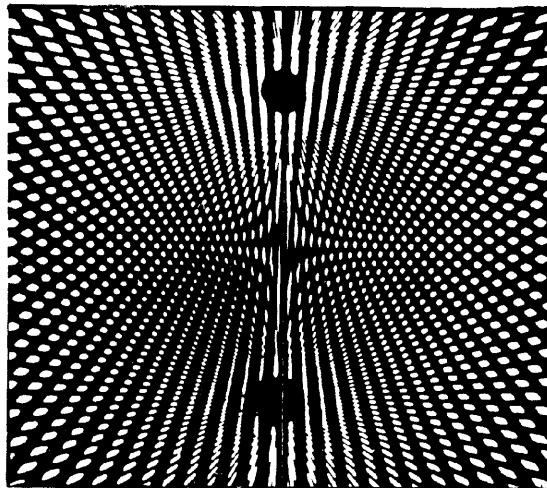


С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко

Издательство  
Московского  
университета



ФИЗИКА

НЕЛИНЕЙНАЯ  
АКУСТИКА  
В ЗАДАЧАХ



---

1990

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

---

Физический факультет

С.Н.Гурбатов, О.В.Руденко

Н Е Л И Н Е Й Н А Я   А К У С Т И К А   В   З А Д А Ч А Х

Издательство  
Московского университета  
1990

~~ББК 22.32~~

Г95

УДК 534.222.2(076)

Рецензенты: доктор физ.-мат.наук Л.К.Зарембо,  
доктор физ.-мат.наук А.И.Саичев

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

Гурбатов С.Н., Руденко О.В.

Г95 Нелинейная акустика в задачах: Учеб. пособие.

-М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - с.

ISBN 5-211 - 02328 - 5.

Изложены основы нелинейной акустики. Материал представлен в виде задач с решениями, пояснениями, ответами. В отличие от имеющихся пособий книга помогает читателю не только познакомиться с нелинейными волновыми процессами и способами их описания, но и освоить технику расчётов, получить численные оценки важнейших параметров. Тем самым приобретаются навыки, необходимые для самостоятельной научной работы в этом направлении.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области физики нелинейных волн и акустики.

077(02)-90-заказное

ISBN - 5 - 211 - 02328 - 5

ББК 22.32

© Московский

государственный университет

1990

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие. . . . .	4
§ 1. Простые волны . . . . .	6
§ 2. Плоские нелинейные волны с разрывами. . . . .	24
§ 3. Нелинейные волны в диссипативных средах. Уравнение Бюргерса. . . . .	38
§ 4. Сферические и цилиндрические волны. Нелинейные пучки . . . . .	51
§ 5. Акустические шумы большой интенсивности . . . . .	62
Литература . . . . .	79

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Результаты, составившие основу нелинейной акустики, получены более 20 лет назад. Они включены в монографии [1 - 5], излагаются в специальных курсах и лекциях по теории волн [6]. Следующий этап развития нелинейной акустики связан с началом широкого использования её идей и методов в приложениях [7 - 9]. Это потребовало численного решения нелинейных уравнений, описывающих одномерные волны [10] и пучки [11]; были изучены волны в неоднородных средах [12] и случайно-модулированные возмущения [13 - 15].

В настоящее время нелинейная акустика представляет собой развитую область науки и техники, результаты которой используются людьми самых разных профессий. Необходим учебник, позволяющий студенту, аспиранту, специалисту из смежной области за сравнительно небольшой срок овладеть основами нелинейной акустики, научиться активно использовать развитые здесь методы упрощений, расчётов, получения численных оценок.

Мы считаем, что последовательность логически правильно расположенных задач - одна из наиболее эффективных форм подачи материала. В нашей книге задачи расположены группами. Как правило, первая задача из группы предназначена для проработки важного теоретического вопроса и снабжена развёрнутым решением. Последующие задачи служат для освоения техники расчётов и оценок. Наиболее простые из них заканчиваются лишь ответами, более сложные - ответами и пояснениями, трудные - решениями. Кроме того, когда группа состоит из однотипных задач, решение даётся только к первой; остальные должны быть рассмотрены по аналогии с ней. Этой схемы мы пытались придерживаться всюду, где это оказывалось возможным.

Задачник построен на материале курсов, читавшихся студентам кафедр акустики московского и горьковского университетов, а также студентам отделения радиофизики физфака МГУ. Много новых задач придумано авторами в процессе подготовки рукописи.

§ 1, § 2, § 3 написаны авторами совместно. Задачи 1.4, 1.7, 1.9, 1.19 - 1.24, 2.2, 2.6, 2.10, 2.15, 2.17, 3.2, 3.4, 3.6 - 3.13 в первоначальном варианте были предложены С.Н.Гурбатовым,

остальные – О.В.Руденко; § 4 целиком основан на предложениях О.В.Руденко, § 5 – С.Н.Гурбатова. Весь собранный материал длительное время совершенствовался путём перекрёстной проверки и редактирования.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.А.Хохловой, которая, по существу, взяла на себя труд по научному редактированию рукописи: она прорешала все задачи, исправила неточности и ошибки. По её предложениям был изменён текст некоторых решений.

Нам известно, что курс нелинейной акустики читается во многих университетах и технических вузах страны, а также в зарубежных университетах. Надеемся, что наша книга "Нелинейная акустика в задачах" поможет учебному процессу и подготовке специалистов соответствующего профиля. Мы рассчитываем на замечания и предложения наших заинтересованных коллег по улучшению содержания и дополнениям, которые могли бы быть включены в последующие издания.

С.Н.Гурбатов, О.В.Руденко

## § I. Простые волны

I.1. Показать, что система уравнений гидродинамики в переменных Лагранжа для одномерного плоского движения имеет решение в виде простых волн. Свести эту систему к одному нелинейному уравнению для переменной  $\xi(x, t)$  - смещения частиц среды из своего начального положения  $x$ .

Решение. Исходные уравнения гидродинамики в лагранжевом представлении имеют вид [1; 4]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad p = p(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \quad (I)$$

Первое уравнение есть обобщение второго закона Ньютона для сплошной среды. Второе - уравнение непрерывности - закон сохранения массы вещества, записанный в дифференциальной форме. Третье - уравнение состояния, которое для быстрых (по сравнению с термодиффузией) процессов сжатия и разрежения, сопровождающих распространение звука, записывается в форме адиабаты Пуассона.

Простой волной называют такой волновой процесс (вообще говоря, нелинейный), в котором все описывающие этот процесс переменные могут быть выражены друг через друга с помощью некоторых связей. Однако если связи переменных содержат интегралы или производные, волна не будет простой; физически это означает появление дисперсии, т.е. зависимости поведения даже очень слабого возмущения от его спектрального состава. Поскольку два последних уравнения системы (I) представляются в виде

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x}, \quad p = p(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x}\right)^\gamma, \quad (2)$$

то плотность и давление выражаются как функции только одной переменной  $\partial \xi / \partial x$ . Это означает, что система (I) имеет решение в виде простых волн.

Возьмём уравнение состояния (I) в форме адиабаты. Тогда из (2) имеем  $p = p_0 (1 + \partial \xi / \partial x)^{-\gamma}$ . Подставляя это соотношение в правую часть первого уравнения (I), придём к нелинейному уравнению Иришоу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi / \partial x^2}{\left(1 + \partial \xi / \partial x\right)^{\delta+1}}, \quad (3)$$

здесь  $c_0 = (\delta p_0 / \rho_0)^{1/2}$  - равновесная скорость звука. Уравнение (3) содержит нелинейность общего вида и формально пригодно для описания сильных возмущений; требуется, однако, чтобы знаменатель в (3) не обращался в нуль ( $\partial \xi / \partial x \neq -1$ ). В нелинейной акустике имеют дело со слабо-нелинейными волнами, для которых  $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$ .

1.2. Считая нелинейность слабой, упростить уравнение Ирншоу I.1(3), сохранив в нём только два главных нелинейных члена.

Решение. Воспользуемся приближённым соотношением

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-(\delta+1)} \approx 1 - (\delta+1) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\delta+1)(\delta+2) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2. \quad (I)$$

Подставляя разложение (I) в правую часть уравнения Ирншоу, найдём

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\delta+1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(\delta+1)(\delta+2) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Левая часть (2) соответствует обычному линейному волновому уравнению. Правая часть, полученная в результате разложения нелинейности общего вида в ряд по степенным нелинейностям, содержит квадратично-нелинейный и кубично-нелинейный члены.

1.3. Нелинейная среда занимает полупространство  $x > 0$ , а на её границе  $x = 0$  задан гармонический сигнал  $\xi = A \sin \omega t$  с частотой  $\omega$ . Анализируя уравнение I.2(2) методом последовательных приближений, определить, какие частоты могут возникать при распространении волны в среде из-за квадратичной и кубичной нелинейностей.

Решение. Считая нелинейные эффекты слабыми, в первом приближении пренебрежём в уравнении I.2(2) его правой частью. Решением линейного волнового уравнения в виде бегущей в положительном направлении оси  $x$  волны будет

$$\xi^{(1)}(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right). \quad (I)$$



Чтобы найти решение второго приближения  $\xi^{(2)}$ , нужно подставить (I) в правую часть нелинейного уравнения, которая при этом примет вид

$$F = \frac{1}{2}(\delta+1)A^2\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^3 \sin 2\omega\tau + \frac{1}{8}(\delta+1)(\delta+2)A^3\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^4 (\sin 3\omega\tau + \sin \omega\tau), \quad (2)$$

где  $\tau = t - x/c_0$  - время в "сопровождающей" системе координат, движущейся равномерно вместе с волной со скоростью звука  $c_0$ . Уравнение второго приближения с правой частью (2) будет таким:

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial t^2} = F\left(t - \frac{x}{c_0}\right). \quad (3)$$

Видим, что  $F$  имеет смысл "вынуждающей силы" в неоднородном волновом уравнении (3); она возбуждает новые волны на частотах второй гармоники  $2\omega$  (квадратично-нелинейный эффект) и третьей гармоники  $3\omega$  (кубично-нелинейный эффект). Кроме того, кубичная нелинейность вносит дополнительный вклад в волну основной частоты  $\omega$  (эффект самовоздействия).

**1.4.** Указать, волны каких частот могут возникать в квадратично-нелинейной среде (в первом приближении), если на её входе  $x = 0$  задан бигармонический сигнал  $\xi = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$ . Рассмотреть предельный случай  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ .

**Ответ.** По аналогии с задачей 1.3 нетрудно показать, что в среде генерируются вторые гармоники  $2\omega_1, 2\omega_2$  волн исходных частот, а также возмущения на суммарной  $\omega_1 + \omega_2$  и разностной  $\omega_1 - \omega_2$  частотах. При  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  будет генерироваться только вторая гармоника, так как эффективность возбуждения разностной частоты стремится к нулю (см. также 1.7)

**1.5.** Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля, упростить уравнение 1.2(2), сохранив в нём только квадратично-нелинейный член.

**Решение.** Метод медленно изменяющегося профиля позволяет существенно упростить нелинейные уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения интенсивных волн. После упрощения уравнений, естественно, и решать их гораздо проще. Идея метода состоит в следующем. При отсутствии

нелинейных членов решением уравнения I.2(2) будет сумма двух бегущих волн произвольной формы:  $\xi = \Phi(t - x/c_0) + \Psi(t + x/c_0)$ . Волна с профилем  $\Phi(\tau)$  распространяется в положительном направлении оси  $x$ , волна  $\Psi$  - в отрицательном. нас будет интересовать первая из этих волн. Когда имеется слабая нелинейность и правая часть уравнения отлична от нуля, форма волны уже не будет постоянной; она будет деформироваться по мере распространения - с увеличением расстояния  $x$ , пройденного волной в нелинейной среде. Когда нелинейность слабая, профиль волны должен изменяться медленно, т.е. наряду с "быстрой" зависимостью функции  $\Phi$  от  $\tau = t - x/c_0$  должна появиться "медленная" зависимость  $\Phi$  от координаты  $x$ :

$$\xi = \Phi(\tau = t - x/c_0, x_1 = \mu x). \quad (I)$$

Здесь  $\mu \ll 1$  - малый параметр задачи, отвечающий малости нелинейных членов в уравнении I.2(2) по сравнению с линейными членами:

$$\mu \sim (\delta+1) \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right| / \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right| \sim (\delta+1) \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1.$$

Тот факт, что  $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$ , уже был использован при переходе от уравнения Иришоу I.I(3) к упрощенному уравнению I.2(2).

Если предположить, в частности, что смещение изменяется по гармоническому закону  $\xi = A \sin \omega(t - x/c_0)$ , условие малости примет вид

$$\mu \sim (\delta+1) A \omega / c_0 = (\delta+1) 2\pi A / \lambda \ll 1.$$

Это значит, что амплитуда смещения частиц среды  $A$  должна быть малой по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Можно сказать иначе: отношение  $U_0/c_0$  амплитуды колебательной скорости  $U_0$  к скорости звука  $c_0$  (акустическое число Маха) должно быть малой величиной. Таким образом, малый параметр задачи - это акустическое число Маха  $M = U_0/c_0$ .

Перейдем в уравнении I.2(2) от  $x$  и  $t$  к новым переменным  $x_1$  и  $\tau$  согласно предположению (I). Вычисляем производные:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \frac{2\mu}{c_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение 1.2(2) и пренебрегая всеми членами порядка  $\mu^2$ ,  $\mu^3$  и более высоких порядков малости (нужно также учесть, что правая часть уравнения мала по сравнению с левой), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\epsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (3)$$

здесь  $u = \partial \xi / \partial \tau = \partial \xi / \partial t$  - колебательная скорость частиц среды, а  $\epsilon = (\gamma + 1)/2$  - параметр акустической нелинейности.

Уравнение (3) в нелинейной акустике называют уравнением простых волн. Заметим, что это уравнение первого порядка, а не второго, как исходное уравнение; таким образом, задачу удалось сильно упростить. Вывод уравнения (3) из уравнений гидродинамики в представлении Эйлера можно найти, например, в [5; 6].

Приведём значения нелинейного параметра

$$\epsilon = (\gamma + 1)/2 = B/2A + 1,$$

где  $\gamma = c_p/c$  для газов; A, B - коэффициенты разложения в ряд приращения давления по приращению плотности  $p' = A \cdot (\rho'/\rho_0) + (B/2) \cdot (\rho'/\rho_0)^2 + \dots$ :

	$t, ^\circ\text{C}$	0	20	40	60	80	100
Дистиллированная вода	$\epsilon$	3,1	3,5	3,7	3,8	4,0	4,1

Морская вода ( $S=3,5\%$ ,  $t=20^\circ\text{C}$ ) -  $\epsilon = 3,65$

Вода с парогазовыми пузырьками (в зависимости от размеров, концентрации пузырьков и частоты волны) - до  $5 \cdot 10^3$

Название среды                      Значение  $\epsilon$  при  $20^\circ\text{C}$

Метанол	5,8
Этанол	6,3
Ацетон	5,6
Глицерин	5,4
Трансформаторное масло	4,2
Бензин	6,6

I.6. На границе  $x = 0$  нелинейной среды колебательная скорость изменяется по закону  $u(x=0, \tau=t) = u_0 \cdot \sin \omega t$ . Решая уравнение простых волн I.5(3) методом последовательных приближений, определить закон изменения амплитуды второй гармоники с увеличением расстояния  $x$ .

Решение. Из уравнения простых волн получаем уравнения первого и второго приближений

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\epsilon}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} u^{(1)2}. \quad (1)$$

Решение первого приближения  $u^{(1)} = u_0 \cdot \sin \omega \tau$  подставляем во второе уравнение (1); интегрируя его с условием  $u^{(2)}(0, \tau) = 0$  (на границе среды второй гармоники нет), находим

$$u^{(2)} = (\epsilon/2c_0^2) \omega u_0^2 x \cdot \sin 2\omega \tau. \quad (2)$$

Видим, что амплитуда второй гармоники в среде растёт линейно с координатой  $x$ . Расстояние

$$x = x_p = c_0^2 / \epsilon \omega u_0 = \lambda / 2\pi \epsilon M, \quad (3)$$

на котором амплитуда второй гармоники формально достигает 1/2 от амплитуды первой, называют характерной нелинейной длиной или расстоянием образования разрыва. На самом же деле решение (2) справедливо на расстояниях  $x \ll x_p$ , так как при заметной перекачке энергии из первой гармоники во вторую решения, полученные методом последовательных приближений, не точны. Из формулы (3) следует, что для акустических сигналов, число Маха которых всегда мало ( $M \ll 1$ ), нелинейная длина  $x_p \gg \lambda$ . Иными словами, чтобы профиль и спектр волны заметно исказились, ей нужно пройти расстояние, равное многим длинам волн  $\lambda$ . Это и означает "медленность" изменения профиля на масштабах порядка  $\lambda$  (см. I.5).

I.7. На границе  $x = 0$  возмущение есть сумма гармонических сигналов  $u(0, t) = u_1 \cdot \sin \omega_1 t + u_2 \cdot \sin \omega_2 t$ . Решая уравнение простых волн I.5(3) методом последовательных приближений, найти амплитуды  $u_+$  и  $u_-$  комбинационных гармоник  $\omega_1 + \omega_2$  и  $\omega_1 - \omega_2$ . Сравнить эффективность генерации суммарной

и разностной частот.

Ответ. По аналогии с задачей I.6 находим

$$u_{\pm} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_1 u_2 (\omega_1 \pm \omega_2) x, \quad \frac{u_-}{u_+} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1 + \omega_2} < 1.$$

I.8. Показать, что точное решение уравнения простых волн I.5(3), отвечающее возмущению произвольной формы  $u(x=0, t) = \Phi(t)$  на границе нелинейной среды, дается неявной функцией

$$u(x, \tau) = \Phi(\tau + \varepsilon u x / c_0^2) \quad (I)$$

Получить формулу (I) методом характеристик, известным из теории квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Решение. Дифференцируя (I), найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(\varepsilon/c_0^2) u \Phi'}{1 - (\varepsilon/c_0^2) x \Phi'}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\Phi'}{1 - (\varepsilon/c_0^2) x \Phi'}, \quad (2)$$

здесь штрих означает производную по полному аргументу функции  $\Phi$ . Подставляя (2) в уравнение простых волн, имеем тождество. О решении методом характеристик см. 2.2.

Интересно разобраться в том, как в неявной зависимости (I) "скрыты" нелинейные эффекты. Разлагая (I) по малым  $x$  в ряд, получим

$$u \approx \Phi(\tau) + \Phi'(\tau) \frac{\varepsilon}{c_0^2} u x + \dots \approx \Phi(\tau) + \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \Phi(\tau) \Phi'(\tau) + \dots$$

Видно, что второй член квадратичен по функции  $\Phi$ , т.е. описывает квадратично-нелинейные эффекты. Следующие члены будут соответствовать нелинейностям высших степеней.

I.9. Используя неявное решение I.8(I) уравнения простых волн, рассмотреть эволюцию "линейного профиля" - исходного возмущения

$$u(x=0, t) = \Phi(t) = \gamma(t - t_*) \quad (I)$$

Обсудить случаи  $\gamma > 0$  и  $\gamma < 0$ .

Решение. Подставляя (I) в общую формулу I.8(I), найдем

$$u(x, \tau) = \delta(\tau + \epsilon u(x, \tau) x / c_0^2 - t_*)$$

и, следовательно,

$$u = \frac{\delta(\tau - t_*)}{1 - \epsilon \delta x / c_0^2}. \quad (2)$$

Таким образом, на любом расстоянии  $x$  профиль остается линейным по  $\tau$ ; изменяется только угол его наклона к оси  $\tau$ . Когда наклон положителен ( $\delta > 0$ ), решение справедливо на конечном интервале  $x < c_0^2 / \epsilon \delta$ , пока профиль не станет вертикальным. При отрицательном наклоне ( $\delta < 0$ ) с увеличением  $x$  профиль становится все более пологим, и при  $x \gg c_0^2 / \epsilon |\delta|$  происходит потеря информации об исходном наклоне  $\delta$ :

$$u \approx - (c_0^2 / \epsilon x) (\tau - t_*).$$

Выражение (2) - простейшее, но очень важное решение уравнения простых волн. Оно может быть использовано для описания эволюции близких к линейным участкам произвольного профиля.

I.10. Проанализировать графически процесс нелинейного искажения формы одного периода исходного гармонического сигнала  $u(0, \tau) = u_0 \sin \omega \tau$ . Воспользоваться неявным решением I.8(I) уравнения простых волн, переписав его как явную функцию переменной  $\tau(x, u)$

$$\tau = \Phi^{-1}(u) - (\epsilon / c_0^2) u x, \quad (I)$$

где  $\Phi^{-1}$  - функция, обратная  $\Phi$ .

