

ФИЗИКА. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, ТЕОРИЯ

В книге представлены ответы на вопросы, входившие в экзаменационные билеты вузов России, вплоть до 1997 года.

Издание включает 200 задач по 10 основным разделам физики, подробный разбор и алгоритм их решения; основные теоретические положения, формулы, чертежи и таблицы.

Пособие адресовано преподавателям и слушателям подготовительных курсов, учащимся школ, лицеев.

СОДЕРЖАНИЕ

I. КИНЕМАТИКА	3	ВРАЩАТЕЛЬНОГО	
§ 1. Основные определения и формулы	3	ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН	
§ 2. Простейшие операции с векторными величинами	7	ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ	
§ 3. Равномерное прямолинейное движение	14	§ 1. Вращательное движение	124
§ 4. Равноускоренное движение	25	§ 2. Закон всемирного тяготения	151
§ 5. Свободное падение тел	34	V. СТАТИКА	162
§ 6. Кинематика движения материальной точки по окружности	44	§ 1. Статика твердых тел	162
§ 7. Абсолютное, относительное и переносное движения	47	§ 2. Статика жидкостей и газов	186
II. ДИНАМИКА	57	VI. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	199
ПРЯМОЛИНЕЙНОГО		И ТЕПЛОТА	
ДВИЖЕНИЯ		VII. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	240
III. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА И ЭНЕРГИИ	93	VIII ПОСТОЯННЫЙ	281
§ 1. Изменение и сохранение импульса тела и системы тел	93	ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	
§ 2. Работа силы. Изменение и сохранение механической энергии тела и системы тел	95	IX. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА	313
§ 3. Центральный удар шаров	98	И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ	
IV. ДИНАМИКА	124	ИНДУКЦИЯ	
		X. ОПТИКА	350
		§ 1. Геометрическая оптика	350
		§ 2. Элементы физической оптики	354
		XI. ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ	402
		В 1994-1996 гг. НА	
		ВСТУПИТЕЛЬНЫХ	
		ЭКЗАМЕНАХ В	
		МОСКОВСКОМ	
		ГОСУДАРСТВЕННОМ	
		УНИВЕРСИТЕТЕ	

I. КИНЕМАТИКА

§ 1. Основные определения и формулы

п1.1 Все тела в природе движутся. Изменение положения одного тела относительно другого тела с течением времени называется *механическим движением*. Именно механические движения вне зависимости от сил, действующих на тела, описывает *кинематика*. Любое механическое движение всегда является относительным движением или перемещением относительно какого-либо другого тела.

Тело, относительно которого наблюдается движение, называется *телом отсчета*.

С телом отсчета связывают некоторую систему линий, пересекающихся в том месте, где находится тело отсчета. Совокупность линий, связанных с телом отсчета, называют *системой координат*, а точку пересечения линий — *началом координат*. Тело отсчета, связанная с ним система координат и часы образуют *систему отсчета*.

п1.2 Изучение механики начинают с изучения законов движения материальной точки. Под *материальной точкой* подразумевают небольшую часть тела, размеры которой достаточно малы по сравнению с размерами всего тела, или само тело, размеры которого малы по сравнению с расстоянием, проходимым телом. Движение материальной точки характеризуется траекторией, длиной пути, координатами тела, перемещением, скоростью и ускорением.

п1.3 *Траекторией* называется линия, в каждой точке которой последовательно побывала движущаяся точка.

Путь – это длина участка траектории, заключенного между двумя точками, определяющими положение тела в начале и конце интересующего нас движения.

п1.4 При изучении движения тела мы пользуемся, как правило, декартовой системой координат, которая представляет собой совокупность трех прямых линий, пересекающихся под прямым углом. При движении материальной точки по одной прямой положение ее можно описать с помощью *одной координаты*. Положительные и отрицательные числа, определяющие положение точки, называются *координатами точки*, а прямая, вдоль которой отсчитывается расстояние – *осью координат*.

При движении точки по плоскости ее положение описывается двумя координатами (X, Y). Положение тела в пространстве задается тремя координатами (X, Y, Z) или радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Радиус-вектор – это направленный отрезок, проведенный из начала координат в место положения материальной точки.

Перемещение – это вектор, соединяющий начальное и конечное положение точки. Обозначается: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, где \vec{r}_1 и \vec{r}_2 – радиусы-векторы, проведенные из начала координат в начальное и конечное положение точки (рис. 1.1).

п.5 Состояние движения тела характеризуется вектором *средней скорости*

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t},$$

направленным в ту же сторону, что и перемещение $\Delta \vec{r}$, и *мгновенной скоростью* (скоростью в данный момент времени)

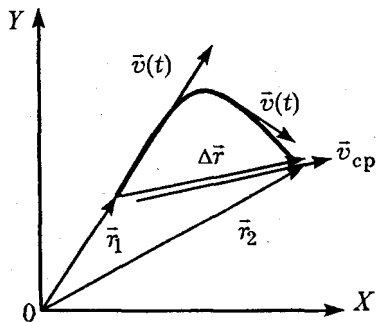


Рис. 1.1

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

направленной по касательной к траектории (рис. 1.1).

п.6 Часто в житейской практике, например при составлении расписания поездов или при поездке в такси, важно знать путь, пройденный телом, который определить с помощью вектора средней скорости в общем случае нельзя, поэтому вводят скалярную величину *средней скорости* $v_{\text{ср}}$. Именно эту величину показывают спидометры всех автомобилей, поездов, теплоходов и т.д. Эту скорость называют *средним модулем скорости* v (путевая скорость). Эта скорость по определению равна отношению полного пути (т.е. длины траектории), пройденного телом, к промежутку времени, за который этот путь пройден, т.е.

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{\Delta t}.$$

п1.7 Изменение скорости со временем определяется ускорением :

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

В школьном курсе физики рассматриваются два вида движения: $\bar{a} = 0$ и $\bar{a} = \text{const}$. В первом случае тело движется равномерно и прямолинейно ($\bar{v} = \text{const}$). В этом случае положение тела в любой момент времени можно описать с помощью радиуса-вектора, который меняется по закону

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t,$$

где r_0 — начальное положение тела. Например, при движении тела вдоль оси OX его скорость $v_x = v_0 = \text{const}$, а координата меняется по закону $x(t) = x_0 + v_x t$, где x_0 — начальная координата. При $\bar{a} = \text{const}$ движение тела — равнопеременное. В этом случае скорость тела и положение тела в пространстве описываются формулами

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t; \quad \bar{r}(t) = \bar{r}_0(t) + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2}.$$

При движении тела, например, вдоль оси OX эти формулы будут иметь вид

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t; \quad x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

где v_{0x} — начальная скорость вдоль оси OX ; a_x — ускорение вдоль оси OX .

Аналогичный вид имеют формулы для скорости и координаты при движении вдоль осей OY и OZ :

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t; \quad y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2};$$

$$v_z(t) = v_{0z} + a_z t ; z(t) = z_0 + v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

Уравнения для координаты и скорости позволяют решить любую задачу на движение точки с постоянным ускорением. Уравнение для координаты часто называют *основным уравнением кинематики*.

§ 2. Простейшие операции с векторными величинами

В механике часто встречаются с такими величинами, как скорость, перемещение, ускорение, сила и т. д. Для полного описания этих величин важно знать не только их числовые значения, но и направление в каждый момент времени.

Любая величина, значение которой определяется не только числом, но и направлением в пространстве, называется *векторной*. Мы будем обозначать любую векторную величину буквой со стрелкой наверху: \vec{a} . Длина направленного отрезка, измеренная в определенном масштабе, равна абсолютной величине вектора и обозначается $|\vec{a}|$ или a .

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковую длину и направлены в одну сторону (рис. 1.2).

Сложение и вычитание векторов. Векторы складываются геометрически: сумма

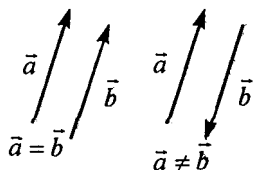


Рис. 1.2

двух векторов равна диагонали параллелограмма, сторонами которого являются складываемые векторы. То есть, для того чтобы сложить два вектора \vec{a} и \vec{b} , их надо привести к одному началу, перемещая векторы параллельно самим

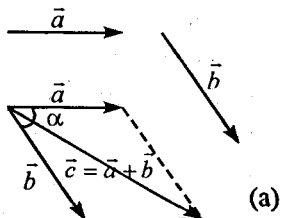


Рис. 1.3

себе (рис. 1.3, а). При сложении этих векторов можно пользоваться правилом «треугольника». В этом случае к концу одного вектора приставляют начало второго. Тогда их суммой будет вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго

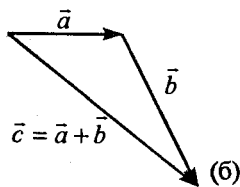


Рис. 1.3

вектора (рис. 1.3, б).

Длину вектора суммы $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ определяют по теореме косинусов $|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$, где α — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Вычитание векторов можно представить как сложение с обратным вектором. Действительно, разность векторов \vec{a} и \vec{b} можно представить как $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, т.е. для нахождения вектора разности \vec{c} нужно сложить два вектора: \vec{a} и $-\vec{b}$ (рис. 1.4).

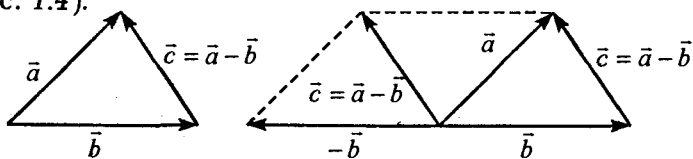


Рис. 1.4

Из рисунка видно: если начала векторов \vec{a} и \vec{b} совмещены, то вектор разности \vec{c} представляет собой направленный отрезок, начало которого совпадает с концом вычитаемого вектора \vec{b} , а конец — с концом уменьшаемого вектора \vec{a} .

Скалярной величиной называется величина, значение которой определяется числом, взятым со знаком «+» или «-». Примером таких величин могут служить: путь, время, масса, модуль любого вектора и т. д.

Если какой-либо вектор умножим или разделим на число (скалярную величину), то тем самым изменится длина взятого вектора в некоторое число раз. При этом новый вектор направлен в ту же сторону, что и умножаемый вектор, если число больше нуля, и в противоположную — если число меньше нуля.

Разложение вектора. Операция замены любого вектора несколькими называется *разложением* вектора на составляющие.

Любой вектор \vec{a} , проведенный, например, из начала прямоугольной системы координат, можно представить как сумму трех векторов:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z.$$

Векторы \vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z являются составляющими вектора \vec{a} вдоль осей OX , OY , OZ соответственно. Часто вместо составляющих вектора пользуются понятием проекций вектора на заданные направления. Для этого вводят единичные векторы \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} вдоль осей OX , OY , OZ соответственно (*единичным вектором* называется вектор, модуль

которого равен 1). В этом случае составляющие вектора можно записать в виде $\vec{a}_x = \vec{i}a_x$, $\vec{a}_y = \vec{j}a_y$, $\vec{a}_z = \vec{k}a_z$ (рис. I.5). Величины a_x , a_y , a_z — числа-скаляры. Они называются проекциями вектора на координатные оси OX , OY , OZ . Величина проекций определяется по формулам:

$$a_x = a \cos \alpha; \quad a_y = a \cos \beta; \quad a_z = a \cos \gamma,$$

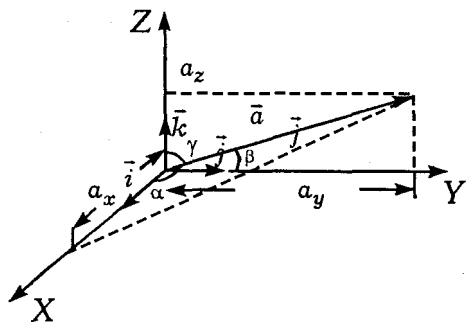


Рис. I.5

где a — модуль вектора \vec{a} , а углы α , β , γ — это углы между положительным направлением соответствующей оси и вектором \vec{a} , отсчитываемые против часовой стрелки. Другими словами, проекция

вектора на выбранное направление берется со знаком «+», если направление соответствующего вектора совпадает с направлением оси, и со знаком «-», если направления противоположны.

Примеры решения задач

Задача I.1 Определить величину и направление вектора \vec{a} , лежащего в плоскости XOY , если заданы координаты начала и конца вектора \vec{a} (рис. I.6).

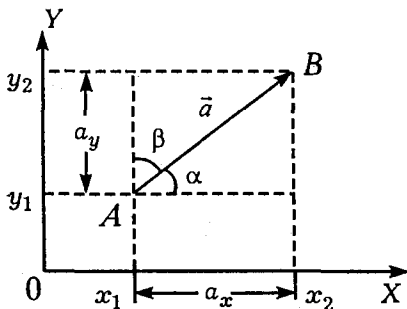


Рис. 1.6

Решение. Опустим перпендикуляры с концов вектора \vec{a} на оси OX и OY . Началу вектора (точка A) соответствуют координаты x_1 и y_1 , концу вектора (точка B) — координаты x_2 и y_2 . Проекции вектора на

оси OX и OY равны разности координат концов вектора, т. е.

$$a_x = x_2 - x_1 = \Delta x; \quad a_y = y_2 - y_1 = \Delta y.$$

Зная проекции вектора на оси координат, легко определить величину (модуль) вектора и направление его в пространстве.

Как видно из рисунка, длина вектора \vec{a} определяется по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Вектор считается заданным, если известна его длина и направление в пространстве. Направление вектора определяется углом наклона его к соответствующей оси координат, т. е. углом α или $\beta = 90^\circ - \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{a} = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \sin \alpha.$$

Задача I.2 Определить проекцию вектора \vec{a} на ось OX , полагая, что угол α задан (рис. I.7, I.8).

Решение. Опустим перпендикуляры с концов вектора \vec{a} на ось OX . Проекция вектора \vec{a} на ось OX равна

$$a_x = x_2 - x_1 = -|\Delta x| = a \cos \beta = a \cos(180^\circ - \alpha) = -a \cos \alpha.$$

Угол β отсчитывается от положительного направления оси OX до вектора \vec{a} против часовой стрелки, причем вектор нужно перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало лежало на оси OX (рис. I.8).

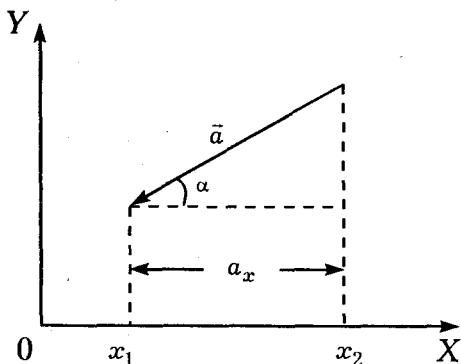


Рис. I.7

Аналогичная операция производится при отыс-

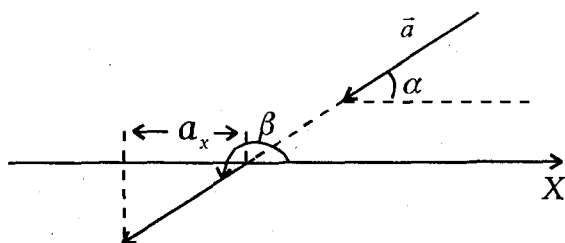


Рис. I.8

кании проекции вектора \vec{a} на ось OY (рекомендуется отыскать проекцию a_y самим).

Задача I.3 Пешеход вышел из пункта A и, двигаясь строго на северо-восток, прошел расстояние $AB=S_1=5$ км за 1 час. Затем он повернул на восток и прошел еще расстояние $BC=S_2=6$ км, двигаясь 2 часа. После этого он пошел на юг и прошел расстояние $CD=S_3=6$ км за 1 час. Определить путь, пройденный пешеходом за 4 часа, и его перемещение $\Delta\vec{r}$ за это время (рис. I.9).

Решение. Полное перемещение пешехода $\Delta\vec{r}$ за 4 часа равно вектору \vec{AD} . Путь, пройденный пешеходом за это время, равен сумме отрезков AB , BC и CD , т.е.

$$S=AB+BC+CD=5 \text{ км}+6 \text{ км}+6 \text{ км}=17 \text{ км}.$$

Величину перемещения $|\Delta\vec{r}|=AD$ можно определить, пользуясь правилом сложения векторов. Воспользуемся правилом прямоугольника.

Так как от перемены мест слагаемых сумма их не меня-

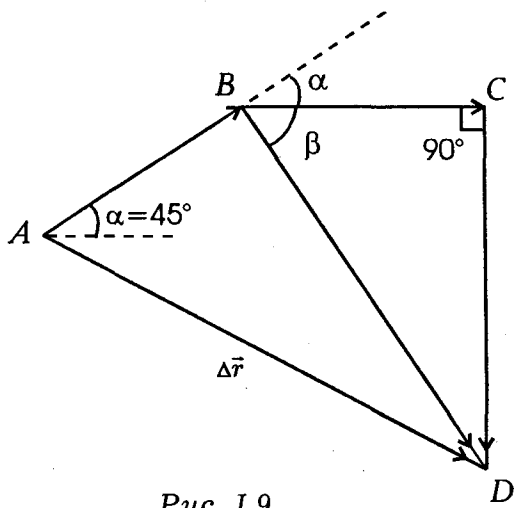


Рис. I.9

ется, определим сумму векторов \vec{BC} и \vec{CD} . Суммой этих векторов является вектор \vec{BD} , модуль которого определяется по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{(BC)^2 + (CD)^2} = \sqrt{36 + 36} \text{ км} = 6\sqrt{2} \text{ км.}$$

Модуль вектора \vec{BC} равен модулю вектора \vec{CD} , поэтому угол $CBD = \beta = 45^\circ$, следовательно, треугольник ABD — прямоугольный. Это позволяет величину вектора $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$ определить, также пользуясь правилом Пифагора:

$$AD = \sqrt{(AB)^2 + (BD)^2} = \sqrt{25 + 72} = \sqrt{97} \approx 10 \text{ км.}$$

Таким образом, пешеход прошел путь $S = 17$ км, а переместился от точки A на кратчайшее расстояние $|\Delta\vec{r}| \approx 10$ км.

§ 3. Равномерное прямолинейное движение

Самую большую трудность для учащихся при решении задач представляет вопрос «с чего начать?» Предлагается некоторая последовательность действий (некий алгоритм), который поможет вам.

1. Прежде всего внимательно прочтите условие задачи.

2. Нарисуйте рисунок — это позволит яснее представить задачу.

3. Условие задачи, т. е. заданные и искомые величины, следует записать в тетради в столбик

в той последовательности, в какой они изложены в тексте задачи.

4. Так как любое движение происходит обязательно в некоторой системе отсчета, необходимо выбрать систему координат, задать ее начало и положительное направление координатных осей и выбрать начало отсчета времени. Чаще всего выбор системы отсчета подсказывает само условие задачи.

5. Теперь нужно записать основное уравнение движения тел в этой системе отсчета. При равномерном движении — это уравнение для координат, при равноускоренном — для координат и скоростей.

6. Далее приступаем к алгебраическому решению записанных уравнений, в результате которого получаем формулы в общем виде для определения искомым в задаче величин.

7. Подставляем в полученные формулы числовые значения заданных в условии величин и выполняем арифметический расчет.

Применим предложенный алгоритм на примере решения задач на равномерное движение.

Примеры решения задач

Задача 1.4 Из городов A и B , находящихся на прямолинейном шоссе, одновременно навстречу друг другу выезжают две автомашины со скоростями $v_A=100$ км/ч и $v_B=60$ км/ч. Расстояние между городами $L=120$ км (рис. 1.10). Через какое время (t_0) и на каком расстоянии от города A (x_0) встретятся автомашины? Как меняется расстояние между ними, если каждая машина, пройдя

120 км, остановилась? Решить задачу аналитически и графически.

Решение. Изобразим условие задачи на рисунке (рис. I.10).

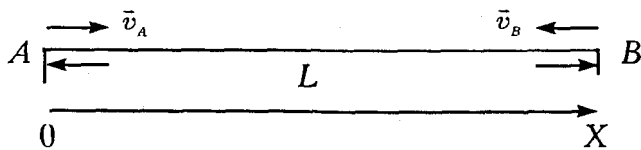


Рис. I.10

Запишем условие задачи в виде столбика:

$$v_A = 100 \text{ км/ч}$$

$$v_B = 60 \text{ км/ч}$$

$$L = 120 \text{ км}$$

$$t_s = ?$$

$$x_s = ?$$

$$S = ?$$

Совместим начало координат с городом А, а ось $0X$ направим от города А к В. Время будем отсчитывать с момента отправления обеих машин.

Так как автомашины движутся с постоянными скоростями, то их координаты в любой момент времени определяются формулами:

$$x_A(t) = x_{0A} + v_A t; \quad x_B(t) = x_{0B} + v_B t.$$

В выбранной системе отсчета $x_{0A} = 0$, $x_{0B} = L$,

$v_A = v_A$, $v_B = -v_B$, тогда

$$x_A(t) = v_A t, \text{ а } x_B(t) = L - v_B t.$$

В месте встречи координаты автомашин одинаковы, т. е.

$$x_A(t_e) = x_B(t_e) \text{ или } v_A t_e = L - v_B t_e.$$

Тут следует заметить, что равенство координат выполняется только в момент встречи, поэтому время t в последнем равенстве обязательно должно употребляться с каким-либо индексом (например t_e).

Решая это уравнение, определим время встречи

$$t_e = \frac{L}{v_A + v_B}.$$

Место встречи (координату встречи) можно получить, пользуясь любым из выражений для координаты. Подставив $t = t_e$, например, в первое из уравнений, получим

$$x(t_e) = v_A t_e = \frac{v_A L}{v_A + v_B}.$$

Расстояние между автомашинами S в любой момент времени равно модулю разности их координат:

$$S = |x_B(t) - x_A(t)| = |L - v_B t - v_A t| = |L - (v_B + v_A)t|.$$

Мы получили ответ на все вопросы задачи в общем (буквенном) виде. Теперь можно подставлять числовые значения:

$$t_e = \frac{L}{v_A + v_B} = 120 \text{ км} / (100 \text{ км/ч} + 60 \text{ км/ч}) = 3/4 \text{ ч} = 45 \text{ мин};$$

$$x_a = \frac{v_A L}{v_A + v_B} = (100 \text{ км/ч} \cdot 120 \text{ км}) / (100 \text{ км/ч} + 60 \text{ км/ч}) = 75 \text{ км.}$$

Таким образом, автомобили встретятся через $3/4$ часа на расстоянии 75 км справа от города А.

Эту задачу полезно решить графически. Ответы на поставленные в условии задачи вопросы мы сможем легко получить, если изобразим график зависимости координаты каждой автомашины от времени (рис. I.11).

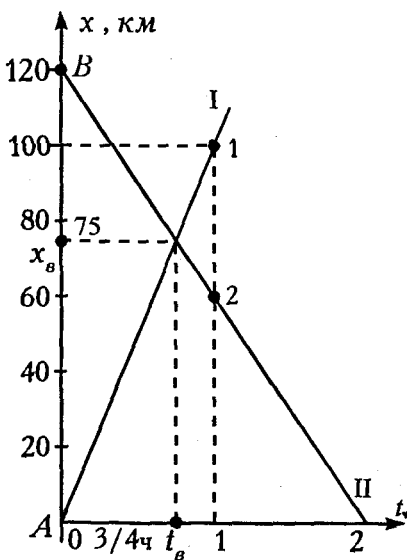


Рис. I.11

Прямая I представляет график зависимости координаты от времени для машины, выехавшей из города А. Строим ее таким образом: так как скорость автомобиля $v_A = 100$ км/ч (это расстояние, пройденное за 1 час), то из точки $x_1 = 100$ км проводим прямую, параллельную оси времени; затем из точки $t_1 = 1$ час восстанавливаем перпендикуляр,

который пересекает эту прямую в точке «1» (рис. I.11). Через начало координат и точку «1» проводим прямую I. Это и есть график движения автомобиля, выехавшего из пункта А. Тангенс угла

наклона этой кривой к оси времени численно равен скорости v_A .

Прямую II строим аналогично, однако расстояние $x_2 = 60$ км откладываем от точки В, так как автомобиль выезжает из пункта В. Проводим прямую II через точку В и точку «2» и таким образом получаем график движения автомобиля, выехавшего из пункта В.

Точка пересечения прямых I и II позволяет определить время и место встречи автомашин. Для этого из точки пересечения прямых опустим перпендикуляр на ось времени $0t$ и ось координат $0X$. Точки пересечения опущенных перпендикуляров с соответствующими осями позволяют определить время и место встречи автомашин.

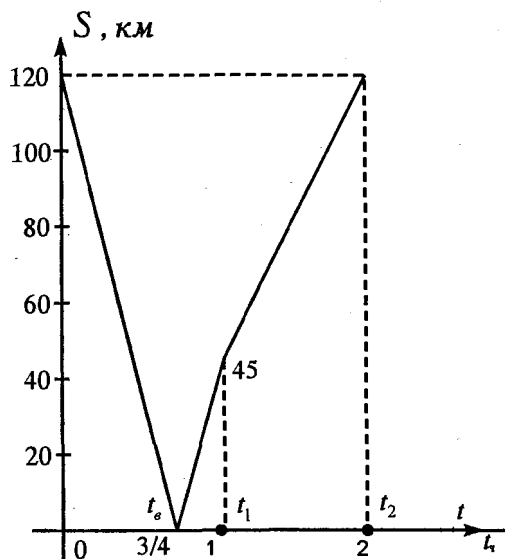


Рис. I.12

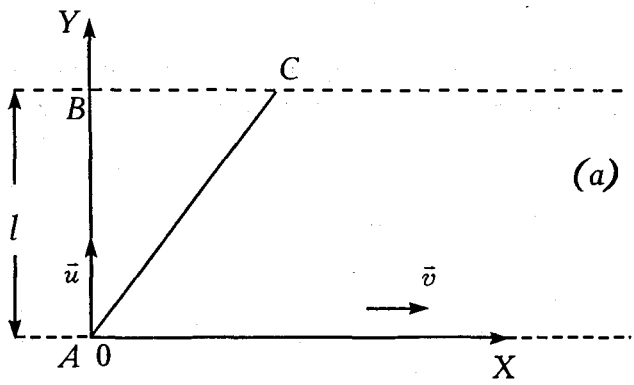
Из рис. I.11 видно, что машины встретятся через $3/4$ часа на расстоянии 75 км от города А.

Графически можно представить и как меняется расстояние между автомашинами, пользуясь формулой $S = |L - (v_A + v_B)t|$ (рис. I.12).

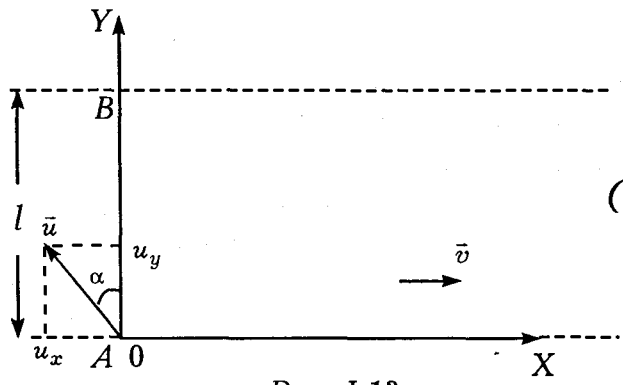
В течение времени $0 - t_1$ обе автомашины движутся одновременно, наклон прямой S определяется величиной скорости $(v_A + v_B)$. В момент $t = t_0$ автомашины встретятся. В момент $t = t_1 = 1,2$ ч автомашина, выехавшая из города A , прибывает в город B и останавливается (рис. I.12). Машина же, выехавшая из города B , продолжает двигаться. С этого момента времени расстояние между машинами определяется формулой $S = |L - v_B t|$. Так как $v_A = 0$, следовательно наклон кривой на графике, изображенном на рис. I.12, уменьшается (участок $t_1 - t_2$). В момент времени $t = t_2 = 2$ ч автомобиль, выехавший из города B , прибывает в город A .

Задача I.5 Лодка переплывает реку, отправляясь из пункта A . Если она держит курс перпендикулярно берегу, то через время t_1 после отправления она попадает в пункт C , лежащий на расстоянии S ниже пункта B (рис. I.13, а). Если она держит курс с той же скоростью под некоторым углом α к прямой AB , то через время t_2 лодка попадет в пункт B (рис. I.13, б). Определить: ширину реки l , скорость лодки u , скорость течения реки v и угол α .

Решение. Приступим сразу же к выполнению 4-го пункта предложенного алгоритма, т. е. к выбору системы отсчета (полагая, что первые три пункта уже освоили). В этой задаче движение лодки в любой момент времени описывается с помощью двух координат: $x(t)$ и $y(t)$ (движение двумерное). Начало координат удобно совместить с пунктом A , ось OY направить вдоль прямой OB , а ось OX вдоль берега реки (см. рис. I.13). В любой



(a)



(б)

Рис. I.13

момент времени уравнения для координат в обоих случаях запишутся:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t = vt; \\ y(t) = v_y t = ut; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = v_x t = (v - u \sin \alpha)t; \\ y(t) = v_y t = ut \cos \alpha. \end{cases}$$

Для моментов времени t_1 и t_2 эти уравнения примут вид:

- | | |
|------------------------|--|
| 1) $x(t_1) = S = vt_1$ | 3) $x(t_2) = (v - u \sin \alpha)t_2 = 0$ |
| 2) $y(t_1) = l = ut_1$ | 4) $y(t_2) = l = ut_2 \cos \alpha.$ |

Эти 4 уравнения позволят нам определить 4 неизвестные величины, требуемые в задаче.

Скорость реки v сразу же определяется из уравнения (1)

$$v = \frac{S}{t_1}.$$

Решая совместно уравнения (2) и (4), определим угол α : $ut_1 = ut_2 \cos \alpha$, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{t_1}{t_2}, \text{ или } \alpha = \arccos \frac{t_1}{t_2}.$$

Формула (3) позволит определить скорость лодки относительно воды u $(v - u \sin \alpha)t_2 = 0$ или $v = u \sin \alpha$

$$u = \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{S/t_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{S}{t_1 \sqrt{1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2}}.$$

Ширину реки l можно определить из формулы (2) либо из формулы (4). Воспользуемся более простой формулой (2):

$$l = ut_1 = \frac{St_1}{t_1 \sqrt{1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2}} = \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2}}.$$

Таким образом, мы определили все величины, требуемые в условии задачи.

Задача I.6 Человек в лодке должен попасть из точки A в точку B , находящуюся на противоположном берегу реки (рис. I.14). Скорость течения реки \vec{v}_0 . Прямая AB расположена под углом α к берегу. С какой наименьшей скоростью \vec{u} относительно воды должна

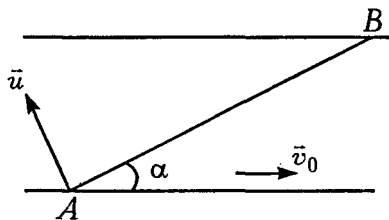


Рис. I.14

относительно воды должна плыть лодка, чтобы попасть в точку B ?

Решение. Скорость лодки относительно берега \vec{v}_p (результатирующая скорость) направлена по прямой AB и представляет собой

векторную сумму скоростей \vec{u} и \vec{v}_0 , т.е. $\vec{v}_p = \vec{u} + \vec{v}_0$. Решение этой задачи очень упрощается, если воспользоваться при сложении скоростей правилом треугольника (рис. I.15). Из всех возможных значений скоростей \vec{u} наименьшим будет перпендикуляр, опущенный на направление AB . Следовательно, человеку нужно направ-

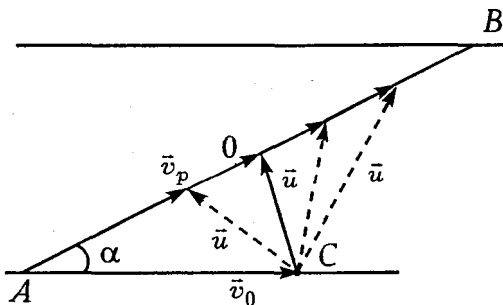


Рис. I.15

вить лодку перпендикулярно направлению AB . Величина этой скорости определяется из прямоугольного треугольника $AOС$:

$$u_{\min} = v_0 \sin \alpha.$$

Задача I.7 Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, вторую — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч.

Определить среднюю скорость (средний модуль скорости) на всем пройденном пути.

Решение. Пусть первую половину пути автомобиль прошел за время t_1 , двигаясь со скоростью

$v_1 = \frac{S/2}{t_1}$. Вторую половину пути он прошел

за время t_2 , двигаясь со скоростью $v_2 = \frac{S/2}{t_2}$.

Тогда полное время движения равно

$t_n = t_1 + t_2 = \frac{S}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)$. Так как весь путь, прой-

денный автомобилем, равен S , то среднюю скорость легко определить:

$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\frac{S}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 40}{100} \text{ км/ч} =$$

$$= 48 \text{ км/ч.}$$

Задача I.8 К ползуну, который может перемещаться по направляющей рейке (рис. I.16), прикреплен нерастяжимый шнур, продетый через кольцо. Шнур выбирают со скоростью v . С какой скоростью u движется ползун в момент, когда шнур составляет с направлением оси OX угол α ?

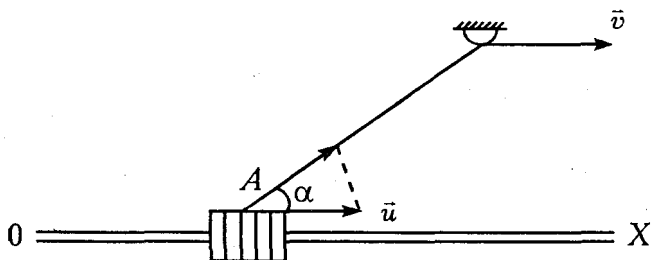


Рис. I.16

Решение. Так как шнур нерастяжим, то каждая его точка перемещается со скоростью v . Именно поэтому проекция скорости u , с которой движется точка A вдоль рейки, на направление шнура, равна скорости шнура v , т.е. $u \cos \alpha = v$. Отсюда $u = v / \cos \alpha$.

§ 4. Равноускоренное движение

При решении задач на равноускоренное движение мы будем также пользоваться ранее предложенным алгоритмом.

Задача I.9 Ударом клюшки хоккейной шайбе сообщили скорость $v_0 = 20$ м/с. Через время $t_0 = 10$ с

шайба, движущаяся прямолинейно, остановилась. Определить ускорение, с которым двигалась шайба, и путь S , пройденный шайбой за это время.

Решение. Движение шайбы происходит вдоль одной прямой, поэтому координатную ось OX направим вдоль этой прямой. За положительное направление оси OX примем направление вектора начальной скорости \vec{v}_0 (рис. I.17), а начало координат совместим с точкой A — началом движения шайбы.

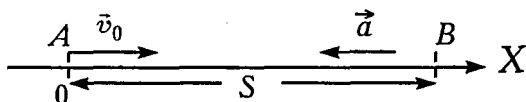


Рис. I.17

При равноускоренном движении в выбранной системе отсчета надо записать два уравнения — для координаты и скорости. Эти уравнения будут иметь вид

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad v_x(t) = v_{0x} + a_x t.$$

В выбранной нами системе отсчета $x_0 = 0$, $a_x = -a$, $v_{0x} = v_0$. Так как шайба тормозится, то ускорение направлено в сторону, противоположную направлению вектора \vec{v}_0 . Таким образом:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \quad v_x(t) = v_0 - at.$$

Через время $t_0 = 10$ с после начала движения тело остановилось. Это значит, что скорость стала равной нулю, т. е.

$$v_x(t_0) = 0 = v_0 - at_0 \text{ или } a = \frac{v_0}{t_0}.$$

Так как тело не меняло направления своей скорости, то путь можно определить из кинематического уравнения

$$x(t_0) = S = v_0 t_0 - \frac{at_0^2}{2} = v_0 t_0 - \frac{v_0 t_0}{2} = \frac{v_0 t_0}{2}.$$

Таким образом:

$$a = \frac{v_0}{t_0} = \frac{20 \text{ м / с}}{10 \text{ с}} = 2 \text{ м/с}^2; \quad S = \frac{v_0 t_0}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100 \text{ м}.$$

Задача I.10 Автомобиль начинает двигаться из точки A со скоростью \vec{v}_0 и через некоторое время попадает в точку B (рис. I.18). Какой путь прошел автомобиль, если он двигался с постоянным по величине ускорением \vec{a} ? Определить среднюю скорость автомобиля на всем пути движения. Расстояние между точками A и B равно l .

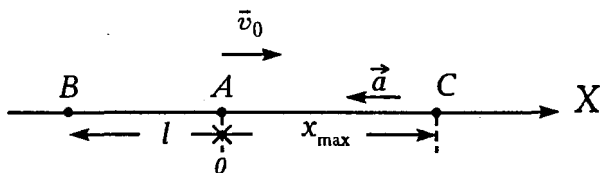


Рис. I.18

Решение. Мы сразу же приступим к выполнению п.4 алгоритма, т.е. к выбору системы отсчета.

Давайте выберем систему координат с началом в точке A , а ось OX направим по направлению скорости \vec{v}_0 (рис. I.18). Далее, запишем уравнения для координаты и скорости:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad v_x(t) = v_{0x} + a_x t.$$

В выбранной нами системе отсчета $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$. В нашей задаче автомобиль может попасть в точку B только в том случае, если его ускорение \vec{a} будет направлено в сторону, противоположную скорости \vec{v}_0 . Таким образом, в выбранной нами системе отсчета уравнения для координаты и скорости в любой момент времени примут вид:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \quad v_x = v_0 - at.$$

В некоторый момент времени $t = t_1$, скорость автомобиля обратится в нуль, он остановится (точка C) и далее начнет двигаться в сторону, противоположную направлению оси OX . В этот момент времени автомобиль находится на наибольшем расстоянии от точки A (рис. I.18). Общий путь, пройденный автомобилем за время движения, равен

$$S = 2AC + l = 2x_{\max} + l.$$

Следовательно, для нахождения пути S нам необходимо определить x_{\max} . В точке C скорость автомобиля обращается в нуль, т. е.

$$v_x(t_1) = 0 = v_0 - at_1, \text{ откуда } t_1 = \frac{v_0}{a}.$$

Уравнение для координаты позволит получить выражение для $AC = x_{\max}$, если подставить $t = t_1$:

$$x_{\max} = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

$$\text{Следовательно, } S = \frac{2v_0^2}{2a} + l = \frac{v_0^2}{a} + l.$$

Средняя скорость автомобиля за все время движения согласно определению (п.1.6) равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t_2}, \text{ где } t_2 - \text{ полное время движения авто-}$$

мобиля от пункта A до пункта B . Поэтому для определения средней скорости необходимо определить полное время движения автомобиля. Его легко определить. Ведь в конце движения автомобиль оказался в точке B , координата которой равна $-l$. Поэтому уравнение для координаты сразу же позволит определить время t_2 :

$$x(t_2) = -l = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}.$$

Это уравнение удобно переписать в виде

$$at_2^2 - 2v_0 t_2 - 2l = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения следующее:

$$t_2 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2al}}{a}.$$

Для нашей задачи пригодно только одно значение времени

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}}{a}.$$

Отрицательное решение мы отбросим, так как согласно условию задачи $t_2 > 0$. Таким образом, средняя скорость автомобиля

$$v_{cp} = \frac{S}{t_2} = \frac{v_0^2 + al}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}}.$$

Задача I.11 График зависимости скорости автомобиля от времени изображен на рис. I.19. Начертить график зависимости ускорения, координаты и пути, пройденного телом, от времени, полагая $x_0 = 0$.

Решение. Из приведенного рисунка видно, что движение автомобиля удобно разбить на 4 этапа: $(0 - t_1)$, $(t_1 - t_2)$, $(t_2 - t_3)$ и $(t_3 - t_4)$. На первом этапе $(0 - t_1)$ автомобиль движется равноускоренно с постоянным ускорением a , так как тангенс угла наклона прямой OA , численно равный ускорению, не меняется:

$$a = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha.$$

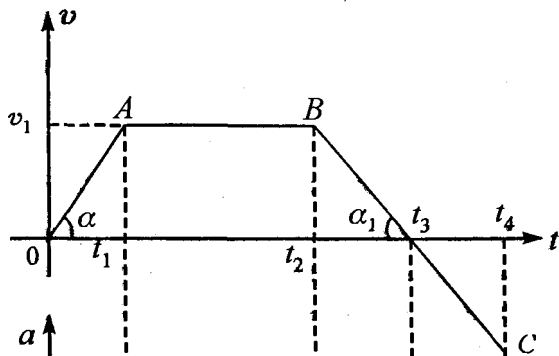


Рис. 1.19

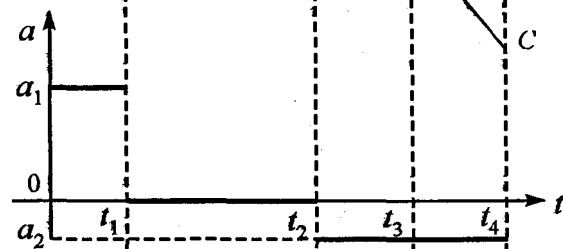


Рис. 1.20, а

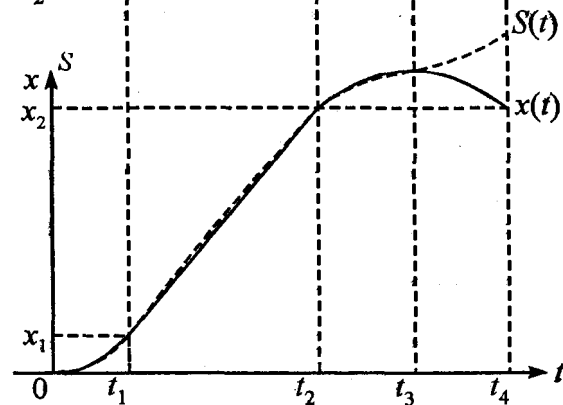


Рис. 1.20, б

Поэтому график зависимости ускорения от времени на этом этапе представляет прямую, параллельную оси времени (рис. 1.20, а) На этапе

$(t_1 - t_2)$ приращение скорости $\Delta v = 0$, поэтому и ускорение также равно нулю, т. е. движение равномерное.

На этапе $(t_2 - t_4)$ изменение скорости $\Delta v < 0$, тангенс угла наклона участка BC ($\operatorname{tg} \alpha$) — отрицателен, следовательно, на этом этапе автомобиль движется с постоянным по величине, но отрицательным ускорением a_2 . Так как $|\operatorname{tg} \alpha| > |\operatorname{tg} \alpha_1|$, то $a_1 > a_2$.

Теперь перейдем к построению графика зависимости координаты от времени. На первом этапе уравнение для координаты в нашей задаче имеет

$$\text{вид } x(t) = \frac{a_1 t^2}{2}, \text{ т. к. } x_0 = 0 \text{ и } v_0 = 0.$$

Это — уравнение вогнутой параболы (рис. I. 20, б). На этапе $(t_1 - t_2)$ при равномерном движении координата меняется по закону $x = x_1 + v_1 t$ — это наклонная прямая линия, которая начинается с момента t_1 . В этот момент координата $x(t_1) = x_1$, а тангенс угла наклона этой прямой численно равен скорости v_1 . Следует отметить, что в момент t_1 парабола первого этапа и наклонная прямая второго этапа имеют общую касательную, так как скорость в этой точке имеет одну и ту же величину.

На третьем этапе ($t_2 - t_3$) автомобиль движется равнозамедленно. Его координата меняется по закону

$$x(t) = x_2 + v_1 t - \frac{a_2 t^2}{2},$$

где x_2 — это начальная координата на этом этапе, v_1 — скорость в момент времени t_2 , т. е. начальная скорость для этапа ($t_2 - t_3$). Это — уравнение выпуклой параболы.

В момент t_2 выпуклая парабола и наклонная прямая предыдущего этапа также имеют общую касательную. Другими словами, наклонная прямая второго этапа является касательной и к вогнутой параболе первого этапа в момент t_1 и к выпуклой параболе третьего этапа в момент t_2 . Из рис. 1.19 видно, что в момент t_3 скорость автомобиля обращается в нуль. Это можно увидеть и на рис. 1.20, б, так как касательная к кривой $x(t)$ в момент t_3 параллельна оси времени $0t$. Это значит, что тангенс угла наклона касательной, численно равный величине скорости, в этот момент времени равен нулю.

На этапе ($t_3 - t_4$) скорость автомобиля стала отрицательной, т. е. автомобиль начал двигаться в сторону, противоположную оси OX , однако ускорение не изменилось ни по величине, ни по направлению. Координата автомобиля меняется на этом этапе по закону

$$x(t) = x_3 - \frac{a_2 t^2}{2},$$

где x_3 — начальная координата на этапе $(t_3 - t_4)$.

Это — уравнение выпуклой параболы.

Кривая зависимости пути от времени $S(t)$ в интервале $(0 - t_3)$ совпадает с графиком зависимости координаты от времени $x(t)$, так как направление скорости тела не меняется. На этапе $(t_3 - t_4)$ кривые расходятся, поскольку путь на этом этапе определяется формулой

$$S = \frac{|a_2| t^2}{2}.$$

На *рис. 1.20, б* изображена пунктирной линией кривая зависимости пути от времени $S(t)$.

§ 5. Свободное падение тел

Задача I.12 С поверхности Земли вертикально вверх со скоростью \vec{v}_0 выпустили сигнальную ракету. Как долго ракета будет в полете? До какой максимальной высоты H она поднимется? Какую скорость \vec{v}_* будет иметь ракета при приземлении? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Поскольку сопротивление воздуха не учитывается, то движение ракеты — это свободное падение, т. е. движение с постоянным ускорением g , направленным вертикально вниз. В данной задаче векторы \vec{v}_0 и \vec{g} направлены вдоль од-

ной вертикали, поэтому движение ракеты является прямолинейным движением.

Направим ось OY вертикально вверх, а начало координат совместим с точкой бросания ракеты (рис. I. 21). В этом случае координата $y(t)$ при движении ракеты будет описываться уравнением

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \text{ а}$$

скорость $v_y = v_{0y} + a_y t$.

В нашей задаче $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$. Тогда вышеприведенные уравнения будут иметь вид

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2};$$

$$v_y(t) = v_0 - gt.$$

В момент падения ракеты на Землю (обозначим это время t_0) ее координата y обратится в нуль, т. е.

$$y(t_0) = 0 = v_0 t_0 - \frac{gt_0^2}{2}.$$

Из этого выражения легко определяется полное время движения ракеты $t_0 = \frac{2v_0}{g}$.

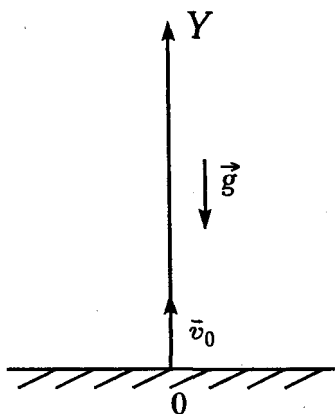


Рис. I.21

Пользуясь выражением для скорости, мы получим скорость ракеты при приземлении (в момент t_0):

$$v_y(t_0) = v_x = v_0 - gt_0 = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0.$$

Таким образом, ракета в момент приземления будет иметь такую же по величине скорость, что и в момент бросания. Знак «—» указывает на направление движения.

Максимальная высота подъема ракеты характерна тем, что на этой высоте скорость ракеты обращается в нуль.

Обозначим время подъема t_n . Уравнение для скорости в этой точке можно записать: $v_y(t_n) = v_0 - gt_n = 0$. Следовательно, $t_n = \frac{v_0}{g}$.

Если мы сравним выражение для t_0 и t_n , легко увидим, что $t_0 = 2t_n$, это позволяет нам утверждать, что время подъема ракеты до высоты H равно времени падения ее от высоты H до Земли. Максимальную высоту подъема H вычислим из кинематического уравнения:

$$y(t_n) = H = v_0 t_n - \frac{gt_n^2}{2} = v_0 \frac{v_0}{g} - g \frac{v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Вот теперь мы ответили на все поставленные в задаче вопросы.

Задача I.13 С поверхности пустого колодца вертикально вверх со скоростью $v_0=10$ м/с бросают мяч (рис. I.22). Определить время $t_{\text{п}}$, через которое мяч упадет на дно колодца, если глубина последнего $H=7,8$ м (принять $g=10$ м/с²).

Решение. Координатную ось OY направим вертикально вверх, а ее начало совместим с дном колодца. Движение мяча описывается основным кинематическим уравнением

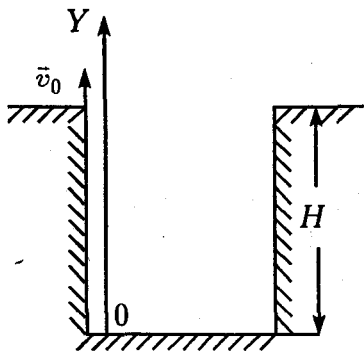


Рис. I.22

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашей задаче $y_0 = H$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, тогда вышеприведенное уравнение будет иметь вид

$$y(t) = H + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этого уравнения сразу же можно определить время $t_{\text{п}}$, через которое мяч упадет на дно колодца. В момент падения мяча $y(t_{\text{п}}) = 0$, т. е.

$$y(t_{\text{п}}) = H + v_0 t_{\text{п}} - \frac{gt_{\text{п}}^2}{2} = 0.$$

Перепишем его в более удобном виде:

$$gt_{\text{п}}^2 - 2v_0 t_{\text{п}} - 2H = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения:

$$t_{\pi} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}.$$

Мы воспользуемся только положительным значением корня, так как по условию задачи $t_{\pi} > 0$. Подставим числовые значения:

$$t_{\pi} = \frac{10 \text{ м/с} + \sqrt{100 + 156 \text{ м/с}^2}}{10 \text{ м/с}^2} = 2,6 \text{ с}.$$

Решая задачи, мы неоднократно говорили, что в кинематике все системы отсчета равноправны. Давайте проверим это на примере нашей задачи. Для этого выберем другую систему координат и получим решение. Теперь ось OY направим, например, вертикально вниз, а начало координат совместим с местом бросания мяча (рис. 1.23).

Запись основного кинематического уравнения останется прежней, однако в новой системе координат $y_0 = 0$, $v_{0y} = -v_0$, $a_y = g$.

Тогда это уравнение в новой системе координат будет иметь вид

$$y(t) = -v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения мяча на дно колодца

$$y(t_{\pi}) = H = -v_0 t_{\pi} + \frac{gt_{\pi}^2}{2}, \text{ или}$$

$$gt_{\pi}^2 - 2v_0 t_{\pi} - 2H = 0.$$

Если мы сравним это уравнение с аналогичным, полученным в первоначальной системе координат, то увидим, что они совершенно одинаковы, а значит, и решение будет одинаковым.

Таким образом, мы показали равноправность двух выбранных нами систем отсчета.

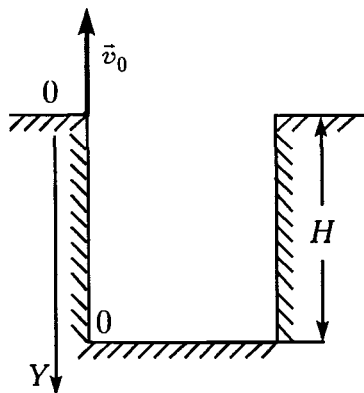


Рис. I.23

Задача I.14 Снаряд выпущен под углом α к горизонту с начальной скоростью \vec{v}_0 . Определить время полета снаряда $t_{\text{п}}$, скорость снаряда в момент падения на Землю, дальность полета L , высоту максимального подъема H .

Решение. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат совпало с местом бросания снаряда, ось $0Y$ направим вертикально вверх, ось $0X$ — горизонтально (рис. I.24), причем плоскость $X0Y$ выберем так, чтобы векторы \vec{v}_0 и \vec{g} лежали в этой плоскости. Начало отсчета времени совместим с моментом выстрела. Движение снаряда описывается кинематическими уравнениями:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad v_x = v_{0x} + a_x t;$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

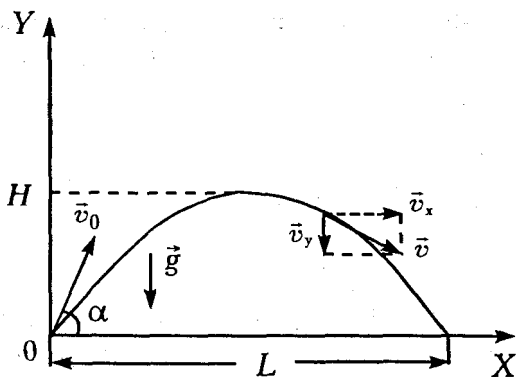


Рис. 1.24

В выбранной нами системе координат $x_0 = 0$, $a_x = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $y_0 = 0$, $a_y = -g$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, а уравнения для координат и скоростей запишутся:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha; v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const};$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

В момент падения снаряда на землю координата $y(t)$ обращается в нуль, т. е.

$$y(t_n) = v_0 t_n \sin \alpha - \frac{gt_n^2}{2} = 0.$$

Отсюда полное время полета

$$t_n = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

За это же время вдоль горизонтальной оси Ox снаряд пролетит расстояние L , т. е. дальность полета снаряда равна

$$x(t_{\text{п}}) = L = v_0 t_{\text{п}} \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальная высота подъема снаряда определяется тем, что на этой высоте вертикальная составляющая скорости v_y обращается в нуль, т. е. $v_y(t_e) = v_0 \sin \alpha - gt_e = 0$, где t_e — время подъема снаряда. Отсюда $t_e = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

Сравнивая это время со временем полного движения снаряда, легко заметить, что время движения снаряда вверх равно времени его движения вниз.

Теперь легко определить высоту максимального подъема снаряда H :

$$y(t_e) = H = v_0 t_e \sin \alpha - \frac{gt_e^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

На рис. I.24 изображена траектория движения снаряда, брошенного под углом к горизонту. Ее форму, т. е. уравнение траектории, легко получить из уравнений для координат. Определив время из выражения $x(t)$ и подставив его в уравнение для координаты $y(t)$, получим

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \alpha};$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = Ax - Bx^2,$$

где $A = \operatorname{tg} \alpha$, $B = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$.

Это — уравнение параболы.

Таким образом, снаряд летит по параболе.

Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к траектории и легко определяется как векторная сумма горизонтальной \vec{v}_x и вертикальной \vec{v}_y составляющих скоростей. Вектор полной скорости

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t);$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \cos \alpha - gt)^2}.$$

В конце полета величину полной скорости \vec{v}_x определим при подстановке $t = t_n$:

$$|\vec{v}_x(t)| = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - 2v_0 \sin \alpha)^2} = v_0.$$

Таким образом, при приземлении снаряд имеет такую же по величине скорость, что и при выстреле.

Задача I.15 Тело брошено горизонтально со скоростью \vec{v}_0 . Определить нормальное (\vec{a}_n) и ка-

сательное (тангенциальное \vec{a}_τ) ускорения через время t_0 после начала движения.

Решение. Выберем систему координат XOY (рис. 1.25), начало которой поместим в точку бросания тела. Тело будет двигаться по параболе, а его скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории.

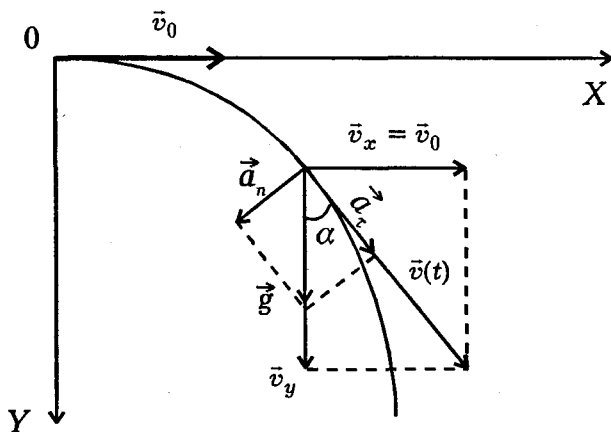


Рис. 1.25

Полным ускорением тела является ускорение свободного падения $\vec{g} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Тангенциальное ускорение меняет величину скорости, а нормальное меняет только направление скорости. Если обозначить угол между вертикалью и касательной к траектории через α , то

$$a_n = g \sin \alpha, \quad a_\tau = g \cos \alpha,$$

где, как видно из рисунка, в любой момент времени

$$\sin \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}(t)|}; \quad \cos \alpha = \frac{v_y}{|\vec{v}(t)|}.$$

В выбранной системе отсчета $v_x = v_0, v_y = gt$.

Модуль мгновенной скорости в любой момент времени равен

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Следовательно, в момент времени $t = t_0$ нормальное и тангенциальное ускорения тела определяются:

$$a_n = g \sin \alpha = g \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t_0^2}};$$

$$a_\tau = g \cos \alpha = g^2 \frac{t_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t_0^2}}.$$

§ 6. Кинематика движения материальной точки по окружности

Задача I.16 Трамвай движется со скоростью \vec{v} . Радиус трамвайного колеса r , а радиус реборды R (рис. I.26). Определить скорость и направление движения точки B .

Решение. Движение колеса можно рассматривать как его вращение вокруг неподвижной точки A в данный момент времени (точка A называется мгновенным центром вращения). При движении колеса вправо его вращение происходит по

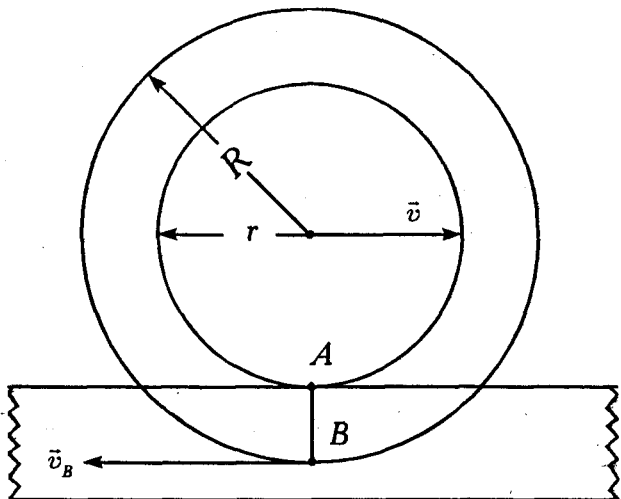


Рис. I.26

часовой стрелке. Поэтому линейная скорость точки B направлена влево и равна $v_B = \omega AB$. Угловая

скорость равна $\omega = \frac{v}{r}$, следовательно

$$v_B = \frac{v}{r}(R - r).$$

Таким образом, выбрав точку A за мгновенный центр вращения колеса, мы сильно упростили решение задачи.

Задача I.17 Мотоциклист въезжает на арену цирка со скоростью $v_0 = 72$ км/ч. Двигаясь по окружности радиусом $R = 10$ м, он проходит путь $S = 600$ м за время $t_0 = 10$ с. Определить скорость v

мотоциклиста и полное ускорение $|\vec{a}|$ в конце этого пути.

Решение. Рассмотрим движение мотоциклиста с того момента времени, когда он выехал на арену цирка. Скорость мотоцикла меняется по величине и по направлению, следовательно, в любой момент времени он будет иметь нормальное и тангенциальное ускорения. При этом полное ускорение равно

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Путь, пройденный мотоциклистом в любой момент времени, определяется по формуле

$$S = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

величина скорости

$$v(t) = v_0 + a_\tau t.$$

Для определения скорости в конце пути необходимо знать ускорение a_τ , которое легко определить из формулы для пути:

$$a_\tau = \frac{2(S - v_0 t_0)}{t_0^2} = -24 \text{ м/с}^2.$$

Подставив это выражение в формулу для скорости, получим

$$v(t) = v_0 + a_\tau t_0 = v_0 + \frac{2(S - v_0 t_0)}{t_0^2} t_0 = \frac{2S}{t_0} - v_0 = 48 \text{ м/с}.$$

Полное ускорение мотоциклиста равно

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + a_\tau^2} = 131,6 \text{ м/с}^2.$$

§ 7. Абсолютное, относительное и переносное движения

Говоря о движении тел, мы непременно должны указать, относительно какой системы координат происходит это движение. Действительно, пассажир, сидящий в автомобиле, неподвижен относительно машины, но в то же время он движется вместе с автомобилем в системе координат, связанной с Землей. Хотя в кинематике все системы отсчета равноправны, однако кинематические величины (координаты, траектория, путь, перемещение) в разных системах отсчета будут разными. При переходе из одной системы координат в другую указанные величины могут изменяться. В этом и состоит относительность движения.

При решении различных задач часто бывает удобно переходить от одной системы координат к другой, поэтому нужно уметь находить связи между различными кинематическими величинами в различных системах отсчета.

Представим себе две системы координат: неподвижную $X_0Y_0Z_0$ и XYZ , которая движется относительно системы $X_0Y_0Z_0$ со скоростью v_0 .

Движение точки относительно неподвижной системы координат условно называют *абсолютным*.

Движение точки относительно подвижной системы координат называют *относительным*.

Движение самой подвижной системы координат относительно неподвижной называют *переносным*.

Соответственно скорость, ускорение, перемещение и траекторию точки в неподвижной системе координат называют абсолютными, а аналогичные физические величины в подвижной системе координат называют относительными.

Пусть по реке слева направо плывет плот, по которому перемещается человек. Одну систему координат X_0OY_0 (неподвижную) свяжем с берегом реки, а другую XOY (подвижную) свяжем с плотом (рис. I.27, вид сверху).

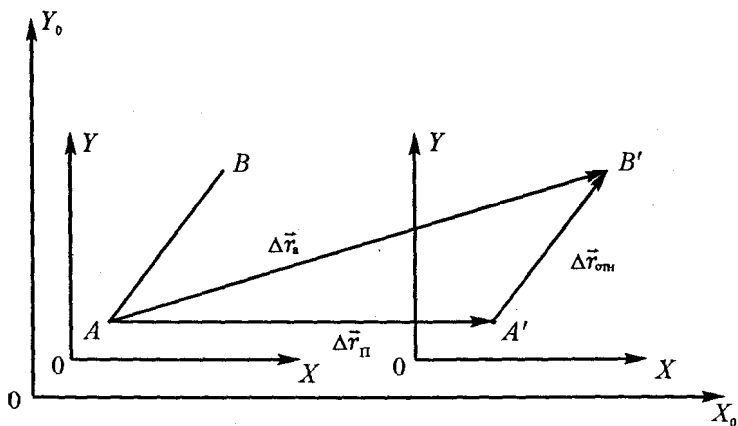


Рис. I.27

Человек движется по плоту равномерно и прямолинейно из точки A в точку B и тратит на это время Δt . За это время относительно плота человек переместился на расстояние $A'B'$, т.е. его относительное перемещение $\vec{A'B'} = \Delta \vec{r}_{\text{отн}}$. Перемещение плота за время Δt $\vec{AA'} = \Delta \vec{r}_{\text{пл}}$. Это перемещение

абсолютное перемещение $\vec{AB} = \Delta \vec{r}_{\text{абс}}$. Это перемещение

ние является переносным. Перемещение человека относительно неподвижной системы X_0OY_0 является абсолютным, т. е. $\vec{AB}' = \Delta\vec{r}_a$.

Из рисунка видно, что абсолютное, относительное и переносное перемещения связаны между собой правилом сложения векторов

$$\Delta\vec{r}_a = \Delta\vec{r}_\Pi + \Delta\vec{r}_{\text{отн.}}$$

Если мы это равенство разделим на Δt , то получим

$$\frac{\Delta\vec{r}_a}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_\Pi}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}_{\text{отн.}}}{\Delta t}.$$

При равномерном и прямолинейном движении каждое из отношений представляет собой скорость соответствующего движения, а именно

$$\vec{v}_a = \vec{v}_\Pi + \vec{v}_{\text{отн.}},$$

т. е. вектор абсолютной скорости равен сумме векторов относительной и переносной скоростей.

Последнее равенство устанавливает связь между скоростями тела в различных системах координат и носит название *закона сложения скоростей*.

Векторное сложение скоростей проводится по правилу параллелограмма или треугольника (рис. I.28).

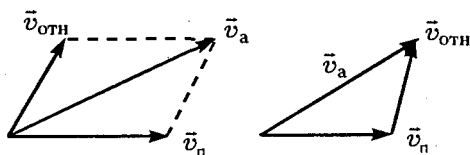


Рис. I.28

Полученный закон сложения скоростей справедлив не только для равномерных и прямолинейных, но и для любых движений. В этом случае под \vec{v}_a , \vec{v}_n , $\vec{v}_{отн}$ надо понимать мгновенные скорости тела (точки).

При решении задач на относительность движения прежде всего надо выбрать две системы координат. Одну из них принять условно за неподвижную. Далее нужно выяснить, какая скорость будет абсолютной, переносной и относительной. Затем записать закон сложения скоростей в векторной форме. После чего можно переходить к записи этого закона в проекциях на выбранное направление осей координат.

Следует отметить, что вовсе не принципиально, какую систему координат считать неподвижной. В ряде случаев удачный выбор неподвижной системы координат существенно упрощает решение задачи.

Задача I.18 Два поезда движутся навстречу друг другу. Величины их скоростей соответственно равны v_1 и v_2 . Чему равна скорость первого поезда относительно второго (v_{1-2}) и второго относительно первого (v_{2-1})?

Решение. Свяжем неподвижную систему координат $X_0Y_0Z_0$, например, с Землей, а подвижную XYZ — со вторым поездом, движущимся со скоростью \vec{v}_2 (рис. I.29). Тогда движение второго поезда относительно Земли будет переносным. Движение первого поезда относительно Земли

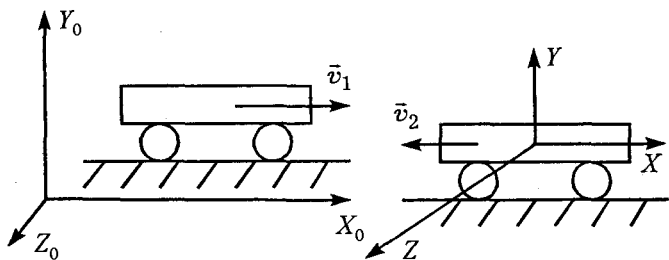


Рис. I.29

(неподвижной системы $X_0Y_0Z_0$) – абсолютным. Скорость первого поезда относительно второго поезда (относительно подвижной системы XYZ) является относительной. Следовательно, при таком выборе системы координат

$$\bar{v}_a = \bar{v}_1, \quad \bar{v}_n = \bar{v}_2, \quad \bar{v}_{отн} = \bar{v}_{1-2}.$$

Закон сложения скоростей $\bar{v}_a = \bar{v}_n + \bar{v}_{отн}$ запишется так: $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 + \bar{v}_{1-2}$. Отсюда относительная скорость $\bar{v}_{1-2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$. Вспомним правило вычитания векторов (рис. I.30). Из рисунка видно, что в проекциях на ось OX_0 последнее уравнение запишется $v_{1-2} = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2$. Скорость первого поезда относительно второго равна сумме величин скоростей v_1 и v_2 и направлена в сторону оси OX . Чтобы определить скорость второго поезда относительно первого, удобно под-

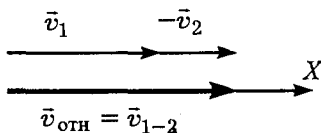
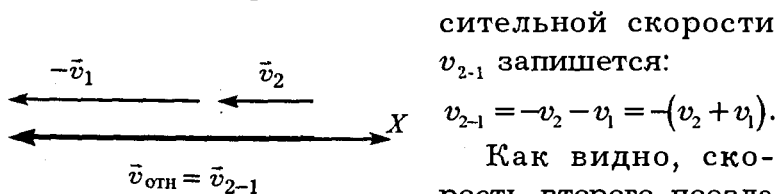


Рис. I.30

вижную систему координат связать с первым поездом, а неподвижную систему координат $X_0Y_0Z_0$ по-прежнему оставить связанной с Землей. Тогда $\vec{v}_a = \vec{v}_2$, $\vec{v}_n = \vec{v}_1$, $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_{2-1}$. При таком выборе систем координат закон сложения скоростей будет иметь вид:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{2-1} \text{ или } \vec{v}_{отн} = \vec{v}_{2-1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Векторное вычитание скоростей изображено на рис. 1.31. В проекции на ось OX значение относительной скорости



v_{2-1} запишется:

$$v_{2-1} = -v_2 - v_1 = -(v_2 + v_1).$$

Как видно, скорость второго поезда относительно первого равна сумме скоростей

v_1 и v_2 , но направлена в сторону, противоположную оси OX .

Рис. 1.31

Задача 1.19. По пересекающимся под углом α шоссе́йным дорогам движутся две автомашины со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 (рис. 1.32). Определить величину и направление скорости первого автомобиля относительно второго (\vec{v}_{1-2}).

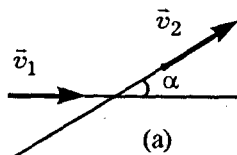


Рис. 1.32

Решение. Неподвижную систему координат $X_0Y_0Z_0$ свяжем с Землей. Подвижную XYZ — с автомашиной, движущейся со скоростью \vec{v}_2 . Тогда движение этой автомашины будет переносным.

В системе координат XYZ движение первой автомашины будет относительным, а ее движение относительно Земли — абсолютным, т. е. $\vec{v}_a = \vec{v}_1$, $\vec{v}_п = \vec{v}_2$, $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_{1-2}$.

Пользуясь законом сложения скоростей, запишем $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{1-2}$ или $\vec{v}_{1-2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Вычитание векторов показано на рис. 1.32, б. Вектор \vec{v}_{1-2} является скоростью первой автомашины относительно второй. Величина этой скорости определяется по теореме косинусов

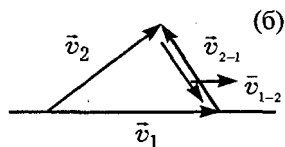


Рис. 1.32

$$|\vec{v}_{1-2}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}.$$

Задача 1.20 На тележке, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью \vec{v}_T , установлена труба. Под каким углом к направлению движения тележки следует установить трубу, чтобы капли дождя, падающие вертикально относительно Земли со скоростью \vec{v}_K , пролетали через трубу, не задевая ее стенок?

Решение. Капли дождя не будут задевать стенок трубы, если вектор скорости капель относительно тележки \vec{v}_{KT} , а следовательно, и относительно трубы будет направлен вдоль стенок трубы.

Неподвижную систему координат $X_0Y_0Z_0$ свяжем с Землей, а подвижную XYZ — с тележкой. Тогда $\vec{v}_a = \vec{v}_K$, $\vec{v}_п = \vec{v}_T$, $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_{KT}$, а закон сложения скоростей можно записать в виде

$$\vec{v}_K = \vec{v}_T + \vec{v}_{KT}, \text{ отсюда } \vec{v}_{KT} = \vec{v}_K - \vec{v}_T.$$

Векторное вычитание скоростей показано на рис. I.33. Следовательно, трубу нужно расположить вдоль вектора \vec{v}_{KT} . Угол наклона трубы к горизонту определяется из треугольника скоростей $\text{tg}\alpha = \frac{v_K}{v_T}$.

$$\text{tg}\alpha = \frac{v_K}{v_T}.$$

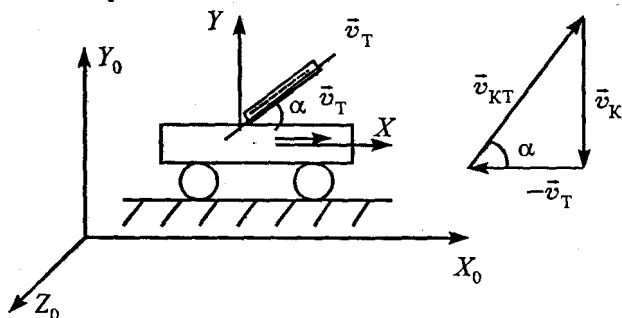


Рис. I.33

Задача I.21 Велосипедист едет с постоянной скоростью по прямолинейному участку дороги. Найти мгновенные скорости точек A , B , C , D , лежащих на ободе колеса, относительно Земли (рис. I.34).

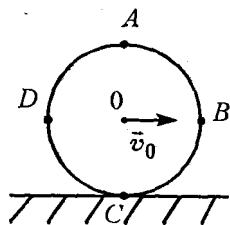


Рис. I.34

Решение. При движении колеса по Земле все его точки участвуют одновременно в двух движениях: вдоль Земли с постоянной скоростью \vec{v}_0 и вокруг оси, проходящей через точку O , с линейной (касательной) скоростью $\vec{v}_л$, направление которой меня-

ется. Если колесо катится без проскальзывания, то $v_{\text{л}} = v_0$. (Попробуйте доказать это сами!)

Свяжем неподвижную систему координат $X_0Y_0Z_0$ с Землей. Подвижную систему координат XYZ свяжем с центром колеса. Эта система (рис. I.35) движется со скоростью v_0 относительно Земли. Тогда линейные скорости каждой точки обода колеса являются относительными скоростями, а мгновенные скорости точек A, B, C, D — абсолютными скоростями, которые вычисляются из закона сложения скоростей $\vec{v}_a = \vec{v}_{\text{ц}} + \vec{v}_{\text{отн}}$. Для нашего случая $\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{л}}$.

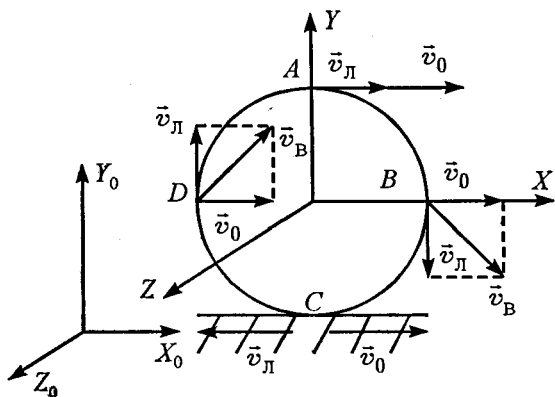


Рис. I.35

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{л}A} & |\vec{v}_A| &= 2v_0; \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{л}B} & |\vec{v}_B| &= v_0\sqrt{2}; \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{л}C} & |\vec{v}_C| &= 0; \\ \vec{v}_D &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{л}D} & |\vec{v}_D| &= v_0\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Направление скоростей точек A , B , C , D указаны на рис. 1.35.

При движении колеса без проскальзывания скорость точки касания колеса с Землей (точка C) всегда равна нулю. Поэтому движение колеса можно рассматривать как последовательность очень малых поворотов вокруг точек касания. Это легко понять, если окружность колеса представить в виде многоугольника с большим числом сторон, так как в каждый момент времени колесо (рис. 1.36) вращается вокруг точки соединения сторон многоугольника. Точка C называется мгновенным центром вращения колеса. Введение мгновенного

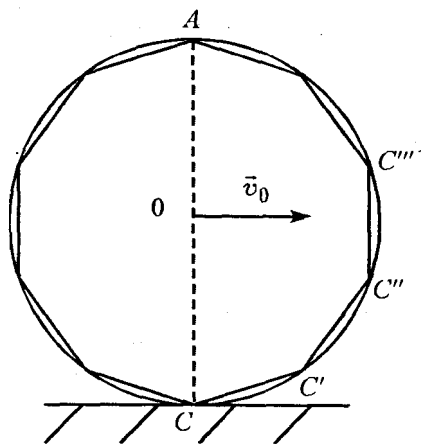


Рис. 1.36

центра вращения часто позволяет легко решать некоторые задачи. Действительно, если считать, что колесо вращается вокруг мгновенного центра C , то радиус вращения точки A , например, равен $CA = 2 \cdot OA$, следовательно, скорость точки A будет в два раза больше, чем скорость точки O , т.е. $v_A = 2v_0$,

ибо скорость определяется по формуле $v_i = \omega r_i$. (Угловая скорость вращения для всех точек колеса одинакова.)

II. ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

пII.1 Движение любого тела вызывается или изменяется в результате его взаимодействия с другими телами. Законы динамики устанавливают связь между движением тел и причинами, которые вызвали или изменили это движение.

В начале XVII века Галилеем были проведены тщательные опыты, которые позволили сделать следующий вывод: *если на тело нет внешних воздействий, то оно сохраняет покой или движется с постоянной скоростью.* Это утверждение составляет основу I-го закона динамики.

Свойство тел сохранять свою скорость при отсутствии действия на него других тел и менять ее лишь под действием других тел называется *инерцией*. Поэтому первый закон Ньютона получил название закона инерции. В настоящее время он формулируется так: *существуют системы отсчета, называемые инерциальными, в которых изолированное тело движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.* Изолированными называются тела, на которые не действуют другие тела.

пII.2 Второй закон Ньютона устанавливает связь между всеми действующими на тело силами и ускорением, которое получает тело в результате этого взаимодействия.

Ускорение точечного тела \vec{a} пропорционально действующей на него силе \vec{F} и обратно пропорционально массе тела m , т. е.

$$\vec{a} = \vec{F}/m.$$

При наличии нескольких сил, действующих на тело, это соотношение записывается

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i / m, \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Последняя запись используется чаще. Она гласит: *результатирующая всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на ускорение.* Это соотношение называют вторым законом Ньютона или основным уравнением динамики.

III.3 Третий закон Ньютона указывает на тела, со стороны которых действует та или иная сила. Он формулируется так: *силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению; эти силы направлены вдоль одной прямой* ($\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$), т. е. силы всегда возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-либо телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу. Эти силы не могут уравновешивать друг друга, потому что приложены к разным телам.

III.4 При упругой деформации растяжения (или сжатия) величина деформации прямо пропорциональна модулю силы упругости. Это отражается законом Гука

$$\vec{F}_{\text{уп}} = -k \vec{\Delta x}, \quad \text{или} \quad |\vec{F}_{\text{уп}}| = k |\vec{\Delta x}|.$$

пII.5 При движении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление движению, называемое трением. Силы трения действуют вдоль поверхности тел при их непосредственном соприкосновении. Различают два вида трения: сухое трение, возникающее между сухими поверхностями твердых тел, и вязкое трение — трение о жидкую и газообразную среду. При изучении сухого трения выделяют две его разновидности: трение покоя и трение скольжения.

Трение, действующее между двумя неподвижными друг относительно друга телами, называют трением покоя. Сила трения покоя зависит от приложенной к телу силы и меняется от нуля до максимального значения $F_{\text{тр max}}$, т. е. $0 \leq F_{\text{тр max}} \leq \mu N$, где μ коэффициент трения, а N — сила нормального давления.

Сила трения покоя направлена в сторону, противоположную возможному движению. При достижении силой трения покоя максимального своего значения тело начинает скользить. В этом случае действует сила трения скольжения. Она равна $F_{\text{тр. ск}} = \mu N$ и не зависит от скорости движения.

пII.6 При движении тела в жидкой или газообразной среде возникает сила вязкого трения. Сила вязкого трения появляется только при относительном движении тела, т. е. сила трения покоя в жидкости или газе отсутствует. Кроме того, сила вязкого трения зависит от скорости: при малых скоростях движения эта зависимость меняется по закону

$\vec{F}_{\text{тр. в}} = -\mu\vec{v}$, где μ — коэффициент вязкого трения.

Он зависит от среды, формы и размеров тела, температуры, давления.

п.7 Вес тела — сила, с которой тело вследствие его притяжения Землей действует на опору или растягивает подвес. Вес тела определяется совокупностью действующих на тело сил и существенно зависит от ускорения, с которым движется опора (или подвес).

Для успешного решения задач с использованием законов Ньютона предлагается следующая последовательность действий, некий алгоритм.

1. Прежде всего необходимо внимательно прочитать условие задачи, нарисовать рисунок — это позволит яснее представить задачу.

2. Поскольку движение тела определяется *всеми* действующими на тело силами, то необходимо на рисунке к задаче стрелочками указать все силы, действующие на тело.

Очень полезно отчетливо представить, со стороны каких тел действуют рассматриваемые силы. Это поможет сделать третий закон Ньютона.

3. Далее второй закон Ньютона необходимо записать в векторной форме

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}.$$

4. Затем нужно выбрать направление осей Ox и Oy (обычно эти направления диктуются условиями задачи) и перейти к записи второго закона Ньютона для проекций на оси координат.

5. Если в задаче кроме сил и ускорений требуется определить координаты, расстояния или скорости, то кроме законов Ньютона нужно использовать еще и кинематические уравнения.

6. Записав систему уравнений для данной задачи, необходимо проследить за тем, чтобы общее число уравнений равнялось числу неизвестных. Решение задачи нужно получить в общем виде. Это позволит провести анализ решения, т. е. увидеть, как меняются найденные величины от условий задачи.

7. После этого в полученные формулы нужно подставить цифровые данные.

Примеры решения задач

Задача II.1 В движущемся лифте на динамометре висит груз массой $m = 1$ кг. При этом показания динамометра $F = 15$ Н. Определить ускорение лифта и направление его движения. Чему равен вес груза P ?

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения пружины \vec{F} (показание динамометра). При установившемся движении груз имеет то же ускорение, что и лифт (рис. II.1). Второй закон Ньютона для груза имеет вид (II.2)

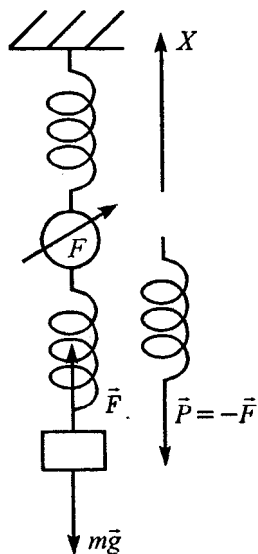


Рис. II.1

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Ось OX направим вверх. Запишем закон Ньютона в проекции на эту ось $F - mg = ma$. Отсюда

$$a = \frac{F - mg}{m} = \frac{15\text{Н} - 9,8\text{Н}}{1\text{ кг}} = 5,2\text{ м/с}^2.$$

Ускорение имеет положительный знак, значит, оно направлено вверх. Определить направление движения груза при заданном условии задачи мы не можем! *О направлении движения тела можно судить только по направлению скорости, которая определяется формулой*

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Поэтому лифт может в условии нашей задачи двигаться вверх ускоренно (если его начальная скорость \vec{v}_0 направлена вверх) либо вниз замедленно (если его начальная скорость \vec{v}_0 направлена вниз). И только в том случае, когда начальная скорость тела равна нулю, направление движения совпадает с направлением ускорения \vec{a} .

Теперь определим вес груза P .

Весом тела называют силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес. При взаимодействии пружины с грузом m на него действует сила \vec{F} . Тело по третьему закону Ньютона действует на пружину (вертикальный подвес) с силой $\vec{P} = -\vec{F}$. Поэтому вес тела по величине равен силе F , но направлен вниз (рис. II.1). Таким образом, вес тела $P = F = 15\text{Н}$.

Как видно, вес тела в условии нашей задачи больше силы тяжести, действительно:

$$mg = 1\text{кг} \cdot 9,8 \text{ м/с} = 9,8\text{Н} < P = 15\text{Н}.$$

Задача II.2 Два груза с массами m_1 и m_2 , связанные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на идеально гладком столе. К телу массы m_2 приложена сила \vec{F} . С каким ускорением движутся тела? Каково натяжение нити \vec{T} ?

Решение. Укажем стрелочками все силы, действующие на каждый из грузов.

На тело массы m_1 действуют три силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N}_1 и сила натяжения нити \vec{T}_1 . На тело массы m_2 действуют четыре силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N}_2 , сила натяжения нити \vec{T}_2 и сила \vec{F} (рис. II.2, а).

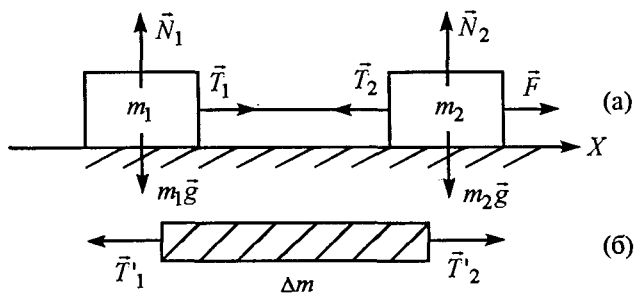


Рис. II.2

Запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1; \quad m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2.$$

Направим ось OX вдоль направления силы \vec{F} и перепишем закон Ньютона в проекциях на эту ось:

$$T_1 = m_1 a_1; \quad F - T_2 = m_2 a_2.$$

Мы получили два уравнения с четырьмя неизвестными, поэтому нужны еще дополнительные уравнения. Одно из них мы получим из условия нерастяжимости нити. В этом случае оба конца нити за любой промежуток времени совершают равные перемещения, т. е.

$$\Delta x_1 = \frac{a_1 t^2}{2} \quad \text{и} \quad \Delta x_2 = \frac{a_2 t^2}{2},$$

так как $\Delta x_1 = \Delta x_2$, то $a_1 = a_2 = a$.

Условие невесомости нити позволяет найти связь между силами \vec{T}_1 и \vec{T}_2 . По третьему закону Ньютона на концы веревки действует сила $\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1$ и $\vec{T}'_2 = -\vec{T}_2$ (рис. II.2, б). В проекции на ось OX уравнение Ньютона для нити можно записать:

$$T'_2 - T'_1 = \Delta m a, \quad \text{но так как нить невесома}$$

($\Delta m = 0$), то $T'_2 - T'_1 = 0$, или $T'_2 = T'_1 = T$, т. е. невесомая нить действует на грузы m_1 и m_2 с равными по величине, но противоположно направленными силами.

Таким образом, уравнения движения для грузов вдоль оси OX запишутся:

$$T = m_1 a; \quad F - T = m_2 a.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$F = (m_1 + m_2)a, \text{ или } a = \frac{F}{m_1 + m_2}, \text{ а сила на-}$$

$$\text{тяжения } T = m_1 a = \frac{mF_1}{m_1 + m_2}.$$

Задача II.3 Тело массой m движется по идеально гладкой горизонтальной плоскости под действием силы \vec{F} , направленной под углом α к горизонту. Найти ускорение \vec{a} тела и его вес.

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила \vec{F} (рис. II.3). Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

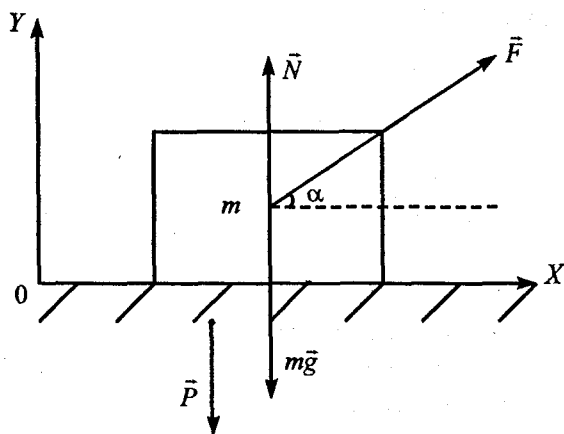


Рис. II.3

Так как тело движется вдоль горизонтальной плоскости, ось OX направим, как показано на рисунке, а ось OY — перпендикулярно к ней. Тогда закон Ньютона в проекциях на оси координат запишется соответственно

$$F \cos \alpha = ma_x = ma;$$

$$-mg + N + F \sin \alpha = ma_y = 0.$$

Из первого соотношения определяем ускорение

$$a = \frac{F \cos \alpha}{m}.$$

Вес тела \vec{P} (сила, с которой тело действует на плоскость) численно равен силе, с которой плоскость действует на тело (силе \vec{N}) по третьему закону Ньютона, т.е. $\vec{N} = -\vec{P}$ или $|\vec{N}| = |\vec{P}|$. Силу \vec{N} легко определить из уравнения движения, записанного вдоль оси OY :

$$N = mg - F \sin \alpha.$$

Следовательно, вес тела $P = mg - F \sin \alpha$. Эта сила приложена к плоскости (рис. II.3). Как видно, вес тела меньше силы тяжести.

Задача II.4 На гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, находится тело массой m . Определить ускорение тела \vec{a} , реакцию опоры \vec{N} и результирующую силу \vec{F}_p , действующую на тело.

Решение. На тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры \vec{N} . Результирую-

щая этих двух сил заставляет тело двигаться вдоль наклонной плоскости с ускорением \vec{a} . Второй закон Ньютона запишется

$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{F}_p = m\vec{a}.$$

Так как тело перемещается вдоль наклонной плоскости, то ось OX направим вдоль наклонной плоскости вниз, а ось OY — перпендикулярно к ней (рис. II.4, а). Тогда уравнение Ньютона в проекциях на эти оси запишется

$$mg \sin \alpha = ma_x; \quad N - mg \cos \alpha = 0.$$

Следовательно, $a = g \sin \alpha$, $N = mg \cos \alpha$, а

$$|\vec{F}_p| = |m\vec{a}| = mg \sin \alpha.$$

Однако хочу обратить ваше внимание на то, что реакция опоры \vec{N} при движении тел вдоль наклонной плоскости зависит от условия задачи.

Изменим задачу. Пусть тело массой m находится на той же плоскости, но теперь наклонную плоскость перемещаем с ускорением \vec{a} вдоль горизонтальной поверхности так, чтобы тело на ней покоилось. Вновь определим величину и направление результирующей силы \vec{F}_p и реакцию опоры \vec{N} .

Решение. На тело по-прежнему действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры \vec{N}_1 . Вторым закон Ньютона записывается

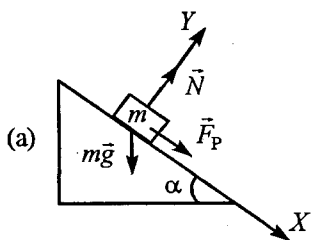


Рис. II.4

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 = m\vec{a}.$$

Тело массы m покоится на наклонной плоскости, но относительно Земли оно вместе с наклонной плоскостью перемещается с ускорением \vec{a} . Следовательно, результирующая сила \vec{F}_p направлена в ту же сторону, что и ускорение \vec{a} (рис. II.4, б). Можно вновь записать уравнение движения вдоль осей OX и OY и определить силы \vec{N}_1 и \vec{F}_{pl} . Но мы предложим другой способ решения.

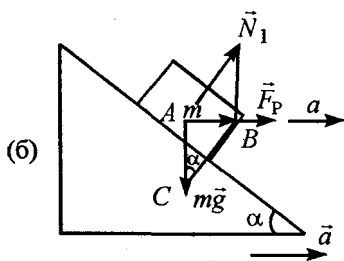


Рис. II.4

Величину результирующей силы \vec{F}_{pl} определим из прямоугольного треугольника ABC

$$F_{pl} = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Сила реакции опоры N_1 вычисляется из того же

треугольника $N_1 = \frac{mg}{\cos \alpha}$.

Как видно, сила \vec{F}_{pl} отличается и по величине, и по направлению от силы \vec{F}_p , а реакция опоры \vec{N}_1 отличается от силы \vec{N} только по величине.

Задача II.5 На тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, установлен стержень с подвешенным на нити шариком массой m . Определить силу натяжения нити \vec{T} , если плоскость образует с горизонтом угол α .

Решение. Предположим, что при установившемся движении (шарик и тележка движутся с ускорением \bar{a}) шарик отклонился от перпендикуляра к наклонной плоскости на угол β (рис. II.5).

Второй закон Ньютона для шарика имеет вид:

$$\bar{T} + m\bar{g} = m\bar{a}.$$

Выберем ось OX вдоль наклонной плоскости, а ось OY — перпендикулярно к ней. Тогда второй закон Ньютона в проекциях на оси координат запишется

$$T \sin \beta + mg \sin \alpha = ma;$$

$$T \cos \beta - mg \cos \alpha = 0.$$

При установившемся движении все точки тележки, нить и шарик движутся с одним и тем же ускорением $a = g \sin \alpha$.

Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $T \sin \beta = 0$. Так как $T \neq 0$, то $\sin \beta = 0$. Следовательно, угол $\beta = 0$. Это значит, что нить с шариком располагается перпендикулярно наклонной плоскости.

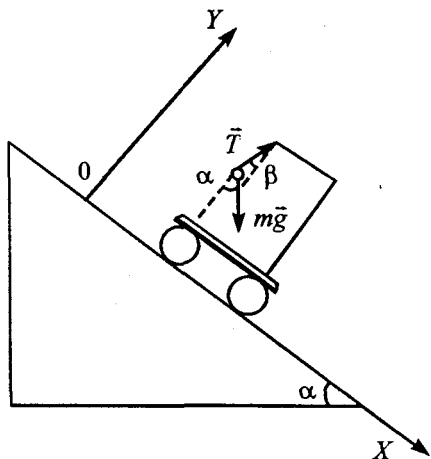


Рис. II.5

Задача II.6 На одном конце веревки, переброшенной через невесомый блок, находится груз массой m , а на другом — человек массой $M = 2m$.

Человек поднимается вверх с ускорением относительно веревки $\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{g}$ (рис. II.6). Каково его ускорение относительно Земли?

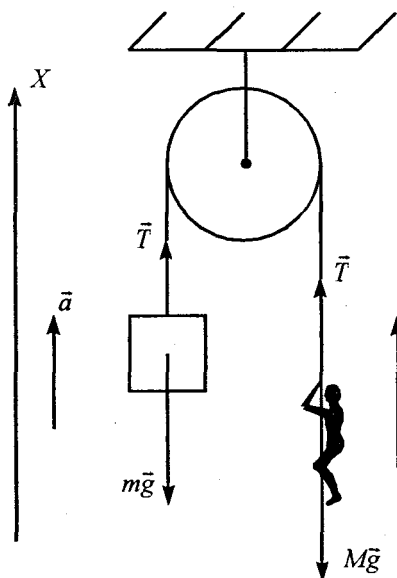


Рис. II.6

Решение. На груз и человека действуют вдоль вертикали по две силы: сила тяжести и натяжение веревки. Выберем положительное направление оси OX , направленное вверх. Тогда для обоих тел второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется: $T - mg = ma$;

$$T - Mg = Ma_{\text{абс}} = M(g - a).$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$-Mg + mg = M(g - a) - ma, \text{ или}$$

$$-2mg + mg = 2mg - 2ma - ma, \text{ или}$$

$$3mg = 3ma.$$

Следовательно, $a = g$. Таким образом, груз массой m движется вверх с ускорением g , а человек относительно Земли движется с ускорением $a_{\text{абс}} = g - a = 0$, т. е. относительно Земли человек движется равномерно.

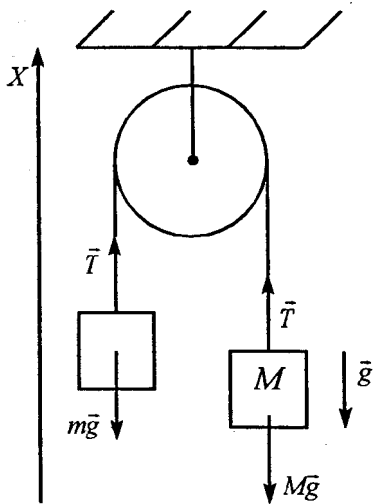


Рис. II.7

Задача II.7 На одном конце нити, перекинутой через невесомый блок, подвешен груз массой $m = 1$ кг. На другом ее конце осторожно подвешен груз массой $M = 1000$ кг. Какова сила натяжения нити?

Решение. Так как масса груза M в тысячу раз больше массы груза m , то можно считать, что грузы с нитью движутся с ускорением

g . Выбрав положительное направление оси Ox , как показано на рис. II.7, можно записать второй закон Ньютона вдоль этого направления для груза массой m : $T - mg = mg$.

Следовательно, натяжение нити

$$T = 2mg = 19,6\text{Н}.$$

Задача II.8 На невесомых блоках, изображенных на рис. II.8, подвешены грузы массой m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Определить натяжение нити \bar{T} .

Решение. На рисунке стрелочками нарисованы все силы, которые действуют на тело массой m_1 , подвижный блок и тело массой m_2 . Выберем ось Ox , направленную вниз. Тогда закон Ньютона для тел запишется

$$m_1 g - T = m_1 a_1;$$

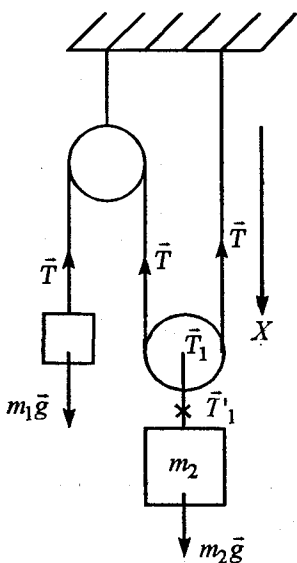
$$T_1 - T - T = m_{\text{бл}} a_2 = 0 \quad (\text{т.к. } m_{\text{бл}} = 0);$$

$$m_2 g - T_1 = -m_2 a_2.$$

Поскольку $m_1 > m_2$, то тело массой m_1 движется вниз, а тело массой m_2 — вверх. Из второго уравнения следует $T_1 = 2T$, и уравнения Ньютона запишутся

$$m_1 g - T = m_1 a_1; \quad m_2 g - 2T = -m_2 a_2.$$

Мы имеем систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Недостающее уравнение можно найти, используя кинематические связи. Связь



между ускорениями a_1 и a_2 определяется из следующих соображений. Если тело массой m_1 опустится на высоту h_1 , то второе тело поднимется за это время на высоту

$$h_2 = \frac{h_1}{2}.$$

Так как пройденные расстояния прямо пропорциональны ускорениям, то

$$a_2 = \frac{a_1}{2}.$$

Теперь уравнения движения будут выглядеть:

$$m_1 g - T = m_1 a_1;$$

Рис. II.8

$$m_2 g - 2T = -\frac{m_2 a_1}{2}.$$

Решая эту систему, получим

$$a_1 = \frac{2m_1 g - m_2 g}{2m_1 + \frac{m_2}{2}}, \text{ или } a_1 = \frac{2g(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2};$$

$$T = m_1 g - m_1 a = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}; a_2 = \frac{a_1}{2} = g \frac{(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}.$$

Задача II.9 Два груза массой M связаны нитью, перекинутой через невесомый неподвижный блок. На один из грузов кладут перегрузок m (рис. II.9). С каким ускорением \bar{a} движутся грузы? Каков вес перегрузка m ?

Решение. Изобразим стрелочками силы, действующие на все тела. Направим ось Ox вниз и запишем уравнение Ньютона для каждого из трех грузов:

$$Mg - T = (-Ma);$$

$$Mg - T + N' = Ma;$$

$$mg - N = ma.$$

Отметим, что сила \bar{N} — это сила, которая действует на тело массой m со стороны тела массой M (т. е. реакция опоры). Сила \bar{N}' — это сила, которая действует на

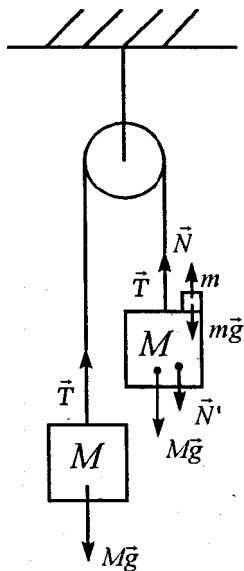


Рис. II.9

тело массой M со стороны маленького тела m , т. е. это и есть вес тела массой m . По третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{N}'$, а по величине эти силы равны друг другу. Из третьего уравнения системы

$$N = mg - ma = m(g - a),$$

т. е. видно, что вес тела массой m меньше силы тяжести.

Решая систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим

$$a = \frac{mg}{2M + m}; T = \frac{2M(M + m)g}{2M + m}; N = N' = \frac{2Mmg}{2M + m}.$$

Задача II.10. Шайба, скользящая по горизонтальной поверхности, остановилась, пройдя расстояние S . Определить начальную скорость \vec{v}_0 шайбы, если коэффициент трения равен μ (рис. II.10).

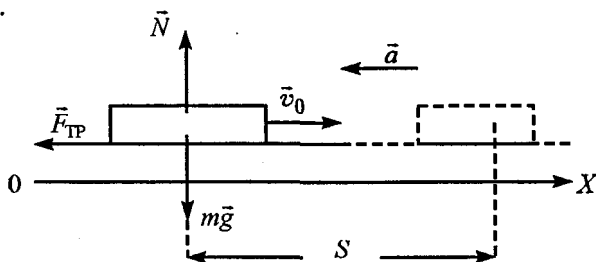


Рис. II.10

Решение. На шайбу действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила тре-

ния $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем ось OX по направлению движения. Второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется

$$-F_{\text{тр}} = ma, \text{ или } -\mu mg = ma, \text{ т.е. } a = -\mu g.$$

Из этого уравнения видно, что ускорение шайбы \vec{a} направлено в сторону, противоположную движению. Следовательно, шайба движется замедленно. Для определения начальной скорости v_0 необходимо записать еще уравнение кинематики для скорости $v(t) = v_0 - at$. Так как шайба, пройдя расстояние S остановилась, то $0 = v_0 - at_1$, т.е. $v_0 = at_1$. Время движения шайбы не задано в условии задачи, но его можно определить из выражения для перемещения

$$\Delta x = S = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = \frac{2v_0 t_1 - v_0 t_1}{2} = \frac{v_0 t_1}{2}, \text{ или}$$

$$t_1 = \frac{2S}{v_0}. \text{ Подставив это выражение в уравнение}$$

для скорости, получим

$$v_0 = at_1 = \mu g \frac{2S}{v_0}, \text{ откуда}$$

$$v_0^2 = 2S\mu g, \text{ или } v_0 = \sqrt{2S\mu g}.$$

Задача II.11 На наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой $m_1 = 1 \text{ кг}$, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце нити

висит груз с массой $m_2 = 3$ кг (рис. II.11). Наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью $\mu = 0,1$. Определить ускорение \vec{a} грузов.

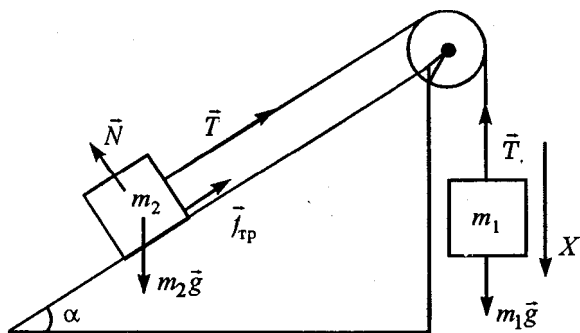


Рис. II.11

Решение. На тело массой m_1 действуют две силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ и натяжение нити \vec{T} . На тело массой m_2 действуют четыре силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, натяжение нити \vec{T} , сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$. Закон Ньютона в векторной записи для обоих тел имеет вид

$$m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a}; \quad m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}_{\text{тр}} = m_2\vec{a}.$$

При переходе к записи этих уравнений для проекций на направление движения остается не-

ясным, куда происходит движение, куда направить силу трения?

Мы должны помнить, что сила трения может замедлить движение, может его вовсе остановить, но изменить движение на обратное сила трения *не может*. Поэтому достаточно решить в таком случае задачу без учета силы трения, определить ускорение движения. Его знак укажет направление движения, поскольку вначале тела покоились. Затем следует вновь решить задачу, но уже с учетом силы трения.

Итак, выберем направление движения груза m_1 вниз. Тогда уравнения движения грузов для проекций на направление движения (без учета силы трения) запишутся

$$m_1 g - T = m_1 a; \quad T - m_2 g \sin \alpha = m_2 a.$$

Сложив оба уравнения, получим

$$m_1 g - m_2 g \sin \alpha = (m_1 + m_2) a, \text{ или}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g = -1,25 \text{ м/с}^2.$$

Знак «—» указывает на то, что ускорение направлено в сторону, противоположную той, которую мы выбрали, и поэтому силу трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ нужно направить вдоль наклонной плоскости вверх. Теперь запишем уравнения Ньютона вдоль истинного направления движения, но с учетом силы трения

$$T - m_1 g = m_1 a_1; -f_{\text{тр}} - T + m_2 g \sin \alpha = m_2 a_1.$$

Сложим эти уравнения и, подставив значение силы трения $f_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_2 g \cos \alpha$, получим

$$a_1 = \frac{g[m_2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_1]}{m_1 + m_2} = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

Задача II.12 Тело начинает движение вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью \vec{v}_0 . С какой скоростью \vec{v}_1 тело вернулось в начало наклонной плоскости? Коэффициент трения $\mu < \text{tg } \alpha$. (рис. II.12)

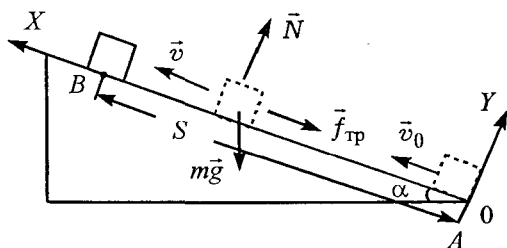


Рис. II.12

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$. При движении тела вверх и вниз сила трения направлена в разные стороны. Тело движется вверх, останавливается в некоторой точке B и возвращается в точку A . Выберем начало ко-

ординат в точке A и ось OX направим вверх вдоль наклонной плоскости. Второй закон Ньютона вдоль направления оси OX запишется

$-mg \sin \alpha - f_{\text{тр}} = ma_1$ — при движении тела вверх;

$-mg \sin \alpha + f_{\text{тр}} = ma_2$ — при движении тела вниз.

Ускорения a_1 и a_2 из этих соотношений равны

$$a_1 = -\frac{(mg \sin \alpha + f_{\text{тр}})}{m} = -\left(g \sin \alpha + \frac{\mu N}{m}\right);$$

$$a_2 = \frac{f_{\text{тр}} - mg \sin \alpha}{m} = \frac{\mu N}{m} - g \sin \alpha.$$

Выражение для силы \vec{N} легко получить, записав уравнение Ньютона вдоль оси OY , направленной перпендикулярно к оси OX :

$$N - mg \cos \alpha = 0, \quad \text{или} \quad N = mg \cos \alpha.$$

Двигаясь вверх с ускорением a_1 , тело достигнет точки B через некоторое время t_1 и пройдет расстояние S . В точке B его скорость обратится в нуль, поэтому

$$v(t_1) = v_0 - |\vec{a}_1|t_1 = 0, \quad \text{или} \quad t_1 = \frac{v_0}{|\vec{a}_1|} = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

$$S = v_0 t_1 - \frac{|\vec{a}_1|t_1^2}{2} = \frac{2v_0 t_1 - v_0 t_1}{2} = \frac{v_0 t_1}{2}.$$

После остановки в точке B тело начнет двигаться вниз с нулевой начальной скоростью и прой-

дет до точки A то же расстояние S , но двигаться будет ускоренно, поэтому

$$S = \frac{|\bar{a}_2|t_2^2}{2}, \quad \text{или} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a_2}} = \sqrt{\frac{v_0 t_1}{a_2}}.$$

Зная время движения тела вниз t_2 , легко определить скорость в конце движения (в точке A)

$$v_1 = v(t_2) = |\bar{a}_2|t_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 a_2}{a_1}} = v_0 \sqrt{\frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}}.$$

Как видно из полученного соотношения, v_1 будет меньше начальной скорости движения v_0 . Это и понятно: часть начальной энергии, которую сообщили телу в точке A , тратится на работу против силы трения.

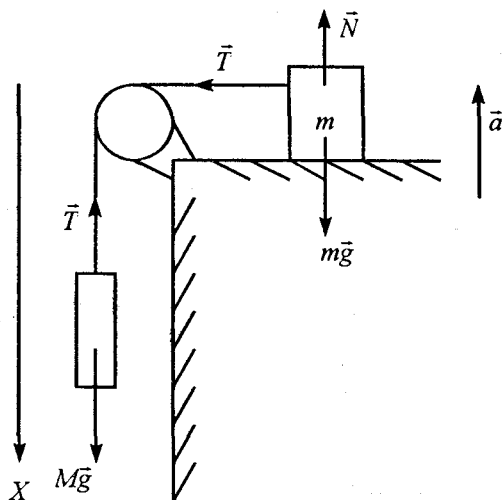


Рис. II.13

Задача II.13

Груз массой M связан нитью с грузом m , лежащем на гладком горизонтальном столе, помещенном в лифте. Лифт движется с ускорением \bar{a} (рис. II.13). Определить натяжение нити T . Масса $m < M$.

Решение. Изобразим стрелочками все силы, действующие на тело, и запишем второй закон Ньютона для каждого тела в отдельности:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = (a_1 + a),$$

где a_1 — ускорение, с которым перемещается тело массой m вдоль горизонтальной плоскости стола;

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_2,$$

где a_2 — ускорение тела M относительно Земли, причем $a_2 = a_1 - a$.

Выберем ось Ox , направленную вниз, тогда уравнение Ньютона можно записать для тела массой M вдоль этого направления

$$Mg - T = M(a_1 - a),$$

а для тела массой m вдоль горизонтальной поверхности стола

$$T = ma_1$$

(относительно стола груз массой M движется с тем же ускорением, что и груз массой m).

Решая эти уравнения, определим натяжение нити

$$T = \frac{Mm(g + a)}{M + m}.$$

Задача II.14 На горизонтально расположенном стержне длиной $2l$ надета бусинка массой m , которая может без трения перемещаться вдоль стержня. Стержень поступательно движется с уско-

рением \vec{a} в горизонтальной плоскости в направлении, составляющем угол α со стержнем (рис. II.14). Определить ускорение бусинки относительно стержня, силу реакции со стороны стержня и время, через которое бусинка покинет стержень.

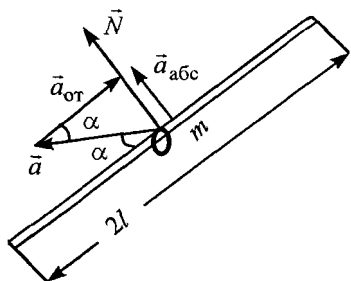


Рис. II.14

Решение. В горизонтальной плоскости на бусинку действует только одна сила — сила реакции стержня \vec{N} , перпендикулярная стержню. Поэтому абсолютное ускорение бусинки \vec{a}_{abc} — ускорение

относительно Земли — будет в силу второго закона Ньютона направлено в ту же сторону. Относительное ускорение бусинки $\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{abc} - \vec{a}_{пер}$, как видно из рисунка, направлено вдоль стержня. Из треугольника ускорений следует: $a_{abc} = a \sin \alpha$; $a_{отн} = a \cos \alpha$. Согласно второму закону Ньютона

$$N = ma_{abc} = ma \sin \alpha.$$

Время движения бусинки вдоль стержня t_0 определяется из уравнения

$$l = \frac{a_{отн} t_0^2}{2}, \quad \text{или} \quad t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a_{отн}}} = \sqrt{\frac{2l}{a \cos \alpha}}.$$

Задача II.15 От поезда массой M , движущегося с постоянной скоростью, отцепляется последний ва-

гон массой m , который проходит путь S и останавливается. На каком расстоянии L находится поезд от вагона в момент остановки последнего? Сила тяги поезда остается постоянной (рис. II.15).

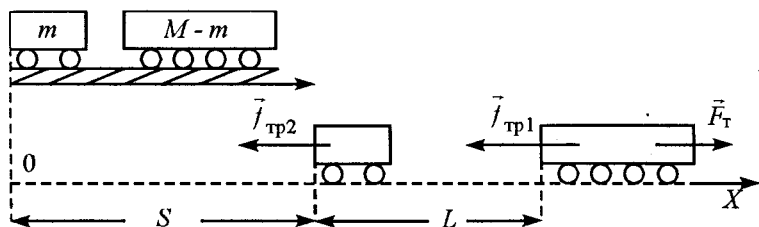


Рис. II.15

Решение. Вначале вдоль горизонтального направления на поезд действовали две силы: сила тяги \vec{F}_T и сила трения $\vec{f}_{тр}$, причем, так как он двигался равномерно, то $F_T - f_{тр} = 0$, или $F_T = f_{тр} = \mu Mg$. Уравнения Ньютона для поезда и вагона после отрыва вдоль направления движения запишутся:

$$F_T - f_{тр1} = (M - m)a_1, \text{ или } \mu Mg - \mu(M - m)g = (M - m)a_1,$$

$$\text{т. е. } a_1 = \frac{\mu mg}{M - m};$$

$$-f_{тр2} = ma_2, \text{ или } -\mu mg = ma_2, \text{ т. е. } a_2 = -\mu g.$$

После отрыва вагона поезд станет двигаться ускоренно с ускорением a_1 , а вагон — замедленно с ускорением a_2 . Их скорости относительно Земли будут меняться по закону

$$v_1(t) = v_0 + a_1 t; \quad v_2(t) = v_0 - a_2 t.$$

Однако значение v_0 в условии задачи не задано. Попробуем обойтись без него, выбрав удобную систему отсчета. Если мы выберем систему отсчета, которая движется со скоростью \vec{v}_0 , то в ней поезд движется ускоренно со скоростью

$v'_1 = v_1 - v_0 = v_0 + a_1 t - v_0 = a_1 t$, а вагон — со скоростью

$v'_2 = v_2 - v_0 = v_0 - a_2 t - v_0 = -a_2 t$, т. е. вагон в этой же системе тоже движется ускоренно, но в обратную сторону. Когда его скорость в этой системе достигнет значения v_0 , то относительно Земли он остановится, пройдя расстояние S (см. рис.). В системе отсчета, движущейся со скоростью v_0 , вагон также пройдет расстояние S , но в обратную сторону. Расстояние L между вагоном и поездом можно найти, если будем знать ускорение поезда относительно вагона. Это ускорение равно

$a_{\text{отн}} = a_1 - (-a_2) = a_1 + a_2$. Расстояние между поездом и вагоном L будет так относиться к расстоянию S , пройденному вагоном, как $\frac{a_{\text{отн}}}{|\vec{a}_2|}$, т. е.

$\frac{L}{S} = \frac{a_1 + a_2}{a_2}$. Таким образом,

$$L = S \frac{(a_1 + a_2)}{a_2} = S \frac{\frac{\mu mg}{M - m} + \mu g}{\mu g} = S \frac{M}{M - m}.$$

Задача II.16 По бруску массой M , лежащему на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемому нитью, скользит равномерно тело массой m под действием силы \vec{F} . В некоторый момент нить пережигают. Определить силу трения между соприкасающимися поверхностями после пережигания нити (рис. II.16).

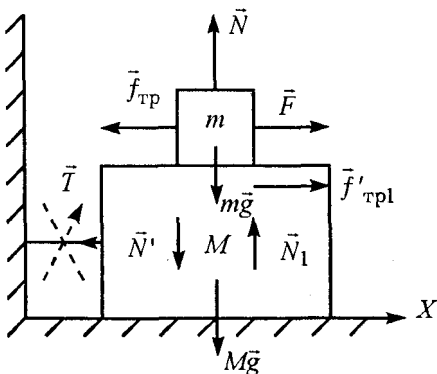


Рис. II.16

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела и бруска до пережигания нити

$$m\vec{g} + \vec{f}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{F} = 0;$$

$$M\vec{g} + \vec{f}'_{\text{тр}} + \vec{N}_1 + \vec{N}' + \vec{T} = 0.$$

Вдоль горизонтального направления до пережигания нити на тело массой m действуют две силы: сила \vec{F} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$. Так как тело движется равномерно, то вдоль горизонтали можно записать

$$F - f_{\text{тр}} = 0, \quad (1)$$

причем сила трения $f_{\text{тр}} = \mu N$ (тело скользит по поверхности бруска). После пережигания нити брусок массой M движется обязательно с некоторым ускорением \vec{a} , так как на него действует

вдоль горизонтали единственная сила $f'_{\text{тр}}$, равная по величине по третьему закону Ньютона $f_{\text{тр1}}$. Это означает, что груз массой m также будет двигаться ускоренно, ибо он находится на бруске. Поэтому после пережигания нити уравнение движения для тела массой m имеет вид

$$F - f_{\text{тр1}} = ma_1. \quad (2)$$

Если сравнить соотношения (1) и (2), то следует заметить, что сила $f_{\text{тр1}} < f_{\text{тр}} = \mu N$, поскольку сила \vec{F} не изменилась. Значит, сила трения стала меньше максимального значения силы трения покоя, равного μN , а это значит, что сила $f_{\text{тр1}}$ является силой трения покоя.

Таким образом, тело массой m после пережигания нити относительно бруска будет покоиться, а относительно Земли — двигаться вместе с бруском с ускорением \vec{a} .

Запишем уравнения движения для тела массой m и бруска массой M после пережигания нити:

$$F - f_{\text{тр1}} = ma; \quad f_{\text{тр1}} = Ma.$$

Решая эти уравнения, получим

$$f_{\text{тр1}} = \frac{F \cdot M}{M + m}.$$

Задача II.17 Тележка массой M движется горизонтально без трения со скоростью \vec{v}_0 . На пе-

редний край тележки без начальной скорости опускают тело массой m . При какой длине тележки l тело не соскользнет с нее? Коэффициент трения между тележкой и телом μ . Размерами тела можно пренебречь (рис. II.17).

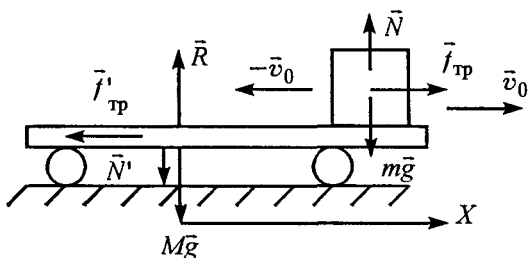


Рис. II.17

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры \vec{N} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$. На тележку действуют четыре силы: сила тяжести $M\vec{g}$, реакция опоры \vec{R} , сила давления \vec{N}' со стороны тела массой m и сила трения $\vec{f}'_{\text{тр}}$, равная по величине по третьему закону Ньютона силе $\vec{f}_{\text{тр}}$. Запишем второй закон Ньютона в векторном виде для обоих тел:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}_{\text{тр}} = m\vec{a}_1;$$

$$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}'_{\text{тр}} + \vec{N}' = M\vec{a}_2,$$

где a_1 и a_2 — ускорения тела и тележки относительно Земли.

Выберем ось Ox совпадающей по направлению со скоростью \vec{v}_0 . Тогда второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется

$$f_{\text{тр}} = ma_1, \quad \text{или} \quad a_1 = \frac{f_{\text{тр}}}{m} = \mu g;$$

$$-f'_{\text{тр}} = Ma_2, \quad \text{или} \quad a_2 = -\frac{\mu mg}{M}.$$

Таким образом, ускорения a_1 и a_2 направлены в разные стороны, т. е. тело относительно Земли движется ускоренно, а тележка — замедленно. Скорость тела меняется по закону $v_1(t) = a_1 t$, а тележки — $v_2(t) = v_0 - a_2 t$. Если тележка достаточно длинная, то, очевидно, наступит такой момент времени, когда скорости тележки и тела станут равными относительно Земли. Это значит, что, начиная с этого времени, тело будет покоиться на тележке, так как его относительная скорость равна нулю. Обозначим этот момент времени t_0 , тогда

$$v_1(t) = v_2(t_0), \quad \text{или} \quad a_1 t_0 = v_0 - a_2 t_0, \quad \text{т. е.}$$

$$t_0 = \frac{v_0}{a_1 + a_2}.$$

Как только тело остановится относительно тележки, сразу исчезает сила трения. С этого момента времени в горизонтальном направлении на тележку и тело силы не действуют, поэтому они движутся относительно Земли с постоянной скоростью.

За момент времени t_0 тело пройдет вдоль тележки некоторое расстояние S . Поэтому минимальная длина тележки, при которой тело еще не соскользнет, должна быть равна S , т. е. $l \geq S$.

Относительно тележки в начальный момент времени тело имеет скорость $-\vec{v}_0$, а ускорение тела относительно тележки в любой момент времени равно $a_{\text{отн}} = a_1 + a_2$. Поэтому расстояние S , пройденное телом относительно тележки, равно

$$S = -v_0 t_0 + \frac{(a_1 + a_2)t_0^2}{2} = -\frac{v_0^2}{2(a_1 + a_2)} = -\frac{Mv_0^2}{2\mu g(M + m)}.$$

Знак «—» указывает, что вдоль тележки тело перемещается влево.

Задача II.18 Брусок массой M лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит тело массой m . Коэффициент трения между телом и бруском равен μ . При каком значении силы \vec{F} , приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску?

Решение. На тело массой m действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры со стороны бруска \vec{N} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$. На брусок массой M действуют четыре силы: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{R} , сила трения $\vec{f}'_{\text{тр}} = -\vec{f}_{\text{тр}}$ и сила давления $\vec{N}' = -\vec{N}$ (рис. II.18). Выберем на-

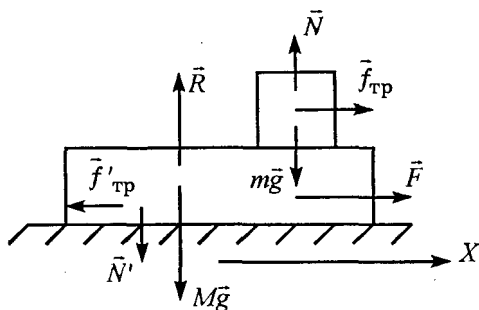


Рис. II.18

правление оси OX , совпадающей с направлением силы \vec{F} , и запишем второй закон Ньютона в проекции на это направление

$$f_{\text{тр}} = ma_1; F - f_{\text{тр}} = Ma_2.$$

При малом значении силы \vec{F} проскальзывания может и не быть. В этом случае тело массой m движется как единое целое с бруском, а это значит, что ускорения относительно Земли у них одинаковы, т. е. $a_1 = a_2$. В этом случае сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ является силой трения покоя и может меняться по величине от 0 до максимального значения $f_{\text{тр max}} = \mu N$. В нашей задаче величину силы трения покоя можно вычислить из соотношений

$$f_{\text{тр п}} = ma \text{ и } F - f_{\text{тр п}} = Ma.$$

Отсюда сила трения покоя $f_{\text{тр п}} = m \frac{F}{m + M}$.

Как видно из этого соотношения, с увеличением силы F увеличивается и сила трения покоя. Когда она достигнет максимального значения (в нашем случае $f_{\text{тр max}} = \mu mg$), то тело начнет скользить вдоль бруска. Следовательно, когда нет проскальзывания

$$f_{\text{тр}} \leq \mu mg, \quad \text{или} \quad \frac{mF}{M + m} \leq \mu mg.$$

Поэтому, если $F \leq \mu g(M + m)$, проскальзывания нет, если же $F > \mu g(M + m)$, возникает скольжение тела массой m вдоль бруска.

Следует обратить внимание, что для скольжения тела вдоль бруска нужно приложить силу не $F = \mu mg$, как обычно утверждают учащиеся, а $F \geq \mu(M + m)g$.

При скольжении тела вдоль бруска их ускорения относительно Земли разные. В этом случае второй закон Ньютона для тела и бруска запишется

$$f_{\text{тр}} = ma_1; \quad F - f_{\text{тр}} = Ma_2,$$

где сила трения скольжения равна $f_{\text{тр}} = \mu mg$.

Из этих уравнений легко определить ускорения a_1 и a_2 :

$$a_1 = \mu g, \quad a_2 = \frac{F - \mu mg}{M}.$$

Так как при скольжении тела $F > \mu g(M + m)$,

то ускорение $a_2 > a_1$, а это значит, что ускорение тела относительно бруска будет равно

$$a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \mu g - \frac{F - \mu mg}{M} = \frac{\mu g(M + m) - F}{M}.$$

Эта величина отрицательная, так как $F > \mu g(M + m)$. Это означает, что относительное ускорение тела направлено в сторону, противоположную движению.

Задача II.19 На горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω , на расстоянии l от оси вращения лежит груз массой m . Определить силу \vec{F} , с которой платформа действует на груз.

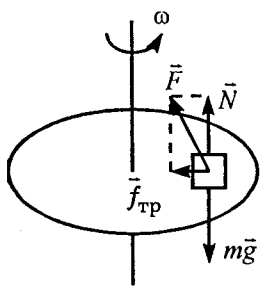


Рис. II.19

Решение. На груз массой m действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ (рис. II.19). Сила трения направлена к центру, так как именно эта сила в горизонтальном направлении сообщает телу нормальное ускорение $a_n = \omega^2 l$. При

этом сила трения $f_{\text{тр}} = m\omega^2 l$ является силой трения покоя, ибо тело покоится на платформе. Со стороны платформы на тело действуют две силы: сила трения покоя $\vec{f}_{\text{тр}}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Их результирующая $\vec{F} = \vec{N} + \vec{f}_{\text{тр}}$

является искомой силой. Величина этой силы определяется по теореме Пифагора

$$F = \sqrt{N^2 + f_{\text{тр}}^2} = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 l)^2}.$$

III. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА И ЭНЕРГИИ

§ 1. Изменение и сохранение импульса тела и системы тел

пIII.1 Изменение состояния движения тела, т. е. величины и направления скорости, определяется не только величиной действующей силы \vec{F} , но и длительностью ее действия. Это хорошо видно, если второй закон Ньютона записать в несколько иной форме:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \text{ или}$$

$$\sum \vec{F}_i \Delta t = m\Delta \vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$

где $\sum \vec{F}_i$ — сумма всех действующих на тело сил, а \vec{v}_2 и \vec{v}_1 соответственно конечная и начальная скорости тела. Вводя понятие импульса тела $\vec{p} = m\vec{v}$, получим

$$\Delta t \sum \vec{F}_i = \Delta \vec{p}. \quad (1)$$

Таким образом, формула (1) утверждает, что

изменение импульса тела (или системы тел) $\Delta\vec{p}$ за время Δt равно импульсу всех сил $\Delta t \sum \vec{F}_i$, действующих на тело за то же время.

пIII.2 Группа тел, движение которых рассматривается совместно, называется механической системой тел. Если на систему действуют только силы, которые создаются телами, принадлежащими к рассматриваемой системе, то эти силы называются *внутренними*, а сама система — *изолированной*. Силы, не принадлежащие к данной системе, называются *внешними*. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю, то система называется *замкнутой*.

пIII.3 Импульс тела (или системы тел), на которое не действуют внешние силы, остается неизменным. Другими словами, изменение импульса замкнутой системы равно нулю, т. е.

$$\Delta\vec{p} = 0. \quad (2)$$

Это утверждение называется законом сохранения импульса. Закон сохранения импульса позволяет найти конечные скорости взаимодействующих тел, образующих изолированную систему, не вдаваясь в детали взаимодействия.

Следует отметить, что иногда этот закон можно применять и для неизолированных систем. Это можно делать в том случае, если:

1) на систему действуют внешние силы, но сумма всех внешних сил ($\sum \vec{F}_{i \text{ внеш}}$) равна нулю;

2) может случиться так, что $\sum \vec{F}_{i \text{ внеш}} \neq 0$, но вдоль какого-либо направления сумма проекций

этих сил обращается в нуль. Тогда *только* вдоль этого направления можно записать закон сохранения импульса. Например, если $\sum F_{ix}\Delta t = 0$, то $\Delta \vec{p}_x = 0$;

3) в некоторых случаях начальное и конечное состояние системы тел отделены столь малым промежутком времени (например, выстрел, взрыв, удар), что импульс *постоянной* внешней силы (например, силы тяжести, силы трения) не может заметно изменить импульс системы тел ($\Delta t \rightarrow 0$). В этом случае импульс внешней силы полагают равным нулю и используют закон сохранения импульса для решения задачи.

§ 2. Работа силы. Изменение и сохранение механической энергии тела и системы тел

III.4 *Работой постоянной силы \vec{F} на перемещении $\Delta \vec{r}$ называется произведение проекции этой силы на направление перемещения (F_r) на величину (модуль) этого перемещения ($|\Delta \vec{r}|$).*

$$A = F_r |\Delta \vec{r}| = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \alpha, \quad (3)$$

где α — угол между направлениями приложенной силы и перемещения (рис. III.1). Согласно формуле, сила, перпенди-

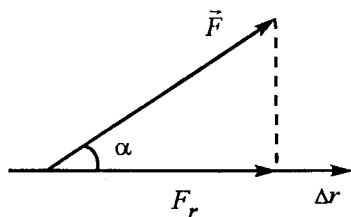


Рис. III.1

кулярная перемещению, работы не совершает (так как $\cos \alpha = 0$).

Если на тело действуют несколько сил, то под проекцией силы \vec{F} на направление $\Delta\vec{r}$ следует понимать проекцию результирующей силы, т. е.

$$F_{P\Delta r} = F_{1\Delta r} + F_{2\Delta r} + \dots + F_{n\Delta r}. \quad (4)$$

В этом случае полная работа определяется как сумма работ всех действующих сил:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

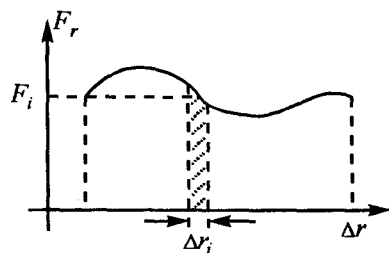


Рис. III.2

Если сила \vec{F} меняется во время движения, то полное перемещение тела нужно разбить на столь малые отрезки, в пределах которых силу \vec{F}_i можно считать постоянной (рис. III.2). В этом случае полная работа силы \vec{F} на перемещении $\Delta\vec{r}$ определится суммой элементарных работ $A = \sum A_i = \sum F_{ir} \Delta r$. Эта сумма численно равна площади фигуры, расположенной под кривой графика зависимости проекции силы от перемещения.

III.5 Работа силы тяжести и силы упругости на любой замкнутой траектории равна нулю. Все силы, работа которых на замкнутом пути равна нулю, называются *консервативными* или *потенциальными*.

Поднимая груз или растягивая пружину, мы сообщаем телам некоторый запас работы, кото-

рую они могут совершить. В этом случае принято говорить, что сообщаем некоторый запас энергии, который определяется лишь положением тела, поэтому сообщенная телу энергия называется энергией положения, или *потенциальной энергией*. Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h , равна $E_{\Pi} = mgh$. Потенциальная энергия пружины, растянутой на Δx , равна

$$E_{\Pi} = \frac{k(\Delta x)^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы равно работе внутренних консервативных сил системы, взятой с противоположным знаком:

$$\Delta E_{\Pi} = -A_{\text{внутр}} \text{ или } A_{\text{внутр}} = -\Delta E_{\Pi}. \quad (5)$$

пIII.6 *Кинетическая энергия* тела равна половине произведения его массы на квадрат скорости:

$$E_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (6)$$

Изменение кинетической энергии равно работе внешних сил, т. е.

$$\Delta E_{\text{К}} = A_{\text{внешн}}. \quad (7)$$

пIII.7 Полная механическая энергия тела (или системы тел) равна сумме потенциальной и кинетической энергий

$$E = E_{\text{К}} + E_{\Pi}. \quad (8)$$

пIII.8 В замкнутой системе, в которой действуют только *внутренние* консервативные силы, выполняется закон сохранения механической энергии, т. е. $E = E_{\text{К}} + E_{\Pi} = \text{const}$, или изменение пол-

ной механической энергии системы равно нулю

$$\Delta E = \Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = 0. \quad (9)$$

пIII.9 Если на систему тел действуют внешние силы или внутренние неконсервативные силы, то изменение полной механической энергии равно работе внешних сил и внутренних неконсервативных, т. е.

$$\Delta E = \Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр.неконс}}. \quad (10)$$

§ 3. ЦентральнЫй удар шаров

пIII.10 Центральным ударом называется такое взаимодействие тел, когда их скорости направлены вдоль линии, соединяющей их центры.

В механике обычно рассматривают два предельных вида взаимодействия тел: абсолютно упругое и абсолютно неупругое взаимодействия (абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары тел). Абсолютно упругий удар — это такое взаимодействие тел, при котором механическая энергия тел сохраняется. Величина и направление скоростей после взаимодействия определяется законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса.

Абсолютно неупругий удар — такое взаимодействие тел, после которого тела движутся вместе (как единое целое) с одинаковой скоростью. Скорость движения тел после неупругого столкновения определяется только законом сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии при абсолютно неупругом взаимодействии

не выполняется, так как часть механической энергии тел при столкновении переходит в тепловую энергию, при этом сталкивающиеся тела нагреваются.

Для успешного решения задач на законы сохранения и изменения импульса тела и энергии предлагается следующая последовательность действий:

1. Внимательно прочитайте условие задачи, нарисуйте рисунок и на нем укажите стрелочками все действующие на тела силы.

2. Далее необходимо выбрать систему тел, взаимодействие которых вы желаете рассмотреть, и определить, является ли эта система замкнутой. Если система тел замкнута, то можно применить закон сохранения импульса (2), если же на систему действуют внешние силы, то нужно применить закон изменения импульса (1). Оба эти закона часто удобно использовать вдоль какого-либо направления.

3. Может случиться так, что одного закона сохранения импульса (или закона изменения импульса) недостаточно для решения задачи. Тогда можно еще использовать закон сохранения механической энергии. Однако в этом случае мало убедиться, что система тел, выбранная вами, замкнута. Нужно еще выяснить, являются ли внутренние силы консервативными. Если силы консервативны, то можно применять и закон сохранения механической энергии (9). Если же силы неконсервативны, то нужно применить закон изменения механической энергии (10).

4. Записав систему уравнений для задачи, нужно проследить, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных. Решение задачи нужно получать в общем виде и только после этого в полученные формулы подставить цифровые данные.

Задача III.1 По канатной железной дороге с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ опускается вагонетка массой $M=1000$ кг. Определить натяжение каната при торможении вагонетки в конце спуска, если скорость в конце торможения $v_0=5$ м/с, а время торможения $t_0=10$ с. Коэффициент трения принять равным $\mu=0,4$, ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

Решение. На тележку действуют четыре силы: сила тяжести $M\vec{g}$, реакция опоры \vec{N} , сила натяжения каната \vec{T} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ (рис. III.3). Для тележки эти силы внешние. Эту задачу можно решить, не прибегая к привычной записи второго

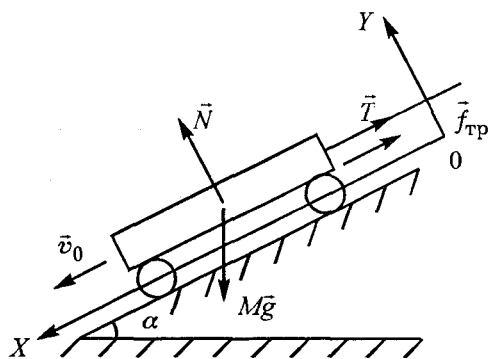


Рис. III.3

го закона Ньютона, а используя закон изменения импульса: изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ за время Δt равно импульсу всех сил, действующих на тело за это время, т.е.

$$\Delta t \sum \vec{F}_i = \Delta \vec{p} = M \Delta \vec{v}.$$

Направим ось OX вдоль наклонной плоскости, как показано на рис. III.3, а ось OY — перпендикулярно к ней.

В проекции на направление OX этот закон запишется в виде

$$(Mg \sin \alpha - T - f_{\text{тр}}) \Delta t = M(0 - v_0), \text{ или}$$

$$T + f_{\text{тр}} - Mg \sin \alpha = \frac{Mv_0}{t_0}.$$

Следовательно, сила натяжения каната равна

$$T = \frac{Mv_0}{t_0} - f_{\text{тр}} + Mg \sin \alpha, \text{ где } f_{\text{тр}} = \mu N.$$

Реакция опоры \vec{N} определяется из обычной записи второго закона Ньютона вдоль оси OY : $N - Mg \cos \alpha = 0$, или $N = Mg \cos \alpha$. Таким образом, натяжение каната T равно

$$T = \frac{Mv_0}{t_0} - \mu Mg \cos \alpha + Mg \sin \alpha = \frac{Mv_0}{t_0} + Mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

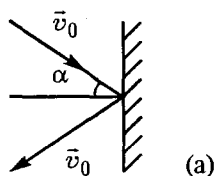
Подставив численные значения величин, получим

$$T = \frac{1000 \text{ кг} \cdot 5 \text{ м/с}}{10 \text{ с}} + 1000 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot (0,5 - 0,34) = 2100 \text{ Н}.$$

Запись второго закона Ньютона через импульс всех сил, действующих на тело, удобно использо-

вать тогда, когда вас не интересует, как меняется скорость тела за интервал времени Δt , а известны начальные и конечные значения скоростей.

Задача III.2 Шарик массой m , движущийся по идеально гладкой поверхности, упруго ударяется о преграду под углом α к горизонту (рис. III.4, а). Величина скорости шарика до и после удара равна



(а)

Рис. III.4

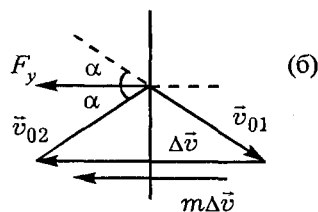
v_0 , а угол падения равен углу отражения. Определить изменение импульса шарика $\Delta \vec{p}$.

Решение. Вектор скорости шарика v_0 , хотя и остается неизменным по величине, меняет свое направление, а это означает, что изменение импульса шарика $\Delta \vec{p}$ не

равно нулю, т. е. закон сохранения импульса для шарика не выполняется:

$$\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v} = m(\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}) \neq 0,$$

где \vec{v}_{20} и \vec{v}_{10} — конечная и начальная скорости шарика.



(б)

Рис. III.4

Таким образом, на шарик обязательно должна действовать некоторая сила, направленная в ту же сторону, что и вектор изменения скорости $\Delta \vec{v}$, так как $\Delta \vec{p} = \vec{F}\Delta t = m\Delta \vec{v}$.

Такой силой является сила упругости. Именно

она, действуя на шарик, меняет направление его скорости.

Изменение вектора импульса шарика $\Delta\vec{p}$ направлено в ту же сторону, что и изменение вектора его скорости $\Delta\vec{v}$ (рис. III.4, б), а по величине равно $|\Delta\vec{p}| = m\Delta v = 2mv_0 \cos \alpha$.

Задача III.3 Между двумя лодками, находящимися на поверхности озера, протянута веревка, которую человек, находящийся в одной из лодок, тянет с горизонтальной силой $F=50\text{ Н}$. Определить скорость лодки с человеком относительно берега и относительно второй лодки через время $t_0=5\text{ с}$. Масса лодки с человеком $M_1=250\text{ кг}$, а лодки без человека $M_2=200\text{ кг}$. Обе лодки движутся без трения.

Решение. На каждую из лодок вдоль горизонтального направления действует внешняя сила натяжения нити $T=F$ (рис. III.5). За время t_0 изменение импульса $\Delta\vec{p}$ каждой из лодок равно $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, или

$$M_1(v_{к1} - v_{01}) = \Delta p = Ft_0;$$

$$M_2(v_{к2} - v_{02}) = \Delta p = Ft_0,$$

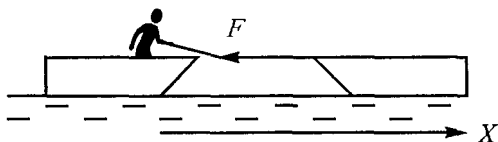


Рис. III.5

где v_{01}, v_{02} — начальные скорости лодок; $v_{к1}, v_{к2}$ — конечные скорости лодок к моменту времени t_0 относительно Земли. Так как лодки вначале покоились, то $v_{01} = v_{02} = 0$. Поэтому

$$v_{к1} = \frac{Ft_0}{M_1} = \frac{50 \cdot 5}{250} = 1 \text{ м/с, а}$$

$$v_{к2} = \frac{Ft_0}{M_2} = \frac{50 \cdot 5}{200} = 1,25 \text{ м/с.}$$

Скорость первой лодки относительно второй определяется из закона сложения скоростей $\vec{v}_{1-2} = \vec{v}_{к1} - \vec{v}_{к2}$. Записав это уравнение в проекции на ось OX , получим

$$v_{1-2} = v_{к1} - (-v_{к2}) = v_{к1} + v_{к2} = \\ = \frac{Ft_0}{M_1} + \frac{Ft_0}{M_2} = \frac{Ft_0(M_1 + M_2)}{M_1M_2} = \frac{50 \cdot 5 \cdot 450}{250 \cdot 200} = 2,25 \text{ м/с.}$$

Однако, если рассмотреть систему тел, состоящую из двух лодок, то сила натяжения веревки является внутренней силой. Поэтому вдоль горизонтального направления для этой системы тел можно применить закон сохранения импульса. Вначале лодки покоились, т. е. $v_{01} = v_{02} = 0$. Начальный импульс системы был равен

$$\vec{P}_1 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M_1\vec{v}_{01} + M_2\vec{v}_{02} = 0.$$

Этот импульс должен сохраняться и во все время движения. Через время t_0 импульс системы тел равен

$$\vec{P}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = M_1\vec{v}_{к1} + M_2\vec{v}_{к2} = 0,$$

или $M_1 \vec{v}_{к1} = -M_2 \vec{v}_{к2}$. Знак «—» означает, что лодки движутся в разных направлениях. Отношение их скоростей обратно пропорционально отношению их масс:

$$\frac{|\vec{v}_{к1}|}{|\vec{v}_{к2}|} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Задача III.4 Человек в лодке длиной l , обращенной кормой к берегу, переходит с кормы на нос (рис. III.6). Определить скорость человека относительно берега. Как меняется расстояние между человеком и берегом? Масса человека m , лодки — M . Человек вдоль лодки передвигается со скоростью \vec{v}_0 .

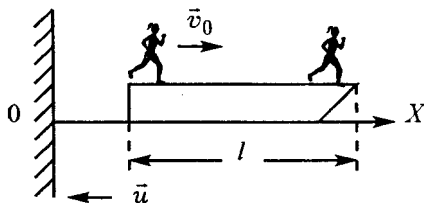


Рис. III.6

Решение. Рассмотрим систему из двух тел: человек — лодка. Для этой системы тел сумма всех внешних сил равна нулю. Поэтому выполняется закон сохранения импульса. Запишем его

в системе отсчета, связанной с Землей

$$m(\vec{v}_0 + \vec{u}) + M\vec{u} = 0,$$

где \vec{u} — скорость лодки относительно Земли. В проекции вдоль оси $0X$ это соотношение запишется

$$m(v_0 - u) - Mu = 0.$$

Это выражение позволяет вычислить скорость лодки u относительно Земли:

$$u = \frac{mv_0}{M + m}.$$

Скорость человека относительно берега $v_{чб}$ равна

$$v_{чб} = v_0 - u = v_0 - \frac{mv_0}{M + m} = \frac{Mv_0}{M + m}.$$

Скорость человека относительно берега совпадает по знаку со скоростью v_0 , поэтому при любом соотношении масс m и M расстояние между человеком и берегом увеличится.

Определим на какую величину ΔS увеличится это расстояние. Так как лодка и человек движутся одновременно, то $\frac{l}{v_0} = \frac{\Delta S}{v_{чб}}$. Следовательно,

$$\Delta S = \frac{lv_{чб}}{v_0} = l \frac{Mv_0}{(M + m)v_0} = l \frac{M}{M + m}.$$

Задача III.5 Две лодки массой M каждая идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0 и с одинаковыми грузами m . Когда лодки поравнялись, с первой лодки на вторую перебрасывают груз m , а затем со второй лодки на первую перебрасывают такой же груз. Определить скорости лодок v_1 и v_2 после перебрасывания грузов.

Решение. В этой задаче удобно рассмотреть систему тел: одна лодка и груз m другой лодки. Так как в горизонтальном направлении на систему внешние силы не действуют, то можно применить закон сохранения импульса. Для первой лодки

$$(M + t)v_0 - tv_0 = (M + 2t)v_1,$$

для второй лодки

$$-Mv_0 + tv_1 = (M + t)v_2,$$

где v_1 и v_2 — конечные скорости лодок.

Решив эту систему уравнений, получаем

$$v_1 = -v_2 = \frac{Mv_0}{M + 2t}.$$

Таким образом, обе лодки движутся с одинаковыми по величине скоростями, но в разных направлениях.

Задача III.6 Навстречу платформе с песком массой M , движущейся горизонтально со скоростью \vec{u}_0 , летит снаряд массой t со скоростью \vec{v} под углом α к горизонту. Снаряд попадает в песок и застревает в нем. Определить скорость платформы \vec{u} после попадания снаряда (рис. III.7).

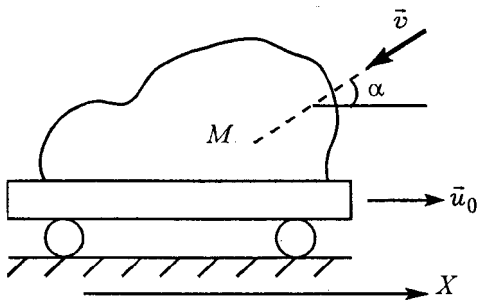


Рис. III.7

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел: снаряд — платформа. Вдоль горизонтального направления (оси Ox) для этой системы тел

ны нулю. Силы же \vec{N} и \vec{N}' являются внутренними, причем $\vec{N} = -\vec{N}'$. Поэтому можно применить закон сохранения импульса. Поскольку в начальный момент времени призмы покоились, то

$$0 = mv_x + Mu_x = mv_x - Mu,$$

где v_x — горизонтальная составляющая скорости малой призмы вдоль оси OX относительно Земли; u_x — скорость нижней призмы вдоль горизонтальной поверхности, причем $u_x = -u$.

Отношение скоростей призм равно отношению масс

$$\frac{v_x}{u} = \frac{M}{m} = \frac{3m}{m} = 3.$$

Таким образом, $v_x = 3u$. Это соотношение справедливо для любого момента времени.

Так как тела движутся с постоянными ускорениями и в начальный момент призмы покоились, то аналогичное соотношение справедливо и для горизонтальных перемещений призм, т. е.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{v_x}{u} = 3,$$

причем $\Delta x_1 = S_1 = (a - b) - S_2$; $\Delta x_2 = S_2$, где S_1 и S_2 расстояния, которые пройдут соответственно верхняя и нижняя призмы по горизонтали относительно Земли к моменту касания верхней призмы горизонтальной плоскости. Следовательно:

$$\frac{(a - b) - S_2}{S_2} = 3.$$

Отсюда расстояние S_2 , на которое переместится нижняя призма относительно Земли, равно

$$S_2 = \frac{a - b}{4}.$$

Задача III.8 На гладкой горизонтальной плоскости стоит брусок массой M , к которому на длинной нити l привязан шарик массой m . Вначале нить отклонили на некоторый угол и отпустили без начальной скорости. Определить скорость бруска в тот момент, когда нить проходит через вертикальное положение,

если угловая скорость шарика в этот момент равна ω (рис. III.9).

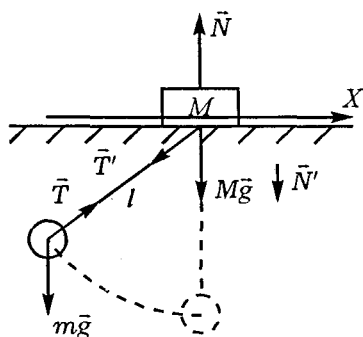


Рис. III.9

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел: брусок — шарик. Для этой системы тел силы натяжения нитей \vec{T} и \vec{T}' являются внутренними силами, проекции сил тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$ и реакции опоры \vec{N} вдоль горизонтального направления равны нулю. В начальный момент вся система покоится, следовательно, суммарный импульс тел равен нулю. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление OX для момента, когда нить проходит через вертикальное направление:

$$-Mu + mv = 0,$$

где u — скорость бруска, v — скорость шарика в

момент прохождения вертикального положения. Обе скорости взяты относительно Земли. Причем $v = \omega l - u$. Следовательно:

$$-Mu + m(\omega l - u) = 0.$$

Отсюда скорость бруска в момент прохождения нитью вертикального положения равна

$$u = \frac{m\omega l}{M + m}.$$

Задача III.9 Поезд массой M , двигавшийся со скоростью v , начинает тормозить и останавливается, пройдя путь S . Какова сила торможения F ?

Решение. Сила торможения \vec{F} для поезда является внешней силой, поэтому закон сохранения механической энергии не выполняется. Изменение кинетической энергии равно работе сил торможения (п. III.9), т. е.

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{\text{внеш}};$$

$$0 - \frac{mv^2}{2} = FS \cos 180^\circ, \text{ или } F = \frac{mv^2}{2S}.$$

Задача III.10 Тело массой m , брошенное со скоростью v_0 с высоты H вертикально вниз, погрузилось в мягкий грунт на глубину h . Определить силу сопротивления грунта.

Решение. Тело массой m на высоте H обладает потенциальной и кинетической энергией, которая расходуется на преодоление силы сопротивления грунта и на приобретение потенциальной энергии на глубине h .

Примем за нулевой уровень отсчета поверхность Земли. Тогда изменение механической энергии равно работе сил сопротивления, т. е.

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_n = A_c, \text{ или}$$

$$\left(0 - \frac{mv_0^2}{2}\right) + (-mgh - mgH) = F_c h \cos 180^\circ = -Fh.$$

Следовательно, сила сопротивления грунта равна

$$F = \frac{2g(H+h)m + mv_0^2}{2h}.$$

Задача III.11 Два абсолютно упругих шара массами m_1 и m_2 движутся друг за другом по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями v_1 и v_2 и соударяются. Найти скорости шаров \bar{u}_1 и \bar{u}_2 после соударения.

Решение. При соударении на шары в горизонтальном направлении действуют силы взаимодействия (силы упругости), однако они являются внутренними и консервативными, поэтому в этой задаче можно использовать закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса, которые запишутся в проекции на ось OX следующим образом (ось OX выберем вдоль движения шаров):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2};$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Для удобства решения эту систему уравнений целесообразно переписать в виде

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2); \quad (1)$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2). \quad (2)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \quad (3)$$

Далее используем уравнения (2) и (3)

Решая эту систему, получим выражение для конечных скоростей

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad (4)$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Мы получили общие выражения для скоростей u_1 и u_2 , которые можно использовать для любого направления движения первоначальных скоростей v_1 и v_2 вдоль оси OX . В этом случае, если какая-либо из скоростей (v_1 или v_2) совпадает по направлению с осью OX , то она берется со знаком «+» в формулах (4) и (5), если же не совпадает — то со знаком «-».

Предположим, что шар массой m_1 движется со скоростью v_1 , а шар массой m_2 покоится (т. е. $v_2=0$), тогда формулы (4) и (5) примут вид

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, если $m_1 > m_2$, то оба шара после взаимодействия будут двигаться в сторону, куда была направлена скорость \vec{v}_1 . Если же $m_1 < m_2$, то первый шар после взаимодействия отскочит в обратную сторону ($u_1 < 0$), а второй будет двигаться в направлении скорости \vec{v}_1 .

