

В. Н. ГРИБОВ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2001

УДК 530.1 (075.8)
ББК 22.31

Интернет-магазин
MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Внимание!

Новые проекты издательства РХД

- Электронная библиотека на компакт-дисках
<http://shop.rcd.ru/cdbooks>
 - Эксклюзивные книги — специально для Вас любая книга может быть отпечатана в одном экземпляре
<http://shop.rcd.ru/exclusive>
-

Грибов В. Н.

Квантовая электродинамика. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 288 стр.

Книга написана на основе лекций, прочитанных знаменитым российским физиком в Ленинградском институте ядерной физики. Изложены основные электродинамические явления, общие свойства рассеяния, метод перенормировок.

Для студентов и аспирантов, физиков-теоретиков, специалистов.

ISBN 5-93972-089-7

ББК 22.31

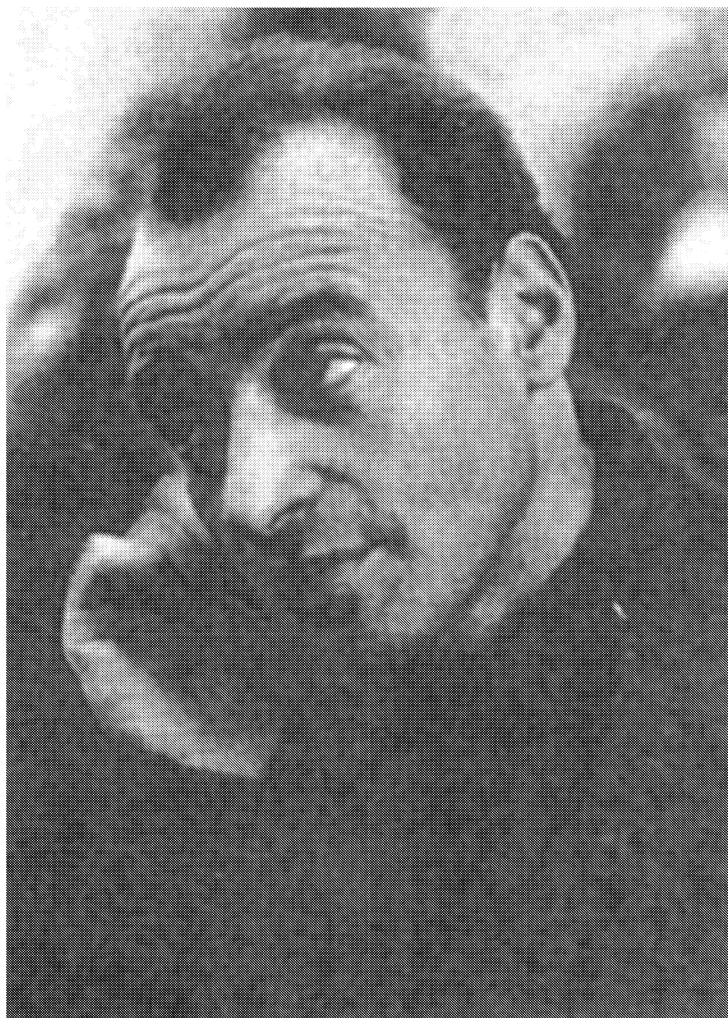
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

<http://rcd.ru>

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Частицы и их взаимодействие в релятивистской квантовой механике	8
1.1 Функция распространения	8
1.2 Как вычислять наблюдаемые величины	21
1.3 Электромагнитное поле	25
1.4 Фотоны во “внешнем поле”	34
1.5 Свободные релятивистские частицы с массой	45
1.6 Взаимодействие бесспиновых частиц	47
1.7 Взаимодействие бесспиновых частиц с электромагнитным полем	55
1.8 Примеры простейших электромагнитных процессов	59
1.9 Диаграммы и амплитуды в импульсном представлении	65
1.10 Амплитуды реально наблюдаемых процессов	68
1.11 Манделштамовская плоскость	86
1.12 Комpton-эффект (для π -мезона)	91
Глава 2. Частицы со спином 1/2. Основные электродинамические процессы	97
2.1 Свободная частица со спином $J = 1/2$	97
2.2 Функция Грина электрона	111
2.3 Матричные элементы амплитуд рассеяния для электронов	114
2.4 Взаимодействие электрона с фотоном	115
2.5 Рассеяние электронов. Связь спина со статистикой	119
2.6 Рассеяние фотона электроном (Комpton-эффект)	126
2.7 Аннигиляция электрон-позитронной пары в два фотона	140
2.8 Рассеяние электронов во внешнем поле	146
2.9 Тормозное излучение электрона во внешнем поле	149
2.10 Формула Вайцекера-Вильямса	153

Глава 3. Общие свойства амплитуды рассеяния	160
3.1 Симметрии в квантовой электродинамике	160
3.2 Причинность и унитарность	171
Глава 4. Перенормировки. Радиационные поправки	190
4.1 Высшие приближения. Перенормировка массы электрона .	190
4.2 Перенормировка функции Грина фотона	204
4.3 Перенормировка вершинной части	210
4.4 Обобщенное тождество Уорда	216
4.5 Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле	219
4.6 Уравнение Дирака во внешнем поле	239
4.7 Радиационные поправки к уровням водородоподобных атомов (Лэмб-сдвиг)	253
Глава 5. Трудности квантовой электродинамики	259
5.1 Перенормировки и расходимости	259
5.2 Проблема нуля заряда в квантовой электродинамике	279



В. Н. Грибов

Предисловие

На долю физиков моего поколения выпало большое счастье: мы были современниками Владимира Наумовича Грибова, великого физика, замечательного человека.

Грибов — целая эпоха в физике высоких энергий. Современные теоретические представления о процессах в этой области в огромной степени принадлежат ему. Не случайно в “героическую эпоху” этой науки для теоретиков, занятых в ней, Ленинградский институт ядерной физики (ЛИЯФ) был поистине Меккой — в этом институте тогда работал Грибов.

Впрочем, теоретический отдел института во времена Грибова был Меккой не только для тех, кто исследовал процессы при больших энергиях. Интересы Владимира Наумовича были несравненно шире, для него физика была единым целым. Среди его работ есть исследования и нейтринных осцилляций, и тонких вопросов квантования неабелевых калибровочных полей. Но влияние Грибова определялось отнюдь не только его опубликованными статьями. Насколько ценны были обсуждения с ним! Грибов был готов обсуждать любую интересную задачу, к какой бы области физики она ни относилась. Критика его была зачастую безжалостной, но всегда полезной. Если же Грибов убеждался в правоте собеседника, он признавал ее въявь, амбиции для него роли не играли.

Обсуждая, Грибов по-настоящему работал, нередко генерируя поистине замечательные идеи. Так, в обсуждении Владимир Наумович дал интерпретацию инстантона, классического решения нелинейных уравнений поля, как подбарьерной траектории, соединяющей вакуумы разной топологии. Сейчас эта интерпретация — фольклор.

Еще в 1971 или 1972 году, за 2–3 года до появления знаменитой работы Хокинга, Грибов четко сформулировал в обсуждениях вывод о том, что черные дыры излучают. В те относительно далекие времена его утверждение вызвало резко отрицательную реакцию, по крайней мере части “гравитационной” общественности, настаивавшей на том, что мысль об излучении черных дыр противоречит самим основам общей теории относительности. Остается лишь сожалеть, что Владимир Нау-

мович не опубликовал этот результат, по-видимому, считая его самоочевидным.

Грибов вообще спокойно относился к публикациям. Показательна в этом отношении история настоящих лекций по квантовой электродинамике. Они были прочитаны Владимиром Наумовичем в Ленинградском университете и опубликованы в трудах Зимней школы физики ЛИЯФ 1974 года. Лекции были подготовлены к печати В. В. Федоровым, использовавшим записи Г. М. Амальского и К. Е. Кирьянова. Грибов не только сам не писал этот текст, но, по-видимому, даже не читал его, во всяком случае не читал его полностью. Впрочем, класс работы Федорова таков, что при чтении книги порой возникает удивительное ощущение: слышится живой голос Владимира Наумовича.

Труды Зимней школы физики ЛИЯФ с лекциями Грибова по квантовой электродинамике давно стали библиографической редкостью. Однако сами лекции ничуть не устарели за четверть века. Одновременно с настоящим изданием они выходят на английском языке в издательстве Cambridge University Press.

Большая работа по подготовке книги к обоим изданиям была проделана Ю. Нири и М. И. Эйдесом.

Владимира Наумовича Грибова не стало 13 августа 1997 года. Тяжело больной, он работал до последнего дня своей жизни. Уже после его смерти были подготовлены к печати и опубликованы две работы Грибова, посвященные проблеме удержания кварков. Осталась неоконченной его последняя статья “Квантовая электродинамика на малых расстояниях”.

Свет погасшей звезды еще тысячу лет
К нам доходит. А что ей, звезде, до людей?
Ты добрей был ее, и теплей, и светлей. . .

Грибовский свет несет нам и эта книга.

И. Б. Хрипович

Глава 1

Частицы и их взаимодействие в релятивистской квантовой механике

Квантовая электродинамика в настоящее время является достаточно разработанной теорией. Существует несколько эквивалентных способов ее изложения.

1. Подход, основанный на формализме вторичного квантования.
2. Метод функционального интегрирования.
3. Подход, основанный на диаграммах Фейнмана (метод функций Грина). Последний подход является наиболее физически прозрачным. Именно поэтому мы построим изложение квантовой электродинамики на языке функций Грина.

1.1 Функция распространения

В квантовой механике движение частицы описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, которая определяет амплитуды вероятностей всех физических процессов и удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi. \quad (1.1)$$

Здесь и далее будем пользоваться системой единиц $\hbar = c = 1$. Если выбрать в качестве единицы длины (см), то этими двумя уравнениями фиксируется единица времени (см) и единица массы (см^{-1}). Действительно, комптоновская длина волны частицы с массой m есть $\lambda = \hbar/mc$, $\lambda = 1/m$ ($t = 1$ см соответствует времени, за которое свет проходит расстояние в 1 см; $m = 1 \text{ см}^{-1}$ соответствует массе частицы (гипотетической), комптоновская длина которой $\lambda = 1$ см).

Волновая функция неудобна в том смысле, что ее вид зависит от начальных условий, т. е. одному и тому же процессу могут соответствовать различные волновые функции. Чем более универсальным можно ее заменить?

Введем так называемую функцию распространения $K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1)$. Пусть в момент времени t_1 частица находилась в точке \mathbf{r}_1 , определим $K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1)$ как амплитуду вероятности того, что в момент времени $t_2 > t_1$ эта частица будет находиться в точке \mathbf{r}_2 . Графически этот процесс можно изобразить линией

$$\overline{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \quad \quad \mathbf{r}_2, t_2}$$

Функция распространения является функцией уже не двух, а четырех переменных, поскольку в нее мы фактически включили определенные начальные условия. По своему смыслу $K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1)$ при $t_2 > t_1$ должна удовлетворять уравнению Шредингера (1.1), т. е.

$$K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \Psi(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (1.2)$$

при начальном условии

$$K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \Psi(\mathbf{r}_2, t_2) \Big|_{t_2=t_1} = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (1.3)$$

что является выражением того факта, что в момент времени t_1 частица находилась в точке \mathbf{r}_1 . Зная функцию K , можно решить задачу Коши для уравнения (1.1), т. е. найти волновую функцию частицы при произвольном начальном условии. А именно:

$$\varphi(\mathbf{r}_2, t_2) = \int K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) \varphi_{t_1}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1. \quad (1.4)$$

В самом деле, $\varphi(\mathbf{r}_2, t_2)$ удовлетворяет уравнению (1.1), так как ему удовлетворяет K , и, кроме того, выполняется начальное условие

$$\varphi(\mathbf{r}_2, t_2) \Big|_{t_2=t_1} = \varphi_{t_1}(\mathbf{r}_2)$$

в силу (1.3). Физически (1.4) выражает то, что амплитуда вероятности нахождения частицы в точке \mathbf{r}_2 в момент t_2 есть произведение амплитуды перехода из (\mathbf{r}_1, t_1) в (\mathbf{r}_1, t_1) на амплитуду вероятности того, что в момент t_1 частица находилась в точке \mathbf{r}_1 .

Если у нас имеется полная система решений стационарного уравнения Шредингера

$$H\Psi_n(\mathbf{r}, t) = E_n\Psi_n(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

то функцию K можно записать в виде

$$K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \sum_n \Psi_n(\mathbf{r}_2, t_2)\Psi_n^*(\mathbf{r}_1, t_1). \quad (1.6)$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет уравнению (1.1) (так как ему удовлетворяет $\Psi_n(\mathbf{r}_2, t_2)$), а из условия полноты системы $\{\Psi_n\}$ следует выполнение начального условия (1.3):

$$K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \sum_n \Psi_n(\mathbf{r}_2)\Psi_n^*(\mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

т. е. (1.6) действительно есть функция распространения.

Определим функцию распространения для свободной частицы:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m}; \quad \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi_n = E_n\Psi_n. \quad (1.7)$$

Решением (1.7) является

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i(p^2/2m)t}, \quad E_n = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.8)$$

Это решение принадлежит сплошному спектру, поскольку импульс, который определяет данное состояние, может принимать любые значения. Поэтому в (1.6) от суммирования нужно перейти к интегрированию по всем состояниям. Известно, что в интервале от \mathbf{p} до $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ содержится $d^3p/(2\pi)^3$ квантовых состояний, поэтому в (1.6) нужно сделать замену:

$$\sum_n \rightarrow \int d^3p/(2\pi)^3,$$

т. е. для свободной частицы получаем

$$\begin{aligned} K_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_2 - i(p^2/2m)t_2} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}_1 + i(p^2/2m)t_1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - i\frac{p^2}{2m}(t_2 - t_1)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Легко видеть, что K_0 удовлетворяет уравнению (1.1) и правильному начальному условию

$$K_0|_{t_2=t_1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)} = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Из (1.9) также следует, что K_0 в действительности является функцией только двух переменных: $K_0 = K_0(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $t = t_2 - t_1$. Это не удивительно, поскольку амплитуда перехода из \mathbf{r}_1, t_1 в \mathbf{r}_2, t_2 для свободной частицы, если пространство и время однородны, не должны зависеть от положения и момента времени.

Интеграл в (1.9) берется в явном виде:

$$K_0(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i(p^2/2m)t} = \left(\frac{2m}{i\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{ir^2 m/2t}.$$

Очень естественно функции распространения сопоставить линию

$$\overline{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \mathbf{r}_2, t_2}$$

Пусть теперь частица движется во внешнем поле, которое описывается потенциалом $V(\mathbf{r}, t)$. Рассмотрим амплитуду перехода частицы из \mathbf{r}_1, t_1 в \mathbf{r}_2, t_2 . При этом возможны следующие процессы.

1. Частица переходит из \mathbf{r}_1, t_1 в \mathbf{r}_2, t_2 , не взаимодействуя с внешним полем:

$$\overline{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \mathbf{r}_2, t_2} \quad K_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) \quad (1.10)$$

$t_2 > t_1$

2. Частица свободно распространяется до некоторой точки \mathbf{r}', t' , в этой точке частица взаимодействует с внешним полем и далее свободно распространяется до \mathbf{r}_2, t_2 . Этот процесс изобразим графически так:

$$\overline{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \mathbf{r}', t' \quad \mathbf{r}_2, t_2} \quad (1.11)$$

Чтобы найти амплитуду этого процесса, воспользуемся следующими соображениями. Волновая функция частицы во внешнем поле удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_0 \Psi + V \Psi.$$

За время Δt волновая функция изменяется на величину

$$\Delta\Psi = -iH_0\Psi\Delta t - iV\Psi\Delta t.$$

Первое слагаемое в правой части соответствует изменению волновой функции при свободном движении, которое уже учтено в (1.10). Таким образом, взаимодействие с внешним полем приводит к изменению волновой функции

$$\Delta_V\Psi = -iV\Psi\Delta t.$$

То есть амплитуду процесса (1.11) можно записать в виде

$$K_1(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \int K_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}', t')[-iV(\mathbf{r}', t')]K_0(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}_1, t_1)d^3r'dt'. \quad (1.12)$$

Интегрирование в (1.12) соответствует суммированию амплитуд со всевозможными положениями точки (\mathbf{r}', t') .

3. Следующим является процесс, когда частица дважды взаимодействует с полем в точках (\mathbf{r}', t') и (\mathbf{r}'', t'') :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{r}_1, t_1 & & \mathbf{r}', t' & & \mathbf{r}'', t'' & & \mathbf{r}_2, t_2 \\ \hline & & \bullet & & \bullet & & \end{array}$$

Амплитуду этого процесса можно записать аналогично (1.12):

$$K_2(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \int K_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}'', t'')[-iV(\mathbf{r}'', t'')]K_0(\mathbf{r}'', t''; \mathbf{r}', t') \times \\ \times [-iV(\mathbf{r}', t')]K_0(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}_1, t_1)d^3r''d^3r'dt''dt', \quad (1.13) \\ t_1 < t' < t'' < t_2.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для случая трех и более взаимодействий. Полная амплитуда перехода $K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1)$ будет равна сумме всех таких амплитуд:

$$K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1). \quad (1.14)$$

Теперь покажем, что полученная таким образом K есть действительно функция распространения частицы во внешнем поле.

Работая с функциями K_n , мы связаны необходимостью заботиться о правильной последовательности времен. Чтобы избавиться от этого

неудобства, введем новую функцию

$$\begin{aligned} G_n(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) &= \theta(t_2 - t_1)K_n(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1), \\ G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) &= K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Тем самым правильная последовательность времен будет соблюдаться автоматически. Функция G называется функцией Грина. Выясним, какому уравнению она удовлетворяет. Подействуем на G оператором $i\partial/\partial t - H(\mathbf{r}, t)$. Если функция K удовлетворяет уравнению Шредингера, то, учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \delta(t), \quad (1.16)$$

получим:

$$\begin{aligned} \left[i\frac{\partial}{\partial t_2} - H(\mathbf{r}_2, t_2) \right] G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) &= K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) i\frac{d}{dt}\theta(t_2 - t_1) = \\ &= i\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\delta(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что оператор $H(\mathbf{r}, t)$ не содержит дифференцирования по времени, а также условие (1.3). Таким образом, функция Грина будет удовлетворять уже неоднородному уравнению:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_2} - H(\mathbf{r}_2, t_2) \right] G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = i\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\delta(t_2 - t_1). \quad (1.17)$$

В дальнейшем каждой диаграмме будем сопоставлять соответствующую функцию Грина. Например:

$$\begin{array}{c} \overline{\mathbf{r}_1, t_1 \qquad \qquad \qquad \mathbf{r}_2, t_2} \qquad G_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1), \\ \overline{\mathbf{r}_1, t_1 \qquad \qquad \mathbf{r}', t' \qquad \qquad \mathbf{r}_2, t_2} \qquad G_1(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \int G_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}', t') \times \\ \qquad \qquad \qquad \times [-iV(\mathbf{r}', t')]G_0(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}_1, t_1) dt' d^3r' \end{array}$$

и т. д.

Теперь покажем, что полученная таким образом полная функция Грина

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) \quad (1.18)$$

удовлетворяет правильному уравнению. Если сопоставить полной функции Грина жирную линию, (1.18) можно записать графически так:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \mathbf{r}_2, t_2}^G &= \frac{G_0}{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \mathbf{r}_2, t_2} + \frac{G_0}{\mathbf{r}_1, t_1} \overset{-iV}{\bullet} \frac{G_0}{\mathbf{r}_2, t_2} + \dots \\ &= \frac{G_0}{\mathbf{r}_1, t_1 \quad \mathbf{r}_2, t_2} + \frac{G}{\mathbf{r}_1, t_1} \overset{-iV}{\bullet} \frac{G_0}{\mathbf{r}', t' \quad \mathbf{r}_2, t_2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Поясним, как мы это получили. Все графики, начиная со второго, имеют следующую структуру:

$$\overset{-iV}{\bullet} \frac{G_0}{\mathbf{r}', t' \quad \mathbf{r}_2, t_2} + \overset{-iV}{\bullet} \frac{G_0}{\mathbf{r}', t' \quad \mathbf{r}_2, t_2} + \overset{-iV}{\bullet} \frac{G_0}{\mathbf{r}', t' \quad \mathbf{r}_2, t_2} + \dots$$

Все они кончаются графиком

$$\overset{-iV}{\bullet} \frac{G_0}{\mathbf{r}', t' \quad \mathbf{r}_2, t_2}$$

Если этот элемент “вынести за скобку”, то сумма в скобках даст снова полную функцию Грина:

$$\overline{\hspace{10em}}^G$$

Этой “операции” и соответствует (1.19). Соотношение (1.19) есть не что иное, как графическое уравнение для функции Грина. Ему соответству-

ет интегральное уравнение:

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = G_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) + \int G_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}', t') [-iV(\mathbf{r}', t')] G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}_1, t_1) d^3r' dt'. \quad (1.20)$$

Покажем, что это уравнение эквивалентно (1.17). Подействуем на функцию G (1.20) оператором Шредингера для свободного движения:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(\mathbf{r}_2, t_2) \right] G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = i\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\delta(t_2 - t_1) + \int i\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}')\delta(t_2 - t') [-iV(\mathbf{r}', t')] G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}_1, t_1) d^3r' dt' = i\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\delta(t_2 - t_1) + V(\mathbf{r}_2, t_2)G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1).$$

Перенеся второе слагаемое в левую часть равенства, получим в точности (1.17). Функция G определяется однозначно как решение неоднородного дифференциального уравнения (1.17) с начальным условием $G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = 0$ при $t_2 < t_1$, или, что то же самое, как решение интегрального уравнения (1.20). Отметим, что решение интегрального уравнения, полученное итерациями по потенциалу, автоматически удовлетворяет начальному условию — точная функция Грина G равна нулю при $t_2 < t_1$, потому что свободная функция G_0 обладает этим свойством. Тем самым мы показали, что функция G , построенная по рецепту (1.18), действительно является функцией Грина уравнения Шредингера для частицы во внешнем поле, а это в силу (1.15) означает, что функция K (1.14) есть функция распространения частицы во внешнем поле.

Введенные нами графики фактически являются диаграммами Фейнмана для рассеяния частицы во внешнем поле в нерелятивистском случае. Отметим, в полученных нами выражениях время и пространственные координаты входят абсолютно равноправно и в аргументах функций Грина, и в последовательных интегралах, определяющих G_n . Именно благодаря этому обстоятельству подход, основанный на функциях Грина, становится особенно удобным, когда мы переходим к релятивистской теории.

Аналогично можно построить функцию Грина для двух и большего числа частиц. Пусть, например, имеются две свободные частицы, их движение опишем графиком

$$\begin{array}{cc} \hline \mathbf{r}_1, t_1 & \mathbf{r}'_1, t'_1 \\ \hline \mathbf{r}_2, t_2 & \mathbf{r}'_2, t'_2 \end{array} \quad (1.21)$$

Функция Грина в этом случае будет просто произведением одночастичных функций Грина, поскольку частицы движутся независимо.

$$G_0(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_1, t'_2, t'_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t_2, t_1) = G_0(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, t'_1 - t_1)G_0(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2, t'_2 - t_2). \quad (1.22)$$

Простейшим графиком, учитывающим взаимодействие между двумя частицами, будет

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1, t_1 & \mathbf{x}_1, \tau_1 & \mathbf{r}'_1, t'_1 \\ \hline & | & \\ & \text{---} & \\ & | & \\ \mathbf{r}_2, t_2 & \mathbf{x}_2, \tau_2 & \mathbf{r}'_2, t'_2 \end{array} \quad (1.23)$$

Пунктирная линия соответствует однократному взаимодействию между частицами. По аналогии со случаем одной частицы сопоставим ей выражение $[-iV(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \tau_2 - \tau_1)]$, где V — потенциал взаимодействия. Для G_1 получаем

$$G_1 = \int G_0(\mathbf{r}'_1, t'_1; \mathbf{x}_1, \tau_1)[-iV(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1; \tau_2 - \tau_1)]G_0(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{r}_1, t_1) \times \\ \times G_0(\mathbf{r}'_2, t'_2; \mathbf{x}_2, \tau_2)G_0(\mathbf{x}_2, \tau_2; \mathbf{r}_2, t_2)d^3x_1d^3x_2d\tau_1d\tau_2. \quad (1.24)$$

В отличие от одной частицы во внешнем поле, в данном случае потенциал описывает взаимодействие двух частиц и поэтому в (1.24) учитывается только один раз. Строгое доказательство (1.24) проведем позже. В нерелятивистской теории взаимодействие распространяется мгновенно, т. е. потенциал зависит от времени как $V(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \tau_2 - \tau_1) = \delta(\tau_2 - \tau_1)$.

Вернемся к частице во внешнем поле. Обычно удобно работать в импульсном представлении. Переход к импульсному представлению проведем так, чтобы сохранить формальную симметрию между пространственными и временными переменными, в дальнейшем это пригодится при обобщении теории на релятивистский случай.

Функция Грина свободной частицы имеет вид (см. (1.15)):

$$G_0(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i(p^2/2m)t} \theta(t). \quad (1.25)$$

Здесь t и \mathbf{r} входят не симметрично. Однако (1.25) можно переписать так:

$$G_0(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} G_0(\mathbf{p}, p_0) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t}, \quad (1.26)$$

В выражении (1.26) как \mathbf{r} и t , так и \mathbf{p} , p_0 входят равноправно. Функция Грина в импульсном представлении $G_0(\mathbf{p}, p_0)$ имеет вид:

$$G_0(\mathbf{p}, p_0) = \frac{1}{\mathbf{p}^2/2m - p_0 - i\varepsilon}. \quad (1.27)$$

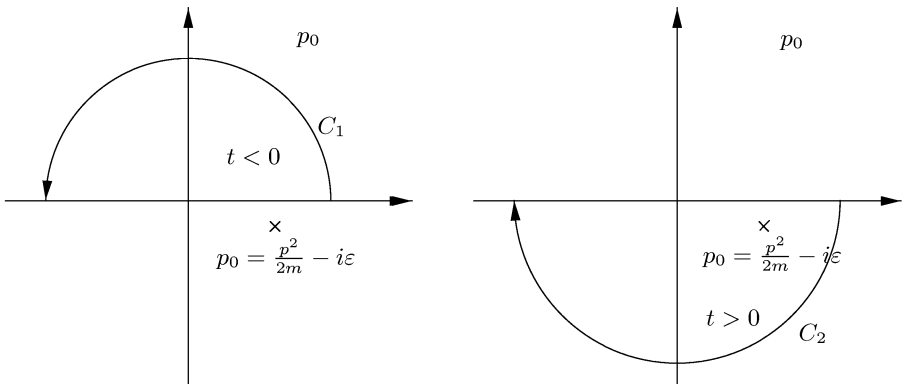
где ε — произвольное малое положительное число. Итак:

$$G_0(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p dp_0}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{\mathbf{p}^2/2m - p_0 - i\varepsilon} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t}. \quad (1.28)$$

Теперь покажем, что (1.28) эквивалентно (1.25). Проинтегрируем по p_0 в (1.28). Подынтегральное выражение имеет простой полюс в точке

$$p_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - i\varepsilon,$$

т. е. в нижней полуплоскости. Если бы $\varepsilon = 0$, то полюс находился бы на вещественной оси и интеграл не имел бы смысла.



При $t < 0$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости, тогда, поскольку внутри контура C_1 не содержится полюсов,

интеграл по нему равен нулю, в то же время интеграл по верхней полуокружности при $t < 0$ равен нулю по лемме Жордана, это приводит к обращению в нуль интеграла (1.28).

При $t > 0$ замкнем контур интегрирования в нижней полуплоскости (аналогично предыдущему интеграл по нижней полуокружности равен нулю) и получим

$$\int_{C_2} = \int \frac{d^3 p dp_0}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - p_0 - i\varepsilon} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t} = -2\pi i \text{Res}|_{p_0}.$$

Здесь $\text{Res}|_{p_0}$ — вычет подынтегрального выражения в точке $p_0 = \mathbf{p}^2/2m - i\varepsilon$. Таким образом, при $t > 0$

$$\int \frac{d^3 p dp_0}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - p_0 - i\varepsilon} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t} = 2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4 i} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\frac{\mathbf{p}^2}{2m} t},$$

т. е. в точности (1.25) при $t > 0$.

Итак, мы доказали, что выражение (1.25) совпадает с (1.28). Явный вид $G_0(\mathbf{p}, p_0)$ (1.28) можно получить непосредственным решением уравнения Шредингера для свободной функции Грина (в (1.27) мы его просто угадали).

Имеем

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right) G_0(\mathbf{r}, t) = i\delta(\mathbf{r})\delta(t). \quad (1.29)$$

Ищем решение в виде (1.27):

$$G_0(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} G_0(\mathbf{p}, p_0) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t}.$$

Подставив (1.27) в (1.29) и используя соотношение

$$\delta(\mathbf{r})\delta(t) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t}, \quad (1.30)$$

получим

$$\int \left(p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) G_0(\mathbf{p}, p_0) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - ip_0 t},$$

т. е.

$$G_0(\mathbf{p}, p_0) = \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - p_0 - i\varepsilon},$$

малая добавка $-i\varepsilon$ введена для того, чтобы обеспечить выполнение условия: при $t < 0$, $G_0(t) = 0$. Введем теперь импульсное представление для потенциала внешнего поля:

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - iq_0 t} V(q), \quad (1.31)$$

$$V(q) = \int d^3 r dt e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r} + iq_0 t} V(\mathbf{r}, t), \quad (1.32)$$

где $q = (q_0, \mathbf{q})$.

Подставляя (1.27) и (1.31) в выражение для $G_1(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1)$, будем иметь для процесса:

$$\begin{array}{ccccc} & G_0 & & -iV & & G_0 \\ & \text{---} & & \bullet & & \text{---} \\ \mathbf{r}_1, t_1 & & & \mathbf{r}', t' & & \mathbf{r}_2, t_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) &= \int d^3 r' dt' \underbrace{\int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4 i} G_0(p_2) e^{i\mathbf{p}_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') - ip_{20}(t_2 - t')}}_{G_0(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}', t')} \times \\ &\times \underbrace{(-i) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V(q) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}' - iq_0 t'}}_{-iV(\mathbf{r}', t')} \underbrace{\int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4 i} G_0(p_1) e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) - ip_{10}(t' - t_1)}}_{G_0(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}_1, t_1)} = \\ &= \int d^4 p_2 d^4 q d^4 p_1 \underbrace{\int d^3 r' dt' e^{i(-\mathbf{p}_2 + \mathbf{q} + \mathbf{p}_1)\mathbf{r}' e^{i(p_{20} - q_0 - p_{10})t'}}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q - p_2)} \times \\ &\times e^{i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2 - ip_{20} t_2} e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + ip_{10} t_1} G_0(p_2) [-V(q)] G_0(p_1) \frac{1}{(2\pi)^{12} i}. \end{aligned}$$

Интегрирование по $d^3 r'$, dt' привело к δ -функции, что является выражением закона сохранения энергии-импульса. Интегрируя по $d^4 q$, получим окончательный результат:

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) &= \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^4 i} e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + ip_{10} t_1} e^{i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2 - ip_{20} t_2} \times \\ &\times G_0(p_2) [-V(p_2 - p_1)] G_0(p_1). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Таким образом, взаимодействие приводит к тому, что первая поправка к свободной функции Грина уже не является функцией только разностей

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; t_2 - t_1$. G_0 можно переписать в аналогичной форме

$$G_0 = \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8 i} \delta(p_1 - p_2) G_0(p_1) e^{i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2 - ip_{20} t_2} e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + ip_{10} t_1}. \quad (1.34)$$

Введя точную функцию Грина в импульсном представлении $G(p_1, p_2)$ по формуле

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8 i} e^{i(\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2 - p_{20} t_2)} e^{-i(\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 - p_{10} t_1)} G(p_1, p_2), \quad (1.35)$$

получим, учитывая (1.34), (1.33),

$$G(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) G_0(p_1) + G_0(p_2) [-V(p_2 - p_1)] G_0(p_1) + \dots \quad (1.36)$$

Графически (1.36) выглядит так:

$$\frac{G(p)}{p_1} \frac{p_2}{p_2} = \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) G_0(p_2)}{p_1} + \frac{G_0(p_1)}{p_1} \frac{-V}{p_2} \frac{G_0(p_2)}{p_2} + \dots$$

Если повторить аналогичные выкладки для следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 & & p' & & p_2 \\ \hline \mathbf{r}_1, t_1 & & \mathbf{r}', t' & & \mathbf{r}'', t'' & & \mathbf{r}_2, t_2 \end{array}$$

получим для $G_2(p_1, p_2)$ следующее выражение:

$$G_2(p_1, p_2) = G_0(p_1) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} V(p' - p_1) G_0(p') V(p_2 - p') G_0(p_2). \quad (1.37)$$

Выражение для $G_1(p_1, p_2)$ (второе слагаемое в (1.36)) соответствует первому борновскому приближению в обычной квантовой механике ($-V(p_2 - p_1)$ — амплитуда рассеяния в этом приближении). (1.37) соответствует второму борновскому приближению, причем интегрирование по импульсам эквивалентно суммированию по промежуточным состояниям.

Аналогичным образом можно сформулировать общие правила построения функций Грина G_n для любой диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 & & p' & & p'' & & p_2 \\ \hline & -V(p' - p_1) & & -V(p'' - p') & & -V(p_2 - p'') & \end{array}$$

Каждой линии сопоставляется свободная функция Грина $G_0(p_i)$, каждой вершине $[-V]$ по всем импульсам промежуточных линий производится интегрирование $d^4 p / (2\pi)^4$.

1.2 Как вычислять наблюдаемые величины

1.2.1 Амплитуда рассеяния

Вычислим, к примеру, амплитуду рассеяния. Пусть нам задано начальное состояние $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$. В результате взаимодействия частица переходит в состояние $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ содержит информацию о взаимодействии и “помнит” начальное состояние. Амплитуда вероятности того, что возникнет состояние Ψ_f , есть

$$\int \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d^3 r.$$

Это выражение можно переписать при помощи функции распространения. Поскольку

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \Psi_i(\mathbf{r}', t') d^3 r',$$

то амплитуда перехода $i \rightarrow f$ или матричный элемент матрицы рассеяния S запишется так:

$$S_{fi} = \int \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d^3 r = \int \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \Psi_i(\mathbf{r}', t') d^3 r d^3 r'.$$

Кроме того, в полученном выражении нужно времена устремить к бесконечности: $t \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$ и окончательно, переходя от функции K к G , получим

$$S_{fi} = \int \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \Psi_i(\mathbf{r}', t') d^3 r d^3 r'. \quad (1.38)$$

Вычислим (1.38) для реального процесса: пусть свободная частица с импульсом \mathbf{p}_1 , провзаимодействовав с полем, перешла в состояние с импульсом \mathbf{p}_2 , т. е.

$$\Psi_1 = e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{r} - i(p_1^2/2m)t}, \quad \Psi_2 = e^{i\mathbf{p}_2 \mathbf{r} - i(p_2^2/2m)t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1} &= \int d^3 r' d^3 r e^{-i\mathbf{p}_2 \mathbf{r} + i(p_2^2/2m)t} e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}' - i(p_1^2/2m)t'} \times \\ &\times \int \frac{d^4 p'_1 d^4 p'_2}{(2\pi)^8 i} G(p'_1, p'_2) e^{i\mathbf{p}'_2 \mathbf{r} - ip'_2 t} e^{-i\mathbf{p}'_1 \mathbf{r}' + ip'_1 t'}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Здесь мы использовали разложение (1.35) для функции Грина $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$. Интегрирование в (1.39) по d^3r, d^3r' дает

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1).$$

В результате получим

$$S_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1} = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int dp_{10} dp_{20} e^{it(p_2^2/2m - p_{20})} e^{-it'(p_1^2/2m - p_{10})} G(p_1, p_2). \quad (1.40)$$

Теперь вспомним разложение $G(p_1, p_2)$ в ряд (1.36):

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2) &= (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) G_0(p_1) + G_0(p_2) [-V(p_2 - p_1)] G_0(p_1) + \\ &+ G_0(p_1) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} V(p' - p_1) G_0(p') V(p_2 - p') G_0(p_2) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (1.40), для первого члена разложения получим

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1}^0 &= -i(2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \int dp_{10} e^{i(t-t')(\mathbf{p}^2/2m - p_{10})} G_0(\mathbf{p}, p_{10}) = \\ &= -i(2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \int \frac{dp_0}{\mathbf{p}^2/2m - p_0 - i\varepsilon} e^{i\tau(\mathbf{p}^2/2m - p_0)} = \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \end{aligned} \quad (1.41)$$

т. е. рассеяния в этом приближении нет. При выводе (1.41) мы использовали явный вид (1.28) для функции Грина $G_0(\mathbf{p}, p_0)$ в силу того, что $\tau > 0$, замкнули контур вниз, для интеграла в результате получили значение $2\pi i$.

Все остальные члены разложения $G(p_1, p_2)$ содержат по краям свободные функции Грина, так что можно написать

$$G(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) G_0(p_1) + G_0(p_1) T(p_1, p_2) G_0(p_2), \quad (1.42)$$

где $T(p_1, p_2)$ содержит все внутренние линии и интегрирования по промежуточным импульсам.

Вычислим вклад в интеграл (1.40) от второго члена (1.42). При $t \rightarrow \infty$ экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении быстро осциллирует и, если бы подынтегральная функция была гладкой, интеграл обратился бы в нуль. Однако она содержит полюсные множители

$$G_0(p_1) G_0(p_2) = \frac{1}{(\mathbf{p}_1^2/2m - p_{10} - i\varepsilon)(\mathbf{p}_2^2/2m - p_{20} - i\varepsilon)}.$$

Функция $T(p_1, p_2)$ является более гладкой, поскольку содержит интегрирования типа

$$\int \frac{d^4 p'}{\mathbf{p}'^2/2m - p'_0}.$$

Поэтому интеграл можно вычислить по вычетам. Окончательно для $S_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1}$ получаем

$$S_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + (2\pi)^4 iT(p_1, p_2). \quad (1.43)$$

Таким образом, $T(p_1, p_2)$ является амплитудой рассеяния, и для ее вычисления нужно поступать следующим образом:

1. выписать интересующие нас графики

$$\overline{\begin{array}{c} p_1 \qquad p' \qquad p_2 \end{array}} \\ \frac{p_1}{\text{---}} \frac{p_2}{\text{---}} + \frac{p_1}{\text{---}} \bullet \frac{p_2}{\text{---}} + \frac{p_1}{\text{---}} \bullet \frac{p'}{\text{---}} \bullet \frac{p_2}{\text{---}},$$

2. написать соответствующую функцию Грина по полученным нами правилам:

$$G(p_1, p_2) = \delta(p_1 - p_2)G_0(p_1)(2\pi)^4 + \frac{iT(p_1, p_2)}{(\mathbf{p}_2^2/2m - p_{20})(\mathbf{p}_1^2/2m - p_{10})};$$

3. выбросить полюсные множители;
4. положить $p_{10} = \mathbf{p}_1^2/2m$, $p_{20} = \mathbf{p}_2^2/2m$ для всех частиц, относящихся к внешним линиям.

1.2.2 Связанные состояния

Покажем, что полюса амплитуды рассеяния определяют энергии связанных состояний. Согласно обычной квантовой механике амплитуда рассеяния есть

$$f = -\frac{2m}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \Psi_E(\mathbf{r}) d^3r, \quad (1.44)$$

где \mathbf{p}' — импульс частицы в конечном состоянии, а $\Psi_E(\mathbf{r})$ — точная волновая функция — решение стационарного уравнения Шредингера с энергией $E = \mathbf{p}'^2/2m$.

Для функции Грина мы написали выражение:

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \theta(\tau) \sum_n \Psi_n(\mathbf{r}_2, t_2) \Psi_n^*(\mathbf{r}_1, t_1).$$

Рассмотрим функцию Грина с определенной энергией:

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau) e^{iE\tau} d\tau = \\ &= \sum_n \Psi_n(\mathbf{r}_2) \Psi_n^*(\mathbf{r}_1) \int_0^\infty e^{i(E-E_n)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{i} \sum_n \frac{\Psi_n(\mathbf{r}_2) \Psi_n^*(\mathbf{r}_1)}{E_n - E}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(H - E)G_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{i} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1.46)$$

Из (1.45) непосредственно видно, что $G_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеет полюса в связанных состояниях. При помощи $G_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ можно сконструировать точное решение стационарного уравнения Шредингера, а именно:

$$\Psi_E(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + (-i) \int G_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d^3r'.$$

Действительно,

$$(H - E)\Psi_E = V(\mathbf{r})e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - V(\mathbf{r})e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= -\frac{2m}{4\pi} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3r + \\ &+ \frac{2m}{4\pi} i \int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) G_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d^3r d^3r' = \\ &= f_B + \frac{2m}{4\pi} \sum_n \frac{f_{n\mathbf{p}'} f_{n\mathbf{p}}^*}{E_n - E}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, f_B — амплитуда рассеяния в борновском приближении,

$$f_{n\mathbf{p}} = \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d^3r. \quad (1.48)$$

Из (1.47) следует, что связанным состояниям действительно соответствуют полюса амплитуды рассеяния.

1.3 Электромагнитное поле

В этом параграфе мы рассмотрим квантовую механику фотона. Это необходимо делать с учетом того, что фотон — объект релятивистский. Напомним, что при классическом описании мы вводим 4-тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x)$ (здесь и далее x обозначает 4-вектор, $x \equiv (\mathbf{x}, t)$), компонентами которого являются напряженности электрического и магнитного полей \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Условимся всевозможные релятивистские инварианты писать в виде

$$x_\mu y_\mu = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3,$$

т. е. не будем различать верхние и нижние индексы, а будем помнить такое правило суммирования по повторяющимся греческим значкам. Иногда нам понадобится также метрический тензор $g_{\mu\nu}$:

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{если} \quad \mu \neq \nu.$$

Будем пользоваться системой единиц Хэвисайда, в которой $\hbar = c = 1$, а единица заряда определяется следующим образом:

$$e^2/4\pi\hbar c = \alpha \simeq 1/137; \quad \text{хэвисайдов заряд} \quad e^2 = 4\pi\alpha \simeq 4\pi/137.$$

При таком выборе системы единиц уравнения Максвелла для $F_{\mu\nu}(x)$ запишутся так:

$$\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} = j_\mu(x), \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (1.50)$$

Это релятивистски инвариантные классические уравнения, описывающие электромагнитное поле. Обычно вводятся потенциалы $A_\mu(x)$:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (1.51)$$

При этом уравнение (1.50) выполняется автоматически. Однако выбор потенциалов неоднозначен и на них можно наложить одно дополнительное условие. Мы выберем его в виде

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{условие Лоренца}). \quad (1.52)$$

Тогда из (1.49) получим следующее уравнение для потенциалов:

$$\square A_\mu(x) \equiv \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} = j_\mu(x). \quad (1.53)$$

Рассмотрим волновое уравнение

$$\square f(x) = 0. \quad (1.54)$$

Это уравнение описывает распространение волны (в частности, электромагнитной) в пустом пространстве.

Попробуем описать свободное электромагнитное поле квантовомеханически. Хотя ничего нового для свободного поля мы не получим, это нам понадобится при рассмотрении взаимодействия. Предположим, что электромагнитное поле состоит из фотонов — квантовых частиц, которые описываются некоторой волновой функцией. Свободные фотоны должны описываться одинаково хорошо и квантовомеханически, и классически, поскольку квантовые эффекты начинают сказываться, когда обратное воздействие прибора на изучаемый объект становится не малым, т. е. при наличии взаимодействия. Однако классическое поле мы можем наблюдать непосредственно, поскольку изменение поля при взаимодействии с прибором в этом случае несущественно. В квантовой механике ситуация меняется. Частица описывается волновой функцией $\Psi(x)$, которая сама по себе непосредственно не измеряется. Квадрат же $|\Psi(x)|^2$ (плотность вероятности) определяет физические величины и потому измерим. Интеграл от плотности вероятности дает вероятность найти квантовомеханическую частицу где-либо в пространстве и не зависит от времени

$$\int |\Psi|^2 d^3r = \text{const.} \quad (1.55)$$

Сохранение вероятности является одним из основополагающих принципов квантовой механики.

Попробуем сконструировать для фотонов величину Ψ , допускающую вероятностное толкование, т. е. обладающую свойством (1.55). С другой стороны, она должна удовлетворять (1.54), которое описывает распространение фотонов в пустом пространстве со скоростью c .

Вспомним, как получается сохранение интеграла (1.55) в обычной квантовой механике. Волновая функция Ψ комплексна и удовлетворяет

уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad H = -\frac{\nabla^2}{2m}. \quad (1.56)$$

Комплексное сопряженное к (1.56) уравнение имеет вид

$$-i\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = H^*\Psi^*. \quad (1.57)$$

Умножая (1.56) на Ψ^* , (1.57) на $-\Psi$ и складывая, получим

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\Psi = \frac{1}{2m}(\Psi\nabla^2\Psi^* - \Psi^*\nabla^2\Psi)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\Psi = -\frac{i}{2m}\text{div}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi). \quad (1.58)$$

Уравнение непрерывности (1.58) и позволяет интерпретировать величину $\Psi^*\Psi$ как плотность вероятности, поскольку

$$\Psi^*\Psi > 0, \quad \int \Psi^*\Psi d^3r = \text{const}.$$

Но уравнение Шредингера явно приближенное, поскольку не является релятивистски инвариантным. Уравнение же (1.54) релятивистски инвариантно. Перепишем его в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f = 0 \quad (1.59)$$

и попытаемся из f сконструировать нечто, удовлетворяющее уравнению непрерывности типа (1.58). Будем считать f комплексным, хотя реальное электромагнитное поле вещественно. Поступим аналогично предыдущему:

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial t^2} - \nabla^2 f^* = 0, \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} f^*\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - f\frac{\partial^2 f^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(f^*\frac{\partial f}{\partial t} - f\frac{\partial f^*}{\partial t}\right) = \\ &= \text{div}(f^*\nabla f - f\nabla f^*). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Мы видим, что, вообще говоря, есть величина, интеграл от которой сохраняется, т. е. можно попытаться интерпретировать как плотность вероятности

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim f^* \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial f^*}{\partial t}. \quad (1.62)$$

Из (1.62) непосредственно следует, что f должна быть комплексной, иначе выражение обратится в нуль, т. е. отождествление f с полем невозможно.

В отличие от обычной квантовой механики, в $\rho(\mathbf{r}, t)$ входят производные, это следствие того, что (1.59) — уравнение второго порядка по времени, и для однозначного определения волновой функции нужно в начальный момент задать и функцию, и ее производную. Ситуация здесь такая же как с электромагнитным потенциалом в классической механике: \mathbf{A} удовлетворяет уравнению второго порядка, однако измерение электрического \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} в один момент времени позволяет фиксировать и \mathbf{A} , и его производную $\dot{\mathbf{A}}$. В этом еще ничего плохого нет.

Хуже обстоит дело с тем, что $\rho(\mathbf{r}, t)$, определенная в (1.62), может принимать отрицательные значения. Чтобы обойти эту трудность, попробуем выбрать из решений уравнения (1.59) такие, чтобы для них $\rho(\mathbf{r}, t)$ была положительна. Для этой цели рассмотрим, какие вообще решения имеет (1.59).

Будем искать решение в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_k e^{-ikx} f(k), \quad (1.63)$$

где $kx = k_0x_0 - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$; k_0, k_1, k_2, k_3 — четыре независимых числа. Тогда

$$\square f(x) = \sum_k (-k_\mu^2) e^{-ikx} f(k) = 0, \quad (1.64)$$

где $k_\mu^2 = k_\mu k_\mu = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2$, как мы условились. Очевидно, что решением (1.64) является

$$k_0 = \pm |\mathbf{k}|. \quad (1.65)$$

то есть имеется два решения. Общее решение можно написать так (ниже под k_0 будем понимать положительный корень (1.65)):

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x), \quad (1.66)$$

где

$$f_+(x) = \sum_k e^{-i(k_0 x_0 - \mathbf{k}\mathbf{r})} f(k) \quad (1.67)$$

— так называемое положительно-частотное решение,

$$\begin{aligned} f_-(x) &= \sum_k e^{-i(-k_0 x_0 - \mathbf{k}\mathbf{r})} f(k) = \\ &= \sum_{k'} e^{i(k_0 x_0 - \mathbf{k}'\mathbf{r})} f(k') \end{aligned} \quad (1.68)$$

— отрицательно-частотное решение. Итак, в отличие от решения уравнения Шредингера, мы получили два комплексных решения с разными частотами.

В качестве волновой функции выберем $\Psi = f_+$ (по аналогии с нерелятивистским случаем, где мы выбирали e^{-iEt}). Тогда, если положить

$$\rho = i \left(f_+^* \frac{\partial f_+}{\partial t} - f_+ \frac{\partial f_+^*}{\partial t} \right) \equiv f_+^* i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} f_+, \quad (1.69)$$

легко показать, что интеграл от этой величины сохраняется и положителен. Действительно,

$$\begin{aligned} \int \rho d^3r &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(k) f^*(k') i \int [e^{ikx} (-ik'_0) e^{-ik'x} - ik_0 e^{-ik'x} e^{ikx}] d^3r = \\ &= (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} f(k) f^*(k) 2k_0, \end{aligned} \quad (1.70)$$

т. е., если $k_0 = |\mathbf{k}|$, это выражение положительно. Соответственно, для отрицательно-частотного решения выражение (1.70) имело бы другой знак.

Теперь возникает вопрос, можно ли функции $\rho(x)$ придать смысл локальной плотности вероятности. Для этого она сама должна быть положительной: непосредственно этого сказать нельзя, так как ρ состоит из экспонент, которые осциллируют, за исключением стационарного случая, когда

$$f_+ = e^{-i\omega t} \Psi(\mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}, t) = 2\omega |\Psi(\mathbf{r})|^2.$$

Значит, для стационарного состояния, ρ можно придать смысл плотности вероятности, как и в нерелятивистской квантовой механике.

В общем случае этого сделать нельзя. Причина этого глубоко связана с самой природой релятивистской квантовой теории. В нерелятивистской теории в процессе измерения свойства частицы как таковой, не меняются. В релятивистской же теории, как мы вскоре увидим, количество частиц не сохраняется. Поэтому попытка измерения координаты фотона за конечное время (что приводит к нестационарному состоянию) приводит к рождению новых фотонов, и потому понятие одночастичной волновой функции утрачивает смысл.

Итак, мы получили, что в качестве волновой функции фотона можно выбрать, в частности, положительно-частотное решение уравнения Даламбера (1.59), тогда можно определить функцию $\rho(x)$ так, что интеграл от нее по всему пространству сохраняется во времени, а в случае стационарного состояния ей можно приписать смысл плотности вероятности, как в обычной квантовой механике.

Как выглядит условие ортогональности для волновых функций фотона, соответствующих различным \mathbf{k} ? В нерелятивистской квантовой механике

$$\int \Psi_{\mathbf{k}}^* \Psi_{\mathbf{k}'} d^3 r = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (1.71)$$

В нашем случае соответствующее выражение имеет вид:

$$\int f_{\mathbf{k}}^* i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} f_{\mathbf{k}'} d^3 r = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (1.72)$$

В этом смысле отрицательно- и положительно-частотные решения ортогональны, т. е.

$$\int f_{-}^* i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} f_{+} d^3 r = 0.$$

Свободное движение частицы описывается плоской волной:

$$f_{+}(x) = e^{-ikx} f_{+}(k).$$

Подставляя в (1.72), получим

$$f_{+}(k) f_{+}^*(k') 2k_0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

откуда

$$f_{+}(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0}}. \quad (1.73)$$

Функция (1.73) описывает свободно распространяющийся фотон с заданной энергией и импульсом.

На самом деле мы описали пока не совсем фотоны, поскольку реальные фотоны имеют векторный характер (описываются четырехмерным потенциалом A_μ). Повторим теперь наши рассуждения для реальных фотонов. Также выделим положительно- и отрицательно-частотные части из решений уравнения Даламбера для A_μ :

$$\square A_\mu = 0. \quad (1.74)$$

Ищем решение в виде

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [a_\mu(k)e^{-ikx} + a_\mu^*(k)e^{ikx}]. \quad (1.75)$$

Это выражение записано в виде $a + a^*$ в силу вещественности $A_\mu(x)$. Подставляя (1.75) в (1.74), получим, как и раньше,

$$k^2 \equiv k_\mu^2 = 0 \quad \text{или} \quad k_0 = \pm|\mathbf{k}|.$$

Волновую функцию фотона можно записать:

$$f_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_\mu(k)e^{-ikx}. \quad (1.76)$$

Нормированному состоянию с определенным импульсом соответствует

$$a_\mu(k) = \frac{e_\mu(k)}{\sqrt{2k_0}}, \quad (1.77)$$

где e_μ — единичный вектор поляризации, (1.77) получается аналогично (1.73).

Из условия Лоренца следует

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

или

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu e_\mu}{2k_0} e^{-ikx} = 0,$$

т. е.

$$k_\mu e_\mu = 0. \quad (1.78)$$

Это условие четырехмерной поперечности фотона. Что оно означает? Вообще говоря, в четырехмерном пространстве можно ввести 4 независимых вектора e_μ^λ , в силу (1.78) остается 3 независимых вектора, ортогональных k_μ , но поскольку $k_\mu^2 = 0$, один из этих векторов совпадет с k_μ , так как “он сам себе ортогонален”. Иначе говоря, в пространстве Минковского, в отличие от евклидоваго, нельзя построить три вектора, ортогональных вектору, у которого $k_\mu^2 = 0$.

Действительно, выберем систему координат так, что

$$\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}, \quad \text{т. е.} \quad k_\mu = (k_0, 0, 0, k_z), \quad k_0 = k_z.$$

Два вектора, ортогональных данному, имеют вид:

$$\begin{aligned} e_\mu^{(1)} &= (e_0, e_x, e_y, e_z) = (0, 1, 0, 0), \\ e_\mu^{(2)} &= (0, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

третий же вектор $e_\mu^{(3)}$ параллелен k_μ . Действительно,

$$k_0 e_0^{(3)} - k_z e_z^{(3)} = 0; \quad e_0^{(3)} = e_z^{(3)}, \quad \text{так как} \quad k_0 = k_z.$$

Следовательно, оба вектора $e_\mu^{(3)}$ и k_μ имеют структуру $(a, 0, 0, a)$, т. е. отличаются численным множителем. Кроме того, при помощи калибровочного преобразования мы его всегда можем обратить в нуль, т. е. на физических результатах наличие $e_\mu^{(3)}$ не должно сказываться. Действительно, уравнения Максвелла инвариантны относительно замены потенциалов

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}. \quad (1.79)$$

Разложив $f(x)$ в интеграл Фурье, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} (-ik_\mu) f(k), \quad (1.80)$$

т. е. в импульсном пространстве калибровочному преобразованию соответствует замена волновой функции фотона:

$$a_\mu(k) \rightarrow a_\mu(k) - ik_\mu f(k). \quad (1.81)$$

А поскольку $a_\mu^{(3)}(k) = e_\mu^{(3)}(k)/\sqrt{2k_0} \parallel k_\mu$, то ясно, что выбором $f(k)$ мы всегда сможем обратить эту компоненту в нуль.

Таким образом, у фотона могут быть только две независимых поляризации, роль которых играют пространственные компоненты векторного потенциала. Поэтому, хотя спин фотона равен 1, вклад в физически наблюдаемые величины могут дать только 2 поперечные проекции. Этот факт является следствием равенства нулю массы фотона ($k_\mu^2 = m^2 = 0$).

Итак, волновую функцию фотона мы можем записать в виде:

$$\begin{aligned} f_\mu &= \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e_\mu^\lambda(k)}{\sqrt{2k_0}} e^{-ikx} C(k, \lambda) \equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_\mu^{\lambda k}(x) C(k, \lambda). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Чтобы сконструировать плотность вероятности мы должны составить величину, аналогичную (1.72), из f_μ и просуммировать по векторному значку. В соответствии с нашим соглашением о метрике $e_\mu^{(1)} e_\mu^{(1)} = e_\mu^{(2)} e_\mu^{(2)} = -1$ это подразумевает, что суммировать надо со знаком *минус*, таким образом

$$\rho = (-g_{\mu\nu}) f_\mu^{*i} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} f_\nu.$$

Условие нормировки для фотона:

$$\begin{aligned} -g_{\mu\nu} \int f_\mu^{\lambda_2 k^*}(x) i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} f_\nu^{\lambda_1 k}(x) d^3r &= -e_{\mu_2}^{\lambda_2^*} e_{\mu_1}^{\lambda_1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \\ &= \delta_{\lambda_1 \lambda_2} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Полученные нами волновые функции имеют простую классическую интерпретацию. Записав вектор-потенциал в форме (1.75) и вычисляя среднюю энергию электромагнитного поля

$$\int_{V=1} d^3r \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} = \omega,$$

мы видим, что нормировка нашей амплитуды a_μ отвечает ситуации, когда имеется ровно один фотон в единичном объеме.

1.4 Фотоны во “внешнем поле”

Попытаемся найти функцию распространения релятивистской частицы, которая описывается волновой функцией $f_+(x)$. (От индексов пока снова отвлекаемся.)

В нерелятивистской теории мы получили функцию распространения в виде суммы

$$K(x_2, x_1) = \sum_n \Psi_n(x_2) \Psi_n^*(x_1), \quad (1.84)$$

причем сконструировали ее таким образом, чтобы

$$\Psi(x_2) = \int K(x_2, x_1) \Psi(x_1) d^3 r_1. \quad (1.85)$$

В релятивистской теории нужно учесть следующие моменты:

1. в начальный момент нам нужно задать и функцию, и ее производную по времени;
2. волновая функция у нас была определена как положительно-частотное решение уравнения Даламбера, поэтому необходимо, чтобы при действии функции распространения на начальное состояние не появились отрицательные частоты.

Попытаемся угадать вид функции распространения. Напишем по аналогии с (1.84)

$$K(x_2, x_1) = \sum_n f_n^+(x_2) f_n^{+*}(x_1) \quad (1.86)$$

и изменим формулу (1.85) следующим образом:

$$f^+(x_2) = \int K(x_2, x_1) i \frac{\partial}{\partial t_1} f^+(x_1) d^3 r_1. \quad (1.87)$$

Теперь можно проверить, что выражения (1.86) и (1.86) правильно описывают изменение во времени волновой функции релятивистской частицы. Рассмотрим вначале волновую функцию, которая отвечает одному стационарному состоянию, т. е. положим

$$f^+(x_1) = f_m^+(x_1),$$

тогда

$$f^+(x_2) = \sum_n f_n^+(x_2) \int f_n^{+*}(x_1) i \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} f_m^+(x_1) d^3 r_1 = f_m^+(x_2). \quad (1.88)$$

Мы учли условие ортогональности волновых функций в виде (1.72). В нерелятивистском случае в соотношении, аналогичном (1.88), фигурировало бы, соответственно, условие ортогональности в виде (1.71).

Таким образом, мы нашли правильный закон распространения релятивистской частицы в стационарном состоянии f_n , а поскольку любое состояние можно разложить по f_n , то этот закон справедлив для любого состояния. Отметим, что вид (1.87) обусловлен тем, что уравнение Даламбера второго порядка по времени (1.87) как раз и дает его решение при заданных начальных условиях (т. е. при заданном значении функции и ее производной в начальный момент времени).

Вычислим функцию распространения свободной безмассовой частицы. Мы уже знаем, что ее нормированная волновая функция

$$f_n = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0}},$$

тогда мы получаем

$$K(x_2, x_1) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik(x_2-x_1)}}{2k_0}, \quad (1.89)$$

$$k_0 = |\mathbf{k}|.$$

Наша функция распространения релятивистски инвариантна. Чтобы увидеть это явно, используя соотношение

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i),$$

где x_i — корни уравнения $f(x_i) = 0$, запишем ее в виде

$$K(x_2, x_1) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2) e^{-ik(x_2-x_1)} \theta(k_0). \quad (1.90)$$

Функция $\theta(k_0)$ введена, чтобы отобрать только положительные частоты. Выражение (1.90) имеет явно релятивистски инвариантный вид.

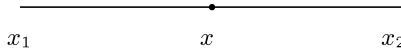
(Знак энергии также релятивистски инвариантен для частиц с $k_\mu^2 \geq 0$!) Легко видеть, что $K(x_2, x_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\square_2 K(x_2, x_1) = 0 \quad (1.91)$$

(где \square_2 обозначает оператор Даламбера). Действительно, подставляя (1.90) в (1.91), получаем

$$k^2 \delta(k^2) = 0.$$

Теперь попробуем ввести взаимодействие $V(x)$ в нашу релятивистскую теорию. Мы введем его так, чтобы графику



как и раньше, соответствовала поправка к свободной функции распространения:

$$\int K(x_2 - x)V(x)K(x - x_1)dx. \quad (1.92)$$

В нерелятивистском случае к аналогичному выражению мы требовали, чтобы $t_1 < t < t_2$. Это соответствует тому, что частица сначала возникла, а потом взаимодействовала, мы учли это условие, введя функцию Грина:

$$G(x_2 - x_1) = \theta(t_2 - t_1)K(x_2 - x_1).$$

Можно ли в релятивистской теории поставить такое условие? К сожалению, вообще говоря, упорядочение по времени $t_1 < t$ релятивистски неинвариантно. Оно становится релятивистски инвариантным, только если интервал $(x - x_1)^2 > 0$, т.е. времениподобен. Однако функция $K(x_1 - x_2)$ отлична от нуля и для пространственно-подобных интервалов, и поэтому условие $t_1 < t < t_2$ привело бы к тому, что выражение (1.92) для амплитуды перехода стало бы релятивистски неинвариантным.

Наши рассуждения мы можем проверить непосредственно; введем

$$\tilde{G} = \theta(t_2 - t_1)K(x_2 - x_1)$$

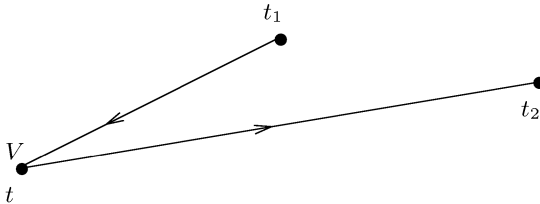
и посмотрим, какому уравнению удовлетворяет эта функция. Действуя оператором Даламбера на \tilde{G} , мы получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \nabla_2^2 \right) \tilde{G}(x) = \theta(t_2 - t_1) \left[\frac{\partial^2 K}{\partial t_2^2} - \nabla_2^2 K \right] + \frac{\partial \theta}{\partial t_2} \frac{\partial K}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_2^2} K.$$

В этом выражении в правой части первый член равен нулю в силу (1.91), оставшиеся же члены явно релятивистски не инвариантны, т. е. действительно, условие $t_1 < t < t_2$ не имеет смысла. Таким образом, нам не удалось совместить два требования:

1. чтобы функция распространения содержала только положительные частоты (мы ее строили именно так, поскольку только для положительных частот можно ввести вероятностное толкование);
2. чтобы взаимодействие произошло в t между t_1 и t_2 , т. е. требование причинности.

Отказ от требования 1 равносителен отказу от вероятностной трактовки квантовой механики, так что посмотрим, нельзя ли пересмотреть понятие причинности в форме 2. Может ли взаимодействие произойти раньше момента времени t_1 , когда частица родилась? Иначе говоря, возможен ли график

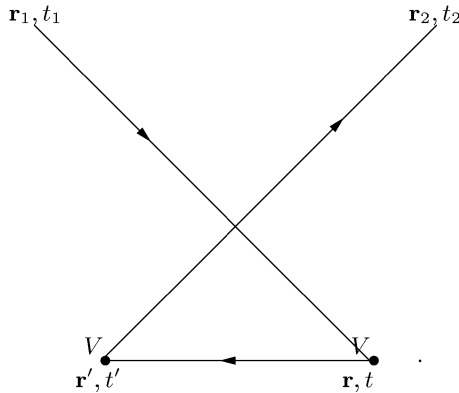


(считаем далее на графиках, что ось времени направлена слева направо)?

В действительности этот график можно понимать и иначе: именно, будем считать, что в момент t родились 2 частицы, а в момент t_1 одна из них исчезла. При такой интерпретации причинность сохраняется, и подобные графики имеют смысл. Рассмотрим еще один пример:



Если $t' < t$, то этот график можно интерпретировать иначе: в момент t' родилось 2 частицы, в момент t частицы, распространяющиеся из \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}' , аннигилировали, и в момент t_2 осталась одна частица.



Такая интерпретация возможна, если предположить, что функция распространения, в присутствии взаимодействия, описывает также и процессы, в которых на некотором интервале времени может существовать несколько частиц. Таким образом, в релятивистской теории, чтобы ввести взаимодействие, нам приходится отказаться от сохранения числа частиц. Это как раз и соответствует тому, что нам не удалось ввести локальную плотность вероятности. Несохранение числа частиц, т. е. возможность их рождения или уничтожения, ничему не противоречит, поскольку, в силу соотношения неопределенностей $\Delta E \Delta t \sim 1$, на короткий промежуток времени может родиться сколько угодно частиц. Ясно, что для того, чтобы описанная интерпретация распространения частицы от t_1 до t при $t < t_1$ имела смысл, $K(t, t_1)$ при $t < t_1$ должно равняться $K(t, t_1)$ при $t > t_1$, но при том же значении $|t - t_1|$, если предполагается, что в момент $t < t_1$ рождаются те же частицы. Для того, чтобы это имело место, функция распространения должна быть разрывна при $t = t_1$. В результате так определенная функция распространения не может удовлетворять однородному уравнению Даламбера. Она окажется функцией Грина этого уравнения.