Решение. При  $x = 0$  из формулы (I) получаем  $\tau(0, u) = \Phi^{-1}(u)$  - эта кривая соответствует исходному профилю волны. Кривая, соответствующая нелинейно-искаженному профилю ( $x > 0$ ) получается на плоскости  $(u, \tau)$  графическим сложением исходной кривой и прямой  $-(\epsilon / c_0^2) u x$ , наклон которой возрастает с увеличением  $x$ .

Для гармонического при  $x = 0$  сигнала решение I.8(I) запишется так:

$$\frac{u}{u_0} = \sin\left(\omega \tau + \frac{\epsilon}{c_0^2} \omega u x\right) =_{I3} \sin\left(\omega \tau + \mp \frac{u}{u_0}\right), \quad (2)$$

здесь

$$z = (\epsilon/c^2) \omega u_0 x = x/x_p$$

- расстояние, измеренное в единицах длин образования разрыва  
 1.6(3). Формула (1) для рассматриваемого сигнала примет вид

$$\omega\tau = \alpha \tau \sin \frac{u}{u_0} - z \frac{u}{u_0}. \quad (4)$$

Откладывая вдоль оси абсцисс  $u/u_0$ , вдоль оси ординат  $\omega\tau$  и выполняя описанные выше построения, получим картину, изображённую на рис.1. Видно, что с увеличением пройденного волной

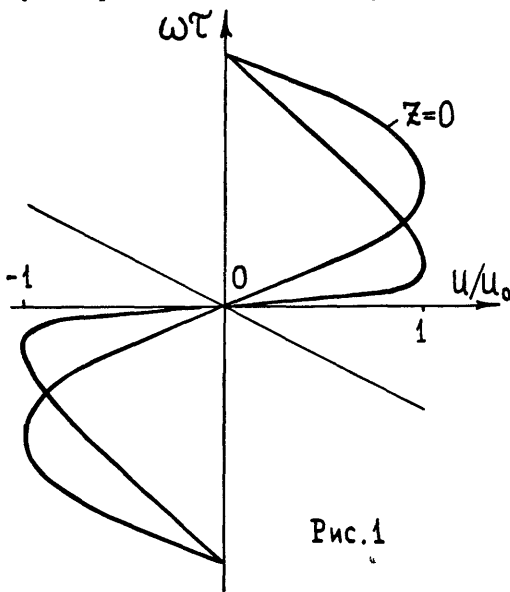


Рис.1

расстояния передний фронт (обращённый по направлению движения) становится более крутым, а задний - более пологим. Похожая картина наблюдается для волн на поверхности моря при подходе их к берегу. На расстоянии  $z = 1$  ( $x = x_p$ ) передний фронт становится вертикальным - образуется разрыв или ударный фронт. При  $z > 1$  профиль становится неоднозначным (появляется "перехлест"), т.е. решение в виде простой

волны (2) на расстояниях  $x > x_p$  не справедливо.

1.11. Используя сшивку решений вида 1.9(2), рассмотрим эволюцию формы одиночного треугольного импульса длительностью  $2T$ . При  $x = 0$  профиль аппроксимируется кусочно-линейной функцией

$$\frac{u}{u_0} = 0 \quad (\tau < 0, \tau > 2T), \quad \frac{u}{u_0} = \frac{\tau}{T} \quad (0 < \tau < T), \quad \frac{u}{u_0} = 2 - \frac{\tau}{T} \quad (T < \tau < 2T).$$

Рассмотреть случаи  $u_0 > 0$  и  $u_0 < 0$ . Провести также анализ

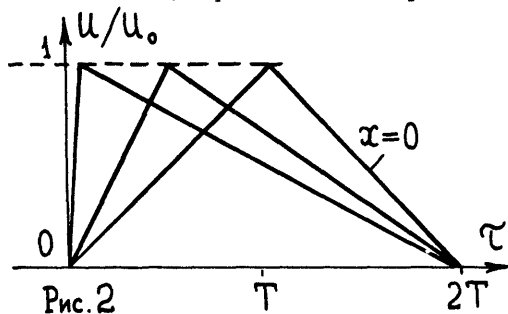
с использованием графической процедуры (см. I.10).

Ответ.  $u = 0$  ( $\tau < 0, \tau > 2T$ ),

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\tau}{T} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T} x\right)^{-1} \quad \left(0 < \tau < T - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_0 x\right),$$

$$\frac{u}{u_0} = \frac{2T - \tau}{T} \left(1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T} x\right)^{-1} \quad \left(T - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_0 x < \tau < 2T\right).$$

Решение в виде простой волны справедливо до расстояния  $x = x_p = c_0^2 T / \varepsilon u_0$ , пока передний фронт импульса не станет вертикальным. Процесс искажения профиля для  $u_0 > 0$  показан на рис. 2.



I.12. Найти спектр простой волны в нелинейной среде, если на входе волна задана как  $u(0, \tau) = u_0 \cdot \Phi(\omega\tau)$ , где  $\Phi$  - функция, периодическая по своему аргументу с периодом  $T = 2\pi$ .

Решение. Нужно вычислить коэффициенты  $C_n$  разложения в ряд Фурье неявной функции - решения I.8(I) уравнения простых волн I.5(3):

$$\frac{u}{u_0} = \Phi\left(\omega\tau + z \frac{u}{u_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z) \exp(in\omega\tau). \quad (1)$$

Здесь  $z = (\varepsilon / c_0^2) \omega u_0 x$  - безразмерное расстояние. Коэффициенты разложения равны

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau} \Phi\left(\omega\tau + z \frac{u}{u_0}\right) \exp(-in\omega\tau) d(\omega\tau).$$

Интегрируя один раз по частям, получим

$$C_n = \frac{1}{2\pi in} \int_{\tau} e^{-in\omega\tau} d\Phi = \frac{1}{2\pi in} \int_{\xi} e^{-in[\xi - z\Phi(\xi)]} \cdot d\Phi(\xi) \quad (2)$$



В формуле (2) мы совершили переход к переменной  $\xi = \omega\tau + z u / u_0$ , откуда следует  $\omega\tau = \xi - z\Phi(\xi)$ , и наш интеграл теперь содержит явную функцию от  $\xi$ . Интегрируя второй раз по частям, получим ответ

$$C_n(z) = -\frac{i}{2\pi n z} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ e^{in z \Phi(\xi)} - 1 \right] e^{-in\xi} d\xi. \quad (3)$$

При  $z \rightarrow 0$ , разлагая экспоненту под интегралом (3) в ряд, получим очевидный результат линейного приближения

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\xi) e^{-in\xi} d\xi = C_n(z=0) = \text{const}$$

— гармоники не взаимодействуют между собой, и коэффициенты  $C_n$  в среде равны своим исходным значениям.

I.13. Пользуясь ответом предыдущей задачи (формула (3)), найти зависимости амплитуд гармоник от расстояния  $z = x/x_p$  при задании на входе в нелинейную среду гармонического сигнала  $u(0, \tau) = u_0 \sin \omega\tau$ . Найти степенные законы роста амплитуд для  $z \ll 1$ .

Решение. Воспользуемся математическим тождеством теории Бесселевых функций [16]

$$\exp(iz \cos \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) \exp(ik\varphi). \quad (I)$$

С помощью тождества (I) экспоненту под интегралом I.12(3) представим как

$$\exp(inz \sin \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(nz) \exp(ik\xi). \quad (2)$$

Интеграл после этого легко вычисляется:

$$C_n(z) = -\frac{i}{nz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(nz) \delta_{nk} = -\frac{i}{nz} J_n(nz).$$

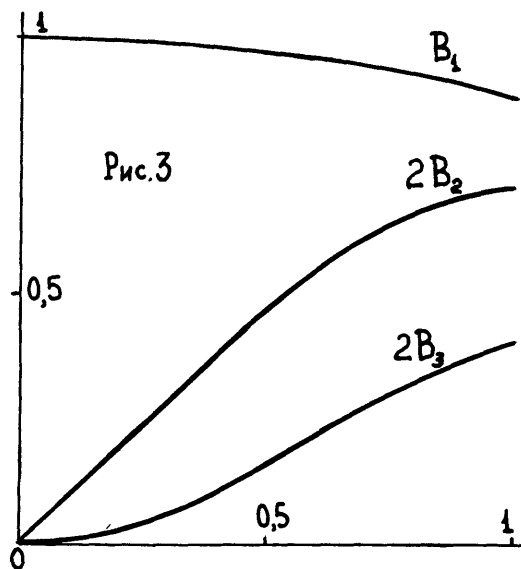
Определяя теперь действительные коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$  разложения в ряд Фурье при  $\cos(n\omega\tau)$  и  $\sin(n\omega\tau)$ :

$$A_n(z) = C_n + C_n^* = 0, \quad B_n(z) = i(C_n - C_n^*) = 2J_n(nz)/nz,$$

найдем известное решение Бесселя-Фубини

$$\frac{u}{u_0} = \sin\left(\omega z + z \frac{u}{u_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_n(nz)}{nz} \sin n\omega z. \quad (3)$$

Зависимости амплитуд  $B_n$  гармоник от расстояния  $z$  приведены на рис.3. Используя первые члены разложения функций



Бесселя в ряд:  
 $J_n(x) \approx (x/2)^n/n!$ ,  
 получим  
 $B_n \approx (nz/2)^{n-1}/n!$ ,  
 $n > 1. \quad (4)$

Более точные степенные аппроксимации и таблицы численных значений амплитуд гармоник приведены в книге [10].

задании на входе  $x = 0$  бигармонического сигнала  $u/u_0 = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t$ , считая  $\omega_1 = (N + 1)\omega$ ,  $\omega_2 = N\omega$ , где  $N > 1$  - натуральное число.

Решение. Поскольку разностная частота равна  $\omega_1 - \omega_2 = \omega$ , нас интересует только коэффициент  $C_1(z)$  в I.12(3). Используя соотношение I.13(2), для бигармонического сигнала получим

$$e^{iz \sin(N+1)\omega t} + e^{iz \sin N\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) e^{ik(N+1)\omega z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) e^{imN\omega z}.$$

Подставляя это выражение в I.12(3), видим, что интеграл отличен от нуля лишь при  $k(N+1) + mN = 1$ . Это возможно только для значений  $k = 1$ ,  $m = -1$ , поэтому находим

$$C_1 = i J_1^2(z)/z, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 2 J_1^2(z)/z.$$

1.15. В условиях предыдущей задачи для  $N \gg 1$  определить амплитуду волны разностной частоты на расстоянии, равном длине образования разрыва  $z = z_p$ . Сравнить с результатом метода последовательных приближений (см. 1.6) и определить, как зависит эта амплитуда от отношения частот  $\omega$  и  $\omega_1$ .

Ответ.  $z_p \approx 1/2N$ ,  $B_1 \approx z_p/2 \approx \omega/4\omega_1$ .

1.16. Рассчитать поведение амплитуд низкочастотных гармоник, рождающихся в нелинейной среде в результате самодетектирования исходного амплитудно-модулированного сигнала  $u/u_0 = (1 - m \cos \omega t) \cdot \sin N\omega t$ , где  $N \gg 1$  - натуральное число,  $m$  - коэффициент глубины модуляции.

Ответ. По аналогии с 1.14 получим результат в виде рядов, содержащих произведения функций Бесселя. Главные члены этих рядов имеют вид

$$C_1 = -\frac{2i}{z} J_1\left(\frac{z}{2}\right) J_0\left(\frac{mz}{2}\right) J_1\left(\frac{mz}{2}\right), \quad C_2 = \frac{i}{2z} J_0(2z) J_1^2(mz).$$

При малых  $z$  получаем выражения, соответствующие решению задачи методом последовательных приближений  $B_1 \approx mz/2$ ,  $B_2 \approx -m^2z/4$ .

1.17. Рассмотреть взаимодействие мощного низкочастотного возмущения со слабым высокочастотным сигналом  $u(0, t)/u_0 = \sin \omega t + m \cdot \sin N\omega t$  ( $m \ll 1$ , натуральное число  $N \gg 1$ ). Как изменяется в пространстве амплитуда слабого сигнала?

Решение. Из формулы 1.12(3) с учетом малости  $m$  получаем

$$C_N(z) \approx \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin N\zeta e^{iNz \sin \zeta} e^{-iN\zeta} d\zeta = -i \frac{m}{2} J_0(Nz). \quad (I)$$

Отсюда  $A_N = 0$ ,  $B_N = m J_0(Nz)$ . Решение (I) справедливо при  $z < 1$ , в области до образования разрыва. Поскольку  $N \gg 1$ , аргумент функции Бесселя в (I) может быть большой величиной; при этом амплитуда слабого сигнала будет осциллировать в пространстве, постепенно затухая. Этот эффект нелинейного подавления высокочастотного сигнала при наложении интенсивного низкочастотного возмущения (например, шума) представляет интерес для ряда приложений.

I.18. Пользуясь методом последовательных приближений, проанализировать вырожденное параметрическое взаимодействие в простых волнах. Для исходного возмущения  $u/u_0 = \sin 2\omega t + m \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $m \ll 1$ , определить, при каком сдвиге фаз  $\varphi$  слабый сигнал усиливается, а при каком  $\varphi$  он подавляется.

Решение. Важный для практики нелинейный эффект - параметрическое усиление слабых сигналов в поле интенсивной волны накачки. Если частота накачки  $2\omega$ , а сигнала  $\omega$ , процесс называется вырожденным; он чувствителен к сдвигу фазы  $\varphi$  между этими двумя волнами. В задаче I.6 выписаны уравнения (I) первого и второго приближения. Напоминаем:  $u^{(1)}$  - это исходное возмущение, в котором вместо  $t$  стоит  $\tau = t - x/c_0$ ;  $u^{(2)}$  - это решение второго приближения, которое нужно найти. Сохраняя в правой части уравнения для  $u^{(2)}$  фурье-компоненту на частоте сигнала  $\omega$ , найдем

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} m \omega u_0^2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Решение на частоте сигнала

$$\frac{1}{u_0} (u^{(1)} + u^{(2)}) = m \cdot \sin(\omega \tau + \varphi) - \frac{m}{2} z \sin(\omega \tau - \varphi).$$

Отсюда видим, что амплитуда сигнала при  $z \ll 1$  ведет себя так:

$$2|C_n(z)| = m \left[ \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 + \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{z}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \approx m \left(1 - z \cos 2\varphi\right)^{1/2}.$$

Если сдвиг фаз  $\varphi$  изменяется от  $0$  до  $\pi$ , то усиление происходит в области  $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ , причем наиболее эффективно сигнал усиливается при  $\varphi = \pi/2$ . В областях  $0 \leq \varphi < \pi/4$ ,  $3\pi/4 < \varphi \leq \pi$  сигнал подавляется, наиболее эффективно - при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Полезно решить эту задачу другим способом, используя не метод последовательных приближений, а точное спектральное представление I.12(3) решения уравнения простых волн (по аналогии с I.14, I.17).

I.19. Найти фурье-образ простой волны  $u(x, \tau)$

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) \cdot d\tau, \quad (I)$$

считая, что возмущение исчезает при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ .

Решение. Используя общее решение I.8(1), для фурье-образа простой волны получим

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} u x\right) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2)$$

Как и для аналогичной задачи I.12, в которой рассмотрен периодический сигнал, здесь нужно перейти к новой переменной  $\xi = \tau + (\varepsilon/c_0^2) \cdot x \cdot u$ . Тогда  $\tau = \xi - (\varepsilon/c_0^2) x \Phi(\xi)$  и для (2) имеем явное выражение

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \left(1 - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\right) e^{-i\omega(\xi - \varepsilon x \Phi(\xi)/c_0^2)} d\xi. \quad (3)$$

Более удобную форму записи можно получить, интегрируя (3) дважды по частям и учитывая, что  $\Phi(\pm\infty) = 0$ :

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi i (\varepsilon/c_0^2) \omega x} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i(\varepsilon/c_0^2) \omega x \Phi(\xi)} - 1 \right] e^{-i\omega\xi} d\xi \quad (4)$$

При  $x \rightarrow 0$  из формулы (4) следует

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \exp(-i\omega\xi) d\xi \equiv C_0(\omega) \quad (5)$$

- это фурье-образ исходного возмущения.

I.20. Исходя из решения (4) предыдущей задачи, найти универсальное поведение фурье-образа в области низких частот. Показать, что если при  $\omega \rightarrow 0$   $C_0(\omega) \sim \omega^n$  и  $n > 1$ , то из-за нелинейных взаимодействий между спектральными компонентами в области низких частот ( $\omega \rightarrow 0$ ) формируется универсальная асимптотика спектра.

Решение. В области низких частот экспоненты в решении можно

разложить в ряд. Ограничившись членами, квадратичными по  $\omega$ ,  
 придем к выражению

$$C \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi + \frac{i}{4\pi} \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (1)$$

Учитывая свойство преобразования Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\Omega) C_0(\omega - \Omega) d\Omega,$$

приведем (1) к виду

$$C(x, \omega) = C_0(\omega) + \frac{i}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\Omega) C_0(\omega - \Omega) d\Omega.$$

Отсюда следует, что для исходных спектров вида  $C_0(\omega) \sim \omega^n$ ,  
 $n > 1$ , спектр волны на низких частотах в нелинейной среде  
 описывается универсальным выражением

$$|C(x, \omega)| \approx \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \Gamma \omega, \quad \Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |C_0(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (2)$$

1.21. Исходя из выражения 1.19(4) для спектра простой  
 волны, найти фурье-образ сигнала, отвечающего синусоидальному  
 возмущению на входе  $\Phi = u_0 \sin \omega_0 t$ .

Ответ. Используя соотношение 1.13(1) для бесселевых  
 функций и свойство  $\delta$ -функции

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \cdot dt, \quad (1)$$

получим

$$C(x, \omega) = -i u_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(kx)}{kx} \delta(\omega - k\omega_0), \quad (2)$$

где  $\xi = (\epsilon/c_0^2)\omega_0 u_0 x = x/x_p$ . После обратного преобразования по Фурье формулы (2) приходим к решению Бесселя-Фубини I.13(3).

I.22. Найти составляющие спектра  $C_{\text{вз}}(x, \omega)$ , возникающие за счет взаимодействия интенсивной волны накачки  $u_1(t)$  и слабого сигнала  $u_2(t)$ :

$$u(x=0, t) = \Phi(t) = u_1 + u_2, \quad u_1 = u_0 \sin \omega_0 t, \quad u_2 = b \sin \Omega t. \quad (I)$$

Решение. Пренебрегая самовоздействием слабого сигнала, экспоненту в формуле I.19(4) можно разложить в ряд по  $u_2$  и ограничиться линейным членом:

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi i (\epsilon/c_0^2) \omega x} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i(\epsilon/c_0^2) \omega x u_1(\xi)} - 1 \right] e^{-i\omega \xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_2(\xi) e^{i(\epsilon/c_0^2) \omega x u_1(\xi)} e^{-i\omega \xi} d\xi. \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое описывает фурье-образ волны накачки, а второе - спектр  $C_{\text{вз}}(x, \omega)$ , рождающийся в результате нелинейного взаимодействия сигнала и накачки. Используя соотношение I.13(1) для бесселевых функций и фильтрующие свойства  $\delta$ -функции, из формулы (2) получим

$$C_{\text{вз}}(x, \omega) = i \frac{b}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ J_k \left[ \frac{\epsilon}{c_0^2} (k\omega_0 - \Omega) u_0 x \right] \delta(\omega - \Omega + k\omega_0) - J_k \left[ \frac{\epsilon}{c_0^2} (k\omega_0 + \Omega) u_0 x \right] \delta(\omega + \Omega + k\omega_0) \right\}. \quad (3)$$

I.23. Используя результат предыдущей задачи, рассмотреть случай низкочастотной накачки  $\omega_0 \ll \Omega$  (данная задача есть обобщение I.17). Описать спектр сигнала на разных стадиях взаимодействия и оценить ширину спектра сигнала.

Решение. При  $\omega_0 \ll \Omega$  нелинейное взаимодействие приводит к модуляции высокочастотного сигнала и появлению составляющих на частотах  $\omega = \pm \Omega + k\omega_0$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) вблизи частоты сигнала. Для фурье-образа I.22(3) при  $k\omega_0 \ll \Omega$  получим

$$C_{\text{вз}}(z, \omega) = i \frac{\beta}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ J_k \left( \frac{\Omega}{\omega_0} z \right) \cdot \delta(\omega - \Omega + k\omega_0) - J_k \left( \frac{\Omega}{\omega_0} z \right) \cdot \delta(\omega + \Omega + k\omega_0) \right\}, \quad z = \frac{\epsilon}{c^2} \omega_0 u_0 x = \frac{x}{x_p}. \quad (I)$$

Легко видеть, что (I) описывает спектр сигнала с гармонической фазовой модуляцией

$$u_2(x, \tau) = \beta \cdot \sin \left[ \Omega \tau + \left( \frac{\epsilon}{c^2} \right) \Omega x \cdot u_0 \sin \omega_0 \tau \right]. \quad (2)$$

Следовательно, при  $\Omega \gg \omega_0$  взаимодействие можно интерпретировать как низкочастотную фазовую модуляцию сигнала, производимую мощной волной накачки. По мере распространения волн глубина модуляции возрастает. При  $(\Omega/\omega_0)z \ll 1$  в спектре преобладают две гармоники  $\omega = \Omega \pm \omega_0$ . При  $(\Omega/\omega_0)z \gg 1$  спектр существенно уширяется. Используя асимптотики функций Бесселя при больших значениях аргумента [16], можно оценить эффективное число гармоник в спектре (I):  $k_* \approx z(\Omega/\omega_0)$ . Соответствующая ширина спектра  $\Delta\omega \sim z\Omega \gg \omega_0$ .

