторий.

$$x_{iB}=x_{iA}+\delta x_i,$$
$$x_{iC}=x_{iA}+\Delta x_i, \tag{5.403}$$

где δx_i и Δx_i связаны соотношением

$$\Delta x_i=\delta x_i+\dot{x}_i\,\Delta t. \tag{5.404}$$

Уравнения (5.402) были получены для $A\to B$-вариации. Если нас интересует вариационный принцип для $A\to C$-вариации, нам следует принять во внимание, что теперь уже нужно варьировать также и пределы интегрирования.

Прежде всего мы определим *интеграл действия* уравнением

$$I=\int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt. \tag{5.405}$$

Его вариация запишется следующим образом:

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(2T)\,dt+2T\,\delta t\Big|_{t_1}^{t_2}=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\delta(T+U)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-U)\,dt+2T\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2},$$

или же

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta E\,dt+\sum_i m_i(\dot{x}_i\cdot\Delta x_i)\Big|_{t_1}^{t_2}, \qquad (5.406)$$

где были использованы (5.401) и (5.404) и тот факт, что $\delta t\equiv\Delta t$; кроме того, мы применили основную формулу варьирования интеграла:

$$\delta\int_p^q f(x)\,dx=\int_p^q\delta f\,dx+f(q)\,\delta q-f(p)\,\delta p. \qquad (5.407)$$

Причина, по которой мы можем воспользоваться (5.401) с δx_i (а не с Δx_i), состоит в том, что вариация времени учтена в выражении $2T\,\Delta t$ для двух граничных точек; иными словами: сначала сравниваются те части исходной и новой траекторий, для которых t пробегает один и тот же интервал, а затем уже рассматривается вклад от сегментов на двух концах траекторий.

Первый вывод, следующий из (5.406), относится к случаю двух периодических орбит, каждая из которых является допустимой орбитой; это означает, что полная энергия E является интегралом движения и, следовательно, не варьируется на траектории. Если обозначить через τ период движения по орбите, мы получим:

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_1+\tau}\delta E\,dt+\sum_i m_i(\dot{x}_i\cdot\Delta x_i)\Big|_{t_1}^{t_1+\tau}=\delta E\int_{t_1}^{t_1+\tau}dt=\tau\,\delta E, \qquad (5.408)$$

или же

$$\tau=\frac{\partial I}{\partial E}, \qquad (5.409)$$

где через I обозначен интеграл действия, распространенный на полную орбиту. Проинтегрированный член обращается в нуль, поскольку мы имеем дело с двумя периодическими орбитами, так что выражения на верхнем и нижнем пределах оказываются равными.

Соотношение (5.409) представляет интерес даже в одномерном случае, когда можно вместо $2T$ написать $p\dot{q}$ [ср. (2.302) и (2.310)], так что для I мы получим:

$$I=\int_{t_1}^{t_1+\tau}p\dot{q}\,dt=\int_{t_1}^{t_1+\tau}p\,dq=\oint p\,dq, \qquad (5.410)$$

где знак $\oint$ указывает на интегрирование по полному периоду. Согласно старой квантовой теории интеграл в правой части (5.410) должен быть проквантован; его нужно считать равным nh (h — постоянная Планка). Тогда

$$I = nh, \tag{5.411}$$

и если мы применим (5.408) к конечным изменениям I и E, т. е. к ΔI и ΔE, мы получим:

$$\Delta I = h \quad \text{и} \quad E = h\omega, \tag{5.412}$$

где

$$\omega = 1/\tau. \tag{5.413}$$

Здесь нужно сослаться также на обсуждение вопроса о переменных действие — угол, которое можно найти в § 6.2.

Второй случай, когда использование (5.406) оказывается удобным, возникает тогда, когда сравниваются две траектории, соответствующие одной и той же энергии ($\delta E = 0$), обладающие одной и той же начальной и конечной точками [$\Delta x_i = 0$, $t = t_1$ или $t = t_2$; обратите внимание на то, что две эти конечные точки достигаются вовсе не в одно и то же время на исходной и новой траекториях: сравните рассуждения, связанные с формулой (5.406)]. В этом случае мы приходим к *принципу наименьшего действия*:

$$\delta I = 0, \quad \text{если} \quad \delta E = 0 \quad \text{и} \quad \Delta x_i = 0 \quad \text{для} \quad t = t_1 \quad \text{и} \quad t = t_2. \tag{5.414}$$

Мы пришли к выводу, что если сравнить две чуть-чуть отличающиеся траектории с теми же самыми конечными точками, то возникают две возможности:

(I) если время не варьируется, то

$$\delta \int L\, dt = 0;$$

(II) если энергия не варьируется, то

$$\delta \int 2T\, dt = 0.$$

Мы уже видели, как получаются уравнения Лагранжа из первого вариационного принципа; сейчас мы обнаружим связь между вторым вариационным принципом и каноническими уравнениями движения.

Для выявления этой связи мы покажем, что канонические уравнения движения эквивалентны вариационному принципу:

$$\delta\int_1^2 \sum_k p_k\,dq_k = 0 \quad (\delta q_k = 0,\ \delta p_k = 0 \text{ в конечных точках}), \tag{5.415}$$

при условии

$$\delta H = 0 \text{ в любой точке траектории.} \tag{5.416}$$

Отличие от принципа наименьшего действия состоит сейчас в том, что рассматриваются такие вариации, при которых все $2s$ переменных p_k, q_k являются независимыми.

Допустим, что можно ввести параметр u, определяющий положение точки на траектории, так что δq_k и δp_k окажутся функциями u. Вариацию (5.415) можно будет записать тогда в виде:

$$\begin{aligned}\delta\int \sum_k p_k\,dq_k &= \int\left(\sum_k \delta p_k\,dq_k + \sum_k p_k\,\delta dq_k\right) = \\ &= \int \sum_k (\delta p_k\,dq_k - \delta q_k\,dp_k) + p_k\,\delta q_k\Big|_1^2 = \\ &= \int \sum_k\left(\delta p_k\frac{dq_k}{du} - \delta q_k\frac{dp_k}{du}\right)du.\end{aligned} \tag{5.417}$$

Вариацию (5.416) можно переписать так:

$$\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\,\delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\,\delta q_k\right) = 0, \tag{5.418}$$

причем полученное соотношение справедливо в любой точке траектории, другими словами, для любого значения u. Воспользовавшись методом множителей Лагранжа, мы получим:

$$\int\sum_k\left[\delta p_k\left(\frac{dq_k}{du} - \lambda(u)\frac{\partial H}{\partial p_k}\right) - \delta q_k\left(\frac{dp_k}{du} + \lambda(u)\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\right]du = 0, \tag{5.419}$$

или же

$$\frac{dq_k}{du} = \lambda(u)\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{du} = -\lambda(u)\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{5.420}$$

Эти выражения определяют направление траектории в $2s$-мерном фазовом пространстве. Если ввести переменную t согласно соотношению

$$dt = \lambda(u)\,du, \quad \text{или} \quad t = \int^u \lambda(u)\,du, \tag{5.421}$$

выражения (5.420) превратятся в канонические уравнения движения:

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{5.422}$$

Связь с принципом наименьшего действия становится даже еще более прозрачной, если мы напишем [ср. (5.109)]:

$$\sum_k p_k\, dq_k=\sum_k p_k \dot{q}_k\, dt=2T\, dt. \tag{5.423}$$

Мы завершим эту главу, рассказав, как можно ввести время и энергию (с отрицательным знаком) в качестве канонически сопряженных переменных. Для этих рассуждений нам придется отбросить то ограничение, которого мы до сих пор придерживались, а именно считать, что гамильтониан уже может содержать время t явно. Нетрудно убедиться, что в этом случае канонические уравнения движения (5.108) по-прежнему справедливы, но что вместо (5.111) мы получим теперь:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{5.424}$$

Наиболее удовлетворительный способ введения времени в качестве одной из координат q состоит в использовании вариационного принципа Гамильтона в форме (5.215). Этот вариационный принцип выглядел следующим образом:

$$\delta\int_1^2 L\, dt=\delta\int_1^2\left[\sum_k p_k\dot{q}_k-H(p_k,\ q_k,\ t)\right]dt=0, \tag{5.425}$$

где теперь уже p_k и q_k образуют совокупность $2s$ независимых переменных. Мы введем сейчас функцию p_0, а также изменим переменную интегрирования, перейдя от t к u: через u обозначена любая функция времени, которая определяет положение изображающей точки на траектории в фазовом пространстве. Мы приходим тогда к вариационному принципу:

$$\delta\int_1^2\left(\sum_{k=1}^{s} p_k q_k'+p_0 q_0'\right)du=0, \tag{5.426}$$

с дополнительным условием

$$p_0=-H(p_k,\ q_k,\ q_0). \tag{5.427}$$

Штрихи в (5.426) указывают на дифференцирование по u; кроме того, мы заменили явно входящую временну́ю координату через q_0:

$$q'_k = \frac{dq_k}{du}, \quad q_0 = t, \quad q'_0 = \frac{dt}{du}. \tag{5.428}$$

Соотношение (5.427) можно переписать еще и так:

$$\mathscr{H} \equiv p_0 + H = 0, \quad \text{или} \quad \delta\mathscr{H} = 0. \tag{5.429}$$

Из (5.426) и (5.429) мы получим уравнения

$$\frac{dp_k}{du} = -\lambda\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{du} = \lambda\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_k} \tag{5.430}$$

в точности так же, как из (5.415) и (5.416) следует (5.420). Вводя время с помощью соотношения (5.421), мы получим из (5.430):

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k = 1, \ldots, s, \tag{5.431}$$

— выражения, которые являются каноническими уравнениями движения, и соотношения

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_0} = -\frac{\partial H}{\partial q_0}, \quad \frac{dq_0}{dt} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_0} = 1. \tag{5.432}$$

Из второго уравнения (5.432) видно, что q_0 и в самом деле может быть отождествлено со временем, тогда как из (5.431) и (5.432) следует, что

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt} = \sum_{k=0}^{s}\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) = 0, \tag{5.433}$$

поскольку в этом выражении уже нет явно входящего времени t (его место заняла координата q_0). Из (5.433) следует, что

$$\mathscr{H} = \text{const}, \tag{5.434}$$

и мы можем без всякой потери общности положить эту постоянную равной нулю, так что $p_0 = -H$. Так как величины p_0, q_0 выступают точно в такой роли, как и все остальные p_k и q_k, мы видим, что на самом деле $-H\,(= p_0)$ является величиной, канонически сопряженной с $t\,(= q_0)$. Для нерелятивистской механики этот результат не очень существен, однако он имеет огромное значение для релятивистской механики, где время выступает уже на равных правах с пространственными координатами.

Напоследок мы хотим обратить внимание читателей на то, что вместо функции Гамильтона H мы перешли уже к уравнению Гамильтона $\mathscr{H}=0$. Левая часть этого уравнения Гамильтона попадалась нам в уравнениях движения (5.431) и (5.432). Следует заметить, что далеко не всегда непосредственное использование левой части заданного уравнения Гамильтона может привести к каноническим уравнениям движения. Для того чтобы функция $\mathscr{H}$, фигурирующая в правых частях этих уравнений, была бы действительно той функцией, которая стоит в левой части уравнения Гамильтона, необходимо, чтобы p_0 входило в $\mathscr{H}$ линейно с коэффициентом, равным единице; иначе второе из уравнений (5.432) будет уже несправедливо и координата q_0 уже не будет временем. Для пояснения наших утверждений взглянем на уравнение Гамильтона для точечной заряженной частицы в электромагнитном поле — релятивистское соотношение между четырьмя компонентами 4-вектора энергии — импульса частицы в электромагнитном поле:

$$0=\mathscr{H}'=(p_0+e\varphi)^2-c^2\left[(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+m^2c^2\right], \qquad (5.435)$$

где φ и $\boldsymbol{A}$, как и раньше, — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Составляя функцию $\mathscr{H}$, имеющую размерность энергии и содержащую p_0 линейно с коэффициентом единица, мы получаем новое уравнение Гамильтона:

$$0=\mathscr{H}=p_0+e\varphi-c\left[(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+m^2c^2\right]^{1/2}. \qquad (5.436)$$

Предоставляем читателю доказать, что (5.431) и (5.432) с $\mathscr{H}$, определяемым (5.436), приводят к релятивистским уравнениям движения [ср. вывод уравнения (2.509)]:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=e\left\{\boldsymbol{E}+[\dot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{B}]\right\},\quad v^2=(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}), \qquad (5.437)$$

где, так же как в гл. 2, $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля и $\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция.

ЗАДАЧИ

1. Гамильтониан системы с двумя степенями свободы задан равенством

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2q_1^4+p_2^2q_1^2-2\alpha q_1\right),$$

где α — постоянная величина. Доказать, что

$$q_1 = A \cos q_2 + B \sin q_2 + C,$$

где A, B, C — константы.

2. Доказать, что преобразование

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sin p\right), \quad P = q \operatorname{ctg} p$$

является каноническим, и найти производящую функцию $S(p, Q)$.

3. Доказать, что преобразование

$$p = K\sqrt{2\alpha} \cos \beta, \quad q = K^{-1}\sqrt{2\alpha} \sin \beta$$

является контактным; найти производящую функцию $S(\alpha, q)$ и применить это преобразование в задаче об одномерном гармоническом осцилляторе.

4. Показать, что преобразование

$$Q_1 = q_1^2 + p_1^2, \quad Q_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2),$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{q_2}{p_2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{q_1}{p_1}\right), \quad P_2 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$

является контактным преобразованием.

Воспользоваться этим преобразованием для решения уравнений движения системы, гамильтониан которой равен $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$; сравнить полученное решение с решением уравнений движения в исходных переменных.

5. Доказать, что преобразование

$$p_1 = \sqrt{k_1\alpha_1} \sin \beta_1 + \sqrt{k_2\alpha_2} \sin \beta_2, \quad p_2 = -\sqrt{k_1\alpha_1} \sin \beta_1 + \sqrt{k_2\alpha_2} \sin \beta_2,$$

$$q_1 = \sqrt{\alpha_1/k_1} \cos \beta_1 + \sqrt{\alpha_2/k_2} \cos \beta_2, \quad q_2 = -\sqrt{\alpha_1/k_1} \cos \beta_1 + \sqrt{\alpha_2/k_2} \cos \beta_2$$

является контактным преобразованием. Использовать это преобразование для решения уравнений движения системы, гамильтониан которой задан в виде:

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{4} k_1^2 (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{4} k_2^2 (q_1 + q_2)^2.$$

Выяснить физический смысл этого гамильтониана.

6. Показать, что преобразование

$$x_i = P^2 X_i + W P_i, \quad p_i = P_i / P^2, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$P^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i^2 \quad \text{и} \quad W = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i P_i,$$

является каноническим преобразованием.

Показать, что если гамильтониан системы задан в виде

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 - \mu \left[\sum_i x_i^2 \right]^{-1/2},$$

то в любом решении, для которого полная энергия обращается в нуль, величины X_i остаются постоянными во времени, а величины P_i являются линейными функциями u, где $u = \int P^{-2}\, dt$.

Проанализировать результаты, полученные в этой задаче.

7. Система с n степенями свободы описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} p_r^2 + \sum_{r=1}^{n+1} (q_r - q_{r-1})^2, \qquad q_0 = q_{n+1} \equiv 0.$$

Используя контактное преобразование, порождаемое производящей функцией

$$W = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{4} \omega_r^2 \left[\sum_{s=1}^{n} a_{sr} q_s \right]^2 \operatorname{ctg} Q_r,$$

где

$$a_{sr} = \frac{2}{\sqrt{(n+1)\, \omega_r}} \sin \frac{sr\pi}{n+1}, \qquad \omega_r = 2 \sin \frac{r\pi}{2(n+1)},$$

решить уравнения движения для q_r и найти нормальные координаты задачи. Проанализировать полученные результаты.

Глава 6

ТЕОРИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

В этой главе мы введем функцию Гамильтона — Якоби, которая является решением дифференциального уравнения в частных производных, называемого уравнением Гамильтона — Якоби. Функция Гамильтона — Якоби ведет к гамильтониану, содержащему только одну совокупность канонических переменных. Находятся решения уравнения Гамильтона — Якоби для нескольких простых случаев, в том числе для задачи Кеплера. Во втором параграфе этой главы вводятся так называемые «переменные действие — угол». Их значение видно из того, что переменные действия представляют собой адиабатические инварианты. Адиабатические инварианты играли существенную роль в старой квантовой теории и имеют немалое значение в теории ускорителей. Они кратко рассмотрены в последнем параграфе этой главы.

§ 6.1. Уравнение Гамильтона — Якоби

В предыдущей главе были введены различные преобразования, оставлявшие канонические уравнения (5.108) инвариантными по форме; эти преобразования были получены через производящие функции. Там же было сказано, что мы особенно внимательно займемся преобразованиями типа (5.220b). Смысл всех этих преобразований состоит в упрощении уравнений движения. Эта цель достигается в том случае, если преобразования так видоизменяют гамильтониан, что он зависит только от одной совокупности канонических переменных (скажем, α_k) и совсем не содержит переменных другой совокупности (β_k). Если мы получили такой гамильтониан $\overline{H}(\alpha_k)$, уравнения движения приобретают вид:

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \beta_k} = 0, \qquad \alpha_k = \text{const}, \tag{6.101}$$

$$\dot{\beta}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \alpha_k} = \text{const} = \gamma_k, \qquad \beta_k = \gamma_k t + \delta_k, \tag{6.102}$$

где вторая группа уравнений (6.102) следует из того обстоятельства, что α_k являются постоянными согласно (6.101) и что гамильтониан $\bar{H}$ является функцией только от α_k. Функции γ_k являются, таким образом, известными функциями α_k, а $2s$ постоянными интегрирования будут служить α_k и δ_k.

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы отыскать такую производящую функцию $S(\alpha_k, q_k)$, что преобразования

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \tag{6.103}$$

преобразуют гамильтониан $H(p_k, q_k)$ в гамильтониан $\bar{H}(\alpha_k)$, не зависящий от величин β_k. Это означает, что функция S должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k\right) = \bar{H}(\alpha_k) = E(\alpha_k). \tag{6.104}$$

Уравнение (6.104) и есть *уравнение Гамильтона — Якоби*. Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что правая часть (6.104) есть полная энергия системы, мы обозначили ее через E.

Зачастую решить уравнение Гамильтона — Якоби трудно, но коль скоро функция S найдена, решение преобразованного уравнения движения тривиально и дается формулами (6.101) и (6.102). Правда, у нас остается еще задача найти исходные p_k и q_k как функции времени, а преобразование от α_k и β_k к p_k и q_k нередко довольно сложно (см., например, решение задачи Кеплера в конце этого параграфа).

Чтобы понять физический смысл S, вычислим ее производную по времени:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k = \sum_k p_k\dot{q}_k + \sum_k \beta_k\dot{\alpha}_k = \sum_k p_k\dot{q}_k, \tag{6.105}$$

где пришлось воспользоваться (6.103) и (6.101). Из (6.105) вытекает, что

$$S = \int^t \sum_k p_k\dot{q}_k\,dt = I, \tag{6.106}$$

где I — интеграл действия, определенный согласно (5.405) [ср. также (5.109)].

Мы должны указать здесь, что все наше рассмотрение годится лишь в (наиболее часто встречающемся) случае, когда гамильтониан не содержит времени явно. Если же время явно содержится в гамильтониане, мы должны ввести время как q_0 и воспользоваться уравнением Гамильтона

$$H(p_k, q_k, q_0) + p_0 = 0, \tag{6.107}$$

которое, вместе с производящей функцией $\bar{S}(q_k, \alpha_k; q_0, \alpha_0)$, приводит к уравнению

$$H\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_k}, q_k, q_0\right) + \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_0} = 0 \tag{6.108}$$

или же

$$H\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_k}, q_k, t\right) + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = 0. \tag{6.109}$$

Заметим, кстати, что именно (6.109) нередко называют уравнением Гамильтона — Якоби. Чтобы выяснить физический смысл $\bar{S}$, следует также найти ее производную по времени:

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k + \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_0} \dot{q}_0 + \frac{\partial S}{\partial \alpha_0} \dot{\alpha}_0 = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k + p_0 \tag{6.110}$$

или же

$$\bar{S} = \int^{t} \left(\sum_k p_k \dot{q}_k + p_0\right) dt = \int^{t} \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H\right) dt = \int^{t} L\, dt. \tag{6.111}$$

Если H не содержит времени явно, то H является константой, которую можно обозначить через E; тогда из (6.111) мы получим:

$$\bar{S} = I - Et = S - Et, \tag{6.112}$$

а (6.109) превратится в (6.104).

В этом месте удобно напомнить читателю связь между функцией Гамильтона — Якоби и волновой функцией Шредингера. Чтобы обнаружить эту связь, достаточно рассмотреть одномерный случай, когда гамильтониан задается выражением

$$H = (p^2/2m) + U(q),$$

которое приводит к шредингеровскому уравнению,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}+U(q)\psi=E\psi,$$

где через ψ обозначена волновая функция.