Рассмотрим теперь связь между функцией распространения (1.90) и функциями Грина уравнения Даламбера:

$$\square G(x) = -i\delta(x). \quad (1.93)$$

Разложим $G(x)$ в интеграл Фурье:

$$G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} e^{-ikx} G(k). \quad (1.94)$$

Аналогичное разложение для $\delta(x)$ имеет вид:

$$\delta(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}. \quad (1.95)$$

Подставляя (1.95), (1.94) в (1.93), получим

$$\square G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} (-k^2) e^{-ikx} G(k) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx},$$

откуда

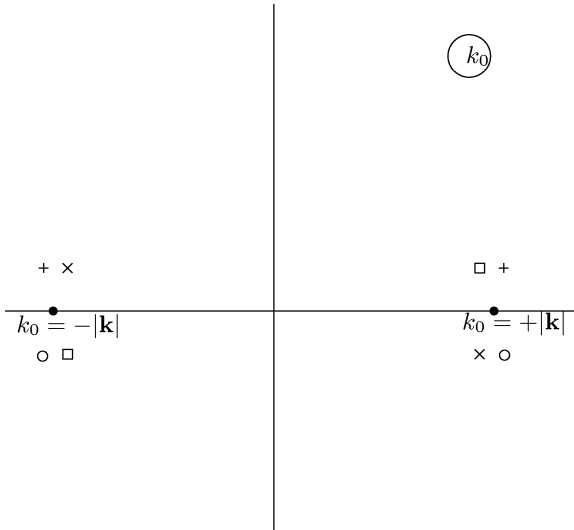
$$G(k) = -\frac{1}{k^2}, \quad (1.96)$$

тогда

$$G(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} e^{-ikx} \frac{1}{k^2}. \quad (1.97)$$

Поскольку $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$, подынтегральное выражение (1.97) имеет два полюса по k_0 : $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$. Чтобы интеграл (1.97) имел смысл, эти полюсы нужно немного сдвинуть в комплексную область.

Рассмотрим комплексную плоскость k_0 .



У нас имеется 4 возможности сдвига полюсов с вещественной оси, как указано на рисунке.

1. Пусть оба полюса снизу (отмечены “о”), тогда если $t < 0$, то контур нужно замкнуть вверх, и тогда

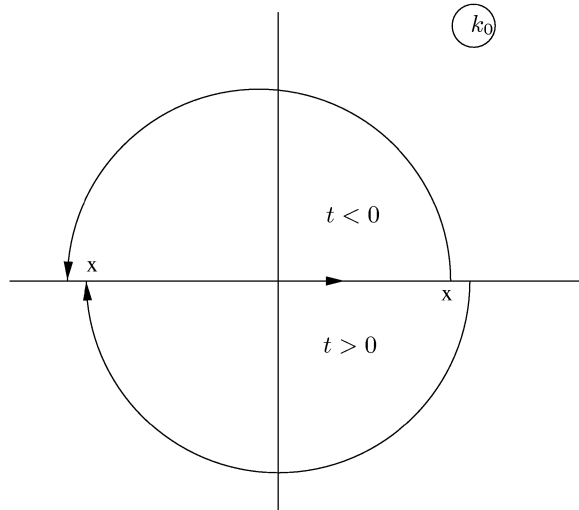
$$G_R = 0, \quad t < 0. \quad (1.98)$$

При $t > 0$ контур нужно замкнуть вниз, тогда

$$G_R = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|k|t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2|\mathbf{k}|} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i|k|t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2|\mathbf{k}|}, \quad t > 0. \quad (1.99)$$

G_R содержит отрицательные частоты и поэтому нас не устраивает.

2. Рассмотрим теперь случай расположения полюсов, отмеченный x на рисунке, т. е.



при $t > 0$, замыкая контур вниз, получим:

$$G = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|k|t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2|\mathbf{k}|}, \quad t > 0 \quad (1.100)$$

и, соответственно, при $t < 0$

$$G = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i|k|t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2|\mathbf{k}|}. \quad (1.101)$$

Сравнив (1.100) с (1.89), обнаруживаем замечательный факт: при $t > 0$ наша функция Грина совпадает с функцией распространения и устроена таким образом, что содержит отрицательные частоты только при $t < 0$ (и только отрицательные). Более того, поскольку фаза подынтегрального выражения (1.101) содержит $|k| > 0$, а $t < 0$, то

$$G(x) = G(-x). \quad (1.102)$$

Эту функцию G называют причинной или фейнмановской функцией Грина. Как мы увидим ниже, именно эта функция описывает распространение релятивистских частиц таким образом, чтобы причинность выполнялась. Положение полюсов в фейнмановской функции Грина отвечает замене $k^2 \rightarrow k^2 + i\varepsilon$ в знаменателе выражения (1.97).

Рассмотрим теперь, что будет, если принять во внимание спин фотона, т. е. с учетом того, что волновая функция фотона имеет вид $f_\mu^\lambda(x)$. Функция распространения в этом случае будет зависеть от спинов начального и конечного состояний, т. е. $K = K_{\mu\nu}$, причем

$$K_{\mu\nu}(x_2, x_1) = \sum_{n,\lambda=1,2} f_\mu^{n\lambda}(x_2) f_\nu^{n\lambda*}(x_1). \quad (1.103)$$

Аналогично и функция Грина фотона, ее обозначают $D_{\mu\nu}$, удовлетворяет уже уравнению

$$\square D_{\mu\nu}(x) = +ig_{\mu\nu}\delta(x), \quad (1.104)$$

$$D_{\mu\nu}(x) = +g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (1.105)$$

Малая мнимая добавка $i\varepsilon$ сдвигает полюса как раз в нужную сторону; действительно, $k^2 + i\varepsilon = 0 \rightarrow k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 - i\varepsilon}$. При $t > 0$ (1.105) дает:

$$D_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \frac{1}{2|\mathbf{k}|}, \quad t > 0, \quad k_0 = |\mathbf{k}|. \quad (1.106)$$

Эта функция уже не совсем совпадает с функцией распространения (1.103), поскольку

$$K_{\mu\nu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikx}}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda*} e_{\nu}^{\lambda}. \quad (1.107)$$

В (1.107) суммирование происходит по двум физическим поляризациям фотона, а в (1.106)

$$-g_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 e_{\mu}^{\lambda*} e_{\nu}^{\lambda},$$

т. е. выражение (1.106) не учитывает того факта, что независимых поляризаций всего две. С другой стороны, это единственное решение уравнения (1.104), а в правой части (1.104) мы ничего изменить не можем без потери релятивистской инвариантности.

Таким образом, вообще говоря, мы пришли в противоречие с калибровочной инвариантностью, которая как раз и требует, чтобы физических поляризаций у фотона было всего две. Однако если взаимодействие так устроено, что фотоны с этими “лишними” поляризациями, так называемые скалярные ($e_{\mu}^{(0)}$) и продольные ($e_{\mu}^{(3)}$) фотоны, не рождаются, то все будет согласовано. Иначе говоря, калибровочная инвариантность в релятивистской теории накладывает определенные условия на вид взаимодействия, в чем, конечно, нет ничего удивительного. Мы хорошо знаем это еще из классической теории. Действительно, рассмотрим уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{\nu}} = j_{\mu}.$$

Из антисимметричности $F_{\mu\nu}$ немедленно следует, что

$$\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\mu}} = \frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0$$

— ток должен сохраняться. Мы видим, что и в классической теории описание электромагнитного поля возможно только при определенном ограничении на взаимодействие, а именно: оно должно быть таким, чтобы ток сохранялся,

$$\frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (1.108)$$

Вернемся к сравнению функции распространения и функции Грина. Функция распространения была построена для реальных фотонов, для которых $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$, а в функции Грина присутствует интегрирование по всем k_0, k_1, k_2, k_3 и $k^2 \neq 0$ т. е. виртуальный фотон не безмассов. Условие Лоренца $k_\mu e_\mu = 0$ в этом случае определяет уже не два независимых вектора, а три, т. е., казалось бы, суммирование должно производиться по трем поляризациям. Сумму по трем поляризациям мы уже сможем записать в релятивистски инвариантном виде, а именно:

$$\sum_{\lambda=0}^2 e_\mu^{\lambda*} e_\nu^\lambda = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu}. \quad (1.109)$$

Здесь мы вычли из суммы по всем поляризациям член, соответствующий поляризации вдоль k_μ . Таким образом, единственное, как мы можем улучшить функцию Грина (1.105), это рассмотрим

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(x) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \left[\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right], \quad (1.110)$$

а на взаимодействие наложить условие, чтобы член $\sim k_\mu k_\nu / k^2$ не давал вклада в физически наблюдаемые величины. Как мы убедимся ниже, это условие полностью аналогично требованию сохранения тока, которое мы имели в классической теории. Фактически это не есть новое требование, так как в любом случае для случая реальных фотонов с $k^2 = 0$ взаимодействие не должно приводить к появлению продольных поляризаций.

Более того, условие, что взаимодействие при $k^2 \neq 0$ не рождает поляризаций, пропорциональных k_μ для реальных фотонов, при $k^2 = 0$ оставляет только две физические поляризации. Действительно, легко видеть, что

$$e_\mu^{(3)*} e_\nu^{(3)} + e_\mu^{(0)*} e_\nu^{(0)} = g_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \frac{k^2}{k^2} + \text{члены с } k_\mu, k_\nu.$$

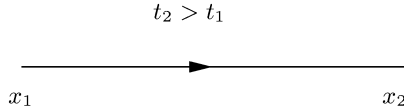
Поляризации, пропорциональные k_μ, k_ν , не рождаются благодаря свойствам взаимодействия, а первый член обращается в ноль для безмассового фотона.

Подводя итоги, можно сказать, что сохранение тока приводит к тому, что при $k^2 \neq 0$, для виртуального фотона, из четырех поляризаций в функции Грина остаются три, а для реального фотона — только две физические поляризации.

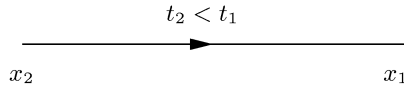
Итак, если ток сохраняется, то можно использовать функцию Грина (1.106) — сумму по всем четырем поляризациям. Легко также видеть, что справедливо соотношение, аналогичное (1.102):

$$D_{\mu\nu}(x) = D_{\nu\mu}(-x). \quad (1.111)$$

Этот факт говорит о том, что наряду с процессом



(возникновение фотона в x_1 и уничтожение в x_2) $D_{\mu\nu}$ описывает также процесс, идущий как бы обратно во времени, т. е.



и этот процесс можно в силу (1.111) интерпретировать как рождение частицы в x_2 и распространение в x_1 , причем эта частица тождественна фотону. Примерами появления такой ситуации, в частности, являются процессы, описываемые графиками на стр. 37.

Суммируем полученные результаты. Мы написали волновую функцию фотона

$$f_\mu = \frac{e^\lambda e^{-ikx}}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}$$

и функцию Грина

$$D_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}.$$

Кроме того, нам известны волновая функция нерелятивистской частицы

$$\Psi(x) = e^{-ipx}, \quad p_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

и ее функция Грина

$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ipx}}{\mathbf{p}^2/2m - p_0 - i\varepsilon}.$$

Этого уже достаточно, чтобы построить квантовую электродинамику нерелятивистских частиц, и она будет эквивалентна обычной квантовой теории излучения. Но проще строить электродинамику релятивистских частиц, из которой в пределе можно получить и нерелятивистские результаты. Для этой цели займемся изучением релятивистских частиц с массой.

1.5 Свободные релятивистские частицы с массой

Покоящаяся свободная частица характеризуется двумя аддитивными интегралами движения: энергией, равной массе m частицы, и внутренним моментом количества движения — спином J . Будем все частицы классифицировать по массе и спину. Нам нужно построить теорию для свободных частиц с любой массой и спином и движущихся с произвольными скоростями, т. е. с любым импульсом \mathbf{p} .

Чтобы понять, какие особенности теории связаны с релятивизмом, а какие — со спином, начнем с частиц с $J = 0$; в природе таких частиц много, например, π -мезоны: π^- , π^0 , π^+ с массой $m \sim 140$ МэВ.

Следствием классической релятивистской инвариантности является соотношение между энергией E и импульсом \mathbf{p} :

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (1.112)$$

Соответственно, квантовомеханическая частица имеет волновую функцию

$$\Psi(x) \sim e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - iEt}, \quad (1.113)$$

где E и \mathbf{p} связаны (1.112).

Рассмотрим, какому уравнению удовлетворяет (1.113). Напишем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \Psi(x) = 0. \quad (1.114)$$

Подставляя (1.113) в (1.114), получим (1.112), т. е. (1.112) эквивалентно квантовому уравнению (1.114). Если принять в качестве волновой функции (1.113), а она удовлетворяет (1.114), то при попытке ввести плотность вероятности $\rho(x)$ мы встретимся точно с такими же трудностями, как и в случае электромагнитного поля. Совершенно аналогично

$$\rho(x) \neq |\Psi(x)|^2, \quad \text{поскольку} \quad \int |\Psi(x)|^2 d^3x \neq \text{const.}$$

Как и раньше, сохраняется величина $\Psi^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \Psi$, удовлетворяющая уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\Psi^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_t \Psi(x) \right] = \operatorname{div} i [\Psi^*(x) \nabla \Psi(x) - \Psi(x) \nabla \Psi^*(x)]. \quad (1.115)$$

И единственное, что мы можем принять за плотность вероятности, это

$$\rho(x) = \Psi_+^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_t \Psi_+(x), \quad (1.116)$$

где Ψ_+ — положительно-частотное решение (1.114), соответствующее $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Отрицательно-частотное решение, соответствующее $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, будем обозначать Ψ_- .

В дальнейшем будем писать $\Psi_+ = \Psi$. Как и для фотона, в случае стационарного состояния $\Psi(x) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-iEt}$ функция $\rho(\mathbf{r})$ имеет буквальный смысл плотности вероятности:

$$\rho(\mathbf{r}) = 2E |\Psi(\mathbf{r})|^2.$$

Аналогичным образом можно ввести и волновую функцию для свободной частицы

$$\Psi(x) = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}}, \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.117)$$

и функцию Грина

$$G(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}. \quad (1.118)$$

(В $D_{\mu\nu}(x)$ в знаменателе перед k^2 тоже фактически знак минус, поскольку для фотона существенны пространственные компоненты $\delta_{\mu\nu}$, а $\delta_{11} = \delta_{22} = -1$.) Как и раньше,

$$G(x) = G(-x) \quad (1.119)$$

и при $t > 0$ имеем из (1.118)

$$G(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} t},$$

т. е. вперед во времени распространяются положительные частоты.

1.6 Взаимодействие бесспиновых частиц

Как можно описать взаимодействие в релятивистской квантовой теории? У нас нет потенциала, никаких сил, поскольку эти понятия глубоко нерелятивистские, более того, поле тоже представлено частицами. Итак, мы имеем всевозможные частицы, которые характеризуются своими массами и спинами, и более ничего. Рассмотрим две различные частицы с массами m_1 и m_2 без спина, их волновые функции Ψ_1, Ψ_2 . Сопоставим функции Грина первой частицы прямую линию, второй — волнистую, т. е.

$$\overline{x_1 \quad \quad \quad x_2} = G_1(x_2 - x_1),$$

$$\overbrace{x_3 \quad \quad \quad x_4}^{\text{wavy}} = G_2(x_4 - x_3).$$

Допустим, они провзаимодействовали (пока считаем, что больше никаких частиц не существует). Что может случиться с двумя точечными объектами? Единственное: в точке x они столкнулись и разлетелись каким-то образом, как показано на рис. 1.

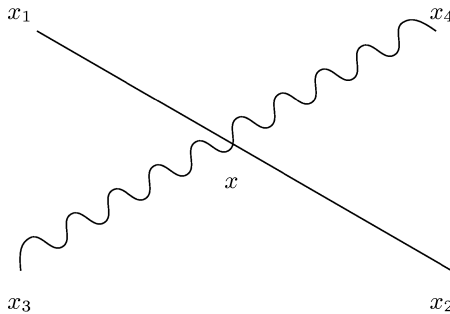


Рис. 1

Посмотрим, чему может быть равна амплитуда такого взаимодействия. Амплитуду перехода двух частиц из точек x_1, x_2 в точки x_3, x_4 с учетом того, что они встретились в точке x , можно записать так:

$$\begin{aligned} G_{12}(x_2, x_4; x_1, x_3) &= \\ &= \int G_1(x_2 - x) G_2(x_4 - x) V(x) G_1(x - x_1) G_2(x - x_3) d^4x, \end{aligned} \quad (1.120)$$

где $V(x)$ есть некоторая амплитуда взаимодействия. Однако в силу однородности пространства и времени, она не может зависеть от места и времени встречи частиц, а следовательно, $V(x) = \text{const} = \lambda$. Тем самым мы получили конкретную формулу, содержащую единственную const , и где все остальное известно.

Интегрирование в (1.120) производится по всем пространственно-временным точкам x . В области

$$t_1, t_3 < t < t_2, t_4$$

интерпретация данного процесса очевидна. Однако мы говорили, что в силу релятивистской инвариантности так ограничивать область интегрирования нельзя, поскольку наверняка в интеграле есть и другая область, например:

$$t_1 < t < t_3, t_2, t_4.$$

В этом случае буквальная интерпретация теряет смысл, и картинку естественно перерисовать так:

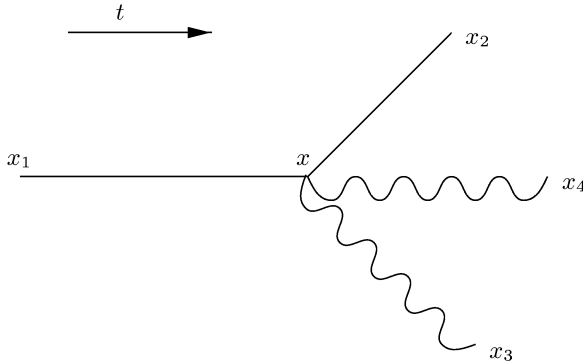


Рис. 2

Этот график означает, что частица распространялась до точки x и в ней в результате взаимодействия распалась на три частицы. Таким образом, если мы хотим описать процесс, изображенный на рис. 1, то в силу релятивистской инвариантности нельзя избежать процессов, аналогичных приведенному на рис. 2, поскольку в интеграле (1.120) обязательно существует такая область интегрирования, где процесс обязательно приводит к несохранению числа частиц. Это утверждение, вытекающее из

релятивистской инвариантности теории, находит свое подтверждение в эксперименте. Это есть то, что непосредственно наблюдается в природе.

Рассмотрим амплитуду процесса с рождением частиц, изображенного на рис. 2, и напишем его амплитуду по сформулированным выше правилам. Получаем

$$G(x_2, x_3, x_4; x_1) = \int G_1(x_2 - x)G_2(x_3 - x)G_2(x_4 - x)\tilde{V}(x)G_1(x - x_1)d^4x \quad (1.121)$$

Мы можем сразу утверждать, что $\tilde{V}(x) = \tilde{\lambda}$. С другой стороны, этот процесс содержится и в (1.120), и при одинаковых временах формула (1.120) должна совпадать с (1.121). Сравнивая их, находим, что, т. к. $G_2(x_3 - x) = G_2(x - x_3)$, значит $\lambda = \tilde{\lambda}$.

Таким образом, предположив существование процесса типа рассеяния (рис. 1), мы с необходимостью пришли к существованию процесса, изображенного на рис. 2, и других, например, превращение частиц типа 1 в частицы типа 2.

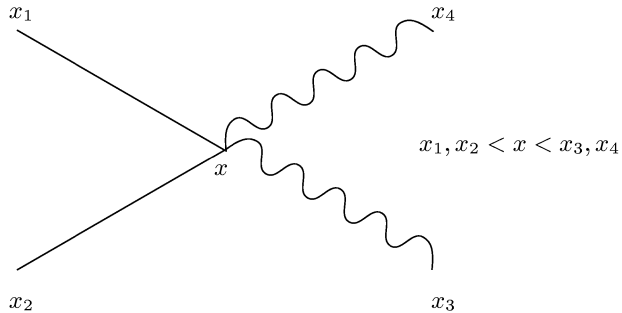


Рис. 3

Подведем итоги:

1. Все процессы типа распада и превращения частиц автоматически получаются из процесса, изображенного на рис. 1, в силу симметрии функции Грина.
2. Амплитуды этих процессов λ равны между собой, т. е. релятивистская инвариантность предсказывает не только существование различных процессов, но и устанавливает связь между ними.

3. Для последовательной интерпретации таких процессов нужно *принять*, что функция $G(x-x_1)$ описывает распространение частицы из x_1 в x , если $t_1 < t$, и из x в x_1 , если $t_1 > t$.

Частицы могут провзаимодействовать и не один раз, например:

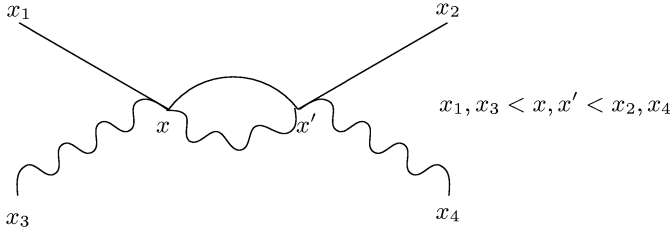


Рис. 4

а также

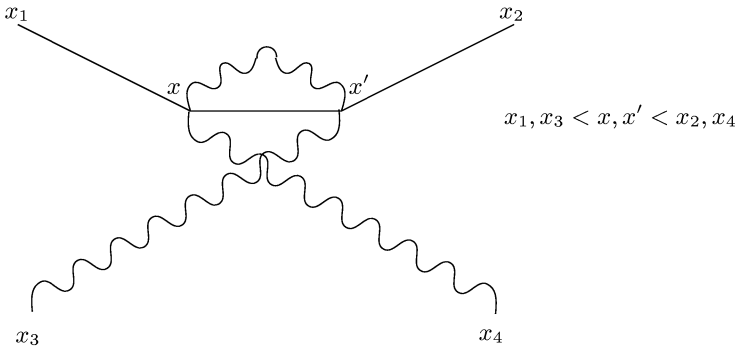


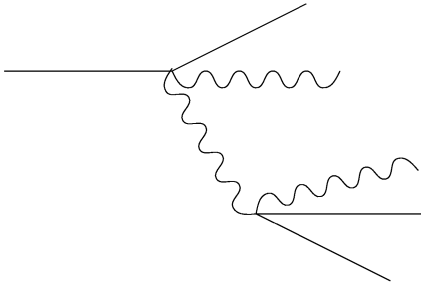
Рис. 5

причем здесь тоже $x_1, x_3 < x_2, x_4$. Диаграмму на рис. 4 нельзя получить из предыдущей в силу различной топологии диаграмм — эти две диаграммы отвечают существенно различным процессам. Полная амплитуда процесса в порядке λ^2 получается как сумма этих двух диаграмм.

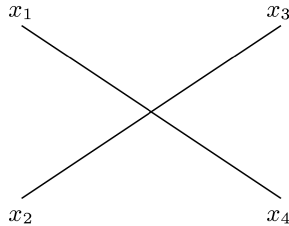
Частицы, распространяющиеся из точек x_3 и x_4 , тождественны. Учитывает ли наша амплитуда рассеяния тождественность частиц? Выберем порядок времен в диаграммах рис. 3 и рис. 4 согласно $x_1, x_2 < x_3, x_4$. Это эквивалентно тому, что мы рассматриваем эти диаграммы сверху (меняя соответственно ось времени). Мы приходим тогда

к процессу рассеяния $1+1 \rightarrow 2+2$ с двумя тождественными частицами в конечном состоянии. Полная амплитуда этого процесса, полученная как сумма амплитуд, соответствующих рис. 3 и рис. 4, автоматически симметрична по отношению к перестановке координат тождественных частиц: $x_3 \leftrightarrow x_4$. Иначе говоря, наша амплитуда удовлетворяет обычному квантово-механическому требованию для рассеяния друг на друга частиц со спином ноль.

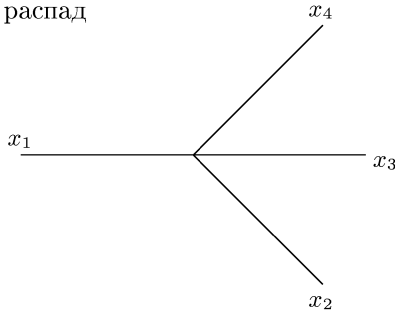
Можно рассмотреть и процессы с рождением многих частиц, т. е. возможно и такое:



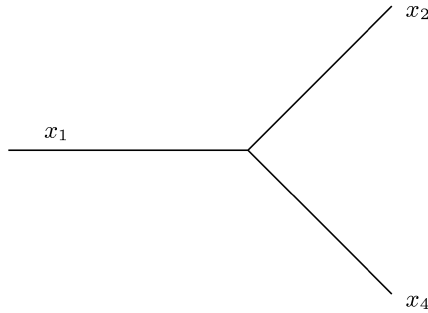
А что если в нашем распоряжении частицы только одного сорта? В качестве исходного процесса опять возьмем рассеяние



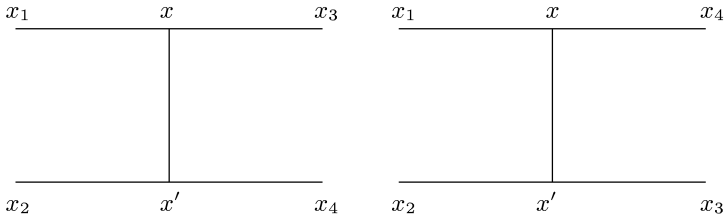
но имеется тогда и распад



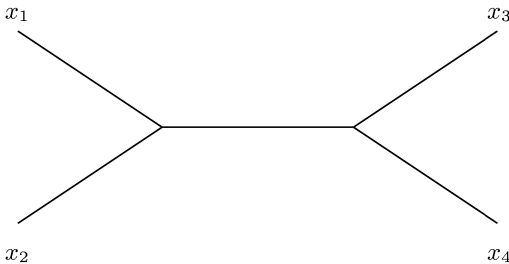
Какой из этих процессов более фундаментальный и почему бы, скажем, не быть такому процессу,



т. е. распаду частицы на две? Для реальных частиц этот процесс запрещен законом сохранения энергии-импульса, однако он возможен на конечных интервалах времени. Мы можем описать тогда амплитуду рассеяния реальных частиц как обмен виртуальной частицей, как сумму диаграмм вида

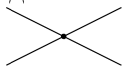



а также

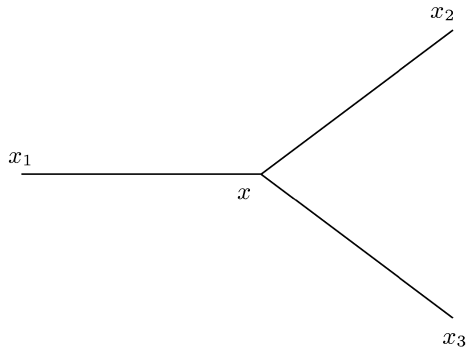


(Если ограничиться двукратным взаимодействием, то других диаграмм

нет.) Для получения полной амплитуды рассеяния нужно сложить амплитуды всех этих процессов.

Итак, мораль: в качестве исходного взаимодействия не обязательно брать реальные процессы типа , а все можно получить и из . Это и есть простейшее возможное взаимодействие.

Займемся теорией, основанной на таком типе взаимодействия. Напишем для него амплитуду:



$$G(x_2, x_3; x_1) = \int G(x_2 - x)G(x_3 - x)\gamma G(x - x_1)d^4x.$$

Подставляя выражение для функций Грина (1.118), получим

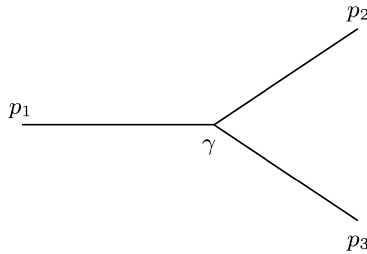
$$\begin{aligned} G(x_2, x_3; x_1) &= \\ &= \gamma \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{[(2\pi)^4 i]^3} \frac{1}{(m^2 - p_1^2)(m^2 - p_2^2)(m^2 - p_3^2)} \times \\ &\times \int d^4x e^{-ip_2(x_2-x) - ip_3(x_3-x) - ip_1(x-x_1)} = \\ &= \gamma \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 (2\pi)^4 \delta(p_2 + p_3 - p_1)}{[(2\pi)^4 i]^3 (m^2 - p_1^2)(m^2 - p_2^2)(m^2 - p_3^2)} e^{-ip_2 x_2 - ip_3 x_3 + ip_1 x_1} = \\ &= \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{[(2\pi)^4 i]^3} (2\pi)^4 \delta(p_2 + p_3 - p_1) \times \\ &\times G(p_1, p_2, p_3) e^{-ip_2 x_2 - ip_3 x_3 + ip_1 x_1}. \end{aligned} \tag{1.122}$$

Здесь $\delta(p_2 + p_3 - p_1)$ выражает закон сохранения энергии-импульса, а функция Грина в импульсном пространстве выглядит очень просто:

$$G(p_1, p_2, p_3) = \gamma G(p_1)G(p_2)G(p_3). \quad (1.123)$$

Из (1.123) следует, что частицы виртуальны, поскольку в $G(p)$ входят $p^2 \neq m^2$.

В импульсном представлении формуле (1.123) соответствует график:



Можно показать, что

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; x_3) &\rightarrow 0, \quad \text{если} \\ t_1 &\rightarrow -\infty, \\ t_2, t_3 &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Интегрируя в (1.122) по $d^4 p_3$, получим

$$G(x_2, x_3; x_1) = \gamma \int \frac{d^4 p_2 d^4 p_1}{[(2\pi)^4 i]^3} (2\pi)^4 \frac{e^{ip_2(x_3-x_2)+ip_1(x_1-x_3)}}{(m^2 - p_1^2)(m^2 - p_2^2)[m^2 - (p_1 - p_2)^2]}. \quad (1.125)$$

В области интегрирования (1.125) нет точки, где бы все три знаменателя обратились в нуль (все три частицы не могут быть реальными), поэтому в силу частых осцилляций экспоненты в подынтегральном выражении при больших временах интеграл (1.125) стремится к нулю.

Вопрос о возможности реального распада частицы на две решается законами сохранения энергии и импульса, для одинаковых частиц он запрещен, но если бы массы у частиц были разные, то и такой процесс, в принципе, мог бы быть реальным.

удовлетворять условию Лоренца, то

$$\frac{\partial G_\mu(x_3, x_2; x_1)}{\partial x_{3\mu}} = 0. \quad (1.128)$$

G_μ зависит от x_3 только через посредство $D_{\mu\nu}$, поэтому ее дифференцирование в (1.128) сводится к дифференцированию $D_{\mu\nu}$. Дифференцирование $D_{\mu\nu}$ дает следующий результат:

$$\frac{\partial D_{\mu\nu}(x_3 - x)}{\partial x_{3\mu}} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x_3 - x)} k_\mu \sum_{\lambda=0}^3 e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda. \quad (1.129)$$

Но $k_\mu e_\mu^\lambda = 0$ только для 3-х векторов e^λ ($\lambda = 1, 2, 3$), а $k_\mu e_\mu^0 \neq 0$. Чтобы выполнялось условие Лоренца, этот член должен выпасть при интегрировании в (1.126). Таким образом, сохранение тока требует такого условия на Γ_ν , чтобы поляризация e_μ^0 не давала вклада в интеграл (1.126).

Вычислим $\partial G_\mu / \partial x_{3\mu}$ и приравняем ее нулю ($D_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} D(x)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\mu(x_3, x_2; x_1)}{\partial x_{3\mu}} &= g_{\mu\nu} \int \frac{\partial D(x_3 - x)}{\partial x_{3\mu}} \delta_{\mu\nu} G(x_2 - x) \Gamma_\nu G(x - x_1) d^4 x = \\ &= \int D(x_3 - x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} (G(x_2 - x) \Gamma_\nu G(x - x_1)) d^4 x = 0. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\partial D(x_3 - x) / \partial x_{3\mu} = -\partial D(x_3 - x) / \partial x_\mu$ и проинтегрировали по частям. (1.130) выполнится, если

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G(x_2 - x) \Gamma_\mu G(x - x_1) = 0. \quad (1.131)$$

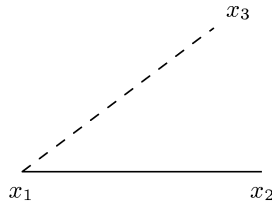
Мы получили условие на взаимодействие. Подставим (1.127) в (1.131):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (G(x_2 - x) \Gamma_\mu(x) G(x - x_1)) &= \\ &= a \frac{\partial G(x_2 - x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial G(x - x_1)}{\partial x_\mu} + b \frac{\partial G(x_2 - x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial G(x - x_1)}{\partial x_\mu} + \\ &+ a G(x_2 - x) \frac{\partial^2 G(x - x_1)}{\partial x_\mu^2} + b \frac{\partial^2 G(x_2 - x)}{\partial x_\mu^2} G(x - x_1). \end{aligned} \quad (1.132)$$

Поскольку $\partial^2 G(x) / \partial x_\mu^2 = -m^2 G - i\delta(x)$, если положить $a = -b$, члены с массой в (1.132) взаимно уничтожаются, остается

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G \Gamma_\mu G = a [G(x_2 - x_1) (-i) \delta(x_1 - x) - G(x_2 - x_1) (-i) \delta(x - x_2)],$$

т. е. равенства нулю мы не получили. С другой стороны, член в правой части отличен от нуля только при $x_1, x_2 = x$, т. е. в момент приготовления источника электрон, не успев никуда распространиться, испустил фотон, нас же при реальной постановке эксперимента интересует, что с электроном произошло потом, поэтому вклада в физические величины этот член не дает. В принципе, мы бы могли его скомпенсировать введением взаимодействия типа



которое поддерживает точное сохранение тока в момент приготовления частицы. Однако это дополнительное взаимодействие никогда не войдет в амплитуды физических процессов. Заряженные частицы, которые мы изучаем в природе, приготавливаются задолго до эксперимента — так, что фотоны, испущенные в процессе приготовления, никогда не попадут в детекторы.

Итак, за неимением лучшего мы получили

$$\Gamma_\mu(x) = \gamma \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}. \quad (1.133)$$

Соответственно,

$$G_\mu(x_3, x_2; x_1) = \gamma \int D(x_3 - x) G(x_2 - x) \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu} G(x - x_1) d^4x. \quad (1.134)$$

Этой амплитуде соответствует график:

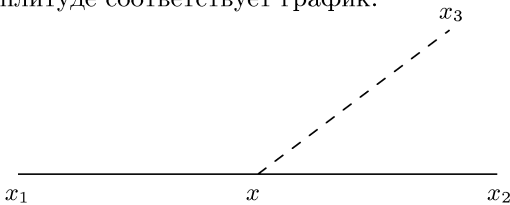


Рис. 6

Посмотрим, является ли развитая нами теория удовлетворительной со следующей точки зрения. Рассмотрим область интегрирования в (1.134), где $t_1, t_2 < t_3$. Это соответствует диаграмме:

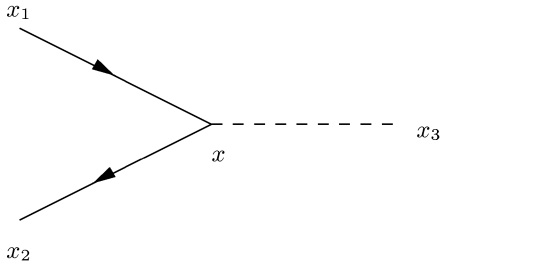


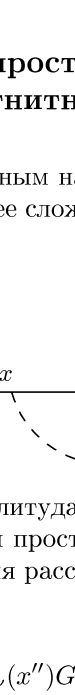
Рис. 7

описывающей превращение двух заряженных частиц в фотон, но нам известно, что заряд-то вроде бы должен сохраняться. Есть и другое формальное противоречие, не связанное с зарядом. Если есть две одинаковые частицы со спином нуль, как известно, амплитуда любого процесса с этими частицами должна быть симметрична относительно их перестановки. Мы же получили явно антисимметричную амплитуду (см. (1.134)) (относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$).

Выход из такой ситуации есть, и заключается он в гипотезе, что для заряженных частиц имеет место вырождение по массе, т. е. для любой заряженной частицы существует античастица с той же массой, но противоположного заряда. Такая гипотеза приводит к другой возможности интерпретации графика на рис. 7: из x_2 движется не частица, а античастица. Можно считать, что $G(x)$ при $t > 0$ имеет смысл функции распространения частицы, при $t < 0$ — античастицы. Для того, чтобы спасти сохранение заряда, мы вынуждены приписать античастице противоположный заряд. Этим самым мы сразу же решаем и проблему с симметрией амплитуды. Действительно, если $t_1 < t < t_2$, при замене $x_1 \leftrightarrow x_2$ мы получим $t_2 < t < t_1$, т. е. мы получаем диаграмму с распространением античастицы, а не частицы. Поскольку античастица нетождественна частице, мы не должны требовать симметрии этой амплитуды. Одновременно мы приходим к выводу, что амплитуда меняет знак при замене частицы на античастицу. Как мы увидим ниже, γ пропорциональна электрическому заряду, так что это еще раз показывает, что заряд античастицы противоположен по знаку заряду частицы.

Существование античастиц в настоящее время является твердо установленным экспериментальным фактом, а их предсказание, собственно, явилось следствием релятивистской инвариантности и сохранения заряда. Вообще, существование античастиц есть всегда следствие сохранения некоторого (не обязательно электрического) заряда, существование антинейтрона, например, связано с сохранением барионного заряда, анти-*K*-мезона — с сохранением гипер-заряда и т. д.

1.8 Примеры простейших электромагнитных процессов

Наряду с рассмотренным нами процессом  , излучение может произойти и более сложным образом, например:



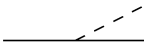
Посмотрим, чем амплитуда этого процесса отличается от рассмотренной выше амплитуды простейшего процесса, которая описывается выражением (1.134). Для рассматриваемой теперь амплитуды имеем

$$\begin{aligned}
 A'_\mu(x_3, x_2; x_1) &= \\
 &= \int G(x_2 - x'')\Gamma_\nu(x'')G(x'' - x')\Gamma_\mu(x')G(x' - x)\Gamma_\nu(x)G(x - x_1) \times \\
 &\times D(x'' - x)D(x_3 - x')d^4x d^4x'. \tag{1.135}
 \end{aligned}$$

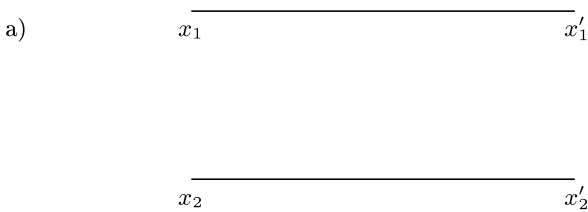
Здесь по сравнению с (1.134) две “лишние” функции Грина, две вершины Γ_μ , одна D и два интегрирования. Посмотрим размерность этой “лишней части”:

$$GGD\Gamma\Gamma d^4x d^4x' \sim \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2} \gamma \frac{1}{x} \gamma \frac{1}{x} x^8 \sim \gamma^2.$$

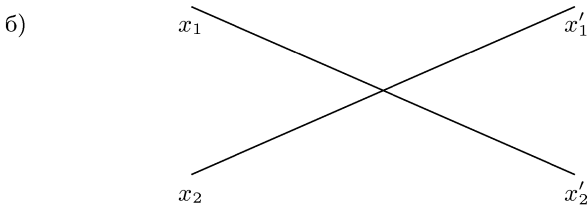
Поскольку обе амплитуды должны обладать одинаковой размерностью, то постоянная γ безразмерна. Если $\gamma^2 \ll 1$, то можно рассматривать только простейшие амплитуды.

Как мы уже говорили, процесс  невозможен для реальных частиц. Рассмотрим поэтому теперь для примера несколько простейших диаграмм, описывающих реальные процессы.

1. Рассеяние заряженных частиц. При этом может произойти следующее:



т. е. частицы не взаимодействовали;



Это — так называемое контактное взаимодействие, но оно не имеет отношения к испусканию или поглощению фотонов, т. е. к электромагнитным взаимодействиям. Существует или нет такой процесс — вопрос к эксперименту. Для некоторых частиц он есть, для некоторых — нет. Для π -мезонов, в частности, такое взаимодействие существует. Мы же будем изучать только электромагнитные взаимодействия, т. е. полагать, что контактного взаимодействия нет (это фактически упрощенная бесспиновая модель электронов и μ -мезонов).

Рассеяние заряженных частиц с обменом фотонов:

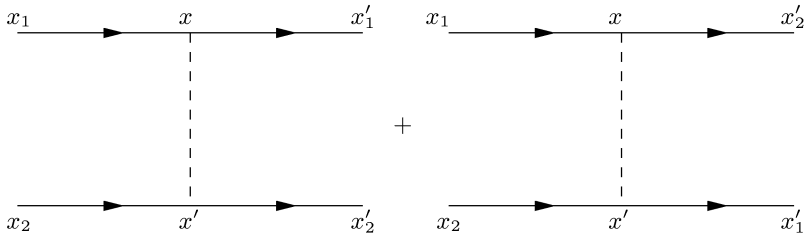


Рис. 8

Оба таких процесса возможны, поскольку после испускания фотона в x частица из x_1 может с одинаковым успехом попасть как в x'_1 , так и в x'_2 . Амплитуда запишется так:

$$G(x'_2, x'_1; x_2, x_1) = \int G(x'_1 - x)\Gamma_\mu G(x' - x) \times \\ \times G(x'_2 - x')\Gamma_\nu G(x' - x_2)d^4x d^4x' + (1.136) \\ + \{x'_1 \leftrightarrow x'_2\}.$$

Здесь $x'_1 \leftrightarrow x'_2$ означает такое же выражение, с заменой x'_1 на x'_2 и наоборот. Удобно на диаграммах ввести стрелки, как мы делали выше, тогда ясно, какую функцию G дифференцирует символ Γ с плюсом, а какую — с минусом (так как $\Gamma_\mu \sim \overleftrightarrow{\partial}_\mu$). Кроме того, так удобно различать частицы и античастицы:

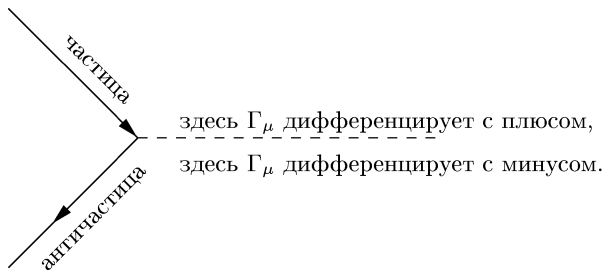
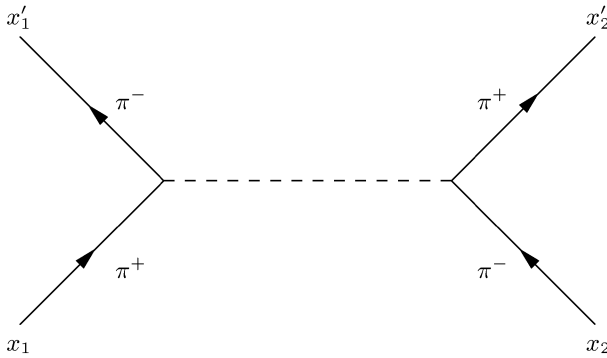
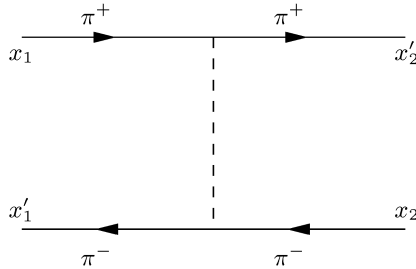


Рис. 9

Из первой диаграммы (рис. 9) следует существование такого графика:

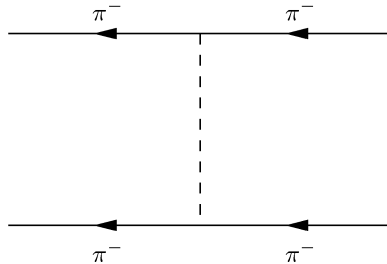


а из второй —



Эти диаграммы отвечают уже рассеянию π^+ -мезона на π^- . Следовательно, в амплитуде (1.136), т. е. в амплитуде рассеяния π^+ -мезона на π^+ -мезоне ($\pi^+\pi^+$), автоматически содержится и амплитуда $\pi^+\pi^-$.

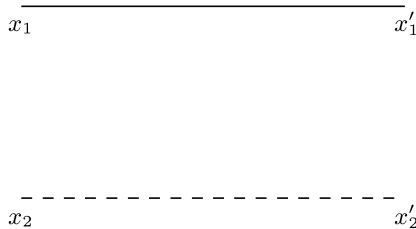
Аналогично получается и рассеяние $\pi^-\pi^-$, в этом случае нужно положить $x'_{10}, x'_{20} < x_{10}, x_{20}$, т. е. график следует перерисовать задом наперед:



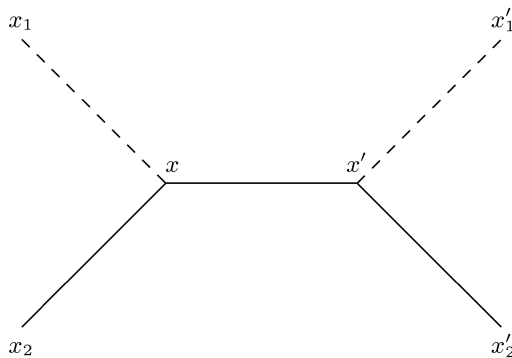
Таким образом, все возможные амплитуды рассеяния можно получить из (1.136), подбирая соответствующим образом времена.

Амплитуда рассеяния $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$ оказывается при этом равной амплитуде $\pi^-\pi^- \rightarrow \pi^-\pi^-$ (эти амплитуды содержат два фактора Γ , каждый из которых меняет знак при замене частицы на античастицу). Амплитуда же процесса с частицей и античастицей в начальном состоянии $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ существенно отличается от них. Это происходит потому, что в этом случае существует еще один процесс — когда исходные π -мезоны превращаются в промежуточном состоянии в виртуальный фотон.

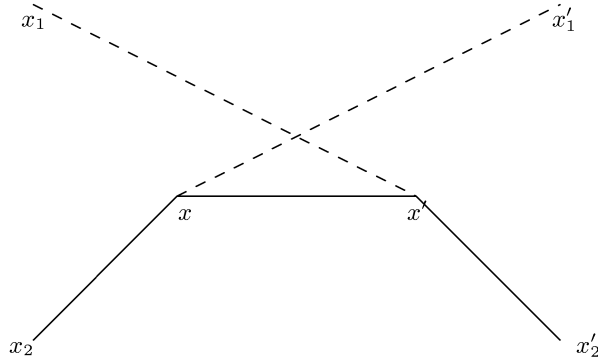
2. Комптон-эффект (рассеяние фотона на π -мезоне). Пусть у нас есть фотон и π -мезон в начальном состоянии. Что с ними может произойти? Как и в предыдущем случае, они могут не взаимодействовать:



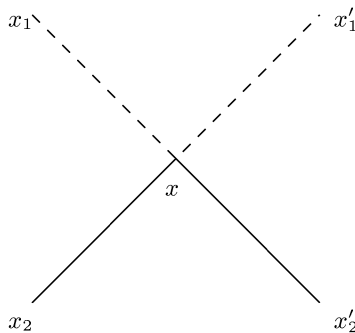
мезон может поглотить фотон в некоторой точке x , а в x' испустить:



мезон в точке x может испустить фотон, а первоначальный поглотить в x' :



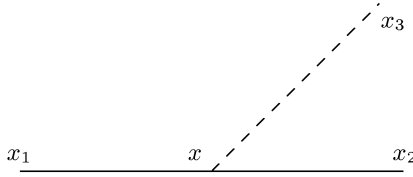
А могут ли они провзаимодействовать в точке, как показано ниже?



Априори на этот вопрос ответить нельзя. С одной стороны, это вопрос экспериментальный, но, с другой стороны, у нас имеется требование к взаимодействию, чтобы скалярные и продольные фотоны не давали вклада в физические величины (сохранение тока). Оказывается, действительно, чтобы сохранялся ток в случае скалярных частиц, должно существовать такое взаимодействие, и его константа, как мы увидим далее, есть γ^2 .

1.9 Диаграммы и амплитуды в импульсном представлении

Начнем, как обычно, с простейшего графика взаимодействия фотона с электроном:



Найдем амплитуду в импульсном представлении, т. е. разложим $G_\mu(x_3, x_2; x_1)$ в интеграл Фурье:

$$G_\mu(x_3, x_2; x_1) = \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 k}{[(2\pi)^4 i]^3} e^{-ip_1 x_1 + ip_2 x_2 + ik x_3} G_\mu(p_1, p_2, k). \quad (1.137)$$

Знак “—” перед одним из слагаемых показателей экспоненты выбран для удобства. Подставляя в выражение для (1.134) функции G и $D_{\mu\nu}$ в виде разложений типа (1.137), получим

$$G_\mu(x_3, x_2; x_1) = \gamma \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 k}{[(2\pi)^4 i]} D(k) G(p_1) G(p_2) \times \int d^4 x e^{-ik(x_3-x)} \left(e^{-ip_2(x_2-x)} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} e^{-ip_1(x-x_1)} \right). \quad (1.138)$$

Выражение в круглых скобках равно

$$-i(p_{1\mu} + p_{2\mu}) e^{-ip_2(x_2-x)} e^{-ip_1(x-x_1)}.$$

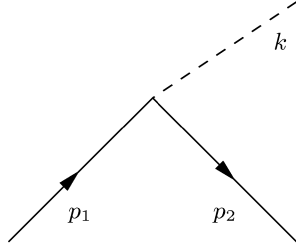
Тогда, интегрируя по $d^4 x$, получим

$$G_\mu(x_3, x_2; x_1) = -\gamma \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 k}{[(2\pi)^4 i]^4} D(k) G(p_1) G(p_2) i(p_{1\mu} + p_{2\mu}) \times (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - k) e^{ip_1 x_1 - ip_2 x_2 - ik x_3}. \quad (1.139)$$

Сравнивая (1.137) с (1.138), получаем выражение для $G_\mu(p_1, p_2, k)$:

$$G_\mu(p_1, p_2, k) = -(2\pi)^4 i \delta(p_1 - p_2 - k) (p_{1\mu} + p_{2\mu}) \gamma G(p_1) G(p_2) D(k). \quad (1.140)$$

Соответствующая диаграмма выглядит так:

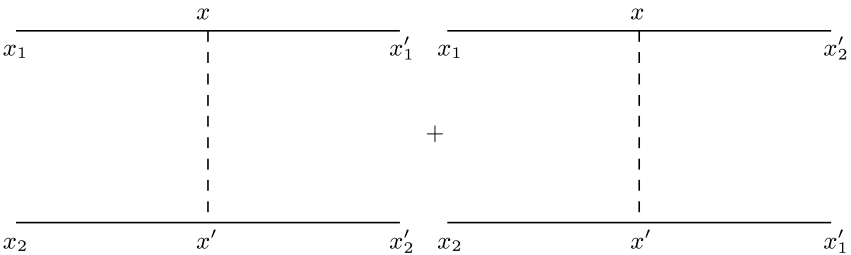


Здесь линиям соответствуют функции Грина, а в вершине стоит $-i\gamma(p_{1\mu} + p_{2\mu})$ и закон сохранения $(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - k)$.

Наша диаграмма соответствует процессу, когда мезон с импульсом p_1 распадается на γ -квант с импульсом k и мезон с импульсом $p_2 = p_1 - k$. Поскольку здесь 4-импульсы лежат не на массовой поверхности, т. е. $p_0^2 \neq \mathbf{p}^2 + m^2$ и $k_0^2 \neq \mathbf{k}^2$, говорят, что этот процесс виртуальный.

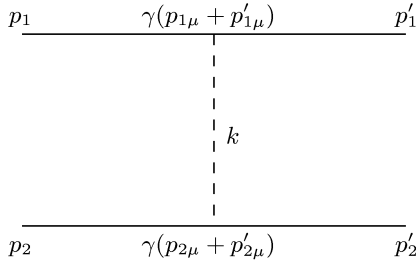
Правила сопоставления графикам амплитуд в импульсном представлении проще, чем в пространственном, здесь каждой линии и вершине сопоставляется соответствующий множитель: $G(p_1)$, $G(p_2)$, $D(k)$, Γ_μ .

Аналогично рассмотрим рассеяние мезонов друг на друге:



$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x'_2, x'_1; x_2, x_1) &= \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p'_1 d^4 p'_2}{[(2\pi)^4 i]^4} \\ &\times e^{-ip_1 x_1 - ip_2 x_2 + ip'_1 x'_1 + ip'_2 x'_2} G(p'_1, p'_2; p_1, p_2). \end{aligned} \quad (1.141)$$

Вычисление проводится точно так же. Первой диаграмме в координатном представлении можно сопоставить в импульсном представлении следующую диаграмму:



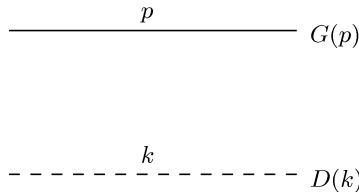
Действуем, как в предыдущем случае: пишем $G(x'_2, x'_1; x_2, x_1)$ в виде (1.136) и раскладываем в интегралы Фурье входящие в нее свободные функции Грина, получаем в результате выражение типа (1.138). Каждой функции Грина будет соответствовать своя импульсная переменная от ее Фурье-разложения, в вершинах от дифференцирований, как и раньше, появятся $-i\gamma(p_{1\mu} + p'_{1\mu})$ и $-i\gamma(p_{2\mu} + p'_{2\mu})$, а, соответственно, интегрирования по d^4x и d^4x' дадут $(2\pi)^4\delta(p_1 + k - p'_1)$, $(2\pi)^4\delta(p_2 - k - p'_2)$, т. е. законы сохранения в каждой из вершин. Будет присутствовать одно лишнее по сравнению с (1.140) интегрирование по d^4k . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 G(p'_1, p'_2; p_1, p_2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{4i}} D(k) \times \\
 &\times G(p_1)G(p_2)G(p'_1)G(p'_2)\gamma^2(p_{1\mu} + p'_{1\mu})(p_{2\mu} + p'_{2\mu}) \times \\
 &\times (2\pi)^4 i\delta(p_1 + k - p'_1)(2\pi)^4 i\delta(p_2 - k - p'_2). \tag{1.142}
 \end{aligned}$$

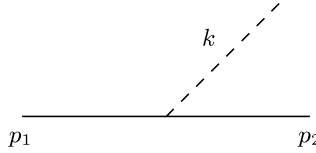
Выражение (1.142) содержит интегрирование по импульсу k промежуточного фотона.

Суммируя, мы можем сформулировать следующие правила сопоставления амплитуды диаграммам в импульсном пространстве.

1. Каждой линии сопоставляется множитель — соответствующая функция Грина:

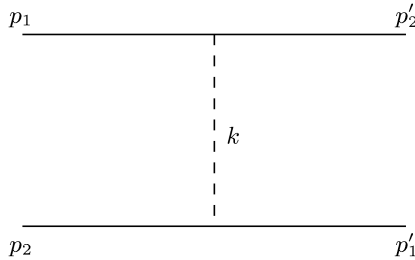


2. В каждой вершине $-(2\pi)^4 i \delta(p_1 - p_2 - k) \gamma(p_1 + p_2)_\mu$



3. Затем нужно проинтегрировать по импульсу промежуточных частиц, т. е. по импульсу, соответствующему каждой внутренней линии с весом $d^4 k / (2\pi)^4 i$.

Вернемся к выражению (1.142). Интеграл в правой части легко вычисляется при помощи δ -функции. Учитывая наличие второй диаграммы, которой в импульсном пространстве соответствует график



для суммарной амплитуды получим выражение

$$G(p'_2, p'_1; p_2, p_1) = (2\pi)^4 i \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) G(p_1) G(p_2) G(p'_1) G(p'_2) \times \\ \times \left[\gamma^2 \frac{(p_1 + p'_1)_\mu (p_2 + p'_2)_\mu}{(p_2 - p'_2)^2} - \gamma^2 \frac{(p_1 + p'_2)_\mu (p_2 + p'_1)_\mu}{(p_2 - p'_1)^2} \right], \quad (1.143)$$

δ -функция здесь выражает общий закон сохранения 4-импульса между начальным и конечным состоянием системы.

1.10 Амплитуды реально наблюдаемых процессов

Пусть частица в некоторый момент времени t_1 описывалась волновой функцией

$$\varphi(x_1) = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2E}}, \quad (1.144)$$

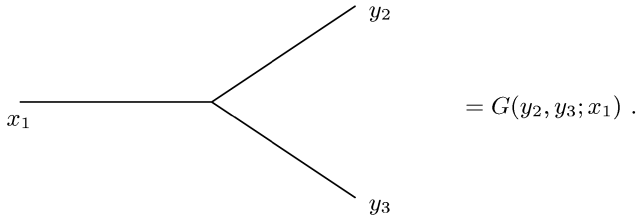
тогда в некоторый другой момент она будет описываться функцией

$$\Psi(y_1) = \int G(y_1 - x_1) i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_{10}}} \varphi(x_1) d^3 x_1, \quad (1.145)$$

где

$$G(y_1 - x_1) = \frac{\quad}{x_1 \quad y_1} .$$

Однако она может и развалиться, например, на две, т. е.



И волновая функция системы будет уже такой:

$$\Psi(y_2, y_3) = \int G(y_2, y_3; x_1) i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_{10}}} \varphi(x_1) d^3 x_1 \quad (1.146)$$

и отвечать двухчастичному состоянию.

Вероятность обнаружения ровно одной частицы во всем объеме, как мы уже говорили, есть

$$\int \varphi^* i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}} \varphi d^3 x = P_1.$$

Величина $P_1 < 1$, поскольку при наличии взаимодействия имеется некоторая вероятность найти 2 и более частиц: P_2, P_3 и т. д. Например,

$$P_2 = \int \varphi^*(x_1) \varphi^*(x_2) i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_{10}}} i \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_{20}}} \varphi(x_1) \varphi(x_2) d^3 x_1 d^3 x_2.$$

Согласно нашему условию ортогональности (1.72) амплитуда вероятности перехода частицы с импульсом p_1 в состояние с импульсом p_2 в

определенный момент времени есть

$$\int \varphi_{p_2}^*(y) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \Psi(y) d^3 y = \int \varphi_{p_2}^*(y) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} G(y-x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_0} \varphi_{p_1}(x) d^3 x d^3 y. \quad (1.147)$$

Амплитуда вероятности распада этой частицы на две с импульсами \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 :

$$\begin{aligned} \langle p_2, p_3 | p_1 \rangle &= \int \Psi_{p_2 p_3} i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_{20}} i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_{30}} G(y_3, y_2; x_1) \times \\ &\times i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_0} \varphi_{p_1}(x_1) d^3 x_1 d^3 y_2 d^3 y_3. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Здесь

$$\Psi_{p_2 p_3} = \frac{e^{-ip_2 y_2 - ip_3 y_3}}{\sqrt{2E_2 \cdot 2E_3}}.$$

Таким образом, можно определить некоторую матрицу U , которая начальное одночастичное состояние в момент времени t_1 переводит во всевозможные состояния в момент времени t_2 , т. е.

$$\begin{pmatrix} \Psi(y_1) \\ \Psi(y_2, y_3) \\ \Psi(y_4, y_5, y_6) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \Psi_{p_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.149)$$

Если устремить $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow +\infty$, то отличным от нуля останется только матричный элемент U_{11} , поскольку реальный развал частицы запрещен законами сохранения.

Если в начальный момент было 2 частицы, тогда аналогично (1.149) получаем

$$\begin{pmatrix} \Psi(y_1) \\ \Psi(y_2, y_3) \\ \Psi(y_4, y_5, y_6) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{p_1, p_2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.150)$$

Здесь уже при $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow +\infty$, может быть много возможных процессов, поскольку две частицы могут рассеяться друг на друге, а могут родить и новые частицы. У нас есть единственное требование: полная вероятность всех процессов должна быть равна единице. Отсюда сразу следует, что оператор U должен быть унитарным, т. е.

$$U^+(t_2, t_1)U(t_2, t_1) = I. \quad (1.151)$$

Если константа взаимодействия мала, $\gamma \ll 1$, то оператор U мало отличается от единичного, т. е. его можно представить в виде

$$U = I + iV,$$

где величина V мала. Из (1.151) следует $-iV^+ + iV = 0$, т. е.

$$V^+ = V, \quad (1.152)$$

что означает, что добавки за счет взаимодействия должны быть мнимыми. (Мы и писали раньше $-iV$ для нерелятивистской квантовой механики. Для взаимодействия же с фотоном мы также выделяли в вершине множитель i , действительно, $\Gamma_\mu = -i\gamma(p_1 + p_2)_\mu$. Из этого следует, кстати, что можно ожидать, что константа γ окажется вещественной.)

Устремив теперь $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow +\infty$, получим

$$U(\infty, -\infty) \equiv S, \quad (1.153)$$

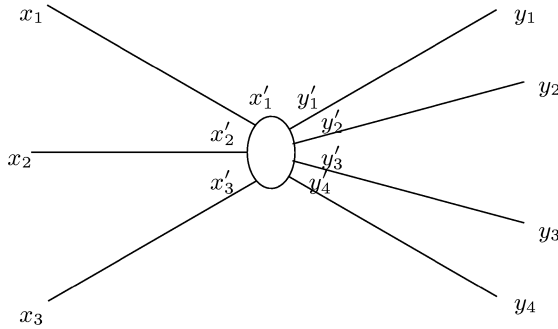
где S называется матрицей рассеяния или просто S -матрицей.

Амплитуды вероятностей различных процессов можно вычислять аналогично (1.147), (1.148). Например, для рассеяния (2 частицы \rightarrow 2 частицы) имеем:

$$\begin{aligned} S(\Psi, \varphi) = & \int \Psi^*(y_1, y_2) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_{20}} i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_{10}} G(y_2, y_1; x_2, x_1) \times \\ & \times i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_{10}} i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_{20}} \varphi(x_1, x_2) d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 y_1 d^3 y_2 \end{aligned}$$

и т. д.

Мы для наглядности сделаем это вычисление чуть иначе. Нарисуем диаграмму: до взаимодействия сколько-то частиц и сколько-то частиц после взаимодействия, например:



Так можно изобразить любой процесс; кружочек обозначает всевозможные промежуточные состояния. Все отличие здесь от прежних диаграмм для функций Грина заключается в следующем: мы должны вычислять эти диаграммы в пределе

$$\begin{aligned} x_{i0} &\rightarrow -\infty, \quad \text{т. е.} \quad x'_{i0} - x_{i0} > 0, \\ y_{i0} &\rightarrow +\infty, \quad \text{т. е.} \quad y_{i0} - y'_{i0} > 0. \end{aligned} \quad (1.154)$$

В силу последних неравенств мы можем упростить функции Грина внешних линий, поскольку (1.154) однозначно задает правила обхода полюсов. Поэтому

$$G(y_1 - y'_1) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ip_1(y_1 - y'_1)}}{m^2 - p_1^2 - i\varepsilon} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_1(y_1 - y'_1)}}{2E_1}. \quad (1.155)$$

Здесь $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m^2}$, т. е. данная частица реальна. С другой стороны, в силу (1.117) выражение (1.155) можно переписать так:

$$G(y_1 - y'_1) = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \Psi_{p_1}^*(y'_1) \Psi_{p_1}(y_1). \quad (1.156)$$

Таким образом, произвольную функцию Грина $x_{i0} \rightarrow -\infty$, $y_{i0} \rightarrow +\infty$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} G(y_1, y_2, \dots, y_n; x_1, x_2, \dots, x_m) &= \\ &= \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 \dots d^3 p_n}{(2\pi)^{3n}} \Psi_{p_1}(y_1) \dots \Psi_{p_n}(y_n) \times \\ &\times \int d^4 y'_1 d^4 y'_2 \dots d^4 y'_n \Psi_{p_1}^*(y'_1) \dots \Psi_{p_n}^*(y'_n) S(y'_1, \dots, y'_n; x'_1, \dots, x'_m) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int \frac{d^3 k_1 \dots d^3 k_m}{(2\pi)^{3m}} \Psi_{k_1}^*(x_1) \dots \Psi_{k_m}^*(x_m) \times \\
& \times \Psi_{k_1}(x'_1) \dots \Psi_{k_m}(x'_m) d^4 x'_1 \dots d^4 x'_m.
\end{aligned} \tag{1.157}$$

Это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned}
G(y_1, y_2, \dots, y_n; x_1, x_2, \dots, x_m) &= \\
&= \int \frac{d^3 p_1 \dots d^3 p_n}{(2\pi)^{3n}} \Psi_{p_1}(y_1) \dots \Psi_{p_n}(y_n) S(p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_m) \times \\
&\times \Psi_{k_1}^*(x_1) \dots \Psi_{k_m}^*(x_m) \frac{d^3 k_1 \dots d^3 k_m}{(2\pi)^{3m}},
\end{aligned} \tag{1.158}$$

т. е. функция Грина есть суперпозиция плоских волн. Если начальные и конечные импульсы частиц заданы, то амплитуда перехода между этими состояниями есть по определению $S(p_1 \dots p_n; k_1 \dots k_m)$:

$$\begin{aligned}
S(p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_m) &= \\
&= \int d^4 y'_1 \dots d^4 y'_n \Psi_{p_1}^*(y'_1) \dots \Psi_{p_n}^*(y'_n) S(y'_1, \dots, y'_n; x'_1, \dots, x'_m) \times \\
&\times \Psi_{k_1}(x'_1) \dots \Psi_{k_m}(x'_m) d^4 x'_1 \dots d^4 x'_m.
\end{aligned} \tag{1.159}$$

Таким образом, S -матрица может вычисляться с помощью тех же диаграмм, что и функция Грина, только внешним линиям следует сопоставлять не свободные функции Грина, а волновые функции соответствующих частиц.