I.24. Используя результат I.22(3), рассмотрим случай высокочастотной накачки ( $\Omega \ll \omega_0$ ). Дать физическую интерпретацию процесса нелинейного взаимодействия.

Ответ. Нелинейное взаимодействие приводит в этом случае к появлению двух спектральных составляющих  $\omega = k\omega_0 \pm \Omega$  вблизи каждой из гармоник  $\omega = k\omega_0$ , волны накачки

$$C_{\text{вз}}(x, \omega) = i \frac{\beta}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(kz) \left[ \delta(\omega + k\omega_0 - \Omega) - \delta(\omega + k\omega_0 + \Omega) \right].$$



## § 2. Плоские нелинейные волны с разрывами

2.1. Определить максимальное расстояние - границу области, в которой справедливо решение I.8(I)  $u = \Phi(\tau + \epsilon u x / c_0^2)$  уравнения простых волн.

Решение. В задаче I.8 вычислена производная

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{(\epsilon / c_0^2) \cdot u \Phi'}{1 - (\epsilon / c_0^2) \cdot x \Phi'} \quad (1)$$

Максимальное расстояние  $x_p$ , как видно из (1), следует находить из условия

$$1 - \frac{\epsilon}{c_0^2} x \Phi'(\tau + \frac{\epsilon}{c_0^2} u x) = 0. \quad (2)$$

Обращение в нуль знаменателя (2) в формуле (1) отвечает тому, что в некоторой точке профиля на расстоянии  $x_p$  производная (1) обращается в бесконечность - касательная в этой точке становится вертикальной; иными словами, начинается процесс образования разрыва в профиле простой волны. Искомая точка профиля соответствует максимальному значению функции  $\Phi'$ , т.е. находится из условия  $\Phi'' = 0$ . Таким образом, два условия:  $\Phi'' = 0$  и (2) позволяют решить поставленную задачу.

На практике удобно воспользоваться тем, что решение уравнения простых волн может быть записано в явном виде I.10(I) относительно  $\tau(x, u)$

$$\tau = \Phi^{-1}(u) - \frac{\epsilon}{c_0^2} u x. \quad (3)$$

Тогда указанные условия: а) на расстоянии  $x = x_p$  возникает вертикальная касательная к кривой  $u(x_p, \tau)$ ; б) разрыв образуется в точке перегиба кривой  $u(x_p, \tau)$  - приводит к паре уравнений

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = 0. \quad (4)$$

2.2. Решая уравнение простой волны I.5(3) методом характеристик, дать наглядную иллюстрацию полученному в предыдущей задаче условию однозначности решения. Определить, какой участок профиля исходного возмущения  $u(x=0, \tau) = \Phi(\tau)$  "опрокинется" первым и на каком расстоянии это произойдет.

Решение. Система характеристических уравнений для уравнения в частных производных I.5(3) имеет вид

$$d\tau/dx = -(\epsilon/c_0^2)u, \quad du/dx = 0, \quad (1)$$

$\tau(x=0) = \tau_0$ ,  $u(x=0, \tau_0) = \Phi(\tau_0)$ . Здесь  $\tau_0(u)$  - точка в сопровождающей системе координат, из которой выходит характеристика для возмущения  $u$  (рис.4). Решение системы (1)

$$\tau = \tau_0 - (\epsilon/c_0^2)\Phi(\tau_0)x \quad (2)$$

описывает семейство прямых на плоскости  $(\tau, x)$  с различным наклоном, зависящим от  $u = \Phi(\tau_0)$ . Заметим, что (2) - это выражение 2.I(3), записанное в других обозначениях. Временной интервал между соседними характеристиками согласно (2) изменяется так:

$$d\tau = d\tau_0 \left[ 1 - (\epsilon/c_0^2)\Phi'(\tau_0)x \right]. \quad (3)$$

Следовательно, опрокидывание волны произойдет тогда, когда характеристики в первый раз пересекутся (см. рис.4) и  $d\tau$  обратится в нуль. Это произойдет на расстоянии

$$x_p = c_0^2 / \epsilon \cdot \max \Phi'(\tau_0). \quad (4)$$

Окрестность точки профиля, где достигается максимум производной  $\Phi'$ , "опрокинется" первой.

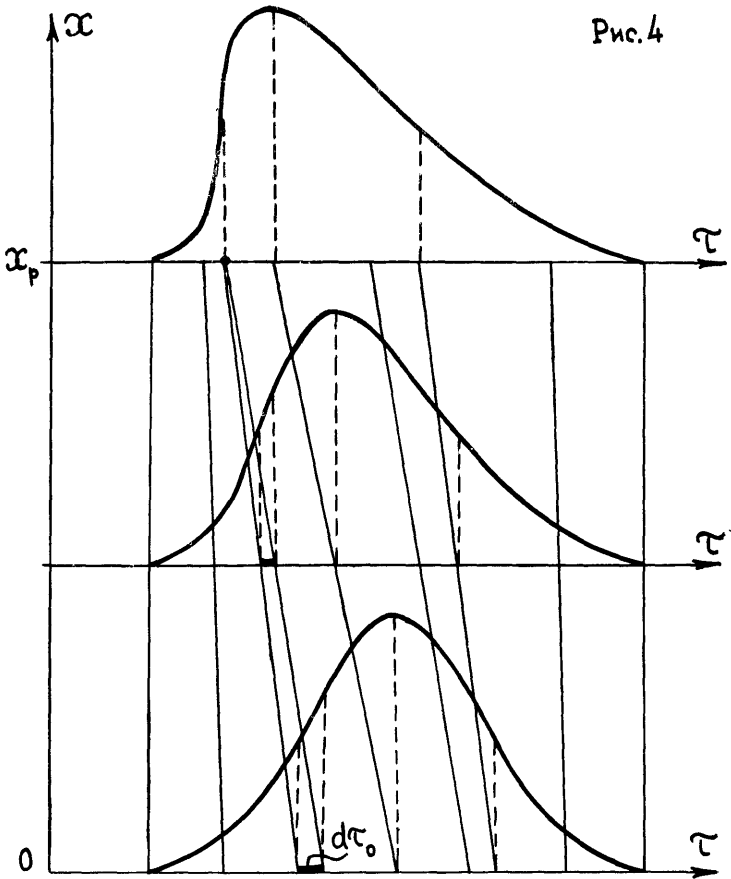
2.3. Найти расстояние, на котором образуется разрыв в простой волне, заданной на входе в нелинейную среду в виде однополярного импульса  $u(x=0, t) = u_0 \exp(-t^2/t_0^2)$ .

Решение. I-й способ. Записываем решение уравнения простых волн для данного однополярного импульса как явную функцию  $\tau = \tau(x, u)$ :

$$\tau = -t_0 \sqrt{\ln(u_0/u)} - \epsilon u x / c_0^2.$$

Здесь перед корнем взят знак "минус", поскольку разрыв образуется всегда на переднем фронте (в данном случае при  $\tau < 0$ ).

Рис. 4



Требуем выполнения условий 2.1(4)

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{t_0}{2u} \left[ \ln \frac{u_0}{u} \right]^{-1/2} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = -\frac{t_0}{2u^2} \left[ \ln \frac{u_0}{u} \right]^{-1/2} + \frac{t_0}{4u^2} \left[ \ln \frac{u_0}{u} \right]^{-3/2} = 0 \quad (2)$$

Из (2) находим точку профиля, в которой образуется разрыв:  $u = u_0 / \sqrt{e}$ . Подставляя это значение в (1), определяем расстояние  $x_p = \sqrt{e/2} (c_0^2 t_0 / \varepsilon u_0)$ .

2-й способ. Следуя схеме, описанной в 2.2, вычислим производную от формы исходного возмущения

$$\Phi'(\tau_0) = -\frac{2\tau_0}{t_0^2} u_0 \exp\left(-\frac{\tau_0^2}{t_0^2}\right). \quad (3)$$

Максимум функции (3) достигается при  $\tau_0 = t_0/\sqrt{2}$  и равен  $\sqrt{2} u_0/\sqrt{e} t_0$ . Из формулы 2.2(4) при этом значении  $\max \Phi(\tau_0)$  сразу получаем результат для  $x_p$ , совпадающий с выражением, полученным первым способом.

2.4. Найти координату образования разрывов в гармонической исходной волне  $u(x=0, t) = u_0 \cdot \sin \omega t$ . Определить в каких точках профиля образуются разрывы.

Ответ. Разрывы образуются в точках  $\omega \tau = 2\pi n$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на расстоянии  $x_p = c_0^2/\epsilon \omega u_0$ .

2.5. Найти координату образования разрыва в ступенеобразном возмущении  $u(x=0, t) = u_0 \cdot \text{th}(t/t_0)$ . В какой точке профиля образуется разрыв?

Ответ. Разрыв образуется при  $\tau = 0$  на расстоянии  $x_p = c_0^2 t_0/\epsilon u_0$ .

2.6. Возмущение на входе представляет суперпозицию гармонических колебаний с несоизмеримыми частотами  $u(x=0, t) = u_1 \sin \omega_1 t + u_2 \sin \omega_2 t$ . Определить на каком расстоянии от входа образуется первый разрыв.

Ответ.  $x_p = c_0^2/\epsilon(\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2)$ .

2.7. На каком расстоянии от излучателя мощного ультразвука в воде образуется разрыв, если интенсивность волны  $I = 10 \text{ Вт/см}^2$ , частота  $f = 1 \text{ МГц}$ ? Параметры воды:  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $c_0 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ ,  $\epsilon = 4$ .

Ответ. Используя результат 2.4, получим оценку

$$\alpha_p = \frac{c_0^2}{2\pi \epsilon \ell} \sqrt{\frac{c_0 \rho_0}{2I}} \approx 25 \text{ см.}$$

2.8. Какой должна быть интенсивность волны в воде на частоте  $\ell = 200$  кГц, чтобы разрыв образовался на расстоянии 10 м?

Ответ.  $I = 0,5 c_0^5 \rho_0 (2\pi \epsilon \ell \alpha_p)^{-2} \approx 0,15 \text{ Вт/см}^2$

2.9. Оценить амплитуды колебательной скорости, смещения, ускорения и значение числа Маха в двух предыдущих задачах.

Ответ. Для задачи 2.7  $u_0 = (2I/c_0 \rho_0)^{1/2} \approx 36 \text{ см/с}$ ,  
 $\xi_0 = u_0/\omega \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ ,  $a_0 = \omega u_0 \approx 2 \cdot 10^8 \text{ см/с}^2$ ,  $M = u_0/c_0 \approx 2,4 \cdot 10^{-4}$ .  
 Для задачи 2.8  $u_0 \approx 4,5 \text{ см/с}$ ,  $\xi_0 \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ ,  $a_0 \approx 5 \cdot 10^6 \text{ см/с}^2$ ,  $M \approx 3 \cdot 10^{-5}$ .  
 Видно, что даже в мощных ультразвуковых полях смещения частиц очень малы (порядка молекулярных масштабов), зато достигаются огромные ускорения (до  $10^8 g$ , где  $g$  - ускорение свободного падения). Числа Маха малы, и этот факт уже использован для упрощения нелинейных уравнений в 1.2 и 1.5.

2.10. Выразить длину образования разрыва плоской монохроматической волны в воздухе ( $\gamma = 1,4$ ) через уровень звукового давления  $N$  и частоту  $\ell$ . Определить число Маха и длину образования разрыва для  $N = 140 \text{ дБ}$  (двигатель тяжелого реактивного самолета) и  $\ell = 3300 \text{ Гц}$ .

Решение. В атмосферной акустике принято характеризовать интенсивность звука уровнем среднеквадратичного давления  $N$  (дБ) относительно  $p_* = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$ . Для пикового значения давления  $p'$  при этом имеем  $p' = \sqrt{2} p_* \cdot 10^{N/20}$ . Длина образования разрыва плоской монохроматической волны определяется соотношением 1.6(3), где  $M = u_0/c_0$ ,  $u_0$  - пиковое значение колебательной скорости. Учитывая, что  $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ , где  $\rho_0$  - плотность воздуха,  $p_0$  - атмосферное давление ( $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$ ), для числа Маха имеем  $M = p'/c_0^2 \rho_0 = p'/\gamma p_0$ . Следовательно,

$$M = \sqrt{2} \frac{p_*}{\delta p_0} 10^{N/20} \approx 2 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_p = \frac{c_0}{f} \frac{\delta}{(\delta+1)} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{p_0}{p_*} 10^{-N/20} \approx 6 \text{ м.}$$

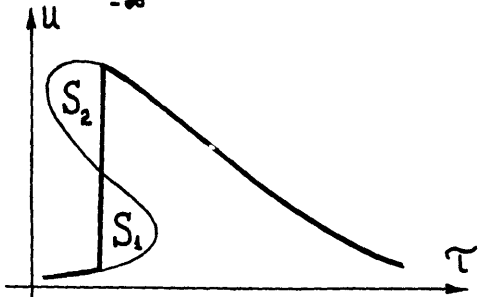
2.11. Исходя из закона сохранения количества движения, переносимого простой волной, предложить простое геометрическое построение, устраняющее неоднозначность формы профиля с "перехлестом" (рис.5), образующимся на расстояниях  $x > x_p$ .

Решение. Убедимся в том, что количество движения в простой волне, занимающей ограниченную область пространства ( $u \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ ) не зависит от  $x$  для  $x < x_p$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 u d\tau = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau + \frac{\epsilon}{c_0^2} u(x)) d\tau = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) d(\xi - \frac{\epsilon}{c_0^2} x \Phi) = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \cdot d\xi.$$

Геометрический смысл закона сохранения - постоянство площади между кривой  $\Phi(x, \tau)$ , описывающей профиль волны, и осью  $\tau$ . После образования "перехлеста" ( $x > x_p$ ) эта площадь также должна сохраняться, поскольку область среды, занятая волновым движением, остается замкнутой (на нее не действуют внешние силы). Следовательно, в неоднозначном профиле волны разрыв следует проводить так, чтобы отсекаемые площади  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис.5) были равны. Действительно, площадь  $S_1$  "добавляется" к профилю, а площадь  $S_2$  "отторгается" от него, и при условии  $S_1 = S_2$  площадь под полученной кривой оказывается равной исходному значению  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) d\xi$ .

Рис. 5



**2.12.** Показать, что ударная волна сжатия - скачок между двумя постоянными значениями  $u_1$  и  $u_2$  (причем  $u_2 > u_1$ ) - устойчива, т.е. не изменяет своей формы при распространении.

**Решение.** Пусть для простоты  $u_1 = 0$ ,  $u_2 > 0$ . В исходной (при  $x = 0$ ) волне разрыв занимает в сопровождающей системе координат положение  $\tau = 0$ . На расстоянии  $x > 0$  искаженный профиль строится графическим методом, описанным в задаче 1.10. Очевидно, что профиль становится неоднозначным при сколь угодно малых  $x$  (пунктирная кривая на рис. 6,а).

**2.11.** В результате получаем скачок такой же формы и величины, но с фронтом, несколько смещенным вперед. Это значит, что волна сжатия устойчива. Смещение фронта в сопровождающей системе координат  $\tau = t - x/c_0$  свидетельствует о том, что положительный (относительно невозмущенного уровня  $u_1 = 0$ ) скачок  $u_2$  движется со сверхзвуковой скоростью  $c = c_0 + \epsilon u_2/2$  - тем быстрее, чем больше перепад  $u_2$  в ударной волне.

Интересно, что ударная волна разрежения ( $u_2 < u_1$ ) неустойчива - при распространении ширина ее фронта растет (рис. 6,б). Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться графическим методом 1.10. Правила "равенства площадей" здесь не требуется.

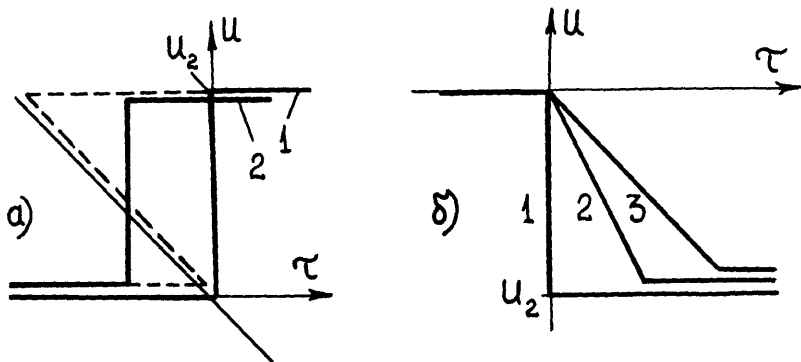


Рис.6

**2.13.** Используя правило равенства площадей, определить положение и амплитуду разрыва  $u_p(x)$  синусоидального исходного

возмущения  $u(x=0, t) = \Phi(t) = u_0 \cdot \sin \omega t$ . Найти расстояние  $x_*$ , при котором величина  $U_p(x)$  максимальна и установить асимптотический закон её изменения при больших  $x$ .

Ответ. В бегущей системе координат ( $\tau = t - x/c_0$ ) разрыв на каждом из периодов занимает фиксированное положение при  $\omega\tau = 2\pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а его амплитуда определяется как ненулевой корень уравнения  $\arcsin(U_p/u_0) = \gamma \cdot (U_p/u_0)$ , где  $\gamma = x/x_p = (\varepsilon/c_0^2) \cdot \omega u_0 x$ . Максимальное значение  $U_p(x_*) = u_0$  достигается при  $\gamma = \gamma_* = \pi/2$ . Асимптотический закон убывания  $U_p/u_0 = \pi/(1 + \gamma)$  хорошо выполняется при  $\gamma \gg 2$ . Интересно, что при  $\gamma \gg 1$   $U_p \approx c_0^2/\varepsilon \omega x$  и не зависит от амплитуды входного сигнала. Решение задачи изложено в [5, 6].

2.14. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, найти форму профиля, синусоидального на входе, на расстояниях  $\gamma = x/x_p > 2$ . Вычислить спектральный состав и среднюю за период плотность энергии  $E = \varrho_0 \bar{u}^2 = \varrho_0 T^{-1} \int_0^T u^2(x, \tau) \cdot d\tau$ .

Ответ. Волна приобретает пилообразный профиль

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{1 + \gamma} (-\omega\tau + \pi \cdot \operatorname{sgn} \tau), \quad -\pi \leq \omega\tau \leq \pi. \quad (1)$$

Её спектр

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(1 + \gamma)} \cdot \sin n\omega\tau. \quad (2)$$

Из-за образования разрывов и их нелинейного затухания (тем более сильного, чем больше  $u_0$ ) амплитуды гармоник уменьшаются по степенному закону, причём  $A_n \sim n^{-1}$ . Плотность энергии уменьшается как  $E = \pi^2 \varrho_0 u_0^2 / 3(1 + \gamma)^2$  и при  $\gamma \gg 1$  не зависит от амплитуды  $u_0$  исходного возмущения.

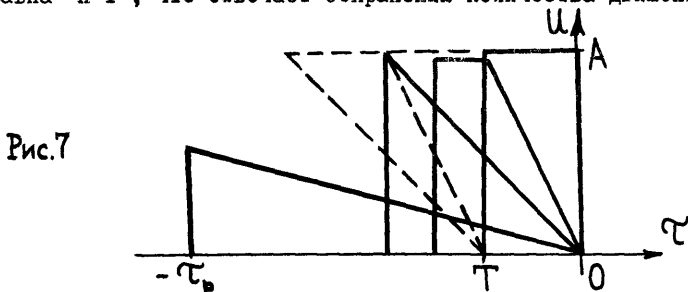
2.15. Используя графические построения 1.10 и 2.11, проследить за эволюцией прямоугольного на входе импульса  $\Phi(\tau) = A$  при  $-T < \tau < 0$  и  $\Phi(\tau) = 0$  вне этого интервала. Найти асимптотическую форму импульса при  $x \rightarrow \infty$ .