Если в это уравнение Шредингера, не зависящее от времени, ввести подстановку

$$\psi=e^{iS/\hbar}, \tag{6.113}$$

мы получим новое уравнение:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}+U(q)=E,$$

которое в пределе $\hbar\to 0$ превращается в одномерное уравнение Гамильтона — Якоби [ср. (6.114)].

Если в (6.113) вместо S ввести функцию $\bar{S}$ из (6.112), мы получим вместо не зависящей от времени волновой функции волновую функцию, зависящую от времени.

Наконец, мы напомним читателю, что (6.113) является исходным пунктом для приближения Венцеля — Крамерса — Бриллюэна, которое называется также нередко квазиклассическим приближением, по причинам, которые должны быть достаточно ясными из предыдущих рассуждений.

Разберем теперь три простых примера, чтобы проиллюстрировать применение теории Гамильтона — Якоби. В качестве этих примеров мы выбрали гармонический осциллятор (в одном и трех измерениях), частицу в однородном гравитационном поле и, наконец, задачу Кеплера.

Мы начнем с одномерного гармонического осциллятора. В самом общем случае гамильтониан одномерной системы имеет вид:

$$H(p,\ q)=(p^2/2m)+U(q),$$

откуда мы получаем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+2mU(q)=2mE(\alpha)=2m\alpha, \tag{6.114}$$

где мы положили

$$E(\alpha)=\alpha. \tag{6.115}$$

В этом случае уравнение Гамильтона — Якоби особенно просто, поскольку координат всего одна и из уравнения Гамильтона — Якоби непосредственно получается $\partial S/\partial q$ как функция q и параметра α. Интегрирование сразу же приводит к результату:

$$S=\int^{q}[2m(\alpha-U)]^{1/2}\,dq. \tag{6.116}$$

Используя уравнения (6.103), мы получим:

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{q_0}^{q} [m/2(\alpha - U)]^{1/2} dq, \tag{6.117}$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = [2m(\alpha - U)]^{1/2}. \tag{6.118}$$

Далее, из (6.101) и (6.102) вытекает, что

$$\alpha = \text{const}, \tag{6.119}$$

$$\beta = \partial \overline{H}/\partial\alpha = 1, \quad \beta = t - t_0. \tag{6.120}$$

Из выражений (6.117) и (6.120) можно найти q как функцию времени. Выражения (6.117) — (6.120) — это и есть общие решения задачи в одномерном случае. Непосредственно видно, что (6.117) совпадает с (1.120), поскольку (6.118) — это просто закон сохранения энергии.

В частности, для гармонического осциллятора

$$U = \frac{1}{2} aq^2, \tag{6.121}$$

и из (6.117), (6.120) и (6.121) мы получим:

$$q - q_0 = [2\alpha/a]^{1/2} \sin[(a/m)^{1/2}(t - t_0)]; \tag{6.122}$$

это выражение является хорошо известным решением задачи о гармоническом осцилляторе.

Давайте разберем заодно и трехмерный гармонический осциллятор; ему соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}a_1q_1^2 + \frac{1}{2}a_2q_2^2 + \frac{1}{2}a_3q_3^2, \tag{6.123}$$

из которого получается следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2 + ma_1q_1^2 + ma_2q_2^2 + ma_3q_3^2 = 2mE(\alpha_k). \tag{6.124}$$

Это уравнение нетрудно решить, предположив, что

$$S(q_1, q_2, q_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = S_1(q_1, \alpha_1) + S_2(q_2, \alpha_2) + S_3(q_3, \alpha_3). \tag{6.125}$$

Метод решения уравнения Гамильтона — Якоби, когда делается предположение (6.125), называется методом *разделения переменных*. В общем случае, когда разделение переменных возможно, каждое S_k содержит только одну q_k, но каждая из них может включать в себя все α_k; в случае трехмерного гармонического осциллятора каждая из S_k содержит лишь одну α_k, но уже в этом же параграфе мы столкнемся с более общим случаем.

Мы обращаем внимание на то, что разделение переменных в уравнении Гамильтона — Якоби производится представлением S в виде суммы членов, каждый из которых содержит лишь одну координату q_k, тогда как в случае уравнения Шредингера разделение переменных осуществляется через запись волновой функции в виде произведения членов такого типа. Это, конечно, есть следствие соотношения (6.113) между волновой функцией и функцией Гамильтона — Якоби. Упомянем здесь также и то, что если для данной физической системы уравнение Гамильтона — Якоби может быть решено при некотором выборе координат, то при том же выборе координат можно провести разделение переменных и в уравнении Шредингера.

Подставляя выражение (6.125) в уравнение (6.124), мы получаем три уравнения для трех S_k:

$$\left(\frac{\partial S_k}{\partial q_k}\right)^2 + m a_k q_k^2 = 2m\alpha_k, \qquad (6.126)$$

и $E = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; для каждой из трех степеней свободы мы пришли к уравнениям, полностью аналогичным соотношениям (6.116) — (6.122).

Вторым случаем, который мы разберем, будет точечная частица в однородном гравитационном поле. Теперь уже гамильтониан запишется так:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz, \qquad (6.127)$$

а уравнение Гамильтона — Якоби примет вид:

$$E = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + mgz. \qquad (6.128)$$

Если положить

$$S = S_1(x) + S_2(y) + S_3(z) \qquad (6.129)$$

и произвести разделение переменных, мы придем к уравнениям:

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \alpha_1, \qquad \frac{\partial S_2}{\partial y} = \alpha_2, \qquad (6.130)$$

$$[2m(\alpha_3 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{1/2} = \frac{\partial S_3}{\partial z}, \qquad (6.131)$$

или же

$$S=\int_{x_0}^{x}\alpha_1\,dx+\int_{y_0}^{y}\alpha_2\,dy+\int_{z_0}^{z}[2m(\alpha_3-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2]^{1/2}\,dz. \tag{6.132}$$

Так как мы положили $E=\alpha_3$, то из (6.102) и (6.103) следует:

$$\beta_3=t-t_0=\int_{z_0}^{z}\frac{m\,dz}{[2m(\alpha_3-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2]^{1/2}}, \tag{6.133}$$

тогда как

$$\begin{aligned}\beta_1&=\mathrm{const}=x-x_0-\int_{z_0}^{z}\frac{\alpha_1\,dz}{[2m(\alpha_3-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2]^{1/2}},\\ \beta_2&=\mathrm{const}=y-y_0-\int_{z_0}^{z}\frac{\alpha_2\,dz}{[2m(\alpha_3-mgz)-\alpha_1^2-\alpha_2^2]^{1/2}}.\end{aligned} \tag{6.134}$$

Если обозначить через x_0, y_0, z_0 положение частицы в момент времени $t=t_0$, то $\beta_1=\beta_2=0$, и из (6.133) и (6.134) можно получить:

$$\begin{aligned}x-x_0&=(\alpha_1/m)(t-t_0),\\ y-y_0&=(\alpha_2/m)(t-t_0),\\ z-z_0&=[2m(\alpha_3-mgz_0)-\alpha_1^2-\alpha_2^2]^{1/2}\frac{t-t_0}{m}-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2.\end{aligned} \tag{6.135}$$

Эти уравнения определяют параболу, как это и следовало ожидать. Линейные члены в правой части равенств (6.135) описывают равномерное прямолинейное движение, т. е. то движение частицы, в котором бы она участвовала, если бы не было ускорения.

В этом последнем примере все координаты кроме одной циклические. В таком случае уравнение Гамильтона — Якоби может быть всегда решено методом разделения переменных. Для этого достаточно положить все импульсы, соответствующие $s-1$ циклическим координатам, равными $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$; остающаяся часть функции Гамильтона — Якоби может быть тогда получена простым интегрированием.

И, наконец, последний пример — задача Кеплера. Запишем гамильтониан задачи в сферических координатах [ср. (2.313) — (2.317)]:

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (6.136)$$

Здесь, для того чтобы иметь в виду конкретную задачу, мы остановились на проблеме водородоподобного атома, т. е. задаче о движении электрона с зарядом $-e$ в поле заряженного ядра (заряд Ze). Масса m, входящая в (6.136), фактически является приведенной массой (см. рассуждения в § 1.2).

Вводя функцию Гамильтона — Якоби $S(r,\ \theta,\ \varphi)$ и используя метод разделения переменных, мы полагаем

$$S(r,\ \theta,\ \varphi)=S_1(r)+S_2(\theta)+S_3(\varphi). \qquad (6.137)$$

Полагая, кроме того, полную энергию системы равной одной из α_k, скажем, α_1', мы имеем следующее уравнение:

$$\alpha_1'=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_3}{\partial\varphi}\right)^2\right]-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (6.138)$$

где мы воспользовались формулами (6.103). Над α_1 появился индекс — штрих; дело в том, что нам будет удобнее позже ввести функцию, зависящую от α_1', принимая ее за α_1 [см. (6.143)].

Производя разделение переменных в уравнении (6.138), мы приходим к уравнениям:

$$\frac{\partial S_3}{\partial\varphi}=\alpha_3=\mathrm{const}=p_\varphi, \quad S_3=\varphi\alpha_3; \qquad (6.139)$$

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}=\alpha_2^2, \quad S_2=-\int^\theta\left[\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}\right]^{1/2}d\theta; \qquad (6.140)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1'&=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},\\ S_1&=\int^r\left[2m\alpha_1'+\frac{mZe^2}{2\pi\varepsilon_0 r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]^{1/2}dr.\end{aligned}\right\} \qquad (6.141)$$

Величина α_1' является энергией; величина α_3 — моментом импульса относительно полярной оси (ось z); величина α_2 удовлетворяет уравнению

$$\alpha_2^2=p_\theta^2+\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}=p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=M^2, \qquad (6.142)$$

причем мы использовали (2.319). Мы обнаруживаем, таким образом, что α_2 — это полный момент импульса. Из (6.142), а также из физического смысла α_2 и α_3 вытекает, что $\alpha_2 \geqslant \alpha_3$. Знак минус во втором из уравнений (6.140) введен для того, чтобы β_2 и β_3 имели простой физический смысл [см. (6.148) и (6.151)].

Теперь мы введем вместо величины α_1' величину α_1, связанную с α_1' соотношением

$$\alpha_1' = E = -\frac{Z^2e^4m}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\alpha_1^2}. \tag{6.143}$$

Причина такого переопределения станет ясной в следующем параграфе. Заметим, что, сделав предположение об отрицательности энергии E, мы ограничили наши рассуждения исключительно эллиптическими орбитами. Мы заметим также, что α_1 обладает размерностью момента импульса, т. е. той же самой размерностью, какую имеют α_2 и α_3.

Вводя величину R по формуле

$$R = Zme^2/4\pi\varepsilon_0, \tag{6.144}$$

мы можем переписать (6.141) в виде:

$$S_1 = \int^r \left[\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{r^2} - \left(\frac{R}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{r}\right)^2\right]^{1/2} dr. \tag{6.145}$$

Поскольку величина $\partial S_1'/\partial r$ согласно своему физическому смыслу должна быть действительной, из (6.145) непосредственно следует, что: а) α_1 должно быть больше или по крайней мере равно α_2; б) если $\alpha_1 = \alpha_2$, то орбита представляет собой окружность, поскольку в этом случае мы получаем, что $R/\alpha_1 = \alpha_1/r$.

С помощью уравнений (6.103) можно найти физический смысл β_k. Функция Гамильтона — Якоби определяется согласно (6.137), (6.139), (6.140) и (6.145). Заметим попутно, что теперь уже S_1, например, содержит два α_k, так же как и S_2. Из (6.143) видно, что E содержит только α_1, так что величины β_2 и β_3 являются интегралами движения. Для β_3 мы найдем:

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\alpha_3\, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\alpha_2^2 \sin^2\theta - \alpha_3^2}} + \varphi, \tag{6.146}$$

где мы выбрали в качестве нижнего предела интеграла, входящего в S_2, значение $\pi/2$. Введем угол i, определяемый выражением

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i, \tag{6.147}$$

из которого следует, что i — это угол между полярной осью и нормалью к орбитальной плоскости (см. рис. 26). Тогда (6.146) можно переписать в виде:

$$\beta_3 = \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos i \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - \cos^2 i}} + \varphi = \\ = -\arcsin(\operatorname{ctg} i \operatorname{ctg}\theta) + \varphi = -\mu + \varphi, \tag{6.148}$$

где через μ обозначен угол AOB на рис. 26. Это следует

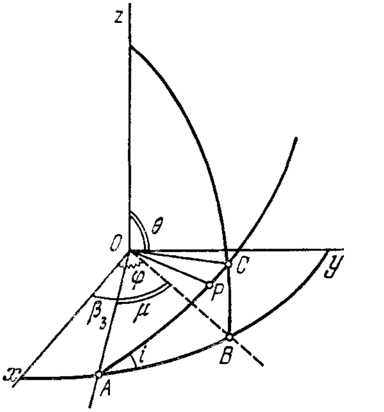

Рис. 26. Задача Кеплера. OAC — плоскость орбиты; OA — линия восходящего узла; OP — большая полуось; OC — радиус-вектор точки орбиты; угол i — угол наклона плоскости орбиты; β_3 — долгота (величина угла) восходящего узла.

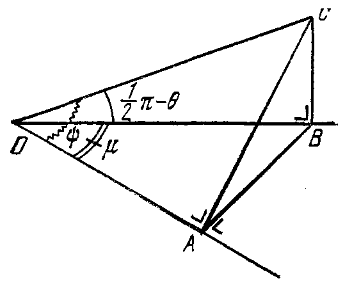

Рис. 27. Задача Кеплера. Углы, отмеченные значком ∟, — прямые. Все обозначения те же, что и на рис. 26.

из рассмотрения рис. 27, откуда следуют равенства

$$\operatorname{ctg} i \operatorname{ctg}\psi = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{OB} = \frac{AB}{OB} = \sin\mu. \tag{6.149}$$

Мы видим, таким образом, что β_3 — это просто угол, определяющий положение линии узлов (т. е. линии пересечения плоскости орбиты с экваториальной плоскостью), — угол xOA на рис. 26. Мы будем называть этот угол долготой восходящего узла.

Обратимся теперь к β_2, для которого имеем:

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \int^{r} \frac{-\alpha_2 \, dr/r^2}{\sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{r^2} - \left(\frac{R}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{r}\right)^2}} - \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\alpha_2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 \sin^2\theta - \alpha_3^2}},$$

или же, вводя обозначения

$$a=\frac{\alpha_1^2}{R},\quad \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}=1-\varepsilon^2,\quad \frac{\alpha_3^2}{Rr}=1+\varepsilon\cos\chi, \tag{6.150}$$

$$\beta_2=\arcsin\left[\cos\theta/\sin i\right]-\chi=\psi-\chi, \tag{6.151}$$

где мы снова обратились за помощью к рис. 27; ψ — это угол AOC, а χ — истинная аномалия (см. рис. 28).

Причина появления последнего из соотношений (6.150) заключается в том, что, как легко убедиться, корень, входящий в S_1, принимает действительное значение лишь в том случае, когда r лежит между $a(1+\varepsilon)$ и $a(1-\varepsilon)$; это обстоятельство, конечно, тесно связано с нашим выбором отрицательного знака энергии, что в свою очередь обусловливает финитные орбиты. Последнее из соотношений (6.150) показывает, что такими финитными орбитами являются эллиптические орбиты; заметим также, что величина ε должна быть меньше или по крайней мере равна единице, поскольку $\alpha_2\leqslant\alpha_1$. Это последнее из соотношений (6.150) определяет величину радиус-вектора как функцию истинной аномалии, т. е. является уравнением орбиты.

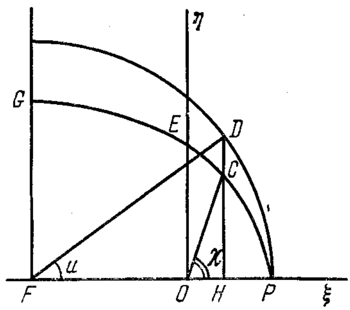

Рис. 28. Орбиты в задаче Кеплера. O — начало координат, за которое выбран центр сил; $FP=a$ (большая полуось); $OP=a(1-\varepsilon)$ — расстояние от начала координат до перицентра; $OF=a\varepsilon$; $FG=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=b$ (малая полуось); $OE=p$ (параметр эллипса); χ — истинная аномалия и, наконец, u — эксцентрическая аномалия.

Поскольку β_3 — постоянная величина, долгота восходящего узла задана. Тот факт, что угол i постоянен, полностью определяет положение орбитальной плоскости в пространстве; так как β_2 тоже постоянно, а $\chi=\psi-\beta_2$ [последнее равенство следует из (6.151)], мы видим, что орбита остается неизменной в пространстве, другими словами, оси эллипса сохраняют свое направление в пространстве.

Уравнение орбиты можно записать также и в форме

$$\frac{a}{r}=\frac{1+\varepsilon\cos\chi}{1-\varepsilon^2}, \tag{6.152}$$

откуда видно, что a является большой полуосью, а ε — эксцентриситетом эллипса [сравните рассуждения в связи с формулами (1.237), (1.240), (1.243) и (1.244)].

Теперь займемся величиной β_1. Для начала нам нужно несколько подробнее рассмотреть орбиту (см. рис. 28). Параметрическим представлением орбиты через декартовы координаты ξ и η будет:

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\chi = a(\cos u - \varepsilon), \\ \eta &= r\sin\chi = a(1-\varepsilon^2)^{1/2}\sin u, \end{aligned} \tag{6.153}$$

где мы ввели эксцентрическую аномалию u согласно уравнению:

$$r = a(1-\varepsilon\cos u). \tag{6.154}$$

Угол u — это угол DFP на рис. 28, где CD параллельно оси η. Из рис. 28 и из того, что длина OF равна $a\varepsilon$, а отношение DH к CH равно отношению большой и малой полуосей, легко получаются уравнения (6.153); так как $\xi^2+\eta^2=r^2$, то непосредственно следует и (6.154).

Из (6.102) мы получаем для β_1:

$$\beta_1 = \gamma(t-\delta, \quad \gamma = \frac{\partial H}{\partial\alpha_1} = \frac{R^2}{m\alpha_1^3}, \tag{6.155}$$

а из (6.103) вытекает, что

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial\alpha_1} = \int^r \frac{R^2}{\alpha_1^3}\frac{dr}{\left[\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{r^2} - \left(\frac{R}{\alpha_1}-\frac{\alpha_1}{r}\right)^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \int_0^u (1-\varepsilon\cos u)\,du = u - \varepsilon\sin u. \tag{6.156}$$

Объединяя (6.155) и (6.156), мы получим:

$$u - \varepsilon\sin u = \gamma(t-\delta). \tag{6.157}$$

Теперь уже ясно преимущество введения эксцентрической аномалии: она довольно просто связана со временем, хотя (6.157) в действительности трансцендентное уравнение. Из (6.157) и (6.153) можно найти зависимость истинной аномалии от времени. Уравнения (6.153), описывающие орбиту в декартовых координатах, окажутся еще полезными в следующей главе.

Нам хочется выписать здесь еще выражение для параметра p эллипса. Этот параметр равен значению r при

$\chi=\pi/2$, т. е. значению радиуса в точке пересечения эллипса с осью η. Из (6.152) и третьего из уравнений (6.150) получаем:

$$p=a(1-\varepsilon^2)=\alpha_2^2/R. \tag{6.158}$$

Мы обнаружили, что величина p не зависит от α_1, а зависит от α_2, т. е. только от полного момента импульса.

Резюмируем вкратце результаты наших расчетов в той части, которая касается физического смысла α_k и β_k: величина α_1 определяет энергию или же большую полуось [(6.143) и (6.150)]; α_2 — это полный момент импульса [(6.142)], определяющий совместно с α_1 эксцентриситет эллипса [(6.150)]. Константа α_3 — компонента момента импульса вдоль полярной оси [(6.139)], определяющая совместно с α_2 наклон орбитальной плоскости [(6.147)]; величина β_3 — это долгота восходящего узла [(6.148)]. Значение β_2 определяет направление на перицентр в орбитальной плоскости [(6.151)]. Наконец, β_1 дает связь между эксцентрической аномалией и временем [(6.157)]. Величина δ в (6.155) — шестая и последняя константа движения; ее физический смысл состоит в том, что она дает время прохождения через перицентр. Величины α_k и β_k называются *элементами* орбиты.