Вычислим теперь матричные элементы S для процессов рассеяния, которые мы рассматривали выше:

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + \dots,$$

где

$$\begin{array}{c}
x_1 \quad \quad \quad x'_1 \quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad x'_2 \\
\hline
\phantom{S^{(0)} \sim} \\
\hline
S^{(0)} \sim \\
\hline
x_2 \quad \quad \quad x'_2 \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad x'_1
\end{array}$$

В этом случае все просто и мы получаем

$$S^{(0)} = \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) + \delta(p_1 - p'_2) \delta(p_2 - p'_1).$$

В следующем порядке по γ появляются процессы с обменом фотоном:

$$S^{(1)} \sim \begin{array}{c} p_1 \text{-----} p'_1 \\ | \\ p_2 \text{-----} p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \text{-----} p'_2 \\ | \\ p_2 \text{-----} p'_1 \end{array} .$$

Вычислим первую амплитуду по сформулированному нами правилу:

$$S^{(1)}(y'_1, y'_2; x'_1, x'_2) = \delta(y'_1 - x'_1) \delta(y'_2 - x'_2) D(x'_2 - x'_1) \Gamma_\mu(x'_1) \Gamma_\mu(x'_2).$$

$$\begin{array}{c} x_1 \text{-----} x'_1 y'_1 \text{-----} y_1 \\ | \\ x_2 \text{-----} x'_2 y'_2 \text{-----} y_2 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S^{(1)}(p'_1, p'_2; p_1, p_2) &= \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 \frac{e^{ip'_1 x'_1}}{\sqrt{2E'_1}} \gamma \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'_{1\mu}} \frac{e^{-ip_1 x_1}}{\sqrt{2E_1}} \times \\ &\times \frac{e^{ip'_2 x'_2}}{\sqrt{2E'_2}} \gamma \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'_{2\mu}} \frac{e^{-ip_2 x_2}}{\sqrt{2E_2}} D(x'_2 - x'_1) = \\ &= \gamma^2 \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 e^{i(p'_1 - p_1)x'_1} [-i(p'_1 + p_1)_\mu] e^{i(p'_2 - p_2)x'_2} \times \\ &\times [-i(p'_2 + p_2)_\mu] \frac{1}{\sqrt{2E_1} \cdot 2E_2 \cdot 2E'_1 \cdot 2E'_2} \frac{e^{-ik(x'_2 - x'_1)}}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} = \\ &= \gamma^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k^2} [-i(p'_1 + p_1)_\mu] [-i(p'_2 + p_2)_\mu] \times \\ &\times \frac{(2\pi)^4 \delta(p'_1 - p_1 + k) (2\pi)^4 \delta(p'_2 - p_2 - k)}{\sqrt{2E_1} \cdot 2E_2 \cdot 2E'_1 \cdot 2E'_2} = \end{aligned}$$

$$= (2\pi)^4 i\delta(p'_1 - p_1 + p'_2 - p_2) \left[\frac{(p_1 + p'_1)_\mu (p_2 + p'_2)_\mu}{(p'_2 - p_2)^2} \right] \times \\ \times \frac{\gamma^2}{\sqrt{2E_1} \cdot 2E_2 \cdot 2E'_1 \cdot 2E'_2}.$$

Аналогичное выражение возникает и для второй диаграммы, т. е. окончательно имеем

$$S^{(1)} = (2\pi)^4 i\delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \left[\frac{(p_{1\mu} + p'_{1\mu})(p_{2\mu} + p'_{2\mu})}{(p_2 - p'_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(p_{1\mu} + p'_{2\mu})(p_{2\mu} + p'_{1\mu})}{(p'_1 - p_2)^2} \right] \frac{\gamma^2}{\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}\sqrt{2E'_1}\sqrt{2E'_2}}. \quad (1.160)$$

Сравнивая (1.160) с выражением для функции Грина (1.142), видим, что все отличие в следующем: в (1.142) внешним линиям соответствуют функции Грина (свободные), в (1.160) — множитель $1/\sqrt{2E}$. Поэтому удобно в амплитудах S выделять множители, соответствующие внешним линиям.

Запишем S в виде

$$S(p'_1, \dots, p'_n; p_1, p_2) = 1 + (2\pi)^4 i\delta(\sum p'_i - p_1 - p_2) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}} \prod_i \frac{1}{\sqrt{2E'_i}} T(p'_1, \dots, p'_n; p_1, p_2). \quad (1.161)$$

Здесь T — так называемая инвариантная амплитуда рассеяния. Ее смысл аналогичен рассмотренной нами нерелятивистской амплитуде (1.43). Мы для простоты ограничились в (1.161) переходом двух частиц с импульсами p_1, p_2 в n с импульсами p'_1, \dots, p'_n .

Вероятность такого перехода есть

$$dW = [(2\pi)^4 \delta(\sum p'_i - p_1 - p_2)]^2 \times \\ \times |T|^2 \frac{d^3 p'_1 \dots d^3 p'_n}{(2\pi)^{3n}} \frac{1}{2E_1 \cdot 2E_2} \frac{1}{2E'_1 \dots 2E'_n}. \quad (1.162)$$

Воспользуемся тем, что $|\delta(x)|^2 = \delta(x)\delta(0)$. Последнюю следует понимать так:

$$(2\pi)^4 \delta(0) = \int d^4 x e^{ipx} |_{p=0} = VT,$$

где V — объем пространства, а T — время, в течение которого происходил процесс. Тогда для вероятности перехода в единице объема за единицу времени получим

$$dw \equiv \frac{dW}{VT} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - \sum p'_i) \frac{1}{2E_1 \cdot 2E_2} \times \\ \times |T(p'_1, \dots, p'_n; p_1, p_2)|^2 \frac{d^3 p'_1 \dots d^3 p'_n}{(2\pi)^{3n} 2E'_1 \dots 2E'_n}. \quad (1.163)$$

Обычно мы интересуемся сечением $d\sigma$ данного процесса:

$$d\sigma = \frac{dw}{j} = \frac{1}{4E_1 E_2 j} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - \sum p'_i) \times \\ \times |T(p'_1, \dots, p'_n; p_1, p_2)|^2 \frac{d^3 p'_1 \dots d^3 p'_n}{(2\pi)^{3n}} \frac{1}{2E'_1 \dots 2E'_n}, \quad (1.164)$$

где j — поток сталкивающихся частиц.

Величина

$$\frac{d^3 p'_1 \dots d^3 p'_n}{(2\pi)^{3n}} \frac{1}{2E'_1 \dots 2E'_n}$$

носит название инвариантного фазового объема. Мы с подобной величиной уже сталкивались при вычислении функций Грина. Ее релятивистская инвариантность непосредственно следует из сравнения соотношений типа (1.105), (1.106).¹

Определим теперь поток для двух частиц, движущихся навстречу друг другу. Используя выражение для тока одной частицы (правая часть (1.115)), получим

$$j = \frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} = \frac{p_1 E_2 - E_1 p_2}{E_1 E_2}. \quad (1.165)$$

Здесь p_1, p_2 — проекции трехмерных импульсов на ось столкновения. Числитель (1.165) инвариантен относительно преобразований Лоренца вдоль оси движения, и эта величина называется инвариантным потоком \mathcal{J} , т. е.

$$\mathcal{J} = 4E_1 E_2 j = 4(E_2 p_1 - E_1 p_2). \quad (1.166)$$

¹Для вычисления полных сечений столкновения в случае тождественных частиц инвариантный фазовый объем следует делить на $n!$ (если в конечном состоянии n частиц), чтобы не учитывать тождественные конфигурации много раз.

В лабораторной системе

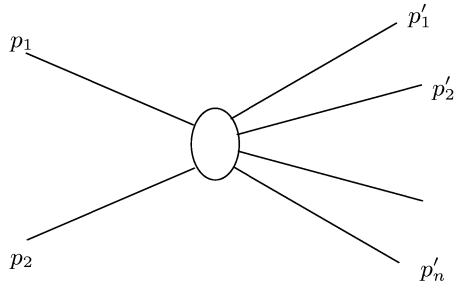
$$\mathcal{J} = 4mp_L$$

(p_L — импульс налетающей частицы, m — масса покоящейся частицы).

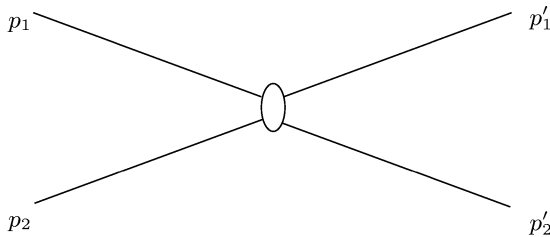
В системе центра масс

$$\mathcal{J} = 4p_c E_c.$$

Таким образом, сечение (1.164) полностью выражается через релятивистски инвариантные величины. Как мы уже отмечали, это есть сечение для такого процесса:



Рассмотрим теперь подробнее случай рассеяния $2 \rightarrow 2$:



Для описания таких процессов удобно ввести инвариантные переменные s , t , u :

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2, \\ t &= (p'_1 - p_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2, \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2. \end{aligned} \tag{1.167}$$

Для выяснения физического смысла этих переменных рассмотрим их значения в системе центра масс (с.ц.м.), тогда

$$\begin{aligned} s &= (p_{10} + p_{20})^2 = E_c^2, \\ t &= -(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)^2 = -\mathbf{q}_c^2, \\ u &= -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2. \end{aligned} \quad (1.168)$$

То есть s есть квадрат полной энергии в с.ц.м., t — квадрат переданного импульса частице 1' частицей 1, u — квадрат переданного импульса частице 2' той же частицей 1. s , t , u называют мандельштамовскими переменными. Они не являются независимыми, и можно показать, что (для случая, когда все частицы, участвующие в процессе, имеют одинаковую массу m)

$$s + t + u = 4m^2. \quad (1.169)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} s + t + u &= \\ &= p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_1' - 2p_1p_2' = \\ &= 4m^2 + 2p_1(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') = 4m^2. \end{aligned}$$

(Естественно, для частиц с различными массами было бы $s + t + u = \sum_i m_i^2$.)

Теперь при помощи (1.164) можно получить сечение. Переходим в с.ц.м.:

$$E_1 = E_2; \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| \equiv p;$$

$$j = \frac{pE}{E_1E_2}, \quad \text{где } E = E_1 + E_2,$$

и

$$d\sigma = \frac{1}{4pE} |T|^2 \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \frac{d^3p_1' d^3p_2'}{4E_1'E_2'(2\pi)^4(2\pi)^2 2!}.$$

Мы считаем здесь конечные частицы тождественными и поэтому делим фазовый объем на $2!$, чтобы не учитывать одинаковые конфигурации, возникающие в результате их перестановки. Интегрируя по d^3p_2' , получим

$$d\sigma = \frac{1}{4pE} |T|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') \frac{d^3p_1'}{4E_1'E_2'(2\pi)^2 2!}.$$

Перейдя к сферическим координатам, получим

$$d^3p_1' = p^2 dp d\Omega,$$

т. е.

$$d\sigma = \frac{1}{4pE} |T|^2 \delta(2E_1 - 2E'_2) \frac{p^2 dp d\Omega}{4E_1^2 (2\pi)^2 2!}.$$

Учитывая $pdp = E_1 dE_1$, имеем

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4pE} |T|^2 \delta(2E_1 - 2E'_2) \frac{E_1 dE_1 d\Omega}{4E_1^2 (2\pi)^2 2!} = \\ &= \frac{1}{4E} |T|^2 \delta(2E_1 - 2E'_2) \frac{dE_1 d\Omega}{4E_1 (2\pi)^2 2!}. \end{aligned}$$

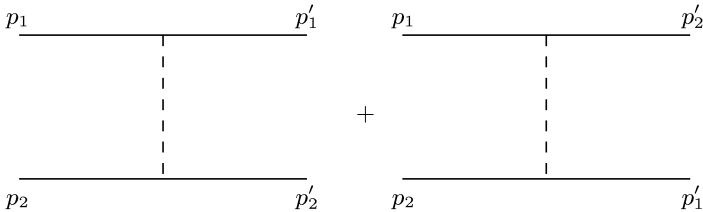
Интегрируя по энергиям, окончательно получаем

$$d\sigma = \frac{1}{16E^2} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} |T|^2 \frac{1}{2}. \quad (1.170)$$

Здесь мы учли, что $4E_1 = 2E$, $\delta(2E_1 - 2E'_2) = 1/2\delta(E_1 - E'_2)$. Это выражение можно записать в мандельштамовских переменных:

$$d\sigma = \left| \frac{T}{8\pi\sqrt{s}} \right|^2 \frac{d\Omega}{2}. \quad (1.171)$$

Вернемся теперь к процессу кулоновского рассеяния $\pi^- \pi^-$, который в низшем порядке описывается диаграммой:



Сравнивая (1.161) и (1.160), сразу можно написать инвариантную амплитуду рассеяния:

$$T(p'_2, p'_1; p_2, p_1) = \gamma^2 \left[\frac{(p_1 + p'_1)_\mu (p_2 + p'_2)_\mu}{(p'_1 - p_1)^2} + \frac{(p_1 + p'_2)_\mu (p_2 + p'_1)_\mu}{(p'_1 - p_2)^2} \right]. \quad (1.172)$$

Перепишем (1.172) в инвариантных переменных. Для этого раскроем числители в квадратных скобках:

$$\begin{aligned}
 (p_1 + p'_1)_\mu (p_2 + p'_2)_\mu &= (2p_1 + k)_\mu (2p_2 - k)_\mu = \\
 &= (\text{из закона сохранения } k = p'_1 - p_1) = 4p_1 p_2 + 2k(p_2 - p_1) - k^2 = \\
 &= 4p_1 p_2 + 2p'_1 p_2 - 2p'_1 p_1 + 2p'_1 p_1 - 2p_1 p_2 + + 2p_1^2 - p_1'^2 - p_1^2 = \\
 &= 2p_1 p_2 + 2p'_1 p_2 + p_1^2 - p_1'^2 + p_2^2 - p_2^2 = s - u,
 \end{aligned}$$

аналогично для второго числителя получим $s - t$, тогда (1.172) запишется:

$$T = \gamma^2 \left[\frac{s - u}{t} + \frac{s - t}{u} \right]. \quad (1.173)$$

В выражение (1.173) вошла единственная неизвестная константа γ^2 , и ясно, что ее можно определить из эксперимента по рассеянию. Но на самом деле эксперимента делать и не надо, поскольку в области малых импульсов формула (1.173) должна переходить в известную нерелятивистскую формулу для кулоновского рассеяния.

Для перехода к нерелятивистскому пределу вычислим s , t , u в системе центра масс, где

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2; \quad \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2,$$

$$p_{10} = p_{20} = p'_{10} = p'_{20}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 s &= (p_{10} + p_{20})^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (p_{10} + p_{20})^2 = E^2, \\
 t &= (p'_{10} - p_{10})^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = -|\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}'_1|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}'_1| \cos \theta = \\
 &= -2p^2(1 - \cos \theta).
 \end{aligned}$$

u получается из t заменой p'_1 на p'_2 , т. е.

$$u = -2p^2(1 + \cos \theta); \quad p_{10} = \sqrt{p^2 + m^2}; \quad \rightarrow s = 4(p^2 + m^2).$$

В нерелятивистском пределе $s = E^2 \simeq 4m^2$; $t, u \ll s$. Тогда (1.173) принимает вид:

$$T = -\gamma^2 4m^2 \left[\frac{1}{\mathbf{q}^2} + \frac{1}{\mathbf{q}'^2} \right]. \quad (1.174)$$

С другой стороны, в нерелятивистской квантовой механике для амплитуды рассеяния f в борновском приближении имеем:

$$f = -\frac{2\mu}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) d^3r + f_{\text{обмен}}.$$

Здесь $\mu = m/2$ — приведенная масса. В хэвисайдových единицах кулоновский потенциал имеет вид:

$$U(r) = \frac{e^2}{4\pi r},$$

тогда

$$f = -\frac{m}{4\pi} e^2 \frac{1}{\mathbf{q}^2} + f_{\text{обмен}}. \quad (1.175)$$

При рассеянии на малые углы $\theta \ll 1$ обменными членами в (1.174) и (1.175) можно пренебречь.

Теперь мы можем найти связь между нерелятивистской амплитудой f и T . Сечение выражается через f как

$$d\sigma = |f|^2 d\Omega. \quad (1.176)$$

Сравнивая с (1.171), получим

$$f = \frac{T}{8\pi\sqrt{s}} \simeq \frac{T}{16\pi m}. \quad (1.177)$$

Подставляя в (1.177) значение f (1.175) и T (1.174), найдем наконец значение нашей константы γ^2 :

$$-\frac{m}{2\pi} e^2 \frac{1}{q^2} = -\gamma^2 \frac{4m^2}{q^2 16\pi m}.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma^2 = e^2. \quad (1.178)$$

Таким образом, γ совпадает с зарядом частицы.

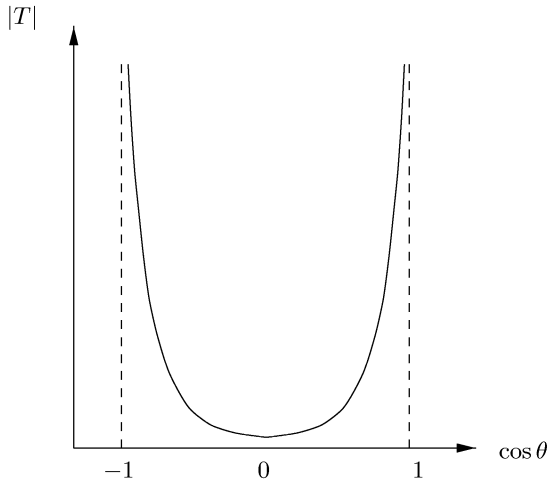
Отметим, что в наших единицах $e^2/4\pi = 1/137 \ll 1$. Таким образом, мы действительно с хорошей точностью можем ограничиться простейшими процессами.

Подставляя теперь в (1.173) $\gamma^2 = e^2$, получаем T при произвольных энергиях. В с.ц.м. (1.173) принимает вид:

$$T = -e^2 \left[\frac{3 + \cos\theta + 2m^2/p^2}{1 - \cos\theta} + \frac{3 - \cos\theta + 2m^2/p^2}{1 + \cos\theta} \right]. \quad (1.179)$$

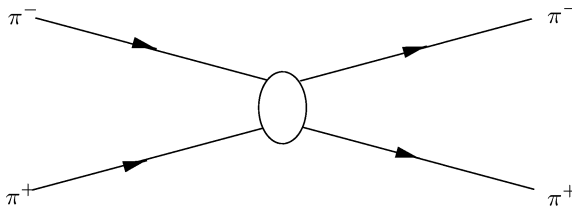
Результатом релятивизма здесь является появление зависимости амплитуды от величины импульса p налетающих частиц.

Приводим график зависимости T от $\cos \theta$:

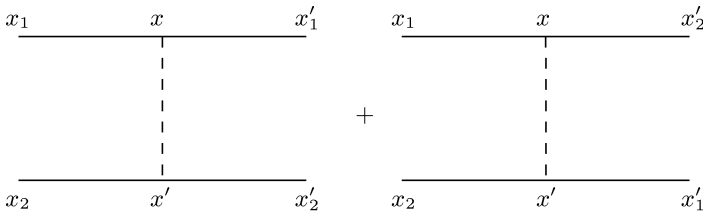


Суммируя, мы показали, что константа взаимодействия заряженных бесспиновых частиц с электромагнитным полем совпадает с зарядом этих частиц, т. е. $\gamma^2 = e^2$, и получили формулу (1.179) для инвариантной амплитуды рассеяния π^+ на π^+ (или π^- на π^-) в первом порядке по e^2 .

Рассмотрим теперь рассеяние π^- на π^+ , т. е.

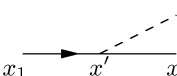
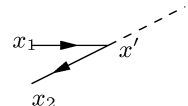


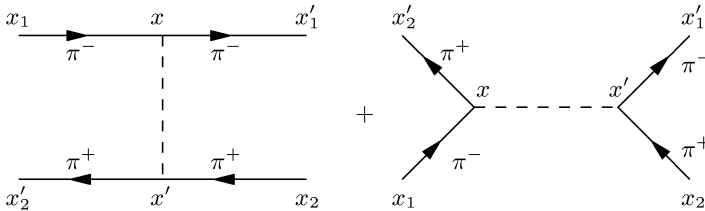
В координатном представлении простейшие диаграммы, описывающие рассеяние заряженных частиц, имеют вид:



Если устремить $x_{10}, x_{20} \rightarrow -\infty, x'_{10}, x'_{20} \rightarrow +\infty$ то, как мы говорили, получим амплитуду рассеяния $\pi^- \pi^-$.

А что, если вычислить амплитуду при условии $x_{10}, x'_{20} \rightarrow -\infty, x_{20}, x'_{10} \rightarrow +\infty$?

Тогда процесс  перейдет в  и мы, чтобы сохранить заряд, интерпретировали этот процесс так: из x_1 в x' распространяется частица, а из x'_2 в x' — античастица с противоположным зарядом, а также ввели стрелки, чтобы помнить, в какую сторону дифференцировать со знаком “+”, а в какую — со знаком “−”. Таким образом, диаграммы можно переписать так:



т. е. получим рассеяние π^- на π^+ . Второй график здесь уже не такой, как при рассеянии тождественных частиц, и описывает аннигиляцию двух мезонов, а потом превращение фотона опять в два мезона, т. е. процесс через промежуточную частицу.

Вычислим амплитуду, соответствующую первому графику. Здесь можно поступать как раньше, т. е. вычислить функции Грина для π^- :

$$\begin{aligned}
 G(x'_1 - x) &= \int \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-i p'_1 (x'_1 - x)}}{m^2 - p'^2_1} = \\
 &= \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \Psi_{p'_1}(x'_1) \Psi^*_{p'_1}(x), \quad (1.180)
 \end{aligned}$$

для π^+ аналогично:

$$G(x_2 - x') = \int \frac{d^3 p'_+}{(2\pi)^3} \Psi_{p'_+}(x_2) \Psi_{p'_+}^*(x'), \quad (1.181)$$

где

$$\Psi_p = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}}$$

и т.д., но неудобно то, что необходимо помнить, в какую сторону оператор дифференцирования должен действовать со знаком “+”, а в какую — со знаком “-”. Гораздо удобнее написать сразу амплитуду для рассеяния π^- на π^- , т. е. для “неразвернутых” стрелок, а в соответствующих функциях Грина замкнуть контур наоборот, в силу условия $x_{10}, x'_{20} \rightarrow -\infty$, $x_{20}, x'_{10} \rightarrow +\infty$. Тогда, как и прежде, будет входить функция Грина

$$G(x' - x_2) = \int \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ip'_2(x' - x_2)}}{m^2 - p'^2_2}. \quad (1.182)$$

Но контур здесь, в отличие от прежнего случая, надо замкнуть наверх, т. е. на полюс $p'_{20} = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Тогда

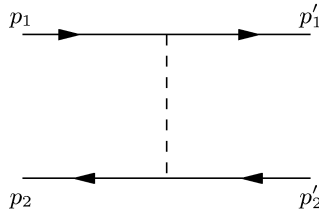
$$\begin{aligned} G(x' - x_2) &= \\ &= \int \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 2|p'_{20}|} e^{i\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}(x'_0 - x_{20}) + i\mathbf{p}_2(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2)} = \\ &= \int \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3} \Psi_{-p'_2}(x_2) \Psi_{-p'_2}^*(x'), \end{aligned} \quad (1.183)$$

поскольку замена $+\mathbf{p}$ на $-\mathbf{p}$ в интеграле ничего не изменит. Здесь

$$\Psi_{-p} = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2|p_0|}}, \quad p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Сравнивая (1.181) и (1.183), видим, что распространение π^+ -мезона можно описать как в терминах $\Psi_{p'_+}$, где p'_+ обычный импульс, соответствующий положительной энергии, так и в терминах $\Psi_{-p'_2}$, т. е. волновой функции π^- -мезона с отрицательной энергией. С этим связана фейнмановская интерпретация античастицы как частицы с отрицательной энергией и распространяющейся обратно во времени.

Таким образом, заменой $p'_+ = -p'_2$ мы получаем из функции распространения π^- -мезона из x_2 в x' функцию распространения π^+ -мезона из x' в x_2 , т. е. путем соответствующих замен импульсов мы можем получить из амплитуды рассеяния π^- на π^- амплитуду $\pi^+\pi^-$. На диаграмме



π^+ -мезону будут соответствовать импульсы

$$p_2^+ = -p_2; \quad p_2^{+'} = -p_2', \quad (1.184)$$

аналогично для второго графика.

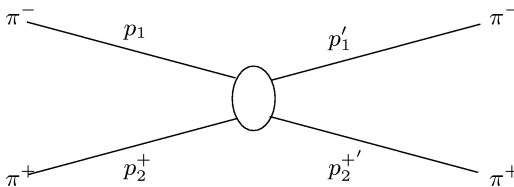
И если для рассеяния $\pi^-\pi^-$ мы имеем амплитуду

$$e^2 \left[\frac{(p_1 + p'_1)_\mu (p_2 + p'_2)_\mu}{(p_1 - p'_1)^2} + \frac{(p_1 + p'_2)_\mu (p_2 + p'_1)_\mu}{(p'_1 - p_2)^2} \right],$$

то заменой (1.184) получим амплитуду рассеяния $\pi^-\pi^+$, т. е.

$$\begin{aligned} T(p'_1, p_2^{+'}; p_1, p_2^+) = \\ = e^2 \left[-\frac{(p_1 + p'_1)_\mu (p_2^+ + p_2^{+'})_\mu}{(p_1 - p'_1)^2} + \frac{(p_1 - p_2^{+'})_\mu (p'_1 - p_2^+)_\mu}{(p'_1 + p_2^+)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.185)$$

Выразим (1.185) через инвариантные переменные s, t, u . Здесь



$$\begin{aligned} s &= (p_2^+ + p_1)^2 \\ t &= (p'_1 - p_1)^2 \\ u &= (p_2^{+'} - p_1)^2 \end{aligned}$$

Проводя вычисления, аналогичные выводу (1.173), получим

$$T_{\pi^+\pi^-} = e^2 \left[-\frac{s-u}{t} + \frac{u-t}{s} \right]. \quad (1.186)$$

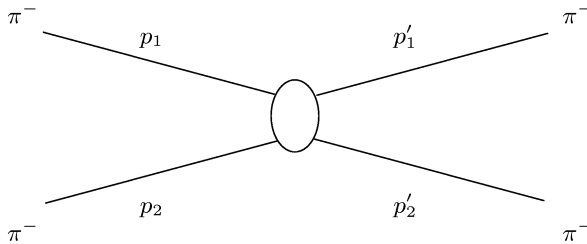
Вычисления можно было и не повторять, а просто посмотреть, во что перейдут s , t , u , определенные в (1.167) при учете (1.184), и подставить в (1.173). Действительно,

$$s_{\pi^-\pi^-} \rightarrow u_{\pi^-\pi^+}, t_{\pi^-\pi^-} \rightarrow t_{\pi^-\pi^+}, u_{\pi^-\pi^-} \rightarrow s_{\pi^+\pi^-}.$$

Проведя эту замену в (1.173), получим (1.186). Более подробное исследование амплитуд типа (1.186) проведем несколько позже для случая электронов. А сейчас обсудим связь между амплитудами в более общем плане.

1.11 Мандельштамовская плоскость

Рассмотрим рассеяние $\pi^-\pi^- \rightarrow \pi^-\pi^-$:



Мы говорили, что мандельштамовские переменные не являются независимыми и удовлетворяют соотношению

$$s + t + u = 4m^2. \quad (1.187)$$

Чтобы помнить об этом, рисуется так называемая мандельштамовская плоскость, на которой откладываются эти переменные в направлении стрелок, как указано на рис. 10.

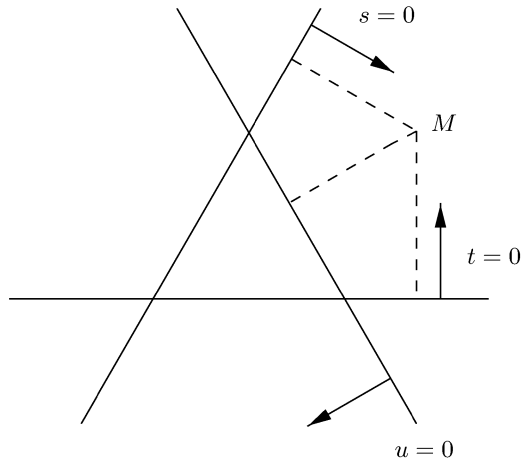


Рис. 10

При этом используется свойство равностороннего треугольника, что сумма высот, опущенных из некоторой точки на плоскости на стороны (или продолжения сторон) треугольника, одинакова для всех точек плоскости (с учетом знака высот; положительные направления указаны стрелками). Таким образом, любой точке манделштамовской плоскости соответствуют значения s, t, u , связанные (1.187). Очевидно, на прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно соответствующим основаниям, лежат точки $s = 4m^2, t = u = 0$; $t = 4m^2, s = u = 0$; $u = 4m^2, s = t = 0$.

Рассмотрим, что такое физическая область на этой плоскости (см. рис. 11). В нашем случае рассеяния π^- на π^- в с.ц.м.

$$s = 4(p^2 + m^2),$$

т. е. $s \geq 4m^2, t \leq 0, u \leq 0$. Это соответствует заштрихованной области. Называется она областью s -канала, поскольку здесь $s > 0, t, u < 0$. Жирными линиями на рис. 11 выделены область малых t , соответствующая рассеянию вперед (нерелятивистская ситуация), и область малых u , соответствующая рассеянию назад. Аналогично область $u \geq 4m^2, s, t \leq 0$ называется областью u -канала, $t \geq 4m^2, u, s \leq 0$ — t -канала.

Рассмотрим, например, какому физическому процессу соответствует, например, область u -канала (рис. 12).

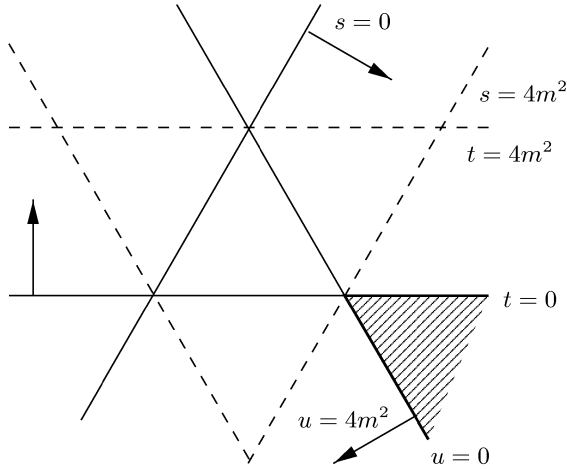


Рис. 11

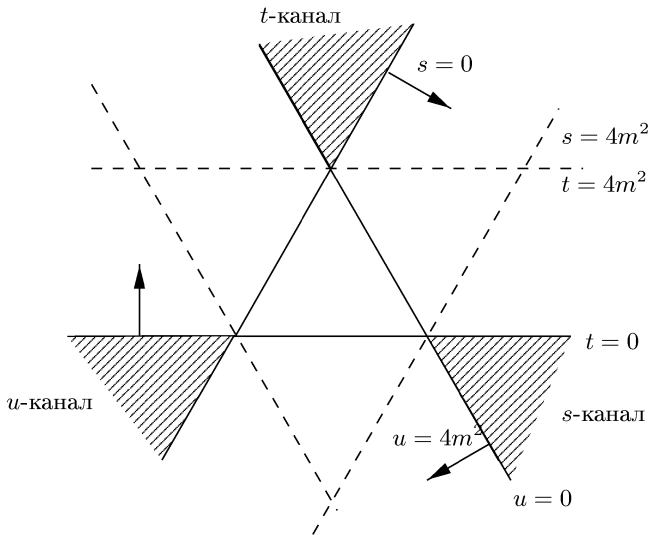
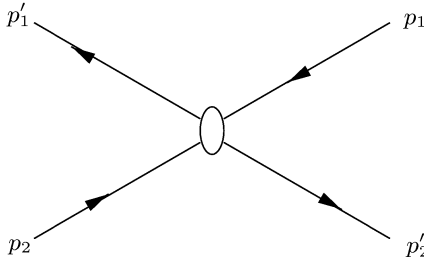


Рис. 12

Сделаем в амплитуде процесса подстановку $p'_1 = -p_1^+$; $p_1 = -p_1'^+$. Здесь $p_0^+ > 0$, т. е. мы аналитически продолжаем амплитуду в область отрицательных частот. Диаграмму тогда можно перерисовать так:



Но, как мы уже говорили, такая диаграмма описывает уже $\pi^+\pi^-$ -рассеяние с импульсами $p_1^+ = -p_1'$, $p_1'^+ = -p_1$, а переменные s, t, u в этом случае станут теперь равны:

$$\begin{aligned} s &= (p_2 - p_1'^+)^2, \\ t &= (p_2 - p_1')^2, \\ u &= (p_1^+ + p_2)^2, \end{aligned}$$

т. е. будет $u \geq 4m^2$; $s, t \leq 0$.

Таким образом, когда мы перешли от процесса $\pi^- + \pi^- \rightarrow \pi^- + \pi^-$ к процессу $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, наши переменные полностью изменились, и мы перешли из области s -канала в область u -канала. Мы фактически аналитически продолжили амплитуду T из области s -канала в область u -канала, и при этом она стала описывать другой процесс. Именно так мы и получили (1.186) из (1.173).

Действительно, если исходная амплитуда была

$$T = e^2 \left[\frac{s-u}{t} + \frac{s-t}{u} \right]$$

и была определена при $s \geq 4m^2$; $t, u < 0$, то, если теперь понимать под u : $u = 4(p_c^2 + m^2)$, т. е. называть u прежнюю s , а

$$t = -2p_c^2(1 - \cos \theta), \quad s = -2p_c^2(1 + \cos \theta),$$

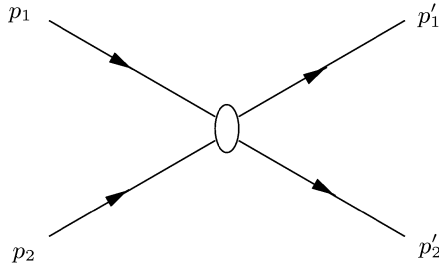
получим

$$T_{\pi^+\pi^-} = e^2 \left[\frac{u-s}{t} + \frac{u-t}{s} \right].$$

Именно это выражение мы и получали ранее для амплитуды $\pi^+\pi^-$ -рассеяния.

Таким образом, переход от частиц к античастицам можно делать двумя способами: либо вычислять амплитуды, фиксируя знак энергии p , а затем меняя его, либо фиксируя переменные s , t , u определенным процессом, а затем аналитически продолжая амплитуду в другой канал.

Приведем еще один пример:



Если смотреть на диаграмму сверху, то в этом случае p_1 и p'_2 являются импульсами частиц, а $p'_1 = -p_1^{+'}$ и $p_2 = -p_2^+$ — античастиц. С этой точки зрения

$$\begin{aligned} s &= (p_1 - p_2^+)^2, \\ u &= (p_1 - p_2')^2, \\ t &= (p_1 + p_1^{+'})^2, \end{aligned}$$

т. е. теперь мы оказываемся в области t -канала, который отвечает реакции $\pi^+(p^{+'} + \pi^-(p_1) \rightarrow \pi^+(p_2^+ + \pi^-(p'_2))$.

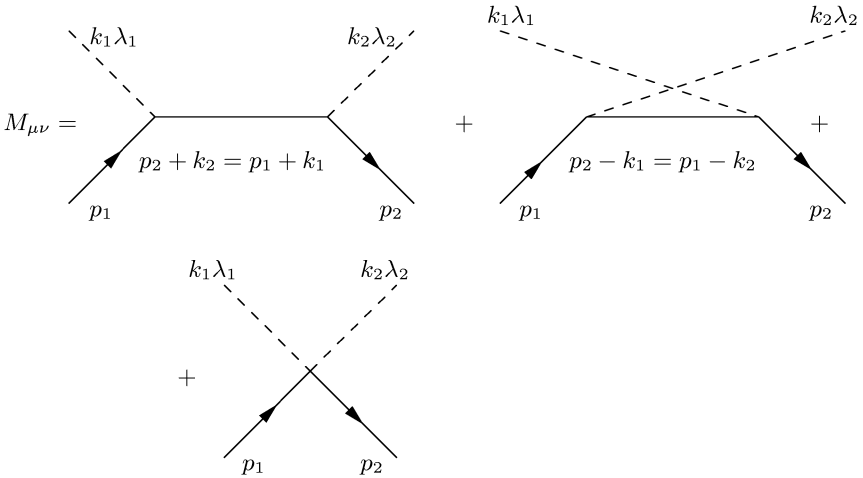
Итак, мы получили следующий важный результат: одна амплитуда описывает не один, а целый класс процессов:

в s -канале	$\pi^- + \pi^- \rightarrow \pi^- + \pi^-;$
в u -канале	$\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-;$
в t -канале	$\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^- + \pi^+.$

В заключение этого параграфа заметим, что распад π -мезона на три запрещен законами сохранения, т. е. лежит в нефизической области. Но если мы увеличим массу одной частицы, то наша амплитуда опишет и этот процесс, а область распада на мандельштамовской плоскости будет внутри треугольника.

1.12 Комптон-эффект (для π -мезона)

Простейшие диаграммы, описывающие рассеяние фотона на π -мезоне, следующие:



Волновая функция мезона имеет вид:

$$\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}},$$

фотона —

$$e_\mu^\lambda(k) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0}}.$$

Они у нас возникали в амплитудах при устремлении времен к бесконечности.

Для фотона

$$D_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ikx}}{k^2} = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikx}}{2k_0} (-\delta_{\mu\nu}),$$

$$-g_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 e_\mu^\lambda e_\nu^{\lambda*};$$

e_μ^λ и e_ν^λ мы отнесли к разным волновым функциям. Аналогично случаю $\pi\pi$ рассеяния можно сразу написать амплитуду, соответствующую двум первым диаграммам, обозначая амплитуду, соответствующую третьей диаграмме, через $\tilde{M}_{\lambda_2\lambda_1}$, получим

$$T_{\pi\gamma} = e^2 \left[(p_2 + p_2 + k_2)_\nu e_\nu^{\lambda_2} \frac{1}{m^2 - (p_2 + k_2)^2} (p_1 + p_1 + k_1)_\mu e_\mu^{\lambda_1} + \right. \\ \left. + (p_2 + p_2 - k_1)_\mu e_\mu^{\lambda_1} \frac{1}{m^2 - (p_2 - k_1)^2} (p_1 + p_1 - k_2)_\nu e_\nu^{\lambda_2} \right] + \tilde{M}_{\lambda_2\lambda_1}. \quad (1.188)$$

Вынесем из (1.188) множитель $e_\nu^{\lambda_2} e_\mu^{\lambda_1}$, остаток обозначим M , т. е.

$$T_{\pi\gamma} = e_\nu^{\lambda_2} e_\mu^{\lambda_1} M_{\nu\mu}. \quad (1.189)$$

Как мы говорили, чтобы не возникло продольной поляризации, должно выполняться условие

$$k_{1\mu} M_{\nu\mu} = 0, \quad k_{2\nu} M_{\nu\mu} = 0. \quad (1.190)$$

При $k^2 \neq 0$ мы имеем три вектора, ортогональных к k_μ , т. е. $\lambda = 1, 2, 3$; $e_\mu^\lambda k_\mu = 0$; для $\lambda = 0$, $e_\mu^0 \sim k_\mu$, их вид такой (см. п.1.3):

$$e^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^3 = \frac{1}{\sqrt{k^2}} \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

Здесь принято обозначение:

$$e = \begin{pmatrix} e_t \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

(ось z направлена по трехмерному импульсу фотона). При выполнении (1.190) из (1.189) выпадет член с e^0 , в силу его пропорциональности k_μ , а при $k^2 = 0$, т. е. для реальных фотонов, обратится в нуль и член с e^3 , таким образом, скалярные и продольные фотоны при выполнении (1.190) не будут давать вклада в реальные физические процессы.

Тензор $M_{\nu\mu}$ имеет следующий вид:

$$M_{\nu\mu} = e^2 \left[(2p_2 + k_2)_\nu \frac{1}{-2p_2 k_2} (2p_1 + k_1)_\mu + (2p_2 - k_1)_\mu \frac{1}{2p_2 k_1} (2p_1 - k_2)_\nu \right] + \tilde{M}_{\mu\nu}. \quad (1.191)$$

Вычислим $k_{2\nu} M_{\nu\mu}$:

$$k_{2\nu} M_{\nu\mu} = e^2 [-(2p_1 + k_1)_\mu + (2p_2 - k_1)_\mu] + k_{2\nu} \tilde{M}_{\mu\nu}.$$

Мы здесь учли, что $2p_2 k_1 = 2p_1 k_2$, так как $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$. Учитывая также $p_2 - p_1 - k_1 = -k_2$, окончательно получим

$$k_{2\nu} M_{\nu\mu} = -2e^2 k_{2\mu} + k_{2\nu} \tilde{M}_{\mu\nu}, \quad (1.192)$$

т. е. без введения контактной добавки условию (1.190) не удовлетворить, а тем самым и не сохранить ток.

Исходя из соображений простоты, примем в качестве гипотезы, что

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = 2e^2 g_{\mu\nu}. \quad (1.193)$$

В результате, мы действительно получим амплитуду, для которой сохраняется ток и в которую не входят скалярные и продольные фотоны.

Теперь, пользуясь выражением (1.193) для контактного взаимодействия, вычислим $T_{\pi\gamma}$. Поскольку (1.188) релятивистски инвариантно, вычисления проведем в системе, где первоначально электрон покоился, т. е.

$$p_{10} = m, \quad \mathbf{p}_1 = 0.$$

Так как вклад в (1.188) дадут только две компоненты e_μ^λ , ортогональные к k_μ , то члены, пропорциональные k_μ в (1.188), обратятся в нуль. Кроме того, эти e^λ содержат только пространственные компоненты, а p_1 , входящий множителем в первые два члена, — только временную, поэтому ненулевой вклад в амплитуду будет только от контактного члена.

Таким образом,

$$T_{\pi\gamma} = e_\nu^{\lambda_2*} e_\mu^{\lambda_1} g_{\mu\nu} 2e^2, \quad (1.194)$$

т. е.

$$T_{\pi\gamma} = 2e^2 (e^{\lambda_2*}(\mathbf{k}_2) \cdot e^{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)).$$

Для случая рассеяния на малые углы $\mathbf{k}_1/|\mathbf{k}_1| = \mathbf{k}_2/|\mathbf{k}_2|$ амплитуда равна просто

$$T_{\pi\gamma} = -2e^2\delta_{\lambda_1\lambda_2}. \quad (1.195)$$

Рассмотрим связь с обычной нерелятивистской амплитудой рассеяния. Как мы говорили,

$$f = \frac{T}{8\pi\sqrt{s}} = -\frac{e^2}{4\pi\sqrt{s}}. \quad (1.196)$$

При $k \rightarrow 0$ в нерелятивистском пределе $\sqrt{s} \rightarrow m$, т. е.

$$f = -\frac{e^2}{4\pi m}, \quad (1.197)$$

что совпадает с формулой для классического томсоновского рассеяния: $f = -e'^2/m$, e' — обычный, не хэвисайдов заряд.

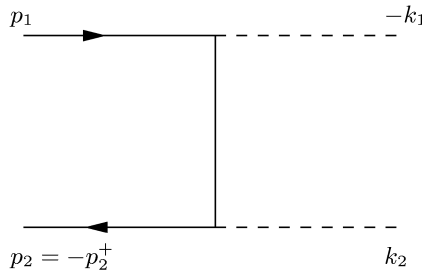
Рассмотрим теперь нашу амплитуду с точки зрения различных каналов. Произведем замену:

$$\begin{aligned} k_2 &= -k'_1, \\ k_1 &= -k'_2, \end{aligned}$$

т. е. перейдем в u -канал. Такой заменой мы переставили только гамма-кванты, а поскольку они нейтральны, от этого ничего не изменилось, и амплитуда в u -канале совпадает с амплитудой в s -канале. Замена

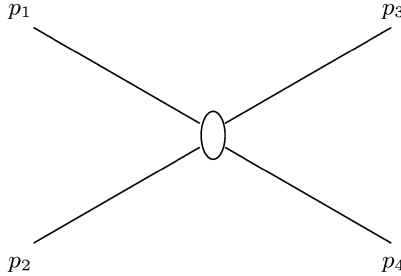
$$\begin{aligned} p_2 &= -p_2^+, \\ k_2 &= -k'_2 \end{aligned}$$

приводит к новому процессу: двухфотонной аннигиляции двух π -мезонов и соответствует переходу в область t -канала.



Симметрия же амплитуды относительно пунктирной линии на мандельштамовской плоскости означает тождественность фотона и антифотона в силу его нейтральности.

Итак, мы научились непосредственно по диаграммам вычислять амплитуды различных процессов. Давайте посмотрим, нельзя ли с помощью диаграмм сразу представить сечение. Мы уже писали сечение для процесса



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{J}} |T_{ab}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \frac{1}{(2\pi)^6}.$$

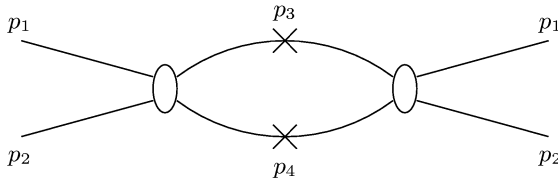
Заметим, что в смысле интегрирования справедливо такое соотношение:

$$\frac{d^3 p_3}{2E_3} = d^4 p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \theta(p_{30}) \equiv d^4 p_3 \delta_+(p_3^2 - m_3^2), \quad (1.198)$$

тогда выражение для сечения можно переписать так:

$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{J}} T_{ab} \delta_+(p_3^2 - m_3^2) \delta_+(p_4^2 - m_4^2) T_{ab}^* \frac{d^4 p_3 d^4 p_4}{(2\pi)^6} \delta(\sum p_i), \quad (1.199)$$

т. е. по нашим обычным правилам нужно вычислить диаграмму



с учетом того, что в промежутке вместо функций Грина стоят δ -функции, а это соответствует реальным частицам, для которых $p_3^2 = m_3^2$, $p_4^2 = m_4^2$.

Действительно, функцию Грина можно представить в виде

$$G = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = P \frac{1}{m^2 - p^2} + i\pi\delta(p^2 - m^2). \quad (1.200)$$

Символ P означает интегрирование в смысле главного значения. Удобство записи сечения в виде (1.199) состоит в том, что сечения сразу можно продолжать из канала в канал (при условии, что амплитуда T при этом не получит мнимой добавки). Этот вопрос мы обсудим позднее.

Глава 2

Частицы со спином $1/2$. Основные электродинамические процессы

2.1 Свободная частица со спином $J = 1/2$

Состояние частицы с $J = 1/2$ можно описать при помощи двух величин $\varphi_\lambda (\lambda = 1, 2)$, которые имеют смысл амплитуд вероятности обнаружения частицы в состоянии с проекциями спина $1/2$ и $-1/2$. Их мы можем объединить в одну двухкомпонентную величину $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$. Тогда волновая функция покоящейся частицы запишется как обычно:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{-imt}. \quad (2.1)$$

Для движущейся частицы со спином $J = 0$ мы имели

$$\Psi = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}}.$$

В нашем случае ситуация более сложная: чтобы получить волновую функцию частицы с конечным импульсом, нужно сделать преобразование от покоящейся к движущейся системе отсчета. Для этого нужно знать закон, по которому будут преобразовываться φ_λ при преобразованиях Лоренца. Другими словами, задача сводится к нахождению представления группы Лоренца, по которому преобразуются наши двухкомпонентные величины.

Преобразования Лоренца имеют вид:

$$x'_i = a_{ik} x_k, \quad (2.2)$$

причем матрица преобразования зависит от шести параметров: трех углов Эйлера θ_i , соответствующих пространственным поворотам, и трех компонент скорости v_i , соответствующих переходу из одной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой.

Теперь обратимся к волновым функциям. Если в покоящейся системе мы имели некоторые величины ξ_1, ξ_2 , то при переходе к движущейся системе они будут преобразовываться в общем случае так:

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= u_{11}\xi_1 + u_{12}\xi_2, \\ \xi'_2 &= u_{21}\xi_1 + u_{22}\xi_2.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Вообще говоря, как ξ_i , так и u_{ik} комплексны. Поэтому матрица u_{ik} содержит 8 параметров. Наложим на нее условие:

$$\det(u_{ik}) = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1.\tag{2.4}$$

В (2.4) содержится два условия, на вещественную и мнимую части, так что теперь матрица u_{ik} будет содержать 6 независимых параметров — столько же, сколько в общем преобразовании Лоренца. Установим соответствие между этими величинами и параметрами преобразований Лоренца. Как известно, любую матрицу второго порядка можно представить в виде суперпозиции четырех матриц: единичной и трех матриц Паули:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Паули обладают следующими свойствами:

$$[\sigma_i \sigma_k] = 2i\epsilon_{ikl}\sigma_l, \sigma_x \sigma_y = i\sigma_z, \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x, \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y,\tag{2.5}$$

т. е. ведут себя как генераторы поворота в трехмерном пространстве.

Поворотам в обычном трехмерном пространстве соответствует следующее преобразование величины $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$:

$$\xi' = u\xi,\tag{2.6}$$

где

$$u = e^{\frac{i}{2}\sigma_z\theta_z} e^{\frac{i}{2}\sigma_y\theta_y} e^{\frac{i}{2}\sigma_x\theta_x},\tag{2.7}$$

или

$$u = e^{\frac{i}{2}\sigma_n\theta_n},\tag{2.8}$$

где σ_n — проекция “вектора” $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ на ось поворота, θ_n — угол поворота относительно этой оси.

Сопряженная величина ξ^* будет преобразовываться так:

$$\xi'^* = e^{-\frac{i}{2}\sigma_n^* \theta_n} \xi^*;$$

транспонируя это соотношение, получим

$$\xi'^{*T} = \xi^{*T} e^{-\frac{i}{2}\sigma_n^{*T} \theta_n},$$

или

$$\xi'^+ = \xi^+ e^{-\frac{i}{2}\sigma_n \theta_n}, \quad (2.9)$$

в силу эрмитовости матриц Паули. Символом $*$ мы обозначили комплексное сопряжение, T — транспонирование, “+” — эрмитово сопряжение, ξ^+ означает здесь строчку (ξ_1^*, ξ_2^*) , вместо столбца $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Величина $(\xi^+ \xi)$, согласно правилу обычного умножения матриц, есть

$$(\xi^+ \xi) = \xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2, \quad (2.10)$$

что совпадает с обычным определением скалярного произведения в двумерном пространстве. Рассмотрим, как она преобразуется при преобразованиях (2.3), а соответственно, и при преобразованиях в обычном пространстве. Видим, что в силу (2.8), (2.9)

$$(\xi'^+ \xi') = (\xi^+ \xi), \quad (2.11)$$

т. е. преобразование является унитарным.

Рассмотрим теперь закон преобразования для величины

$$A_i = \xi^+ \sigma_i \xi.$$

После преобразования она переходит в

$$A'_i = \xi'^+ \sigma_i \xi'.$$

Так, относительно вращения вокруг оси z , компонента A_x становится равной

$$\begin{aligned} A'_x &= \xi^+ e^{-\frac{i}{2}\sigma_z \theta_z} \sigma_x e^{\frac{i}{2}\sigma_z \theta_z} \xi = \\ &= \xi^+ (\cos \frac{1}{2}\sigma_z \theta_z - i \sin \frac{1}{2}\sigma_z \theta_z) \sigma_x (\cos \frac{1}{2}\sigma_z \theta_z + i \sin \frac{1}{2}\sigma_z \theta_z) \xi. \end{aligned}$$

Поскольку разложение $\cos x$ в ряд содержит только четные степени x , а $\sigma_z^2 = 1$, получим

$$\cos \frac{1}{2}\sigma_z \theta_z = I \cos \frac{1}{2}\theta_z.$$

Аналогично

$$\sin \frac{1}{2} \sigma_z \theta_z = \sigma_z \sin \frac{1}{2} \theta_z,$$

поскольку разложение синуса содержит только нечетные степени, а нечетная степень σ_z равна σ_z . Таким образом,

$$\begin{aligned} A'_x &= \xi^+ (I \cos \frac{\theta_z}{2} - i \sigma_z \sin \frac{\theta_z}{2}) (\sigma_x \cos \frac{\theta_z}{2} + i \sigma_x \sigma_z \sin \frac{\theta_z}{2}) \xi = \\ &= \xi^+ (\sigma_x \cos^2 \frac{\theta_z}{2} + \sigma_y \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} + \sigma_y \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} - \sigma_z \sin^2 \frac{\theta_z}{2}) \xi = \\ &= \xi^+ (\sigma_x \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \xi = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Величина A_x преобразуется при вращениях как x -компонента трехмерного вектора. Повторяя вычисления для других компонент, можно показать, что величина $A_i = \xi^+ \sigma_i \xi$ преобразуется при поворотах, как обычный вектор в трехмерном пространстве. Единственное отличие в том, что при отражениях он ведет себя как псевдовектор, т. е. не меняет знак.

Мы фактически рассмотрели представление группы вращений трехмерного пространства, являющейся трехпараметрической подгруппой группы Лоренца. По аналогии с этим построим представление, соответствующее преобразованиям Лоренца.

Пусть система отсчета движется вдоль оси z со скоростью v , тогда в этой системе

$$z' = \frac{z + vt}{\sqrt{1 - v^2}} = z \operatorname{ch} \chi + t \operatorname{sh} \chi,$$

или:

$$t' = \frac{t + vz}{\sqrt{1 - v^2}} = z \operatorname{sh} \chi + t \operatorname{ch} \chi, \quad (2.13)$$

где $\operatorname{th} \chi = v$. Эти преобразования очень похожи на поворот на комплексный угол, поэтому по аналогии для матрицы преобразования двухкомпонентных величин положим

$$u_z = e^{\frac{\chi}{2} \sigma_z} \quad (\text{возможно также } \tilde{u}_z = e^{-\frac{\chi}{2} \sigma_z}),$$

т. е.

$$\xi' = e^{\frac{\chi}{2} \sigma_z} \xi, \quad \xi'^+ = \xi^+ e^{\frac{\chi}{2} \sigma_z}. \quad (2.14)$$

Как и раньше, величина $A_z = \xi^+ \sigma_z \xi$ будет преобразовываться по закону (2.13), где роль временной компоненты играет $A_0 = \xi^+ \xi$, и сама A_0

будет преобразовываться как время в (2.13). Действительно, из (2.14) напишем

$$\begin{aligned} A'_0 &= \xi'^+ \xi' = \xi^+ e^{\chi \sigma_z} \xi = \xi^+ (\operatorname{ch} \chi + \sigma_z \operatorname{sh} \chi) \xi = \\ &= (\xi^+ \sigma_z \xi) \operatorname{sh} \chi + (\xi^+ \xi) \operatorname{ch} \chi = A_z \operatorname{sh} \chi + A_0 \operatorname{ch} \chi. \end{aligned}$$

Аналогично и для A_z , т. е. величина $(A_0, \mathbf{A}) = (\xi^+ \xi, \xi^+ \boldsymbol{\sigma} \xi)$ образует 4-вектор.

Итак, для движения вдоль произвольного направления \mathbf{n} можно написать

$$\xi' = e^{\frac{\chi}{2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})} \xi. \quad (2.15)$$

Но, с другой стороны, представление группы Лоренца можно получить преобразованиями

$$\dot{\xi}' = e^{-\frac{\chi}{2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})} \dot{\xi}. \quad (2.16)$$

Точками мы обозначили величины, которые преобразуются по (2.16). Это говорит о том, что в двумерном комплексном пространстве¹ реализуются два представления группы Лоренца, или так называемое двузначное представление. Закон преобразования (2.16) соответствует движению в противоположном направлении (действительно, замена $\chi \rightarrow -\chi$ приводит в (2.13) к изменению знака скорости).

Итак, мы имеем два сорта величин ξ и $\dot{\xi}$, которые преобразуются по различным представлениям группы Лоренца. Какие из них мы выберем в качестве волновой функции частицы со спином $1/2$?

Перейдем к системе отсчета, где частица движется со скоростью v :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{p_0}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{p_0}{m} = \operatorname{ch} \chi.$$

Из (2.15) следует

$$\begin{aligned} \xi' &= \left[\operatorname{ch} \frac{\chi}{2} + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \operatorname{sh} \frac{\chi}{2} \right] \varphi e^{-ipx} = \\ &= \left[\sqrt{\frac{\operatorname{ch} \chi + 1}{2}} + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \chi - 1}{2}} \right] \varphi e^{-ipx}, \end{aligned}$$

¹Векторы в таком пространстве называются спинорами, т. е. наши двухкомпонентные величины — это спиноры.

т. е. если в качестве закона преобразования волновой функции взять (2.15), то для движущейся частицы будем иметь

$$\xi^t = \left[\sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \sqrt{\frac{p_0 - m}{2m}} \right] \varphi e^{-ipx}. \quad (2.17)$$

Однако имеется и другая возможность: движение в противоположную сторону. Используя (2.16), в этом случае получим

$$\dot{\xi}^t = \left[\sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \sqrt{\frac{p_0 - m}{2m}} \right] \varphi e^{-ipx}. \quad (2.18)$$

Которая из этих волновых функций верна — это вопрос эксперимента, для нейтрино, например, имеются обе возможности.

Что произойдет при отражении $z \rightarrow -z$? Видно, что

$$\xi \rightarrow \dot{\xi}.$$

Это означает, что если частица описывалась какой-то из этих функций в правой системе координат, то при переходе в левую ее волновая функция изменится, т. е. в этом случае частица сама содержит в себе понятие левого и правого. С нейтрино так и есть на самом деле.

Но если частица совершенно симметрична (т. е. “не знает”, где право, где лево), то при отражении ничего не должно измениться. Описание частицы в правой и левой системе отсчета должны быть эквивалентны (сохранение четности). Такие частицы должны описываться некоторой суперпозицией ξ и $\dot{\xi}$. Но обычно поступают так: вводят четырехкомпонентную величину (биспинор) и волновую функцию полагают равной

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix}.$$

Если все эти величины будут входить в различные выражения симметрично, то четность будет сохраняться автоматически.

Описание частицы со спином 1/2 биспинором не диктуется законами природы, это просто удобная форма записи (она возникла из уравнения Дирака). Часто удобно вводить также двухкомпонентные волно-

вые функции с определенной четностью:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{1}{2}(\xi + \dot{\xi}), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2}(\xi - \dot{\xi}).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Явный вид этих функций:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \varphi e^{-ipx}, \\ \Psi_2 &= (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \sqrt{\frac{p_0 - m}{2m}} \varphi e^{-ipx}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Удобно в этом выражении исключить \mathbf{n} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \sqrt{p_0^2 - m^2},$$

тогда

$$\Psi_2 = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})}{p_0 + m} \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \varphi e^{-ipx} = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})}{p_0 + m} \Psi_1.\tag{2.21}$$

Поскольку мы ввели две “лишние” величины (Ψ_2) только для того, чтобы поддержать симметрию волновой функции относительно пространственного отражения, то, естественно, они выражаются через Ψ_1 . Теперь попытаемся написать уравнение, связывающее все эти величины, чтобы в нем поддерживалась симметрия между левым и правым и чтобы покоящаяся частица имела определенную (например, положительную) четность (в системе покоя $\Psi_2 = 0$, как следует из (2.21)). Для этой цели введем четырехмерные матрицы γ (матрицы Дирака в стандартном представлении):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно написать

$$(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - m) \Psi = 0,\tag{2.22}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.\tag{2.23}$$

Уравнение (2.22) называется уравнением Дирака. Расписывая его в компонентах, получим

$$(p_0 - m)\Psi_1 - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\Psi_2 = 0, \quad (2.24)$$

$$(-p_0 - m)\Psi_2 + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\Psi_1 = 0. \quad (2.25)$$

Из (2.25) вытекает (2.21). А подставляя в (2.24) выражение для Ψ_2 из (2.21), получим связь между энергией и импульсом:

$$\left[(p_0 - m) - \frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^2}{p_0 + m} \right] \Psi_1 = 0,$$

или

$$\frac{p_0^2 - m^2 - \mathbf{p}^2}{p_0 + m} \Psi_1 = 0, \quad \text{т. е. } p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.$$

Уравнение (2.22) релятивистски инвариантно, поскольку $\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} = \gamma_\mu p_\mu \equiv \hat{p}$ — релятивистский инвариант.

Таким образом, уравнение

$$(\hat{p} - m)\Psi = 0 \quad (2.26)$$

выделяет состояния с положительной четностью, поскольку при $\mathbf{v} = 0$ остается только Ψ_1 . Соответственно, для состояний с отрицательной четностью имеем

$$(\hat{p} + m)\Psi = 0. \quad (2.27)$$

Чтобы наше описание годилось и для частиц с нулевой массой, надо избавиться от масс в знаменателях волновых функций (2.20). Для этой цели введем биспинор u^λ с другой нормировкой (умножая просто выражения (2.20) на $\sqrt{2m}$), т. е.

$$\begin{aligned} \Psi^\lambda &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + m}\varphi_\lambda \\ (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\sqrt{p_0 - m}\varphi_\lambda \end{pmatrix} e^{-ipx} = \\ &= \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} \varphi_\lambda \\ (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})/(p_0 + m)\varphi_\lambda \end{pmatrix} e^{-ipx} = u^\lambda(p)e^{-ipx}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Поскольку φ имеет две компоненты, то имеется две линейно независимых функции φ_λ , отвечающие двум проекциям спина; это обстоятельство мы и отметили индексом λ ; ($\lambda = +1, -1$). В системе покоя $\lambda/2$ есть просто проекция спина, т. е.

$$\sigma_z \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda. \quad (2.29)$$

Легко видеть, что

$$\varphi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и волновую функцию в состоянии покоя (φ_1) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

φ_1 и φ_2 как раз и имеют смысл амплитуд вероятности частице иметь, соответственно, проекцию спина $+1/2$ и $-1/2$.

Запишем выражение (2.29) релятивистски инвариантным образом. Для этой цели введем единичный вектор ζ , $\zeta^2 = 1$ в неподвижной системе, направленный вдоль спина, тогда (2.29) можно переписать:

$$(\boldsymbol{\sigma}\zeta)\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.30)$$

Можно ввести пространственноподобный 4-вектор ζ_μ , $\zeta_\mu\zeta_\mu = -1$, который в системе покоя переходит в $(0, \zeta)$. Введя также четырехмерную матрицу

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

можем записать релятивистски инвариантное выражение, соответствующее (2.30):

$$(\gamma_5\zeta_\mu\gamma_\mu - \lambda)u = 0. \quad (2.31)$$

Действительно, в системе покоя мы имеем

$$-(\gamma_5\zeta_i\gamma_i + \lambda)u = [(\boldsymbol{\sigma}\zeta) - 1]\varphi = 0.$$

Здесь мы использовали то, что

$$\gamma_5\gamma_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & +\sigma_i \end{pmatrix}$$

и то, что в системе покоя нижние компоненты u равны нулю. Таким образом, чтобы однозначно определить спинор, необходимы два уравнения:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)u &= 0, \\ (\gamma_5\hat{\zeta} - \lambda)u &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Решение этих уравнений будем обозначать либо $u(p, \zeta)$, либо $u^\lambda(p)$ (здесь уже и λ , и ζ фиксированы).

Обсудим вероятностную интерпретацию спинорных волновых функций. Для этого, как и раньше, нам нужно составить сохраняющуюся величину. Очевидно, релятивистским инвариантом будет произведение спиноров разных типов (т. е. преобразующихся по различным представлениям группы Лоренца). Действительно,

$$\dot{\xi}^+ \xi' = \dot{\xi}^+ e^{-\frac{\chi}{2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})} e^{\frac{\chi}{2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})} \xi = \dot{\xi}^+ \xi.$$

Мы же пользуемся их линейными комбинациями:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{1}{2}(\xi + \dot{\xi}), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2}(\xi - \dot{\xi}).\end{aligned}$$

Тогда

$$(\dot{\xi}^+ \xi) = (\Psi_1^+ - \Psi_2^+, \Psi_1 + \Psi_2) = \Psi_1^+ \Psi_1 - \Psi_2^+ \Psi_2.$$

Введем биспинор (дираковски сопряженный к u^λ)

$$\bar{u}^\lambda(p) = u^+(p)\gamma_0 = (\Psi_1^+, \Psi_2^+) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = (\Psi_1^+, -\Psi_2^+).$$

Тогда величина

$$\bar{u}^\lambda(p)u^{\lambda'}(p) = \Psi_1^+ \Psi_1' - \Psi_2^+ \Psi_2' \quad (2.33)$$

является релятивистским инвариантом.

Рассмотрим, какому уравнению удовлетворяет \bar{u}^λ . Из первого уравнения (2.32) имеем

$$u^+(\hat{p}^+ - m) = 0, \quad (2.34)$$

где

$$\hat{p}^+ = (\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p})^+ = \gamma_0 p_0 + \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}$$

в силу эрмитовости γ_0 и антиэрмитовости γ_i . Домножая (2.34) на γ_0 и пользуясь перестановочными соотношениями для γ -матриц

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu},$$

т. е.

$$\boldsymbol{\gamma} \gamma_0 = -\gamma_0 \boldsymbol{\gamma},$$

получим

$$\bar{u}(\hat{p} - m) = 0. \quad (2.35)$$

А что произойдет со вторым уравнением (2.32)? Как и в предыдущем случае, имеем

$$u^+(\hat{\zeta}^+\gamma_5 - \lambda) = 0.$$

Опять умножая справа на γ_0 и пронося γ -матрицы вправо, получим

$$\bar{u}(\gamma_5\hat{\zeta} - \lambda) = 0, \quad (2.36)$$

т. е. \bar{u}^λ является решением тех же уравнений, что и u^λ .

Поскольку, как мы показали, $\bar{u}u$ есть релятивистский инвариант, а γ_μ преобразуется как 4-вектор, величина $j_\mu = \bar{u}\gamma_\mu u$ будет преобразовываться как 4-вектор, ее нулевую компоненту $\bar{u}\gamma_0 u = u^+u$ можно отождествить с плотностью вероятности, а $\bar{u}\gamma_i u$ — с плотностью потока вероятности.

Действительно, в координатном представлении уравнения (2.32) и (2.35) запишутся:

$$\left(i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \right) \Psi(x) = 0, \quad (2.37)$$

$$\bar{\Psi}(x) \left(-i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \right) = 0 \quad (2.38)$$

(стрелками здесь обозначено направление дифференцирования). Умножая (2.37) слева на $\bar{\Psi}$, а (2.38) справа на Ψ и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi = 0. \quad (2.39)$$

Таким образом, j_μ удовлетворяет уравнению непрерывности и j_0 , действительно, можно приписать смысл плотности вероятности. Как и прежде, частицы отвечают положительно-частотным решениям. Как сконструировать такие решения уравнения Дирака?

Положительно- и отрицательно-частотные решения отличаются заменой

$$p_0 \rightarrow -p_0, \quad \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}. \quad (2.40)$$

Выпишем наш спинор

$$u^\lambda(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + m} \varphi_\lambda \\ (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \sqrt{p_0 - m} \varphi_\lambda \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

После замены (2.40) получим

$$u^\lambda(-p) = \pm i \left(\frac{\sqrt{p_0 - m}\varphi_\lambda}{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\sqrt{p_0 + m}\varphi_\lambda} \right). \quad (2.42)$$

Знаки \pm возникают из квадратного корня. Какая связь между $u^\lambda(p)$ и $u^\lambda(-p)$? Для скалярной частицы она была тривиальной: $\varphi(-p) = \varphi^*(p)$.