Ответ. Начальная форма импульса и его форма на трёх характерных расстояниях показаны на рис.7. При  $x \cdot (\varepsilon/c_0^2) \cdot A/T \gg 1$  импульс приобретает универсальную треугольную форму с наклоном, не зависящим от  $A$  и  $T$ :

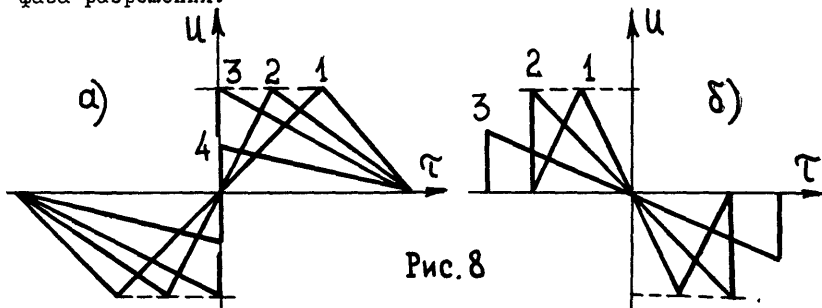


$$u = -\frac{c_0^2 \tau}{\varepsilon x} \quad (-\tau_p < \tau < 0), \quad u = 0 \quad (\tau < \tau_p, \tau > 0),$$

здесь  $\tau_p(x) = [2AT \cdot (\varepsilon/c_0^2) x]^{1/2}$  - текущая длительность импульса. Нетрудно проверить, что при любых  $x$  площадь импульса равна  $A \cdot T$ , что отвечает сохранению количества движения.



2.16. Проанализировать графически процесс нелинейной трансформации профиля двупольного звукового импульса, состоящего из двух симметричных треугольных импульсов (см. I.II) длительностью  $2T_0$  и площадью  $S$  в случаях: а) за фазой разрежения следует фаза сжатия; б) за фазой сжатия следует фаза разрежения.



Ответ. Как показано на рис.8, в случае а) импульс трансформируется в так называемую  $S$ -волну неизменной длительности  $2T_0$ ; в случае б) импульс превращается в  $N$ -волну, длительность которой  $2 \cdot T(x)$  растёт с увеличением  $x$ . Возрастание номера кривой на рис.8 соответствует увеличению пройденного волной расстояния.

**2.17.** В условиях предыдущей задачи, используя результаты об эволюции "линейного профиля" (задача 1.9), найти асимптотическое поведение фурье-образов при  $(\epsilon/c_0^2)Sx/T_0^2 \gg 1$ . Обсудить особенности структуры спектров в области высоких и низких частот.

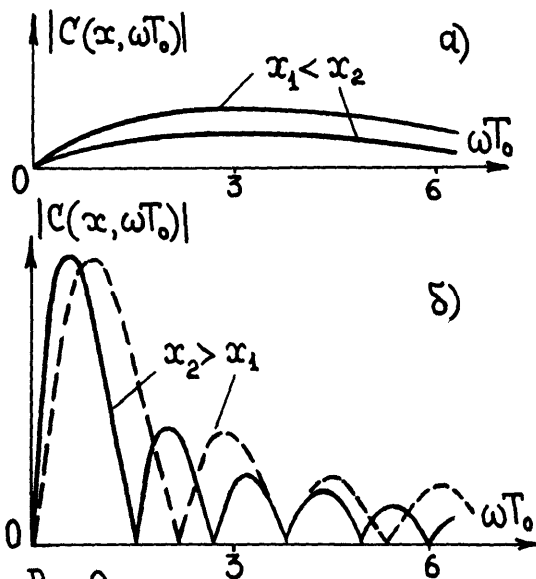
Ответ. а) Спектр S-волны

$$|C(x, \omega)| = \frac{2T_0^2}{\omega T_0} \left(1 - \frac{\sin \omega T_0}{\omega T_0}\right) \frac{c_0^2}{\epsilon x}. \quad (1)$$

б) Спектр N-волны является автомоделльным:

$$|C(x, \omega)| = \frac{2T^2}{\omega T} \left| \cos \omega T - \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right| \frac{c_0^2}{\epsilon x}, \quad T = \left[ 2S \frac{\epsilon}{c_0^2} x \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Спектры (1), (2) изображены на рис.9. В области высоких частот



спектры спадают по степенному закону, что связано с наличием разрывов. Для S-импульса все составляющие спектра уменьшаются  $\sim 1/x$ . Для N-импульса максимум спектра постепенно сдвигается в сторону низких частот; на высоких частотах спектральные составляющие уменьшаются как  $1/\sqrt{x}$ , а на низких  $|C(x, \omega)| \sim \omega \sqrt{x}$ . Рост спектральной плотности на низких частотах связан с параметрической

подкачкой энергии при нелинейном взаимодействии высокочастотных гармоник.

**2.18.** Сформулировать систему уравнений, описывающих эволюцию профиля простой волны, содержащей разрыв.

Решение. Получим дифференциальное уравнение, описывающее

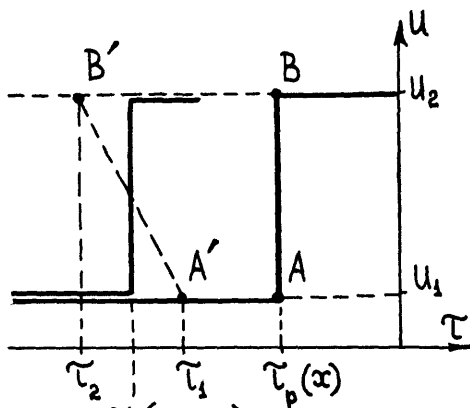


Рис. 10

движение ударного фронта в сопровождающей системе координат. Рассмотрим разрыв, на расстоянии  $x$  имеющий координату  $\tau_p(x)$  (рис.10). Колебательная скорость непосредственно перед фронтом (точка  $A$ ) есть  $u_1$ , непосредственно за фронтом (точка  $B$ ) —  $u_2$ . Когда расстояние увеличится на  $\Delta x$ , точка  $A$  перейдет в  $A'$ , координата которой  $\tau_1 = \tau_p(x) - (\epsilon/c_0^2) u_1 \Delta x$ , точка  $B$  — в  $B'$  с координатой  $\tau_2 = \tau_p(x) - (\epsilon/c_0^2) u_2 \Delta x$ . Из правила равенства площадей 2.II следует, что новая координата разрыва

$$\tau_p(x + \Delta x) = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) = \tau_p(x) - \frac{\epsilon}{2c_0^2}(u_1 + u_2) \cdot \Delta x. \quad (1)$$

Переходя в формуле (I) к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\frac{d\tau_p}{dx} = - \frac{\epsilon}{2c_0^2}(u_1 + u_2). \quad (2)$$

Таким образом, скорость перемещения фронта в сопровождающей системе координат зависит только от значений  $u_1$  и  $u_2$  возмущения на разрыве, которые, вообще говоря, зависят от расстояния  $x$ . Поскольку  $u_1$  и  $u_2$  принадлежат не только разрыву, но одновременно и профилю простой волны, для них справедливо решение 2.I(3), т.е.

$$\tau_p(x) = \Phi_1^{-1}(u_1) - (\epsilon/c_0^2) u_1 x, \quad (3)$$

$$\tau_p(x) = \Phi_2^{-1}(u_2) - (\epsilon/c_0^2) u_2 x. \quad (4)$$

Здесь функция  $\Phi_1$  описывает профиль простой волны перед разрывом,  $\Phi_2$  - за разрывом;  $\Phi_{1,2}^{-1}$  - обратные к  $\Phi_{1,2}$  функции. Три уравнения (2) - (4) для трех неизвестных  $\tau_p(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  образуют полную систему для решения поставленной задачи.

2.19. Воспользовавшись уравнениями (2) - (4) предыдущей задачи, найти изменение с расстоянием величины скачка и длительности треугольного импульса с ударной волной на переднем фронте. При  $x=0$  импульс задан так:  $u/u_0 = 1 - \tau/\tau_0$  ( $0 < \tau < \tau_0$ ),  $u=0$  при всех остальных  $\tau$ .

Ответ. Величина скачка уменьшается, длительность растет:

$$\frac{u_2(x)}{u_0} = \left(1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 \tau_0} x\right)^{-1/2}, \quad T(x) = \tau_0 \left(1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 \tau_0} x\right)^{1/2}. \quad (I)$$

Поскольку количество движения сохраняется, площадь импульса  $\sim u_2(x)T(x) = u_0\tau_0 = \text{const}$ .

2.20. Показать, что две попутные слабые ударные волны сталкиваются по закону абсолютно неупругого удара двух частиц; при этом аналогом массы  $m$  частицы является величина скачка  $(u_2 - u_1)$ , аналогом скорости частицы  $v$  - скорость  $d\tau_p/dx = -(\varepsilon/2c_0^2)(u_1 + u_2)$  движения фронта в сопровождающей системе координат.

Решение. Пользуясь методами графического анализа, показываем, что две ударные волны - скачки возмущений  $(u_2 - u_1)$  и  $(u_3 - u_2)$

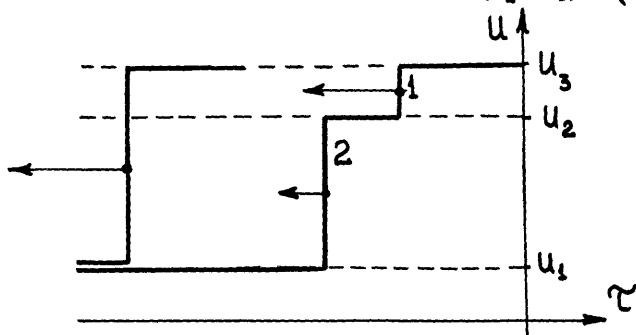


Рис. 11

(рис. II) - сливаются и образуют одну волну с перепадом  $(u_3 - u_1)$ .  
Тривиальное соотношение

$$(u_3 - u_1) = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2)$$

есть аналог закона сохранения массы частиц:  $m' = m_1 + m_2$ . Аналогом закона сохранения количества движения  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m' v'$  будет соотношение

$$(u_2 - u_1) \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_1 + u_2) + (u_3 - u_2) \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_2 + u_3) = (u_3 - u_1) \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_1 + u_3).$$

которое, как видно, представляет собой тождество.

2.21. По невозмущенной среде распространяется слабая ударная волна, за фронтом которой форма простой волны описывается функцией  $u = \Phi(\tau + \varepsilon u x / c_0^2)$ . Найти зависимость от расстояния величины скачка на фронте ударной волны.

Решение. Воспользуемся парой уравнений, полученных в 2.18:

$$\tau_p = \Phi^{-1}(u_2) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_2 x, \quad \frac{d\tau_p}{dx} = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_2. \quad (1)$$

Здесь  $\tau_p(x)$  описывает положение разрыва в сопровождающей системе координат,  $u_2(x)$  - величину скачка. Исключая из уравнений (1)  $\tau_p(x)$  и считая  $x = x(u_2)$ , получим нелинейное уравнение

$$\frac{1}{2} u_2 \frac{dx}{du_2} + x = \frac{c_0^2}{\varepsilon} \frac{d}{du_2} \Phi^{-1}(u_2). \quad (2)$$

Решая (2), найдем общее выражение [12]

$$\frac{\varepsilon}{2c_0^2} x(u_2) = \frac{1}{u_2} \int^{u_2} u d\Phi^{-1}(u). \quad (3)$$

Константа интегрирования может быть выбрана, например, по начальной координате  $x_p$  образования разрыва (см. 2.1 - 2.6):  $x(u_2^*) = x_p$ , где  $u_2^* = u_2(x_p)$  - начальная величина скачка

(обычно равная нулю, если только передний фронт исходной простой волны не является отрезком прямой).

2.22. Пользуясь формулой (3) предыдущей задачи, найти изменение "амплитуды" разрыва  $u_2(x)$  при распространении одиночного импульса, равного  $u = u_0 \sin \omega t$  при  $0 \leq \omega t \leq \pi$  и  $u = 0$  при всех остальных  $\omega t$ .

Решение. В данной задаче  $\Phi^{-1} = \omega^{-1} \arcsin(u/u_0)$  и формула (3) принимает вид

$$\frac{\epsilon \omega}{2c_0^2} x = \frac{1}{u_0^2} \int_{u_2}^u \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u^2}{u_0^2}\right)^{-1/2} du.$$

Вычисляя интеграл, найдем

$$V^{-2} (\sqrt{1-V^2} + C) = -z/2,$$

где  $V = u_2(x)/u_0$ ,  $z = (\epsilon/c_0^2) \omega u_0 x$ ,  $C$  - константа интегрирования. Как несложно вычислить (см.2.4), в данной задаче  $z_p = 1$  и разрыв начинает формироваться от нулевого по "амплитуде" скачка  $V(z_p=1) = 0$ . Поэтому константа  $C = -1$ . Таким образом, "амплитуда" ударной волны изменяется в пространстве по закону:  $u_2(x) = 0$  при  $x < x_p$ , и

$$u_2(x)/u_0 = 2\sqrt{z-1}/z$$

при  $z > z_p = 1$  (или  $x > x_p$ ). Видно, что амплитуда разрыва при  $1 < z < 2$  увеличивается, достигает при  $z = 2$  максимального значения  $u_2 = u_0$ , а затем (в области  $z > 2$ ) убывает  $\sim 1/\sqrt{z}$ .

2.23. Найти изменение длительности одиночного импульса - полупериода синусоиды (см.предыдущую задачу).

Решение. Подставляя решение (I) в уравнение движения разрыва 2.2I(I), находим

$$\frac{d(\omega \tau_p)}{dz} = -\frac{V}{2} = -\frac{\sqrt{z-1}}{z}, \quad \omega \tau_p = C + 2 \arctg \sqrt{z-1} - 2\sqrt{z-1}.$$

Поскольку фронт начинает формироваться при  $z=1$  в точке  $\tau_p=0$ , находим  $C=0$ . Итак, длительность импульса

$$T = \frac{\pi}{\omega} \quad (z < 1), \quad T = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2}{\omega} \left( \sqrt{z-1} - \alpha \operatorname{ctg} \sqrt{z-1} \right) \quad (z > 1)$$

- постоянна до образования разрыва и монотонно увеличивается после образования разрыва из-за его движения с переменной сверхзвуковой скоростью.

### § 3. Нелинейные волны в диссипативных средах. Уравнение Бургерса.

3.1. Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля (см. I.5), упростить линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2},$$

описывающее распространение звука в вязкой теплопроводящей среде (см. [5, 6]). Здесь  $b = 4\eta/3 + \xi + \alpha(c_v^{-1} - c_p^{-1})$  - коэффициент диссипации, где  $\xi$ ,  $\eta$  - объемная и сдвиговая вязкость,  $\alpha$  - теплопроводность. Найти решения полученного уравнения для синусоидального и однополярного импульсного (на входе в среду) сигналов.

Решение. Считаем, что диссипативные эффекты приводят к медленному искажению профиля и переходим к сопровождающим координатам  $\tau = t - x/c_0$ ,  $x_1 = \mu x$ . Пренебрегаем членами  $\mu^2$ ,  $\mu^3$ , ..., а члены порядка  $\mu^0$  взаимно уничтожаются. В результате остаются члены одного порядка малости  $\mu^1$ , которые образуют уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad \delta = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0}. \quad (2)$$

Общее решение (2), отвечающее исходному возмущению произвольной формы  $u(x=0, t) = u_0(t)$ , выражается с помощью функции Грина

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau') G(x, \tau - \tau') d\tau', \quad G = \frac{\exp(-\tau^2 / 4\delta x)}{\sqrt{4\pi\delta x}}. \quad (3)$$

Для гармонического исходного возмущения  $u_0(t) = a \cdot \sin \omega t$  получим

$$u(x, \tau) = a \cdot \exp(-\delta \omega^2 x) \cdot \sin \omega t \quad (4)$$

- это затухающая по экспоненциальному закону волна. Величину  $x_3$ , обратную коэффициенту затухания ( $x_3 \sim 1/\delta \omega^2$ ), называют характерной длиной затухания. Условие  $x_3 \gg \lambda$  означает, что амплитуда волны (4) уменьшается незначительно на расстояниях порядка длины волны  $\lambda$ . Отношение

$$\frac{\lambda}{x_3} = \frac{\pi v \omega}{c_0^2 \rho_0} \sim \mu \ll 1 \quad (5)$$

- малый параметр задачи; он порядка отношения правой части (1) к любому из членов левой части этого уравнения. Наличие малого параметра  $\mu$  оправдывает переход от (1) к (2).

Для однополярного импульса, имеющего на входе характерную длительность  $t_0$ , на расстояниях  $4\delta x / t_0^2 \gg 1$  ширина функции  $G(x, \tau)$  становится много большей  $t_0$ , и формула (3) упрощается

$$u(x \gg \frac{t_0^2}{4\delta}, \tau) = G(x, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau') \cdot d\tau'. \quad (6)$$

Таким образом, на больших расстояниях импульс принимает асимптотическую форму гауссовой кривой.

3.2. Получить эволюционное уравнение Бюргерса, описывающее медленные процессы искажения профиля волны из-за наличия у среды нелинейных и диссипативных свойств.

Решение. Методом медленно изменяющегося профиля ранее были получены уравнения простых волн I.5(3) и параболическое уравнение 3.1(2)



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad \left( \beta = \frac{\varepsilon}{c_0^2}, \quad \delta = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \right), \quad (1)$$

описывающие эволюцию профиля вследствие нелинейных и диссипативных эффектов по отдельности. Поскольку эти эффекты слабые, в исходных уравнениях они описываются независимыми членами; следовательно, в упрощенное уравнение нелинейный и диссипативный члены будут входить аддитивно, в виде отдельных слагаемых. Таким образом, приходим к обобщению уравнений (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

называемому уравнением Бюргерса. Если перейти в (2) к безразмерным переменным

$$V = \frac{u}{u_0}, \quad \theta = \omega \tau, \quad z = \beta \omega u_0 x = \frac{x}{x_p}, \quad (3)$$

где  $u_0$  - характерное значение возмущения (например, амплитуда гармонической волны или пиковое возмущение в импульсе),  $\omega$  - характерная частота периодического сигнала (или обратная длительность импульса), уравнение примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (4)$$

Здесь число

$$\Gamma = \frac{b\omega}{2\varepsilon c_0^3 \rho_0 u_0} \equiv \frac{1}{2\varepsilon \text{Re}} = \frac{\omega}{u_0} \frac{\delta}{\beta} \quad (5)$$

- единственный безразмерный комплекс параметров, входящий в уравнение (1) и тем самым полностью определяющий процесс эволюции. Иногда вместо  $\Gamma$  используют акустическое число Рейнольдса  $\text{Re} = (2\varepsilon\Gamma)^{-1}$ . Можно записать  $\Gamma$  как отношение характерных нелинейной и диссипативной длин

$$\Gamma = \frac{x_p}{x_3} = \frac{c_0^2}{\varepsilon \omega u_0} : \frac{2c_0^3 \rho_0}{\beta \omega^2} = \frac{1}{\beta \omega u_0} : \frac{1}{\delta \omega^2}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что величина  $\Gamma$  оценивает относительный вклад нелинейных и диссипативных эффектов в искажение профиля волны. При  $\Gamma \ll 1$  преобладает нелинейность, при  $\Gamma \gg 1$  - диссипация. Последовательный вывод уравнения Бюргерса (2) из уравнений гидродинамики дан в [5].

3.3. Принимая, что коэффициент поглощения звука в воде определяется значением  $\delta = 0,6 \cdot 10^{-17} \text{ с}^2/\text{см}$ , а в воздухе  $\delta = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^2/\text{см}$ , оценить акустическое число Рейнольдса в задачах 2.7, 2.8, 2.10.

Ответ. а)  $Re \approx 22$ , б)  $Re \approx 13$ , в)  $Re \approx 300$ .

3.4. Пусть  $\Pi(x, \tau)$  есть некоторое известное решение уравнения Бюргерса 3.2(2), соответствующее условию на границе  $\Pi(x=0, \tau) = \Pi_0(\tau)$ . Найти решение, отвечающее наложению постоянного "течения" со скоростью  $V_0 = \text{const}$  на исходное возмущение  $\Pi_0$ , т.е.  $u(x=0, \tau) = V_0 + \Pi_0(\tau)$ . (1)

Ответ.  $u(x, \tau) = V_0 + \Pi(x, \tau + \xi V_0 x)$ . (2)

Скорость распространения волны  $\Pi$  "по течению" на  $\Delta x \approx \xi c_0^2 V_0 = \varepsilon V_0$  больше, чем по невозмущенной среде.

3.5. Найти стационарное решение уравнения Бюргерса, удовлетворяющее условиям симметричного скачка  $u(\tau \rightarrow -\infty) = -u_0$  и  $u(\tau \rightarrow \infty) = u_0$ . Используя преобразование (2) предыдущей задачи, построить стационарное решение, которое удовлетворяет условиям  $u(\tau \rightarrow -\infty) = u_1$  и  $u(\tau \rightarrow \infty) = u_2 > u_1$ .