Если же массы шаров одинаковы, то после взаимодействия первый шар остановится ($u_1 = 0$), а второй будет двигаться со скоростью v_1 .

Задача III.12 Идеально гладкий шар A , движущийся со скоростью \vec{v}_1 , соударяется одновременно с двумя такими же соприкасающимися между собой шарами B и C (рис. III.10). Считая соударение шаров абсолютно упругими, определить их скорости после взаимодействия.

Решение. В момент соударения на шары B и C действуют силы упругости, направленные вдоль

прямых, соединяющих их центры с центром ударяющегося шара A . Поэтому после соударения движение шаров B и C происходит вдоль этих пря-

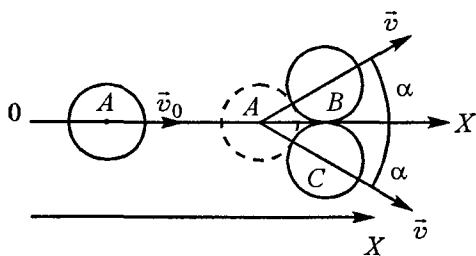


Рис. III.10

мых. В силу симметрии скорости шаров B и C (\vec{v}_1 и \vec{v}_2) после соударения одинаковы и направлены под углом α к оси OX .

Для системы тел, состоящей из трех шаров, выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии, так как силы упругости являются внутренними силами. Запишем эти законы:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{u}; \quad (1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mu^2}{2}, \quad (2)$$

где u — скорость шара A после соударения.

Учитывая, что скорости шаров B и C после удара одинаковы по величине, т. е. $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, уравнение (1) системы вдоль оси OX запишется: $mv_0 = mv \cos \alpha + mv \cos \alpha + mu = 2mv \cos \alpha + mu$, а систему уравнений (1) и (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v_0 &= 2v \cos \alpha + u, & \text{или} & & v_0 - u &= 2v \cos \alpha; \\ v_0^2 &= 2v^2 + u^2, & & & v_0^2 - u^2 &= 2v^2. \end{aligned}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$v_0 + u = v / \cos \alpha.$$

Теперь можно рассматривать систему двух уравнений, но уже первой степени:

$$v_0 + u = v / \cos \alpha; \quad (3)$$

$$v_0 - u = 2v \cos \alpha. \quad (4)$$

Сложив уравнения (3) и (4), получим

$$2v_0 = v / \cos \alpha + 2v \cos \alpha.$$

Откуда

$$v = \frac{2v_0}{1 / \cos \alpha + 2 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha} = \frac{2v_0 \sqrt{3} / 2}{1 + 2 \cdot 3 / 4} = \frac{2v_0 \sqrt{3}}{5}.$$

Скорость шарика A после удара определим из уравнения (4):

$$u = v_0 - 2v \cos \alpha = v_0 - \frac{2v_0 \cdot 3}{5} = -\frac{v_0}{5}.$$

Таким образом, после соударения шары B и C будут двигаться вправо (рис. III.10), а шар A после соударения будет двигаться влево, на что указывает знак «—».

Задача III.13 Два абсолютно упругих шарика массами m и M подвешены на одинаковых нитях длиной l каждая (рис. III.11). Шарик массой m отклоняют от положения равновесия на 90° и отпускают. На какую высоту H поднимется шарик массой M после соударения?

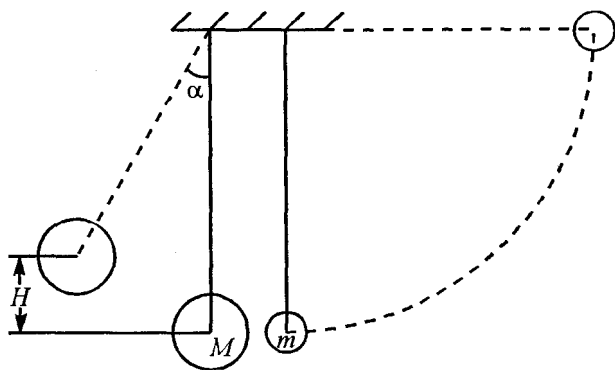


Рис. III.11

Решение. Рассмотрим систему двух тел: какой-либо шарик – Земля. В этой системе тел силы тяжести и натяжения нитей являются внутренними и консервативными силами, поэтому для данной системы тел выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Однако изменение импульса Земли, так же как и изменение ее механической энергии, столь мало, что с огромной степенью точности ими можно пренебречь по сравнению с изменением импульсов шариков и изменением их механических энергий.

Если за нулевой уровень потенциальной энергии выбрать положение равновесия шариков, то

$$\Delta E_k + \Delta E_{\text{п}} = \Delta E_{\text{мех}} = 0.$$

Для первого шарика до удара

$$\left(\frac{mv_1^2}{2} - 0 \right) + (0 - mgl) = 0.$$

После удара

$$\left(\frac{0 - mv_2^2}{2} \right) + (mgh - 0) = 0, \text{ или}$$

$$mgl = \frac{mv_1^2}{2}; \quad (1)$$

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2}, \quad (2)$$

где v_1 и v_2 – скорости шарика массой m до и после удара соответственно, h – высота подъема этого шарика после удара.

Для большого шарика после соударения запишем

$$MgH - \frac{Mu^2}{2} = 0; \quad MgH = \frac{Mu^2}{2}, \quad (3)$$

где u — скорость шарика массы M после соударения, а H — высота, на которую он поднимется. При соударении шариков закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса запишутся

$$\begin{aligned} \frac{mv_1^2}{2} &= \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}; \\ mv_1 &= mv_2 + Mu. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (1) позволяет получить скорость шарика массой m до столкновения. Система уравнений (3) и (4) позволяет вычислить скорости обоих шариков после столкновения:

$$u = \frac{2m}{M+m} \sqrt{2gl}; \quad v_2 = -\frac{(M-m)\sqrt{2gl}}{M+m}.$$

Знак «—» говорит о том, что в случае $M > m$ маленький шарик после удара отскочит влево. Высота подъема шарика массой M определяется из уравнения (3)

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{4m^2l}{(M+m)^2}.$$

Именно это и требуется определить в задаче. Если бы нас интересовала высота подъема маленького шарика после удара, то мы могли бы воспользоваться уравнением (2).

Задача III.14 Пуля массой m летит со скоростью v_0 и пробивает тяжелую доску толщиной d , движущуюся навстречу пуле со скоростью u . С какой скоростью v вылетит пуля из доски? Скорость доски не меняется, а силу сопротивления F_c движению пули в доске считать постоянной.

Решение. Сила сопротивления F_c для пули является внешней силой (рис. III.12), и она совершает работу, когда пуля движется внутри доски, т. е. на расстоянии d . Однако пуля проходит расстояние d относительно доски, поэтому изменение механической энергии пули удобнее рассматривать относительно доски, и нужно применить формулу (10) (пIII.9), т. е.

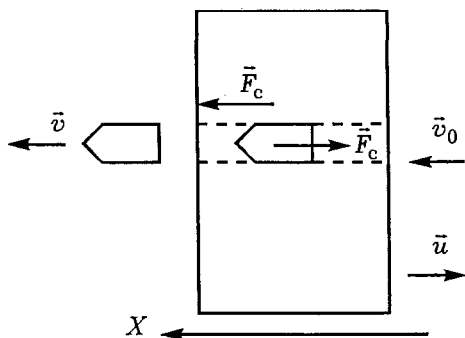


Рис. III.12

носительно доски, поэтому изменение механической энергии пули удобнее рассматривать относительно доски, и нужно применить формулу (10) (пIII.9), т. е.

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} [v - (-u)]^2 - \frac{m[v_0 - (-u)]^2}{2} = Fd \cos \alpha = -Fd,$$

$$\text{или} \quad \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{m(v_0+u)^2}{2} = -Fd.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$v+u = \sqrt{(v_0+u)^2 - \frac{2Fd}{m}}, \text{ т. е.}$$

$$v = \sqrt{(v_0 + u)^2 - \frac{2Fd}{m}} - u.$$

Задача III.15 От поезда массой M , движущегося с постоянной скоростью, отрывается последний вагон массой m , который проходит путь S и останавливается. На каком расстоянии L находится поезд от вагона в момент остановки последнего? (рис. III.13, а).

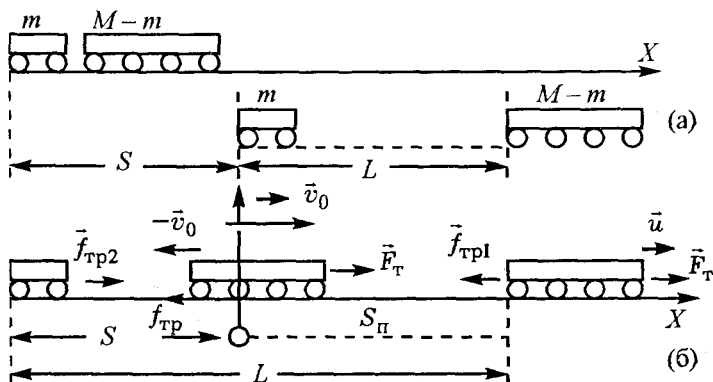


Рис. III.13

Решение. Сумма сил, действующих на весь состав до и после отрыва вагона, равна нулю, поэтому для системы: поезд — оторвавшийся вагон, выполняется закон сохранения импульса. Направим ось OX вправо. Вдоль этой оси выполняется соотношение

$$F_{\text{т}} - f_{\text{тр}} = 0, \text{ или } f_{\text{тр}} = \mu Mg.$$

Для простоты решения удобно выбрать систему координат, которая движется со скоростью \vec{v}_0 всего состава до отрыва вагона. В этой системе координат закон сохранения импульса имеет вид

$$0 = mv + (M - m)u, \text{ или } v = -\frac{(M - m)u}{m},$$

где v и u — соответственно скорости вагона и поезда в системе координат, движущейся со скоростью v_0 . По сравнению с поездом в выбранной системе координат вагон движется в обратную сторону (рис. III.13, б). Расстояния, пройденные вагоном (S_B) и поездом (S_{II}) в этой системе координат относятся как их скорости, т. е.

$$\frac{S_B}{S_{II}} = \frac{v}{u} = \frac{(M - m)}{m}.$$

В условии задачи известно, что вагон остановится, пройдя расстояние S относительно Земли. В системе координат, движущейся со скоростью v_0 , вагон за время движения также пройдет расстояние S , только скорость его в движущейся системе координат станет равной $-v_0$ к моменту остановки относительно Земли. Действительно, $\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}$. Так как $v_{пер} = v_0$, то при остановке вагона относительно Земли ($v_{abc} = 0$) скорость относительно подвижной системы координат равна

$$v_{отн} = v_{abc} - v_{пер} = 0 - v_0 = -v_0.$$

Следовательно,

$$\frac{S}{S_{\text{п}}} = \frac{M - m}{m}, \text{ или } S_{\text{п}} = \frac{Sm}{M - m}.$$

Расстояние L между вагоном и поездом, которое нужно определить в условии задачи, равно (см. рис. III.13, б)

$$L = S + S_{\text{п}} = S + \frac{Sm}{M - m} = \frac{SM}{M - m}.$$

Задача III.16 Тележка массой M движется без трения по горизонтальным рельсам со скоростью v_0 . На передний край тележки кладут тело массой m без начальной скорости. Тело, пройдя некоторое расстояние вдоль тележки, останавливается. Определить это расстояние l , если коэффициент трения между телом и тележкой μ .

Решение. Все силы, действующие на тело и тележку, изображены на рис. III.14. Вдоль горизонтального направления можно применить закон сохранения импульса для системы: тело — тележка. В этом случае сумма проекций внешних

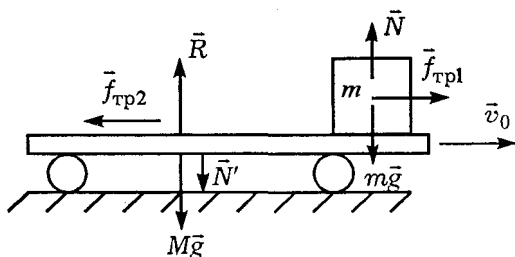


Рис. III.14

сил равна нулю, а силы трения являются внутренними силами ($\vec{f}_{\text{тр1}} = -\vec{f}_{\text{тр2}}$). Поэтому можно записать

$$Mv_0 = (m + M)u,$$

где u — скорость тележки и тела относительно Земли после остановки последнего.

Тогда

$$u = \frac{Mv_0}{(m + M)}. \quad (1)$$

А вот закон сохранения механической энергии для этой системы тел применить нельзя, поскольку сила трения является неконсервативной силой, поэтому изменение механической энергии равно работе сил трения, т. е.

$$\Delta E_{\text{к}} = (E_{\text{кк}} - E_{\text{кн}}) = A_{\text{тр1}} + A_{\text{тр2}}, \text{ или}$$

$$\frac{(m + M)u^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -f_{\text{тр2}}S - f_{\text{тр1}}s, \quad (2)$$

где S и s — расстояния, пройденные тележкой и телом относительно Земли соответственно. Решая совместно уравнения (1) и (2) и используя выражение для силы трения, получим

$$\frac{(m + M)(Mv_0)^2}{(m + M)^2} - Mv_0^2 = 2\mu mg(s - S) = -2\mu mgl,$$

$$\text{или } Mv_0^2 \left(\frac{M}{m + M} - 1 \right) = -2\mu mgl.$$

Таким образом, тело вдоль тележки прошло расстояние

$$l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m + M)}.$$

Следует обратить внимание на то, что работа сил трения определяется относительным перемещением тела l .

IV. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Вращательное движение

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки имеют одинаковые угловые перемещения ($\Delta\varphi$), угловые скорости

$$\left(\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) \text{ и угловые ускорения } \left(\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right).$$

Задачи на динамику вращательного движения по окружности, в принципе, ничем не отличаются от задач на динамику прямолинейного движения точки и также подчиняются второму закону Ньютона $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$, где \vec{a} — полное ускорение точки, состоящее из нормального \vec{a}_n и тангенциального (касательного) \vec{a}_τ ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

При этом $a_n = \frac{v^2}{R}$ меняет только направление скорости, a_τ — только величину скорости.

Большую часть задач на динамику вращательного движения удобно решать с привлечением закона сохранения механической энергии.

Вновь предлагаем некоторую последовательность действий (некий алгоритм) при решении задач на динамику вращательного движения.

1. Аккуратно рисуем рисунок, отражающий условие задачи. На этом рисунке стрелочками изображаем все силы, действующие на тело.

2. Записываем второй закон Ньютона в векторном виде, а затем переписываем его в проекции на ось OX , которую направляем обычно вдоль радиуса к центру. Именно так удобно выбрать направление оси OX , поскольку мы знаем ускоре-

ние вдоль этой оси $a_n = \frac{v^2}{R}$, т. е.

$$\sum F_{ix} = ma_n = \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

Вторую ось OY обычно направляют вдоль касательной и второй закон Ньютона вдоль этой оси запишется

$$\sum F_{iy} = ma_t. \quad (2)$$

Однако часто для решения задач на динамику удобнее использовать вместо уравнения (2) закон сохранения механической энергии (если это позволяет сделать условие задачи):

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}, \text{ или } \Delta(E_k + E_p) = 0. \quad (3)$$

Закон сохранения механической энергии используется в том случае, если для решения зада-

чи уравнения Ньютона в виде (1) нам недостаточно. Ответ получаем только в общем (буквенном) виде, так как в этом случае его удобно анализировать. И только после этого подставляем цифры в полученную формулу.

Задача IV.1 Два одинаковых шарика *A* и *B* укреплены на концах невесомой нити, продетой через трубку, как показано на рис. IV.1. Шарик *A*, находящийся на поверхности диска, вращается в горизонтальной плоскости. Расстояние от оси трубки до шарика *A* равно r . С какой угловой скоростью должен вращаться шарик *A*, чтобы шарик *B* находился в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым? Трением пренебречь.

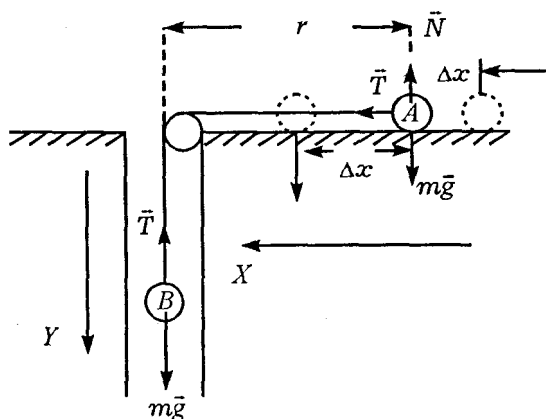


Рис. IV.1

Решение. На шарик *A* действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры \vec{N} и натяжение нити

\vec{T} . На шарик B действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити \vec{T} . Второй закон Ньютона в векторной форме выглядит так:

$$\text{для шарика } A \quad \vec{T} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n, \quad (1)$$

$$\text{для шарика } B \quad m\vec{g} + \vec{T} = 0. \quad (2)$$

Выберем ось OX , направленную вдоль нити, а ось OY опустим вниз. Тогда для шарика A вдоль направления OX уравнение (1) запишется

$$T = m\omega^2 r,$$

а уравнение (2) вдоль направления OY

$$mg - T = 0.$$

Из этих уравнений получим

$$T = m\omega^2 r = mg. \quad (3)$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}. \quad (4)$$

Очень важно теперь выяснить, будет ли это равновесие шариков устойчивым? Для того чтобы определить устойчивость равновесия, нужно сместить шарик A на Δx влево (либо вправо) и посмотреть, как изменились силы, действующие на шарик. При смещении шарика A влево сила натяжения T уменьшается, так как теперь

$$T_1 = m\omega^2(r - \Delta r).$$

Но тогда сила натяжения, действующая на шарик B , тоже уменьшается, поскольку до смещения эта сила равнялась $m\vec{g}$ по формуле (3). Поэтому шарик B поедет вниз и потянет за собой шарик A . Это, в свою очередь, еще больше умень-

шит силу натяжения и т. д. Аналогичные рассуждения можно провести и при смещении шарика A на Δx вправо. Поэтому положение равновесия шариков будет неустойчивым.

Задача IV.2 Шарик массой m прикреплен к невесомой пружине и движется по окружности в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω .

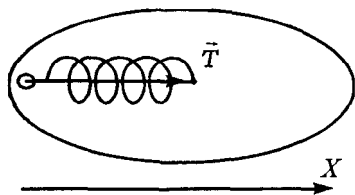


Рис. IV.2

Определить силу натяжения пружины с жесткостью k (начальная длина нерастянутой пружины l_0 и радиус окружности, по которой движется шарик, l (рис. IV.2).

Решение. В горизонтальном направлении на шарик действует только сила натяжения пружины \vec{T} , которая является силой упругости и по закону Гука равна $T = k\Delta l = k(l - l_0)$. Именно эта сила сообщает шарiku нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \omega^2 l.$$

Направим ось OX , как показано на рисунке. Второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется

$$T = m\omega^2 l, \text{ или } k(l - l_0) = m\omega^2 l.$$

Это соотношение позволяет вычислить радиус окружности l , по которой движется шарик,

$$l(k - m\omega^2) = kl_0, \text{ или } l = \frac{kl_0}{(k - m\omega^2)}.$$

Задача IV.3 Автомобиль, масса которого M , движется с постоянной скоростью v один раз по выпуклому мосту, а другой раз по вогнутому. В обоих случаях радиус кривизны мостов одинаков и равен R . Определить вес машины P в середине моста в обоих случаях. (рис. IV.3) Трение не учитывать.

Решение. На автомобиль действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . В середине моста эти силы направлены вдоль одной прямой. Выберем ось OY , направленную, например, вниз. Тогда вдоль этого направления для случая а) и б) (см. рис. IV.3) второй закон Ньютона запишется соответственно

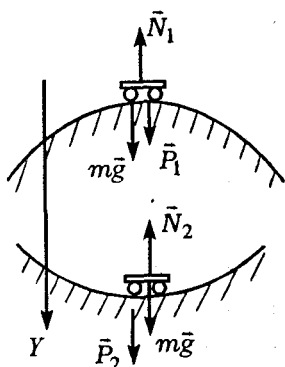


Рис. IV.3

$$\text{а) } mg - N_1 = ma_n = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда}$$

$$N_1 = mg + \frac{mv^2}{R} = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right);$$

$$\text{б) } mg - N_2 = -ma_n = -\frac{mv^2}{R}. \text{ Следовательно,}$$

$$N_2 = mg + \frac{mv^2}{R} = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right).$$

Как видно, в обоих случаях реакции опоры \bar{N}_1 и \bar{N}_2 разные. Поскольку вес тела — это сила, с которой тело действует на опору, то по величине вес тела в нашей задаче в обоих случаях будет разным: $P_1 = N_1$, а $P_2 = N_2$. Таким образом, при движении автомобиля по выпуклому мосту его вес меньше силы тяжести $m\bar{g}$, а по вогнутому — больше силы тяжести.

Задача IV.4

Грузик, имеющий массу m , прикреплен к концу невесомого стержня длиной l , который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца, делая n оборотов в секунду (рис. IV.4). Каково натяжение стержня, когда грузик проходит верхнюю и нижнюю точки своей траектории?

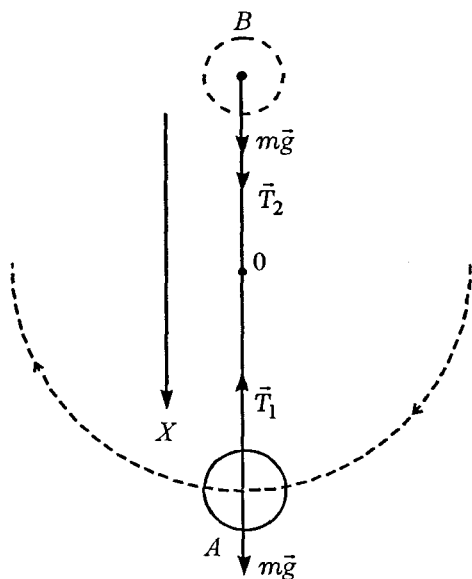


Рис. IV.4

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения стержня \vec{T} . В разных точках траектории сила натяжения разная. Направим ось Ox вниз и запишем второй закон Ньютона для нижней A и верхней B точек траектории соответственно:

$$mg - T_1 = -ma_n = -m\omega^2 l;$$

$$mg + T_2 = ma_n = m\omega^2 l.$$

Учитывая, что угловая скорость связана с числом оборотов соотношением $\omega = 2\pi n$, получим выражение для натяжения стержня

$$T_1 = mg + m\omega^2 l = m(g + \omega^2 l) = m(g + 4\pi^2 n^2 l);$$

$$T_2 = m\omega^2 l - mg = m(4\pi^2 n^2 l - g).$$

Задача IV.5 Шарик массой m подвешен на нити, длина которой l . Шарик равномерно вращается в горизонтальной плоскости, при этом нить отклоняется на угол α от вертикали (рис. IV.5) — конический маятник. Определить период вращения шарика T .

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити \vec{N} . Результирующая этих сил сообщает шарiku нормальное ускорение \vec{a}_n . Второй закон Ньютона для шарика имеет вид

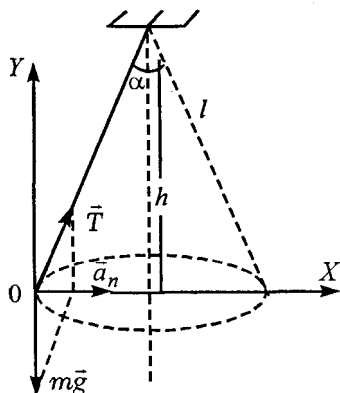


Рис. IV.5

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n.$$

В проекциях на оси OX и OY соответственно этот закон запишется

$$N \sin \alpha = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin \alpha;$$

$$N \cos \alpha - mg = 0.$$

Решая систему двух уравнений, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g}.$$

Отсюда $\omega^2 = \frac{g}{l \cos \alpha}$, а период вращения шарика

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}},$$

где h — расстояние от точки подвеса до плоскости круга, по которому движется шарик (сравним с формулой периода для математического маятника длиной h).

Задача IV.6 По вертикально расположенному обручу радиуса R может без трения скользить колечко. Обруч вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Колечко находится в равновесии на высоте h от нижней точки обруча. Определить угловую скорость вращения обруча ω (рис. IV.6).

Решение. На колечко в любой момент времени действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Эти две силы сообщают кольцу нормальное ускорение \vec{a}_n , с которым оно движется по окружности радиуса r . Второй закон Ньютона в векторной записи имеет вид

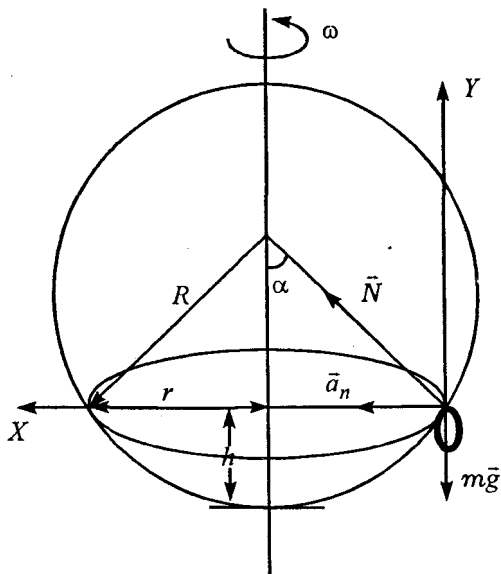


Рис. IV.6

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n.$$

Выбрав оси OX и OY , как указано на рисунке, запишем этот закон в проекциях на эти оси соответственно

$$N \sin \alpha = ma_n = m\omega^2 r;$$

$$N \cos \alpha - mg = 0, \text{ или } N \cos \alpha = mg.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}, \text{ или } \omega^2 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r} = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R \sin \alpha} = \frac{g}{R \cos \alpha}.$$

Таким образом,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \alpha}}.$$

Задача IV.7 Невесомый стержень длиной l , изогнутый, как показано на рис. IV.7, вращается с угловой скоростью ω относительно оси AA_1 . К концу стержня прикреплен груз массой m .

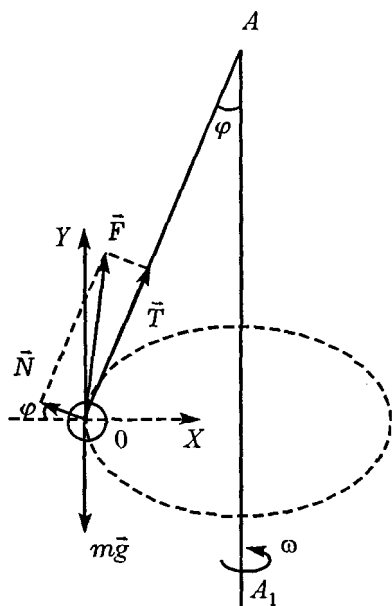


Рис. IV.7

Определить силу, с которой стержень действует на груз.

Решение. На груз действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры \vec{N} и сила натяжения стержня \vec{T} . Сила \vec{F} , с которой стержень действует на груз, является результирующей сил \vec{N} и \vec{T} , т. е. $F = \sqrt{T^2 + N^2}$. Для отыскания сил T и N запишем второй закон

Ньютона в проекции на оси OX и OY (см. рис. IV.7)

$$T \sin \varphi - N \cos \varphi = ma_n = m\omega^2 l \sin \varphi;$$

$$T \cos \varphi + N \sin \varphi - mg = 0.$$

Решая эту систему, получаем

$$T = m(\omega^2 l \sin^2 \varphi + g \cos \varphi);$$

$$N = m(g - \omega^2 l \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Таким образом, результирующая сила \vec{F} , с

которой стержень действует на тело, равна по величине

$$F = \sqrt{T^2 + N^2} = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \varphi}.$$

Задача IV.8 Маленький шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Когда он проходит положение равновесия, нить испытывает натяжение, равное удвоенной силе тяжести шарика (рис. IV.8). На какой максимальный угол α от вертикали отклоняется шарик? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . В системе тел: шарик — Земля, эти силы являются внутренними и

консервативными, поэтому можно применить закон сохранения механической энергии:

$$E_{\text{мех}1} = E_{\text{мех}2}, \text{ или } E_{\text{к}1} + E_{\text{п}1} = E_{\text{к}2} + E_{\text{п}2}.$$

Выберем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии уровень $00'$, тогда $E_{\text{мех}1} = E_{\text{к}1}$, а $E_{\text{мех}2} = E_{\text{п}2}$, т. е. кинетическая энергия, которую

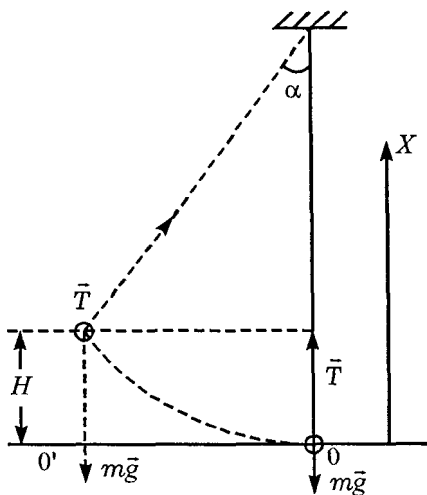


Рис. IV.8

имел шарик, проходя вертикальное положение, должна равняться потенциальной энергии в точке максимального подъема шарика

$$\frac{mv^2}{2} = mgH, \text{ или } H = \frac{v^2}{2g}.$$

Поскольку из рисунка очевидно, что $H = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$, то максимальный угол отклонения определится из этой формулы:

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{l - H}{l}, \text{ где } l - \text{длина нити.}$$

Для определения высоты H необходимо знать скорость шарика при прохождении положения равновесия. Это легко сделать, записав второй закон Ньютона вдоль оси OX в момент прохождения шариком положения равновесия (см. рис.),

$$T - mg = ma_n = \frac{mv^2}{l}, \text{ или } v^2 = \frac{(T - mg)l}{m}.$$

Подставив это выражение в формулу, определяющую максимальный угол отклонения шарика, получим

$$\cos \alpha_{\max} = 1 - \frac{H}{l} = 1 - \frac{T - mg}{2mg} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, шарик поднимется на угол $\alpha_{\max} = 60^\circ$.

Задача IV.9 Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины полусферы радиуса R . С какой

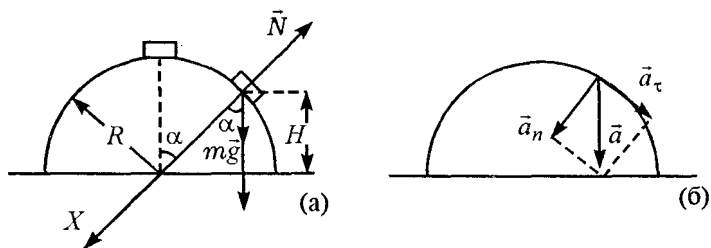


Рис. IV.9

скоростью v и на какой высоте H тело оторвется от поверхности полусферы (рис. IV.9)?

Решение. На тело действуют две силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Второй закон Ньютона в векторной записи имеет вид

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Следует отметить, что ускорение \vec{a} — это полное ускорение тела, оно направлено в ту же сторону, что и результирующая сила \vec{F}_p , равная $\vec{F}_p = \vec{N} + m\vec{g}$. Поскольку полное ускорение \vec{a} равно $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, то оно лежит внутри прямого угла между векторами \vec{a}_n и \vec{a}_τ , поэтому и результирующая сила \vec{F}_p должна быть сонаправлена с этим ускорением. Запишем второй закон Ньютона вдоль оси OX , направленной вдоль радиуса,

$$mg \cos \alpha - N = ma_n = \frac{mv^2}{R}.$$

Посмотрим внимательно на это соотношение. При соскальзывании тела его скорость увеличивается. Это может произойти только тогда, когда

\bar{N} уменьшается более сильно, чем $mg \cos \alpha$. Поэтому наступит такой момент, когда \bar{N} обратится в нуль. Это означает, что тело оторвется от поверхности сферы и дальше полетит по параболе. В этот момент времени второй закон Ньютона будет иметь вид

$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

Высота H , с которой оторвется тело, определяется (см. рис.)

$$H = R \cos \alpha. \quad (2)$$

Подставив выражение для $\cos \alpha$ в уравнение (1), получим

$$mg \frac{H}{R} = \frac{mv^2}{R}, \text{ или } H = \frac{v^2}{g}. \quad (3)$$

Задача была бы решена, если бы мы смогли определить скорость в момент отрыва тела от сферы. Это легко сделать, воспользовавшись законом сохранения механической энергии,

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgH, \text{ или } v^2 = 2g(R - H).$$

Подставим это выражение в уравнение (3), тогда

$$H = \frac{2g(R - H)}{g}, \text{ или } H = \frac{2R}{3}.$$

При этом $\cos \alpha$ в момент отрыва равен $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Таким образом, тело оторвется от поверхности

на высоте $H = \frac{2}{3}R$, а его скорость в момент отрыва равна

$$v^2 = 2g(R - H) = 2g\left(R - \frac{2}{3}R\right) = \frac{2}{3}gR,$$

$$\text{или } v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Как видно, ни высота H , ни скорость v не зависят от массы m , поэтому тело любой массы оторвется от поверхности на одинаковой высоте и с одинаковой скоростью.

Задача IV.10 Шайба массой m скользит без трения по наклонному желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом R . На какой высоте h шайба оторвется от желоба и до какой наибольшей высоты H после этого поднимется, если она начала спускаться по желобу без начальной скорости с высоты $h_1 = 2R$ (рис. IV.10)?

Решение. На шайбу действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Обе силы являются внутренними для системы тел: шайба — Земля. Поэтому можно в любой момент времени записать закон сохранения механической энергии. Запишем его в тот момент, когда тело находится в точке максимального подъема H , тогда

$$mgh_1 = mgH + \frac{mv^2}{2}.$$

В точке максимального подъема A у тела будет

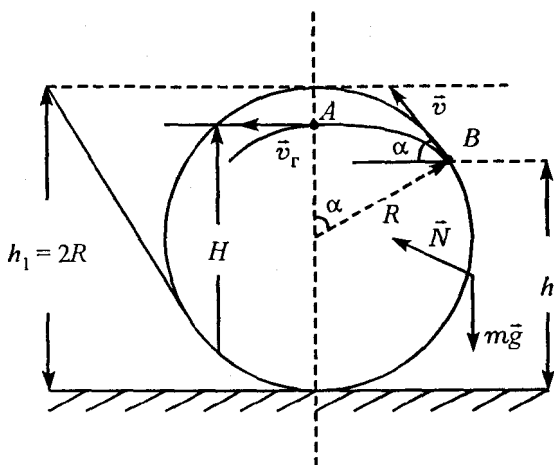


Рис. IV.10

только горизонтальная скорость \vec{v}_r , направленная по касательной к траектории. Отсюда

$$H = h_1 - \frac{v_r^2}{2g} = 2R - \frac{v_r^2}{2g}.$$

Таким образом, задача сводится к определению горизонтальной скорости v_r в точке максимального подъема. Эта скорость, как видно из рисунка, равна $v_r = v \cos \alpha$. Значение скорости \vec{v} в точке отрыва шайбы и угол α в момент отрыва мы получили в предыдущей задаче:

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}; \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

Подставив эти значения, получим

$$H = 2R - \frac{2gR}{2g} \frac{4}{9} = \frac{50}{27} R.$$

Высоту отрыва шайбы от поверхности h также можно определить из закона сохранения механической энергии, записанного для точки отрыва B ,

$$mgh_1 = mgh + \frac{mv^2}{2}. \text{ Откуда } h = h_1 - \frac{v^2}{2g} = \frac{5}{3}R.$$

Таким образом, мы ответили на вопросы, поставленные в задаче, воспользовавшись лишь законом сохранения механической энергии.

Задача IV.11 На невесомом стержне длиной l укреплены:

а) масса $2m$ на конце стержня,

б) две равные массы m — одна на конце стержня, другая — посередине стержня (рис. IV.11). Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки A . Какую горизонтальную скорость в обоих случаях нужно сообщить концу стержня, чтобы он отклонился до горизонтального положения?

Решение. В данной задаче можно применить закон сохранения механической энергии, поскольку сила тяжести и сила натяжения стержня для системы тел: Земля — массы, являются внутренними. Поэтому можно записать

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}.$$

За начало отсчета потенциальной

энергии выбираем положение $00'$. Для тела мас-

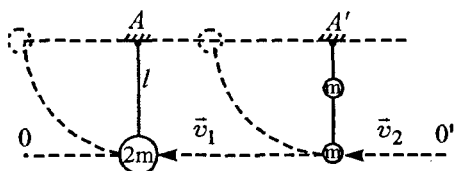


Рис. IV.11

со стороны $2m$ закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{2mv_1^2}{2} = 2mgl.$$

Отсюда $v_1 = \sqrt{2gl}$.

Для шариков с массами m

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{m\left(\frac{v_2}{2}\right)^2}{2} + mg\frac{l}{2} = mgl + mgl, \quad \text{или}$$

$$\frac{5}{4}v_2^2 = 3gl, \quad \text{т. е. } v_2 = \sqrt{\frac{12gl}{5}} = \sqrt{2,4gl}.$$

За начало отсчета потенциальной энергии можно было бы выбрать и положение AA' . Тогда для шарика массой $2m$ закон сохранения запишется

$$-2mgl + \frac{2mv_1^2}{2} = 0, \quad \text{или } v_1 = \sqrt{2gl},$$

а для шариков массами m

$$-mgl + \frac{mv_2^2}{2} - mg\frac{l}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 = 0, \quad \text{или}$$

$$v_2 = \sqrt{2,4gl}.$$

Таким образом, мы показали, что решение задачи не зависит от выбора начального уровня отсчета потенциальной энергии. Следует еще отметить, что шарики массами m связаны единым стержнем и в любой момент времени будут иметь одинаковую угловую скорость ω , поэтому закон сохранения механической энергии можно записать

только для двух шариков вместе. Линейные скорости каждого шарика определяются формулой $v = \omega r$, поэтому линейная скорость верхнего шарика в 2 раза меньше линейной скорости нижнего.

Задача IV.12 Тело соскальзывает из точки A в точку B по двум поверхностям с одинаковой кривизной: выпуклой и вогнутой. Коэффициент трения один и тот же. В каком случае скорость тела в точке B больше (рис. IV.12)?

Решение. В каждой точке траектории на тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры \vec{N} и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$.

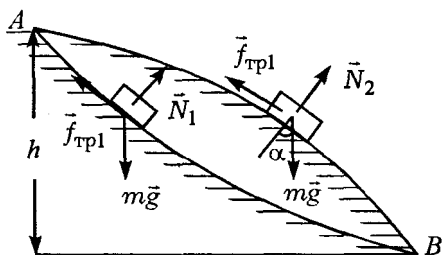


Рис. IV.12

Второй закон Ньютона для обоих случаев вдоль радиуса запишется

$$mg \cos \alpha - N_2 = \frac{mv_2^2}{R} \quad \text{или} \quad N_2 = mg \cos \alpha - \frac{mv_2^2}{R};$$

$$mg \cos \alpha - N_1 = -\frac{mv_1^2}{R} \quad \text{или} \quad N_1 = mg \cos \alpha + \frac{mv_1^2}{R}.$$

Таким образом, при движении тела по выпуклой поверхности реакция опоры \vec{N}_2 будет меньше, чем при движении тела по вогнутой поверхности \vec{N}_1 . А это значит, что сила трения, действующая на

тело в каждой точке траектории и равная μN , при движении по выпуклой поверхности будет меньше.

Закон изменения механической энергии запишется

$$\Delta E_k + \Delta E_n = A_{\text{тр}};$$

$$- mgh + \frac{mv_B^2}{2} = A_{\text{тр}}, \text{ или}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = mgh + A_{\text{тр}} = mgh - f_{\text{тр}}S = mgh - \mu NS.$$

Из этого соотношения следует, что в точке B скорость тела будет больше в том случае, когда работа, затраченная на преодоление сил трения, меньше. Поскольку сила трения при движении по выпуклой поверхности \vec{N}_2 меньше, чем \vec{N}_1 , то скорость в точке B будет больше при движении тела по выпуклой поверхности.

Задача IV.13 Определить кинетическую энергию обруча массой M , движущегося с постоянной скоростью v_0 без проскальзывания (рис. IV.13).

Решение. Разобьем весь обруч на малые участки массой Δm каждый. Любой такой участок участвует в двух движениях: поступательном со скоростью v_0 (скорость движения центра обруча) и вращательном со скоростью $v_n = \omega R$ (линейная скорость каждой точки обруча). В отсутствие про-

скальзывания $\omega = \frac{v_0}{R}$, поэтому $v_n = v_0$.

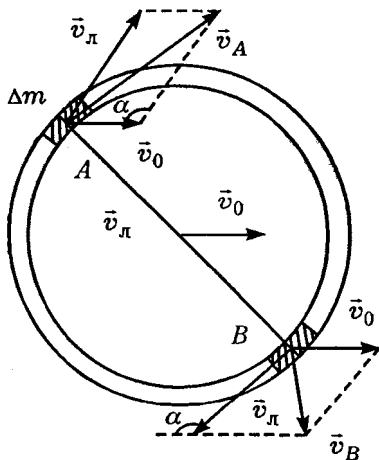


Рис. IV.13

Рассмотрим два диаметрально противоположных участка A и B . Их результирующие скорости равны векторной сумме скоростей поступательного и вращательного движений, т. е. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_\pi$, тогда

$$v_A^2 = v_0^2 + v_\pi^2 - 2v_0v_\pi \cos \alpha;$$

$$v_B^2 = v_0^2 + v_\pi^2 + 2v_0v_\pi \cos \alpha.$$

Суммарная кинетическая энергия обоих участков равна

$$\begin{aligned} E_{кA,B} &= \frac{\Delta m v_A^2}{2} + \frac{\Delta m v_B^2}{2} = \Delta m v_0^2 + \Delta m v_\pi^2 = \\ &= \Delta m (v_0^2 + \omega^2 R^2). \end{aligned}$$

Так как это выражение справедливо для любых двух симметричных участков, то для всего обруча можно записать

$$E_k = \sum \Delta E_{kA,B} = (v_0^2 + \omega^2 R^2) \sum \Delta m = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{M\omega^2 R^2}{2},$$

т. е. энергия всего обруча состоит из кинетической

энергии поступательного движения $E_{\text{пост}} = \frac{Mv_0^2}{2}$

и вращательного $E_{\text{вр}} = \frac{M\omega^2 R^2}{2}$. Учитывая, что

обруч катится без проскальзывания, т. е.

$v_{\text{л}} = v_0 = \omega R$, полная кинетическая энергия об-

руча равна

$$E_k = Mv_0^2.$$

Задача IV.14 На тонкой нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. В каких точках траектории ускорение шарика направлено строго вертикально и строго горизонтально? В начальный момент нить не растянута (рис. IV.14).

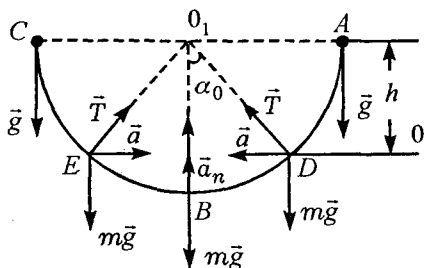


Рис. IV.14

Решение. Из второго закона Ньютона $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ очевидно, что ускорение тела совпадает с направлением результирующей силы. Поэтому ускорение вертикально вниз направлено в крайних верхних точках

А и С (нить не растянута), вертикально вверх в точке В, а горизонтально в точках D и E, положение которых определяется некоторым углом α_0 (см. рис.). Этот угол можно определить, записав второй закон Ньютона вдоль направления радиуса и по вертикали, соответственно

$$T - mg \cos \alpha_0 = ma_n = \frac{mv^2}{l};$$

$$T \cos \alpha_0 - mg = 0.$$

Решая систему уравнений, получим

$$\frac{mv^2}{l} = \frac{mg(1 - \cos^2 \alpha_0)}{\cos \alpha_0}. \quad (1)$$

Выражение для скорости можно определить из закона сохранения механической энергии.

Если начальный уровень отсчета потенциальной энергии выбрать в точке D, то

$$mgh = mgl \cos \alpha_0 = \frac{mv^2}{2} \text{ или } v^2 = 2gl \cos \alpha_0. \text{ Подста-}$$

вим это выражение для скорости в уравнение (1), получим

$$2g \cos \alpha_0 = \frac{g(1 - \cos^2 \alpha_0)}{\cos \alpha_0}, \text{ или } 3 \cos^2 \alpha_0 = 1.$$

Отсюда $\cos \alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Это значение $\cos \alpha_0$ соответ-

ствует углу $\alpha_0 = 54^\circ 45'$.

Задача IV.15 Сфера радиусом R равномерно вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω . Внутри сферы находится шарик массой m . Определить высоту h , соответствующую положению равновесия шарика относительно сферы. Исследовать положение равновесия на устойчивость (рис. IV.15).

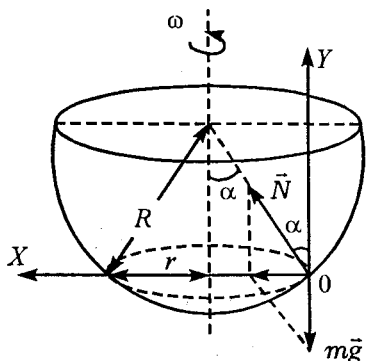


Рис. IV.15

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Эти силы сообщают шарiku нормальное ускорение a_n , заставляя шарик двигаться по окружности радиуса

$$r = R \sin \alpha.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси OX и OY

$$N \sin \alpha = ma_n = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin \alpha; \quad (1)$$

$$N \cos \alpha - mg = 0. \quad (2)$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$g \operatorname{tg} \alpha = \omega^2 R \sin \alpha,$$

$$\text{или } \sin \alpha \left(\omega^2 R - \frac{g}{\cos \alpha} \right) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение имеет два решения:

а) $\sin \alpha = 0$ (Сокращать на $\sin \alpha$ нельзя, т.к. потеряется одно решение!);

б) $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$ — это положение равновесия

Возможно лишь при условии, что

$$\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1, \text{ или } \omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Причем, это положение равновесия является устойчивым. Действительно, если шарик чуть-чуть опустить вниз (угол α уменьшить), то $\cos \alpha$ увеличивается и тогда вертикальная составляющая реакции опоры $N \cos \alpha > mg$, формула (2), и шарик поднимется (т. е. вернется в положение равновесия. Если же шарик поднять чуть вверх (угол α увеличить), то $\cos \alpha$ уменьшится и $N \cos \alpha < mg$, т. е. шарик опустится в положение равновесия. Высота h в этом положении равна

$$h = R(1 - \cos \alpha) = R \left(1 - \frac{g}{\omega^2 R} \right).$$

Решение $\sin \alpha = 0$ ($\alpha=0$) возможно при любой скорости вращения ω . Однако, если $\omega^2 > \frac{g}{R}$, решение неустойчивое (см. формулу (3)), если же $\omega^2 < \frac{g}{R}$, то решение устойчивое.

Задача IV.16 Определить зависимость веса тела P от географической широты, полагая известными угловую скорость вращения Земли ω и ее радиус R .

Решение. Пусть тело находится на поверхности Земли на широте, определяемой углом φ (рис. IV.16). При вращении Земли тело массой m дви-

жестся по окружности радиуса r . На него действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения покоя \vec{f} . Выберем направление осей, как показано на рисунке, и запишем второй закон Ньютона вдоль этих осей:

$$mg \cos \varphi - N \cos \varphi + f \sin \varphi = ma_n = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \varphi;$$

$$-mg \sin \varphi + N \sin \varphi + f \cos \varphi = 0,$$

т. е. тело вдоль оси OY не перемещается.

Решая эту систему, получим

$$N = mg - m\omega^2 R \cos^2 \varphi;$$

$$f = m\omega^2 R \sin^2 \varphi.$$

Вес тела \vec{P} по величине равен силе реакции опоры \vec{N} и направлен в противоположную сторону.

Таким образом, вес тела зависит от географической широты и определяется формулой

$$P = N = mg - m\omega^2 R \cos^2 \varphi.$$

Из этой формулы видно, что на Северном полюсе ($\varphi = 90^\circ$) вес тела равен силе тяжести mg , а на экваторе ($\varphi = 0^\circ$) вес тела равен

$$N = mg - m\omega^2 R.$$

В некоторых учебниках вместо силы трения покоя \vec{f} и силы реакции опоры \vec{N} рассматривают

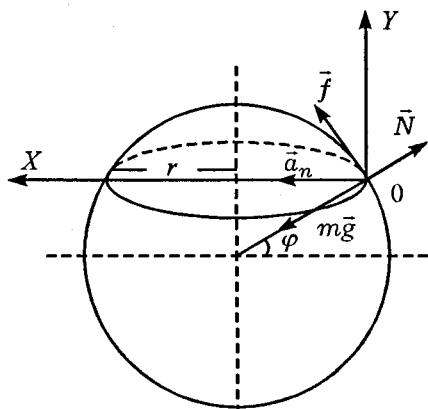


Рис. IV.16

силу \vec{Q} , действующую на тело массой m со стороны Земли. Эта сила равна $Q = \sqrt{f^2 + N^2}$.

Порой у учащихся вызывает недоумение введение силы трения покоя \vec{f} . Нужно ли ее вводить? Дело в том, что если не рассматривать силу \vec{f} , то $\vec{N} + m\vec{g} = 0$, и возникает вопрос: а какая же сила сообщает покоящемуся на Земле телу нормальное ускорение \vec{a}_n , с которым оно движется вокруг земной оси.

§ 2. Закон всемирного тяготения

пIV.1 Любые два точечных тела притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила направлена вдоль прямой, соединяющей эти точечные тела.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная, равная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг с}^2$.

пIV.2 Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g_0 = \frac{GM_3}{R_3^2}$. Отсюда $GM_3 = g_0 R_3^2$.

Ускорение свободного падения зависит от расстояния от Земли

$$g(h) = \frac{GM_3}{(R_3 + h)^2} = \frac{g_0 R_3^2}{(R_3 + h)^2}.$$

пIV.3 Тело, находящееся в поле Земли, обладает потенциальной энергией. Начальный уровень отсчета потенциальной энергии можно взять любой, поскольку изменение потенциальной энергии не зависит от выбора этого уровня.

Так как сила гравитации зависит от расстояния и, строго говоря, не является постоянной, то формулу для работы

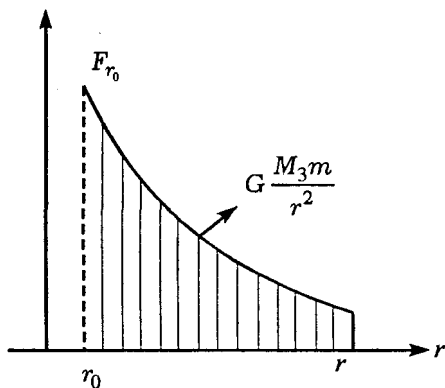


Рис. IV.17

А = $F_{гр} \Delta r$ применять нельзя. Однако работу можно посчитать графически. Для этого разобьем участок $r_0 - r$ на очень малые отрезки, в пределах которых силу гравитации можно считать постоянной (рис. IV.17). Тогда полная работа на участке $r_0 - r$ равна

$$A = \sum A_i = \sum \frac{GM_3 m |\Delta r|}{r^2}.$$

Если $\Delta r \rightarrow 0$, то предел, к которому стремится эта сумма, определяется

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum \frac{GM_3 m \Delta r}{r^2} = \int_{r_0}^r F_{\text{гп}} dr, \text{ или}$$

$$A = \Delta E_{\text{п}} = \int_{r_0}^r F_{\text{гп}} dr = \int_{r_0}^r \frac{GM_3 m}{r^2} dr = -\frac{GM_3 m}{r} \Big|_{r_0}^r = -GM_3 m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

где r_0 и r — расстояния, отсчитываемые от центра Земли. В частности, если за начало отсчета выбрать поверхность Земли ($r_0 = R_3$), а $r = R_3 + h$, то изменение потенциальной энергии определится

$$\Delta E_{\text{п}} = -GM_3 m \left(\frac{1}{R_3 + h} - \frac{1}{R_3} \right) = \frac{GM_3 m h}{R_3(R_3 + h)}. \quad (1)$$

Для $h \ll R_3$ это уравнение запишется

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{g_0 R_3^2 m h}{R_3^2} = mg_0 h.$$

Однако часто начальный уровень отсчета выбирается в бесконечности, т. е. ($r_0 \rightarrow \infty$), тогда

$$\Delta E_{\text{п}} = -GM_3 m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -\frac{GM_3 m}{r} = -F_{\text{гп}} r. \quad (2)$$

Из формулы видно, что эта энергия отрицательная. Поскольку начальный уровень отсчета находится в бесконечности ($r_0 \rightarrow \infty$), то тело лежит «ниже» нулевого уровня отсчета.

Задача IV.17 Угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца $\omega = 1,75 \cdot 10^{-2}$ рад/сут. Расстоя-

ние от Солнца $R_{зс} = 1,5 \cdot 10^{11}$ м. Определить массу Солнца.

Решение. На Землю со стороны Солнца действует сила гравитации, которая и сообщает ей центростремительное ускорение a_n , т. е. второй закон Ньютона вдоль радиуса имеет вид

$$\frac{Gm_3M_c}{R_{зс}^2} = m_3a_n = m_3\omega^2R_{зс}.$$

Следовательно, масса Солнца равна

$$M_c = \frac{\omega^2R_{зс}^2}{G} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{27} \text{ т}.$$

Задача IV.18 Радиус Луны в $n=3,7$ раза меньше радиуса Земли, а ее масса в $m=81$ раз меньше массы Земли. Определить ускорение свободного падения на поверхности Луны.

Решение. Для поверхности Земли можно записать

$$mg_0 = \frac{GmM_3}{R_3^2}, \text{ или } g_0 = \frac{GM_3}{R_3^2}.$$

Очевидно, аналогичное соотношение выполняется и для поверхности Луны, т. е.

$$g_{л} = \frac{GM_{л}}{R_{л}^2}.$$

Если поделить одно уравнение на другое, то получим

$$\frac{g_0}{g_{л}} = \frac{M_3R_{л}^2}{R_3^2M_{л}}.$$

Отсюда

$$g_{\text{л}} = g_0 \left(\frac{R_3}{R_{\text{л}}} \right)^2 \bigg/ \left(\frac{M_3}{M_{\text{л}}} \right) = g_0 \frac{n^2}{m^2} = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Задача IV.19 Какой период вращения T имел бы искусственный спутник Земли, удаленный от нее на расстояние h . Радиус Земли R_3 и ускорение свободного падения на Земле g_0 считать известными.

Решение. На спутник действует сила гравитации \vec{F} , которая сообщает ему центростремительное ускорение a_n , т. е.

$$\frac{Gm_c M_3}{(R_3 + h)^2} = m_c a_n = \frac{m_c v^2}{R_3 + h}.$$

Таким образом, спутник вращается вокруг Земли со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + h}}.$$

Так как на поверхности Земли для тела массой m можно записать

$$mg_0 = \frac{GmM_3}{R_3^2},$$

то отсюда легко определить произведение $GM_3 = g_0 R_3^2$. Величины g_0 и R_3 , стоящие в правой части уравнения, мы знаем. Тогда скорость вращения спутника вокруг Земли будет иметь вид

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{R_3 + h}} = R_3 \sqrt{\frac{g_0}{R_3 + h}}$$

Период вращения спутника

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \frac{v}{R_3 + h}$$

Следовательно,

$$T = \frac{2\pi(R_3 + h)}{v} = \frac{2\pi(R_3 + h)^{3/2}}{R_3 \sqrt{g_0}}$$

Задача IV.20 Вычислить силу тяготения, действующую на материальную точку массой m , находящуюся внутри Земли на расстоянии r от центра. Радиус Земли — R_3 . Плотность Земли ρ считать постоянной (рис. IV.18).

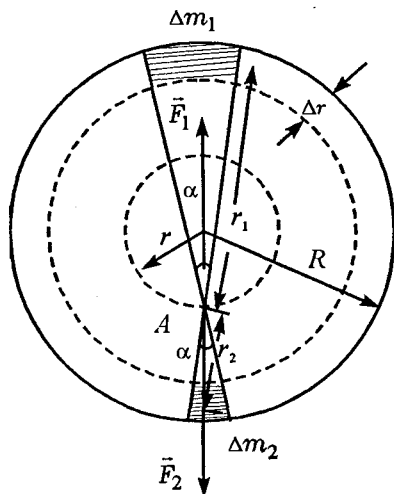


Рис. IV.18

Решение. Поместим тело массой m внутри Земли в произвольной точке A . Мысленно разобьем Землю на тонкие шаровые слои толщиной Δr ($\Delta r \ll R_3$) и рассмотрим один из них. Проведем конус с малым углом раствора через выбранную точку A (см. рис.). Конус вырежет из шарового слоя массы Δm_1 и Δm_2 . Тогда на точечное тело массой m действуют две силы притяжения со стороны Δm_1 и Δm_2 , т. е.

$$F_1 = \frac{Gm\Delta m_1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{Gm\Delta m_2}{r_2^2},$$

причем $\Delta m_1 = \rho S_1 \Delta r$ и $\Delta m_2 = \rho S_2 \Delta r$, где Δr — толщина тонкого сферического слоя, S_1 и S_2 — вырезанные конусом площадки этих слоев. Подставив выражение для Δm_i , получим

$$F_1 = \frac{Gm\rho S_1 \Delta r}{r_1^2} = Gm\rho \Delta r \alpha \quad \text{и}$$

$$F_2 = \frac{Gm\rho S_2 \Delta r}{r_2^2} = Gm\rho \Delta r \alpha,$$

где α — телесный угол, по определению равный

$$\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}. \quad \text{Таким образом,} \quad \frac{F_1}{F_2} = 1.$$

Силы притяжения со стороны масс Δm_1 и Δm_2 равны по величине и противоположны по направлению, а это значит, что результирующая сила, действующая на тело массой m , равна нулю. Так как точку A можно выбрать произвольным обра-

зом, то очевидно, что результирующая сила притяжения, действующая со стороны всего внешнего слоя толщиной Δr , равна нулю. Поэтому на материальную точку, помещенную на некотором расстоянии r от центра, внутри Земли действует только сила притяжения массы Земли, находящейся внутри сферы радиуса r (M_r). Таким образом,

$$\begin{aligned}
 F_{\text{пр}} &= \frac{GM_r m}{r^2} = \frac{G\rho V_r m}{r^2} = \frac{G\rho \frac{4}{3}\pi r^3 m}{r^2} = \frac{GM_3 \frac{4}{3}\pi r m}{V_3} = \\
 &= \frac{GM_3 \frac{4}{3}\pi r m}{\frac{4}{3}\pi R_3^3} = \frac{GM_3 r m}{R_3^3} = \frac{g_0 R_3^2 r m}{R_3^3} = \frac{mg_0 r}{R_3},
 \end{aligned}$$

т. е. сила притяжения, действующая на материальную точку массой m , помещенную внутрь Земли, линейно зависит от расстояния r .

График зависимости силы гравитации от расстояния r имеет вид, показанный на рисунке IV.19.

Задача IV.21 Ракете, находящейся на поверхности Земли, сообщена вертикальная скорость $v_0 = 6$ км/с. Считая, что сопротивление воздуха отсутствует, найти максимальную высоту подъема ракеты. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

Решение. На ракету действует только сила тяжести. Для системы: ракета — Земля, она является внутренней и консервативной силой, поэтому можем применить закон сохранения механической энергии, т. е. $\Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = 0$

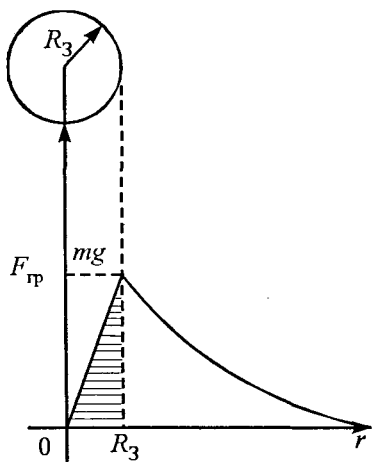


Рис. IV.19

или $-\frac{mv_0^2}{2} - (E_{к.п} - E_{п0}) = 0$ и $\frac{mv_0^2}{2} = E_{п0} - E_{к.п}$,

где $E_{к.п}$ — конечная потенциальная энергия ракеты на высоте максимального подъема H , а $E_{п0}$ — начальная потенциальная энергия ракеты на поверхности Земли. Воспользовавшись формулой (1), пIV.3, запишем

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgR_0^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right), \text{ откуда}$$

$$H = \frac{v_0^2 R_0}{2gR_0 - v_0^2} = \frac{(6 \cdot 10^3 \text{ м/с})^2 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{2 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м} - (6 \cdot 10^3 \text{ м/с})^2} = 2500 \text{ км.}$$

Следует отметить, что в этой задаче нельзя пользоваться формулой для максимальной высоты

подъема, полученной из кинематики, $H = \frac{v_0^2}{2g}$,

так как на больших расстояниях от поверхности Земли, сравнимых с ее радиусом, сила тяжести и ускорение g не являются постоянной величиной, а изменяются с высотой. Действительно,

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 1800 \text{ км (а не 2500 км!).}$$

Задача IV.22 Какую работу нужно совершить, чтобы запустить спутник массой m по круговой орбите на высоту $H = 3200$ км?

Решение. Тело, находящееся в гравитационном поле Земли, обладает потенциальной энергией, которую можно отсчитывать либо от центра Земли, либо от какого-нибудь другого уровня (пIV.3). В математическом отношении наиболее удобно за начальный уровень отсчета взять $r_0 \rightarrow \infty$ (расстояние r отсчитывается от центра Земли). Тогда выражение для потенциальной энергии оказывается наиболее простым — это формула (2) пIV.3

$$E_n = -\frac{GM_3 m}{r}.$$

На высоте H спутник должен обладать не только потенциальной энергией, но еще и кинетической, поскольку на орбите он вращается с пер-

вой космической скоростью $v_k = R_3 \sqrt{\frac{g_0}{R_3 + H}}$. По-

этому, чтобы запустить спутник по круговой орбите, нужно совершить работу

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 = \Delta E_{\text{п}} + \Delta E_{\text{к}} = \\
&= -\frac{GM_3 m}{R_3 + H} - \left(-\frac{GM_3 m}{R_3} \right) + \frac{mv_{\text{к}}^2}{2} - 0 = \\
&= GM_3 m \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3 + H} \right) + \frac{m}{2} R_3^2 \frac{g_0}{R_3 + H} = \\
&= \frac{mgR_3^2 g_0}{2(R_3 + H)} + \frac{mR_3^2 g_0}{2(R_3 + H)} = \frac{mg_0 R_3^2}{R_3 + H}.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались известным соотношением

$$g_0 = \frac{GM_3}{R_3^2} \quad (\text{пIV.2}).$$

Задача IV.23 По оси вращения земного шара пробурована шахта и в нее падает тело. Определить максимальную скорость тела (сопротивление воздуха не учитывать).

Решение. Для тела массой m , падающего в шахту, ускорение a зависит от расстояния от центра

Земли r : $a = \frac{F}{m} = \frac{mg_0}{m} \frac{r}{R_3} = g_0 \frac{r}{R_3}$ (см. зада-

чу IV.20). Из этой формулы видно, что ускорение максимально при $r = R_3$ и обращается в нуль в центре Земли ($r = 0$). Это означает, что скорость падающего тела максимальна именно при $r = 0$. После того как тело пролетит через центр Земли, его ускорение поменяет знак (будет направ-

лено противоположно скорости) и скорость начнет уменьшаться.

Для определения максимальной скорости нужно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$E_{\text{п}(r=0)} + E_{\text{к}(r=0)} = E_{\text{п}(r=R_3)} + E_{\text{к}(r=R_3)}.$$

Выбирая центр Земли за начальный уровень отсчета потенциальной энергии тела на поверхности Земли, можно записать:

$$E_{\text{к}(r=0)} = E_{\text{п}(r=R_3)}, \text{ или } E_{\text{п}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}.$$

С другой стороны, потенциальная энергия тела на поверхности Земли равна работе, которую необходимо затратить при медленном переносе тела из центра Земли на ее поверхность. Но так как сила гравитации не остается постоянной, а меняется по линейному закону, то работу проще определить из рис. IV.19. Она численно равна площади заштрихованного треугольника, т.е.

$$E_{\text{п}} = \frac{mg_0R_3}{2} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}. \text{ Следовательно,}$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{g_0R_3}.$$

V. СТАТИКА

§ 1. Статика твердых тел

Статика твердых тел — раздел механики, изучает условия равновесия твердых протяженных тел.

пV.1 Абсолютно твердое тело — это тело, в котором расстояние между любыми двумя точками остается неизменным при любых условиях. В абсолютно твердом теле можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия, при этом результат действия силы никак не изменяется.

пV.2 Момент силы относительно какой-либо оси — это произведение силы F на кратчайшее расстояние от точки закрепления тела до линии действия силы. Это расстояние называется плечом и обозначается l . Момент силы равен

$$M = Fl.$$

пV.3 Тело, закрепленное на оси, находится в равновесии, если сумма моментов всех действующих на тело сил с учетом их знака равна нулю. Для равновесия любого твердого тела необходимо, чтобы сумма всех действующих на тело внешних сил была равна нулю и сумма моментов всех внешних сил относительно любой оси была также равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_i = 0.$$

пV.4 Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется центром тяжести тела. Координаты центра тяжести определяются

$$X_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad Y_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad Z_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

При решении задач на статику мы также будем пользоваться некоторой последовательностью действий (алгоритмом).

1. Прежде всего нарисуем рисунок, отражающий условие задачи (он позволяет лучше представить это условие), и стрелочками обозначим все силы, действующие на тело. В этом разделе силы, как правило, приложены к разным точкам тела.

2. Запишем условия равновесия тела

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (2)$$

Для решения некоторых задач достаточно бывает только условия (1). Это условие справедливо и для любых выбранных вами осей координат. Если же его не хватает, то используем условие (2). Так как условие (2) справедливо для любой оси вращения, то выбирать ее нужно так, чтобы облегчить решение задачи. Лучше всего поместить ось в точку приложения неизвестных сил (или на линии их действия), тогда момент этих сил обращается в нуль.

3. Когда число уравнений будет равно числу неизвестных в задаче величин, тогда можно приступить к алгебраическому их решению. Ответ получаем в буквенном виде и только после этого в полученные формулы подставляем числовые значения заданных величин.

В, поскольку в этом случае сумма моментов не может быть равной нулю (оба момента будут иметь одинаковый знак $\sum M_i \neq 0$). Поэтому точка приложения результирующей силы F может лежать либо слева от точки A , либо справа от точки B .

Будем отсчитывать расстояние x от точки A вправо, тогда условие для моментов сил запишется

$$F_1 \sin \alpha \cdot x - F_2 \sin \alpha \cdot (x - d) = 0, \text{ или}$$

$$x = \frac{F_2 d}{F_2 - F_1} = 2,5 \text{ м.}$$

Если бы точка приложения силы F лежала слева от точки A , то числовое значение x было бы отрицательным.

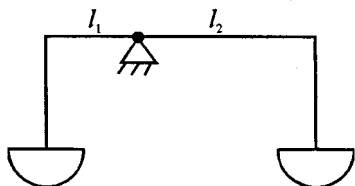


Рис. V.6

Задача V.6 При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чаше получился равным P_1 , а на другой — P_2 . Определить истинный вес тела P (рис. V.6).

Решение. Запишем условие равенства моментов для двух взвешиваний

$$P l_1 = P l_2; P l_1 = P_2 l_2,$$

где P — истинный вес тела. Тогда, поделив эти соотношения друг на друга, получим

Как зависит сила натяжения веревки \vec{T} от угла α ? При каких условиях сила натяжения на участках AB и AC будет больше, чем на участке AD ?

Решение. Так как точка A находится в равновесии, то для нее второй закон Ньютона будет иметь вид

$$\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0.$$

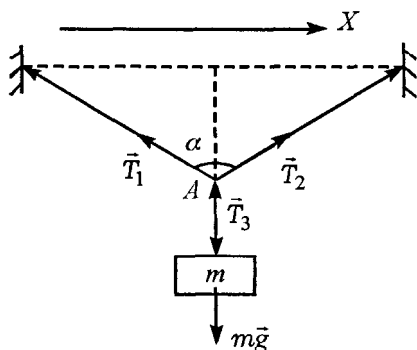
В проекции на ось OX это соотношение запишется

$$F - 2T \cos \frac{\alpha}{2} = 0, \text{ или } T = \frac{F}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

С увеличением угла α натяжение нити T увеличивается. При $\cos \alpha < \frac{1}{2}$ (угол $\frac{\alpha}{2} > 60^\circ$, а угол $\alpha > 120^\circ$) сила натяжения T будет больше силы F .

Задача V.3 Фонарь массой $m = 20$ кг подвешен

на двух одинаковых тросах, угол между которыми $\alpha = 120^\circ$. Определить натяжение тросов (рис. V.3).



Решение. Так как фонарь находится в равновесии, то $mg - T_3 = 0$, или $T_3 = mg$. Для равновесия фонаря необходимо, чтобы сумма всех сил, действующих на

Рис. V.3

точку A в горизонтальном и вертикальном направлениях была, равна нулю, т. е.

$$T_2 \sin \frac{\alpha}{2} - T_1 \sin \frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$T_1 \cos \frac{\alpha}{2} + T_2 \cos \frac{\alpha}{2} - T_3 = 0.$$

Первое равенство означает, что натяжение тросов должно быть одинаковым, т. е. $T_1 = T_2 = T$.

Второе равенство позволяет определить это натяжение:

$$2T \cos \frac{\alpha}{2} = T_3 = mg, \text{ следовательно}$$

$$T = \frac{mg}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{20 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{2 \cos 60^\circ} = 196 \text{ Н.}$$

Посмотрев внимательно на полученное соотношение, можно увидеть, что натянуть трос так, чтобы он не провисал, нельзя никогда! Так как в этом случае $\cos \frac{\alpha}{2} \rightarrow 0$, а натяжение тросов T должно быть бесконечным.

Задача V.4 Система, состоящая из неподвижного и подвижного невесомых блоков, находится в равновесии (рис. V.4). При каком соотношении масс это равновесие выполняется? Нарушится ли равновесие, если точку закрепления веревки A сместить вправо?

Решение. Так как система находится в равновесии, то сила натяжения нити \vec{T} , действующая

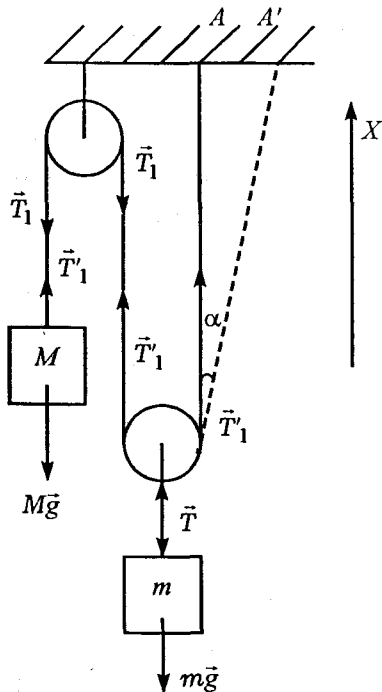


Рис. V.4

щая на массу m , равна $m\vec{g}$ ($T - mg = 0$). Запишем второй закон Ньютона для невесомого подвижного блока в проекции на ось OX

$$2T_1 - T = 0. \text{ Следовательно, } T_1 = \frac{T}{2} = \frac{mg}{2}.$$

Для тела массой M второй закон Ньютона имеет вид

$$T_1 - Mg = 0, \text{ или}$$

$$T_1 = Mg = \frac{mg}{2}.$$

Отсюда $M = \frac{m}{2}$, т.е.

равновесие возможно, когда масса левого груза в 2 раза меньше массы правого груза. При перенесении веревки вправо от точки закрепления A равновесие нарушится, так как теперь по вертикали второй закон Ньютона для подвижного блока запишется

$$T_1 + T_1 \cos \alpha - T < 0, \text{ или } T_1 + T_1 \cos \alpha < T = mg.$$

Таким образом, правый груз, укрепленный на подвижном блоке, опустится вниз.

Задача V.5 На стержень действуют две параллельные силы $F_1 = 10\text{ Н}$ и $F_2 = 25\text{ Н}$, направленные

ные в противоположные стороны под углом α к горизонту (рис. V.5). Определить точку приложения и величину силы \vec{F} , уравновешивающей \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , если точки приложения сил F_1 и F_2 расположены друг от друга на расстоянии $d=1,5$ м.

Решение. Для равновесия стержня необходимо, чтобы:

1) сумма всех действующих на стержень сил была равна нулю,

2) сумма всех моментов сил относительно оси, проходящей че-

рез любую неподвижную точку, также была равна нулю.

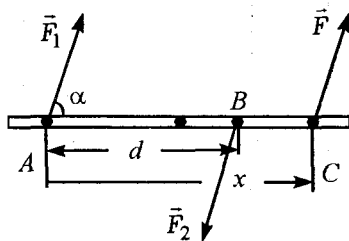


Рис. V.5

Из первого требования следует $\vec{F}_1 + \vec{F} + \vec{F}_2 = 0$. Выбрав положительное направление, совпадающее с направлением силы \vec{F}_1 , получим

$F_1 + F - F_2 = 0$. Следовательно, $F = F_2 - F_1 = 15$ Н.

Сила $F > 0$, это означает, что результирующая сила \vec{F} сонаправлена с силой \vec{F}_1 . Далее определим точку приложения результирующей силы \vec{F} . Удобнее всего это сделать, если записать второе требование относительно оси, проходящей именно через точку приложения результирующей силы. В этом случае ее момент относительно этой точки равен нулю, а моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 должны уравновешивать друг друга. Точка приложения силы \vec{F} не может находиться между точками A и

В, поскольку в этом случае сумма моментов не может быть равной нулю (оба момента будут иметь одинаковый знак $\sum M_i \neq 0$). Поэтому точка приложения результирующей силы F может лежать либо слева от точки A , либо справа от точки B .

Будем отсчитывать расстояние x от точки A вправо, тогда условие для моментов сил запишется

$$F_1 \sin \alpha \cdot x - F_2 \sin \alpha \cdot (x - d) = 0, \text{ или}$$

$$x = \frac{F_2 d}{F_2 - F_1} = 2,5 \text{ м.}$$

Если бы точка приложения силы F лежала слева от точки A , то числовое значение x было бы отрицательным.

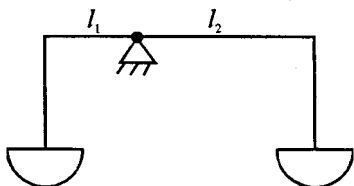


Рис. V.6

Задача V.6 При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чаше получился равным P_1 , а на другой — P_2 . Определить истинный вес тела P (рис. V.6).