Рассмотрим и здесь

$$\begin{aligned} u^{\lambda*}(-p) &= \mp i \left(\frac{\sqrt{p_0 - m}\varphi_\lambda^*}{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})^*\sqrt{p_0 - m}\varphi_\lambda^*} \right) \equiv \\ &\equiv \mp i \left(\frac{\sigma_y\sqrt{p_0 - m}\sigma_y\varphi_\lambda^*}{-\sigma_y(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\sqrt{p_0 + m}\sigma_y\varphi_\lambda^*} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Мы здесь умножили обе компоненты на $\sigma_y^2 = 1$ и воспользовались тем, что $\sigma_x^* = \sigma_x$, $\sigma_z^* = \sigma_z$, $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_y = -\sigma_y\sigma_z$, а также $\sigma_y^*\sigma_y = -\sigma_y\sigma_y = -1$.

Обозначим $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\sigma_y\varphi_\lambda^* \equiv \varphi'_\lambda$, тогда $\sigma_y\varphi_\lambda^* = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\varphi'_\lambda$, поскольку $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) = \mathbf{n}^2 = 1$ и

$$\begin{aligned} u^{\lambda*}(-p) &= \pm \left(\frac{-i\sigma_y(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\sqrt{p_0 - m}\varphi'_\lambda}{i\sigma_y\sqrt{p_0 + m}\varphi'_\lambda} \right) = \\ &= \pm \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_y \\ i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + m}\varphi'_\lambda \\ (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\sqrt{p_0 - m}\varphi'_\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Выясним, что такое φ' . Покажем, что если φ_λ удовлетворяет

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda, \quad (2.45)$$

то для φ'_λ имеем

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\varphi'_\lambda = -\lambda\varphi'_\lambda, \quad (2.46)$$

т. е. φ'_λ описывает частицу с противоположной проекцией спина.

Из (2.45) имеем

$$(\boldsymbol{\sigma}^*\mathbf{n})\varphi_\lambda^* = \lambda\varphi_\lambda^*.$$

Умножая слева на σ_y и используя

$$\sigma_y\varphi_\lambda^* = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\varphi'_\lambda,$$

получим

$$\sigma_y(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})^*\varphi_\lambda^* = \lambda(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\varphi'_\lambda.$$

С другой стороны,

$$\sigma_y(\boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{n})\varphi_\lambda^* = (-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})\sigma_y\varphi_\lambda^* = -\varphi'_\lambda,$$

т. е.

$$-\varphi'_\lambda = \lambda(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})\varphi'_\lambda.$$

А поскольку λ может принимать лишь значения ± 1 , то

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})\varphi'_\lambda = -\lambda\varphi'_\lambda,$$

т. е. действительно $\varphi'_\lambda = \varphi_{-\lambda}$. Используя этот факт, мы можем построить теперь спинор, дираковски сопряженный к $u^\lambda(-p)$. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{u^\lambda(-p)} &= \pm(\sqrt{p_0 + m}\varphi_{-\lambda}, (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})\sqrt{p_0 - m}\varphi_{-\lambda}) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & +i\sigma_y \\ -i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = [u^{-\lambda}(p)]^\top C, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где

$$C = i\gamma_2\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_y \\ i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

— так называемая матрица зарядового сопряжения. Ее свойства:

$$\begin{aligned} C^2 &= -1, \quad C^+ = C^{-1} = -C, \\ C\gamma^\mu C^{-1} &= -\gamma_\mu^\top. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Итак, мы получили связь между дираковскими спинорами с положительными и отрицательными частотами

$$\overline{u^\lambda(-p)} = [u^{-\lambda}(p)]^\top C \quad .$$

Часто вводят спинор v^λ согласно

$$u^\lambda(-p) = v^\lambda(p).$$

Найдем связь между v и \bar{v} . Имеем

$$u^\lambda(-p)^+ = [u^{-\lambda}(p)]^\top C\gamma_0,$$

тогда

$$u^\lambda(-p) = \gamma_0 C^+ [u^{-\lambda+}]^\top = C\gamma_0 [u^{-\lambda+}]^\top = -[\overline{u^{-\lambda}(p)}]^\top C^\top,$$

т. е.

$$v^\lambda(p) = C[\bar{u}^{-\lambda}(p)]^\top, \quad (2.50)$$

$$\bar{v}^\lambda(p) = [u^{-\lambda}(p)]^\top C. \quad (2.51)$$

А что если в выражении для $\bar{u}^\lambda(p)$ сделаем замену $p \rightarrow -p$? Получим ли выражение (2.47)?

Из (2.28) имеем

$$\bar{u}^\lambda(p) = \sqrt{p_0 + m} \left(\varphi_\lambda^+, -\varphi_\lambda^+ \frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^+}{p_0 + m} \right).$$

Делая замену, получим

$$\bar{u}^\lambda(-p) = \pm(\sqrt{p_0 - m}\varphi_\lambda^+, -\varphi_\lambda^+(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})^+\sqrt{p_0 + m}). \quad (2.52)$$

Сравнивая это выражение с (2.43), видим, что

$$\bar{u}^\lambda(-p) \neq \bar{u}^\lambda(-p).$$

Выражение $\bar{u}^\lambda(-p)$ означает, что мы сделали замену $p \rightarrow -p$ в функции $\bar{u}^\lambda(p)$, а $\bar{u}^\lambda(-p)$ — что мы взяли дираковское сопряжение от функции $u^\lambda(-p)$. Таким образом, функции $\bar{u}^\lambda(-p)$ и $\bar{u}^\lambda(-p)$ не совпадают и отличаются знаком. Поэтому, если у нас

$$v^\lambda(p) = u^\lambda(-p),$$

то

$$\bar{v}^\lambda(p) = -\bar{u}^\lambda(-p). \quad (2.53)$$

Это означает, что решения $u^\lambda(p)$ и $\bar{u}^\lambda(p)$ при переходе $p \rightarrow -p$ перестают быть дираковски сопряженными.

Приведем два полезных равенства.

1. Условие нормировки

$$\bar{u}_\alpha^\lambda(p)u_\alpha^{\lambda'}(p) = 2m\delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.54)$$

(α нумеруют 4-компоненты спинора). Это равенство следует непосредственно из вида спиноров:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\alpha^\lambda(p)u_\alpha^{\lambda'}(p) &= \\ &= (\sqrt{p_0 + m}\varphi_\lambda^+, -\varphi_\lambda^+(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})^+\sqrt{p_0 - m}) \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + m}\varphi_{\lambda'} \\ (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})^+\sqrt{p_0 - m}\varphi_{\lambda'} \end{pmatrix} = \\ &= (p_0 + m - p_0 + m)\delta_{\lambda\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned}$$

2. Правило суммирования по поляризациям:

$$\sum_{\lambda=1,2} u_{\alpha}^{\lambda}(p) \bar{u}_{\beta}^{\lambda}(p) = (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}. \quad (2.55)$$

Его можно доказать следующим образом:

$$\sum_{\lambda=1,2} u_{\alpha}^{\lambda}(p) \bar{u}_{\beta}^{\lambda}(p) = \frac{1}{2m} \sum_{\lambda=1}^4 (\hat{p} + m)_{\alpha\gamma} u_{\gamma}^{\lambda} \bar{u}_{\beta}^{\lambda},$$

где введено суммирование по двум дополнительным состояниям с другой четностью:

$$\sum_{\lambda=1}^4 u_{\gamma}^{\lambda} \bar{u}_{\beta}^{\lambda} = 2m \delta_{\gamma\beta}.$$

2.2 Функция Грина электрона

Мы получили уравнение Дирака для частицы со спином 1/2

$$(\gamma_{\mu} p_{\mu} - m) \Psi(p) = 0, \quad (2.56)$$

или в координатном представлении

$$\left(i\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) \Psi(x) = 0. \quad (2.57)$$

Функция Грина $G(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(i\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) G(x) = -i\delta(x). \quad (2.58)$$

Переходя в импульсное пространство, получим

$$(\hat{p} - m)G(p) = -1$$

и

$$G(p) = \frac{1}{m - \hat{p} - i\varepsilon} = \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}. \quad (2.59)$$

Здесь мы использовали следующее соотношение:

$$\hat{p}\hat{p} = \gamma_{\mu} p_{\mu} \gamma_{\nu} p_{\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_{\nu} \gamma_{\mu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}) p_{\mu} p_{\nu} = p^2.$$

Тогда

$$G_{\alpha\beta}(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} e^{-ip(x_2 - x_1)}. \quad (2.60)$$

Вычислим $G(x_2 - x_1)$ при $t_2 > t_1$. Проверим, получится ли функция распространения электрона из x_1 в x_2 , т. е.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \beta \\ x_1 & & x_2 \end{array}$$

Замыкая интеграл по p_0 на полюс $p_0 = \sqrt{m^2 + p^2}$:

$$\begin{aligned} G_{\beta\alpha}(x_2 - x_1) &= \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} e^{-ip(x_2 - x_1)} (m + \hat{p})_{\beta\alpha} = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} e^{-ip(x_2 - x_1)} \sum_{\lambda} u_{\beta}^{\lambda}(p) \bar{u}_{\alpha}^{\lambda}(p), \\ & \quad p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \end{aligned}$$

Мы здесь использовали (2.55).

Введя волновую функцию электрона:

$$\Psi_{\alpha}^{\lambda}(p, x) = \frac{u_{\alpha}^{\lambda}(p)}{\sqrt{2p_0}} e^{-ipx}, \quad (2.61)$$

получим

$$G_{\beta\alpha}(x_2 - x_1) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Psi_{\beta}^{\lambda}(p, x_2) \bar{\Psi}_{\alpha}^{\lambda}(p, x_1), \quad (2.62)$$

т. е. это, действительно, функция распространения электрона, причем распространяются положительные частоты.

А что если $t_2 < t_1$? В этом случае контур надо замкнуть на другой полюс $p_0 = -\sqrt{m^2 + p^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} G_{\beta\alpha}(x_2 - x_1) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} e^{ip(x_2 - x_1)} (m - \hat{p})_{\beta\alpha} = \\ &= - \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} v_{\beta}^{\lambda}(p) \bar{v}_{\alpha}^{\lambda}(p) e^{ip(x_2 - x_1)} = \\ &= - \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Psi_{\beta}^{-\lambda}(p, x_2) \bar{\Psi}_{\alpha}^{-\lambda}(p, x_1). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Здесь мы использовали

$$\sum_{\lambda} u_{\alpha}^{\lambda}(-p) \bar{u}_{\beta}^{\lambda}(-p) = (m - \hat{p})_{\alpha\beta}$$

и то, что $u_{\alpha}^{\lambda}(-p) = v_{\alpha}^{\lambda}(p)$, а $\bar{u}_{\beta}^{\lambda}(-p) = -\bar{v}_{\beta}^{\lambda}(p)$, и ввели

$$\Psi_{\alpha}^{-\lambda}(x, p) = \frac{v_{\alpha}^{\lambda}(p)}{\sqrt{2p_0}} e^{ipx}. \quad (2.64)$$

Из (2.63) следует, что отрицательно-частотное состояние распространяется вспять по времени, и мы его можем интерпретировать как распространение античастицы (позитрона), описываемой функцией $\Psi^{-}(p, x)$, вперед во времени, т. е. из x_2 в x_1 .

Вспомним теперь следующее свойство матрицы зарядового сопряжения C :

$$C\gamma_{\mu}C^{-1} = -\gamma_{\mu}^{\top}.$$

Тогда можно написать

$$(m - \hat{p})_{\beta\alpha} = [C(m + \hat{p})C^{-1}]_{\alpha\beta}$$

и

$$G_{\beta\alpha}(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^{4i}} e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{[C(m + \hat{p})C^{-1}]_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2},$$

т. е.

$$G^{\top}(x_2 - x_1) = CG(x_1 - x_2)C^{-1}. \quad (2.65)$$

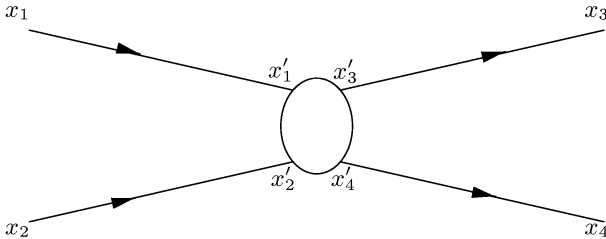
Как видим, при замене $x_2 - x_1 \rightarrow x_1 - x_2$ функция Грина электрона не переходит сама в себя, как это было для случая скалярных или векторных частиц. Согласно (2.65) матрицы $G(x)$ и $G(-x)$ связаны между собой унитарным преобразованием, которое осуществляется матрицей зарядового сопряжения. Это означает фактически, что тот же процесс описывается в другом представлении.

Таким образом, функции Грина электрона и позитрона различны, и связь между ними осуществляется посредством матрицы зарядового сопряжения. Это, однако, не вызывает проблем, так как в природе мы не встретили частиц со спином $1/2$, совпадающих со своими античастицами. Поэтому в том, что их функции Грина разные, ничего плохого нет, так что, как и раньше, мы можем приписать $G(x_2 - x_1)$ при $t_2 < t_1$ смысл функции распространения позитрона из x_2 в x_1 . Если бы такая

(т.н. майорановская) частица существовала, то она могла бы описываться тем же способом, но ее взаимодействие не должно было бы меняться при зарядовом сопряжении. Можно также было бы построить формализм, в котором асимметрия в описании не появлялась с самого начала.

2.3 Матричные элементы амплитуд рассеяния для электронов

Рассмотрим процесс рассеяния электрона на электроне:



Для вычисления его амплитуды нужно устремить

$$x_{10}, x_{20} \rightarrow -\infty, \quad x_{30}, x_{40} \rightarrow +\infty.$$

Этим однозначно определяются правила обхода полюсов в функциях Грина, соответствующих внешним линиям, и вместо них появятся $\Psi_\alpha^\lambda(x_3)\bar{\Psi}_\beta^\lambda(x'_3)$ и т. д., которые, в отличие от случая скалярных частиц, будут иметь матричный характер.

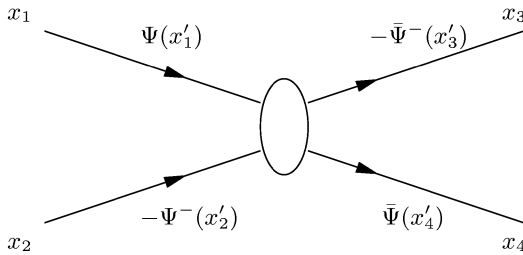
Посмотрим теперь на диаграмму сверху, т. е. устремим

$$x_{10}, x_{30} \rightarrow -\infty, \quad x_{20}, x_{40} \rightarrow +\infty.$$

Функции Грина, описывающие распространение из x_1 в x'_1 и из x'_4 в x_4 , останутся прежними, а от оставшихся появятся (в силу изменения направления обхода полюсов)

$$-\bar{\Psi}_\alpha^-(x'_3)\Psi_\beta^-(x_3)$$

и т. д. (см. рис.).



Итак, при вычислении амплитуды рассеяния частиц со спином, как и для бесспиновых частиц, вместо функций Грина внешним линиям надо сопоставлять волновые функции. Буквально повторяя выкладки (1.157) – (1.159), получим, что наша амплитуда перехода будет отличаться от (1.159) только спинорными множителями, причем будут входить

- от начального электрона u ,
- от конечного электрона \bar{u} ,
- от начального позитрона $-\bar{v}$,
- от конечного позитрона $-v$.

Кроме того, из (2.63) следует, что каждой позитронной линии нужно сопоставить множитель -1 . (Это было несущественно в приведенном выше примере, поскольку мы имели две античастицы, но существенно, например, для процесса аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$.)

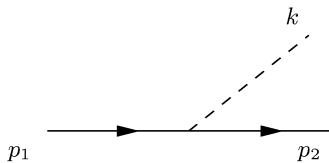
Резюмируем: чтобы получить амплитуду перехода частиц со спином $1/2$,

$$S(p_1, p_2; k_1, k_2),$$

нужно вычислить внутреннюю часть диаграммы в импульсном представлении и умножить ее на спиноры от внешних линий в соответствии со сказанным выше (множители $1/\sqrt{2p_0}$ будем, как и раньше, учитывать при вычислении сечений в фазовых объемах).

2.4 Взаимодействие электрона с фотоном

Рассмотрим, как обычно, простейший процесс:



Попробуем написать для него амплитуду

$$T(k, p_2; p_1).$$

Как мы показали, начальному состоянию электрона нужно сопоставить $u^\lambda(p_1)$, конечному — $\bar{u}^{\lambda'}(p_2)$, фотону же, как обычно, e_μ^σ . Тогда можно написать

$$T(k, p_2; p_1) = \bar{u}_{\beta'}^{\lambda'}(p_2) \Gamma_{\beta\alpha}^\mu(p_1, p_2, k) u_\alpha^\lambda(p_1) e_\mu^\sigma. \quad (2.66)$$

$\Gamma_{\beta\alpha}^\mu(p_1, p_2, k)$ соответствует вершине (т. е. внутренней части диаграммы). Еще должна присутствовать δ -функция, выражающая закон сохранения 4-импульса, но ее, как и множители типа $1/\sqrt{2p_0}$, будем учитывать при вычислении сечений.

Выясним возможный вид матрицы $\Gamma_{\beta\alpha}^\mu$. Из чего мы ее можем сконструировать? Она имеет векторный характер (μ — векторный индекс), а в нашем распоряжении имеются четыре вектора, характеризующие процесс:

$$p_{1\mu}, p_{2\mu}, k_\mu \quad \text{и} \quad \gamma_\mu.$$

Но, на самом деле, они связаны законом сохранения

$$p_1 = p_2 + k.$$

Поэтому введем

$$p_\mu = (p_1 + p_2)_\mu, \quad k_\mu, \quad \gamma_\mu$$

и в самом общем виде напишем

$$\Gamma^\mu = a\gamma_\mu + bp_\mu + ck_\mu - d\gamma_\mu\hat{p}_1 + d'\hat{p}_2\gamma_\mu. \quad (2.67)$$

Однако надо помнить, что Γ стоит в обкладках между двумя спинорами, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\hat{p}_1 - m)u(p_1) &= 0, \\ \bar{u}(p_2)(\hat{p}_2 - m) &= 0, \end{aligned}$$

тогда в последних двух слагаемых (2.67) \hat{p}_1 и \hat{p}_2 дадут m , и оба они сведутся к первому.

Можно добавить к (2.67) члены

$$\tilde{d}\hat{p}_1\gamma_\mu - \tilde{d}'\gamma_\mu\hat{p}_2.$$

Однако

$$\hat{p}_1 \gamma_\mu = p_{1\nu} \gamma_\nu \gamma_\mu = -p_{1\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu + 2\delta_{\mu\nu} p_{1\nu} = -\gamma_\mu \hat{p}_1 + 2p_{1\mu},$$

т. е. такие члены сведутся к первому и второму слагаемым (2.67), так что самый общий вид

$$\Gamma^\mu = a\gamma_\mu + bp_\mu + ck_\mu. \quad (2.68)$$

Перепишем (2.68) в несколько ином виде. Во-первых,

$$\bar{u}(p_2)[\gamma_\mu \hat{p} + \hat{p} \gamma_\mu]u(p_1) = 2p_\mu \bar{u}(p_2)u(p_1). \quad (2.69)$$

С другой стороны,

$$p_1 + p_2 = 2p_1 - k = 2p_2 + k$$

и

$$\bar{u}(p_2)[\gamma_\mu \hat{p} + \hat{p} \gamma_\mu]u(p_1) = 4m\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1) + \bar{u}(p_2)(\hat{k}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{k})u(p_1), \quad (2.70)$$

т. е. вместо p_μ можно написать $\hat{k}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{k}$ и

$$\Gamma^\mu = a\gamma_\mu + b(\hat{k}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{k}) + ck_\mu. \quad (2.71)$$

(Естественно, a , b , c здесь уже другие, чем в (2.68).)

Теперь определим коэффициенты a , b , c . У нас Γ^μ должна удовлетворять условию поперечности

$$\bar{u}k_\mu \Gamma^\mu u = 0. \quad (2.72)$$

Из (2.71) находим

$$k_\mu \Gamma^\mu = a\hat{k} + ck^2, \quad (2.73)$$

тогда

$$\bar{u}(p_2)k_\mu \Gamma^\mu u(p_1) = a[\bar{u}(p_2)(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)u(p_1)] + ck^2 \bar{u}(p_2)u(p_1) = 0. \quad (2.74)$$

Поскольку

$$\bar{u}(p_2)(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)u(p_1) = \bar{u}(p_2)(m - m)u(p_1) = 0,$$

то из (2.74) следует, что $c = 0$.

О константе b ничего сказать из общих соображений нельзя, пока известны две частицы, для которых с большой точностью $b = 0$ — это электрон и μ -мезон (хотя малая величина b генерируется даже для этих частиц *динамически* при учете более сложных радиационных процессов).

Обычно полагают

$$b = 0, \quad a = \text{const.} \quad (2.75)$$

Это так называемая гипотеза минимальности электромагнитного взаимодействия. Ее основания, с одной стороны, простота, с другой, то, что при $b \neq 0$ нельзя построить замкнутой теории. Далее мы покажем, что $b = \text{const}$ соответствует аномальному магнитному моменту частицы.

Таким образом,

$$\Gamma_\mu = e\gamma_\mu \quad (2.76)$$

(через некоторое время мы покажем, что коэффициент пропорциональности, как и раньше, равен заряду частицы). Инвариантную амплитуду (2.66) испускания электроном фотона можно теперь переписать в виде

$$T_{e-} = e\bar{u}^{\lambda'}(p_2)\hat{e}^\sigma u^\lambda(p_1), \quad (2.77)$$

где

$$\hat{e}^\sigma = \gamma_\mu e_\mu^\sigma.$$

Чтобы описать излучение позитрона, как мы говорили, внешним линиям надо сопоставить v и \bar{v} , т. е.

$$T_{e+} = e\bar{v}^\lambda(p_1^+)\hat{e}^\sigma v^{\lambda'}(p_2^+). \quad (2.78)$$

Здесь, хотя $\bar{v}^\lambda(p_1^+)$ описывает начальный позитрон, мы его поставили слева, поскольку он с чертой.

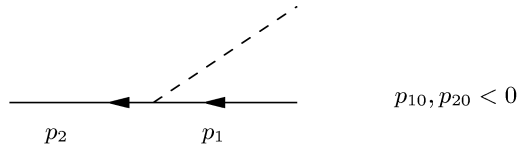
Рассмотрим связь этих амплитуд. Для этого вспомним, что

$$\begin{aligned} v^\lambda(p) &\equiv u^\lambda(-p) = -[\bar{u}^{-\lambda}(p)C]^\top = C[\bar{u}^{-\lambda}(p)]^\top, \\ \bar{v}^\lambda(p) &\equiv \overline{u^\lambda(-p)} = -\bar{u}^\lambda(-p) = [u^{-\lambda}(p)]^\top C. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Тогда, поскольку $C\hat{e}C = [\hat{e}]^\top$, то

$$T_{e+} = e\bar{u}^{-\lambda'}(p_2^+)\hat{e}^\sigma u^{-\lambda}(p_1^+), \quad (2.80)$$

т. е. амплитуды T_{e^-} и T_{e^+} одинаковы с точностью до спиновых переменных. Взглянем на их связь теперь с другой точки зрения. Перерисуем для этого график, соответствующий излучению фотона электроном, в виде



и сделаем замену

$$p_1 = -p_2^+ \quad , \quad p_2 = -p_1^+.$$

Тогда получим аналитически продолженную амплитуду $T_{\text{прод}}$

$$T_{\text{прод}} = e\bar{u}(-p_1^+)\hat{\epsilon}^\sigma u(-p_2^+) = -e\bar{v}(p_1^+)\hat{\epsilon}^\sigma v(p_2^+), \quad (2.81)$$

которая с точностью до знака совпадает с амплитудой испускания фотона позитроном. Это и следовало ожидать, поскольку замена знака координат в x -пространстве эквивалентна замене знака импульсов в p -пространстве и, естественно, заменив p на $-p$, мы получим амплитуду для античастицы, как и раньше. Но откуда взялся минус? Это связано фактически с определением амплитуды

$$f \sim - \int \Psi^* V \Psi d^3r,$$

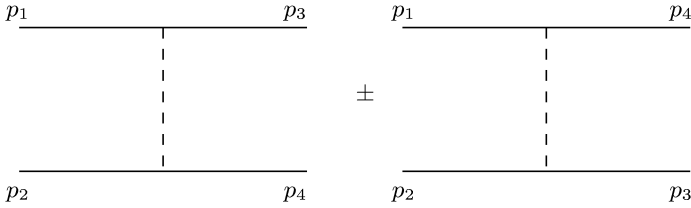
причем под интегралом стоят сопряженные функции. Однако, когда мы имеем дело с частицами, описываемыми спинорами, это свойство при продолжении в область отрицательных p не сохраняется, поскольку $\bar{u}(-p_1^+)$ уже не является сопряженной для функции $u(-p_1^+)$ (см. (2.79)). Поэтому лучше $T_{\text{прод}}$ не называть амплитудой, а определить

$$T_{\text{прод}} = -T_{e^+\gamma}.$$

Этот знак не имеет значения при вычислении сечений.

2.5 Рассеяние электронов. Связь спина со статистикой

При рассеянии электрона на электроном возможны следующие простейшие процессы:



А как мы должны сложить эти амплитуды, с “+” или с “-”? С точки зрения принципа Паули, знака “+” быть не может, поскольку при замене $p_3 \leftrightarrow p_4$ все перейдет в себя, а амплитуда для частиц со спином 1/2 должна быть антисимметричной, т. е. амплитуды нужно вычитать.

Но нельзя ли вопрос о знаке выяснить из более общих соображений? То есть не приход ли мы просто к противоречию, если положим знак “+”? Оказывается, что достаточно следующих двух требований к теории, чтобы однозначно решить вопрос о знаке:

1. условие унитарности

$$SS^+ = 1$$

(это требование, чтобы сумма всех вероятностей равнялась единице);

2. причинность.

Рассмотрим нерелятивистский случай:

$$f = -\frac{2m}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(r') \Psi_+(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (2.82)$$

Выражая $\Psi_+(\mathbf{r}')$ через функцию Грина, получим

$$f = f_B + \frac{2mi}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(r') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) V(r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r d^3r',$$

где f_B — амплитуда в борновском приближении. Поскольку

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{i} \sum_n \frac{\Psi_n(\mathbf{r}) \Psi_n^*(\mathbf{r}')}{E_n - E}, \quad (2.83)$$

то

$$f = f_B + \frac{2m}{4\pi} \sum_n \frac{f_{nk}^* f_{nk'}}{E_n - E}, \quad (2.84)$$

где

$$f_{nk} = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} V(r) \Psi_n(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.85)$$

Существенно здесь то, что в сумме (2.84) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ стоит положительная величина $f_{nk}^* f_{nk'}$. Как мы покажем ниже, этот факт есть прямое следствие условия унитарности. Амплитуда, как функция энергии, имеет полюс при энергии связанного состояния, т. е. при $E = E_n$. Вычет в полюсе — всегда величина отрицательная (в знаменателе $E_n - E$).

Покажем теперь, что условие унитарности фиксирует однозначно знаки амплитуд, отвечающих различным диаграммам.

Рассмотрим сначала случай скалярных частиц. Имеем

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} p_1 \quad t \quad p_3 \\ \hline \\ p_2 \quad p_4 \end{array} & \sim \frac{1}{t} + & \begin{array}{c} p_1 \quad u \quad p_4 \\ \hline \\ p_2 \quad p_3 \end{array} \sim \frac{1}{u} \\
 s & &
 \end{array}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2.$$

В s -канале особенностей по s нет (т. е. фактически по энергии, а у нас есть условие именно на вычет в полюсе по энергии).

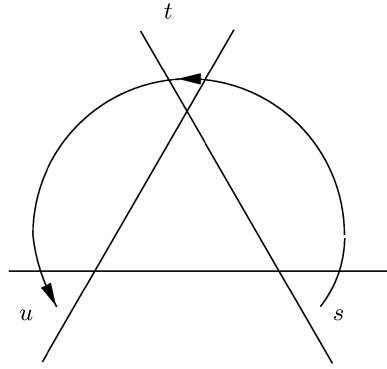
Перейдем в t -канал (для этого надо на первый процесс посмотреть сверху). Это будет процесс

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

второго порядка, который идет через промежуточное состояние (гамма-квант). Оно и соответствует сумме в (2.84), причем имеется полюс по энергии (t в этом канале отвечает энергии) в $t = 0$, это как раз соответствует энергии промежуточного состояния $m_\gamma = 0$. Вычет же в полюсе должен быть определенного знака из условия унитарности. Этим и определяется знак перед первой амплитудой. (Вторая же амплитуда в t -канале не имеет особенностей.) Поскольку в вершинах стоит

$$(p_1 - p_3^+)_\mu (p_4 - p_2^+)_\mu \simeq -4\mathbf{p}_1^2 \quad (\mathbf{p}_1 \sim \mathbf{p}_4)$$

в системе центра масс, так как $E_1 = E_3$, $E_2 = E_4$, то вычет в полюсе отрицательный, следовательно, перед этой амплитудой должен стоять знак плюс.



О знаке второй амплитуды мы пока ничего не можем сказать, для его определения перейдем в u -канал. В u -канале эта амплитуда уже имеет полюс по энергетической переменной (u играет роль квадрата энергии в с.ц.м.), и, буквально повторяя предыдущие рассуждения, получим, что и перед второй амплитудой должен быть знак плюс. То есть для бозонов (частиц со спином нуль) в нашем случае мы должны складывать амплитуды.

Рассмотрим теперь фермионы (в нашем случае это частицы со спином 1/2):

$$\begin{array}{ccc}
 p_1 & t & p_3 \\
 \hline
 \pm s & \sim \frac{1}{t} \pm & \\
 p_2 & & p_4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 p_1 & u & p_4 \\
 \hline
 & \sim \frac{1}{u} & \\
 p_2 & & p_3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(s)} = & \pm e^2 (\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)) \frac{1}{t} (\bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2)) \pm \\
 & \pm e^2 (\bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_1)) \frac{1}{u} (\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_2)).
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Как и в предыдущем случае, для выяснения знака первой амплитуды перейдем в t -канал, для этого произведем замену

$$\begin{aligned}
 p_3 &= -p_3^+, \\
 p_2 &= -p_2^+
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

(при этом помня, что поскольку $\bar{u}(-p) = -\bar{v}(p)$, то $T_{\text{прод}} = -T^{(t)}$), тогда

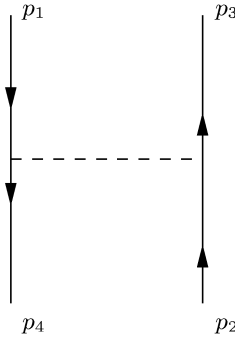
$$T^{(t)} = \pm e^2 (\bar{v}(p_3^+) \gamma_\mu u(p_1)) \frac{1}{t} (\bar{u}(p_4) \gamma_\mu v(p_2^+)) \pm \pm e^2 (\bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_1)) \frac{1}{u} (\bar{v}(p_3^+) \gamma_\mu v(p_2^+)). \quad (2.88)$$

Если покажем, что скобки в первом слагаемом комплексно сопряжены, то перед этим слагаемым должен стоять знак “+”, чтобы $T^{(t)}$ имела отрицательный знак вычета, т. к. $j_0 = 0$ из сохранения тока.

Итак, рассмотрим

$$\begin{aligned} (\bar{u}(p_4) \gamma_\mu v(p_2^+))^+ &= (u^+ \gamma_0 \gamma_\mu v)^+ = v^+ (\gamma_0 \gamma_\mu)^+ u = \\ &= v^+ \gamma_\mu^+ \gamma_0^+ u = \bar{v}(p_2^+) \gamma_\mu u(p_4), \end{aligned}$$

поскольку γ_0 эрмитова и коммутирует с γ_0 , а γ_i — антиэрмитовы и антикоммутируют с γ_0 . Таким образом, действительно, при $p_1 \simeq p_4$ имеем отрицательный знак вычета $T^{(t)}$ и, следовательно, перед первой амплитудой (2.86) должен быть знак “+”. Вторая диаграмма с точки зрения t -канала имеет вид:



Ее знак мы можем выбрать, исходя из нерелятивистской аналогии. Амплитуда рассеяния частицы на античастице должна быть противоположна по знаку амплитуде рассеяния частицы на частице (поскольку знак потенциала противоположен). То есть t -канальная амплитуда должна иметь знак, противоположный s -канальной, хотя бы при малых s . С другой стороны, мы получили, что амплитуды испускания фотона частицей и античастицей одинаковы. Действительно, как мы видели:

$$\bar{u}(-p_3^+) \gamma_\mu u(-p_2^+) = -\bar{v}(p_3^+) \gamma_\mu v(p_2^+),$$

но минус компенсируется тем, что $T^{(t)} = -T_{\text{прод}}$. Поэтому перед второй амплитудой мы должны поставить знак “—”.

Знак второй диаграммы можно установить и не обращаясь к нерелятивистскому пределу. Продолжим для этого амплитуду в u -канал. Сделаем этот переход из t -канала, т. е. заменим

$$p_4 = -p_4^{++} \quad , \quad p_3^+ = -p_3^{++}.$$

Мы фактически два раза поменяли знак у p_3 , спинор при этом получит знак “—”, поскольку при каждой замене $p \rightarrow -p$ он умножается на i . То есть, чтобы получить отрицательный вычет у второй амплитуды в t -канале, мы ее должны взять со знаком “—”. Можно сказать несколько иначе. Если в t -канале аннигиляционная диаграмма написана со знаком “+”, а диаграмма рассеяния — со знаком “—”, то при переходе в u -канал диаграммы переходят друг в друга и меняют знаки, т. е. амплитуда остается той же, что и требуется, потому что u - и t -каналы тождественные. Если бы мы обе диаграммы в t -канале написали со знаком плюс, то в u -канале получили бы амплитуду противоположного знака, т. е. не удовлетворяющую условию унитарности.

Мы приходим, таким образом, к тому, что аннигиляционная диаграмма и диаграмма рассеяния должны входить с разными знаками и, следовательно, амплитуда рассеяния в s -канале должна быть антисимметрична по отношению к перестановке импульсов начальных или конечных частиц, т. е. электроны должны подчиняться статистике Ферми-Дирака.

Общий знак амплитуд в s -канале при этом не определен, поскольку если мы придем в s -канал, пройдя через t - и u -каналы, то получим амплитуду противоположного знака. Однако в отличие от t - и u -каналов, где взаимодействуют разные частицы, в s -канале это несущественно. Причина состоит в том, что условие унитарности определяет только знак амплитуды рассеяния вперед, но для тождественных частиц рассеяние вперед и назад тождественно и, вообще, имеет смысл только рассеяние в одну полусферу. Поэтому для амплитуды одного знака рассеянию вперед соответствует линия $t = 0$, а для другого знака линия $u = 0$. То есть определенная запись амплитуды содержит в себе определения понятия “вперед”. Эта ситуация имеет место уже в нерелятивистской теории. Пусть

$$\Psi_a = e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2} - e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{p}_2\mathbf{r}_1}, \quad \Psi_b = e^{i\mathbf{p}_3\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{p}_4\mathbf{r}_2} - e^{i\mathbf{p}_3\mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{p}_4\mathbf{r}_1},$$

$$f_{ab} \sim \int \Psi_b^* V \Psi_a. \quad (2.89)$$

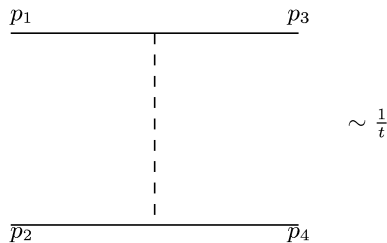
В (2.89) под интегралом будет стоять знакоопределенная величина при знакоопределенном потенциале, только если $\Psi_a = \Psi_b$, т. е. $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$. Обсудим, что произойдет, если, получив амплитуду противоположного знака, мы еще раз продолжим ее в t - и затем в u -каналы. Очевидно, что мы получим в t - и u -каналах амплитуду тоже противоположного знака, т. е. в этом случае $T = T_{\text{Прод}}$ в отличие от того, что мы писали раньше. Таким образом, соотношение между продолженной амплитудой $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ и амплитудой $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ зависит от способа продолжения, и это связано с неопределенностью знака амплитуды $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

Итак, мы получили связь спина со статистикой. При этом мы использовали условие унитарности и то, что любую амплитуду можно получить аналитическим продолжением, т. е. фактически аналитичность амплитуды, а это связано, как мы покажем вскоре, с причинностью. Итак, действительно, двух условий — унитарности и причинности — достаточно, чтобы установить знаки амплитуд. В нашей теории, таким образом, принцип Паули, который согласуется с экспериментом, выполняется автоматически.

В области малых углов рассеяния наша амплитуда перейдет в обычную амплитуду кулоновского рассеяния. Исходя из этого, покажем, что константа взаимодействия e является зарядом. Малые углы рассеяния соответствуют

$$p_3 \simeq p_1, \quad p_2 \simeq p_4,$$

т. е. $t \simeq 0$, при этом второй (обменной) амплитудой можно пренебречь, поскольку при $t = 0$ она не имеет сингулярности, а первая $\sim 1/t$, т. е. при $t \rightarrow 0$ стремится в ∞ .



Вычислим $\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)$. Поскольку $\hat{p}_1 + m = \hat{p}_1 - m + 2m$, $(\hat{p}_1 - m)u = 0$

и $p_3 \simeq p_1$, а также

$$\gamma_\mu \hat{p}_1 = -\hat{p}_1 \gamma_\mu + 2p_{1\mu}, \quad (\gamma_\mu \hat{p}_1 + \hat{p}_1 \gamma_\mu = p_{1\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = 2p_{1\mu}),$$

то

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) &= \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) u(p_1) \frac{1}{2m} = \\ &= \bar{u}(p_1) (-\hat{p}_1 + m) \gamma_\mu \frac{u(p_1)}{2m} + 2p_{1\mu} \frac{\hat{u}(p_1) u(p_1)}{2m} = 2p_{1\mu}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Аналогично,

$$\bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) = 2p_{2\mu}. \quad (2.91)$$

Тогда

$$T = \frac{e^2}{t} 2p_{1\mu} \cdot 2p_{2\mu} = \frac{4e^2 m^2}{t} \quad (2.92)$$

в нерелятивистском пределе. Это обычная амплитуда кулоновского рассеяния, совпадающая с (1.174) для бесспиновых частиц. Таким образом, при малых переданных импульсах наличие спина электрона никак не сказывается на рассеянии. Это следует уже из того, что вершинные части превращаются в $p_{1\mu} + p_{3\mu} = 2p_{1\mu}$, и $p_{2\mu} + p_{4\mu} = 2p_{2\mu}$ (см. (2.90), (2.91)), т. е. в вершины для бесспиновых частиц. Из вида (2.92) следует, что e , — действительно, электрический заряд электрона.

2.6 Рассеяние фотона электроном (Комптон-эффект)

Как всегда, рассмотрим простейшие графики, описывающие рассеяние фотона на электрона.

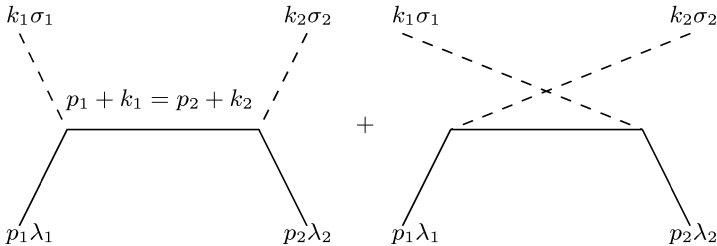
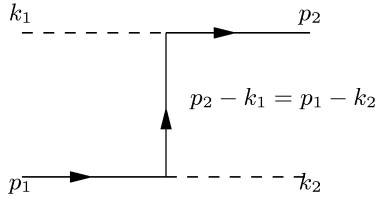


Рис. 13

Второй график можно нарисовать и так:



Амплитуду рассеяния имеет вид:

$$T = e^2 \bar{u}^{\lambda_2}(p_2) M_{\nu\mu} u^{\lambda_1}(p_1) e^{\sigma_1}, \quad (2.93)$$

где

$$\begin{aligned} M_{\nu\mu} &= e^2 \left[\gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p}_1 - \hat{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_1 + \hat{k}_2} \gamma_\nu \right] = \\ &= e^2 \left[\frac{\gamma_\nu (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \gamma_\mu}{m^2 - (p_1 + k_1)^2} + \frac{\gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \gamma_\nu}{m^2 - (p_1 - k_2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Здесь $(p_1 + k_1)^2 = s$, $(p_1 - k_2)^2 = u$.

Покажем, что сохранение тока

$$k_{1\mu} M_{\nu\mu} = 0, \quad k_{2\nu} M_{\nu\mu} = 0 \quad (2.95)$$

у нас выполняется автоматически. Действительно,

$$k_{2\nu} M_{\nu\mu} = e^2 \left[\hat{k}_2 \frac{1}{m - \hat{p}_2 - \hat{k}_2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_1 + \hat{k}_2} \hat{k}_2 \right].$$

Поскольку $M_{\nu\mu}$ у нас входит только в обкладках между спинорами, которые удовлетворяют уравнению Дирака, мы можем добавить в числителях слагаемые $\hat{p}_2 - m$ и $\hat{p}_1 - m$, т. е.

$$\begin{aligned} k_{2\nu} M_{\nu\mu} &= \\ &= \left[(\hat{k}_2 + \hat{p}_2 - m) \frac{1}{m - \hat{p}_2 - \hat{k}_2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_1 + \hat{k}_2} (\hat{k}_2 + m - \hat{p}_1) \right] e^2 = \\ &= e^2 (-\gamma_\mu + \gamma_\mu) = 0. \end{aligned}$$

Трудность при вычислении амплитуды возникает из-за большого числа спиновых переменных. Чтобы ее избежать, сразу напишем выражение для сечения

$$d\sigma = \frac{1}{J} |T_{\lambda_2\lambda_1}^{\sigma_2\sigma_1}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{d^3 p_2 d^3 k_2}{(2\pi)^6 2k_{20} 2p_{20}} \quad (2.96)$$

и вычислим полное сечение рассеяния во все поляризации электронов и фотонов для случая, когда падающие пучки не поляризованы (именно такая ситуация часто реализуется на эксперименте). Для этого нужно просуммировать по всем конечным поляризациям электрона и фотона и усреднить по начальным, т. е. вычислить сумму \sum :

$$\begin{aligned} \sum &\equiv \frac{1}{4} \sum_{\substack{\sigma_2\sigma_1 \\ \lambda_2\lambda_1}} |T_{\lambda_2\lambda_1}^{\sigma_2\sigma_1}|^2 = \frac{1}{4} \sum e_{\mu}^{\sigma_1} e_{\nu}^{\sigma_2} e_{\mu'}^{\sigma_1'} e_{\nu'}^{\sigma_2'} \times \\ &\times (\bar{u}^{\lambda_2}(p_2) M_{\nu\mu} u^{\lambda_1}(p_1)) (\bar{u}^{\lambda_2}(p_2) M_{\nu'\mu'} u^{\lambda_1}(p_1))^+. \end{aligned} \quad (2.97)$$

У нас суммирование идет по двум значениям $\sigma = 1, 2$. Однако если выполняются условия (2.95), то сумму по двум поляризациям можно заменить суммой по четырем (поскольку остальные две поляризации в силу (2.95) не дадут вклада в (2.97)). Тогда

$$\sum_{\sigma_1=1,2} e_{\mu}^{\sigma_1} e_{\mu'}^{\sigma_1} = - \sum_{\sigma_1=0}^3 e_{\mu}^{\sigma_1} e_{\mu'}^{\sigma_1} = -g_{\mu\mu'},$$

и (2.97) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sum &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (\bar{u}^{\lambda_2} M_{\mu\nu} u^{\lambda_1}) (\bar{u}^{\lambda_2} M_{\mu\nu} u^{\lambda_1})^+ = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (\bar{u}^{\lambda_2} M_{\mu\nu} u^{\lambda_1}) (u^{\lambda_1} M_{\mu\nu}^+ \gamma_0 u^{\lambda_2}) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (\bar{u}^{\lambda_2} M_{\mu\nu} u^{\lambda_1}) (\bar{u}^{\lambda_1} \gamma_0 M_{\mu\nu}^+ \gamma_0 u^{\lambda_2}) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (\bar{u}^{\lambda_2} M_{\mu\nu} u^{\lambda_1}) (\bar{u}^{\lambda_1} \bar{M}_{\mu\nu} u^{\lambda_2}). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Мы здесь использовали тождество $\gamma_0 \gamma_0 = 1$ и ввели

$$\bar{M}_{\mu\nu} = \gamma_0 M_{\mu\nu}^+ \gamma_0. \quad (2.99)$$

Из явного вида (2.94) для $M_{\mu\nu}$ непосредственно следует, что

$$\bar{M}_{\mu\nu} = M_{\nu\mu} \quad (2.100)$$

(чтобы проверить это соотношение, необходимо использовать $\{\gamma_0, \gamma_i\} = 0$, $\gamma_0^+ = \gamma_0$, $\gamma_i^+ = -\gamma_i$).

Теперь просуммируем по $\lambda_1 \lambda_2$. Для этого распишем (2.98) в матричном виде, т. е.

$$\begin{aligned} \sum &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \bar{u}_\alpha^{\lambda_2}(p_2)(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta} u_\beta^{\lambda_1}(p_1) \bar{u}_\gamma^{\lambda_1}(p_1)(M_{\nu\mu})_{\gamma\delta} u_\delta^{\lambda_2}(p_2) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (M_{\mu\nu})_{\alpha\beta} (\hat{p}_1 + m)_{\beta\gamma} (M_{\nu\mu})_{\gamma\delta} (\hat{p}_2 + m)_{\delta\alpha} = \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp}[M_{\mu\nu}(\hat{p}_1 + m)M_{\nu\mu}(\hat{p}_2 + m)]. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Мы здесь воспользовались соотношением $\sum_\lambda u_\alpha^\lambda(p) \bar{u}_\beta^\lambda(p) = (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}$. В результате суммирование по поляризациям свелось к вычислению следа некоторой матрицы.

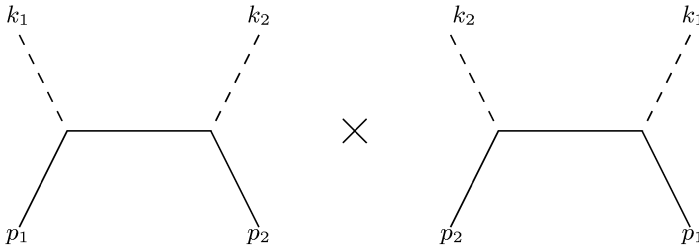
Удобно записать фазовые объемы в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3 p_2}{2p_{20}} &= d^4 p_2 \delta_+(p_2^2 - m^2), \\ \frac{d^3 k_2}{2k_{20}} &= d^4 k_2 \delta_+(k_2^2). \end{aligned}$$

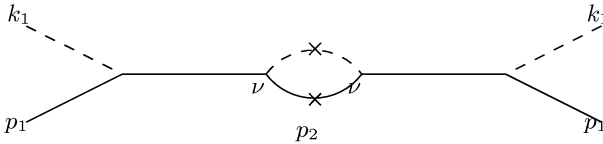
Тогда выражение для сечения, с использованием (2.101), принимает вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4J} \text{Sp}[(\hat{p}_1 + m)M_{\mu\nu}(\hat{p}_2 + m)M_{\nu\mu}] \times \\ &\times \delta_+(p_2^2 - m^2) \delta_+(k_2^2) (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{d^4 k_2 d^4 p_2}{(2\pi)^6}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Процедуру вычисления сечения в виде (2.102) можно, как и в случае скалярных частиц, изобразить графически. Рассмотрим первую диаграмму. Для вычисления сечения амплитуду надо умножить на эрмитово-сопряженную; это соответствует тому, что k_1, p_1 и k_2, p_2 поменяются местами, т. е.

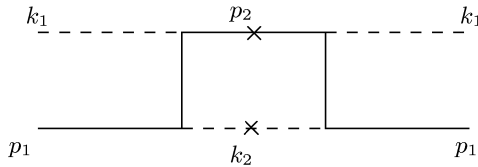


А это мы перерисуем так:



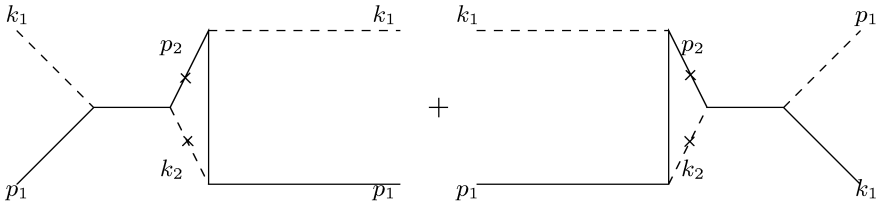
Такая картинка удобна с чисто технической точки зрения. Она позволяет сечение вычислять по тем же правилам, что и амплитуды; отличие в том, что линиям, отмеченным крестиком, соответствуют, вместо знаменателей $1/k_2^2$ и $1/(m - \hat{p}_2) = (m + \hat{p}_2)/(m^2 - p_2^2)$, δ -функции, т. е. частицы на массовой поверхности (мы их и отметили крестиком). Множитель $(\hat{p}_2 + m) = \sum u(p_2)\bar{u}(p_2)$ возникает из суммирования по поляризациям конечного электрона (а множитель $(\hat{p}_1 + m) = \sum u(p_1)\bar{u}(p_1)$ появляется из усреднения по поляризациям начального). Иначе говоря, диаграммы для сечения получаются из диаграмм для амплитуды фактически заменой $1/(m^2 - p^2) \rightarrow (2\pi)\delta_+(p^2)$ для линий конечных частиц.

Аналогично, возводя в квадрат вторую диаграмму:



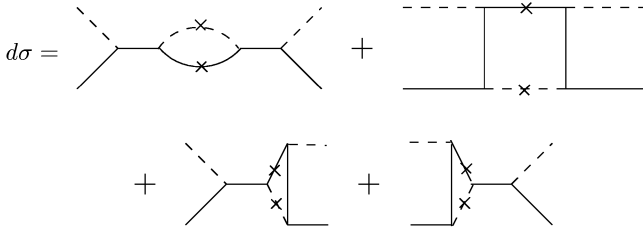
Кроме того, появятся интерференционные члены от смешанных произ-

ведений первой диаграммы на вторую и второй на первую, т. е.



Вклады этих диаграмм можно получить непосредственно, расписывая произведение $M_{\mu\nu}M_{\nu\mu}$ в (2.102).

Таким образом, сечение представится в виде суммы диаграмм:



Перейдем к вычислению следа. Для первой диаграммы напомним

$$f(s, u) = \frac{1}{4} \text{Sp}[(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)\gamma_\nu(\hat{p}_2 + m)\gamma_\nu \times \\ \times (m + \hat{p}_2 + \hat{k}_2)\gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_\mu] \frac{1}{(m^2 - s)^2}. \quad (2.103)$$

Мы подставили в (2.101) первое слагаемое $M_{\mu\nu}$, соответствующее первой диаграмме, и, поскольку под знаком Sp можно менять местами множители, перенесли γ_μ из начала в конец.

Приведем несколько полезных формул, которые нам пригодятся при вычислениях:

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = g_{\mu\nu}, \quad (2.104)$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4}) = g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} + g_{\mu_2 \mu_3} g_{\mu_1 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4}. \quad (2.105)$$

След произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю.

Покажем, для примера, как получается (2.104). С одной стороны,

$$\frac{1}{4}\text{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = \frac{1}{4}\text{Sp}(\gamma_\nu\gamma_\mu),$$

с другой стороны,

$$\frac{1}{4}\text{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = -\frac{1}{4}\text{Sp}(\gamma_\nu\gamma_\mu) + \frac{2}{4}\text{Sp}I g_{\mu\nu}.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим (2.104). Аналогично, пользуясь перестановочными соотношениями для γ -матриц, можно получить и остальные формулы.

Используя коммутационные соотношения для γ -матриц, можно получить также следующие соотношения (A, B, C — произвольные матрицы):

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\hat{C}\gamma_\mu &= C_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -C_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu + 2C_\nu\delta_{\mu\nu}\gamma_\mu = \\ &= -4C_\nu\gamma_\nu + 2C_\nu\gamma_\nu = -2\hat{C}, \quad (\gamma_\mu\gamma_\mu = 4),\end{aligned}$$

т. е.

$$\gamma_\mu\hat{C}\gamma_\mu = -2\hat{C}. \quad (2.106)$$

Аналогично, легко видеть, что

$$\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\mu = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}. \quad (2.107)$$

Пользуясь (2.106), получим

$$\begin{aligned}f(s, u) &= \frac{1}{(m^2 - s)^2} \frac{1}{4} \times \\ &\times \text{Sp}[(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)(4m - 2\hat{p}_2)(\hat{p}_2 + \hat{k}_2 + m)(4m - 2\hat{p}_1)].\end{aligned} \quad (2.108)$$

В (2.108) отличными от нуля будут члены, вообще не содержащие γ -матриц и содержащие произведения четного числа γ -матриц. Воспользовавшись (2.104), (2.105), в результате будем иметь

$$\begin{aligned}f(s, u) &= \frac{1}{(m^2 - s)^2} \{16m^4 + 4m^2(-2p_1(p_1 + k_1)) + 4m^2p_1p_2 + \\ &+ 4m^2(-2p_2(p_2 + k_2)) - 4m^2 \cdot 2p_1(p_1 + k_1) + \\ &+ 16m^2(p_1 + k_1)^2 - 4m^2 \cdot 2p_2(p_2 + k_2) + \frac{1}{4}\text{Sp}[4(\hat{p}_1 + \hat{k}_1)\hat{p}_2(\hat{p}_2 + \hat{k}_2)\hat{p}_1]\}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} 2p_1(p_1 + k_1) &= 2m^2 + 2p_1k_1 = s + m^2, \\ 2p_2(p_2 + k_2) &= 2m^2 + 2p_2k_2 = s + m^2, \\ \frac{1}{4}\text{Sp}[4(\hat{p}_1 + \hat{k}_1)\hat{p}_2(\hat{p}_2 + \hat{k}_2)\hat{p}_1] &= -4sp_1p_2 + 2(s + m^2)^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(s, u) &= \frac{1}{(m^2 - s)^2} [16m^4 - 4m^2(s + m^2) + 4m^2p_1p_2 - 4m^2(s + m^2) - \\ &\quad - 4m^2(s + m^2) + 16m^2s - 4m^2(s + m^2) + 2(s + m^2)^2 - 4p_1p_2s] = \\ &= \frac{2}{(m^2 - s)^2} [(s + m^2)^2 - 2p_1p_2(s - m^2)]. \end{aligned}$$

Выразим $2p_1p_2$ через инвариантные переменные:

$$t = (p_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2p_1p_2,$$

откуда

$$2p_1p_2 = 2m^2 - t,$$

но $s + t + u = 2m^2$, поэтому

$$2p_1p_2 = s + u.$$

Окончательно, таким образом, имеем

$$f(s, u) = \frac{2}{(m^2 - s)^2} [(s + m^2)^2 - (s + u)(s - m^2)]. \quad (2.109)$$

Член, соответствующий второй диаграмме, получается из (2.109) просто заменой s на u . Действительно, вторая диаграмма получается из первой заменой $k_1 \rightarrow -k_2$, μ заменятся на ν , что при усреднении не имеет значения, а $s \rightarrow (p_1 - k_2)^2 = u$, т. е. вклад от второй диаграммы есть просто $f(u, s)$.

Аналогично вычисляется след от интерференционных членов, их, соответственно, мы обозначим $g(s, u)$ и $g(u, s)$, причем

$$g(s, u) = \frac{2m^2}{(m^2 - s)(m^2 - u)} [4m^2 + s - m^2 + u - m^2]. \quad (2.110)$$

Итак, мы нашли, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Sp}[(\hat{p}_1 + m)M_{\nu\mu}(\hat{p}_2 + m)M_{\mu\nu}] = \\ & = [f(s, u) + f(u, s) + g(u, s) + g(s, u)]e^4. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Сечение (2.102) с учетом (2.111) запишется

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^4}{J} [f(s, u) + f(u, s) + g(u, s) + g(s, u)] \times \\ & \times \delta_+(p_2^2 - m^2) \delta_+(k_2^2) \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{d^4 k_2 d^4 p_2}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Инвариантный поток, как и раньше, есть

$$\mathcal{J} = 4p_{01}k_{01}j. \quad (2.113)$$

Для j также справедлива формула (1.165), хотя вычисляется несколько по-иному:

$$\begin{aligned} j &= |\bar{\Psi}(p_1, x)\gamma\Psi(p_1, x)| + \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} = \\ &= \frac{|\bar{u}(p_1)\gamma u(p_1)|}{2p_{10}} + \frac{|\mathbf{k}_1|}{k_{10}} = \frac{p_1}{p_{10}} + \frac{k_1}{k_{10}}, \end{aligned}$$

т. е. с потоком все, как раньше.

Осталось вычислить фазовый объем. Сначала проинтегрируем (2.112) по $d^4 p_2$ при помощи δ -функции. Получим

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^4}{J} [f(s, u) + f(u, s) + g(u, s) + g(s, u)] \times \\ & \times \delta_+((p - k_2)^2 - m^2) \delta_+(k_2^2) \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

где $p = p_1 + k_1$, $(p - k_2)^2 = p^2 - 2pk_2 + k_2^2 = s - 2pk_2$. Переходя в систему центра масс, получим

$$\delta_+((p - k_2)^2 - m^2) = \delta(s - 2p_0k_{20} - m^2) = \delta(s - 2\sqrt{s}k_{20} - m^2). \quad (2.115)$$

Для инвариантного потока, соответственно,

$$\mathcal{J} = 4(p_1k_{10} + k_1p_{10}) = 4k_1(k_{10} + p_{10}) = 4k_1\sqrt{s}. \quad (2.116)$$

Введем величину $d\Gamma$:

$$d\Gamma = \frac{1}{\mathcal{J}} \delta_+((p - k_2)^2 - m^2) \delta_+(k_2^2) \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^2}. \quad (2.117)$$

С учетом (2.115), (2.116) можно написать

$$d\Gamma = \frac{1}{4k_1\sqrt{s}} \delta_+ \left(2\sqrt{s} \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m^2}{2\sqrt{s}} - k_{20} \right] \right) \delta_+(k_{20}^2 - \mathbf{k}_2^2) \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^2}.$$

Интегрируя при помощи δ -функции по k_0 , получим

$$d\Gamma = \frac{1}{8k_1 s} \delta_+ \left(\left[\frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \right]^2 - \mathbf{k}_2^2 \right) \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^2}. \quad (2.118)$$

Перейдем в (2.118) к сферическим координатам, т. е.

$$d^3 k_2 = k_2^2 dk_2 d\Omega = \frac{k_2}{2} dk_2^2 d\Omega.$$

Теперь можно проинтегрировать по dk_2^2 :

$$d\Gamma = \frac{1}{16s} \frac{k_2}{k_1} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} = \frac{1}{16sk_1} \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \quad (2.119)$$

Мы подставили из δ -функции

$$k_2 = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}, \quad (2.120)$$

но в с.ц.м. $k_1 = k_2 = k$, поэтому

$$d\Gamma = \frac{1}{16s} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \quad (2.121)$$

Выразим теперь $d\Omega$ через инвариантные переменные:

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta); \quad dt = 2k^2 d(\cos\theta).$$

С другой стороны, $d\Omega = d(\cos\theta)d\varphi = 2\pi d(\cos\theta)$, т. е.

$$d\Omega = \frac{2\pi}{2k^2} dt$$

и

$$d\Gamma = \frac{1}{16s} \frac{dt}{2k^2} \frac{1}{2\pi}.$$

Или окончательно, подставляя k^2 из (2.120),

$$d\Gamma = \frac{1}{16\pi} \frac{dt}{(m^2 - s)^2}. \quad (2.122)$$

Такова стандартная схема вычисления фазовых объемов.

Теперь уже можно написать выражение для сечения, но для удобства сначала перепишем величину в квадратных скобках (2.109) в несколько ином виде — раскрываем все выражения:

$$\begin{aligned} & s^2 + 2m^2s + m^4 - s^2 - us + m^2s + m^2u = \\ & = 2m^2(s - m^2) + 3m^4 - su + sm^2 + um^2 = \\ & = 2m^2(s - m^2) + 3m^4 + um^2 - s(u - m^2) = \\ & = 4m^4 + 2m^2(s - m^2) - m^2(m^2 - u) - s(u - m^2) = \\ & = 4m^4 - (u - m^2)(s - m^2) + 2m^2(s - m^2), \end{aligned}$$

т. е.

$$f(s, u) = \frac{2}{(m^2 - s)^2} [4m^4 - (u - m^2)(s - m^2) + 2m^2(s - m^2)]. \quad (2.123)$$

Подставляя (2.123) и (2.110) в (2.114), получим окончательное выражение для сечения рассеяния фотона на электроме:

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{e^4}{2\pi} \frac{dt}{(m^2 - s)^2} & \left[\left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{s - m^2}{u - m^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Это известная формула Клейна-Нишины для комптоновского сечения рассеяния.

Рассмотрим область малых энергий. Здесь удобнее пользоваться лабораторной системой координат (система, где начальный электрон покоится). В этой системе имеем

$$s = (p_1 + k_1)^2 = (k_{10} + m)^2 - \mathbf{k}_1^2 = m^2 + 2mk_{10}.$$

Обозначим $k_{10} = \omega$, $k_{20} = \omega'$, тогда

$$s = m^2 + 2m\omega. \quad (2.125)$$

Аналогично,

$$u = (p_1 - k_2)^2 = m^2 - 2m\omega', \quad (2.126)$$

а для t имеем

$$t = (k_1 - k_2)^2 = -2k_1k_2 = -2\omega\omega' + 2\omega\omega' \cos \theta = -2\omega\omega'(1 - \cos \theta).$$

С другой стороны,

$$t = (p_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2mp_{20} = 2m(m - p_{20}) = 2m(\omega' - \omega),$$

т. е.

$$2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = 2m(\omega - \omega'),$$

откуда следует

$$m \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = 1 - \cos \theta. \quad (2.127)$$

Мы получили формулу для комптоновского сдвига частоты.

Теперь посмотрим, как будут выглядеть отдельные члены (2.124)

в л.с.:

$$\frac{m^2}{s - m^2} = \frac{m}{2\omega}, \quad \frac{m^2}{u - m^2} = -\frac{m}{2\omega'},$$

их сумма

$$\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) = -\frac{1}{2}(1 - \cos \theta).$$

Аналогично,

$$\frac{u - m^2}{s - m^2} = -\frac{\omega'}{\omega}$$

и

$$\begin{aligned} dt &= 2\omega\omega' d(\cos \theta) - 2\omega(1 - \cos \theta)d\omega' = \\ &= -\frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)dt + 2\omega\omega' d(\cos \theta), \end{aligned}$$

откуда

$$dt = 2\omega'^2 d(\cos \theta).$$

Подставляя эти значения в (2.124), получим

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\pi m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'}\right) - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right] d(\cos \theta),$$

или, вводя $d\Omega_{\omega'} = 2\pi d(\cos \theta)$, запишем окончательный результат в виде

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right] d\Omega_{\omega'}, \quad (2.128)$$

где $d\Omega_{\omega'} = 2\pi d(\cos \theta)$.

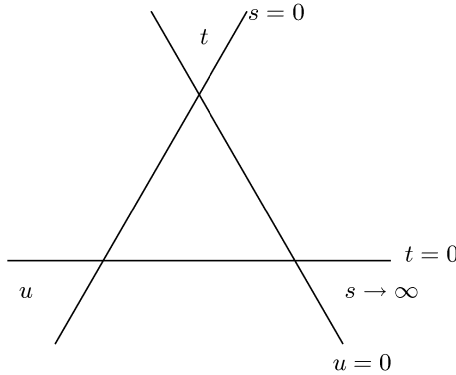
При малых энергиях $\omega \ll m$ падающего фотона (томсоновский предел) $\omega' \rightarrow \omega$ и сечение стремится к постоянной величине (формула Рэлея-Томсона):

$$d\sigma \rightarrow \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2m^2} (2 - \sin^2 \theta) d\Omega_{\omega'}. \quad (2.129)$$

Заметим, что $e^2/4\pi m = r_e$, $r_e = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона, т. е. при малых энергиях сечение

$$d\sigma \sim \pi r_e^2.$$

Теперь выясним, что происходит при высоких энергиях $s \gg m^2$. Для этой цели удобнее воспользоваться формулой (2.124).



1. Рассмотрим область $|t| \ll s$, $-u \sim s$ ($s \gg m^2$). В этом случае

$$d\sigma \simeq \frac{e^4}{4\pi} \frac{dt}{(m^2 - s)^2} \simeq \frac{e^4 dt}{4\pi s^2} \sim \frac{d\Omega}{s}, \quad (2.130)$$

т. е. сечение с малой передачей импульса с ростом s довольно быстро падает.

2. В области малых u (т. е. больших переданных импульсов t) сечение в единичный телесный угол больше:

$$d\sigma \simeq \frac{e^4}{8\pi} \frac{dt}{s} \frac{1}{m^2 - u} \sim \frac{d\Omega}{m^2}, \quad (2.131)$$

и от s не зависит. Это означает, что, поскольку

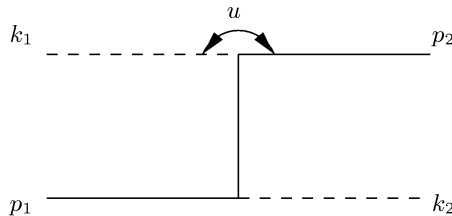
$$u = (p_1 - k_2)^2 = -2\mathbf{p}_1^2(1 + \cos\theta),$$

т. е. $u \sim 0$ соответствуют углы $\theta \sim \pi$, при больших энергиях фотоны рассеиваются преимущественно назад. Хотя, казалось бы, из-за точечности взаимодействия вероятность его должна падать с ростом угла и, кроме того, с ростом энергии, поскольку $\sigma \sim \lambda^2$, а $\lambda \sim 1/k$, т. е.