§ 6.2. Переменные «действие — угол»

Мы начнем с того, что займемся одномерной системой. Допустим, что движение периодическое. Периодическое движение может осуществляться двумя различными путями. Либо различным значениям q соответствуют различные состояния системы и обе функции p и q являются периодическими функциями времени: спустя период τ обе функции p и q возвращаются к тем же самым значениям (*либрация*; см. рис. 29, *а*); либо всякий раз, когда координата q возрастает на определенную постоянную величину q_0, повторяется то же самое состояние системы: через период τ величина p принимает то же самое значение, но величина q возрастает на q_0 (*вращение*; см. рис. 29, *б*). В одной и той же системе могут осуществляться и либрация, и вращение. Простой маятник, например, совершая малые колебания, обнаруживает либрацию; однако если энергия, сообщенная маятнику, достаточна, чтобы он перекидывался через верхнюю точку, он будет вращаться. Вообще говоря, первый случай обычно имеет место тогда, когда система движется между двумя состояниями, в каждом из которых кинетическая энергия обращается в нуль; во втором же случае всегда можно за координату q выбрать угол и так выбрать ее масштаб, чтобы q_0 было равно 2π.

Допустим, что решение уравнения Гамильтона — Якоби для нашей системы найдено и что α и β, возникающие в результате решения, — новые канонические координаты.

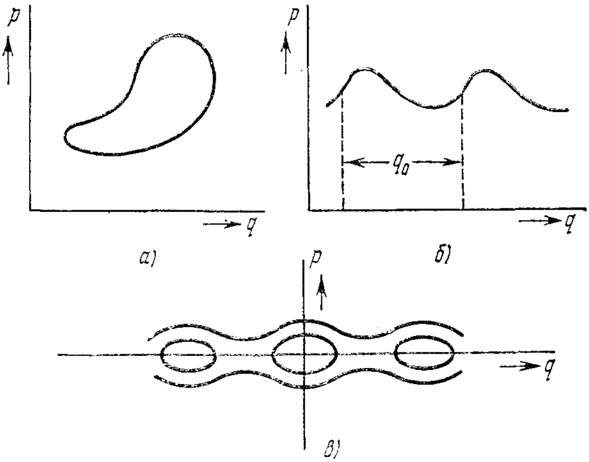

Рис. 29. Траектории в фазовом пространстве, соответствующие возможным одномерным периодическим движениям: *а*) либрация; *б*) вращение; *в*) траектории простого маятника, обнаруживающие как либрацию, так и вращение.

Мы знаем, что в этом случае β должно быть линейной функцией времени t [см. (6.102)]:

$$\beta = \gamma (t - t_0). \tag{6.201}$$

Тогда у нас открываются две возможности:

либрация: $$q(\beta + \gamma\tau) = q(\beta), \tag{6.202 а}$$

вращение: $$q(\beta + \gamma\tau) = q(\beta) + 2\pi. \tag{6.202 б}$$

Тогда можно совершить преобразование от α и β к новой совокупности канонических переменных J и w, таких, что

$$w = \beta/\gamma\tau. \tag{6.203}$$

Уравнения (6.203) представляют собой «точечные» преобразования типа (5.221, IV) или (5.203) и соответствуют, таким образом, каноническому преобразованию. Действительно, оно порождается функцией

$$S' = J\beta/\gamma\tau, \tag{6.204}$$

из которой следует (6.203) и равенство

$$J = \alpha\gamma\tau. \tag{6.205}$$

Мы можем записать теперь (6.202) через переменную w:

либрация: $$q(w+1) = q(w), \tag{6.206 а}$$

вращение: $$q(w+1) = q(w) + 2\pi. \tag{6.206 б}$$

Каноническое преобразование от p и q к J и w является преобразованием Гамильтона — Якоби; поскольку преобразуемый гамильтониан был функцией только α и поскольку J не содержит β, преобразованный гамильтониан $\overline{H}$ будет функцией только от J. Пусть $\overline{S}(q, J)$ будет функцией Гамильтона — Якоби, порождающей это преобразование, так что

$$p = \frac{\partial \overline{S}}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial \overline{S}}{\partial J}. \tag{6.207}$$

Из этих уравнений вытекает:

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial J}\frac{\partial \overline{S}}{\partial q} = \frac{\partial p}{\partial J}, \tag{6.208}$$

или же

$$\frac{\partial}{\partial J}\oint p\, dq = \frac{\partial}{\partial J}\oint \frac{\partial \overline{S}}{\partial q}\, dq = \oint \frac{\partial w}{\partial q}\, dq = \oint dw = 1, \tag{6.209}$$

где знак $\oint$ указывает на интегрирование по полному периоду и где использовано то обстоятельство, что w выбрано так, что оно увеличивается ровно на единицу за период [см. (6.206)]. Из (6.209) вытекает, что

$$J = \oint p\, dq, \tag{6.210}$$

а из первого уравнения (6.207) и (6.210) мы видим, что J представляет собой увеличение $\overline{S}$ за период. Мы замечаем также, что J — это в точности интеграл действия, взятый за один период. Поскольку размерность J совпадает с размерностью момента импульса, размерность w совпадает с размерностью угла; отсюда можно понять, почему J и w называются *переменными «действие — угол»*.

Гамильтониан оказывается теперь функцией только J, т. е. $E = E(J)$, и из канонических уравнений движения можно получить:

$$J = \text{const} \quad \text{и} \quad \dot{w} = \frac{\partial E}{\partial J} = \nu, \tag{6.211}$$

или

$$w = \nu(t - t_0). \tag{6.212}$$

Учитывая, что w за период увеличивается на единицу, мы имеем:

$$\Delta w = 1 = \nu\tau, \text{ или } \nu = 1/\tau, \tag{6.213}$$

так что $\nu = \partial E/\partial J$ является частотой движения. Отсюда ясно, что можно получить частоту (или период) движения, как только мы нашли гамильтониан как функцию переменной действия J, даже не решая уравнений движения [ср. (5.409)].

Мы могли бы ввести J согласно (6.210) без того, чтобы предварительно обсуждать уравнения (6.202), и могли бы таким способом фактически доказать, что величина w изменяется за период на единицу. Именно такой подход мы используем, переходя к системам с многими степенями свободы. Единственные системы, которыми мы станем заниматься, — это системы, обладающие многократной периодичностью, другими словами — периодичные относительно каждой своей координаты q_i и для которых уравнение Гамильтона — Якоби может быть решено разделением переменных, так что

$$S(q, \alpha) = \sum_i S_i(q_i; \alpha_k). \tag{6.214}$$

Новые переменные (действия) J_i вводятся согласно уравнениям

$$J_i = \oint p_i \, dq_i, \tag{6.215}$$

где каждый из интегралов распространяется по периоду соответствующей q_i; эти периоды, конечно, вовсе не должны быть одинаковыми. Заметим, что все J_i имеют размерность момента импульса или действия. Отметим также, что в том случае, когда q_i — циклическая координата, так что соответствующий параметр p_i будет константой [см. (2.402)], из (6.215) немедленно следует, что $J_i = 2\pi p_i$.

Интегрирование в (6.215) ведется по q_l; но координата q_l — единственная из всех координат q_k, которая входит в интеграл правой части (6.215), поскольку уравнение Гамильтона — Якоби допускает разделение переменных. Поэтому J_l будут функциями только α_k и не будут содержать β_k. Это означает, что преобразование от p_k и q_k к J_i и w_l будет преобразованием Гамильтона — Якоби, приводящим к преобразованному гамильтониану $\bar{H}$, который будет функцией только J_l. Допустим, что это преобразование Гамильтона — Якоби порождается функцией Гамильтона — Якоби $\bar{S}$. Из того, что исходное уравнение Гамильтона — Якоби допускало разделение переменных, и из того, что J_l зависят лишь от α_k, следует, что $\bar{S}$ можно записать в виде:

$$\bar{S}(q, J) = \sum_i \bar{S}_i(q_i; J_k); \tag{6.216}$$

затем, используя первое из уравнений преобразования,

$$p_l = \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_l} = \frac{\partial \bar{S}_l}{\partial q_l}, \quad w_i = \frac{\partial \bar{S}}{\partial J_l}, \tag{6.217}$$

мы видим из (6.215), что J_l равны просто возрастанию S_l за период.

Из канонических уравнений движения мы получим:

$$\dot{w}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J_l} = \nu_l(J_1, \ldots, J_s), \text{ или } w_l = \nu_l t + \delta_l. \tag{6.218}$$

Докажем сейчас, что ν_l действительно являются частотами движения. Пусть координата q_j проходит свой период, тогда как все остальные координаты q остаются неизменными. Тогда мы получаем для приращения w_l (индекс j при Δ и δ указывает на то, что меняется только q_j):

$$\Delta_j w_i = \oint \delta_j w_l = \oint \frac{\partial w_l}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial q_j \partial J_l} dq_j =$$
$$= \frac{\partial}{\partial J_l} \oint p_j \, dq_j = \frac{\partial J_j}{\partial J_l} = \delta_{lj}. \tag{6.219}$$

Следовательно, если через τ_l обозначен период, соответствующий координате q_l, мы с помощью (6.218) и (6.219) получим:

$$\Delta_l w_l = \nu_l \tau_l = 1, \tag{6.220}$$

что и доказывает наше утверждение.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим два примера: одномерный гармонический осциллятор и задачу Кеплера. Из (6.118), (6.121) и (6.210) мы имеем:

$$J = \oint [2m\alpha - maq^2]^{1/2}\, dq = \\ = 2\alpha\,(m/a)^{1/2} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi\alpha\,(m/a)^{1/2}, \quad (6.221)$$

где мы воспользовались подстановкой $q = (2\alpha/a)^{1/2}\sin\theta$.

Из (6.221) и (6.115) вытекает, что

$$E = \alpha = (J/2\pi)\,(a/m)^{1/2}, \quad (6.222)$$

и из (6.211) — что

$$\nu = \partial E/\partial J = (2\pi)^{-1}\,(a/m)^{1/2}. \quad (6.223)$$

Мы и в самом деле нашли частоту движения, не прибегая к решению уравнений движения.

В задаче Кеплера мы можем показать, что J_1, J_2 и J_3 являются линейными комбинациями α_1, α_2 и α_3. Мы получим из (6.215), учитывая (6.139), (6.142) и (6.141):

$$J_3 = \oint p_\varphi\, d\varphi = \oint \alpha_3\, d\varphi = 2\pi\alpha_3, \quad (6.224)$$

$$J_2 = \oint p_\theta\, d\theta = \oint \left[\alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_3}{\sin\theta}\right)^2\right]^{1/2} d\theta = 2\pi\,(\alpha_2 - \alpha_3), \quad (6.225)$$

$$J_1 = \oint p_r\, dr = \oint \left[2mE + \frac{Zme^2}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]^{1/2} dr = \\ = -2\pi\alpha_2 + \frac{Ze^2}{4\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{-E}} = 2\pi\,(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (6.226)$$

Из выражения (6.226) следует, что энергию E можно выразить через величины J_1, J_2 и J_3 следующим образом:

$$E = \frac{-Z^2me^4}{8\varepsilon_0^2\,(J_1 + J_2 + J_3)^2}. \quad (6.227)$$

Мы видим, что в этом случае $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$. Ничего удивительного в этом нет, поскольку мы имеем дело с замкнутыми орбитами.

Из (6.226) можно усмотреть также одно из преимуществ использования α_1 вместо α_1'. Все преимущества использования J_k станут очевидными в следующем параграфе; здесь же мы обратим внимание только на то, что именно эти величины квантовались в старой квантовой теории по правилам Вильсона — Зоммерфельда.

Уравнения (6.225) и (6.226) могут быть по. чены прямым интегрированием, однако существуют уда более элегантные пути достижения тех же самых] зультатов. Простейший путь вычисления J_2 состоит в м, чтобы, вспомнив смысл выражения $p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}+p_\varphi\dot{\varphi}$ ка удвоенной кинетической энергии частицы, разбить его на ·ри части, соответствующие движениям в r-, θ- и φ-на эавлениях

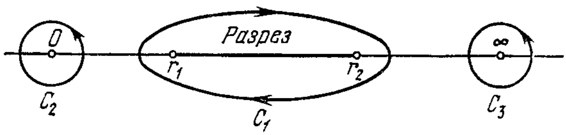

Рис. 30. Контуры обхода особых точек в комплексной r-плоскости, используемые при вычислении интеграла J_1 в (6.231).

соответственно. Если разбить кинетическую энергию таким образом на три части, соответствующие радиальному движению, поперечному (трансверсальному) движению в плоскости орбиты и движению, перпендикулярному орбитальной плоскости (это движение не дает вклада в кинетическую энергию), то мы получим в результате:

$$p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}+p_\varphi\dot{\varphi}=p_r\dot{r}+p_\chi\dot{\chi}+0, \qquad (6.228)$$

где через χ снова обозначена истинная аномалия; поскольку p_χ представляет собой полный момент импульса M, мы получим:

$$p_\theta\dot{\theta}=M\dot{\chi}-p_\varphi\dot{\varphi}=\alpha_2\dot{\chi}-\alpha_3\dot{\varphi}, \qquad (6.229)$$

откуда следует (6.225), если вспомнить, что траектория замкнутая; в свою очередь это означает, что когда угол θ проходит свой период, от значения $\pi/2-i$ до значения $\pi/2+i$ и обратно, то углы χ и φ увеличиваются на 2π.

Чтобы вычислить J_1, можно ввести новую переменную u согласно уравнению

$$2r=(r_1+r_2)+(r_1-r_2)\,u, \qquad (6.230)$$

где через r_1 и r_2 обозначены максимальное и минимальное значения r. Более изящный метод, которым мы обязаны Борну, с помощью которого можно вычислить J_2, состоит в том, что интеграл по r рассматривается как интеграл в комплексной плоскости (см. рис. 30). Подынтегральная функция p_r двузначна, и поэтому необходимо ввести в r-плоскости разрез между двумя точками ветвления r_1 и r_2. На рис. 30 ветви выбраны так, что положительный квадратный корень располагается над действительной осью, а отрицательный — под ней. Тогда можно написать:

$$J_1 = \oint_{C_1} p_r \, dr. \tag{6.231}$$

Контур C_1 охватывает разрез, но, деформируя его в два контура $C_2 + C_3$, мы приходим к двум интегралам, каждый из которых может быть вычислен с помощью теоремы Коши о вычетах. У подынтегрального выражения два полюса $r = 0$ и $r = \infty$, так что мы можем написать:

$$\begin{aligned} J_1 &= \oint_{C_2} p_r \, dr + \oint_{C_3} p_r \, dr = \\ &= 2\pi i \, [\mathrm{Res}\,(\text{при } r = 0) + \mathrm{Res}\,(\text{при } r = \infty)]. \end{aligned} \tag{6.232}$$

Легко видеть, что первый вычет равен $i\alpha_2$, а вычислить второй можно, вводя новую переменную r^{-1} и раскладывая в ряд подынтегральное выражение по r^{-1}; таким путем мы снова придем к выражению (6.226).

§ 6.3. Адиабатические инварианты

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что вполне возможно выбрать совокупность канонически сопряженных переменных, соблюдая следующие требования: а) гамильтониан системы является функцией только половины переменных, и б) для периодических систем, уравнение Гамильтона — Якоби которых может быть решено методом разделения переменных, можно выбрать угловые переменные таким образом, что они изменяются за период на единицу. Причины, по которым вводятся переменные такого вида, что гамильтониан зависит лишь от половины из них, более или менее очевидны, но причины введения переменных «действие — угол» значительно хитрее. И действительно, эти переменные оказались на авансцене лишь с возникновением старой квантовой механики, и причина возникшего к ним интереса была связана с тем, что переменные действия оказались так называемыми *адиабатическими инвариантами*. Мы определим адиабатические инварианты как такие величины, которые остаются инвариантными, если параметры, входящие в гамильтониан, медленно изменяются. Мы дадим более количественное определение адиабатических инвариантов чуть позже и покажем, что переменные действия на самом деле являются адиабатическими инвариантами.

Нам хотелось бы сказать несколько слов о значении адиабатических инвариантов и о тех причинах, по которым они были введены в старую квантовую механику. В свое время Эренфест показал, что если необходимо найти величины, подходящие для квантования, то эти величины должны быть адиабатическими инвариантами. Обоснования этого утверждения состоят в следующем.

Если параметр в гамильтониане меняется настолько медленно, что в его фурье-разложении оказываются только частоты ниже определенного значения, скажем ν_0, которое меньше, чем любая частота, соответствующая боровским условиям для квантовых переходов, то за время изменения параметра никакие квантовые переходы происходить не могут. Это в свою очередь означает, что по мере медленного изменения параметров, происходящего в гамильтониане, не могут изменяться квантовые числа; тем более не могут изменяться квантованные величины. Поскольку переменные действия оказались адиабатическими инвариантами, они могут служить подходящими объектами для квантования; фактически именно для них были предложены правила квантования Вильсона — Зоммерфельда.

Причина, по которой такие медленные изменения были названы адиабатическими, состоит в том, что из статистической механики вытекает следующее утверждение: энтропия системы определяется распределением образующих систему частей по возможным энергетическим состояниям. Поскольку никаких переходов в другие состояния во время адиабатического изменения параметров быть не может, энтропия должна оставаться неизменной; такое положение дел соответствует термодинамическому определению адиабатического изменения. Стоит заметить здесь, что адиабатические инварианты играют также важную роль и в современной квантовой механике; соответствующее утверждение звучит в этом случае так: система, находящаяся в стационарном состоянии, будет продолжать находиться в этом состоянии даже при наличии адиабатических процессов.

Совсем недавно вновь вспыхнул интерес к адиабатическим инвариантам, поскольку они играют важную роль в теории ускорителей и теории движения заряженных частиц в магнитном поле, весьма существенной для проблемы управляемого термоядерного синтеза.

Ради простоты мы докажем адиабатическую инвариантность переменных действия только для одномерного случая; можно заметить, что аналогичное доказательство справедливо также и для случая с бо́льшим числом степеней свободы, если не существует соотношения типа

$$\sum_i \nu_i k_i = 0, \tag{6.301}$$

где k_i — положительные или отрицательные целые числа, а частоты ν_i определены согласно (6.218). Система, для которой удовлетворяется хотя бы одно соотношение вида (6.301), называется вырожденной. Такие системы в этом параграфе мы рассматривать не будем, хотя они нередко встречаются в природе. В задаче Кеплера мы как раз столкнулись с такой системой: мы уже указывали в предыдущем параграфе, что из (6.227) следовало, что $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$.

Мы займемся теперь системой, описываемой гамильтонианом

$$H = H(p,\ q;\ a(t)), \tag{6.302}$$

где через $a(t)$ обозначен параметр, меняющийся со временем. В пределе, когда

$$\dot{a}(t) \to 0, \tag{6.303}$$

мы говорим, что имеем дело с адиабатическим изменением. Для осуществления преобразования от переменных p, q к переменным «действие — угол» J, w мы используем производящую функцию вида (5.220а) $W(q,\ w,\ a)$, которая зависит теперь уже от времени через параметр $a(t)$. Преобразование задается уравнениями

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad J = -\frac{\partial W}{\partial w}. \tag{6.304}$$

Поскольку в этом случае гамильтониан зависит от времени, нам нужно действовать с осторожностью. Мы используем то обстоятельство, доказанное в § 5.4, что канонические уравнения движения эквивалентны вариационному принципу (5.425). Это значит, что из уравнения

$$\delta \int_1^2 [p\dot{q} - H(p, q, a)]\, dt = 0 \tag{6.305}$$

должно следовать уравнение

$$\delta \int_1^2 [J\dot{w} - \overline{H}(J, w, a)]\, dt = 0, \tag{6.306}$$

поскольку преобразование (6.304) является каноническим. Далее мы получаем:

$$p\dot{q} - H(p, q, a) = J\dot{w} - \overline{H}(J, w, a) + \frac{d}{dt} V(q, w, a), \tag{6.307}$$

и, принимая во внимание (6.304) и сравнивая коэффициенты при $\dot{q}$ и $\dot{w}$ в обеих частях этого уравнения, мы обнаруживаем, что

$$V \equiv W, \tag{6.308}$$

а также и что

$$\overline{H}(J, w, a) = H(J, a) + \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{6.309}$$

где учтено, что после преобразования гамильтониан H не будет содержать переменную w. Уравнения движения для w и J приобретут теперь вид:

$$\dot{w} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J} = \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{\partial W}{\partial a}\dot{a}\right), \tag{6.310}$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial w} = -\frac{\partial H(J, a)}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial W}{\partial a}\dot{a}\right). \tag{6.311}$$

Допустим теперь, что J принимает при $t = 0$ заданное значение $J(0)$, и выясним, как изменяется эта величина в течение интервала времени T, за который параметр a изменяется от своего исходного значения a_0 до значения $a_0 + \delta a$. Для упрощения рассуждений будем считать, что a изменяется линейно; это означает, что производная $\dot{a}$ (которая равна в нашем случае $\delta a/T$) постоянна, а также и то, что $\dot{a}$ стремится к нулю, если интервал T стремится к бесконечности, причем произведение $\dot{a}T$ остается конечной величиной. Из выражения (6.311) для приращения J мы получаем:

$$J(T)-J(0)=-\int_0^T \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial a}\dot a\,dt \tag{6.312а}$$

$$=-\dot a\int_0^T \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial a}dt \tag{6.312б}$$

$$=-\dot a\int_0^T \sum_{k\neq 0} A_k(J,\,a)\,e^{2\pi ikw}\,dt \tag{6.312в}$$

$$=-\dot a\int_0^T \sum_{k\neq 0}(A_k^{(0)}+A_k^{(1)}\dot at+\ldots)\times$$
$$\times\exp\,[2\pi i(\nu_0t+\delta_0+(\nu_1t^2+\delta_1t)\,\dot a+\ldots)]\,dt \tag{6.312г}$$

$$=-\dot a\int_0^T\left\{\sum_{k\neq 0}A_k^{(0)}\exp\,[2\pi ik(\nu_0t+\delta_0)]\,dt\right\}+$$
$$+\dot a^2\int_0^T(\ldots)\,dt+\ldots \tag{6.312д}$$

При переходе от (6.312а) к (6.312б) использовано наше предположение о том, что $\dot a=\mathrm{const}$. Уравнение (6.312в) следует из того, что рассматриваемая система — периодическая по w с периодом, равным единице, так что величина W может быть разложена в ряд Фурье. Переменная w не является уже, строго говоря, линейной функцией времени, но из (6.310) следует, что

$$w=\frac{\partial H}{\partial J}t+\delta(J,\,a)=\nu(J,\,a)\,t+\delta(J,\,a)=$$
$$=\nu_0t+\delta_0+(\nu_1t^2+\delta_1t)\,\dot a+\ldots, \tag{6.313}$$

где величина $\delta(J,\,a)$ была бы настоящей константой, если бы a не менялось, и где мы разложили величины ν и δ в ряд по степеням t.