Решение. Запишем условие равенства моментов для двух взвешиваний

$$P l_1 = P l_2; P l_1 = P_2 l_2,$$

где P — истинный вес тела. Тогда, поделив эти соотношения друг на друга, получим

$$\frac{P_1}{P} = \frac{P}{P_2}, \text{ или } P = \sqrt{P_1 P_2}.$$

Задача V.7 На правой чаше больших равноплечих рычажных весов стоит человек массой m , который уравновешен грузом, положенным на другую чашу. К середине правого плеча весов в точке C привязана веревка (рис. V.7). Нарушится ли равновесие, если человек, стоящий на чаше весов, начнет тянуть за веревку с силой \vec{F} под углом α к вертикали? Длина коромысла весов $2l$.

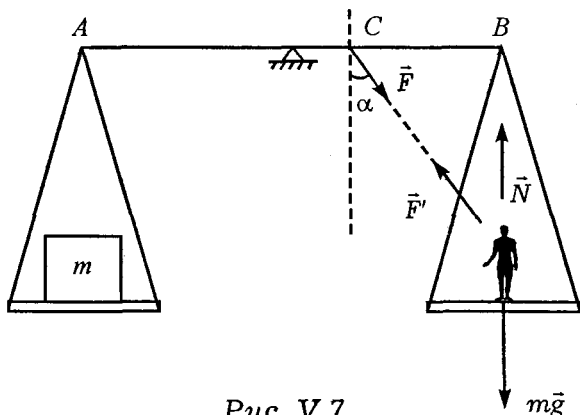


Рис. V.7

Решение. На точку B коромысла весов действует вес тела P , приложенный к правой чаше весов. Он равен по величине силе реакции опоры N , но направлен в противоположную сторону. Когда человек стоит спокойно на чаше, то $P = N = mg$, когда же человек тянет за веревку, то $P = N = mg - F \cos \alpha$ (см. рис.). Поэтому мо-

мент силы, созданный весом тела, в первом случае будет равен $M_1 = mgl$, а во втором случае $M_2 = (mg - F \cos \alpha)l$. Кроме того, сила \vec{F} , приложенная в точке С, также создает свой момент

$$M_3 = F \cos \alpha \cdot \frac{l}{2}.$$

Таким образом, когда человек стоит спокойно (не тянет веревку), на правую часть коромысла АВ действует момент силы $M_1 = mgl$, уравновешенный моментом сил, действующих на левую часть коромысла. Когда же человек тянет за веревку с силой \vec{F} , на правую часть коромысла действует момент сил равный

$$M = M_2 + M_3 = (mg - F \cos \alpha)l + F \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} = mgl - \frac{Fl \cos \alpha}{2}.$$

Этот момент сил меньше момента силы тяжести (M_1) груза m , т. е.

$$mgl > mgl - \frac{Fl}{2} \cos \alpha,$$

поэтому равновесие нарушится, левая чаша весов перетянет.

Задача V.8 С помощью показанной на рис. V.8 системы невесомых блоков хотят поднять бревно длиной l и массой M . Какую силу \vec{F} нужно приложить к концу каната А? Как нужно прикрепить концы каната В и С, чтобы бревно при подъеме было горизонтально? Нити невесомы.

Решение. Так как нить невесома, то натяжение каната T , привязанного к точке C , равно силе F . На бревно действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$ и силы натяжения \vec{T}_1 и \vec{T} (см. рис.). Для того чтобы бревно находилось в равновесии,

$$\vec{T}_1 + \vec{T} + M\vec{g} = 0.$$

Записав этот закон в проекции на вертикальное направление, получим

$$T_1 + T - Mg = 0. \quad (1)$$

Силу натяжения \vec{T} можно определить из второго закона Ньютона, записанного для правого блока. Действительно,

$$T_1 - F - T = 0, \quad (2)$$

или $T_1 = F + T = 2F$. Подставив значение силы T_1 в уравнение (1), получим

$$2F + F - Mg = 0, \text{ или } 3F = Mg.$$

Таким образом $F = \frac{Mg}{3}$. Следовательно, для подъема

бревна нужно в такой системе приложить силу \vec{F} в 3 раза меньшую, чем его сила тяжести. Для равновесия бревна еще необходимо, чтобы сумма моментов относительно какой-либо оси вращения была равна нулю. Выберем ось, проходящую через центр тяжести бревна. В этом случае

$$T_1 l_1 - T l_2 = 0,$$

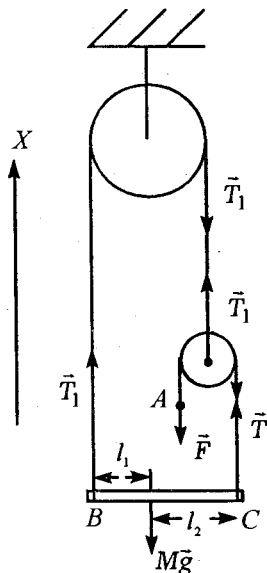


Рис. V.8

где l_1 и l_2 — расстояния точек B и C соответственно от центра тяжести бревна, тогда

$$\frac{T_1}{T} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{2F}{F} = 2.$$

Если расстояние между точками B и C равно l , то $l_1 + l_2 = l$, а $\frac{l_2}{l_1} = 2$.

Решая эту систему, получим

$$l_1 = \frac{l}{3}; \quad l_2 = \frac{2l}{3}.$$

При этом условии точка приложения результирующей сил натяжения $T_1 = 2F$ и $T = F$ совпадает с центром тяжести и бревно будет подниматься, оставаясь горизонтальным.

Задача V.9 Две тонкие и однородные палочки массой M и m образуют систему, изображенную на рис. V.9. Палочки могут вращаться вокруг осей, проходящих через точки A и B . Верхние концы палочек лежат один на другом под прямым углом. При каком минимальном значении коэффициента трения между палочками правая палочка не упадет? Угол α задан.

Решение. Силы, действующие на верхние концы палочек, изображены на рис. V.9: \vec{f} — силы трения, \vec{N} — силы реакции опоры со стороны каждой палочки. На нижние концы палочек в точках A и B действуют силы со стороны шарниров, однако их направление нам пока неизвестно. Имен-

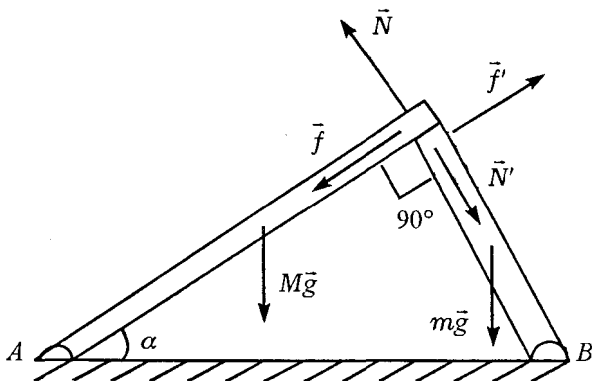


Рис. V.9

но поэтому удобно оси вращения для моментов сил выбрать в точках A и B , проходящих через нижние концы палочек. Тогда уравнения моментов для обеих палочек запишется

$$Mg \frac{l_1}{2} \cos \alpha - Nl_1 = 0, \text{ или } N = \frac{Mg}{2} \cos \alpha;$$

$$mg \frac{l_2}{2} \sin \alpha = fl_2, \text{ или } f = \frac{mg}{2} \sin \alpha,$$

где l_1 и l_2 — длины левой и правой палочки соответственно.

Так как палочки покоятся, то сила трения f — сила трения покоя, поэтому $f \leq \mu N$. Минимальное значение коэффициента трения μ , при котором палочки находятся в равновесии, равен

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{m}{M} \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача V.10 На земле лежат вплотную два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения между ними они раскатятся (рис. V.10)? (По земле бревна не скользят.)

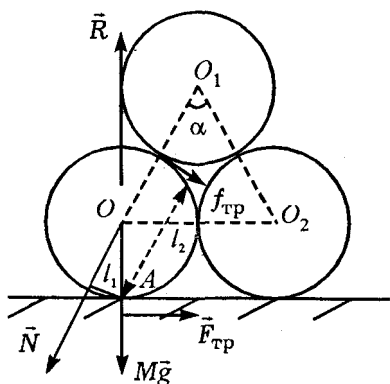


Рис. V.10

Решение. Рассмотрим левое нижнее бревно. На каждое бревно действуют пять сил: сила тяжести $M\vec{g}$, сила давления \vec{N} , сила реакции опоры со стороны Земли \vec{R} , сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ со стороны верхнего бревна и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны

Земли. Полагаем, что нижние бревна лежат вплотную, но не касаются. Второй закон Ньютона для каждого бревна имеет вид

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{f}_{\text{тр}} = 0.$$

Запишем условие для моментов сил относительно оси вращения, проходящей через точку A. Тогда момент силы тяжести $M\vec{g}$, момент силы \vec{R} и момент силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ обратятся в нуль, поэтому условие для моментов запишется

$$Nl_1 - f_{\text{тр}}l_2 = 0,$$

где l_1 и l_2 плечи соответствующих сил (см. рис.), причем

$$l_1 = R \sin \frac{\alpha}{2}; \quad l_2 = R + R \cos \alpha,$$

где $\alpha = 60^\circ$ – угол при вершине равностороннего треугольника O_1OO_2 . Таким образом,

$$\frac{f_{\text{тр}}}{N} = \frac{l_1}{l_2}, \quad \text{или}$$

$$\frac{\mu N}{N} \geq \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{R(1 + \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Задача V.11 Однородная балка массой M и длиной l подвешена на концах двух пружин жесткостью k_1 и k_2 соответственно. Обе пружины в ненагруженном состоянии имеют одинаковую длину. На каком расстоянии x от левого конца балки надо подвесить груз массой m , чтобы балка приняла горизонтальное положение (рис. V.11)?

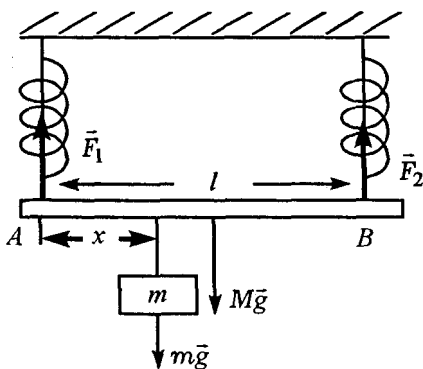


Рис. V.11

Решение. Для того чтобы балка находилась в горизонтальном положении, удлинения обеих пружин должны быть одинаковыми, т. е. $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$. На балку действуют четыре силы, указанные на рисунке: силы тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$ и силы натяжения пружин \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Поскольку все силы действуют по вертикали, запишем первое условие равновесия для балки вдоль вертикального направления

$$mg + Mg - F_1 - F_2 = 0, \text{ или}$$

$$mg + Mg = (k_1 + k_2)\Delta x.$$

Отсюда $\Delta x = \frac{(m + M)g}{k_1 + k_2}$. Таким образом,

$$F_1 = \frac{k_1(m + M)g}{k_1 + k_2}, \quad F_2 = \frac{k_2(m + M)g}{k_1 + k_2}.$$

Для определения расстояния x запишем момент сил относительно оси, проходящей через точку закрепления левой пружины A (второе условие равновесия балки),

$$mgx + Mg\frac{l}{2} - F_2l = 0.$$

Из этого соотношения следует

$$x = \frac{F_2l - Mg\frac{l}{2}}{mg} = \frac{k_2(m + M)gl}{mg(k_1 + k_2)} - \frac{Mgl}{2mg} = \frac{l}{m} \left(\frac{k_2(m + M)}{k_1 + k_2} - \frac{M}{2} \right).$$

Задача V.12 Две невесомые пружины с коэффициентом жесткости k_1 и k_2 соединяют один раз

последовательно, другой раз параллельно (рис. V.12). Какой должна быть жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?

Решение. При последовательном соединении пружин растягивающие их силы одинаковы и равны силе \vec{F} , с которой растягивают систему пружин (в нашей задаче $\vec{F} = m\vec{g}$).

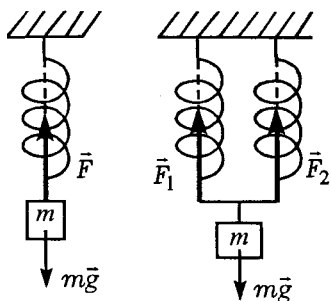


Рис. V.12

Общее удлинение системы равно сумме удлинений каждой пружины, т. е.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2. \quad (1)$$

Поскольку по закону Гука $\Delta x = \frac{F}{k}$, то $\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}$,

$\Delta x_2 = \frac{F}{k_2}$. Подставляя соответствующие выражения для Δx в формулу (1), получим

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \text{ откуда } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

При параллельном соединении у обеих пружин одинаковые удлинения, т. е. $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$, а растягивающая их сила F должна равняться сумме двух сил натяжения пружин, т. е. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Вновь воспользовавшись законом Гука для каждой из пружин, получим

$$k\Delta x = k_1\Delta x + k_2\Delta x, \text{ или } k = k_1 + k_2.$$

Задача V.13 Однородная лестница опирается на абсолютно гладкие пол и стену (рис. V.13). Каким должно быть натяжение веревки \vec{T} , привязанной к середине лестницы, чтобы удержать ее от падения?

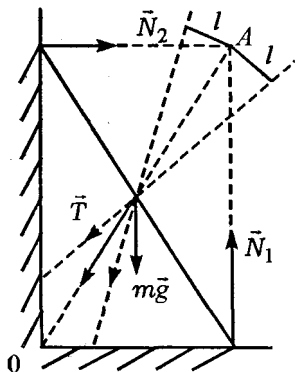


Рис. V.13

Решение. На лестницу действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры \vec{N}_1 и \vec{N}_2 и сила натяжения \vec{T} (см. рис.). Если ось вращения провести через точку A, то задача очень упростится, поскольку три силы (\vec{T} , \vec{N}_1 и \vec{N}_2) будут проходить через ось и их моменты относительно этой оси равны нулю. Останется только

один момент силы тяжести $m\vec{g}$, который ничем не компенсируется, поэтому лестница обязательно упадет, какой бы по величине ни была сила \vec{T} .

Эта задача наглядно показывает, как важно правильно выбрать ось вращения для того, чтобы облегчить решение задачи.

Если силу \vec{T} направить не в точку 0, а правее линии 0A, то лестница обязательно упадет, так как момент силы \vec{T} будет направлен в ту же сторону, что и момент силы тяжести $m\vec{g}$. Если же

силу \vec{T} направить левее линии OA , то момент силы \vec{T} направлен в сторону, противоположную моменту силы тяжести. В этом случае лестницу можно удержать от падения.

Задача V.14 Тяжелый однородный стержень массой M упирается одним концом в угол между стеной и полом под углом α к горизонту. К другому концу привязан канат под углом $\beta = 90^\circ$ (рис. V.14). Определить силу натяжения каната и направление силы реакции опоры со стороны стенки и пола.

Решение. На стержень действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и реакция опоры со стороны стены и пола \vec{N} , приложенная к стержню в точке O . Так как ни направление, ни величина силы \vec{N} не известны, то за ось вращения удобно выбрать ось, проходящую через точку O и перпендикулярную плоскости чертежа. В этом случае условие равновесия для моментов сил запишется

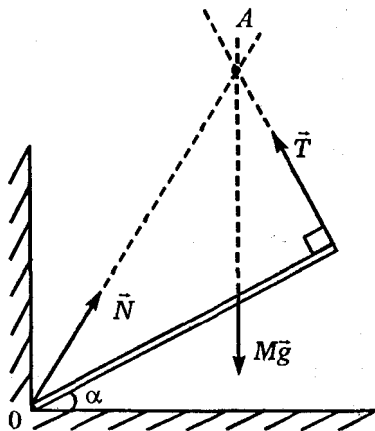


Рис. V.14

$$Mg \frac{l}{2} \cos \alpha - lT = 0, \text{ или } T = \frac{Mg}{2} \cos \alpha.$$

С увеличением угла α натяжение нити уменьшается. Для определения направления силы реакции \vec{N} вспомним важное положение: если момент сил относительно какой-нибудь оси равен нулю, то это справедливо и для любой другой оси. Поэтому выберем ось, проходящую через точку пересечения линии действия силы тяжести $M\vec{g}$ и натяжения нити \vec{T} (точка A на рисунке). Сила реакции опоры \vec{N} обязательно должна проходить через эту точку, так как только в этом случае сумма моментов всех действующих сил будет равна нулю. (В этом случае плечи всех действующих сил обращаются в нуль.)

Задача V.15 К совершенно гладкой вертикальной стенке приставлена однородная лестница массой M , образующая с горизонтальной опорой угол α (рис. V.15). Определить силы, действующие на лестницу со стороны стенки и опоры. Построением определить направление силы, действующей на лестницу со стороны опоры.

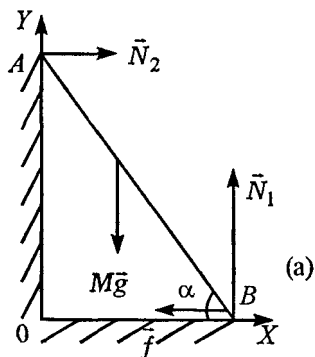


Рис. V.15

Решение. На лестницу действуют четыре силы: силы реакции опоры \vec{N}_1 и \vec{N}_2 , сила тяжести $M\vec{g}$ и сила трения покоя \vec{f} (она направлена в сторону, противоположную возможному движению). Первое условие равновесия для лестницы имеет вид

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + M\vec{g} + \vec{f} = 0.$$

В проекциях на оси OX и OY это уравнение запишется соответственно

$$N_2 - f = 0, \text{ или } N_2 = f;$$

$$N_1 - Mg = 0, \text{ или } N_1 = Mg.$$

Второе условие равновесия для моментов сил удобно записать относительно оси, проходящей через точку B , т.е.

$$N_2 l \sin \alpha - Mg \frac{l}{2} \cos \alpha = 0, \text{ или } N_2 = \frac{Mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Со стороны опоры на лестницу действуют две силы: сила реакции опоры \vec{N}_1 и сила трения покоя \vec{f} . Величину результирующей этих сил легко определить по теореме Пифагора

$$Q = \sqrt{f^2 + N_1^2} = \sqrt{\left(\frac{Mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2 + (Mg)^2} = \frac{Mg}{2} \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Определим направление ее. Для этого ось вращения проведем через точку пересечения линий действия сил \vec{N}_2 и $M\vec{g}$ (рис. V.15, б) — точку C .

Для равновесия лестницы сумма моментов сил должна равняться нулю относительно любой выбранной оси. Ось, проходящая через точку C , удобна тем, что моменты сил \vec{N}_2 и $M\vec{g}$ относительно этой оси равны нулю, следовательно, и резуль-

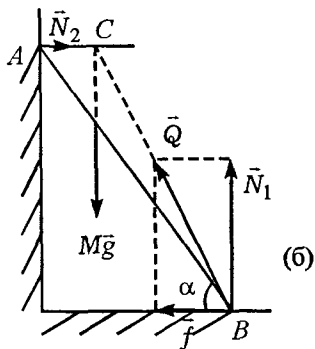


Рис. V.15

тирующая сила \bar{Q} должна быть направлена так, чтобы ее продолжение пересекало точку C .

Задача V.16 Определить положение центра масс однородного диска радиусом R , из которого вырезано отверстие радиусом r (рис. V.16), причем центр выреза находится от центра диска на расстоянии $R/2$.

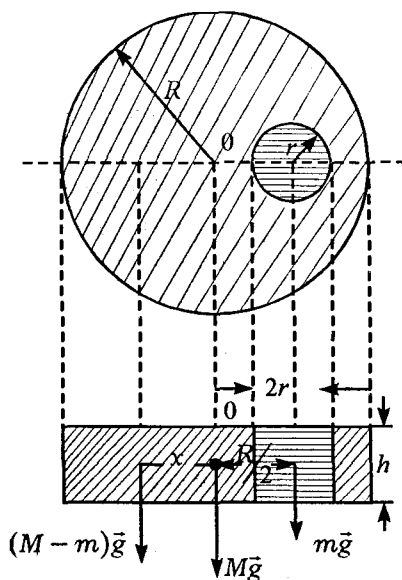


Рис. V.16

Решение. Силу тяжести сплошного диска можно представить как равнодействующую двух сил: силы тяжести $m\bar{g}$ маленькой части радиусом r и силы тяжести оставшейся части $(M-m)\bar{g}$, каждая из которых приложена в центре масс соответствующей фигуры. Поместив ось вращения в центре масс сплошного диска (в точке O), запишем условие равновесия для моментов сил

$$(M-m)gx = mg \frac{R}{2}, \text{ или } x = \frac{mg \frac{R}{2}}{(M-m)g},$$

где $m = \rho h \pi r^2$, $M = \rho h \pi R^2$, ρ — плотность материала диска, h — его высота. Тогда

$$x = \frac{r^2 R \pi \rho h}{2 \pi \rho h (R^2 - r^2)} = \frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}.$$

Замена вырезанных частей какой-либо фигуры точно такими же частями, но из материала фигуры позволяет легко решить серию аналогичных задач с вырезанными частями куба, шара, цилиндра и других фигур.

Задача V.17 Пять шариков, масса которых соответственно равна m , $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, расположены на столе вдоль одной прямой. Расстояние между двумя соседними шариками a . Определить центр тяжести системы (рис. V.17).

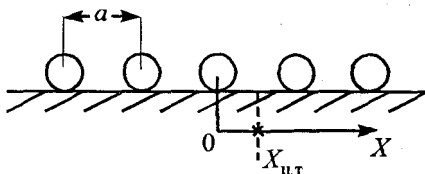


Рис. V.17

Решение. Выберем ось OX вдоль прямой, по которой расположены шарики. Начало отсчета этой прямой можно выбрать где угодно, например связать с положением третьего шарика (см. рис.). Координата центра тяжести системы определяется формулой (см. пV.4)

$$X_{ц.т.} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \text{ или}$$

$$X_{ц.т} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} =$$

$$= \frac{m(-2a) + 2m(-a) + 3m \cdot 0 + 4ma + 5m \cdot 2a}{15m} = \frac{10ma}{15m} = \frac{2}{3}a.$$

Таким образом, центр тяжести системы находится на расстоянии $x = \frac{2a}{3}$ справа от начала координат (от точки 0).

§ 2. Статика жидкостей и газов

Статика жидкостей и газов изучает условия равновесия жидкостей и газов.

пV.5 Давлением газа (жидкости) называется скалярная величина, измеряемая силой, действующей на единицу поверхности в направлении нормали, т. е. $p = \frac{F}{S}$.

пV.6 Закон Паскаля: на одном и том же уровне давление на маленькую площадку, помещенную в жидкость, не зависит от ориентации площадки.

пV.7 Давление зависит от глубины погружения в жидкость. Разность давлений Δp в двух точках внутри жидкости равно силе тяжести вертикального столба жидкости с площадью сечения, равной единице, и высотой, равной глубине погружения Δh , т. е.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g \Delta h.$$

Давление жидкости, обусловленное только ее

силой тяжести, называется гидростатическим ($p_{\text{гидр}}$).

Давление жидкости на некоторой глубине h , отсчитываемой от поверхности раздела воздух — жидкость, равно:

$$p = p_0 + \rho gh = p_0 + p_{\text{гидр}},$$

где p_0 — атмосферное давление. Давление в системе СИ измеряется в паскалях — Па:

$$1\text{Па} = \frac{1\text{Н}}{1\text{м}^2} = 1\text{кг/мс}^2.$$

В обыденной жизни давление измеряют в миллиметрах ртутного столба. В этом случае

$$p_{\text{мм рт.ст.}} = p_0 \text{ мм рт.ст.} + h_{\text{мм рт.ст.}}$$

$$1\text{ мм рт.ст.} = 131,58\text{Па}.$$

Часто давление измеряют в *технических атмосферах*. Техническая атмосфера — это давление, производимое силой в $1\text{ кгс} = 9,8\text{Н}$ на площадку в 1 см^2 , т. е.

$$1\text{ ат} = 1\text{ кгс/см}^2 = \frac{1\text{ кг} \cdot 9,8\text{ м/с}^2}{10^{-4}\text{ м}^2} = 98070\text{ Па} \approx 10^5\text{ Па}.$$

пV.8 Закон Архимеда: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом:

$$F_A = \rho Vg,$$

где ρ — плотность жидкости, V — ее объем.

пV.9 Итальянский физик Торричелли показал, что в стеклянной трубке, заполненной ртутью и опущенной в чашу со ртутью открытым концом, остается часть ртути высотой $h=760\text{ мм}$. Это оз-

начает, что давление этого столбика ртути уравновешивается атмосферным давлением p_0 у поверхности чаши, т. е.

$$p_0 = \rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}}.$$

Это давление измеряется либо в миллиметрах ртутного столба, тогда $p_0 = h$ мм рт.ст., либо в паскалях,

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,76 \text{ м} = \\ &= 10,3 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Это давление называется физической атмосферой. Если вместо чаши и трубки со ртутью взять чашу и трубку с водой, то столб воды в трубке, уравновешивающий атмосферное давление, должен быть равен

$$p_0 = \rho_{\text{рт}} h_{\text{рт}} g = \rho_{\text{в}} h_{\text{в}} g, \text{ или } h_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{рт}} h_{\text{рт}}}{\rho_{\text{в}}} = 10,33 \text{ м}.$$

Задача V.18 В двух цилиндрических сообщающихся сосудах налита ртуть. Сечение одного из сосудов вдвое больше другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На какую высоту h поднимается при этом уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был на расстоянии l от верхнего края широкого сосуда. Плотность ртути ρ , воды ρ_0 (рис. V.18).

Решение. За счет давления налитой в правый сосуд воды ртуть в этом сосуде опустится на высоту x , а в левом — поднимется на высоту h . При этом в силу несжимаемости жидкости вытеснен-

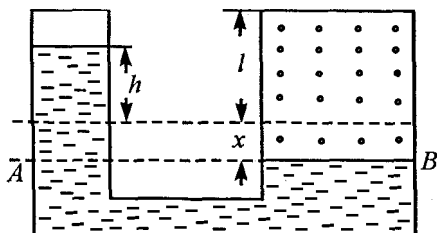


Рис. V.18

ные объемы будут одинаковыми, т. е. $S_1 x = S_2 h$,

или $h = \frac{S_1 x}{S_2}$, где S_1 и S_2 — площади поперечного

сечения правого и левого сосудов соответственно.

Смещение x определяется из равенства давлений жидкостей в правом и левом колене на уровне AB

$\rho_0 g(l + x) = \rho g(x + h)$, или $\rho_0(l + x) = \rho(x + 2x)$,
отсюда

$$x = \frac{\rho_0 l}{3\rho - \rho_0}.$$

Высота h , на которую поднимается ртуть в левом колене, равна:

$$h = 2x = \frac{2\rho l}{3\rho - \rho_0}.$$

Задача V.19 При подъеме груза массой M с помощью гидравлического пресса была затрачена работа A (только на перемещение малого поршня). При

этом малый поршень сделал n ходов, перемещаясь за один ход на расстояние h . Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого?

Решение. Гидравлический пресс представляет собой два сообщающихся сосуда различного диаметра, заполненных жидкостью и закрытых поршнями. Если к малому поршню площадью S_1 приложить силу F_1 , то для сохранения равновесия к большому поршню площадью S_2 необходимо приложить силу F_2 , при этом должно выполняться соотношение

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \quad (1)$$

Если первый поршень переместить на расстояние Δx_1 , часть жидкости переместится из первого сосуда во второй и поднимет второй поршень на высоту Δx_2 . В силу несжимаемости жидкости объем жидкости, вытесняемый поршнем из одного сосуда, равен объему, поступающему во второй, т.е.

$$\Delta x_1 S_1 = \Delta x_2 S_2. \quad (2)$$

Используя уравнения (1) и (2), получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \quad (3)$$

Таким образом, прикладывая малую силу к малому поршню, можно на большом поршне поднимать большие грузы.

В предложенной задаче малый поршень совершает работу A и перемещается за n ходов на рас-

стояние $\Delta x_1 = nh$, чтобы поднять на большом поршне груз M . Для того чтобы ответить на вопрос задачи и определить S_2/S_1 , нужно воспользоваться соотношением (3)

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1},$$

где $F_2 = Mg$, а F_1 можно определить из работы, совершенной малым поршнем:

$$A = F_1 \Delta x_1 = F_1 nh, \text{ т. е. } F_1 = \frac{A}{nh}.$$

Таким образом,
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{Mg}{A/nh} = \frac{Mgnh}{A}.$$

Задача V.20 До какой высоты h нужно налить однородную жидкость в цилиндрический сосуд радиусом R , чтобы сила, с которой жидкость будет давить на боковую поверхность, была равна силе давления на дно сосуда?

Решение. Гидростатическое давление, обусловленное давлением только столба жидкости, изменяется с высотой от 0 до ρgh . Поэтому на отдельные участки боковой поверхности в зависимости от высоты сила давления будет разная. При расчете силы давления на боковую поверхность обычно берут среднее значение давления

$p_{\text{ср}} = \frac{\rho gh}{2}$ и умножают на площадь боковой поверхности.

Таким образом, сила давления на боковую цилиндрическую поверхность $S_{\text{бок}}$ равна

$$F_{\text{бок}} = p_{\text{ср}} S_{\text{бок}} = \frac{\rho g h}{2} 2\pi R h = \rho g \pi R h^2.$$

На дно сосуда

$$F_{\text{д}} = \pi R^2 \rho g h.$$

Из равенства этих сил следует

$$\rho g \pi R h^2 = \pi R^2 \rho g h, \text{ или } h=R.$$

Таким образом, при высоте сосуда h , равной радиусу дна сосуда, сила давления на дно и поверхность цилиндрического сосуда будут одинаковыми.

Задача V.21 Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду так, что в воде находится половина ее. Определить силу, действующую на палочку со стороны шарнира, и плотность материала ρ , из которого сделана палочка (рис. V.19).

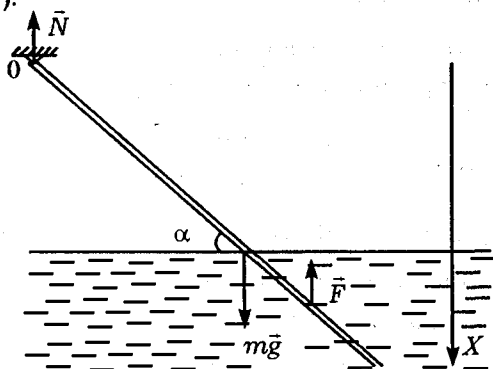


Рис. V.19

Решение. На палочку действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда \vec{F} и сила реакции со стороны шарнира \vec{N} . Направление силы \vec{N} легко получить из первого условия равновесия палочки (пV.3)

$$\sum \vec{F}_i = 0, \text{ или } m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = 0, \text{ или } \vec{N} = -(\vec{m}\vec{g} + \vec{F}).$$

В проекции на ось OX это соотношение запишется

$$N = -(mg - F). \quad (1)$$

Второе условие равновесия удобно записать для моментов сил, выбрав ось вращения, проходящую через точку O :

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha - F \frac{3}{4} l \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Это соотношение позволяет вычислить и выталкивающую силу

$$F = \frac{2}{3} mg.$$

Подставив это соотношение в формулу (1), можно определить величину и направление силы \vec{N} , действующей на палочку со стороны шарнира,

$$N = -\left(mg - \frac{2}{3} mg\right) = -\frac{mg}{3}.$$

Таким образом, сила, действующая со стороны шарнира, направлена вертикально вверх.

Плотность материала ρ легко определить из выражения для силы F , воспользовавшись законом Архимеда (пV.8)

$$F = \frac{2}{3} mg = \frac{2}{3} \rho V_n g = \rho_0 \frac{V_n}{2} g,$$

отсюда $\rho = \frac{4}{3}\rho_0$, где ρ_0 — плотность воды, $V_{\text{п}}$ — объем всей палочки.

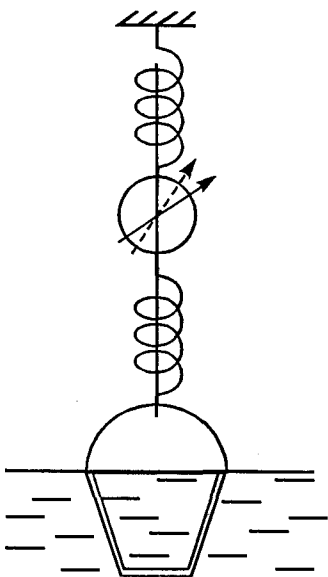


Рис. V.20

Задача V.22 На крюке динамометра висит ведро. Изменится ли показание динамометра, если ведро наполнить водой и погрузить в воду?

Решение. Показание динамометра уменьшится, так как воды, вытесненной ведром, больше, чем налитой в него (рис. V.20). Показание динамометра изменится на величину веса воды, вытесняемой стенками и дном сосуда.

Задача V.23 Алюминиевый и железный сплошные шары уравновешены на рычажных весах. Нарушится ли равновесие, если шары погрузить в воду? Рассмотреть два случая:

- 1) шары одинаковой массы (рис. V.21, а),
- 2) шары одинакового объема (рис. V.21, б).

Решение.

1) Рассмотрим первый случай. Если шары имеют одинаковую массу, то они уравновешены на равноплечих весах. Однако объемы у них разные, причем $V_{\text{Al}} > V_{\text{Fe}}$. Это значит, что при погруже-

нии шаров в воду выталкивающая сила Архимеда F_1 , действующая на алюминиевый шар, больше выталкивающей силы F_2 , действующей на железный шар. Момент силы F_1 больше момента силы F_2 относительно оси вращения, проведенной через точку 0. Поэтому равновесие шаров в воде нарушится: железный шар опустится вниз.

2) Если шары одинакового объема, то они должны быть

уравновешены на неравноплечих весах, так как массы у них разные, причем масса железа больше массы алюминия. При погружении обоих шаров в воду на них действуют одинаковые выталкивающие силы ($F_1 = F_2$). Однако момент силы F_1 больше момента силы F_2 относительно оси, проведенной через точку 0. Поэтому равновесие шаров нарушится и опять железный шар опустится вниз.

Следует отметить, что в решении не рассматривались моменты сил тяжести обоих шаров, так

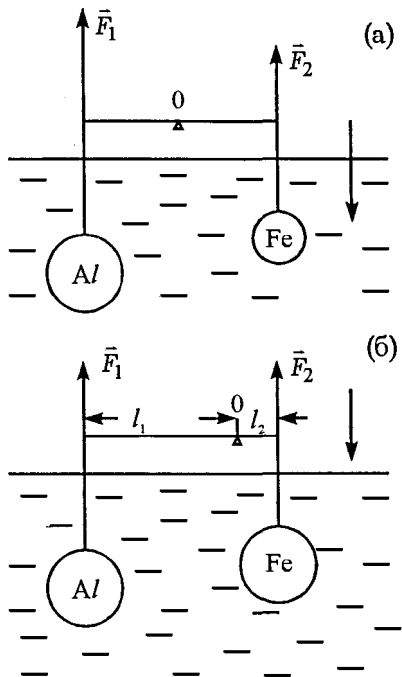


Рис. V.21

как шары были уравновешены в воздухе, а это значит, что сумма моментов сил тяжести обоих шаров всегда равна нулю.

Задача V.24 Деревянная коробочка с грузом плавает на поверхности воды, налитой в сосуд. Как изменится уровень жидкости, если груз из коробочки переложить на дно сосуда? Плотность груза больше плотности воды (рис. V.22).

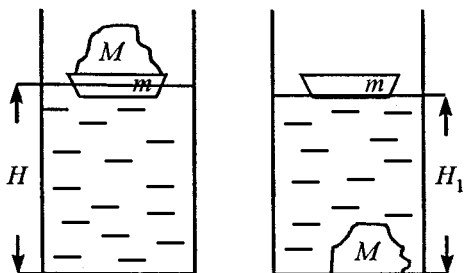


Рис. V.22

за больше плотности воды (рис. V.22).

Решение. Когда коробочка с грузом плавает, то их сила тяжести уравновешена силой Архимеда, т.е.

$$(m + M)g = \rho_0 g V_1,$$

где M и m – массы груза и коробочки соответственно, V_1 – вытесненный объем воды, ρ_0 – плотность воды. Это соотношение позволяет вычислить первоначальный объем вытесненной воды

$$V_1 = \frac{(m + M)}{\rho_0} = \frac{m}{\rho_0} + \frac{M}{\rho_0}. \quad (1)$$

Во втором случае плавает одна коробочка, поэтому выполняется соотношение

$$mg = \rho_0 g V_2', \text{ где } V_2' \text{ – объем, вытесненный}$$

только одной плавающей коробочкой. Кроме того, погруженный в жидкость груз вытесняет объем

$V_2'' = \frac{M}{\rho_2}$, где ρ_2 — плотность груза. Таким обра-

зом, общий вытесненный объем жидкости при погружении груза на дно сосуда равен

$$V_2 = V_2' + V_2'' = \frac{m}{\rho_0} + \frac{M}{\rho_2}. \quad (2)$$

Сравнив правые части выражений для вытесненных объемов (1) и (2), заметим, что $V_2 < V_1$, так как $\rho_2 > \rho_0$.

Поскольку площадь поперечного сечения сосуда остается в обоих случаях неизменной, то уровень жидкости в сосуде понизится, т. е. $H_1 < H$.

Задача V.25 Резиновый мяч массой m и радиусом R погружают под воду на глубину h и отпускают. На какую высоту H от поверхности воды подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать (рис. V.23).

Решение. На мяч действуют две силы: сила тя-

жести $m\vec{g}$ и сила Архи-

меда \vec{F} . Изменение механической энергии мяча происходит за счет работы силы Архимеда,

т. е. $\Delta E_{\text{мех}} = A_F = Fh$.

В нашей задаче

$$\Delta E_{\text{кин}} = 0$$

Если за начало отсчета потенциальной

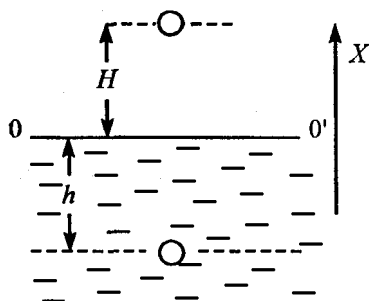


Рис. V.23

энергии выбрать поверхность воды, то это соотношение будет иметь вид

$$E_{\text{пк}} - E_{\text{пн}} = Fh, \text{ или } mgH - (-mgh) = \rho_0 Vgh,$$

$$\text{отсюда } H = \left(\frac{\rho_0 V}{m} - 1 \right) h = \left(\frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0}{m} - 1 \right) h.$$

Задача V.26 Сосуд, имеющий форму усеченного конуса, показанный на рис. V.24, опущен в воду. Если в сосуд налить $m=200$ г воды, то дно сосуда оторвется. Отпадет ли дно, если в него налить 200 г масла, 200 г ртути, поставить на дно гирию массой 200 г?

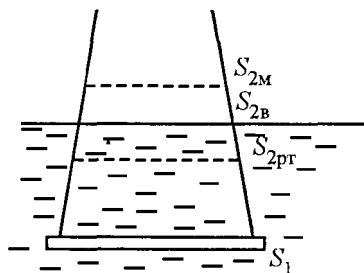


Рис. V.24

налить 200 г масла, 200 г ртути, поставить на дно гирию массой 200 г?

Решение. Обозначим нижнее и верхнее сечение налитой в сосуд жидкости через S_1 и S_2 соответственно. Тогда сила давления налитой в сосуд жидкости на его

дно определится

$$F = \rho gh S_1 = \frac{m}{V} gh S_1 = \frac{mgh S_1}{\frac{\pi h}{3} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)} =$$

$$= \frac{3mgS_1}{\pi (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)},$$

где V – объем налитой в сосуд жидкости, а h – высота уровня жидкости в сосуде.

Объем жидкости V вычисляется по формуле усеченного конуса:

$$V = \frac{\pi h}{3} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2),$$

где R_1 и R_2 — радиусы нижнего и верхнего основания соответственно.

Для того чтобы определить, отпадет ли дно сосуда, достаточно сравнить радиусы верхних оснований R_2 различных налитых жидкостей с радиусом R_2 для воды, поскольку нижнее основание во всех случаях одинаково.

Таким образом, при заполнении сосуда маслом $R_{2м} < R_{2в}$ и $F_m > F_v$, поэтому дно сосуда оторвется, при заполнении ртутью $R_{2р} > R_{2в}$ ($F_p < F_v$) и дно сосуда не оторвется. При помещении гири на дно сосуда $F_r = mg < F_v$ и дно сосуда не оторвется.

VI. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

пVI.1 Моль — количество вещества, содержащего столько же молекул, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода, тогда число молей в веществе

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N_A — число Авогадро, равное $6,02 \cdot 10^{23} (\text{моль})^{-1}$,

т. е. число частиц, содержащихся в одном моле вещества.

пVI.2 Масса любого вещества $m = \nu\mu$, где μ — масса одного моля.

пVI.3 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{1}{3} n m v^2 = nkT,$$

где n — концентрация, k — постоянная Больцмана, T — температура по шкале Кельвина.

пVI.4 Связь среднекинетической энергии молекул с температурой

$$E = \frac{3}{2} kT.$$

пVI.5 Состояние газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением p , объемом V и температурой T (по шкале Кельвина). Связь между шкалой Кельвина и Цельсия

$$T = 273 + t^\circ \text{C}.$$

пVI.6 Все три параметра связаны основным уравнением состояния идеального газа (объединенный газовый закон)

$$pV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT,$$

где R — универсальная газовая постоянная, равная $R = kN_A$.

Для изотермического процесса ($T = \text{const}$) это уравнение имеет вид

$pV = \text{const}$ — закон Бойля — Мариотта.

Для изобарного процесса ($p = \text{const}$)

$\frac{V}{T} = \text{const}$, или $V(t) = V_0(1 + \alpha t)$ — закон Гей-

Люссака, где V_0 — объем при $t = 0^\circ \text{C}$, $\alpha = \frac{1}{273^\circ \text{C}}$.

Для изохорного процесса ($V = \text{const}$)

$$\frac{p}{T} = \text{const}, \text{ или } p(t) = p_0(1 + \beta t) - \text{закон Шарля,}$$

где p_0 — давление газа при $t_0 = 0^\circ \text{C}$ и

$$\beta = \alpha = \frac{1}{273^\circ \text{C}}.$$

пVI.7 «Нормальное состояние» газа определяется величинами p_0 , V_0 , где p_0 — давление, равное давлению

$$760 \text{ мм рт. ст.} = 101325 \text{ Н/м}^2 = 10^5 \text{ Па}, \text{ при}$$

$T_0 = 273 \text{ К}$ (0°C), V_0 — объем при той же температуре.

Для количества вещества, равного 1 моль, при нормальных условиях любой газ занимает объем

$$V_{0\mu} = 0,0224 \text{ м}^3/\text{моль}. \text{ Поэтому } \frac{p_0 V_{0\mu}}{T_0} = R - \text{оди-}$$

накова для всех газов и называется универсальной газовой постоянной $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

пVI.8 Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, т. е. таких давлений, которые оказывал бы каждый газ, входящий в состав смеси, если бы он был один в этом сосуде:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

пVI.9 Внутренняя энергия одноатомного идеального газа

$$U = \nu N_A \frac{3}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Если газ не одноатомный, то его внутренняя энергия $U = c \frac{m}{\mu} RT$, где коэффициент c зависит от количества атомов в газе.

пVI.10 Если внутри системы, изолированной от окружающих тел, не совершается механическая работа, то для нее справедливо уравнение теплового баланса: сумма количеств теплот ΔQ_i , полученных и отданных телами системы, равна нулю

$$\sum \Delta Q_i = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots + \Delta Q_n = 0, \text{ или}$$

$$\sum c_1 m_1 \Delta T_1 + c_2 m_2 \Delta T_2 + \dots + c_n m_n \Delta T_n = 0.$$

пVI.11 Первое начало термодинамики: количество теплоты, передаваемое телу, ΔQ идет на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение телом работы ΔA , т. е.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \text{ или } cm\Delta T = \gamma\Delta T + p\Delta V,$$

где c — удельная теплоемкость, а γ — коэффициент пропорциональности.

пVI.12 В любом газовом процессе работу, совершаемую газом, можно определить из графика зависимости давления от объема. Площадь под

кривой зависимости давления от объема численно равна работе, совершенной газом (рис. VI.1).

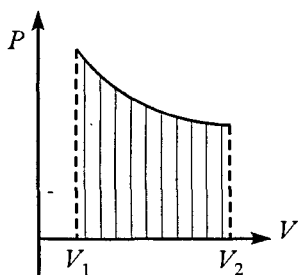


Рис. VI.1

пVI.13 Коэффициент полезного действия теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — тепло, получаемое от нагревателя, Q_2 — тепло, переданное холодильнику.

пVI.14 Количество теплоты, необходимое для испарения жидкости при постоянной температуре, $Q = r m$, где r — удельная теплота парообразования.

пVI.15 Количество тепла, необходимое для плавления тела массой m при постоянной температуре, $Q = \lambda m$, где λ — удельная теплота плавления.

пVI.16 Относительная влажность

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_n} 100 \% = \frac{p}{p_n} 100 \%,$$

где ρ и p — плотность и давление ненасыщенного пара, ρ_n и p_n — плотность и давление насыщенного пара при той же температуре.

Задача VI.1 Вычислить число N молекул, содержащихся в объеме $V = 1 \text{ см}^3$ газа при нормальных условиях.

Решение. При нормальных условиях 1 моль газа занимает объем $V_{0\mu} = 0,0224 \text{ м}^3/\text{моль}$ (пVI.7). Таким образом, в объеме V содержится количество

молей $\nu = \frac{V}{V_{0\mu}}$. Поскольку в 1 моле вещества со-

держится N_A число молекул, то общее число молекул в объеме V равно

$$N = \nu N_A = \frac{V}{V_{0\mu}} N_A = \frac{10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 6,1 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}}{0,0224 \text{ м}^3/\text{моль}} = 2,7 \cdot 10^{19}.$$

Задача VI.2 Число молекул, содержащихся в единице объема идеального газа при нормальных условиях, равно $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Этот же газ при температуре $t = 91^\circ \text{ С}$ и давлении $p = 800 \text{ кПа}$ имеет плотность $\rho = 5,4 \text{ кг/м}^3$. Определить массу одной молекулы этого газа.

Решение. В процессе нагревания газа его количество молей не меняется. Это значит, что выполняется соотношение

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}. \quad (1)$$

Начальный объем газа V_0 легко определить из заданной концентрации

$$n_0 = \frac{N}{V_0}, \text{ или } V_0 = \frac{N}{n_0}, \text{ где } N - \text{ общее число}$$

частиц в газе. Конечный объем V легко определить из заданной плотности

$$\rho = \frac{m}{V}, \text{ или } V = \frac{m}{\rho}.$$

Подставив эти соотношения в формулу (1), получим

$$\frac{p_0 \frac{N}{n_0}}{T_0} = \frac{p \frac{m}{\rho}}{T}.$$

Отсюда легко найти массу одной молекулы неизвестного газа

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{p_0 T \rho}{T_0 n_0 p} = \frac{10^5 \text{ Па} (273 + 91) \text{ К} \cdot 5,4 \text{ кг/м}^3}{273 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \cdot 800 \text{ кПа}} = 3,3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Задача VI.3 Сосуд объемом $V = 10 \text{ м}^3$, содержащий воздух при нормальных условиях, находится в космосе, где давление можно полагать равным нулю. В сосуде пробито отверстие. Через какое время t в сосуде давление станет равным нулю, если считать, что через отверстие каждую секунду вылетает $n_0 = 10^8$ молекул?

Решение. Время, через которое вылетят все молекулы, находящиеся в сосуде, определяется

$$t = \frac{N}{n_0}, \text{ где } N - \text{число молекул в сосуде до про-$$

бивания отверстия. Таким образом, задача сводится к определению числа молекул, находящихся в сосуде объемом V при нормальных условиях.

При одних и тех же условиях (p_0, T_0) число молекул в сосуде пропорционально его объему, т. е.

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{0\mu}},$$

где N_A – число частиц в 1 моле, а $V_{0\mu}$ – объем 1 моля. Тогда

$$N = \frac{N_A V}{V_{0\mu}}.$$

Время, через которое все молекулы вылетят из сосуда

$$t = \frac{N_A V}{n_0 V_{0\mu}} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/МОЛЬ} \cdot 10 \text{ см}^3}{10^{25} \text{ 1/с} \cdot 22,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{МОЛЬ}} = 2,7 \cdot 10^{12} \text{ с} = 85000 \text{ лет}.$$

Задача VI.4 На стенку площадью S налетает поток молекул со средней скоростью v . Число молекул в единице объема n_0 , масса каждой молекулы m . Определить силу, действующую на стенку, и давление, если молекулы движутся перпендикулярно к стенке и удары их о стенку абсолютно упруги.

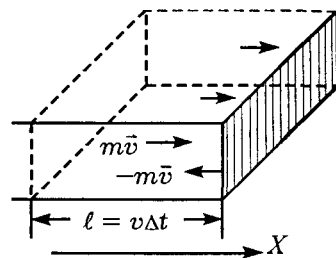


Рис. VI.2

перпендикулярно к стенке и удары их о стенку абсолютно упруги.

Решение. При упругом ударе о стенку каждая молекула меняет свою скорость на обратную за счет силы упругости стенки. При одном ударе молекулы, который длится очень

малое время δt , на вертикальную стенку со стороны одной молекулы действует импульс силы $f \delta t$ (рис. VI.2). По третьему закону Ньютона он равен

импульсу силы упругости со стороны стенки, но с обратным знаком, т. е.

$$f\delta t = -[-mv - mv] = 2mv.$$

За конечное время $\Delta t \gg \delta t$ до стенки долетят те молекулы, которые были от нее на расстоянии $l = v\Delta t$. Поэтому за время Δt о стенку ударится число молекул

$$N = n_0 V_{\Delta t} = n_0 S v \Delta t.$$

Импульс силы этих ударившихся молекул равен

$$F\Delta t = Nf\delta t = N2mv = 2n_0 m S v^2 \Delta t.$$

Следовательно, молекулы действуют на стенку с силой

$$F = 2n_0 m v^2 S.$$

Давление на стенку равно

$$p = \frac{F}{S} = 2n_0 m v^2.$$

Задача VI.5 Как располагаются изотермы газа на графике зависимости давления от объема для случаев расширения одной и той же массы газа при низкой и высокой температурах?

Решение. На графике зависимости давления от объема нарисуем две изотермы. Проведем некоторую прямую, соответствующую изохорическому процессу ($V = \text{const}$). Она пересечет две изотермы в точках 1 и 2 (рис. VI.3). Для этих точек запишем объединенный газовый закон:

$$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{p_2 V}{T_2} = \text{const}.$$

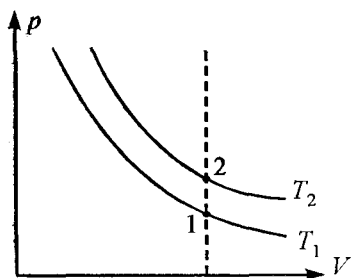


Рис. VI.3

Из формулы видно, что температура больше там, где больше давление, т. е. изотерма, соответствующая температуре T_2 , лежит выше изотермы, соответствующей температуре T_1 . Другими словами, изотерма, соответствующая более низкой температуре на графике p - V , располагается ближе к началу координат.

Задача VI.6 В результате некоторого процесса был получен график зависимости давления от объема, изображенный на рис. VI.4. Определить по этому графику характер изменения температуры газа.

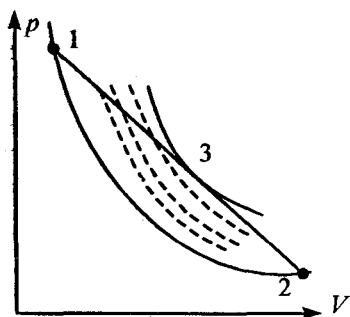


Рис. VI.4

Решение. Для определения характера изменения температуры газа следует провести на чертеже несколько изотерм, проходящих через начальную — 1, конечную — 2 и некоторую точку 3, в которой изотерма касается прямой 1-2. Тогда при движении от точки 1 до точки 3 температура газа

будет повышаться (мы идем от более низкой изотермы к более высокой), а при движении от точ-

ки 3 до точки 2 температура газа понижается (см. задачу VI.5).

Задача VI.7 В результате некоторого процесса был получен график зависимости давления от температуры газа, изображенный на рис. VI.5. В каком из положений (1 или 2) объем газа был больше?

Решение. Проведем на рисунке две изохоры, проходящие через точки 1 и 2 (пунктирные линии). Воспользуемся объединенным газовым законом для определения объема:

$$V = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{p}.$$

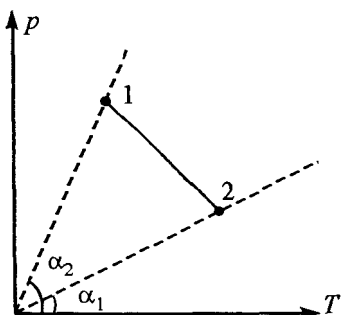


Рис. VI.5

Так как масса газа не меняется, то обозначим

$\frac{m}{\mu} R = A$ — это некоторая константа. Тогда

$$V = A \frac{T}{p} = A \operatorname{ctg} \alpha.$$

Эта формула сразу же позволяет определить, в каком из состояний газа (1 или 2) объем больше. Там, где изохора наклонена к оси OT под меньшим углом, там объем будет больше. Таким образом, в состоянии 1 объем газа V меньше, чем в состоянии 2 ($\operatorname{ctg} \alpha_1 < \operatorname{ctg} \alpha_2$). В результате процесса 1–2 газ расширяется.

Задача VI.8 В узкой цилиндрической трубке, запаянной с одного конца, находится воздух, отделенный от наружного пространства столбиком ртути длиной $h = 15$ см. Когда трубка лежит горизонтально, воздух занимает в ней объем $V_1 = 240$ мм³; когда трубка устанавливается вертикально, открытым концом вверх, воздух занимает объем $V_2 = 200$ мм³. Определить атмосферное давление p_0 (рис. VI.6).

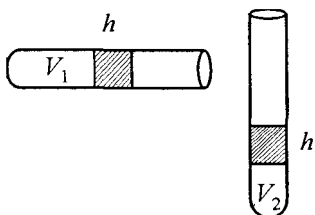


Рис. VI.6

Решение. Переворачивание трубки происходит при неизменной температуре, поэтому процесс — изотермический. Для него выполняется соотношение

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Так как в горизонтальной трубке столбик ртути находится в равновесии, то давление воздуха в объеме V_1 равно атмосферному, т. е. $p_1 = p_0$. В вертикально расположенной трубке давление воздуха в объеме V_2 равно давлению столбика ртути плюс атмосферное давление, т. е.

$$p_2 = \rho gh + p_0. \quad (1)$$

Подставим значение p_1 и p_2 в уравнение Бойля — Мариотта

$$p_0 V_1 = (\rho gh + p_0) V_2, \text{ отсюда } p_0 = \frac{\rho gh V_2}{V_1 - V_2}.$$

Подставляя в эту формулу цифры, мы получим

$$p_0 = \frac{13,6 \text{ г/см}^3 \cdot 10^3 \cdot 0,15 \text{ м} \cdot 200 \text{ мм}^3}{(240 - 200) \text{ мм}^3} \approx 1,02 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Если давление измерять в миллиметрах ртутного столба, то выражение для давления p_2 по формуле (1) следует записать $p_2 = h + p_0$. Тогда атмосферное давление p_0 будет измеряться в миллиметрах ртутного столба

$$p_0 = \frac{hV_2}{V_1 - V_2} = \frac{15 \text{ см} \cdot 200 \text{ мм}^3}{(240 - 200) \text{ мм}^3} = 15 \text{ см} \cdot 5 = 75 \text{ см} = 750 \text{ мм рт. ст.}$$

Задача VI.9 Закрытый с обеих сторон цилиндр разделен на две равные части теплонепроницаемым поршнем. В обеих частях цилиндра находятся одинаковые массы газа при $t_0 = 27^\circ \text{ С}$ и давлении $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ Длина цилиндра $L = 40 \text{ см}$. На какое расстояние Δx от середины цилиндра сместится поршень, если газ в одной из частей нагреть до температуры $t = 57^\circ \text{ С}$? Какое давление p установится при этом в каждой из частей цилиндра (рис. VI.7)?

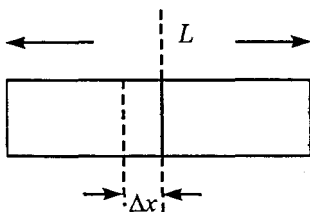


Рис. VI.7

Решение. Так как массы газа не меняются и давление после передвижения поршня остается одинаковым, объединенный газовый закон запишется

$$\frac{\left(\frac{L}{2} - \Delta x\right)}{T_0} = \frac{\left(\frac{L}{2} + \Delta x\right)}{T}, \text{ отсюда}$$

$$\Delta x = \frac{T - T_0}{T + T_0} \frac{L}{2} = \frac{30 \text{ К} \cdot 20 \text{ см}}{630 \text{ К}} = 0,95 \text{ см}.$$

Для определения установившегося давления можно применить объединенный газовый закон для одной из частей объема. Легче записать для той части, в которой температура не менялась. В этой части сосуда процесс изотермический, т. е.

$$p_0 \frac{L}{2} S = p \left(\frac{L}{2} - \Delta x\right) S, \text{ отсюда}$$

$$p = \frac{L p_0}{2 \left(\frac{L}{2} - \Delta x\right)} = 798 \text{ мм рт. ст.}$$

Задача VI.10 Два сосуда, наполненные воздухом под давлением $p_1 = 8 \cdot 10^5$ Па и $p_2 = 6 \cdot 10^5$ Па, имеют объемы $V_1 = 3$ л и $V_2 = 5$ л соответственно. Сосуды соединяют трубкой пренебрежимо малого объема. Определить установившееся давление в сосудах, если температура воздуха в них была одинакова и после установления равновесия не изменилась.

Решение. Процесс, происходящий в сосудах — изотермический. После соединения сосудов находящийся в каждом из них воздух займет объем $(V_1 + V_2)$. Для обоих сосудов выполняется закон Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_1' (V_1 + V_2); \quad p_2 V_2 = p_2' (V_1 + V_2),$$

где p_1' и p_2' — парциальные давления воздуха после объединения.

Установившееся в сосудах давление по закону Дальтона равно сумме парциальных давлений, т. е. $p = p_1' + p_2'$. Сложив два вышеприведенных равенства, получим

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = (V_1 + V_2)(p_1' + p_2') = (V_1 + V_2)p,$$

откуда

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{8 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 3 \text{ л} + 6 \cdot 10^5 \cdot 5 \text{ л}}{8} = 6,75 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Задача VI.11 Полагая, что воздух состоит из смеси трех газов: азота массой m_1 и молярной массой μ_1 , кислорода массой m_2 и молярной массой μ_2 и аргона массой m_3 и молярной массой μ_3 , определить молярную массу μ воздуха.

Решение. Для каждого газа можно записать уравнение состояния

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT; \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT; \quad p_3 V = \frac{m_3}{\mu_3} RT.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$(p_1 + p_2 + p_3)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} \right) RT. \quad (1)$$

С другой стороны, для смеси газов можно записать

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$, а μ — искомая молярная масса смеси.

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 + p_3$. Таким образом, для смеси газа

$$(p_1 + p_2 + p_3)V = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), получим

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3},$$

следовательно,

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}}.$$

Задача VI.12 Газ массой m с молярной массой μ нагревается на $\Delta T = 1\text{К}$ в цилиндре, закрытом поршнем массой M и площадью S . Во время нагревания газ совершает работу по поднятию поршня. Выразить эту работу:

а) через давление p и изменение объема ΔV газа,

б) через универсальную газовую постоянную R .

Давлением наружного воздуха пренебречь (рис. VI.8).

Решение. Газ нагревается при изобарическом процессе, поскольку

$p = \frac{Mg}{S} = \text{const}$. Расширяясь, он совершает работу

$$A = Mgh = pSh = p\Delta V = p(V - V_0).$$

Воспользовавшись объединенным газовым законом, можно записать

до нагревания $pV_0 = \frac{m}{\mu}RT_0$; после

нагревания на ΔT $pV = \frac{m}{\mu}R(T_0 + \Delta T)$.

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$p(V - V_0) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Левая часть этого уравнения есть не что иное, как работа, совершаемая газом при расширении.

Таким образом, при изобарическом процессе газ совершает работу

$$A = p(V - V_0) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Это соотношение позволяет определить физический смысл универсальной газовой постоянной R : это работа, которую совершает 1 моль газа при изобарическом нагревании на 1К.

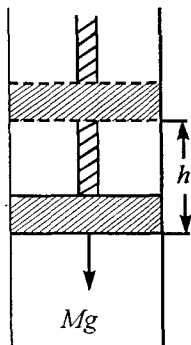


Рис. VI.8

Задача VI.13 Некоторая масса газа, занимающая вначале объем V_0 при давлении p_0 и температуре T_0 , расширяется один раз изобарно, другой раз изотермически до объема V (рис. VI.9). В каком из этих случаев газ совершает большую работу?

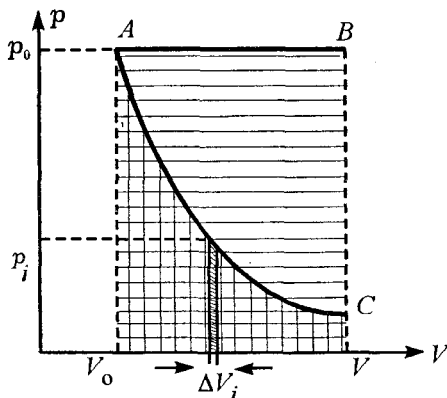


Рис. VI.9

Решение. Изобразим эти два процесса на графике зависимости давления от объема (pV). Работа при изобарическом процессе определяется

$$A_1 = p_0 \Delta V = p_0 (V - V_0).$$

Численно эта работа равна площади заштрихованного прямоугольника V_0ABV . В случае изотермического процесса давление не остается постоянным. Но можно интервал $V_0 - V$ разбить на столь малые отрезки ΔV_i , в пределах которых давление можно считать постоянным. И тогда элементарная работа на этом интервале равна

$A_i = p_i \Delta V_i$, а полная работа при расширении объема V_0 до V равна $A = \sum A_i$. При стремлении интервалов ΔV_i к нулю эта работа численно будет равна площади фигуры, находящейся под изотермой AC (площади V_0ACV). Из рисунка видно, что при изобарическом процессе газ совершает большую работу.

Этот абзац для тех, кто хочет узнать чуть больше

Работу при изотермическом процессе тоже можно посчитать. Ведь предел, к которому стремится полная работа при стремлении ΔV_i к нулю, не что иное, как

$$A = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum A_i = \int_{V_0}^V A_i = \int_{V_0}^V p_i dV = \int_{V_0}^V \frac{BdV}{V} = B \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = B \ln \frac{V}{V_0},$$

где значение B определяется из объединенного газового закона. Действительно,

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ или } p = \frac{B}{V},$$

т. е. $B = \frac{m}{\mu} RT$. Таким образом, $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V}{V_0}$.

Задача VI.14 В цилиндре под поршнем находится воздух. Поршень имеет форму, указанную на рис. VI.10. Масса поршня m . Площадь сечения цилиндра S_0 . Атмосферное давление p_0 . Какой груз массой M надо положить на поршень, чтобы объем

воздуха V в цилиндре уменьшился в $n = 2$ раза? Температура постоянна, трение не учитывать.

Решение. Вспомним, что давление определяется как сила, действующая на единичную площадку в направлении нормали к поверхности. Поэтому со стороны газа на поршень действуют сила \vec{F}_1 , направленная перпендикулярно поверхности S_1 , т. е. $|\vec{F}_1| = pS_1$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления со стороны воздуха \vec{F}_2 (рис. VI.10).

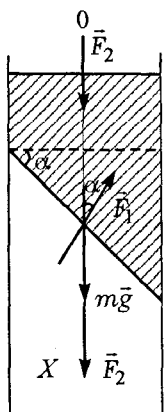


Рис. VI.10

Поршень находится в равновесии, если $m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Запишем закон Ньютона в проекции на вертикальное направление оси OX :

$$mg - F_1 \cos \alpha + F_2 = 0, \text{ или}$$

$$mg - p_1 S_1 \cos \alpha + p_0 S_0 = 0, \text{ или}$$

$$mg - p_1 S_0 + p_0 S_0 = 0.$$

Это соотношение позволяет вычислить давление газа p_1 , находящегося под поршнем:

$$p_1 = \frac{mg + p_0 S_0}{S_0} = \frac{mg}{S_0} + p_0.$$

Процесс происходит при постоянной температуре (изотермический), поэтому, чтобы объем воздуха уменьшился в 2 раза, давление p_1 в цилиндре нужно увеличить в 2 раза ($pV = \text{const}$). Это можно сделать за счет добавочного груза M , т. е.

$$2 \left(\frac{mg}{S_0} + p_0 \right) = \frac{(m + M)}{S_0} g + p_0,$$

отсюда $M = \left(\frac{mg}{S_0} + p_0 \right) \frac{S_0}{g} = m + \frac{p_0 S_0}{g}.$

Задача VI.15 На рис. VI.11, а изображен график изменения состояния идеального газа в координатах V - T . Изобразить этот график в координатах p - V и p - T .

Решение. Процесс 1-2 является изобарическим

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (\text{пVI.6}).$$

На рис. VI.11, б он изображается прямой, параллельной оси OV . Поскольку при переходе от точки 1 к точке 2 объем повышается, то на рисунке этот процесс пойдет слева направо.

Процесс 2-3 на рис. VI.11, а — изотермический, причем объем его уменьшается при переходе от точки 2 к точке 3. Из закона Бойля — Мариотта следует, что при уменьшении объема давление обязательно должно возрастать ($pV = \text{const}$), на что указывает кривая 2-3 на рис.

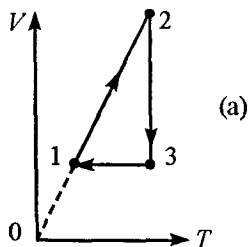


Рис. VI.11

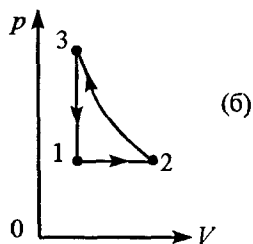


Рис. VI.11

VI.11, б. Процесс 3-1 на рис. VI.11, а соответствует изохорическому процессу, поэтому на рис. VI.11, б он изобразится вертикальной прямой 3-1 ($\frac{p}{T} = \text{const}$).

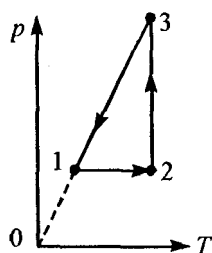


Рис. VI.11

(в) Изобарический процесс 1-2 в координатах p - T на рис. VI.11, в изобразится прямой линией, идущей слева направо, так как T увеличивается в процессе 1-2. Изотермический процесс 2-3 изображается вертикальной прямой, идущей вверх (так как из рисунка видно, что давление в процессе 2-3 увеличивается).

Изохорический процесс 3-1 на рис. VI.11, в отразится прямой 3-1, продолжение которой обязательно должно пройти через начало координат, при этом давление должно уменьшаться, что следует из рисунка.

Задача VI.16 В вертикальном цилиндре под тяжелым поршнем находится кислород массой $m = 2$ кг. Для повышения температуры кислорода на $\Delta T = 5$ К ему было сообщено количество теплоты $\Delta Q = 9160$ Дж. Определить удельную теплоемкость кислорода c , работу, совершаемую им при расширении, и увеличение его внутренней энергии ΔU . Молярная масса кислорода $\mu = 0,032$ кг/моль.

Решение. На поршень действуют три силы: сила тяжести, сила атмосферного давления и сила давления газа, находящегося под поршнем. Так как поршень находится в равновесии, то давление газа под поршнем остается постоянным (сила тяжести и сила атмосферного давления не меняются), поэтому процесс нагревания газа является изобарным. Количество теплоты, сообщаемое кислороду для нагревания, равно

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \text{ или } c_p m \Delta T = \Delta U + p \Delta V, \quad (1)$$

где c_p — удельная теплоемкость, индекс p указывает, что нагревание газа происходит при изобарном процессе. Эту теплоемкость можно определить из условия задачи

$$\Delta Q = c_p m \Delta T, \text{ или}$$

$$c_p = \frac{\Delta Q}{m \Delta T} = \frac{9160 \text{ Дж}}{2 \text{ кг} \cdot 5 \text{ К}} = 916 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Уравнения состояния газа до и после нагревания на ΔT равны соответственно

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Левая часть этого уравнения является работой при изобарном процессе, поэтому

$$\Delta A = p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{2 \cdot 8,31 \cdot 5}{0,032} = 2590 \text{ Дж}.$$

Зная работу, совершенную газом, и количество тепла, сообщенное ему, легко из формулы (1) подсчитать изменение его внутренней энергии

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A = (9160 - 2590)\text{Дж} = 6570\text{Дж}.$$

Задача VI.17 Температура газа массой m с молярной массой μ повышается на величину ΔT один раз при постоянном давлении p , а другой раз — при постоянном объеме V . Насколько отличаются друг от друга количества сообщенных газу теплот ΔQ_p и ΔQ_v и удельные теплоемкости c_p и c_v в этих процессах?

Решение. При любом процессе количество тепла, сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение газом работы, т. е.

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V.$$

При изобарном и изохорном процессах это соотношение запишется соответственно

$$c_p m \Delta T = \Delta U + p\Delta V; \quad (1)$$

$$c_v m \Delta T = \Delta U. \quad (2)$$

$\Delta U = \gamma \Delta T$ в обоих процессах одинаково, так как одинаково изменение температуры ΔT . Вычитая из верхнего соотношения нижнее, имеем

$$\Delta Q_p - \Delta Q_v = m \Delta T (c_p - c_v) = p\Delta V. \quad (3)$$

Подставляя выражение для работы, полученное в предыдущей задаче для изобарного про-

цесса $\Delta A = \frac{m}{\mu} R \Delta T$, получим

$$\Delta Q_p - \Delta Q_v = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Соотношение (3) позволяет определить, как отличаются теплоемкости при этих процессах

$$c_p - c_v = \frac{p \Delta V}{m \Delta T} = \frac{R}{\mu}.$$

Таким образом, теплоемкость газа при изобарном процессе c_p больше его теплоемкости при изохорном процессе c_v .

Известно, что для идеального газа изменение его внутренней энергии прямо пропорционально изменению его температуры, т.е. $\Delta U = \gamma \Delta T$.

Формула (2) позволяет вычислить коэффициент пропорциональности γ . Действительно, сравнив левую и правую части этой формулы, получим

$$\gamma = c_v m.$$

Выражение для работы при изобарном процессе $\Delta A = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ позволяет выяснить физический смысл газовой постоянной R — это работа, которую совершает 1 моль газа при изобарном процессе, нагреваясь на 1 К.

Задача VI.18 На рис. VI.12 дан график изменения состояния идеального газа. Посчитать работу, которая совершена газом за полный цикл, если

начальные и конечные значения давлений и объемов заданы.

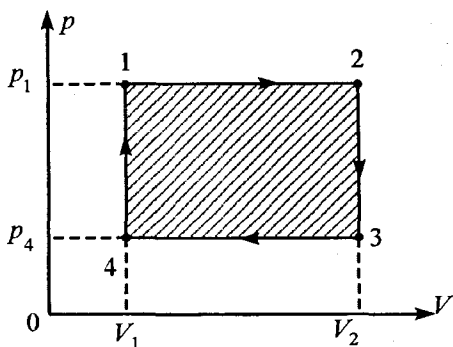


Рис. VI.12

Решение. Работа, совершаемая газом, определяется: $A = p\Delta V$. Круговой процесс, представленный на рисунке, состоит из двух изобар (1-2, 3-4) и двух изохор (2-3, 4-1). При изохорических процессах газ работу не совершает, так как $\Delta V = 0$. Поэтому $A_{2-3} = A_{4-1} = 0$. Работа же газа при изобарических процессах определяется

$$A_{1-2} = p_1(V_2 - V_1) \text{ и } A_{3-4} = p_4(V_1 - V_2).$$

Таким образом, полная работа за весь цикл равна

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = A_{1-2} + A_{3-4} = (V_2 - V_1)(p_1 - p_4).$$

Как видно из рисунка, эта работа численно равна площади заштрихованного прямоугольника 1234.

Следует отметить, что при любых замкнутых процессах, изображенных в координатах p - V ,

полная работа равна площади фигуры, лежащей внутри этого цикла (пVI.12).

Задача VI.19 Какое количество тепла ΔQ передано одноатомному газу при переводе его из состояния 1 в состояние 2? $p_1 = 500 \text{ кПа}$, $V_1 = 2 \text{ л}$, $V_2 = 4 \text{ л}$ (рис. VI.13).

Решение. Процесс 1-2 не относится ни к одному из изопроцессов. Однако из рисунка следует, что давление прямо пропорционально объему, т.е. $p = \gamma V$, где γ — коэффициент пропорциональности. Из этой зависимости легко получается, что

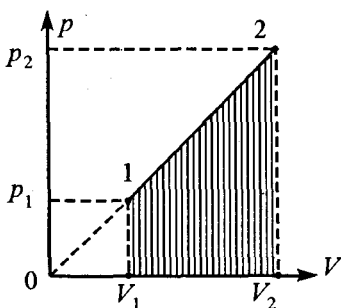


Рис. VI.13

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2}, \text{ или } p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1}.$$

Количество тепла, переданное любому газу, определяется первым началом термодинамики (пVI.10)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Для одноатомного газа ΔU легко определить, пользуясь выражением внутренней энергии для одноатомного газа (пVI.9):

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

ΔT вычисляется из объединенного газового закона для двух состояний, т. е.

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \text{ и } p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Вычитая из второго соотношения первое, имеем

$$\frac{m}{\mu} R\Delta T = p_2 V_2 - p_1 V_1.$$

Подставляя это выражение в формулу для ΔU , получим

$$\Delta U = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} p_1 \left(\frac{V_2^2}{V_1} - V_1 \right) = \frac{3}{2} \frac{p_1}{V_1} (V_2^2 - V_1^2).$$

Работу ΔA , совершаемую газом при переходе из состояния 1 в состояние 2, можно определить по площади трапеции $V_1 1 2 V_2$.

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p_1 + p_1 \frac{V_2}{V_1}}{2} (V_2 - V_1) = \\ &= \frac{p_1}{2V_1} (V_2^2 - V_1^2). \end{aligned}$$

Таким образом, количество тепла, переданное одноатомному газу:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta U + \Delta A = \frac{3}{2} \frac{p_1}{V_1} (V_2^2 - V_1^2) + \frac{p_1}{2V_1} (V_2^2 - V_1^2) = \\ &= 2 \frac{p_1}{V_1} (V_2^2 - V_1^2). \end{aligned}$$

Задача VI.20 На рис. VI.14, а изображен график изменения состояния идеального газа. Пред-

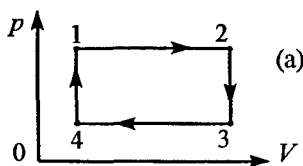


Рис. VI.14

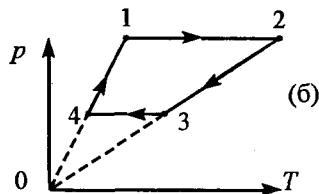


Рис. VI.14

ставить этот круговой процесс в координатах p - T и V - T и определить, на каких участках тепло потребляется, а на каких выделяется.