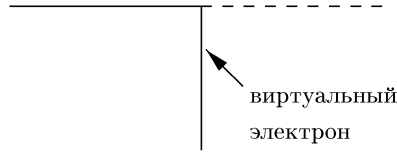
$$\sigma \sim \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{s}.$$

Именно так и устроен вклад первой диаграммы.

Посмотрим теперь на вторую, которая как раз и ответственна за указанное поведение сечения. Как объяснить, что фотоны в основном рассеиваются на 180° ? Процесс, который описывается этой диаграммой, идет, в действительности, при *малой* передаче импульса $|u| \sim m^2$, — только в результате процесса электрон превращается в фотон. Однако в релятивистской теории индивидуальность частицы не столь важна; для величины сечения важнее, что данный процесс может идти с меньшей передачей импульса.



Также ясно, почему величина сечения в этом случае не падает с ростом энергии, так как величина области, где может поглотиться фотон, определяется уже не малой длиной волны фотона λ , а тем, как далеко успеют разойтись виртуальный электрон с исходным.

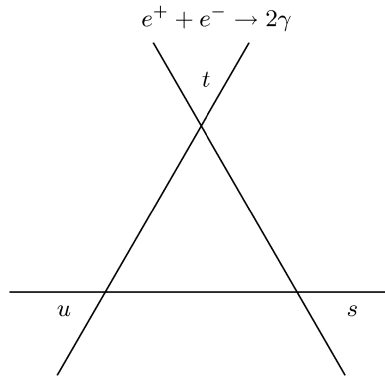


Ее можно оценить из соотношения неопределенностей. Виртуальный электрон может просуществовать время $\Delta t \sim 1/\Delta E \sim 1/m$ и за это время уйти на расстояние $\Delta r \sim 1/m$. Отсюда и следует, что при больших энергиях существенным является только обменный процесс и его сечение $\sigma \sim \frac{1}{m^2}$ в соответствии с (2.131). Однако *полное* сечение процесса остается маленьким, поскольку пик рассеяния назад, где сечение не мало:

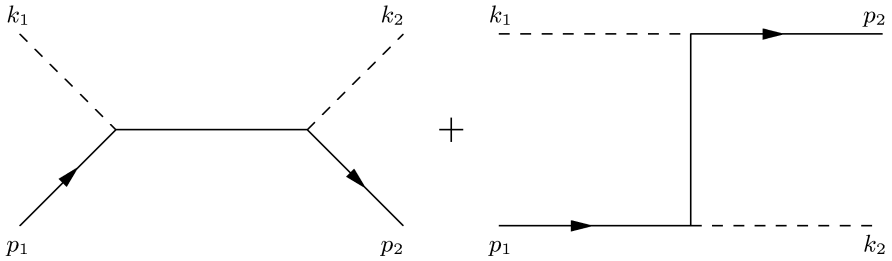
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{e^4}{m^2},$$

очень узок $|d\Omega| \sim m^2/s$.

2.7 Аннигиляция электрон-позитронной пары в два фотона



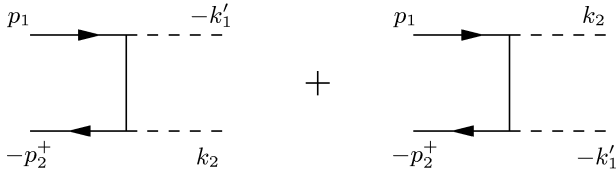
Чтобы получить двухфотонную аннигиляцию электрон-позитронной пары, достаточно рассмотреть рассеяние фотона на электроне с точки зрения t -канала.



Как всегда, сделаем замену

$$p_2 = -p_2^+, \quad k_1 = k_1'. \quad (2.132)$$

Диаграммы можно перерисовать так:



Внутренние части диаграмм те же самые, и им, как и раньше, соответствует $M_{\mu\nu}$. С учетом того, что

$$\bar{u}(-p_2^+) = -\bar{v}(p_2^+), \quad (2.133)$$

для сечения можно написать следующее выражение:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{\sigma_1 \sigma_2 \\ \lambda_1 \lambda_2}} |\bar{v}^{\lambda_2}(p_2^+) e_\mu^{\sigma_2} M_{\mu\nu} e_\nu^{\sigma_1} u^{\lambda_1}(p_1)|^2 d\Gamma = \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp}[(\hat{p}_1 + m) M_{\mu\nu} (-m + \hat{p}_2^+) M_{\nu\mu}] d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Мы учли здесь то, что вместо

$$\sum_\lambda u_\alpha^\lambda(p) \bar{u}_\beta^\lambda(p),$$

в данном случае будет присутствовать

$$\sum_{\lambda} v_{\alpha}^{\lambda}(p_2^+) \bar{v}_{\beta}^{\lambda}(p_2^+) = -(m - \hat{p}_2^+)_{\alpha\beta}.$$

Знак “−” оттого, что $u(-p) = v(p)$, а $\bar{u}(-p) = -\bar{v}(p)$. Вычисление следа даст тот же результат, что и в случае рассеяния, только с другим знаком, а переменные s, t, u будут иметь другой смысл: t — квадрата полной энергии в с.ц.м., $s, u < 0$ — переданных импульсов, так что сечение можно записать в виде

$$d\sigma = -8e^4 \left[\left(\frac{m^2}{m^2 - s} + \frac{m^2}{m^2 - u} \right)^2 + \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{s - m^2}{u - m^2} \right) \right] d\Gamma. \quad (2.135)$$

В этом случае $d\Gamma$ — фазовый объем, деленный на поток — уже другой, поскольку фазовый объем двух фотонов отличен от фазового объема электрона с фотоном.

Вычислим $d\Gamma$ в с.ц.м. Инвариантный поток тогда будет иметь вид

$$\mathcal{J} = 4p_1\sqrt{t}, \quad (p_1 = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|),$$

поскольку теперь роль энергетической переменной играет t . Тогда

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{4p_1\sqrt{t}} \frac{d^4k_2 \delta_+(k_2^2) \delta_+((k_2 - p_1 - p_2^+)^2)}{(2\pi)^2} = \\ &= \frac{1}{4p_1\sqrt{t}} \frac{d^4k_2 \delta_+(k_2^2) \delta_+((k_2 - p)^2)}{(2\pi)^2}; \end{aligned}$$

$$(k_2 - p)^2 = t - 2k_2p = t - 2k_0\sqrt{t} = 2\sqrt{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{2} - k_2 \right);$$

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{4p_1\sqrt{t}} \frac{\delta_+(k_{20}^2 - \mathbf{k}_2^2) \delta_+ \left(2\sqrt{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{2} - k_2 \right) \right)}{(2\pi)^2} dk_{20} \mathbf{k}_2^2 dk_2 d\Omega = \\ &= \frac{1}{4p_1\sqrt{t} 2\sqrt{t}} \frac{\delta_+ \left(\frac{t}{4} - \mathbf{k}_2^2 \right)}{(2\pi)^2} |\mathbf{k}_2| \frac{d\mathbf{k}_2^2}{2} d\Omega = \\ &= \frac{1}{16p_1t} \frac{|\mathbf{k}_2|}{(2\pi)^2} d\Omega = \frac{1}{16t} \frac{|\mathbf{k}_2|}{p_1} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Здесь $|\mathbf{k}_2| = \sqrt{t}/2$.

Выразим теперь p_1 через инвариантные переменные (в данном случае $|\mathbf{p}_1| \neq |\mathbf{k}_2|$ в с.ц.м., поскольку частицы обладают разными массами). Имеем

$$\begin{aligned} t &= (p_1 + p_2^+)^2 = \\ &= p_1^2 + p_2^{+2} + 2p_{10}p_{20}^+ - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^+ = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{10}p_{20}^+ - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^+, \end{aligned}$$

в с.ц.м.

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2^+)^2 = 0 = \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^{+2} + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^+,$$

откуда

$$-2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^+ = \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^{+2}.$$

Следовательно,

$$t = m_1^2 + m_2^2 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^{+2} + 2\sqrt{(m_1^2 + \mathbf{p}_1^2)(m_2^2 + \mathbf{p}_2^{+2})}, \quad (2.137)$$

или

$$\sqrt{t} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^{+2}}. \quad (2.138)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2$$

, и решая квадратное уравнение относительно \mathbf{p}_1^2 , получим

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{1}{2\sqrt{t}} \sqrt{t^2 - 2t(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (2.139)$$

В нашем случае $m_1 = m_2 = m$, поэтому

$$p_1 = \frac{\sqrt{t - 4m^2}}{2}.$$

В случае рассеяния (см. (2.120)) было бы $m_1 = m, m_2 = 0$, и эта формула дала бы с учетом $s \rightarrow t$

$$k_1 = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}},$$

т. е. k_1 действительно совпадает с k_2 , потому что k_1 и k_2 описывают частицы с одинаковыми массами.

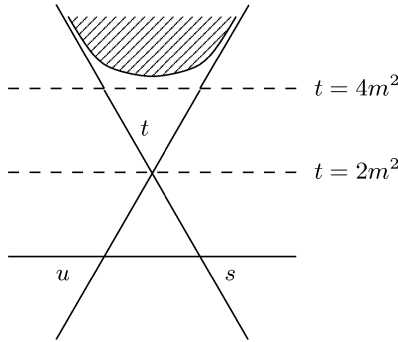
Итак, мы получили, что в с.ц.м.

$$d\Gamma = \frac{1}{16\sqrt{t(t - 4m^2)}} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \quad (2.140)$$

(Выразив $d\Omega$ через инвариантные переменные, мы, в принципе, получили бы релятивистски инвариантное выражение, справедливое в любой системе отсчета, хотя вычисления и проводились в с.ц.м. Это мы проделали в случае рассеяния.)

Теперь проанализируем полученное выражение для сечения аннигиляции:

$$d\sigma = -\frac{e^4}{2} \frac{1}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \left[\left(\frac{m^2}{m^2-s} + \frac{m^2}{m^2-u} \right)^2 + \frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{u-m^2}{s-m^2} + \frac{s-m^2}{u-m^2} \right) \right] \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \quad (2.141)$$



Физической областью этого процесса является $t > 4m^2$.

1. При $t \sim 4m^2$, $d\Gamma \rightarrow \infty$, т. е. сечение очень велико ($d\sigma \rightarrow \infty$). Физически это понятно из следующих соображений: $t \sim 4m^2$ — это соответствует очень медленным частицам, т. е. поток налетающих частиц очень мал, $j \sim 0$, а сечение — это отношение вероятности процесса к потоку

$$d\sigma \sim \frac{|W|^2}{j},$$

поэтому $d\sigma \rightarrow \infty$. Но, с другой стороны, почему такая ситуация не встретилась нам при рассеянии, при $j \rightarrow 0$? Дело здесь в том, что при $j \rightarrow 0$ в упругом рассеянии число конечных состояний тоже мало, а при этом $|W|^2 \rightarrow 0$, так что две малости сокращаются. В случае же аннигиляции, независимо от энергии начальных частиц, в конечном состоянии

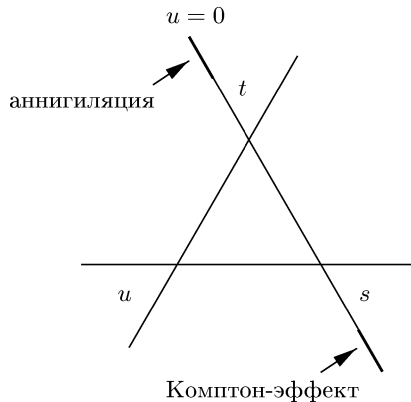
рождаются фотоны больших энергий, их фазовый объем конечен (не стремится к нулю), поэтому сечение и растет.

2. $t \gg 4m^2$. В случае больших $s \sim u \sim \frac{t}{2}$ (т. е. рассеяние на угол $\theta \sim 90^\circ$)

$$d\sigma \simeq \frac{e^4}{4} \frac{1}{t} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \quad (2.142)$$

В области же больших переданных импульсов $s \sim t$, $u \sim 0$ имеем (рассеяние на большие углы):

$$d\sigma \simeq \frac{e^4}{8} \frac{1}{m^2 - u} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}. \quad (2.143)$$



Здесь ситуация аналогична случаю рассеяния: фотоны с большой вероятностью летят назад, но вклад (2.143) обусловлен второй диаграммой, и это есть фактически превращение электрона в фотон, как и раньше, с малой передачей импульса.

Аналогично, при $u \sim t$, $s \sim 0$, вклад в сечение в основном от первой диаграммы, и

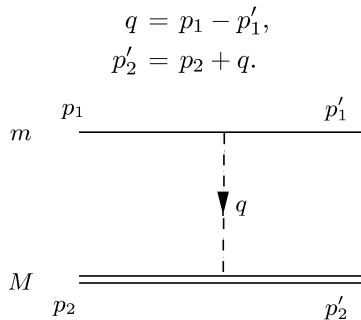
$$d\sigma \sim \frac{e^4}{8} \frac{1}{m^2 - s} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}, \quad (2.144)$$

т. е. при больших энергиях налетающих частиц фотоны летят, в основном, назад и вперед.

Сравнивая (2.143) и (2.131), видим, что при больших энергиях и одинаковых переданных импульсах сечения двух различных процессов совпадают (эти области отмечены жирной линией на мандельштамовской плоскости).

2.8 Рассеяние электронов во внешнем поле

Рассмотрим рассеяние электрона тяжелой частицей массы M (например, протоном). Если $m \ll M$, то эта частица почти не испытывает отдачи, если импульс электрона не очень велик,



Если в начальный момент частица M покоилась, то

$$p'_{20} \simeq M + \frac{\mathbf{p}'_2{}^2}{2M} = M + \frac{\mathbf{q}^2}{2M}.$$

Энергия при $\mathbf{q}^2/2M \ll 1$ практически не изменяется. При этом можно пренебречь движением частицы M и считать, что электрон рассеивается внешним полем. Пусть частица M , как и электрон, обладает спином 1/2. Вычислим нижнюю часть диаграммы. Обозначим

$$\mathcal{P}_\mu = p_{2\mu} + p'_{2\mu}.$$

Мы уже писали такую формулу:

$$2\mathcal{P}_\mu = \hat{P}\gamma_\mu + \gamma_\mu\hat{P}. \quad (2.145)$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} 2\bar{u}(p'_2)\mathcal{P}_\mu u(p_2) &= \\ &= \bar{u}(p'_2)[(\hat{p}_2 + \hat{p}'_2)\gamma_\mu + \gamma_\mu(\hat{p}_2 + \hat{p}'_2)]u(p_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2) + \bar{u}(p'_2)\hat{p}_2\gamma_\mu u(p_2) + \\
&+ M\bar{u}p'_2\gamma_\mu u(p_2) + \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu\hat{p}'_2 u(p_2) = \\
&= 2M[\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2)] + \bar{u}(p'_2)[\hat{p}_2\gamma_\mu + \gamma_\mu\hat{p}'_2]u(p_2) = \\
&= 4M[\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2)] + \bar{u}(p'_2)[\gamma_\mu\hat{q} - \hat{q}\gamma_\mu]u(p_2)
\end{aligned}$$

(поскольку $p'_2 = p_2 + q$, $p_2 = p'_2 - q$). Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2) &= \frac{(p_2 + p'_2)_\mu}{2M}\bar{u}(p'_2)u(p_2) - \\
&- \frac{1}{2M}\bar{u}(p'_2)\sigma_{\mu\nu}q_\nu u(p_2).
\end{aligned} \tag{2.146}$$

Мы ввели матрицы

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu}{2}. \tag{2.147}$$

Вычислим $\bar{u}(p'_2)u(p_2)$, учитывая, что $p'_2 \sim p_2$. Так как

$$u(p_2) = \sqrt{p_{20} + M} \begin{pmatrix} \varphi \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}_2/(p_{20} + M)\varphi \end{pmatrix}$$

и в случае $|\mathbf{p}_2| \ll M$ нижней компонентой спинора в произведении можно пренебречь, то

$$\bar{u}(p'_2)u(p_2) = 2M \left(1 + 0 \left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{M^2} \right) \right),$$

т. е.

$$\bar{u}(p'_2)u(p_2) = 2M \tag{2.148}$$

с точностью до членов второго порядка по $|\mathbf{p}|/M$.

Далее вычислим

$$\bar{u}(p'_2)\sigma_{\mu\nu}u(p_2).$$

Члены с $\sigma_{0i} = \gamma_0\gamma_i$ дают малый вклад, т.к.

$$\begin{aligned}
u^+(p'_2)\gamma_i u(p_2) &\sim \\
&\sim 2M \left(\varphi^+, \varphi^+ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'_2}{2M} \right) \begin{pmatrix} \sigma_i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}_2/2M\varphi \\ -\sigma_i\varphi \end{pmatrix} \sim \frac{|\mathbf{p}|}{M}M.
\end{aligned}$$

В первом порядке по $|\mathbf{p}|/M$ ими тоже можно пренебречь. Остались члены с

$$\sigma_{ij} = \gamma_i\gamma_j = \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix}.$$

Из вида спинора видно, что вклад его нижних компонент в $\bar{u}\sigma_{ij}u$ порядка p^2/M^2 . Так что с точностью до линейных членов по p/M можно записать из (2.146)

$$\begin{aligned}\bar{u}(p'_2)\gamma_0u(p_2) &= 2M, \\ \bar{u}(p'_2)\gamma_iu(p_2) &= \varphi^+\sigma_jq_j\sigma_i\varphi.\end{aligned}$$

Мы положили в (2.146)

$$\mathbf{p}_2 = 0, \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{q}.$$

Амплитуда рассеяния электрона на внешнем поле тогда запишется следующим образом:

$$T = 2Me [\bar{u}(p'_1)\gamma_0A_0(q)u(p_1) - \bar{u}(p'_1)\gamma_iA_i(q)u(p_1)], \quad (2.149)$$

где

$$\begin{aligned}A_0 &= e\frac{1}{q^2}, \\ A_i &= e\frac{q_i}{2M} + ei\varphi^+\frac{[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}]_i}{2M}\varphi.\end{aligned} \quad (2.150)$$

Мы использовали то, что

$$\sigma_jq_j\sigma_i = q_i - i\varepsilon_{ijk}\sigma_kq_j = q_i + i[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}]_i.$$

$A_0(q)$ представляет собой фурье-компоненту кулоновского поля, первый член A_i — фурье-компоненту векторного потенциала, создаваемого током частицы, второй — ее магнитным моментом. Величина $\langle e\boldsymbol{\sigma}/2M \rangle$ соответствует обычному магнетону Бора. Для электрона, действительно, магнитный момент равен с хорошей точностью магнетону Бора. Для протона же, например, нужно добавить так называемый аномальный магнитный момент; соответственно, в (2.150) вместо $[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}]$ нужно писать $(1 + \mu_{\text{аном}})[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}]$.

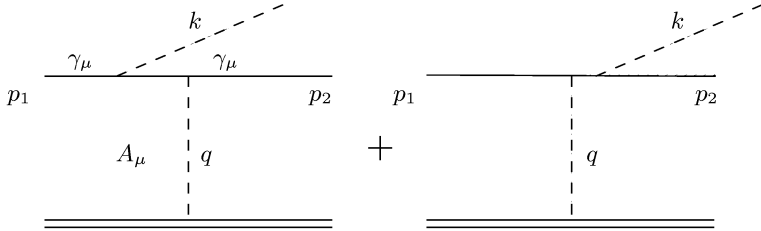
Рассеянию внешним полем соответствует предельный переход $M \rightarrow \infty$. В сечение при этом войдет $(2M)^2$ от $|T|^2$ в числителе и $(2M)^2$ в знаменателе от фазового объема и потока; члены, соответствующие току и магнитному моменту, обратятся в нуль. Так что сечение в этом случае будет определяться кулоновским потенциалом частицы

$$A_0 = -\frac{e}{\mathbf{q}^2}.$$

2.9 Тормозное излучение электрона во внешнем поле

В силу законов сохранения, свободный электрон излучить фотон не может. Наличие внешнего поля делает этот процесс возможным.

Рассмотрим диаграммы:



Они описывают испускание электроном фотона, соответственно, до и после рассеяния на внешнем поле. Амплитуда $F_{\text{Торм}}$, отвечающая этим графикам, запишется так:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Торм}} = & e\bar{u}(p_2)\hat{\epsilon}\frac{m + \hat{p}_2 + \hat{k}}{m^2 - (p_2 + k)^2}\hat{A}(q)u(p_1) + \\
 & + e\bar{u}(p_2)\hat{A}(q)\frac{m + \hat{p}_1 - \hat{k}}{m^2 - (p_1 - k)^2}\hat{\epsilon}u(p_1). \quad (2.151)
 \end{aligned}$$

Ограничим наше рассмотрение двумя наиболее интересными случаями.

1. $p_{10} \simeq m, k \ll m$, т. е. испускание мягкого фотона электроном с небольшой энергией. В этом случае из-за наличия функции Грина электрона $1/(m - \hat{p}_1 + \hat{k})$ амплитуда процесса очень велика. Это связано с тем, что излучение мягких фотонов начинается далеко от рассеивателя и происходит в большой области.
2. $p_{10} \gg m, k \ll p_{10}$.

Итак, пусть $p_{10} \simeq m, k \ll m$. Вычислим величины, входящие в числитель (2.151):

$$\hat{\epsilon}(m + \hat{p}_2) + \hat{\epsilon}\hat{k} = (m - \hat{p}_2)\hat{\epsilon} + 2(\epsilon p_2) + \hat{\epsilon}\hat{k} \simeq 2(\epsilon p_2), \quad (2.152)$$

поскольку

$$\hat{\epsilon}\hat{p} = e_\mu p_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = e_\mu p_\nu (-\gamma_\nu \gamma_\mu + 2\delta_{\mu\nu}) = -\hat{p}\hat{\epsilon} + 2(\epsilon p).$$

Аналогично и для второго числителя в (2.151):

$$(m + \hat{p}_1)\hat{e} - \hat{k}\hat{e} \simeq 2(ep_1).$$

Подставляя эти значения в (2.151), получаем

$$F_{\text{Торм}} = e \left[\frac{2(ep_2)}{m^2 - (p_2 + k)^2} + \frac{2(ep_1)}{m^2 - (p_1 - k)^2} \right] \bar{u}(p_2)\hat{A}(q)u(p_1). \quad (2.153)$$

Величина

$$f_s(q) = \bar{u}(p_2)\hat{A}(q)u(p_1)$$

есть не что иное, как амплитуда рассеяния электрона. Итак,

$$F_{\text{Торм}} = ef_s(q) \left[\frac{ep_1}{p_1k} - \frac{ep_2}{p_2k} \right]. \quad (2.154)$$

В нерелятивистском случае $|\mathbf{p}_1| \ll m$, $p_1k \simeq mk_0$. При этом

$$F_{\text{Торм}} = f_s(q) \frac{e}{k_0} \mathbf{e}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \quad (2.155)$$

где $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{p}_{1,2}/m$ — скорости электрона до и после рассеяния. Формула (2.155) совпадает с результатом классической электродинамики для тормозного излучения.

Вычислим для этого случая сечение процесса:

$$d\sigma_{\text{Торм}} = \frac{1}{\mathcal{J}} |F_{\text{Торм}}|^2 d^4p_2 \delta(p_2^2 - m^2) (2\pi)^4 \delta(p_2 + k - p_1 - q) \frac{d^4k}{(2\pi)^6} \delta(k^2).$$

Величина

$$d\sigma_s = \frac{1}{\mathcal{J}} |f_s|^2 \frac{d^4p_2}{(2\pi)^3} \delta(p_2^2 - m^2) (2\pi)^4 \delta(p_2 + k - p_1 - q)$$

— это сечение рассеяния электрона, так что

$$d\sigma_{\text{Торм}} = d\sigma_s \frac{e^2}{k_0^2} |\mathbf{e}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)|^2 \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2), \quad (2.156)$$

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2) = \frac{dk_0 k dk^2}{(2\pi)^3 2} \delta(k_0^2 - k^2) d\Omega = \frac{dk_0}{(2\pi)^3} \frac{k_0}{2} d\Omega,$$

т. е.

$$d\sigma_{\text{Торм}} = d\sigma_s \frac{e^2}{16\pi^3} |\mathbf{e}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)|^2 d\Omega \frac{dk_0}{k_0}, \quad (2.157)$$

или, учитывая, что $e^2/4\pi = \alpha = 1/137$,

$$d\sigma_{\text{торм}} = d\sigma_s \frac{\alpha}{2\pi} |\mathbf{e}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{dk_0}{k_0}. \quad (2.158)$$

Мы видим, что $d\sigma_{\text{торм}} \rightarrow \infty$ при $k_0 \rightarrow 0$, и полное сечение расходится логарифмически в области малых частот. Интегрируя сечение по энергиям фотона от k_{0min} до k_{0max} , получим

$$d\sigma_t = d\sigma_s \frac{\alpha}{2\pi} |\mathbf{e}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)|^2 2 \ln \frac{k_{0max}}{k_{0min}}. \quad (2.159)$$

Верхние частоты испускаемых фотонов, очевидно, ограничены энергией электрона, т. е. $k_{0max} < p_{10}$. Нижний же предел может быть выбран произвольно малым, положив $k_{0min} = 0$, мы бы получили бесконечное сечение (так называемая инфракрасная катастрофа). В данном случае дело в том, что не работает первое приближение по константе связи α .

Выражение (2.159) фактически устанавливает критерий применимости первого порядка по α :

$$\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{k_{0max}}{k_{0min}} < 1. \quad (2.160)$$

Если это неравенство нарушается, процессы с испусканием одного или более фотонов не подавлены. Это можно понять и с другой точки зрения. При $k \rightarrow 0$ мы имеем классическое электромагнитное поле, что отвечает большому числу фотонов, и, естественно, поэтому мы не можем ограничиться однофотонным процессом.

При обсуждении высших поправок мы еще вернемся к этому вопросу, а теперь перейдем к другому случаю:

$$p_{10} \gg m, \quad \frac{k_0}{p_{10}} \ll 1. \quad (2.161)$$

Пренебрегая в числителях (2.151) членами $\hat{\epsilon}\hat{k}$, как и раньше, получим

$$F_{\text{торм}} = ef_s(q) \left[\frac{\epsilon p_1}{p_1 k} - \frac{\epsilon p_2}{p_2 k} \right].$$

Далее, для фотона, испущенного на угол θ_1 , имеем

$$p_1 k = p_{10} k_0 - p_1 k_0 \cos \theta_1 = p_1 k_0 \left[1 - \cos \theta_1 + \frac{m^2}{2p_1^2} \right], \quad (2.162)$$

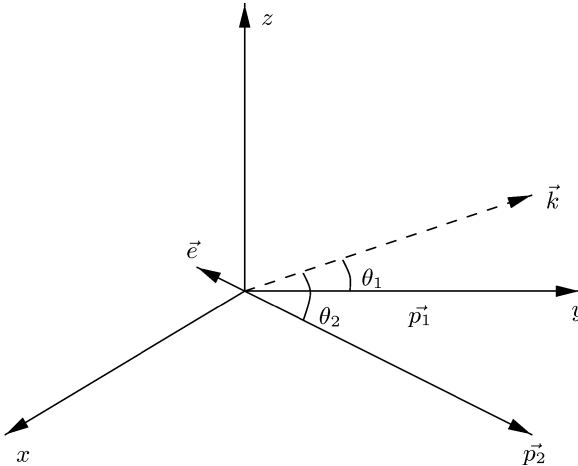
поскольку p_{10} можно разложить по m^2/p_1^2 в силу (2.161):

$$p_{10} = \sqrt{m^2 + p_1^2} = p_1 + \frac{m^2}{2p_1},$$

или, введя $\theta_0^2 = m^2/p_1^2$ и учитывая, что $1 - \cos \theta_1 \approx \theta_1^2/2$,

$$p_1 k = \frac{p_1 k_0}{2} (\theta_1^2 + \theta_0^2). \quad (2.163)$$

Если $\theta_1 \ll 1$ и $m^2/2p_1^2 \ll 1$, то знаменатель в амплитуде снова мал и вероятность тормозного излучения велика. Таким образом, тормозные фотоны, в основном, излучаются на малые углы.



Числитель в выражении для амплитуды равен

$$ep_1 = -p_1 \sin \theta_1 \simeq -p_1 \theta_1 \quad (2.164)$$

(фотоны поляризованы параллельно $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$). Аналогичные выражения получаются и для второго слагаемого амплитуды, так что окончательно имеем

$$F_{\text{Торм}} = -ef_s(q) \frac{2}{k} \left[\frac{\theta_1}{\theta_1^2 + \theta_0^2} - \frac{\theta_2}{\theta_2^2 + \theta_0^2} \right]. \quad (2.165)$$

Большие импульсы электрона здесь сокращаются.

Из (2.165) видно, что если электрон рассеялся на очень малый угол $\theta_s \ll \theta_1 \approx \theta_2$, то амплитуды излучения до и после рассеяния вычитаются и тормозного излучения практически нет. Однако, при рассеянии на достаточно большой угол, $\theta_s \gg \theta_0$ одна из амплитуд может быть много больше другой и сокращение более не имеет места. Это возможно в двух случаях: $\theta_2 \approx \theta_s \gg \theta_1$ или наоборот $\theta_1 \approx \theta_s \gg \theta_2$.

Это означает, что в релятивистском случае тормозное излучение сконцентрировано внутри двух узких конусов, $\theta_1 \ll \theta_s$ и $\theta_2 \ll \theta_s$, которые направлены вдоль \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Эти конусы совершенно одинаковы.

Рассмотрим для примера сечение излучения в одном из этих конусов.

$$d\sigma_{\text{торм}} = d\sigma_s \frac{4e^2}{k^2} \frac{\theta_1^2}{(\theta_1^2 + \theta_0^2)^2} \frac{d^4 k \delta(k^2)}{(2\pi)^3}, \quad (2.166)$$

$$\frac{d^4 k \delta(k^2)}{(2\pi)^3} = \frac{k_0 dk_0}{(2\pi)^3 2} 2\pi d \cos \theta,$$

$$d\sigma_{\text{торм}} = d\sigma_s \frac{2e^2}{8\pi^3} \frac{dk_0}{k_0} 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \frac{\theta_1^2}{(\theta_1^2 + \theta_0^2)^2} = d\sigma_s \frac{\alpha}{\pi} \frac{dk_0}{k_0} \frac{\theta_1^2 d\theta_1^2}{(\theta_1^2 + \theta_0^2)^2}.$$

Интегрируя по углам в узком конусе $\Delta\theta$ и энергиям фотона, получим полное сечение тормозного излучения в виде (при $\theta_0 \ll \Delta\theta$):

$$d\sigma_t = d\sigma_s \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{k_{0max}}{k_{0min}} \ln \frac{\Delta\theta}{\theta_0^2} \cong d\sigma_s \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{p_1}{k_{0min}} \ln \frac{p_1^2}{m^2}, \quad (2.167)$$

поскольку $k_{0max} = p_1$, $\theta_0 = m^2/2p_1^2$.

Таким образом, сечение растёт с ростом энергии налетающей частицы как квадрат логарифма (это все при рассеянии на достаточно большой угол). Следовательно, при очень больших энергиях наша теория (основанная на первом порядке по α) тоже неприменима.

2.10 Формула Вайцзекера-Вильямса

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть имеется тяжелая частица (например, ядро или протон), и на нее налетает легкая частица. При рассеянии может произойти процесс с испусканием любых частиц (на предыдущей лекции, например, мы рассмотрели испускание фотонов), т. е.

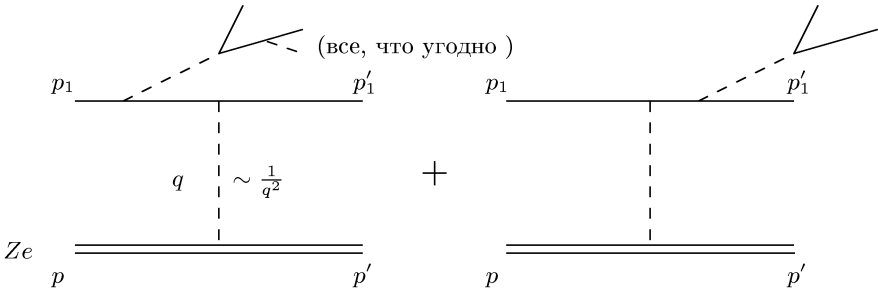


Рис. 14

В амплитуду рассеяния частицы на кулоновском центре входит $1/q^2$ ($q^2 = (p-p')^2$), т. е. наибольший вклад в сечение дают малые q^2 . Нельзя ли из того, что энергия налетающей частицы велика, а q^2 мал, сделать некоторые заключения о произвольном процессе, типа изображенного на диаграммах?

Итак, пусть $q^2 \ll m^2$, $s \gg m^2$. При малых q^2 фотон почти реальный и задача фактически разбивается на две части: испускание ядром фотона и рассеяние частицы на этом фотоне с испусканием чего угодно, т. е.

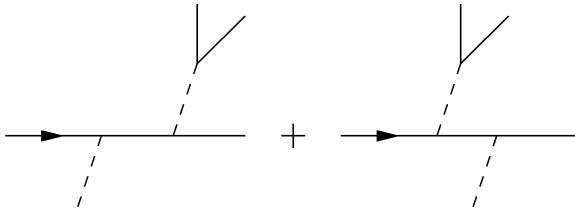
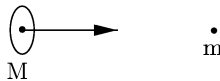


Рис. 15

Рассмотрим весь процесс в системе покоя электрона ($p_1 = (m, 0)$), где ядро налетает на него с большой скоростью.



Кулоновское поле быстрой частицы сжато в направлении движения. Это поле, как мы покажем, можно представить в виде совокупности

почти реальных фотонов. Сечение (рис. 14) тогда можно записать в виде

$$d\sigma_W = d\sigma_c(\mathbf{q})n(\mathbf{q})d^3q, \quad (2.168)$$

где $n(\mathbf{q})d^3q$ — число фотонов с импульсами в интервале d^3q , испускаемых ядром; $d\sigma_c$ — сечение процесса (рис. 15); $n(\mathbf{q})$ можно вычислить как вероятность найти фотон в кулоновском поле быстрой частицы из разложения электрического и магнитного полей ядра в системе покоя электрона по плоским волнам, как сделали это Вайцзекер и Вильямс. А можно поступить и по-другому. Амплитуда (рис. 15) есть

$$F_c = M_\mu(q, p_1, \dots)e_\mu^\nu; \quad (2.169)$$

здесь $q^2 = 0$, поскольку фотон реальный. Для (рис. 14) же имеем

$$F_W = \frac{Ze}{q^2}(p + p')_\mu M_\mu(q, p_1, \dots). \quad (2.170)$$

Попытаемся найти связь между этими амплитудами. Если бы можно было считать в (2.170) $q^2 = 0$ везде, кроме полюсного множителя, то множители M_μ в обеих формулах совпали бы. Это сделать мы можем: поскольку $q^2/m^2 \ll 1$, то q^2 мало по сравнению со всеми другими импульсами, входящими в M_μ .

Далее, в силу сохранения тока, имеем

$$q_\mu M_\mu = 0 \quad , \quad e_\mu q_\mu = 0. \quad (2.171)$$

В системе покоя электрона импульс налетающего ядра имеет компоненты

$$p = (p_0, p_z, 0, 0). \quad (2.172)$$

Имеем

$$p - q = p' \quad , \quad p^2 = p'^2 = M^2 \quad , \quad q^2 \ll M^2,$$

отсюда

$$(p - q)^2 = p^2 = M^2 \quad ,$$

т. е.

$$-2pq + q^2 = 0 \quad ,$$

или в силу (2.172)

$$-2(p_0q_0 - p_zq_z) + q^2 = -2p_z(q_0 - q_z) - \frac{M^2}{p_z}q_0 + q^2 = 0. \quad (2.173)$$

Условие (2.173) может выполняться при

$$q_0 - q_z \sim \frac{q^2}{p_z}$$

и

$$q_0 \sim \frac{q^2 p_z}{M^2} = \frac{q^2}{p_z} \left(\frac{p_z^2}{M^2} \right) \gg q_0 - q_z, \quad (2.174)$$

т. е. фотон возникает релятивистским, q_0 велико, хотя разница $q_0 - q_z$ мала. Обозначим составляющую импульса фотона в плоскости, перпендикулярной z , через q_\perp , тогда

$$q^2 = q_0^2 - q_z^2 - q_\perp^2 = 2q_0(q_0 - q_z) - q_\perp^2, \quad (2.175)$$

отсюда видно, что $q^2 \simeq -q_\perp^2$.

Теперь рассмотрим в (2.170) множитель

$$(p + p')_\mu M_\mu(q, p_1, \dots) = (2p - q)_\mu M_\mu.$$

Он равен

$$2p_\mu M_\mu \simeq 2p_0(M_0 - M_z)$$

в силу сохранения тока.

С другой стороны,

$$q_\mu M_\mu = q_0 M_0 - q_z M_z - q_\perp M_\perp = q_0(M_0 - M_z) - q_\perp M_\perp = 0,$$

т. е.

$$M_0 - M_z = \frac{q_\perp M_\perp}{q_0}$$

и

$$(p + p')_\mu M_\mu = \frac{2p_0}{q_0} q_\perp M_\perp. \quad (2.176)$$

Покажем, что (2.176) выражается через (2.169). Рассмотрим $e_\mu M_\mu$. Выберем калибровку, где

$$\mathbf{e}q = 0 \quad (\text{т. е. } e_0 = 0). \quad (2.177)$$

Тогда

$$e_\mu M_\mu = -e_z M_z - e_\perp M_\perp,$$

но из (2.177) следует

$$e_z q_z + e_\perp q_\perp = 0.$$

Поскольку $q_{\perp}/q_z \ll 1$, то e_z мало:

$$e_z = -\frac{e_{\perp}q_{\perp}}{q_z}.$$

Физический смысл этого в следующем: фотоны летят почти параллельно быстрой частице ($q_{\perp} \ll q_z$), естественно, что поляризация их лежит в плоскости, перпендикулярной направлению движения этой частицы. Таким образом,

$$e_{\mu}M_{\mu} = -\mathbf{e}_{\perp}\mathbf{M}_{\perp}. \quad (2.178)$$

Мы видим, что физика процесса полностью определяется поперечной частью \mathbf{M}_{\perp} амплитуды рассеяния фотона, как для виртуального фотона, так и для реального. Заметим далее, что при $q_{\perp} \ll m$ амплитуда не может зависеть от направления вектора \mathbf{q}_{\perp} . При вычислении сечения мы должны усреднить по двум поперечным поляризациям \mathbf{e}_{\perp} ($\mathbf{e}_{\perp}^2 = 1$) для случая реального фотона и проинтегрировать по всем поперечным направлениям вектора \mathbf{q}_{\perp} для случая виртуального фотона. Учитывая это, мы можем просто использовать нормированные векторы $\mathbf{q}_{\perp}/\sqrt{q_{\perp}}$ в качестве векторов поляризации. Тогда

$$(p + p')_{\mu}M_{\mu} = \frac{2p_0}{q_0}|q_{\perp}|(\mathbf{e}_{\perp} \cdot \mathbf{M}_{\perp}) = \frac{2\mathbf{p}_0}{q_0}|q_{\perp}|F_c,$$

т. е.

$$F_W = \frac{Ze}{q^2} \frac{2p_0}{q_0}|q_{\perp}|F_c. \quad (2.179)$$

Для сечения $d\sigma_W$ рассеяния электрона на ядре тогда получим

$$\begin{aligned} d\sigma_W &= \frac{Z^2 e^2}{q^4} \left(\frac{2p_0}{q_0}\right)^2 q_{\perp}^2 \frac{1}{4mp_0} 4mq_0 \times \\ &\times \left[\frac{1}{4mq_0} |F_c|^2 \frac{d^4 k_1 \delta(k_1^2 - m_1^2) \dots d^4 k_n \delta(k_n^2 - m_n^2)}{(2\pi)^{3n}} (2\pi)^4 \times \right. \\ &\left. \times \delta(p_1 + p - \sum k_i - p' - p'_1) \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^3} \delta(p_1'^2 - m^2) \right] \frac{d^4 p'}{(2\pi)^3} \delta(p'^2 - M^2). \end{aligned} \quad (2.180)$$

Учтем

$$\delta(p_1 + p - \sum k_i - p' - p'_1) = \delta(p_1 + q - \sum k_i - p'_1),$$

так как $p - p' = q$.

Тогда выражение в квадратных скобках (2.180) — это просто сечение процесса (рис. 15) $d\sigma_c$, т. е.

$$d\sigma_W = \frac{Z^2 e^2}{q^4} \left(\frac{2p_0}{q_0} \right)^2 q_{\perp}^2 \frac{q_0}{p_0} d\sigma_c(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(-2pq + q^2),$$

$$d^4 q = dq_0 dq_z d^2 q_{\perp}.$$

Проинтегрируем по dq_0 при помощи δ -функций (в знаменателе появится $2p_0$), тогда

$$d\sigma_W = n(q) d\sigma_c dq_z d^2 q_{\perp}, \quad (2.181)$$

где

$$n(q) = \frac{Z^2 e^2}{(2\pi)^3} \frac{2q_{\perp}^2}{q_0 q^4} = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2} \frac{q_{\perp}^2}{q_0 q^4}. \quad (2.182)$$

Мы получили таким образом плотность фотонов, испускаемых ядром, на единицу импульса. Перепишем сечение в виде (поскольку $q_0 \sim q_z$)

$$d\sigma_W = d\sigma_c [b] \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2} \frac{dq_0}{q_0} \frac{q_{\perp}^2 d^2 q_{\perp}}{q^4}. \quad (2.183)$$

Мы уже писали (2.173):

$$-2(p_0 q_0 - p_z q_z) + q^2 = -2p_z(q_0 - q_z) - \frac{M^2}{p_z} q_0 + q^2 = 0,$$

т. е.

$$q_0 - q_z = \frac{q^2}{2p_z} - \frac{M^2}{2p_z^2} q_0 \sim -\frac{M^2}{2p_z^2} q_0,$$

если пренебречь q^2/p_z . Тогда

$$q^2 = -q_{\perp}^2 + 2q_0(q_0 - q_z) \approx -q_{\perp}^2 - q_0^2 \frac{M^2}{p_z^2},$$

и если

$$\frac{q_0}{p_0} \ll 1, \quad \frac{q_0^2 M^2}{p_z^2} \ll q_{\perp}^2 \ll M^2,$$

то q^4 очень малая величина и, если проинтегрировать по $d^2 q_{\perp}$, интеграл логарифмически расходится:

$$d\sigma_W = d\sigma_c \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \frac{dq_0}{q_0} \ln \frac{p_z^2}{q_0^2} \quad (2.184)$$

при

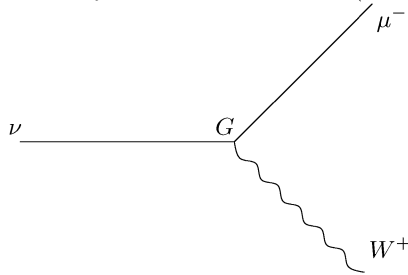
$$\frac{M^2 q_0^2}{p_0^2} \ll q_{\perp}^2 \ll M^2.$$

Мы рассматривали изменение переданного импульса, считая q^2 малым; аналогично интегрируя еще по dq_0 , получим ($M < q_0 < p_0$)

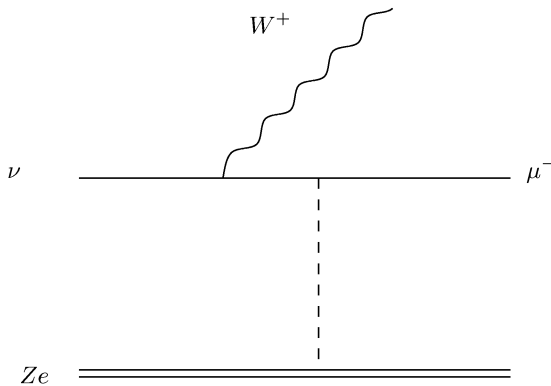
$$d\sigma_W = d\sigma_c \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{p_z^2}{q_0^2}. \quad (2.185)$$

Видим, что сечение велико. Следовательно, при рассеянии быстрой частицы с малой передачей импульса могут родиться много частиц. Иначе говоря, такой вайцзекеровский процесс может служить интенсивным источником всяких частиц. А эффект велик потому, что рождается много фотонов, хотя сечение этого процесса на один фотон может быть и небольшим.

Именно из такого процесса была получена в свое время нижняя оценка массы W -бозона. Пусть взаимодействие (слабое) имеет вид:



Как обнаружить существование W -бозона? Нейтрино практически не взаимодействуют, однако при рассеянии на кулоновском поле ядра сечение велико за счет электромагнитного взаимодействия мюона с ядром (рисунок ниже). Отсюда получили, что $m_W > 5$ ГэВ.



Глава 3

Общие свойства амплитуды рассеяния

3.1 Симметрии в квантовой электродинамике

Во-первых, квантовая электродинамика релятивистски инвариантна. Мы ее строили так с самого начала. Существуют еще дискретные преобразования, не сводящиеся к преобразованиям Лоренца, относительно которых она инвариантна.

1. P -инвариантность относительно инверсии пространственных координат, т. е. замены $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$.
2. T -инвариантность относительно инверсии времени, т. е. замены $t' = -t$.
3. C -инвариантность относительно операции зарядового сопряжения, т. е. замены всех частиц на античастицы.

Итак, начнем с пространственной инверсии.

3.1.1 P -четность

При отражении координат P импульс электрона p_μ меняется следующим образом:

$$(p_0, \mathbf{p}) \xrightarrow{P} (p'_0, \mathbf{p}') = (p_0, -\mathbf{p}),$$

поскольку \mathbf{p} — вектор в трехмерном пространстве. Нулевая компонента p_0 при преобразованиях координат не изменится, т. к. энергия p_0 зависит от v^2 .

Кроме импульса, электрон еще характеризуется спином ζ_μ ; $p_\mu \zeta_\mu = 0$, $\zeta^2 = -1$. Как будет преобразовываться спин электрона при P -инверсии? В системе покоя ζ_μ имеет вид:

$$\zeta_\mu = (0, \boldsymbol{\zeta}),$$

т. е. чисто пространственный вектор. В движущейся системе

$$\begin{aligned}\zeta'_0 &= \frac{\mathbf{p}\zeta}{m}, \\ \zeta' &= \zeta + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\zeta)}{m(p_0 + m)}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Исходя из аналогии ζ с классическим моментом $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, можно сказать, что при P -преобразовании ζ знака не меняет (псевдовектор). Из (3.1) видно, что ζ_0 изменит знак в силу изменения знака скорости, т. е.

$$\zeta_\mu = (\zeta_0, \zeta) \xrightarrow{P} \zeta'_\mu = (-\zeta_0, \zeta).$$

Сравним амплитуды одного и того же процесса до и после пространственной инверсии. Рассмотрим для примера диаграмму:

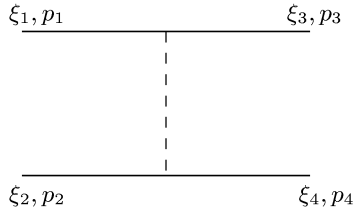


Рис. 16

При инверсии координат она перейдет в

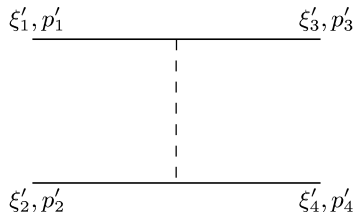


Рис. 17

Симметрия относительно $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ означает равенство амплитуд этих процессов. Выясним, так ли это?

В диаграмме (рис. 16) имеется множитель (от верхней линии)

$$\bar{u}(p_3, \zeta_3) \gamma_\mu u(p_1, \zeta_1),$$

соответственно, в (рис. 17)

$$\bar{u}(p'_3, \zeta'_3) \gamma_\mu u(p'_1, \zeta'_1).$$

Выясним, чем они отличаются. Спиноры $u(p, \zeta)$ однозначно определяются уравнениями

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)u(p, \zeta) &= 0, \\ (\gamma_5 \hat{\zeta} - 1)u(p, \zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а для $u(p', \zeta')$ имеем:

$$\begin{aligned} (\hat{p}' - m)u(p', \zeta') &= 0, \\ (\gamma_5 \hat{\zeta}' - 1)u(p', \zeta') &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первые уравнения (3.2) и (3.3) отличаются знаком перед \mathbf{p} :
в (3.2)

$$p_0 \gamma_0 - \mathbf{P}\boldsymbol{\gamma},$$

в (3.3)

$$p_0 \gamma_0 + \mathbf{P}\boldsymbol{\gamma}.$$

Умножая (3.3) слева на γ_0 , пользуясь тем, что $\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma} \gamma_0$, получим

$$(\hat{p} - m) \gamma_0 u(p', \zeta') = 0. \quad (3.4)$$

Теперь сравним вторые уравнения (3.2) и (3.3):

в (3.2)

$$\gamma_5 (\zeta_0 \gamma_0 - \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\gamma}),$$

в (3.3)

$$\gamma_5 (-\zeta_0 \gamma_0 - \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\gamma}).$$

При умножении на γ_0 получим уравнение, совпадающее с (3.2),

$$(\gamma_5 (\zeta_0 \gamma_0 - \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\gamma}) - 1) \gamma_0 u(p', \zeta') = 0. \quad (3.5)$$

Из сравнения (3.4), (3.5) с (3.2) видим, что

$$u(p', \zeta') = \eta \gamma_0 u(p, \zeta), \quad |\eta| = 1. \quad (3.6)$$

Аналогично для дираковски сопряженных спиноров можно получить

$$\bar{u}(p', \zeta') = \eta^* \bar{u}(p, \zeta) \gamma_0. \quad (3.7)$$

Таким образом,

$$\bar{u}(p'_3, \zeta'_3) \gamma_\mu u(p'_1, \zeta'_1) = \Gamma'_\mu = \bar{u}(p_3, \zeta_3) \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 u(p_1, \zeta_1), \quad (3.8)$$

т. е.

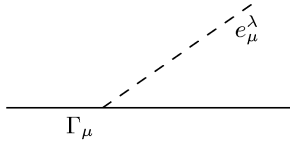
$$\Gamma'_0 = \Gamma_0, \quad \Gamma'_i = -\Gamma_i. \quad (3.9)$$

Итак, вершина при пространственной инверсии меняется, но поскольку в нашем случае две вершины, то амплитуда остается неизменной. Это относится ко всем процессам с фотонами в промежуточном состоянии.

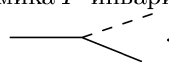
Если же мы рассматриваем процессы с испусканием или поглощением реальных фотонов, то вершина всегда умножается на вектор поляризации e_μ^λ фотона и тогда

$$\Gamma'_\mu e'^\lambda_\mu = \Gamma_\mu e^\lambda_\mu,$$

поскольку e^λ_μ — пространственноподобный вектор и его пространственные компоненты меняют знак:



$$e'^\lambda_\mu = (e^\lambda_0, -\mathbf{e}^\lambda).$$

Таким образом, из приведенных рассуждений вытекает, что и вся электродинамика P -инвариантна, поскольку она строится из взаимодействия в виде .

Допустим, что взаимодействие у нас имело бы вид не $\bar{u} \gamma_\mu u$, а

$$\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u. \quad (3.10)$$

Тогда, аналогично (3.8), мы бы получили

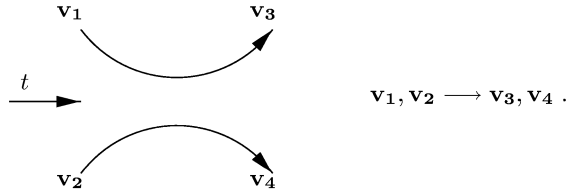
$$\gamma_0 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 (1 + \gamma_5), \quad (3.11)$$

т. е. такое взаимодействие не сохраняет P -четность, и сразу выясняется, в какой системе — правой или левой — мы работаем.

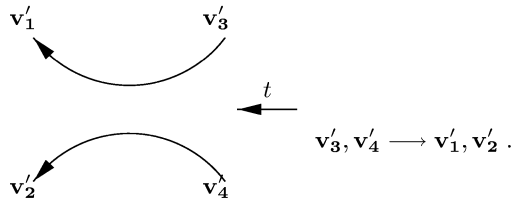
В сущности же, такое взаимодействие означало бы, что и сам объект, им описываемый, несимметричен относительно отражения. Слабое взаимодействие, не сохраняющее P -четность, имеет как раз вид (3.10).

3.1.2 T -инвариантность

Процесс рассеяния в классической механике



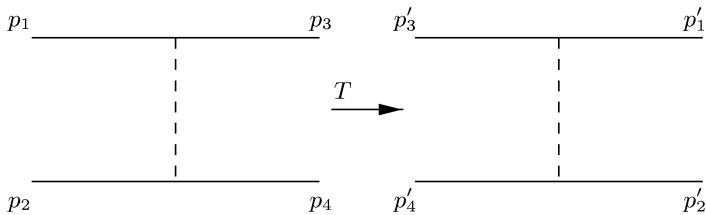
при инверсии времени $t' = -t$ переходит в



причем $\mathbf{v}'_1 = -\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}'_2 = -\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}'_3 = -\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}'_4 = -\mathbf{v}_4$ (скорость частиц меняет знак при обращении времени).

Одинаковы ли эти процессы?

Снова начнем с рассеяния электронов.



Очевидно, при обращении времени $p' = (p_0, -\mathbf{p})$. А что произойдет со спином? Снова исходим из классической аналогии с $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Поскольку импульс меняет знак, следовательно, и момент тоже, т. е.

$$\zeta' = (\zeta_0, -\zeta).$$

Снова рассмотрим одну из вершин в каждой диаграмме:

$$\bar{u}(p'_1, \zeta'_1) \gamma_\mu u(p'_3, \zeta'_3), \quad (3.12)$$

$$\bar{u}(p_3, \zeta_3) \gamma_\mu u(p_1, \zeta_1). \quad (3.13)$$

Вершины (3.12), (3.13) отличаются не только импульсами, но и порядком следования спиноров. Перепишем (3.12) в виде

$$\bar{u}(p'_1, \zeta'_1) \gamma_\mu u(p'_3, \zeta'_3) = u^\top(p'_3, \zeta'_3) \gamma_\mu^\top \bar{u}^\top(p'_1, \zeta'_1). \quad (3.14)$$

Видим, что устанавливая связь нужно между

$$u^\top(p'_3, \zeta'_3) \text{ и } \bar{u}(p_3, \zeta_3), \quad \bar{u}(p_1, \zeta_1) \text{ и } \bar{u}^\top(p'_1, \zeta'_1),$$

т. е. в эту связь должно войти комплексное сопряжение. Выпишем уравнения для транспонированных спиноров. Из уравнений

$$(\hat{p}' - m)u(p', \zeta') = 0,$$

$$(\gamma_5 \hat{\zeta}' - 1)u(p', \zeta') = 0$$

следует

$$\begin{aligned} u^\top(p', \zeta')(\hat{p}'^\top - m) &= 0, \\ u^\top(p', \zeta')(\hat{\zeta}'^\top \gamma_5^\top - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для дираковски сопряженных спиноров имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, \zeta)(\hat{p} - m) &= 0, \\ \bar{u}(p, \zeta)(\gamma_5 \hat{\zeta} - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Первые уравнения (3.16) и (3.15), соответственно, содержат

$$\begin{aligned} p_0 \gamma_0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}, \\ p_0 \gamma_0^\top + \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}^\top. \end{aligned}$$

Поскольку $\gamma_0 = \gamma_0^\top$, $\gamma_1^\top = -\gamma_1$, $\gamma_3^\top = -\gamma_3$ и $\gamma_2 = \gamma_2^\top$, то нужно изменить знак перед γ_2 в (3.15). Это можно сделать, умножив данное уравнение

справа на $i\gamma_0\gamma_1\gamma_3$ (i введено, чтобы $(i\gamma_0\gamma_1\gamma_3)^2 = 1$, поскольку двукратное отражение времени ничего не должно изменить). Действительно,

$$\begin{aligned} & (p_0\gamma_0 - p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3)\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = \\ & = \gamma_0(p_0\gamma_0 + p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 + p_3\gamma_3)\gamma_1\gamma_3 = \\ & = \gamma_0\gamma_1(-p_0\gamma_0 + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3)\gamma_3 = \\ & = \gamma_0\gamma_1\gamma_3(p_0\gamma_0 - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3). \end{aligned}$$

Аналогично и для спиновых уравнений, так что спинор $u^\top i\gamma_0\gamma_1\gamma_3$ удовлетворяет уравнениям (3.16), т. е.

$$u^\top(p', \zeta') i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = \bar{u}(p, \zeta) \quad (3.17)$$

и

$$u^\top(p', \zeta') = \bar{u}(p, \zeta)\gamma_3\gamma_1\gamma_0(-i); \quad (3.18)$$

соответственно,

$$\bar{u}^\top(p', \zeta') = i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 u(p, \zeta) = -i\gamma_3\gamma_1\gamma_0 u(p, \zeta). \quad (3.19)$$

Тогда, подставляя (3.18), (3.19) в (3.14), получим

$$\Gamma'_\mu(p', \zeta') = \bar{u}(p, \zeta)\gamma_3\gamma_1\gamma_0\gamma_\mu^\top\gamma_0\gamma_1\gamma_3 u(p, \zeta). \quad (3.20)$$

Отсюда видим, что

$$\Gamma'_0 = \Gamma_0, \quad \Gamma'_i = -\Gamma_i. \quad (3.21)$$

Мы видим, что отражение времени меняет вершину так же как и пространственное отражение. Опять диаграммы с виртуальными фотонами не меняются, поскольку содержат четное число вершин. В диаграммах с реальными фотонами имеем

$$\Gamma'_\mu e'^\lambda_\mu = \Gamma_\mu e^\lambda_\mu, \quad (3.22)$$

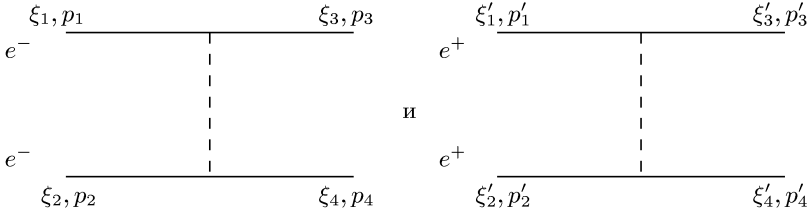
поскольку \mathbf{e} меняет знак при отражении времени,

Следовательно, электродинамика T -инвариантна.

3.1.3 C -инвариантность

Инвариантна ли электродинамика относительно зарядового сопряжения, т. е. замены частиц на античастицы? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сравнить наш процесс рассеяния с таким же для античастиц с теми же импульсами, но противоположными поляризациями,

поскольку мы в свое время выяснили, что переходу от частицы к античастице соответствует замена $\zeta' = -\zeta$. Итак,



(где $p'_i = p_i$ $\zeta'_i = -\zeta_i$). Вершина рассеяния позитронов имеет вид:

$$\bar{v}(p_1)\gamma_\mu v(p_3). \quad (3.23)$$

Имеем

$$\begin{aligned} v^\top(p_3) &= \bar{u}(p_3)C^{-1}, \\ \bar{v}^\top(p_1) &= Cu(p_1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Gamma'_\mu &= \bar{v}(p_1)\gamma_\mu v(p_3) = v^\top(p_3)\gamma_\mu^\top \bar{v}^\top(p_1) = \\ &= \bar{u}(p_3)C^{-1}\gamma_\mu^\top Cu(p_1) = -\Gamma_\mu, \end{aligned}$$

поскольку

$$C^{-1}\gamma_\mu^\top C = -\gamma_\mu.$$

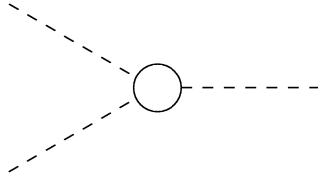
В итоге

$$\Gamma'_\mu e'_\mu = -\Gamma_\mu e'_\mu.$$

Следовательно, чтобы все было C -инвариантно, нужно положить

$$e'_\mu = -e_\mu, \quad (3.25)$$

т. е. волновая функция фотона при зарядовом сопряжении должна менять знак. Это можно сделать, поскольку при зарядовом сопряжении волновая функция нейтральной частицы переходит в себя, вообще говоря, с точностью до фазы. Условие C -инвариантности и (3.25) накладывает серьезные ограничения на возможные процессы. Например, два фотона не могут превратиться в один. Такой процесс запрещен, поскольку вначале (слева) два фотона, при зарядовом сопряжении знак не должен меняться, а справа он изменяется.



Итак, мы получили законы преобразования волновых функций при преобразованиях C, P, T :

$$P: \quad u(p', \zeta') = \gamma_0 u(p, \zeta), \quad (3.26)$$

$$T: \quad u^\top(p', \zeta') = -i\bar{u}(p, \zeta)\gamma_3\gamma_1\gamma_0, \quad (3.27)$$

$$C: \quad v^\top(p', \zeta') = -\bar{u}(p, \zeta)i\gamma_2\gamma_0. \quad (3.28)$$

Квантовая электродинамика инвариантна относительно всех этих преобразований по отдельности.

Выше мы рассмотрели пример взаимодействия, которое нарушает P -четность. Посмотрим, как оно себя ведет при обращении времени:

$$\begin{aligned} \gamma_0\gamma_1\gamma_3[\gamma_\mu(1 - \gamma_5)]^\top\gamma_0\gamma_1\gamma_3 &= \gamma_0\gamma_1\gamma_3(1 - \gamma_5)^\top\gamma_\mu^\top\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = \\ &= \gamma_0\gamma_1\gamma_3\gamma_\mu^\top(1 + \gamma_5)\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_3\gamma_\mu^\top\gamma_0\gamma_1\gamma_3(1 - \gamma_5), \end{aligned}$$

поскольку $\gamma_5^\top = \gamma_5$ и антикоммутирует со всеми γ_μ , т. е. слабое взаимодействие T -четность сохраняет. Если же мы рассмотрим взаимодействие вида

$$\bar{u}(1 + i\gamma_5)u,$$

то в этом случае

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_3(1 + i\gamma_5)^\top\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = (1 - i\gamma_5),$$

т. е. такое взаимодействие нарушает T -четность.

Вернемся к слабому взаимодействию. При зарядовом сопряжении вершина преобразуется так:

$$\begin{aligned} C^{-1}[\gamma_\mu(1 - \gamma_5)]^\top C &= C^{-1}(\gamma_\mu^\top + \gamma_\mu^\top\gamma_5)C = \\ &= -\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_\mu(1 + \gamma_5), \end{aligned}$$

т. е. слабые взаимодействия также не инвариантны по отношению к зарядовому сопряжению.

Рассмотрим теперь комбинацию CP (так называемая комбинированная инверсия). Взаимодействие $\gamma_\mu(1 - \gamma_5)$ является CP -инвариантным, поскольку оба преобразования приводят к изменению знака перед γ_5 . А это означает, что хотя слабое взаимодействие нарушает P -четность, тем не менее мы не можем отличить правое от левого: мы просто не знаем, с чем имеем дело — с частицей или античастицей. Нам лишь известно, что если то, что мы назвали частицей, обладает правым винтом, то античастица будет левовинтовой.

3.1.4 CPT-теорема

Что произойдет, если мы последовательно проведем все три преобразования? Импульс преобразуется при этом следующим образом:

$$p = (p_0, \mathbf{p}) \xrightarrow{P} (p_0, -\mathbf{p}) \xrightarrow{T} (p_0, \mathbf{p}) \xrightarrow{C} (p_0, \mathbf{p}), \quad (3.29)$$

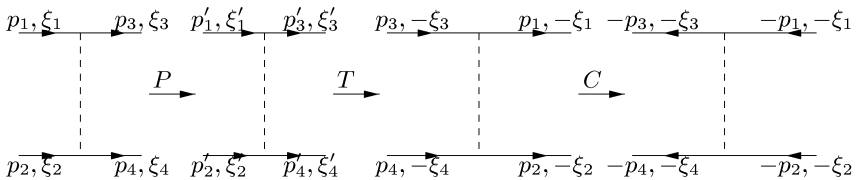
а спин преобразуется так:

$$\zeta = (\zeta_0, \boldsymbol{\zeta}) \xrightarrow{P} (-\zeta_0, \boldsymbol{\zeta}) \xrightarrow{T} (-\zeta_0, -\boldsymbol{\zeta}) \xrightarrow{C} (\zeta_0, \boldsymbol{\zeta}). \quad (3.30)$$

Для спиноров имеем

$$\begin{aligned} u(p, \zeta) &\xrightarrow{P} u(p', \zeta') = \gamma_0 u(p, \zeta) \xrightarrow{T} \bar{u}^\top(p'' \zeta'') = \\ &= i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 u(p', \zeta') = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_0 u(p, \zeta) \xrightarrow{C} v(p'', \zeta'') = \\ &= -C^\top \bar{u}^\top(p'', \zeta'') = -i\gamma_0 \gamma_2 \cdot i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_0 u(p, \zeta) = \\ &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 u(p, \zeta) = i\gamma_5 u(p, \zeta). \end{aligned} \quad (3.31)$$

На диаграммах эти преобразования будут выглядеть так:



То есть преобразование CPT привело к тому, что по сравнению с исходной диаграммой все импульсы и поляризации поменяли знаки. Инвариантность по отношению к CPT означает, что амплитуда процесса

$$p_1, \zeta_1; p_2, \zeta_2 \longrightarrow p_3, \zeta_3; p_4, \zeta_4$$

для частиц совпадает с амплитудой процесса

$$p_3, \zeta_3; p_4, \zeta_4 \longrightarrow p_1, \zeta_1; p_2, \zeta_2$$

для античастиц.

Квантовая электродинамика, очевидно, инвариантна относительно CPT , поскольку есть инвариантность относительно каждого из этих преобразований в отдельности. Можно убедиться в этом и непосредственно, пользуясь полученным преобразованием спиноров.

$$\Gamma'_\mu = \bar{v}(p_1)\gamma_\mu v(p_3) = \bar{u}(p_1)\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 u(p_3) = -\bar{u}(p_1)\gamma_\mu u(p_3),$$

но с другой стороны,

$$e_\mu = (e_0, \mathbf{e}) \xrightarrow{P} (e_0, -\mathbf{e}) \xrightarrow{T} (e_0, \mathbf{e}) \xrightarrow{C} -e_\mu,$$

т. е.

$$\Gamma'_\mu e'_\mu = \Gamma_\mu e_\mu.$$

А можем ли мы придумать такое взаимодействие, которое бы нарушало CPT -четность, но в то же время являлось бы релятивистски-инвариантным? Очевидно нет, так как замену знаков у 4-импульсов и поляризаций можно получить комплексным преобразованием Лоренца, т. е. преобразование CPT является, при наличии аналитичности, элементом группы Лоренца.