Ответ. Стационарная волна отыскивается в виде  $u(x, \tau) = u(\tau + Cx)$ , где константа  $C$  определяется из условий при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ . В первом случае стационарное решение имеет вид

$$u = u(\tau) = u_0 \cdot \text{th} \left( \frac{\beta u_0}{2\delta} \tau \right) = u_0 \cdot \text{th} \left( \frac{\omega \tau}{2\Gamma} \right)$$

и описывает симметричную ударную волну, бегущую со скоростью

звука. Ширина фронта обратно пропорциональна величине скачка  $u_0$ .  
 Полагая  $V_0 = (u_1 + u_2)/2$ ,  $u_0 = (u_2 - u_1)/2$ , из (1) и  
 3.4(2) получаем для движущегося ударного фронта

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \cdot \text{th} \left[ \frac{\vartheta u_0}{2\delta} \left( \tau + \vartheta \frac{u_1 + u_2}{2} x \right) \right]. \quad (2)$$

Полезно убедиться в том, что скорость движения фронта слабой ударной волны (2) не зависит от его ширины и совпадает со скоростью 2.18(2) движения разрыва.

3.6. Показать, что уравнение Бургера заменой переменных

$$u = \frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad S = \frac{2\delta}{\vartheta} \ln U \quad (1)$$

или

$$u = \frac{2\delta}{\vartheta} \frac{\partial \ln U}{\partial \tau} \quad (2)$$

(замена Хопфа-Коула) сводится к линейному уравнению диффузии. Найти общее решение уравнения Бургера.

Решение. Из уравнения 3.2(2) для  $S$  получаем уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\vartheta}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 = \delta \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2},$$

которое после перехода (1) к  $U$  сводится к линейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2},$$

совпадающему по форме с 3.1(2). Решение этого уравнения с условием на границе  $U(x=0, t) = U_0(t)$  запишется аналогично 3.1(3):

$$U(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\vartheta\delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t) \exp \left[ -\frac{(t-\tau)^2}{4\delta x} \right] dt. \quad (4)$$

С учетом замены (1)

$$U_0(t) = \exp\left[\frac{\beta}{2\delta} S_0(t)\right], \quad S_0(t) = \int^t u_0(t') dt' \quad (5)$$

цепочка преобразований (5) → (4) → (2) дает общее решение уравнения Бюргера - выражает поле  $u(x, \tau)$  в произвольном сечении  $x$  через исходное поле  $u_0(\tau)$ . Приведем еще одну форму записи общего решения. Пользуясь (2), из (4), (5) имеем

$$u(x, \tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-\tau}{\beta x} \exp\left[\frac{1}{2\delta} F(\tau, t, x)\right] dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2\delta} F(\tau, t, x)\right] dt}, \quad (6)$$

где

$$F = \beta S_0(t) - \frac{(t-\tau)^2}{2x}, \quad S_0(t) = \int^t u_0(t') dt'. \quad (7)$$

3.7. На основе общего решения уравнения Бюргера, полученного в предыдущей задаче, рассмотрим эволюцию гармонического исходного сигнала  $u_0(t) = a \cdot \sin \omega t$ . Исследовать его асимптотическое поведение при  $x \rightarrow \infty$ .

Ответ. Используя разложение [16]

$$\exp(z \cos \theta) = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cdot \cos n\theta, \quad (1)$$

где  $I_n$  - модифицированные функции Бесселя, из (2), (4), (5) получим

$$u(x, \tau) = \frac{2a \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^{n+1} \cdot I_n(\text{Re}) \exp(-\delta n^2 \omega^2 x) \sin n\omega \tau}{\text{Re} \left[ I_0(\text{Re}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot I_n(\text{Re}) \exp(-\delta n^2 \omega^2 x) \cos n\omega \tau \right]}. \quad (2)$$

Здесь комбинация параметров  $a\beta/2\omega\delta$  имеет смысл акустического числа Рейнольдса 3.2(5). При  $\delta\omega^2 x \gg 1$  экспоненты в (2)

сильно уменьшаются с ростом  $n$  и остается только первая гармоника

$$u(x, \tau) \approx \frac{2a}{\text{Re}} \frac{I_1(\text{Re})}{I_0(\text{Re})} \exp(-\delta \omega^2 x) \sin \omega \tau.$$

При малых и больших числах Рейнольдса, пользуясь асимптотиками функций Бесселя, получим гармонику, затухающую по законам линейной акустики

$$u(x, \tau) \approx \exp(-\delta \omega^2 x) \cdot \sin \omega \tau \cdot \begin{cases} a, & \text{Re} \ll 1, \\ 4\delta \omega / \beta, & \text{Re} \gg 1. \end{cases} \quad (4)$$

В последнем случае амплитуда гармоники не зависит от своего исходного значения

3.8. Пользуясь общим решением уравнения Бюргера, рассмотреть эволюцию однополярного импульса, аппроксимируя его на входе  $\delta$  - функцией:  $u_0(t) = A \cdot \delta(t)$ . Ввести для данной задачи число Рейнольдса; обсудить предельные случаи  $\text{Re} \ll 1$  и  $\text{Re} \gg 1$ .

Ответ. Решение имеет вид

$$u(x, \tau) = \frac{2\delta}{\beta} \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta x}} \frac{(e^{\text{Re}} - 1) \cdot e^{-\tau^2/4\delta x}}{1 + \frac{1}{2}(e^{\text{Re}} - 1)[1 + \Phi(\tau/\sqrt{4\delta x})]}, \quad (1)$$

где  $\Phi(\tau) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\tau \exp(-t^2) dt$  - интеграл ошибок, а  $\text{Re} = A\beta/2\delta$ . При  $\text{Re} \ll 1$  результат (1) совпадает с линейным решением 3.1(6). При  $\text{Re} \gg 1$  из (1) следует, что импульс имеет универсальную треугольную форму

$$u(x, \tau) \approx \begin{cases} -\tau/\beta x, & -T < \tau < 0, \\ 0, & \tau \leq -T, \tau > 0. \end{cases} \quad (2)$$

где  $T = \sqrt{2A\beta x}$  - длительность импульса. Для вывода формулы (2) нужно использовать асимптотику функции  $\Phi(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$

3.9. Пусть  $\Pi(x, \tau)$  - некоторое известное решение уравнения Бюргерса, отвечающее условию на границе  $\Pi(x=0, t) = \Pi_0(t)$ . Исследовать взаимодействие этой волны с "линейным профилем" течения (см. 1.9) на основе общего представления решения уравнения Бюргерса (см. 3.6) для граничного условия

$$u(x=0, t) = \gamma t + \Pi_0(t). \quad (1)$$

Проанализировать случаи  $\gamma > 0$  и  $\gamma < 0$ .

Ответ. Нелинейное взаимодействие с "линейным профилем" приводит к изменению характерных амплитуды и частоты, а также темпов эволюции волны  $\Pi(x, \tau)$ . Решение имеет вид

$$u(x, \tau) = \frac{\gamma \tau}{1 - \beta \gamma x} + \frac{1}{1 - \beta \gamma x} \Pi\left(\frac{x}{1 - \beta \gamma x}, \frac{\tau}{1 - \beta \gamma x}\right). \quad (2)$$

При  $\gamma > 0$ ,  $\beta \gamma x \rightarrow 1$  характерные амплитуда и частота волны неограниченно возрастают.

3.10. Используя метод перевала, найти асимптотическое решение уравнения Бюргерса 3.2(2) при больших числах Рейнольдса ( $\delta \rightarrow 0$ ). Дать графическую интерпретацию этого решения.

Решение. В выражение для общего решения 3.6(6) уравнения Бюргерса входят интегралы вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp\left[\frac{1}{2\delta} F(\tau, t, x)\right] dt. \quad (1)$$

При  $\delta \rightarrow 0$  основной вклад в интеграл будут давать окрестности тех точек, где функция  $F$  имеет максимум. Пусть  $t_k$  - одна из таких точек; она находится из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad 0 = \frac{t_k - \tau}{x} - \beta u_0(t_k). \quad (2)$$

В окрестности этой точки функцию  $F$  можно разложить в ряд, ограничившись квадратичными членами

$$F(\tau, t, x) \approx F_k + F_k'' \cdot (t - t_k)^2 / 2, \quad (3)$$

где  $F_k = F(\tau, t_k, x)$ ,  $F_k'' = x^{-1} - \beta u_0'(t_k) < 0$ . Тогда интеграл (I) представляется как сумма вкладов в точках перевала

$$I = \sum_k I_k, \quad I_k = f(t_k) \sqrt{\frac{4\pi\delta}{|F_k''|}} \exp\left(\frac{F_k}{2\delta}\right). \quad (4)$$

При  $\delta \rightarrow 0$  в этой сумме будет превалировать слагаемое, соответствующее абсолютному максимуму функции  $F$ . При этом из общего решения 3.6(6) следует асимптотический результат

$$u(x, \tau) = \frac{t_*(x, \tau) - \tau}{\beta x}, \quad (5)$$

где  $t_*(x, \tau)$  - координата абсолютного максимума функции

$$F(\tau, t, x) = \beta S_0(t) - \frac{(t - \tau)^2}{2x}, \quad S_0(t) = \int^t u_0(t') dt'. \quad (6)$$

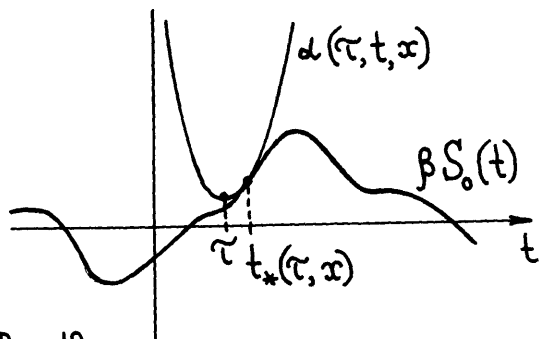


Рис. 12

Процедура отыскания абсолютного максимума допускает наглядную графическую интерпретацию. Очевидно, что координата  $t_*(x, \tau)$  есть первая точка касания функции  $F$  подвижной прямой  $h$ , опускающейся из бесконечности параллельно оси абсцисс  $t$ .

Болез удобно, однако, действовать по-другому, а именно, рассматривать первую точку касания функции  $\beta S_0(t)$  и параболы

$$\alpha(\tau, t, x) = h + \frac{(t - \tau)^2}{2x}, \quad (7)$$

опускающейся сверху (при уменьшении  $h$ ) на функцию  $\varphi S_0(t)$  (см. рис.12).

3.II. Используя полученное в предыдущей задаче асимптотическое решение уравнения Бургерса, проанализировать эволюцию однополярного импульса, аппроксимируя его на входе  $\delta$ -функцией  $u_0(t) = A \cdot \delta(t)$ .

Решение. Для функции  $\varphi S_0(t)$ , определяемой формулой 3.I0(6), имеем  $\varphi S_0 = \varphi A \cdot \Theta(t)$ , где  $\Theta(t)$  - функция Хевисайда-единичного скачка. Графическая процедура отыскания координаты абсолютного максимума в данном случае иллюстрирована на рис.13. Зафиксируем расстояние  $x$ , т.е. ширину параболы

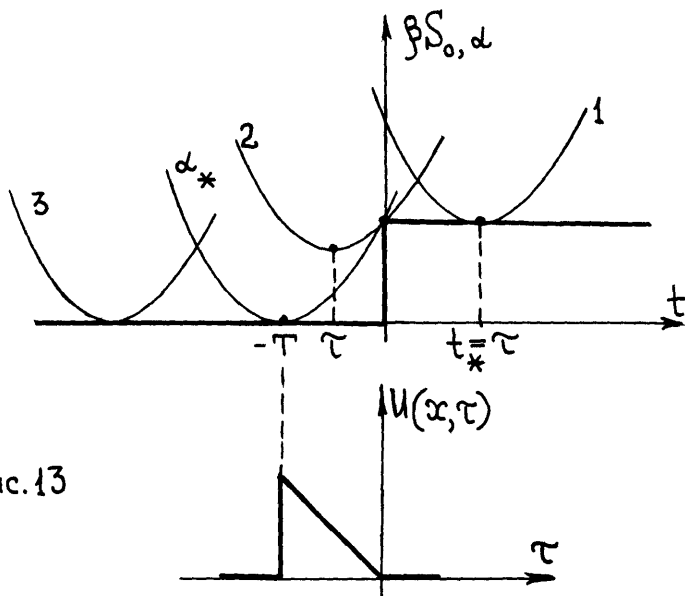


Рис.13

3.I0(7). Если  $\tau > 0$ , то очевидно, что парабола коснется ступеньки своим центром  $t = \tau$ , т.е.  $t_*(x, \tau) = \tau$ ; при этом, согласно 3.I0(5), поле  $U(x, \tau) \equiv 0$  для всех  $\tau > 0$ . При  $\tau < 0$  существует одна критическая парабола  $\alpha_*$ , которая одновременно касается  $\varphi S_0(t)$  в двух точках:  $t = 0$  и  $t = -T$ . Очевидно, что для такого касания  $h = 0$ , а положение  $\alpha_*$  определяется из системы уравнений



$$\alpha_*(\tau, -T, x) = \frac{(-T-\tau)^2}{2x} = 0, \quad \alpha_*(\tau, 0, x) = \frac{\tau^2}{2x} = \beta A.$$

Отсюда следует, что координата вершины этой критической параболы равна

$$-T = - (2\beta Ax)^{1/2}. \quad (1)$$

Если теперь положить  $-T < \tau < 0$ , нетрудно заметить, что парабола 2 на рис. 13 коснется  $\beta S_0(t)$  в точке  $t_* = 0$ . Из 3.10(5) при этом находим  $u(x, \tau) = -\tau/\beta x$ . Наконец, полагая  $\tau < -T$ , т.е. перемещая центр подвижной параболы 3 левее центра критической параболы  $\alpha_*$ , снова получим  $t_* = \tau$ ,  $u \equiv 0$ .

Суммируя сказанное, видим, что асимптотический профиль при больших числах Рейнольдса имеет треугольную форму

$$u(x, \tau) = 0 \quad (\tau < -T, \tau > 0), \quad u = -\tau/\beta x \quad (-T < \tau < 0). \quad (2)$$

Длительность импульса  $T(x)$ , определяемая формулой (1), и пиковое значение возмущения  $u_{\max}(x)$  равны

$$T(x) = (2\beta Ax)^{1/2}, \quad u_{\max}(x) = u(x, \tau = -T) = (2A/\beta x)^{1/2} \quad (3)$$

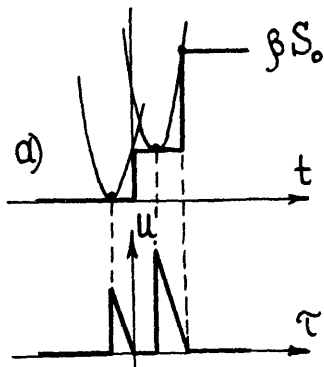
(см. также 3.8). Очевидно, площадь импульса  $u_{\max}(x) \cdot T(x)/2 = A = \text{const}$ .

3.12. Используя графическую процедуру 3.10, исследовать процесс взаимодействия двух однополярных импульсов

$$u_0(t) = A_1 \delta(t) + A_2 \delta(t - t_0). \quad (1)$$

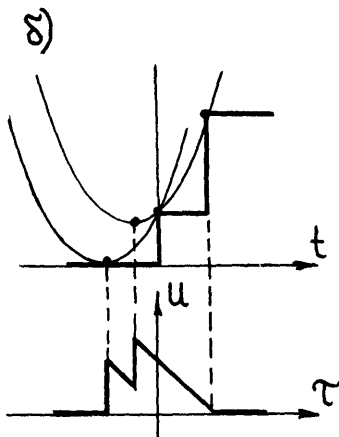
при больших значениях чисел Рейнольдса. Найти асимптотическую форму волны, образующуюся в результате слияния импульсов.

Ответ. Критические параболы  $\alpha_*$  (см. предыдущую задачу) и соответствующие профили импульсов приведены на рис. 14, а, б, в. Напоминаем: с увеличением пройденного расстояния  $x$  параболы уширяются. Координаты разрывов легко находятся из условия двойного касания параболой  $\alpha$  функции  $\beta S_0(t)$  (рис. 14, а, б). Расстояние  $x$ , на котором происходит слияние разрывов,



определяется из условия тройного касания  $\alpha$  и  $\beta S_0(t)$  (рис.14, в). Асимптотическая форма волны - одиночный треугольный импульс 3.II(2) с длительностью  $T = [2\beta(A_1 + A_2)x]^{1/2}$ .

3.13. В условиях предыдущей задачи рассмотреть взаимодействие двух  $\delta$ -импульсов различной полярности. Отдельно разобрать случай  $|A_1| = |A_2|$ .



3.14. Усовершенствовать решение 2.I4(I) для одного периода пилообразной волны, приняв во внимание, что в диссипативной среде для больших чисел Рейнольдса ударный фронт имеет малую, но конечную ширину и описывается выражением 3.4(I).

Решение. Нужно заменить ступенчатую функцию  $\text{sgn } \tau$  на  $\text{th}[\beta u_p(x)\tau/2\delta]$ . В аргументе гиперболического тангенса необходимо учесть, что разрыв уменьшается по величине вследствие нелинейного затухания как  $u_p(x)/u_0 = \pi/(1+x)$  (см.2.I3); соответственно увеличивается ширина фронта. Таким образом, формула 2.I4(I) примет вид

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{1+x} \left[ -\omega\tau + \pi \text{th} \left( \frac{\pi}{1+x} \frac{\beta u_0}{2\delta} \tau \right) \right]; \quad (1)$$

$$-\pi < \omega\tau < \pi, \quad \text{Re} \gg 1$$

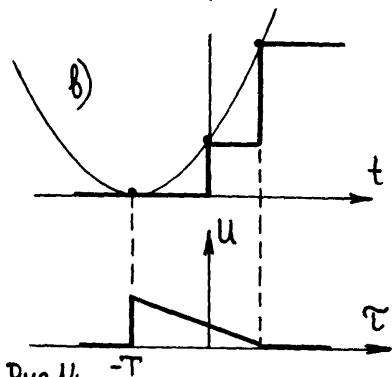


Рис.14

Подставляя выражение (I) в уравнение Бургерса 3.2(2), видим, что оно есть точное решение этого уравнения (решение Хохлова).

3.15. Разложить решение Хохлова в ряд Фурье, рассчитать амплитуды гармоник и проанализировать их поведение на больших расстояниях.

Ответ. Разложение в ряд (решение Фей) имеет вид

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left( \frac{\omega \delta}{u_0 \beta} \right) \cdot \text{sh}^{-1} \left[ n(1+z) \left( \frac{\omega \delta}{u_0 \beta} \right) \right] \cdot \sin(n\omega\tau). \quad (I)$$

Оно хорошо описывает спектр гармонической (на входе  $z=0$ ) волны для больших  $Re$  в той области, где фронт стабилизируется, т.е. нелинейное укрупнение и диссипативное сглаживание профили уравновешивают друг друга. Амплитуда гармоник при  $(\omega\delta/u_0\beta)z \gg 1$  в решении Фей уменьшается примерно по закону  $\exp(-n\delta\omega^2x)$  — медленнее, чем по линейной теории ( $\sim \exp(-n^2\delta\omega^2x)$ ); это связано с подкачкой энергии от низших гармоник к высшим. На расстояниях  $(\delta\omega/u_0\beta)z \gg 2$  или  $\delta\omega^2x \gg 2$  в решении Фей главным становится первый член ряда (I), и волна принимает вид

$$u = \frac{4\delta\omega}{\beta} \cdot e^{-\delta\omega^2x} \cdot \sin \omega\tau = u_{\max}(x) \cdot \sin \omega\tau. \quad (2)$$

Формула (2) совпадает с 3.7(I) и описывает эффект "насыщения": как сильно ни увеличивать амплитуду  $u_0$  на входе в нелинейную среду, на расстояния свыше двух длин линейного затухания  $x \gg 2/\delta\omega^2 = 2x_z$  невозможно передать волну с амплитудой, большей

$$u_{\max} = \frac{4\delta\omega}{\beta} e^{-\delta\omega^2x} = \frac{2\beta\omega}{\varepsilon c_0 \rho_0} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{2c_0^3\rho_0}x\right). \quad (3)$$

3.16. В условиях задач: а) 2.7, б) 2.8 оценить диссипативную длину  $x_z = 1/\delta\omega^2 = 2c_0^3\rho_0/\beta\omega^2$  и найти максимальную

интенсивность волны, которая может быть передана на расстояние  $2x_z$ . Принять для воды  $\delta = 0,6 \cdot 10^{-17} \text{ с}^2/\text{см}$

Ответ. а)  $x_z \approx 42 \text{ м}$ ,  $I_{\text{max}} \approx 10^{-4} \text{ Вт/см}^2$ , б)  $x_z \approx 1 \text{ км}$ ,  $I_{\text{max}} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/см}^2$ .