Решение. Изобарический процесс 1-2 в координатах p - T (рис. VI.14, б) изображается прямой, параллельной оси OT . Однако он может проходить слева направо (при увеличении температуры) и справа налево (при уменьшении температуры). Для того чтобы определить, как меняется температура, необходимо воспользоваться объединенным газовым законом:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Из этого уравнения следует: при постоянном давлении с увеличением объема температура увеличивается. Поэтому изобарический процесс протекает слева направо. Процесс 2-3 изохорный, при этом давление p уменьшается: нужно соединить точку 2 с началом координат и по этой прямой опуститься вниз (так как p уменьшается). Процесс 3-4 изобарный, он проходит с уменьшением объема, поэтому и температура будет уменьшаться. Процесс 4-1 изохорный: проводим прямую через точку 1 и начало координат и поднимаемся по этой прямой вверх, так как давление в про-

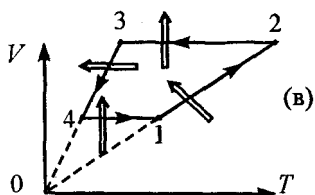


Рис. VI.14

цессе 4-1 увеличивается. Аналогичные рассуждения проводятся и для координат V - T (рис. VI.14, в).

Выделенное или поглощенное тепло на различных участках процесса легко получить с помощью первого начала термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V = \gamma\Delta T + p\Delta V.$$

На участке 1-2 $\Delta T > 0$, $\Delta V > 0$ (рис. VI.14, а), поэтому $\Delta Q_{1-2} > 0$, т. е. тепло поглощается газом.

На участке 2-3 $\Delta T < 0$, $\Delta V = 0$ (рис. VI.14, а,б), поэтому $\Delta Q_{2-3} < 0$, т. е. тепло выделяется.

На участке 3-4 $\Delta T < 0$, $\Delta V < 0$, следовательно $\Delta Q_{3-4} < 0$ — тепло выделяется.

На участке 4-1 $\Delta T > 0$, $\Delta V = 0$ (рис. VI.14, а,б), поэтому $\Delta Q_{4-1} > 0$, т. е. тепло поглощается. На рис. VI.14, (в) поглощенное и выделенное тепло обозначается двойными стрелочками.

Задача VI.21 Увеличится ли энергия воздуха в обычной комнате, если в ней протопить печь?

Решение. В обычной комнате атмосферное давление не меняется, так же как не меняется ее объем (комната не является герметичной). Поэтому для двух разных температур можно записать

$$p_0 V_0 = \frac{m_1}{\mu} RT_1 \quad \text{и} \quad p_0 V_0 = \frac{m_2}{\mu} RT_2,$$

где p_0 — атмосферное давление, V_0 — объем комнаты.

Из этих соотношений видно, что при нагревании комнаты меняется масса воздуха, находящегося в ней (часть воздуха, расширяясь, вытесняется в щели окон и дверей).

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$0 = \frac{m_1}{\mu} RT_1 - \frac{m_2}{\mu} RT_2 = \frac{R}{\mu} (m_1 T_1 - m_2 T_2), \quad (1)$$

т. е. $m_1 T_1 - m_2 T_2 = 0$, или $m_1 T_1 = m_2 T_2$.

Так как внутренняя энергия в газе

$$U = \frac{c m}{\mu} RT \quad (\text{пVI.9}),$$

то ее изменение

$$\Delta U = \frac{cR}{\mu} (m_1 T_1 - m_2 T_2). \quad (2)$$

Из соотношения (1) следует, что изменение внутренней энергии в комнате равно нулю, т. е. энергия воздуха в обычной комнате при ее нагревании не изменится.

Задача VI.22 В запаянной U-образной трубке находится вода. Как узнать, воздух или только насыщенный пар жидкости находится над водой в трубке?

Решение. Давление насыщенного пара не зависит от изменения объема. Поэтому если трубку наклонить, то при насыщенном паре уровни воды в ее коленах будут одинаковыми; если же над водой находится воздух, то при изменении его

объема меняется и давление, поскольку они связаны законом Бойля – Мариотта. Поэтому уровни воды в коленях U-образной трубки будут разными.

Задача VI.23 Относительная влажность воздуха, заполняющего сосуд объемом $V_0 = 0,5 \text{ м}^3$ при температуре $t_0 = 23^\circ \text{С}$, равна $\varphi = 60\%$. Сколько нужно испарить в этот объем воды до полного насыщения пара? Давление насыщающих паров при этой температуре $p_n = 21,7 \text{ мм рт. ст.}$. Молярная масса водяных паров $\mu = 18 \text{ г/моль}$.

Решение. Пары воды при температуре $t_0 = 23^\circ \text{С}$ не насыщенные, их давление $p_n = \varphi p_n$ (пVI.16). Их массу можно определить из объединенного газового закона

$$\frac{p_n V_0}{T_0} = \frac{m}{\mu} R, \text{ или } m = \frac{p_n V_0 \mu}{T_0 R} = \frac{\varphi p_n V_0 \mu}{T_0 R}.$$

Масса насыщенных паров определяется из того же уравнения, но при насыщении

$$m_n = \frac{p_n V_0 \mu}{T_0 R}.$$

Разность этих масс и является тем количеством воды, которое нужно добавить в сосуд до полного насыщения пара

$$m_n - m = \frac{p_n V_0 \mu}{T_0 R} (1 - \varphi) =$$

$$= \frac{0,0217 \text{ м} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с} \cdot 0,5 \text{ м}^3 \cdot 18 \text{ г/моль}}{(273 + 23) \text{ К} \cdot 8,31 \text{ Нм/К}} = 4 \text{ г}.$$

Задача VI.24 Смешали $V_1 = 1 \text{ м}^3$ воздуха с влажностью $\varphi_1 = 20\%$ и $V_2 = 2 \text{ м}^3$ с влажностью $\varphi_2 = 30\%$. Обе порции воздуха взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем $V = V_1 + V_2$. Определить ее относительную влажность.

Решение. Давление воздуха в сосуде объемом V_1 равно $p_1 = \varphi_1 p_n$, а в сосуде объемом $V_2 \rightarrow p_2 = \varphi_2 p_n$. При смешении воздуха давление смеси определяется из закона Дальтона

$$p_{\text{см}} = p'_1 + p'_2,$$

где p'_1 и p'_2 — парциальные давления смешиваемых газов.

Так как смешение происходит при постоянной температуре, то выполняется закон Бойля — Мариотта:

$$p_1 V_1 = p'_1 V; \quad p_2 V_2 = p'_2 V, \quad \text{где } V = V_1 + V_2.$$

Отсюда

$$p'_1 = \frac{p_1 V_1}{V}; \quad p'_2 = \frac{p_2 V_2}{V}.$$

Таким образом

$$p_{\text{см}} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} = \frac{\varphi_1 p_n V_1 + \varphi_2 p_n V_2}{V} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V} p_n.$$

Из этого соотношения легко получить относительную влажность смеси

$$\varphi_{\text{см}} = \frac{p_{\text{см}}}{p_{\text{н}}} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V} = \frac{\varphi_1}{3} + \frac{2\varphi_2}{3} = 0,27 = 27\%.$$

Задача VI.25 Давление насыщающего водяного пара при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ равно $p_{\text{н}} = 44,6$ мм рт. ст. Какова масса при этой температуре влажного воздуха объемом $V_1 = 1\text{ м}^3$ при относительной влажности $\varphi = 80\%$ и давлении $p_0 = 1\text{ атм}$?
 $\mu_{\text{в}} = 0,029$ кг/моль, $\mu_{\text{п}} = 0,018$ кг/моль.

Решение. Влажный воздух состоит из сухого воздуха и водяного пара. Поэтому полное давление влажного воздуха равно сумме давлений воздуха и пара, т. е.

$$p_0 = p_{\text{в}} + p_{\text{п}}, \text{ при этом } p_{\text{п}} = \varphi p_{\text{н}}.$$

Таким образом, давление воздуха

$$p_{\text{в}} = p_0 - p_{\text{п}} = p_0 - \varphi p_{\text{н}} = (760 - 0,8 \cdot 44,6) \text{ мм рт. ст.} = 724,3 \text{ мм рт. ст.}$$

Масса влажного воздуха $m = m_{\text{в}} + m_{\text{п}}$. Массу сухого воздуха $m_{\text{в}}$ и водяного пара $m_{\text{п}}$ можно вычислить из объединенного газового закона:

$$m_{\text{в}} = \frac{\mu_{\text{в}} p_{\text{в}} V_0}{RT}; \quad m_{\text{п}} = \frac{\mu_{\text{п}} p_{\text{п}} V_0}{RT} = \frac{\mu_{\text{п}} \varphi p_{\text{н}} V_0}{RT}.$$

Таким образом, масса влажного воздуха равна

$$m_{\text{в}} = \frac{\mu_{\text{в}} p_{\text{в}} V_0}{RT} + \frac{\mu_{\text{п}} \varphi p_{\text{н}} V_0}{RT} = \frac{V_0}{RT} (\mu_{\text{в}} p_{\text{в}} + \mu_{\text{п}} \varphi p_{\text{н}}) = 143 \text{ г.}$$

Задача VI.26 В цилиндре объемом $V_0 = 10\text{ л}$ под поршнем находится влажный воздух при темпе-

ратуре $t = 20^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\varphi = 70\%$. Объем цилиндра при той же температуре уменьшили в $n = 10$ раз таким образом, что на стенках сосуда появились капли жидкости. Какое стало давление в цилиндре, если начальное давление $p_0 = 100$ мм. рт.ст.? Давление насыщающего пара при температуре t_0 равно $p_n = 18$ мм рт. ст.

Решение. Давление влажного воздуха складывается из давления сухого воздуха и давления паров, т. е.

$$p_0 = p_v + p_n = p_v + \varphi p_n.$$

Поскольку процесс изотермический ($T = \text{const}$), то при уменьшении объема в n раз, давление воздуха увеличится в n раз, т. е.

$$p'_v = np_v, \text{ или } p'_v = n(p_0 - \varphi p_n).$$

Так как на стенках цилиндра появились капельки воды, то пар стал насыщенным. Поэтому новое давление влажного воздуха в цилиндре

$$p = p'_v + p_n = (p_0 - \varphi p_n)n + p_n = 892 \text{ мм рт. ст.}$$

В задаче не учтен тот факт, что сконденсированные пары тоже могут занимать некоторый объем. Этим объемом мы пренебрегли, однако его можно оценить. Масса пара в цилиндре определяется из объединенного газового закона.

Объем всех сконденсированных паров

$$V = \frac{m}{\rho_n} = \frac{\mu V_0 \varphi p_n}{(273 + t)R\rho} = 0,11 \text{ см}^3.$$

По сравнению с $V = \frac{V_0}{n} = 1\text{ л}$ это пренебрежимо малый объем.

Задача VI.27 В сосуде смешиваются три химически не взаимодействующие жидкости, имеющие массы $m_1 = 1\text{ кг}$, $m_2 = 10\text{ кг}$, $m_3 = 5\text{ кг}$; температуры $t_1 = 6^\circ\text{С}$, $t_2 = -40^\circ\text{С}$, $t_3 = 60^\circ\text{С}$ и удельные теплоемкости $c_1 = 2\text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$, $c_2 = 4\text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$, $c_3 = 2\text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$ соответственно. Определить температуру смеси и количество теплоты, необходимое для последующего нагревания смеси до $t = 6^\circ\text{С}$.

Решение. В сосуде жидкости, нагреваясь, остаются в том же агрегатном состоянии, поэтому легко записать для них уравнение теплового баланса:

$$\sum \Delta Q_i = 0, \text{ т. е. } \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0, \text{ или}$$

$$c_1 m_1 \Delta T_1 + c_2 m_2 \Delta T_2 + c_3 m_3 \Delta T_3 = 0.$$

$$c_1 m_1 (\Theta - t_1) + c_2 m_2 (\Theta - t_2) + c_3 m_3 (\Theta - t_3) = 0,$$

где Θ — температура смеси,

$$\Theta = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + c_3 m_3 t_3}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 10 \cdot (-40) + 2 \cdot 5 \cdot 60}{2 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 5} = \frac{-1900}{100} = -19^\circ\text{С}.$$

Таким образом, температура смеси Θ равна -19°С . Далее эту смесь нужно нагреть до $t = 6^\circ\text{С}$.

Для этого ей необходимо сообщить количество тепла

$$\begin{aligned}\Delta Q &= c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 \Delta T + c_3 m_3 \Delta T = \\ &= \Delta T (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3) = 1300 \text{ кДж}\end{aligned}$$

(при этом считается, что теплоемкости жидкостей при изменении температуры не меняются).

Задача VI.28 В калориметре находится $m_1 = 500$ г воды при температуре $t_1 = 5^\circ\text{C}$. К ней долили еще $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = 10^\circ\text{C}$ и положили $m_3 = 400$ г льда при температуре $t_3 = -60^\circ\text{C}$. Какая температура установит-

ся в калориметре? $c_{\text{в}} = 1 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$; $c_{\text{л}} = 0,5 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$;

удельная теплота плавления льда $\lambda = 80 \frac{\text{кал}}{\text{г}}$.

Решение. Записать уравнение теплового баланса в этой задаче трудно, так как неизвестно, сколько льда растает и будет ли он таять вообще. Поэтому необходимо сделать предварительные оценки. Оценки проведем в системе СГС, так как в молекулярной физике это делать удобнее, поскольку удельные теплоемкости выражаются однозначными цифрами (а не четырехзначными!).

Лед находится при $t_3 = -60^\circ\text{C}$, поэтому при наличии воды с плюсовой температурой он будет

нагреваться. Но для того чтобы его нагреть до нуля градусов, ему нужно сообщить

$$Q_1 = c_{\text{л}} m_{\text{л}} \Delta t = 0,5 \cdot 400 \cdot 60 \text{ кал} = 12500 \text{ кал.}$$

Это тепло лед может получить за счет остывания воды. Вода же, остывая до 0°C , может выделить тепла .

$$Q_2 = c_{\text{в}} m_1 \Delta t_1 + c_{\text{в}} m_2 \Delta t_2 = (500 \cdot 5 + 200 \cdot 10) \text{ кал} = 4500 \text{ кал.}$$

Но этого количества тепла мало для нагревания льда до 0°C , поэтому часть воды еще замерзнет и при этом выделит количество тепла

$$Q_3 = m_x \lambda,$$

где m_x количество воды, которое должно замерзнуть, чтобы лед довести до нуля градусов.

Теперь можно записать уравнение теплового баланса:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3, \text{ или } Q_3 = m_x \lambda = Q_1 - Q_2 = 8000 \text{ кал.}$$

Таким образом, замерзнуть должно m_x граммов воды

$$m_x = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} = \frac{8000 \text{ кал}}{80 \text{ кал/г}} = 100 \text{ г.}$$

После того как в калориметре установится температура 0°C , все процессы прекратятся. Следовательно, в калориметре будет смесь льда и воды при температуре $t = 0^\circ\text{C}$, при этом льда будет

$$m_{\text{л}} = 400 \text{ г} + 100 \text{ г} = 500 \text{ г,}$$

а воды

$$m_B = 500 \text{ г} + 200 \text{ г} - 100 \text{ г} = 600 \text{ г}.$$

Задача VI.29 В калориметре с теплоемкостью $C = 600 \text{ Дж/град}$ находится $m = 1 \text{ кг}$ льда. Какое количество тепла Q_1 и Q_2 нужно сообщить калориметру со льдом, чтобы нагреть его на 2 градуса: а) от температуры $T_1 = 270 \text{ К}$ до $T_2 = 272 \text{ К}$; б) от температуры $T_1 = 272 \text{ К}$ до температуры $T_2 = 274 \text{ К}$? Удельная теплоемкость воды

$$c_B = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \text{ а льда } c_{\text{л}} = 2,1 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

$$\text{ная теплота плавления льда } \lambda = 330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Решение. Если внимательно прочитать условие задачи, то можно заметить, что в первом случае лед в калориметре нагревается от $t_1 = -3^\circ \text{С}$ до $t_2 = -1^\circ \text{С}$, т. е. он пребывает еще в твердом состоянии. В этом случае необходимо сообщить количество теплоты для нагревания калориметра и льда:

$$Q_1 = C\Delta T + mc_{\text{л}}\Delta T = \Delta T(C + mc_{\text{л}}) = 2(0,6 + 1 \cdot 2,1) \text{ кДж} = 5,4 \text{ кДж}.$$

Во втором случае лед в калориметре нагревается от $t_1 = -1^\circ \text{С}$ до $t_2 = +2^\circ \text{С}$, а это значит, что тепло должно сообщаться: на нагревание калориметра на 2 градуса, на нагревание льда сначала на 1 градус, затем на таяние льда, а затем на нагревание растаявшей воды еще на 1 градус, т. е.

$$Q_2 = C\Delta T + mc_{\text{л}} \frac{\Delta T}{2} + \lambda m + mc_B \frac{\Delta T}{2} = 337,5 \text{ кДж}.$$

Как видно, во втором случае приходится тратить тепла существенно больше.

Задача VI.30 Гелий массой m , заключенный в цилиндр под поршень, очень медленно переводится из состояния 1 с объемом V_2 и давлением p_1

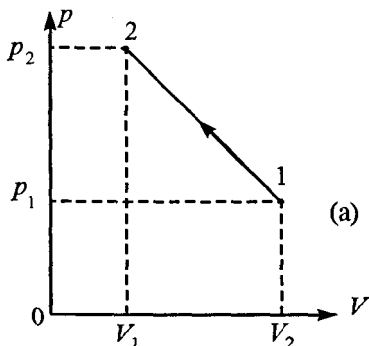


Рис. VI.15

в состояние 2 с объемом V_1 и давлением p_2 (рис. VI.15, а). Какая максимальная температура будет у газа при этом процессе, если на графике зависимости давления от объема процесс изображен прямой 1-2?

Решение. Аналогичная задача уже была рассмотрена (задача

VI.6), но только качественно. Теперь же мы получим закон, по которому меняется температура, и определим ее максимальное значение. Уравнение прямой 1-2 записывается:

$$p = aV + b, \quad (1)$$

где постоянные a , b определяются из начального и конечного состояний газа.

Действительно,

$$p_1 = aV_1 + b;$$

$$p_2 = aV_2 + b.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2}, \quad b = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}.$$

Подставив уравнение (1) в объединенный газовый закон, получим выражение для изменения температуры:

$$(aV + b)V = \frac{m}{\mu} RT, \text{ или } aV^2 + bV = \frac{m}{\mu} RT.$$

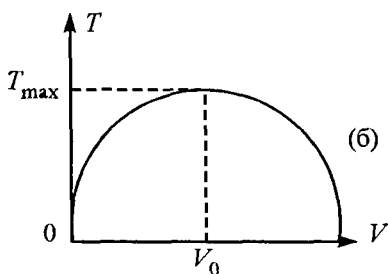


Рис. VI.15

Как видно из уравнения, температура меняется по параболе, а график ее изменения представлен на рис. VI.15, б. Кривая эта достигает максимального значения температуры при

$$V_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ когда совпа-$$

дут корни квадратного уравнения (объем, при котором температура достигает максимального значения, можно определить, исследовав параболическое уравнение на экстремум).

Давление p_0 , соответствующее максимальной температуре, определяется по формуле

$$p_0 = aV_0 + b,$$

где V_0 — объем, соответствующий максимальной температуре.

Объединенный газовый закон позволяет вычислить значение этой максимальной температуры:

$$T_{\max} = \frac{p_0 V_0 \mu}{mR} = \frac{(aV_0 + b)V_0 \mu}{mR},$$

где a , b , V_0 мы определили по ходу решения задачи.

VII. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

пVII.1 Все частицы имеют массу и поэтому подчиняются закону всемирного тяготения. Однако большинство из них способны взаимодействовать друг с другом с силой, которая примерно в 10^{40} раз превосходит силу тяготения. Эта сила называется силой электромагнитного взаимодействия.

Если частицы способны к электромагнитным взаимодействиям, то говорят, что они имеют электрический заряд. Таким образом, заряд — это количественная мера способности тел к электрическим взаимодействиям.

Существуют два вида заряда: положительный и отрицательный. Все окружающие нас тела состоят из большого числа положительно и отрицательно заряженных частиц. И хотя электрические силы взаимодействия между зарядами очень велики, непосредственно наблюдать эти силы в любом веществе невозможно, так как сумма положительных зарядов в любом веществе равна сумме отрицательных зарядов. В целом, атомы вещества нейтральны.

пVII.2 Если каким-либо способом из атома изымается несколько электронов, то у него окажется избыток положительного заряда и он называется *положительным ионом*. Аналогично, если в атом попадают избыточные электроны, то получается *отрицательно заряженный ион*. Избыток зарядов какого-либо вида в данном теле принято называть величиной его заряда, или количеством электричества.

пVII.3 Важным свойством электрического заряда является тот факт, что он сохраняется: если какая-то изолированная система (система, из которой не выходят и в которую не входят заряды) обладает определенным зарядом, то его величина остается неизменной:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \text{const.}$$

пVII.4 Силу взаимодействия между двумя точечными зарядами можно определить с помощью закона Кулона: два неподвижных точечных заряда отталкиваются или притягивают друг друга с силой, пропорциональной произведению модулей зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где q_1 и q_2 — величины зарядов, r — расстояние между ними, ϵ_0 — диэлектрическая постоянная, k — коэффициент пропорциональности. Причем

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \cdot 10^{-12}.$$

В векторной форме закон Кулона записывается так:

$$\vec{F}_{ik} = \frac{q_i q_k}{\vec{r}_{ik}^3} \vec{r}_{ik},$$

где \vec{F}_{ik} — сила, действующая на заряд q_k со стороны заряда q_i , \vec{r}_{ik} — радиус-вектор, проведенный от заряда q_i к заряду q_k .

В среде с диэлектрической проницаемостью ϵ сила взаимодействия между зарядами уменьшается в ϵ раз:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Сила взаимодействия двух зарядов не изменяется при наличии третьего, четвертого и так далее зарядов. Это свойство называется *принципом суперпозиции*, позволяющим определить действие целой системы зарядов на любой заряд:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}.$$

пVII.5 Любой электрический заряд создает вокруг себя электростатическое поле $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. Поле,

созданное точечным зарядом q_0 , равно $E = k \frac{q_0}{r^2}$.

Если в пространстве есть несколько зарядов, то результирующее поле равно сумме полей каждого из зарядов:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

Заряд, помещенный на проводник, распределяется по его поверхности таким образом, чтобы поле внутри проводника было равно нулю.

Напряженность поля заряженной проводящей сферы (шара)

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_0; \\ k \frac{Q}{r^2} & \text{при } r \geq R_0, \end{cases}$$

где R_0 — радиус сферы.

Напряженность поля, созданного проводящей заряженной бесконечной пластиной

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{2S\varepsilon\varepsilon_0}.$$

пVII.6 Каждая точка пространства, в котором существует поле, характеризуется своим потенциалом φ . Потенциал — это работа, которую нужно совершить, чтобы перенести единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку пространства.

Работа по перемещению положительного заряда из одной точки пространства в другую

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$

где U напряжение между точками 1 и 2.

Работа по перемещению зарядов не зависит от формы траектории и определяется только величиной заряда и его положением в электростатическом поле.

Потенциал поля точечного заряда в вакууме

$$\varphi = k \frac{q_0}{r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал положительного точечного заряда положителен и убывает с расстоянием от заряда, а потенциал отрицательного заряда — отрицателен и увеличивается при удалении от заряда.

При наличии нескольких точечных зарядов общий потенциал в некоторой точке поля равен алгебраической сумме потенциалов, созданных отдельными зарядами, т. е.

$$\varphi = \sum k \frac{q_i}{r_i} = k \sum \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенциал заряженной проводящей сферы (шара)

$$\varphi = \begin{cases} k \frac{q_0}{r} & \text{при } r \geq R_0; \\ k \frac{q_0}{R_0} & \text{при } r \leq R_0. \end{cases}$$

пVII.7 Связь между напряженностью E и разностью потенциалов двух точек в однородном электростатическом поле определяется формулой

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d},$$

где U — напряжение между двумя точками, d — расстояние между этими точками.

пVII.8 При помещении зарядов в диэлектрическую среду с проницаемостью ϵ кроме поля, создаваемого свободными зарядами, необходимо учитывать и поле связанных зарядов. Поэтому в однородном диэлектрике напряженность электростатического поля (как и сила взаимодействия и потенциал) уменьшается в ϵ раз по сравнению с вакуумом.

пVII.9 Коэффициент пропорциональности между зарядом, находящимся на уединенном проводнике, и его потенциалом называется емкостью этого проводника:

$$q = C\varphi.$$

Емкость уединенного шарика $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$.

Два изолированных друг от друга проводника, заряженных равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами, образуют конденсатор, емкость которого определяется по формуле

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \text{ или } q = CU.$$

Емкость конденсатора с диэлектриком, заполняющим пространство между обкладками конденсатора, увеличивается в ε раз, т. е.

$$C = \varepsilon C_0.$$

Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$.

Емкость сферического конденсатора $C = \frac{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 ab}{b - a}$,

где a и b — радиусы концентрических сфер.

пVII.10 При последовательном соединении нескольких конденсаторов общая емкость определяется формулой

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

При параллельном соединении конденсаторов общая емкость

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

пVII.11 Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

пVII.12 При внесении заряда q из бесконечно удаленной точки в поле, созданное другими зарядами, совершается работа $A = q\varphi$, где φ — потенциал точки поля, куда поместили заряд q . Например, если заряд q вносится в поле, созданное точечным зарядом q_0 , из бесконечно удаленной точки, то совершается работа

$$A = q\varphi = \frac{qkq_0}{r} = k \frac{qq_0}{r},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$, r — расстояние между зарядами q и q_0 .

Эту работу называют потенциальной энергией взаимодействия зарядов q_0 и q .

Задача VII.1 Два положительных точечных заряда $q_1 = 4q$ и $q_2 = q$ закреплены на расстоянии a друг от друга. Где нужно расположить заряд Q , чтобы он находился в равновесии? При каких условиях равновесие заряда Q будет устойчивым и неустойчивым?

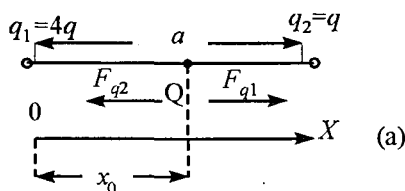


Рис. VII.1

Решение. Пусть заряд Q будет положительным и расположен на расстоянии x_0 от заряда q_1 (рис. VII.1, а).

На заряд Q действуют две силы со стороны зарядов q_1 и q_2 . Условие равновесия для заряда Q запишется:

$$\vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2} = 0.$$

В проекциях на ось OX это уравнение имеет вид:

$$F_{q_1} - F_{q_2} = 0, \text{ или } F_{q_1} = F_{q_2} \quad (1)$$

Из условия равновесия (1) следует

$$k \frac{q_1 Q}{x_0^2} = k \frac{q_2 Q}{(a - x_0)^2}. \quad (2)$$

Подставляя значения зарядов q_1 и q_2 , получим

$$4Q(a - x_0)^2 = Qx_0^2, \text{ или } 3x_0^2 - 8ax_0 + 4a^2 = 0. \quad (3)$$

Решаем уравнение (3):

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{3} = \frac{4a \pm 2a}{3};$$

$$x_1 = a/3; \quad x_2 = 2a.$$

Из этих двух решений физический смысл имеет только решение $x_1 = a/3$, так как если заряд поместить на расстоянии $x_2 = 2a$ от точки O , то равновесия быть не может, поскольку силы, действующие со стороны зарядов q_1 и q_2 , направлены в одну сторону.

Следует отметить, что заряд Q может быть любым по величине и по знаку. Это следует из уравнения (2), в котором Q сокращается.

Для определения характера равновесия следует рассмотреть силы, возникающие при малом смещении заряда Q из положения равновесия.

Пусть Q — положительный заряд. При продольном смещении Q вправо на Δx увеличивается сила

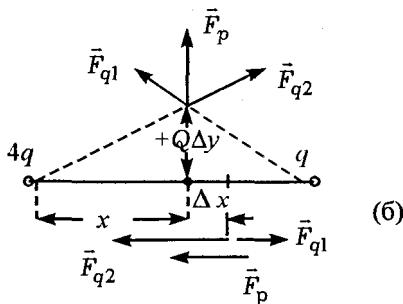


Рис. VII.1

отталкивания \vec{F}_{q_2} (так как уменьшается расстояние между зарядами Q и q_2) и уменьшается сила \vec{F}_{q_1} (увеличивается расстояние между зарядами Q и q_1). Поэтому результирующая этих двух сил \vec{F}_p будет возвращать заряд Q в первоначальное положение равновесия (рис. VII.1, б). Это означает, что при продольном смещении положительного заряда Q положение равновесия устойчивое.

Если заряд Q сместить по вертикали от положения равновесия на величину Δy , то возникает результирующая сила $\vec{F}_p = \vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2}$, которая удалит заряд Q еще дальше от положения равновесия (рис. VII.1, б). Следовательно, при поперечном смещении положительного заряда Q равновесие будет неустойчивым.

Пусть заряд Q — отрицательный. При продольном смещении заряда Q вправо на Δx увеличивается сила притяжения \vec{F}_{q_2} и уменьшается сила \vec{F}_{q_1} . Результирующая этих двух сил \vec{F}_p будет удалять отрицательный заряд Q еще дальше от положения равновесия (рис. VII.1, в). Это значит, что при продольном смещении отрицательного заряда Q

положение равновесия неустойчивое.

Если заряд Q сместить по вертикали от положения равновесия на величину Δy , то возникает результирующая сила

$\vec{F}_p = \vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2}$, которая возвращает заряд Q в положение равновесия. Следовательно, при поперечном смещении отрицательного заряда Q равновесие устойчивое.

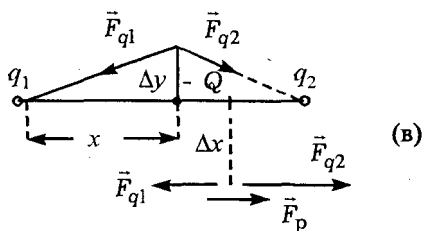


Рис. VII.1

Задача VII.2 На проволочное металлическое кольцо радиусом R помещен заряд Q . Определить напряженность поля в точке A , лежащей на оси кольца на расстоянии x_0 от центра O (рис. VII.2).

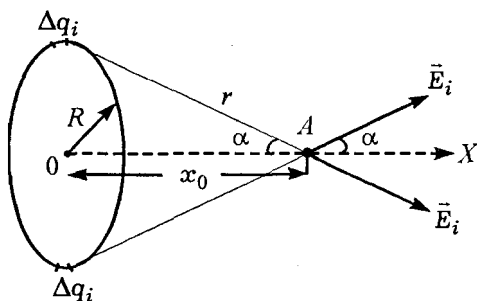


Рис. VII.2

Решение. Напряженность поля, созданного заряженным кольцом в точке A , является векторной суммой полей, созданных всеми отдель-

ными точечными зарядами Δq_i , которые находятся на маленьком участке кольца Δl_i . Заряд

$$\Delta q_i = \frac{Q}{2\pi l} \Delta l_i. \quad (1)$$

Рассмотрим два точечных заряда Δq_i , находящихся на противоположных концах диаметра. Результирующее поле этих двух зарядов направлено вдоль оси OX и равно

$$E_{pi} = 2E_i \cos \alpha = 2k \frac{\Delta q_i}{r^2} \frac{x_0}{r} = 2k \frac{\Delta q_i x_0}{r^3}. \quad (2)$$

Подставляя выражение для заряда Δq_i в уравнение (2), получим

$$E_{pi} = 2k \frac{Q \Delta l_i}{2\pi R} \frac{x_0}{r^3} = k \frac{Q \Delta l_i x_0}{\pi R (x_0^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Результирующее поле всего заряженного кольца

$$E_A = \sum E_{pi} = \frac{kQx_0}{\pi R (x_0^2 + R^2)^{3/2}} \sum \Delta l_i.$$

Следует отметить, что $\sum \Delta l_i = \pi R$, поскольку мы рассматриваем суммарное поле E_{pi} от двух заряженных участков Δl_i . Следовательно:

$$E_A = \frac{Qx_0}{4\pi^2 \varepsilon_0 R (x_0^2 + R^2)^{3/2}} \pi R = \frac{Qx_0}{4\pi \varepsilon_0 (x_0^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Анализируя полученную формулу, можно за-

метить, что в центре кольца ($x_0 = 0$) поле $E_A = 0$. Оно также обращается в нуль при $x_0 \rightarrow \infty$.

Задача VII.3 Определить напряженность поля электрического диполя в точке, отстоящей от оси диполя на расстоянии r , в двух случаях:

- 1) точка A лежит на прямой, проходящей через ось диполя;
- 2) точка B лежит на прямой, перпендикулярной оси диполя (рис. VII.3).

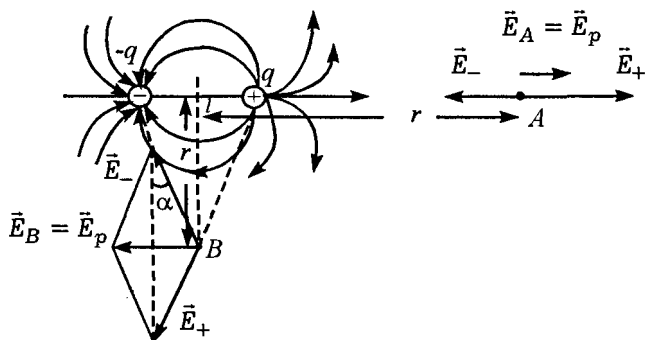


Рис. VII.3

Решение. Электрическим диполем называется совокупность двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расположенных друг от друга на некотором расстоянии l , малом по сравнению с расстоянием до точек, в которых проводится измерение напряженности электрического поля. Прямая, проходящая через заряды, называется осью диполя. Электрическим моментом диполя называется вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и равный $\vec{p} = ql$.

Каждый заряд диполя создает вокруг себя электрическое поле. Суммарное поле \vec{E} определяется по правилу сложения векторов.

Вычислим напряженность поля, создаваемую диполем вдоль его оси в некоторой точке A . Результирующее поле определяется векторной суммой полей отдельных зарядов, т. е. $\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$. В проекции вдоль оси диполя

$$E_A = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r - l/2)^2} - \frac{q}{(r + l/2)^2} \right],$$

где r — расстояние от центра диполя до точки наблюдения A .

Так как $l \ll r$, то

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q2lr}{r^4} = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1)$$

Направление вектора \vec{E} определяется направлением дипольного момента \vec{p} .

Для точек, лежащих на прямой, перпендикулярной оси, величина векторов \vec{E}_+ и \vec{E}_- одинакова.

$$|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left[r^2 + (l/2)^2 \right]},$$

а результирующий вектор $\vec{E}_B = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, причем

$$|\vec{E}_B| = 2E_+ \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q(l/2)}{\left(r^2 + l^2/4 \right)^{3/2}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) видно, что напряженность

поля диполя убывает пропорционально $1/r^3$, т. е. быстрее, чем поле точечного заряда. Картина распределения поля электрического диполя представлена на рис VII.3.

Задача VII.4 В центре полый проводящей незаряженной сферы помещен точечный заряд q_0 .

1) Где и какие электрические поля будут существовать?

2) Будут ли появляться заряды на сфере?

3) Будут ли происходить изменения электрического поля внутри и вне сферы при перемещении заряда внутри сферы?

4) Как будет меняться поле внутри и вне сферы, если заряд останется неподвижным, а внешнюю поверхность сферы заземлить на короткое время, а затем заряд осторожно вывести из полости сферы, не касаясь ее, через маленькое отверстие?

5) Где и какие заряды на сфере будут существовать, если точечный заряд поднести снаружи к незаряженной сфере?

Решение.

Внутри полый проводящей сферы будет существовать поле, определяемое по формуле для

поля точечного заряда $E = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. На внутренней

поверхности сферы наведется заряд $-q_0$, который расположен равномерно по внутренней поверхности. Так как сфера нейтральна, на ее внеш-

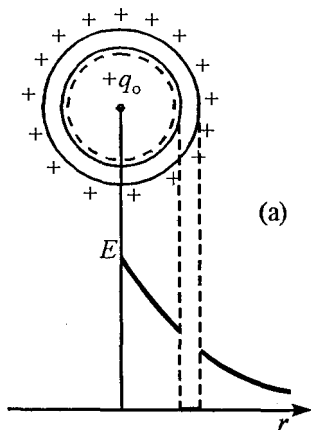


Рис. VII.4

ней поверхности равномерно расположен заряд $+q_0$. Внутри металлического слоя поле равно нулю. Вне сферы поле определяется зарядом $+q_0$ по формуле для поля точечного заряда (рис. VII.4, а).

При перемещении заряда внутри сферы изменяется электрическое поле внутри сферы, изменяется распределение отрицательного заряда на внутренней поверхности сферы (рис. VII.4, б).

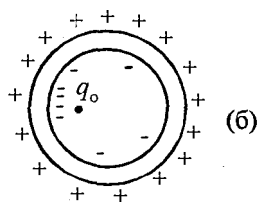


Рис. VII.4

Однако распределение положительного заряда на внешней поверхности сферы, а следовательно, и поле вне сферы изменяться не будет. Это связано с тем, что поле внутри металлического слоя равно нулю, поэтому изменение поля внутри сферы не влияет на распределение зарядов на ее внешней поверхности.

При заземлении на некоторое время внешней поверхности сферы все положительные заряды «уйдут» в землю (на самом деле из поверхности земли, которая является хорошим проводником, на внешнюю поверхность сферы придут электроны, которые компенсируют ее положительный за-

ряд). В этом случае внутри сферы поле будет существовать, а вне ее поле равно нулю (рис. VII.4, в). После выведения заряда q_0 из полости сферы отрицательные заряды начнут расталкиваться до тех пор, пока не распределяться равномерно на внешней поверхности сферы. В этом случае поле внутри сферы равно нулю, а вне сферы существует электрическое поле, подобное полю точечного заряда $-q_0$, помещенного в центре сферы (рис. VII.4, г).

Если же заряд q_0 поднести к сфере снаружи, то на внешней поверхности сферы образуется наведенный (индуцированный) заряд, который распределен, как указано на рис. VII.4, д. Вне сферы результирующее поле определяется суммой полей заряда q_0 и индуцированных зарядов. Внутри сферы поле равно нулю.

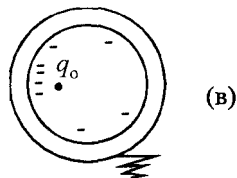


Рис. VII.4

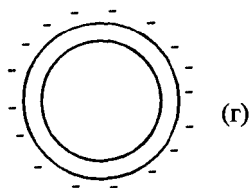


Рис. VII.4

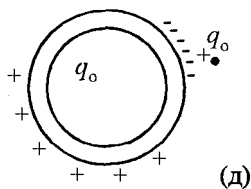


Рис. VII.4

Задача VII.5 Вблизи бесконечной незаряженной металлической пластины помещен заряд $+q_0$. Будут ли появляться заряды на плоскости? Где и какие (рис. VII.5)?

Решение. При помещении бесконечной пластины в поле точечного заряда q_0 в первое мгнове-

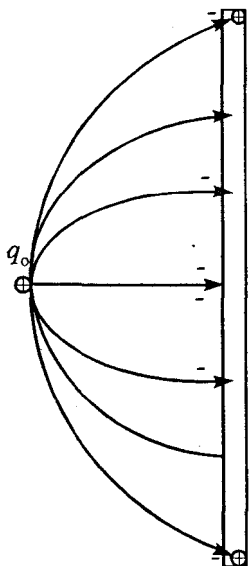


Рис. VII.5

ние в пластине будет существовать поле, которое стремится положительные заряды удалить в бесконечность, а отрицательные заряды приблизить к заряду q_0 . Перемещение зарядов внутри проводника происходит до тех пор, пока результирующее поле внутри него не обратится в нуль. После этого движение зарядов внутри проводника прекратится. Все заряды будут распределены на поверхности проводника таким образом, чтобы поле внутри него было равно нулю.

На левой стороне плоскости возникает индуцированный отрицательный заряд, распределенный неравномерно: плотность заряда тем больше, чем ближе соответствующий участок поверхности к заряду q_0 . Положительные заряды ушли в бесконечно удаленные части плоскости (рис. VII.5).

Слева от плоскости поле в любой точке пространства определяется векторной суммой полей заряда q_0 и распределенного по плоскости индуцированного заряда.

Справа от плоскости поле равно нулю.

Другими словами, незаряженная бесконечная пластина экранирует часть пространства, лежащую справа от пластины, от всех полей. Если

пластина не закреплена, то заряд и пластина притягиваются друг к другу.

Задача VII.6 В однородное электрическое поле с напряженностью E_0 перпендикулярно полю внесли большую металлическую пластину с площадью S (рис. VII.6). Какой заряд индуцируется на каждой ее стороне?

Решение. В незаряженном металлическом проводнике имеется огромное количество электронов (свободных зарядов), которые движутся хаотически. Под действием электрического поля заряженные частицы начинают двигаться упорядоченно. Принято говорить, что положительные заряды перемещаются в направлении поля, а отрицательные — против поля. (На самом деле в металле при наличии поля перемещаются лишь электроны. Положительные заряды (ядра атомов) не могут перемещаться. Они образуют кристаллическую решетку. Те части проводника, откуда электроны ушли, заряжаются положительно.) Таким образом, в нашей задаче на левой стороне пластины индуцируются отрицательные заряды, а на правой — положительные. Эти заряды равны по величине, так как пластина не заряжена (рис. VII.6).

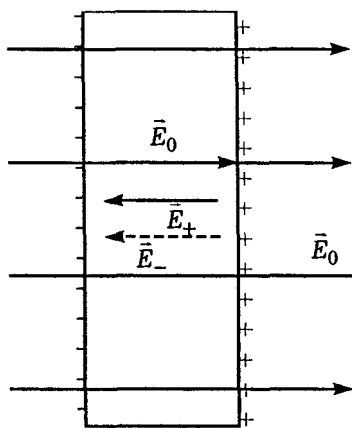


Рис. VII.6

Эти заряды равны по величине, так как пластина не заряжена (рис. VII.6).

Внутри металлической пластины суммарное поле, состоящее из внешнего поля \vec{E}_0 , поля отрицательных зарядов \vec{E}_- и поля положительных зарядов \vec{E}_+ , равно нулю, т. е.

$$E_0 - E_+ - E_- = 0.$$

Воспользовавшись выражением для поля, созданного проводящей бесконечной заряженной пластиной (пVII.5), запишем

$$E_0 - \frac{Q}{2S\epsilon_0} - \frac{Q}{2S\epsilon_0} = 0.$$

Следовательно, искомый заряд $Q = E_0 S \epsilon_0$.

Задача VII.7

Металлический шар радиуса R заряжен зарядом Q . Определить потенциал в любой точке внутри шара и в точке B , расположенной на расстоянии $x > R$ от центра шара (рис. VII.7, а).

Решение. Потенциал заряженного металлического шара (или сферы) на самой поверхности и

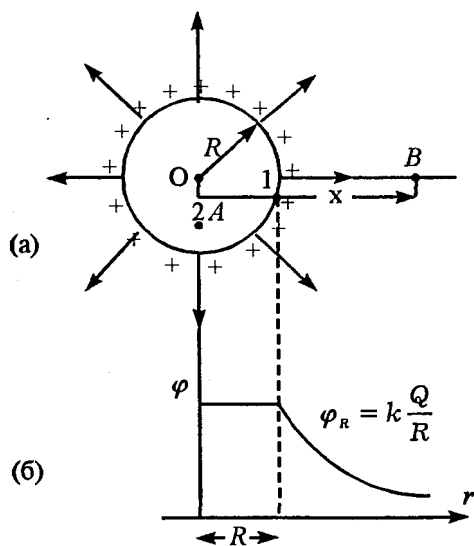


Рис. VII.7

вне ее определяется по формуле для потенциала точечного заряда, помещенного в центре O , поскольку поле, созданное заряженным шаром (или сферой) вне поверхности шара, в точности совпадает с полем одинакового по величине точечного заряда, помещенного в центре шара.

Определим потенциал внутри заряженного шара (сферы). Мысленно перенесем положительный заряд q_0 из точки 1, лежащей на поверхности шара, в произвольную точку 2 внутри шара. При этом мы совершим работу, определяемую формулой $A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$ (см. пVII.6). С другой стороны, $A_{12} = F\Delta l = q_0 E\Delta l$.

Приравнивая эти два выражения, получим

$$q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 E\Delta l.$$

Так как поле внутри металла равно нулю ($E = 0$), то $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, или $\varphi_1 = \varphi_2$. Поскольку точка 2 взята произвольно, то можно сделать вывод, что потенциал любой точки внутри металлического шара равен потенциалу на его поверхности.

График изменения потенциала φ заряженного шара с расстоянием r приведен на рис. VII.7, б.

Таким образом, потенциал в точке A

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

а потенциал в точке B определяется по формуле потенциала для точечного заряда

$$\varphi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

Задача VII.8 Металлический шар радиуса R , заряженный до потенциала φ , окружают сферической проводящей оболочкой радиуса R_1 . Как изменится потенциал шара после того, как он будет на короткое время соединен проводником с оболочкой (рис. VII.8)?

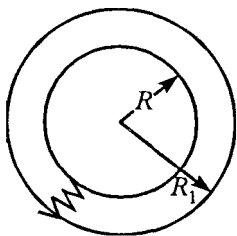


Рис. VII.8

Решение. Потенциал металлического заряженного шара радиуса R равен (см. пVII.6) $\varphi = k \frac{Q}{R}$, поэтому заряд, находящийся на шаре: $Q = \frac{\varphi R}{k}$. При соединении

шара с металлической оболочкой радиуса R_1 весь заряд перетечет на внешнюю сторону оболочки, и она теперь становится заряженной зарядом Q . (Вспомним, что внутри проводящего шара (сферы) поле всегда равно нулю и заряды отсутствуют!) Теперь потенциал этой оболочки равен:

$$\varphi_1 = k \frac{Q}{R_1} = \varphi \frac{R}{R_1}$$

Этот потенциал будет таким же и в любой точке внутри оболочки, а значит, и у шара радиуса R .

Таким образом, изменение потенциала шара

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi = k \frac{Q}{R_1} - k \frac{Q}{R} = \frac{k\varphi R}{k} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) = \varphi \left(\frac{R}{R_1} - 1 \right).$$

Задача VII.9 Сфера радиуса R заряжена зарядом Q . Ее окружают незаряженным металлическим шаровым слоем с радиусами R_1 и R_2 . Определить поле E и потенциал φ в точках A, B, C (рис. VII.9). Расстояния от центра сферы до точек A, B, C известны: r_A, r_B, r_C . Нарисовать график зависимости электростатического поля и потенциала от расстояния r .

Решение. Положительный заряд Q наводит на внутренней поверхности шарового слоя заряд $-Q$. Так как шаровой слой был не заряжен, то на его внешней поверхности появится положительный равномерно распределенный заряд $+Q$. Электростатическое поле (так же, как и потенциал) в любой точке пространства будет определяться суммой полей, созданных всеми заряжен-

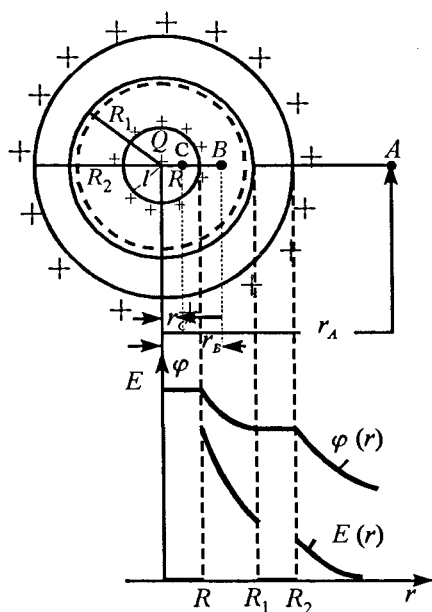


Рис. VII.9

ными поверхностями с радиусами R , R_1 , R_2 :

$$E_A = k \frac{Q}{r_A^2}, \quad \varphi_A = \frac{kQ}{r_A}, \quad \text{где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Поля от заряженных поверхностей радиусов R_1 и R_2 (как и потенциал), складываясь, дают результирующее поле в точке A , равное нулю.

В точке B поле от заряженных поверхностей шарового слоя равно нулю, и остается лишь поле, созданное зарядом Q , находящимся на сфере радиуса R , т. е.

$$E_B = k \frac{Q}{r_B^2}.$$

Потенциал в точке B складывается из потенциала, который создает сфера радиуса R , и сферические поверхности шарового слоя с радиусами R_1 и R_2 , т. е.

$$\varphi_B = \varphi_R + \varphi_{R_1} + \varphi_{R_2} = k \frac{Q}{r_B} - k \frac{Q}{R_1} + k \frac{Q}{R_2}.$$

Поле в точке C от всех трех заряженных поверхностей равно нулю (внутри любой заряженной сферической поверхности поле равно нулю), т. е.

$$E_C = 0.$$

Потенциал в точке C равен сумме потенциалов, созданных всеми заряженными поверхностями, т. е.

$$\varphi_C = \varphi_R + \varphi_{R_1} + \varphi_{R_2} = k \frac{Q}{R} - k \frac{Q}{R_1} + k \frac{Q}{R_2}.$$

Графики изменения электростатического поля и потенциала с расстоянием изображен на *рис.VII.9*.

Задача VII.10 Две параллельные металлические пластины соединены с источником напряжения с ЭДС \mathcal{E} (*рис. VII.10, a*). Параллельно им вводят еще две металлические пластины, так что расстояние между каждой из пластин равно d .

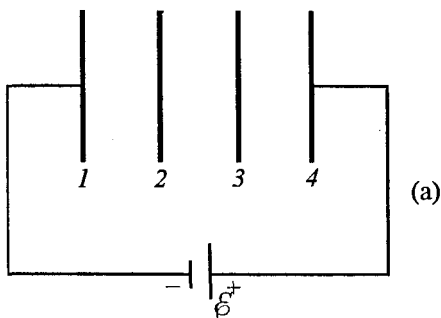


Рис. 7.10

1) Определить потенциал каждой из четырех пластин и поле во всех трех промежутках между пластинами.

2) Как изменятся потенциалы пластин и напряженности полей во всех промежутках, если пластины 2 и 3 на короткое время замкнуть?

3) Как изменятся заряды на пластинах 1 и 4?

4) Будут ли пластины 2 и 3 заряжены до и после замыкания?

Решение. Будем отсчитывать потенциалы всех пластин относительно первой пластины, т. е. ее потенциал примем за нуль ($\varphi_1 = 0$). Тогда из схемы ясно видно, что потенциал пластины 4 равен \mathcal{E} .

Так как все пластины одинаковы и находятся на равном расстоянии друг от друга, то падение напряжения на каждом промежутке между пластинами равно, т. е. $U_{21} = U_{32} = U_{43} = \frac{\mathcal{E}}{3}$. Следовательно:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U_{21} = \frac{\mathcal{E}}{3}, \text{ или } \varphi_2 = \frac{\mathcal{E}}{3} - 0 = \frac{\mathcal{E}}{3};$$

$$\varphi_4 - \varphi_3 = U_{43} = \frac{\mathcal{E}}{3}, \text{ откуда } \varphi_3 = \varphi_4 - \frac{\mathcal{E}}{3} = \frac{2}{3}\mathcal{E}.$$

Распределение зарядов на пластинах изображено на рис. VII.10, б.

Во всех трех промежутках электростатическое

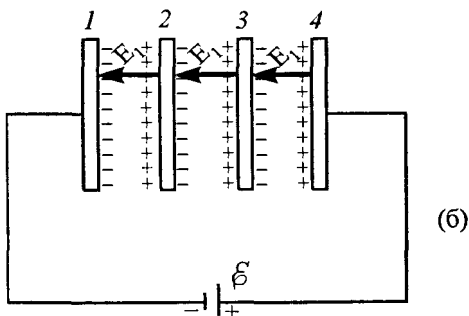


Рис. VII.10

поле направлено справа налево, одинаково по величине и равно $E_1 = U/d = \frac{\mathcal{E}}{3d}$. Если пластины 2 и 3 на короткое время замкнуть, то отрицательные заряды пластины 2 перейдут на пластину 3 и компенсируют положительные заряды этой пластины. Положительные заряды пластины 2 и отрицательные заряды пластины 3 останутся на мес-

те, так как они удерживаются силами притяжения зарядов, расположенных на соседних пластинах 1 и 4. Таким образом, распределение зарядов на пластинах изменится (рис. VII.10, в). В этом случае электрическое поле будет только между пластинами 1-2 и 3-4. Поле между пластинами 2-3 равно нулю. А это значит, что пластины 2-3 мож-

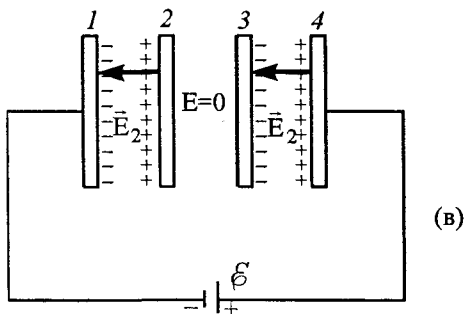


Рис. VII.10

но мысленно (а можно и реально) соединить металлическим проводником и при этом в схеме ничего не изменится (ведь в проводнике поле всегда равно нулю!). Теперь потенциал пластины 1 равен по-прежнему нулю ($\varphi_1 = 0$), потенциал пластины 4 $\varphi_4 = \mathcal{E}$, а потенциалы пластин 2 и 3 одинаковы и равны: $\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\mathcal{E}}{2}$. Следовательно, поле E_2 между пластинами 1-2 и 3-4 увеличится, так как оно определяется формулой

$$E_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{d} = \frac{\mathcal{E}}{2d}.$$

Однако мы знаем (пVII.6), что электрическое поле, созданное зарядами, расположенными на поверхностях металлических пластин, пропорционально величине зарядов:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{2S\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Поэтому поле в промежутках 1-2 и 3-4 может увеличиться только за счет увеличения зарядов на пластинах 1 и 4, которые дополнительно притекают из источника ЭДС до тех пор, пока потенциалы пластин 2 и 3 не выравняются. Пластины 2 и 3 до замыкания были не заряжены, а после замыкания пластина 2 оказалась заряженной положительно, а пластина 3 — отрицательно.

Задача VII.11 Металлическому шару радиуса R_1 сообщили заряд Q , а затем соединили его очень длинным и тонким проводом с металлическим незаряженным шаром радиуса R_2 . Как распределится заряд между шарами?

Решение. После соединения шаров начнется перемещение заряда от шара с большим потенциалом к шару с меньшим потенциалом. Это перемещение будет происходить до тех пор, пока потенциалы шаров не выравняются. Конечный потенциал шаров определяется формулой (см. пVII.6)

$$\varphi = k \frac{q_1}{R_1} = k \frac{q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 установившиеся заряды шаров.

В силу закона сохранения заряда $q_1 + q_2 = Q$. Решая совместно эти два уравнения, получим

$$q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2}; \quad q_2 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}.$$

Задача VII.12 Точечный заряд q_0 находится на расстоянии d от центра заземленной проводящей сферы радиуса R . Определить полный заряд q , индуцированный на поверхности сферы. Рассмотреть два случая: $d > R$ и $d < R$ (рис. VII.11, а, б).

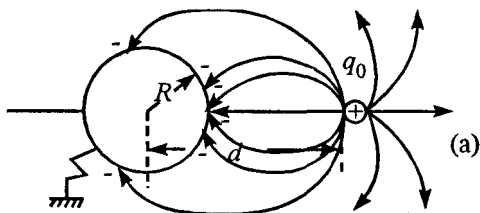


Рис. VII.11

Решение. Рассмотрим случай $d > R$. Так как сфера соединена с Землей, то ее потенциал, так же как и потенциал всех точек внутренней полости сферы, равен потенциалу Земли, т.е. равен нулю. Электрическое поле в любой точке пространства создается зарядом q_0 и зарядом q , индуцированным на поверхности сферы. При этом заряд q распределен неравномерно, но

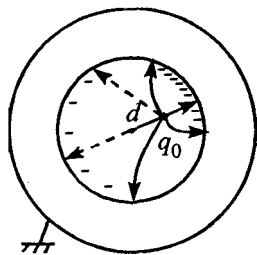


Рис. VII.11

(б) зарядом q_0 и зарядом q , индуцированным на поверхности сферы. При этом заряд q распределен неравномерно, но

таким образом, чтобы результирующая напряженность поля внутри сферы стала равной нулю.

Потенциал в любой точке пространства представляет собой сумму потенциалов полей, создаваемых точечным зарядом q_0 и точечными зарядами Δq_i , на которые можно разбить распределенный по внешней поверхности сферы индуцированный заряд q . Тогда для точки, расположенной в центре сферы:

$$\varphi_0 = \sum k \frac{\Delta q_i}{R} + k \frac{q_0}{d} = 0 \text{ (так как сфера заземлена),}$$

$$\text{или } k \frac{q}{R} + k \frac{q_0}{d} = 0.$$

Отсюда индуцированный заряд $q = -q_0 \frac{R}{d}$. Знак «-» означает тот факт, что индуцированный заряд всегда противоположного знака по сравнению с зарядом q_0 . Из полученной формулы видно, что величина индуцированного заряда зависит от расстояния d . При удалении заряда q_0 в бесконечность индуцированный заряд стремится к нулю, при приближении к сфере заряда q_0 ($d \rightarrow R$) величина индуцированного заряда стремится к q_0 .

Рассмотрим случай $d < R$.

В этом случае вне сферы поле равно нулю. Внутри сферы поле есть — оно создается зарядом q_0 , а индуцированные заряды расположены неравномерно на внутренней поверхности сферы.

Определим величину этого заряда. Ее легко определить, если воспользоваться картиной силовых линий. Силовые линии электростатического поля всегда начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, а число силовых линий однозначно связано с величиной заряда. Так как вне сферы поля нет, то нет и силовых линий. Следовательно, все силовые линии начались на заряде q_0 и окончились на индуцированных зарядах q . Откуда следует, что полный заряд $q_0 + q = 0$. Следовательно, $q = -q_0$. Величина индуцированного заряда q не зависит от расположения заряда q_0 внутри сферы. При перемещении заряда q_0 внутри сферы меняется лишь распределение индуцированного заряда на внутренней поверхности сферы.

Задача VII.13 Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Один из них вначале покоится, а другой движется со скоростью \vec{v}_0 , направленной к центру первого. На какое наименьшее расстояние они сблизятся (излучением электромагнитной энергии пренебречь)?

Решение. Электростатическое взаимодействие двух электронов тормозит движущийся электрон и ускоряет ранее покоящийся. В начальный момент потенциальная энергия взаимодействия системы из двух электронов равна нулю, а кинетическая энергия $E_K = \frac{mv_0^2}{2}$. В любой момент времени полная энергия электронов складывается из

потенциальной энергии взаимодействия зарядов и их кинетической энергии, т. е. закон сохранения полной энергии имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где v_1 и v_2 — скорости электронов, m — их масса, r — расстояние между зарядами, e — заряд электрона.

Кроме того, для электронов необходимо записать закон сохранения импульса

$$mv_0 = mv_1 + mv_2.$$

Наибольшее сближение электронов происходит тогда, когда их скорости станут одинаковыми (в этом случае скорость первого электрона относительно второго равна нулю, т. е. относительно второго электрона он останавливается). Из закона сохранения импульса следует, что в этот момент

$$v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2},$$

а закон сохранения энергии для этого момента запишется так:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2 \frac{m}{2} \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}},$$

$$\text{отсюда } r_{\min} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 mv_0^2}.$$

Задача VII.14 Металлический шар радиуса R , имеющий заряд q_0 , помещен внутри диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. VII.12). Определить величину и знак поляризационного заряда $q_{\text{п}}$ и плотность его распределения.

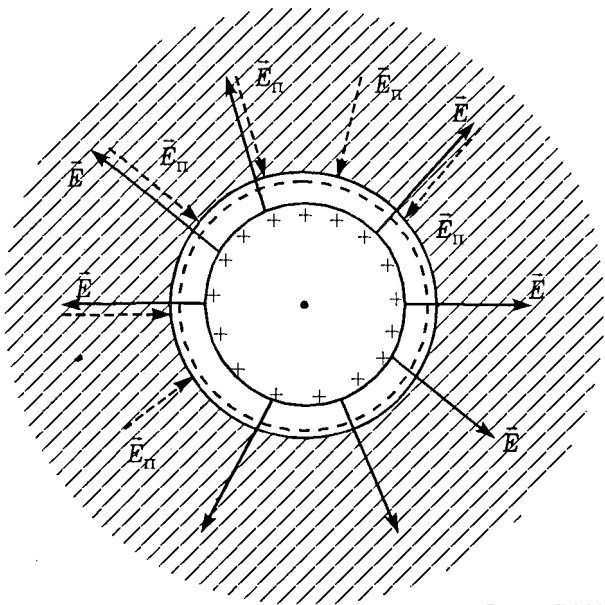


Рис. VII.12

Решение. При отсутствии диэлектрика поле, создаваемое заряженным шаром, в любой точке вне шара определяется по формуле (пVII.5)

$$E = k \frac{q_0}{r^2},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Если же шар окружен безграничным диэлектриком, то результирующее поле внутри диэлектрика

$$E_p = k \frac{q_0}{\epsilon r^2}.$$

Уменьшение напряженности электрического поля при погружении заряженного шара или любо-

го заряженного тела в диэлектрик объясняется появлением поляризационных зарядов $q_{\text{п}}$, выступающих на границе диэлектрика у поверхности заряженного шара. Именно поле этих поляризационных зарядов ($\vec{E}_{\text{п}}$) приводит к уменьшению поля в диэлектрике (рис.VII.12). Вычислим поле, созданное поляризационными зарядами:

$$E_{\text{р}} = E - E_{\text{п}}, \text{ или } E_{\text{п}} = E - E_{\text{р}} = k \frac{q_0}{r^2} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Поляризационные заряды расположены равномерно по поверхности сферы, окружающей шар, поэтому поле этих зарядов $E_{\text{п}}$ можно определить еще и по формуле

$$E_{\text{п}} = k \frac{q_{\text{п}}}{r^2}. \quad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получим, что поляризационный заряд

$$q_{\text{п}} = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} q_0.$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{q_{\text{п}}}{S} = \frac{q_{\text{п}}}{4\pi R^2} = \frac{(\varepsilon - 1)q_0}{\varepsilon 4\pi R^2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma_0,$$

где σ_0 — плотность зарядов на шаре. Отсюда

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \frac{q_0}{4\pi R^2}.$$

Задача VII.15 В заряженном плоском конденсаторе, отсоединенном от источника, напряжен-

ность электростатического поля равна E_0 . Половину пространства между пластинами конденсатора заполнили жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. VII.13, а). Чему стала равной напряженность E электростатического поля в пространстве между пластинами, свободном от диэлектрика?

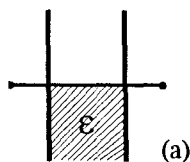


Рис. VII.13

Решение. Вначале на пластинах конденсатора находился заряд $Q = C_0 U_0 = C_0 E_0 d$, где C_0 — емкость пустого конденсатора, d — расстояние между пластинами, E_0 — напряженность электростатического поля в конденсаторе.

Когда половину конденсатора заполнили диэлектриком, то его можно рассматривать как два параллельно включенных конденсатора C_1 и C_2 (рис. VII.13, б), так как пластины металлические и каждая из них имеет всегда один и тот же потенциал. Полная емкость конденсатора после заполнения диэлектриком

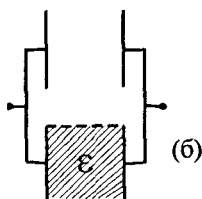


Рис. VII.13

$$C = C_1 + C_2 = \frac{C_0}{2} + \frac{\varepsilon C_0}{2} = \frac{C_0}{2}(1 + \varepsilon).$$

При отключенном источнике заряд на пластинах сохраняется, однако он может перераспределяться в пределах одной металлической пластины.

Новая разность потенциалов будет определяться по формуле

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{2Q}{C_0(1+\varepsilon)} = \frac{2C_0E_0d}{C_0(1+\varepsilon)} = \frac{2E_0d}{1+\varepsilon}.$$

Искомая напряженность поля внутри конденсатора

$$E = \frac{U}{d} = \frac{2E_0}{1+\varepsilon}.$$

Следует отметить, что заряд на пластинах верхней половины конденсатора, не заполненной диэлектриком:

$$q_1 = \frac{C_0}{2} U = \frac{C_0 E_0 d}{1+\varepsilon}.$$

Заряд же на пластинах нижней половины конденсатора, заполненной диэлектриком:

$$q_2 = \frac{C_0 E_0 d \varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Таким образом, при заполнении диэлектриком часть заряда переместилась с верхней половины пластин на нижнюю, хотя полный заряд

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{C_0 E_0 d}{1+\varepsilon} + \frac{C_0 E_0 d \varepsilon}{1+\varepsilon} = C_0 E_0 d$$

остался прежним.

Задача VII.16 Плоский конденсатор емкости C зарядили до разности потенциалов U_0 и отключили от источника ЭДС. Затем пространство между пластинами заполнили жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε . В другой раз тот же конденсатор оставили подключенным к источнику ЭДС $\mathcal{E} = U_0$ (рис. VII.14). Определить

заряды на пластинах конденсатора и напряженность поля в нем в обоих случаях.

Решение. Рассмотрим первый случай: заряженный конденсатор отключили от источника. В этом случае заряд на пластинах остается неизменным, однако емкость при заполнении диэлектриком увеличивается в ϵ раз. Следовательно, согласно формуле $Q = CU$ разность потенциалов на обкладках конденсатора должна уменьшиться в ϵ раз.

Напряженность поля в конденсаторе $E = U/d$ также должна уменьшиться в ϵ раз.

Во втором случае конденсатор не отключен, разность потенциалов на обкладках конденсатора не меняется и равна U_0 , а емкость увеличивается в ϵ раз. Следовательно, заряд на конденсаторе увеличится в ϵ раз, т. е. $Q' = \epsilon CU_0$.

Увеличение заряда на обкладках происходит за счет притекания дополнительного заряда из источника ЭДС. Напряженность поля E в конденсаторе при заполнении диэлектриком не меняется, так как не меняется разность потенциалов на его обкладках:

$$E = \frac{U_0}{d}.$$

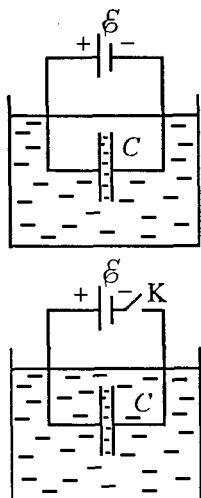


Рис. VII.14

Задача VII.17 Сферический воздушный конденсатор состоит из двух проводящих concentric сфер с радиусами a и b (рис. VII.15). Определить емкость сферического конденсатора.

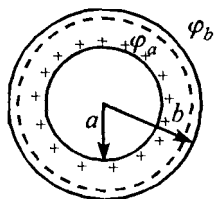


Рис. VII.15

Решение. Пусть на одной обкладке сферического конденсатора (на сфере радиуса a) помещен заряд $+Q$, а на другой (на сфере радиуса b) — заряд $-Q$.

В этом случае потенциал внешней заряженной сферы (относительно бесконечно удаленной точки) определяется как алгебраическая сумма потенциалов, созданных зарядами на внутренней и внешней сферических поверхностях, т. е.

$$\varphi_b = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} = 0.$$

Потенциал внутренней сферы

$$\varphi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Разность потенциалов между обкладками сферического конденсатора

$$\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(b-a)}{ab}.$$

Таким образом, емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}.$$

Эта формула позволяет провести некоторые предельные переходы. Например, если $b \gg a$, т. е. внешняя сфера удалена, то $C = 4\pi\epsilon_0 a$, т. е. емкость конденсатора равна емкости уединенного шара. Следовательно, уединенный шар можно рассматривать как конденсатор, у которого роль внешних обкладок играют удаленные предметы.

Если же сферические поверхности находятся близко друг к другу, так что расстояние между ними $d = (b - a)$ намного меньше среднего ради-

уса сфер, т. е. $d \ll r$, то $C = \frac{4\pi\epsilon_0 r^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$. Та-

ким образом, емкость сферического конденсатора, у которого расстояние между пластинами намного меньше радиуса сфер, можно вычислять по формуле плоского конденсатора.

Задача VII.18 Определить емкость батареи конденсаторов, изображенной на рис. VII.16, а. Емкость каждого конденсатора C_0 .

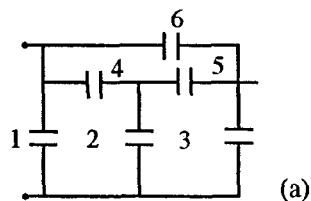


Рис. 7.16

Решение. Схема будет выглядеть проще, если ее изобразить по-другому (рис. VII.16, б). Из этого рисунка видно, что потенциалы точек А и В одинаковы, а это означает, что конденсатор C_5 всегда не заряжен, так

как разность потенциалов между его обкладками равна нулю. Поэтому точки А и В можно соединить либо коротким проводом (эквипотенциаль-

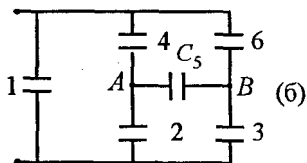


Рис. VII.16

ной поверхностью), и от этого в схеме ничего не изменится, либо конденсатор C_5 вовсе выбросить. И тот и другой случай изображены на рис. VII.16, в, г.

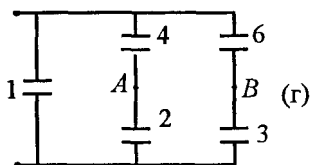
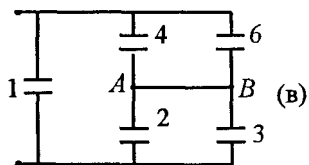


Рис. VII.16

Полная емкость схемы (в) и (г) равна:

$$\text{в) } C = C_0 + \frac{2C_0 2C_0}{2C_0 + 2C_0} = C_0 + C_0 = 2C_0;$$

$$\text{г) } C = C_0 + 2 \frac{C_0 C_0}{C_0 + C_0} = 2C_0.$$

Следует отметить, что в задачах подобного рода всегда нужно искать точки равного потенциала, что позволяет существенно упростить задачу.

Задача VII.19 Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. VII.17. Все элементы схемы заданы.

Решение. Конденсаторы заряжаются от источника ЭДС до некоторых напряжений U_1, U_2, U_3, U_4 , при этом

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q_2}{C_2}; \quad U_3 = \frac{q_3}{C_3}; \quad U_4 = \frac{q_4}{C_4}.$$

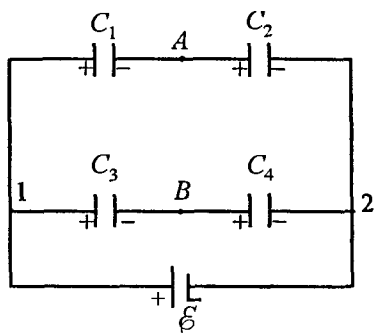


Рис. VII.17

Так как конденсаторы C_1 и C_2 включены последовательно, то заряды на их обкладках одинаковые, т. е. $q_1 = q_2$, аналогично $q_3 = q_4$.

Если конденсаторы C_1 и C_2 заменить одним конденсатором $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, то заряд q_1 на его обкладках определяется легко (аналогично определяется и заряд q_3):

$$q_1 = \varepsilon \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad q_3 = q_4 = \varepsilon \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}.$$

В электростатике работа по замкнутому контуру равна нулю. Выберем контур 1AB1. При обходе контура важно правильно определить полярность обкладок конденсатора, так как при движении от большего потенциала к меньшему падение напряжения следует брать со знаком «+»,

а при движении от меньшего потенциала к большему — со знаком «-»:

$$U_1 + U_{AB} - U_3 = 0, \text{ или } U_{AB} = U_3 - U_1.$$

Так как $U_3 = \frac{q_3}{C_3}$, а $U_1 = \frac{q_1}{C_1}$, то, подставляя

величину зарядов q_3 и q_1 , получим

$$U_{AB} = \frac{\oint C_3 C_4}{C_3(C_3 + C_4)} - \frac{\oint C_1 C_2}{C_1(C_1 + C_2)} = \frac{\oint(C_1 C_4 - C_2 C_3)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

Можно было бы выбрать и контур $AB2A$. В этом случае

$$U_{AB} + U_4 - U_2 = 0 \text{ и } U_{AB} = U_2 - U_3.$$

Вычисления попробуйте проделать сами. Ответ получите в обоих случаях одинаковый.

Задача VII.20 В схеме, изображенной на *рис.VII.18*, потенциалы точек 1, 2, 3 равны $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ соответственно. Емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3 . Определить потенциал точки 0.

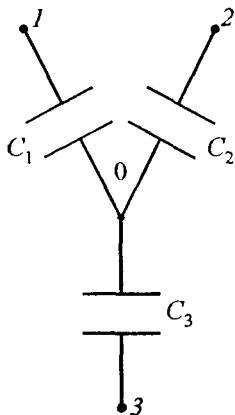


Рис. VII.18

Решение. Обозначим потенциал точки 0 через φ . Сумма зарядов всех обкладок конденсаторов, подсоединенных к точке 0, всегда остается постоянной и равной нулю, так как до зарядки конденсаторов на всех пластинах заряд отсутствовал. Вычислим величины этих зарядов.

Обозначим потенциал точки 0 через φ . Сумма зарядов всех обкладок конденсаторов, подсоединенных к точке 0, всегда остается постоянной и равной нулю, так как до зарядки конденсаторов на всех пластинах заряд отсутствовал. Вычислим величины этих зарядов.

$$Q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi); \quad Q_2 = C_2(\varphi_2 - \varphi); \quad Q_3 = C_3(\varphi_3 - \varphi).$$

Тогда $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, или

$$C_1(\varphi_1 - \varphi) + C_2(\varphi_2 - \varphi) + C_3(\varphi_3 - \varphi) = 0,$$

откуда
$$\varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

VIII. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

пVIII.1 Электрический ток — это направленное движение электрических зарядов.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qn\bar{v}S,$$

где q — заряд одной частицы, n — концентрация частиц, \bar{v} — средняя скорость движения частиц, S — площадь поперечного сечения проводника.

пVIII.2 Электродвижущая сила \mathcal{E} (ЭДС) равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}.$$

пVIII.3 Закон Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где U — разность потенциалов на концах участка цепи, R — сопротивление участка.

пVIII.4 Закон Ома для замкнутой цепи: сила тока в замкнутой цепи (рис. VIII.1) равна отношению ЭДС к полному сопротивлению цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где r — внутреннее сопротивление источника ЭДС.

пVIII.5 Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС: разность потенциалов на концах участка цепи, содержащего ЭДС, равна величине этой ЭДС минус произведение силы тока на внутреннее сопротивление (r) источника ЭДС (рис. VIII.2): $U_{AB} = \mathcal{E} - Ir$.