Таким образом, CPT является фундаментальным следствием нашей теории (следствием релятивистской инвариантности и причинности). Нарушение же P , T , CP , PT и т. д. ничему не противоречит и обусловлено свойствами взаимодействующих частиц. На самом деле, ни одна из этих симметрий не выполняется строго. Смысл CPT -теоремы состоит в следующем. Частица может обладать винтом, часами, зарядом. Если мы припишем частице определенный винт, направление времени и заряд, то античастица будет обладать противоположными и винтом, и направлением времени, и зарядом, а в каком мире мы живем, мы определить не можем.

Приведем в заключение некоторое полезное соотношение, которое справедливо в случае PT -инвариантности. При преобразовании PT импульсы

$$(p_0, \mathbf{p}) \xrightarrow{PT} (p_0, \mathbf{p}),$$

а спины изменяют знак:

$$(\zeta_0, \zeta) \xrightarrow{PT} (-\zeta_0, -\zeta).$$

Сохранение PT означает равенство амплитуд:

$$\begin{aligned} A(p_1, \zeta_1, p_2, \zeta_2; p_3, \zeta_3, p_4, \zeta_4) = \\ = A(p_3, -\zeta_3, p_4, -\zeta_4; p_1, -\zeta_1, p_2, -\zeta_2). \end{aligned} \quad (3.32)$$

На языке S -матрицы это означает:

$$S_{ab} = S_{\bar{b}\bar{a}} \quad (3.33)$$

(волной мы отметили то, что спины перевернуты). Однако если мы от набора

$$\begin{aligned} p_1, p_2, \dots, p_n, \\ \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \end{aligned}$$

перейдем к другим переменным, также полностью характеризующим систему, в которой спины объединены в полный момент, т. е.

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots, J, M,$$

то от M ничего не будет зависеть, поскольку это проекция полного момента на произвольную ось, и в этом случае

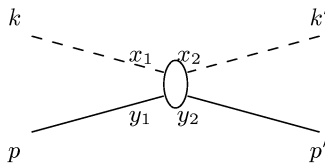
$$S_{ab} = S_{ba}. \quad (3.34)$$

3.2 Причинность и унитарность

Считается (гипотеза), что амплитуды любых реальных процессов должны с необходимостью удовлетворять условиям унитарности и причинности. Рассмотрим подробнее, что эти условия означают и к каким ограничениям на амплитуды они приводят.

3.2.1 Причинность

Пусть имеется некоторый процесс (забудем пока про спины):



С точки зрения причинности нас будут интересовать зависимость амплитуды от точек x_1, x_2 , поэтому запишем ее в виде

$$F = \int e^{ik'x_2 - ikx_1} f_{pp'}(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2, \quad (3.35)$$

где

$$f_{pp'}(x_1, x_2) = \int e^{ip'y_2 - ipy_1} f(x_1, x_2; y_1, y_2) d^4y_1 d^4y_2. \quad (3.36)$$

В силу трансляционной инвариантности (однородность пространства-времени), амплитуда $f(x_1, x_2; y_1, y_2)$ зависит только от разностей координат. Замена

$$\begin{aligned} x_i &= x'_i + a, \\ y_i &= y'_i + a \end{aligned} \quad (3.37)$$

приведет лишь к изменению показателей экспонент в (3.36), при этом функция $f_{pp'}(x_1, x_2)$ преобразуется следующим образом:

$$f_{pp'}(x_1, x_2) = e^{i(p'-p)a} f_{pp'}(x'_1, x'_2). \quad (3.38)$$

Поэтому функцию $f_{pp'}$ можно представить в виде

$$f_{pp'}(x_1, x_2) = e^{i(p'-p)(x_1+x_2)\frac{1}{2}} \tilde{f}_{pp'}(x_1 - x_2). \quad (3.39)$$

Действительно, при трансляции (3.37) функция (3.39) будет преобразовываться по закону (3.38), поскольку

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= x'_1 - x'_2, \\ x_1 + x_2 &= x'_1 + x'_2 + 2a. \end{aligned}$$

Тогда, перейдя в (3.35) к переменным $x_2 - x_1 = x_{12}$ и $x_1 + x_2$ для амплитуды F , получим

$$\begin{aligned} F &= \int e^{i(k'-k)(x_1+x_2)\frac{1}{2} + i(k'+k)x_{12}\frac{1}{2}} \times \\ &\times e^{i(p'-p)(x_1+x_2)\frac{1}{2}} \tilde{f}_{pp'}(x_1 - x_2) d^4(x_1 + x_2) d^4x_{12}. \end{aligned}$$

Интегрируя по $d^4(x_1 + x_2)$, получим

$$\begin{aligned} F &= (2\pi)^4 \delta(p + k - p' - k') \times \\ &\times \int e^{i\frac{(k+k')}{2}(x_2-x_1)} (x_2 - x_1) \tilde{f}_{pp'}(x_{12}) d^4x_{12} = \\ &= (2\pi)^4 \delta(p + k - p' - k') f(k, k'; p, p'). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Как всегда, следствием трансляционной инвариантности является сохранение энергии-импульса. Итак, появление δ -функции в амплитуде — факт общий, который выражает однородность пространства-времени.

Что означает причинность на языке амплитуды (3.40)? Причинность означает, что область интегрирования $x_{20} < x_{10}$ и $x_{12}^2 < 0$ не должна давать вклада в амплитуду. Физический смысл этого утверждения следующий: если мы рассеиваем пучок частиц на некоторой мишени, то рассеянные частицы не должны вылетать из мишени ранее, чем прилетели падающие. Следовательно, $\tilde{f}_{pp'}(x_{12})$ должна иметь вид:

$$\tilde{f}_{pp'}(x_{12}) = \theta((x_{12})_0)\theta(x_{12}^2)\varphi(x_{12}) + \varphi'(x_{12}), \quad (3.41)$$

причем член $\varphi'(x_{12})$ при интегрировании должен давать нулевой вклад в амплитуду.

В выражении (3.40) k, k', p, p' у нас не любые. Поскольку частицы реальны, эти величины удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} k_0 &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}, & k'_0 &= \sqrt{\mathbf{k}'^2 + \lambda^2}, \\ p_0 &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, & p'_0 &= \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2} \end{aligned}$$

и, кроме того, связаны законами сохранения:

$$k - k' = p' - p.$$

Давайте предположим, что $\tilde{f}_{pp'}(x_{12})$ имеет именно структуру (3.41), т. е. причинность выполняется (в противном случае теория потеряла бы всякий смысл). Пусть $p = p', k = k'$ (рассеяние вперед) и направим ось z по вектору \mathbf{k} . Тогда из (3.40) следует, что

$$\begin{aligned} f(k, k; p, p) &\equiv f(k, p) = \int d^4x e^{ik_0x_0 - ik_z z} \tilde{f}_p(x) = \\ &= \int d^4x e^{ik_0(x_0 - z)} \tilde{f}_p(x) = f(k_0). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Поскольку наша функция имеет вид (3.41), то вклад в интеграл дает область

$$x_0 > 0, \quad x_0^2 - z^2 > 0,$$

откуда следует, что

$$x_0 - z > 0.$$

Из последнего неравенства и (3.42), в свою очередь, следует, что если интеграл (3.42) сходится на вещественной оси k_0 (т. е. если $f(k_0)$ имеет смысл), то в верхней полуплоскости он сходится еще лучше. Иначе говоря, при выполнении условия причинности амплитуда аналитична в верхней полуплоскости. Справедливо и обратное: если амплитуда аналитична, то она может быть записана в форме (3.42). Если же $f(k_0)$ имеет в верхней полуплоскости особенность, то она не может быть причинной.

Следуют ли из причинности какие-либо выводы о поведении амплитуды $f(k_0)$ с ростом k_0 ? Если k_0 велико, то при интегрировании в (3.42) область $x_0 - z \simeq 0$ дает максимальный вклад в интеграл. Если $\tilde{f}(x^2)$ имеет в нуле сингулярность, то $f(k_0)$ может расти с k_0 . Например, если

$$\tilde{f}(x^2) \sim \delta(x_0 - z),$$

то

$$f(k_0) \rightarrow \text{const},$$

но при

$$\tilde{f}(x^2) \sim \delta'(x_0 - z)$$

имеем уже

$$f(k_0) \rightarrow k_0,$$

т. е. если $\tilde{f}(x^2)$ имеет структуру

$$\tilde{f}(x^2) = \sum_n C_n \delta^{(n)}(x_0 - z), \quad (3.43)$$

то

$$f(k_0) = \sum_n C_n k_0^n. \quad (3.44)$$

В принципе, если (3.43) содержит бесконечное число производных δ -функций (т. е. $f(k_0)$ растет быстрее любой степени k_0), мы не гарантированы от того, что не нарушили причинность. Действительно, явно антипричинная функция

$$\theta(-x_0 + z) = \sum_n C_n \delta^{(n)}(x_0 - z)$$

как раз и содержит бесконечное число таких производных.

Таким образом, если потребуем, чтобы

$$f(k_0) < k_0^N \quad \text{при} \quad k_0 \rightarrow \infty, \quad (3.45)$$

что соответствует конечному набору $\delta^{(n)}$ -функций в (3.43), то условие причинности заведомо не нарушится. Функции $f(k_0)$, аналитичные в верхней полуплоскости и растущие не быстрее некоторой степени k_0 , мы будем называть причинными.

Хотя мы не доказали формально, что причинность требует, чтобы амплитуда обладала этими свойствами, эта гипотеза, однако, довольно хорошо аргументирована. Действительно, как мы проверяем причинность на опыте? Пусть мы имеем пакет, описывающий налетающие частицы (фотоны в нашем случае):

$$\Psi(x) = \int e^{-ik_0(x_0-z)} C(k_0) dk_0. \quad (3.46)$$

Рассеянные вперед фотоны опишутся так:

$$\Psi'(x) = \int e^{-ik_0(x_0-z)} f(k_0) C(k_0) dk_0. \quad (3.47)$$

Причинность для налетающих частиц здесь означает, что $C(k_0)$ должна быть такой, чтобы

$$\Psi(x) = 0 \quad \text{если} \quad z - x_0 > a, \quad (3.48)$$

т. е. если источник фотонов помещен в a , то до того, как они были испущены, их не было. Этого можно добиться выбором особенностей $C(k_0)$. Именно, если $C(k_0)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости и на большом круге ведет себя как $e^{-ik_0 a}$, то при $z - x_0 > a$ в (3.46) можно замкнуть контур в верхней полуплоскости и показать, что $\Psi(x) = 0$. После рассеяния $\Psi'(x)$ также должно равняться нулю при $z - x_0 > a$, но если $f(k_0) \sim e^{-ik_0 c}$, ($c > 0$) на большом круге, то $\Psi'(x)$ будет равно нулю только при $z - x_0 > a + c$, но не при $z - x_0 > a$.

Давайте теперь посмотрим, аналитичны ли наши борновские амплитуды? Им соответствуют диаграммы:

$$= \frac{e^2}{m^2 - s} + \frac{e^2}{m^2 - u}.$$

В системе покоя электрона имеем

$$s = (p + k)^2 = m^2 + \lambda^2 + 2mk_0,$$

(λ — малая масса фотона),

$$u = (p - k')^2 = m^2 + \lambda^2 - 2mk'_0 = m^2 + \lambda^2 - 2mk_0$$

($k_0 = k'_0$ при рассеянии вперед). Полоса амплитуды лежат в точках, определяемых равенствами:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 + 2mk_0 &= 0, \\ \lambda^2 + 2mk_0 &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$k_0 = \pm \frac{\lambda^2}{2m}.$$

Однако амплитуда определена в области $k_0 \geq \lambda$ (жирная линия на рис. 18), а полюса в точках $|k_0| < \lambda$, т. е. не там, где определена амплитуда. Таким образом, борновская амплитуда имеет правильные аналитические свойства (не имеет полюсов в верхней полуплоскости и убывает при $|k_0| \rightarrow \infty$) и следовательно удовлетворяет причинности.

Как же это получилось? Ведь $G(x_2 - x_1)$, входящая в амплитуду, отнюдь не равна нулю при $x_{20} - x_{10} < 0$. Первая диаграмма дает:

$$= F =$$

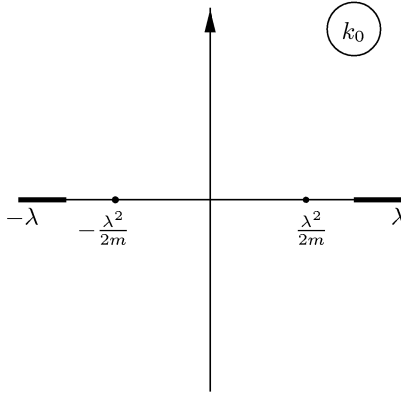


Рис. 18

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(k'+p')x_2 - i(k+p)x_1} G(x_2 - x_1) = \\
 &= (2\pi)^4 \delta(p + k - p' - k') \int d^4x_{12} e^{i(k+p)x_{12}} G(x_{12}), \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

$$G(x_{12}) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i} e^{-iqx_{12}} \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon}, \quad (3.50)$$

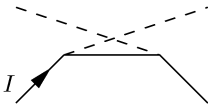
т. е.

$$F \sim \int d^4q \delta(p + k - q) \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} = \frac{1}{m^2 - (p + k)^2 - i\varepsilon},$$

а так как $q_0 = p_0 + k_0 > 0$, то левый полюс $q_0 = -\sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2}$ у функции $1/(m^2 - q^2)$ заведомо не работает. Поэтому его можно считать расположенным не в верхней, а в нижней полуплоскости. Но, как мы знаем, такое расположение полюсов отвечает *запаздывающей* функции Грина, которая пропорциональна $G_R(x_{21}) \sim \theta(x_{20} - x_{10})$. Значит область $x_{20} < x_{10}$ действительно не дает вклада в интеграл.

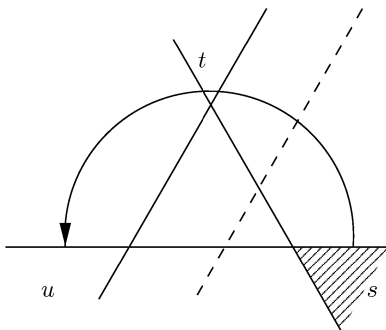
Во второй диаграмме знак ε (положение полюса) несуществен, поскольку знаменатель может обратиться в нуль, если только частица I

нестабильна, т. е. может самопроизвольно распаться на две.



Поэтому при вычислении амплитуды для стабильной частицы функцию Грина в этой диаграмме также можно заменить на запаздывающую. Однако просто заменить всюду фейнмановские функции на запаздывающие нельзя, поскольку мы получили бы неправильный результат для амплитуд рассеяния, в частности, если бы мы рассмотрели ту же амплитуду в других каналах.

Рассмотрим соотношение между разными каналами на мандельштамовской плоскости с точки зрения причинности и аналитичности.



$$s + t + u = 2m^2 + 2\lambda^2,$$

$$s = (m + \lambda)^2$$

— начало физической области.

Пользуясь аналитичностью амплитуды, мы в свое время продолжали ее в t - и u -каналы. Продолжение, указанное стрелкой на мандельштамовской плоскости, аналогично следующему продолжению в плоскости k_0 (см. рис. 19). Иначе говоря, в отличие от нерелятивистской квантовой механики, область отрицательных k_0 тоже имеет смысл.

В этом как раз и состоит одна из основных особенностей релятивистской теории: аналитичность амплитуды (т. е. причинность) обеспечивает возможность ее продолжения в мандельштамовской плоскости из канала в канал или в плоскости k_0 . Как мы покажем ниже из условия унитарности, должна быть комплексна в физических областях разных

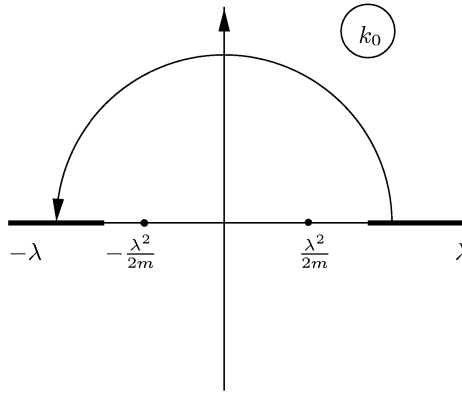


Рис. 19

каналов, отмеченных жирными линиями на рисунке. Мы увидим далее, что амплитуда имеет точку ветвления в точках, которые отвечают началу физических областей $k_0 = \pm\lambda$, и жирные линии отвечают разрезам амплитуды в комплексной плоскости. Физическая амплитуда в s -канале есть предельное значение на верхнем берегу правого разреза (рис. 20).

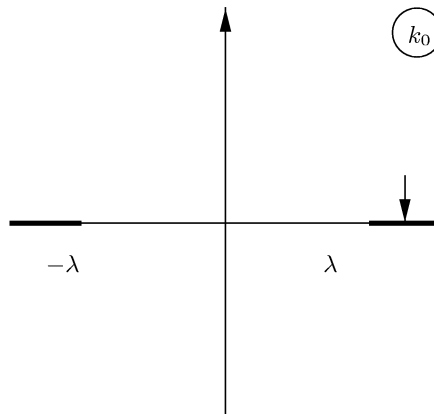


Рис. 20

Поскольку в верхней полуплоскости амплитуда аналитична, ее можно продолжить, как указано на рис. 19 (т. е. в u -канал). Получим ли мы при этом амплитуду нового процесса? Казалось бы, для этого достаточно заменить k_0 на $-k_0$. Однако, повторяя выкладку (3.42) в u -канале, получим

$$f_u = \int d^4x e^{ik'_0(x_0-z)} \tilde{f}(x), \quad x_0 - z < 0,$$

т. е.

$$f_s(-k'_0) = f_u^*(k'_0).$$

Следовательно, в u -канале нужно к вещественной оси подходить снизу. Это естественно, поскольку амплитуды отличаются знаком k_0 , то

$$k_0 + i\varepsilon \rightarrow -k_0 - i\varepsilon.$$

Этот переход изображен на рисунке:



Таким образом, физическая амплитуда в u -канале также есть предельное значение на вещественной оси некоторой аналитической функции. Поскольку в части комплексной плоскости (в области между разрезами) эта функция есть аналитическое продолжение s -канальной амплитуды, то данная функция — та же самая, чье предельное значение на правом разрезе есть s -канальная амплитуда.

Рассмотрев требования причинности в u -канале, можно показать, что амплитуду можно продолжать в нижнюю полуплоскость k_0 . Иначе говоря, амплитуда должна быть аналитичной и в верхней, и в нижней полуплоскостях (но с учетом разреза на вещественной оси). Верхняя и нижняя полуплоскости k_0 есть, по существу, плоскости s -канальной и u -канальной амплитуд. Переход с одной из них в другую эквивалентен аналитическому продолжению амплитуды из одного канала в другой.

3.2.2 Унитарность

Мы ввели S -матрицу, матричные элементы которой S_{ba} определяют амплитуды переходов из состояния $|a\rangle_{t=-\infty}$ в состояние $|b\rangle_{t=+\infty}$, т. е. если

в $t = -\infty$ система находилась в состоянии

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

то в $t = +\infty$

$$\Psi' = S\Psi.$$

Волновые функции начального и конечного состояния имеют вид:

$$\Psi = \sum_a \Psi_a |a\rangle, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \Psi' &= \sum_b \Psi'_b |b\rangle = \sum_a \Psi_a S|a\rangle = \sum_{ab} \Psi_a \langle b|S|a\rangle |b\rangle, \\ \Psi'_b &= \sum_a \langle b|S|a\rangle \Psi_a = \sum_a S_{ba} \Psi_a. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Отсюда вытекает приведенный выше смысл S_{ba} как амплитуды перехода. Сохранение вероятности означает, что

$$\sum_a |\Psi_a|^2 = \sum_b |\Psi'_b|^2. \quad (3.53)$$

Принцип суперпозиции требует выполнения (3.53) для любых начальных состояний. Это приводит к тому, что S -матрица должна быть унитарной, т. е.

$$SS^+ = 1, \quad (3.54)$$

или в матричном виде

$$\sum_b S_{ab} S_{bc}^+ = \delta_{ac}. \quad (3.55)$$

Диагональная часть условия (3.55)

$$\sum_b S_{ab} S_{ba}^+ = \sum_b |S_{ab}|^2 = 1$$

означает сохранение вероятности, а недиагональная

$$\sum_b S_{ab} S_{bc}^+ = 0, \quad c \neq a$$

— ортогональность состояний.

Представим S -матрицу в виде

$$S = 1 + iT. \quad (3.56)$$

Тогда из условия унитарности (3.54) следует

$$1 + iT - iT^+ + TT^+ = 1,$$

т. е.

$$-i[T - T^+] = TT^+. \quad (3.57)$$

Обычно условием унитарности называется именно (3.57). В матричном виде (3.57) запишется

$$-i[T_{ba} - T_{ba}^+] = \sum T_{bc}T_{ca}^+,$$

или, так как $T_{ba}^+ = T_{ab}^*$,

$$-i[T_{ba} - T_{ab}^*] = \sum T_{bc}T_{ac}^*. \quad (3.58)$$

Предположим, что теория PT -инвариантна, как, например, квантовая электродинамика, тогда

$$T_{ab} = T_{\bar{b}\bar{a}}$$

($|\bar{b}\rangle$, $|\bar{a}\rangle$) — состояния с противоположными спинами). Но, как мы обсуждали выше, всегда можно выбрать базис так, что в нем

$$T_{ab} = T_{ba}.$$

При этом (3.58) примет вид:

$$-i[T_{ab} - T_{ab}^*] = \sum_c T_{bc}T_{ca}^*,$$

т. е.

$$\text{Im}T_{ab} = \frac{1}{2} \sum_c T_{ac}T_{cb}^*. \quad (3.59)$$

А отсюда следует, что амплитуда не может быть вещественной, т. е. сразу видно, что наши борновские амплитуды, наверняка, неточны, поскольку вещественны. Особенно ясна комплексность амплитуды при рассеянии вперед, т. е. при $a = b$:

$$\text{Im}T_{aa} = \frac{1}{2} \sum_c |T_{ac}|^2. \quad (3.60)$$

Соотношение (3.60) носит название оптической теоремы:

$$T_{aa} \sim A(\theta = 0), \quad \sum |T_{ac}|^2 \sim \sigma_{tot}$$

— мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному сечению рассеяния.

Таким образом, условие унитарности требует, чтобы амплитуды рассеяния в физической области были комплексными.

Вернемся к нашему примеру Комpton-эффекта для фотона (с малой массой λ). Физическая область на мандельштамовской плоскости — это заштрихованная часть (см. рис. 21).

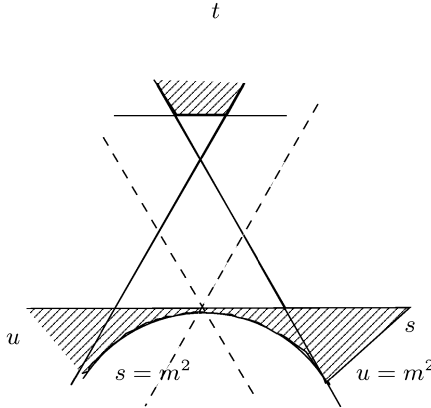


Рис. 21

Полюса амплитуды лежат на пунктирных линиях, отвечающих $s = m^2$, $u = m^2$. На комплексной плоскости k_0 картина будет выглядеть так (рис. 22). Физические области отмечены жирными линиями. Полюса борновской амплитуды отмечены крестиками.

Выясним теперь, имеют ли борновские амплитуды хотя бы какое-нибудь отношение к условию унитарности. Для этой цели распишем его подробнее. У нас было

$$T_{ab} = (2\pi)^4 \delta \left(\sum p_a - \sum p_b \right) F_{ab} \prod_a \frac{1}{\sqrt{2k_{0i}}} \prod_b \frac{1}{\sqrt{2k_{0i}}}. \quad (3.61)$$

Подставляя (3.61) в (3.59), получим

$$\text{Im} F_{ab} = \frac{1}{2} \sum_c F_{ac} F_{cb}^* (2\pi)^4 \delta \left(\sum p_a - \sum p_c \right) \prod_c \frac{1}{2k_{0i}} \quad (3.62)$$

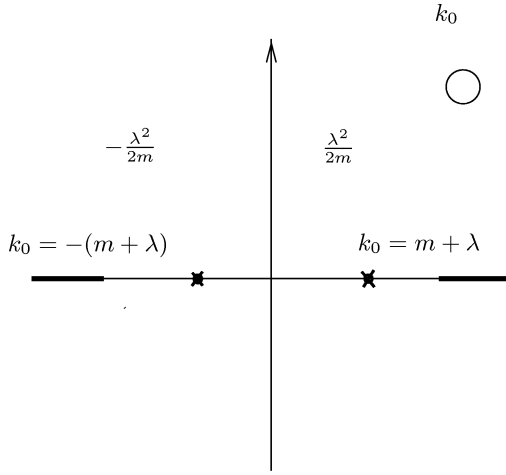


Рис. 22

(помним, что в F выполняются законы сохранения), тогда

$$\begin{aligned}
 \text{Im}F_{ab} &= \\
 &= \frac{1}{2} \sum \int \frac{d^3k_1 \dots d^3k_n}{n!(2\pi)^{3n}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{2k_{0i}} F(a; k_1, \dots, k_n) \times \\
 &\times F^*(k_1, \dots, k_n; b) (2\pi)^4 \delta(\sum k_i - \sum p_b). \tag{3.63}
 \end{aligned}$$

Или, выражая $d^3k/2k_0$ через $d^4k\delta_+(k^2 - m^2)$, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 \text{Im}F_{ab} &= \\
 &= \frac{1}{2n!} \sum \int d^4k_1 \dots d^4k_n \delta_+(k_1^2 - m^2) \dots \delta_+(k_n^2 - m^2) \times \\
 &\times FF^* \frac{(2\pi)^4 \delta(\sum k_i - p_b)}{(2\pi)^{3n}}. \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Множитель $1/n!$ в (3.63), (3.64) учитывает тождественность частиц. В случае рассеяния вперед ($a \simeq b$) из (3.64) видно, что $\text{Im}F_{ab}$ отличается от полного сечения множителем

$$\frac{1}{4E_1E_2j} = \frac{1}{4\sqrt{sp}}$$

(а также общим множителем $1/2$). Учитывая, что

$$j = \frac{p}{E_1} - \frac{p}{E_2} = \frac{p\sqrt{s}}{E_1 E_2},$$

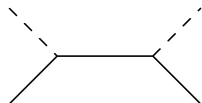
получим

$$\text{Im}F(s, 0) = 2\sqrt{s}p\sigma_t. \tag{3.65}$$

Это и есть оптическая теорема. Выражение (3.64) будем писать в символическом виде:

$$\text{Im}F = \sum_n F_n F_n^*.$$

Рассмотрим теперь борновскую амплитуду



$$\sim \frac{e^2}{m^2 - s - i\varepsilon}.$$

В свое время мы писали соотношение

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x),$$

так что

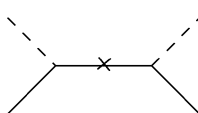
$$\text{Im} \frac{e^2}{m^2 - s - i\varepsilon} = e^2\pi\delta(s - m^2). \tag{3.66}$$

Точное же значение мнимой части дается (3.64), и мы можем ее изобразить графически (аналогично изображению сечений) так:

$$\text{Im}F \sim \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}$$

все, что угодно

В промежуточных состояниях частицы реальные и поэтому, например, одного электрона в промежуточном состоянии быть не может. Однако рассмотрим формально вклад в мнимую часть от одноэлектронного промежуточного состояния, т. е.



$$F_{21} = \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \text{---} \text{---} \\ \diagup \\ p \quad q \\ \text{---} \\ \text{---} \\ F_{21} \end{array}$$

и

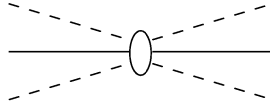
$$\text{Im}F_{22} = \frac{2\pi}{2} \int d^4q |F_{21}|^2 \delta(q^2 - m^2) \delta(p + k - q),$$

т. е.

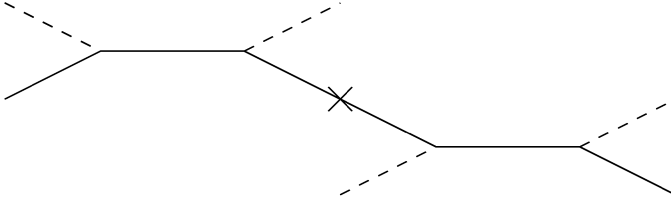
$$\text{Im}F_{22} = \pi |F_{21}|^2 \delta((p + k)^2 - m^2). \quad (3.67)$$

Таким образом, борновское приближение в определенном смысле удовлетворяет условию унитарности, а именно, в том смысле, что его мнимая часть определяется вкладом одноэлектронного промежуточного состояния.

В принципе, одноэлектронное промежуточное состояние может давать вклад в мнимую часть амплитуды совершенно “честным” образом. Рассмотрим, например, процесс перехода трех частиц в три:



В мнимую часть амплитуды такого процесса войдет, в частности,



Электрон, отмеченный крестиком, может быть реальным (это не запрещено в данном случае законами сохранения), и за счет такого промежуточного состояния мы получим вклад в мнимую часть без противоречия с законами сохранения. Но, с другой стороны, из всей суммы для мнимой части (3.66) отвечает только первому ее члену. Посмотрим, плохо это или нет. Усложнение диаграммы на одну вершину приводит к множителю e , и если

$$F = \text{diagram} \sim e^2, \quad \text{то } \text{Im}F = \sum_n F_n F_n^*.$$

Если рассмотреть вклад от промежуточного двухчастичного состояния ($n = 2$), то порядок величины правой части e^4 , для $n = 3$ мы получили

бы e^6 и т. д., а слева — $\text{Im}F \sim e^2$, т. е. такие вклады и не должны появляться. И единственный вклад — это

$$\text{Im}F = F_{21}F_{12}^* \sim e^2.$$

Таким образом, борновские амплитуды позволяют вычислять мнимые части амплитуд более высокого порядка в силу соотношения унитарности. Например, в мнимой части амплитуды

$$\text{Im}F(2\gamma \rightarrow e^+e^-) =$$

$\sim e^4 +$

$+ \sim e^6 .$

Если, допустим, хотим вычислить ее с точностью до e^4 , пренебрегаем членами порядка e^6 и выше, а все амплитуды, входящие в первую диаграмму, нам уже известны. Так можно найти мнимые части амплитуд в высших приближениях во всех областях мандельштамовской плоскости. Однако, чтобы знать всю амплитуду, нужно знать еще и реальную часть, и здесь нам на помощь приходит аналитичность амплитуды, которая позволяет вычислить вещественную часть по мнимой.

По теореме Коши, имеем

$$f(k_0) = \int \frac{dk'_0}{2\pi i} \frac{f(k'_0)}{k'_0 - k_0}, \quad (3.68)$$

контур интегрирования приведен на рис. 23.

С другой стороны, мы можем пренебречь интегралами по большим кругам и представить контур в виде, указанном на рис. 24.

При этом

$$f(k_0) = \int \frac{dk'_0}{2\pi i} \frac{f(k'_0)}{k'_0 - k_0} = \frac{r_1}{k_{10} - k_0} + \frac{r_2}{k_{20} - k_0} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{m+\lambda}^{\infty} \frac{dk'_0}{k'_0 - k_0} \text{Im}f(k'_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m-\lambda} \frac{dk'_0}{k'_0 - k_0} \text{Im}f(k'_0), \quad (3.69)$$

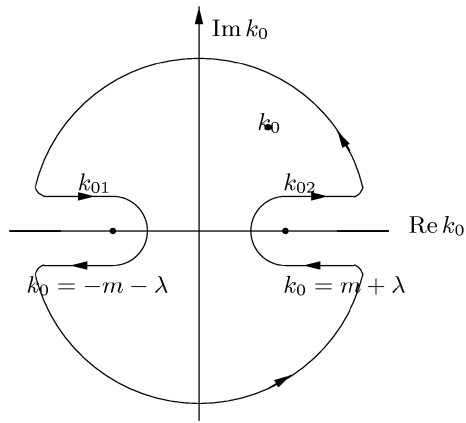


Рис. 23

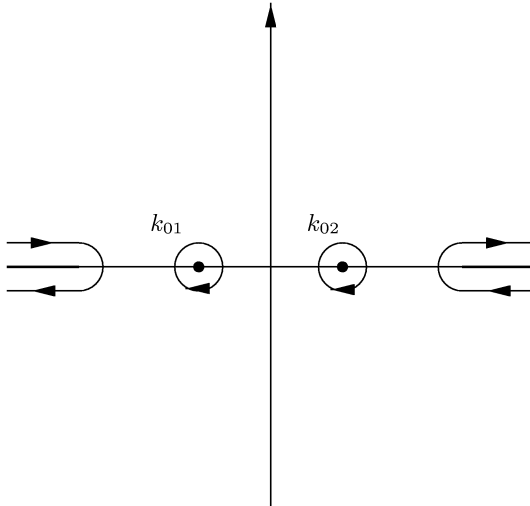


Рис. 24

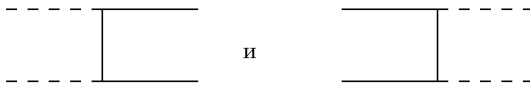
поскольку

$$\frac{1}{2i} \{f(k'_0 - i\varepsilon) - f(k'_0 + i\varepsilon)\} = \text{Im}f(k'_0).$$

Члены с r_1 и r_2 в (3.69) отвечают вкладу в интеграл от полюсов k_{01} и k_{02} борновского приближения (высшие приближения в этих точках, как увидим, особенностей не имеют). По этой амплитуде можно найти мнимую часть в еще более высоком приближении и т. д. В частности, используя борновские приближения для процесса, можно найти амплитуду рассеяния света на свете. Действительно,

$$\text{Im} F(2\gamma \rightarrow 2\gamma) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \times \\ | \quad \times \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (3.70)$$

Амплитуды



нам известны, и, подставляя (3.70) в (3.69), найдем $F(2\gamma \rightarrow 2\gamma)$.

Таким образом, из амплитуды предыдущего приближения мы можем найти мнимую часть последующего, а по дисперсионному интегралу (3.69) — и саму амплитуду. Повторяя последовательно эту процедуру, можно найти амплитуду в любом порядке теории возмущений.

При выполнении этой программы мы можем, однако, столкнуться с проблемой сходимости дисперсионных интегралов. Сходимость же определяется поведением амплитуд рассеяния при больших энергиях. В действительности, эта проблема тесно связана с возможными *ультрафиолетовыми* расходимостями теории. Мы рассмотрим эту проблему в главе 5.

Глава 4

Перенормировки. Радиационные поправки

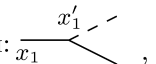
В предыдущей главе мы показали, как при помощи дисперсионных соотношений можно получить амплитуды высших приближений из борновских. Существует, однако, более простой метод непосредственного построения амплитуд высших порядков — метод фейнмановских диаграмм.

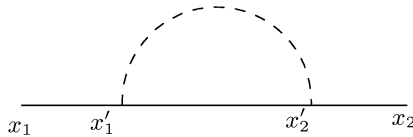
4.1 Высшие приближения. Перенормировка массы электрона

Начнем со свободной частицы. Что с ней может произойти? (Считаем, что есть частицы только одного сорта и фотоны.)

1. Частица свободно распространяется из x_1 в x_2 :



2. В некоторой точке x'_1 частица может испустить фотон: , но поскольку реально этот процесс запрещен, то фотон может существовать лишь время, разрешенное соотношением неопределенностей, а затем обязан поглотиться этой же частицей, т. е.



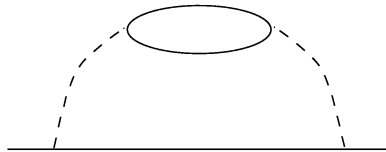
3. Возможны и более сложные процессы:



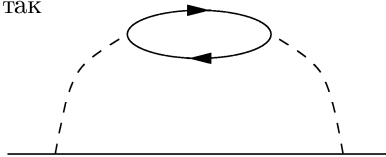
или



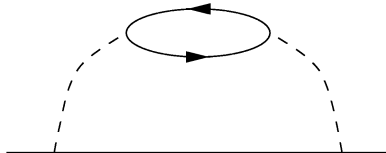
Точная функция Грина свободной частицы представляется суммой функций Грина всех подобных процессов, причем, когда в диаграмме присутствуют электрон-позитронные пары, на каждую надо вводить множитель -1 (поскольку $\bar{v}(p) = -\bar{u}(-p)$). Метод Фейнмана как раз и состоит в написании всех топологически разных диаграмм процессов во всех порядках по константе взаимодействия и суммирования всех соответствующих функций Грина. Подчеркнем, что следует рисовать только топологически различные диаграммы. Так, например, диаграмму



можно изобразить так

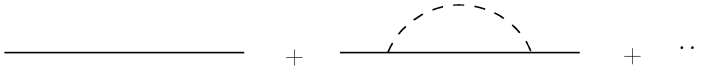


и так

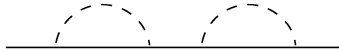


Это, по существу, один и тот же процесс, поэтому его нужно учитывать только один раз.

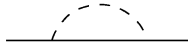
Сумма



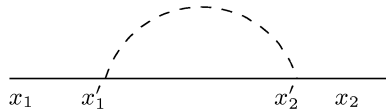
описывает распространение свободной частицы и влияние на него всевозможных виртуальных процессов. Видно, что процесс, например, такой



есть просто повторение



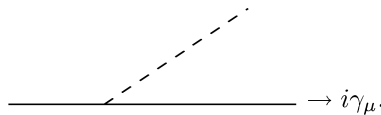
так что ничего нового он в движение частицы фактически не вносит. Поэтому в дальнейшем нам будет удобно выделить те процессы, которые не сводятся к простым повторениям. А пока сформулируем правила, по которым мы будем сопоставлять диаграммам функции Грина. Как обычно, для диаграммы



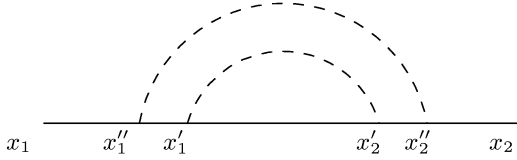
напишем

$$\begin{aligned}
 G_2(x_2 - x_1) &= \\
 &= e^2 \int G(x_2 - x'_2) i\Gamma_\mu(x'_2) G(x'_2 - x'_1) i\Gamma_\nu(x'_1) G(x'_1 - x_1) \times \\
 &\times D_{\mu\nu}(x'_2 - x'_1) d^4x'_2 d^4x'_1.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Множитель e^2 в (4.1) появился из-за наличия двух вершин, интеграл берется по $d^4x'_1$ и $d^4x'_2$ в силу того, что x'_1 и x'_2 произвольны. В x -пространстве вершине мы сопоставляем $i\gamma_\mu$ (как и в импульсном), т. е.



В следующем порядке рассмотрим, к примеру, диаграмму



Для нее имеем

$$\begin{aligned}
 G_4(x_2 - x_1) &= \\
 &= e^4 \int G(x_2 - x_2'') i\gamma_\mu G(x_2'' - x_2') i\gamma_\nu G(x_2' - x_1') \times \\
 &\times i\gamma_{\nu'} G(x_1' - x_1'') i\gamma_{\mu'} G(x_1'' - x_1) D_{\mu\mu'}(x_2'' - x_1'') \times \\
 &\times D_{\nu\nu'}(x_2' - x_1') d^4 x_1'' d^4 x_1' d^4 x_2' d^4 x_2''. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Здесь правило такое: под интегралом пишутся функции Грина, начиная с конца диаграммы, по всем внутренним точкам x' производится интегрирование. (Нужно также следить за индексами μ, μ', \dots фотонных функций Грина, чтобы они соответствовали диаграмме.)

Перейдем в импульсное представление. Для этой цели напомним функции Грина в виде

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{i \hat{m} - \hat{p}}, \\
 D_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

При подстановке (4.3) в (4.1) или (4.2) мы видим, что вся зависимость подынтегральной функции от координат ограничивается экспоненциальными множителями. Поэтому интегралы по x'_i легко возьмутся.

Рассмотрим, например, (4.1):

$$\begin{aligned}
 G_2(x_2 - x_1) &= e^2 \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3 d^4 k}{[(2\pi)^4 i]^4} \frac{1}{m - \hat{p}_2} i\gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_3} i\gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p}_1} \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} \times \\
 &\times \int e^{-ip_2 x_2} e^{-ix_2'(-p_2+p_3+k)} e^{-ix_1'(-p_3+p_1-k)} e^{ip_1 x_1} d^4 x_1' d^4 x_2', \\
 &\int e^{-ix_2'(-p_2+p_3+k)} e^{-ix_1'(-p_3+p_1-k)} d^4 x_1' d^4 x_2' = \\
 &= (2\pi)^4 \delta(p_3 + k - p_2) (2\pi)^4 \delta(p_1 - k - p_3). \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

То есть в каждой вершине диаграммы в импульсном представлении (рис. 25) выполняется закон сохранения 4-импульса.

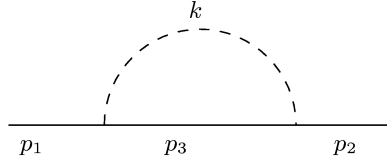


Рис. 25

После интегрирования при помощи δ -функции по d^4p_2 и d^4p_3 останется

$$G_2(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4 i} e^{-ip_1(x_2 - x_1)} \times \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} e^2 \frac{1}{m - \hat{p}_1} \gamma_\mu \frac{1}{m - (\hat{p}_1 - \hat{k})} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_1} \frac{1}{k^2}. \quad (4.5)$$

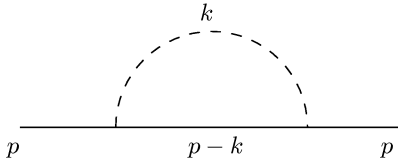
По промежуточному состоянию осталось одно интегрирование (d^4k). Перепишывая (4.5) как

$$G_2(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} e^{-ip(x_2 - x_1)} G_2(p),$$

видим, что функция Грина $G_2(p)$ в импульсном представлении имеет вид:

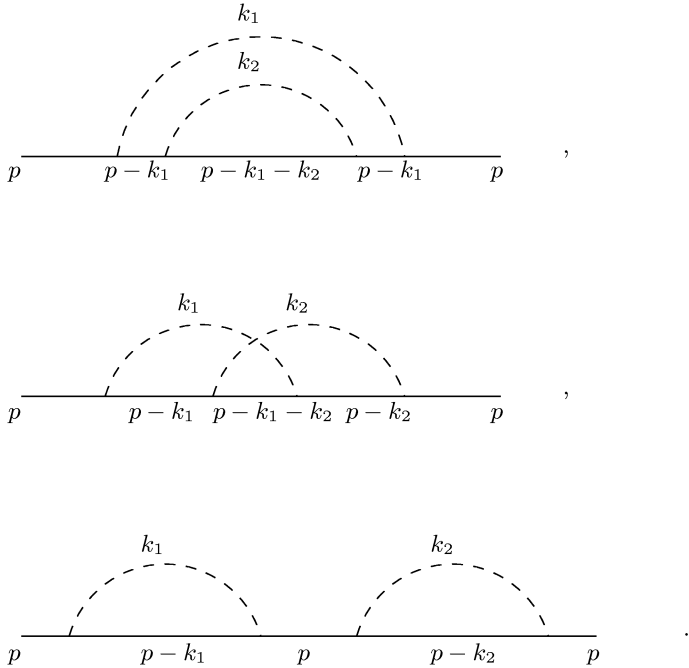
$$G_2(p) = \frac{e^2}{m - \hat{p}} \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{m - \hat{p}}. \quad (4.6)$$

Итак, мы вычислили поправку к свободной функции Грина:



В (4.6) присутствует интегрирование по импульсу промежуточного фотона, потому что, хотя в каждой вершине выполняется закон сохранения

4-импульса, сам испущенный квант может обладать любым импульсом. Аналогично можно построить функцию Грина, соответствующую любой диаграмме. Например, в порядке e^4 :

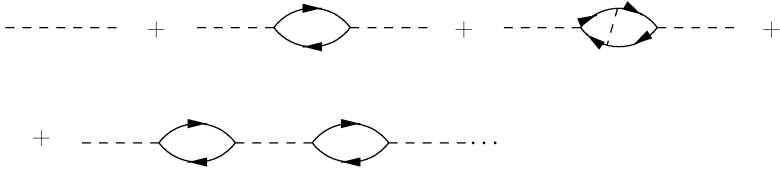


Выищем функцию Грина для средней диаграммы:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_4(p) &= e^4 \frac{1}{m - \hat{p}} \times \\
 &\times \left(\int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{[(2\pi)^4 i]^2} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}_2} \gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}_2 + \hat{k}_1} \times \right. \\
 &\times \left. \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}_1} \gamma_\nu \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_2^2} \right) \frac{1}{m - \hat{p}}. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь, что может произойти со свободным фотоном. Он может только распадаться на электрон и позитрон, больше никакого

взаимодействия у нас нет, так что могут быть следующие процессы:

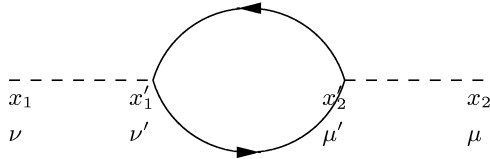


и т.д.

Что мы сопоставим этим диаграммам? Свободному фотону, как мы знаем, соответствует фотонная функция Грина $g_{\mu\nu}D(x_2 - x_1)$, т. е.

$$\begin{matrix} x_1 \\ \nu \end{matrix} \text{-----} \begin{matrix} x_2 \\ \mu \end{matrix} = g_{\mu\nu}D(x_2 - x_1). \tag{4.8}$$

Для диаграммы



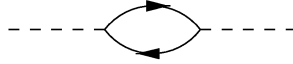
можем, как обычно, написать выражение:

$$\begin{aligned} & e^2 \int D_{\mu\mu'}(x_2 - x_2') i\gamma_{\mu'} G(x_2' - x_1') \times \\ & \times i\gamma_{\nu'} G(x_1' - x_1) D_{\nu\nu'}(x_1 - x_1') d^4x_1' d^4x_2'. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Однако электрон и позитрон могут рождаться с разными спинами, поэтому надо просуммировать (4.9) по всем спиновым состояниям, т. е. взять след от (4.9). Обсудим этот вопрос подробнее. Вспомним, что мы сопоставляли

$$= e\bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2).$$

Реально фотон не может распасться на две частицы, т. е. процесс



является виртуальным. Это отражается в том, что функция Грина (4.11) содержит $k^2 \neq 0$, $p_0 \neq \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. На языке нерелятивистской квантовой механики можно сказать так: на короткое время (определяемое соотношением неопределенностей) фотон распадается на электрон и позитрон с нарушением закона сохранения энергии.

Поправки высокого порядка в фейнмановских диаграммах включают в себя более сложные виртуальные процессы. Частицы в этих процессах не находятся на массовой поверхности. Это следует сравнить с обычной квантовомеханической теорией возмущений, в которой в промежуточных состояниях нарушается закон сохранения энергии. Метод Фейнмана, в принципе, эквивалентен теории возмущений в квантовой механике, однако, он гораздо удобнее, поскольку этот метод сохраняет явную релятивистскую инвариантность в процессе вычислений.

Прежде чем перейти к обсуждению реальных процессов, рассмотрим более подробно функции Грина свободных частиц. (Будем в дальнейшем массу частицы обозначать m_0 вместо m .)

Итак, функцию Грина свободной заряженной частицы с массой m_0 можно записать в виде суммы членов, отвечающих всевозможным процессам с испусканием и поглощением всевозможного числа фотонов, т. е.

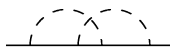
$$G \equiv \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Среди всех таких диаграмм есть в некотором смысле исключительные, а именно, такие, которые соответствуют периодическому повторению флуктуаций, происходящих с частицей, т. е. диаграммы типа

$$\text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Такие флуктуации не связаны, так как могут быть разделены большими промежутками времени, и фактически новой информации о движении частицы не дают.

Флуктуации же типа



связаны и разделены очень малым промежутком времени. Поэтому, чтобы выделить флуктуации, которые связаны и происходят в течение короткого промежутка времени, вводят понятие собственной энергии частицы, которая является суммой всех диаграмм, не содержащих повторений (т. е. которые не могут быть разделены на две части, соединенные одной линией).

$$-\Sigma(p) = \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} \text{---} + \dots = \text{---} \boxed{\text{---}} \text{---}$$

В $\Sigma(p)$ содержатся все флуктуации за короткий промежуток времени. Все остальные флуктуации получаются просто повторением, т. е. полную функцию Грина можно записать так:

$$G(p) = \text{---} + \text{---} \boxed{\text{---}} \text{---} + \text{---} \boxed{\text{---}} \boxed{\text{---}} \text{---} + \dots$$

Выделив $\Sigma(p)$ в блок, мы теперь легко можем просуммировать всю совокупность диаграмм. Имеем

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{m_0 - \hat{p}} + \frac{1}{m_0 - \hat{p}} [-\Sigma(p)] \frac{1}{m_0 - \hat{p}} + \\ &+ \frac{1}{m_0 - \hat{p}} [-\Sigma(p)] \frac{1}{m_0 - \hat{p}} [-\Sigma(p)] \frac{1}{m_0 - \hat{p}} + \dots \\ &= \frac{1}{m_0 - \hat{p}} \left[1 + [-\Sigma(p)] \frac{1}{m_0 - \hat{p}} + \left([-\Sigma(p)] \frac{1}{m_0 - \hat{p}} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, сумма свелась к геометрической прогрессии. Суммируя ее, получим

$$G(p) = \frac{1}{m_0 - \hat{p}} \frac{1}{1 + \Sigma(p) \frac{1}{m_0 - \hat{p}}} = \frac{1}{m_0 - \hat{p} + \Sigma(p)}. \quad (4.13)$$

В нулевом приближении

$$G_0(p) = \frac{1}{m_0 - \hat{p}} = \frac{m_0 + \hat{p}}{m_0^2 - p^2}.$$

Здесь m_0 имеет смысл массы частицы, поскольку $G_0(p)$ в точке $p^2 = m_0^2$ имеет полюс. Это вытекает из следующих рассуждений: функция распространения частицы из x_1 в x_2 есть

$$G(x_{12}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} e^{ipx_{12}} \frac{m_0 + \hat{p}}{m_0^2 - p^2},$$

где $x_{12} = x_2 - x_1$. Взяв интеграл по вычетам, мы получим

$$G \simeq \int d^3 p e^{-ip_0 t_{12} + i\mathbf{p}\mathbf{r}_{12}},$$

где $p_0 = \sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2}$. А это и означает, что распространяется частица с массой m_0 ; более того, при $t_2 \rightarrow \infty$ вклад в интеграл дает только полюсной член и, если бы не было полюса, из-за частых осцилляций экспоненты он обратился бы в нуль, т. е. мы не наблюдали бы никакой частицы. Именно наличие полюса делает интеграл отличным от нуля и обеспечивает правильную связь между энергией и импульсом частицы. Так что физически наблюдаемая масса определяется из условия

$$G(p)|_{p^2=m^2} = \infty. \quad (4.14)$$

Взглянув же на (4.13), видим, что точная функция Грина не обязательно имеет полюс при $p^2 = m_0^2$, т. е. m_0 не имеет непосредственного отношения к массе. А реальная масса частицы определяется еще и ее собственной энергией. И если мы хотим, чтобы свободная частица с некоторой массой m существовала (т. е. мы могли бы ее наблюдать), то мы должны наложить некоторые условия на $\Sigma(p)$.

Поскольку $\Sigma(\hat{p})$ зависит только от γ матриц только через \hat{p} , она коммутирует с \hat{p} . Пусть $u_m(p)$ — биспинор, описывающий свободную частицу с массой m ($\hat{p}u_m(p) = mu_m(p)$). Уравнение 4.14 для определения физической массы эквивалентно

$$G^{-1}(p)u_m(p) = (m_0 - \hat{p} + \Sigma(\hat{p}))u_m(p) = 0,$$

которое эквивалентно

$$m_0 - m + \Sigma(m) = 0. \quad (4.15)$$

Это уравнение должно иметь вещественные решения, которые и будут иметь смысл реально наблюдаемой массы частицы. А поскольку m_0

ненаблюдаема, хорошо бы ее исключить из всех выражений, заменив на некоторую комбинацию из m . Это сделать совсем просто: перепишем (4.13) в виде

$$G^{-1}(p) = m_0 - \hat{p} + \Sigma(p).$$

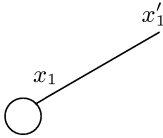
Выражая m_0 из (4.15), получим

$$G^{-1}(p) = m - \hat{p} + \Sigma(\hat{p}) - \Sigma(m). \tag{4.16}$$

Эта формула выражает функцию Грина электрона только через наблюдаемые величины.

Рассмотрим теперь, как устроены поправки к волновой функции заряженной частицы. Покажем, что они связаны с поправками к функции Грина.

Вспомним, как мы вычисляли амплитуды реальных процессов:



$$A \sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ip(x_1-x'_1)}}{m_0^2 - p^2} (m_0 + \hat{p}).$$

Мы замыкали контур на полюс и интегрировали по dp_0 ; пользуясь равенством

$$\sum_{\lambda} u_{\alpha}^{\lambda}(p) \bar{u}_{\beta}^{\lambda} = (\hat{p} + m_0)_{\alpha\beta},$$

получали

$$- \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi)^3} e^{-ip(x_1-x'_1)} \bar{u}^{\lambda}(p) u^{\lambda}(p),$$

где $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$. Далее выделили волновые функции свободных частиц:

$$\frac{1}{\sqrt{2p_0}} u^{\lambda}(p) e^{-ipx_1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{ipx'_1} \bar{u}^{\lambda}(p),$$

и оставшийся фактор назвали амплитудой рассеяния.

Теперь же у нас функция Грина имеет полюс в m . Посмотрим, что произойдет с вычетом, который, как мы только что объяснили, входит в амплитуду рассеяния. Для этой цели разложим $\Sigma(p)$ в ряд вблизи m :

$$\Sigma(p) = \Sigma(m) + (\hat{p} - m) \Sigma'(m) + (\hat{p} - m)^2 \tilde{\Sigma}(p). \tag{4.17}$$

Последний член в этом выражении содержит степени $\hat{p}-m$ выше первой. Перепишем его в виде

$$(\hat{p}-m)^2 \tilde{\Sigma}(p) \equiv [1 - \Sigma'(m)] \Sigma_c(p),$$

вводя новую величину $\Sigma_c(p)$. Она выражается через собственную энергию согласно

$$\Sigma_c(\hat{p}) = \frac{\Sigma(\hat{p}) - \Sigma(m) - (\hat{p}-m)\Sigma'(\hat{p})}{1 - \Sigma'(m)}.$$

Функция Грина может быть представлена через $\Sigma_c(p)$ следующим образом:

$$G^{-1}(p) = [1 - \Sigma'(m)](m - \hat{p} - \Sigma_c(p)) \equiv [1 - \Sigma'(m)]G_c^{-1}(p), \quad (4.18)$$

где

$$G_c(p) = \frac{1}{m - \hat{p} - \Sigma_c(\hat{p})}$$

называется перенормированной функцией Грина. Поскольку вблизи полюса $\Sigma_c(\hat{p})$ имеет лишь члены высокого порядка по $\hat{p}-m$, видно, что перенормированная функция Грина устроена вблизи полюса так же, как функция Грина свободной частицы с массой m .

Вернемся к вычислению амплитуды. Величина $\tilde{\Sigma}_c(p)$ не дает вклада в полюс, поэтому при вычислении амплитуды (т. е. при $x_1 \rightarrow \infty$) ею можно пренебречь. В результате имеем

$$\begin{aligned} A &\sim \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ip(x_1-x'_1)}}{(m-\hat{p})[1-\Sigma'(m)]} = \\ &\quad t_1 \rightarrow \infty \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{2p_0(2\pi)^3} u_m^{\lambda}(p) e^{-ipx_1} \bar{u}_m^{\lambda}(p) e^{ipx'_1} \frac{1}{1-\Sigma'(m)}. \end{aligned}$$

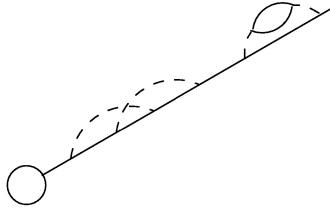
Раньше у нас была нормировка $\bar{u}u = 2m$, а сейчас появились спиноры

$$u' = Z_2^{\frac{1}{2}} u, \quad \bar{u}' = Z_2^{\frac{1}{2}} \bar{u}, \quad (4.19)$$

где

$$Z_2 = \frac{1}{1 - \Sigma'(m)}. \quad (4.20)$$

То есть возникла перенормировка волновых функций электрона. Физически это отражает тот факт, что в настоящем случае система состоит не из одного электрона, а содержит еще и фотоны, а также пары, т. е. картинка такая:

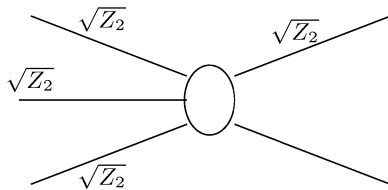


И волновая функция всей системы имеет вид:

$$\Psi_{\text{физ}} = \Psi_e + \Psi_{e\gamma} + \Psi_{e2\gamma} + \Psi_{e3\gamma} + \dots + \Psi_{e^+e^-} + \dots$$

Так что если общая нормировка функций выбрана единичной, то норма Ψ_e уже не равна единице, а представляет собой “долю” одноэлектронного состояния в возникающем многочастичном состоянии. Однако на наблюдаемых величинах нормировка волновых функций сказываться не должна. В нашем случае такой величиной является сечение, в него входит поток начальных частиц и фазовый объем конечных. В них мы обязаны включить возникающий нормировочный множитель.

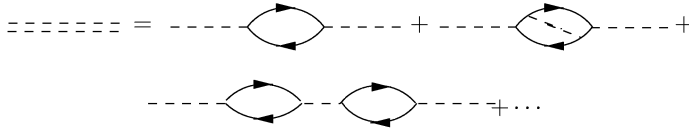
В дальнейшем мы будем поступать так: один корень $\sqrt{Z_2}$ отнесем к потоку или фазовому объему и будем их вычислять как обычно, другой корень $\sqrt{Z_2}$ отнесем к амплитуде, а волновые функции нормируем как прежде. То есть на каждый вход (или выход) свободной электронной линии припишем множитель $\sqrt{Z_2}$:



Итак, в результате суммирования диаграмм возникла перенормировка массы электрона и амплитуды.

4.2 Перенормировка функции Грина фотона

Посмотрим, что произойдет с фотонной функцией Грина в результате всевозможных процессов. Обозначим точную функцию Грина фотона $D_{\mu\nu}$ графически следующим образом: =====, тогда



Если в результате суммирования всех диаграмм возникнет перенормировка массы фотона, то он перестанет быть фотоном, т. е. наша теория приведет к неверному результату. Посмотрим, так ли это.

Аналогично собственной энергии электрона $\Sigma(p)$, введем для фотона сумму всех диаграмм, которые не делятся однофотонной линией:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \equiv \text{---} \text{---} \text{---} . \tag{4.21}$$

Эту сумму называют поляризационным оператором фотона. Тогда

$$\text{=====} = \text{-----} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \tag{4.22}$$

или

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^0(k) + D_{\mu\mu'}^0(k)\Pi_{\mu'\nu'}D_{\nu'\nu}^0(k) + D_{\mu\mu'}^0\Pi_{\mu'\nu'}D_{\nu'\nu''}^0\Pi_{\nu''\mu''}D_{\mu''\nu}^0.$$

Заметим, что

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^0(k) + D_{\mu\mu'}^0(k)\Pi_{\mu'\nu'}D_{\nu'\nu}^0(k). \tag{4.23}$$

Подставляя $D_{\mu\nu}^0 = g_{\mu\nu}/k^2$, получим

$$k^2 D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} D_{\nu'\nu},$$

или

$$[k^2 \delta_{\mu\nu'} - \Pi_{\mu\nu'}(k)]D_{\nu'\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{4.24}$$

$\Pi_{\mu\nu}$ — тензор второго ранга, зависящий от k_μ , поэтому его можно представить в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}a_1(k^2) + k_\mu k_\nu a_2(k^2). \quad (4.25)$$

Аналогично для $D_{\mu\nu}$:

$$D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}d_1(k^2) + k_\mu k_\nu d_2(k^2). \quad (4.26)$$

Подставляя (4.25) в (4.24), получим

$$[k^2 - a_1(k^2)]D_{\mu\nu}(k) - k_\mu k_{\nu'} D_{\nu'\nu} a_2(k^2) = g_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

и окончательно

$$\begin{aligned} [k^2 - a_1(k^2)]d_1(k^2)g_{\mu\nu} + [k^2 - a_1(k^2)]k_\mu k_\nu d_2(k^2) - \\ - [k_\mu k_\nu d_1(k^2)a_2(k^2) + k^2 d_2(k^2)a_2(k^2)k_\mu k_\nu] = g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Приравнивая в (4.28) множители перед $\delta_{\mu\nu}$ справа и слева, получим

$$[k^2 - a_1(k^2)]d_1(k^2) = 1,$$

т. е.

$$d_1(k^2) = \frac{1}{k^2 - a_1(k^2)}. \quad (4.29)$$

Аналогично,

$$d_2(k^2) = \frac{a_2}{(k^2 - a_1)(k^2 - a_1 - k^2 a_2)}.$$

Благодаря сохранению тока член в $D_{\mu\nu}$, пропорциональный $k_\mu k_\nu$, вкладов в реальные амплитуды не дает, и пока мы его оставим. Сосредоточимся поэтому на части $D_{\mu\nu}$, пропорциональной $g_{\mu\nu}$ ¹

$$D_{\mu\nu}^t = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - a_1(k^2)}. \quad (4.30)$$

¹Обычно (4.26) переписывают в виде

$$D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}d_1(k^2) + k_\mu k_\nu d_2(k^2) \equiv d_1(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \tilde{d}_2(k^2) k_\mu k_\nu,$$

где

$$\tilde{d}_2 = \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2 - a_1 - k^2 a_2}.$$

Поперечной частью функции Грина называют обычно $d_1(k^2)(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2)$. Она обращается в нуль при умножении на k_μ , так как $k_\mu(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2) = 0$. Обсуждаемая нами функция $d_1(k^2)$ как раз и входит в поперечную часть функции Грина.

т. е.

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{(1)} &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \text{Sp} \left(\gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}} \gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} \right), \\ k_\mu \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k) &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \text{Sp} \left(\hat{k} \frac{1}{m - \hat{p}} \gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} \right).\end{aligned}\quad (4.35)$$

Представляя $\hat{k} \equiv \hat{k} + m - \hat{p} - m + \hat{p}$, получим

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}^{(1)} = -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \text{Sp} \left(-\frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} \gamma_\nu + \frac{1}{m - \hat{p}} \gamma_\nu \right) = 0,$$

поскольку заменой $p - k = p'$ подынтегральное выражение сводится к

$$\frac{1}{m - \hat{p}} - \frac{1}{m - \hat{p}} = 0.$$

(Заметим, что каждый из интегралов расходится, как $\int d^4 p/p^2$.) Аналогично все можно проделать и для высших порядков.

Таким образом, мы получили, что масса фотона не перенормируется, и это следствие сохранения тока.

Итак, функция Грина фотона имеет вид:

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 [1 - \Pi(k^2)]}.\quad (4.36)$$

Как и для электрона, можно ввести величину:

$$\Pi_c(k^2) = \frac{\Pi(k^2) - \Pi(0)}{1 - \Pi(0)},$$

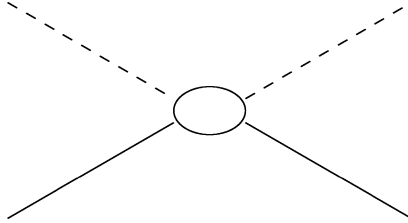
которая обращается в нуль при $k^2 = 0$, и записать функцию Грина в форме:

$$D_{\mu\nu} = \frac{Z_3 g_{\mu\nu}}{k^2 [1 - \Pi_c(k^2)]} \equiv D_{\mu\nu}^c(k^2),$$

где $Z_3 = 1/[1 - \Pi(0)]$ и мы ввели перенормированную функцию Грина фотона $D_{\mu\nu}^c(k^2)$.

При вычислении амплитуд, как и в случае электронов, возникнет перенормировка волновых функций фотона, т. е. множитель $\sqrt{Z_3}$. Как и раньше, один корень $\sqrt{Z_3}$ мы отнесем к потоку, а один — к амплитуде, т. е. на каждую внешнюю фотонную линию будем добавлять множитель $\sqrt{Z_3}$, а нормировку оставим прежнюю.

Таким образом, мы можем дать рецепт построения произвольных амплитуд рассеяния, например, для процесса



Нужно нарисовать всевозможные фейнмановские диаграммы и сопоставить:

$$G_0 = \frac{1}{m_0 - \hat{p}} \quad \text{внутренней электронной линии} \quad \longrightarrow \overset{p}{\blacktriangleright},$$

$$D_{\mu\nu}^0 = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \quad \text{внутренней фотонной линии} \quad \text{---} \overset{k}{\text{---}},$$

для наружных линий:

$$u(p)e^{-ipx}\sqrt{Z_2} \quad \text{начальному электрону,}$$

$$\bar{u}(p)e^{ipx}\sqrt{Z_2} \quad \text{конечному электрону,}$$

соответственно,

$$\bar{v}(p)e^{-ipx}\sqrt{Z_2} \quad \text{начальному позитрону,}$$

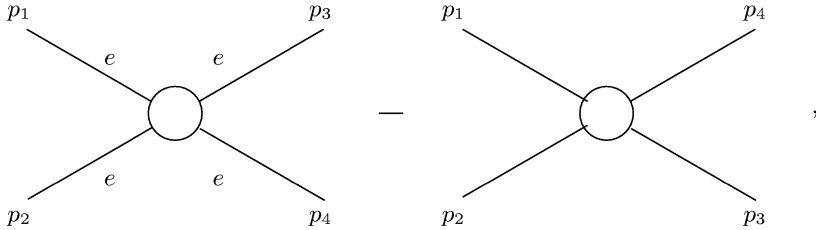
$$v(p)e^{ipx}\sqrt{Z_2} \quad \text{конечному позитрону,}$$

$$e_\mu^\lambda e^{-ikx}\sqrt{Z_3} \quad \text{начальному фотону,}$$

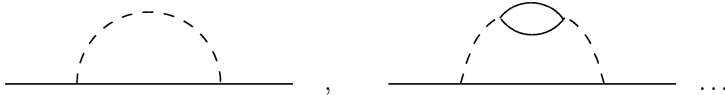
$$e_\mu^\lambda e^{ikx}\sqrt{Z_3} \quad \text{конечному фотону,}$$

причем для внешних линий $p^2 = m^2$, $k^2 = 0$.