Перейдем теперь к пределу, когда $T\to\infty$. Поскольку модуль интеграла, стоящего в первом члене (6.312д), на верхнем пределе принимает конечное значение, равное

$$\sum_{k\neq 0}[A_k^0/2\pi k\nu_0],$$

то этот член стремится к нулю, если $\dot{a}$ стремится к нулю. Второй член по порядку величины самое большее совпадает с величиной $\dot{a}^2T = (\dot{a}T)\,\dot{a}$, которая также стремится к нулю, если $\dot{a} \to 0$. Мы видим, что в предельном случае $\dot{a} \to 0$ величина J просто не меняется. Мы не хотим заниматься рассмотрением более общего случая, когда высшие производные от a по времени отличны от нуля, отсылая читателя к соответствующей литературе *).

Полезно хотя бы кратко обратить внимание на связь между инвариантностью J и теоремой Лиувилля в статистической механике. Эта теорема утверждает, что элемент объема в фазовом пространстве инвариантен. Для выявления этой связи в одномерном случае, который мы только что рассматривали, мы записываем:

$$J = \oint p\,dq = \iint dp\,dq = \iint d\Omega,$$

где через $d\Omega$ обозначен элемент фазового пространства.

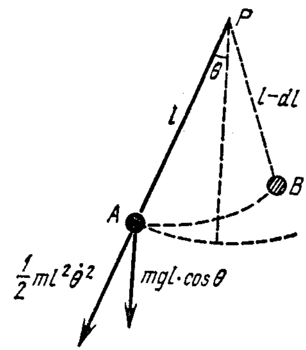

Рис. 31. Изменение движения простого маятника при адиабатическом изменении его длины от l до $l-dl$; P — точка подвеса маятника.

В завершение этого параграфа мы рассмотрим два примера. Первый из них — математический маятник, причем мы ограничимся случаем малых колебаний, так что уравнение движения маятника будет совпадать с уравнением линейного гармонического осциллятора. Второй пример — движение заряженной частицы в магнитном поле.

Пусть l будет длиной математического маятника, θ — угол его отклонения от вертикали, q — линейное смещение, а ν — частота колебаний. Обозначим через E энергию маятника; m — масса шарика, g — ускорение силы тяжести. Вопрос, на который мы хотим ответить, состоит в следующем: как изменится амплитуда θ_0, если l будет меняться адиабатически? Ответ на этот вопрос можно получить двумя путями. Первый путь состоит в том, что изменение механической системы при адиабатическом изменении длины маятника от l до $l+dl$ рассматривается

*) См., например, *J. M. Burgers*, Ann. Phys. (Lpz.) **52**, 195 (1917).

совершенно непосредственно. Второй путь — куда более быстрый — заключается в использовании адиабатической инвариантности J. Мы остановимся на обоих методах.

Работа dW, совершаемая при изменении l, разбивается на две части — работу против силы тяжести и работу, совершаемую против центробежных сил:

$$dW = -mg\overline{\cos\theta}\,dl - ml\overline{\dot\theta^2}\,dl, \tag{6.314}$$

где черта над величинами означает усреднение по промежутку времени, за который происходит изменение l. После того как длина маятника достигает своего нового, окончательного значения, можно подвести баланс энергии и записать:

$$dW = -mg\,dl + dE, \tag{6.315}$$

где через dE обозначено изменение энергии маятника; что касается величины $-mg\,dl$, то она представляет собой изменение потенциальной энергии массы m за счет изменения ее положения в поле тяжести. Объединяя (6.314) и (6.315) и полагая при этом $\cos\theta \approx 1 - {}^1/_2\theta^2$, получим:

$$dE = \frac{1}{2}mg\overline{\theta^2}\,dl - ml\overline{\dot\theta^2}\,dl. \tag{6.316}$$

Поскольку длина меняется медленно, т. е. изменение длины занимает время несравненно большее, чем период колебаний маятника, можно написать

$$\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}ml^2\overline{\dot\theta^2} = \frac{1}{2}mgl\overline{\theta^2} \tag{6.317}$$

и переписать (6.316) уже так:

$$dE = -(E/2l)\,dl. \tag{6.318}$$

Отсюда следует, что величина E^2l является инвариантом, а поскольку E пропорционально $l\theta_0^2$ [ср. (6.317)], где θ_0 — амплитуда колебаний, то мы видим, что

$$l^3\theta_0^4 = \text{invariant}. \tag{6.319}$$

Если же воспользоваться адиабатической инвариантностью J, доказательство (6.319) совсем просто. Из (6.222) и (6.223) мы имеем:

$$J = E/\nu, \tag{6.320}$$

и поскольку E пропорционально $l\theta_0^2$, то (6.319) следует отсюда немедленно, так как для математического маятника ν пропорционально $1/\sqrt{l}$. Мы обращаем внимание на то обстоятельство, что, сочетая пропорциональность ν и $1/\sqrt{l}$ с (6.318), мы сразу же получаем доказательство инвариантности отношения E/ν, т. е. величины J для данного примера.

Наконец, несколько слов о заряженной частице в магнитном поле. Мы остановимся только на самом важном из адиабатических инвариантов; кроме того, мы ограничимся простейшим случаем, когда магнитное поле однородно и направлено вдоль оси z; это означает, что векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ такого поля имеет компоненты $-\frac{1}{2}By$, $-\frac{1}{2}Bx$, 0. Переменная действия, которую следует ввести, имеет вид:

$$J_\theta = \oint p_\theta \, d\theta, \tag{6.321}$$

где временно введены цилиндрические координаты r, θ, z. Выразим лагранжиан системы в цилиндрических координатах [ср. (5.353)]:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} eBr^2\dot{\theta}. \tag{6.322}$$

Из лагранжиана (6.322) мы получим выражение для p_θ:

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2} eBr^2. \tag{6.323}$$

Чтобы еще больше упростить задачу, мы рассмотрим случай, когда $\dot{z} = 0$ и $\dot{r} = 0$, т. е. случай, когда частица движется по окружности вокруг силовых линий магнитного поля с циклотронной частотой ω_c,

$$\omega_c = eB/m, \tag{6.324}$$

так что $\dot{\theta} = \omega_c$. Из выражений (6.321), (6.323) и (6.324) мы получим тогда:

$$J_\theta = (6\pi m/e)(mv_\perp^2/2B) = (6\pi m/e)\,\mu, \tag{6.325}$$

где через $v_\perp$ обозначена поперечная скорость:

$$v_\perp = r\dot{\theta}, \tag{6.326}$$

а через μ — магнитный момент, соответствующий движению частицы,

$$\mu = \frac{1}{2} ev_\perp r = ev_\perp^2/2\omega_c = mv_\perp^2/2B. \tag{6.327}$$

Таким образом, для нашего частного, крайне упрощенного случая доказано, что магнитный момент μ является адиабатическим инвариантом. Этот результат остается справедливым и для более сложных движений заряженной частицы, причем поле вовсе не обязательно однородно. Кроме магнитного момента μ есть еще два других адиабатических инварианта. Для движения заряженной частицы в магнитных полях таких конфигураций, как земное магнитное поле или магнитное поле, используемое в термоядерных реакторах (магнитные зеркала), можно доказать *), что частица, однажды захваченная магнитным полем, навсегда останется в этом поле, если только не нарушатся условия адиабатической инвариантности (предполагая, что рассеяния нет, так как иначе возникает иной источник потерь частиц).

ЗАДАЧИ

1. Воспользовавшись уравнением Гамильтона — Якоби, получить уравнение траектории частицы, движущейся в поле двумерного потенциала $U=\mu/r$, описывая движение в координатах $u=r+x$, $v=r-x$.

2. Используя уравнение Гамильтона — Якоби, получить уравнение траектории частицы, движущейся в поле двумерного потенциала $U=\frac{1}{2}\alpha r^2$, описывая движение в координатах u и v, определяемых формулами $x=\operatorname{ch} u\cdot\cos v$, $y=\operatorname{sh} u\cdot\sin v$.

3. С помощью уравнения Гамильтона — Якоби и эллиптических координат описать движение заряженной частицы в поле, создаваемом двумя зарядами, закрепленными на конечном расстоянии друг от друга.

4. Воспользовавшись уравнением Гамильтона — Якоби, показать, что траектория частицы, движение которой описывается гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)(q_1^2+q_2^2)^{-1}+(q_1^2+q_2^2)^{-1},$$

будет коническим сечением в плоскости q_1q_2.

5. Исходя из уравнения Гамильтона — Якоби, рассмотреть эффект Штарка в атоме водорода, используя параболические координаты. Разложить полученное решение в степенной ряд по напряженности электрического поля и сравнить с результатами, приведенными в § 7.3.

6. В некоторой системе с двумя степенями свободы одним из интегралов движения является энергия $H(q_1, q_2, p_1, p_2, t)=h$, а другим $F(q_1, q_2, p_1, p_2)=c$.

*) См., например, *Northrop and Teller*, Phys. Rev. 117, 215 (1960).

Показать, что в этом случае существует функция $\psi(q_1, q_2, h, c)$, такая, что

$$p_1 = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial\psi}{\partial q_2},$$

и что остающимися интегралами движения будут:

$$\frac{\partial\psi}{\partial c} = \text{const}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial h} - t = \text{const}.$$

Убедиться в том, что если

$$H = q_1 p_2 - q_2 p_1 + a p_1^2 - a p_2^2,$$

то имеет место также интеграл движения

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 - 2a p_1 p_2 = \text{const};$$

завершить полностью решение задачи.

7. Частица, масса которой равна m, а энергия E, движется в плоскости xy в поле потенциала U. Пусть $w = \varphi + i\psi$ — аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$, такая, что

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = 2m(E - U).$$

Показать, что полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид:

$$S = \varphi \cos \alpha_1 + \psi \sin \alpha_1 + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — постоянные интегрирования.

Определить траектории частиц, идущих из бесконечности, где их энергия $E = 0$, в потенциальное поле

$$U = -\frac{\lambda^2 OP^2}{AP^2 \cdot BP^2},$$

где A, B, O и P — точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, 0)$ и (x, y), а λ — некоторая постоянная.

Глава 7

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этой главе описываются некоторые методы, приложимые к системам, уравнения движения которых не могут быть решены точно, но вместе с тем некоторая упрощенная задача — называемая невозмущенной задачей — допускает точное решение. При этом предполагается, что различие между интересующей нас возмущенной системой и упрощенной невозмущенной системой может рассматриваться как малое возмущение. В первом параграфе рассматриваются прямые методы трактовки возмущений; эти методы используются для исследования ангармонического осциллятора. Во втором параграфе излагается каноническая теория возмущений, на которой основывается квантовомеханическая теория возмущений. Рассмотрен также кратко вопрос о секулярных и периодических возмущениях.

В последнем параграфе, наконец, разобран вопрос о влиянии слабых электрического и магнитного полей на движение заряженных частиц, в частности на движение частиц в атоме водорода.

§ 7.1. Ангармонический осциллятор

Случаи, когда можно найти точное решение уравнений движения реальной физической системы, являются скорее исключением, чем правилом. Причин для этого немало. В предыдущих главах мы обычно занимались задачами, которые можно было свести к относительно простым уравнениям, записанным для одной частицы. Многие из этих задач, касающиеся одной частицы, имеют дело с центральными силами, которые, как мы видели, допускают решение в квадратурах [см.(1.219)]. Задачи, которые мы исследовали, по большей части выбирались так, что квадратура вела к решению в замкнутой форме. Но такие простые решения для одиночной частицы для большинства систем будут лишь первыми приближениями настоящих уравнений движения и являются результатом пренебрежения «возмущающими» влияниями. Такие возмущения могут быть нескольких различных типов. Прежде всего, возможен случай, когда невозмущенную систему помещают в некоторое внешнее поле, такое, например, как внешнее электрическое или магнитное поле. Тогда можно наблюдать явления Штарка или Зеемана, — явления, к которым мы обратимся в последнем параграфе этой главы.

Во-вторых, встречаются случаи, когда, интересуясь невозмущенной системой, мы просто пренебрегаем влиянием составных частей этой системы. В качестве примера можно привести движение Луны вокруг Земли. В первом приближении можно считать как Луну, так и Землю точечными частицами, движущимися по орбитам, определяемым исключительно силами тяготения, действующими между двумя точечными массами. Но это решение безусловно должно быть скорректировано как на влияние Солнца на орбиту Луны, так и на тот факт, что Земля отнюдь не является абсолютно твердым телом, а напротив, в высшей степени подвержена деформациям, поскольку она покрыта океаном, испытывающим приливы и отливы. Мы не станем вдаваться здесь в эту тему — она более подходит для курса небесной механики.

В-третьих, встречается немало случаев, когда мы сталкиваемся с системами, уравнения движения которых чрезвычайно сложны и не позволяют получить точное решение в замкнутой форме; нередко, однако, возможно указать другую систему, гамильтониан которой почти такой же, как и гамильтониан интересующей нас системы, но решение уравнений движения которой может быть получено в замкнутой форме через квадратуры. Различие между исходным и упрощенным гамильтонианами может в этом случае рассматриваться как «возмущение». Именно к этому типу возмущений и относится задача об ангармоническом осцилляторе. Эта задача возникает в теории малых колебаний, о которых шла речь в гл. 3. В гл. 3 мы удержали только первый член, отличный от нуля, в выражении для потенциальной энергии, что и привело нас к таким уравнениям движения, которые удалось свести к совокупности уравнений независимых гармонических осцилляторов. Вот эту-то систему мы и считаем невозмущенной. Возмущение состоит в том, что в гамильтониане учитываются все остальные члены. Самым важным из них является, конечно, кубический член.

Мы не станем заниматься общей задачей, касающейся систем со многими степенями свободы, которые в первом приближении сводятся к задаче о малых колебаниях (см. гл. 3); мы рассмотрим поподробнее одномерный ангармонический осциллятор, гамильтониан которого задается уравнением

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2+\lambda q^3. \qquad (7.101)$$

Причина, по которой имеет определенный смысл заняться упрощенной невозмущенной задачей, заключается в том, что «невозмущенная» задача довольно близка к интересующей нас задаче, так что ее решение имеет по меньшей мере некоторое отношение к решению действительно нужной задачи. Более того, обычно удается найти решение «возмущенной» задачи в виде ряда по степеням некоторого параметра, входящего в виде множителя при возмущении, — так, например, как входит множитель λ в выражение (7.101); тогда можно надеяться — поскольку предполагается достаточная малость λ, — что несколько первых членов полученного ряда обеспечат хорошую аппроксимацию решения возмущенной задачи.

В следующем параграфе будет систематически развита теория для задач такого типа, основанная на использовании переменных действие — угол, введенных в предыдущей главе. Могут спросить, в какой степени необходимо — если не касаться непосредственной связи вопроса с квантовомеханической теорией возмущений — бросать в бой тяжелую артиллерию канонических преобразований; в самом деле, многие авторы полагают, что любой прямой метод вполне успешно решает ту же самую задачу. На это можно возразить, обратив внимание на то, что каноническая теория возмущений была в ходу задолго до появления квантовой механики; но самым убедительным аргументом является, пожалуй, то, что во многих случаях, как можно убедиться, прямые методы оказываются либо более неудобными, либо они ведут просто к ошибочным результатам; нередко случается, что они одновременно и неудобны, и ошибочны.

Чтобы не быть голословными, мы разберем в этом параграфе применение двух прямых методов. Эти методы будут применены к решению задачи об ангармоническом осцилляторе, гамильтониан которого задан выражением (7.101). Полученные результаты мы сравним с теми результатами, которые следуют из канонической теории возмущений; они будут получены в следующем параграфе.

Задача, которой мы будем заниматься в этой главе, — это задача о движении системы, гамильтониан которой задан в виде:

$$H = H_0 + \lambda H_1, \tag{7.102}$$

где через H_0 обозначен гамильтониан невозмущенной системы, а через λH_1 — возмущение. Нам нужно решить следующие канонические уравнения движения:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \tag{7.103}$$

Первый метод решения этих уравнений состоит в том, что записывают

$$p_k = p_k^{(0)} + \lambda p_k^{(1)} + \lambda^2 p_k^{(2)} + \ldots, \quad q_k = q_k^{(0)} + \lambda q_k^{(1)} + \lambda^2 q_k^{(2)} + \ldots \tag{7.104}$$

Через $p_k^{(0)}$ и $q_k^{(0)}$ обозначены решения невозмущенной задачи:

$$\dot{p}_k^{(0)} = -\left(\frac{\partial H_0}{\partial q_k}\right)_0, \quad \dot{q}_k^{(0)} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_k}\right)_0, \tag{7.105}$$

где индексом «0» отмечено, что вместо p_k и q_k следует подставлять их невозмущенные значения $p_k^{(0)}$ и $q_k^{(0)}$. Величины $p_k^{(1)}$ и $q_k^{(1)}$ находятся подстановкой (7.102) и (7.104) в (7.103) с учетом (7.105). Эта процедура приводит к следующим уравнениям:

$$\dot{p}_k^{(1)} = -\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_k}\right)_0 - \sum_l \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 q_l^{(1)} - \sum_l \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_k \partial p_l}\right)_0 p_l^{(1)}, \tag{7.106}$$

$$\dot{q}_k^{(1)} = \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_k}\right)_0 + \sum_l \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_k \partial q_l}\right)_0 q_l^{(1)} + \sum_l \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_k \partial p_l}\right)_0 p_l^{(1)}. \tag{7.107}$$

Таким способом можно найти столько членов ряда (7.104), сколько желательно.

Второй метод может быть использован только для многократно периодических систем, где можно воспользоваться методом разделения переменных (см. § 6.2). В этом случае можно воспользоваться функцией Гамильтона — Якоби вида

$$S = \sum_k S_k (q_k; \alpha_i; \lambda), \tag{7.108}$$

где каждая из S_k зависит только от одной координаты q_k, но может содержать любые α_i ($i=1, 2, \ldots, s$; s — число степеней свободы). В выражении для S (7.108) явно указано, что S_k являются функциями параметра возмущения λ. С помощью S_k можно ввести переменные действия J_k согласно определению:

$$J_k = \oint \frac{\partial S_k}{\partial q_k} dq_k, \tag{7.109}$$

где интегрирование ведется по полному периоду переменной q_k. Энергия системы E является функцией величин α_i, и поскольку теперь благодаря определениям (7.109) величины J_k зависят от α_i, можно найти энергию E как функцию J_k. Практически раскладывают S_k и J_k в ряд по степеням λ. Следует, однако, иметь в виду, что периоды q_k в возмущенной системе уже иные.

Если необходимо найти изменения q_k, требуется ввести также и угловые переменные, согласно определению [ср. (6.208)]

$$w_k = \oint \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k \partial J_k} dq_k, \tag{7.110}$$

и уравнения, определяющие преобразование от величин p_k и q_k к величинам w_k и J_k.

Конечно, если все уравнения могут быть решены точно в замкнутой форме, то нет никакой необходимости использовать теорию возмущений; но, как правило, мы имеем дело с системами, где этого как раз нет и где просто необходимо для нахождения решения использовать разложение в ряд по степеням λ.