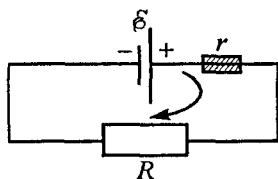


Рис. VIII.1

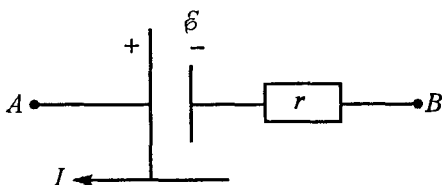


Рис. VIII.2

пVIII.6 Для проводников, диаметр которых намного меньше их длины ($d \ll l$), существует связь между сопротивлением проводника и его размерами:

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление.

пVIII.7 Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 0°C , α — температурный коэффициент сопротивления. Для металлов эта зависимость часто записывается так:

$$\rho = \frac{\rho_0 T}{T_0},$$

где T — температура по шкале Кельвина, $T_0 = 273^\circ\text{K}$.

пVIII.8 При последовательном соединении проводников их сопротивления складываются, т. е.

$$R_0 = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i,$$

где R_0 — общее сопротивление.

При параллельном соединении проводников складываются их проводимости, т. е.

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

пVIII.9 Для уменьшения чувствительности амперметра в n раз параллельно ему необходимо подключить шунтирующее сопротивление $R_{\text{ш}}$.

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_a}{n - 1},$$

где R_a — сопротивление амперметра.

Для уменьшения чувствительности вольтметра в n раз к нему последовательно необходимо подключить дополнительное сопротивление R_A .

$$R_d = R_b(n - 1).$$

пVIII.10 При расчете схем, состоящих из нескольких узлов и ветвей, пользуются двумя основными законами:

1) законом сохранения зарядов — в каждом узле количество зарядов, притекающих в единицу времени, равно количеству зарядов, утекающих за это же время, другими словами, сумма всех токов в узле с учетом знака всегда равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n I_i = I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0;$$

2) работа по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю, при этом если при обходе контура на любом элементе идем от большего потенциала к меньшему, то работа берется со знаком «+», если же идем от меньшего потенциала к большему, то со знаком «-».

В радиотехнике эти два закона используются в правилах Кирхгофа:

$$1) \sum_{i=1}^n I_i = 0; \quad 2) \sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_k,$$

где $I_i R_i$ — падение напряжения на элементах, \mathcal{E}_k — ЭДС, входящие в контур.

пVIII.11 Закон Джоуля-Ленца: количество теплоты, выделенной протекающим током на некотором участке цепи, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления этого участка и времени прохождения тока:

$$Q = I^2 R t.$$

пVIII.12 Мощность — это работа, совершаемая в единицу времени:

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

Мощность, развиваемая источником ЭДС, равна $N_0 = \mathcal{E}I$.

Мощность, выделяемая при нагревании проводников, $N_1 = I^2 R = \frac{U^2}{R}$.

Если в цепи нет механических (химических) взаимодействий, то $N_0 = N_1$, в противном случае $N_0 > N_1$.

пVIII.13 Коэффициент полезного действия — отношение полезной мощности к полной, развиваемой в цепи:

$$\eta = \frac{N_{\text{полез}}}{N_{\text{полн}}}.$$

пVIII.14 Законы электролиза: масса любого вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна полному заряду, прошедшему через электролит, т.е.

1) $m = kq = kIt$ — первый закон Фарадея, где k — коэффициент пропорциональности, называемый электрохимическим эквивалентом данного вещества;

2) $m = \frac{\mu It}{Fn}$ — второй закон Фарадея, где F — постоянная Фарадея, n — валентность вещества, μ — молярная масса.

Задача VIII.1 Определить среднюю скорость \bar{v} направленного движения электронов вдоль медного проводника при плотности тока $j = 11 \text{ А/мм}^2$, если считать, что на каждый атом меди в металле имеется один свободный электрон. Молярная масса меди $\mu = 64 \text{ г/моль}$, плотность меди $\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$.

Решение. Часто при решении задач на постоянный ток пользуются понятием *плотности тока* — это ток, протекающий через единичную поверхность, т. е. $j = \frac{I}{S} = ne\bar{v}$ (см. пVIII.1), где n — концентрация электронов, e — заряд электрона, \bar{v} — средняя скорость движения электронов.

Из последнего выражения следует, что $\bar{v} = \frac{j}{ne}$. Концентрация n по определению равна

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{m}{\mu} \frac{N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{\mu}.$$

Подставив это соотношение в выражение для скорости, получим

$$\bar{v} = \frac{j\mu}{e\rho N_A} = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с} = 0,82 \text{ мм/с}.$$

Как видно, средняя скорость направленного движения электронов весьма незначительная.

Задача VIII.2 К источнику ЭДС подключили три сопротивления, как указано на рис. VIII.3,

$R_1 = R_2 = R_3 = R$. Определить общее сопротивление схемы и ток I протекающий через источник \mathcal{E} .

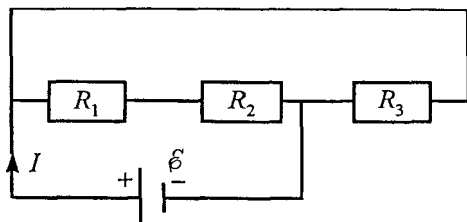


Рис. VIII.3

Решение. Сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно. Их общее сопротивление $R' = R_1 + R_2 = 2R$. Сопротивление R_3 подсоединено параллельно сопротивлению R' , поэтому общее сопротивление цепи

$$R_0 = \frac{RR_3}{R + R_3} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3} R; \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} = \frac{3\mathcal{E}}{2R}.$$

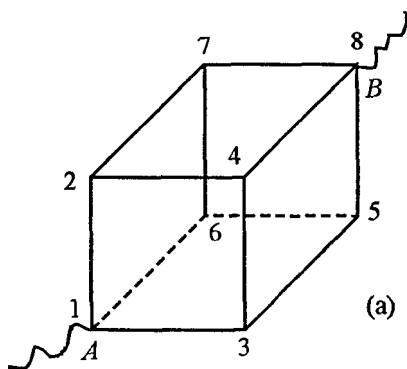


Рис. VIII.4

Задача VIII.3 Определить сопротивление куба, подключенного в цепь как показано на рис. VIII.4, а. Сопротивление каждой грани куба r .

Решение. В силу симметрии схемы ясно, что потенциалы точек 2, 3, 6 одинаковы, так же как и потенциалы точек 4, 5, 7.

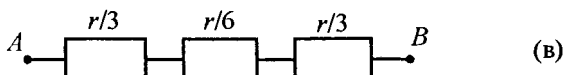
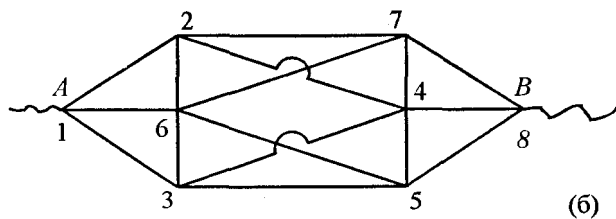


Рис. VIII.4

Точки равного потенциала можно соединить единым проводом, от этого в схеме ничего не изменится, но она будет выглядеть по другому (рис. VIII.4, б). Теперь сопротивление куба вычислить просто. Общее сопротивление между точками 1 и 3; 5 и 8 равно $r/3$, а сопротивление между точками 2 и 7 равно $r/6$ (рис. VIII.4, б). Общее сопротивление всего куба (между точками A и B) равно (рис. VIII.4, в):

$$R_{AB} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} r.$$

Задача VIII.4 На рис. VIII.5 изображен мостик для измерения сопротивлений (мостик Уитстона). Неизвестное сопротивление R_x , R_0 — эталонное сопротивление. Вольтметр соединен скользящим контактом с однородным проводом большого сопротивления AB (реохорд). Расстояние контакта D от точек A и B можно измерить с помощью сан-

тиметра, который лежит рядом с высокоомным сопротивлением AB . В тот момент, когда показания вольтметра равны нулю, фиксируются расстояния l_1 и l_2 . Определить неизвестное сопротивление R_x .

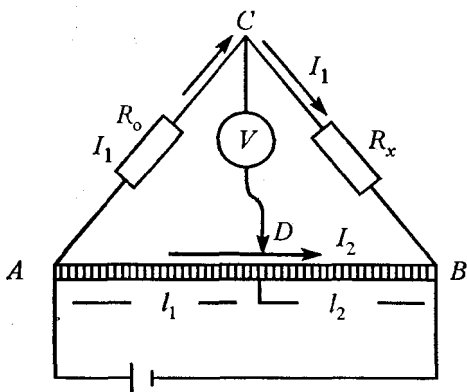


Рис. VIII.5

Решение. Так как разность потенциалов $\varphi_C - \varphi_D = 0$, то ток I_1 , текущий через сопротивление R_0 , далее потечет через сопротивление R_x , а ток I_2 протекает через реохорд AB . Через вольтметр V ток не протекает, так как $\varphi_C - \varphi_D = 0$. Поскольку потенциал точки C равен потенциалу точки D , то можно записать

$$I_1 R_0 = I_2 r_1; \quad I_1 R_x = I_2 r_2,$$

где r_1 — сопротивление участка проволоки AB длиной l_1 , r_2 — сопротивление проволоки длиной l_2 . Разделив эти два соотношения друг на друга, получим

$$\frac{R_0}{R_x} = \frac{r_1}{r_2}, \text{ или } R_x = \frac{R_0 r_2}{r_1}.$$

Сопротивления r_1 и r_2 связаны с длиной проводников следующим образом (см. п. VIII.6):

$$r_1 = \rho \frac{l_1}{S}; \quad r_2 = \rho \frac{l_2}{S}.$$

Поэтому $R_x = \frac{R_0 l_2}{l_1}$.

Задача VIII.5 Два одинаковых аккумулятора с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r соединены один раз последовательно, другой — параллельно (рис. VIII.6). Определить разность потенциалов между точками A и B в обоих случаях.

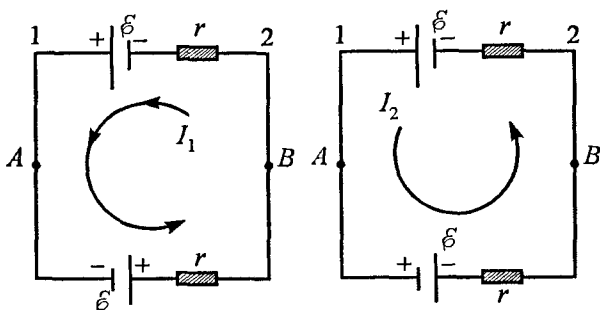


Рис. VIII.6

Решение. При последовательном соединении источников по контуру течет ток $I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{2r} = \frac{\mathcal{E}}{r}$.

Выберем контур A12BA. При обходе этого контура против часовой стрелки получим

$$U_{AB} + I_1 r - \mathcal{E} = 0, \text{ отсюда}$$

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I_1 r = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r} r = 0.$$

Следовательно, при последовательном соединении источников разность потенциалов между точками А и В равна нулю.

В контуре может быть сколько угодно одинаковых элементов, соединённых последовательно. Напряжение между любыми элементами всегда будет равно нулю (рис. VIII.7).

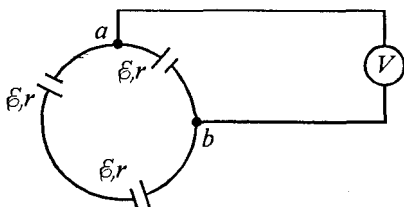


Рис. VIII.7

При параллельном соединении источников ток в контуре равен $I_2 = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}}{2r} = 0$. Вновь обходим верхнюю часть контура против часовой стрелки, получаем $U_{AB} + I_2 r - \mathcal{E} = 0$, тогда

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I_2 r = \mathcal{E} - 0 = \mathcal{E}.$$

Таким образом, при параллельном соединении источников разность потенциалов между точками А и В равна \mathcal{E} . Если параллельно включено n одинаковых источников с одинаковыми внутренними сопротивлениями, то разность между точками А и В всегда равна \mathcal{E} . Если же источники разные, то $U_{AB} \neq \mathcal{E}$.

Задача VIII.6 Цепь с внешним сопротивлением R (рис. VIII.8) питается от батареи, состоящей из

N элементов. Каждый элемент имеет сопротивление r и ЭДС \mathcal{E}_0 . Батарея состоит из одинаковых последовательно соединенных элементов, которые соединены в параллельные группы. Определить число групп n и число элементов в группах m , при которых будет получена наибольшая сила тока в цепи.

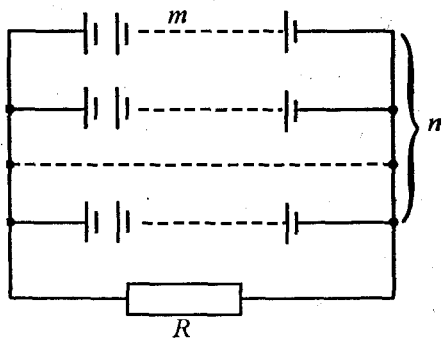


Рис. VIII.8

Решение. Сопротивление каждой группы $R_1 = mr$, а $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 m$. Групп же таких будет $n = N/m$. Общее сопротивление всех групп равно

$$R_2 = \frac{R_1}{n} = \frac{R_1 m}{N}.$$

Следовательно, сила тока, протекающего через сопротивление R , при любом значении m определяется

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 m}{R_2 + R} = \frac{\mathcal{E}_0 m}{R_1 m / N + R} = \frac{\mathcal{E}_0 m}{rm^2 / N + R}.$$

Максимум этого выражения достигается при $\frac{rm^2}{N} = R$.

Батарея из N элементов дает наибольшую силу тока тогда, когда ее внутреннее сопротивление равно сопротивлению внешней цепи, т. е. когда

$R_2 = R$, или $\frac{rm^2}{N} = R$. Таким образом:

$$m = \sqrt{\frac{RN}{r}}, \text{ а } n = \frac{N}{m} = \sqrt{\frac{rN}{R}}.$$

Задача VIII.7 В схеме, изображенной на рис. VIII.9, определить токи в каждой ветви. $\mathcal{E}_1 = 15 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 30 \text{ В}$, $r_1 = 3 \text{ Ом}$, $r_2 = 6 \text{ Ом}$, $R = 8 \text{ Ом}$.

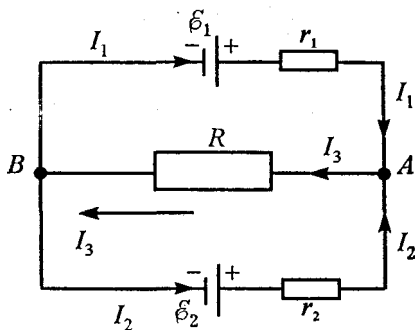


Рис. VIII.9

Решение. Выберем направление токов, как показано на рисунке (хотя Вы можете выбрать направление токов, как пожелаете!). Применяв закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС (пVIII.5), можно записать:

$$U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1; \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2; \quad U_{AB} = I_3 R.$$

Тогда значение токов, полученных из этих выражений, будут:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - U_{AB}}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U_{AB}}{r_2}; \quad I_3 = \frac{U_{AB}}{R}.$$

Так как алгебраическая сумма токов для любого узла равна нулю, то $I_1 + I_2 - I_3 = 0$, или $I_3 = I_1 + I_2$ (рис. VIII.9, точка A) и тогда

$$\frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{\mathcal{E}_1 - U_{AB}}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - U_{AB}}{r_2}.$$

Перепишем это уравнение иначе:

$$U_{AB} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2},$$

отсюда

$$U_{AB} = \frac{\mathcal{E}_1/r_1 + \mathcal{E}_2/r_2}{1/R_3 + 1/r_1 + 1/r_2}.$$

Подставляя цифровые значения, получим $U_{AB} = 16$ В, тогда

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - U_{AB}}{r_1} = -1/3 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U_{AB}}{r_2} = 2 1/3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{r_3} = 2 \text{ А}.$$

Таким образом, направление токов I_2 и I_3 мы выбрали правильно, а ток I_1 на самом деле течет

от точки A в точку B , о чем говорит знак «-»

Задача VIII.8 Какой ток потечет через амперметр с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением в схеме, изображенной на рис. VIII.10?

$R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = R_4 = R = 10 \text{ Ом}$, $\mathcal{E} = 7,5 \text{ В}$.

Решение. Выберем направление токов в ветвях схемы, как указано на рисунке. Сопротивление амперметра равно нулю, поэтому сопротивления R_3 и R_4 можно считать включенными параллельно, а сопротивление участка 1-2 равно $R/2$. Тогда сопротивление участка AB

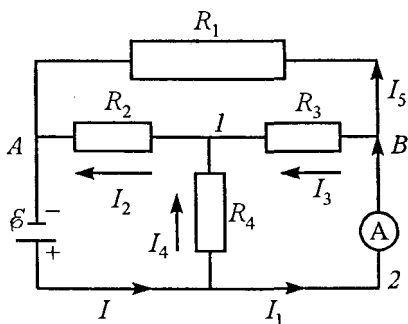


Рис. VIII.10

$$R_{AB} = \frac{R_1 \left(R_2 + \frac{R}{2} \right)}{R_1 + \left(R_2 + \frac{R}{2} \right)} = \frac{R_1 \cdot \frac{3}{2} R}{R_1 + \frac{3}{2} R} \doteq 7,5 \text{ Ом.}$$

Ток I , проходящий через источник \mathcal{E} , равен

$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AB}} = 1 \text{ А}$. Через сопротивление R_2 течет половина этого тока, так как сопротивление участка $A1-2$, равное $R_2 + \frac{R}{2} = \frac{3}{2} R$, параллельно сопротивлению R_1 и поэтому $I_2 = \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \text{ А}$. Токи, текущие через сопротивления R_4 и R_3 , одинаково-

вы и равны половине тока I_2 ($R_3 = R_4 = R$), т. е.

$$I_4 = I_3 = I_2/2 = 1/4 \text{ А.}$$

Поскольку ток I , проходящий через источник, равен $I = I_4 + I_1$, где I_1 — ток, протекающий через амперметр, то $I_1 = I - I_4 = 3/4 \text{ А.}$

Задача VIII.9 В схеме, изображенной на рис. VIII.11, (а) заданы сопротивления: $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$, $R_4 = 7 \text{ Ом}$ и $\mathcal{E} = 36 \text{ В}$. Определить ток на участке CD . Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

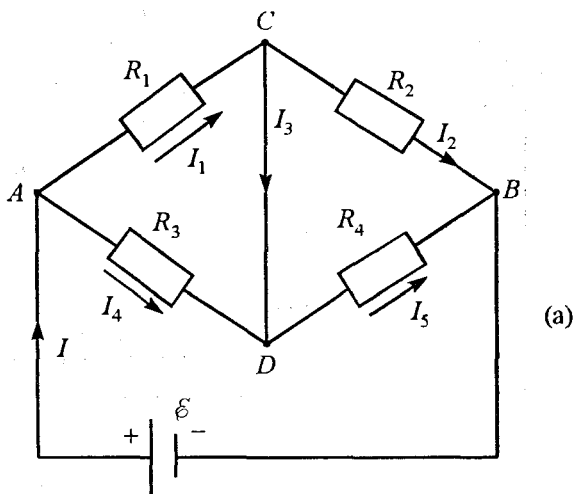


Рис. VIII.11

Решение. Разность потенциалов между точками C и D равна нулю, потому что сопротивление участка CD равно нулю, но ток через этот участок протекает и он может быть любым.

Так как разность потенциалов $\varphi_C - \varphi_D = 0$, то схему можно изобразить по-другому (рис. VIII.11, б). Общее сопротивление участков AC и CB равны:

$$R_{AC} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 1,5 \text{ Ом};$$

$$R_{CB} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2,1 \text{ Ом}$$

как сопротивления параллельно включенных проводников, а сопротивление участка AB

$$R_{AB} = R_{AC} + R_{CB} = 3,6 \text{ Ом}.$$

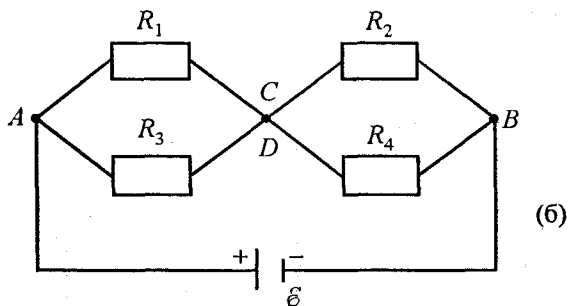


Рис. VIII.11

Направление токов в каждой ветви схемы мы можем выбирать произвольно. При выборе направлений токов, указанных на рис. VIII.11, (а), ток на

участке CD $I_3 = I_1 - I_2$, причем ток $I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R_1}$,

а ток $I_2 = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_2}$. В свою очередь $\varphi_A - \varphi_C = IR_{AC}$,

а $\varphi_C - \varphi_B = IR_{CB}$.

Таким образом, нам остается вычислить общий ток I . Он легко определяется из закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AC} + R_{CB}} = \frac{36}{3,6} = 10 \text{ А, тогда}$$

$$\varphi_A - \varphi_C = IR_{AC} = 15 \text{ В, } \varphi_C - \varphi_B = IR_{CB} = 21 \text{ В.}$$

$$\text{Ток } I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R_1} = \frac{IR_{AC}}{R_1} = \frac{\mathcal{E}R_{AC}}{R_1(R_{AC} + R_{CB})} = 7,5 \text{ А.}$$

$$\text{Ток } I_2 = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_2} = \frac{IR_{CB}}{R_2} = \frac{R_{CB}}{R_2(R_{AC} + R_{CB})} = 7 \text{ А.}$$

$$I_{CD} = I_3 = I_1 - I_2 = 0,5 \text{ А.}$$

В этой задаче цифровые значения сопротивлений, токов и напряжений приходилось получать по ходу решения, чтобы избежать очень громоздких выражений.

Задача VIII.10 В схеме, изображенной на рис. VIII.12, заданы все элементы. Посчитать токи, протекающие в ветвях этой схемы.

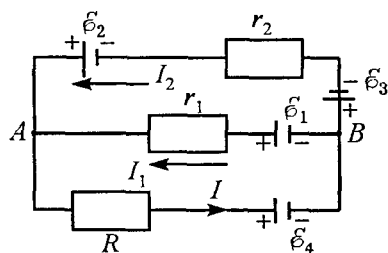


Рис. VIII.12

Решение. В этой схеме имеется три ветви: $A\mathcal{E}_2B$, $A\mathcal{E}_1B$, $A\mathcal{E}_4B$.

Направление токов в ветвях выбирается произвольно. Направим их так, как показано на рисунке. Тогда для узла А запишем

$$I_1 + I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Для определения трех неизвестных величин нужно иметь три уравнения. Два остальных уравнения мы получим, если запишем работу электрического поля по перенесению единичного положительного заряда вдоль контура. Выберем замкнутые контуры $A\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3BA$ и $A\mathcal{E}_4B\mathcal{E}_1A$, причем второй контур надо выбирать так, чтобы в него вошел хотя бы один элемент, не вошедший в предыдущий контур.

Обход контура можно проводить в любом направлении (хотя удобнее — по току). Если при обходе контура на любом элементе идем от большего потенциала к меньшему, то падение напряжения берется со знаком «+», если же идем от меньшего потенциала к большему, то со знаком «-». Для контура $A\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3BA$

$$\mathcal{E}_2 - I_2 r_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1 = 0. \quad (2)$$

Для контура $A\mathcal{E}_4B\mathcal{E}_1A$

$$IR + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1 = 0. \quad (3)$$

Теперь мы имеем три уравнения и три неизвестных тока сможем определить. Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), получим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4 + \frac{R}{r_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2)}{R - r_1 + R \frac{r_1}{r_2}};$$

$$I_2 = \frac{\frac{R}{r_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2) + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4)}{R - r_1 + \frac{Rr_1}{r_2}} \frac{r_1}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1}{r_2};$$

$$I = I_1 + I_2.$$

Если при подстановке числовых значений величин какой-либо ток окажется положительным, значит, его направление выбрано верно, если отрицательным, значит, ток течет на самом деле противоположно тому направлению, которое мы выбрали.

Задача VIII.11 Определить падение напряжения на конденсаторе C , присоединенном к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 3,9$ В по схеме, изображенной на рис. VIII.13. Какой заряд будет на обкладках конденсатора, если емкость $C = 2$ мкф, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $R_3 = 3$ Ом?

Решение. Источник \mathcal{E} заряжает конденсатор до определенного напряжения U_c . Когда потенциал

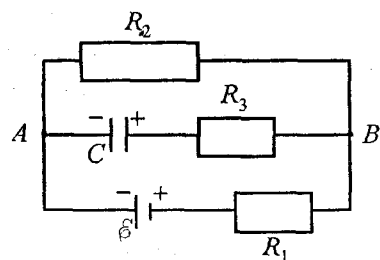


Рис. VIII.13

правой пластины конденсатора будет равен потенциалу точки B , ток через сопротивление R_3 прекратится, но он продолжает идти через сопротивления R_1 и R_2 . Напряжение на конденсаторе равно падению напряжения на сопро-

тивлении R_2 . Таким образом:

$$U_c = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3,9 \cdot 6}{13} = 1,8 \text{ В.}$$

Заряд на конденсаторе определяется формулой

$$Q = U_c C = 1,8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Задача VIII.12 Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. VIII.14. ЭДС источника \mathcal{E} . Внутренним его сопротивлением пренебречь.

Решение. Источник ЭДС заряжает конденсаторы до некоторого напряжения U_{c_1} и U_{c_2} до тех пор, пока сумма падений напряжений на конденсаторах не будет равна напряжению на участке CD .

После зарядки конденсаторов ток пойдет

только через сопротивления R_1 и R_2 , причем этот

ток
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1 + R_2}.$$

Для определения разности потенциалов между точками A и B достаточно выбрать контур $ABCA$ и обойти его по замкнутому пути. Тогда $\varphi_A - \varphi_B - IR_1 + U_{c_1} = 0$, или $\varphi_A - \varphi_B = IR_1 - U_{c_1}$.

Так как конденсаторы соединены последовательно, то на их обкладках будут одинаковые заряды Q , которые определяются по формуле

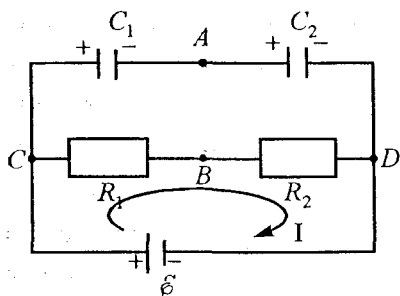


Рис. VIII.14

$$Q = \xi C_{\text{общ}} = \xi \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

а напряжения равны

$$U_{c_1} = \frac{Q}{C_1} = \frac{\xi C_2}{C_1 + C_2} \text{ и } U_{c_2} = \frac{Q}{C_2} = \frac{\xi C_1}{C_1 + C_2}.$$

Поэтому разность потенциалов между точками A и B

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\xi R_1}{R_1 + R_2} - \frac{\xi C_2}{C_1 + C_2}.$$

Тот же ответ получится, если выбрать контур $ABDA$.

Задача VIII.13 Определить заряд конденсатора C на схеме, указанной на *рис. VIII.15*. Все элементы заданы. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение. Потенциалы точек A , B , D будем считать относительно точки C (это равносильно

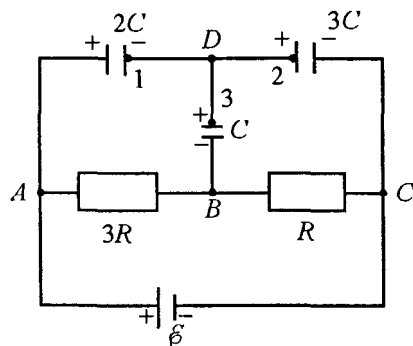


Рис. VIII.15

тому, что мы потенциал точки C положили равным нулю). Пусть потенциал точки D будет равен φ , тогда потенциал точки A будет $\varphi_A = \xi$, а потенциал точки B

$$\varphi_B = IR = \frac{\xi R}{3R + R} = \frac{\xi}{4}.$$

В точке соединения конденсаторов (в точке D) сумма зарядов остается постоянной и равной нулю, так как до зарядки на обкладках конденсаторов заряд отсутствовал. При зарядке конденсаторов заряды на обкладках 1, 2, 3 как-то перераспределяются, но убежать они никуда не могут, поэтому их сумма останется равной нулю. Пусть конденсаторы зарядились, как показано на рисунке, тогда $-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, или

$$-2C(\varphi_A - \varphi) + 3C\varphi + C(\varphi - \varphi_B) = 0.$$

Подставив значения найденных потенциалов φ_A и φ_B , получим

$$-(\xi - \varphi)2C + \varphi 3C + \left(\varphi - \frac{\xi}{4}\right)C = 0.$$

Отсюда определим потенциал φ : $\varphi = \frac{3}{8}\xi$.

Заряд на конденсаторе C

$$Q = (\varphi_D - \varphi_B) \cdot C = \left(\frac{3\xi}{8} - \frac{\xi}{4}\right)C = \frac{\xi C}{8}.$$

Задача VIII.14 Железная проволока имеет сопротивление в два раза больше, чем медная. В какой из проволок выделится большее количество тепла при включении обеих проволок в цепь с постоянным напряжением: а) последовательно, б) параллельно?

Решение. При последовательном соединении проводников через них протекает один и тот же ток, поэтому

$$\frac{Q_{\text{ж}}}{Q_{\text{м}}} = \frac{I^2 R_{\text{ж}} \Delta t}{I^2 R_{\text{м}} \Delta t} = \frac{R_{\text{ж}}}{R_{\text{м}}}$$

Так как $R_{\text{ж}} > R_{\text{м}}$, то и $Q_{\text{ж}} > Q_{\text{м}}$.

При параллельном включении проволок напряжение на проводниках одинаковое, поэтому

$$\frac{Q_{\text{ж}}}{Q_{\text{м}}} = \frac{U^2 / R_{\text{ж}} \Delta t}{U^2 / R_{\text{м}} \Delta t} = \frac{R_{\text{м}}}{R_{\text{ж}}}$$

Следовательно $Q_{\text{м}} > Q_{\text{ж}}$.

Таким образом, при последовательном включении проволок на железной выделится в два раза тепла больше, чем на медной, а при параллельном — наоборот.

Задача VIII.15 Какое сопротивление R должно быть включено последовательно с лампой, чтобы лампа горела нормальным накалом при напряжении $V = 220\text{В}$, если лампа рассчитана на напряжение $V_0 = 120\text{В}$ при мощности $N = 60\text{Вт}$?

Решение. Лампа будет гореть нормальным накалом, если через нее будет протекать ток, на который она рассчитана. Но для этого вначале нужно рассчитать сопротивление лампы R_{λ} . Это легко сделать, воспользовавшись формулой

$$N = I^2 R_{\lambda} = \frac{U^2}{R_{\lambda}} \quad (1)$$

Откуда

$$R_{\lambda} = \frac{U^2}{N} = \frac{14400}{60} = 240 \text{ Ом.} \quad (2)$$

Тогда ток I определится из уравнения (1):

$$I = \sqrt{\frac{N}{R_{\lambda}}} = \sqrt{\frac{60 \text{ Вт}}{240 \text{ Ом}}} = \frac{1}{2} \text{ А.}$$

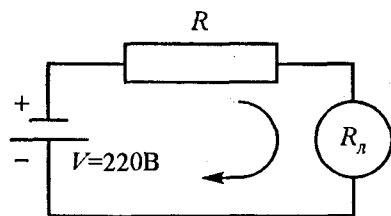


Рис. VIII.16

Схему включения лампы и сопротивления R можно представить на рис. VIII.16, причем в лампе должен протекать ток, необходимый для нормального накала лампы ($I = 0,5 \text{ А}$).

Так как лампа рассчитана на напряжение $V_0 = 120 \text{ В}$, то на сопротивлении R должно падать напряжение $U = V - V_0$ (рис. VIII.16).

Тогда сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{V - V_0}{I} = \frac{100 \text{ В}}{0,5 \text{ А}} = 200 \text{ Ом.}$$

Задача VIII.16 Источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Выразить мощность тока N во внешней цепи как функцию тока I .

Построить графики изменения силы тока I , напряжения U , мощности N и КПД η при изменении сопротивления реостата R .

При каком соотношении внешнего и внутреннего сопротивлений достигается максимальная

мощность во внешней цепи? Каков при этом кпд установки η (рис. VIII.17, а, б, в, г, д)?

Решение. Мощность, развиваемая источником \mathcal{E} , идет на выделение джоулева тепла как на нагрузочном сопротивлении R (в нашем случае остат), так и на внутреннем сопротивлении источника r , т. е.

$$\mathcal{E}I = N + I^2r, \text{ или } N = \mathcal{E}I - I^2r.$$

Зависимость выделяемой мощности на нагрузке от тока представляет собой параболу (рис. VIII.17, а).

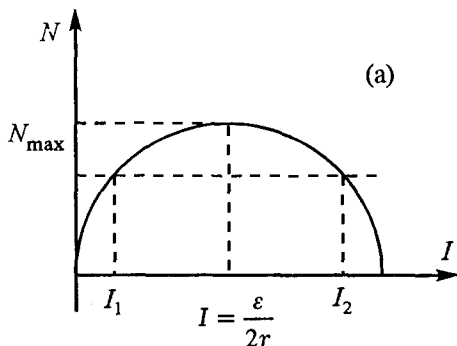


Рис. VIII.17

Каждому значению мощности соответствуют два значения тока. При токе

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2r} \text{ мощность,}$$

выделяемая на нагрузке — максимальна. Это легко получить, исследуя функцию

$N = \mathcal{E}I - I^2r$ на экстремум: берем производную по току от выше приведенного выражения и приравниваем к нулю: $(\mathcal{E} - 2Ir = 0)$. Таким образом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

Зависимость силы тока I от сопротивления определяется по формуле

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (1)$$

Графически эта зависимость представлена на рис. VIII.17, б. Зависимость напряжения U от сопротивления определяется формулой

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + r} = \frac{\mathcal{E}}{1 + r/R}. \quad (2)$$

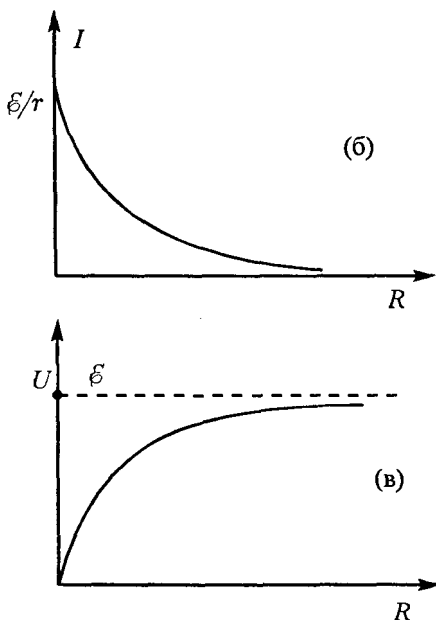


Рис. VIII.17

График этой зависимости изображен на рис. VIII.17, (в). Мощность, развиваемая на сопротивлении R (рис. VIII.17, з), равна

$$N = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}, \quad (3)$$

а полная мощность

$$N_0 = I^2 \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E} \mathcal{E}}{R+r} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}. \quad (4)$$

Максимальное значение мощности соответ-

ствует току: $I = \frac{\mathcal{E}}{2r}$.

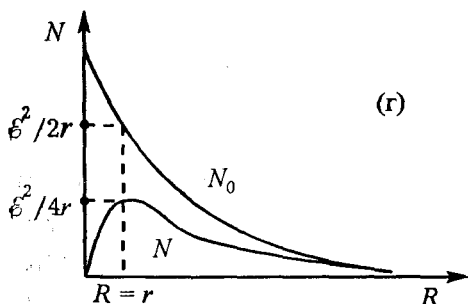


Рис. VIII.17

Это означает, что сопротивление нагрузки R должно быть равно r , что следует из формулы (4). Именно при равенстве внутреннего сопротивления и сопротивления нагрузки выделяется максимальная мощность в нагрузке.

Коэффициент полезного действия η по определению равен $\eta = \frac{N_{\text{полез}}}{N_{\text{полн}}}$. В нашей задаче полез-

ной мощностью является мощность, выделенная на нагрузке R . Она равна: $N_{\text{полез}} = \mathcal{E}I - Ir$, тогда кпд

$$\eta = \frac{\mathcal{E}I - Ir}{I\mathcal{E}} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{\mathcal{E}r}{(R+r)\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}. \quad (5)$$

Таким образом, при максимальной потребляе-

мой мощности ($R = r$) КПД $\eta = \frac{1}{2}$ (рис. VIII.17, д).

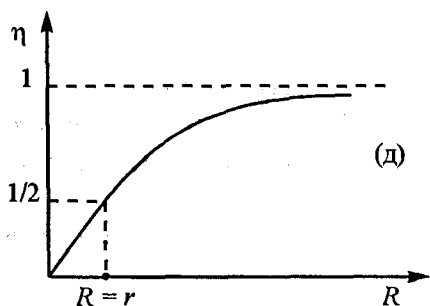


Рис. VIII.17

Задача VIII.17 Аккумулятор подключен к сети зарядной станции с напряжением $V_0 = 13\text{В}$. Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 0,4\text{ Ом}$, его остаточная ЭДС $\mathcal{E} = 11\text{ В}$. Какую мощность N_0 расходует станция на зарядку аккумулятора? Какая часть η этой мощности расходуется на нагревание аккумулятора

(рис. VIII.18)?

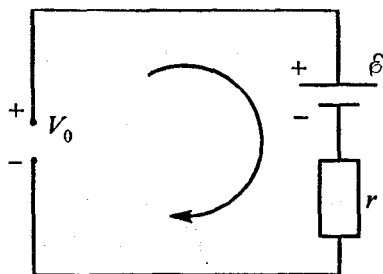


Рис. VIII.18

Решение. Для зарядки аккумулятора всегда включается навстречу напряжению зарядной станции (см. рисунок). Ток идет в направлении, противоположном направлению действия

ЭДС \mathcal{E} , и определяется из закона Ома:

$$I = \frac{V - \mathcal{E}}{r} = \frac{13 - 11}{0,4} = 5\text{ А.}$$

Мощность, расходуемая зарядной станцией:

$$N_0 = IV_0 = 65 \text{ Вт}.$$

Мощность, расходуемая на нагревание аккумулятора:

$$N_1 = I^2 r = 10 \text{ Вт}.$$

Таким образом:

$$n = \frac{N_1}{N_0} = \frac{2}{13}, \text{ или } 15,6\%.$$

Задача VIII.18 Электромотор с сопротивлением r приводится в движение от сети с напряжением V_0 . Мотор потребляет ток силой I_0 . Какую мощность N_0 потребляет мотор? Какая часть этой мощности превращается в механическую энергию?

Решение. Мотор потребляет мощность $N_0 = I_0 V_0$, причем эта мощность идет на механическое вращение мотора N_1 и на нагревание его обмоток, т. е.

$$N_0 = I_0 V_0 = N_1 + I_0^2 r.$$

Следовательно, мощность, идущая на вращение мотора:

$$N_1 = N_0 - I_0^2 r = I_0 (V_0 - I_0 r).$$

Эта мощность составляет $n = \frac{I_0 (V_0 - I_0 r)}{I_0 V_0}$ часть

от полной мощности.

Задача VIII.20 Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в

чайнике закипает через $t_1 = 15$ мин, при включении другой — через $t_2 = 30$ мин. Через какое время t закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки: а) последовательно, б) параллельно.

Решение. При любом соединении сопротивлений чайнику для закипания необходимо сообщить одно и то же количество теплоты $Q = ct\Delta T$, так как c , m , ΔT остаются неизменными. Поэтому можно записать

$$Q = \frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2. \quad (1)$$

(Эту формулу удобно взять потому, что всякий раз чайник включается в одну и ту же розетку.) Таким образом:

$$\frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2}, \text{ или } \frac{R_2}{R_1} = \frac{t_2}{t_1} = 2, \text{ т. е. } R_2 = 2R_1.$$

При последовательном включении обмоток общее сопротивление $R_{\text{общ}} = R_1 + R_2$. Применяя формулу (1) для последовательного включения обмоток, получим

$$\frac{U^2}{R_1 + R_2} t_x = \frac{U^2}{R_1} t_1, \text{ или}$$

$$t_x = \frac{R_1 + R_2}{R_1} t_1 = \frac{R_1 + 2R_1}{R_1} t_1 = 3t_1 = 45 \text{ мин.}$$

При параллельном включении обмоток $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Опять, воспользовавшись формулой (1), имеем

$$\frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} t_y = \frac{U^2 t_1}{R_1}, \text{ или}$$

$$t_y = t_1 \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_1} = \frac{2}{3} t_1 = 10 \text{ мин.}$$

Задача VIII.21 Электрическую плитку, рассчитанную на напряжение

$U_0 = 220\text{В}$, требуется переделать, не меняя и не укорачивая спирали, на $U_1 = 110\text{В}$ так, чтобы ее мощность осталась прежней. Что нужно для этого сделать (рис. VIII.19)?

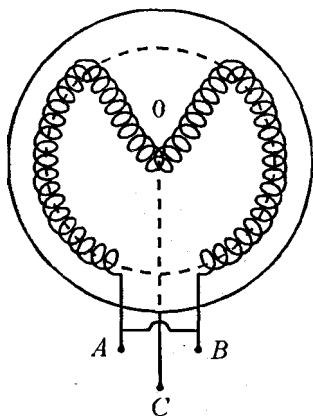


Рис. VIII.19

Решение. Так как в условии задачи заданы напряжения, при которых должна работать плитка, то воспользуемся выражением для мощности в виде

$$N = \frac{U^2}{R}.$$

Так как напряжение уменьшилось в два раза, то, чтобы мощность осталась прежней, новое сопротивление плитки должно уменьшиться в четыре раза, действительно:

$$\frac{U_0^2}{R} = \frac{U_1^2}{R_x}, \text{ отсюда}$$

$$R_x = \frac{U_1^2 R}{U_0^2} = \frac{R}{4}.$$

Так как спираль нельзя менять и укорачивать, то от центра спирали (точка 0 на рис. VIII.19) нужно сделать отвод С, а полученные два сопротивления 0А и 0В соединить параллельно, тогда мы имеем:

$$R_x = \frac{R/2 \cdot R/2}{R/2 + R/2} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}.$$

IX. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

пIX.1 Вокруг проводников с током, так же как и вокруг постоянных магнитов, существует магнитное поле, которое характеризуется вектором магнитной индукции \vec{B} .

Магнитное поле в каждой точке пространства имеет определенное направление, зависящее от направления тока, создающего это поле, и от среды, в которой находится проводник.

Магнитное поле, созданное каждым элементом тока длиной Δl , определяется формулой Био Савар Лапласа:

$$\vec{B}_i = \frac{\mu\mu_0 I \left[\vec{\Delta l} \vec{r} \right]}{4\pi r^3}, \text{ или } |\vec{B}_i| = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

где \vec{r} — радиус-вектор, проведенный от элемента Δl в точку наблюдения, α — угол между векторами $\vec{\Delta l}$ и \vec{r} , μ — магнитная проницаемость среды, μ_0 — магнитная постоянная (рис. IX.1).

Эта формула позволяет посчитать вектор магнитной индукции \vec{B} , созданный проводником с током любой формы. Так магнитное поле, созданное бесконечно длинным проводником с током I , определяется

$$|\vec{B}| = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi x},$$

где x — расстояние от проводника до точки наблюдения.

Расположение линий магнитного поля определяется правилом буравчика. Поступательное движение буравчика направляют по току, тогда направление вращения головки буравчика указывает направление линий магнитного поля. Линии магнитного поля замкнуты (рис. IX.2).

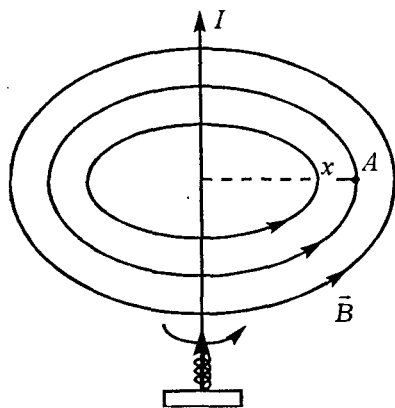


Рис. IX.2

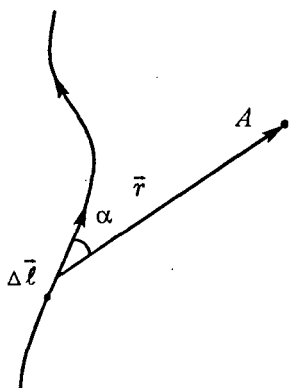


Рис. IX.1

пIX.2 Магнитное поле, созданное витками соленоида, внутри него

$$B_c = \mu\mu_0 I \frac{N}{l},$$

где N — число витков, l — длина соленоида.

пIX.3 При помещении в магнитное поле проводника с током на него действует сила Ампера:

$$\vec{F} = I \left[\vec{\Delta l} \vec{B} \right], \text{ или } |\vec{F}| = I \Delta l B \sin \alpha = I \Delta l B_{\perp},$$

где Δl — длина отрезка с током I , α — угол между направлением вектора магнитной индукции \vec{B} и отрезком проводника $\vec{\Delta l}$. Направление этой силы определяется правилом буравчика или правилом левой руки. (Если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора магнитной индукции \vec{B} входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по току, то отогнутый на 90° большой палец покажет направление действующей на участок проводника силы.) Правило буравчика: головку буравчика вращают от вектора $\vec{\Delta l}$ к вектору \vec{B} , тогда направление его поступательного движения определяет направление силы \vec{F} .

пIX.4 На заряды, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_л = q \left[\vec{v} \vec{B} \right] \text{ или } |\vec{F}_л| = qvB_{\perp},$$

где q — положительный заряд.

Направление силы Лоренца так же определяется правилом левой руки или правилом буравчика.

пIX.5 Потоком магнитной индукции (магнитным потоком) через некоторую поверхность с площадью S называется величина

$$\Phi = BS \cos \alpha = B_{\perp} S,$$

где α — угол между вектором \vec{B} и перпендикуляром к поверхности S (рис. IX.3).

Поток магнитной индукции может быть положительным, если составляющая проекции вектора

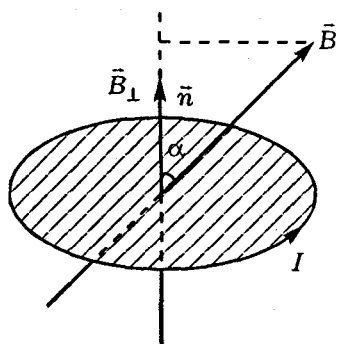


Рис. IX.3

составляющая проекции вектора

\vec{B} вдоль нормали (\vec{B}_{\perp}) совпадает с положительным

направлением нормали \vec{n}

рамки с током, или отрицательным, если составляющая

\vec{B}_{\perp} противоположна

положительному направлению нормали \vec{n} (рис. IX.3).

Для любого контура условились за положительное направление нормали рамки принимать направление поступательного движения буравчика, если его головку вращать по направлению тока.

Если магнитное поле вызвано током I , протекающим по какому-либо контуру, то магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром, пропорционален току, т. е. $\Phi = LI$, где L — индуктивность контура (или коэффициент само-

индукции), которая зависит от формы и размеров контура и магнитных свойств окружающей среды.

пIX.6 Работа, совершаемая магнитным полем при повороте контура с током I :

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ — изменение потока магнитной индукции через рамку.

пIX.7 При изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную некоторым контуром, в последнем возникает электродвижущая сила \mathcal{E} индукции, определяемая формулой

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного тока за некоторый интервал времени Δt .

Знак «-» отражает правило Лоренца, согласно которому возникающая в контуре ЭДС приводит к появлению индукционного тока такого направления, что вызванное им магнитное поле мешает изменению магнитного потока.

пIX.8 При пересечении незамкнутого проводника линий магнитной индукции \vec{B} на его концах возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = B_{\perp}lv,$$

где B_{\perp} — составляющая вектора магнитной индукции \vec{B} , перпендикулярная скорости движения проводника \vec{v} .

пIX.9 Если магнитный поток меняется вследствие изменения тока, протекающего по этому контуру, то в контуре возникает ЭДС, которую называют ЭДС самоиндукции. Она равна

$$\mathcal{E}_{\text{с.инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

пIX.10 Изменение потока, возникающее вследствие вращения рамки с частотой ω в магнитном поле, приводит к возникновению ЭДС индукции, меняющейся по гармоническому закону:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

где \mathcal{E}_0 — максимальное значение ЭДС индукции (амплитуда).

В свою очередь эта ЭДС приводит к появлению в контуре переменного тока

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где I_0 — максимальное значение переменного тока (амплитуда тока), а φ — сдвиг фаз между колебаниями тока в цепи и ЭДС индукции. Сдвиг фаз φ зависит от того, какие элементы (R , L , C) включены в цепь.

пIX.11 Напряжения на отдельных элементах схемы и ток, протекающий в них, колеблются с одинаковой частотой, хотя они могут быть сдвинуты по фазе: на омическом сопротивлении R ток, протекающий через этот элемент, и напряжение на нем колеблются в одинаковой фазе (т. е. $\varphi = 0$), на емкости C ток опережает напряжение на 90°

(т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$), на индуктивности колебания тока от-

стают от колебаний напряжения на 90°

(т. е. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$)

(рис. IX.4). (Подробнее изложение этого материала можно прочитать в «Пособии по физике» А.И. Гомоновой. Изд-во МГУ, 1991г.)

пIX.12 В цепи переменного тока сумма напряжений на концах цепи не равна сумме напряжений на отдельных последовательно включенных элементах, так как напряжение на различных участках сдвинуты по фазе относительно друг друга. Амплитуду и фазу результирующего колебания напряжения можно легко определить, пользуясь методом векторных диаграмм, который основан на том, что любое гармоническое колебание можно представить в виде проекции вектора, вращающегося с угловой частотой ω . Длина вектора равна амплитуде колебаний. Сложение

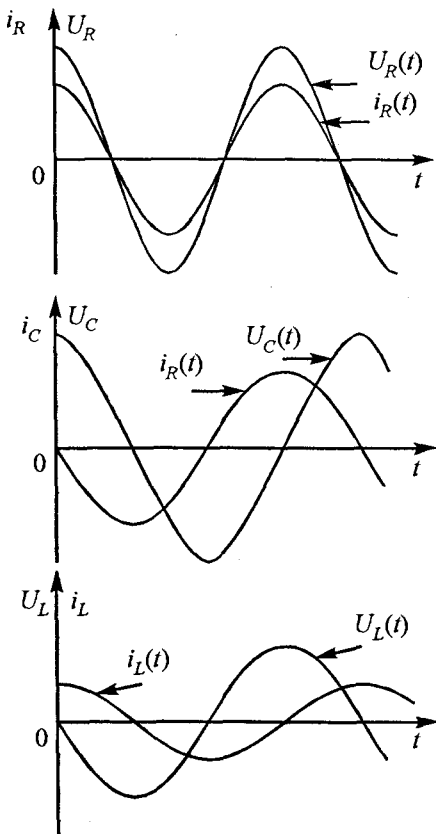


Рис. IX.4

колебаний определяется нахождением суммы векторов.

Согласно этому методу колебания переменного тока и напряжения изображают в виде векторов \vec{I}_0 и \vec{U}_0 , вращающихся с одинаковой частотой ω против часовой стрелки и отличающихся амплитудой и сдвигом фаз (рис. IX.5).

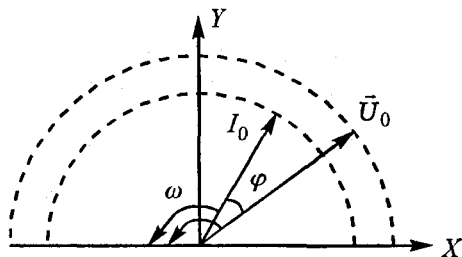


Рис. IX.5

Таким образом, вектор тока и напряжения при вращении не меняют своего взаимного расположения, т. е. сохраняют постоянную разность фаз. Для схемы, состоящей из последовательно включенных элементов R , L , C , векторная диаграмма изображена на рис. IX.6.

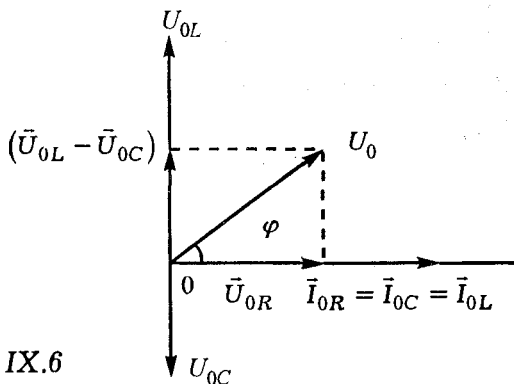


Рис. IX.6

пIX.13 Сдвиг фаз для этой схемы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R},$$

а общее сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}.$$

Закон Ома для цепи переменного тока имеет вид:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}.$$

пIX.14 Средняя мощность, выделяемая источником в цепи переменного тока

$$\bar{W} = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi = I_D U_D \cos \varphi,$$

где I_A , U_A — действующие значения тока и напряжения.

$$I_A = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad U_A = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Задача IX.1 Рассчитать магнитное поле \vec{B} в середине кругового витка с током I радиуса R (рис. IX.7).

Решение. Каждый элемент кругового витка Δl с током создает в центре контура поле B_i , направление и величину которого легко определить с помощью формулы Био Савар Лапласа (см. пIX.1):

$$|\vec{B}_i| = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

По правилу буравчика это поле направлено перпендикулярно плоскости контура (рис. IX.7) и равно

$$|\vec{B}_i| = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l}{4\pi r^2}, \quad (\sin \alpha = 1, \quad r = R).$$

Результирующее поле \vec{B} равно сумме всех элементарных полей \vec{B}_i , т. е.

$$B = \sum_{i=1}^n B_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mu\mu_0 I \Delta l_i}{4\pi R^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

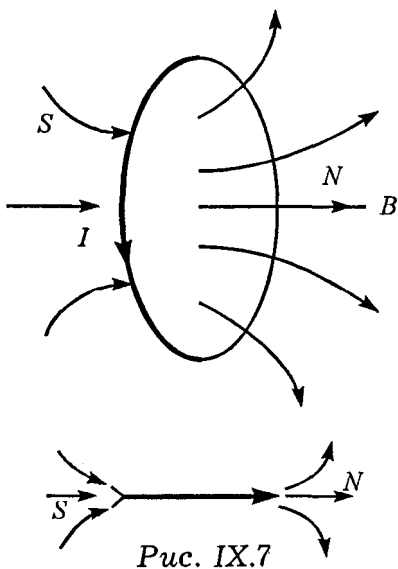


Рис. IX.7

Подобный круговой виток аналогичен магнитной стрелке. Там, где линии магнитной индукции выходят из плоскости кругового витка, расположен его северный полюс N , а где входят — южный S (рис. IX.7). Этот круговой ток является важным элементом, так как он позволяет определять наличие магнитного поля в пространстве и его направление. Во внеш-

нем магнитном поле он устанавливается так, что его собственное магнитное поле всегда совпадает

по направлению с внешним магнитным полем (рис. IX.8).

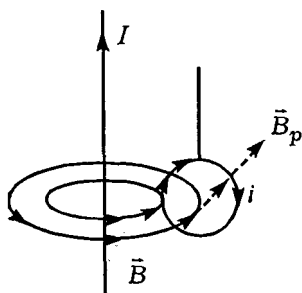


Рис. IX.8

Задача IX.2 Мягкая спиральная пружина подвешена так, что нижний ее конец погружен в металлическую чашечку с ртутью (рис. IX.9), а верхний подсоединен к источнику постоянного тока. Что произойдет с пружиной при замыкании ключа К?

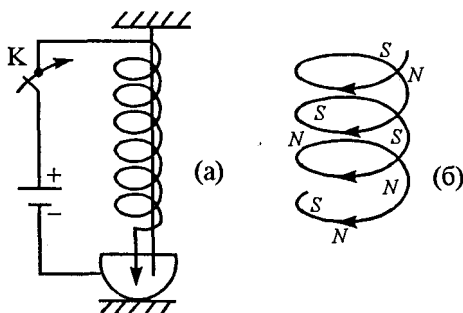


Рис. IX.9

Решение. При замыкании ключа К по пружине потечет ток. Каждый виток пружины будет со-

здавать магнитное поле и притягивать к себе соседние витки (разноименные полюса магнитов притягиваются). Пружина сожмется, нижний конец пружины поднимется из ртути, цепь разомкнется, и ток перестанет идти. Если нет тока, нет и магнитного поля между витками и пружина расправится.

После опускания нижнего конца пружины в ртуть весь процесс начнется сначала. Таким образом, пружина совершает периодические колебания.

Эту задачу можно решить и по-другому. Отдельные участки соседних витков, лежащие друг против друга, можно рассматривать как параллельные участки проводников, по которым текут токи в одном направлении (рис. IX.9, б). Такие проводники притягиваются друг к другу. Поэтому витки пружины будут также притягиваться друг к другу и пружина сожмется, а нижний конец ее поднимется из ртути, разрывая цепь, по которой протекает ток. Исчезает магнитное поле проводников, и пружина вновь распрямляется. Конец пружины опускается в чашечку с ртутью, вновь замыкая цепь, и т. д.

Задача IX.3 Прямой проводник AC длиной l и массой m подвешен горизонтально на двух легких нитях OA и OC в однородном магнитном поле с вектором магнитной индукции \vec{B} , направленным перпендикулярно проводнику и лежащим в горизонтальной плоскости (рис. IX.10). Какой величины ток надо пропустить через проводник,

чтобы одна из нитей разорвалась, если каждая нить разрывается при нагрузке, большей T_0 ?

Решение. На проводник с током действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, две силы натяжения нити \vec{T} и сила Ампера \vec{F} , определяемая правилом левой руки, причем $F = B_{\perp}I$.

Предположим, что ток в проводнике AC протекает слева направо. В этом случае сила Ампера \vec{F} направлена вниз, в противном случае натяжение нитей при пропускании тока не возрастает, а уменьшается и нити не оборвутся.

При равновесии проводника $\sum \vec{F}_i = 0$. В проекции на вертикальную ось это условие запишется

$$2T - mg - F = 0 \text{ или } T = \frac{mg + F}{2}.$$

Так как предельная нагрузка на нити равна T_0 , то

$$T_0 \leq mg + \frac{BI}{2}, \text{ откуда } I \geq \frac{2T_0 - mg}{Bl}.$$

Задача IX.4 Медный провод с сечением S , согнутый в виде трех сторон квадрата, может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис. IX.11). Провод находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально вверх. При протека-

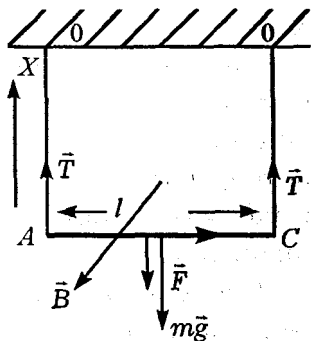


Рис. IX.10

нии тока I провод отклоняется на угол α от вертикали. Определить индукцию поля \vec{B} . Плотность меди ρ задана.

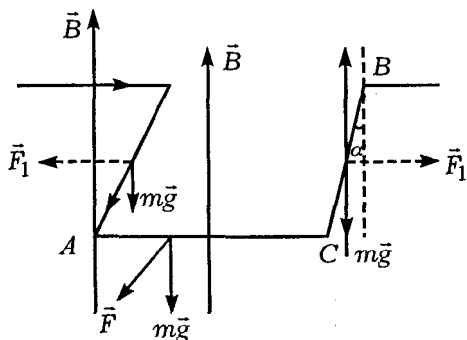


Рис. IX.11

Решение. Пусть сторона квадрата имеет длину a . На каждую из сторон рамки действует сила тяжести $mg = \rho a S g$ и сила Ампера $F = I B_{\perp} a$. Момент силы F , действующий на нижнюю сторону рамки, выводит ее из вертикального положения. Этот момент при некотором угле α уравновешивается моментами сил тяжести, действующими на все стороны рамки и стремящимися вернуть ее в положение равновесия. Моменты сил F_1 , действующие на боковые стороны рамки, можно не учитывать, так как их сумма в любой момент времени равна нулю. Таким образом, условие равновесия для моментов сил, действующих на рамку, можно записать:

$$F a \cos \alpha - 2mg \frac{a}{2} \sin \alpha - mga \sin \alpha = 0 ,$$

или

$$IBa^2 \cos \alpha - 2\rho aSg \frac{a}{2} \sin \alpha - \rho aSga \sin \alpha = 0.$$

Из этого уравнения определяем индукцию магнитного поля

$$B = \frac{2\rho Sg}{I} \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача IX.5 Возле бесконечного закрепленного прямолинейного проводника с током I перпендикулярно ему и в одной плоскости с ним помещают проводник AC . Как будет вести себя этот проводник, если по нему пропустить ток i в указанном на рис. IX.12 направлении?

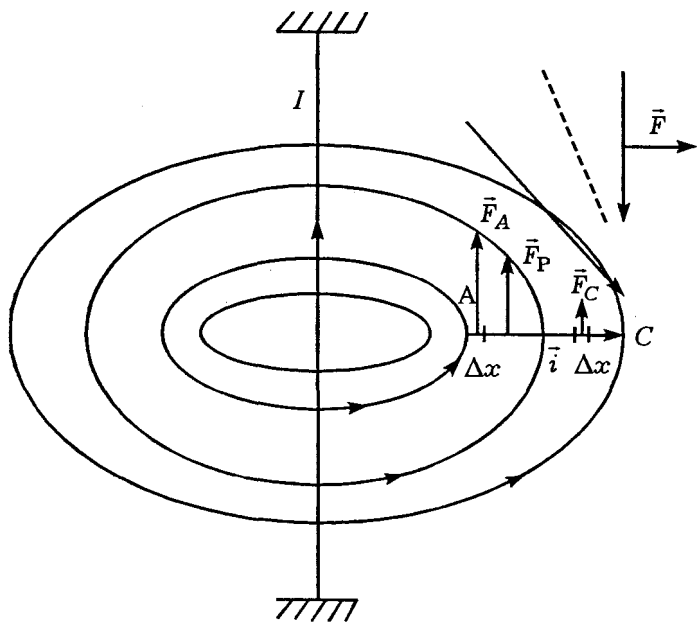


Рис. IX.12

Решение. Проводник с током I создает вокруг себя магнитное поле, направление линий магнитной индукции \vec{B} которого изображено на рисунке. На каждый из участков Δx проводника AC действует сила Ампера, направление которой определяется правилом левой руки:

$$F = i\Delta x B_{\perp}.$$

Вектор магнитной индукции \vec{B} перпендикулярен проводнику AC и в точке A больше по величине, чем в точке C , так как для бесконечно длинного проводника

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi x}.$$

Поэтому на участок Δx , прилегающий к точке A , будет действовать бóльшая сила F_A , чем на участок Δx , прилегающий к точке C . Точка приложения результирующей всех сил Ампера F_P находится левее центра тяжести проводника AC . Поэтому проводник, двигаясь вверх, одновременно будет поворачиваться по часовой стрелке до тех пор, пока не займет вертикальное положение (рис. IX.12). Далее он будет отталкиваться от бесконечно длинного проводника с током I .

Задача IX.6 Вблизи бесконечного закрепленного прямолинейного проводника с током I перпендикулярно ему помещают проводник AC , как показано на рис. IX.13. Как будет вести себя этот проводник, если по нему пропустить ток i ?

Решение. Проводник с током I создает вокруг себя магнитное поле, линии магнитной индукции

которого лежат в плоскости, перпендикулярной направлению тока I . Эти линии удобно рассмотреть, если на рис. IX.13, (а) посмотреть сверху (см. рис. IX.13, б).

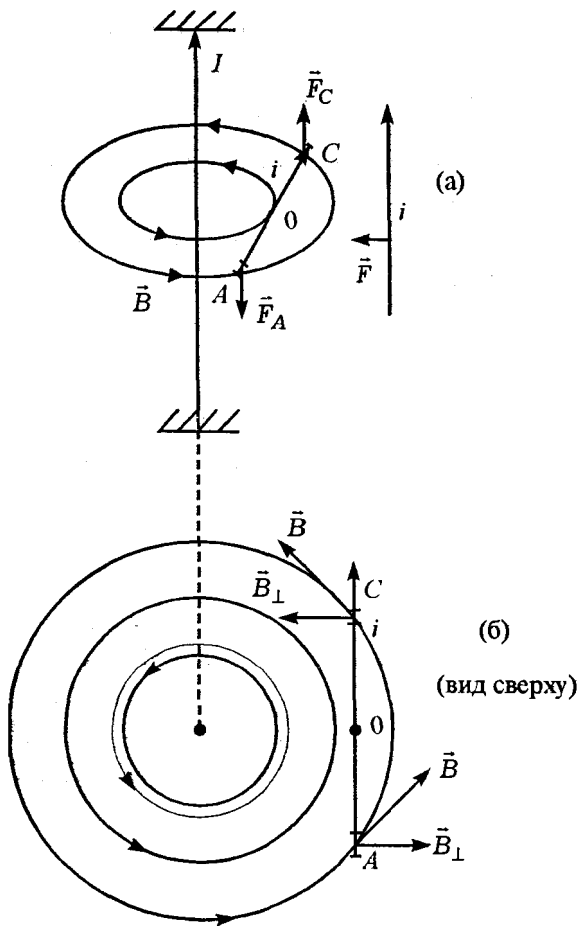


Рис. IX.13

На элемент Δx , лежащий вблизи точки А, действует сила Ампера F_A , направленная вниз

(согласно правилу левой руки), а на элемент Δx , лежащий вблизи точки C , действует сила Ампера F_C , направленная вверх. Эти обе силы, одинаковые по величине ($F_A = F_C = i\Delta x B_{\perp}$), будут разворачивать проводник вокруг центра тяжести (точка O) до тех пор, пока он не займет вертикальное положение (не станет параллельным проводнику с током I). Далее проводник AC будет притягиваться к проводнику с током I (опять же согласно правилу левой руки).

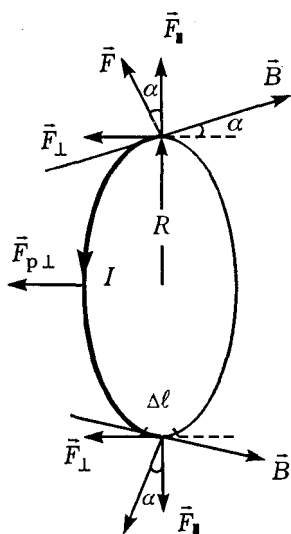


Рис. IX.14

Задача IX.7 Проволочное кольцо радиуса R находится в неоднородном магнитном поле, линии индукции которого составляют в точках пересечения с кольцом угол α относительно нормали к плоскости кольца (рис. IX.14). По кольцу течет ток I . С какой силой магнитное поле действует на кольцо? Индукция магнитного поля в точках пересечения с кольцом равна \vec{B} .

Решение. На каждый элемент кольца Δl действует сила Ампера. Эту силу можно разложить на две составляющие: F_{\parallel} и F_{\perp} (рис. IX.14). Сила F_{\parallel} лежит в плоскости кольца, а $F_{\perp} = F \sin \alpha = IB\Delta l \sin \alpha$ — перпендикулярна

плоскости кольца. Результирующая всех сил F_{III} равна нулю, так как на любые диаметрально расположенные элементы Δl действует одинаковая по величине, но противоположно направленная сила. Эти силы лишь растягивают кольцо, не перемещая его. Результирующая всех перпендикулярных сил

$$F_{\text{P.I}} = \sum_{i=1}^n F_{1i} = \sum_{i=1}^n IB\Delta l_i \sin \alpha = IB \sin \alpha \sum_{i=1}^n \Delta l_i = IB \sin \alpha 2\pi R.$$

Эта сила втягивает кольцо в сторону бóльшего магнитного поля (магнитное поле больше там, где густота магнитных линий больше).

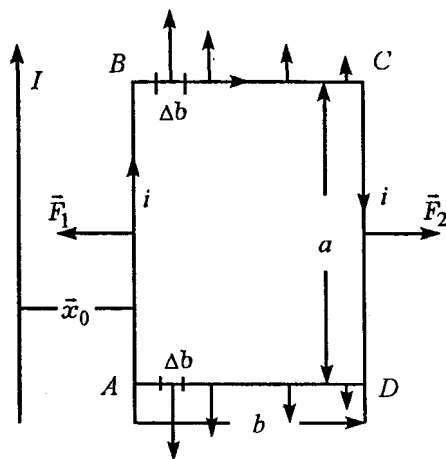


Рис. IX.15

Задача IX.8 Определить силу, с которой действует бесконечно длинный прямой провод с током I на прямоугольный контур с током i , расположенный в плоскости провода. Стороны AB и DC , параллельные бесконечному проводу, имеют длину a , стороны BC и DA — длину b . Направления токов указаны на рисунке.

Расстояние ближайшей стороны прямоугольника до бесконечного провода x_0 (рис. IX.15).

Решение. Бесконечно длинный проводник с током I создает вокруг себя магнитное поле, вектор магнитной индукции которого $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi x}$ (пIX.1). Поэтому на проводник AB действует сила Ампера

$$F_1 = iB_{\perp 1}a = \frac{\mu\mu_0 Iia}{2\pi x_0},$$

а на проводник CD — сила

$$F_2 = iB_{\perp 2}a = \frac{\mu\mu_0 Iia}{2\pi(x_0 + b)}.$$

Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 направлены вдоль одной прямой, но в противоположные стороны, поэтому результирующая сила, действующая на контур, будет притягивать его к бесконечному проводу:

$$F_p = F_1 - F_2 = \frac{\mu\mu_0 Iia}{2\pi} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + b} \right) = \frac{\mu\mu_0 Iiab}{2\pi x_0(x_0 + b)}.$$

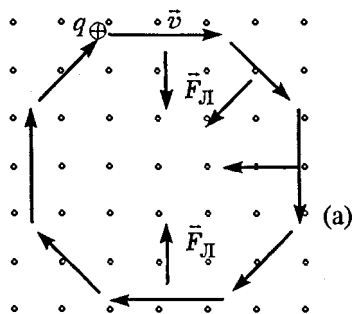


Рис. IX.16

На каждый участок Δb проводника BC и AD действует сила $F_i = i\Delta b B_i$. Эти силы разные по величине, так как разные величины B_i . Однако сумма их всегда равна нулю (см. рис. IX.15).

Задача IX.9 Положительный заряд q массой m

влетает со скоростью \vec{v} в однородное магнитное поле, перпендикулярно линиям индукции \vec{B} . По какой траектории движутся частицы в таком магнитном поле?

Решение. На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца. По правилу левой руки она перпендикулярна скорости и первоначально направлена вниз, если поле \vec{B} направлено на нас (рис. IX.16, а). Эта сила может лишь изменить направление скорости, не меняя ее величины. В любой момент времени она перпендикулярна скорости \vec{v} . Сила Лоренца сообщает за-

ряду нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{r}$, где r — радиус кривизны. Так как сила, действующая на заряд, постоянна ($F = qvB$), то модуль ускорения также постоянен. Это означает, что радиус кривизны r постоянен (при неизменной по величине скорости \vec{v}), т. е. $r = R$. Таким образом, траектория должна быть окружностью. Вторым законом Ньютона для движущегося заряда запишется:

$$qvB = ma_n = \frac{mv^2}{R}.$$

Это соотношение позволяет определить радиус окружности R :

$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}.$$

При этом период вращения частицы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

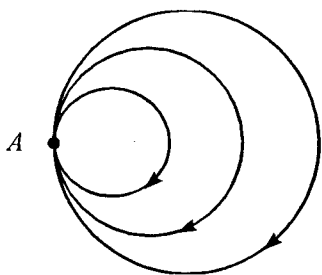


Рис. IX.16

(б)

Как видно из этого соотношения период вращения не зависит от скорости, с которой влетает частица. Это означает, что все частицы, влетевшие в магнитное поле с разными скоростями, но у

которых отношение $\frac{q}{m}$ равны, будут иметь одинаковый период, хотя радиусы окружностей, по которым они движутся, разные. Это свойство используется для фокусировки частиц (рис. IX.16, б). Пучок одинаковых частиц, влетевших в магнитное поле в точке А, возвращается в эту точку по разным траекториям через одно и то же время.

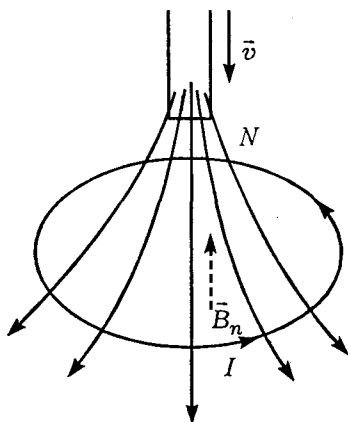


Рис. IX.17

Задача IX.10 Северный полюс магнита со скоростью \vec{v} приближается к металлическому кольцу. Определить направление индукционного тока в кольце (рис. IX.17).

Решение. Так как при приближении магнита к кольцу увеличивается магнитный поток, пронизывающий контур, то в последнем возникает ЭДС индукции, ток которой по

правилу Ленца должен создать свое магнитное поле \vec{B}_u , мешающее увеличению потока.

Если поступательное движение буравчика направить по направлению \vec{B}_u , то вращательное направление головки буравчика укажет направление индукционного тока I . Он будет направлен против часовой стрелки, если смотреть на контур сверху.

Задача IX.11 В короткозамкнутую катушку один раз быстро, другой — медленно вдвигают магнит. Определить: а) одинаковое ли количество электричества проходит через катушку в первый и во второй раз; б) одинаковую ли работу совершит рука, вдвигающая магнит.

Решение. Как мы выяснили в предыдущей задаче при помещении магнита в короткозамкнутую катушку в последней возникает индукционный ток I , обусловленный появлением в контуре ЭДС индукции, которая определяется скоростью изменения потока, т. е.

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|.$$

Количество электричества, проходящее через катушку:

$$Q = I\Delta t = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R},$$

определяется только изменением потока $\Delta\Phi$ и сопротивлением контура.

Эти величины в обоих случаях остаются неизменными, потому и заряд Q , прошедший через

катушку, будет одинаковым. При быстром вдвигании постоянного магнита $\mathcal{E}'_{\text{инд}}$ больше, чем при медленном вдвигании (Δt меньше, а $\Delta\Phi$ — одинаковое). Это значит, что работа $A = Q\mathcal{E}'_{\text{инд}}$ при быстром вдвигании будет больше.

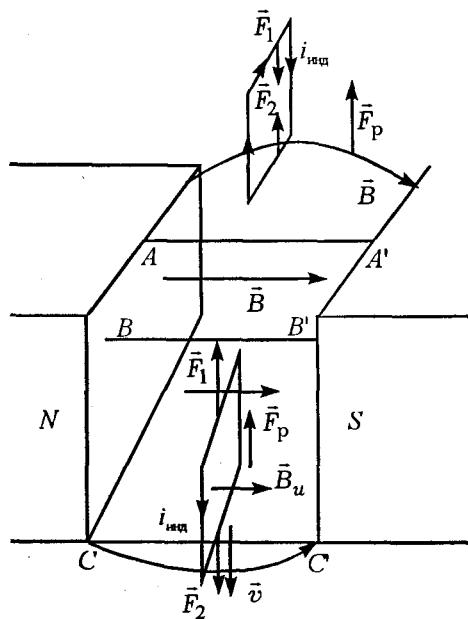


Рис. IX.18

Задача IX.12
Небольшая проводочная прямоугольная рамка падает в пространстве между широкими полюсами сильного электромагнита так, что ее плоскость параллельна полюсам магнита (рис. IX.18). Определить направления индукционных токов, возникающих в рамке при прохождении ею положений AA',

BB', CC'. Как будет двигаться рамка на этих участках?