#### § 4. Сферические и цилиндрические волны Нелинейные пучки

4.1. Рассмотрим сходящиеся сферически-симметричные волны в линейном приближении. Исходная форма возмущения  $u_0(t)$  задана на сферической поверхности радиуса  $r_0 \gg \lambda$  (где  $\lambda$  - характерная длина волны). Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля (1.5), упростить линейное волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (1)$$

Решение. Переходя к сопровождающей системе координат  $\tau = t + (r - r_0)/c_0$ ,  $r = r_0 + r$  и пренебрегая малыми членами  $\sim r^2$ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{c_0}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Отношение третьего члена к первому в уравнении (2) есть величина порядка  $c_0/r\omega_0 \sim \lambda/r$ . Следовательно, третий член мал всюду, за исключением малой окрестности фокуса  $r = 0$  размером порядка длины волны  $\lambda$ . Отбрасывая третий член в (2), приходим вместо (1) к упрощенному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{r} = 0. \quad (3)$$

Его решение в виде сходящейся волны ( $r$  уменьшается от  $r_0$  до 0):

$$u(r, \tau) = \frac{1}{r} u_0 \left( \tau = t + \frac{r - r_0}{c_0} \right) \quad (4)$$

неограниченно растет по мере приближения к фокусу  $r = 0$ .

4.2. Получить аналог уравнения Бюргера 3.2(2) для сходящихся сферически-симметричных волн, обобщая упрощенное уравнение 4.1(3) по аналогии с задачей 3.2. Считать, что нелинейные и диссипативные эффекты медленно искажают профиль волны.

Ответ.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{\tau} - \vartheta u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь, как и в задаче 3.2,  $\vartheta = \varepsilon/c_0^2$ ,  $\delta = b/2c_0^3 \vartheta_0$ .

4.3. Преобразовать уравнение Бюргера 4.2(1) для сферически-симметричных волн с помощью замены переменных

$$U = -\frac{u}{u_0} \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \Theta = \omega \tau, \quad \xi = \vartheta \omega u_0 \tau_0 \ln \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (1)$$

Сравнив с 3.2(4), указать, какой смысл имеет полученное уравнение.

Ответ.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = U \frac{\partial U}{\partial \Theta} + \Gamma \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\Gamma = \delta \omega / \vartheta u_0$  - обратное число Рейнольдса (см. 3.2(5)),  $\tau_0 = \vartheta \omega u_0 \tau_0$  - безразмерный исходный радиус фронта волны. Видно, что использование уравнения (2) сводит задачу о распространении сферических возмущений к задаче о плоских волнах в эквивалентной среде, диссипативные характеристики которой экспоненциально убывают с увеличением пройденного расстояния (с ростом  $\xi$  от 0 до  $\infty$ ).

4.4. Получить аналог уравнения Бюргера для сходящихся цилиндрически-симметричных волн. Действовать по аналогии с задачами 4.1, 4.2.

Ответ.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{2\tau} - \vartheta u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1)$$

Обозначения здесь такие же, как в 4.2(1).

4.5. Преобразовать уравнение 4.4(I) с помощью замены переменных

$$U = -\frac{u}{u_0} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}, \quad \Theta = \omega\tau, \quad \xi = 2\beta\omega u_0 \tau_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}\right). \quad (1)$$

Указать смысл полученного уравнения (так, как это сделано в 4.3).

Ответ.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = U \frac{\partial U}{\partial \Theta} + \Gamma \left(1 - \frac{\xi}{2\tau_0}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2}. \quad (2)$$

Видим, что уравнение (2) эквивалентно уравнению Бюргера для плоских волн в среде, диссипативные характеристики которой убывают по линейному закону при изменении  $\tau$  от  $\tau_0$  до 0 (при этом  $\xi$  возрастает от 0 до  $2\tau_0$ , где  $\tau_0 = \beta\omega u_0 \tau_0$  - безразмерный исходный радиус фронта).

4.6. Найти расстояние, которое необходимо пройти исходной гармонической сферически-симметричной волне в среде без диссипации, чтобы в ее профиле образовались разрывы. Рассмотреть а) сходящиеся и б) расходящиеся волны.

Решение. Поскольку при  $\Gamma = 0$  уравнение 4.3(3) совпадает с обычным уравнением простых волн, координату образования разрыва  $\tau_p$  в исходной гармонической волне нужно находить из условия  $\xi = \beta\omega u_0 \tau_0 |\ln(\tau_0/\tau_p)| = 1$  (см.2.4). Здесь случай  $\tau_0 < \tau_p < \infty$  соответствует расходящейся волне, а  $0 < \tau_p < \tau_0$  - волне, сходящейся к фокусу  $\tau = 0$ . Расстояние  $|\tau_p - \tau_0|$ , которое должна пройти волна, чтобы стать разрывной, равно

а)  $|\tau_p - \tau_0| = \tau_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\beta\omega u_0 \tau_0}\right)\right], \quad (1)$

б)  $|\tau_p - \tau_0| = \tau_0 \left[\exp\left(\frac{1}{\beta\omega u_0 \tau_0}\right) - 1\right]. \quad (2)$

Видно, что для сходящихся волн (1) выполняется неравенство  $|\tau_p - \tau_0| < (\beta\omega u_0)^{-1}$ , т.е. разрыв образуется на меньших рас-

стояниях, чем в плоской волне. Напротив, из формулы (2) следует  $|\tau_p - \tau_0| > (\beta \omega u_0)^{-1}$ , т.е. для образования разрыва расходящейся волне нужно пройти большее расстояние. Изменение темпов накопления нелинейных искажений связано с тем, что в сходящихся сферических волнах амплитуда возрастает при уменьшении  $\tau$  (от  $\tau_0$  до 0), а в расходящихся - убывает (когда  $\tau$  увеличивается от  $\tau_0$  до  $\infty$ ).

4.7. Определить, всегда ли может образоваться разрыв в сходящейся первоначально гармонической волне, распространяющейся в среде без диссипации.

Решение. В цилиндрической сходящейся волне условие образования разрыва, согласно 4.5(I), имеет вид

$$\xi = 2\beta\omega u_0 \tau_0 (1 - \sqrt{\tau/\tau_0}) = 1. \quad (I)$$

Поскольку  $0 < \tau < \tau_0$ , максимальное значение  $\xi$  достигается при  $\tau = 0$  и равно  $2\beta\omega u_0 \tau_0$ . Если параметры на излучающей цилиндрической поверхности выбраны так, что  $\beta\omega u_0 \tau_0 < 1/2$ , условие (I) не может быть реализовано ни при каких  $\tau$  и разрыв при сходимости к фокусу  $\tau = 0$  не образуется.

Для сферической волны условие (I) имеет вид (см. 4.2(2)):

$$\xi = \beta\omega u_0 \tau_0 \ln\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right) = 1.$$

Здесь ситуация обратная: какой бы малой ни была комбинация параметров  $\beta\omega u_0 \tau_0$  на излучающей поверхности, найдется столь малое  $\tau$  вблизи фокуса  $\tau = 0$ , где разрыв все же образуется.

4.8. Обобщить решение Хохлова 3.14(I) на сферические волны и проанализировать процесс формирования ударного фронта в сходящейся волне с учетом влияния диссипации.

Решение. Используя обозначения задачи 4.3 и сопоставляя обычное 3.2(4) и "сферическое" 4.3(2) уравнения Бюргерса, приходим к выражению для профиля одного периода сферической сходящейся волны:

$$U = \frac{1}{1+\xi} \left[ -\theta + \sigma \cdot \text{th} \left( \frac{\sigma}{1+\xi} \frac{\theta}{2\Gamma} e^{\xi/z_0} \right) \right]. \quad (1)$$

Ширина ударного фронта определяется из аргумента гиперболического тангенса:

$$\Delta \theta_{\phi} = \frac{2\Gamma}{\sigma} (1+\xi) \exp\left(-\frac{\xi}{z_0}\right) = \frac{2\Gamma}{\sigma} (1+z_0 \ln \frac{\tau_0}{\tau}) \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (2)$$

Как следует из анализа выражения (2), при  $z_0 = \xi \omega u_0 \tau_0 > 1$  функция  $\Delta \theta_{\phi}(\tau)$  имеет максимум. Это означает, что при  $z_0 > 1$  наблюдается явление двукратного формирования ударного фронта. Вначале узкий фронт начинает расширяться из-за диссипации. Его ширина достигает максимального значения  $(2\Gamma/\sigma) z_0 \exp(1/z_0 - 1)$  в точке  $\tau = \tau_0 \exp(1/z_0 - 1)$ . Затем вновь усиливается действие нелинейности и ширина фронта стремится к нулю при схождении волны к фокусу [10].

4.9. Пользуясь квазиоптическим приближением теории дифракции и методом медленно изменяющегося профиля 1.5, вывести упрощенное уравнение для волновых пучков в линейном приближении.

Решение. Исходим из линейного волнового уравнения, записанного в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси пучка  $z$ . В квазиоптическом приближении обычно рассматривают гармонический сигнал. При этом полагают, что амплитуда волны изменяется медленно как вдоль оси  $x$  ( $\sim \sqrt{\mu} x$ ), так и поперек пучка ( $\sim \sqrt{\mu} y, \sim \sqrt{\mu} z$ )

$$u = \exp(-i\omega t + i\omega x/c_0) \cdot A(x_1 = \sqrt{\mu} x, y_1 = \sqrt{\mu} y, z_1 = \sqrt{\mu} z). \quad (2)$$

Если рассматриваются широкополосные сигналы или распространение в нелинейной среде, где спектр сигнала обогащается гармониками, то волну нельзя считать гармонической. Нужно предположить, что ее профиль и спектр медленно изменяются при распространении.

Формулу (2) следует обобщить:



$$u = u(\tau = t - x/c_0, x_1 = \mu x, y_1 = \sqrt{\mu} y, z_1 = \sqrt{\mu} z). \quad (3)$$

Подставляем (3) в (1). Члены порядка  $\mu^0$  взаимно уничтожаются, а членами  $\sim \mu^2$  мы пренебрегаем. В результате все сохранные члены имеют один и тот же порядок малости  $\mu^1$ . Эти члены образуют упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Для гармонических сигналов  $u = A \cdot \exp(-i\omega\tau)$  из (4) следует известное параболическое уравнение теории дифракции

$$-2ik \frac{\partial A}{\partial x} = \Delta_{\perp} A, \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \quad (5)$$

4.10. Используя метод предыдущей задачи, вывести упрощенное уравнение Хохлова-Заболотской из нелинейного волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon}{c_0^3} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Решение. В предположении медленности изменения профиля волны и формы пучка 4.9(3) получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u.$$

Это уравнение Хохлова-Заболотской. Если пренебречь зависимостью от поперечных координат ( $\Delta_{\perp} u = 0$ ), (2) переходит в уравнение простых волн 1.5(3). Если пренебречь нелинейностью ( $\epsilon = 0$ ), (2) переходит в уравнение 4.9(4) линейной теории дифракции. Таким образом, уравнение (2) описывает волну при одновременном учете нелинейных и дифракционных эффектов.

Более строгий вывод (2) из уравнений гидродинамики приведен в книгах [5, 7].

4.11. Действуя по аналогии с задачей 3.2, получить выражение для безразмерного комплекса параметров - числа  $N$ ,

позволяющего оценить относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов в искажении волны.

Решение. Пусть на входе  $x=0$  сигнал описывается функцией

$$u(x=0, t) = u_0 f(\vec{r}/a) \cdot \Phi(\omega t). \quad (1)$$

Здесь  $\vec{r} = \{y, z\}$  - координаты в поперечном сечении пучка,  $a$  - характерная ширина пучка;  $u_0, \omega$  - характерные амплитуда и частота. Имея в виду (1), перейдем к безразмерным переменным вида 3.2(3)

$$V = \frac{u}{u_0}, \quad \theta = \omega \tau, \quad z = \beta \omega u_0 x = \frac{x}{x_p}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{r}}{a}. \quad (2)$$

Уравнение 4.10(2) сведется к форме

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta_{\perp}$  - оператор Лапласа по нормированным координатам  $\vec{R}$ . Единственный комплекс параметров, входящий в уравнение (3), это число

$$N = \frac{2c_0^3}{\epsilon \omega^2 a^2 u_0} = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon M} \left( \frac{\lambda}{a} \right)^2. \quad (4)$$

Можно записать  $N$  как отношение нелинейной и дифракционной длин:

$$N = \frac{x_p}{x_d} = \frac{c_0^3}{\epsilon \omega u_0} : \frac{\omega a^2}{2c_0}. \quad (5)$$

Отсюда ясно, что при  $N \ll 1$  преобладает нелинейность, а при  $N \gg 1$  - дифракция.

4.12. Рассчитать в линейном приближении изменение характеристик круглого гауссова пучка гармонических волн

$$u(x=0, \tau, t) = u_0 \exp(-\tau^2/a^2) \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

вследствие дифракции.

Решение. Для пучков с круглым поперечным сечением уравнение 4.9(4) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right). \quad (2)$$

Решение (2) с граничным условием (I) можно получить методом разделения переменных или методом интегральных преобразований. Можно также проверить непосредственной подстановкой, что решение (2) имеет вид [6]

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{1 + x^2/x_d^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau^2}{a^2} \frac{1}{1 + x^2/x_d^2}\right) \times \sin\left(\omega\tau + \operatorname{arctg} \frac{x}{x_d} - \frac{\tau^2}{a^2} \frac{x/x_d}{1 + x^2/x_d^2}\right), \quad (3)$$

здесь  $x_d = \omega a^2 / 2c_0$  - характерная дифракционная длина. Решение (3) описывает превращение исходной плоской волны в сферически расходящуюся. Амплитуда на оси пучка уменьшается по закону

$$u_{\max} = u_0 \left(1 + x^2/x_d^2\right)^{-1/2}. \quad (4)$$

При  $x \gg x_d$  амплитуда убывает как  $u_{\max} \approx u_0 x_d/x$  - по закону  $\sim x^{-1}$  сферически расходящейся волны. Ширина пучка растет:

$$a(x) = a \left(1 + x^2/x_d^2\right)^{1/2}. \quad (5)$$

При  $x \gg x_d$   $a(x) \approx a x/x_d$  - ширина увеличивается с ростом  $x$  линейно, и все излучение локализуется в конусе с углом при вершине  $\Delta \theta \approx 2 \cdot a(x)/x \approx 2a/x_d = 4c_0/\omega a$ . Заметим также, что фаза волны на оси пучка приобретает фазовый сдвиг  $\operatorname{arctg}(x/x_d)$ . Это означает, что скорость распространения волны на оси пучка несколько выше, чем плоской волны той же частоты.

При увеличении частоты  $\omega$  исходного сигнала (I) процесс дифракции ослабевает и все отмеченные явления проявляются на больших расстояниях.

4.13. Пользуясь решением (3) предыдущей задачи, показать, что широкополосный сигнал (импульс) изменяет свою форму в даль-

ней зоне ( $x \gg x_d$ ) . Дифракция приводит к дифференцированию формы профиля на оси пучка.

Решение. Каждая из гармоник исходного сигнала описывается выражением (3), которое при  $x \gg x_d$  ,  $\tau = 0$  принимает вид

$$u \approx u_0(\omega) \frac{x_d}{x} \cdot \sin\left(\omega\tau + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega a^2}{2c_0 x} u_0(\omega) \cdot \cos \omega\tau. \quad (1)$$

Форма сигнала определяется суммой всех гармоник (1)

$$u = \frac{a^2}{2c_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega) \omega \cdot \cos \omega\tau \cdot d\omega = \frac{a^2}{2c_0 x} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega) \sin \omega\tau \cdot d\omega. \quad (2)$$

Последний интеграл есть исходная форма импульса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega) \cdot \sin \omega\tau \cdot d\omega = u(x=0, \tau). \quad (3)$$

Сравнивая (3) и (2), находим

$$u(x \gg x_d, \tau) = \frac{a^2}{2c_0 x} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} u(x=0, \tau) \quad (4)$$

- сигнал в дальней зоне дифференцируется.

4.14. Показать, что области сжатия и разрежения нелинейной дифрагирующей волны искажены неодинаково и профиль исходного гармонического сигнала при распространении становится несимметричным. Воспользоваться тем фактом, что разные гармоники из-за дифракции оказываются сдвинутыми по фазе друг относительно друга.

Решение. Для качественного ответа на вопрос представим профиль волны приближенно как сумму только первой и второй гармоник

$$u = A_1(x) \cdot \sin[\omega\tau + \varphi_1(x)] + A_2(x) \cdot \sin[2\omega\tau + \varphi_2(x)].$$

Очевидно, что вторая гармоника, рождающаяся в среде, имеет амплитуду  $A_2$  , малую по сравнению с  $A_1$  . Поскольку частота гармоники более высокая, дифракционный фазовый сдвиг  $\varphi_2$  для нее меньше, чем  $\varphi_1$  (см. 4.12). С учетом этих фактов графическое сложение двух синусоид (1) действительно дает несимметричный

профиль (рис.15). Видно, что область сжатия укорочена по длине и заострена, область разрежения - растянута и сглажена. Гармоники интерферируют так, что положительное пиковое значение возмущения превышает свое исходное (при  $x=0$ ) значение.

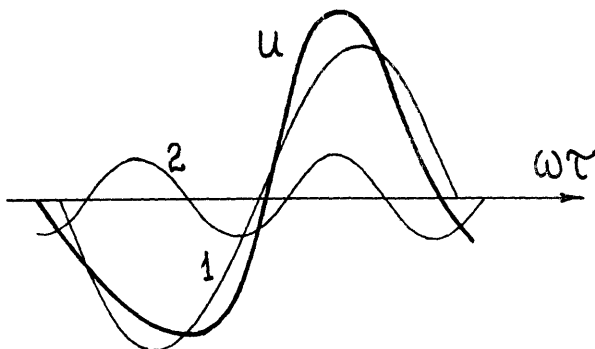


Рис. 15

4.15. Пользуясь модельным уравнением 4.10(1) и методом последовательных приближений, рассчитать амплитуду волны разностной частоты  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ , возбуждаемой в нелинейной среде при взаимодействии двух затухающих недифрагирующих высокочастотных волн с близкими частотами  $\omega_1, \omega_2$ :

$$u^{(1)} = f(y, z) e^{-\frac{x}{x_y}} \left[ A_1 e^{-i\omega_1(t - \frac{x}{c_0})} + A_2 e^{-i\omega_2(t - \frac{x}{c_0})} \right] + \text{к.с.} \quad (1)$$

Здесь  $x_y$  - характерная длина затухания волн  $\omega_1, \omega_2$ ; функция  $f(y, z)$  описывает поперечную структуру пучка этих волн.

Решение. Используя (1) в качестве первого приближения, для нахождения второго приближения получим из 4.10(1) следующее уравнение

$$\Delta u^{(2)} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon}{c_0^3} \frac{\partial^2 u^{(1)2}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Правая часть (2), описывая нелинейные источники на разностной частоте  $\Omega$ , с учетом (1) примет вид

$$q(x, y, z) e^{-i\Omega t} + \text{к.с.}, \quad q = \frac{2\varepsilon}{c_0^3} \Omega^2 A_1 A_2 f^2(y, z) e^{-\frac{2ix}{z} + i\frac{\Omega}{c_0} z} + \text{к.с.} \quad (3)$$

Отыскивая решение (2) в виде  $u^{(2)} = A_- \exp(-i\Omega t)$ , для амплитуды  $A_-$  волны разностной частоты получим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta A_- + K^2 A_- = q, \quad K = \Omega/c_0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения

$$A_-(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V q(\vec{R}_1) \frac{e^{iK\tau}}{\tau} dV_1, \quad \tau = |\vec{R} - \vec{R}_1|. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{R} = \{x, y, z\}$  - радиус - вектор точки наблюдения,  $\vec{R}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$  - радиус - вектор текущей точки объема  $V$ , занятого областью пересечения взаимодействующих волн  $\omega_1, \omega_2$ .

В дальней зоне дифракции, где  $|\vec{R}| \gg |\vec{R}_1|$ , можно приближенно положить

$$\tau = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{R}_1 + R_1^2} \approx R(1 - \vec{R}\vec{R}_1/R^2) = R - (xx_1 + yy_1 + zz_1)/R. \quad (6)$$

Подставляя выражения (3), (6) в интеграл (5), приведем его к виду

$$A_- \approx -\frac{\varepsilon \Omega^2}{2\pi c_0^3} A_1 A_2 \frac{e^{iKR}}{R} \mathcal{D}_t \mathcal{D}_e. \quad (7)$$

Наибольший интерес представляет структура выражений  $\mathcal{D}_t$ ,  $\mathcal{D}_e$ , определяющих направленность излучения, которая связана с поперечным

$$\mathcal{D}_t = \iint_{-\infty}^{\infty} f^2(y, z) e^{-i\frac{K}{R}(yy_1 + zz_1)} dy_1 dz_1 \quad (8)$$

и продольным (вдоль оси  $x$ ) 61

$$D_e = \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{2x_1}{x_3} + iK \left(1 - \frac{x}{R}\right) x_1 \right] dx_1 \quad (9)$$

распределением первичного поля  $U^{(1)}$  (I). Интеграл (8) представляет собой разложение в угловой спектр функции  $f^2(y, z)$ ; он имеет такой же вид, как если бы волна  $\Omega$  непосредственно излучалась источником высокочастотных волн  $\omega_1, \omega_2$ . Интеграл (9) более интересен; он описывает направленность излучения волны  $\Omega$ , возбуждаемой распределенными в пространстве нелинейными источниками

$$D_e = \left[ \frac{2}{x_3} - iK \left(1 - \frac{x}{R}\right) \right]^{-1}, \quad |D_e| = \frac{x_3}{2} \left[ 1 + (Kx_3)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{1/2} \quad (10)$$

В формуле (10) использовано соотношение  $1 - x/R = 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ;  $\theta$  - угол между осью пучка  $x$  и направлением на точку наблюдения.

Когда  $Kx_3 \gg 1$  (вдоль области взаимодействия укладывается много длин волн разностной частоты), излучение направлено под малыми углами к оси. Характерная угловая ширина диаграммы направленности, как следует из (10), равна

$$\Delta \theta_e \sim (Kx_3)^{-1/2} \sim (\Lambda/x_3)^{1/2} \quad (11)$$

Ширина диаграммы (11), определяемая продольным распределением поля  $U^{(1)}$ , как правило, много меньше ширины, определяемой поперечным распределением (8). Именно (11) определяет узкую направленность низкочастотного излучения.

## § 5. Акустические шумы большой интенсивности

5.1. Пренебрегая флуктуациями частоты, найти вероятностное распределение и среднее для длины образования разрыва плоской квазимонохроматической волны, считая известным вероятностное распределение амплитуды  $W_a(\alpha)$ .

Решение. Из результатов задачи 2.4 следует, что длина образования разрыва  $x_p$  плоской монохроматической волны равна

$x_p = c_0^2 / \varepsilon \omega a$ , где  $\omega$  - частота,  $a$  - амплитуда волны. Эту же формулу можно применить и для квазимонохроматической волны, когда амплитуда и частота мало меняются на периоде волны. Таким образом, задача сводится к нелинейному преобразованию

$$x_p = f(a). \quad (1)$$

Если обратная функция  $a = f^{-1}(x_p)$  однозначна, то вероятностное распределение  $W_x(x_p)$  связано с  $W_a(a)$  соотношением

$$W_x(x_p) = W_a[f^{-1}(x_p)] \cdot \left| df^{-1}(x_p)/dx_p \right|. \quad (2)$$

Для моментов величины  $x_p$  справедливо

$$\langle x_p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(a) \cdot W(a) da. \quad (3)$$

Для вероятностного распределения длины образования разрыва и её среднего получаем соответственно

$$W_x(x_p) = W_a(c_0^2 / \varepsilon \omega x_p) \cdot (c_0^2 / \varepsilon \omega x_p^2), \quad (4)$$

$$\langle x_p \rangle = (c_0^2 / \varepsilon \omega) \int_0^{\infty} W_a(a) \cdot a^{-1} da.$$

5.2. В условиях задачи 5.1. проанализировать два случая:

а) амплитуда сигнала распределена равномерно в интервале  $[a_1, a_2]$ ; б) входной сигнал гауссов с дисперсией  $\sigma^2$ . Использовать, что вероятностное распределение амплитуды гауссового сигнала имеет рэлеевское распределение

$$W_a(a) = (a/\sigma^2) \cdot \exp(-a^2/2\sigma^2). \quad (1)$$

Ответ. Для вероятностного распределения длины образования разрыва и её среднего соответственно имеем из 5.1(4):

$$a) \quad W_x(x_p) = \begin{cases} c_0^2 / (a_2 - a_1) \varepsilon \omega x_p^2, & x_p \in [c_0^2 / \varepsilon \omega a_2, c_0^2 / \varepsilon \omega a_1], \\ 0, & x_p \notin [c_0^2 / \varepsilon \omega a_2, c_0^2 / \varepsilon \omega a_1], \end{cases}$$



$$\langle x_p \rangle = \frac{c_0^2}{(a_2 - a_1)\epsilon\omega} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

б)

$$W_x(x_p) = \frac{c_0^4}{\epsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x_p^3} \exp\left(-\frac{c_0^4}{2\epsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x_p^2}\right),$$

$$\langle x_p \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c_0^2}{\epsilon \omega \sigma}.$$

5.3. Найти вероятностное распределение амплитуды разрыва квазимонохроматической волны

$$u_0(\tau) = a \cdot \sin(\omega\tau + \varphi),$$

считая, что входной сигнал гауссов. Флуктуациями частоты пренебречь.

Решение. амплитуда разрыва  $u_p$  определяется из уравнения (см. задачу 2.13)

$$\arcsin \frac{u_p}{a} = \frac{\epsilon}{c_0^2} \omega u_p x. \quad (2)$$

Используя формулу 5.1(2) и учитывая, что при  $a < c_0^2/\epsilon\omega x$  разрывы не образуются (формально, их амплитуда равна нулю) для вероятностного распределения амплитуды разрыва  $W_u(u_p)$  имеем

$$W_u(u_p) = \delta(u_p) \cdot \int_0^{c_0^2/\epsilon\omega x} W_a(a) \cdot da + \\ + W_a \left[ \frac{u_p}{\sin(\epsilon c_0^2 \omega u_p x)} \right] \cdot \frac{d}{du_p} \left[ \frac{u_p}{\sin(\epsilon c_0^2 \omega u_p x)} \right]. \quad (3)$$

Для гауссова входного сигнала, когда амплитуда распределена по рэлеевскому закону 5.2(I), из (3) получаем

$$W_u(u_p) = \delta(u_p) \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{c_0^4}{2\epsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x^2}\right) \right] + \\ + \exp\left[-\frac{u_p^2}{2\sigma^2 \cdot \sin^2(\epsilon c_0^2 \omega u_p x)}\right] \cdot \frac{1}{2\sigma^2} \frac{d}{du_p} \left[ \frac{u_p}{\sin(\epsilon c_0^2 \omega u_p x)} \right]^2. \quad (4)$$

5.4. Найти среднее в единицу времени число разрывов  $\bar{n}$  на расстоянии  $x$  от входа для квазимонохроматического гауссова входного сигнала. Использовать результаты предыдущей задачи.

Ответ.

$$\bar{n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{c_0^2/\varepsilon\omega x}^{\infty} W_a(\alpha) d\alpha = \frac{\omega}{2\pi} e^{-1/2z^2}, \quad z = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega^2 x.$$

5.5. На начальной стадии проявления нелинейных эффектов (расстояния  $x/x_p \ll 1$ ) для амплитуд высших гармоник простой волны справедливы следующие выражения (см. задачу I.13)

$$A_n(x) = a^n \left[ n \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x \right]^{n-1} / 2^{n-1} \cdot n! \quad (1)$$

Считая, что на входе заданы регулярный монохроматический сигнал амплитуды  $a_0$  и гауссов квазимонохроматический сигнал с дисперсией  $\sigma^2$ , такие, что интенсивность у них одинакова ( $\sigma^2 = a_0^2/2$ ), сравнить интенсивности высших гармоник шумового - ( $\langle A_n^2 \rangle / 2$ ) и регулярного - ( $\overline{A_n^2} / 2$ ) сигналов.

Ответ.

$$\langle A_n^2 \rangle / \overline{A_n^2} = n!$$

5.6. Найти корреляционную функцию и спектр простой волны на начальной стадии, ограничиваясь первым приближением в решении уравнения простой волны методом возмущений. Считать, что входной сигнал стационарен, гауссов, с нулевым средним, с корреляционной функцией  $B_0(\rho)$  и спектром  $S_0(\omega)$ .

Решение. В первом приближении решение уравнения простой волны I.5(3) можно представить в виде

$$u(x, \tau) = u_0(\tau) + u_1(x, \tau), \quad (1)$$

$$u_1(x, \tau) = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} x \frac{d}{d\tau} y(\tau), \quad y(\tau) \equiv u_0^2(\tau), \quad (2)$$

т.е. связь  $u_1$  и  $u_0$  представляет последовательность квадратичного детектора и дифференцирующей цепочки. Для корреляционной функции  $y(\tau)$  при гауссовом входном сигнале имеем

$$K_y(\varrho) = \langle y(\tau) \cdot y(\tau + \varrho) \rangle = B_0^2(0) + 2B_0^2(\varrho). \quad (3)$$

С учетом связи процесса и его производной для корреляционной функции простой волны получаем

$$B_u(x, \varrho) = \langle u(x, \tau) u(x, \tau + \varrho) \rangle = B_0(\varrho) - \frac{\varepsilon^2 x^2}{2c_0^4} \frac{d^2}{d\varrho^2} B_0^2(\varrho). \quad (4)$$

Так как возведению в квадрат корреляционной функции соответствует свертка спектров, то для спектра простой волны из (4) следует

$$g_u(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_u(x, \varrho) e^{i\omega\varrho} d\varrho = S_0(\omega) + \frac{\varepsilon^2 x^2 \omega^2}{2c_0^4} \cdot S_0(\omega) \otimes S_0(\omega), \quad (5)$$

$$S_0 \otimes S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega - \Omega) \cdot S_0(\Omega) d\Omega. \quad (6)$$

**5.7.** Найти спектр простой волны на начальной стадии для гауссова входного сигнала в случаях: а - широкополосного шума с корреляционной функцией  $B_0(\varrho) = \sigma^2 \exp[-\Delta^2 \varrho^2 / 2]$ ; б - узкополосного шума с  $B_0(\varrho) = \sigma^2 \exp[-\Delta^2 \varrho^2 / 2] \cdot \cos \omega_0 \varrho$  ( $\omega_0 \gg \Delta$ ). Проанализировать, где возникают новые спектральные компоненты.

Ответ. Используя результаты предыдущей задачи, получаем

$$а) S_u(x, \omega) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \left( e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta^2}} + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x^2}{2\sqrt{2} \cdot c_0^4} e^{-\frac{\omega^2}{4\Delta^2}} \right).$$

Нелинейное взаимодействие приводит к уширению спектра

$$б) S_u(x, \omega) = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{2\pi\Delta^2}} \left[ e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta^2}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2\Delta^2}} + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x^2}{4\sqrt{2} \cdot c_0^4} \left( 2e^{-\frac{\omega^2}{4\Delta^2}} + e^{-\frac{(\omega - 2\omega_0)^2}{4\Delta^2}} + e^{-\frac{(\omega + 2\omega_0)^2}{4\Delta^2}} \right) \right].$$

Новые спектральные компоненты возникают вблизи нулевой и вблизи

удвоенной частоты  $\omega = 2\omega_0$ .

5.8. Найти усредненную по времени корреляционную функцию простой волны на начальной стадии для входного квазимонохроматического сигнала с гауссовыми фазовыми флуктуациями

$$u_0(\tau) = a_0 \cdot \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\tau)], \quad (1)$$

считая известной структурную функцию флуктуаций фазы

$$D_\varphi(\varrho) = \langle [\varphi(\tau + \varrho) - \varphi(\tau)]^2 \rangle. \quad (2)$$

Описать качественно спектральный состав волны.

Ответ.

$$K_u(x, \varrho) = \frac{a_0^2}{2} \cdot \cos \omega_0 \varrho \cdot e^{-\frac{D_\varphi(\varrho)}{2}} - \frac{\varepsilon^2 a_0^4 x^2}{32 \cdot c_0^4} \frac{d^2}{d\varrho^2} \cos 2\omega_0 \varrho \cdot e^{-2D_\varphi(\varrho)}, \quad (3)$$

или, учитывая медленность флуктуации фазы,

$$K_u(x, \varrho) \approx \frac{a_0^2}{2} \cdot \cos \omega_0 \varrho \cdot e^{-\frac{D_\varphi(\varrho)}{2}} + \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2 a_0^4 x^2}{8 \cdot c_0^4} \cdot \cos 2\omega_0 \varrho \cdot e^{-2D_\varphi(\varrho)}. \quad (4)$$

Нелинейное взаимодействие в данном случае приводит к появлению спектральных составляющих вблизи удвоенной гармоника сигнала.

5.9. В условиях задачи 5.8 найти спектр простой волны на начальной стадии для сигнала с ограниченными и малыми фазовыми флуктуациями ( $D_\varphi(\varrho) = 2[\varepsilon_\varphi^2 - B_\varphi(\varrho)]$ ,  $\varepsilon_\varphi^2 \ll 1$ ), считая известным их спектр  $g_\varphi(\omega)$ .

Ответ.

$$g_u(\omega, x) = \frac{a_0^2}{4} \left[ (1 - \varepsilon_\varphi^2) (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + g_\varphi(\omega - \omega_0) + g_\varphi(\omega + \omega_0) \right] + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 a_0^4 x^2}{64 \cdot c_0^4} \left[ (1 - 4\varepsilon_\varphi^2) (\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)) + 4g_\varphi(\omega - 2\omega_0) + 4g_\varphi(\omega + 2\omega_0) \right].$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках описывает спектр исходного сигнала, а второе - составляющие вблизи второй гармоники, появившиеся из-за нелинейного взаимодействия. Перед вторым слагаемым можно заменить  $\omega$  на  $2\omega_0$ .

5.10. В условиях задачи 5.8 найти спектр простой волны на начальной стадии для сигнала с частотными флуктуациями

$(\Omega = \partial\psi/\partial t)$  в случае "больших и медленных" флуктуаций частоты, когда структурная функция фазы может быть аппроксимирована как  $D_\psi(\tau) = \Omega^2 \tau^2$ . Найти ширину спектра  $\Delta\omega_i$  на первой и второй гармониках.

Отвѣт.

$$g_u(x, \omega) = \frac{\alpha_0^2}{4\sqrt{2\pi\Omega^2}} \left[ e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Omega^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\Omega^2}} \right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \alpha_0^4 \omega^2 x^2}{64 \cdot c_0^4 \sqrt{4\pi\Omega^2}} \left[ e^{-\frac{(\omega-2\omega_0)^2}{4\Omega^2}} + e^{-\frac{(\omega+2\omega_0)^2}{4\Omega^2}} \right],$$

$$\Delta\omega_1 = \Omega, \quad \Delta\omega_2 = \sqrt{2}\Omega.$$

5.11. Найти спектр простой волны на начальной стадии для входного сигнала с малыми амплитудными флуктуациями

$$u_0(\tau) = a_0(1 + \alpha(\tau)) \cdot \cos(\omega_0\tau + \varphi_0), \quad \langle \alpha^2 \rangle \ll 1, \quad (I)$$

считая известным спектр амплитудных флуктуаций  $g_\alpha(\omega)$ . Сравнить со случаем малых фазовых флуктуаций - задача 5.9.

Отвѣт.

$$g_u(x, \omega) =$$

$$= \frac{\alpha_0^2}{4} \left[ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + g_\alpha(\omega - \omega_0) + g_\alpha(\omega + \omega_0) \right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \omega^2 \alpha_0^4 x^2}{64 \cdot c_0^4} \left[ 4g_\alpha(\omega) + \delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0) + 4g_\alpha(\omega - 2\omega_0) + 4g_\alpha(\omega + 2\omega_0) \right].$$

В этом случае, в отличие от сигнала с фазовыми флуктуациями, происходит детектирование сигнала и появление низкочастотных компонент - первое слагаемое во вторых квадратных скобках.

5.12. Найти спектр простой волны, используя выражение для её фурье-образа I.19(4), считая, что на входе задан стационарный шум с характеристической функцией

$$\Theta_2(\chi_1, \chi_2, \varrho) = \left\langle e^{i\chi_1\Phi(\tau) + i\chi_2\Phi(\tau+\varrho)} \right\rangle. \quad (I)$$

где  $\Phi(\tau) = u_0(x=0, \tau)$ . Рассмотреть поведение спектра на начальной стадии.

Решение. Для стационарного процесса фурье-образ  $C(\omega)$  и спектр мощности  $g(\omega)$  связаны соотношением

$$\langle C(\omega)C^*(\omega') \rangle = g(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega'). \quad (2)$$

Умножая фурье-образ простой волны  $C(x, \omega)$  (1) на комплексно сопряженную величину  $C^*(x, \omega')$  и усредняя, получаем

$$\langle C(x, \omega)C^*(x, \omega') \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \omega \omega' (\epsilon/c_0^2)^2 x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta_2(\omega(\epsilon/c_0^2)x, -\omega'(\epsilon/c_0^2)x; \xi_2 - \xi_1) - \Theta_1(\omega(\epsilon/c_0^2)x) - \Theta_1(-\omega'(\epsilon/c_0^2)x) + 1] \cdot \exp(-i\omega\xi_1 + i\omega'\xi_2) \cdot d\xi_1 d\xi_2,$$

здесь  $\Theta_1(\xi) = \langle \exp(i\xi\Phi(\tau)) \rangle$  - одномерная характеристическая функция. Переходя к интегрированию по  $\xi = \xi_2 - \xi_1$  и  $\xi_1$ , учитывая что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi} d\xi = \delta(\omega),$$

для спектра интенсивности получаем

$$g(x, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega^2(\epsilon/c_0^2)^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta_2(\omega(\epsilon/c_0^2)x, -\omega(\epsilon/c_0^2)x; \xi) - \Theta_1(\omega(\epsilon/c_0^2)x) - \Theta_1(-\omega(\epsilon/c_0^2)x) + 1] e^{i\omega\xi} d\xi. \quad (3)$$

Пусть, для простоты  $\langle \Phi \rangle = 0$ , тогда разлагая характеристическую функцию в ряд по моментам

$$\Theta_2(\xi_1, \xi_2, \xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi_1^2 \sigma^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 \sigma^2 - \xi_1 \xi_2 B_0(\xi) + \dots, \\ \Theta_1(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 \sigma^2 + \dots, \quad \sigma^2 = \langle \Phi^2 \rangle, \quad B_0(\xi) = \langle \Phi_0(\tau)\Phi_0(\tau+\xi) \rangle. \quad (4)$$

Из (3) имеем при  $x \rightarrow 0$

$$g(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\xi) e^{i\omega\xi} \cdot d\xi = g_0(\omega),$$

где  $g_0(\omega)$  - спектр сигнала на входе.

5.13. Найти спектр простой волны, считая что на входе задан стационарный гауссов шум с нулевым средним и корреляционной функцией  $B_0(\xi)$ .

Ответ. Используя выражение для характеристической функции гауссова процесса, из 5.13(3) получаем

$$g(x, \omega) = \frac{e^{-\omega^2 (\epsilon/c_0^2)^2 \sigma_0^2 x^2}}{2\pi \omega^2 (\epsilon/c_0^2)^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{\omega^2 (\epsilon/c_0^2)^2 x^2 B_0(\xi)} - 1 \right] e^{i\omega \xi} d\xi, \quad (1)$$

где  $\sigma_0^2 = B_0(0)$  - дисперсия входного сигнала.

Примечание. Двухточечную характеристическую функцию гауссова процесса легко получить, вспомнив, что для гауссовой случайной величины  $\alpha$  справедливо равенство

$$\langle e^{i\alpha \gamma} \rangle = e^{i\gamma \langle \alpha \rangle - \gamma^2 \sigma_\alpha^2 / 2}$$

где  $\sigma_\alpha^2$  - дисперсия:  $\sigma_\alpha^2 = \langle (\alpha - \langle \alpha \rangle)^2 \rangle$ .

5.14. Считая, что корреляционная функция гауссова сигнала характеризуется единственным временным масштабом  $\tau_* = 1/\omega_0$  и представлена в виде  $B_0(\xi) = \sigma_0^2 \tilde{R}(\xi \omega_0)$ , обезразмерить выражение для спектра простой волны 5.13(1).

Ответ.

$$g(x, \omega) = \sigma_0^2 \omega_0 \tilde{g}(z, \Omega), \quad \Omega = \omega/\omega_0, \quad z = \frac{\xi}{c_0} \sigma_0 \omega_0 x, \quad (1)$$

$$\tilde{g}(z, \Omega) = \frac{e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi \Omega^2 z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{z^2 \Omega^2 \tilde{R}(\eta)} - 1 \right] e^{i\Omega \eta} \cdot d\eta. \quad (2)$$

5.15. Проанализировать эволюцию спектра и корреляционной функции простой волны, представляющей на входе квазимонохроматический сигнал с корреляционной функцией

$$B_0(\xi) = \sigma^2 b_0(\xi) \cos \omega_0 \xi, \quad b_0(\xi) = \tilde{b}(\Delta \xi), \quad (1)$$

где  $b_0(\xi)$  - медленная (в масштабе  $\cos \omega_0 \xi$ ) функция,

характеризующаяся масштабом  $\Gamma = 1/\Delta_*$ , таким, что  $\mu = \Delta_*/\omega_0 \ll 1$ .