Применим теперь изложенные методы к системе, гамильтониан которой задается выражением (7.101). Мы имеем в этом случае:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2, \quad H_1 = q^3. \tag{7.111}$$

Используя первый метод, мы получим уравнение нулевого порядка:

$$m\ddot{q}^{(0)} + m\omega^2 q^{(0)} = 0, \tag{7.112}$$

решением которого будет

$$q^{(0)} = A \sin \omega t. \tag{7.113}$$

Уравнение первого порядка имеет вид:

$$m\ddot{q}^{(1)} + m\omega^2 q^{(1)} = -3\,(q^{(0)})^2 = -3A^2 \sin^2 \omega t, \tag{7.114}$$

а его решение запишется так:

$$q^{(1)} = -\frac{A^2}{2m\omega^2}(3 + \cos 2\omega t). \tag{7.115}$$

Уравнение второго порядка

$$m\ddot{q}^{(2)} + m\omega^2 q^{(2)} = -6q^{(0)}q^{(1)} = \frac{3A^3}{m\omega^2}\sin\omega t\,(3 + \cos 2\omega t) \tag{7.116}$$

имеет своим решением

$$q^{(2)} = \frac{A^3}{m^2\omega^4}\left[-\frac{3}{16}\sin 3\omega t - \frac{15}{4}\omega t\cos\omega t + \alpha\sin\omega t\right], \tag{7.117}$$

где через α временно обозначен соответствующий произвольный параметр.

Связь $p^{(l)}$ и $q^{(l)}$ определяется соотношением

$$p^{(l)} = m\dot{q}^{(l)}, \tag{7.118}$$

и мы получаем выражение для энергии:

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \ldots, \tag{7.119}$$

где

$$E^{(0)} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2, \quad E^{(1)} = 0, \quad E^{(2)} = \frac{A^4}{m\omega^2}\left(\alpha - \frac{37}{16}\right). \tag{7.120}$$

В данном конкретном случае использованный метод не слишком подходящ по двум причинам: прежде всего мы обнаруживаем, что решения дифференциальных уравнений для $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ допускают еще одно слагаемое, пропорциональное решению невозмущенного уравнения (7.112). Но мы не добавили этот член к выражению $q^{(1)}$, а добавили к решению $q^{(2)}$. Сделано это было для того, чтобы получить правильный ответ, т. е. ответ, получаемый либо вторым способом, либо с помощью канонической теории возмущений — для $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$. Если положить к тому же α равной 11/8, цель будет достигнута [ср. (7.133)]. Вторая трудность состоит в том, что у нас появился член, пропорциональный $t\cos\omega t$, в выражении для $q^{(2)}$. Если разложение в ряд по степеням λ имеет хоть какой-нибудь смысл, то должна быть возможность выбрать λ столь малым, чтобы члены, содержащие λ^n ($n \neq 0$), оказались бы меньше невозмущенных членов. Но совершенно очевидно, что это невозможно, когда появляется неограниченно возрастающий член такого вида, как $t\cos\omega t$. В следующем параграфе мы увидим, что в выражении для $q^{(2)}$, получаемом из канонической теории возмущений, такой член не появляется [см. (7.235)].

Следует добавить, что перечисленные трудности присущи только задаче, связанной с гармоническим осциллятором, поскольку в этом случае — и только в этом случае — невозмущенное уравнение движения представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение. Вместе с тем, поскольку уравнение движения гармонического осциллятора едва ли не самое важное в теоретической физике, отмеченные трудности достаточно серьезны.

Воспользуемся теперь вторым методом для решения задачи об ангармоническом осцилляторе. Мы увидим, что этот метод не сталкивается с отмеченными выше трудностями, но при этом определить с его помощью возмущенное движение довольно затруднительно. Фактически

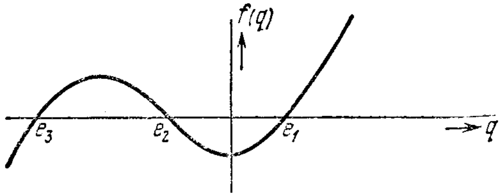

Рис. 32. График функции $f(q)$, определенной согласно (7.122); e_1, e_2 и e_3 — корни функции $f(q)$.

самый простой способ получения первых отличных от нуля поправок как к энергии E, так и к координате q состоит в использовании канонической теории возмущений, которой мы займемся в следующем параграфе.

Мы будем следовать Борну *) и воспользуемся переменными действие — угол. Если через E обозначить энергию системы, мы получим:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \lambda q^3,$$

или же

$$p = \sqrt{2m\lambda f(q)}, \tag{7.121}$$

причем

$$f(q) = -q^3 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\lambda} + \frac{E}{\lambda}. \tag{7.122}$$

---

*) *М. Борн*, Лекции по атомной механике, Гостехиздат Украины, 1934.

Обозначим через e_1, e_2 и e_3 три корня кубического многочлена $f(q)$, которые мы выберем так, что $e_1 \to (2E/m\omega^2)^{1/2}$, $e_2 \to -(2E/m\omega^2)^{1/2}$ и, наконец, $e_3 \to -\infty$, если $\lambda \to 0$ (см. рис. 32). Тогда выражение для $f(q)$ (7.122) можно переписать так:

$$f(q) = (e_1 - q)(q - e_2)(q - e_3) = \\ = -e_3(e_1 - q)(q - e_2)[1 - (q/e_3)]. \quad (7.123)$$

Будем искать точное решение уравнений движения в виде ряда по степеням λ в предельном случае $\lambda \to 0$. При этом предельном переходе e_3 стремится к бесконечности по закону $-\lambda^{-1}$; извлекая квадратный корень из выражения (7.123), мы можем представить его в виде степенного ряда по e_3^{-1}:

$$[f(q)]^{1/2} = (-e_3)^{1/2}[(e_1 - q)(q - e_2)]^{1/2} \times \\ \times [1 - (q/2e_3) - (q^2/8e_3^2) + \ldots]. \quad (7.124)$$

Из (6.210) и (7.121) можно ввести переменную действия J:

$$J = \oint p\, dq = (-2m\lambda e_3)^{1/2}[J^{(0)} - (J^{(1)}/2e_3) - (J^{(2)}/8e_3^2) + \ldots], \quad (7.125)$$

где $J^{(k)}$ определяются согласно соотношению

$$J^{(k)} = \oint [(e_1 - q)(q - e_2)]^{1/2} q^k\, dq. \quad (7.126)$$

Если ввести вместо переменных q новые переменные ψ, определив их из соотношения [ср. (6.230)]:

$$2q = (e_1 + e_2) + (e_1 - e_2)\sin\psi, \quad (7.127)$$

то угол ψ меняется от $\pi/2$ до $5\pi/2$, когда координата q проходит значения от e_1 до e_2 и обратно, так что для $J^{(k)}$ мы получим:

$$J^{(k)} = \frac{1}{4}(e_1 - e_2)^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)\sin\psi\right]^k \cos^2\psi\, d\psi, \quad (7.128)$$

откуда следуют следующие выражения для $J^{(0)}$, $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$:

$$J^{(0)} = \frac{1}{4}\pi(e_1 - e_2)^2, \quad J^{(1)} = \frac{1}{8}\pi(e_1 + e_2)(e_1 - e_2)^2, \\ J^{(2)} = \frac{1}{64}\pi(e_1 - e_2)^2[5(e_1 + e_2)^2 - 4e_1e_2]. \quad (7.129)$$

Теперь мы можем написать:

$$e_{1,2} = \pm (2E/m\omega^2)^{1/2} + \alpha_{1,2}\lambda + \beta_{1,2}\lambda^2 + \ldots, \quad e_3 = (-m\omega^2/\lambda)(1 + \alpha_3\lambda + \beta_3\lambda^2 + \ldots); \tag{7.130}$$

для получения величин α_i и β_i надо последовательно подставить выражения для e_1, e_2 и e_3 в выражение (7.122), определяющее $f(q)$, и потребовать обращения этого выражения в нуль; при этом приравниваются нулю коэффициенты при различных степенях λ. В результате получим:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -2E/m^2\omega^4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 = -\beta_2 = (5E/m^3\omega^7)(2E/m)^{1/2}, \quad \beta_3 = -8E/m^3\omega^6. \tag{7.131}$$

Воспользовавшись (7.123) и (7.127) — (7.129), найдем:

$$J = \frac{2\pi E}{\omega}\left[1 + \frac{15\lambda^2 E}{4m^3\omega^6} + \ldots\right], \tag{7.132}$$

или

$$E = \nu J - \frac{15\lambda^2 J^2}{16\pi^2 m^3\omega^4} + \ldots, \qquad \nu = \omega/2\pi. \tag{7.133}$$

Чтобы выразить q через угловую переменную w, мы используем (6.208), т. е. пишем:

$$w = \int \frac{\partial p}{\partial J}\, dq = \left(\frac{m}{2\lambda}\right)^{1/2} \frac{dE}{dJ} \int \frac{dq}{\sqrt{f(q)}}, \tag{7.134}$$

где учтены (7.121) и (7.122) и то обстоятельство, что в (7.122) от J зависит только энергия E.

Разлагая $[f(q)]^{-1/2}$ в ряд, аналогично разложению в ряд (7.124), и пользуясь подстановкой (7.127), мы найдем прямым, но утомительным вычислением:

$$2\pi w = \psi + \lambda (J/\pi m^3\omega^5)^{1/2} \cos\psi + \ldots \tag{7.135}$$

Объединяя выражения (7.127), (7.130), (7.131), (7.133) и (7.135), мы получаем в конце концов выражение и для q:

$$q = A \sin 2\pi w - \frac{\lambda A^2}{2m\omega^2}(3 + \cos 4\pi w) + \ldots, \qquad A = \left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}. \tag{7.136}$$

§ 7.2. Каноническая теория возмущений

В этом параграфе будет развита последовательная теория получения решения гамильтоновских уравнений движения. Представим гамильтониан в виде:

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \ldots \tag{7.201}$$

Обычно в правой части (7.201) стоит всего лишь один член, кроме H_0, как, например, во всех случаях, разбираемых в этой главе, тем не менее мы допускаем возможность наличия членов высшего порядка, что символически отмечено включением члена $\lambda^2 H_2$.

Допустим, что интересующие нас задачи решаются путем введения переменных действие — угол, т. е. соответствуют уравнению Гамильтона — Якоби с разделяющимися переменными (см. § 6.2). В целях простоты ограничимся здесь одномерными системами. В конце этого параграфа мы остановимся на том, как можно распространить эту теорию на многомерные системы. Переменные действие — угол, соответствующие невозмущенной системе с гамильтонианом H_0, обозначим через J_0 и w_0. Уравнения движения решаются методом Гамильтона — Якоби, а функция Гамильтона — Якоби ищется в виде степенного ряда по параметру λ,

$$S = S_0 + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \ldots \tag{7.202}$$

Эта функция Гамильтона — Якоби порождает преобразование от невозмущенных w_0 и J_0 к возмущенным переменным w и J, определяемое уравнениями:

$$J_0 = \frac{\partial S}{\partial w_0}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial J}, \quad S = S(w_0\ J). \tag{7.203}$$

Исходная координата q — известная функция w_0 и J_0, так как мы предполагаем, что невозмущенная задача может быть решена путем введения переменных действие — угол. Если параметр $\lambda \to 0$, мы возвращаемся к невозмущенной задаче, так что S_0 должно соответствовать тождественному преобразованию; следовательно, эта функция должна быть вида [ср. (5.224)]

$$S_0 = w_0 J. \tag{7.204}$$

Тогда из соотношений (7.203) мы получим:

$$\begin{aligned} J_0 &= J + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_0} + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \ldots, \\ w &= w_0 + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial J} + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial J} + \ldots \end{aligned} \tag{7.205}$$

Функции S_1, S_2, ... зависят от w_0 и J, но можно воспользоваться (7.205), чтобы найти J_0 и w_0 в виде степенных рядов по λ, причем каждый из членов ряда зависит от w и J:

$$J_0=J+\lambda\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)_{w_0=w}+\lambda^2\left[\left(\frac{\partial S_2}{\partial w_0}\right)_{w_0=w}-\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial w_0^2}\frac{\partial S_1}{\partial J}\right)_{w_0=w}\right]+\ldots; \tag{7.206}$$

$$w_0=w-\lambda\left(\frac{\partial S_1}{\partial J}\right)_{w_0=w}+\lambda^2\left[-\left(\frac{\partial S_2}{\partial J}\right)_{w_0=w}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial J\,\partial w_0}\frac{\partial S_1}{\partial J}\right)_{w_0=w}\right]+\ldots \tag{7.207}$$

Когда мы приступали к решению задачи, H_0, H_1, H_2, ... были функциями p и q, но уже после первого преобразования Гамильтона — Якоби, благодаря которому были введены переменные w_0 и J_0 и одновременно решалась невозмущенная задача, мы получаем:

$$H=H_0(J_0)+\lambda H_1(w_0,\ J_0)+\lambda^2 H_2(w_0,\ J_0)+\ldots \tag{7.208}$$

Новое уравнение Гамильтона — Якоби, которое следует решать для нахождения функции S, имеет вид:

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial w_0}\right)+\lambda H_1\left(w_0,\ \frac{\partial S}{\partial w_0}\right)+\lambda^2 H_2\left(w_0,\ \frac{\partial S}{\partial w_0}\right)+\ldots=E(J). \tag{7.209}$$

Представляя S в виде ряда (7.202), раскладывая энергию $E(J)$ в ряд по степеням λ,

$$E(J)=E_0(J)+\lambda E_1(J)+\lambda^2 E_2(J)+\ldots, \tag{7.210}$$

принимая во внимание (7.204), (7.205), мы получим из (7.209):

$$H_0(J)+\lambda\frac{\partial H_0}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial w_0}+\lambda^2\frac{\partial H_0}{\partial J_0}\frac{\partial S_2}{\partial w_0}+\frac{1}{2}\lambda^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+\lambda H_1(w_0,\ J)+\lambda^2\frac{\partial H_1}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial w_0}+\ldots+\lambda^2 H_2(w_0,\ J)+\ldots=$$
$$=E_0(J)+\lambda E_1(J)+\lambda^2 E_2(J)+\ldots \tag{7.211}$$

Собирая все члены, соответствующие одной и той же степени λ, имеем:

$$H_0(J)=E_0(J), \tag{7.212}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial w_0}+H_1(w_0,\ J)=E_1(J), \tag{7.213}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial J_0}\frac{\partial S_2}{\partial w_0}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2+$$
$$+\frac{\partial H_1}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial w_0}+H_2(w_0,\ J)=E_2(J),\ \ldots \tag{7.214}$$

Уравнение (7.213) определяет S_1 и E_1, уравнение (7.214) — S_2 и E_2, и т. д. Чтобы показать, как это практически делается, вспомним, что p и q являются периодическими функциями от w_0 с периодом, равным единице (см. § 6.2). Это остается в силе и сейчас, хотя переменная w_0 уже не будет линейной функцией времени. Поскольку p и q периодичны относительно w_0, то же самое относится и к $H_1, H_2, \ldots$ Поэтому все эти величины можно разложить в ряды Фурье:

$$H_1 = \sum_n H_n^{(1)}(J_0) \exp(2\pi i n w_0), \tag{7.215}$$

$$H_2 = \sum_n H_n^{(2)}(J_0) \exp(2\pi i n w_0), \ldots \tag{7.216}$$

Удобно также разложить в ряд Фурье и величины S_1, $S_2, \ldots$:

$$S_1 = \sum_n S_n^{(1)}(J) \exp(2\pi i n w_0), \tag{7.217}$$

$$S_2 = \sum_n S_n^{(2)}(J) \exp(2\pi i n w_0), \ldots \tag{7.218}$$

Из (7.217) и (7.218) вытекает, что в рядах Фурье для $\partial S_1/\partial w_0$ и $\partial S_2/\partial w_0$ нет членов с $n=0$ и что, следовательно, средние за период от $\partial S_1/\partial w_0$ и $\partial S_2/\partial w_0$ равны нулю. С другой стороны, если вычислять среднее за период от H_1, $H_2, \ldots$ или их производных по J_0, то там окажется член, соответствующий $n=0$. Поэтому, если вычислять среднее от уравнений (7.213) и (7.214) за период (это среднее мы обозначаем чертой над соответствующими величинами), мы получим:

$$E_1(J) = \overline{H}_1, \tag{7.219}$$

$$E_2(J) = \overline{H}_2 + \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2} + \overline{\frac{\partial H_1}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial w_0}}, \ldots \tag{7.220}$$

Обратим внимание на то, что хотя $\overline{\partial S_1/\partial w_0} = 0$, два последних члена в правой части уравнения (7.220) вовсе не обязательно обращаются в нуль. Уравнения (7.219) и (7.220) определяют E_1 и E_2.

Если произвольную функцию G от w_0 записать в виде

$$\tilde{G} = G - \overline{G}, \tag{7.221}$$

т. е. обозначить волнистой чертой чисто периодическую часть функции от w_0, мы получим из (7.213), (7.214), (7.219) и (7.220) следующие уравнения, из которых мы можем найти S_1 и S_2:

$$\frac{\partial S_1}{\partial w_0}=\frac{-\widetilde{H_1(J)}}{\nu}, \tag{7.222}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial w_0}=\frac{1}{\nu}\left[-\hat{H}_2-\frac{1}{2}\widetilde{\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2}-\widetilde{\frac{\partial H_1}{\partial J_0}\frac{\partial S_1}{\partial w_0}}\right], \tag{7.223}$$

где мы положили [ср. (7.212) и (6.211)]

$$\frac{\partial H_0}{\partial J_0}=\nu. \tag{7.224}$$

Можно выразить S_1 и S_2 через коэффициенты Фурье $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ разложений (7.215) и (7.216), но мы не станем здесь этого делать.

Прежде чем переходить к обобщению теории на многомерные системы, мы применим только что изложенную одномерную теорию к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе. Переходя к ангармоническому осциллятору, прежде всего следует вспомнить решение Гамильтона — Якоби для невозмущенной задачи. Из (7.136) видно, что координата q, выраженная через переменные w_0 и J_0, определяется равенством

$$q=(J_0/\pi m\omega)^{1/2}\sin 2\pi w_0. \tag{7.225}$$

Гамильтониан, выраженный через w_0 и J_0, примет вид:

$$H=H_0+\lambda H_1,$$

где

$$H_0=\nu J_0,\quad H_1=(J_0/\pi m\omega)^{3/2}\sin^3 2\pi w_0, \tag{7.226}$$

а ν — величина, определяемая согласно (7.133), т. е. равенством $\nu=\omega/2\pi$ [ср. также (7.224)].

Из (7.219) и (7.222) получаем:

$$E_1=0, \tag{7.227}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial w_0}=-\frac{1}{\nu}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\sin^3 2\pi w_0, \tag{7.228}$$

или же

$$S_1=\frac{1}{2\pi\nu}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left[\frac{3}{4}\cos 2\pi w_0-\frac{1}{12}\cos 6\pi w_0\right], \tag{7.229}$$

откуда мы имеем с точностью до членов, линейных по λ:

$$q=\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\sin 2\pi w-\frac{\lambda}{2m\omega^2}\frac{J}{\pi m\omega}(3+\cos 4\pi w) \tag{7.230}$$

в соответствии с выражением (7.136).

Из (7.220) мы получим теперь:

$$E_2 = -\frac{15J^2}{16\pi^2 m^2 \omega^4} \tag{7.231}$$

в соответствии с выражением (7.133).

С помощью (7.223) можно найти $\partial S_2/\partial w_0$ и, следовательно, S_2. В результате получим:

$$S_2 = \frac{3J^3}{4\pi^3 m^3 \omega^4}\left[-\frac{15}{32}\sin 4\pi w_0 + \frac{3}{32}\sin 8\pi w_0 - \frac{1}{96}\sin 12\pi w_0\right]. \tag{7.232}$$

После утомительных вычислений можно найти выражения для J_0, w_0 и q с точностью до λ^2, выраженные через J и w:

$$J_0 = J + \frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{4}\sin 6\pi w - \frac{3}{4}\sin 2\pi w\right) + \\ + \frac{3\lambda^2 J^3}{2\nu^2(\pi m\omega)^3}\left(-\frac{1}{8}\cos 8\pi w - \frac{1}{2}\cos 4\pi w + \frac{5}{16}\right) + \ldots, \tag{7.233}$$

$$w_0 = w + \frac{3\lambda}{2\omega J}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{12}\cos 6\pi w - \frac{8}{4}\cos 2\pi w\right) + \\ + \frac{3\lambda^2 J}{2\nu\omega(\pi m\omega)^3}\left(\frac{9}{64}\sin 4\pi w + \frac{3}{32}\sin 8\pi w - \frac{1}{192}\sin 12\pi w\right) + \ldots, \tag{7.234}$$

$$q = \left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\sin 2\pi w - \frac{\lambda}{2m\omega}\frac{J}{\pi m\omega}(3 + \cos 4\pi w) + \\ + \frac{\lambda^2}{m^2\omega^4}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(-\frac{3}{16}\sin 6\pi w + \frac{11}{8}\sin 2\pi w\right) + \ldots \tag{7.235}$$

Отметим, что, отвлекаясь от неограниченно возрастающего члена, выражение $q^{(2)}$, определяемое согласно (7.117), совпадает с коэффициентом при λ^2 в выражении (7.235), если считать $\alpha = 11/8$. Стоит подчеркнуть, что каноническая теория возмущений быстро приводит к результату, если нужно получить добавок к энергии, но она же требует весьма утомительных вычислений, если требуется найти изменение координат. Однако она в обоих случаях работает быстрее, чем второй метод, изложенный в предыдущем параграфе. Следует помнить, что окончательное выражение для энергии оказывается зависящим только от J, так что w будет линейной функцией времени.

В заключение этого параграфа мы коротко рассмотрим случай задачи с многими степенями свободы, оставив, однако, то ограничение, что невозмущенная задача допускает решение методом разделения переменных, если ввести переменные действие — угол; другими словами, мы рассматриваем многократно периодические системы. Пусть $w_k^{(0)}$ и $J_k^{(0)}$ $(k=1, 2, \ldots, s$; s — число степеней свободы) будут переменными действие — угол для невозмущенной системы. Все координаты q_k будут периодическими функциями $w_k^{(0)}$, точно так же как и $H_1, H_2, \ldots$ в (7.201). Теперь мы повсюду используем разложение в ряды Фурье, о котором шла речь в начале этого параграфа, и по аналогии с (7.215) и (7.216) запишем:

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2, \ldots} H^{(1)}_{n_1, n_2, \ldots}(J_1^{(0)}, \ldots) \exp 2\pi i \sum_k n_k w_k^{(0)}, \quad (7.236)$$

$$H_2 = \sum_{n_1, n_2, \ldots} H^{(2)}_{n_1, n_2, \ldots}(J_1^{(0)}, \ldots) \exp 2\pi i \sum_k n_k w_k^{(0)}, \quad (7.237)$$

где разложение Фурье ведется уже по всем переменным.

Будем искать $S_1, S_2, \ldots$ в виде рядов Фурье:

$$S_1 = \sum_{n_1, n_2, \ldots} S^{(1)}_{n_1, n_2, \ldots}(J_1, \ldots) \exp 2\pi i \sum_k n_k w_k^{(0)}, \quad (7.238)$$

$$S_2 = \sum_{n_1, n_2, \ldots} S^{(2)}_{n_1, n_2, \ldots}(J_1, \ldots) \exp 2\pi i \sum_k n_k w_k^{(0)}. \quad (7.239)$$

Вместо (7.213) мы получим теперь:

$$\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k^{(0)}} \frac{\partial S_1}{\partial w_k^{(0)}} + H_1(w_k^{(0)}, J_k) = E_1(J_k) \quad (7.240)$$

и аналогичное соотношение для E_2. Отмечая теперь усреднение по всем величинам $w_k^{(0)}$ чертой над соответствующей величиной, т. е.

$$\overline{G} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 dw_1^{(0)} \ldots dw_s^{(0)}\, G, \quad (7.241)$$

мы найдем из (7.240):

$$E_1 = \overline{H}_1 = H^{(1)}_{00\ldots}. \quad (7.242)$$

Тогда уже можно разрешить (7.240) относительно S_1, и мы найдем:

$$S^{(1)}_{n_1, n_2, \ldots} = \frac{-H^{(1)}_{n_1, n_2, \ldots}}{2\pi i \sum_k n_k \nu_k^{(0)}}, \quad (7.243)$$

где

$$\nu_k^{(0)} = \frac{\partial H_0}{\partial J_k^{(0)}}. \quad (7.244)$$

Члены более высокого порядка в выражении для S могут быть получены аналогичным путем. Из выражения

(7.243) видно, что нас ждут неприятности, если для полученного набора чисел $\nu_k^{(0)}$ можно подобрать такую совокупность целых чисел $n_1, \ldots, n_s$, не обращающихся одновременно в нуль, что удовлетворяется равенство

$$\sum_k n_k \nu_k^{(0)} = 0. \tag{7.245}$$

Такой случай называется случаем *вырождения* системы. Если исключить этот случай, можно еще найти такую комбинацию n_k, что сумма $\sum n_k \nu_k^{(0)}$ будет сколь угодно малой. Это приводит к тому, что практически для всех возмущений H_1 ряды Фурье (7.238) и (7.239) расходятся, как это было показано Пуанкаре. Однако эти ряды являются полусходящимися, т. е., подходящим образом оборванные, эти ряды с высокой степенью точности могут предсказывать поведение системы в течение достаточно большого, но не произвольно большого периода времени.

Найдя $S^{(1)}$ (кроме $S_{00\ldots}^{(1)}$, которое можно положить равным нулю) и, следовательно, из уравнений типа (7.206) и (7.207) новые переменные действие — угол, можно выразить координаты через новые переменные и тем самым предсказать поведение системы.

Мы только что акцентировали внимание на том, что каноническая теория возмущений для случая, когда степеней свободы больше, чем одна, ведет к расходящимся рядам. Иногда удобно для решения уравнений движения (мы приведем пример в следующем параграфе) использовать старые переменные $w_k^{(0)}$ и $J_k^{(0)}$, которые, конечно, остаются канонически сопряженными переменными и для возмущенной системы, поскольку они получаются из p_k и q_k каноническими преобразованиями. Это особенно удобно, когда мы имеем дело с вырожденной системой. Простейший случай вырождения мы встретили в гл. 6, где некоторые $\nu_k^{(0)}$ оказались просто одинаковыми. В задаче Кеплера оказалось даже, что $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$. В этом случае можно вместо величин J, определяемых соотношениями (6.224) — (6.226), использовать любую их линейную комбинацию и, в частности, умноженные на 2π величины α_1, α_2 и α_3, введенные нами в § 6.1. Если обозначить умноженные на 2π величины α_1, α_2 и α_3 через $J_1^{(0)}$, $J_2^{(0)}$ и $J_3^{(0)}$, а канонически сопряженные переменные — через $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$ и $w_3^{(0)}$, то мы придем к невозмущенной системе, для которой

$$H_0 = H_0(J_1^0) \tag{7.246}$$

и для которой (невозмущенными) уравнениями движения будут

$$\begin{aligned} \dot{J}_1^{(0)} &= 0, & \dot{J}_2^{(0)} &= 0, & \dot{J}_3^{(0)} &= 0, \\ \dot{w}_1^{(0)} &= \nu_1^{(0)}, & \dot{w}_2^{(0)} &= 0, & \dot{w}_3^{(0)} &= 0, \end{aligned} \tag{7.247}$$

где $\nu_1^{(0)}$ определяется согласно (7.244).

Если обратиться теперь к возмущенному гамильтониану

$$H = H_0 + \lambda H_1, \tag{7.248}$$

то из него следуют уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^{(0)} &= \nu_1^{(0)} + \lambda \frac{\partial H_1}{\partial J_1^{(0)}}, & \dot{J}_1^{(0)} &= -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial w_1^{(0)}}, \\ \dot{w}_2^{(0)} &= \lambda \frac{\partial H_1}{\partial J_2^{(0)}}, & \dot{J}_2^{(0)} &= -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial w_2^{(0)}}, \\ \dot{w}_3^{(0)} &= \lambda \frac{\partial H_1}{\partial J_3^{(0)}}, & \dot{J}_3^{(0)} &= -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial w_3^{(0)}}. \end{aligned} \tag{7.249}$$

Мы еще раз воспользуемся рядом Фурье и запишем H_1 в виде:

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{+\infty} H^{(1)}_{n_1, n_2, n_3} (J_l^{(0)}) \exp 2\pi i \sum_{k=1}^{3} n_k w_k^{(0)}. \tag{7.250}$$

Отметив штрихом сумму по n_1, не включающую в себя член с $n_1 = 0$, мы запишем (7.250) в виде:

$$H_1 = F(J_l^{(0)};\ w_2^{(0)},\ w_3^{(0)}) + G(J_l^{(0)};\ w_1^{(0)},\ w_2^{(0)},\ w_3^{(0)}), \tag{7.251}$$

где

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n_2, n_3} H^{(1)}_{0 n_2 n_3} \exp 2\pi i (n_2 w_2^{(0)} + n_3 w_3^{(0)}), \\ G &= \sum_{n_1}{}' \sum_{n_2, n_3} H^{(1)}_{n_1 n_2 n_3} \exp 2\pi i (n_1 w_1^{(0)} + n_2 w_2^{(0)} + n_3 w_3^{(0)}). \end{aligned} \tag{7.252}$$

Теперь мы приступаем к решению уравнений движения методом последовательных приближений. Это означает, что мы можем подставить в H_1 решения невозмущенных уравнений движения (7.247). Этими решениями будут: $w_2^{(0)}, w_3^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_2^{(0)}$ и $J_3^{(0)}$ — все постоянны, а $w_1^{(0)}$ — линейная функция времени. Таким образом, из (7.251) видно, что функция F не зависит от времени вообще, а функция G является периодической функцией времени. **Фактически функция F — это просто среднее по времени** от H_1. Теперь займемся возмущенными уравнениями движения, например, уравнением для $J_2^{(0)}$. Это уравнение может быть записано в виде:

$$\dot{J}_2^{(0)} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial w_2^{(0)}} - \lambda \frac{\partial G}{\partial w_2^{(0)}}. \qquad (7.253)$$

Интегрируя его, мы получим:

$$J_2^{(0)}(t) = J_2^{(0)}(0) - \lambda \frac{\partial F}{\partial w_2^{(0)}} t - \sum_{n_1}' \sum_{n_2, n_3} \frac{\lambda H^{(1)}_{n_1 n_2 n_3} n_2}{n_1 \nu_1^{(0)}} \exp 2\pi i \sum_k n_k w_k^{(0)}. \qquad (7.254)$$

Мы нашли две поправки к $J_2^{(0)}$: первая из них, связанная с G, является периодической и всегда остается ограниченной; однако вторая из них, обусловленная функцией F, представляет собой *секулярный* член, который линейно растет с течением времени. Решение (7.254) оказывается, таким образом, пригодным только для достаточно малого промежутка времени.

Аналогичная ситуация возникает также и для всех других переменных кроме переменной $J_1^{(0)}$, поскольку $\partial F/\partial w_1^{(0)} = 0$. Мы не станем обсуждать здесь вопрос о том, как нужно вести себя с системами, где есть и секулярные, и периодические возмущения, но мы должны указать, что, в противоположность квантовой механике, где сравнительно легко удается отделаться от секулярных членов, в классической механике это сделать совсем не просто. Дальнейшие подробности, касающиеся этого вопроса, можно найти в литературе, приведенной в конце книги.

§ 7.3. Эффекты Зеемана и Штарка для водородного атома

Рассмотрим систему, состоящую из одной частицы, гамильтониан которой обладает сферической симметрией. Известно, что в этом случае после введения сферических координат r, θ и φ угол φ будет циклической координатой. Соответствующий импульс p_φ можно ввести тогда в качестве одной из постоянных α_i (см. § 6.1), а соответствующая переменная действия J_φ определяется равенством [ср. (6.224)]

$$J_\varphi = 2\pi p_\varphi. \qquad (7.301)$$

За соответствующую угловую переменную w_φ может быть выбрана долгота восходящего узла (см. § 6.1), деленная на 2π.

Теперь допустим, что включается однородное магнитное поле $\boldsymbol{B}$. Поскольку невозмущенная система обладала сферической симметрией, направление полярной оси может быть выбрано произвольно; мы можем выбрать ее теперь так, чтобы она была направлена вдоль магнитного поля. Мы уже упоминали раньше о том, что влияние магнитного поля может быть учтено тем, что в кинетической энергии квадрат импульса $\boldsymbol{p}^2$ заменяется на $(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2$, где $\boldsymbol{A}$ — вектор-потенциал магнитного поля [см. (5.355)]. Вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ можно выбрать в виде:

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{x}]; \tag{7.302}$$

предполагая магнитное поле слабым, мы можем записать возмущенный гамильтониан в виде суммы:

$$H=H_0+H_1, \tag{7.303}$$

где

$$H_1=\frac{(p-eA)^2}{2m}-\frac{p^2}{2m}\approx-\frac{e(A\cdot p)}{m}=$$
$$=-\frac{e}{2m}(\boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{x}])=-\frac{e}{2m}(\boldsymbol{B}\cdot[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}])=-\frac{e}{2m}Bp_\varphi. \tag{7.304}$$

Индукция магнитного поля B играет здесь роль малого параметра λ, введенного в предыдущем параграфе, по которому проводится разложение.

Так как H_1 содержит только J_φ, единственной переменной, участвующей в первом приближении, будет w_φ. Из канонических уравнений движения мы получаем:

$$\dot{w}_\varphi=\frac{\partial H}{\partial J_\varphi}=\frac{\partial H_0}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial H_1}{\partial J_\varphi}=\frac{\partial H_1}{\partial J_\varphi}=-\frac{eB}{4\pi mc}. \tag{7.305}$$

Из (7.305) следует, что орбитальная плоскость вращается вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью $eB/2mc$, так называемой ларморовской частотой; это вращение орбитальной плоскости называется ларморовской прецессией.

Случай слабого однородного электрического поля несколько более сложен. Одним из способов решения этой задачи может служить второй метод, описанный в первом параграфе этой главы (см. задачу 5 к гл. 6). Мы не станем здесь заниматься этой задачей во всех деталях, а ограничимся секулярными эффектами в однородном электрическом поле. Мы начнем с элементарного подхода, который в принципе годится также для случая скрещенных электрических и магнитных полей (см. задачу 3 к этой главе), а затем уже применим теорию секулярных возмущений, кратко изложенную в конце предыдущего параграфа. Во всех случаях мы будем заниматься только атомом водорода и воспользуемся результатами, полученными в предыдущей главе.

Направим опять ось z по направлению поля, так что возмущение гамильтониана запишется в виде:

$$H_1 = e\mathscr{E}z, \tag{7.306}$$

где через $\mathscr{E}$ обозначена напряженность электрического поля.

В качестве переменных J и w мы воспользуемся величинами α_i и β_i из § 6.2; мы вспомним также связь между большой полуосью a, полным моментом импульса M, эксцентриситетом ε, наклоном орбитальной плоскости i и α_1, α_2, α_3 — с одной стороны, и между временем, долготой перицентра, долготой восходящего узла и величинами β_1, β_2 и β_3 — с другой. Все необходимые соотношения были получены в § 6.1, и мы ими воспользуемся.

В предшествующем параграфе мы установили, что секулярные возмущения обусловлены средним значением по времени от возмущающей энергии $\overline{H}_1$. Нам нужно поэтому вычислить среднее по времени от положения электрона; это среднее одновременно определяет значение «центра заряда» водородного атома. Мы увидим, что эта величина не совпадает с началом координат в случае эллиптической орбиты. Таким образом, атом ведет себя как электрический диполь, и нам следует ожидать секулярных эффектов, возникающих в результате действия электрического поля.

Причина, по которой центр заряда не совпадает ни с центром масс (которым служит начало отсчета, т. е. фокус эллипса), ни с центром эллипса, состоит в том, что электрон движется быстрее вблизи перицентра, чем вблизи апоцентра, и проводит поэтому большее время в тех частях траектории, которые ближе примыкают к апоцентру.

Для вычисления $\bar{z}$ мы найдем прежде всего средние значения прямоугольных координат ξ и η, введенных на рис. 28 и определяемых соотношениями (6.153). Используя тот факт, что β_1 — линейная функция времени [см. (6.155)] и связана с u соотношением (6.156), и то, что период переменной u составляет 2π, мы получим:

$$\bar{\xi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\cos u-\varepsilon)(1-\varepsilon\cos u)\,du=-\frac{3}{2}a\varepsilon,$$
$$\bar{\eta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(1-\varepsilon^2)^{1/2}\sin u\,(1-\varepsilon\cos u)\,du=0. \qquad (7.307)$$

Если еще раз обратиться к рис. 26 и заметить, что «центр заряда» находится на линии OP, как это видно из выражений (7.307), мы найдем:

$$\bar{z}=\bar{\xi}\sin\beta_2\sin i=-\frac{3}{2}\varepsilon a\sin\beta_2\sin i. \qquad (7.308)$$

Прежде чем обсуждать полученный результат, мы воспользуемся более элементарным методом для установления влияния электрического поля $\mathscr{E}$. Поле будет создавать момент силы, действующий в точках траектории электрона: $-e[\boldsymbol{x},\ \mathscr{E}]$; здесь через $\boldsymbol{x}$ обозначен радиус-вектор электрона. Если обозначить через $\boldsymbol{n}$ единичный вектор, направленный вдоль главной оси к апоцентру, то мы получим из соотношений (7.307) для среднего по времени от $\boldsymbol{x}$ значение $\frac{3}{2}\varepsilon a\boldsymbol{n}$ и тем самым для среднего по времени от момента силы значение $-\frac{3}{2}\varepsilon ae[\boldsymbol{n},\ \mathscr{E}]$.

Теперь мы рассмотрим два частных случая: а) поле $\mathscr{E}$ перпендикулярно орбитальной плоскости, б) поле $\mathscr{E}$ лежит в орбитальной плоскости, составляя угол ψ с главной осью.

Случай (а). Интересующее нас уравнение движения определяет производную по времени от момента импульса M:

$$\frac{dM}{dt}=\text{моменту силы}=-\overline{e[\boldsymbol{x},\ \mathscr{E}]},$$

или

$$\frac{dM}{dt}=\frac{3}{2}e\varepsilon a[\boldsymbol{n},\ \mathscr{E}]. \qquad (7.309)$$

Вектор момента импульса M перпендикулярен орбитальной плоскости, а вектор $[\boldsymbol{n},\ \mathscr{E}]$ лежит в орбитальной плоскости и направлен вдоль малой оси. Таким образом, оказывается, что орбитальная плоскость поворачивается вокруг большой оси. Скорость вращения определяется равенством

$$r = \frac{3}{2} \varepsilon e a \mathscr{E}/M. \qquad (7.310)$$

Случай (б). Уравнение движения теперь уже имеет вид:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} \varepsilon e a \mathscr{E} \sin \psi, \qquad (7.311)$$

поскольку теперь M и $[n, \mathscr{E}]$ параллельны.

Выражение для $\bar{z}$ не зависит от времени по определению, и это можно записать так:

$$\frac{3}{2} \varepsilon\, a \cos \psi = \mathrm{const}. \qquad (7.312)$$

В предыдущем параграфе мы убедились, что величина α_1 не подвержена секулярным возмущениям. Это означает, что a — постоянная величина. Следовательно, равенство (7.312) дает нам связь между скоростью изменения ε и ψ, т. е. между скоростью изменения эксцентриситета и скоростью изменения ориентации орбиты. Из выражений (7.311), (7.312) и равенств (6.150), определяющих связь между $M\,(=\alpha_2)$ и ε (имея в виду, что α_1 — постоянная), мы получаем для производных по времени от ε и ψ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{3e\mathscr{E}a}{2\alpha_1}(1-\varepsilon^2)^{1/2} \sin\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3e\mathscr{E}a}{2\alpha_1}\frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}\cos\psi. \end{aligned} \qquad (7.313)$$

Орбита представляет собой розетку, лежащую в орбитальной плоскости.

К решению этой задачи можно подойти иначе. Для этого нужно вернуться к уравнениям движения (7.249). Используя (6.147) и (6.150), можно видеть, что $\bar{z}$, а следовательно и $\overline{H}_1$, определяются выражением

$$\overline{H}_1 = -\frac{3e\mathscr{E}\alpha_1}{2R\alpha_2}\left[(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\alpha_2^2-\alpha_3^2)\right]^{1/2} \sin\beta_2. \qquad (7.314)$$

Мы видим, что α_1 и α_3 не меняются. Если подставить это выражение для $\overline{H}_1$ в усредненные по времени выражения (7.249), мы получим уравнения движения для секулярных изменений величин α_2, β_1, β_2 и β_3. Из этих уравнений можно получить уравнения движения для координат

x и y центра заряда. Эти координаты можно выразить через β_2, β_3 и i в виде:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{3}{2}a\varepsilon(\cos\beta_2\cos\beta_3 - \sin\beta_2\sin\beta_3\cos i),\\
y &= -\frac{3}{2}a\varepsilon(\cos\beta_2\sin\beta_3 + \sin\beta_2\cos\beta_3\cos i).
\end{aligned}
\tag{7.315}
$$

Вспоминая, что α_1 и a постоянны, $\varepsilon^2 = 1 - (\alpha_2^2/\alpha_1^2)$,

$$
\dot{\beta}_2 = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \alpha_2}, \qquad \dot{\beta}_3 = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \alpha_3}, \qquad \dot{\alpha}_2 = -\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \beta_2}, \tag{7.316}
$$

мы получим после несколько громоздких вычислений следующие уравнения движения для величин x, y:

$$
\ddot{x} = -\left(\frac{3ae\mathscr{E}}{2\alpha_1}\right)^2 x, \qquad \ddot{y} = -\left(\frac{3ae\mathscr{E}}{2\alpha_1}\right)^2 y. \tag{7.317}
$$

Из уравнений (7.317) видно, что центр заряда совершает гармонические колебания с частотой ω, определяемой равенством

$$
\omega = \frac{6\pi\varepsilon_0\alpha_1}{Zme}\mathscr{E}, \tag{7.318}
$$

где мы заменили a согласно (6.150) и (6.144).

Заканчивая эту главу, мы должны сказать о том, что здесь фактически рассмотрена лишь незначительная часть многочисленных аспектов теории возмущений. Так, например, вопрос о периодических возмущениях, играющий необычайно важную роль в небесной механике, оставлен нами вовсе без внимания.

ЗАДАЧИ

1. Исследовать методами теории возмущений возмущение одномерного гармонического осциллятора линейным или квадратичным членом в гамильтониане и сравнить результат с точным решением уравнения движения.

2. Исследовать возмущение одномерного гармонического осциллятора членом четвертой степени q [см. (7.201)].

3. Исследовать секулярные эффекты скрещенных электрического и магнитного полей, действующих на атом водорода.

Глава 8

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ

В этой главе мы расскажем о том, как можно поступать с уравнениями движения для непрерывных систем, в точно такой же манере, как мы поступали с системами, обсуждавшимися в предшествующих главах. Мы используем здесь для получения канонических уравнений движения, описывающих такие непрерывные системы, метод, состоящий во введении и использовании компонент Фурье от величин $Q(x)$, описывающих систему. Далее описываются те видоизменения, которые необходимо ввести в формализм Лагранжа и Гамильтона, чтобы использовать его и для непрерывных систем. Во втором параграфе этой главы теория, развитая в первом параграфе, применяется к звуковым волнам и электромагнитному полю.

§ 8.1. Формализм Лагранжа и Гамильтона применительно к непрерывным величинам

В предыдущих главах формализм Лагранжа применялся к системам, состоящим из точечных частиц, и к твердым телам; формализм же Гамильтона использовался только для точечных частиц. В качестве одного из достоинств формализма Гамильтона было указано, что он открывает нам сравнительно простую возможность перехода к квантовой механике. Все системы, о которых шла речь до сих пор, описывались конечным числом переменных. Однако существует немало физических систем, которые должны описываться бесконечным числом переменных. Это обычно получается тогда, когда вместо переменных q_k, где $k=1, 2, \ldots, s$, мы имеем одну (или более одной) совокупность переменных $Q(x)$; эти переменные $Q(x)$ являются функциями непрерывной переменной x, точно так же как величины q_k следовало считать функциями дискретной переменной k. Такая ситуация возникает в двух существенно различающихся между собой случаях. Во-первых, имеются сплошные среды, такие, например, как газы или жидкости. Во-вторых, имеются поля. Мы рассмотрим примеры как для одного, так и для другого случаев.

Особенно интересно выяснить, могут ли такие системы описываться формализмом Лагранжа или Гамильтона, поскольку этот формализм служит весьма удобной основой для квантования. Существуют различные подходы к установлению этого формализма для непрерывных систем. Один из способов, довольно часто применяемый, состоит в том, что, скажем, упругий стержень сначала рассматривают как систему точечных частиц, а затем совершают предельный переход к сплошной системе. Полученный в этом частном случае результат обобщают затем на произвольные системы. Другой способ заключается в выборе в качестве отправного пункта соответствующим образом обобщенного вариационного принципа. Наконец, третий способ, который мы здесь и используем, состоит в том, чтобы использовать вместо $Q(x)$ их фурье-коэффициенты в качестве обобщенных переменных.

Преимущества этого метода двоякие. Прежде всего, теперь мы имеем дело с функцией дискретной переменной k (по крайней мере до тех пор, пока можно считать систему заключенной в конечный, пусть даже сколь угодно большой, объем), вместо того, чтобы рассматривать функции непрерывного аргумента x. Во-вторых, теория в ее канонической форме более удобна для квантования, а сами фурье-коэффициенты часто используются как операторы рождения и уничтожения. Наилучшим примером применения такого подхода может служить электромагнитное поле. Однако мы отложим обсуждение этого случая до следующего параграфа. Для электромагнитного поля возникают присущие только этому случаю трудности, связанные с наличием условия калибровки Лоренца, и поэтому в качестве основы для нашего подхода мы выберем продольные упругие волны в одномерной сплошной среде. На этом примере мы постараемся проиллюстрировать основные идеи метода.

Проблема, которая встала перед нами, может быть описана следующим образом. У нас есть совокупность уравнений движения (уравнения Максвелла в случае электромагнитного поля, волновое уравнение в случае звуковых волн и т. д.), описывающих интересующее нас явление вполне удовлетворительным образом. Мы предпочли бы, однако, записать эти уравнения движения в канонической форме; другими словами, нам хотелось бы подобрать новую совокупность переменных и гамильтониан, который был бы функцией этих переменных, таких, что уравнения движения могли бы быть написаны в канонической форме (5.108). Найдя как нужные переменные, так и гамильтониан, мы сведем задачу к тому, как ввести канонический формализм, если исходные переменные были функциями непрерывно изменяющейся переменной.

Одномерные продольные упругие волны описываются волновым уравнением

$$\rho\ddot{\xi} - E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0, \qquad (8.101)$$

где через $\xi(x, t)$ обозначено смещение среды в момент времени t в точке x, через ρ обозначена плотность среды, а через E — модуль Юнга той же среды. Предполагается, что среда имеет конечную протяженность L. Мы можем потребовать, чтобы ξ (или же $\partial\xi/\partial x$) обращалась в нуль на границах, и тогда $\xi(x, t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\xi(x, t) = \sum_k \xi'_k(t)\sin kx, \qquad (8.102)$$

где k принимает значения $n\pi/L$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Более удобно, однако, воспользоваться периодическими граничными условиями, наложенными на ξ:

$$\xi(x + L, t) = \xi(x, t), \qquad (8.103)$$

чем накладывать условие обращения в нуль ξ (или $\partial\xi/\partial x$) на концах стержня. Следует подчеркнуть здесь, что очень мало можно сказать в оправдание предположения (8.103); оно используется в силу своего удобства, и, кроме того, обычно реальные граничные условия не оказывают влияния на решение задачи, так что их можно выбирать, сообразуясь с удобством, в частности, согласно (8.103). Надо добавить еще, что оказывается очень удобным пользоваться вместо разложения (8.102) рядом Фурье в комплексной форме:

$$\xi(x, t) = L^{-1/2}\sum_k \xi_k(t)\,e^{ikx}, \qquad (8.104)$$

где волновые числа k могут уже принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если мы пользуемся разложением (8.104), то ξ_k уже комплексны, тогда как ξ'_k, входившие в (8.102), были действительными числами. Следствием этого будет то, что в гамильтониане (8.112) и лагранжиане (8.110) вместо квадратов величин ξ_k, $\dot{\xi}_k$ появятся произведения вида $\xi_k\xi_{-k}$.

Мы обращаем внимание на то, что, поскольку $\xi(x, t)$ — величина действительная, величины ξ_k и ξ_{-k} не являются двумя независимыми комплексными переменными (т. е. соответствующими четырем независимым переменным), ибо они должны удовлетворять равенству

$$\xi_k = \xi_{-k}^*; \tag{8.105}$$

таким образом, мы имеем столько независимых переменных, сколько значений принимает k. Величины ξ_k могут быть получены из $\xi(x)$ обычным образом:

$$\xi_k = L^{-1/2}\int \xi(x)\, e^{-ikx}\, dx. \tag{8.106}$$

Если нам нужно перейти к континууму значений k, мы устремляем L к бесконечности и рассматриваем следующие пределы:

$$\sum_k \to \frac{L}{2\pi}\int dk, \quad \xi_k \to \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/2} \xi(k), \tag{8.107}$$

которые в конце концов приводят нас к хорошо известным выражениям для интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= (2\pi)^{-1/2}\int \xi(k, t)\, e^{ikx}\, dk, \\ \xi(k, t) &= (2\pi)^{-1/2}\int \xi(x, t)\, e^{-ikx}\, dx. \end{aligned} \tag{8.108}$$

Переходя в уравнении (8.101) к компонентам Фурье, мы получим:

$$\rho\ddot{\xi}_k + k^2 E \xi_k = 0, \tag{8.109}$$

что и является уравнениями движения нашей системы — системы с бесконечным числом степеней свободы.

Эти уравнения могут быть получены из следующего лагранжиана:

$$L(\xi_k, \dot{\xi}_k) = \frac{1}{2}\rho\sum_k \dot{\xi}_k\dot{\xi}_{-k} - \frac{1}{2}E\sum_k k^2\xi_k\xi_{-k}. \tag{8.110}$$

С помощью уравнений движения Лагранжа (2.308), используя лагранжиан (8.110) и считая обобщенными координатами ξ_k, мы действительно приходим к уравнениям движения (8.109). Любопытно заметить, что уравнения движения, в которые входят ξ_k, получаются из уравнений Лагранжа, написанных для ξ_{-k}.

Из лагранжиана (8.110) обычным путем можно найти и гамильтониан. Прежде всего мы вводим импульс π_k, сопряженный с ξ_k, равенством [см. (2.310)]:

$$\pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} = \rho \dot{\xi}_{-k}, \tag{8.111}$$

где мы учли то обстоятельство, что в сумму по k входят члены как с положительными, так и отрицательными k, и поэтому член $\dot{\xi}_k \dot{\xi}_{-k}$ встречается дважды. Из (5.104′) можно найти теперь и гамильтониан:

$$H(\xi_k, \pi_k) = \sum_k \pi_k \dot{\xi}_k - L = \frac{1}{2\rho} \sum_k \pi_k \pi_{-k} + \frac{1}{2} E \sum_k k^2 \xi_k \xi_{-k}; \tag{8.112}$$

канонические уравнения движения (5.108) снова дают нам (8.109).

Мы знаем, что уравнения движения могут быть получены также и из вариационного принципа Гамильтона. Для рассматриваемого случая это означает, что уравнения (8.109) могут быть получены из вариационного принципа:

$$\delta \int L\, dt = 0, \tag{8.113}$$

где L определено согласно (8.110).

Теперь нам следует выяснить, как изменяются полученные нами формулы при переходе от ξ_k к $\xi(x)$. Наша процедура должна быть такой, чтобы уравнения движения в конце концов сводились бы к (8.101). Нужный переход может быть проведен с помощью равенств (8.107) и (8.108), если считать, что протяженность системы L стремится к бесконечности.

Мы начнем с того, что займемся гамильтонианом и лагранжианом, причем обе суммы, входящие в них, мы рассмотрим раздельно. Используя определения (8.111), мы обнаруживаем, что первая сумма в обоих случаях имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho \sum_k \dot{\xi}_k \dot{\xi}_{-k} &= \frac{1}{2}\rho \int \dot{\xi}(k)\, \dot{\xi}(-k)\, dk = \\ &= \frac{1}{2}\rho\, (2\pi)^{-1/2} \int dx\, \dot{\xi}(x) \int dk\, e^{-ikx}\, \dot{\xi}(-k) = \\ &= \frac{1}{2}\rho \int dx\, \dot{\xi}(x)\, \dot{\xi}(x) = \int \mathscr{T}(x)\, dx,\end{aligned} \tag{8.114}$$

где

$$\mathcal{T}(x) = \frac{1}{2} \rho \dot{\xi}(x) \dot{\xi}(x) \qquad (8.115)$$

представляет собой *плотность кинетической энергии*, т. е. кинетическую энергию единицы объема.

Теперь мы вернемся ко второй сумме, для которой найдем:

$$\frac{1}{2} E \sum_k k^2 \xi_k \xi_{-k} = \frac{1}{2} E \int k^2 \xi(k)\, \xi(-k)\, dk =$$

$$= \frac{1}{2} E (2\pi)^{-1/2} \int\int dx\, dk\, \xi(x)\, k^2 e^{-ikx} \xi(-k) =$$

$$= \frac{1}{2} E (2\pi)^{-1/2} \int\int dx\, dk\, \xi(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-ikx}\right) \xi(-k) =$$

$$= \frac{1}{2} E (2\pi)^{-1/2} \int dx \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x)\right] \int dk\, e^{-ikx} \xi(-k) =$$

$$= \frac{1}{2} E \int dx \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x)\right] \xi(x) =$$

$$= \frac{1}{2} E \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx = \int \mathcal{U}(x)\, dx, \qquad (8.116)$$

где

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \qquad (8.117)$$

представляет собой *плотность потенциальной энергии*. Это следует из обычного определения плотности упругой (потенциальной) энергии, равной половине модуля упругости (у нас он обозначен через E), умноженной на квадрат соответствующей компоненты напряжения (в нашем случае эта компонента представляет собой удлинение, отнесенное к единице длины, т. е. $\partial\xi/\partial x$).

Преобразование от k-представления к x-представлению в уравнениях движения (2.308) или (5.108) осуществить не так-то просто. Простейший путь состоит в том, чтобы вспомнить, что эти уравнения следуют самым непосредственным образом из (8.113). Если это верно тогда, когда в качестве переменных выбраны ξ_k, то это остается верным и тогда, когда вместо ξ_k вводим $\xi(x)$. В лагранжиане L, записанном уже через $\xi(x, t)$, мы обнаружим уже не только $\xi(x, t)$ и $\dot{\xi}(x, t)$, но также и $\partial\xi/\partial x$ [см. (8.117)], и вариация L будет содержать вариации ξ, $\dot{\xi}$ и $\partial\xi/\partial x$, причем две последние вариации не будут независимыми от первой [ср. получение уравнений (2.308)]. Вводя *плотность лагранжиана* $\mathscr{L}$ согласно равенству

$$\mathscr{L} = \mathscr{T} - \mathscr{U}, \tag{8.118}$$

вариационный принцип (8.113) можно переписать в виде:

$$\delta \int\int \mathscr{L}\, dx\, dt = 0. \tag{8.119}$$

Отметим, что в (8.119) пространственная и временная координаты входят на равных правах. Можно ожидать поэтому, что вариационный принцип, представленный в форме (8.119), будет особенно удобен для использования в релятивистском случае. Так оно на самом деле и есть.

Плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ будет функцией ξ, $\dot{\xi}$ и $\partial\xi/\partial x$, и из (8.119) мы получим, учитывая, что $\delta\dot{\xi}$ и $\delta\frac{\partial\xi}{\partial x}$ не являются независимыми вариациями:

$$\begin{aligned}
\delta \int\int \mathscr{L}\, dx\, dt &= \int\int \delta\mathscr{L}\, dx\, dt = \\
&= \int\int \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\xi}}\delta\dot{\xi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\xi/\partial x)}\delta\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) dx\, dt = \\
&= \int\int \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\xi}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\xi/\partial x)}\right]\delta\xi\, dx\, dt + \\
&\qquad + \int \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\xi}}\delta\xi\, dx + \int \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\xi/\partial x)}\delta\xi\, dt, \\
0 &= \int\int \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\xi}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\xi/\partial x)}\right]\delta\xi\, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{8.120}$$

где мы учли, что $\delta\xi$ обращается в нуль на границах как временно́го, так и пространственного интервалов. Таким образом, мы получаем уравнения движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\xi}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\xi/\partial x)} = 0. \tag{8.121}$$

Нетрудно обнаружить, что для плотности гамильтониана $\mathscr{L}$, определяемой согласно (8.115), (8.117) и (8.118),

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2, \tag{8.122}$$

уравнения (8.121) сводятся к волновому уравнению (8.101). Если ввести *функциональные производные* $\delta/\delta\xi$ от функции,

$$\frac{\delta f\left(\xi, \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)}{\delta\xi} = \frac{\partial f}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial(\partial\xi/\partial x)}, \tag{8.123}$$

то можно записать (8.121) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi}=0; \tag{8.124}$$

эти выражения формально тождественны с уравнениями движения Лагранжа (2.308). Следует подчеркнуть, однако, что в (8.124) входит плотность лагранжиана $\mathcal{L}$, а в (2.308) входит полный лагранжиан L.

Можно ввести *плотность канонического импульса* π, определив ее соотношением:

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}, \tag{8.125}$$

а также *плотность гамильтониана*, определив ее соотношением [ср. (5.104′)]:

$$\mathcal{H}=\pi\dot{\xi}-\mathcal{L}. \tag{8.126}$$

Из вариационного принципа (8.119) можно теперь найти:

$$\iint\delta\left(\pi\dot{\xi}-\mathcal{H}\right)dx\,dt=0, \tag{8.127}$$

а вспоминая, что $\mathcal{H}$ есть функция π, ξ и $\partial\xi/\partial x$, мы получим способом, аналогичным тому, который был использован при выводе (8.121):

$$\iint\left[\left(\dot{\xi}-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\right)\delta\pi-\left(\dot{\pi}+\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\xi}\right)\delta\xi\right]dx\,dt=0. \tag{8.128}$$

Из (8.128) сразу же получается:

$$\dot{\xi}=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi},\qquad \dot{\pi}=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\xi}, \tag{8.129}$$

где мы заменили $\partial\mathcal{H}/\partial\pi$ функциональной производной $\delta\mathcal{H}/\delta\pi$, чтобы получить симметричные выражения. Отметим, что уравнения (8.129) отличаются от канонических уравнений (5.108), полученных нами ранее, в трех отношениях: вместо обычных частных производных появились функциональные производные, вместо полного гамильтониана фигурирует плотность гамильтониана и, наконец, импульс сменился на плотность импульса.

Если этот канонический формализм использовать в случае одномерных упругих волн, мы найдем из (8.125):

$$\pi=\rho\dot{\xi}, \tag{8.130}$$

а сравнивая полученное выражение с (8.111) и вспоминая

(8.106), мы обнаруживаем, что величины π_k — это фурье-компоненты плотности импульса π, соответствующие волновому числу $-k$. Из определения (8.126) для плотности гамильтониана получается выражение:

$$\mathcal{H}=\frac{\pi^2}{2\rho}+\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2=\mathcal{T}+\mathcal{U}, \tag{8.131}$$

которое можно получить также из (8.112), используя равенства (8.130), (8.115) и (8.117). Мы замечаем, что в этом случае плотность гамильтониана совпадает с плотностью полной энергии.

Из первого уравнения (8.129) получаем:

$$\dot{\xi}=\pi/\rho, \tag{8.132}$$

что совпадает с (8.130); второе уравнение (8.129) дает:

$$\dot{\pi}=E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{8.133}$$

Волновое уравнение (8.101) сразу же получится, если рассмотреть совместно (8.132) и (8.133).

Обобщение теории, развитой здесь, на случай нескольких переменных и на трехмерные системы производится совершенно непосредственно. Например, для звуковых волн в трехмерной среде компоненты ξ, η, ζ вектора смещения $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ будут функциями x, y, z; лагранжиан будет функцией ξ, η, ζ, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$, $\partial\xi/\partial z$, $\partial\eta/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, $\partial\eta/\partial z$, $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y$ и $\partial\zeta/\partial z$. Для каждой из трех компонент мы будем иметь уравнение Лагранжа вида (8.124), а функциональные производные будут уже определяться так:

$$\frac{\delta f}{\delta\xi}\equiv\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial y}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial z}}. \tag{8.134}$$

В следующем параграфе мы используем как формализм функциональных производных, так и формализм, опирающийся на компоненты Фурье.

§ 8.2. Звуковые волны; уравнения Максвелла

Физическая система может быть определена уравнениями движения, которым она должна удовлетворять, или же — на равных правах — ее лагранжианом. Первый случай как раз и имел место для тех систем, которые рассматривались в этой книге. Второй случай часто встречается в различных полевых теориях. В этом параграфе мы убедимся, что выбор определенного лагранжиана (или, точнее, плотности лагранжиана) приводит к определенным уравнениям движения для рассматриваемой системы, но мы не станем поступать здесь так, как поступали в предшествующих главах и даже предшествующем параграфе, — мы не станем получать лагранжиан из уравнений движения. Мы займемся сначала звуковыми волнами, а затем и уравнениями Максвелла, исходя из подходящей плотности лагранжиана. После этого проанализируем уравнения Максвелла методом компонент Фурье.

Докажем, что волновое уравнение для звуковых волн

$$\ddot{\rho} - s^2\nabla^2\rho = 0 \tag{8.201}$$

может быть получено, если считать плотность лагранжиана равной

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \frac{1}{2} s^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2. \tag{8.202}$$

В этих выражениях через ρ обозначена плотность рассматриваемой системы, постоянное (равновесное) значение которой равно ρ_0, через s — скорость звука, а через $\boldsymbol{\xi}$ — вектор смещения с компонентами ξ, η, ζ. Плотность ρ и смещение $\boldsymbol{\xi}$ связаны между собой уравнением непрерывности:

$$\dot{\rho} + \rho_0(\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}). \tag{8.203}$$

Из лагранжиана (8.202) мы найдем:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\xi}} = \dot{\xi}, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}} = \dot{\eta}, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\zeta}} = \dot{\zeta}; \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\zeta} = 0; \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial x}} = -s^2(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial y}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial z}}, \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial y}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial z}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial x}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial z}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial x}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial y}} = 0.
\end{gathered} \tag{8.204}$$

Из этих уравнений вытекает, что

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\xi} = s^2(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\eta} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\zeta}, \tag{8.205}$$

и из (8.124) мы получаем уравнение

$$\ddot{\xi} - s^2 \nabla (\nabla \cdot \xi) = 0, \qquad (8.206)$$

которое превращается в (8.201), если взять дивергенцию обеих частей этого уравнения и учесть (8.203). Из (8.204) и (8.125) найдется вектор плотности импульса:

$$\pi = \dot{\xi}, \qquad (8.207)$$

а из (8.126) — и гамильтониан системы:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi \cdot \pi + \frac{1}{2} s^2 (\nabla \cdot \xi)^2. \qquad (8.208)$$

Уравнения (8.129) снова приводят нас к (8.206).

И наконец, в заключение этого параграфа мы обратимся к электромагнитному полю. Магнитная индукция B, напряженность магнитного поля H, вектор электрической индукции D и напряженность электрического поля E удовлетворяют в вакууме уравнениям

$$B = \mu_0 H, \qquad D = \varepsilon_0 E, \qquad (8.209)$$

а также уравнениям Максвелла:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad (\nabla \cdot D) = \rho; & \text{(II)} \quad (\nabla \cdot B) = 0; \\ \text{(III)} \quad [\nabla, E] = -\dfrac{\partial B}{\partial t}; & \text{(IV)} \quad [\nabla, H] = j + \dfrac{\partial D}{\partial t}, \end{array} \qquad (8.210)$$

где через ρ и j обозначены плотности заряда и тока, через ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости вакуума. Снова вводим векторный потенциал A и скалярный φ, определяя их связь с полями уравнениями [см. (2.506)]:

$$B = [\nabla, A], \qquad E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}; \qquad (8.211)$$

будем рассматривать φ и A как $Q(x)$ системы. Плотность лагранжиана электромагнитного поля задается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E^2 - c^2 B^2) - \rho\varphi + (j \cdot A), \qquad (8.212)$$

где c — скорость света в вакууме. Из (8.212) находим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = -\varepsilon_0 E_x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\varepsilon_0 E_y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial z}} = -\varepsilon_0 E_z, \end{gathered} \qquad (8.213)$$

причем отсюда (8.210, I) следует в качестве уравнения движения Лагранжа. Мы получим также:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_x} = j_x, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_x} = \varepsilon_0 \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \dot{A}_x} \right) = -D_x,$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dfrac{\partial A_x}{\partial x}} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dfrac{\partial A_x}{\partial y}} = H_z, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dfrac{\partial A_x}{\partial z}} = -H_y, \tag{8.214}$$

где использованы формулы (8.211) и равенство $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. Из (8.214) и (8.124) вытекает уравнение Максвелла (8.210, IV). Что касается уравнений (8.210, II и III), то они удовлетворяются уже самим выбором потенциалов, определяемым формулами (8.211).

Так как $\mathscr{L}$ не содержит $\dot{\varphi}$, то мы не в состоянии ввести плотность импульса, соответствующую φ; поэтому невозможно, не вводя дальнейших модификаций, найти плотность гамильтониана такую, чтобы уравнения Максвелла (8.210) следовали бы из уравнений (8.129). Однако мы увидим, что уравнения Максвелла могут быть записаны в канонической форме, если воспользоваться компонентами Фурье переменных поля.

Мы начнем с того, что введем комплексную переменную $\boldsymbol{F}$, определив ее следующим образом:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + ic\boldsymbol{B}. \tag{8.215}$$

Тогда уравнения (8.210) можно переписать в виде:

$$\text{(I)} \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \text{(II)} \quad [\nabla, \boldsymbol{F}] - \frac{i}{c}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\boldsymbol{j}. \tag{8.216}$$

Теперь мы воспользуемся разложением Фурье и одновременно разложим каждый член на три компоненты — одну, параллельную волновому вектору $\boldsymbol{k}$, и две другие, нормальные вектору $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{F} = \Omega^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \left(a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)} + b_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)} + c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}\right). \tag{8.217}$$

Здесь через $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(i)}$ обозначены единичные векторы, образующие правую тройку (предполагается, что координатная система x, y, z правая); вектор $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}$ параллелен $\boldsymbol{k}$, так что

$$[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}] = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}, \quad [\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}] = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, \quad [\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}] = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)},$$
$$[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}] = k\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}] = -k\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}] = 0, \tag{8.218}$$
$$(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}) = 0, \quad (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}) = k,$$

где $|\boldsymbol{k}|=k$; наконец, Ω — это конечный объем, на границах которого по предположению выполняются периодические граничные условия. Следует заметить, что разложение с использованием $\boldsymbol{e}_k^{(1)}$, $\boldsymbol{e}_k^{(2)}$, $\boldsymbol{e}_k^{(3)}$ различно для различных $\boldsymbol{k}$, т. е. для различных членов, входящих в сумму по волновым векторам.

Записывая аналогичное разложение для ρ и $\boldsymbol{j}$,

$$\rho=\Omega^{-1/2}\sum_{k}\rho_k e^{i(k\cdot x)}, \tag{8.219}$$

$$\boldsymbol{j}=\Omega^{-1/2}\sum_{k} e^{i(k\cdot x)}\left(j_k^{(1)}\boldsymbol{e}_k^{(1)}+j_k^{(2)}\boldsymbol{e}_k^{(2)}+j_k^{(3)}\boldsymbol{e}_k^{(3)}\right), \tag{8.220}$$

мы получим из уравнений (8.216) следующие связи:

$$ikc_k=\rho_k/\varepsilon_0, \tag{8.221}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && -ikb_k-i\dot{a}_k c^{-1}=iR_0 j_k^{(1)},\\
&(\mathrm{II}) && ika_k-i\dot{b}_k c^{-1}=iR_0 j_k^{(2)},\\
&(\mathrm{III}) && -i\dot{c}_k c^{-1}=iR_0 j_k^{(3)},
\end{aligned} \tag{8.222}$$

где

$$R_0=(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} \tag{8.223}$$

представляет собой характеристический импеданс вакуума.

Из уравнения непрерывности

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{j})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{8.224}$$

мы найдем, что

$$ikj_k^{(3)}=-\dot{\rho}_k, \tag{8.225}$$

откуда ясно, что (8.222, III) следует непосредственно из (8.221).

Ниже мы будем предполагать, что никаких зарядов и токов нет, так что $\rho_k=j_k^{(1)}=j_k^{(2)}=j_k^{(3)}=0$, и поэтому, также из (8.221),

$$c_k=0. \tag{8.226}$$

Электромагнитное поле в этом случае представляет собой поперечное поле (поле излучения) и описывается (комплексными) переменными a_k и b_k. Поскольку эти переменные комплексные, мы можем взять за независимые переменные либо их действительные и мнимые части, либо принять за независимые переменные a_k, b_k, a_k^*, b_k^*. Ситуация здесь отличается от той, какую мы имели в начале предыдущего параграфа и которая привела нас к (8.105), потому что F — величина комплексная, тогда как ξ была действительной. Уравнения движения, определяющие изменение этих переменных, будут теперь [ср. (8.222, I и II)]:

$$\begin{aligned} \dot a_k &= -ckb_k, & \dot a_k^* &= -ckb_k^*, \\ \dot b_k &= cka_k, & \dot b_k^* &= cka_k^*. \end{aligned} \tag{8.227}$$

В качестве независимых переменных мы выберем здесь действительную и мнимую части a_k и b_k и запишем:

$$a_k = \varepsilon_0^{-1/2}(p_k + i\bar p_k), \qquad b_k = kc\varepsilon_0^{-1/2}(q_k + i\bar q_k), \tag{8.228}$$

так что уравнения (8.227) примут вид:

$$\dot p_k = -(ck)^2 q_k, \quad \dot q_k = p_k, \quad \dot{\bar p}_k = -(ck)^2 \bar q_k, \quad \dot{\bar q}_k = \bar p_k. \tag{8.229}$$

Эти уравнения можно получить из канонических уравнений движения (5.108), если в качестве гамильтониана выбрать

$$H = \frac{1}{2}\sum_k [p_k^2 + (ck)^2 q_k^2 + \bar p_k^2 + (ck)^2 \bar q_k^2] \tag{8.230}$$

и если величины p_k, q_k и $\bar p_k$, $\bar q_k$ рассматривать как пары канонически сопряженных переменных.

Если выразить H через a_k, b_k, a_k^*, b_k^*, мы получим:

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \sum_k (a_k a_k^* + b_k b_k^*), \tag{8.231}$$

и если мы выберем в качестве канонических импульсов $\gamma_k a_k$ и $\gamma_k a_k^*$, а в качестве их сопряженных координат $\gamma_k b_k^*$ и $\gamma_k b_k$, где $\gamma_k^2 = \varepsilon_0/2ck$, уравнения (8.227) будут следовать из (5.108).

Из (8.230) ясно, что задача о поле электромагнитного излучения может быть сведена к задаче о совокупности гармонических осцилляторов. Мы отметим также, что выражение для H (8.230) может быть переписано с помощью (8.228), (8.226), (8.217) и (8.215) в виде:

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\boldsymbol{E}^2 + c^2\boldsymbol{B}^2)\, d^3\boldsymbol{x}; \tag{8.232}$$

это — хорошо известное выражение для энергии электромагнитного поля.

Случай, когда ρ и $\mathbf{j}$ отличны от нуля, может быть рассмотрен аналогичным образом, но мы предоставим его разбор читателю. Существуют, однако, некоторые тонкости, обсуждение которых можно найти в соответствующей литературе *).

ЗАДАЧИ

1. Исследовать продольные упругие колебания бесконечно длинного упругого стержня, аппроксимируя эту систему дискретной системой точек равной массы, связанных между собой одинаковыми пружинками пренебрежимо малой массы. Предполагается, что силы — чисто гармонического характера (т. е. соответствуют закону Гука) и что массы отстоят друг от друга на равных расстояниях. Рассмотреть предельный случай, когда расстояния между точечными массами стремятся к нулю, и получить этим способом волновое уравнение (8.101).

2. Показать, что в предельном случае очень длинных волн распространение продольных волн вдоль бесконечной линии эквидистантно расположенных атомов, упруго взаимодействующих только с ближайшими соседями, с чередующимися массами m и M, соответствует распространению продольных волн вдоль эквивалентной однородной линии.

3. Струна длиною $2L$ растянута до натяжения T между двумя фиксированными точками $x = -L$ и $x = L$. Плотность струны в точке x определяется формулой $\frac{m}{(2L - |x|)^2}$. Найти уравнение, которому должна удовлетворять частота малых поперечных колебаний.

4. Однородная струна растянута до натяжения T между точками $x = 0$ и $x = l$. Небольшая переменная поперечная сила величиной $F(x, t)$, отнесенная к единице длины, приложена в момент t в точке x. Найти поперечное смещение в зависимости от x и t.

Участку струны $h - \delta < x < h + \delta$ молотком сообщается поперечная скорость v, тогда как остальная часть струны в начальный момент времени остается в покое. Найти смещения точек струны в последующие моменты времени и рассмотреть специально случай, когда отношение h/l является целочисленным.

5. Один из концов однородной гибкой цепи длиной l прикреплен к вертикальному стержню, вращающемуся с постоянной угловой скоростью Ω. Если пренебречь влиянием силы тяжести, то можно считать, что цепь описывает круг в горизонтальной плоскости. Используя вариационный принцип Гамильтона, получить волновое уравнение для малых поперечных колебаний; найти частоту основной (фундаментальной) моды колебаний.

---

*) См., например, *H. A. Kramers*, Quantum Mechanics, North Holland Publishing Company, 1957, гл. 8.

ДВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЯ

1. Теорема Эйлера (к главам 2, 5).

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородной порядка s, если она удовлетворяет условию: для любого λ справедливо тождество

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^s f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Дифференцируя левую и правую части этого тождества по λ, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)} x_1 + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_2)} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_n)} x_n = s \cdot \lambda^{s-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = 1$, мы приходим к теореме Эйлера:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = s \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

т. е. сумма всех произведений первых производных однородной функции порядка s на соответствующие переменные равна самой функции, умноженной на порядок однородности.

2. Теорема о решениях системы однородных уравнений (к гл. 3, § 1).

Пусть задана система n однородных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Если определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (**)$$

отличен от нуля, система имеет единственное решение — нулевое, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$.

Если же определитель системы D равен нулю, то система имеет бесчисленное множество ненулевых решений, т. е. решений, отличных от нулевого.

Напомним, что если собрать все члены определителя, содержащие определенный элемент a_{ik}, и вынести этот элемент за скобки, то в скобках окажется выражение, называемое адъюнктой элемента a_{ik}. Адъюнкта элемента a_{ik} обозначается через A_{ik}.

Если из определителя D вычеркнуть i-ю строку и k-й столбец, т. е. вычеркнуть строку и столбец, в которые входит элемент a_{ik}, то, сохранив расположение оставшихся строк и столбцов, мы получим определитель $(n-1)$-го порядка, называемый минором определителя D. Этот минор соответствует вычеркиванию элемента a_{ik}, и поэтому минор обозначается через M_{ik}. Приведем схему образования минора:

$$\left|\begin{array}{cccc|c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,k-1} & a_{1k} & a_{1,\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,k-1} & a_{2k} & a_{2,\,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,\,1} & a_{i-1,\,2} & \dots & a_{i-1,\,k-1} & a_{i-1,\,k} & a_{i-1,\,k+1} & \dots & a_{i-1,\,n} \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,\,k-1} & a_{i,\,k} & a_{i,\,k+1} & \dots & a_{i,\,n} \\ \hline a_{i+1,1} & a_{i+1,\,2} & \dots & a_{i+1,\,k-1} & a_{i+1,\,k} & a_{i+1,\,k+1} & \dots & a_{i+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,k-1} & a_{nk} & a_{n,\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

Можно показать, что

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Если $D=0$, а хотя бы одна из адъюнкт отлична от нуля, то из системы (*) можно найти единственное решение для отношений $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$, если, например, адъюнкта $A_{nn} \neq 0$.

Пусть существует решение однородной системы ($D=0$) в виде значений

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \dots,\ x_n = \alpha_n,$$

удовлетворяющих системе (*); тогда все остальные решения найдутся из условий

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n},\quad \frac{x_2}{x_n} = \frac{\alpha_2}{\alpha_n},\ \dots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n},$$

которые можно переписать так:

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n.$$

Отсюда видно, что решения определены с точностью до одной постоянной, скажем α_n; чтобы получить все решения системы (*), достаточно знать лишь одно из решений.

Можно доказать, что в качестве решения можно выбрать адъюнкты какой-либо строки определителя (**). Следовательно, одно из решений системы (*) будет

$$x_1 = A_{n1},\ x_2 = A_{n2},\ \dots,\ x_n = A_{nn} \qquad (A_{nn} \neq 0),$$

а все остальные найдутся из равенств

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \dots : A_{nn}.$$

Ясно, что одному из неизвестных может быть приписано произвольное значение.

ЛИТЕРАТУРА *)

Мы приводим небольшой список литературы для дальнейшего чтения. Книги 3, 7, 9, 10 и 13 представляют собой современные учебники, посвященные классической механике, написанные примерно на том же уровне, что и предлагаемая книга. В книге 7 имеется наиболее полная библиография, частично снабженная аннотациями. Книги 15 и 17 также являются учебниками; несмотря на свой солидный возраст, они до сих пор не утратили своего значения. Читатели, желающие найти задачи по теоретической механике, обнаружат их в книгах 3, 7, 9, 13 и 17. Следует заметить, однако, что эти задачи очень существенно отличаются по своей трудности. Книги 4, 5 и 8 посвящены основным идеям и историческому развитию классической механики, а книги 11 и 16 — применениям классической механики в области небесной механики. Ссылки на книги 2 и 6 даны здесь в связи с тем, что они касаются адиабатических инвариантов, а найти где-либо изложение этих вопросов затруднительно. Что касается книг 1 и 12, то они представляют интерес для классической механики лишь постольку, поскольку позволяют объяснить свойства атомных систем.

1. *Макс Борн*, Лекции по атомной механике, т. 1, Гостехиздат Украины, Харьков, 1934.
2. *J. M. Burgers*, Het Atoommodel van Rutherford-Bohr, Loosjes, Haarlem, 1918; Versl. Kon. Akad. Wet., Amsterdam, 25, 849, 918, 1055 (1916/7); Ann. Phys. (Lpz.) 52, 195 (1917).
3. *H. C. Corben, P. Stehle*, Classical Mechanics, New York, 1950.
4. *J. L. Destouches*, Principes de la Mécanique Classique, Paris, 1948.
5. *R. Dugas*, Histoire de la Mécanique, Neuchâtel, 1950.
6. *П. Эренфест*, Избранные труды, «Наука», М., 1972.
7. *Г. Голдстейн*, Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.
8. Handbuch der Physik, Volume V, Grundlagen der Mechanik, Mechanik der Punkte und Starrer Körper (Springer, Berlin, 1927).
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, изд. 3-е, 1973.

*) При переводе сохранен полный список (семнадцать книг), приведенный в оригинале; большинство этих книг имеется на русском языке. Литература с книги 18 вместе с краткими аннотациями добавлена в русский перевод по согласованию с автором.

Обратим внимание читателей на то, что на русском языке имеется много курсов теоретической механики, не предполагающих подготовку к изучению теоретической физики, но представляющих самостоятельный интерес. Часть из них можно найти в библиографиях к книгам 20, 21. — *Прим. перев.*

10. *Дж. Лич*, Классическая механика, ИЛ, 1961.
11. *Анри Пуанкаре*, Избранные труды, т. I, Новые методы небесной механики, «Наука», М., 1971.
12. *А. Зоммерфельд*, Строение атома и спектры, тт. I и II, Гостехиздат, М., 1956.
13. *А. Зоммерфельд*, Механика, ИЛ, 1947.
14. *R. C. Tolman*, The Principles of Statistical Mechanics, Oxford University Press, 1938.
15. *А. Г. Вебстер*, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, ГТТИ, 1933.
16. *A. Wintner*, The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton University Press, 1941.
17. *Е. Т. Уиттекер*, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
18. *Ф. Р. Гантмахер*, Лекции по аналитической механике, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1966.

Лекции готовят читателя к изучению теоретической физики; автор предпочитает бо́льшую математическую строгость по сравнению с тем, как в тех же самых случаях поступают физики.
19. *К. Ланцош*, Вариационные принципы механики, «Мир», 1965.

Эта книга написана с большим педагогическим тактом. Главные акценты сделаны на развитии идей и понятий, причем автор все время старается быть доступным для читателя, его книга «выполнена в скромном стиле и предназначена для обычных читателей, а не суперменов» (из предисловия автора).
20. *Дж. Синг*, Классическая динамика, Физматгиз, 1963.

Книга написана математиком, много занимающимся теоретической физикой; это перевод статьи из Handuch der Physik (Springer-Verlag, 1960). Рассмотрено много вопросов, имеющих специальный интерес для физиков.
21. *И. И. Ольховский*, Курс теоретической механики для физиков, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1970.
22. *А. Парс*, Аналитическая динамика, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1971.

Две последние книги необходимо иметь в виду, если есть необходимость углубиться в детали и нетрадиционные вопросы. Существенно превышают по объему материал «тридцати лекций», обычно отводимых в учебных заведениях на курс механики.
23. *Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо*, Сборник задач по классической механике, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1969.

В этом задачнике собрано большое количество задач, по своей тематике соответствующих содержанию книг 7 и 9 из этого списка, а также содержанию данной книги.

Д. тер Хаар

ОСНОВЫ
ГАМИЛЬТОНОВОЙ
МЕХАНИКИ

М., 1974 г., стр. с илл.

Редактор В. А. Григорова.
Техн. редактор С. Я. Шкляр.
Корректор Н. Б. Румянцева.

Сдано в набор 22/I 1974 г. Подписано к печати 10/VI 1974 г. Бумага 84×108 1/32, тип. № 1. Физ. печ. л. 7. Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 11,35. Тираж 15 000 экз. Цена книги 54 коп. Заказ № 1230.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц, изготовленных Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографией № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26, 4-й типографией издательства «Наука». Новосибирск, 77, Станиславского, 25. Тип. зак. № 187.