Решение. При падении рамки между полюсами магнита в ней возникают индукционные токи, так как меняется поток магнитной индукции через рамку. При падении сверху магнитный поток уве-

личивается, значит, в рамке должен возникнуть такой ток, чтобы его поле \vec{B}_u мешало нарастанию потока. В этом случае ток должен протекать по часовой стрелке (если смотреть на плоскость рамки справа).

При прохождении положения BB' — индукционный ток равен нулю, так как поток магнитной индукции постоянен. При движении рамки через положение CC' — поток магнитной индукции уменьшается и следовательно индукционный ток должен двигаться против часовой стрелки. В положении AA' и BB' применяем правило буравчика: поступательное движение буравчика должно совпадать с направлением \vec{B}_u , а направление вращения головки буравчика указывает на направление индукционного тока.

Как только в рамке возникнет индукционный ток, она уже не сможет падать свободно, потому что на верхнюю и нижнюю стороны рамки действует сила Ампера. В положении AA' сила, действующая на нижнюю сторону, больше силы, действующей на верхнюю сторону, так как внизу магнитное поле больше, чем вверху. Поэтому результирующая сила \vec{F}_p направлена вверх, и она тормозит движение рамки (рис. IX.18).

Аналогичные рассуждения можно провести и для положения CC' , в котором рамка также будет тормозиться результирующей силой. В положении BB' рамка падает свободно с ускорением \vec{g} , поскольку ток в рамке отсутствует и на нее сила Ампера не действует.

Задача IX.13 Проводники, изображенные на рис. IX.19, находятся в однородном магнитном

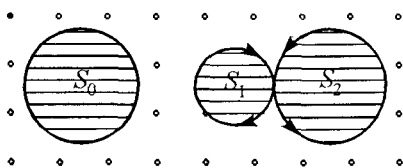


Рис. IX.19

поле, перпендикулярном плоскости чертежа. Когда поле начало уменьшаться (оставаясь однородным), в левом проводнике возникла ЭДС индукции \mathcal{E}_0 . Определить ЭДС

индукции в правом проводнике, если известны площади S_0 , S_1 , и S_2 . (Магнитные поля, созданные индукционными токами, не учитывать.)

Решение. С изменением магнитного поля \vec{B} изменяются магнитные потоки, пронизывающие контуры, поэтому в каждом контуре возникает ЭДС индукции:

$$|\mathcal{E}_0| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = S_0 \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|; \quad |\mathcal{E}_1| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = S_1 \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|;$$

$$|\mathcal{E}_2| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = S_2 \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|.$$

В правом контуре токи индукции направлены в противоположные стороны, поэтому результирующая ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{\Delta B}{\Delta t} (S_1 - S_2).$$

Скорость изменения вектора магнитной индукции $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ легко определить из левого контура:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}_0}{S_0}.$$

Таким образом, ЭДС индукции в правом контуре

$$\mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}_0}{S_0} (S_1 - S_2).$$

Задача IX.14 По двум неподвижным вертикальным рейкам AB и CD , соединенным сопротивлением R , без трения скользит проводник, длина которого l и масса m . Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого \vec{B} перпендикулярна плоскости

рисунка (рис. IX.20). Как будет двигаться подвижный проводник в поле силы тяжести, если пренебречь сопротивлением самого проводника и реек?

Решение. Под действием силы тяжести рейка LK начнет двигаться вниз. Так как через

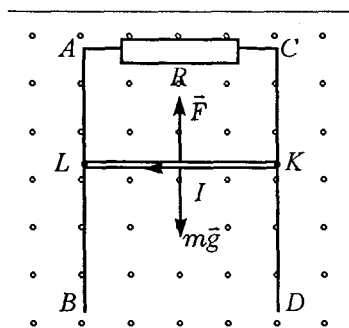


Рис. IX.20

контур $LACK$ будет увеличиваться поток магнитной индукции, то в нем возникает индукционный ток I , мешающий увеличению потока через контур. Но на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера \vec{F} . Таким образом, на подвижный проводник действуют две силы:

сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Ампера $\vec{F} = I[l\vec{B}]$. В проекции на вертикальное направление второй закон Ньютона запишется для проводника LK :

$$mg - IlB = ma, \quad (1)$$

где ток I определяется

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (\text{см. п. IX.8}).$$

Таким образом:

$$mg - \frac{B^2 L^2 v}{R} = ma,$$

где v и a — это скорость и ускорение в некоторый момент времени. Легко заметить, что ускорение a по мере увеличения скорости будет уменьшаться, и в момент, когда сила Ампера станет равной силе тяжести, ускорение станет равным нулю. С этого момента проводник LK будет двигаться с постоянной скоростью v_0 .

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2}.$$

Задача IX.15 По двум металлическим рейкам, расположенным в горизонтальной плоскости и зам-

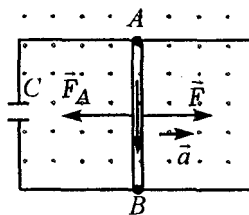


Рис. IX.21

кнутым на конденсатор C , без трения скользит проводник AB длиной l и массой m . Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция которого \vec{B} перпендикулярна плоскости ри-

сунка (рис. IX.21). К середине проводника приложена сила \vec{F} . С каким ускорением движется проводник AB ? Сопротивлением проводника AB и подводящих проводов пренебречь.

Решение. Проводник AB под действием силы \vec{F} пересекает линии магнитной индукции, и на его концах возникает ЭДС индукции, равная $\mathcal{E} = Blv$ (см. пIX.8). В замкнутом контуре $ABCA$ потечет индукционный ток $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, где ΔQ — заряд на обкладках конденсатора C , $\Delta Q = \mathcal{E}_{\text{инд}} C = BlvC$.

Поэтому

$$I = \frac{BlvC}{\Delta t} = BlCa.$$

На проводник с током AB кроме силы F действует еще сила Ампера $F_A = IBl$. Поэтому второй закон Ньютона для проводника запишется $F - F_A = ma$, или $F - IBl = ma$, или $F - B^2l^2Ca = ma$.

Отсюда ускорение, с которым движется проводник:

$$a = \frac{F}{B^2l^2C + m}.$$

Как видно из этого соотношения, ускорение является постоянной величиной. Но тогда и ток I — тоже постоянная величина. И возникает вопрос — как может протекать постоянный ток через конденсатор? Дело в том, что по определению ток

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, и в нашей задаче он определяется изме-

нением заряда на конденсаторе C в единицу времени. Поэтому в нашей схеме постоянный ток через конденсатор не протекает, а скорость изменения заряда на конденсаторе остается постоянной, т. е. в цепи справа от конденсатора течет ток I .

Задача IX.16 Прямоугольный контур $ABCD$ со сторонами a и b находится в однородном магнитном

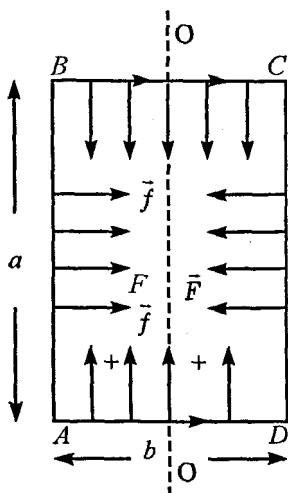


Рис. IX.22

поле с индукцией \vec{B} и может вращаться вокруг оси OO' (рис. IX.22, а). По контуру течет постоянный ток. Определить работу, совершенную магнитным полем при повороте контура на 180° , если вначале плоскость контура была перпендикулярна магнитному полю и расположена так, как показано на рисунке.

(а)

Решение. Для большей наглядности изобразим рис. IX.22, а, взглянув на

него сверху (рис. IX.22, б). Когда рамка находится строго перпендикулярно магнитному полю, на ее боковые стороны действуют силы Ампера F , а на верхние — f , которые уравнивают друг друга. Рамка находится в положении равновесия, но это положение неустойчивое. Стоит рамку вывести из положения равновесия на небольшой угол α , как на нее начнет действовать пара сил, за-

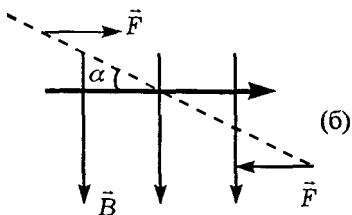


Рис. IX.22

повороте контура на 180° равно b . Поэтому работа, совершаемая магнитным полем:

$$A = 2Fb = 2IBab = 2IBS.$$

Силы f , действующие на верхние стороны рамки (рис. IX.22, а), работы не совершают, так как они перпендикулярны перемещению этих сторон.

Однако эту задачу можно решить и другим способом. Согласно пIX.6 работа, совершаемая магнитным полем, $A = I\Delta\Phi$. Поток магнитной индукции $\Phi = B_n S$. Он может быть положительным, если \vec{B}_n совпадает с положительным направлением нормали к площадке, и отрицательным, если составляющая \vec{B}_n противоположна положительному направлению нормали. (За положительное направление нормали \vec{n} принимают направление поступательного движения буравчика, если его головку вращать по направлению тока.) Поэтому в нашей задаче

$$\Delta\Phi = \Phi - (-\Phi) = 2\Phi = 2Bab.$$

Таким образом, магнитное поле совершает работу

$$A = I\Delta\Phi = 2IBab = 2IBS.$$

ставляющая ее повернуться на 180° . Эта пара сил совершает работу, которая равна удвоенному произведению силы на перемещение стороны AB (или CD) в направлении силы. Перемещение при

Как видно, оба решения приводят к одному ответу.

Задача IX.17 В цепи, изображенной на рис. IX.23, ток меняется по закону $I = \alpha t$. Определить разность потенциалов между точками А и В, полагая значения элементов R и L известными.

Решение. При изменении тока в катушке L возникает ЭДС самоиндукции. Поэтому

$$\varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_{\text{с.инд}} = IR, \text{ или}$$

$$\varphi_A - \varphi_B = IR + L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \alpha t R + L \alpha = \alpha(tR + L).$$

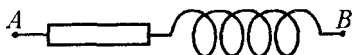


Рис. IX.23

Задача IX.18 В схеме, изображенной на рис. IX.24, течет ток, меняющийся со временем. (Следует различать ток, меняющийся со временем, и переменный ток, меняющийся по гармоническому закону!) Определить заряд на конденсаторе C в тот момент, когда

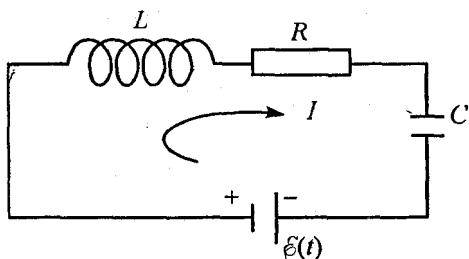


Рис. IX.24

дует различать ток, меняющийся со временем, и переменный ток, меняющийся по гармоническому закону!) Определить заряд на конденсаторе C в тот момент, когда

$$\mathcal{E}_0 = 50 \text{ В}; I = 0,1 \text{ А}; \frac{\Delta I}{\Delta t} = 400 \text{ А/с}; C = 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Решение. Воспользуемся замечательным условием электрического поля: работа по перемещению заряда на замкнутом пути равна нулю. Пусть ток в схеме течет слева направо, тогда

$$IR + L \frac{\Delta I}{\Delta t} + U_c - \mathcal{E} = 0.$$

Отсюда в любой момент времени

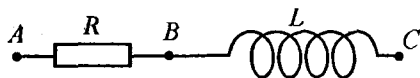
$$U_c = \mathcal{E} - IR - L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Заряд же на конденсаторе определяется по формуле $Q = CU_c$.

В момент времени, заданный в задаче, этот заряд

$$Q = C \left(\mathcal{E} - I_0 R - L \frac{\Delta I}{\Delta t} \right) = 10^{-5} \text{ Ф} \cdot (50 - 20 - 0,01 \cdot 400) \text{ В} = \\ = 26 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Задача IX.19 По участку ABC (рис. IX.25, а) протекает синусоидальный ток. На участке AB амплитуда папряжения



(а)
Рис. IX.25

на участке $BC - U_{BC} = 40 \text{ В}$. Определить амплитуду напряжения на участке AC .

Решение. Через элементы R и L протекает один и тот же ток $I = I_0 \sin \omega t$. Воспользуемся методом векторных диаграмм и отложим вектор амплитуды тока I_0 по

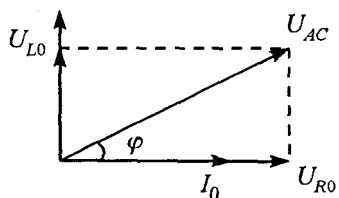


Рис. IX.25

(б)

горизонтали (рис. IX.25, б). Тогда напряжение на сопротивлении R , совпадающее по фазе с током, изобразится вектором $U_{R0} = I_0 R$. Напряжение на индуктивности опережает ток, протекающий через индуктивность, и его амплитуда изобразится вектором $U_{L0} = I_0 \omega L$. Амплитуда напряжения на участке AC

$$\vec{U}_{AC0} = \vec{U}_{R0} + \vec{U}_{L0}, \text{ или}$$

$$|\vec{U}_{AC0}| = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{L0}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ В.}$$

Задача IX.20 На участке AC в схеме, изображенной на рис. IX.25, а, сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = 30^\circ$. Как изменится эта величина, если частота напряжения станет в два раза больше?

Решение. Как видно из рисунка:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0}}{U_{R0}} = \frac{I_0 \omega L}{I_0 R} = \frac{\omega L}{R}.$$

При увеличении частоты в два раза

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 2 \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно:

$$\varphi_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,15 \approx 49^\circ.$$

Задача IX.21 В схеме, изображенной на рис. IX.26, а, $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкф}$, амплитуда напряжения $U_0 = 75 \text{ В}$, а частота $f = 50 \text{ Гц}$. Определить амплитуду тока, протекающего в этой схеме, разность фаз между напряжением и током и общее сопротивление цепи.

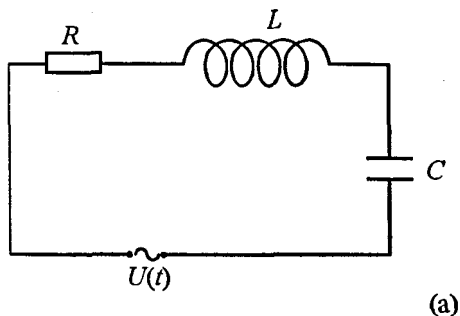


Рис. IX.26

Решение. Все элементы схемы включены последовательно, поэтому через них протекает один и тот же ток $I = I_0 \sin \omega t$.

Для решения задачи воспользуемся методом векторных диаграмм. Отложим горизонтально амплитуду тока I_0 (рис. IX.26, б). Напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током. Напряжение на индуктивности U_{L0} опережает ток на 90° , а напряжение на емкости U_{C0} отстает от него на 90° . Результирующее напряжение определяется правилом сложения векторов. Как видно из рисунка:

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

$$\text{Отсюда } I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}, \quad (1)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — общее сопротивление этой схемы.

Напряжение общее меняется по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

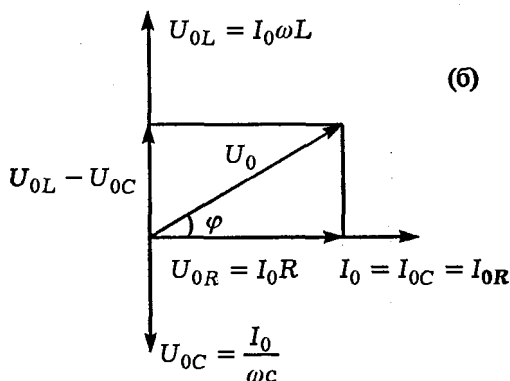


Рис. IX.26

Сдвиг фаз между общим напряжением U и током легко определяется из рис. IX.26, б:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}} = \frac{I_0 \omega L - \frac{I_0}{\omega C}}{I_0 R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} =$$

$$= \frac{(63 - 32) \text{ Ом}}{200 \text{ Ом}} = 1,5, \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,5 = 57^\circ.$$

Общее сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 37 \text{ Ом}.$$

Амплитуда тока в этой схеме определяется из закона Ома по формуле (1):

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{75 \text{ В}}{37 \text{ Ом}} = 2 \text{ А}.$$

Задача IX.22 От середины катушки с большим

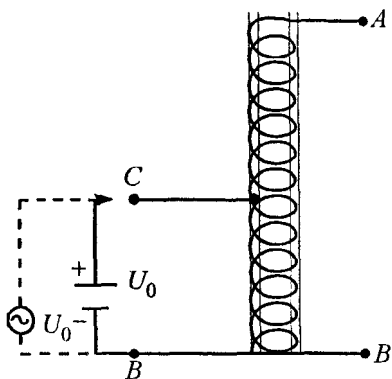


Рис. IX.27

числом витков и железным сердечником сделан отвод *C* (рис. IX.27). Между точками *B* и *C* подается один раз постоянное напряжение U_0 , а другой раз — переменное напряжение с амплитудой U_0 . Определить в обоих случаях напряжение между точками *A* и *B*.

Решение. В общем случае напряжение между точками A и B

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}.$$

При подключении постоянного напряжения U_0 ток протекает только по участку CB , создавая напряжение $U_{CB} = U_0$. По участку CA ток не течет, так как концы A и B разомкнуты. Поэтому

$$U_{AB} = 0 + U_{CB} = U_0.$$

Если между точками C и B приложить переменное напряжение с амплитудой U_0 , то протекающий по участку CB переменный ток создает в сердечнике переменный магнитный поток, который на участке AC создает ЭДС индукции.

Поскольку на участке AC витков столько же, сколько и на участке BC , то амплитуда напряжения

$$U_{AB} = U_0 + U_0 = 2U_0.$$

Х. ОПТИКА

§ 1. Геометрическая оптика

пХ.1 Закон отражения: падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости. Угол отражения равен углу падения (*рис. Х.1*).

Закон преломления: падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости. Отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления β есть величина постоянная для двух данных сред, т. е.

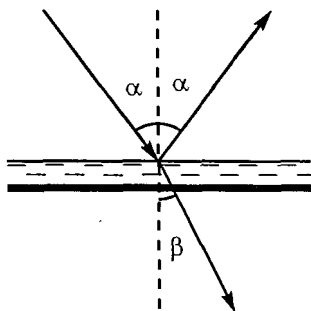


Рис. X.1

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n, \text{ где } n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

абсолютные показатели преломления, которые указывают, во сколько раз скорость света в данной среде меньше скорости света c в вакууме, n — относительный показатель преломления.

пX.2 Явление, при котором падающий на поверхность раздела двух прозрачных сред свет полностью отражается от этой поверхности, называется полным отражением. Закон преломления для этого случая имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} = n, \text{ или } \sin \alpha_0 = \frac{n_2}{n_1},$$

где α_0 — предельный угол полного отражения.

Полное отражение наблюдается при переходе луча из более плотной среды в менее плотную.

Для границы раздела среда — воздух $\sin \alpha_0 = \frac{1}{n_1}$.

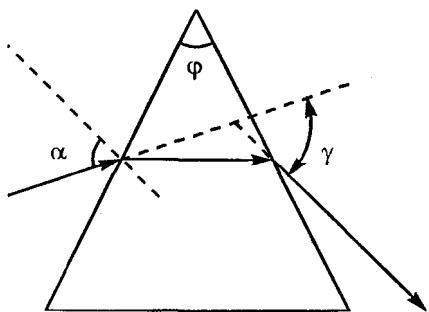


Рис. X.2

пX.3 Для тонкой призмы (с малым преломляющим углом φ) угол между первоначальным направлением падающего луча и преломленным лучом (угол γ) равен (рис. X.2):

$$\gamma = \varphi(n - 1).$$

Различные длины волн имеют разные показатели преломления, поэтому белый свет, падающий на призму, разлагается ею на много цветов, образуя спектр, причем красный цвет отклоняется на меньший угол по сравнению с другими цветами (рис. X.3).

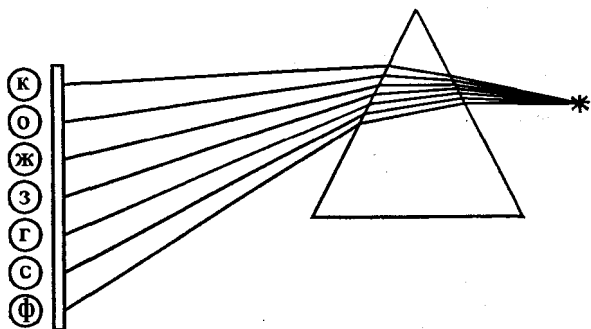


Рис. X.3

пX.4 В собирающей линзе падающие на нее лучи, параллельные главной оптической оси, сходятся по другую сторону линзы в одной точке, называемой положительным (действительным) фокусом F (рис. X.4).

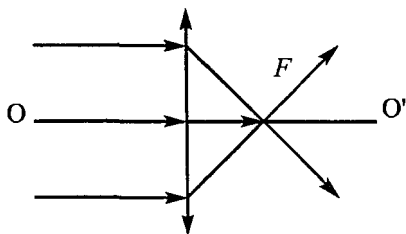


Рис. X.4

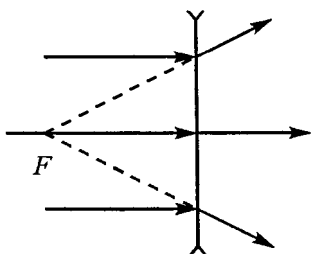


Рис. X.5

В рассеивающей линзе падающие на нее параллельные лучи становятся расходящимися. Воображаемое продолжение этих лучей пересекается в точке, расположенной с той же стороны линзы, с которой падают параллельные лучи. Эта точка называется отри-

цательным (мнимым) фокусом (рис. X.5).

пX.5 Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от линзы до изображения. Формула справедлива для рассеивающей и собирающей линзы. Однако для собирающей линзы значение F берется с положительным знаком, а для рассеивающей — с отрицательным.

Если изображение мнимое, то перед значением f всегда нужно ставить знак «-» для любой

линзы. Расстояние от источника до линзы d обычно берется положительным, однако если на любую линзу падает пучок сходящихся лучей, то расстояние d берется со знаком «-».

§ 2. Элементы физической оптики

пХ. 6 Световое излучение — это электромагнитные волны, распространяющиеся в различных средах. По теории Гюйгенса — Френеля каждую точку пространства, которой достигла волна, можно рассматривать как источник вторичных волн, распространяющихся по всем направлениям. Огибающая всех вторичных элементарных волн представляет собой новый волновой фронт в некоторый момент времени. Вторичные волны могут складываться (рис. X.6).

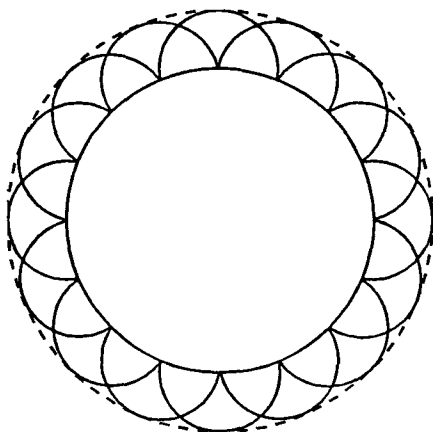


Рис. X.6

Сложение двух волн, вследствие которого наблюдается усиление или ослабление результирующих колебаний в различных точках пространства, называется интерференцией волн.

Устойчивую, не изменяющуюся со временем картину чередования максимумов и минимумов (интерференционную картину) можно наблюдать только в случае сложения когерентных волн, т. е. волн, имеющих одинаковую частоту и неизменный сдвиг фаз.

Если разность расстояний, прошедших волнами от источника до точки наблюдения (или разность хода $\Delta = d_2 - d_1$ двух когерентных волн), равна целому числу длин волн, то в некоторой точке пространства наблюдается максимум освещенности $\Delta = m\lambda$ (точка B на рис. X.7).

Если же эта разность хода равна полуцелому числу длин волн, то в точке наблюдения (B') находится минимум освещенности, т. е.

$$\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

пX.7 Зоны Френеля. Задачу о прямолинейном распространении света Френель решил, полагая,

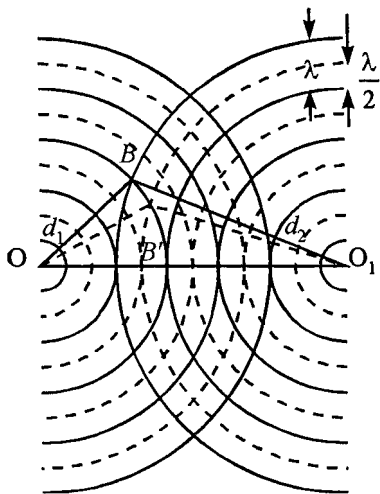


Рис. X.7

что вторичные волны интерферируют между собой. Он применил очень наглядный прием, заменяющий сложные вычисления. Этот прием получил название «метод зон Френеля». Поскольку этот материал для абитуриентов мало известен, а задачи на вступительных экзаменах на эту тему уже предлагаются, следует немного подробнее остановиться на методе зон Френеля.

Пусть световая волна распространяется из точки A к какой-либо точке наблюдения на экране O . На пути распространения волн находится непрозрачный экран с малым круглым отверстием. Если источник света A точечный и монохроматический, а среда изотропна, то фронт волны в любой момент времени будет иметь форму сферы радиуса $r = vt$, где v — скорость распространения волн. Каждая точка этой сферической поверхности является вторичным источником волн. Колебания во всех точках волновой поверхности происходят с одинаковой частотой и в одинаковой фазе. Следовательно, все эти вторичные источники волн когерентны. Для нахождения амплитуды колебаний в точке O необходимо произвести сложение когерентных колебаний от всех вторичных источников на волновой поверхности. Так как расстояния от точки O до различных участков волновой поверхности не одинаковы, то колебания от них в точку O будут приходить в различных фазах. Для нахождения результата интерференции колебаний от вторичных источников Френель предложил метод разбиения волнового фронта на зоны. Выделим мысленно некоторую поверхность MN .

Обозначим расстояние от точки 0 до ближайшей точки волновой поверхности через r_0 . Разбиваем поверхность NM на зоны такого размера, чтобы расстояния от точки наблюдения 0 до краев последующих зон отличались на $\lambda/2$, т. е. первая зона ограничивается точками волновой поверхности, которые находятся от точки наблюдения 0 на расстоянии $r_1 = r_0 + \lambda/2$ (рис. X.8), вторая зона расположена между краями первой зоны и точками волновой поверхности, расположенными от точки 0 на расстоянии $r_2 = r_1 + \lambda/2 = r_0 + \lambda$ и т. д.

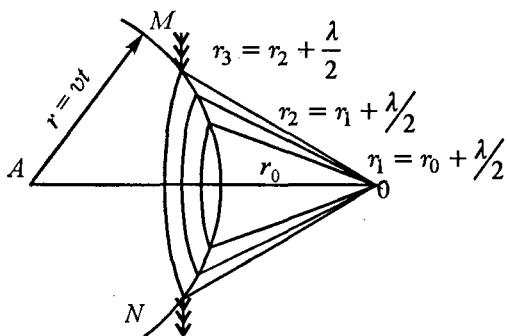


Рис. X.8

Построенные таким образом зоны имеют одинаковые площади и одинаковые амплитуды колебаний. Но, так как разность хода от двух соседних зон равна $\lambda/2$, то колебания от них приходят в точку наблюдения в противоположных фазах, а это значит, что если в отверстии экрана укла-

дываются две зоны, то в точке наблюдения O будет минимальная освещенность, так как колебания двух зон компенсируют друг друга. Таким образом, следует ожидать, что если отверстие в экране открывает четное количество зон, то результирующая освещенность в точке наблюдения O будет минимальной, а если нечетное — то максимальной. Результирующее действие световой волны в точке наблюдения O очень удобно оценивать, пользуясь графическим способом сложения колебаний, обладающих некоторым сдвигом фаз. Для этого каждую зону разбивают на равные участки столь малые, чтобы фаза колебаний каждого такого участка в точке наблюдения O практически оставалась постоянной. Тогда действие всего этого малого участка можно выразить вектором, длина которого дает суммарную амплитуду, а направление определяет фазу, обусловливаемую этим участком. Действие соседнего участка может быть выражено вторым вектором, несколько повернутым относительно первого, так как фаза, определяемая действием второго участка, будет немного отличаться от фазы первого. По длине этот вектор практически не отличается от первого. Векторная диаграмма, определяющая действие ряда участков, составляющих целую зону, изобразится ломаной линией, представленной на

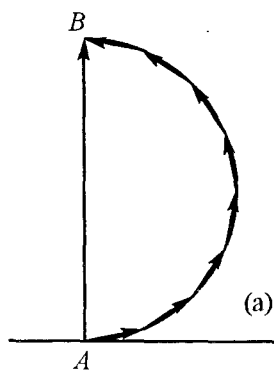


Рис. X.9

рис. X.9, а. Результирующая

амплитуда колебаний отдельной зоны в точке наблюдения 0 выразится век-

тором \vec{AB} . При разбиении зоны на бесконечно большое число бесконечно малых участков ломаная линия будет стремиться к полуокружности (рис. X.9, а),

а результирующая амплитуда колебаний равна диаметру этой полуокружности. Для учета действия второй зоны надо продолжить векторную диаграмму. С учетом возрастающего наклона второй зоны результирующее колебание только этой зоны в

точке наблюдения 0 отразится вектором \vec{BC} . Суммарное действие двух зон определяется вектором

\vec{AC} (рис. X.9, б)

Результирующая амплитуда колебаний большого числа зон в точке наблюдения 0 изобразится

вектором \vec{AD} . Легко заметить, что этот вектор равен половине вектора открытой только одной центральной зоны

\vec{AB} (рис. X.9, в).

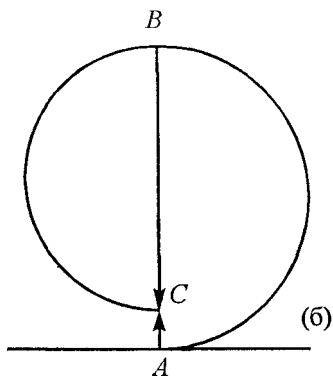


Рис. X.9

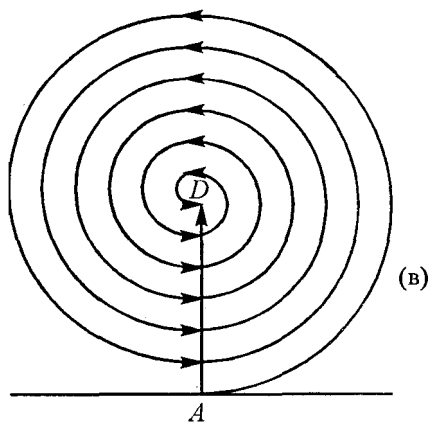
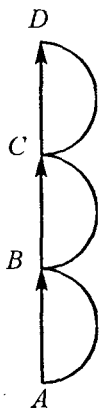


Рис. X.9



Хорошим доказательством справедливости предложенного Френелем метода является зональная пластинка. Эта пластинка представляет собой экран, состоящий из последовательно чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, радиусы которых равны радиусам соответствующих зон Френеля. Если пластину поместить в соответствующем месте сферической волны так, чтобы она закрывала четные зоны

Френеля, то в точке наблюдения 0 результирующая амплитуда будет намного больше, чем амплитуда одной открытой центральной зоны (рис. X.10).

Если вместо непрозрачного экрана с отверстием на пути волны поставить экран малых размеров без отверстия, то первая зона Френеля строится от края экрана до линии пересечения волновой поверхности с конусом, образующая которого равна $r_0 + \lambda/2$, вторая зона — до конуса с образующей $r_1 + \lambda/2$ и т. д. Причем r_0 — расстояние от точки наблюдения 0 до края непрозрачного экрана (рис. X.11). Повторяя предыдущие рассуждения при графическом способе сложения колебаний, получим, что амплитуда света в точке наблюдения 0 равна половине амплитуды, обусловленной одной открытой первой зоной. Другими словами, если в точке наблюдения 0 поставить экран перпендикулярно направлению A0, то на нем

будет чередование светлых и темных колец, но в точке наблюдения O будет всегда свет, несмотря на то, что между источником A и точкой наблюдения O на пути распространения волны стоит непрозрачный экран.

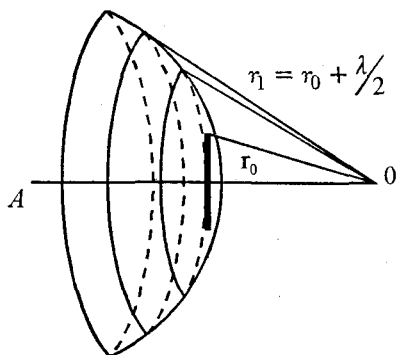


Рис. X.11

Французский физик Пуассон, изучив труды Френеля, утверждал, что теоретическое предсказание появления света в точке наблюдения является доказательством несостоятельной теории Френеля, однако другой французский физик Араго специально поставленным опытом доказал реальность существования светлого пятна в центре геометрической тени. Таким образом, теория Френеля была доказана.

Однако для экспериментального наблюдения этого светлого пятна (его часто называют пятном Пуассона) необходимо, чтобы размеры непрозрачного экрана были сравнимы с размерами первой зоны Френеля, а размеры шероховатостей на его краю не превышали длины световой волны.

пX.8 Дифракционная решетка. Огромную роль в прикладной оптике играют явления дифракции на отверстиях в виде щели с параллельными краями. Рассмотрим сначала дифракцию в параллельных лучах на одной узкой щели.

Пусть на щель, длина которой намного больше ее ширины, падает монохроматический параллельный пучок света. Все точки волновой поверхности, достигшей щели, являются источниками вторичных волн, колеблющихся в одинаковой фазе (волновая поверхность представляет собой плоскость, перпендикулярную падающим параллельным лучам). За счет дифракции (огибания) свет после прохождения щели распространяется во всех направлениях. Для наблюдения дифракционной картины за щелью помещают собирающую линзу, а за ней в ее фокальной плоскости — экран (рис. X.12). Рассмотрим параллельные лучи, идущие от различных точек щели под углом φ к вертикали. Эти лучи, пройдя через линзу, соберутся на экране в некоторой точке A . Однако в точку A волны приходят с неодинаковыми фазами, так как оптические пути их различны. Поскольку линза не изменяет длины оптического пути, то разность хода световых лучей от точек B и C щели определяется расстоянием BD . Если разность хода $\Delta = BD = \lambda/2$, то $BC = x$ является шириной зоны Френеля. Тогда в щели шириной a содержится $n = \frac{a}{x}$ зон Френеля, причем колебания от двух соседних зон, приходящих в точку A , имеют разность хода $\lambda/2$.

Поэтому если на щели укладывается четное число зон, то в точке A происходит гашение колебаний, и освещенность будет равна нулю. Если же число зон нечетное, то колебания от одной из зон останутся непогашенными и в точке A будет

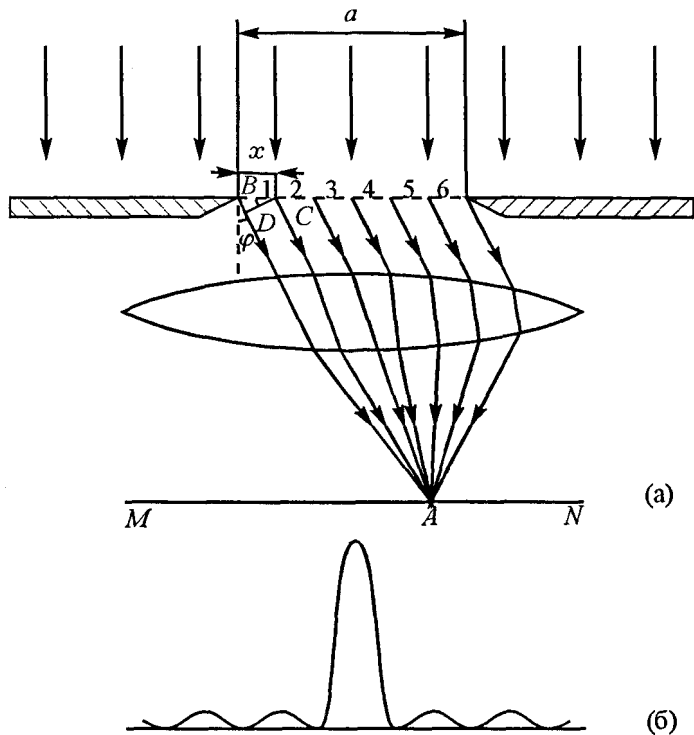


Рис. X.12

наблюдаться некоторая освещенность (максимум освещенности).

Из треугольника BDC видно, что

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\lambda/2}{x} = \sin \varphi, \text{ или } x = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}. \quad (1)$$

Если число зон на щели четное, т. е. $n = 2m$, то

$$n = 2m = \frac{2a \sin \varphi}{\lambda} \text{ и соотношение } a \sin \varphi = m\lambda \quad (2)$$

является условием минимума освещенности от одной щели. При нечетном числе зон наблюдается максимум освещенности. В этом случае выполняется соотношение

$$n = (2m + 1) = \frac{2a \sin \varphi}{\lambda}, \text{ или } a \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Это условие максимума освещенности.

Таким образом, на экране будет наблюдаться чередование максимумов и минимумов освещенности. Распределение интенсивности на экране показано на рис. X.12, б.

Далее предположим, что имеются две одинаковых щели шириной a , разделенных непрозрачным промежутком b (рис. X.13), на которые падает плоский фронт монохроматической волны. При

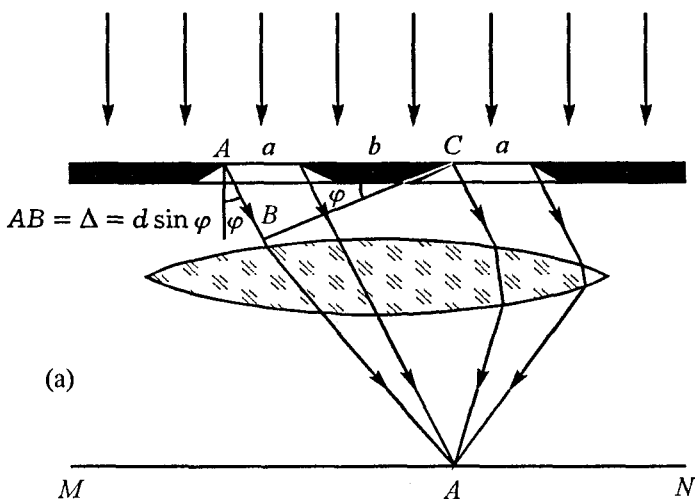


Рис. X.13

достижении фронтом плоскости, в которой находятся щели, все точки его можно рассматривать как источники вторичных волн. Если для какого-либо направления φ выполняется условие минимума освещенности для одной щели, то оно будет выполняться и для двух щелей. В этом направлении каждая щель в отдельности света не дает. Это условие для двух щелей называют условием *прежних минимумов*. Это условие справедливо и для любого числа щелей.

А вот там, где каждая щель в отдельности давала свет, при наличии двух щелей может быть и свет, и темнота. Рассмотрим две точки A и C , находящиеся на расстоянии $d = a + b$.

Если разность хода для лучей, исходящих из этих точек равна $m\lambda$, т. е.

$$\Delta = d \sin \varphi = m\lambda, \quad (4)$$

то свет от точек B и C при интерференции в точке A будет давать максимум освещенности. Соотношение (4) является условием *главных максимумов*. Это соотношение справедливо для любого количества щелей (как и условие для прежних минимумов).

Если же эта разность хода равна нечетному числу полуволн, то наблюдается минимум освещенности в точке A , т. е.

$$d \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

Это условие для *дополнительных минимумов*, так как в случае одной щели в этом направлении на экране был свет. Распределение освещенности

на экране при наличии двух щелей показано на рис. X.13, б.

(б)

- а) одна щель
- б) две щели
- в) четыре щели
- г) восемь щелей

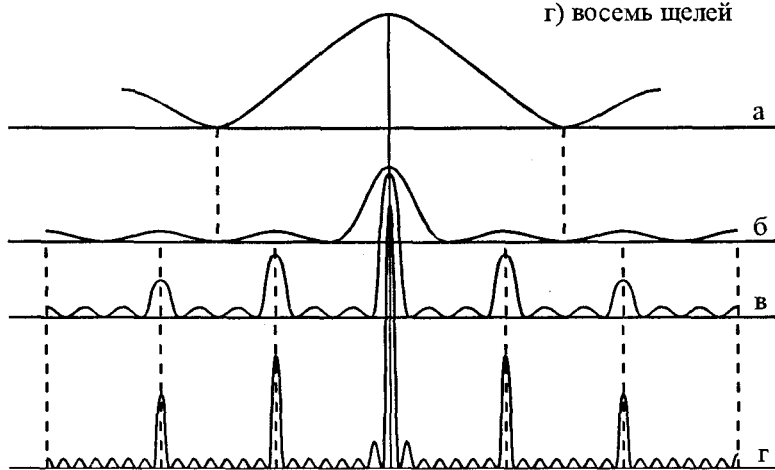


Рис. X.13

Совокупность большого числа узких щелей, разделенных непрозрачными промежутками, называется *дифракционной решеткой*. С увеличением числа щелей главные максимумы и прежние минимумы остаются на прежних местах, но максимумы становятся ярче, а промежутки между ними все темнее. С увеличением числа щелей увеличивается число дополнительных минимумов. Максимумы света на экране располагаются симметрично относительно центрального максимума, для которого $m = 0$. Максимумам присваивают номера, соответствующие значениям m . Раз-

личают максимумы первого, второго и т. д. порядков. При освещении дифракционной решетки белым светом максимумы одного и того же порядка для различных длин волн будут наблюдаться в различных направлениях. Это значит, что дифракционная решетка разлагает свет сложного состава в спектр. Из формул (2-5) видно, чем больше длина волны λ , тем на больший угол отклоняются лучи.

Дифракционная решетка позволяет очень точно определять длины волн, если известна постоянная решетки и углы отклонения лучей.

Задача X.1 Перед зеркалом воткнуты две булавки A и B , как показано на рис. X.14. Какое

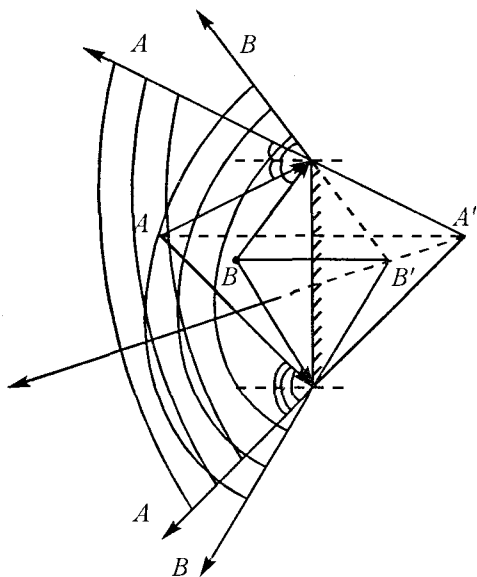


Рис. X.14

расположение изображений этих булавок увидит наблюдатель при различных положениях глаза? Как он должен расположить глаз, чтобы изображения булавок накладывались друг на друга?

Решение. Угол, в пределах которого глаз увидит ту или иную точку, определяется размерами зеркала. Чтобы найти этот угол, нужно провести лучи из точек A и B к краям зеркала и построить отраженные лучи. Эти отраженные лучи обязательно пересекутся там, где находится изображение искомой точки. Так, изображение точки A наблюдатель сможет увидеть в пределе угла $AA'A$, изображение точки B — в пределах угла $BB'B$. В той области пространства, где эти углы перекрываются, наблюдатель увидит две точки одновременно. Если наблюдатель смотрит вдоль линии, проходящей через изображения A' и B' булавок в зеркале, то он увидит эти изображения слившимися. Если он поместит глаз выше линии $A'B'$, то он увидит изображение булавки A слева от изображения булавки B . Если же он поместит глаз ниже линии $A'B'$, то он увидит изображение булавки A справа от изображения булавки B .

Задача X.2 На стене висит зеркало высотой $h = 1$ м. Человек стоит на расстоянии $a = 2$ м от зеркала. Какова высота H участка противоположной стены, который может видеть в зеркале человек, не изменяя положения головы? Стена находится на расстоянии $b = 4$ м от зеркала (рис. X.15).

Решение. Максимальные размеры участка стены, которые сможет увидеть наблюдатель, опре-

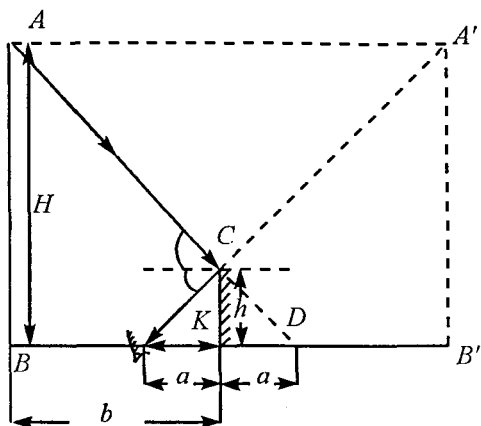


Рис. X.15

деляются лучами, попадающими в глаз наблюдателя, которые отразились от концов зеркала. Однако для наблюдателя эти лучи кажутся выходящими из точек A' и B' . Все остальные лучи, исходящие из точек между точками A и B , также попадают ему в глаз (см. рисунок).

Из подобия треугольников ADB и CDK видно:

$$\frac{h}{H} = \frac{a}{a+b}.$$

Таким образом:

$$H = \frac{h(a+b)}{a} = \frac{1 \cdot (2+4)}{2} = 3 \text{ м.}$$

Задача X.3 Какой наименьшей высоты должно быть плоское зеркало, укрепленное вертикально на стене, чтобы человек мог видеть свое отражение в нем во весь рост, не изменяя положения

головы? На каком расстоянии от пола должен быть нижний край зеркала?

Решение. Для того чтобы увидеть свое изображение в полный рост, зеркало должно быть такой величины, чтобы луч от ног человека, идущий в нижний край зеркала и отраженный от него, попал в глаза человека (рис. X.16). Луч, идущий от головы, должен при отражении от верхнего края зеркала попасть в глаз человеку. Из подобия треугольников $A'AB$ и $CA'D$ видно, что $CD = A'B'/2 = AB/2 = H/2$, т. е. размеры зеркала должны быть в два раза меньше роста человека. Расстояние от нижнего края зеркала до пола должно быть равно половине расстояния от глаз человека до его ступней.

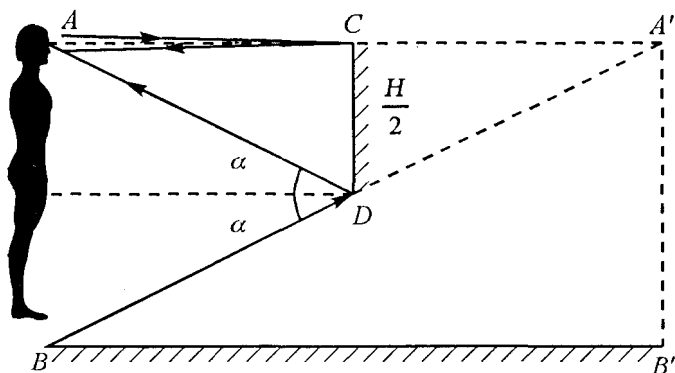


Рис. X.16

Задача X.4 Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из-под воды светящуюся

лампочку, находящуюся над его головой на расстоянии $h = 75$ см от поверхности воды. Каково будет кажущееся расстояние H от поверхности воды до лампочки? Показатель преломления воды $n = 1,33$ (рис. X.17).

Решение. Рассмотрим некоторый луч SA , падающий под малым углом α на границу раздела воздух — вода. Этот луч преломится под углом β и попадет в глаз человека. Но для человека луч выходит из точки S' , которая находится на пересечении двух лучей $S'O$ и $S'A$. Любое изображение можно получить с помощью двух лучей: один

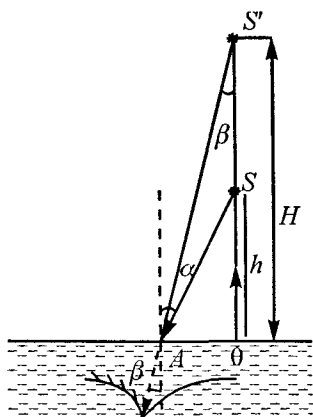


Рис. X.17

луч пускаем перпендикулярно границе раздела SO — он отражается в обратном направлении, второй луч выбираем SA , он преломляется, и продолжение преломленного луча пересекается с лучом OS' в точке S' . Эта точка и является кажущимся расположением источника S .

Рассмотрим прямоугольные треугольники ASO и $AS'O$. Они имеют общую сторону OA , которая равна $OA = h \cdot \operatorname{tg} \alpha = H \cdot \operatorname{tg} \beta$. Таким образом,

$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = n$$

(так как углы малы, можно считать

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \approx \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = n).$$

Следовательно, $H = nh = 0,75 \cdot 1,33 = 1 \text{ м}$.

Задача X.5 На дне сосуда глубиной d , наполненного водой, лежит монета. На какой высоте h от поверхности воды следует поместить электрическую лампочку, чтобы ее изображение, даваемое лучами, отраженными от поверхности воды, совпадало с изображением монеты, даваемым преломленными лучами?

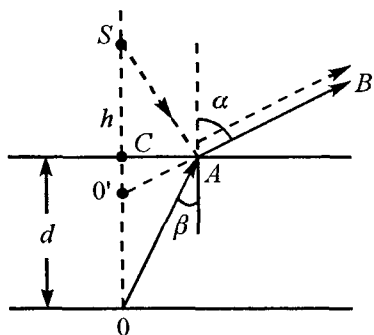


Рис. X.18

Как можно непосредственным наблюдением по вертикали установить совпадение изображений лампочки и монеты? (рис. X.18)

Решение. Направим любой луч OA на поверхность воды от монеты. Тогда он выйдет из воздуха под углом α (луч AB). По этому же направлению должен пойти

и отраженный от поверхности воды луч, падающий в точку A из источника S . Вторым луч от монеты направим перпендикулярно поверхности воды. Тогда пересечение продолжения луча $O'B$ с $O'S$ в точке O' даст изображение монеты и источника S одновременно. Если совпадение изображений монеты и источника S случайно, то, пе-

рещая глаз по вертикали, мы увидим, что изображения смещаются относительно друг друга (задача X.1). Искомое расстояние h легко определить из треугольников SCA и $O'CA$, имеющих общую сторону CA :

$$h \operatorname{tg} \alpha = d \operatorname{tg} \beta, \text{ или } h = \frac{d \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{d}{n}.$$

Задача X.6 На дне водоема, имеющего глубину $H = 3$ м, находится точечный источник света. Какой минимальный радиус R должен иметь круглый непрозрачный диск, плавающий на поверхности воды над источником, чтобы с вертолета нельзя было обнаружить этот источник света? Показатель преломления воды $n = 1,33$ (рис. X.19).

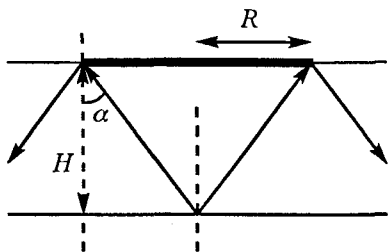


Рис. X.19

Решение. Чтобы лучи от источника не попали в воздух, они должны падать под углом, бóльшим угла полного отражения, т. е.

$$\sin \alpha \geq \frac{1}{n}. \text{ Так как } \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}, \text{ отсюда}$$

$$R = H \operatorname{tg} \alpha = \frac{H \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{H \sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 8,9 \text{ м.}$$

Задача X.7 Луч света падает на стеклянную пластинку с показателем преломления n под уг-

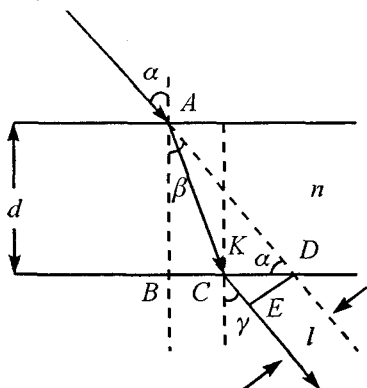


Рис. 10.20

лом α . Толщина пластины d . Определить, насколько сместился вышедший из пластины луч относительно падающего (рис. X.20).

Решение. Луч, вышедший из плоскопараллельной пластины, параллелен падающему лучу. Это легко показать. Действительно, со-

гласно закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \text{ а } \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}.$$

Перемножив эти соотношения, получим

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1.$$

Следовательно, $\sin \alpha = \sin \gamma$ и углы также равны $\alpha = \gamma$.

Таким образом, луч из плоскопараллельной пластины выходит под тем же углом, что и падает на нее. Однако он смещается на некоторое расстояние l . Определим это расстояние.

Опустим из точки D перпендикуляр DE на выходящий из пластины луч. Из треугольника CDE имеем (рис. X.20):

$$\begin{aligned} DE = l &= CD \cos \alpha = (BD - BC) \cos \alpha = \\ &= (d \operatorname{tg} \alpha - d \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha = \end{aligned}$$

$$= d(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha = \frac{d \sin \alpha (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Из этого соотношения видно, чем тоньше пластина, тем на меньшее расстояние сместится луч, выходя из пластины. Если толщина пластины d стремится к нулю, то можно считать, что луч практически не смещается.

Задача X.8 На расстоянии $d = 40$ см от тонкой собирающей линзы находится предмет высотой $h = 10$ см. Определить величину изображения H , если фокусное расстояние линзы $F = 15$ см (рис. X.21).

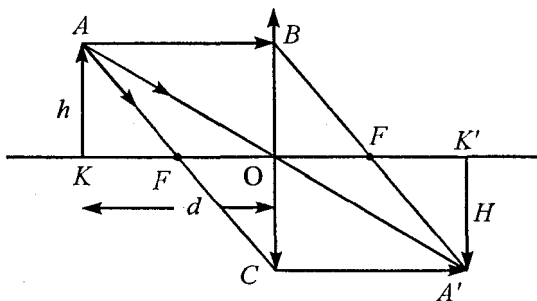


Рис. X.21

Решение. Любое изображение точки в линзе можно получить с помощью двух лучей. Мы воспользуемся двумя из трех «замечательных» лучей, ход которых через линзу мы всегда знаем. Таковыми лучами являются: 1) луч, идущий от источника, параллельный главной оптической оси,

после линзы проходит через фокус (луч $AB A'$); 2) луч, идущий через оптический центр линзы, не преломляется (луч $AO A'$); 3) луч, идущий через фокус, после линзы выходит параллельно главной оптической оси (луч $AC A'$). С помощью любых двух из этих лучей мы получаем изображение точки A . Изображение точки K получим в результате пересечения луча, проходящего через оптический центр KK' и перпендикуляра AK' , опущенного на главную оптическую ось.

Воспользовавшись формулой линзы, получим расстояние, на котором находится изображение предмета $A'K'$ от линзы (f) (см. п. X.5):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \text{ Отсюда } f = \frac{Fd}{d - F} = 24 \text{ см.}$$

Из подобия треугольников AKO и $A'K'O$ легко получить увеличение линзы $k = \frac{H}{h}$:

$$k = \frac{A'K'}{AK} = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, величина изображения

$$H = kh = \frac{3h}{5} = 6 \text{ см.}$$

Задача X.9 На рисунке показан источник S и его изображение S' . Определить построением положение оптического центра линзы и каждого из ее фокусов в случаях, когда главной оптической осью линзы являются прямые $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ (рис. X.22, а).

Решение. По сути дела, в этом условии содержится три задачи. Рассмотрим их.

1. Главной оптической осью является прямая $1-1'$. Если внимательно посмотреть на рисунок X.22, (б),

то можно заметить, что источник и изображение всегда лежат на одной прямой SS' , которая пересекает оптическую ось в точке, где находится оптический центр линзы. Поэтому в нашем случае, продолжив прямую SS' до пересечения с главной оптической осью $1-1'$, получим место нахождения оптического центра линзы O .

Далее из источника S проведем луч SB , параллельный главной оптической оси. Согласно рис. X.22, (б), прямая, прошедшая через точку B и изображение S' ,

обязательно пройдет через фокус линзы, который находится на пересечении этой прямой с главной оптической осью. Аналогично, если провести прямую $S'B'$, параллельную главной оптической оси, а затем соединить точку B' с источником S , то прямая $B'S$ пересечет главную оптическую ось во втором фокусе линзы.

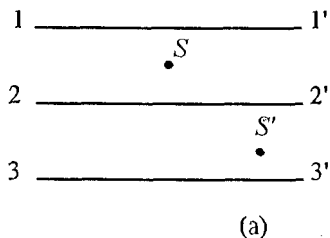


Рис. X.22

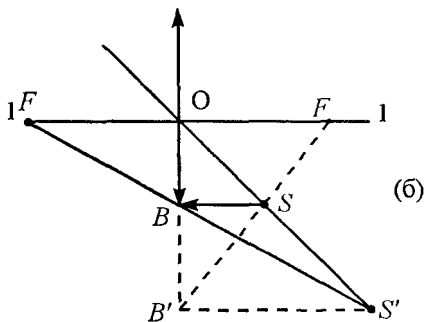


Рис. X.22

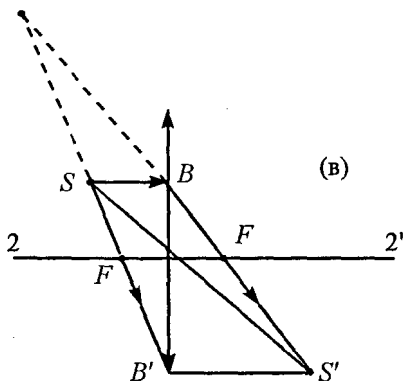


Рис. X.22

Повторим построения, проведенные при решении предыдущей задачи, получим, что изображение S' является действительным, а линза — собирающая (рис. X.22, в).

3. Главной оптической осью является прямая $3-3'$. Вновь проведем аналогичные построения: соединим прямой S и S' и продолжим ее до пересечения с точкой O ; из источника S проведем прямую SB , параллельную главной оптической оси $3-3'$. Точку B соединим с S' и продолжим до пересечения с главной оптической осью $3-3'$, определяя местоположение фокуса F . Из рис. X.22, (г) мы видим, что источник находится за фокусом, его изображение мнимое, следовательно, линза — рассеивающая.

Рис. X.22

Задача X.10 Где следовало бы расположить предмет, чтобы собирающая линза дала его прямое изображение в натуральную величину?

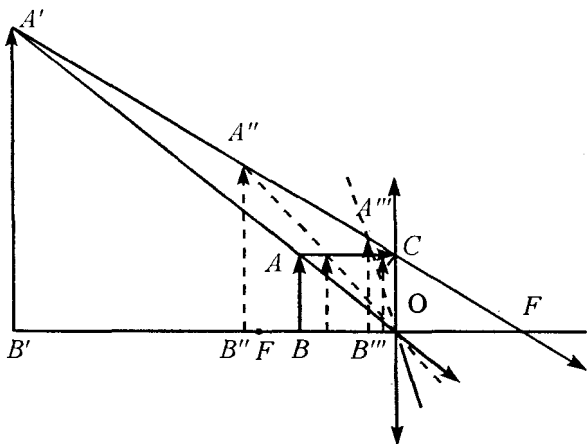


Рис. X.23

Решение. Все предметы, находящиеся за фокусом F , дают перевернутое изображение. Прямое изображение получается, когда предмет помещают между фокусом и линзой. В этом случае изображение будет мнимым. Проследим движение изображения при приближении предмета к линзе (рис. X.23). Изображение будем строить по двум «замечательным» лучам: 1) луч, параллельный главной оптической оси AC , после линзы проходит через фокус; 2) луч, проходящий через центр линзы AO , нигде не преломляется. Направление луча CF при любом положении предмета остается неизменным. Луч, проходящий через оптический центр линзы O , по мере приближения предмета к линзе постепенно поворачивается вокруг точки O , составляя с оптической осью все больший угол. Поэтому, если предмет поместить в плоскости, проходящей через оптический

центр, то его изображение будет прямым и в натуральную величину.

Задача X.11 Построить изображение отрезка AB , параллельного главной оптической оси собирающей линзы с заданным положением фокусов (рис. X.24).

Решение. Для получения изображения предмета AB достаточно построить изображение его конечных точек A и B . Это легко сделать с помощью двух «замечательных» лучей. Один луч проведем через оптический центр O , а другой — через фокус F . Соединим точки A' и B' прямой, которая и представляет собой изображение предмета AB .

Задача X.12 Через круглое отверстие в экране проходит сходящийся пучок лучей. Лучи пе-

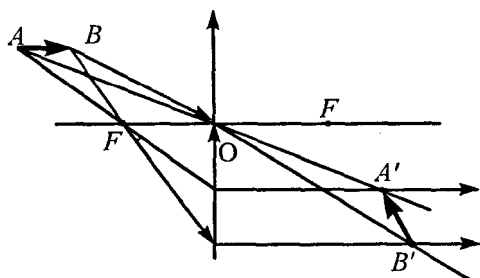


Рис. X.24

ресекаются в точке A , лежащей на расстоянии $a = 15$ см от экрана. Как изменится расстояние от точки встречи лучей до экрана, если в отверстие

вставить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 30$ см? Построить ход лучей после установки линзы (рис. X.25).

Решение. Для построения изображения точки A выберем два вспомогательных луча: один луч BA — это луч, проходящий через точку A параллельно главной оптической оси OO' ; второй луч — CA , проходящий через точку A и центр отверстия (он же и будет центром линзы). Точка пересечения этих лучей после линзы определит новое положение вершины пучка A' . Эта точка является изображением точки A (рис. X.25).

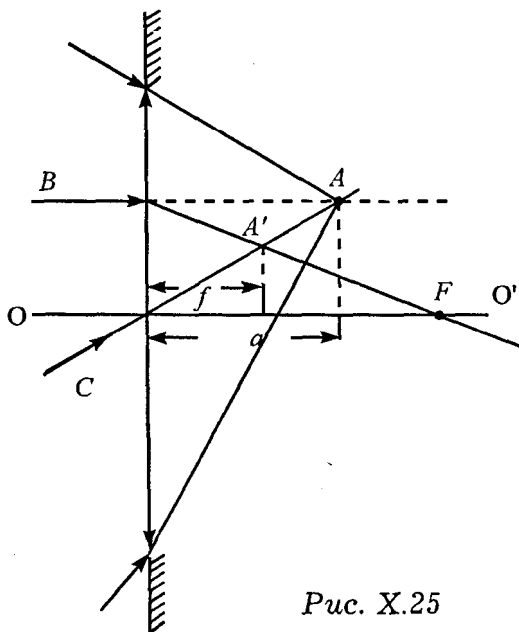


Рис. X.25

Так как на линзу падает сходящийся пучок света, то расстояние от линзы до источника A

следует брать со знаком «-», т.е. $d = -a$. Тогда положение точки A' определится из формулы линзы:

$$\frac{1}{-a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \text{ Отсюда } \frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{a}, \text{ или}$$

$$f = \frac{Fa}{a + f} = \frac{30 \cdot 15}{45} = 10 \text{ см.}$$

Таким образом, точка A' переместится на расстояние $\Delta = a - f = 5$ см ближе к линзе.

Задача X.13 Точечный источник S находится на главной оптической оси за фокусом. Определить построением его изображение: а) в собирающей линзе, б) в рассеивающей линзе.

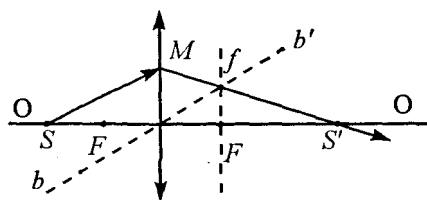


Рис. X.26 (а)

(рис. X.26). Далее проведем побочную ось bb' , параллельную проведенному лучу SM . Эта ось пересечется с фокальной плоскостью в некоторой точке f , но для собира-

Решение. Для построения изображения проведем в обоих случаях из источника любой луч в некоторую точку M

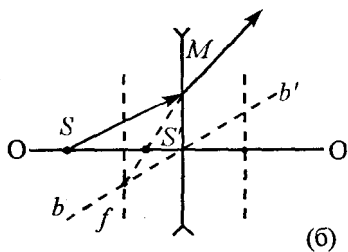


Рис. X.26 (б)

ющей линзы эта точка f лежит справа от линзы, а для рассеивающей — слева от линзы. Тогда луч Mf пересечет главную оптическую ось в точке, где находится изображение S' . Так как любое изображение можно построить по двум лучам, то второй луч выберем идущим из источника S вдоль главной оптической оси. Оба луча SM и SS' пересекутся в точке S' , которая является изображением. Для собирающей линзы в нашем случае изображение действительное, для рассеивающей — мнимое.

Задача X.14 Найти построением положение светящейся точки, если известен ход двух лучей после их преломления в линзе (рис. X.27). Один из этих лучей (луч 2) проходит через фокус.

Решение.
 Лучи, выходящие из линзы, для человеческого глаза кажутся исходящими из точки S' , которая является изображением источника и лежит на пересечении лучей 1 и 2. Мы уже знаем (задача X.8), что источник S и изображение S' лежат на одной прямой, проходящей через оптический центр, поэтому проведем луч $S'O'$. Так как луч 2 проходит через фокус, то до линзы он обязательно должен

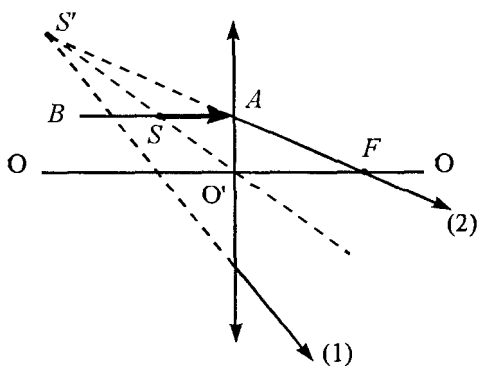


Рис. X.27

пересечения лучей 1 и 2. Мы уже знаем (задача X.8), что источник S и изображение S' лежат на одной прямой, проходящей через оптический центр, поэтому проведем луч $S'O'$. Так как луч 2 проходит через фокус, то до линзы он обязательно должен

идти параллельно главной оптической оси OO' . Поэтому, если мы проведем прямую AB , параллельную главной оптической оси OO' , то она пересечет луч $S'O'$ в точке S , которая и является местом положения светящейся точки.

Задача X.15 Собирающая линза положена на плоское зеркало. Где нужно поместить точечный источник, чтобы изображение его, даваемое этой системой, было действительным и совпало с самим источником (рис. X.28)?

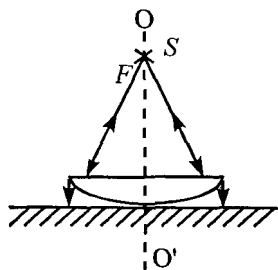


Рис. X.28

Решение. Чтобы изображение совпало с источником после отражения, лучи должны пройти по тому же пути, что и до отражения. Это произойдет только в том случае, если

лучи на зеркало после прохождения линзы падают перпендикулярно. Это означает, что после линзы лучи выходят параллельно оптической оси OO' . Следовательно, источник должен находиться в фокусе.

Задача X.16 Собирающая линза вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $d = 10$ см от нее. По другую сторону линзы на таком же расстоянии d от нее поставлен перпендикулярно к этой оси экран. На экране виден светлый круг, диа-

метр которого в $n = 2$ раза меньше диаметра линзы. Определить фокусное расстояние линзы F .

Решение. В этой задаче возможны два решения: лучи падают на экран расходящимся пучком ($d < f$, рис. X.29, а)

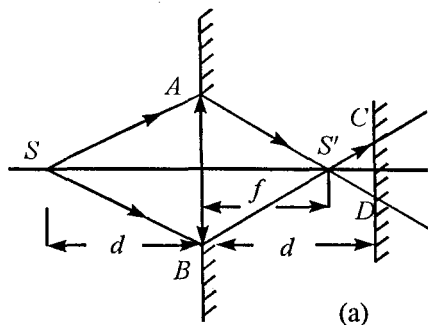


Рис. X.29

и сходящимся ($d > f$, рис. X.29, б). Рассмотрим первый случай. Из подобия треугольников $AS'B$

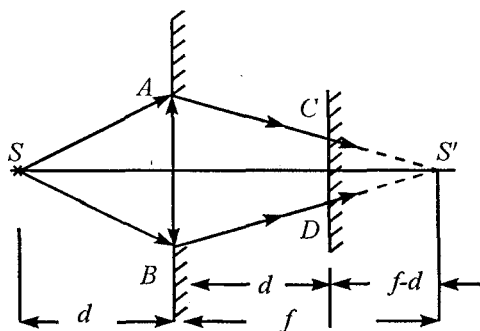


Рис. X.29 (б)

и $CS'D$ имеем: $\frac{AB}{CD} = \frac{f}{d-f} = n = 2$. Вспомним фор-

мулу линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и, подставив в нее выра-

жение для $f = \frac{nd}{n+1}$, получим

$$F = nd(2n + 1) = 4 \text{ см.}$$

Рассмотрим второй случай. Из подобия треугольников $AS'B$ и $CS'D$ имеем $\frac{AB}{CD} = \frac{f}{f-d} = n$,

отсюда $f = \frac{dn}{n-1}$. Подставив значение f в формулу линзы, получим

$$F = dn(2n - 1) = 6,7 \text{ см.}$$

Задача X.17 Сходящийся пучок лучей, проходящий через отверстие радиусом $r = 5$ см в непрозрачной ширме, дает на экране, расположенном за ширмой на расстоянии $b = 20$ см, светлое пятно радиусом $R = 4$ см. После того как в отверстие вставили линзу, пятно превратилось в точку. Найти фокусное расстояние F линзы (рис. X.30).

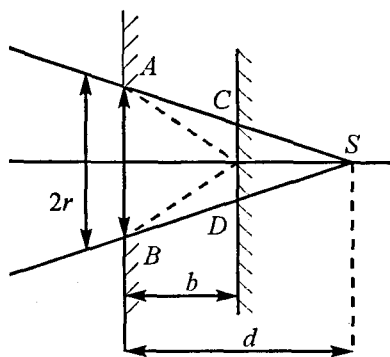


Рис. X.30

Решение. Точка S , в которой сходятся лучи при отсутствии линзы, является мнимым источником, находящимся на расстоянии d от ширмы. Из подобия треугольников ASB и CSD получим

$$\frac{2r}{d} = \frac{2R}{d-b} \quad (\text{при } b < d), \quad (1)$$

или

$$\frac{2r}{d} = \frac{2R}{b-d} \quad (\text{при } b > d). \quad (2)$$

Воспользуемся формулой линзы:

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (3)$$

Значение фокуса берется со знаком «+», так как неизвестно, какая должна быть линза. Решая сначала систему уравнений (1) и (3), а затем систему (2) и (3), получим

$$F = \pm \frac{rb}{R} = \pm 25 \text{ см.}$$

Знак «+» соответствует случаю $b < d$ и указывает на то, что в отверстие следует вставить собирающую линзу, знак «-» — рассеивающую.

Задача X.18 Два когерентных источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии l друг от друга. На расстоянии $D \gg l$ от источника помещается экран. Определить расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана (вблизи точки O), если источник посылает свет длины волны λ (рис. X.31).

Решение. Предположим, что в некоторой точке A на экране мы увидим максимум порядка m .

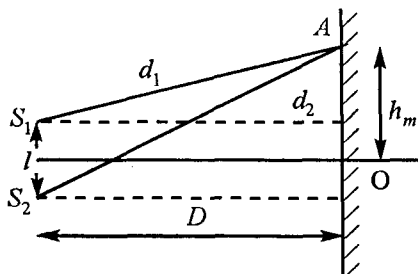


Рис. X.31

Это произойдет в том случае, когда разность хода $\Delta = d_2 - d_1$ будет равна целому числу длин волн, т. е. $d_2 - d_1 = m\lambda$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Из рисунка видно, что

$$d_1^2 = D^2 + \left(h_m - \frac{l}{2}\right)^2, \text{ а } d_2^2 = D^2 + \left(h_m + \frac{l}{2}\right)^2, \text{ тогда}$$

$$d_2^2 - d_1^2 = D^2 + \left(h_m + \frac{l}{2}\right)^2 - D^2 - \left(h_m - \frac{l}{2}\right)^2 = 2h_m l,$$

но с другой стороны

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 2h_m l.$$

Так как по условию $D \gg l$, то можно считать, что $d_1 + d_2 \approx 2D$. Тогда

$$d_2 - d_1 = \frac{2h_m l}{2D} = m\lambda.$$

Отсюда, расстояние от центра (от точки O) до светлой полосы порядка m

$$h_m = \frac{m\lambda D}{l},$$

а расстояние между полосами

$$\Delta h = h_{m+1} - h_m = \frac{\lambda D}{l}.$$

Таким образом, расстояние между соседними светлыми полосами (как и между соседними темными) остается постоянным для одной и той же длины монохроматической волны.

Задача X.19 Собирающая линза, имеющая фокусное расстояние $F = 10$ см, разрезана попо-

лам, и половинки раздвинуты на расстояние $a = 0,5$ мм (билинза). Оценить число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $D = 60$ см, если перед линзой имеется точечный источник монохроматического света ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см), находящийся на расстоянии $d = 15$ см от нее (рис. X.32).

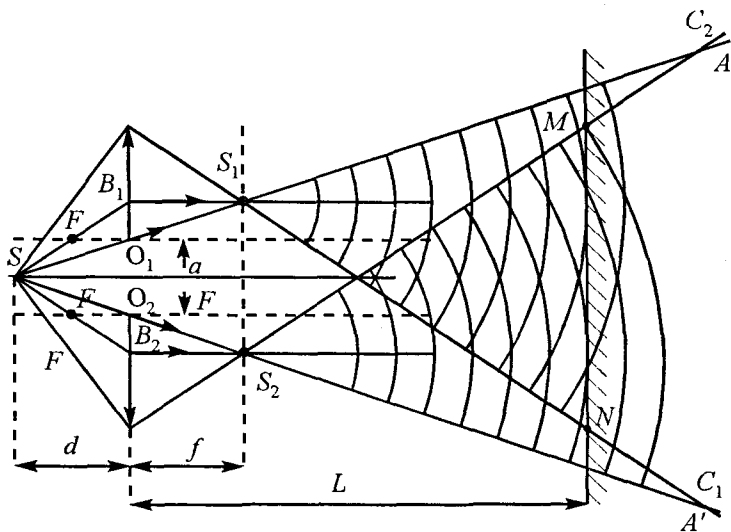


Рис. X.32

Решение. Билинза является тем устройством, которое позволяет получить когерентные источники света. В билинзе при смещении половинок линз вместе с ними смещаются и фокусы, и оптические центры этих половинок. Поэтому каждая из половинок дает свое изображение источника S . Изображение строим по обычным зако-

нам: по двум из «замечательных» лучей. Один луч проведем через оптические центры половинок линзы (лучи SA и SA'), а другой — через фокусы половинок линзы (лучи SB_1S_1 и SB_2S_2). Пересечение этих двух лучей за линзой дает изображение S_1 и S_2 . Все лучи, выходящие из источника и проходящие через половинки линзы, обязательно пройдут через изображения. Изображение S_1 можно видеть только в пределах угла, образованного крайними лучами, прошедшими через половинки линзы. Так, изображение S_1 можно увидеть в пределах угла AS_1C_1 , а изображение S_2 — в пределах угла $A'S_2C_2$. Экран можно поместить только в той области, где эти углы перекрываются, т. е. где встречаются лучи, идущие от когерентных источников S_1 и S_2 , значит на экране мы сможем увидеть интерференцию в пределах MN . Таким образом, мы имеем два когерентных источника, расстояние между которыми $l = S_1S_2$, расстояние от источников до экрана равно $D = L - f$. Искомое число интерференционных

полос $N = \frac{MN}{\Delta h}$, где Δh — расстояние между соседними максимумами. Расстояние между источниками S_1S_2 можно легко определить из подобия треугольников SO_1O_2 и SS_1S_2 :

$$\frac{S_1S_2}{a} = \frac{f + d}{d}, \text{ или } S_1S_2 = \frac{a(f + d)}{d},$$

где f вычисляется из формулы линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.

Откуда

$$f = \frac{Fd}{d - f} = \frac{10 \cdot 15}{5} = 30 \text{ см.}$$

Таким образом:

$$l = S_1 S_2 = \frac{a \left(\frac{Fd}{d - F} + d \right)}{d} = \frac{ad}{d - F} = 0,15 \text{ см.}$$

Расстояние между соседними полосами Δh мы получили в предыдущей задаче.

$$\Delta h = \frac{\lambda D}{l} = \frac{\lambda}{l} (L - f).$$

Расстояние MN определяется из подобия треугольников MSN и O_1SO_2 , т. е.

$$\frac{MN}{L + d} = \frac{a}{d}, \text{ или } MN = \frac{a(L + d)}{d}.$$

Таким образом, на экране можно увидеть число интерференционных полос.

$$N = \frac{MN}{\Delta h} = \frac{a(L + D)l}{d\lambda(L - f)} = \frac{a^2(L + d)}{\lambda(L - f)(d - F)} = 25 \text{ полос.}$$

Задача X.20 Какой минимальной толщины (d_{\min}) должна быть прозрачная тонкая пленка с показателем преломления $n = 1,2$, чтобы произошло усиление красного света ($\lambda = 8 \cdot 10^{-7}$ м) при отражении от верхней и нижней поверхностей пленки.

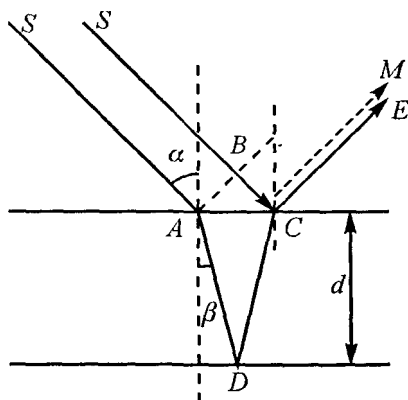


Рис. X.33

Свет падает на пленку под углом $\alpha = 30^\circ$ (рис. X.33).

Решение. При падении на пленку света он частично отражается от ее поверхности (например, луч CM), а частично проходит внутрь и вновь отражается от нижней поверхности (луч DCE). Оба эти луча

когерентные, так как они являются частями одного и того же цуга волн излучающего атома. При встрече этих двух лучей происходит их интерференция. Встретившиеся лучи проходят разные расстояния. Один из них идет по пути SCM , а другой — $SADCE$. Разность хода этих двух лучей

$$\Delta = ADC - BC = 2AD \cdot n - BC = \frac{2dn}{\cos \beta} - AC \sin \alpha =$$

$$= \frac{2dn}{\cos \beta} - 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha = 2dn \cos \beta.$$

Следует отметить, что оптический путь $AD \cdot n$ отличается от геометрического (AD), так как световые лучи длины волны λ в воздухе, в пленке

(пластине) имеют длину $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n}$ ($n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda v}{\lambda_1 v} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$,

т. е. длина волны в пленке уменьшается в n раз

($n > 1$), а значит, в ней укладывается бóльшее число длин волн.

Если в разности хода Δ содержится целое число длин волн, то происходит усиление света (максимум освещенности).

$$\Delta = 2dn \cos \beta = m\lambda, \quad (1)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Если } \Delta = 2dn \cos \beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad (2)$$

то наблюдается ослабление света (минимум освещенности). Условия (1) и (2) записаны без учета потери полуволны, которая происходит при отражении от более плотной среды (т. е. от верхней границы).

Минимальная толщина пленки, при которой произойдет усиление красного света, определяется из условия (1) при $m = 1$, т. е.

$$2d_{\min} n \cos \beta = \lambda, \text{ или}$$

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \frac{\lambda}{2n \cos \beta} = \frac{\lambda}{2n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{8 \cdot 10^{-5} \text{ см}}{2 \cdot 1,09} = 3,67 \cdot 10^{-5} \text{ см.} \end{aligned}$$

Столь тонкие пленки очень трудно изготовить, поэтому обычно пленки имеют толщину, превышающую d_{\min} в целое число раз. Однако максимальная толщина пленки имеет очень ограниченный предел. Дело в том, что строго монохроматического света не существует, и длина волны

лежит в пределах от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Поэтому может случиться так, что один край m -го максимума совпадает с краем $(m+1)$ -го максимума, т. е. $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$ или $\Delta\lambda = \lambda/m$. Таким образом, m не должно быть очень большим, а значит, и толщина пленки d_{\min} — тоже. Так, например, при стеклянной пластине толщиной $d = 0,1$ мм наблюдение интерференционных полос уже невозможно.

Задача X.21 Чтобы уменьшить коэффициент отражения света от оптических стекол, на их поверхности наносят тонкий слой прозрачного вещества, у которого показатель преломления n меньше, чем у стекол. (Так называемый «метод просветления» оптики.) Определить минимальную толщину наносимого слоя, считая, что световые лучи падают на оптическое стекло перпендикулярно. Объяснить, почему объективы с «просветленной оптикой» имеют пурпурно-фиолетовый (сиреневый) оттенок?

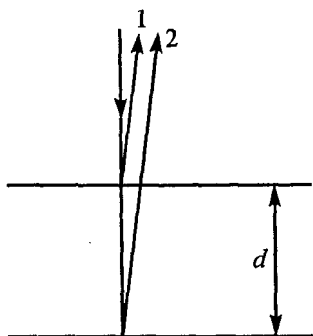


Рис. X.34

Решение. Для уменьшения коэффициента отражения нужно, чтобы отраженные лучи 1 и 2 ослабили («гасили») друг друга (рис. X.34). Это произойдет в том случае, если для двух лучей будет

удовлетворяться условие минимума освещенности (задача X.18), т. е.

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ или } d = \frac{2 + m}{4n}\lambda,$$

для $m = 1$ $d_{\min} = \frac{3}{4n}\lambda.$ (1)

Так как на объектив падает белый свет, то толщину наносимого слоя рассчитывают для зеленого света, поэтому зеленый свет гасится, а крайние части видимого спектра (красная и фиолетовая) отражаются. Смещение этих цветов и дает сиреневый оттенок.

Задача X.22 Определить расстояние между соседними максимумами, если монохроматический свет с длиной волны λ падает нормально на тонкую пленку в виде клина с малым углом наклона α (рис. X.35).

Решение. Если на клин направить параллельный монохроматический пучок света, то на поверхности клина можно наблюдать че-

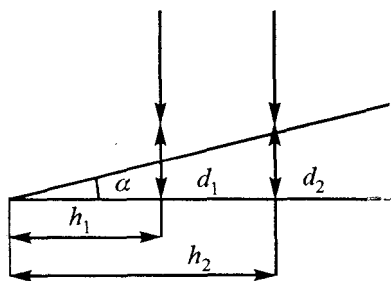


Рис. X.35

редующиеся темные и светлые полосы. В этом случае наблюдается интерференция лучей, отраженных от верхней и нижней поверхностей клина.

Если разность хода этих двух лучей равна це-

лому числу волн $\Delta = 2dn = m\lambda$, то наблюдается максимум (без учета потерь при отражении).

Пусть два соседних максимума находятся на расстоянии h_1 и h_2 от начала клина (рис. X.35), $d_1 = h_1\alpha$ и $d_2 = h_2\alpha$ соответствующие этим максимумам толщины пленок. Тогда разность хода для лучей, проходящих эти толщины:

$$\Delta_1 = 2d_1n = m\lambda \text{ и } \Delta_2 = 2d_2n = (m+1)\lambda.$$

Расстояние между соседними максимумами

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{d_2}{\alpha} - \frac{d_1}{\alpha} = \frac{(m+1)\lambda - m\lambda}{2n\alpha} = \frac{\lambda}{2n\alpha}.$$

Из формулы видно, что полосы лежат на равном расстоянии друг от друга, однако, чем больше угол α , тем ближе расположены полосы.

Задача X.23 Почему кольца Ньютона образуются только вследствие интерференции лучей 2

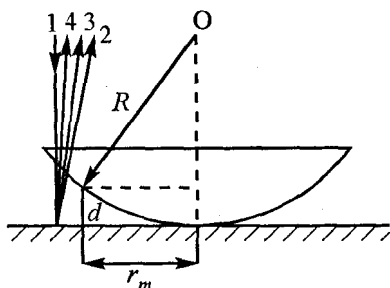


Рис. X.36

и 3, отражаясь от воздушной прослойки между линзой и стеклом (рис. X.36), а луч 4, отраженный от плоской грани линзы, не влияет на характер интерференционной картины? Полагая, что монохроматический свет падает нормально,

вычислить радиусы колец Ньютона, если известен радиус кривизны линзы (на рисунке ход лу-

чей 4, 2, 3 несколько искажается, чтобы лучше видно было, о каких лучах идет речь).

Решение. Все три луча 2, 3, 4 являются когерентными, однако интерференционную картину можно наблюдать только в том случае, если лучи 2 и 3 отражаются от воздушной прослойки, находящейся в непосредственной близости от точки соприкосновения линзы и стекла. Вдали от точки соприкосновения наблюдать интерференционную картину невозможно, так как воздушный слой, равно как и толщина линзы, являются «толстыми» пленками (задача X.20). При отражении лучей от воздушной прослойки разность хода лучей 2 и 3 равна $\Delta = 2dn$. Если мы будем наблюдать светлые кольца, то $\Delta = 2dn = m\lambda$. Из рисунка видно:

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2 = (2R - d)d \approx 2Rd$$

(так как $d < 0,01$ мм, $R \sim 1-2$ м).

Отсюда $r = \sqrt{2Rd}$, при наблюдении светлых полос

$$d = \frac{m\lambda}{2n} = \frac{m\lambda}{2} \quad (\text{для воздушного слоя } n = 1).$$

Таким образом, радиус светлого кольца порядка m $r_m = \sqrt{m\lambda R}$.

Расчет радиусов светлых колец был проведен без учета потери полуволны при отражении от более плотной среды.

Воздушную прослойку между поверхностью линзы и горизонтальной поверхностью можно

рассматривать как совокупность воздушных клиньев с меняющимся углом наклона α . Согласно формуле, полученной в предыдущей задаче, расстояние между соседними максимумами будет уменьшаться (угол α увеличивается), т. е. максимумы будут сближаться при движении от центра линзы к периферии.

Задача X.24 Вычислить радиусы зон Френеля сферической волны радиусом a для точки B , отстоящей от источника монохроматических волн длины λ на расстоянии $a + b$, полагая, что $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$ (рис. X.37).

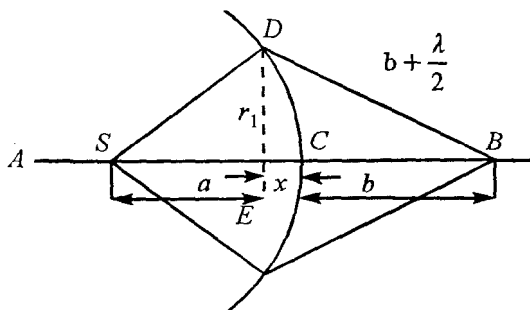


Рис. X.37

Решение. Опустим перпендикуляр из точки D на прямую SB . Радиус первой зоны (см. пX.7) легко определяется из треугольников SDE и BDE по теореме Пифагора:

$$r_1^2 = a^2 - (a - x)^2; \quad (1)$$

$$r_1^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x)^2. \quad (2)$$

Приравняв левые части уравнений (1) и (2),

получим: $x(a + b) = \frac{b\lambda}{2}$, т. е. $x = \frac{b\lambda}{2(a + b)}$ (при этом

полагаем, что $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \ll ab$).

Теперь воспользуемся первым равенством

$$r_1^2 = a^2 - (a - x)^2 = 2ax + x^2$$

и подставим выражение для x , учитывая, что $x^2 \ll ax$. Тогда

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a + b}}.$$

Для зоны Френеля номером m получим аналогично

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a + b}}. \quad (3)$$

Задача X.25 Точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см находится на расстоянии $a = 6,75$ м от ширмы с отверстием $D = 4,5$ мм. На расстоянии $b = a$ от ширмы расположен экран (рис. X.38). Как изменит-

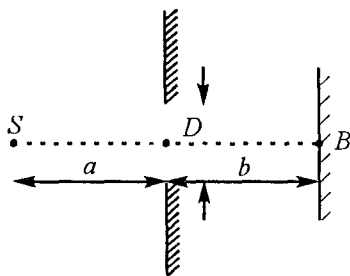


Рис. X.38

ся освещенность в точке B на экране, если диаметр отверстия увеличить до $D_1 = 5,2$ мм?

Решение. Теперь, когда мы знаем радиус любой зоны (уравнение (3), задача X.24), можно легко определить сколько зон укладывается в отверстие диаметром D . Действительно:

$$r_m = \frac{D}{2} = \sqrt{\frac{mab\lambda}{a+b}}, \text{ или } m = \frac{D^2(a+b)}{4ab\lambda} = 3.$$

Это значит, что отверстие открывает нечетное число зон. Следовательно, в точке B на экране будет светлое пятно. Если диаметр отверстия сделать равным D_1 , то

$$m_1 = \frac{D_1^2(a+b)}{4ab\lambda} = 4,$$

т. е. теперь отверстие открывает четное число зон Френеля, значит, в точке B на экране будет темное пятно. Таким образом, увеличение отверстия приводит к уменьшению освещенности в точке B на экране.

Задача X.26 Плоская световая волна с длиной волны λ падает нормально на узкую щель шириной b . Определить направления на минимум освещенности (рис. X.39).

Решение. Чтобы дифракционная картина была видна, на конечном расстоянии за щелью помещают собирающую линзу, а в ее фокальной плоскости — экран. Тогда все лучи, идущие под углом φ , собираются в некоторой точке A на экране.

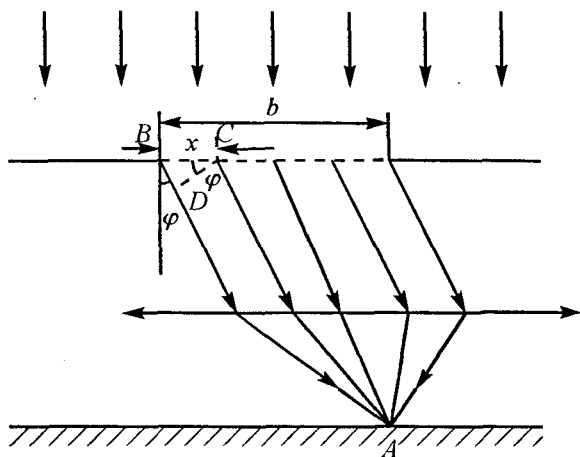


Рис. X.39

Так как на щель падает плоская волна, то ее фронт совпадает с плоскостью щели и все точки этого фронта (волновой поверхности) колеблются в одинаковой фазе. Но в точку A на экране они приходят не в одинаковой фазе, так как оптические пути их различны.

Рассмотрим точки B и C щели, расположенные на расстоянии x друг от друга. Разность хода лучей, исходящих из этих точек: $\Delta = BD = x \sin \varphi$.

Если эта разность хода равна $\lambda/2$, то расстояние $BC = x$ является шириной одной зоны Френеля, т. е.

$$\Delta = x \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}.$$

Следовательно, если на щели укладывается четное число зон, то в точке A происходит полное гашение колебаний и освещенность равна

нулю, т.е. $\frac{b}{x} = 2m$. Тогда $b = 2mx = \frac{2m\lambda}{2 \sin \varphi}$, или

$b \sin \varphi = m\lambda$, отсюда

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{b}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

XI. ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ В 1994–1996 гг. НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В этой главе разбираются задачи, предложенные в 1994–1996 гг. на вступительных экзаменах в Московском государственном университете на факультетах: геологическом, физическом, химическом, механико-математическом и факультете ВМиК.

Следует отметить, что существуют несколько способов решения задач, однако из всех возможных способов абитуриенты должны выбирать более короткий и простой способ, поскольку им нужно показать свою эрудицию, свои знания, которые были накоплены за годы обучения в школе.

Задача XI.1 С вершины горы бросили камень со скоростью v_0 под углом к горизонту. В момент падения угол между скоростью камня и горизон-

том β , а разность высот точек бросания и падения Δh . Определить угол α между скоростью \vec{v}_0 и горизонтом (рис. XI.1).

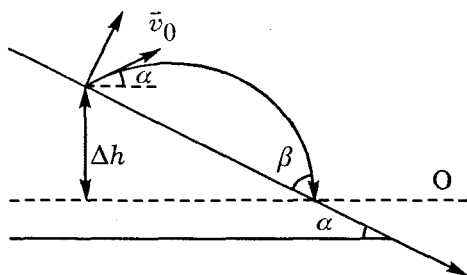


Рис. XI.1

Решение. Эту задачу проще всего решить, если воспользоваться законом сохранения механической энергии. Система: камень — Земля, является замкнутой, и силы, которые в ней действуют, — консервативные. Поэтому можно применить закон сохранения механической энергии.

За начальный уровень отсчета выберем горизонтальную прямую, проходящую через точку падения камня. Тогда закон сохранения механической энергии запишется

$$mg\Delta h + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость камня при падении. Она легко определяется.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}.$$

Так как на камень действует только сила тяжести, направленная вертикально, то горизон-

тальная составляющая скорости камня не меняет своей величины, т. е.

$$v_0 \cos \alpha = v \cos \beta ,$$

таким образом:

$$\cos \alpha = \frac{v}{v_0} \cos \beta = \cos \beta \sqrt{1 + \frac{2g\Delta h}{v_0^2}} ;$$

$$\alpha = \arccos \left(\cos \beta \sqrt{1 + \frac{2g\Delta h}{v_0^2}} \right).$$

Задача XI.2 Катер, движущийся со скоростью $v_k = 30$ км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах. Стальной трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150^\circ$. Направление движения спортсмена образует с тросом угол $\beta = 60^\circ$. Определить скорость спортсмена в этот момент времени (рис. XI.2).

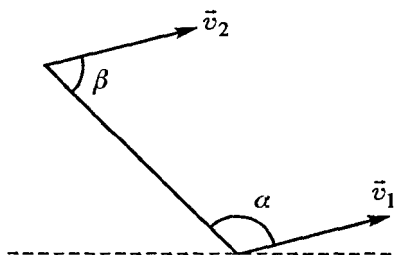


Рис. XI.2

Решение. Так как трос стальной, а значит, нерастяжимый,

то проекции скоростей спортсмена и катера на направление троса должны быть одинаковыми, т. е.

$$v_c \cos \beta = v_k \cos (180^\circ - \alpha);$$

$$v_c = \frac{v_k \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = v \sqrt{3} = 52 \text{ км/ч.}$$

Задача XI.3 Нарушитель промчался мимо поста ГАИ на автомобиле со скоростью $v_1 = 108$ км/ч.

Спустя $t_1 = 20$ с вслед за ним отправился на мотоцикле инспектор ГАИ и, разгоняясь в течение $t_2 = 40$ с, набрал скорость $v_2 = 144$ км/ч. На каком расстоянии S от поста ГАИ инспектор догонит нарушителя, если инспектор после разгона движется со скоростью v_2 ?

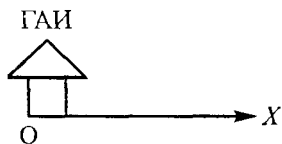


Рис. XI.3

Решение. Начало координат свяжем с местом расположения ГАИ (рис. XI.3). Тогда координата нарушителя, движущегося с постоянной скоростью v_1 ,

$$x_{\text{н}} = v_1(t_1 + t_2 + t),$$

где t — время, в течение которого инспектор двигался за автомобилем с постоянной скоростью v_2 .

Координата инспектора

$$x_{\text{и}} = \frac{at_2^2}{2} + v_2t.$$

В момент, когда инспектор догонит нарушителя, их координаты будут одинаковы, т.е.

$$x_{\text{н}} = x_{\text{и}}, \text{ или } v_1(t_1 + t_2 + t) = \frac{at_2^2}{2} + v_2t.$$

Так как $v_2 = at_2$, то

$$v_1(t_1 + t_2 + t) = \frac{v_2t_2}{2} + v_2t.$$

Отсюда

$$t = \frac{v_1(t_1 + t_2) - \frac{v_2 t_2}{2}}{v_2 - v_1} = 100 \text{ с.}$$

Через $t = 100$ с инспектор догонит нарушителя, при этом они оба будут находиться на расстоянии S от ГАИ.

$$S = x_{\text{И}} = x_{\text{Н}} = \frac{v_1 v_2 (2t_1 + t_2)}{2(v_2 - v_1)} = 1728 \text{ м.}$$

Задача XI.4 На горизонтальном столе лежат два бруска, связанные невесомой и нерастяжимой нитью. Нить расположена в вертикальной плоскости, проходящей через центры брусков, и образует с горизонтом угол α . К правому бруску массой M приложена горизонтальная сила F , проходящая через центр тяжести бруска. Определить силу натяжения T нити при движении брусков, если коэффициент трения брусков о стол равен μ . Масса второго бруска равна m (рис. XI.4).

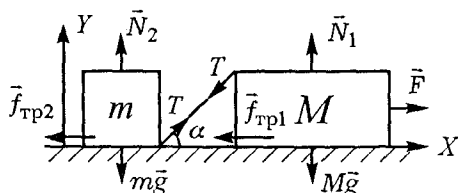


Рис. XI.4

Решение. Нарисуем стрелочками все силы, действующие на оба бруска, и запишем второй закон Ньютона в проекции на ось OX для каждого бруска

$$F - f_{\text{тр1}} - T \cos \alpha = Ma, \quad (1)$$

где $f_{\text{тр1}} = \mu N_1$.

$$T \cos \alpha - f_{\text{тр2}} = ma, \quad (2)$$

где $f_{\text{тр2}} = \mu N_2$.

N_1 и N_2 можно определить из уравнений Ньютона, записанных вдоль оси OY :

$$N_1 - T \sin \alpha - Mg = 0, \text{ отсюда } N_1 = Mg + T \sin \alpha$$

$$N_2 + T \sin \alpha - mg = 0, \text{ отсюда } N_2 = mg - T \sin \alpha.$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим

$$F - \mu(M + m)g = (M + m)a. \quad (3)$$

Следует отметить, что уравнения (1), (2) и (3) справедливы, если $F > \mu(M + m)g$.

Из уравнения (3) видно, что оба бруска движутся с ускорением

$$a = \frac{F - \mu(M + m)g}{M + m},$$

а сила натяжения T меняется по закону

$$T = \frac{Fm}{(M + m)(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}.$$

Задача XI.5 На идеально гладком столе находится клин массой $M = 1$ кг с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. На гладкий клин кладут брусок массой $m = 2$

кг. Под каким углом β соскользнет брусок с поверхности клина (рис. XI.5)?

Решение. Рассмотрим систему тел: клин — брусок. Для этой системы тел вдоль горизонтального направления выполняется закон сохранения импульса (силы N и N' являются внутренними). Как только брусок начнет двигаться вдоль наклонной плоскости, клин поедет влево с некоторой скоростью u . В любой момент времени выполняется закон сохранения импульса:

$$0 = mv_r - Mu, \text{ или } u = \frac{mv_r}{M}, \quad (1)$$

где v_r — горизонтальная составляющая бруска относительно Земли.

Так как клин ускользает из-под бруска, то брусок соскользнет с поверхности клина со скоростью v под углом β , бóльшим, чем угол α , причем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_B}{v_r}, \quad (2)$$

где v_B — вертикальная составляющая скорости бруска.

Относительно клина в горизонтальном направлении (рис. XI.5, а) скорость бруска

$$v_{x \text{ отн}} = v_r - (-u) = v_r + u, \text{ тогда}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_B}{v_r + u}. \quad (3)$$

Это условие пребывания бруска на поверхности клина.

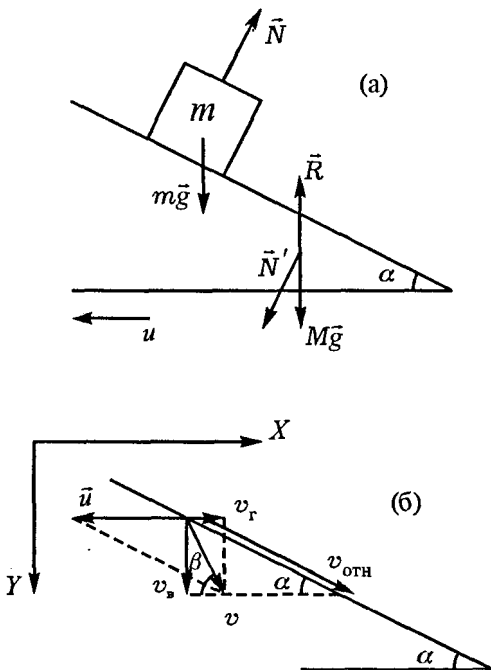


Рис. XI.5

Разделив числитель и знаменатель правой части уравнения (3) на v_r , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_b / v_r}{1 + u / v_r} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 + m / M}, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{(M + m)}{m}.$$

Из этого соотношения следует, что $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$.

Задача XI.6 Кирпич, лежащий на краю крыши дома, толкнули вверх вдоль ската со скоростью $v = 10$ м/с. После упругого удара о конек кирпич соскользнул обратно и остановился на краю крыши.

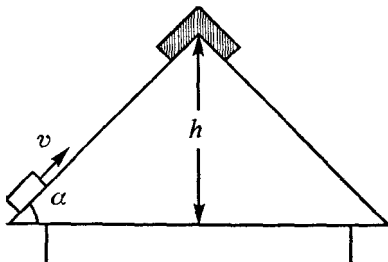


Рис. XI.6

Определить коэффициент трения μ между кирпичем и поверхностью крыши, если конек находится на высоте $h = 2,5$ м от края крыши. Угол наклона крыши к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис. XI.6).

Решение. Задача становится очень простой, если воспользоваться законом изменения механической энергии.

Вся кинетическая энергия, сообщенная кирпичу, пошла на работу против сил трения, т. е.

Вся кинетическая энергия, сообщенная кирпичу, пошла на работу против сил трения, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} = 2f_{\text{тр}}l = 2\mu \frac{mgh \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\mu mgh}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Отсюда коэффициент трения

$$\mu = \frac{v^2 \operatorname{tg} \alpha}{4gh} = \frac{10^2 \cdot 1}{4 \cdot 9,8 \cdot \sqrt{3}} = 1,47.$$

Задача XI.7 К деревянному кубу массой M , лежащему на плоской горизонтальной поверхности, прикрепена невесомая пружина жесткостью k . Другой конец пружины закреплен. В куб попада-

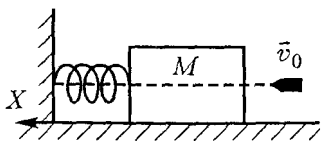


Рис. XI.7

ет пуля массой m и застревает в нем (пуля летит вдоль горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести куба, со скоростью v_0). Определить макси-

мальное смещение куба Δx , если между кубом и горизонтальной поверхностью возникает сила трения. Коэффициент трения μ (рис. XI.7).

Решение. После попадания пули она движется с кубом с одинаковой скоростью u . Можно записать закон сохранения импульса

$$mv_0 = (m + M)u,$$

где u — скорость сразу после удара.

Кинетическая энергия, которую приобрел куб сразу после удара, пошла на преодоление работы против сил трения и на сжатие пружины (сообщение ей потенциальной энергии). Поэтому можно записать:

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = A_{\text{тр}} + \frac{k\Delta x^2}{2} = \mu(m + M)g\Delta x + \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Учитывая, что $u = \frac{mv_0}{(m + M)}$, получим

$$\frac{m_0 v_0^2}{2(m + M)} = \mu(m + M)g\Delta x + \frac{k\Delta x^2}{2}, \text{ или}$$

$$\Delta x^2 + \frac{2\mu}{k}(m + M)g\Delta x - \frac{m_0 v_0^2}{k(m + M)} = 0.$$

Отсюда

$$\Delta x = -\frac{\mu}{k}(m+M)g + \sqrt{\left[\frac{\mu}{k}(m+M)g\right]^2 + \frac{m_0 v_0^2}{k(m+M)}}.$$

Физический смысл имеет только знак «+» перед корнем, так как знак «-» означает не сжатие, а расширение пружины.

Задача XI.8 В середину чаши массой M , прикрепленной снизу к вертикальной пружине жесткостью k (рис. XI.8), попадает падающий с высоты H пластилиновый шарик массой m . На какую

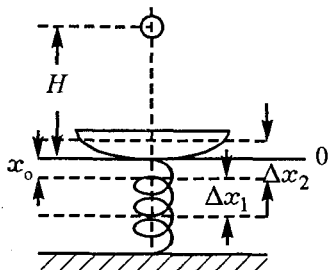


Рис. XI.8

максимальную величину Δx отклонится вниз чаша в процессе колебания после попадания в нее шарика?

Решение. Непосредственно перед попаданием шарика в чашу можно применить закон сохранения

механической энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \text{ отсюда } v^2 = 2gH.$$

В момент удара выделяется некоторое количество тепла. Поэтому закон сохранения механической энергии применять уже нельзя, но можно использовать закон сохранения импульса. Чаша с шариком начнет двигаться вниз с некоторой скоростью u , которую определяем из закона сохранения импульса:

$$mv = (m + M)u, \text{ или } u = \frac{mv}{m + M}.$$

При максимальном сжатии пружины на Δx кинетическая энергия чаши с шариком переходит в потенциальную энергию сжатой пружины и новую потенциальную энергию чаши с шариком, т. е.

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)g\Delta x + \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Из этого уравнения следует

$$\begin{aligned} \Delta x_{12} &= -\frac{(m + M)g}{k} \pm \sqrt{\left[\frac{(m + M)g}{k}\right]^2 + \frac{(m + M)u^2}{k}} = \\ &= -\frac{(m + M)g}{k} \pm \sqrt{\frac{(m + M)^2 g^2}{k^2} + \frac{m^2 2gH}{k(m + M)}}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что чаша с шариком имеет новое положение равновесия (x_0), которое определяется вторым законом Ньютона и отсчитывается от начального нулевого уровня (см. рис. XI.8).

$$(m + M)g - kx_0 = 0.$$

Отсюда $x_0 = \frac{m + M}{k}g$. Около этого положения равновесия будет колебаться чаша с шариком.

С другой стороны: $x_0 = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}$ (см. рис.).

Амплитуда этого колебания

$$A = \Delta x_2 - x_0 = |\Delta x_1 - x_0| = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{2} \text{ (см. рис.).}$$

Таким образом:

$$A = \sqrt{\frac{(m + M)^2 g^2}{k^2} + \frac{2gHm^2}{k(m + M)}}.$$

Задача XI.9 Космический корабль движется по круговой орбите радиусом $R = 4000$ км вокруг неизвестной планеты. Определить ускорение свободного падения на поверхности планеты g_n , если ее радиус $r_0 = 3500$ км, а период обращения корабля $T = 2$ ч.

Решение. На корабль действует единственная сила — сила гравитации. Поэтому второй закон Ньютона запишется

$$G \frac{Mm}{R^2} = ma_n = m\omega^2 R = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R, \quad (1)$$

где M и m — массы планеты и корабля соответственно.

Так как ускорение свободного падения у планеты $g_n = G \frac{M}{r_0^2}$, то уравнение (1) можно переписать

$$m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R = g_n \frac{r_0 m}{R^2}, \text{ отсюда}$$

$$g_n = \frac{4\pi^2 R^3}{r_0^2 T^2} = 3,9 \text{ м/с}.$$

Задача XI.10 На отрезок тонкостенной трубы симметрично намотаны две невесомые нерастяжимые нити. Труба удерживается в положении, указанном на рисунке. В некоторый момент времени трубу отпускают. Она опускается, разматывая нить. Определить ускорение осевой линии трубы (рис. XI.9), проходящей через точку A .

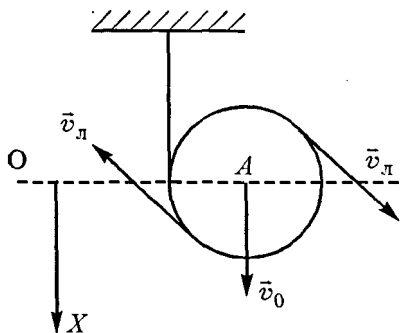


Рис. XI.9

Решение. Все точки трубы одновременно участвуют в двух движениях: в поступательном со скоростью центра тяжести трубы v_0 и во вращательном — с линейной скоростью v_l , при этом эти скорости равны по величине (катушка не проскальзывает), т. е. $v_0 = v_l$.

Кинетическая энергия тонкостенной трубы $E_k = Mv_0^2$ (см. решение задачи IV.13).

Из закона сохранения механической энергии следует

$$\Delta E_{\text{мех}} = \Delta E_k + \Delta E_{\text{п}} = 0.$$

Для указанной на рисунке системы координат это уравнение запишется

$$-Mv_0^2 + Mg\Delta x = 0, \text{ или } Mv_0^2 = Mg\Delta x. \quad (1)$$

Используя уравнение кинематики

$$\Delta x = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0^2}{g} \quad (2)$$

и уравнение (1), получим, $t = \frac{2v_0}{g}$.

Искомое ускорение центра тяжести трубы a получаем с помощью уравнения (2):

$$a = \frac{2\Delta x}{t^2} = \frac{2v_0^2/g}{4v_0^2/g^2} = \frac{g}{2}.$$

Задача XI.11 Верхний конец невесомой пружины жесткостью k с начальной длиной l_0 прикреплен к опоре. На нижнем конце пружины висит грузик массой m . Пружину растянули до длины l и отклонили на угол α от вертикали, а затем грузик отпускают без начальной скорости (рис. XI.10). Какое количество тепла выделится в этой системе после затухания всех колебаний?

Решение. В положении равновесия пружина с грузом имеет длину l_1 , которую можно определить из уравнения

$$k(l_1 - l_0) = mg, \text{ или } l_1 = \frac{mg + kl_0}{k}.$$

Растянув пружину до длины l и отклонив ее

от вертикали на угол α , ей сообщили некоторый запас потенциальной энергии.

$$E_{n1} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2.$$

После всех колебаний пружина вернется в вертикальное положение, где запас ее потенциальной энергии станет равным

$$E_{n2} = mgH + \frac{k}{2}(l_1 - l_0)^2.$$

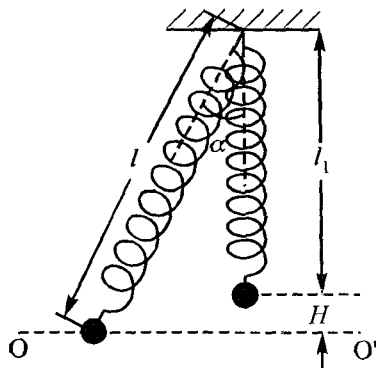


Рис. XI.10

Начальный уровень отсчета потенциальной энергии совмещаем с горизонталью OO' (рис. XI.10), H — высота конечного положения грузика после всех колебаний. Разность этих энергий и будет тем количеством тепла Q , которое выделится в системе после всех колебаний, т. е.

$$Q = E_{n1} - E_{n2}.$$

Высоту H можно определить из рисунка:

$$H = l \cos \alpha - l_1 = l \cos \alpha - \frac{mg + kl_0}{k},$$

тогда

$$\begin{aligned} Q &= \frac{k}{2}(l - l_0)^2 - mg \left(l \cos \alpha - l_0 - \frac{mg}{k} \right) - \frac{k}{2} \left(\frac{mg + kl_0}{k} - l_0 \right)^2 = \\ &= \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + \frac{m^2 g^2}{2k} - mg(l \cos \alpha - l_0). \end{aligned}$$

Задача XI.12 Над серединой большого цилиндрического сосуда площадью S и высотой $H = 60$ см закреплен маленький цилиндрический сосуд с площадью сечения $s = 0,2S$. В верхнем сосуде находится ртуть, причем высота ее уровня над уровнем нижнего сосуда $h = 1,5$ м (рис. XI.11). Через отверстие в середине дна маленького сосуда ртуть выливается в большой сосуд. Определить изменение температуры ртути Δt , если ее удельная теплоемкость $c = 0,12$ кДж/кгК. Теплоемкостью сосудов и рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь. Ускорение свободного падения g принять равным $g = 10$ м/с².

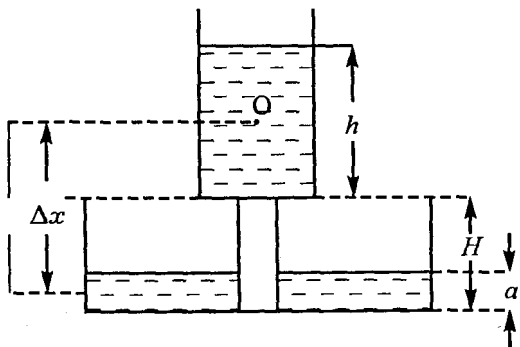


Рис. XI.11

Решение. Центр тяжести ртути после вытекания переместится на Δx (рис. XI.11), поэтому изменение потенциальной энергии

$$\Delta E_{\text{п}} = mg\Delta x = mg\left(H + \frac{h}{2}\right) - mg\frac{a}{2}.$$

• Положение нового центра тяжести ртути ($\frac{a}{2}$) определяется из условия постоянства объема ртути, т. е.

$$0,2Sh = Sa, \text{ или } a = 0,2h.$$

Таким образом, $\Delta E_{\text{п}} = mg(H + 0,4h)$. При падении ртути происходит неупругий удар и выделяется некоторое количество тепла ΔQ , которое идет на нагревание ртути, при этом $\Delta E_{\text{п}} = \Delta Q = cm\Delta t$. Следовательно:

$$\Delta t = \frac{\Delta E_{\text{п}}}{cm} = \frac{mg(H + 0,4h)}{cm} = \frac{g}{c}(H + 0,4h) = 0,1^\circ \text{ C}.$$

Задача XI.13 Ящик массой m с постоянной скоростью втягивают за веревку на горку. Когда ящик подняли на высоту h , совершив работу A , веревка оборвалась и ящик стал скользить вниз. Какую скорость v будет иметь ящик, опустившись до исходного положения?

Коэффициент трения ящика о горку считать постоянным (рис. XI.12).

Решение. Силы, действующие на ящик, изображены на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось OX

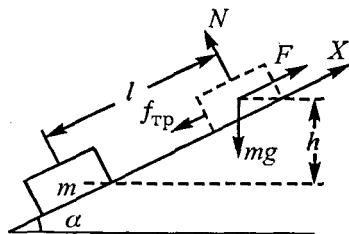


Рис. XI.12

и определим неизвестную силу F :

$$-mg \sin \alpha + F - f_{\text{тр}} = 0,$$

тогда

$$F = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha.$$

Сила F для системы тел: горка — ящик, является внешней силой. Она совершает работу A , которая идет на преодоление силы трения $f_{\text{тр}}$ и сообщение ящику потенциальной энергии, т. е.

$$A = Fl = mgh + f_{\text{тр}}l = mgh + \mu mg \frac{\cos \alpha \cdot h}{\sin \alpha}, \quad (1)$$

где l — длина пройденного ящиком пути до обрыва веревки.

При движении ящика вниз из закона сохранения механической энергии следует,

$$\Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = A_{f_{\text{тр}}}, \text{ или } \frac{mv^2}{2} - mgh = -f_{\text{тр}}l, \text{ т.е.}$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh - \mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим

$$A + \frac{mv^2}{2} = 2mgh, \text{ отсюда } v^2 = 4gh - \frac{2A}{m},$$

$$\text{или } v = \sqrt{4gh - \frac{2A}{m}}.$$

Задача XI.14 Надувной шарик, заполненный гелием, удерживают на нити. Найти натяжение нити T , если масса оболочки шарика $m = 2$ г, объем $V = 3$ л, давление гелия $p = 1,04 \cdot 10^5$ Па, температура $t = 27^\circ$. Молярная масса гелия $\mu = 4$ г/моль, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³, универсальная постоянная $R = 8,3$ Дж/моль К.

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $(m + m_r)g$, сила натяжения T и сила Архимеда $F_A = \rho gV$ (рис. XI.13).

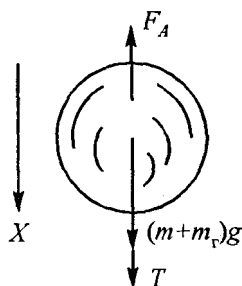


Рис. XI.13

Так как шарик находится в равновесии, то второй закон Ньютона в проекции на ось OX запишется:

$$(m + m_r)g + T - F_A = 0 ,$$

$$\text{отсюда } T = F_A - (m + m_r)g .$$

Массу гелия можно определить из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m_r}{\mu} RT , \text{ или } m_r = \frac{pV\mu}{RT} .$$

Таким образом:

$$T = \rho gV - \left(m + \frac{\mu pV}{RT} \right) g \approx 0,014 \text{ Н} .$$

Задача XI.15 В полусферический тонкостенный «колокол», плотно лежащий на столе, наливают через отверстие вверху воду. Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает «колокол» и начинает вытекать снизу. Определить массу «колокола» M , если его радиус $R = 10$ см. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ (рис. XI.14).

Решение. Заполненный доверху водой «колокол» действует на стол с силой, равной силе тяжести

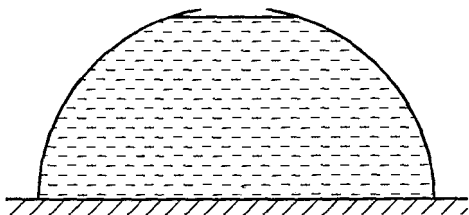


Рис. XI.14

воды и самого «колокола» и направленной вниз.

$$F_1 = Mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g.$$

С другой стороны, со стола в момент подтекания воды действует сила

$$F_2 = \rho g h S = \rho g \pi R^2 = \rho g \pi R^3.$$

Из условия равновесия $F_1 - F_2 = 0$ имеем:

$$Mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g = \rho g \pi R^3, \text{ т. е.}$$

$$M = \frac{\rho g \pi R^3}{3} \approx 10 \text{ кг.}$$

Задача XI.16 В цилиндрический сосуд с водой опускают деревянный шар радиусом R , внутри которого помещен свинцовый грузик массой m . На какую высоту h поднимется уровень воды в сосуде, если площадь его дна S , плотность воды ρ_v , плотность дерева ρ_d , плотность свинца ρ_c ?

Решение. В условии задачи ничего не сказано, плавает ли шар с грузиком в воде или он

утонул. Поэтому необходимо рассмотреть эти два случая.

I случай: шар с грузиком плавает в воде.

Прежде всего определим массу деревянного шара со свинцовым грузиком

$$M = \rho_{\text{д}}(V_{\text{ш}} - V_{\text{с}}) + m = \rho_{\text{д}}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{m}{\rho_{\text{с}}}\right) + m. \quad (1)$$

$$\text{Так как шар плавает, то } Mg = \rho_{\text{в}} V_{\text{выт}} g. \quad (2)$$

Сравнив уравнения (1) и (2), получим

$$M = \rho_{\text{д}}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{m}{\rho_{\text{с}}}\right) + m \leq \rho_{\text{в}} \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отсюда следует, что свинцовый грузик должен иметь массу

$$m \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{д}}} \rho_{\text{с}} = m_0.$$

Теперь определим объем вытесненной воды:

$$V_{\text{выт}} = \frac{M}{\rho_{\text{в}}} = \frac{1}{\rho_{\text{в}}}\left[\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{д}} + m\left(1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{с}}}\right)\right],$$

и высоту h_1 , на которую поднимется уровень воды в сосуде

$$h_1 = \frac{V_{\text{выт}}}{S} = \frac{1}{S\rho_{\text{в}}}\left[\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{д}} + m\left(1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{с}}}\right)\right].$$

II случай: шар с грузиком утонул ($m > m_0$).

В этом случае он вытесняет объем

$$V'_{\text{выт}} = V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

тогда уровень воды в сосуде поднимется на высоту h_2 :

$$h_2 = \frac{V'_{\text{выт}}}{S} = \frac{4\pi R^3}{3S}.$$

Задача XI.17 В U-образную трубку налили жидкость массой m . Определить период колебаний жидкости в трубке, возбуждаемых небольшим смещением уровней в коленах от положения равновесия. Площадь вертикальных колен трубки $-S$, плотность жидкости ρ . Трением жидкости о стенки трубки пренебречь (рис. XI.15).

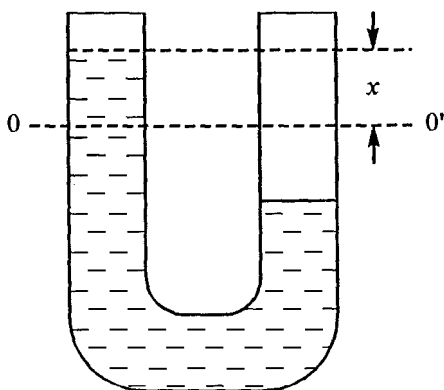


Рис. XI.15

Решение. При смещении уровня жидкости из положения равновесия $0 - 0'$ на величину x возникает разность сил давления, которая заставля-

ет жидкость возвращаться в первоначальное положение.

Уравнение движения запишется:

$$F = ma, \text{ или } -2\rho g x S = ma = mx'' . \quad (1)$$

Как видно, уравнение (1) – это уравнение гармонических колебаний вида

$$x'' = -\omega^2 x, \text{ где } \omega^2 = \frac{2\rho g S}{m},$$

а искомый период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2m}{\rho g S}} .$$

Задача XI.18 В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды $m_1 = 500$ г и льда $m_2 = 500$ г при температуре $t = 0^\circ \text{C}$. В сосуд вводится сухой насыщенный пар массой $m_3 = 80$ г при температуре $t_2 = 100^\circ \text{C}$. Какой будет температура t_c после установления теплового равновесия? Удельная теплота парообразования воды $r = 2,3$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0633$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 462$ кДж/кг К.

Решение. Введенный в сосуд пар отдает свое тепло, сначала превращаясь в воду при $t_2 = 100^\circ \text{C}$, а затем охлаждаясь на Δt от 100°C до 0°C . При этом выделится тепла

$$Q_1 = m_3 r + m_3 c \Delta t = 21,76 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 2,176 \cdot 10^5 \text{ Дж} .$$

Для того чтобы расплавить лед, нужно количество тепла

$$Q_2 = m_2 \lambda = 500 \text{ г} \cdot 0,33 \text{ МДж/кг} = 1,65 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Как видно из подсчетов, $Q_1 > Q_2$, т. е. выделенного паром тепла хватит для того, чтобы весь лед растаял. Количество тепла $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ пойдет на нагревание воды (m_1), растаявшего льда (m_2) и пара, превратившегося в воду, (m_3) до некоторой температуры смеси t_c . Определим ее из уравнения теплового баланса:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n c_i m_i \Delta t_i = Q_1 - Q_2;$$

$$cm_1 t_c + cm_2 t_c + cm_3 t_c = Q_1 - Q_2;$$

$$t_c = \frac{Q_1 - Q_2}{c(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{0,52 \cdot 10^5}{4,2 \cdot 10^3 \cdot (1080) \cdot 10^{-3}} \approx 11,5^\circ \text{ С}.$$

Задача XI.19 Сосуд содержит $m = 1,28$ г гелия при температуре $t = 27^\circ \text{ С}$. Во сколько раз (n) изменится среднеквадратичная скорость молекул гелия, если при его адиабатическом сжатии совершают работу $A = 252$ Дж? Молярная масса гелия $\mu = 4$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/моль К.

Решение. Любой идеальный газ подчиняется объединенному газовому закону. В первоначальном состоянии

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1. \quad (1)$$

После адиабатического сжатия

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R (T_1 + \Delta T), \quad (2)$$

при этом ΔT можно определить из первого начала термодинамики для адиабатического процесса, т. е.

$\Delta U + A = 0$, так как гелий одноатомный газ, то

$$|\Delta U| = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T \quad (\text{см. пVI.9}).$$

$$\text{Таким образом, } \Delta T = \frac{2A}{3R} \frac{\mu}{m}.$$

Поскольку в задаче требуется определить отношение среднеквадратичных скоростей, то поделим уравнение (2) на уравнение (1) и выразим давление p_1 и p_2 через квадраты средних скоростей:

$$p_1 = \frac{1}{3} n_1 m \bar{v}_1^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V_1} m \bar{v}_1^2 \quad (\text{см. пVI.3});$$

$$p_2 = \frac{1}{3} n_2 m \bar{v}_2^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V_2} m \bar{v}_2^2,$$

где n_1 и n_2 — концентрации частиц, V_1 и V_2 — объемы гелия, v_1^2 и v_2^2 — квадраты скоростей соответственно до и после сжатия.

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T + \Delta T}{T} = 1 + \frac{\Delta T}{T}, \text{ или}$$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = 1 + \frac{\Delta T}{T} = 1 + \frac{2A\mu}{3RmT}.$$

Следовательно:

$$n = \sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2}} = \sqrt{1 + \frac{2A\mu}{3RmT}} = 1,1.$$

Задача XI.20 Одноатомный идеальный газ переводится из состояния 1 ($p_1 = 130$ кПа, $V_1 = 1$ л) в состояние 2 ($p_2 = 10$ кПа, $V_2 = 2$ л) по прямой, указанной на рис. XI.16. Затем газ переводится в состояние 3 ($p_3 = 20$ кПа, $V_3 = 3$ л) по прямой 2-3. Какое количество теплоты ΔQ сообщено газу?

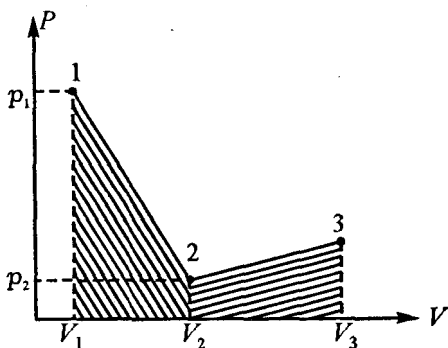


Рис. XI.16

Решение. Количество теплоты определяется из 1-го начала термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Так как газ одноатомный, то изменение его энергии легко определяется при переводе его из состояния 1 в 3 (см. п VI.9)

$$\Delta U = U_3 - U_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R(T_3 - T_1).$$

При этом температуру можно определить из объединенного газового закона:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 ; \quad p_3 V_3 = \frac{m}{\mu} R T_3.$$

Следовательно:

$$\Delta U = \frac{3}{2} (p_3 V_3 - p_1 V_1).$$

Работа $\Delta A = \Delta A_{1-2} + \Delta A_{2-3}$. На каждом участке работа численно равна площади заштрихованных трапеций, расположенных под соответствующими прямыми, т. е.

$$A_{1-2} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)(V_2 - V_1);$$

$$A_{2-3} = \frac{1}{2} (p_3 + p_2)(V_3 - V_1).$$

Таким образом:

$$\Delta Q = \frac{3}{2} (p_3 V_3 - p_1 V_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} [(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) + (p_3 + p_2)(V_3 - V_2)] =$$

$$= \frac{1}{2} [p_1(V_2 - 4V_1) + p_2(V_3 - V_1) + p_3(4V_3 - V_2)] = -200 \text{ Дж.}$$

Знак «-» означает, что при протекании процесса (1-2-3) тепло выделится.

Задача XI.21 В цилиндрическом сосуде 1 под поршнем массы $m = 5$ кг находится одноатомный газ. Сосуд 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом 2, в котором под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном положении кран К закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова. Поршень в сосуде 2 расположен на высоте $H = 10$ см от дна. На какое расстояние Δh передвинется поршень в сосуде 1 после открывания крана? Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать (рис. XI.17).

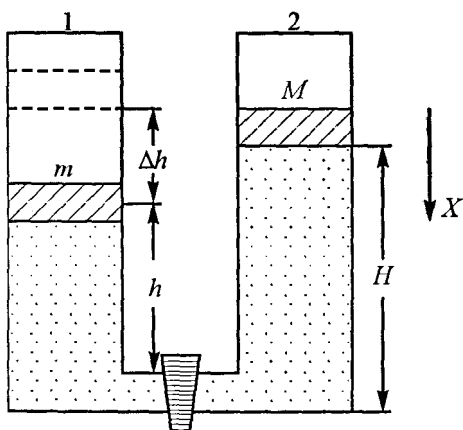


Рис. XI.17

Решение. Внутренняя энергия газа в сосудах 1 и 2 до открывания крана:

$$U_1 = \frac{3}{2} \nu_1 RT = \frac{3}{2} p_1 V_1 = \frac{3}{2} \frac{mg}{S} Sh = \frac{3}{2} mgh, \quad (1)$$

где p_1 — давление, V_1 — объем сосуда, S — площадь его поперечного сечения, h — высота, на которой находится поршень в сосуде 1, ν_1 — число молей в сосуде;

$$U_2 = \frac{3}{2} \nu_2 RT = \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} \frac{Mg}{S} SH = \frac{3}{2} MgH, \quad (2)$$

где p_2 — давление, V_2 — объем сосуда, H — высота, на которой находится поршень в сосуде (2), ν_2 — число молей в сосуде.

Так как сосуды теплоизолированы, то работа по передвижению поршня может произойти только за счет внутренней энергии газа, т. е.

$$U = U_1 + U_2 + A, \quad (3)$$

где U — внутренняя энергия газа после открывания крана.

Масса второго поршня больше массы первого, поэтому после открывания крана поршень массой M опустится на дно второго сосуда, а поршень в первом сосуде поднимется на высоту Δh , и весь газ окажется в первом сосуде. Его внутренняя энергия будет равна — см. уравнения (1) и (2),

$$U = \frac{3}{2} mg(h + \Delta h). \quad (4)$$

Приравнивая уравнения (3) и (4) и учитывая, что работа по перемещению поршней A равна $A = MgH - mg\Delta h$, получим

$$\frac{3}{2} mg(h + \Delta h) = \frac{3}{2} mgh + \frac{3}{2} MgH + MgH - mg\Delta h,$$

$$mg\Delta h = MgH, \text{ откуда}$$

$$\Delta h = \frac{MN}{m}.$$

Задача XI.22 Два одинаковых положительных точечных заряда величиной Q закреплены на расстоянии d друг от друга. Посередине между ними перпендикулярно отрезку, их соединяющему, расположена гладкая непроводящая штанга, по которой может скользить бусинка массой m с отрицательным зарядом $-q$. Определить период малых колебаний бусинки. Силой тяжести бусинки пренебречь (рис. XI.18).

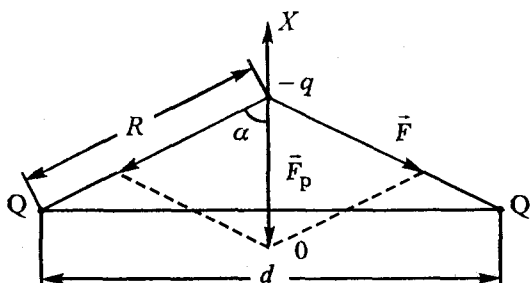


Рис. XI.18

Решение. Проведем ось OX перпендикулярно отрезку d , соединяющему заряды Q . На заряд q вдоль оси OX действует результирующая сила Кулона

$$F_p = 2F \cos \alpha = \frac{2qQ \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

где R — расстояние между зарядами $-q$ и Q , x — расстояние от отрезка $Q - Q$ до заряда $-q$, причем

$$R = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}, \text{ а } \cos \alpha = \frac{x}{R}.$$

Второй закон Ньютона для заряда $-q$ запишется

$$-F_p = ma, \text{ или } \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{x}{R} = ma, \text{ или}$$

$$-\frac{qQx}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = mx''. \quad (1)$$

Так как нас интересуют малые колебания бу-
синки, то можно полагать, что $x^2 \ll \left(\frac{d}{2}\right)^2$, тог-
да уравнение (1) будет иметь вид

$$-\frac{qQx}{2\pi\epsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)^3} \approx mx''.$$

Это уравнение — не что иное, как уравнение гармонических колебаний:

$$x'' = -\frac{qQx}{2\pi\epsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)^3 m} x = -\omega^2 x,$$

$$\text{где } \omega^2 = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^3 m} = \frac{4qQ}{\pi\epsilon_0 m d^3}.$$

Отсюда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi d \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m d}{qQ}}.$$

Задача XI.23 Нижняя пластина конденсатора

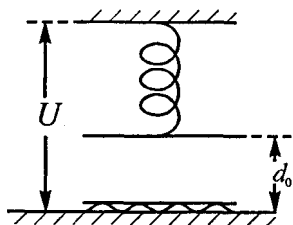


Рис. XI.19

закреплена неподвижно на изолирующей подставке, а верхняя подвешена на упругой пружине. Расстояние между незаряженными пластинами d_0 . При подаче на конденсатор напряжения U_1 — расстояние между пластинами d_1 , при подаче напряжения U_2 — расстояние d_2 . Определить отношение

напряжений $n = \frac{U_2}{U_1}$ (рис. XI.19).

Решение. Верхняя пластина конденсатора притягивается нижней с силой

$$F = \frac{QE}{2} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Эта сила уравновешивается силой упругости пружины

$$F_{\text{упр}} = k(d_0 - d_1), \text{ т. е.}$$

$$\frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d^2} = k(d_0 - d_1) \quad \text{для напряжения } U_1;$$

$$\frac{\varepsilon_0 S U_2^2}{2d^2} = k(d_0 - d_2) \quad \text{для напряжения } U_2.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{U_2^2 d_1^2}{U_1^2 d_2^2} = \frac{d_0 - d_2}{d_0 - d_1}, \text{ или}$$

$$n = \frac{U_2}{U_1} = \frac{d_2}{d_1} \sqrt{\frac{d_0 - d_2}{d_0 - d_1}}.$$

Задача XI.24 В схеме, изображенной на рис. XI.20, (а), емкости конденсаторов $C_1 = 1 \text{ мкф}$, $C_2 = 2 \text{ мкф}$, $C_3 = 3 \text{ мкф}$, $C_4 = 4 \text{ мкф}$. Напряжение между точками А и В равно $U_0 = 100 \text{ В}$. Определить напряжение U_4 на конденсаторе C_4 , если до подключения напряжения U_0 конденсаторы были незаряжены.

Решение. Эту схему можно представить как два последовательно соединенных конденсатора C_1 и C , где

$$C = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2 \quad (\text{рис. XI.20, б}).$$

Причем заряд на этих конденсаторах одинаков и равен

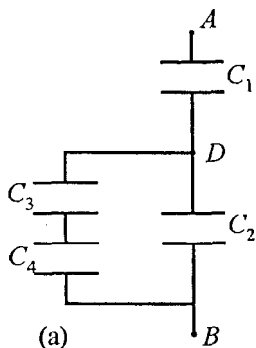
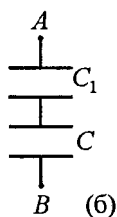


Рис. XI.20

$$Q = U_0 \frac{C_1 C}{C_1 + C} = U_0 \frac{C_1 \left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2 \right)}{C_1 + \left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2 \right)}$$

В свою очередь заряд Q распределяется между двумя конденсаторами C_2 и C_3 , причем



$Q = Q_{C_2} + Q_{C_3}$. Заряд на конденсаторе C_4 равен заряду на конденсаторе C_3 , т. е. $Q_{C_3} = Q_{C_4}$, поскольку они соединены последовательно. А искомое напря-

жение $U_4 = \frac{Q_{C_4}}{C_4}$.

Рис. XI.20

Таким образом, чтобы ответить на вопрос задачи, нам необходимо определить заряд на конденсаторе C_4 , равный Q_{C_4} .

Напряжение между точками D и B определяется по формуле

$$U_{DB} = \frac{Q}{C} = \frac{U_0 C_1}{C_1 + C} = \frac{U_0 C_1}{C_1 + \left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2 \right)}$$

Заряд на емкости C_3 и C_4

$$Q_{C_3} = Q_{C_4} = U_{DB} \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{U_0 C_1 C_3 C_4}{\left(C + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2 \right) (C_3 + C_4)},$$

а напряжение

$$U_4 = \frac{Q_{C_4}}{C_4} = \frac{U_{DB} C_3}{C_3 + C_4} = \frac{U_0 C_1 C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) + C_3 C_4} = \frac{100}{11} \text{ В.}$$

Задача XI.25 В схеме, изображенной на рис. XI.21, вначале ключ К не замкнут. На какую величину изменится заряд конденсатора, если ключ К замкнуть? $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 15 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ мкф}$, $\mathcal{E}_1 = 34 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 9 \text{ В}$. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Решение. При разомкнутом ключе конденсатор C заряжается от источника \mathcal{E}_2 и напряжение на нем $U_1 = \mathcal{E}_2$, а заряд $q_1 = C\mathcal{E}_2$. После замыкания ключа К и перезарядки конденсатора ток протекает по внешней цепи (через конденсатор ток не течет!) и его легко вычислить.

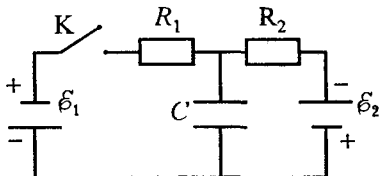


Рис. XI.21

$$-\mathcal{E}_2 + IR_2 + IR_1 - \mathcal{E}_1 = 0, \text{ отсюда } I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}.$$

В этом случае напряжение на конденсаторе определяется по формуле

$$U_2 - \mathcal{E}_2 + IR_2 = 0, \text{ или } U_2 = \mathcal{E}_2 - IR_2,$$

а новый заряд на нем

$$q_2 = CU_2 = C(\mathcal{E}_2 - IR_2).$$

Изменение заряда на конденсаторе равно

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C(\mathcal{E}_2 - IR_2) - C\mathcal{E}_2 = -CIR_2 =$$

$$= -CR_2 \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = -25,8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Знак «-» означает, что заряд на конденсаторе С уменьшился.

Задача XI.26 Какое количество тепла выделится в схеме, изображенной на рис. XI.22, после замыкания ключа К?

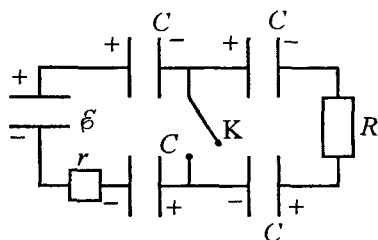


Рис. 11.22

Решение. При разомкнутом ключе все конденсаторы будут заряжены до одного и того же заряда q_1 и одного и того же напряжения U_1 , так как они все одинаковы и включены

последовательно, причем

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}}{4} \text{ и } q_1 = CU_1 = \frac{C\mathcal{E}}{4}.$$

Энергия всех заряженных конденсаторов

$$W_1 = 4W_0 = 4 \frac{CU_1^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{8},$$

где W_0 — энергия одного из конденсаторов.

После замыкания ключа К заряженными останутся только два конденсатора, лежащие слева от ключа. Конденсаторы, лежащие справа от ключа, не будут иметь зарядов, так как они разрядятся через сопротивление R . В этом случае напряжение на каждом из двух последовательно включенных левых конденсаторов

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2}, \text{ а заряд } q_2 = CU_2 = \frac{C\mathcal{E}}{2}.$$

Энергия двух заряженных конденсаторов

$$W_2 = 2W'_0 = 2 \frac{CU_2^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{4},$$

где W'_0 — энергия одного из конденсаторов после замыкания ключа.

Перезарядку конденсаторов производит батарея с ЭДС \mathcal{E} . Она совершает работу, которая идет на изменение энергии конденсаторов и на выделение в схеме тепла. Эта работа

$$\mathcal{E}\Delta q = \Delta W + \Delta Q.$$

Отсюда количество выделенного тепла в схеме

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \mathcal{E}\Delta q - \Delta W = \mathcal{E}(q_2 - q_1) - (W_2 - W_1) = \\ &= \mathcal{E}\left(\frac{C\mathcal{E}}{2} - \frac{C\mathcal{E}}{4}\right) - \left(\frac{C\mathcal{E}^2}{4} - \frac{C\mathcal{E}^2}{8}\right) = \frac{C\mathcal{E}^2}{8}. \end{aligned}$$

Задача XI.27 Два одинаковых гальванических элемента с внутренним сопротивлением $r = 1,2$ Ом каждый соединены параллельно и нагружены на внешнее сопротивление R . Если эти элементы соединить последовательно, то мощность, выделяемая в том же сопротивлении нагрузки, возрастет в $n = 2,25$ раза. Определить сопротивление нагрузки R (рис. XI.23).

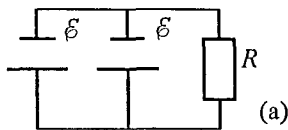


Рис. XI.23

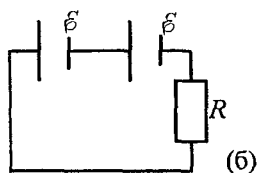


Рис. XI.23

Решение. Энергия, выделяемая на сопротивлении R , определяется законом Джоуля – Ленца $W = I^2R$, где ток можно вычислить из закона Ома для полной цепи:

$$\text{для 1-й схемы (рис. XI.23, а) } I_1 = \frac{\varepsilon}{\frac{r}{2} + R};$$

$$\text{для 2-й схемы (рис. XI.23, б) } I_2 = \frac{2\varepsilon}{2r + R}.$$

По условию задачи $n = \frac{W_2}{W_1}$, т. е.

$$n = \frac{I_2^2}{I_1^2}, \quad \text{или} \quad \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{n}, \quad \text{отсюда}$$

$$R = r \frac{2\sqrt{n} - 1}{2 - \sqrt{n}} = 0,8 \text{ Ом.}$$

Задача XI.28 Отрезок AB расположен вдоль прямой, проходящей через фокус собирающей линзы под углом $\alpha = 60^\circ$ к ее главной оптической оси. Расстояния от точек A и B до фокуса F равны соответственно: $a = 5$ см, $b = 10$ см. Чему равно фокусное расстояние линзы F , если известно, что длина отрезка AB равна длине его изображения (рис. XI.24, а).

Решение. Проведем один «замечательный» луч через крайние точки A и B и оптический центр

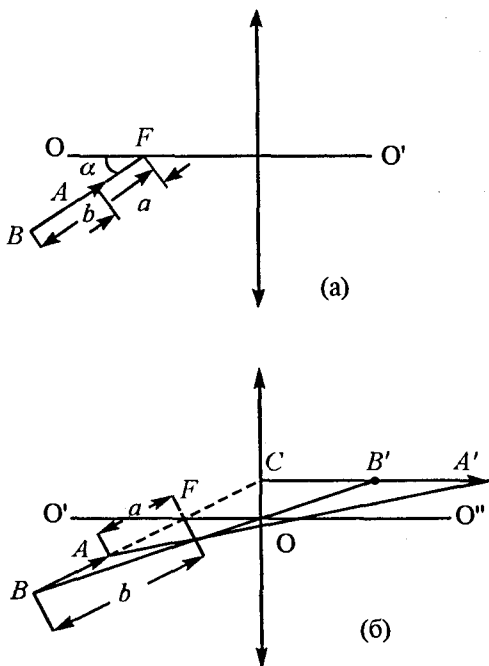


Рис. XI.24

линзы. Вторым «замечательным» луч проведем через крайние точки A и B и фокус. Этот луч пройдет после линзы параллельно главной оптической оси и пересечет первые «замечательные» лучи в точках A' и B' . Отрезок $B'A'$ и будет изображением отрезка AB (рис. XI.24, б).

Теперь рассчитаем фокусное расстояние линзы. Из подобных треугольников ACA' и AFO следует

$$\frac{CA'}{OF} = \frac{CF + a}{a}, \text{ откуда}$$

$$CA' = \frac{OF}{a} \left(\frac{OF}{\cos \alpha} + a \right) = \frac{OF^2}{a \cos \alpha} + OF.$$

Из подобных треугольников BCB' и BFO следует

$$\frac{CB'}{OF} = \frac{CF + b}{b}, \text{ отсюда } CB' = \frac{OF^2}{b \cos \alpha} + OF,$$

$$B'A' = CA' - CB' = \frac{OF^2}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Так как по условию задачи $B'A' = BA = b - a$, то

$$(b - a) = \frac{OF^2}{\cos \alpha} \left(\frac{b - a}{ab} \right). \text{ Следовательно}$$

$$OF = F = \sqrt{ab \cos \alpha} = 5 \text{ см.}$$

Задача XI.29 Точечный источник света S и две одинаковые собирающие линзы расположены как показано на рисунке (рис. XI.25). Определить расстояние x между изображениями источника, если известно, что фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, диаметр линзы $d = 4$ см, а расстояние от источника света до центра каждой из линз $l = 20$ см.

Решение. Вначале построим изображение источника. Для этого проведем два «замечательных» луча из источника через оптические центры линз (лучи $SO'S'$ и $SO''S''$). Они пройдут через линзы, не преломляясь. Следующий «замечательный» луч направим вдоль линии раздела линз (для них он

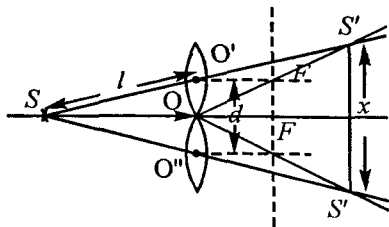


Рис. XI.25

будет параллельным главным оптическим осям). Он после линз пройдет через их фокусы. Точки пересечения этих замечательных лучей укажут место положения изображений S' и S'' . Место положения изображений определяется формулой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}, \text{ или } b = \frac{aF}{a - F},$$

где $a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

Из подобия треугольников $S'SS''$ и $O'SO''$ имеем

$$\frac{x}{d} = \frac{a+b}{a}, \text{ следовательно:}$$

$$x = \frac{d(a+b)}{a} = d\left(1 + \frac{b}{a}\right) = d\left(\frac{a}{a-F}\right) = d \frac{\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} - F} \approx 8,04 \text{ см.}$$

Задача XI.30 Плоская монохроматическая световая волна частично проходит через стеклянную призму с малым преломляющим углом α (рис. XI.26). Длина падающей волны λ , показатель преломления n . На экране волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют. Определить расстояние между соседними максимумами интерференционной картины.

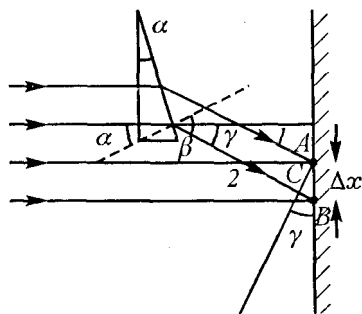


Рис. XI.26

На экране волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют. Определить расстояние между соседними максимумами интерференционной картины.

Решение. В точках A и B можно наблюдать два соседних максимума, если разность хода между

лучами 1 и 2 будет равна длине волны, т. е.

$$\Delta = CB = \lambda, \text{ или } \lambda = CB = AB \sin \gamma \approx \Delta x \gamma,$$

где γ — это угол, на который отклоняется луч при выходе из призмы (см. рис.). Он равен $\gamma = (n - 1)\alpha$. Таким образом $\lambda = \Delta x(n - 1)\alpha$, отсюда расстояние между соседними максимумами

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n - 1)\alpha}.$$

Задача XI.31 На непрозрачный экран, в котором сделаны две параллельные одинаковые щели, нормально падает параллельный пучок света. Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Расстояние между щелями $d = 50$ мкм. За экраном расположена

собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 20\text{ см}$ так, что ее оптическая ось перпендикулярна плоскости экрана и проходит через середину промежутка между щелями. Определить ширину центрального дифракционного максимума, наблюдаемого в фокальной плоскости линзы (рис. XI.27).

Решение. Все точки волновой поверхности падающего на щель пучка являются источником вторичных волн, колеблющихся в одинаковой фазе. За счет дифракции (огибания) свет после прохождения щелей распространяется во всех направлениях. Рассмотрим два параллельных луча AD и BE , идущих от симметричных точек щелей A и B под некоторым углом φ к вертикали.

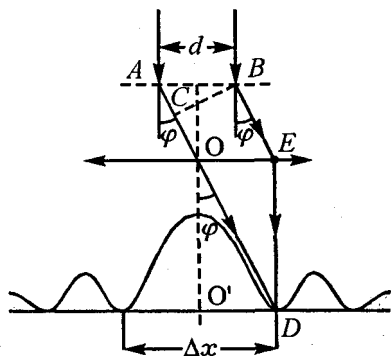


Рис. XI.27

Причем луч AD проведем через оптический центр линзы. Луч BE после линзы также попадет в точку D на экран, который расположен в фокальной плоскости. Центральный дифракционный максимум лежит между двумя симметричными первыми минимумами. Это значит, что разность хода $AC = \Delta$ между двумя лучами AD и BE , рассеянных от симметричных точек A и B , должна удовлетворять условию дополнительных минимумов (см. п.Х.8) :

$$AC = \Delta = d \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}, \text{ или } \sin \varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

Для малых углов φ

$$\sin \varphi \approx \varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

С другой стороны, из треугольника $OO'D$

$$\varphi = \frac{\Delta x}{2f}, \text{ таким образом :}$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{\Delta x}{2f}, \text{ откуда } \Delta x = \frac{\lambda f}{d} = 0,2 \text{ см.}$$

СОДЕРЖАНИЕ

I. КИНЕМАТИКА	3
§ 1. Основные определения и формулы	3
§ 2. Простейшие операции с векторными величинами	7
§ 3. Равномерное прямолинейное движение	14
§ 4. Равноускоренное движение	25
§ 5. Свободное падение тел	34
§ 6. Кинематика движения материальной точки по окружности	44
§ 7. Абсолютное, относительное и переносное движения	47
II. ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ	57
III. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА И ЭНЕРГИИ	93
§ 1. Изменение и сохранение импульса тела и системы тел	93
§ 2. Работа силы. Изменение и сохранение механической энергии тела и системы тел	95
§ 3. Центральный удар шаров	98
IV. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ	124
§ 1. Вращательное движение	124
§ 2. Закон всемирного тяготения	151
V. СТАТИКА	162
§ 1. Статика твердых тел	162
§ 2. Статика жидкостей и газов	186
VI. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА	199
VII. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	240
VIII. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	281
IX. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ	313
X. ОПТИКА	350
§ 1. Геометрическая оптика	350
§ 2. Элементы физической оптики	354
XI. ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ В 1994-1996 гг. НА ВСТУПИ- ТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ	402