Все полученные выражения должны быть антисимметризованы по внешним электронным линиям, т. е.



и симметризованы по внешним фотонным линиям. Внутри у нас пока стоят “голые” электронные линии, т. е. G_0 и $D_{\mu\nu}^0$; ясно, что на самом деле и внутри возможны процессы



и т. д.

Сумма всех таких диаграмм даст внутри точные функции Грина, т. е. внутренним линиям нужно будет сопоставлять не “голые”, а точные функции Грина. Мы уже знаем некоторые их свойства, а именно:

$$G(p) = \frac{Z_2}{m - \hat{p} + \Sigma_c(p)}, \tag{4.37}$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{Z_3 g_{\mu\nu}}{k^2 [1 - \Pi_c(k^2)]}, \tag{4.38}$$

где

$$\Sigma_c(\hat{p}) = \frac{\Sigma(\hat{p}) - \Sigma(m) - (\hat{p} - m)\Sigma'(m)}{1 - \Sigma'(m)}, \tag{4.39}$$

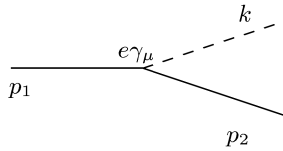
$$\Pi_c(k^2) = \frac{\Pi(k^2) - \Pi(0)}{1 - \Pi(0)}, \tag{4.40}$$

т. е. точные функции Грина (4.37), (4.38) похожи на свободные.

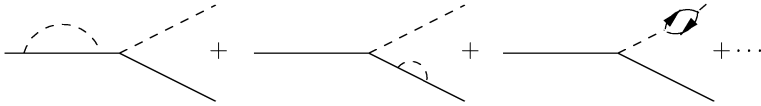
4.3 Перенормировка вершинной части

В предыдущем разделе мы рассмотрели функции Грина электрона и фотона с учетом высших приближений. Теперь рассмотрим, что произойдет с амплитудой испускания фотона (т. е. с вершинной частью).

Итак, простейший процесс — это



Также возможны следующие:

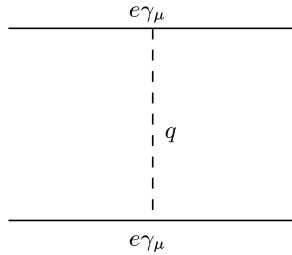


Однако такие поправки мы уже рассмотрели при вычислении функций Грина. Введем поэтому величину $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$, которая не содержит поправок к внешним линиям:

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (4.41)$$

Из (4.41) видно, что величина амплитуды тоже изменяется за счет всевозможных процессов высшего порядка. К чему это приведет в реальных физических процессах?

Мы рассматривали рассеяние электрона на электроне

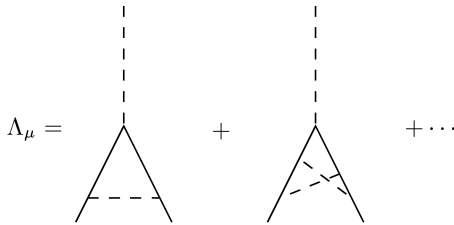


При малых переданных импульсах q мы получили обычное кулоновское рассеяние, поэтому величину e мы назвали зарядом. Однако реально в вершине происходят всевозможные процессы, так что e не является наблюдаемым зарядом, а первым к нему приближением. Наблюдаемый заряд проявляется на эксперименте при учете всех процессов, происходящих в вершине, и с ним, вообще говоря, тоже необходимо проделать процедуру перенормировки, как и с массой.

Напишем $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ в виде

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2), \tag{4.42}$$

где



Для покоящейся частицы при $q = 0$ можно написать

$$\Gamma_\mu(m, m) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(m, m), \tag{4.43}$$

причем единственный вариант — это

$$\Lambda_\mu(m, m) = \gamma_\mu \Lambda(m, m), \tag{4.44}$$

поскольку никакого другого вектора нет. Тогда

$$\Gamma_\mu(m, m) = \gamma_\mu [1 + \Lambda(m, m)] \equiv \gamma_\mu Z_1^{-1}. \tag{4.45}$$

Здесь Z_1^{-1} — это множитель, на который изменяется амплитуда при нулевом переданном импульсе в результате всевозможных процессов, происходящих в вершине. Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p_1, p_2) &= \gamma_\mu + \gamma_\mu \Lambda(m, m) + \Lambda_\mu(p_1, p_2) - \Lambda_\mu(m, m) = \\ &= Z_1^{-1} \left[\gamma_\mu + \frac{\Lambda_\mu(p_1, p_2) - \Lambda_\mu(m, m)}{1 + \Lambda(m, m)} \right], \end{aligned}$$

или

$$\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_\mu^c, \quad (4.46)$$

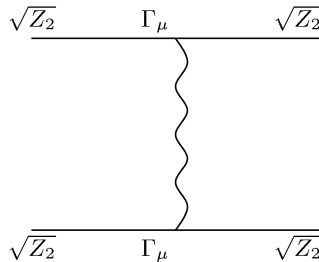
где мы обозначили


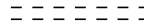
$$\Gamma_\mu^c = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^c, \quad (4.47)$$

$$\Lambda_\mu^c = \frac{\Lambda_\mu(p_1, p_2) - \Lambda_\mu(m, m)}{Z_1^{-1}} \quad (4.48)$$

(при малых переданных импульсах имеем просто $\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \gamma_\mu$).

Вернемся теперь к рассеянию электронов. Простейшую диаграмму можно нарисовать так:



Здесь  \equiv . Дальнейшее усложнение будет происходить следующим образом: войдут диаграммы

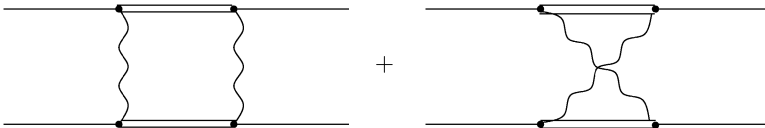


Рис. 26

Видно, что как бы мы ни усложняли диаграммы, в них нигде не войдут ни затравочный (“голый”) заряд, ни “голые” функции Грина, а всюду будут входить точные функции Грина и реальный заряд. Ясно также, что нет смысла рисовать диаграммы типа



так как они уже учтены в функциях Грина. Диаграммы, подобные приведенным выше, называются скелетными.

Выделим из $G(p)$ и $D_{\mu\nu}(k)$, соответственно, множители Z_2 и Z_3 , аналогично (4.46), т. е.

$$G(p) = Z_2 G^c(p), \quad (4.49)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = Z_3 D_{\mu\nu}^c(k). \quad (4.50)$$

Посмотрим, что произойдет при подстановке этих функций в диаграмму. Электронные линии всегда выходят из некоторой вершины и оканчиваются вершиной, аналогично и фотонные, поэтому удобно разбить множители Z_2 , Z_3 в (4.49), (4.50) на $\sqrt{Z_2} \cdot \sqrt{Z_2}$ и $\sqrt{Z_3} \cdot \sqrt{Z_3}$ и каждый корень отнести к входу и выходу линии. Тогда в любой вершине появится множитель

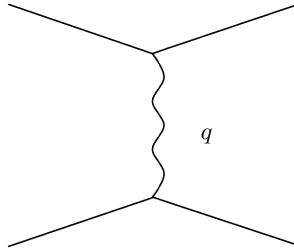
$$e Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3},$$

поскольку в каждой вершине сходятся две электронные и одна фотонная линия. (Прежде у нас в вершину входил заряд.) Если теперь назовем зарядом величину

$$e_c = e Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3}, \quad (4.51)$$

то все Z исчезнут и все будет как раньше, только вместо “голого” заряда e в каждую вершину войдет перенормированный заряд e_c .

Вясним смысл перенормированного заряда. Рассмотрим снова рассеяние электронов на малые углы:



Как и раньше, от этой диаграммы возникнет полюс, так как

$$D^c(k) \sim \frac{1}{q^2}.$$

От остальных диаграмм полюсов не будет, поскольку в них войдет интегрирование по промежуточным импульсам, так что при малых переданных импульсах основной вклад в амплитуду определится именно этой диаграммой:

$$A = (eZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3})^2 \bar{u}\gamma_\mu u \frac{1}{q^2} \bar{u}\gamma_\mu u. \quad (4.52)$$

А это и есть амплитуда кулоновского рассеяния, причем e_c и является физическим зарядом, т. е. именно $e_c^2 = 4\pi/137$. Таким образом, мы получили, что за счет процессов высшего порядка возникает перенормировка массы и заряда свободной частицы.

Рассмотрим формулу

$$e_c = eZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}$$

с несколько иной точки зрения. Введем несколько сортов частиц, например, e , μ , p (электрон, мюон, протон), т. е.

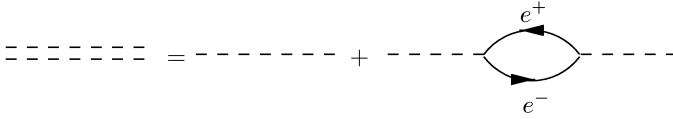
$$G_e \text{ ————— } e$$

$$G_\mu \text{ ————— } \mu$$

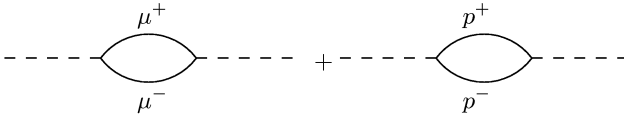
$$G_p \text{ ————— } p$$

Соответственно, вершины пусть будут Γ_e , Γ_μ , Γ_p . Эти величины, вообще говоря, различны, поскольку совсем необязательно, что все интегралы,

куда входят функции Грина частиц с разными массами, дадут одинаковый результат. А как наличие существенно разных частиц скажется на функции Грина фотона? Мы имели



Но если имеются и другие частицы, ничто не мешает произойти и таким процессам



и т. д., т. е. в фотонную функцию Грина дадут вклад все заряженные частицы, какие есть на свете. С этой точки зрения, она является величиной универсальной, тогда как функции Грина остальных частиц зависят от рода частиц.

Обсудим теперь следующий вопрос. Предположим, что затравочные заряды электрона и протона одинаковы, тогда в результате взаимодействия получим

$$\begin{aligned} e_{ce} &= Z_{1e}^{-1} Z_{2e} \sqrt{Z_3} e, \\ e_{cp} &= Z_{1p}^{-1} Z_{2p} \sqrt{Z_3} e, \end{aligned} \quad (4.53)$$

т. е. перенормированные заряды электрона и протона, вообще говоря, разные. Отсюда мы получили бы, например, что атом водорода ($e^- p$) в результате электромагнитного взаимодействия приобретает ненулевой заряд. Это противоречит закону сохранения заряда — электромагнитное взаимодействие не должно изменять заряд. Чтобы этого не произошло, должно выполняться универсальное соотношение, справедливое для всех частиц —

$$Z_1 = Z_2. \quad (4.54)$$

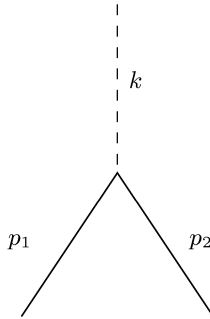
Тогда Z_1 и Z_2 , зависящие от природы частиц, выпадают из соотношений (4.53). Докажем, что соотношение (4.54) действительно выполняется в электродинамике.

4.4 Обобщенное тождество Уорда

Мы видели, что для реальных частиц

$$k_\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2) = 0, \quad (4.55)$$

где $k_\mu = p_1 - p_2$.



В общем случае (включающем и виртуальные частицы) имеет место тождество (обобщенное тождество Уорда)

$$k_\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2) = G^{-1}(p_1) - G^{-1}(p_2). \quad (4.56)$$

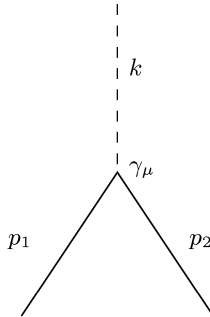
Покажем, что при выполнении (4.56) имеет место $Z_1 = Z_2$, а потом докажем это тождество.

Рассмотрим (4.56) при нулевых переданных импульсах. При этом слева останется $k_\mu Z_1^{-1} \gamma_\mu$, а справа от каждой функции Грина — $G_c^{-1} = m - \hat{p}$, т. е.

$$k_\mu Z_1^{-1} \gamma_\mu = Z_2^{-1} [-\hat{p}_2 + \hat{p}_1] = Z_2^{-1} \hat{k} = Z_2^{-1} k_\mu \gamma_\mu,$$

откуда непосредственно следует, что $Z_1 = Z_2$.

А теперь докажем тождество Уорда (4.56). Для простейшей диаграммы



имеем

$$G_0^{-1}(p) = m_0 - \hat{p},$$

так что, очевидно,

$$k_\mu \gamma_\mu \equiv \hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

и ясно, что для реальных частиц $k_\mu \gamma_\mu = 0$, так как $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = m$. Для следующей диаграммы имеем

$$= \Lambda_\mu^{(1)} =$$

$$= e^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 i} \gamma_\nu \frac{1}{m_0 - \hat{p}_2 + \hat{k}'} \gamma_\mu \frac{1}{m_0 - \hat{p}_1 + \hat{k}'} \gamma_\nu \frac{1}{k'^2}.$$

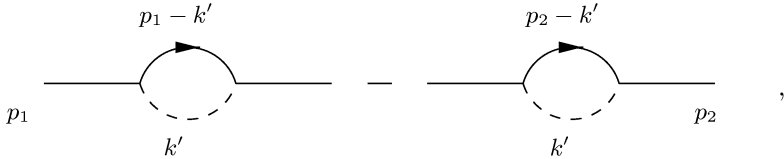
При вычислении вклада этой диаграммы в величину $k_\mu \Gamma_\mu$ в числителе появится $k_\mu \gamma_\mu$, а это можно расписать в виде

$$k_\mu \gamma_\mu = \hat{k} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = (m_0 - \hat{p}_2 + \hat{k}') - (m_0 - \hat{p}_1 + \hat{k}'),$$

так что

$$k_\mu \Lambda_\mu^{(1)} = e^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 i} \gamma_\nu \frac{1}{m_0 - \hat{p}_1 + \hat{k}'} \gamma_\nu \frac{1}{k'^2} - \\ - e^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 i} \gamma_\nu \frac{1}{m_0 - \hat{p}_2 + \hat{k}'} \gamma_\nu \frac{1}{k'^2}.$$

В выражении для $k_\mu \Lambda_\mu^{(1)}$ сначала сократился пропагатор электрона с импульсом $p_2 - k'$, а во втором слагаемом — с импульсом $p_1 - k'$. Результат есть не что иное, как



т. е.

$$k_\mu \Lambda_\mu^{(1)} = \Sigma^{(1)}(\hat{p}_1) - \Sigma^{(1)}(\hat{p}_2). \quad (4.57)$$

Аналогичные выражения получаются и в высших приближениях, их суммирование дает в точности (4.56).

При переходе к нулевым переданным импульсам обобщенное тождество Уорда можно переписать в следующем виде:

$$k_\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2) = \\ = G^{-1}(\hat{p}_2) + G^{-1}(\hat{p}_2 + \hat{k}) = -\frac{\partial G^{-1}}{\partial \hat{p}_2} \hat{k} = -\frac{\partial G^{-1}}{\partial \hat{p}_2} \gamma_\mu k_\mu,$$

т. е. при малых передачах импульса

$$\Gamma_\mu(p, p) = -\frac{\partial G^{-1}}{\partial \hat{p}} \gamma_\mu.$$

Но так как

$$\gamma_\mu = \frac{\partial \hat{p}}{\partial p_\mu},$$

то

$$\Gamma_\mu(p, p) = -\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (4.58)$$

Подведем итоги. Мы видим, что квантовую электродинамику нам удастся построить так, что в нее входят только наблюдаемые — перенормированный заряд и функции Грина. Дальнейшие трудности связаны с вычислением D , G , Γ_μ . В низших приближениях, однако, все вычисляется довольно просто. Мы рассмотрим простейшие радиационные поправки в следующих разделах.

4.5 Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

Как мы уже отмечали, рассеяние электронов внешним полем есть рассеяние на тяжелом объекте. Амплитуда такого процесса имеет вид:

$$\begin{array}{c} p_1 \text{-----} p_2 \\ | \\ \text{---} q \text{---} \\ | \\ \text{====} \end{array} = e\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)A_\mu(q), \quad (4.59)$$

где

$$A_\mu(q) = \frac{e}{q^2}\mathcal{J}_\mu(q), \quad (4.60)$$

\mathcal{J}_μ — фурье-компонента макроскопического тока тяжелой частицы.

Что произойдет, если учтем процессы высших порядков? Во-первых, изменится вершина и на каждую электронную линию добавится множитель $\sqrt{Z_2}$, т. е.

$$\begin{array}{c} \sqrt{Z_2} \quad \Gamma_\mu \quad \sqrt{Z_2} \\ | \\ \text{---} q \text{---} \\ | \\ \text{====} \end{array} = e\bar{u}(p_2)\Gamma_\mu^c(p_2, p_1)u(p_1)A_\mu(q), \quad (4.61)$$

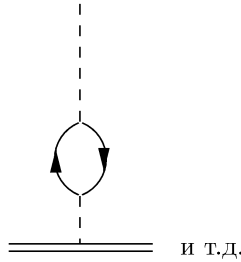
где $\Gamma_\mu = Z_1^{-1}\Gamma_\mu^c$. Во-вторых, изменится внешнее поле, т. е. $A_\mu(q)$. Действительно, (4.60) имеет вид:

$$A_\mu(q) = eD_{\mu\nu}^0(q)\mathcal{J}_\nu(q),$$

а следовательно, с учетом высших приближений,

$$A_\mu(q) = \frac{eZ_3}{q^2[1 - \text{Пс}(q^2)]}\mathcal{J}_\mu(q). \quad (4.62)$$

Поле изменяется за счет всевозможных процессов с образованием пар, например,



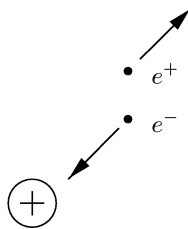
Окончательно амплитуда рассеяния принимает вид:

$$F = e_c \bar{u}(p_2) \Gamma_\mu^c(p_2, p_1) u(p_1) \frac{1}{1 - \Pi^c(q^2)} A_\mu^0(q), \quad (4.63)$$

здесь мы обозначили

$$A_\mu^0(q) = \frac{e_c}{q^2} \mathcal{J}_\mu(q). \quad (4.64)$$

Таким образом, изменение амплитуды обусловлено двумя эффектами: перенормировкой взаимодействия и изменением внешнего поля в результате виртуального рождения электрон-позитронных пар. Знак изменения поля легко определить из физических соображений. Пусть, например, тяжелая частица обладает положительным зарядом. Тогда при рождении в поле этой частицы электрон-позитронной пары позитрон отталкивается и уходит на большое расстояние, а частица оказывается окруженной отрицательными зарядами, и наблюдаемый заряд этой частицы должен уменьшиться.



Этот эффект называется поляризацией вакуума. Фактически он аналогичен поляризации диэлектрика, где роль электрон-позитронных пар играют молекулярные диполи.

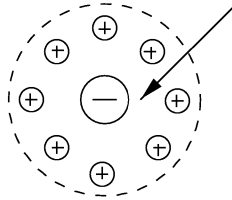
Физический и голый заряды связаны:

$$e_c^2 = Z_3 e_0^2$$

(напомним, что в соответствии с тождеством Уорда: $Z_1 = Z_2$). Поэтому ясно, что $Z_3 < 1$. Таким образом, заряд электрона как бы экранирован, и именно этот экранированный заряд есть

$$e_c^2 = \frac{4\pi}{137},$$

наблюдаемая величина на макроскопических расстояниях от электрона. А если мы пойдем далеко вглубь, т. е. на очень малые расстояния к электрону, то измерим затравочный заряд, который больше, чем $4\pi/137$.



Это означает, что

$$\text{P}^c(q^2) > 0, \quad \text{P}^c(0) = 0,$$

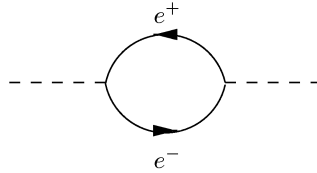
т. е. взаимодействие растет при больших переданных импульсах, соответствующих малым расстояниям:

$$e_0^2 \sim \frac{e_c^2}{1 - \text{P}^c(q^2)} \quad \text{при} \quad |q|^2 \rightarrow \infty.$$

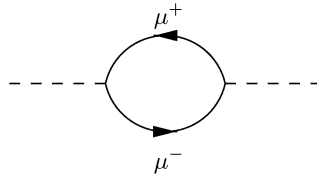
Как мы видим, поправки к рассеянию электрона во внешнем поле возникают благодаря двум эффектам — поляризации вакуума и поправкам к вершине. Теперь вычислим вклад от обоих эффектов в амплитуду рассеяния электрона внешним полем в первом порядке по e^2 . Начнем с поляризации вакуума:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \text{Sp} \left(\gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}} \gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} \right). \quad (4.65)$$

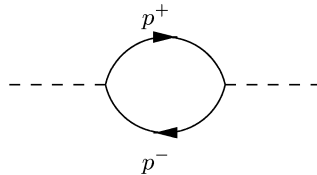
Этому выражению соответствует диаграмма



Однако вклад в поляризационный оператор фотона дадут все частицы, например, мюоны:



Эта диаграмма вычисляется аналогично (4.65). Однако для протонов уже не ясно, как вычислять такой процесс:



поскольку протоны участвуют еще и в сильных взаимодействиях. Но мы покажем, что вклад этих диаграмм $\sim k^2/m^2$, и поэтому при не слишком больших энергиях даже мюоны дают малый вклад. При дальнейшем увеличении энергии начинают сказываться сильные взаимодействия. Тщательная проверка радиационных поправок при не очень высоких энергиях гарантирует, что нет необнаруженных легких частиц.

Итак, перейдем к вычислению (4.65). Представим $\Pi_{\mu\nu}$ в виде

$$\Pi_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2)$$

и вычислим

$$\text{Sp}\Pi_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\mu} = 3k^2\Pi(k^2). \quad (4.66)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\mu} &= 3k^2\Pi(k^2) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \text{Sp}(\gamma_\nu(m + \hat{p})\gamma_\nu(m + \hat{p} - \hat{k})) \times \\ &\times \frac{1}{(m^2 - p^2)(m^2 - (p - k)^2)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_\nu\gamma_\nu &= 4, \\ \gamma_\nu\hat{p}\gamma_\nu &= -2\hat{p}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_\nu(m + \hat{p})\gamma_\nu(m + \hat{p} - \hat{k})) &= \text{Sp}[(4m - 2\hat{p})(m + \hat{p} - \hat{k})] = \\ &= 16m^2 - 8p(p - k). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Здесь мы использовали то, что след произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю, а

$$\text{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\delta_{\mu\nu}.$$

Интеграл (4.67) является расходящимся. Однако нас интересует не сама величина $\Pi(k^2)$, а разность

$$\Pi^c(k^2) = \frac{\Pi(k^2) - \Pi(0)}{1 - \Pi(0)} \sim \Pi(k^2) - \Pi(0). \quad (4.69)$$

Она окажется сходящейся величиной.

Вычислим в (4.67) интеграл по dp_0 . От первого знаменателя в (4.67) имеем полюса

$$p_{1,2}^0 = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 - i\varepsilon},$$

от второго —

$$p_{3,4}^0 = k_0 \pm \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - i\varepsilon}.$$

Рассмотрим область пространственноподобных k , т. е. $k^2 < 0$, тогда можно найти систему отсчета, где $k_0 = 0$. Полюса при этом будут расположены симметрично относительно мнимой оси k_0 , тогда контур интегрирования можно развернуть и направить вдоль мнимой оси (так как при таком повороте контур не пересечет особенностей), см. рис. 27. А так как в этом случае

$$\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} = \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4 i} = \frac{idp'_0 d^3p}{(2\pi)^4 i}$$

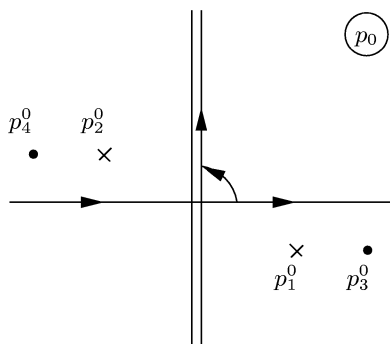


Рис. 27

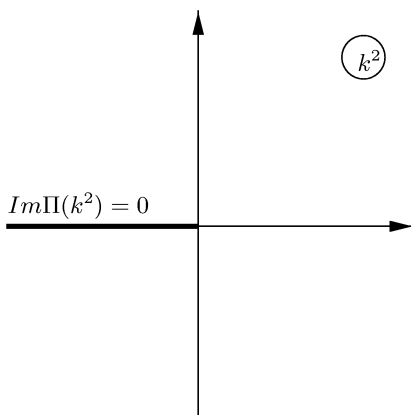


Рис. 28

— величина вещественная, то и весь интеграл (4.67) тоже вещественен, поскольку в подынтегральное выражение входят только квадраты p_0^2 .

Итак, если рассмотрим комплексную плоскость k^2 , то на вещественной оси в области отрицательных k^2 интеграл вещественен (жирная линия на рис. 28). И, кроме того, поскольку знаменатель (4.67) на повернутом контуре нигде в нуль не обращается, он не имеет особенностей. (Чтобы интеграл (4.67) не расходился при больших p^2 , можно ограничить интегрирование сверху некоторым параметром обрезания Λ , об этом поговорим позднее.) Выясним, где интеграл (4.67) может стать комплексным.

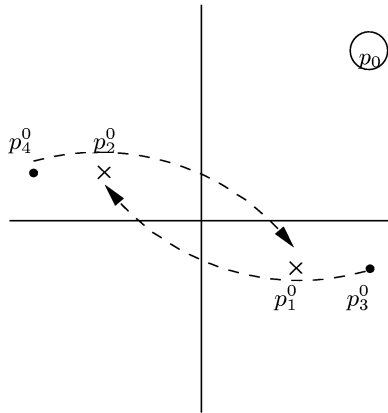


Рис. 29

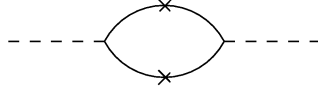
Если в плоскости k^2 пойти в область времениподобных k , т. е. $k^2 > 0$, то полюса p_3^0, p_4^0 начнут двигаться в плоскости p_0 , и при $p_4^0 = p_1^0$ либо при $p_3^0 = p_2^0$ полюса зажмут контур (рис. 29), так что его невозможно будет деформировать, чтобы обойти полюс, не пересекая при этом другого полюса. То есть при некотором k_0 подынтегральное выражение на контуре интегрирования обращается в бесконечность, а это означает, что в этой точке интеграл (4.67) имеет особенность и может стать комплексным. Определим k_0 из условия $p_4^0 = p_1^0$:

$$\begin{aligned} k_0 - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \\ k_0 &= \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

То есть мнимость возникает при достаточно большом k_0 , когда реально могут родиться две частицы с энергиями

$$\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2},$$

соответственно



Есть и другая возможность:

$$k_0 = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}; \quad (4.71)$$

этот случай неинтересен, так как соответствует отрицательным энергиям фотона. Запись (4.70) релятивистски инвариантна. Чтобы записать это выражение в инвариантном виде, перейдем сначала в систему отсчета, где $\mathbf{k} = 0$ (это можно сделать в силу $k^2 > 0$), тогда

$$k_0^2 = k^2 = 4(m^2 + \mathbf{p}^2),$$

т. е. особенности возникают при

$$k^2 > 4m^2. \quad (4.72)$$

На плоскости k^2 проведем разрез от точки $4m^2$ вдоль вещественной оси (рис. 30).

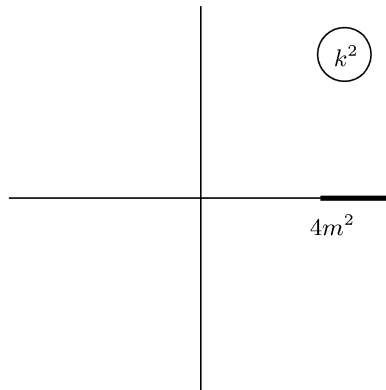


Рис. 30

Ясно, что больше никаких особенностей в комплексной плоскости интеграл не имеет. Пользуясь же аналитичностью интеграла (4.67), можем сразу написать дисперсионный интеграл для $\Pi^c(k^2)$:

$$\Pi^c(k^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dk'^2 \text{Im}\Pi^c(k'^2)}{k'^2 - k^2}. \quad (4.73)$$

Если он расходится, мы его можем улучшить, вычитая $\Pi^c(0) = 0$, тогда

$$\Pi^c(k^2) = \frac{1}{\pi} \int dk'^2 \text{Im}\Pi^c(k'^2) \left[\frac{1}{k'^2 - k^2} - \frac{1}{k'^2} \right]. \quad (4.74)$$

А поскольку мнимость возникает при $k^2 > 4m^2$, то

$$\Pi^c(k^2) = \frac{k^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dk'^2 \text{Im}\Pi^c(k'^2)}{k'^2(k'^2 - k^2)}. \quad (4.75)$$

Теперь вычислим мнимую часть $\text{Im}\Pi^c$. Как мы видели, $\text{Im}\{3k^2\Pi(k^2)\}$ возникает из-за пересечения контуром интегрирования C при его деформации полюса (рис. 31).

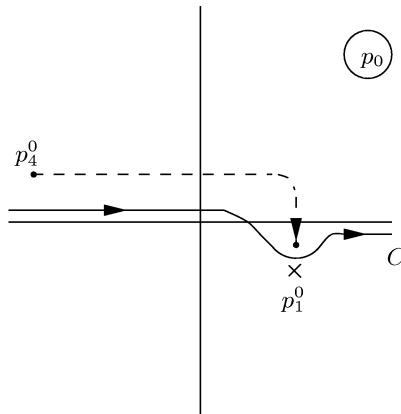


Рис. 31

Такой контур можно разбить на две части: C_1 и C_2 (рис. 32):

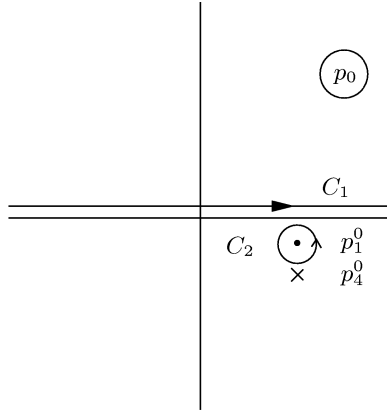


Рис. 32

причем интеграл по C_1 — вещественный. Мнимая часть появится только от интегрирования по C_2 , а этот интеграл сводится к вычету в точке p_4^0 .

Итак, полюсной вклад в $3k^2\Pi(k^2)$ равен

$$-e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)2(k_0 - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2})} \text{Sp}().$$

Но

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = P \frac{1}{m^2 - p^2} + i\pi\delta(m^2 - p^2),$$

т. е. вклад в мнимую часть дает только полюсной член (с δ -функцией). Таким образом,

$$3k^2\text{Im}\Pi(k^2) = -e^2\pi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\delta(m^2 - p^2)}{2(k_0 - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2})} \text{Sp}(), \quad (4.76)$$

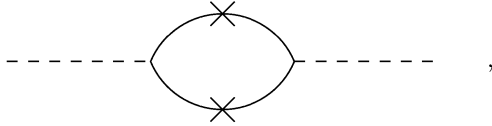
или, используя, как обычно, соотношение

$$\frac{d^3p}{2p_0} = d^4p\theta(p_0)\delta(m^2 - p^2) \equiv d^4p\delta_+(m^2 - p^2),$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} 3k^2 \text{Im}\Pi(k^2) &= \\ &= -e^2 \pi \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(m^2 - p^2) \delta_+(m^2 - (p - k)^2) \text{Sp}(). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Мы получили мнимую часть, совпадающую с той, которая вытекает из условия унитарности, т. е. дается диаграммой



где в промежутке реальные частицы. То есть снова подтвердили тот факт, что фейнмановские диаграммы автоматически удовлетворяют условию унитарности.

Раскрывая при помощи (4.68) выражение для $\text{Sp}()$, получим из (4.77):

$$3k^2 \text{Im}\Pi(k^2) = -e^2 \int \frac{d^4 p}{8\pi^2} [16m^2 - 8p^2 + 8pk] \delta(m^2 - p^2) \delta_+(m^2 - (p - k)^2), \quad (4.78)$$

но из δ -функций следует, что

$$p^2 = m^2, \quad m^2 - (p - k)^2 = 2pk - k^2 = 0, \quad 2pk = k^2.$$

Отсюда

$$\text{Im}\Pi(k^2) = -e^2 \frac{8m^2 + 4k^2}{3k^2} \int \frac{d^4 p}{8\pi^2} \delta(p^2 - m^2) \delta_+((p - k)^2 - m^2). \quad (4.79)$$

Для вычисления этого интеграла удобно перейти в систему, где $\mathbf{k} = 0$, тогда $(p - k)^2 - m^2 = -2p_0 k_0 + k^2$ и

$$\int \frac{d^4 p}{8\pi^2} \delta(p^2 - m^2) \delta_+(k^2 - 2p_0 k_0) = \int \frac{d^3 p}{8\pi^2} \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \frac{1}{2k_0} = \dots \quad (4.80)$$

(здесь $p_0 = k^2/2k_0 = k_0/2$; переходя к сферической системе координат, имеем $d^3 p = p^2 dp \times 4\pi = 2\pi p dp^2$, так что равенство можно продолжить так)

$$= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{2k_0} 2\pi \sqrt{p_0^2 - m^2} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{k_0} \frac{\sqrt{k_0^2 - 4m^2}}{2} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}}. \quad (4.81)$$

Таким образом,

$$\text{Im}\Pi(k^2) = -\frac{e^2}{16\pi} \frac{8m^2 + 4k^2}{3k^2} \sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{2m^2 + k^2}{3k^2} \sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}}.$$

Окончательно,

$$\text{Im}\Pi(k^2) = -\frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (4.82)$$

Заметим, что в силу (4.69) $\text{Im}\Pi(k^2) = \text{Im}\Pi^c(k^2)$ с точностью до коэффициента. Таким образом,

$$\Pi^c(k^2) = -\frac{\alpha k^2}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \sqrt{1 - 4m^2/\kappa^2}}{\kappa^2(\kappa^2 - k^2)} \left(1 + \frac{2m^2}{\kappa^2}\right). \quad (4.83)$$

Вычислим (4.83) в двух предельных случаях $k^2 \rightarrow 0$ и $k^2 \rightarrow \infty$. В первом случае ($k^2 \rightarrow 0$), проведя замену $x = 4m/\kappa^2$, получим

$$\Pi^c(k^2) = -\frac{\alpha k^2}{3\pi 4m^2} \int_0^1 dx \sqrt{1-x} \left(1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{\alpha k^2}{15\pi m^2}, \quad (4.84)$$

т. е., как и следовало ожидать, $\Pi^c(k^2) \sim k^2$ при $k^2 \rightarrow 0$.

Во втором случае ($k^2 \rightarrow \infty$) при $\kappa^2 \ll k^2$ интеграл логарифмически растет с k^2 , т. е. именно эта область и дает основной вклад, поэтому можно написать

$$\Pi^c(k^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{k^2} \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2} \quad (4.85)$$

(в (4.85) мы пренебрегли $\ln 4$ по сравнению с $\ln k^2/m^2$). Логарифм, вошедший в (4.85), фактически является главной проблемой квантовой электродинамики. Например, в амплитуду рассеяния электрона внешним полем он входит следующим образом:

$$\frac{1}{1 - \Pi^c(k^2)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}},$$

т. е. амплитуда может иметь полюс, физический смысл которого неясен, и это реальная трудность для нашей теории.

Пока мы оставим этот вопрос и посмотрим на вклад поляризации вакуума в амплитуду (4.63) с несколько иной точки зрения, а именно: амплитуда имеет вид:

$$F = e_c \bar{u}(p_2) \Gamma_\mu^c(p_2, p_1) u(p_1) \frac{1}{1 - \Pi^c(q^2)} A_\mu^0(q),$$

но при малых q^2

$$\frac{1}{1 - \Pi^c(q^2)} \approx 1 + \Pi^c(q^2);$$

учитывая, что

$$\Gamma_\mu^c = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^c,$$

получим

$$F \approx e_c \bar{u}(p_2) [\gamma_\mu (1 + \Pi^c(q^2)) + \Lambda_\mu^c(p_2, p_1)] u(p_1) A_\mu^0(q). \quad (4.86)$$

Все члены в квадратных скобках здесь пропорциональны γ_μ и отличие множителя перед γ_μ в (4.86) связано со вкладом поляризации вакуума. Ненулевой вклад вершинной части Λ_μ^c — выражает как бы неточность заряда; действительно, для неточечных частиц формфактор имеет вид:

$$F(q) = 1 + \frac{q^2 r_0^2}{6},$$

где r_0 — средний радиус распределения заряда.

Теперь займемся вычислением Λ_μ в первом порядке:

$$\Lambda_\mu = \begin{array}{c} | \\ | \\ q \\ | \\ \alpha \\ / \quad \backslash \\ e \quad \quad e \\ \backslash \quad / \\ k \quad \quad k \\ p_1 \quad p_2 \end{array} = e_c^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \gamma_\nu \frac{1}{m - \hat{p}_2 + \hat{k}} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_1 + \hat{k}} \gamma_\nu \frac{1}{k^2}, \quad (4.87)$$

$$\Lambda_\mu^c = \Lambda_\mu - \Lambda_\mu(m, m). \quad (4.88)$$

Из соображений релятивистской инвариантности, как мы уже говорили, можно написать

$$\bar{u}(p_2) \Lambda_\mu^c(p_2, p_1) u(p_1) = \bar{u}(p_2) [a \gamma_\mu + b \sigma_{\mu\nu} q_\nu] u(p_1). \quad (4.89)$$

Мы также писали

$$\Gamma_\mu = \tilde{a}\gamma_\mu + b\sigma_{\mu\nu}q_\nu,$$

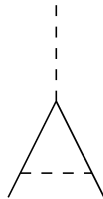
где $\tilde{a} = \tilde{a}(q^2)$, $b = b(q^2)$, величину $\tilde{a}(0)$ мы назвали зарядом.

Для величины же $a(q^2)$ имеем в силу (4.89)

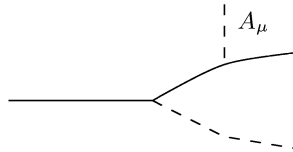
$$a(0) \neq 0,$$

но и $b(0)$ может быть отличной от нуля. Мы показали, что в случае $b = 0$, электрон обладает магнитным моментом, равным магнетону Бора. Если же $b \neq 0$, то это означает наличие у электрона дополнительного момента, называемого аномальным магнитным моментом. Из вида (4.87) ясно, что особых оснований полагать $b(0) = 0$ нет, что подтверждается и непосредственным вычислением интеграла.

Таким образом, хотя мы начали строить теорию, исходя из простейшего взаимодействия $\tilde{a}(q^2) = \text{const} = e$ и $b(q^2) = 0$, при учете высших приближений появляется и формфактор (зависимость $\tilde{a}(q^2)$) и аномальный магнитный момент. Это легко понять из физических соображений. Рассмотрим процесс

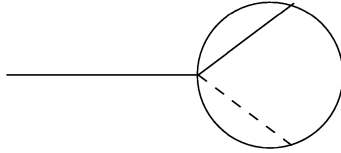


Он означает, что даже если электрон покоился в некоторый момент времени, то, испустив фотон, он приобретает импульс, и внешнее поле взаимодействует уже с током:



Естественно, из-за этого возникает магнитный момент. Кроме того, появится некоторый формфактор, поскольку заряд эффективно распре-

делится по области $r_0 \sim 1/m$:



Впервые вычисление магнитного момента провел Швингер в 1949 г. и получил выражение

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (4.90)$$

Приведем примерный путь вычисления $\Lambda_\mu^{(1)}$ фейнмановским методом. В первом порядке по e_c^2 для Λ_μ имеем

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \quad q \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \\ p_1 \quad p_2 \end{array} = e_c^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\gamma_\nu(m + \hat{p}_2 - \hat{k})\gamma_\mu(m + \hat{p}_1 - \hat{k})\gamma_\nu}{[m^2 - (p_2 - k)^2][m^2 - (p_1 - k)^2]k^2}. \quad (4.91)$$

Для вычисления такого интеграла Фейнман пользуется тождеством

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{3!} \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)}{a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3)^3}. \quad (4.92)$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= \frac{1}{[m^2 - (p_2 - k)^2][m^2 - (p_1 - k)^2]k^2} = \\ &= \frac{1}{3!} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\sum \alpha_i - 1)}{\{\alpha_3 k^2 + \alpha_2[(p_2 - k)^2 - m^2] + \alpha_1[(p_1 - k)^2 - m^2]\}^3}. \end{aligned}$$

Из-за δ -функции $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$, тогда

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{3!} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\sum \alpha_i - 1)}{[k^2 - 2k(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)]^3}.$$

Сделаем замену

$$k' = k - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2,$$

при этом

$$k[k - 2(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)] = (k' + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)[k' - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)],$$

т. е.

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{3!} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\sum \alpha_i - 1)}{[k'^2 - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)^2]^3}. \quad (4.93)$$

Таким образом, для Λ_μ будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu = & \frac{1}{3!} \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\sum \alpha_i - 1) e_c^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 i} \times \\ & \times \frac{\gamma_\nu [m + (1 - \alpha_2) \hat{p}_2 - \alpha_1 \hat{p}_1 - \hat{k}'] \gamma_\mu [m + (1 - \alpha_1) \hat{p}_1 - \alpha_2 \hat{p}_2 - \hat{k}'] \gamma_\nu}{[k'^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 m^2 + \alpha_1 \alpha_2 q^2]^3}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Здесь учтено, что $q^2 = (p_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2p_1 p_2$. Числитель подынтегрального выражения (с учетом того, что члены, линейные по k' , вкладывают в интеграл не дадут в силу их антисимметрии) можно представить в виде:

$$f_1(q^2, \alpha_1, \alpha_2) \gamma_\mu + f_2(q^2, \alpha_1, \alpha_2) \sigma_{\mu\nu} q_\nu + k'^2 \gamma_\mu. \quad (4.95)$$

Теперь интегрирование по $d^4 k'$ сводится к вычислению двух интегралов:

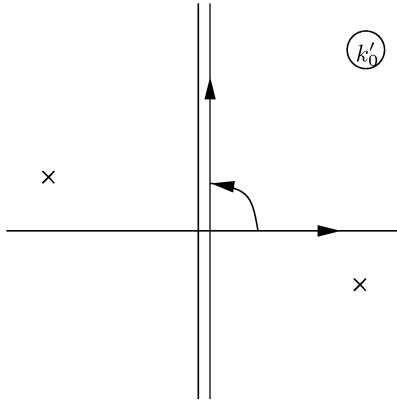
$$I_1 = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{(k'^2 - \Delta)^3} \quad (4.96)$$

и

$$I_2 = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 i} \frac{k'^2}{(k'^2 - \Delta)^3}. \quad (4.97)$$

В них всегда можно развернуть контур интегрирования по dk'_0 вдоль

мнимой оси, так как при этом он не пересечет особенностей:



При этом

$$k'_0 = ik'_4 \quad \text{и} \quad k'^2 = k_0'^2 - \mathbf{k}'^2 = -k_4'^2 - \mathbf{k}'^2,$$

т. е. получатся интегралы по евклидову пространству. Переходя к сферическим координатам и интегрируя по углам, получим

$$d^4 k' = \pi^2 k'^2 dk'^2,$$

т. е. будем иметь

$$I_1 = - \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k'^2 + \Delta)^3} = - \int \frac{\pi^2 k'^2 dk'^2}{(2\pi)^4 (k'^2 + \Delta)^3};$$

аналогично,

$$I_2 = \int \frac{\pi^2 k'^4 dk'^2}{(2\pi)^4 (k'^2 + \Delta)^3} = \int_0^\infty \frac{\pi^2 x^2 dx}{(2\pi)^4 (x + \Delta)^3}.$$

Первый интеграл равен

$$I_1 = - \int_0^\infty \frac{\pi^2 x dx}{(2\pi)^4 (x + \Delta)^3} = - \frac{1}{16\pi^2 \Delta}.$$

Второй —

$$I_2 = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{(y - \Delta)^2 dy}{y^3} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\int_{\Delta}^{\infty} \frac{dy}{y} - 2\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dy}{y^2} + \Delta^2 \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dy}{y^3} \right] = \\ = \frac{1}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{y}{\Delta} \right) - \frac{3}{2} \right],$$

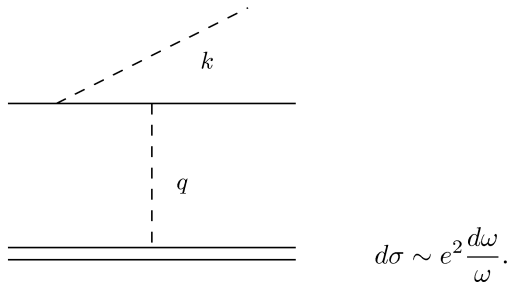
т. е. при больших k'^2 он логарифмически расходится. Эта расходимость убирается перенормировкой, т. е. вычитанием $\Lambda_{\mu}(m, m)$, поскольку эта величина содержит точно такой же логарифм $\ln(y/\Delta(q=0))$. Однако непосредственно из вида (4.91) вытекает логарифмическая расходимость интеграла и при малых k^2 , если $p_1^2 = m^2$ и $p_2^2 = m^2$, т. е. для реальных электронов.

Действительно, знаменатель (4.91) в этом случае имеет вид:

$$[m^2 - (p_2 - k)^2][m^2 - (p_1 - k)^2]k^2 \simeq 2p_2k \cdot 2p_1kk^2,$$

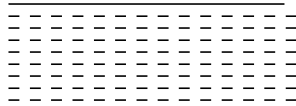
и при малых k^2 опять возникает $\int d^4k/k^4$.

С такой ситуацией мы уже сталкивались при рассмотрении тормозного излучения.



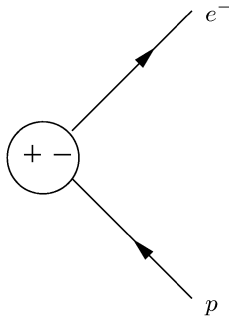
На самом деле, эта расходимость связана с некорректной постановкой задачи, поскольку при достаточно малых ω параметр разложения не мал и теория возмущений неприменима. С другой стороны, в любом эксперименте, как только родилась частица, образовались и фотоны. Реально создать частицу без фотонов нельзя, так как достаточно сколь угодно малого воздействия на частицу, чтобы она испустила мягкий фотон, и чем меньше частота фотонов, тем их больше. То есть трудность связана также и с нефизичностью постановки задачи. Как можно

с ней справиться? Можно предположить, что начальное состояние — это электрон и большое число фотонов, т. е.

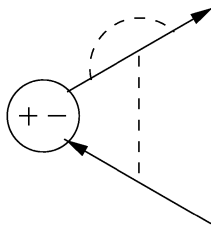


Однако здесь тоже имеется некоторая неоднозначность, связанная с физикой рассматриваемого процесса.

Поскольку в природе нет заряженного вещества (все атомы нейтральны), то число фотонов будет зависеть от способа “обдирки” атома по существу (т. е. от конкретного способа, которым мы создали заряженные частицы). Таким образом, единственный физически последовательный подход — исходить из нейтрального вещества и учитывать способ образования заряженных частиц, например:



Из физических соображений ясно, что вероятность образования электрона без фотонов равна нулю. Однако если вычислить по теории возмущений сечение, например, такого процесса:



то получится бесконечность. Здесь, на самом деле, нужно учитывать рождение многих фотонов. Пусть, например, две нерелятивистские ча-

стицы с противоположными зарядами e и $-e$ и энергиями $\sim \epsilon$ рождаются с относительной скоростью v . Тогда сечение процесса с испусканием n фотонов будет иметь такую структуру:

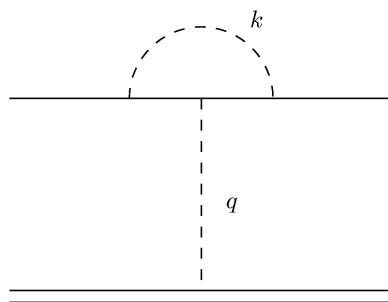
$$\sigma_n \sim e^{-\frac{\alpha}{\pi} v^2 \ln \frac{\epsilon}{\omega}} \left(\frac{\alpha}{\pi} v^2 \ln \frac{\epsilon}{\omega} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

Отсюда сразу следует, что при $\omega \rightarrow 0$ вероятность испускания любого заданного числа фотонов будет равна нулю. Однако

$$\sum_n \sigma_n = \text{const.}$$

Рассматриваемая теория применима только при фантастически малых частотах, поскольку параметр $\alpha/\pi \sim 1/500$. Область частот, для которых произведение логарифма на этот параметр не мало, экспериментально недостижима. Поэтому обычно поступают иначе.

Пусть имеется процесс рассеяния. Приписывают фотону малую массу λ , при этом функция Грина фотона будет иметь вид:

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2},$$


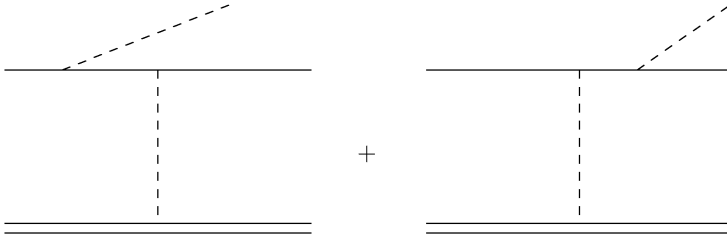
Для Λ_μ тогда получим

$$\Lambda_\mu \sim \gamma_\mu \ln \frac{m}{\lambda}.$$

А поскольку реально измеряется всегда сечение, то запишем

$$d\sigma = d\sigma_s + d\sigma_\gamma,$$

где $d\sigma_s$ — сечение упругого рассеяния, $d\sigma_\gamma$ — сечение неупругих процессов с рождением фотонов, например:



Так как всегда имеются нерегистрируемые фотоны с $\omega < \omega_{min}$, где ω_{min} определяется условиями эксперимента, чувствительностью приборов и т. д., то

$$d\sigma = d\sigma_s + d\sigma_\gamma(\omega < \omega_{min}) \sim \sim \ln \frac{m}{\lambda} + \ln \frac{\lambda}{\omega_{min}} = \ln \frac{m}{\omega_{min}}$$

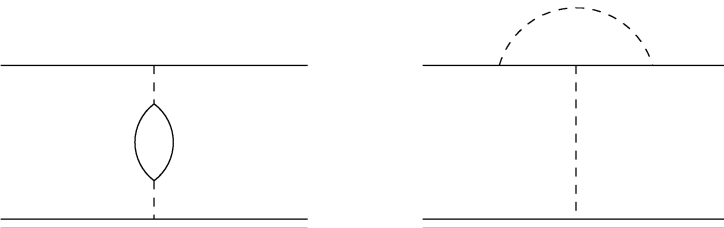
и результат оказывается не зависящим от λ . Интеграл же для Λ_μ , если ввести λ , оказывается вполне определенным и при $q^2/m^2 \ll 1$ равен

$$\Lambda_\mu^c = \gamma_\mu \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right] \frac{q^2}{m^2} + \frac{\alpha}{4m\pi} \sigma_{\mu\nu} q_\nu. \tag{4.98}$$

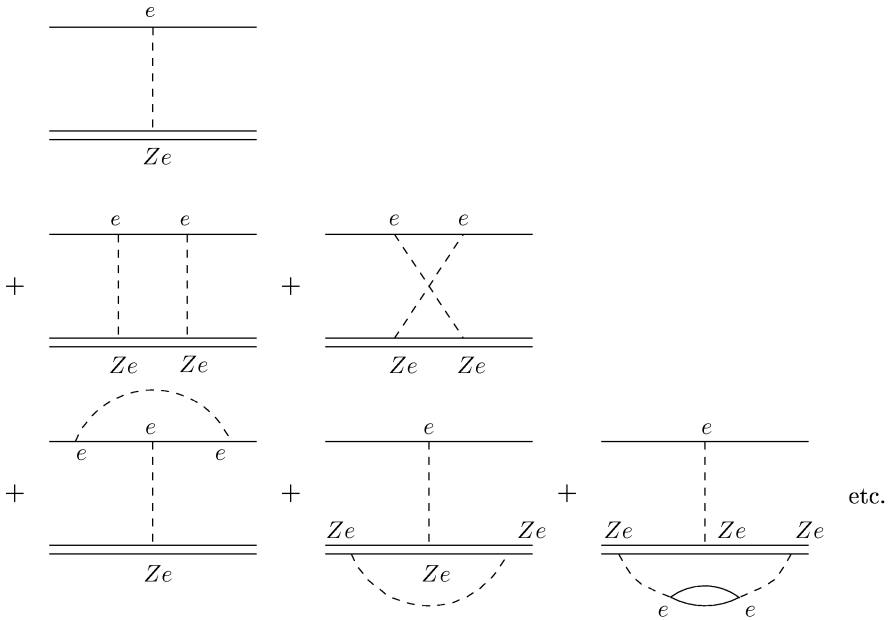
Первый член (4.98) был вычислен Фейнманом, второй — Швингером. Второй член как раз соответствует аномальному магнитному моменту электрона $\alpha/2\pi$.

4.6 Уравнение Дирака во внешнем поле

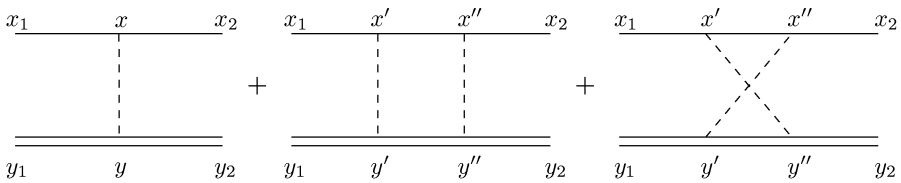
Мы вычислили поправки первого порядка к рассеянию электронов внешним полем.



Иногда приходится вычислять много поправок более высокого порядка, например, в случае рассеяния на ядре с большим атомным номером Z , так как параметром разложения здесь является $Z\alpha$. К счастью, ситуация упрощается из-за того, что все частицы, обладающие большим зарядом Z , имеют большую массу $M \gg m_e$. Пользуясь этим обстоятельством, займемся изучением взаимодействия тяжелых заряженных частиц с электроном и попытаемся найти все поправки по $Z\alpha$. Итак, процесс взаимодействия описывается всевозможными диаграммами вида:



Рассмотрим пока первые три графика:



Для функции Грина тяжелой частицы имеем (предполагая, что она обладает спином 1/2)

$$G(y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} e^{-ipy} \frac{M + \hat{p}}{M^2 - p^2 - i\delta}. \quad (4.99)$$

Запишем p_0 в виде (пользуясь тем, что $\mathbf{p}^2 \ll M^2$)

$$p_0 = M + \varepsilon,$$

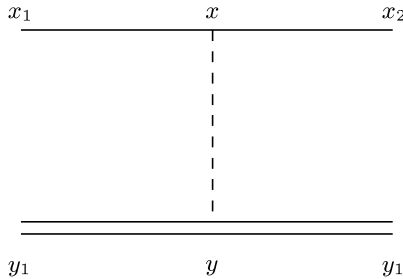
где ε — кинетическая энергия, тогда

$$M^2 - p^2 = M^2 - (M + \varepsilon)^2 + \mathbf{p}^2 = -2M\varepsilon + \mathbf{p}^2 = 2M \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \varepsilon \right)$$

и

$$\begin{aligned} G(y) &= \int \frac{d\varepsilon d^3 p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-i(M+\varepsilon)\tau} [M(1+\gamma_0) + \varepsilon\gamma_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}] e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}}}{-2M\varepsilon - i\delta + \mathbf{p}^2} = \\ &= \frac{e^{-iM\tau}}{2M} \theta(\tau) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2M}\tau} e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}} \left[M(1+\gamma_0) + \frac{\mathbf{p}^2}{2M}\gamma_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} \right] = \\ &= \theta(\tau) e^{-iM\tau} \frac{1+\gamma_0}{2} \delta(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Мы получили естественный результат — тяжелая частица покоится в одной точке и распространяется вперед только по времени. (Мы везде пренебрегли членами \mathbf{p}^2 по сравнению с массой покоя.) Нижней линии диаграммы



таким образом, будет отвечать выражение

$$Ze \int G(y_2 - y) i\gamma_\mu G(y - y_1) D(x - y) d^4 y =$$

$$\begin{aligned}
&= iZe\delta(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \frac{1 + \gamma_0}{2} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_0}{2} \times \\
&\times \int d\tau e^{-i(\tau_2 - \tau)M - i(t - \tau_1)M} D(x - y) \theta(\tau_2 - \tau) \theta(\tau - \tau_1) = \\
&= \delta(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) g_{\mu 0} e^{-iM(\tau_2 - \tau_1)} [-u(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)] \frac{1 + \gamma_0}{2}, \quad (4.101)
\end{aligned}$$

где

$$u = -iZe \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau D(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}_1) \theta(\tau_2 - \tau_1). \quad (4.102)$$

При выводе (4.101) мы использовали то, что

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \gamma_0}{2} \gamma_i \frac{1 + \gamma_0}{2} &= \frac{1 + \gamma_0}{2} \frac{1 - \gamma_0}{2} \gamma_i = 0, \\
\frac{1 + \gamma_0}{2} \gamma_0 \frac{1 + \gamma_0}{2} &= \frac{1 + \gamma_0}{2},
\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{1 + \gamma_0}{2} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_0}{2} = g_{\mu 0} \frac{1 + \gamma_0}{2}. \quad (4.103)$$

Вычислим интеграл (4.102) при $\tau_1 \rightarrow -\infty$, $\tau_2 \rightarrow +\infty$. Имеем

$$D(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}_1) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ik_0(t - \tau) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2},$$

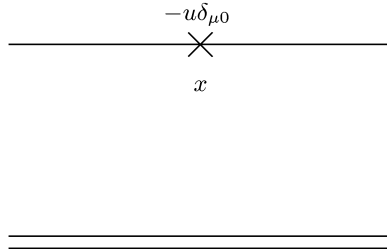
тогда

$$\begin{aligned}
u &= -iZe \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ik_0(t - \tau) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} = \\
&= -iZe \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ik_0 t + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} \delta(k_0) 2\pi = \\
&= -iZe \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 i} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}}{-\mathbf{k}^2} = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1|},
\end{aligned}$$

т. е. получили выражение, совпадающее с обычным кулоновским потенциалом для заряда Ze :

$$u = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (4.104)$$

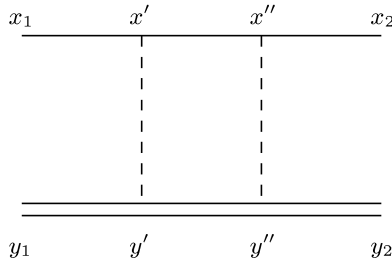
Зависимость от координаты электрона в (4.101) вошла только в u , так что график можно перерисовать так:



Нижней линии соответствует свободная функция Грина тяжелой частицы (4.100), а верхней, при $\tau_1 \rightarrow -\infty$, $\tau_2 \rightarrow \infty$, — амплитуда рассеяния электрона внешним (кулоновским) полем, создаваемым частицей Ze , а именно:

$$\int d^4x G(x_2 - x)(i\gamma_0 e u(x, y))G(x - x_1).$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

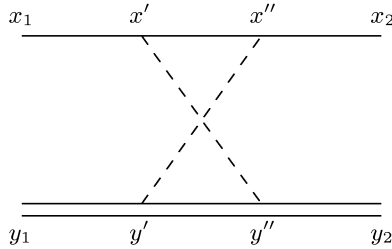


Нижней ее части соответствует выражение

$$\begin{aligned} & \int G(y_2 - y'')i\gamma_\mu ZeG(y'' - y')i\gamma_\nu ZeG(y' - y_1) \times \\ & \times D(x' - y')D(x'' - y'')d^4y'd^4y'' = \\ & = ig_{\mu 0}Ze \frac{1 + \gamma_0}{2} ig_{\nu 0}Ze \delta(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) e^{-iM(\tau_2 - \tau_1)} \times \\ & \times \int d\tau' d\tau'' D(t' - \tau', \mathbf{x}' - \mathbf{y}_1) D(t'' - \tau'', \mathbf{x}'' - \mathbf{y}''), \end{aligned}$$

причем $\tau_1 < \tau' < \tau'' < \tau_2$.

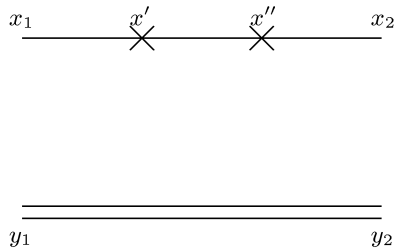
Если бы не это неравенство, интеграл разбился бы на произведения. Однако диаграмме



соответствует такое же выражение, но с другими ограничениями на переменные интегрирования: $\tau_1 < \tau'' < \tau' < \tau_2$. Так что сложение этих диаграмм означает просто переход к интегрированию по всем τ' , τ'' , и в результате для суммы будем иметь

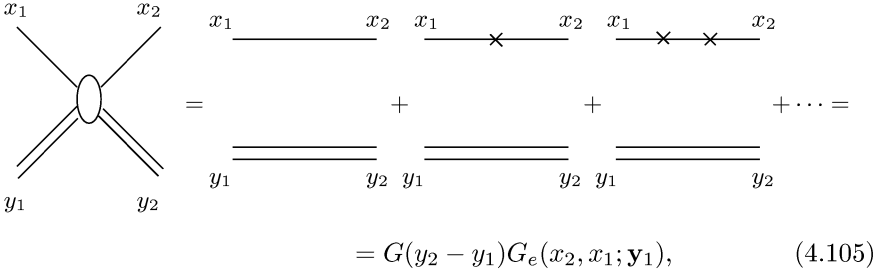
$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x' \quad x'' \quad x_2 \\
 \hline
 | \quad | \\
 \hline
 y_1 \quad y_2
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 x_1 \quad x' \quad x'' \quad x_2 \\
 \hline
 \diagdown \quad \diagup \\
 \hline
 y_1 \quad y_2
 \end{array}
 \sim G(y_2 - y_1)[-u(\mathbf{x}' - \mathbf{y}_1)][-u(\mathbf{x}'' - \mathbf{y}_1)].$$

То есть результат опять разбился на две части: свободное движение тяжелой частицы и рассеяние электрона на кулоновском поле этой частицы; это соответствует тому, что тяжелая частица не чувствует ни отдачи, ни изменения времени. Сумме этих диаграмм можем сопоставить, как и прежде, график



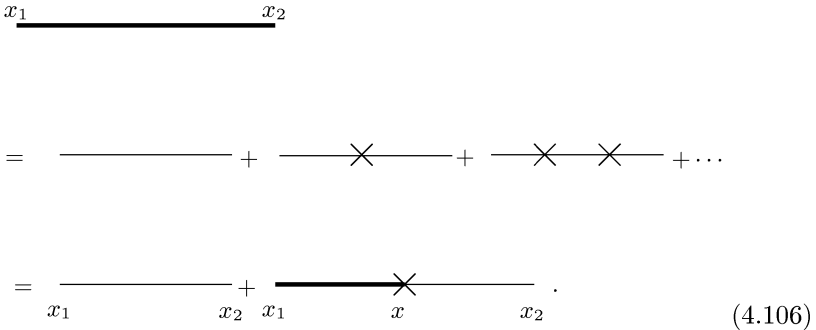
Аналогичная ситуация возникает и в следующих порядках, т. е. полную

амплитуду рассеяния на тяжелой частице можно представить в виде



$$= G(y_2 - y_1)G_e(x_2, x_1; \mathbf{y}_1), \quad (4.105)$$

где G_e — функция Грина электрона во внешнем поле. Будем ее изображать жирной линией, т. е.



$$= \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \times \text{---} + \dots \quad (4.106)$$

Это не что иное, как интегральное уравнение для функции Грина электрона в графическом виде, его можно переписать так:

$$G_e(x_2, x_1; \mathbf{y}_1) = G(x_2 - x_1) + \int d^4x G(x_2 - x)[ie\gamma_0 u(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)]G_e(x, x_1; \mathbf{y}_1). \quad (4.107)$$

От интегрального уравнения легко перейти к дифференциальному, если вспомнить, что

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) G(x) = -i\delta(x).$$

Поддействовав на (4.107) оператором $i\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu - m$, получим

$$\begin{aligned} \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) G_e(x_2, x_1; \mathbf{y}_1) &= \\ &= -i\delta(x_2 - x_1) + e\gamma_0 u(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)G_e(x_2, x_1; \mathbf{y}_1), \end{aligned}$$

т. е.