Решение. Используя замену переменных 5.14(1) для безразмерного спектра получаем из 5.14(2)

$$g(z, \Omega) = \frac{e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{z^2 \Omega^2 \tilde{b}_0(\mu\eta) \cos \eta} - 1] e^{i\Omega\eta} \cdot d\eta. \quad (2)$$

Используя разложение экспоненты по модифицированным функциям Бесселя  $I_n(z)$ , можно представить (2) в виде суммы спектров на гармониках сигнала и низкочастотной компоненты

$$g(z, \Omega) = g_0(z, \Omega) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z, \Omega), \quad (3)$$

где

$$g_0(z, \Omega) = \frac{e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} [I_0(z^2 \Omega^2 \tilde{b}_0(\mu\eta)) - 1] e^{i\Omega\eta} \cdot d\eta, \quad (4)$$

$$g_n(z, \Omega) = \frac{2e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_n(z^2 \Omega^2 \tilde{b}_0(\mu\eta)) e^{i\Omega\eta} \cdot \cos n\eta \cdot d\eta. \quad (5)$$

Поскольку  $\mu \ll 1$ , то спектр  $n$ -ой гармоники сосредоточен вблизи  $\Omega \approx n$  и можно заменить в аргументах выражения (5)  $\Omega$  на  $n$  и тогда

$$g_n(z, \Omega) = \frac{2e^{-n^2 \Omega^2}}{2\pi n^2 z^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_n[n^2 z^2 \tilde{b}_0(\mu\eta)] e^{i\Omega\eta} \cdot \cos n\eta \cdot d\eta. \quad (6)$$

Из (6) сразу следует, что корреляционная функция может быть представлена как сумма корреляционных функций отдельных гармоник

$$B_n(z, \xi) = \frac{2e^{-n^2 \Omega^2}}{n^2 z^2} I_n[n^2 z^2 \tilde{b}_0(\mu\eta)] \cdot \cos n\xi \quad (7)$$

и низкочастотной компоненты.

Используя разложение функций Бесселя, можно показать, что эффективность генерации гармоник на начальной стадии для шума в  $n!$  раз больше, чем для регулярного сигнала (см. задачу 5.5).

5.16. Используя результаты предыдущей задачи, найти выражение для низкочастотной части спектра, возникающей из-за детектирования модулированного высокочастотного сигнала и оценить ширину спектра  $n$ -ой гармоники  $\Delta\omega_n$  на начальной стадии,



считая, что на входе  $b_0(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \Delta^2}$ ,  $\tilde{b}_0 = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ .

Решение. Для низкочастотной компоненты при  $z < 1$  (там, где применимо приближение простой волны) можно разложить  $I_0(x) = 1 + x^2/4$  и тогда

$$g_0(z, \Omega) = \frac{1}{4} z^2 \Omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} b_0^2(\eta) e^{i\Omega \eta} d\eta = \frac{z^2 \Omega^2}{4\sqrt{4\pi} \mu^2} e^{-\frac{\Omega^2}{4\mu^2}} \quad (I)$$

Для высших гармоник при  $z \ll 1$  можно воспользоваться разложением  $I_n(z) \sim z^n$  и тогда

$$g_n(z, \Omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} b^n(\eta) e^{i\Omega \eta} \cdot \cos n\eta \sim e^{-(\Omega - n)^2 / 2n\mu^2},$$

таким образом  $\Delta \Omega_n \sim \sqrt{n} \cdot \mu$  или  $\Delta \omega_n \sim \Delta \sqrt{n}$ . При  $\Delta \omega_n \sim \omega_0$  спектры гармоник сливаются.

5.17. Используя решение простой волны, показать, что для стационарного шума одноточечное вероятностное распределение сохранится. Предположить, что выполняются условия эргодичности.

Ответ. Для эргодичного процесса вероятностное распределение совпадает с относительным временем пребывания процесса в интервале  $u, u + \Delta u$  (рис.16)

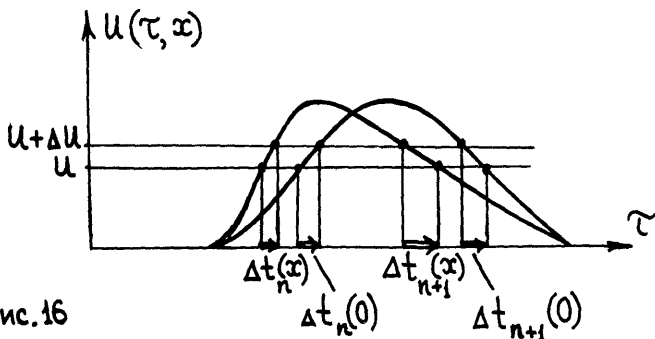


Рис.16

$$W_n(u, x) = \lim_{T \rightarrow \infty, \Delta u \rightarrow 0} (T \cdot \Delta u)^{-1} \sum_{72} \Delta t_n, \quad (I)$$

где  $T$  - общая длина интервала,  $\Delta t_n$  - длина интервала, где функция находится в промежутке  $u, u + \Delta u$ . Из-за нелинейных искажений длина каждого из интервалов будет меняться. Так как для каждой точки профиля в сопровождающей системе координат справедливо соотношение  $t = t_0 - (\epsilon/c_0^2) u x$ , то

$$\Delta t_n(x) = \Delta t_n(0) \pm (\epsilon/c_0^2) \Delta u \cdot x \quad (2)$$

и, следовательно, сумма двух любых соседних временных интервалов постоянна:  $\Delta t_n + \Delta t_{n+1} = \text{const}$ ; следовательно, не меняется и вероятностное распределение. К изменению вероятностного распределения приводит образование разрывов.

5.18. Найти вероятностное распределение гармонического на входе сигнала

$$u_0(\tau) = a \cdot \sin(\omega_0 \tau + \varphi) \quad (1)$$

со случайной фазой, равномерно распределенной в интервале  $[-\pi, \pi]$ . Рассмотреть стадию до образования разрывов ( $x < x_p = c_0^2 / \epsilon \omega_0 a$ ) и стадию развитых разрывов ( $x \gg x_p$ ).

Ответ. При  $x < x_p$

$$W(u, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - u^2}}$$

и при  $x \gg x_p$

$$W(u, x) = \begin{cases} 1/2\Delta V, & |u| < \Delta V, \\ 0, & |u| > \Delta V, \end{cases}$$

где  $\Delta V = \pi c_0^2 / \epsilon \omega x$ .

5.19. Используя предельное решение уравнения Бургера при бесконечно малой вязкости (задача 3.10), показать, что стационарный непрерывный на входе шум превращается на достаточно больших расстояниях в последовательность пилообразных импульсов с одинаковым наклоном. Найти скорость отдельного разрыва.

Решение. Пусть входной шум имеет дисперсию  $\sigma_u^2 = \langle u_0^2(\tau) \rangle$  и характеризуется масштабом  $\tau_0$ . Тогда характерная кривизна функции  $\beta S_0(\tau)$ , входящей в решение 3.10(5,6) равна  $\beta S_0''(\tau) \sim \beta \sigma_u / \tau_0$ . Кривизна параболы  $\alpha$  в этом же решении

равна  $1/x$ . При  $\varphi S_0 x/\tau_0 \gg 1$  парабола  $\alpha(t, \tau, x)$ -плавная функция  $t$  в масштабе  $\varphi S_0(t)$ . Поэтому точки касания  $\varphi S_0(t)$  и  $\alpha(t, \tau, x)$  близки к некоторым максимумам  $\varphi S_0(t)$  (см. рис. 17). Поле  $U(x, \tau)$  полностью определяется системой критических парабол - парабол, имеющих двойные точки касания с функцией  $\varphi S_0(t)$ . При этом координаты центров критических парабол определяют положение разрывов  $\tau_k$ , и точки пересечения критических парабол (совпадающие с некоторыми максимумами  $\varphi S_0(t)$ ) определяют нули  $\eta_k$  поля  $U(x, \tau)$ . Действительно, в интервалах между разрывами  $\tau_k$  и  $\tau_{k+1}$  парабола  $\alpha$  касается функции  $\varphi S_0(t)$  практически в одной и той же точке  $\eta_k$ , а это и означает, что поле  $U(x, \tau)$  в интервалах между разрывами имеет универсальную структуру

$$U(x, \tau) = (\eta_k - \tau) / \beta x, \quad \tau_k < \tau < \tau_{k+1}. \quad (1)$$

Положение разрыва определяется из условия двойного касания  $\alpha$  и  $\varphi S_0$  и для координаты разрыва имеем выражение

$$\tau_k = \frac{\eta_k + \eta_{k-1}}{2} - \varphi x \frac{S_0(\eta_k) - S_0(\eta_{k-1})}{\eta_k - \eta_{k-1}}. \quad (2)$$

Причем "скорость" движения разрыва постоянна:

$$V_k = \frac{d\tau_k}{dx} = -\varphi \frac{S_0(\eta_k) - S_0(\eta_{k-1})}{\eta_k - \eta_{k-1}}. \quad (3)$$

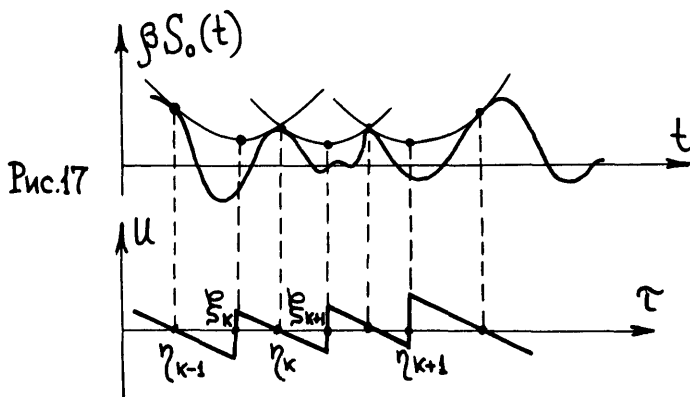


Рис.17

Таким образом, профиль поля  $U(x, \tau)$  на этой стадии представляет совокупность наклонных линий с одинаковыми наклонами  $-1/\beta x$ , выходящих из "нулей"  $\tau = \tau_k$ . Эти линии соединены вертикальными линиями - разрывами, имеющими координаты  $\eta_k$ . Расстояние между отдельными соседними разрывами  $\Delta_k = \eta_{k+1} - \eta_k$  может как возрастать, так и уменьшаться. Если  $\Delta_k$  уменьшается, то разрывы сливаются и превращаются в один с амплитудой, равной сумме амплитуд слившихся разрывов.

**5.20.** Предполагая, что случайное поле  $U(x, \tau)$  характеризуется единственным масштабом  $\tau(x)$ , оценить рост этого масштаба из-за слияния разрывов.

Решение. При случайных возмущениях  $U_0(\tau)$  скорости разрывов также случайны. Вследствии этого будет происходить столкновение и слипание разрывов, приводящее к увеличению характерного временного масштаба поля  $\tau(x)$ . Оценку роста  $\tau(x)$  можно получить, написав уравнение для средней частоты следования разрывов в единицу времени  $n(x)$ , которое связано с внешним масштабом соотношением  $n(x) = 1/\tau(x)$ . Уменьшение  $n(x)$  за счет столкновений пропорционально как числу разрывов  $n(x)$ , так и отношению характерной "скорости" сближения разрывов  $\Delta v = v_{k+1} - v_k$  и характерному расстоянию между ними  $\tau = 1/n$ :

$$\frac{dn}{dx} = -n \left( \frac{\Delta v}{\tau} \right) = -n^2 \Delta v. \quad (1)$$

В качестве оценки "скорости" сближения разрывов можно считать, что  $\Delta v$  порядка характерного разброса скорости разрыва  $\langle v_k^2 \rangle$ . Используя выражение для "скорости" разрыва 5.19(3), для  $\langle \Delta v^2 \rangle$  получаем оценку

$$\langle \Delta v_k^2 \rangle \approx \langle v_k^2 \rangle \approx \beta^2 \frac{\langle (S_0(\eta + \tau) - S_0(\eta))^2 \rangle}{\tau^2} \quad (2)$$

или, если задана  $B_0(\tau) = \langle U_0(\eta + \tau) U_0(\eta) \rangle$ ,  $B_0(0) = \sigma_0^2$ , - корреляционная функция входного сигнала, то

$$\langle \Delta v^2 \rangle = \beta^2 n \int_0^{1/n} (1 - \eta n) B_0(\eta) d\eta = \begin{cases} n \sigma_0^2 \tau_0, & D \neq 0, \\ n^2 \sigma_0^2 \tau_0^2, & D = 0. \end{cases} \quad (3)$$

здесь  $D = \int_0^{\infty} B_0(\eta) d\eta$  - значение спектра начального возмущения на нулевой частоте. (При  $D \neq 0$  исходное время корреляции  $\tau_0$  определяется из условия  $D = \epsilon_0^2 \tau_0$ , при  $D = 0$  - из условия  $\int_0^{\infty} \eta \cdot B_0(\eta) d\eta = -\epsilon_0^2 \tau_0^2$ ). Подставляя (3) в (1), для роста внешнего масштаба получаем следующие оценки

$$\tau(x) \approx \begin{cases} \tau_0 (x/x_p)^{2/3}, & D \neq 0, \\ \tau_0 (x/x_p)^{1/2}, & D = 0, \end{cases} \quad (4)$$

здесь  $x_p = \tau_0 / \beta \epsilon_0$  - характерная длина проявления нелинейных эффектов.

5.21. Предполагая, что статистические характеристики интенсивного шума становятся автомодельными, записать выражение для спектра мощности волны и, используя 5.20(4), оценить энергию поля на стадии развитых разрывов.

Ответ.

$$a) \quad S(\omega, x) = \frac{\tau^3(x)}{\beta^2 x^2} \tilde{S}(\omega, \tau)$$

где  $\tilde{S}$  - универсальная безразмерная функция.

$$b) \quad \langle u^2(x, \tau) \rangle \approx \frac{\tau^2(x)}{\beta^2 x^2} \approx \epsilon_n^2 \begin{cases} (x_p/x)^{2/3}, & D \neq 0, \\ (x_p/x), & D = 0. \end{cases}$$

Таким образом, из-за слияния разрывов энергия шума спадает медленнее, чем для гармонического входного сигнала, для которого  $\langle u^2 \rangle \sim x^{-2}$ .

Примечание. Достаточно подробно вопросы эволюции интенсивных шумовых волн рассмотрены в монографиях и обзорах [5, 13-15].

5.22. Используя выражение для Фурье образа простой волны I.19(4) и разложение [16]

$$\exp(iz \cdot \cos \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) e^{ik\varphi}, \quad (I)$$

где  $J_k(z)$  - функция Бесселя, найти спектр интенсивности акустической волны, представляющей на входе смесь шума  $\eta(t)$  и сигнала  $\Psi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где фаза  $\varphi$  равномерно распре-

лена в интервале  $[-\pi, \pi]$ . Считать, что  $\eta(t)$  имеет гауссово распределение с корреляционной функцией  $B_\eta(\tau)$ . Исследовать затухание дискретных составляющих из-за нелинейного взаимодействия с шумом. Проанализировать форму спектра, если шум низкочастотный по сравнению с сигналом.

Ответ. Спектр мощности удобно представить в виде

$$g(x, \omega) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{J_k(k\beta\omega_0 Ax)}{k^2 \beta^2 \omega_0^2 x^2} \cdot e^{-k^2 \beta^2 \omega_0^2 \sigma_0^2 x^2} \cdot \delta(\omega - k\omega_0) +$$

$$+ \frac{J_0^2(\beta\omega Ax)}{2\pi \beta^2 \omega^2 x^2} \cdot e^{-\beta^2 \omega^2 \sigma_0^2 x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\beta^2 \omega^2 x^2 B_0(\xi)} - 1] e^{i\omega\xi} d\xi +$$

$$+ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{J_k^2(\beta\omega Ax)}{2\pi \beta^2 \omega^2 x^2} \cdot e^{-\beta^2 \omega^2 \sigma_0^2 x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\beta^2 \omega^2 x^2 B_0(\xi)} - 1] e^{i(\omega - k\omega_0)\xi} d\xi,$$

где  $B_0(\xi) = \langle \eta(\tau) \cdot \eta(\tau + \xi) \rangle$ ,  $\sigma_0^2 = B_0(0)$ .

Здесь первая сумма описывает амплитуды гармоник, ослабленные за счет взаимодействия с шумами, причем декремент затухания определяется полной мощностью шума  $\sigma_0^2$  и растет с ростом номера гармоники.

Второе слагаемое описывает спектр шума, искаженный за счет взаимодействия с регулярными сигналами. И наконец, последняя сумма представляет новые составляющие спектра, возникшие за счет взаимодействия сигнала и шума.

Если характерная частота шума  $\chi$  много меньше частоты сигнала  $\omega_0$ , то вновь появившиеся компоненты расположены вблизи гармоник регулярного сигнала. Для этих составляющих, возникающих вблизи  $k$ -ой гармоники, можно записать из (1)

$$g_k(x, \omega) \approx \frac{A_k^2}{2\pi} e^{-k^2 \beta^2 \omega_0^2 \sigma_0^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{k^2 \beta^2 \omega_0^2 x^2 B_0(\xi)} - 1] e^{i(\omega - k\omega_0)\xi} d\xi, \quad (2)$$

здесь  $A_k = J_k(k\beta\omega_0 Ax) / k\beta\omega_0 x$  - амплитуда  $k$ -ой гармоники сигнала. Форма спектра определяется величиной  $k\pi = k\beta\omega_0 \sigma_0 x$ .

5.23. Показать, что если искажениями низкочастотного шума  $\eta(\tau)$  можно пренебречь, то для спектра вновь появившихся составляющих выражение 5.22(2) справедливо и на разрывной стадии и тогда здесь  $A_k$  - амплитуда гармоник разрывной волны.

Решение. Если  $\eta(\tau)$  - величина постоянная, то решение уравнения Бюргера описывается выражением 3.4(2). Эта же формула приближенно справедлива, если  $\eta(\tau)$  - медленная функция, и тогда

$$u(x, \tau) = \eta(\tau) + \Pi(\tau + \beta\eta(\tau)x, x), \quad (1)$$

где  $\Pi(x, \tau)$  - поле высокочастотной волны. Таким образом, нелинейное взаимодействие приводит к модуляции гармоник высокочастотной волны. Учитывая, что  $\eta(\tau)$  - гауссов сигнал, можно получить выражение для спектра 5.22(2).

Таким образом, входящая в ответ предыдущей задачи величина определяет величину фазовых флуктуаций. При  $m_k \ll 1$  из 5.22(2) получаем, что спектр вновь возникающих гармоник повторяет форму спектра НЧ шума

$$g_k(x, \omega) \approx A_k k^2 \beta^2 \omega_0^2 x^2 g_\eta(\omega), \quad (2)$$

$$g_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi,$$

а при  $m_k \gg 1$  спектр имеет универсальный вид.

Действительно, разлагая  $B_0(\tau) = 1 - \delta^2 \tau^2 / 2 + \dots$  и используя метод перевала, получаем из 5.22(2)

$$g_k(x, \omega) \approx \frac{A_k^2}{\sqrt{2\pi} \delta k \beta \omega_0 \beta x} e^{-\frac{(\omega - k\omega_0)^2}{2(\delta k \beta \omega_0 \beta x)^2}},$$

то есть форма спектра гауссова, а его ширина равна  $\delta m_k \gg \delta$  и много больше ширины НЧ шума.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
2. Остроумов Г.А. Основы нелинейной акустики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
3. Мощные ультразвуковые поля. /Под ред. Розенберга Л.Д. М.: Наука, 1968.
4. **Beyer R.T Nonlinear Acoustics. USA, Naval Ship Systems Command**, 1974.
5. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн М.: Наука, 1979. //2-е издание - 1990/
7. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение. 1981.
8. Руденко О.В. Акустика интенсивных возмущений: нелинейные волны, физические эффекты и приложения. //Природа. 1978. № 9. С.34-43.
9. Руденко О.В. Нелинейная акустика: достижения, перспективы, проблемы. //Природа. 1986. № 7. С.16-26.
10. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983.
11. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
12. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллинн: Валгус, 1984.
13. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии. //УФН, 1983. Т.141. вып.2. С.221-255.
14. Руденко О.В. Взаимодействие интенсивных шумовых волн. //УФН. 1986. Т.149, вып.3. С.413-447.
15. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.



Учебное издание

Гурбатов Сергей Николаевич

Руденко Олег Владимирович

Нелинейная акустика в задачах

Зав.редакцией Н.М.Глазкова

Редактор Л.О.Богданкевич

Художественный редактор А.Л.Прокошев

Н/К

Подписано в печать 29.05.90

Формат 60x90/16. Бумага офс.№ 2

Офсетная печать

Усл.печ.л. 5,0                      Уч.-изд.л. 3,71

Тираж 500 экз. Заказ № 1422      . Заказное. Изд.№ 1731

Цена 10 коп.

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета

103009, Москва, ул.Герцена, 5/7.

Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.

119899, Москва, Ленинские горы.