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{2\mu}} - m - e\gamma_0 u \right) G_e(x_2, x_1; \mathbf{y}_1) = -i\delta(x_2 - x_1). \quad (4.108)$$

Как обычно, функцию Грина можно представить в виде

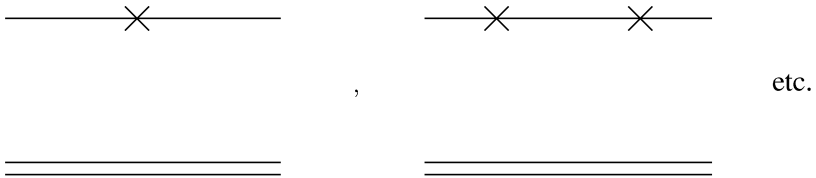
$$G_e(x_2, x_1; \mathbf{y}_1) = \begin{cases} \sum_n \Psi_n^+(x_2) \Psi_n^{+*}(x_1), & t_2 > t_1 \\ -\sum_n \Psi_n^-(x_2) \Psi_n^{-*}(x_1), & t_2 < t_1 \end{cases},$$

где Ψ_n — волновые функции электрона, удовлетворяющие уравнению

$$\left\{ i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{2\mu}} - m - \gamma_0 \frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1|} \right\} \Psi_n(x) = 0. \quad (4.109)$$

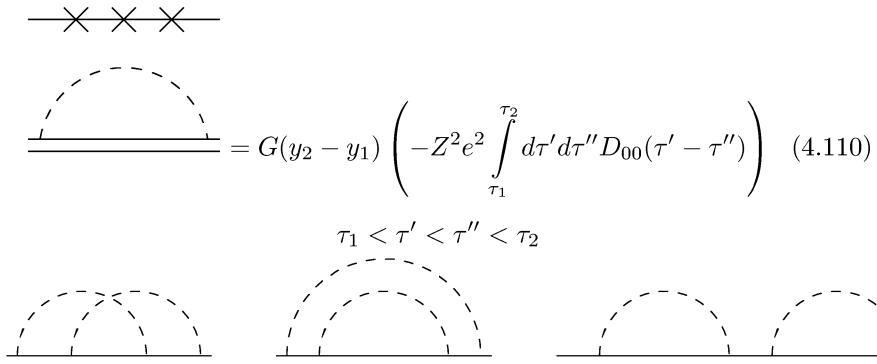
Это есть уравнение Дирака для электрона в кулоновском поле.

Мы пока рассмотрели все поправки по $Z\alpha$, связанные с обменом фотонами, и получили



и т. д.

Однако есть поправки, например, такого вида:



и т. д.

Ясно, что суммирование таких диаграмм одинакового порядка, как и раньше, эквивалентно переходу к интегрированию по всем промежуточным временам, а следовательно, интегралы разобьются на отдельные множители.

Для второго порядка будем иметь

$$G(y_2 - y_1) \left(-Z^2 e^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' d\tau'' D_{00}(\tau' - \tau'') \right)^2 \frac{1}{2!}, \quad \tau' < \tau''. \quad (4.111)$$

$1/2!$ возникает из того, что число независимых диаграмм в $2!$ раз меньше числа перестановок. Аналогично, для n -го порядка

$$G(y_2 - y_1) \left(-Z^2 e^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' d\tau'' D_{00}(\tau' - \tau'') \right)^n \frac{1}{n!}, \quad \tau' < \tau''. \quad (4.112)$$

Если все сложить, получим

$$G(y_2 - y_1) e^{-Z^2 e^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' d\tau'' D_{00}(\tau' - \tau'')}, \quad \tau' < \tau''. \quad (4.113)$$

Переходя к новым переменным в интеграле $\tau = \tau'' - \tau'$, $x = \tau'' + \tau'$, имеем

$$G(y_2 - y_1) e^{-(\tau_2 - \tau_1) Z^2 e^2 \int_0^{\tau_2 - \tau_1} d\tau D_{00}(\tau)}, \quad \tau' < \tau''. \quad (4.114)$$

При $\tau_2 \rightarrow \infty$, $\tau_1 \rightarrow -\infty$ легко убедиться, что интеграл в показателе экспоненты чисто мнимый:

$$\int_0^\infty d\tau \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{-ik_0\tau}}{k^2 - i\varepsilon} = \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^3 k e^{-i|k|\tau}}{2|k|(2\pi)^3}.$$

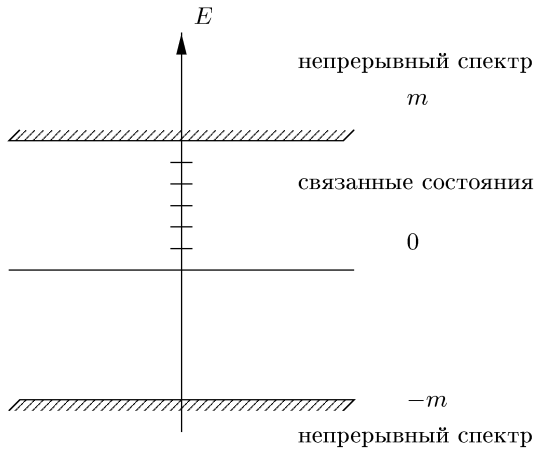
Интеграл по $d\tau$ равен

$$\int_0^\infty d\tau e^{-i|k|\tau} = \frac{1}{i|k|},$$

откуда

$$Z^2 e^2 \int_0^\infty d\tau D_{00}(\tau) = -i Z^2 e^2 \int \frac{d^3 k}{2|k|^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \equiv i\delta m. \quad (4.115)$$

При $E > m$, $E < -m$ имеем сплошной спектр, при $|E| < m$ — дискретный, соответствующий связанным состояниям:



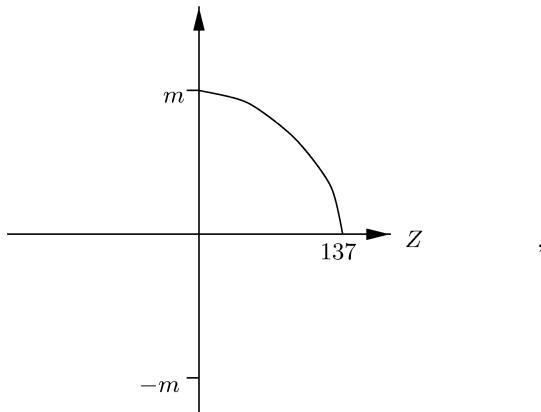
Для энергии E основного связанного состояния в поле ядра с зарядом Z имеем

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}. \quad (4.118)$$

Если $E = m + \varepsilon$, где ε — энергия связи, то

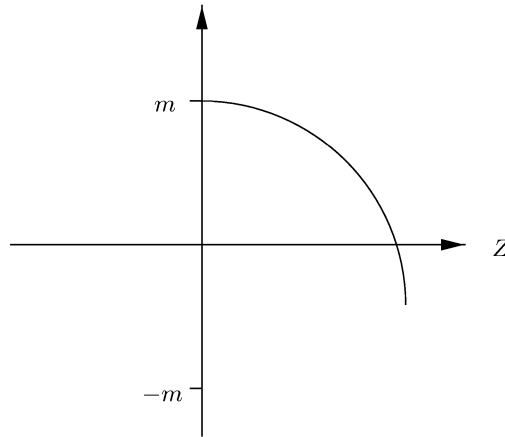
$$\frac{\varepsilon}{m} = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2} - 1.$$

Зависимость энергии основного состояния от Z имеет вид:



То есть при $Z = 137$ энергия обращается в нуль. Однако при $Z \geq 137$ уравнение Дирака решений не имеет (энергия становится мнимой). Это специальное свойство чисто кулоновского потенциала. Оно связано с тем, что если уравнение Дирака переписать в виде уравнения Шредингера с некоторым эффективным потенциалом, то эффективный потенциал оказывается $\sim 1/r^2$, т. е. приводит к падению на центр (при $Z \geq 137$).

С другой стороны, реальное ядро имеет конечный размер, и если это учесть, то можно увеличивать Z и дальше. Уровень при этом опустится ниже нуля:



Это отвечает тому, что атом становится легче ядра. Действительно, масса атома

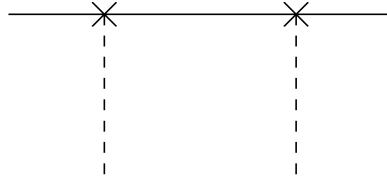
$$M_A = M_Z + m_e + \varepsilon < M_Z.$$

Однако при $E > -m$ ядро еще не может распасться на атом и позитрон, так как

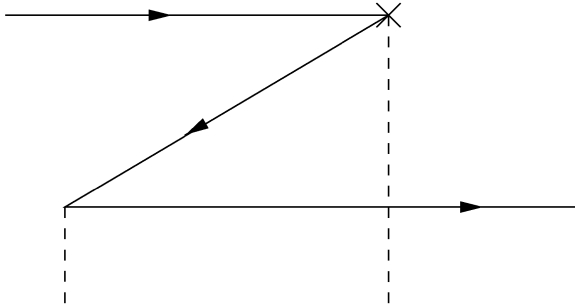
$$M_Z - (M_A + m_e) = -2m_e - \varepsilon < 0.$$

Будем дальше увеличивать Z ; при некотором $Z_{\text{кр}}$ энергия связи станет равной $2m_e$ ($E = -m$) и ядро сможет распасться на атом и позитрон (рис. 33).

Атом же продолжает существовать стабильно, однако его описание становится, по существу, многочастичным. Действительно, решение уравнения Дирака при $E < -m$ принадлежит сплошному спектру, следовательно, не убывает на бесконечности. А атом тем не менее существует. Дело в том, что, хотя состояние отдельного электрона не локализовано, при $Z > Z_{\text{кр}}$ возможны процессы, кроме



такие:



когда в конце возник электрон в результате обмена, то есть электрон непрерывно заменяется, хотя в целом заряд остается локализованным. Ясно, что эта задача уже не одночастичная.

Реалистические расчеты (учитывающие размеры реальных ядер) дают для $Z_{\text{кр}}$ величину

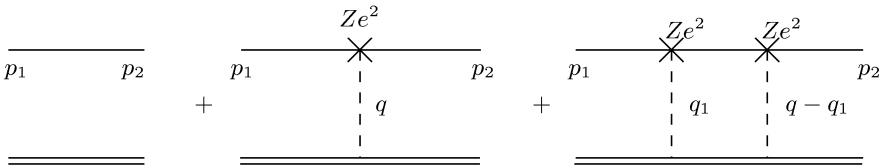
$$Z_{\text{кр}} \simeq 170.$$

Экспериментально реализовать такой заряд в принципе можно, сталкивая два тяжелых атома так, чтобы оба ядра оказались внутри электронного облака.

4.7 Радиационные поправки к уровням водородоподобных атомов (Лэмб-сдвиг)

Рассмотренный в предыдущем разделе случай больших зарядов ядра Z не единственный, когда надо рассматривать диаграммы высших порядков. Существует область энергий, когда и при малых Z теория возмущений неверна.

Действительно, мы уже рассматривали процессы рассеяния электрона на тяжелой частице:



Вторая диаграмма отвечает кулоновскому рассеянию и пропорциональна Ze^2/q^2 (q — переданный импульс), третья уже содержит интеграл

$$(Ze^2)^2 \int \frac{d^3q_1}{q_1^2} \frac{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 + m}{m^2 - (p_1 + q_1)^2} \frac{1}{(q - q_1)^2}.$$

Если электрон тоже нерелятивистский, т. е. $p_{10} \simeq m + \mathbf{p}_1^2/2m$, тогда

$$m^2 - (p_1 + q_1)^2 = m^2 - (m + E)^2 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1)^2 = 2mE + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1)^2,$$

где $E = \mathbf{p}_1^2/2m$, и если $q_1 \sim p_1$, то $d^3q_1 \sim p_1^3$ и интеграл по порядку величины есть

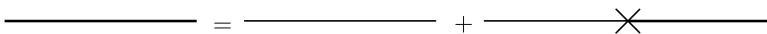
$$(Ze^2)^2 \frac{m}{p_1^3},$$

а сумма двух диаграмм есть

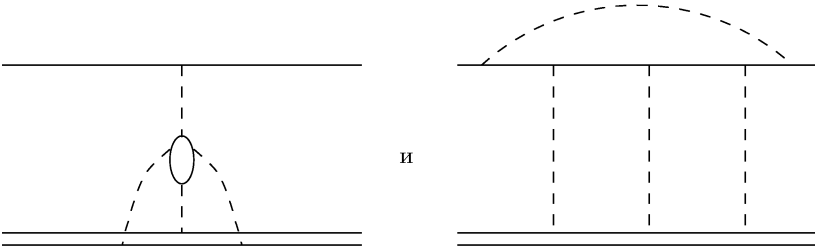
$$\frac{Ze^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{Ze^2 m}{4p_1} \right).$$

Второй член $\sim Ze^2/v$ может быть большим при достаточно малой скорости электрона $v = |\mathbf{p}_1|/m$, а следовательно, нужно суммировать все порядки по Ze^2 , т. е. точно решать уравнение Дирака.

Мы уже просуммировали все поправки по Ze^2 и получили интегральное уравнение для электронной функции Грина в поле ядра (эквивалентное уравнению Дирака):



Вычислим теперь поправки $(Ze^2)^n e^2$ к движению электрона, для этого нам нужно рассмотреть процессы типа:



Посмотрим, как при этом изменится уравнение для функции Грина. Во-первых, из-за поляризации вакуума изменится потенциал, т. е.

$$u(q) \longrightarrow u(q)[1 + \Pi^c(q^2)].$$

Кроме того, в уравнении добавится еще один член, связанный с испусканием и поглощением фотона. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \times \frac{u(q)}{\text{---}} \\ &+ \text{---} \text{---} + \frac{\Pi^c(q^2)u(q)}{\text{---} \times \text{---}} \end{aligned}$$

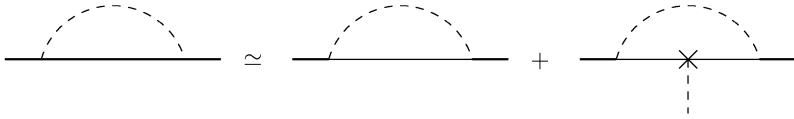
The diagram shows the Dyson equation for the electron propagator. It starts with a bare propagator (a horizontal line) equal to the sum of the dressed propagator (a horizontal line with a fermion loop) and a term representing the emission and absorption of a photon (a horizontal line with a cross and a fermion loop). The second line shows the dressed propagator as the sum of the bare propagator and a term representing the polarization of the vacuum (a horizontal line with a fermion loop and a photon loop).

Рассмотрим поправку к собственной энергии электрона во внешнем поле. Если электрон нерелятивистский, т. е. энергия связи мала: $p_0 - m \sim \mathbf{q}^2/2m \ll m$, то в промежуточном состоянии его можно считать свободным, когда испускаемые фотоны достаточно жесткие, так как при этом энергия электрона $p_0 - k_0 - m$ велика по сравнению с энергией связи. Поскольку

$$\frac{\mathbf{q}^2}{2m} \sim \frac{Z^2 \alpha^2 m}{2},$$

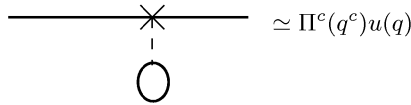
то для атома водорода ($Z = 1$) электрон, действительно, нерелятивист-

ский. Так что можем написать:



где в промежутках свободный электрон. (Вклад мягких фотонов обсудим позднее.) Таким образом, наша поправка свелась к уже вычисленным поправкам к собственной энергии свободного электрона и вершинной части.

Аналогично, в процессе



тоже можно считать электрон свободным, поскольку основной вклад в интеграл дают электроны с большой энергией. Оценим, какова величина этих поправок по сравнению с $u = Ze^2/q^2$.

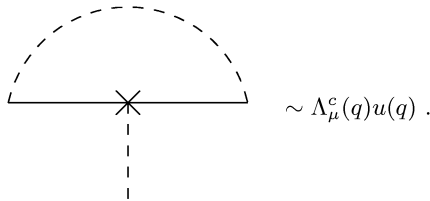
1.

$$\frac{\Pi^c u}{u} = \Pi^c = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}.$$

В атоме $|\mathbf{p}| \sim mZ\alpha$, $|\mathbf{p}|^2 \sim q^2 \sim m^2(Z\alpha)^2$, так что

$$\Pi^c \sim (Z\alpha)^2 \alpha.$$

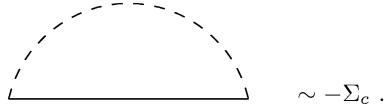
2.



$$\Lambda_\mu^c = \left[\frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) + (\hat{p}_1 - m)C_1 + (\hat{p}_2 - m)C_2 \right] \gamma_\mu. \tag{4.119}$$

Первый член (4.119) отвечает электрону на массовой поверхности, т. е. $p_1^2 = m^2$, $p_2^2 = m^2$. Он был найден ранее в (4.98). Последние слагаемые учитывают то, что электрон находится в связанном состоянии, и представляют собой первые члены разложения Λ_μ по степеням $(\hat{p}_1 - m)$ и $(\hat{p}_2 - m)$. Эти величины порядка $p_0 - m \sim q^2/2m \sim Z^2\alpha^2 m/2$.

3.



При $\hat{p} \sim m$ имеем

$$\Sigma_c = c(\hat{p} - m)^2 \sim q^4.$$

Однако, поскольку в эту часть не входит множитель $u(q)$, нужно рассмотреть Σ_c/u , а эта величина

$$\frac{\Sigma_c}{u} \sim q^2,$$

т. е. того же порядка, что поправки от последних членов Λ_μ ; более того, в силу тождества Уорда,

$$\Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial G^{-1}}{\partial p_\mu},$$

эти поправки сокращаются с поправкой от Σ_c .

Таким образом, остается вклад первого члена от Λ_μ^c и поправка от поляризации вакуума. В результате получаем эффективный потенциал вида

$$\begin{aligned} u(q) & \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right] = \\ & = \frac{Z\alpha}{q^2} \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Видим, что радиационная поправка не зависит от переданного импульса, поэтому в координатном пространстве ей будет соответствовать δ -образный потенциал

$$\tilde{u}(r) = \delta(r) \frac{4}{3} \frac{Z\alpha^2}{m^2} \left[\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right]. \quad (4.121)$$

Таким образом, для функции Грина получим уравнение:

$$\left[i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m + \gamma_0 \left(\frac{Ze^2}{4\pi r} + \tilde{u}(r) \right) \right] G_e = -i\delta(x),$$

и, соответственно, для волновой функции:

$$E\Psi = \left\{ \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + m\gamma_0 + \frac{Z\alpha}{r} + \delta(r) \frac{4}{3} \frac{Z\alpha^2}{m^2} \left[\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right] \right\} \Psi. \quad (4.122)$$

Поправку за счет высших приближений можем вычислить по теории возмущений, пользуясь нерелятивистскими волновыми функциями водородоподобного атома. Тогда

$$\Delta E_{njl} = \frac{4}{3} \frac{Z\alpha^2}{m^2} \left[\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right] |\Psi_{njl}(0)|^2, \quad (4.123)$$

где n — главное квантовое число, j — полный момент, l — орбитальный момент электрона.

В нерелятивистском случае $\Psi_{njl}(0)$ отлична от нуля только для S -состояний (т. е. при $l = 0$). Для них имеем

$$|\Psi_{ns}(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha Z m}{n} \right)^3, \quad (4.124)$$

т. е.

$$\Delta E_{ns} = \frac{4}{3} \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m}{n^3 \pi} \left[\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right], \quad (4.125)$$

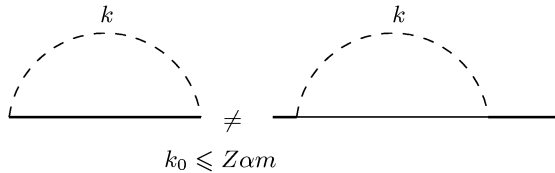
или, выражая эту величину через энергию первой боровской орбиты $E_B = \alpha^2 m/2$, получим

$$\Delta E_{ns} = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^4 \alpha^3}{n^3} \left[\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right] E_B. \quad (4.126)$$

Сдвиг $2S_{1/2}$ -уровня относительно $2P_{1/2}$ обусловлен как раз этой поправкой (впервые этот сдвиг обнаружили Лэмб и Резерфорд в 1947 г.).

Вывясним теперь вопрос, почему в выражение для лэмбовского сдвига (4.126) вошла величина λ ? При рассмотрении рассеяния электронов у нас возникла расходимость, связанная с малой энергией фотона; чтобы от нее избавиться, мы и приписали фотону малую массу λ . Мы говорили, что при создании заряженной частицы возникает большое число мягких фотонов, и если их корректно учесть, то эта масса

исчезает из конечного результата. В последнем же случае мы имеем нейтральную систему — атом, т. е. никаких фотонов нет, поэтому в выражение для радиационного сдвига уровней не должна входить никакая масса. Почему же она возникла? Потому что мы заменили в диаграмме функцию Грина связанного электрона на свободную функцию Грина. Для мягких фотонов это явно несправедливо. При $k_0 \gg Z\alpha m$ такое приближение работает, однако, когда k_0 меньше энергии связи, тогда существенно то, что электрон связан.



Однако при $k_0 \ll m$ электрон нерелятивистский, и вклад от таких фотонов можно вычислить при помощи нерелятивистской квантовой механики. Поскольку в нашем случае $\alpha Z \ll 1$, то области $k_0 \gg Z\alpha m$ и $k_0 \ll m$ перекрываются; приравнявая интегралы по области перекрытия, вычисленные двумя способами, можно выразить величину λ через параметры нерелятивистской теории. Из такого сравнения вытекает, что

$$\ln \frac{m}{\lambda} = \ln \frac{m}{2\varepsilon_0} + \frac{5}{6},$$

где ε_0 — средний потенциал ионизации атома. Здесь является существенным то обстоятельство, что $Z\alpha \ll 1$. При $Z\alpha \sim 1$ области перекрытия вообще нет, поскольку электрон в этом случае всегда релятивистский, и поэтому расчеты возможны только численные.

Чтобы получить полное выражение для лэмбовского сдвига, следует еще добавить вклад аномального магнитного момента (4.98). Это приводит к дополнительному слагаемому $3/8$ в квадратных скобках в уравнении (4.126). Окончательно получаем

$$\Delta E_{ns} = \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m}{n^3} \left[\ln \frac{m}{2\varepsilon_0} + \frac{19}{30} \right].$$

Глава 5

Трудности квантовой электродинамики

5.1 Перенормировки и расходимости

Выше мы рассмотрели следующие величины: функцию Грина электрона G , функцию Грина фотона $D_{\mu\nu}$ и вершинную часть Γ_μ . Убедились, что через них выражаются все наблюдаемые величины. Мы показали, что точные функции Грина имеют вид:

$$G = \frac{1}{m_0 - \hat{p} + \Sigma(\hat{p})}, \quad D = \frac{1}{k^2[1 - \Pi(k^2)]}.$$

Функция G , вообще говоря, не имеет полюса при $\hat{p} = m_0$, т. е. эта “голая” (или затравочная) масса не имеет физического смысла. Далее мы явно выделили полюса этих функций, сопоставив им физические (или перенормированные) массы m , и записали функции Грина в виде:

$$G(p) = \frac{Z_2}{m - \hat{p} + \Sigma_c(\hat{p})} = Z_2 G^c(p),$$

где

$$\Sigma_c(\hat{p}) = \frac{\Sigma(\hat{p}) - \Sigma(m) - \Sigma'(m)(\hat{p} - m)}{1 - \Sigma'(m)} \approx (\hat{p} - m)^2,$$
$$Z_2 = \frac{1}{1 - \Sigma'(m)},$$

Аналогично, функция Грина фотона

$$D(k^2) = \frac{Z_3}{k^2[1 - \Pi_c(k^2)]} = Z_3 D^c(k^2),$$

где

$$\Pi_c(k^2) = \frac{\Pi(k^2) - \Pi(0)}{1 - \Pi(0)} \sim k^2,$$
$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}.$$

Перенормированная масса фотона остается равной нулю. Для вершинной части мы получили

$$\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_\mu^c, \quad \Gamma_\mu^c(m, m) = \gamma_\mu.$$

Далее было показано, что все графики выражаются через перенормированные величины Γ_μ^c, G^c, D^c точно так же, как и через неперенормированные Γ_μ, G, D , если ввести перенормированный заряд

$$e_c^2 = Z_3 e^2$$

и заменить “голые” массы на перенормированные (было показано, что $Z_1 = Z_2$).

Таким образом, все физические величины можно выразить через наблюдаемые заряд и массу. Возникает вопрос, можно ли вычислить e_c и m через затравочные величины? Оказывается, нельзя, поскольку интегралы расходятся. С другой стороны, нам пришлось ввести перенормированные G^c, D^c, Γ^c , а чтобы это имело смысл, мы должны показать, что в эти величины не входят ни затравочная масса, ни затравочный заряд. Для этого нам нужно найти уравнения для $\Gamma^c, \Sigma^c, \Pi^c$ и так их сформулировать, чтобы в них вошли только перенормированные заряд и масса, но не затравочные величины. Тогда вся процедура перенормировок будет иметь смысл.

Выясним сначала, какие бывают расходимости и отчего они происходят. Укажем типы расходимостей:

1. ультрафиолетовая, возникает при $k \rightarrow \infty$;
2. инфракрасная, возникает при $k \rightarrow 0$;
3. возможные полюса амплитуд.

Мы уже обсудили физический смысл инфракрасных расходимостей и показали, что для разумно поставленных задач они отсутствуют. Что касается последнего типа расходимостей, то при некоторых определенных значениях внешних импульсов амплитуды, действительно, могут иметь особенности, например, если в каком-нибудь пропагаторе окажется $k^2 - m^2 = 0$. Однако можно доказать, что если все наружные импульсы пространственноподобны и удовлетворяют неравенству треугольника, то эти сингулярности отсутствуют. Это ясно потому, что в этом случае всегда можно все контуры интегрирования в фейнмановских интегралах развернуть так, что все импульсы станут евклидовыми (рис. 34).

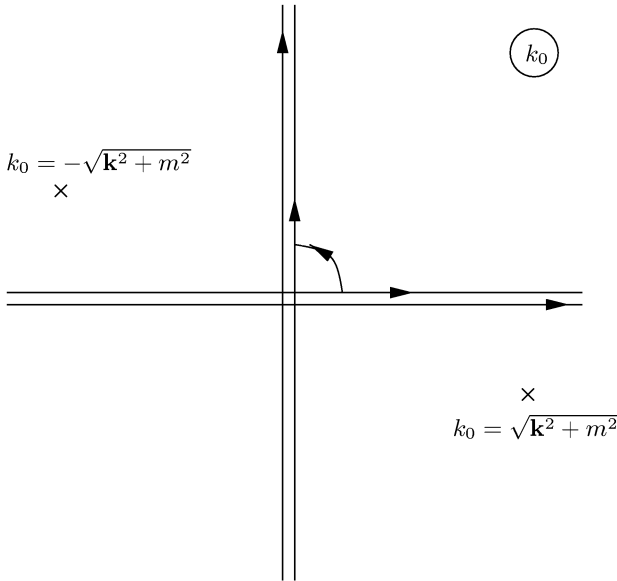
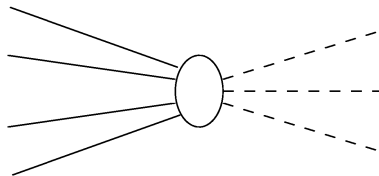


Рис. 34

Физические амплитуды (которые имеют времениподобные внешние импульсы) получаются из амплитуд с евклидовскими импульсами с помощью аналитического продолжения. Сингулярности в этих амплитудах получаются именно в результате продолжения. Эти сингулярности имеют непосредственный физический смысл, связанный с условием унитарности (см. главу 3), и мы не будем их здесь обсуждать.

Остаются лишь так называемые ультрафиолетовые расходимости, возникающие при $k \rightarrow \infty$.

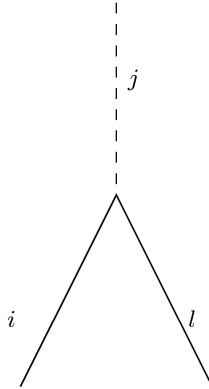
Рассмотрим произвольную скелетную диаграмму



Очевидно, что в силу сохранения тока число внешних электронных линий должно быть четным. Обозначим через F_e число внутренних электронных линий, F_γ — внутренних фотонных линий, N_e — внешних электронных линий и N_γ — внешних фотонных линий. Тогда амплитуда, соответствующая такой диаграмме, будет описываться интегралом

$$\int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_l}{k_1^2 k_2^2 \dots k_{F_\gamma}^2 (\hat{k}_{F_\gamma+1} - m)(\hat{k}_{F_\gamma+2} - m) \dots (\hat{k}_{F_\gamma+F_e} - m)}, \quad (5.1)$$

где l — число независимых внутренних линий, по которым ведется интегрирование. Его легко определить. Пусть в диаграмме n вершин, в каждой вершине сходятся 3 линии, причем $k_i + k_j = k_l$.



Так как имеется n законов сохранения (δ -функций) по числу вершин, а одна из этих δ -функций выражает общий закон сохранения и не содержит внутренних импульсов, то число независимых импульсов равно

$$l = F_e + F_\gamma - n + 1.$$

Если в интеграле (5.1) суммарная степень дифференциалов больше или равна степени знаменателя, то он расходится. То есть только при

$$4l - 2F_\gamma - F_e = 3F_e + 2F_\gamma - 4n + 4 < 0 \quad (5.2)$$

интеграл сходится. Покажем теперь, что, в действительности, это выражение не зависит от процессов во внутренней части диаграммы, т. е. ни от F_e , ни от F_γ . Она зависит только от числа внешних линий, т. е. от

вида самого процесса, описываемого диаграммой. Действительно, если внутри имеем замкнутую электронную линию (см. рис. 35), то число промежутков равно числу вершин, т. е.

$$n = F_e.$$

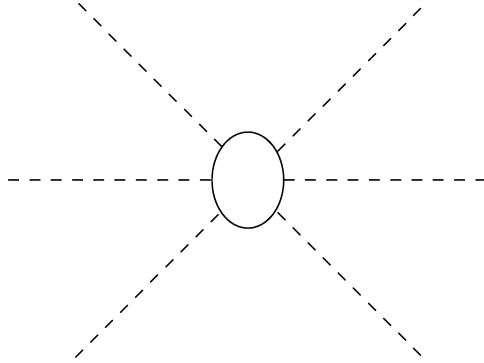


Рис. 35

Если электронную линию разомкнуть, то число внутренних линий уменьшится на одну, а число внешних увеличивается на две, число вершин не изменится, т. е.

$$n = F_e + \frac{N_e}{2}.$$

На каждую внутреннюю фотонную линию приходится две вершины, так как она должна начаться на электронной линии и закончиться на электронной линии, а на каждую внешнюю линию приходится одна вершина, т. е.

$$n = 2F_\gamma + N_\gamma.$$

Таким образом, если задано число внешних линий и число вершин, то этим определяется и число внутренних линий:

$$F_e = n - \frac{N_e}{2}, \quad F_\gamma = \frac{n}{2} - \frac{N_\gamma}{2}.$$

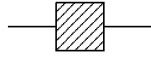
Тогда условие сходимости интеграла:

$$\mathcal{K} = 3F_e + 2F_\gamma - 4n + 4 = -\frac{3}{2}N_e - N_\gamma + 4 < 0, \quad (5.3)$$

т. е. определяется числом внешних линий, как и говорилось выше. Видно также, что когда число внешних линий велико, т. е. процесс достаточно сложный, то, наверняка, никаких расходимостей нет и все в порядке.

Рассмотрим простейшие диаграммы.

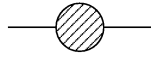
1.



$$N_e = 2, N_\gamma = 0, \mathcal{K} = 1.$$

Как мы уже видели, собственная энергия электрона формально расходится линейно (реально — логарифмически).

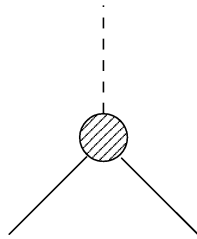
2.



$$N_e = 0, N_\gamma = 2, \mathcal{K} = 2.$$

Поляризационный оператор фотона расходится квадратично, на самом же деле калибровочная инвариантность уменьшает расходимость до логарифмической.

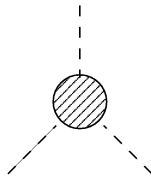
3.



$$N_e = 2, N_\gamma = 1, \mathcal{K} = 0.$$

Вершинная часть расходится логарифмически.

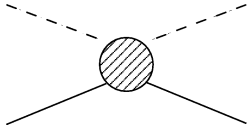
4.



$$N_e = 0, N_\gamma = 3, \mathcal{K} = 1.$$

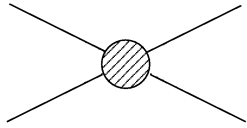
Такая диаграмма расходится линейно, однако мы покажем, что из инвариантности относительно зарядового сопряжения она обращается в нуль.

5.



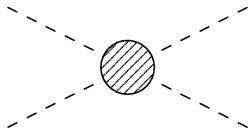
$$N_e = 2, N_\gamma = 2, \mathcal{K} = -1.$$

6. Диаграмма сходится.



$$N_e = 4, N_\gamma = 0, \mathcal{K} = -2.$$

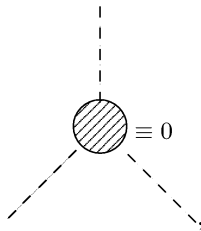
7. Тоже сходится.



$$N_e = 0, N_\gamma = 4, \mathcal{K} = 0.$$

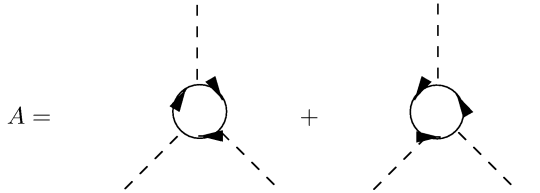
Расходится логарифмически (ниже будет показано, что реально такая амплитуда сходится благодаря калибровочной инвариантности).

Сначала покажем, что



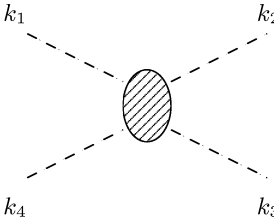
Точно так же обращается в нуль любая диаграмма без внешних заряженных частиц и с нечетным числом внешних фотонов. Это так называемая теорема Фарри. Действительно, наша теория инвариантна относительно зарядового сопряжения. Однако при зарядовом сопряжении знак волновой функции фотона меняется: $e_\mu \rightarrow -e_\mu$, т. е. амплитуда для

нечетного числа фотонов должна изменить знак. Но с другой стороны, откуда амплитуда “знает”, что внутри произошло изменение частиц на античастицы? От этого ничего не изменится, поэтому она должна быть тождественно равна нулю. Поясним это на простейшей диаграмме:



При зарядовом сопряжении эти две диаграммы меняются местами и, кроме того, меняют знак, следовательно, их сумма равна нулю.

Рассмотрим теперь рассеяние света на свете:

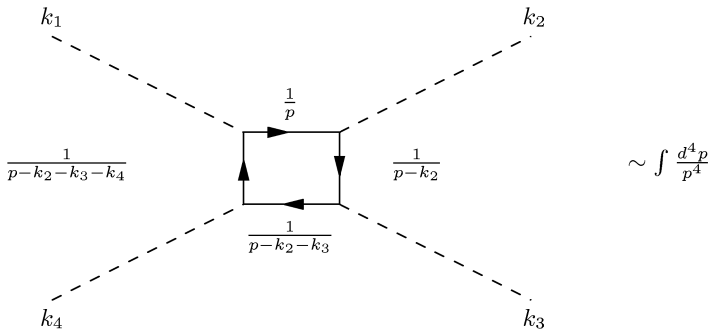
 $= M_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$

(5.4)

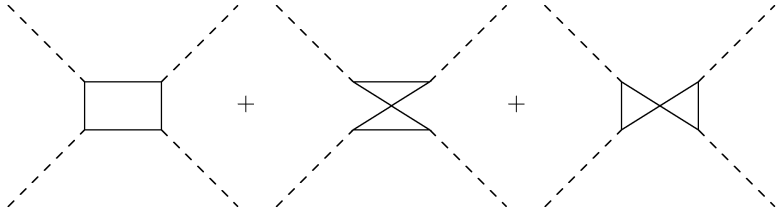
В силу сохранения тока должно быть

$$k_{1\mu_1} M_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = 0 \tag{5.5}$$

для импульса любого из внешних фотонов k_i . Рассмотрим

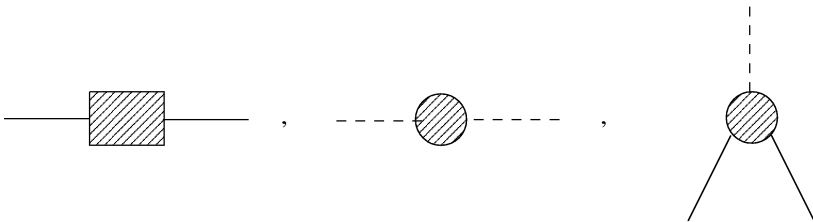


Так как интеграл расходится при больших p , то k_i в знаменателях можно пренебречь и в амплитуде никакой зависимости от внешних импульсов нет. Следовательно, расходящаяся часть амплитуды (5.4) не удовлетворяет условию сохранения тока (5.5), поскольку величина, не зависящая от k_μ , не может дать нуль при умножении на k . На самом деле, нужно сложить все диаграммы



тогда оказывается, что (5.5) удовлетворяется автоматически, а сумма интегралов конечна. Причем все величины, удовлетворяющие (5.5), сходятся при любом способе регуляризации, не нарушающем закона сохранения тока.

Таким образом, расходящимися оказываются только три величины: собственная энергия электрона, поляризационный оператор фотона и вершинная часть:



Посмотрим, как перенормировки устраняют эти расходимости. Сначала будем считать, что

$$G = G_0, \quad D = D_0,$$

и попробуем построить уравнение для вершинной части. По определению,

Diagrammatic equation (5.6) showing the expansion of a shaded vertex into a series of diagrams with increasing numbers of internal lines:

$$\text{Shaded Vertex} = \text{Tree} + \text{1-loop} + \text{2-loop} + \text{3-loop} + \dots$$

(5.6)

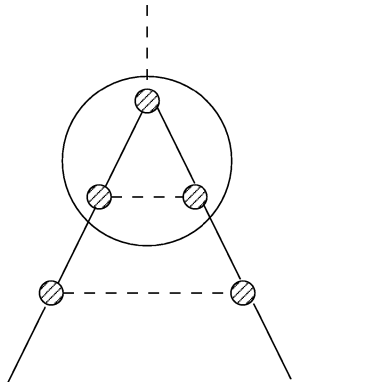
Это фактически и есть уравнение для Γ_μ . Действительно, (5.6) можно перерисовать и так:

Diagrammatic equation (5.7) showing a shaded vertex as a tree diagram plus diagrams with shaded vertices on internal lines:

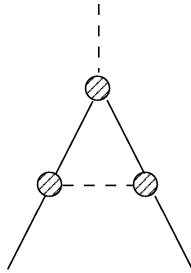
$$\text{Shaded Vertex} = \text{Tree} + \text{1-loop with shaded vertices} + \text{2-loop with shaded vertices}$$

(5.7)

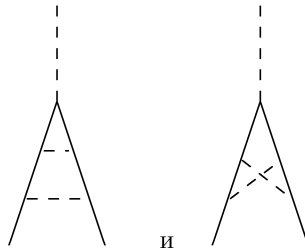
Проинтегрировав (5.7), получим (5.6). Причем существенно, что в (5.7) не входят диаграммы типа



поскольку такая диаграмма содержится уже в



Между тем диаграммы



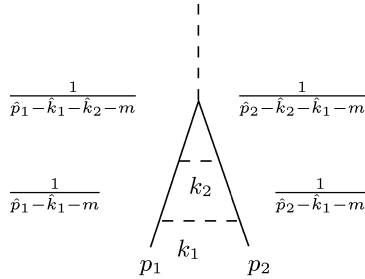
расходятся по-разному. Выясним, как именно.

1.

$$\frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - m} \text{ (diagram) } \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{k}_1 - m} \sim \int_p^\Lambda \frac{d^4 k_1}{k_1^4} \sim \ln \frac{\Lambda^2}{p^2},$$

так как расходимость возникает при $k_1 \gg p_1, p_2, m$.

2.



(a) При k_2 фиксированном расходимости нет, имеем при $k_1 \gg k_2$

$$\int_{k_2}^{\infty} \frac{d^4 k_1}{k_1^8} \sim \frac{1}{k_2^4}.$$

Интегрирование по $d^4 k_2$ теперь дает

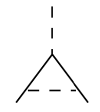
$$\int \frac{d^4 k_2}{k_2^4} \sim \ln q.$$

(b) Если, наоборот, $k_2 \gg k_1$ (k_1 фиксированно), то будем иметь

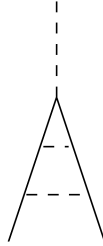
$$\int_{k_1}^{\Lambda} \frac{d^4 k_2}{k_2^4} \sim \ln \frac{\Lambda^2}{k_1^2}.$$

При интегрировании по $d^4 k_1$ получим

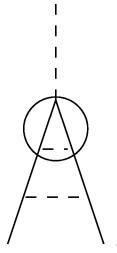
$$\int_p^{\Lambda} \frac{d^4 k_1}{k_1^4} \ln \frac{\Lambda^2}{k_1^2} \sim \ln^2 \frac{\Lambda^2}{p^2}.$$

То есть расходимость усилилась по сравнению с . И это

естественно, поскольку в графике

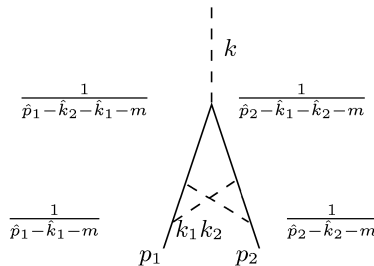


содержится прежняя вершина $\sim \ln \Lambda^2/p^2$ и фактически еще одна диаграмма



тоже пропорциональная $\ln \Lambda^2/p^2$.

3. Вторая диаграмма



Интеграл сходится, если интегрировать по d^4k_2 при фиксированном k_1 ($k_2 \gg k_1$) или, наоборот, интегрировать по d^4k_1 при фиксированном k_2 ($k_1 \gg k_2$). Единственная ситуация, когда интеграл может разойтись, — это $k_1 \sim k_2$, при этом получим

$$\int \frac{d^4k}{k^4} \sim \ln \frac{\Lambda^2}{p^2}.$$

Это рассмотрение можно провести для более сложных диаграмм и получить важное утверждение: сколько бы членов с точными вершинными частями мы ни взяли в разложении (5.7) (скелетные диаграммы), все они расходятся только логарифмически. Поэтому, как мы увидим, процедура вычитаний (перенормировок) приводит к конечному результату, и можно написать уравнение для вершинной части, которое вообще не будет содержать расходимостей.

Построим это, полностью конечное, уравнение для вершинной части. Полная вершинная часть может быть записана в виде

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2, q) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2, q). \tag{5.8}$$

На массовой поверхности имеем

$$\Lambda_\mu(m, m, 0) = \gamma_\mu \Lambda(m, m, 0). \tag{5.9}$$

Представим уравнение (5.8) в виде

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2, q) = \gamma_\mu(1 + \Lambda(m, m, 0)) + \Lambda_\mu(p_1, p_2, q) - \Lambda_\mu(m, m, 0). \tag{5.10}$$

В терминах разложения по скелетным диаграммам уравнение (5.10) имеет вид:

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2, q) = \gamma_\mu(1 + \Lambda(m, m, 0)) +$$

-

+

\dots

$$\tag{5.11}$$

Уравнение (5.11) содержит Γ_μ и в правой, и в левой части, т. е. это интегральное уравнение для вершинной части. Подставим в (5.11) Γ_μ в виде

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^c Z_1^{-1},$$

где

$$Z_1^{-1} = 1 + \Lambda(m, m, 0).$$

Тогда получим

$$\Gamma_\mu^c = \gamma_\mu + \begin{array}{c} \text{--- } q \\ | \\ \text{--- } \Gamma_\mu^c \\ / \quad \backslash \\ e^c \quad e^c \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{--- } 0 \\ | \\ \text{--- } \Gamma_\mu^c \\ / \quad \backslash \\ e^c \quad e^c \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (5.12)$$

Z_1^{-1} в верхних вершинах сократились, а в остальных дали перенормированный заряд $e_c = Z_1^{-1}e$ (мы пока отвлекаемся от перенормировок функций Грина). Расходимость же исчезла, поскольку в каждом порядке под интегралы входят разности:

$$\begin{array}{c} \text{--- } q \\ | \\ \text{--- } \Gamma(q, p_1 - k, p_2 - k) \\ / \quad \backslash \\ \Gamma(p_1, p_1 - k, k) \quad \Gamma(p_2, p_2 - k, k) \\ \text{---} \\ p_1 \quad p_2 \end{array} - \begin{array}{c} \text{--- } 0 \\ | \\ \text{--- } \Gamma(0, m - k, m - k) \\ / \quad \backslash \\ \Gamma(m, m - k, k) \quad \Gamma(m, m - k, k) \\ \text{---} \\ m \quad m \end{array}$$

которые стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$ в силу замечательного свойства:

$$\Gamma(a, b, c) \rightarrow \Gamma(b) \quad \text{при} \quad b \gg a, c,$$

т. е. Γ зависит от наибольшего импульса. Это свойство легко подметить из того же уравнения или прямо из диаграмм теории возмущений.

Перейдем теперь к реальной задаче, когда функции Грина электрона и фотона точные. Вершинная часть будет иметь вид:

(5.13)

Как и в предыдущем случае, введем

$$\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_\mu^c.$$

Прибавляя $\Lambda_\mu(m, m, 0) = \gamma_\mu \Lambda(m, m, 0)$ и вычитая почленно, получим, аналогично предыдущему,

(5.14)

Как и прежде, Z_1^{-1} в верхних вершинах сократятся, а в остальных появится множитель Z_1^{-1} ; кроме того, так как $G = Z_2 G^c$, $D = Z_3 D^c$, в каждой вершине появятся множители $Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}$. Вместе они дадут перенормированный заряд

$$e_c = e Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}},$$

а поскольку $Z_1 = Z_2$,

$$e_c^2 = Z_3 e^2.$$

Таким образом, действительно, мы получили интегральное уравнение для перенормированной вершины Γ_μ^c , в которое входят только перенормированный заряд e_c и перенормированные функции Грина электрона и фотона G^c и D^c . Оно будет конечным, если нам удастся построить конечные уравнения для функций Грина.

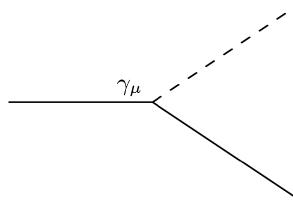
Начнем с

$$\overline{\overline{G}} = \overline{G_0} + \overline{G_0} \boxed{-\Sigma(p)} \overline{G} \quad (5.15)$$

Для собственной энергии имеем

$$-\Sigma(p) = \text{---} \underset{p}{\gamma_\mu} \text{---} \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \underset{p}{\Gamma_\mu} \text{---} \text{---} .$$

Обратим внимание, что здесь в начале стоит γ_μ , а не точная вершинная часть, поскольку все процессы начинаются с точки:



а далее может происходить все, что угодно. Таким образом,

$$-\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\mu(p-k, p, k) D(k^2). \quad (5.16)$$

Это уравнение Швингера-Дайсона. Аналогичное уравнение можно также получить и для поляризационного оператора фотона:

$$\Pi_{\mu\nu}(k^2) = \text{---} \overset{\gamma_\mu}{\underset{k}{\text{---}}} \circlearrowleft \overset{k-p}{\text{---}} \overset{\Gamma_\nu}{\text{---}} \underset{k}{\text{---}} \text{---},$$

p

т. е.

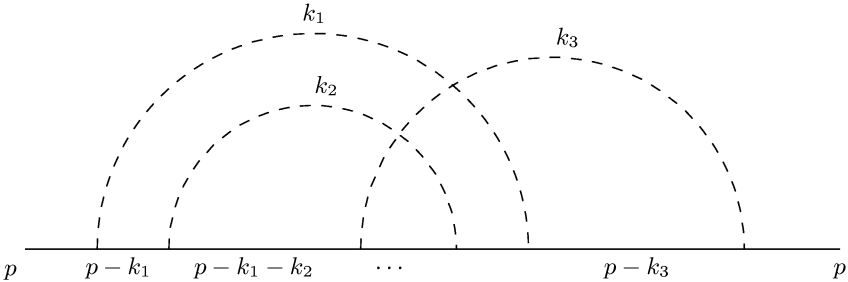
$$\Pi_{\mu\nu}(k^2) = -e^2 \text{Sp} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \{ \gamma_\mu G(p) \Gamma_\nu(p, k-p) G(k-p) \}. \quad (5.17)$$

Пользы, однако, от этих уравнений мало, поскольку интегралы для $\Sigma(p)$ и $\Pi_{\mu\nu}(k^2)$ расходятся. Но нас интересуют не сами $\Sigma(p)$ и $\Pi(k^2)$, а разности вида

$$\Sigma(p) - \Sigma(m) - \Sigma'(m)(\hat{p} - m),$$

так как именно они входят в функции Грина. Такое двойное вычитание и устраняет расходимость.

Посмотрим, как это происходит. Для этого рассмотрим производную $\partial\Sigma(p)/\partial p_\mu$. Произвольный член разложения собственной энергии электрона имеет вид:



Таким образом, имеется одна электронная линия, и внешний импульс p входит в виде разностей $p - k_1$, $p - k_1 - k_2$ и т. д. Производная от каждого электронного пропагатора будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} = \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}}.$$

Таким образом, производная содержит уже два пропагатора и γ_μ , т. е. представляет собой не что иное, как вершинную часть с нулевым импульсом фотона. Графически, дифференцируя почленно $\Sigma(p)$, получаем

$$-\frac{\partial \Sigma}{\partial p_\mu} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots$$

т. е.

$$-\frac{\partial \Sigma}{\partial p_\mu} = \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \dots \quad (5.18)$$

Итак, получено линейное уравнение относительно $\partial \Sigma / \partial p_\mu$. В частности, из (5.18) следует тождество Уорда:

$$\gamma_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial p_\mu} = \Gamma_\mu(p, p, 0).$$

В уравнении (5.18) можно проделать процедуру вычитания так

же, как и для вершинной части. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} G^{-1}(p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} [m - \hat{p} + \Sigma(p)] =$$

Вводя перенормированную функцию Грина, согласно $G^{-1} = Z_2^{-1} G_c^{-1}$, где $Z_2^{-1} = 1 - \Sigma'(m)$, прибавляя и вычитая почленно $\Sigma'(m)$ (что эквивалентно прибавлению и вычитанию $\Lambda(m, m)$), получим выражение:

$$\frac{\partial G_c^{-1}}{\partial p_\mu} =$$

в которое входит только перенормированный заряд e_c и которое не содержит расходимости.

Аналогично можно построить похожее по структуре линейное уравнение для $\partial\Pi(k^2)/\partial k_\mu$ и убедиться, что его также можно перенормировать.

Таким образом, все можно выразить через перенормированные величины, заряд и массу, и нигде при этом расходимость не встретится. Эти выводы мы получили, исходя из теории возмущений, и на самом деле у нас нет уверенности, что они останутся верными при выходе за ее рамки.

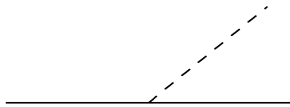
5.2 Проблема нуля заряда в квантовой электродинамике

Мы строили квантовую электродинамику следующим образом. Ввели функции Грина электрона и фотона

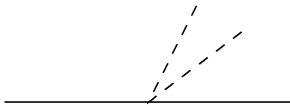
$$\text{—————} = G$$

$$\text{-----} = D_{\mu\nu},$$

рассмотрели простейшее взаимодействие



В случае π -мезона нам понадобилось более сложное взаимодействие



Еще более сложные взаимодействия вводить нет смысла, так как теории получаются неперенормируемыми.

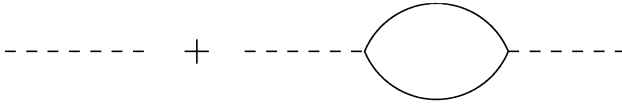
Построенная таким образом теория оказалась в блестящем согласии с экспериментом. Однако и она на очень малых расстояниях перестает работать; с этим как раз и связана проблема нуля заряда, которую мы собираемся обсуждать.

Мы видели, что диаграммы

Мы вычислили

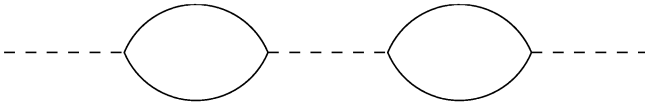
$$\Pi_c^{(1)}(k^2) = \frac{\alpha_c}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}.$$

Первые члены теории возмущений, таким образом, будут выглядеть



$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} k^2 \frac{\alpha_c}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{\alpha_c}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2} \right).$$

То есть при больших k^2 ряд может разойтись, и теория возмущений перестает работать. Ясно, что член



содержит уже $\ln^2 k^2/m^2$, и, вообще говоря, более сложные диаграммы будут расти еще сильнее с ростом k^2 . В вершинную часть же (5.19) основной вклад дают фотоны с большим $k \sim \Lambda$.

Однако посмотрим на интеграл (5.19), он содержит

$$\frac{1}{m - \hat{p}_1 + \hat{k}} \times \dots$$

С усложнением диаграмм растет число знаменателей, а вместе с ним и степень p в знаменателе. То есть с увеличением p подынтегральные выражения будут падать. Это происходит, однако, только при $p \sim \Lambda$, поскольку основной вклад в интеграл дают $k \sim \Lambda$.

Введем достаточно большое Λ и рассмотрим область

$$p^2 \gg m^2, \quad \Lambda^2/p^2 \gg 1.$$

Тогда (5.19) примет простой вид:

$$\Lambda_\mu^{(1)} \sim e^2 \int_p^\Lambda \frac{d^4 k}{k^4} \sim \alpha_0 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2},$$

так как легко убедиться, что основной вклад в интеграл (5.19) будет давать область $p \ll k \ll \Lambda$. Выберем Λ так, чтобы

$$\alpha_0 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \sim 1, \quad \alpha_0 \ll 1. \quad (5.20)$$

Тогда вершина, например, будет иметь следующую структуру:

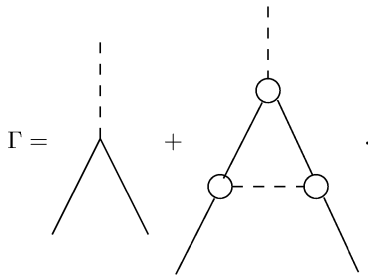
$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{n \geq m} \alpha_0^n \ln^m \frac{\Lambda^2}{p^2} c_{nm} = \\ &= 1 + \alpha_0 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \alpha_0^2 \ln^2 \frac{\Lambda^2}{p^2} + \alpha_0^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ясно, что наибольший вклад дадут члены $\sim \alpha_0^n \ln^n \Lambda^2/p^2 \sim 1$, а члены $\sim \alpha_0^{n+1} \ln^n \Lambda^2/p^2 \sim \alpha_0$ будут уже малой поправкой, т. е. можно записать

$$\Gamma = f_1 \left(\alpha_0 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \right) + \alpha_0 f_2 \left(\alpha_0 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \right) + \alpha_0^2 f_3 + \dots \quad (5.22)$$

Можно ограничиться первым членом (главное логарифмическое приближение), тогда задача упрощается. Определим Γ , G , D в этом приближении.

Нарисуем скелетные диаграммы



Первое упрощение связано с тождеством Уорда:

$$e_c^2 = Z_1^{-2} Z_2^2 Z_3 e_0^2.$$

Так как $Z_1 = Z_2$, то расходимости, связанные с вершинной частью и функцией Грина электрона, в заряде сокращаются. А следовательно,

можно переформулировать теорию так, чтобы они вообще не встретились. Это можно сделать подходящим выбором калибровки. В данном случае, следуя Ландау, выберем поперечную часть фотонной функции Грина в виде

$$D_{\mu\nu}^t = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (5.23)$$

и покажем, что при этом расходимости в Γ действительно исчезают:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{(1)} &= e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \gamma_\alpha \frac{1}{m - \hat{p}_1 + \hat{k}} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}_2 + \hat{k}} \gamma_\beta D_{\alpha\beta}^t(k) = \\ &= e_0^2 \int_p^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \left[\gamma_\alpha \frac{1}{\hat{k}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{k}} \gamma_\alpha \frac{1}{\hat{k}} - \hat{k} \frac{1}{\hat{k}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{k}} \frac{1}{k^4} \right] = \\ &= e_0^2 \int_p^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \left[\frac{\gamma_\alpha \hat{k} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\alpha}{k^6} - \frac{\gamma_\mu}{k^4} \right]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое содержит $k_i k_j$, в силу симметрии, при $i \neq j$ интеграл от него равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{k_i k_j}{k^6} &\rightarrow \delta_{ij} \frac{1}{4} k^2 \frac{1}{k^6}, \\ \gamma_\alpha \gamma_i \gamma_\mu \gamma_i \gamma_\alpha &= 4\gamma_\mu, \end{aligned}$$

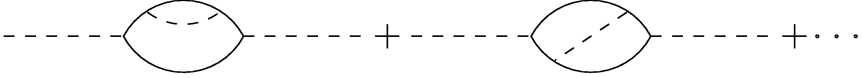
т. е. главные вклады в интеграл сократятся. Можно показать, что во втором порядке главный член $\sim \alpha_0^2 \ln^2 \lambda^2 / p^2$ исчезнет и останется член $\alpha_0^2 \ln \Lambda^2 / p^2$, которым мы пренебрегаем в нашем приближении. Аналогичную работу можно проделать и для G ; в результате, в главном логарифмическом приближении получим

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \gamma_\mu + 0(e_0^2), \\ G(p) &= -\frac{1}{\hat{p}} + 0(e_0^2). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Теперь вычислим $\Pi_{\mu\nu}$ в этом приближении. Очевидно,

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \text{---} \frac{\gamma_\nu}{k} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{\gamma_\mu}{k} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{\gamma_\nu}{k} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{\gamma_\mu}{k} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (5.25)$$

поскольку $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$. В справедливости (5.25) можно убедиться и непосредственным вычислением диаграмм более высоких порядков:



В них логарифмические вклады сократятся. Таким образом, в логарифмическом приближении вычисление поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}$ сводится к вычислению простейшей диаграммы.

Вычислим $\Pi_{\mu\nu}(k) - \Pi_{\mu\nu}(0)$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) - \Pi_{\mu\nu}(0) &= \\ &= -e_0^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^{4i}} \text{Sp} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}} \gamma_\nu \left[\frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} - \frac{1}{m - \hat{p}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Разложим в ряд по степеням \hat{k} выражение $(m - \hat{p} + \hat{k})^{-1}$:

$$\frac{1}{m - \hat{p} + \hat{k}} = \frac{1}{m - \hat{p}} - \frac{1}{m - \hat{p}} \hat{k} \frac{1}{m - \hat{p}} + \frac{1}{m - \hat{p}} \hat{k} \frac{1}{m - \hat{p}} \hat{k} \frac{1}{m - \hat{p}} + \dots \quad (5.27)$$

Первый член (5.27) сократится в подынтегральном выражении, второй даст нуль из-за симметрии при вычислении интеграла. Действительно,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^{4i}} \text{Sp} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^{4i}} \text{Sp} \frac{\gamma_\mu \hat{p} \gamma_\nu \hat{p} \hat{k} \hat{p}}{p^6} = 0.$$

Третий член (5.27) как раз и дает логарифмическую расходимость, таким образом, будем иметь

$$\Pi_{\mu\nu}(k) - \Pi_{\mu\nu}(0) = -e_0^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^{4i}} \text{Sp} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}}. \quad (5.28)$$

Так как

$$\Pi_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2),$$

то

$$\Pi_{\mu\mu}^c = 3k^2 \Pi^c(k^2).$$

С другой стороны, из (5.28)

$$3k^2 \Pi(k^2) = 2e_0^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^{4i}} \frac{1}{p^2} \text{Sp} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}},$$

поскольку

$$\gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\gamma_\mu \hat{p} \gamma_\mu \hat{p}}{p^4} = -\frac{2p^2}{p^4} = -\frac{2}{p^2}.$$

После некоторых преобразований получим

$$\Pi(k^2) = -\frac{4}{3} e_0^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{p^4}.$$

Введя $ip'_0 = p_0$, т. е. разворачивая контур интегрирования, как обычно, евклидовым образом, будем иметь

$$\Pi(k^2) = -\frac{4}{3} e_0^2 \int_k^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4}. \quad (5.29)$$

Так как

$$d^4 p = p^2 dp^2 \frac{d\Omega}{2} = \pi^2 p^2 dp^2,$$

то

$$\Pi(k^2) = -\frac{4e_0^2}{3 \cdot 16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} = -\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}. \quad (5.30)$$

Таким образом, в логарифмическом приближении

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \frac{1}{1 - \Pi(k^2)} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}}. \quad (5.31)$$

Это перенормированная функция Грина. Как ее перенормировать?

Обозначим

$$d = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}}. \quad (5.32)$$

Это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} \frac{1}{1 - \frac{\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Обозначим

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \quad (5.34)$$

тогда

$$d = Z_3 \frac{1}{1 - \frac{Z_3 \alpha_0}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}} = \frac{Z_3}{1 - \frac{\alpha_c}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}}. \quad (5.35)$$

Таким образом, параметр обрезания вошел в постоянную перенормировки Z_3 и в физический заряд e_c , и то, что нам удалось вынести Z_3 за скобку, есть как раз свойство перенормируемости теории.

С другой стороны, мы получили

$$\alpha_c = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (5.36)$$

Казалось бы, все хорошо: $\alpha_c < \alpha_0$, как и должно быть из-за поляризации вакуума. Однако если устремим $\Lambda \rightarrow \infty$, то

$$\alpha_c = \frac{3\pi}{\ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Lambda \rightarrow \infty, \quad (5.37)$$

т. е. при любом затравочном заряде (а мы считали $\alpha_0 \ll 0$) он полностью экранируется в этом пределе, так что $\alpha_c = 0$. Это может означать, что такой подход неверен на малых расстояниях, но если есть такое расстояние, где электродинамика становится несправедливой, мы из этого расстояния можем вычислить α_c и, наоборот, вычислить Λ по значению $\alpha_c = 1/137$. Из (5.37) вытекает

$$\frac{\Lambda^2}{m^2} \sim e^{\frac{3\pi}{\alpha_c}},$$

откуда $1/\Lambda \simeq 10^{-50}$ см.

Ситуация несколько изменяется, если учесть вклад в поляризацию вакуума от разных сортов частиц. Если имеется, допустим, ν различных частиц со спином $1/2$, то (5.36) изменится так:

$$\alpha_c = \frac{\alpha_0}{1 + \nu \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (5.38)$$

Тогда, если принять, что квантовая электродинамика перестает работать на расстояниях порядка планковской длины, т. е. $l_P = \sqrt{G} \simeq 10^{-33}$ (G — ньютоновская гравитационная постоянная), то получим, что возможное число сортов частиц

$$\nu \sim 12.$$

Хуже обстоит дело с функцией Грина, так как выражение

$$d_c = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_c}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}}$$

при фиксированном α_c имеет полюс в области $k^2 < 0$, т. е. возникают частицы с мнимой массой. Впрочем, в некотором смысле, это искусственная трудность, поскольку в нашей теории $\Lambda = \infty$, т. е. $\alpha_c = 0$. И полюса нет, но при этом нет и взаимодействия.

Эта проблема до сих пор не решена¹. И если в квантовой электродинамике такая трудность возникает на безумно малых расстояниях из-за малости α_c , т. е. в реальных ситуациях она несущественна, то в сильных взаимодействиях, где константа связи $g \sim 1$, мы сразу с ней

¹Остался черновик работы В.Н.Грибова “Квантовая электродинамика на малых расстояниях”, которую он подготовил как дополнительный параграф этой главы. Он планировал обсудить там возможное решение проблемы нуля заряда — полюса Ландау в квантовой электродинамике, или в более широком смысле, в единой теории электрослабого взаимодействия. Это решение возникло в качестве “побочного продукта” его многолетнего изучения проблемы удержания кварков в квантовой хромодинамике (КХД) — теории “цветных” кварков и глюонов, которая описывает, как полагают, микроскопическую структуру адронов и их взаимодействий. Грибов показал, что когда константа связи превышает критическое значение, равное

$$\frac{\alpha}{\pi} > 1 - \sqrt{\frac{2}{3}},$$

свойства теории принципиально меняются. В теории появляются связанные состояния фермионов с отрицательной энергией и обычный вакуум становится нестабильным. Происходит явление, напоминающее фазовый переход в физике твердого тела, что приводит к кардинальному изменению свойств всех состояний.

В КХД константа связи между кварками и глюонами, в противоположность электродинамической $\alpha_{e.m.}$, *растет* с расстоянием и достигает критического значения на расстояниях порядка 1 ферми (10^{-13} см). Грибов привел аргументы в пользу точки зрения, что сверхкритическое связывание легких кварков приводит к нестабильности “цветных” состояний и, в конечном счете, к явлению невылетания цвета.

В квантовой электродинамике сверхкритические явления происходят на очень малых расстояниях, порядка планковского масштаба, l_P . Они, с одной стороны, могут быть ответственны за появление хиггсовского бозона — скалярной частицы, которая необходима в современной единой теории электрослабых взаимодействий — теории Вейнберга-Салама. В.Н.Грибов предсказал, что масса составного хиггсовского бозона должна быть немного больше, чем масса тяжелейшего из кварков (так называемого топ-кварка, $m_{\text{top}} \approx 200m_{\text{proton}}$).

С другой стороны, сверхкритические явления приводят к решению проблемы полюса Ландау в КЭД — константа связи увеличивается на малых расстояниях, но остается конечной.

Работа В.Н.Грибова “Квантовая электродинамика на малых расстояниях” будет опубликована в сборнике его избранных работ, который подготавливается к печати.

сталкиваемся, так как вынуждены вводить параметр обрезания $\Lambda \sim m$. Так что там эта трудность реальная.

Заметим, что при доказательстве нуля заряда мы пользовались логарифмическим приближением:

$$e_0^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \sim 1, \quad e_0^2 \ll 1.$$

т. е. мы, формально говоря, не можем устремлять Λ к ∞ . Однако (как заметил Померанчук) выражение (5.36) получено для перенормированного заряда, который, как мы знаем, только и входит в высшие неучтенные поправки. Поскольку $\alpha_c \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow \infty$, то и все поправки стремятся к нулю при $\Lambda \rightarrow \infty$. Поэтому наше утверждение не зависит от условия $e_0^2 \ln \Lambda^2/p^2 \sim 1$.

Единственная гипотеза, которая сделана, — это условие

$$e_0^2 \ll 1.$$

Если отказаться от него, то мы с самого начала не имеем теории возмущений, и наша теория, по существу, не сформулирована.

Владимир Наумович Грибов

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Ответственный редактор И. Б. Хрипович

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Широбоков

Подписано в печать 29.10.01. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,74. Уч. изд. л. 16,83.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.

Тираж 500 экз. Заказ №14.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru
