

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ**

Сжатое изложение математической структуры современной квантовой физики, написанное известными американскими учеными. Материал формулируется в виде четких теорем, доказательства которых лишь кратко намечены. Книгу можно рассматривать как введение в теорию квантовых полей и как справочник по основным фактам этой теории.

Для математиков и физиков, аспирантов и студентов университетов.

### **Оглавление**

Предисловие редактора перевода	5
Введение	9
Принятые соглашения и формулы	12
Список обозначений	14
<b>ЧАСТЬ I. Введение в современную физику</b>	
<b>Глава 1. Квантовая теория</b>	<b>18</b>
1.1 Общее представление о квантовой теории	18
1.2 Классическая механика	19
1.3 Квантовая механика	22
1.4 Интерпретация	26
1.5 Простой гармонический осциллятор	27
1.6 Кулонов потенциал	35
1.7 Атом водорода	40
1.8 Зачем нужна квантовая теория поля	42
<b>Глава 2. Классическая статистическая механика</b>	<b>44</b>
2.1 Введение	44
2.2 Классические ансамбли	46
2.3 Модель Изинга и решеточные поля	53
2.4 Методы разложений в ряд	65
<b>Глава 3. Формула Фейнмана — Каца</b>	<b>60</b>
3.1 Мера Винера	60
3.2 Формула Фейнмана — Каца	64
3.3 Единственность основного состояния	68
3.4 Перенормированная формула Фейнмана — Каца	70
<b>Глава 4. Корреляционные неравенства и теорема Ли — Янга</b>	<b>73</b>
4.1 Неравенства Гриффитса	74
4.2 Переход к бесконечному объему	77
4.3 $\xi^4$ -неравенства	78
4.4 Неравенство ФКЖ	82
4.5 Теорема Ли — Янга	83
4.6 Аналитичность свободной энергии	86
4.7 Двухкомпонентные спины	89
<b>Глава 5. Фазовые переходы и критические точки</b>	<b>90</b>
5.1 Чистые и смешанные фазы	90

5.2	Приближение среднего поля	92
5.3	Нарушение симметрии	96
5.4	Модель капли и оценка Панерлса	100
5.5	Пример	104
	<b>Глава 6. Теория поля</b>	<b>106</b>
6.1	Аксиомы	106
6.2	Свободное поле	117
6.3	Пространство Фока и виково упорядочение	194
6.4	Каноническое квантование	129
6.5	Фермионы	133
6.6	Взаимодействующие поля	137
	<b>ЧАСТЬ II. Функциональное интегрирование</b>	
	<b>Глава 7. Ковариационный оператор</b>	<b>142</b>
7.1	Введение	142
7.2	Свободная ковариация	145
7.3	Периодические граничные условия	147
7.4	Граничные условия Неймана	148
7.5	Граничные условия Дирихле	149
7.6	Изменение граничных условий	150
7.7	Ковариационные неравенства	150
7.8	Общие граничные условия Дирихле	152
7.9	Регулярность оператора $C_B$	158
7.10	Положительность при отражениях	161
	<b>Глава 8. Квантование — интегрирование по функциональному пространству</b>	<b>164</b>
8.1	Введение	164
8.2	Диаграммы Фейнмана	165
8.3	Виковы произведения	168
8.4	Формальная теория возмущений	171
8.5	Оценки гауссовых интегралов	173
8.6	Негауссовы интегралы для случая $d = 2$	179
8.7	Конечномерная аппроксимация	186
	<b>Глава 9. Анализ и перенормировки в функциональном пространстве</b>	<b>188</b>
9.1	Список полезных формул	188
9.2	Инфинитезимальное изменение ковариации	195
9.3	Квадратичные возмущения	196
9.4	Перенормировка по теории возмущений	201
9.5	Решеточные операторы Лапласа и ковариационные операторы	205
9.6	Решеточные аппроксимации мер $P(\varphi)_2$	212
	<b>Глава 10. Оценки, не зависящие от размерности</b>	<b>216</b>
10.1	Введение	216
10.2	Корреляционные неравенства для полей $P(\varphi)_2$	216
10.3	Монотонность и расщепление при условиях Дирихле или Неймана	218

10.4 Положительность при отражениях	220
10.5 Многократные отражения	222
10.6 Несимметричные отражения	229
<b>Глава 11. Поля без обрезания</b>	<b>236</b>
11.1 Введение	236
11.2 Монотонная сходимост	236
11.3 Оценка сверху	238
<b>Глава 12. Регулярност поля и проверка аксиом</b>	<b>241</b>
12.1 Введение	241
12.2 Интегрирование по частям	243
12.3 Нелокальные $\varphi$ -оценки	?4fi
12.4 Равномерност относительно объема	948
12.5 Регулярност поля $P(\varphi)_2$	252

ЧАСТЬ III. Физические свойства квантовых полей

<b>Глава 13. Теория рассеяния: нестационарные методы</b>	<b>258</b>
13.1 Введение	258
13.2 Многочастичное рассеяние	261
13.3 Волновой оператор для квантовых полей	265
13.4 Волновые пакеты для свободных частиц	269
13.5 Теория Хаага — Рюэля	272
<b>Глава 14. Теория рассеяния: стационарные методы</b>	<b>278</b>
14.1 Хронологически упорядоченные корреляционные функции	278
14.2 S-матрица	281
14.3 Перенормировки	282
14.4 Ядро Бете — Солпитера	287
<b>Глава 15. Магнитный момент электрона</b>	<b>292</b>
15.1 Классический магнитный момент	292
15.2 Тонкая структура атома водорода и уравнение Дирака	294
15.3 Теория Дирака	296
15.4 Аномальный магнитный момент	298
15.5 Сверхтонкая структура и лэмбов сдвиг в атоме водорода	301
<b>Глава 16. Фазовые переходы</b>	<b>302</b>
16.1 Введение	302
16.2 Двухфазная область	306
16.3 Сохранение симметрии (случай $d = 2$ )	316
16.4 Нарушение симметрии (случай $d \geq 3$ )	320
<b>Глава 17. Критическая точка в модели <math>\varphi^4</math></b>	<b>326</b>
17.1 Элементарные соображения	326
17.2 Отсутствие четных связанных состояний	328
17.3 Оценка константы связи	329
17.4 Существование частиц и оценка производной $dm^2/d\sigma$	331
17.5 Существование критической точки у модели $\varphi^4$	332
17.6 Непрерывност $d\mu$ в критической точке	334

17.7 Критические индексы	335
17.8 $\eta \leq 1$	338
17.9 Скейлинговый предел	340
17.10 Гипотеза $\Gamma^6 \leq 0$	340
<b>Глава 18. Кластерные разложения»</b>	<b>342</b>
18.1 Введение	342
18.2 Кластерное разложение	346
18.3 Кластерное свойство и аналитичность	351
18.4 Сходимость: основные идеи	353
18.5 Уравнение типа Кирквуда — Зальцбурга	356
18.6 Ковариационные операторы	358
18.7 Сходимость: завершение доказательства	362
<b>Глава 19. От функциональных интегралов к квантовой механике</b>	<b>365</b>
19.1 Реконструкция квантовых полей	365
19.2 Формула Фейнмана — Каца	36«
19.3 Самосопряженные поля	370
19.4 Коммутаторы	371
19.5 Лоренц-ковариантность	375
19.6 Локальность	378
19.7 Единственность вакуума	379
<b>Глава 20. Дальнейшие направления</b>	<b>383</b>
20.1 Модель $\varphi^4_3$	384
20.2 Суммируемость по Борелю	385
20.3 Евклидовы ферми-поля	386
20.4 Потенциал Юкавы	387
20.5 Низкотемпературные разложения и фазовые переходы	388
20.6 Дебаевское экранирование и преобразование sin-Gordon	389
20.7 В газе диполей нет экранирования	392
20.8 Солитоны	394
20.9 Калибровочные теории	396
20.10 Модель Хиггса и сверхпроводимость	397
Литература	399
<b>Предметный указатель</b>	<b>436</b>

Предметный указатель

Аксиомы 106—117	365
— <i>Бете</i> — <i>Солпитера</i> 288—289	Активность 57, 83
— <i>Вайтмана</i> 114, 115, 243, 260, 268, 269, 365	Анализ в функциональном пространстве 188—215
— евклидовы 106—107, 282	Аналитичность 86—88, 107, 227, 289, 351—353, 377, 378
— <i>Минковского</i> 115	Ангармонический осциллятор 28, 33, 129—133, 138, 139
— <i>Остервальдера</i> — <i>Шрадера</i> 107, 243, 252, 379	Аномальная размерность 95
— <i>Хаага</i> — <i>Кастлера</i> 114, 116—117,	

Аномальный магнитный момент 43,  
294, 298—301  
Ансамбль 47—53  
— большой канонический 53, 389  
— канонический 49, 282—283  
— микроканонический 47. *См.*  
*также* Гиббса ансамбль  
Асимптотики 258, 261  
Асимптотическая полнота 38—39,  
259, 260  
Асимптотический предел 117  
— режим 258  
Атом водорода 22, 35, 38, 40—42,  
301—302  
— гелия 38  
*Бардина* — *Купера* — *Шиффера*  
теория (БКШ) 398  
*Бальмера* серия 41  
*Бете* — *Солпитера* аксиомы *см.*  
Аксиомы  
— — ядро 173, 260, 287  
*Боголюбова* преобразование 136  
*Бозе* — *Эйнштейна* статистика 133  
Бозоны 26, 48, 109, 133, 135, 143, 201,  
387, 388  
*Больцмана* постоянная 49  
*Вайтмана* аксиомы *см.* Аксиомы  
— функции 115, 116, 260, 272  
— — хронологически  
упорядоченные 260 э  
Вакуум, единственность 92, 109, 115,  
116, 302, 303, 379—383  
— неединственность 307, 342, 384  
Вакуумное состояние 302  
Вакуумные средние 272, 277  
Вакуумный вектор 115, 133  
Вероятностная мера 72. *См. также*  
Функциональные интегралы  
*Вигнера* теорема 24  
*Вика* мономы 31, 127, 171, 172, 174,  
243  
— полиномы 31, 173, 191, 243,  
246, 345, 391

— произведения 168—171, 188  
Виково двоеточие 127  
— переупорядочение 150, 179, 189,  
315  
— упорядочение 31, 165, 189, 195—  
197, 217, 237, 246, 306  
— — константа 174, 191, 210, 246,  
391  
*Винера* интеграл, мера 60—64, 153,  
212, 356  
Вихрь 55, 105, 318, 398  
Волновой оператор 263, 265  
*Гамильтона* уравнения 19  
Гамильтониан 19, 26, 74, 128, 233  
Гармонический осциллятор 27, 124,  
129, 130, 138, 174, 233  
Гауссова критическая точка 138  
Гауссов процесс 138, 212  
— функционал 118, 190, 192  
Гауссово поле 123, 213  
Гауссовы функциональные  
интегралы 67, 107, 118, 124,  
129, 164, 166, 167, 171, 173—  
179, 191 — 195, 212, 222, 230,  
241, 343, 346, 352, 386, 390  
*Гейзенберга* динамика 21  
— картина 24  
— модель 222, 316, 318  
— ферромагнетизм 54  
*Гиббса* ансамбль 47, 343  
— постулат 47, 49  
*Гинзбурга* — *Ландау* теория 398  
Граница фаз 100, 101, 307, 317, 388  
Граничные условия 144, 150, 152—  
157, 162, 174, 180, 185, 205—  
207, 222, 229, 389  
— — *Дирихле* 54, 149, 162, 205, 217,  
218, 237, 251, 310, 389  
— — *Неймана* 148, 162, 217, 218, 241  
— — периодические 147, 164  
— — со слабой связью 241, 335  
*Грина* функция 142, 145, 319, 329  
*Гриффитса* неравенства 74—76, 82,

Группа отражений 223  
 Давление 44, 53, 55, 83, 94, 95, 317  
 Дайсона уравнение 283, 284, 287  
 Диаграммы 166  
 — вершинные 204  
 — массовые 203, 204  
 — скелетные 203, 204  
*См. также* Майера графы, Фазовые диаграммы, Фейнмана диаграммы  
 Диполь 104, 105, 318, 392—394  
 Дирака море 137  
 — поле 134, 136  
 — размазанная дельта-функция 143, 174  
 — теория 296—298  
 — уравнение 37, 43, 134, 294  
 — частица 299  
 Дирихле граничные условия *см.*  
 Граничные условия  
 — ковариация 235, 346  
 — предел 194  
 — ребра 346  
 Дифференцирование функционалов 188  
 Евклидов пропагатор 142  
 Евклидово поле 106—107  
 Евклидовы аксиомы *см.* Аксиомы  
 Заряд 35  
 — перенормировка 139, 286, 342  
 — плотность 294  
 Идеальный газ 44, 53, 55, 94  
 Иерархическая модель 96  
 Изинга модель 54, 77, 83, 90, 96, 100, 101, 138, 222, 307, 328, 336—338, 396  
 Импульсное обрезание 174, 176, 246, 384  
 Инвариантность при отражениях 143, 162, 223, 240  
 Инстантон 55, 396  
 Интегрирование по частям 124, 193,

*Казимира* оператор 42  
 Калибровочные поля 140, 396  
 — теории 106, 396—397  
 Канал 263, 288  
 Каноническая модель 331  
 Канонические значения показателей 142, 336, 337  
 — коммутационные соотношения 25, 42, 125, 126, 129—131, 134  
 — координаты 21, 36  
 Канонический ансамбль *см.*  
 Ансамбль  
 Каноническое квантование 129—133  
 Квадратичные возмущения 192, 196—200  
 Квазиклассическое приближение 93, 94  
 Квантовая теория 18, 106  
 Квантовое поле 106  
*См. также* Дирака поле, Евклидово поле, Свободное поле, Ферми-поле, Существование квантовых полей  
 — число 41  
 Кирквуда-Зальцбурга уравнения 351, 356  
 Классическая картина 94  
 — критическая точка 95  
 — система 21  
 — статистическая механика 18, 19, 37, 38  
 — траектория 47—48  
 Классические ансамбли 46—53  
 — дифференциальные уравнения 136  
 — законы взаимодействия 44, 297  
 — индексы 336, 337  
 Классический предел 18  
 Классическое поле 123, 132  
 — приближение 60, 93  
 — решение 104, 295  
 Кластер 39, 258, 261  
 Кластерное разбиение 261,

— разложение 55, 98, 104, 152, 241, 335, 342<sup>364</sup>, 384, 387, 388, 390  
*Клебша* — *Гордона* формулы 295  
*Клейна* — *Гордона* поле 133  
 — — уравнение 270  
 Ковариационные операторы 142—164  
 — — инфинитезимальное изменение 193  
 — — периодические 147  
 — — решеточные 205—212  
 — — свободные 145—147  
 Константа связи 60, 139, 201, 202, 205, 284, 329, 398  
 Конфигурации 100—104  
 — классического поля 132, 307  
 Конфигурационное пространство 132  
 Кооперативные явления 54, 90, 99  
 Корреляционные неравенства 73—90, 95, 98, 139, 186, 207, 212, 216, 326, 384  
*Костерлица* — *Таулесса* фазовый переход 106  
 Критическая поверхность 46  
 — размерность 317  
 — температура 95, 104  
 — точка 46, 74, 90, 95, 96, 138, 139, 143, 306, 326, 330, 332—335, 340, 342  
 Критические индексы 96, 106, 139, 335\_338 341  
 Кулонов газ 105, 389, 392, 393  
 — потенциал 22, 26, 35—39, 390  
 Кулоново взаимодействие 44, 105, 392  
 Лагранжиан 60, 201  
*Лаймана* серия 41  
*Лебовица* неравенства 79, 216  
*Лежандра* преобразование 51, 53, 60, 173  
*Лемана* — *Симанзика* — *Циммермана* формализм 260,

— спектральная мера 329  
 — — формула 119—120, 284, 337  
*Леннард-Джонса* потенциал 38, 44, 260  
*Ли* — *Янга* теорема 74, 83—88, 98, 216, 323, 326, 397  
*Лиувилля* мера 47  
 — теорема 20  
 Локальность 115, 117, 378—379  
*Лоренца* группа 115, 117, 133, 134, 265, 266, 296  
 Лоренц-инвариантность 109  
 Лоренц-ковариантность 115, 117, 375—378  
 Лэмбов сдвиг 43, 301—302  
 Магнитное диполь-дипольное взаимодействие 44  
 — поле 83, 98, 297, 398  
 Магнитный момент 292, 293  
*Майера* графы 58, 343  
 — *Монтролла* уравнения 351  
 — разложения 5, 59, 94  
 Масса 35, 332  
 — приведенная 36. *См. также* Спектр масс, Центр масс  
 Массовая щель 273  
 Массовый оператор 265  
 Масштабные преобразования 137, 145, 159, 185, 192, 312. *См. также* Скейлинговый предел  
 S-матрица 266, 269, 278, 281—282, 385, 386  
*Мёбиуса* теорема 272  
*Мейсснера* эффект 398  
*Мелера* формула 34, 66, 233  
*Мермина* — *Вагнера* теорема 104, 105, 318  
 Метод изображений 148, 149  
*Минковского* аксиомы *см.* Аксиомы — поле 114, 115  
*Минлоса* теорема 72  
 Многочастичное рассеяние

- Модель капли 100—104  
 — ротаторов 89, 104, 316  
 Наблюдаемые 19, 23, 48, 115, 380  
 Намагниченность 98, 293, 305, 323, 327  
 Нарушение симметрии 96, 320—326  
 Негауссовы меры 70, 179—186, 236  
*Неймана* граничные условия *см.*  
     Граничные условия  
 — ковариации 148, 314  
 — предел 195  
 Обобщенные функции 71, 92, 107, 267, 268, 272  
 Обусловленность 86, 193, 218  
 Одночастичная задача 266, 267  
 Одночастично-неразложимые диаграммы (1ЧН) 203, 285  
 Оператор рождения 28, 135, 165  
 — уничтожения 28, 135, 165  
*Орнштейна* — *Уленбека* мера 69  
 — — процесс скоростей 66  
 Основное состояние 27, 29, 35, 96, 103, 317  
*См. также* Вакуум  
*Остервальдера* — *Шрадера* аксиомы *см.* Аксиомы  
 Отражения 73, 148, 149, 221, 381  
 — многократные 78, 222—228, 239, 241, 248, 252, 253, 308, 311, 324, 383  
 — несимметричные 229—236, 248, 252. *См. также* Группа отражений, Инвариантность при отражениях, Положительность при отражениях  
*Пайерлса* оценка 100, 309  
 Параметр порядка 98  
*Паули* матрицы 298, 396  
 — принцип запрета 26, 39, 44, 135  
 Перенормировка 34, 94, 141, 165, 188, 197, 201—205, 282—287, 302, 342, 384, 387  
 — вакуума 141, 282, 283, 286  
 — величины поля 202, 268, 283, 286, 329, 331, 394  
 — заряда 139, 286, 342  
 — массы 283—285, 387  
 Перенормируемая теория поля 204—205  
*Перрона* — *Фробениуса* теорема 68  
 Плотность 44, 49, 52, 55  
 Положительность при отражениях 73, 108, 119, 121, 143, 145, 161 — 164, 220—224, 226, 237, 249, 397  
 Поляризационное тождество 190, 245  
 Постоянная тонкой структуры 40, 205, 299  
 Предел бесконечного объема 73—74, 77—78, 216, 236, 242, 324, 388  
 Преобразование *sin-Gordon* 389  
 Приближение среднего поля 88, 92—96, 103—105, 317, 336, 342, 389, 390  
 Пространство состояний 45, 47  
 — траекторий (функциональное пространство) 61, 110, 141, 167, 225, 386, *см. также*  
     Функциональные интегралы  
*Пуассона* процесс 138, 139  
 — скобки 21, 262  
 Равновесное распределение 47  
 — состояние 317  
 Равновесные конфигурации 55  
 Рассеяние 38, 39, 258—292, 342, 385, 386  
 — многочастичное 261—265  
 Резервуар частиц 52  
 Реконструкция квантовой механики 111  
 — квантовых полей 365  
 Ренормгруппа 96, 327, 330, 335, 385, 394  
 Решеточная аппроксимация 137, 194,



- 205, 209, 212, 384, 396
- Решеточные поля 53, 78, 86, 97, 137, 221
- Решеточный оператор Лапласа 54, 205
- Ритца* принцип 27
- Сверхперенормируемые модели 141, 205, 242, 267, 269, 282, 302
- Сверхтонкая структура 301
- Свободная ковариация 145—147
- энергия 51, 86—88, 218, 241, 258, 394
- Свободное поле 117—124, 128, 142, 258, 266, 269, 331, 342
- Связанные состояния 26, 38, 39, 133, 201, 258, 262, 287, 289, 290, 328—331, 342
- Скейлинговый предел 138, 331, 340
- Случайное блуждание 138, 212
- Солитон 103, 104, 260, 303, 395
- Состояние 21
- многочастичное 104, 259, 260
- рассеяния 39, 260, 387
- смешанное 92, 381
- чистое 21
- См. также* Вакуумное состояние, Основное состояние, Пространство состояний, Связанные состояния, Уравнение состояния
- Сохранение симметрии 104, 316
- Спектр масс 287, 342, 384
- Спин 25, 26, 43, 74, 87, 100, 105, 133, 141, 143, 294, 295, 317, 321
- двухкомпонентный 89—90, 105, 317
- Спиновая волна 105
- Статистическая сумма 49, 74, 83, 86, 87, 99, 198, 218, 230, 250, 284, 390—391, 393
- Суммируемость по Борелю 139, 337, 385—386
- Существование квантовых полей 140, 237, 257, 345
- Сходимость графиков операторов 164
- Температура 49
- Теория возмущений 60, 171—173, 242, 282, 283, 299, 385. *См. также* Квадратичные возмущения
- Термодинамический предел 37, 48, 51
- Термостат 49
- Тонкая структура 294, 301. *См. также* Постоянная тонкой структуры
- Траектории 62, 64, 110, 152. *См. также* Классическая траектория.
- Пространство траекторий
- Трансфер-матрица 91, 106, 113, 221, 257
- Туннельный переход 104
- Угловой момент 23, 25, 42, 47, 295, 296, 301
- Уравнение движения 242
- состояния 44, 53
- теплопроводности 61, *см. также* Фейнмана — Каца формула
- Урселла* функции 81
- Усеченные функции 81, 272
- Фаза 91, 97, 99—101, 105, 303, 327
- конденсированная 394
- неупорядоченная 105, 318, 394
- смешанная 91
- чистая 91, 98, 100, 116, 302, 317, 342, 388
- Фазовое пространство 19, 47
- Фазовые диаграммы 88, 389
- Фазовый переход 56, 74, 83, 88, 91, 97, 101, 104, 106, 116, 139, 185, 302—326, 334, 342, 364, 388, 389, 394—397
- — без нарушения симметрии 97, 389

— — второго и более высокого рода 306  
— — доказательство существования 100, 307, 320, 322  
— — первого рода 99, 303, 320  
— — с нарушением симметрии 97, 316—317, 320—326  
— — — размыванием 394, 396  
*Фейнмана* диаграммы (графы) 165—168, 172—173, 175, 199—200, 203, 285—287, 300  
— *Каца* мера 107, 110  
— — формула 28, 60, 64—68, 70—73, 130, 133, 227, 368, 369, 386, 387  
— формула 60—61  
*Ферми* — *Дирака* статистика 133, 135  
Ферми-поле 143, 386—387  
Фермионы 26, 48, 133, 135, 387, 388  
Ферромагнетизм 316  
Ферромагнитное взаимодействие 83, 86, 207  
Ферромагнитный гамильтониан 74, 75, 77, 186  
ФКЖ (*Фортуэна* — *Кастелена* — *Жинибра*) неравенство 82, 216, 303—305  
Фока пространство 124, 129, 134, 258—260  
Фоков вакуум 266  
Фоково представление 126  
Фон *Неймана* алгебры 117, 380  
Функционалы 108, 188  
Функциональные интегралы 65, 70, 107. См. также Гауссовы функциональные интегралы  
Функциональный определитель 192, 197

*Хаага* — *Кастлера* аксиомы см. Аксиомы  
— *Рюэля* теория рассеяния 259, 260, 272—278  
Характеристический функционал 71, 107, 118, 122, 221  
*Хиггса* механизм 303  
— модель 397, 398  
— поля 316  
*Хоенберга* — *Мермина* — *Вагнера* теорема 318  
Центр масс 35, 37, 261, 262  
Цилиндрические подмножества 63  
— функции 109, 194, 235  
Частица 258, 266, 267  
*Швингера* функции 72, 116, 217, 243, 305, 327, 346, 375—378  
*Шредингера* гамильтониан 40, 111, 129  
— картина 24, 25  
— представление 25, 28—30, 34, 35, 38, 40, 110, 233  
— уравнение 22, 24  
Электромагнитное взаимодействие 27, 35, 292—302  
Энтропия 48, 51, 94, 102, 308  
Эргодичность 47, 91, 104, 109, 113, 379  
*Эрмита* полиномы 27, 30, 32, 124, 127, 165, 190, 191  
— разложение 126  
— *Фока* представление 124  
— рекуррентное соотношение 170  
*Юкавы* потенциал 38, 139, 141, 201, 204, 342, 387—388  
*Янга* — *Миллса* теория 140, 204, 396

С годами становится все яснее, что описывать квантовые системы с помощью функциональных интегралов столь же удобно, как и с помощью векторов гильбертова пространства и действующих в нем линейных операторов. Сила функциональных интегралов и заключенные в них возможности, которые лет 30 назад — при их появлении — лишь смутно угадывались, ныне полностью проявились. Впервые функциональные интегралы — в применении к квантовой физике — появились в знаменитой работе Р. Фейнмана 1948 г., в которой он предложил новое построение нерелятивистской квантовой механики для системы конечного числа частиц. В основе его подхода лежит формула, выражающая ядро  $U_t(y_1, y_2)$  оператора эволюции системы во времени  $U_t = \exp\{itH\}$  ( $H$  — оператор энергии) в виде интеграла

$$U_t(y_1, y_2) = \int_{\{x(\tau): x(0)=y_1, x(t)=y_2\}} e^{iS[x(\tau)]} \prod_{\tau \in [0, t]} dx(\tau), \quad y_1, y_2 \in (R^3)^n, \quad (1)$$

по пространству классических траекторий  $\{x(\tau): \tau \in [0, t]\}$  системы, где  $S[x(\tau)] = \int_0^t |\dot{x}|^2 d\tau - \int_0^t V[x(\tau)] d\tau$  — классическое действие системы ( $V$  — потенциальная энергия взаимодействия).

Разумеется, интеграл в (1) не более чем символ (поскольку, например, не ясно даже, как понимать  $\prod_{\tau \in [0, t]} dx(\tau)$ ). Проще всего истолковать интеграл (1), если рассматривать его как предел — при измельчающихся разбиениях  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  отрезка  $[0, t]$  — конечнократных интегралов, получающихся от замены траекторий  $x(\tau)$  в (1) ломаными с вершинами в точках разбиения. Другая и более глубокая интерпретация интеграла в (1) получится, если представить его в виде интеграла

$$\int_{x(\tau)} e^{-i \int_0^t V[x(\tau)] d\tau} d\mathcal{F}_t(x(\tau)) \quad (2)$$

по так называемой мере Фейнмана  $\mathcal{F}_t$  — конечно-аддитивной комплексной мере в пространстве траекторий (формально определя-

мой как  $\exp \left\{ i \int_0^t |\dot{x}|^2 d\tau \right\} \prod_{\tau \in [0, t]} dx(\tau)$ . Это представление инте-

грала Фейнмана хотя уже и корректно, но требует при обращении с ним определенных предосторожностей и оговорок: так как мера Фейнмана  $\mathcal{F}_t$  определена на цилиндрической алгебре множеств и имеет неограниченную вариацию, интеграл (2) разумно определяется лишь для достаточно гладких функций  $V$ . Однако вскоре после работы Фейнмана М. Кац [1951], по-видимому первый из математиков оценивший достоинства нового подхода, по аналогии с представлением (2) написал следующее представление для ядра  $G_t(y_1, y_2)$  оператора  $C_t = \exp\{-tH\}$ ,  $t > 0$ :

$$G_t(y_1, y_2) = \int_{\{x(\tau): x(0)=y_1, x(t)=y_2\}} e^{-\int_0^t V(x(\tau)) dt} d\mathcal{W}_t, \quad (3)$$

где интегрирование происходит по хорошо известной вероятностной мере Винера  $\mathcal{W}_t$  в пространстве траекторий. Представление (3), которое формально может быть получено из (2) переходом к «мнимому» времени (в евклидову область, как сказали бы сейчас), значительно проще и удобнее в применениях, чем интеграл (2). Представления вида (2) и (3) известны ныне под названием формул Фейнмана — Каца.

Позднее, в середине 50-х годов, функциональные интегралы были введены в квантовую теорию поля: как и в случае квантовой механики систем с конечным числом частиц, эволюционный оператор  $U_t = \exp\{itH\}$  для квантового поля был записан в виде интеграла, аналогичного интегралу Фейнмана (1):

$$U_t = \int e^{iS(\varphi)} \prod d\varphi(x), \quad (4)$$

где  $S(\varphi)$  — действие для классического поля. Формула (4) оказалась еще труднее для содержательной интерпретации, чем формула (1), так как в ней ни левая, ни правая часть не имела точного определения: гамильтониан  $H$  не был корректно построен (как самосопряженный оператор в подходящем гильбертовом пространстве) ни для одной модели взаимодействующих квантовых полей, а интеграл справа, как и в случае (1), представлял собой только символ, которому не удавалось дать точного определения, подобного (2) или (3). Тем не менее символическое выражение (4) долгие годы имело (и поныне имеет) большую эвристическую ценность: над ним, руководствуясь интуицией и здравым смыслом, удобно совершать различные математические операции, как над настоящим интегралом, получая в результате физически осмысленные ответы.

Новое содержательное понимание функционального интеграла (4) появилось в начале 70-х годов благодаря, в частности, работам авторов этой книги. В этих работах для модели квантового бозонного поля с полиномиальным самодействием в двумерном пространстве-времени (так называемой  $P(\varphi)_2$ -модели) — после перехода в евклидову область, т. е. к «мнимому времени» — определялся интеграл (4) (по аналогии с определением (3)) как интеграл

$$\int e^{-\int : P(\varphi) : dx} dW_0, \quad (5)$$

где  $W_0$  — гауссова вероятностная мера в пространстве  $\mathcal{F}'(E^2)$  обобщенных функций двух переменных (задаваемая «евклидовым» действием  $S_0(\varphi) = \int [(\nabla\varphi)^2 + m\varphi^2] dx$  свободного бозонного поля),

а  $\int : P(\varphi) : dx$  — определенным образом перенормированное классическое взаимодействие  $\int P(\varphi) dx$ . Это определение интеграла в правой части (4) позволяет определить и левую часть, т. е. гамильтониан  $H$  бозонного поля, что явилось существенно новой и важной чертой построений Дж. Глимма и А. Джаффе.

Их работы, как и большинство работ этого направления, своим появлением обязаны глубокому влиянию идей К. Симанзика и Э. Нельсона. В работе Э. Нельсона (развившего предположения Симанзика) показано, что задачу построения квантового поля в пространстве Минковского  $M^{v+1}$  можно свести к задаче построения марковского случайного поля в евклидовом пространстве  $E^{v+1}$ , инвариантного относительно группы движений этого пространства. Именно такое поле и было построено в работе Дж. Глимма и А. Джаффе для случая  $P(\varphi)_2$ -модели — как возмущение гауссова (марковского) поля в пространстве  $E^2$  с распределением  $W_0$  с помощью веса  $\exp\{-\int : P(\varphi) : dx\}$ . При этом само построение меры для  $P(\varphi)_2$ -модели идейно и технически оказалось очень схоже с построением предельной гиббсовой меры в статистической физике: в этом случае «свободная мера», соответствующая системе невзаимодействующих частиц, возмущается больцмановым множителем  $\exp\{-\beta H_I\}$ , где  $H_I$  — энергия взаимодействия частиц. В течение 70-х годов на этом пути были построены случайные марковские поля, соответствующие и другим моделям квантовой теории поля, хотя для наиболее интересного случая — модели взаимодействующих квантовых полей в четырехмерном пространстве-времени — такого случайного поля построить пока не удалось.

Центральным местом этой книги является изложение конструкции меры для полей  $P(\varphi)_2$  (часть II). Это построение предваряется общеобразовательным введением (часть I) и завершается обсуждением многочисленных его следствий и связей с другими пробле-

мами математической физики (ч. II, III). Книга написана учеными, существенно повлиявшими на современное представление о роли функциональных интегралов как одной из фундаментальных структур в квантовой физике, и поэтому интересна как их собственное исповедание этих идей и взглядов.

Изложение материала ведется на трех различных уровнях, которые можно условно обозначить как педагогический, концептуальный и технический. При помощи первого — педагогического — уровня, на котором написана ч. I, авторы обращаются к неискушенным в предмете математикам и стараются бегло обучить их квантовой механике, аксиомам теории поля, а также подготовить их — на простом примере интеграла Винера — к восприятию более сложной конструкции интеграла (5). В изложении на втором уровне, предназначенном для тех, кто знаком с предметом, даются основные идеи построения функциональных мер, связь этого построения с так называемыми перенормировками поля и со статистической физикой, а также со многими физическими аспектами теории поля, элементарных частиц и физики низких температур (теория рассеяния, спектр масс, связанные состояния, фазовые переходы, критические точки). Само изложение конструкции  $P(\varphi)_2$ -модели и фазовых переходов в ней (технический уровень) изобилует большим числом разнообразных аналитических приемов и порой ведется очень сжато; оно потребует от читателя, желающего овладеть этой техникой, напряженной и активной работы над текстом.

Настоящая книга — уже 4-я книга по этой тематике, выпускаемая издательством «Мир». До этого вышли: Саймон Б. «Модель  $P(\varphi)_2$  евклидовой квантовой теории поля» (1976) и два сборника переводов: «Конструктивная теория поля» (1977) и «Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход» (1978). При чтении книги Дж. Глимма и А. Джаффе читателю было бы полезно посмотреть и эти книги.

*Р. Минлос*

В этой книге одна тема, но она адресована трем различным категориям читателей.

Тема эта — математическая структура современной физики: статистической физики, квантовой механики и квантовой теории поля. В том, что различные разделы физики имеют единую математическую структуру, нет ничего удивительного. В классической физике это объясняется, например, общностью математического формализма, связанного с волновым уравнением и уравнением Лапласа. В современной физике единство более сложной математической структуры отражает также общность основных физических явлений в различных ее частях. Так, специалисты по физике элементарных частиц, ядерной физике и физике твердого тела изучают аналогичные научные проблемы с разных точек зрения.

Рассматриваемая здесь математическая структура может быть описана в разных терминах: при помощи дифференциальных уравнений с частными производными для функций бесконечного числа независимых переменных, при помощи линейных операторов, действующих в бесконечномерных пространствах, или теории вероятностей и анализа в функциональных пространствах. Математическая структура квантования обобщает теорию дифференциальных уравнений с частными производными в том же смысле, в каком последние служат обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений. Центральной темой этой книги является квантование нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и изучение физических систем с бесконечным числом степеней свободы.

Математики, физики-теоретики и специалисты по математической физике — вот те категории читателей, которым адресована эта книга.

Каждая из трех частей книги имеет собственные научные цели. Первая часть является введением в современную физику. Она задумана как замкнутое изложение физики для математически настроенных читателей. Сюда входят квантовая теория, статистическая механика и квантовая теория поля. Поскольку эта часть обращена в первую очередь к математикам, в ней основное внимание уделяется концептуальной стороне теории: определению понятий, постановкам задач и осмыслению полученных результатов,

При этом технические вопросы решения той или иной задачи отступают на второй план. Такой способ изложения отличается от обычного стиля физических учебников, и поэтому студенты-физики могут найти в первой части полезные дополнения к общепринятым руководствам. В частности, приведенное здесь построение квантовой механики с помощью формулы Фейнмана — Каца и функциональных интегралов может послужить для физиков введенным в эти методы.

Во второй части рассматриваются квантовые поля. А именно, строятся бозонные поля с полиномиальным самодействием в двумерном пространстве-времени — так называемые  $P(\varphi)_2$ -модели. Изложение в этой части математически полно и замкнуто, хотя и предполагает некоторые знания об операторах в гильбертовом пространстве и о функциональных интегралах. Первоначальная конструкция  $P(\varphi)_2$ -полей, предложенная в ранних работах авторов, значительно усовершенствована и упрощена в этой книге благодаря достижениям, накопленным за последнее десятилетие усилиями небольшой группы энтузиастов по конструктивной теории поля, включая Ю. Фрелиха, Ф. Гуэрру, Э. Нельсона, К. Остервальдера, Л. Розена, Р. Шрадера, Б. Саймона, Т. Спенсера, К. Симанзика и наконец самих авторов. Эта часть может служить для физиков полезным дополнением к обычным книгам по теории поля, поскольку в ней развит математический аппарат, как правило, отсутствующий в таких книгах.

Во второй части разрешен давний научный спор. На протяжении многих лет математики и физики задавались вопросом: согласована ли нелинейная теория поля с релятивистской квантовой механикой? Может ли квантование, основанное на перенормированной теории возмущений, быть определено математически точно? Математически полное построение  $P(\varphi)_2$ -полей, выполненное в этой книге, а также полей Юкавы<sub>2,3</sub>,  $\varphi_3^4$ ,  $\sin$ -Gordon<sub>2</sub>, Хиггса<sub>2</sub> и ряда других, которые можно найти в литературе, дают положительное решение этой проблемы. Главный итог этой работы — осмысление перенормировок вне рамок теории возмущений. Математической основой такого анализа является теория перенормировок функциональных интегралов. С математической точки зрения реализация этих идей повлекла за собой создание новой области математики.

Неизвестно, согласованы ли математические уравнения теории поля в случае четырехмерного пространства-времени. По некоторым соображениям, например, уравнения для взаимодействующих фотонов и электронов (в отсутствие взаимодействия с другими частицами) могут быть несовместными, но включение взаимодействия с кварковым полем может дать согласованное множество уравнений. Подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки нашей книги, хотя о них и упоминается в гл. 6 и 17.



В третьей части рассматриваются взаимодействия частиц, их рассеяние и связанные состояния, фазовые переходы и критические точки. Здесь мы выводим следствия из построений второй части и устанавливаем их связь с общими вопросами физики. Эта часть книги рассчитана на более продвинутый уровень и адресована в основном специалистам по теоретической и математической физике. Изложение здесь не является ни замкнутым, ни полным и имеет целью осветить основные идеи, дать объяснение важнейшим результатам математического характера и служить введением в литературу.

Обсуждение фазовых переходов и критических явлений может быть полезно для специалистов по физике твердого тела и жидкости. Главным приемом здесь служат разложения в ряды и корреляционные неравенства. Эти методы находят применение в самых различных областях. Мы приводим подробное объяснение (при помощи аналитического продолжения) связи между теорией квантовых полей и классической статистической физикой. Физики-профессионалы могут начать чтение книги прямо с третьей части, обращаясь к предыдущим главам лишь по мере надобности.

Читателей, интересующихся историческим развитием конструктивной квантовой теории поля, мы отсылаем к различным обзорным статьям, написанным как нами, так и другими авторами. Количество ссылок на статьи, посвященные узкоспециальным вопросам, сведено здесь к минимуму. Особенно это относится к первой и второй частям, написанным достаточно полно и замкнуто. Список литературы получился очень большим; мы приносим извинения за неизбежные пропуски.

Появление этой книги стало возможным благодаря помощи большого числа коллег, учеников и друзей. Значительную помощь нам оказали Р. Д'Арканджело, Р. Бранденбергер, Б. Драушке, Ж.-П. Экман, Х. Гонсалес, У. Минти, К. Петерсон, П. Петти, сотрудники издательства Springer и особенно наши жены Адель и Нора. Мы благодарим ETH, IHES, Марсельский университет и CEN (Сакле) за гостеприимство, а также фонд Гуггенхайма и NSF за финансовую поддержку.

Преобразования Фурье:

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{ipx} \tilde{f}(p) dp, \quad \tilde{f}(p) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ipx} f(x) dx,$$

$$f(\theta) = (2\pi)^{-d/2} \sum e^{in\theta} \tilde{f}(n), \quad \tilde{f}(n) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta) d\theta.$$

Векторы в пространстве Минковского:

$$\begin{aligned} x &= (x_0, \mathbf{x}) = (x_0, \dots, x_{d-1}), \\ x^2 &= x \cdot x = -x_0^2 + \mathbf{x}^2, \quad p^2 = p \cdot p = -p_0^2 + \mathbf{p}^2, \\ x \cdot p &= \sum x_i p^i = -x_0 p_0 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \\ \square &= -\partial_i^2 + \Delta = -\partial x_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \partial x_i^2. \end{aligned}$$

Векторы в евклидовом пространстве:

$$x_d = ix_0, \quad x^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^d x_i^2, \quad \Delta = \sum_{i=1}^d \partial x_i^2.$$

Уравнение Шредингера:

$$\begin{aligned} \hbar &= h/2\pi, \\ i\hbar \dot{\theta} &= H\theta, \quad \theta(t) = e^{-itH/\hbar} \theta(0), \\ p &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad [p(x), q(y)] = -i\hbar \delta(x-y). \end{aligned}$$

Ковариационные операторы  $C_m \in \mathcal{C}_m$ , удовлетворяющие уравнению  $(-\Delta + m^2)C_m = \delta$ .

Матрицы  $\sigma$  и  $\gamma$ :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\not{a} = \sum a_\mu \gamma_\mu, \quad \not{a}^2 = \sum a_\mu^2 = a^2.$$

**Уравнение Дирака (при нулевом внешнем поле):**

$$(h \not{\partial} - mc) \psi = 0.$$

**Уравнение Дирака во внешнем поле A:**

$$\left( h \not{\partial} + i \frac{e}{c} A - mc \right) \psi = 0.$$

---

## Список обозначений

---

- $a, a^*, A, A^*$  — операторы рождения и уничтожения  
 $a, A$  — свободная энергия  
 $A$  — оператор антисимметризации  
 $\mathcal{A}$  — действие  
 $\mathfrak{A}, \mathcal{A}$  — алгебра операторов  
 $b$  — ребро  
 $B$  — наблюдаемая; область в пространстве-времени  
 $\mathcal{B}$  — множество ребер  
 $c$  — диагональные значения оператора  $C$ ,  $c(x) = C(x, x)$ ; индекс критического значения; константа  
 $C$  — ковариация; комплексные числа  
 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_m$  — класс операторов ковариации (§ 7.9)  
 $d$  — размерность пространства-времени  
 $D$  — граничные условия Дирихле  
 $\mathcal{D}$  — область определения оператора; пространство основных функций  $C_0^\infty$   
 $\mathcal{D}'$  — пространство обобщенных функций Шварца  
 $\mathcal{D}^{(j)}$  — пространство неприводимого представления группы  $SU(2, C)$  со спином  $j$   
 $E$  — уровень энергии; собственное значение оператора  $H$ ; евклидово преобразование; евклидова группа  
 $\mathcal{E}$  — евклидова группа; евклидово гильбертово пространство; полоса по времени (§ 10.5)  
 $f$  — основная функция; свободная энергия  
 $\mathcal{F}$  — пространство Фока  
 $g$  — основная функция  
 $\mathcal{G}$  — группа  
 $h, \hbar$  — постоянные Планка  
 $h$  — внешнее поле  
 $H$  — гамильтониан  
 $HS$  — класс операторов Гильберта — Шмидта  
 $\mathcal{H}(\mathbf{x})$  — плотность гамильтониана  
 $\mathcal{H}$  — гильбертово пространство квантовых состояний  
 $I$  — единичный оператор  
 $J$  — константа взаимодействия для изингова ферромагнетика  
 $j, \mathbf{J}$  — угловой момент

- $k$  — постоянная Больцмана  
 $\mathcal{K}$  — ядро полугруппы  
 $K$  — ядро уравнения Бете — Солпитера  
 $L$  — угловой момент (§ 15.1)  
 $L_s, L_i, L$  — линии в фейнмановых диаграммах (ребра самодействия и взаимодействия)  
 $\mathcal{L}$  — лагранжиан; решетка; норма, применяемая в методе многократных отражений (§ 10.5); группа Лоренца  
 $m, M$  — масса; намагниченность; норма, применяемая в методе многократных отражений (§ 10.5)  
 $n$  — число компонент поля; степень полинома  $P$   
 б.с. — ближайшие соседи на решетке  
 $N$  — граничные условия Неймана;  $N(f)$  = норма функции  $f$   
 $\mathcal{N}$  — нуль-пространство для вырожденного скалярного произведения  
 $\rho$  — периодические граничные условия; давление; индекс в обозначении пространства Лебега ( $L_\rho$ ); степень полинома  $P$   
 $\rho, P$  — импульс; оператор импульса; импульсное пространство  
 $P$  — полином взаимодействия; оператор проектирования  
 $P_n$  — полином Эрмита  
 $q, Q$  — конфигурация; конфигурационное пространство; индекс в обозначении пространств Лебега ( $L_q$ )  
 $R$  — вещественные числа; норма, применяемая в методе многократных отражений (§ 10.5)  
 $R^d$  —  $d$ -мерное евклидово пространство  
 $s$  — время  
 $s. \lim$  — сильный предел  
 $\text{supp}$  — носитель  
 $s, S$  — энтропия  
 $S$  — производящая функция; функция Швингера; сфера; оператор симметризации  
 $|S^n|$  — объем  $n$ -мерной сферы  
 $\mathcal{P}$  — пространство Шварца быстро убывающих основных функций  
 $\mathcal{P}'$  — пространство Шварца обобщенных функций умеренного роста  
 $\mathfrak{S}_n$  — симметрическая группа (группа перестановок из  $n$  элементов)  
 $t$  — евклидово время ( $= x_d$ ); время в пространстве Минковского ( $= x_0$ )  
 $T$  — хронологическое упорядочение; усечение  
 $U, V$  — унитарные операторы в гильбертовом пространстве  
 $V$  — потенциал

$W$	— функция Вайтмана
$dW$	— мера Винера
$\mathcal{W}$	— пространство винеровских траекторий
$\mathcal{X}$	— фазовое пространство
$x$	— точка в пространстве-времени
$\mathbf{x}$	— точка в пространстве
$z$	— активность
$Z$	— статистическая сумма; константа перенормировки поля; целые числа
$Z_+$	— неотрицательные целые числа; статистическая сумма
$w. \lim$	— слабый предел
$\beta$	— обратная температура ( $1/kT$ )
$\gamma$	— критический индекс
$\gamma, \Gamma$	— граница; граница фаз
$\Gamma$	— граничные условия Дирихле на $\Gamma$ ; оператор, обратный к пропагатору, или двухточечная функция
$ \Gamma $	— длина или площадь $\Gamma$
$\delta$	— дельта-функция Дирака; символ Кронекера; шаг решетки; критический индекс
$\Delta$	— лапласиан; фундаментальное решение волнового уравнения или уравнения Лапласа (пропагатор); единичный квадрат
$\varepsilon$	— функция типа Хевисайда $\varepsilon = 2\theta - 1$ ; шаг решетки; приведенная температура $(T - T_c)/T_c$
$\zeta, \eta$	— критические индексы
$\theta$	— оператор отражения; функция Хевисайда; состояние в $\mathcal{H}$
$\kappa$	— импульсное обрезание
$\lambda$	— константа связи
$\Lambda$	— ограниченная область в пространстве
$ \Lambda $	— площадь или объем $\Lambda$
$\mu$	— $(-\Delta + m^2)^{1/2} = (p^2 + m^2)^{1/2}$ , химический потенциал; внешнее поле
$d\mu$	— статистический вес или ансамбль
$\nu$	— частота; критический индекс
$d\nu$	— статистический вес или ансамбль
$\xi$	— случайная величина
$\Xi$	— статистическая сумма
$\pi$	— 3,14159; импульс, сопряженный к полю $\phi$
$\Pi$	— оператор проектирования; гиперплоскость
$\Pi_{\pm}$	— полупространства, образующие $R^d \setminus \Pi$
$\rho$	— плотность
$\sigma$	— масса <sup>2</sup> ; изингова спиновая переменная; время
$\Sigma$	— собственная энергия
$\Phi, \Phi$	— квантовое поле; конфигурация классического поля
$d\Phi_{\zeta}$	— гауссова мера с ковариацией $\zeta$

- $\chi$  — восприимчивость; случайная величина; состояние в  $\mathcal{H}$ ; характеристическая функция
- $\psi$  — квантовое поле; состояние в  $\mathcal{H}$
- $\omega$  — частота; винеровская траектория; угловая переменная интегрирования
- $\Omega$  — вакуумное состояние; основное состояние; равновесное состояние
- $\partial$  — производная; граничный оператор; граница множества
- $\nabla$  — градиент
- $|\cdot|$  — абсолютная величина; площадь, объем или число точек; норма
- $\wedge$  — оператор проектирования из евклидова пространства функций в гильбертово пространство квантовых состояний
- $\sim$  — преобразование Фурье
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение
- $\langle \cdot \rangle$  — среднее; интеграл по мере  $d\mu$
- $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор:  $[a, b] = ab - ba$
- $\{\cdot, \cdot\}$  — антикоммутатор:  $\{a, b\} = ab + ba$
- $\emptyset$  — свободные граничные условия; пустое множество
- $\times$  — векторное произведение
- $\cdot$  — производная по времени; обозначение для опущенной переменной, как, например,  $f(\cdot) = f$
- $\setminus$  — теоретико-множественная разность:  $A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$
- $\bar{\phantom{x}}$  — комплексное сопряжение; замыкание

## Глава I

## Квантовая теория

## 1.1 Общее представление о квантовой теории

Классическая механика является предельным случаем при  $\hbar \rightarrow 0$  квантовой механики, а нерелятивистская (ньютонова) механика — предельным случаем при  $c \rightarrow \infty$  специальной теории относитель-

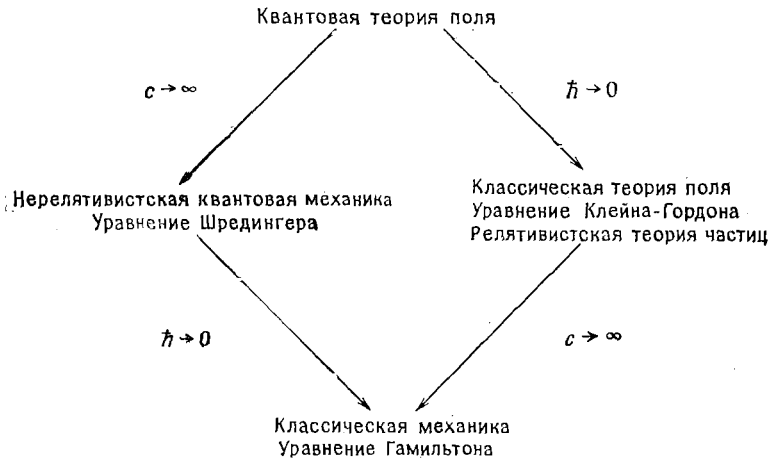


Рис. 1.1. Классический и нерелятивистский пределы квантовой теории поля.

ности. Здесь  $\hbar$  обозначает постоянную Планка, а  $c$  — скорость света. Квантовую теорию поля можно рассматривать как комбинацию квантовой механики и специальной теории относительности. Она содержит оба параметра  $\hbar$  и  $c$  и имеет два вырожденных предела: один при  $c \rightarrow \infty$ , а другой при  $\hbar \rightarrow 0$ . В классическом пределе квантовой теории поля ( $\hbar \rightarrow 0$ ) могут получиться две науки: классическая теория поля и классическая теория частиц — в зависимости от того, по какой последовательности состояний мы переходим.



дим к пределу. При этом только во втором случае (теория частиц) можно сделать еще и нерелятивистский предельный переход ( $c \rightarrow \infty$ ) к классической механике частиц (рис. 1.1).

## 1.2 Классическая механика

Мы приведем несколько основных определений из классической механики (а также классической статистической механики), с тем чтобы сравнить их с соответствующими понятиями квантовой механики. Рассмотрим систему  $n$  частиц, массы  $m_i$  каждая, движущихся в поле с потенциалом  $V$ , не зависящим от времени. Фазовое пространство этой системы  $\mathcal{X} = R^{6n}$  определяется как сумма конфигурационного пространства  $Q = R^{3n}$  и сопряженного импульсного пространства  $P = R^{3n}$ . Классической *наблюдаемой* называется функция  $B(q, p)$ ,  $(q, p) \in (Q, P) = \mathcal{X}$ , на фазовом пространстве.

Классическая механика изучает эволюцию точки фазового пространства во времени, а неравновесная классическая статистическая механика — эволюцию распределения вероятностей на фазовом пространстве. В обоих случаях законы движения определяет гамильтониан, или полная энергия системы. В декартовых координатах гамильтониан имеет вид

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q). \quad (1.2.1)$$

Рассмотрим кривую  $(q(t), p(t))$  в фазовом пространстве с некоторыми начальными значениями  $(q_0, p_0)$  в момент времени  $t_0$ . Эта кривая получается интегрированием уравнений Гамильтона (Ньютона)

$$\begin{aligned} dq_i(t)/dt &= \nabla_{p_i} H = p_i/m_i, \\ dp_i(t)/dt &= -\nabla_{q_i} H = -\nabla_{q_i} V = F_i(q) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

с начальными условиями  $q(t_0) = q_0$ ,  $p(t_0) = p_0$ . В общем случае можно рассматривать эволюцию произвольной наблюдаемой  $B$ :  $B_t(q, p) = B(q(t), p(t))$  с начальными условиями  $B_{t_0}(q, p) = B(q, p)$ . Из (1.2.2) следует, что

$$\partial B_t(q, p)/\partial t = D_H B_t(q, p), \quad (1.2.3)$$

где  $D_H$  — векторное поле на фазовом пространстве  $\mathcal{X}$ , имеющее вид

$$D_H = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{m_i} p_i \cdot \nabla_{q_i} + F_i(q) \cdot \nabla_{p_i} \right\}. \quad (1.2.4)$$

Предполагая, что уравнение (1.2.3) интегрируемо, получим, что

$$B_t(q, p) = (e^{(t-t_0) D_H} B)(q, p) = B(q(t), p(t)). \quad (1.2.5)$$

**Предложение 1.2.1** (теорема Лиувилля). Пусть  $d\mu = \prod_{i=1}^n dp_i dq_i$  — мера Лиувилля в  $\mathcal{X}$ , а

$$D_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Тогда оператор  $D_H$  формально кососимметричен в пространстве  $L_2(\mathcal{X}, d\mu)$ , а оператор  $e^{tD_H}$  формально унитарен.

**Замечание.** Мы говорим, что оператор формально кососимметричен, если для любых функций  $F, G \in C_0^\infty(\mathcal{X})$

$$\langle D_H F, G \rangle_{L_2(d\mu)} = - \langle F, D_H G \rangle_{L_2(d\mu)}.$$

Таким образом, на множестве  $C_0^\infty(\mathcal{X}) \subset L_2(\mathcal{X}, d\mu)$  сопряженный оператор  $D_H^* = -D_H$ . Для того чтобы усилить этот результат, т. е. установить унитарность  $e^{tD_H}$ , следует решить технический вопрос об интегрируемости уравнения (1.2.3) и о существовании и единственности экспоненциального решения  $e^{tD_H}$ . Этому вопросу посвящена обширная литература, и мы его здесь обсуждать не будем. Заметим только, что унитарность  $e^{tD_H}$  имеет место при некоторых ограничениях на функцию  $V(q)$ .

**Доказательство.** Для произвольных функций  $F, G \in C_0^\infty$  интегрирование по частям дает

$$\int \bar{F} (D_H G) d\mu = - \int \overline{D_H F} G d\mu - \sum_i (\bar{F} G) \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right),$$

и, так как выражение в скобках обращается в нуль,  $D^* = -D$  на пространстве  $C_0^\infty$ . ■

Другая формулировка теоремы Лиувилля состоит в том, что мера Лиувилля  $d\mu$  инвариантна относительно классической динамики, определенной гамильтонианом  $H$ . С помощью якобиана преобразования  $(q, p) \rightarrow (q(t), p(t))$  это формулируется так:

**Предложение 1.2.2.** Пусть для каждого начального условия существует единственное решение уравнений Гамильтона; тогда

$$\partial(q(t), p(t)) / \partial(q, p) \equiv 1$$

и, таким образом, объем произвольной области фазового пространства инвариантен относительно потока, порожденного этими решениями. Точнее, если  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ , а  $\mathcal{X}_t = e^{tD_H} \mathcal{X}_0$ , то

$$\mu(\mathcal{X}_0) = \int_{\mathcal{X}_0} d\mu = \int_{\mathcal{X}_t} d\mu = \mu(\mathcal{X}_t).$$

Эквивалентную формулировку динамики наблюдаемых можно дать, используя скобки Пуассона наблюдаемых  $B$  и  $C$ :

$$\{B, C\} = \sum_{i=1}^n (\nabla_{q_i} B \cdot \nabla_{p_i} C - \nabla_{p_i} B \cdot \nabla_{q_i} C). \quad (1.2.6)$$

Скобки  $\{\cdot, \cdot\}$  задают на алгебре наблюдаемых структуру алгебры Ли. Заметим, что канонические скобки Пуассона равны

$$\{p_i, p_j\} = 0 = \{q_i, q_j\}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} I. \quad (1.2.7)$$

Поскольку эти скобки равны константам, они в силу уравнений (1.2.3) не меняются со временем. Далее,  $\{H, B\} = -D_H B$ , и, следовательно, уравнение (1.2.3) может быть записано в виде

$$\partial B_t / \partial t = -\{H, B\}. \quad (1.2.8)$$

Предполагая, что ряд сходится, получим

$$B_t = e^{(t-t_0) D_H} B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \{H, \{H, \dots \{H, B\} \dots\}\}. \quad (1.2.9)$$

В квантовом случае автоморфизм алгебры наблюдаемых  $B \rightarrow B_t$  лежит в основе так называемой гейзенберговой картины квантовой механики (динамики Гейзенберга), а предел этой динамики при  $\hbar \rightarrow 0$  приводит к формуле (1.2.9).

Помимо наблюдаемых другими важнейшими объектами изучения являются *состояния*. Состоянием классической системы служит любая точка  $(a, b)$  фазового пространства, причем значение наблюдаемой  $B$  в этом состоянии в момент времени  $t_0$  равно  $B_{t_0}(a, b)$ . В классической статистической механике обычно рассматривают более широкий класс состояний, каждое из которых определяется плотностью распределения вероятностей  $d\rho(q, p)$  на фазовом пространстве, так что

$$\int d\rho(q, p) = 1, \quad d\rho(q, p) \geq 0. \quad (1.2.10)$$

Классические — точечные — состояния, которые можно рассматривать как распределения вероятностей, сосредоточенные в одной точке, называются *чистыми* состояниями. Они имеют вид

$$d\rho(q, p) = \delta(q - a) \delta(p - b) dq dp.$$

При заданном состоянии  $\rho$  каждой наблюдаемой  $B$  сопоставляется некоторое число  $\rho(B)$  — ее среднее значение:

$$\rho(B) = \int B(q, p) d\rho(q, p). \quad (1.2.11)$$

Для упомянутых выше классических состояний  $\rho(B) = B(a, b)$ .

Таким образом, динамику можно рассматривать не только как изменение наблюдаемых, но и как изменение состояний. Пусть в момент времени  $t_0$  имеет место состояние  $\rho$ . Определим состояние  $\rho_t$  так, чтобы для любой наблюдаемой  $B$  выполнялось равенство

$$\rho_t(B) = \rho(B_t). \quad (1.2.12)$$

Поскольку оператор  $D_H$  формально кососимметричен, то

$$d\rho_t(q, p) = (e^{-(t-t_0) D_H} d\rho)(q, p) = d\rho(q(-t), p(-t)). \quad (1.2.13)$$

Такая точка зрения на динамику в квантовой механике носит название шредингеровой картины. Переход к пределу при  $\hbar \rightarrow 0$  в уравнении Шредингера приводит к формуле (1.2.13).

### 1.3 Квантовая механика

Классическая физика оказывается непригодной при изучении атомов и молекул. Например, атом водорода состоит из двух частиц: ядра — протона с зарядом  $+e$  и массой  $m_p$  и электрона с зарядом  $-e$  и массой  $m_e$ . Ядро тяжелое,  $m_p/m_e \approx 2000$ , и относительно небольшое: радиус протона примерно в  $10^{-3}$  раз меньше радиуса атома. Согласно классическим представлениям, под действием притягивающего кулонова потенциала  $V(r) = -e^2/r$  электрон должен был бы вращаться вокруг протона подобно тому, как Луна под действием гравитационного притяжения вращается вокруг Земли. Однако в таком случае движущийся с ускорением заряженный электрон должен был бы непрерывно излучать энергию, что привело бы к разрушению атома.

Первоначальной задачей квантовой механики было объяснение устойчивости атомов и молекул и выяснение причин, по которым частоты излучения света возбужденными атомами принимают дискретные значения. Успех квантовой механики в предсказании атомных и молекулярных спектров явился грандиозным достижением науки двадцатого столетия. Теперь нет никакого сомнения в том, что квантовая механика дает истинное описание явлений природы. В этой главе будут сформулированы в виде постулатов основные принципы квантовой механики без каких бы то ни было попыток обосновать их или вывести. Мы предпочитаем рассматривать классическую механику (§ 1.2) как предел квантовой механики при  $\hbar \rightarrow 0$ . Постулаты разделены на основные (помеченные буквой P) и те, которые справедливы в ограниченном классе теорий.

**Постулат P1.** Чистыми состояниями квантовомеханической системы являются лучи в некотором гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  (или единичные векторы с произвольной фазой).

Как и в классическом случае, указать чистые состояния квантовой системы — это все, что можно о ней сказать.

Представление о состояниях как о лучах в гильбертовом пространстве приводит к вероятностной интерпретации квантовой механики. Рассмотрим физическую систему в состоянии  $\theta$ ; тогда вероятность ее пребывания в чистом состоянии  $\chi$  равна  $|\langle \theta, \chi \rangle|^2$ . Очевидно, что  $0 \leq |\langle \theta, \chi \rangle|^2 \leq 1$ .

Заметим, что, хотя фаза вектора  $\theta$  физически несущественна, относительная фаза двух векторов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  уже важна. Другими словами, если  $|\alpha| = 1$ , то  $|\langle \alpha\theta, \chi \rangle|$  не зависит от  $\alpha$ , а вот  $|\langle \theta_1 + \alpha\theta_2, \chi \rangle|$  зависит. Поэтому удобнее всего рассматривать чистые состояния просто как векторы гильбертова пространства, а нормировать их лишь в конкретных вычислениях.

**Постулат P2.** Наблюдаемыми в квантовой механике являются самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Среднее значение наблюдаемой  $B$  для системы, находящейся в состоянии  $\theta$ , равно

$$E_\theta(B) = \langle \theta, B\theta \rangle / \langle \theta, \theta \rangle. \quad (1.3.1)$$

Примеры наблюдаемых: гамильтониан (энергия), импульс, координата (частицы).

Заметим, что введение «статистических смесей» в квантовую механику приводит к квантовой статистической механике. Обычно система квантовой статистической механики описывается при помощи положительного оператора  $\rho$  со следом ( $\text{tr } \rho < \infty$ ). При этом среднее значение вычисляется по формуле

$$\rho(B) = \text{tr}(\rho B) / \text{tr } \rho. \quad (1.3.2)$$

Если ранг оператора  $\rho$  равен 1, то  $\rho$  задает чистое состояние (1.3.1), а  $\rho / \text{tr } \rho$  — проекция на одномерное подпространство, порожденное вектором  $\theta / \|\theta\|$ . В других случаях состояние  $\rho(B)$  является выпуклой линейной комбинацией чистых состояний:

$$\rho(B) = \sum \alpha_i \langle \theta_i, B\theta_i \rangle, \quad (1.3.3)$$

где  $\theta_i$  — ортонормированная система собственных векторов оператора  $\rho$ , а  $\sum \alpha_i = 1$ .

**Постулат P3.** Гамильтониан  $H$  является инфинитезимальным генератором унитарной группы  $U(t) = e^{-itH/\hbar}$  сдвигов по времени, импульс  $\mathbf{P}$  — инфинитезимальным генератором унитарной группы пространственных сдвигов, а угловой момент (момент количества движения)  $\mathbf{J}$  — инфинитезимальным генератором унитарной группы пространственных вращений.

Группа  $U(t)$  сдвигов по времени определяет динамику. В квантовой механике общеприняты два разных подхода: шредингеровский и гейзенберговский. В первом наблюдаемые не меняются со

временем, а состояния эволюционируют по формуле

$$\theta(t) = e^{-itH/\hbar}\theta. \quad (\text{S1})$$

Векторы-состояния удовлетворяют уравнению Шредингера

$$i\hbar d\theta(t)/dt = H\theta(t). \quad (\text{S2})$$

Зависящее от времени состояние  $\theta(t)$  задает среднее значение  $E_{\theta(t)}(B)$ .

Второй подход к описанию динамики — это картина Гейзенберга, в которой состояния неподвижны, а наблюдаемые эволюционируют в соответствии с действием группы автоморфизмов

$$B \rightarrow B(t) = e^{itH/\hbar} B e^{-itH/\hbar} = U(t)^* B U(t). \quad (\text{H1})$$

Произвольная наблюдаемая  $B$  удовлетворяет уравнению динамики

$$\hbar dB(t)/dt = [iH, B(t)], \quad (\text{H2})$$

формальным решением которого служит ряд

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it/\hbar)^n}{n!} [H, [H, \dots, [H, B], \dots]]. \quad (\text{H3})$$

Отметим сходство между (H2—3) и формулами (1.2.8—9); роль скобок  $\{\cdot, \cdot\}$  играет коммутатор  $[\cdot, \cdot] (i\hbar)^{-1}$ . Постоянная Планка  $\hbar$  имеет физическую размерность действия, как и произведение  $pq$ .

Связь между представлениями Гейзенберга и Шредингера устанавливается равенством

$$E_{\theta(t)}(B) = E_{\theta}(B(t)). \quad (1.3.4)$$

Заметим, что из постулата P3 следует, что результаты наблюдения (т. е. значения скалярного произведения  $\langle \theta, \chi \rangle$ ) не зависят от того, в какой момент времени это наблюдение производилось, т. е.

$$|\langle \theta, \chi \rangle| = |\langle \theta(t), \chi(t) \rangle|.$$

Обратно, пусть  $\theta$  и  $\theta'$  — два вектора гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , полученных один из другого при помощи некоторой симметрии  $\mathcal{H}$ , т. е. взаимно однозначного преобразования  $\mathcal{H}$  на себя, которое сохраняет вероятности:  $|\langle \theta, \chi \rangle| = |\langle \theta', \chi' \rangle|$ .

**Теорема 1.3.1 (Вигнер).** *Каждая симметрия гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  является либо унитарным преобразованием  $U$ :  $\theta' = U\theta$ , либо антиунитарным оператором  $A$ :  $\theta' = A\theta$ .*

Этот результат показывает, что любую симметрию гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  можно рассматривать как представление какой-нибудь группы координатных преобразований. В частности, группа сдвигов по времени действует с помощью унитарной группы операторов  $U(t)$  в  $\mathcal{H}$ . Лишь некоторые дискретные симметрии (напри-

мер, обращение времени в нерелятивистской квантовой механике) представляются антиунитарными преобразованиями в  $\mathcal{H}$ .

Перейдем теперь ко второй части этого параграфа, в которой мы подробно рассмотрим случай нерелятивистской квантовой механики. При стандартном описании системы  $n$  частиц, движущихся в поле потенциала  $V$ , вводят гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = L_2(Q), \quad (1.3.5)$$

где  $Q = R^{3n}$  — конфигурационное пространство. Выбор гильбертова пространства в виде (1.3.5) называется шредингеровым представлением (не путать со шредингеровой картиной). Функция  $\psi(q) \in \mathcal{H}$  интерпретируется как плотность распределения вероятностей  $\rho(q) = |\psi(q)|^2$  положения частиц в пространстве  $Q$ .

Согласно РЗ, имеем

$$p_i = (\hbar/i) \nabla_{q_i}, \quad (1.3.6)$$

а гамильтониан вида

$$H = \sum_j (p_j^2/2m_j) + V(q) \quad (1.3.7)$$

превращается в эллиптический дифференциальный оператор

$$H = - \sum_j (\hbar^2/2m_j) \Delta_{q_j} + V(q). \quad (1.3.8)$$

Заметим, что (канонические) коммутационные соотношения

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j], \quad [p_i, q_j] = -i\hbar \delta_{ij} \quad (1.3.9)$$

подобны соотношениям (1.2.7), в которых скобки  $\{\cdot, \cdot\}$  заменены коммутатором  $[\cdot, \cdot] (i\hbar)^{-1}$ . Эти соотношения сохраняются при действии гейзенберговой динамики.

Представление (1.3.5) не позволяет учесть спин элементарных частиц, например нулевой спин у  $\pi$ -мезона (пиона), спин  $1/2$  у электрона, мюона, протона или нейтрона, спин  $1$  у фотона и более высокие значения спина у других частиц или ядер. Для того чтобы изучать взаимодействия, зависящие от спина (например, взаимодействие спинового магнитного момента с магнитным полем), мы должны вместо пространства (1.3.5) рассмотреть  $n$ -кратное тензорное произведение

$$\mathcal{H} = \otimes L_2(Q, S). \quad (1.3.10)$$

Здесь  $Q = R^3$ , а  $L_2$  — пространство функций, определенных на  $Q$ , со значениями в спиновом пространстве  $S$  конечной размерности. Для частиц с нулевым спином  $S = C$ , и именно этому случаю соответствует выбор пространства (1.3.5). Для частиц с ненулевым спином  $S = C^{2s+1}$ . Компоненты вектора  $\theta(q)$  в этом случае обозначим  $\theta(q, \zeta)$ . Группа вращений (генераторами которой служат операторы составляющих углового момента  $\mathbf{J}$ ) действует как на

переменную  $q$ , так и на индекс  $\xi$ , причем последний преобразуется с помощью  $n$ -кратного тензорного представления спиновой группы  $SU(2, R)$  (универсальной накрывающей группы вращений  $SO(3)$ ).

В физике принято считать, что частицы одного типа неразличимы. Другими словами, для системы из пяти одинаковых частиц, зная, что три из них находятся в области  $B$ , мы не можем точно сказать, какие именно эти три частицы. Поэтому чтобы построить теорию неразличимых частиц, мы должны ограничиться подмножеством в (1.3.10), инвариантным относительно действия неприводимого представления симметрической группы (т. е. группы перестановок из  $n$  элементов — координат частиц  $(q_i, \xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Для частиц с целым спином, например для  $\pi$ -мезонов или фотонов, всегда выбирают полностью симметричное представление, а для частиц с полуцелым спином, таких, как электроны, протоны или нейтроны, — полностью антисимметричное представление.

Выбор антисимметричного представления в задачах атомной и молекулярной физики для частиц со спином  $1/2$  называется принципом запрета Паули. Можно показать, что в квантовой теории поля для частиц с целым спином представление симметрической группы не может быть антисимметричным, а для частиц с полуцелым спином — симметричным. С другой стороны, не исключены более сложные представления (называемые парастатистиками). Впрочем, их существование не подтверждается никакими экспериментальными данными. Частицы с целым спином называются *бозонами*, а с полуцелым — *фермионами*.

**Постулат P4.** Состояние квантовомеханической системы симметрично относительно перестановок одинаковых бозонов и антисимметрично относительно перестановок одинаковых фермионов.

## 1.4 Интерпретация

Наиболее важные физические аспекты квантовой механики — это интерпретация гамильтониана  $H$  и предсказание о рассеянии частиц. В противоположность классическому гамильтониану, который всегда принимает непрерывное множество значений, квантовомеханический гамильтониан может иметь как дискретный, так и непрерывный спектр. При этом дискретные собственные значения соответствуют связанным состояниям системы, т. е., грубо говоря, тем, которые описывают движение частиц, постоянно находящихся в ограниченной области пространства. Непрерывному спектру соответствуют состояния рассеяния, которые описывают неограниченное разлетание частиц.

Рассмотрим простой случай (обсуждаемый подробнее в § 1.6 и 1.7) одной частицы в поле кулонова потенциала  $V = -1/r$ . В соответствии с классической механикой эта частица должна двигаться по эллиптической (в случае отрицательной энергии) или по



гиперболической (если энергия положительна) орбите. Согласно же квантовой механике, спектр гамильтониана состоит из бесконечного набора дискретных собственных значений  $E_n = -\alpha/n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\alpha$  — некоторая константа, и непрерывной части  $[0, +\infty)$ .

Дискретные собственные значения соответствуют возможным квантовомеханическим связанным состояниям с энергиями  $E_n$ . Собственный вектор, отвечающий уровню энергии  $E_1$ , называется основным состоянием, а собственные векторы, отвечающие уровням  $E_2, E_3, \dots$ , — соответственно вторым, третьим и т. д. возбужденными состояниями. В отсутствие внешних сил (например, электромагнитного поля) возбужденные состояния устойчивы, а при наличии внешних полей они, вообще говоря, становятся неустойчивыми. В качестве упрощенного примера рассмотрим взаимодействие частицы с внешним полем, в результате которого состояние с собственным значением  $E_m$  переходит в состояние с собственным значением  $E_n$ . В случае атома, взаимодействующего подобным образом с электромагнитным полем, происходит либо излучение света, т. е. фотона с частотой  $\nu = (E_m - E_n)/\hbar$ , если  $E_n < E_m$ , либо, наоборот, поглощение фотона такой частоты, если  $E_n > E_m$ . Наблюдаемые частоты излучения или поглощения всегда пропорциональны разностям уровней энергии в спектре гамильтониана  $H$ . До создания квантовой механики тот факт, что наблюдаемые спектральные линии могут быть представлены как разности уровней энергии, был известен и назывался *принципом Ритца*.

Состояния с положительной энергией, или состояния рассеяния, описывают рассеяние квантовомеханической частицы в поле притягивающего потенциала. Под воздействием внешнего возмущения частица может *захватываться* силовым центром и переходить из состояния с положительной энергией в состояние с энергией  $E_n < 0$ . Такой захват частицы сопровождается излучением фотонов, у которых наблюдаемые частоты и энергии заполняют непрерывный диапазон значений.

## 1.5 Простой гармонический осциллятор

Этот элементарный пример содержится в каждой книге по квантовой механике. В отличие от большинства квантовомеханических задач задача о гармоническом осцилляторе допускает явное решение в терминах элементарных функций (полиномов Эрмита) и гауссовых интегралов. На его примере некоторые общие принципы можно проиллюстрировать явными вычислениями. Многие свойства гармонического осциллятора переносятся и на другие квантовомеханические задачи, уже не сводящиеся к гауссовым состояниям. Простой гармонический осциллятор играет также важную роль в теории поля, потому что свободное квантовое поле можно представить как совокупность бесконечного числа гармонических

осцилляторов. Согласно этой картине, поле со взаимодействием можно представлять как набор ангармонических осцилляторов и рассматривать как ангармоническое возмущение гармонических осцилляторов.

Гамильтониан  $H$  простого осциллятора имеет тот же вид, что и энергия классического осциллятора:

$$H_{\text{osc}} = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kq^2.$$

Напомним, что в классическом случае частота колебаний осциллятора равна  $\mu = (k/m)^{1/2}$ . Для дальнейшего изложения удобно ввести безразмерные переменные

$$Q = (m\mu/\hbar)^{1/2} q, \quad P = (m\mu\hbar)^{-1/2} p, \quad H = (\hbar\mu)^{-1} H_{\text{osc}}; \quad (1.5.1)$$

в этих переменных

$$H = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \quad (1.5.2)$$

и

$$[P, Q] = \hbar^{-1} [p, q] = -i.$$

Мы рассматриваем шредингерово представление, в котором  $P = -i\hbar d/dy$ , а оператор  $Q$  в пространстве  $\mathcal{H} = L_2(dy)$  действует как умножение на независимую переменную  $y$ . В качестве области определения оператора  $H$ , как и остальных операторов этой главы, берется пространство Шварца  $\mathcal{S}$ . По определению  $\theta \in \mathcal{S}$ , если функция  $\theta$  и все ее производные быстро убывают на бесконечности. Все операторы, которые мы рассматриваем, например  $H$ ,  $P$ ,  $Q$ , отображают  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{H}$ , так что пространство Шварца  $\mathcal{S}$  является для них «инвариантной областью».

В этой главе мы изучим два фундаментальных свойства оператора  $H$ : полноту набора его собственных функций и то, что оператор  $e^{-iH}$  сохраняет положительность (т. е. переводит положительные функции в положительные). Мы проверим их прямым вычислением. Впоследствии при помощи более абстрактных методов удастся доказать подобные свойства для широкого класса потенциалов. Особенно важную роль играет положительность оператора  $e^{-iH}$ : она связана с единственностью основного состояния и интегральным представлением Фейнмана — Каца (гл. 3).

**Теорема 1.5.1.** *Оператор  $H$  существенно-самосопряжен и имеет спектр  $\hbar\mu(n + 1/2)$ . Резольвента оператора  $H_{\text{osc}}$  — компактный оператор.*

*Доказательство.* Определим операторы «рождения» и «уничтожения»  $A^*$  и  $A$  формулами

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q - iP), \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + iP); \quad (1.5.3)$$

при этом

$$[A, A^*] = 1. \quad (1.5.4)$$

Простые вычисления показывают, что

$$H = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) = A^*A + \frac{1}{2}. \quad (1.5.5)$$

Далее,

$$[H, A] = -A, \quad [H, A^*] = A^*. \quad (1.5.6)$$

Из (1.5.5) видно, что если вектор  $\Omega_0$  удовлетворяет уравнению  $A\Omega_0 = 0$ , то  $\Omega_0$  — собственный вектор оператора  $H$ , а именно  $H\Omega_0 = \frac{1}{2}\Omega_0$ . В шредингеровом представлении уравнение  $A\Omega_0 = 0$  записывается в виде

$$d\Omega_0/dy = -y\Omega_0. \quad (1.5.7)$$

Отсюда мы заключаем, что  $\Omega_0$  — это известное гауссово распределение:

$$\Omega_0(y) = \text{const } e^{-y^2/2} = \pi^{-1/4} e^{-y^2/2}, \quad (1.5.8)$$

где константа подобрана так, что  $\|\Omega_0\| = 1$ .

Из (1.5.6) следует, что, если  $\Omega_0$  — собственный вектор гамильтониана  $H$ , таков и вектор  $A^{*n}\Omega_0$ , причем

$$HA^{*n}\Omega_0 = A^{*n}H\Omega_0 + [H, A^{*n}]\Omega_0 = \left(\frac{1}{2} + n\right)A^{*n}\Omega_0. \quad (1.5.9)$$

Значит, спектр оператора  $H$  содержит точки  $(\frac{1}{2} + n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Чтобы закончить доказательство теоремы, осталось доказать полноту в пространстве  $L_2$  найденного набора собственных функций  $\{A^{*n}\Omega_0\}$ . Ниже, в предложении 1.5.7, мы дадим элементарное доказательство этого хорошо известного факта. Заметим, что найденные собственные функции — элементы пространства  $\mathcal{P}$ . Следовательно, оператор  $H$  существенно-самосопряжен на  $\mathcal{P}$ <sup>1)</sup>. Другими словами, существует единственный самосопряженный оператор (обозначим его тоже  $H$ ), который совпадает с  $H$  на его области определения  $\mathcal{P}$ .

Перейдем теперь к изучению некоторых свойств собственных функций. Их нормировка определяется из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \langle \Omega_0, A^n A^{*n} \Omega_0 \rangle &= \langle \Omega_0, A^{n-1} [A, A^{*n}] \Omega_0 \rangle = \\ &= n \langle \Omega_0, A^{n-1} A^{*n-1} \Omega_0 \rangle = \dots = n!, \end{aligned}$$

так что

$$\Omega_n = (n!)^{-1/2} A^{*n} \Omega_0 \quad (1.5.10)$$

— нормированные собственные функции. Мы будем называть состояние  $\Omega_n$  осциллятора  $n$ -частичным или  $n$ -квантовым состоянием,

<sup>1)</sup> Симметрический оператор  $H$ , определенный на плотном множестве  $\mathcal{D}$ , называется существенно-самосопряженным, если  $H^{**} = H$ . Это условие эквивалентно тому, что числа  $\pm i$  не являются собственными значениями оператора  $H^*$  или что образ  $\text{Im}(H \pm i)$  является плотным. Если оператор  $H$  имеет плотное множество собственных функций  $\Omega_n \in \mathcal{D}$ , то он существенно-самосопряжен. В самом деле, пусть функция  $\chi$  из области определения оператора  $H^*$  является решением уравнения  $H^*\chi = i\chi$ ; тогда

$$0 = \langle (H^* - i)\chi, \Omega_n \rangle = \langle \chi, (H + i)\Omega_n \rangle = \langle \chi, \Omega_n \rangle (E_n + i).$$

Итак,  $\langle \chi, \Omega_n \rangle = 0$  для всех  $n$ , и, в силу полноты множества собственных функций  $\Omega_n$ , получаем, что  $\chi = 0$ . ■

считая, что каждый квант энергии равен  $\hbar\mu$ . Соотношения

$$A^* \Omega_n = \sqrt{n+1} \Omega_{n+1}, \quad A \Omega_n = \sqrt{n} \Omega_{n-1}, \quad A^* A \Omega_n = n \Omega_n \quad (1.5.11)$$

можно интерпретировать следующим образом. Оператор  $A^*$ , действуя на состояние  $\Omega_n$ , добавляет к нему одну частицу, или один квант, и тем самым увеличивает энергию состояния на величину  $\hbar\mu$ . Сопряженный оператор  $A$ , наоборот, поглощает или уничтожает квант. Полная энергия равна  $\hbar\mu/2 + \hbar\mu \cdot n$ , где  $n$  — число квантов. Для произвольного состояния  $\theta$  имеем  $\theta = \sum c_n \Omega_n$ , где  $|c_n|^2$  — вероятность наличия  $n$  квантов и  $\langle \theta, A^* A \theta \rangle = \sum n |c_n|^2$  — среднее число квантов в состоянии  $\theta$ . Поэтому оператор  $A^* A$  называется оператором числа частиц.

В шредингеровом представлении волновые функции  $\Omega_n(y)$ , как мы увидим ниже, совпадают с нормированными полиномами Эрмита. Пусть  $P_n(x)$  обозначает  $n$ -й полином Эрмита, т. е.

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} x^{n-2j}, \quad (1.5.12)$$

где  $[n]$  — целая часть числа и

$$c_{n,j} = n! [(n-2j)! 2^j j!]. \quad (1.5.13)$$

**Лемма 1.5.2.**  $(x - d/dx) P_n = P_{n+1}$ .

*Доказательство.* Левая часть равна

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} [x^{n+1-2j} - (n-2j) x^{n+1-2(j+1)}]. \quad (1.5.14)$$

Заметим, что

$$c_{n,j} = \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) c_{n+1,j} = \frac{2(j+1)}{(n+1)(n-2j)} c_{n+1,j+1}.$$

Подставим эти тождества в разложение (1.5.14). Переобозначив индексы, получим представление (1.5.12) полинома  $P_{n+1}$ . ■

**Лемма 1.5.3.** *Обращением (1.5.12) служит формула*

$$x^n = \sum_{j=0}^{[n/2]} c_{n,j} P_{n-2j}(x). \quad (1.5.15)$$

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией. При  $n=0$  лемма верна. Предположим, что утверждение доказано при  $n \leq r$ . Тогда, в силу леммы 1.5.2,

$$x^{r+1} = \sum_{j=0}^{[r/2]} c_{r,j} x \cdot P_{r-2j}(x) = \sum_{j=0}^{[r/2]} c_{r,j} \left( P_{r+1-2j}(x) + \frac{d}{dx} P_{r-2j}(x) \right).$$

Воспользовавшись предположением индукции, получим сначала, что члены с производной в сумме дают одночлен  $rx^{r-1}$ , который можно разложить по полиномам

Эрмита вновь с учетом предположения индукции. В результате получим

$$x^{r+1} = \sum_{j=0}^{[r/2]} c_{r,j} P_{r+1-2j}(x) + \sum_{j=1}^{[(r+1)/2]} r c_{r-1, j-1} P_{r+1-2j}(x).$$

Заметим, что  $c_{r+1, j} = c_{r, j} + r c_{r-1, j-1}$  при  $j \leq [r/2]$ , и если  $r$  нечетно, а  $j = (r+1)/2$ , то  $c_{r+1, j} = r c_{r-1, j-1}$ . Поэтому  $x^{r+1} = \sum_{j=0}^{[(r+1)/2]} c_{r+1, j} P_{r+1-2j}(x)$ . ■

**Предложение 1.5.4.**  $(A^{*n} \Omega_0)(y) = P_n(\sqrt{2} y) \Omega_0(y)$ ,  
 $\Omega_n(y) = n!^{-1/2} P_n(\sqrt{2} y) \Omega_0(y)$ .

*Доказательство.* Опять воспользуемся индукцией. При  $n = 0$  утверждение верно. Пусть оно доказано для некоторого фиксированного  $n$ . Используя (1.5.10), получим

$$\Omega_{n+1} = (n+1)^{-1/2} A^* \Omega_n = (n+1)^{-1/2} A^* P_n(\sqrt{2} y) \Omega_0(y).$$

В силу (1.5.3),  $A^* = 2^{-1/2}(y - d/dy)$ , поэтому

$$\Omega_{n+1} = (n+1)^{-1/2} \left[ 2^{1/2} y P_n(\sqrt{2} y) - 2^{-1/2} \frac{dP_n(\sqrt{2} y)}{dy} \right] \Omega_0(y).$$

Из леммы 1.5.2 следует, что  $\Omega_{n+1} = (n+1)^{-1/2} P_{n+1}(\sqrt{2} y) \Omega_0$ . Тем самым индукция завершена. ■

Оператор  $P_n(\sqrt{2} Q) = \sum (-1)^j c_{n,j} (\sqrt{2} Q)^{n-2j}$  в шредингеровом представлении в пространстве  $\mathcal{H} = L_2(dy)$  является оператором умножения на функцию  $P_n(\sqrt{2} y)$ .

Теперь определим «упорядоченные мономы Вика» от переменной  $Q$  формулами

$$\begin{aligned} :Q^n: &= 2^{-n/2} P_n(\sqrt{2} Q) = Q^n + \text{полином степени } (n-2) = \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} 2^{-j} Q^{n-2j}. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

На полиномы от  $Q$  это определение распространяется по линейности. Мономы Вика  $:Q^n:$  — это полиномы степени  $n$ . Они ортогональны при интегрировании по гауссовой мере

$$d\varphi = \Omega_0^2 dy = \pi^{-1/2} e^{-y^2} dy. \quad (1.5.17)$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} \int :Q^n: :Q^m: d\varphi &= \langle \Omega_0, :Q^n: :Q^m: \Omega_0 \rangle = \\ &= 2^{-(n+m)/2} \langle A^{*n} \Omega_0, A^{*m} \Omega_0 \rangle = 2^{-n} n! \delta_{nm}. \end{aligned}$$

**Предложение 1.5.5.** На области, являющейся линейной оболочкой собственных функций  $\Omega_n$ , имеет место равенство

$$:Q^n: = 2^{-n/2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^{*j} A^{n-j}. \quad (1.5.18)$$

**Замечание.** Эта формула есть не что иное, как биномиальное разложение для  $Q^n = 2^{-n/2}(A^* + A)^n$ , переписанное так, что каждый оператор рождения  $A^*$  стоит слева от оператора уничтожения  $A$  (т. е. в виковом упорядочении). Можно проанализировать эти формулы на языке диаграмм. При этом оказывается, что коэффициент  $c_{n,j}$  равен числу способов выбора  $j$  неупорядоченных пар из  $n$  элементов.

**Доказательство.** Обозначим правую часть равенства (1.5.18) через  $L$ . На пространстве  $\mathcal{F}$

$$[Q, L] = 2^{-(n+1)/2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \{jA^{*j-1}A^{n-j} - (n-j)A^*jA^{n-j-1}\} = 0.$$

Поэтому  $[P, (\sqrt{2}Q), L] = 0$ . Воспользовавшись определением (1.5.16) и предложением 1.5.4, получаем

$$0 = \{ :Q^n : - L \} \Omega_0 = r^{1/2} P_r(\sqrt{2}Q) \{ :Q^n : - L \} \Omega_0 = \{ :Q^n : - L \} \Omega_r. \blacksquare$$

**Предложение 1.5.6.** Векторы  $\chi_v = e^{ivQ}\Omega_0$ , где  $v$  вещественно, порождают пространство  $L_2$ .

**Доказательство.** Предположим, что вектор  $\theta \in L_2$  ортогонален  $\chi_v$ . Тогда

$$0 = \langle \theta, \chi_v \rangle = \langle \theta e^{-Q^2/2}, v \rangle.$$

Так как преобразование Фурье — унитарный оператор в  $L_2$ , то  $\theta e^{-Q^2/2} = 0$ . Следовательно,  $\theta = 0$  и, значит,  $\chi_v$  порождают  $L_2$ .  $\blacksquare$

**Предложение 1.5.7.** Нормированные полиномы Эрмита  $\Omega_n(y)$  образуют полное ортонормированное множество в пространстве  $L_2$ .

**Доказательство.** Покажем, что векторы  $\chi$  принадлежат линейной оболочке векторов  $\Omega_n$ . После этого утверждение будет вытекать из предложения 1.5.6. Обращение формулы (1.5.16) получается с помощью (1.5.15):

$$Q^n = \sum_{j=0}^{[n/2]} c_{n,j} 2^{-j} :Q^{n-2j}:, \quad (1.5.19)$$

поэтому  $Q^n\Omega_0$  лежит в линейной оболочке векторов  $\Omega_n$ , а именно

$$Q^n\Omega_0 = \sum_{j=0}^{[n/2]} c_{n,j} 2^{-n/2} (n-2j)!^{1/2} \Omega_{n-2j}. \quad (1.5.20)$$

Далее,

$$\|Q^n\Omega_0\|^2 = \sum_{j=0}^{[n/2]} c_{n,j}^2 2^{-n} (n-2j)! = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(n!)^2}{(n-2j)! (j!)^2 2^{2j+n}} \leq O(1) n!,$$

поэтому ряд  $\chi_v = \sum_{n=0}^{\infty} (ivQ)^n (n!)^{-1} \Omega_0$  сходится в  $L_2$ .  $\blacksquare$

**Предложение 1.5.8.** Для любого комплексного  $v$  ряды, определяющие экспоненту, сходятся, и имеет место равенство

$$e^{vQ}\Omega_r = e^{v^2/4} e^{vA^*} / \sqrt{2} e^{vA} / \sqrt{2} \Omega_r. \quad (1.5.21)$$

*Доказательство.* Сходимость рядов при  $r = 0$  следует из (1.5.20). В силу равенств (1.5.16) и (1.5.19),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (vQ)^n n!^{-1} \Omega_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[n/2]} v^n n!^{-1} c_{n,j} 2^{-n/2} A^{*n-2j} \Omega_0 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{v^{2j} \cdot v^{n-2j}}{2^{2j} j! (n-2j)! 2^{(n-2j)/2}} A^{*n-2j} \Omega_0 = \\ &= e^{v^{2/4}} e^{vA^* / \sqrt{2}} \Omega_0 = e^{v^{2/4}} e^{vA^* / \sqrt{2}} e^{vA / \sqrt{2}} \Omega_0. \end{aligned}$$

Далее,  $f(v) \equiv e^{vA^*} A e^{-vA^*} = f(0) + v f'(0) = A - v$ , поскольку  $f^{(n)}(v) = 0$  при  $n \geq 2$ . Отсюда получаем, что  $e^{vA^*} A = (A - v) e^{vA^*}$  и  $[Q, e^{vA^*} e^{vA}] \Omega_0 = 0$ . Умножение на  $(r!)^{-1/2} P_r(\sqrt{2} Q)$  завершает доказательство сходимости ряда для экспоненты при  $r \neq 0$  и дает формулу (1.5.21). ■

Заметим, что равенство (1.5.21) — это формула типа

$$e^{R+S} = e^R e^S e^{-[R, S]/2}, \quad [R, S] = \alpha I,$$

справедливая во всяком случае для ограниченных операторов  $R$  и  $S$ , таких, что их коммутатор кратен единичному оператору. Чтобы не заботиться об областях определения рассматриваемых операторов, мы дали прямое доказательство равенства (1.5.21). А вообще говоря, оно следует из того, что функция

$$f(\lambda) = e^{\lambda(R+S)} e^{-\lambda S} e^{-\lambda R} e^{\lambda^2 [R, S]/2}$$

удовлетворяет уравнению первого порядка  $f'(\lambda) = 0$ ,  $f(0) = I$ , единственным решением которого служит  $f(\lambda) \equiv I$ .

Выше мы уже отмечали, что если доказана полнота некоторого данного семейства собственных функций, то при доказательстве полноты такого семейства у широкого класса гамильтонианов можно использовать некоторые абстрактные критерии. В частности, можно показать, что у гамильтонианов  $H_1$  более общего вида, чем гамильтониан  $H_{\text{osc}}$  гармонического осциллятора, возможны лишь дискретные собственные значения. Это верно, например, в случае гамильтониана ангармонического осциллятора

$$H_1 = H_{\text{osc}} + \lambda q^4 - \mu q + \text{const.}$$

**Теорема 1.5.9.** Пусть  $H$  и  $H_1$  — самосопряженные операторы и

$$0 \leq H \leq \text{const} \cdot H_1. \quad (1.5.22)$$

Тогда оператор  $H_1$  имеет компактную резольвенту и полное множество собственных функций, при условии что этими свойствами обладает оператор  $H$ .

*Доказательство.* Из (1.5.22) следует, что оператор  $B = H^{1/2} H_1^{-1/2}$  ограничен. Поэтому оператор  $H_1^{-1/2} = H^{-1/2} B$  есть произведение ограниченного и компактного операторов и, следовательно, тоже компактен. Отсюда вытекает компактность резольвенты и полнота системы собственных функций. ■

Эта теорема иллюстрирует важность априорной оценки (1.5.22) при сравнении двух операторов: более сложного оператора  $H_1$ , про который ничего не известно, с простым конкретным оператором  $H_{osc}$ .

Перейдем теперь ко второму важному свойству оператора  $H$ , состоящему в том, что в шредингеровом представлении  $e^{-tH}$  является интегральным оператором с положительным ядром  $p_t(y, y')$ :

$$(e^{-tH}\theta)(y) = \int p_t(y, y')\theta(y') dy'. \quad (1.5.23)$$

Для того чтобы это ядро сохраняло гауссово вероятностное распределение (см. ниже формулу (1.5.22)), необходимо перенормировать оператор  $H$ , задаваемый равенством (1.5.2), и положить  $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) - \frac{1}{2} = A^*A$ .

**Теорема 1.5.10.** Ядро оператора  $e^{-tH}$  обладает свойствами

$$p_t(y, y') = p_t(y', y) > 0, \quad (1.5.24)$$

$$\int p_t(y, y') \exp\left\{\frac{1}{2}(y^2 - y'^2)\right\} dy' = 1. \quad (1.5.25)$$

В частности, явное выражение для него дается формулой Мелера

$$p_t(y, y') = \pi^{-1/2}(1 - e^{-2t})^{-1/2} \exp\left(-\frac{y^2 - y'^2}{2} - \frac{(e^{-t}y - y')^2}{1 - e^{-2t}}\right). \quad (1.5.26)$$

*Доказательство.* Симметричность ядра — следствие определения (1.5.23) и симметричности оператора  $H$  (кроме того, она вытекает из (1.5.26)). Свойство (1.5.25) означает, что  $e^{-tH}\Omega_0 = \Omega_0$ , поэтому для его доказательства достаточно показать, что  $H\Omega_0 = 0$ . Последнее равенство верно в силу сделанной перенормировки гамильтониана. Положительность ядра  $p_t$  следует из формулы Мелера, к доказательству которой мы сейчас перейдем. Воспользовавшись (1.5.21), получаем, что

$$\begin{aligned} e^{-tH}\chi_v &= e^{-tH}e^{ivQ}\Omega_0 = e^{-tH}e^{-v^2/4}e^{ivA^*/\sqrt{2}}\Omega_0 = \\ &= e^{-v^2/4}e^{ive^{-t}A^*/\sqrt{2}}\Omega_0 = \exp[-v^2(1 - e^{-2t})/4] \exp[ive^{-t}Q]\Omega_0. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу определения ядра (1.5.23), имеем

$$\int p_t(y, y') e^{-y'^2/2} e^{iv y'} dy' = \exp\left(-v^2 \frac{1 - e^{-2t}}{4} + ive^{-t}y - \frac{y^2}{2}\right).$$

Теперь для того, чтобы закончить доказательство, надо сделать обратное преобразование Фурье по переменной  $v$ . После умножения на  $(2\pi)^{-1}e^{-iv y'}$  правую часть последнего равенства можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \exp\left[\left(\frac{e^{-t}y - y'}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} + iv \frac{\sqrt{1 - e^{-2t}}}{2}\right)^2 - \frac{(e^{-t}y - y')^2}{1 - e^{-2t}}\right] \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Сдвинув вещественную прямую (контур интегрирования) на комплексное число, перейдем к интегралу вида  $\int e^{-av^2/2} dv = (2\pi)^{1/2}a^{-1/2}$ . В результате получим формулу (1.5.26). ■



В общем случае обычно переходят к представлению  $\mathcal{H} = L_2(d\varphi(y))$ , где  $d\varphi(y) = \Omega_0^2 dy$  (см. (1.5.17)), в котором основному состоянию соответствует функция, тождественно равная 1. Тогда остальные состояния будут представлены функцией  $\Omega_0(y)^{-1} = \pi^{1/4} e^{y^2/2}$ , умноженной на их шредингерово представление. В этом представлении ядро оператора  $e^{-tH}$  определяется формулой

$$(e^{-tH}\theta)(y) = \int \mathcal{H}_t(y, y') \theta(y') d\varphi(y'),$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathcal{H}_t(y, y') &= \Omega_0(y)^{-1} p_t(y, y') \Omega_0(y')^{-1} = \\ &= (1 - e^{-2t})^{-1/2} \exp\left(y'^2 - \frac{(e^{-t}y - y')^2}{1 - e^{-2t}}\right). \end{aligned}$$

## 1.6 Кулонов потенциал

В атомной физике основным потенциалом является кулонов потенциал. Он описывает электромагнитное взаимодействие электронов и ядер, образующих атомы и молекулы.

В случае двух частиц (атом водорода) уравнение Шредингера допускает решение в элементарных функциях. В случае же большего числа частиц можно получить только оценки и выполнить приближенные вычисления.

Рассмотрим гамильтониан  $H_N$  системы  $N$  частиц с массами  $m_i$ , зарядами  $e_i$ , импульсами  $p_i$  и координатами  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} p_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{e_i e_j}{|q_i - q_j|}. \quad (1.6.1)$$

Потенциал  $V = \sum_{i < j} e_i e_j / |q_i - q_j|$  отвечает сумме парных кулоновых взаимодействий.

**Теорема 1.6.1.** *Гамильтониан  $H_N$ , задаваемый выражением (1.6.1), является существенно-самосопряженным оператором в тензорном произведении  $N$  экземпляров пространства  $L_2(R^3)$ . В случае частиц одинаковой массы антисимметрическое подпространство инвариантно относительно этого оператора.*

**Замечание.** Этот важный результат Като в случае двух частиц легко сводится к некоторым оценкам. Ради простоты мы будем рассматривать только этот случай  $N = 2$ . После перехода к координатам центра масс частиц и их относительным координатам гамильтониан  $H_2$  переписывается в виде

$$H_2 = \frac{1}{2M} P^2 + \frac{1}{2\mu} p^2 + \frac{e_1 e_2}{|q|}. \quad (1.6.2)$$

Здесь канонические координаты центра масс равны

$$Q = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}, \quad P = p_1 + p_2, \quad (1.6.3)$$

а (канонические) относительные координаты находятся по формулам

$$q = q_1 - q_2, \quad p = \mu \dot{q} = \frac{\mu}{m_1} p_1 - \frac{\mu}{m_2} p_2, \quad (1.6.4)$$

где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса. Для того чтобы доказать самосопряженность оператора  $H_2$ , запишем  $1/|q| \in L_\infty + L_2$ , т. е.

$$\frac{1}{|q|} = \frac{1}{|q|} (1 - \chi(q)) + \frac{1}{|q|} \chi(q),$$

где  $\chi$  — характеристическая функция множества  $|q| \leq 1$ . Нам понадобится следующая

**Теорема 1.6.2.** Пусть функция  $V(q)$ ,  $q \in \mathbb{R}^3$ , равна сумме функций из  $L_2$  и  $L_\infty$ . Тогда оператор  $-\Delta + V$ , рассматриваемый на области  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \subset L_2(\mathbb{R}^3)$ , существенно-самосопряжен.

**Лемма 1.6.3.** Пусть  $A$  — существенно-самосопряженный оператор с областью определения  $\mathcal{D}(A)$ , а  $B$  — симметрический оператор с областью определения  $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ . Предположим, что для некоторых констант  $a < 1$  и  $b$  верно неравенство

$$\|B\theta\| \leq a\|A\theta\| + b\|\theta\|, \quad \theta \in \mathcal{D}(A). \quad (1.6.5)$$

Тогда  $A + B$  есть существенно-самосопряженный оператор с областью определения  $\mathcal{D}(A)$ .

*Доказательство.* Мы покажем, что для достаточно больших  $y$  образ оператора  $A + B \pm iy$  плотен в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . С помощью разложения в ряд Неймана устанавливается существование оператора  $(I + B(A \pm iy)^{-1})^{-1}$  как ограниченного оператора в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Так как

$$(A + B \pm iy)(A \pm iy)^{-1} = I + B(A \pm iy)^{-1},$$

то, умножив обе части равенства справа на  $(I + B(A \pm iy)^{-1})^{-1}$ , получим утверждение о плотности образа оператора  $(A + B \pm iy)$ . Для доказательства сходимости ряда Неймана

$$(I + B(A \pm iy)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [-B(A \pm iy)^{-1}]^n,$$

надо получить оценку

$$\|B(A \pm iy)^{-1}\| < 1. \quad (1.6.6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|B(A \pm iy)^{-1}\theta\| &\leq a\|A(A \pm iy)^{-1}\theta\| + b\|(A \pm iy)^{-1}\theta\| \leq \\ &\leq (a + b/y)\|\theta\|. \end{aligned}$$

Отсюда при  $a + b/y < 1$  получаем оценку (1.6.6). ■

**Замечание.** Если оператор  $A$  ограничен снизу, то, выбирая в приведенных выше рассуждениях  $y < 0$  и большим по абсолютной величине, мы докажем полуограниченность оператора  $A + B$ .

**Лемма 1.6.4.** Пусть  $f \in L_2(R^3)$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует такое  $b < \infty$ , что для  $\theta \in \mathcal{P}(R^3)$

$$\|f\theta\|_2 \leq \varepsilon \|\Delta\theta\|_2 + b \|\theta\|_2.$$

*Доказательство.* Оценка доказывается с помощью преобразования Фурье. Пусть  $\|\cdot\|_p$  обозначает  $L_p$ -норму. Для  $0 < \delta < 1/2$  верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|f\theta\|_2 &\leq \|f\|_2 \|\theta\|_\infty \leq \|f\|_2 \|\tilde{\theta}\|_1 \leq \\ &\leq \|f\|_2 \|(1+p^2)^{-3/4-\delta}\|_2 \|(1+p^2)^{3/4+\delta}\tilde{\theta}\|_2 \leq \varepsilon \|\Delta\theta\|_2 + b \|\theta\|_2. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что при  $\alpha < 1$ ,  $x \geq 0$  справедлива элементарная оценка  $x^\alpha \leq \varepsilon x + b(\varepsilon)$ .

*Доказательство теоремы 1.6.2.* Пусть  $V = f_1 + f_2$ , где  $f_1 \in L_2$ ,  $f_2 \in L_\infty$ . По лемме 1.6.4 имеем

$$\|V\theta\|_2 \leq \|f_1\theta\|_2 + \|f_2\theta\|_2 \leq \varepsilon \|\Delta\theta\|_2 + (b + \|f_2\|_\infty) \|\theta\|_2.$$

Поэтому, в силу леммы 1.6.3, оператор  $-\Delta + V$  существенно-самосопряжен. ■

Заметим, что умножение на вещественную функцию  $V \in L_{3/2+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , вообще говоря, не определяет оператор на  $\mathcal{P}$ . Однако такая функция задает билинейную форму на  $\mathcal{P}$ . При этом рассуждения, основанные на разложении в ряд Неймана, показывают, что билинейная форма  $-\Delta + V$  однозначно определяет самосопряженный оператор. Более важное применение теории возмущения билинейных форм относится к уравнению Дирака с кулоновым потенциалом. Уравнение Дирака описывает релятивистский электрон, и с его помощью можно вычислить поправки к собственным значениям для гамильтониана (1.6.1). При больших  $N$  теория возмущений билинейных форм для уравнения Дирака не работает. Второй и более серьезный недостаток уравнения Дирака состоит в том, что его спектр не ограничен снизу.

Утверждение о том, что оператор  $H_N$  ограничен снизу, следует из замечания, сделанного после доказательства леммы 1.6.3. Важный результат о зависимости оценки  $H_N$  от  $N$  получен в работе [Dyson, Lepard, 1967—8]. Он связан с существованием предела при  $N \rightarrow \infty$  (устойчивость вещества в термодинамическом пределе), доказанным в статье [Lieb, Lebowitz, 1972]. См. также [Lieb, Thirring, 1975] и [Lieb, Simon, 1977a, b].

**Теорема 1.6.5.** Пусть  $|e_i|$ ,  $m_i \leq M$ . Тогда найдется такая постоянная  $B$ , что  $H_N + NB \geq 0$ .

Спектр оператора  $H_N$  удобнее изучать в подпространстве, в котором определено значение полного импульса  $P$ . Физически это означает, что мы фиксируем движение центра масс системы,

В этом подпространстве оператор  $H_N$  имеет как дискретный, так и непрерывный спектр. Собственные векторы, отвечающие дискретным собственным значениям, называют обычно  $N$ -частичными связанными состояниями. При подходящем выборе зарядов  $e_i$  и масс  $m_i$  эти векторы описывают движение  $N-1$  электронов в атоме либо в основном, либо в одном из возбужденных состояний. Состояния непрерывного спектра называются состояниями рассеяния. В этих состояниях один или несколько электронов свободны (не связаны), в то время как остальные частицы образуют однократно или многократно ионизованный атом. В качестве непрерывного параметра, от которого зависит спектр, выбирается импульс относительного движения свободного электрона (или нескольких электронов) и ионизованных атомов.

Случай  $N = 2$  — это хорошо изученный случай атома водорода. Собственные функции в этой модели могут быть найдены в явном виде; например, в шредингеровом представлении

$$\psi = L_n(r/a) P_n^l(\theta, \varphi) e^{-r/a}, \quad (1.6.7)$$

где  $L_n$  есть  $n$ -й полином Лагерра,  $P_n^l$  — сферические гармоники,  $a$  — некоторая постоянная. Обобщенные собственные функции, отвечающие непрерывному спектру, тоже могут быть вычислены явно и тоже содержат полиномы Лагерра. Задаче о рассеянии двух частиц посвящена обширная математическая литература. В этой теории рассматриваются потенциалы вида  $V + 1/|q|$ . (Вообще говоря,  $V$  убывает на бесконечности быстрее, чем  $1/|q|$ .) Эта задача уже не решается в явном виде. В качестве примеров потенциалов, встречающихся в физических задачах, назовем потенциал Юкавы  $V(q) \sim e^{-m|q|}/|q|$  и потенциал Леннард-Джонса  $V(q) = \alpha|q|^{-12} - \beta|q|^{-6}$ ,  $\alpha, \beta > 0$ . Потенциал Юкавы описывает ядерные взаимодействия в нерелятивистском приближении, а потенциал Леннард-Джонса используется для приближенного описания взаимодействия между молекулами. Межмолекулярные силы электромагнитны по своей природе и, значит, в принципе могут быть выведены из кулонова взаимодействия. Ядерные силы управляют взаимодействием мезонов, нейтронов и протонов. Их нерелятивистское приближение  $V \sim e^{-m|q|}/|q|$  выводится из релятивистской квантовой теории поля, например, с взаимодействием  $\lambda\phi^4 + \psi^\dagger\psi\phi$ .

Случай  $N = 3$  — это атом гелия. Существование большого числа связанных состояний в этой модели было доказано в работе [Kato, 1951b]. Теория, развитая в работе [Фаддеев, 1963], допускает лишь достаточно регулярные потенциалы и не применима к кулонову взаимодействию. В ней построены состояния рассеяния для задачи трех частиц и доказана так называемая асимптотическая полнота. Асимптотическая полнота означает, что связанные со-

стояния вместе с состояниями рассеяния (т. е. состояниями ионизованного атома) полны в пространстве  $\mathcal{H} = L_2(R^{3N})$ , а в случае неразличимых частиц — в некотором симметрическом или антисимметрическом подпространстве этого гильбертова пространства. Упомянутая теория была распространена на случай произвольного  $N$  в работах [Hepp, 1969a], [Sigal, 1978] и [Hagedorn, 1980]. Задача асимптотической полноты в этом случае рассматривалась многими авторами и для разных классов потенциалов, однако для кулонова потенциала все еще нет полного математического обоснования. И тем не менее спектр оператора  $H_N$  можно описать, опираясь на формальный анализ, теорию возмущений и экспериментальные данные. Связанные состояния атома с  $N - 1$  электронами можно описать приближенно. Качественная картина приводит и к объяснению периодической таблицы химических элементов, и к объяснению спектральных линий поглощения и излучения света атомами. Для получения приближенной картины пренебрегают, например, отталкивающим электрон-электронным взаимодействием. Тогда оператор  $H_N$ , действующий в пространстве  $L_2(R^{3N})$ , превращается в прямую сумму операторов, отвечающих атому водорода, и, значит, имеет точное решение. Результатом антисимметризации является принцип запрета Паули: собственное состояние оператора  $H_N$  — это тензорное произведение  $N - 1$  связанных состояний атома водорода, по одному для каждого из  $N - 1$  электронов, и все электроны должны быть в различных состояниях. Если  $N$  не слишком велико, то электрон-электронное взаимодействие можно учесть, пользуясь приближенными методами теории возмущений.

Состояния рассеяния при  $N \geq 3$  описываются с помощью кластеров. Кластером называется подмножество системы  $N$  частиц, а кластерное разбиение — это разбиение системы  $N$  частиц на кластеры. Состояние рассеяния, отвечающее данному кластерному разбиению — это состояние, в котором частицы из одного кластера все время остаются вблизи друг от друга (т. е. образуют связанное состояние), а разные кластеры отделены друг от друга и движутся независимо. В случае одного атома единственно возможными кластерными разбиениями являются разбиения на однократно или многократно ионизованный атом и соответственно один или несколько свободных электронов. Это объясняется тем, что из-за сил отталкивания не существует связанных состояний, образованных двумя или несколькими электронами. В случае нескольких атомов (или молекулы) для образования кластеров, вообще говоря, больше возможностей. Например, для молекулы воды допустимы кластерные разложения:  $\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2 + \text{O}$  и  $\text{H} + \text{H} + \text{O}$ , а также образование ионизованных состояний, в которых отдельные составляющие теряют или приобретают один или несколько электронов, например  $\text{H}^+ + \text{OH}^-$ .

## 1.7 Атом водорода

Простейший атом — это атом водорода, состоящий из электрона и протона. Шредингеров гамильтониан  $H$ , который описывает атом водорода, имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_{x_1} - \frac{\hbar^2}{2m_p}\Delta_{x_2} - \frac{e^2}{|x_1 - x_2|}. \quad (1.7.1)$$

Здесь  $m_e$ ,  $m_p$  — массы электрона и протона,  $x_1$ ,  $x_2$  — их координаты, а  $-e$  и  $e$  соответственно электрический заряд. В вычислениях заряд часто встречается в безразмерной комбинации, которая называется постоянной тонкой структуры

$$\alpha = e^2/\hbar c = (137,035963 \pm 0,000015)^{-1}. \quad (1.7.2)$$

Массе покоя  $m_e$  электрона соответствует энергия покоя, равная

$$\mu_e = m_e c^2 = 0,5110034 \pm 0,0000014 \text{ МэВ}, \quad (1.7.3)$$

где  $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$ ; аналогично у приведенной массы  $m_r = m_e m_p / (m_e + m_p)$  энергия покоя равна

$$\mu_r = (1 + m_e/m_p)^{-1} \mu_e = 0,999449819 \mu_e. \quad (1.7.4)$$

После выделения из (1.7.1) энергии движения центра масс (более общее рассуждение см. в § 13.2) останется гамильтониан, отвечающий относительно движению электрона и протона. Это гамильтониан одной частицы массы  $m_r$ , движущейся в поле потенциала  $-e^2/|x|$ :

$$H = -(\hbar^2/2m_r)\Delta - e^2/|x|. \quad (1.7.5)$$

Гамильтониан  $H$  имеет собственные значения  $E_n$  кратности  $n^2$ , равные

$$E_n = \mu \alpha^2 / 2n^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.7.6)$$

При  $n = 1$  энергия основного состояния равна

$$E_1 = -13,5983 \text{ эВ}. \quad (1.7.7)$$

Это есть взятая со знаком «—» энергия ионизации атома водорода. Другими словами, энергии  $13,6 \text{ эВ}$  достаточно, чтобы отщепить электрон от протона.

Как объяснялось в § 1.4, разность энергий  $E_n - E_m = h\nu$  определяет частоту  $\nu$  испускаемого света, поэтому спектроскопические измерения иногда выражают в волновых числах, т. е. величинах, обратных длине волны:

$$\lambda^{-1} = \nu/c = (E_n - E_m)/hc. \quad (1.7.8)$$

Так как  $hc = 12,39852 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{см}$ , то в этих единицах приведенное выше значение  $E_1$  равно

$$-E_1/hc = 109\,677 \text{ см}^{-1}. \quad (1.7.9)$$

На самом деле благодаря точности спектроскопических измерений  $E_1$  может быть вычислено с огромнейшей точностью, например с точностью до  $10^{-8}$ .

Наблюдаемые спектральные линии атома водорода расклассифицированы различными методами. Переход от  $n > 1$  к уровню  $n = 1$  называется серией (рядом) Лаймана, от  $n > 2$  к  $n = 2$  — серией Бальмера и т. д., см. рис. 1.2

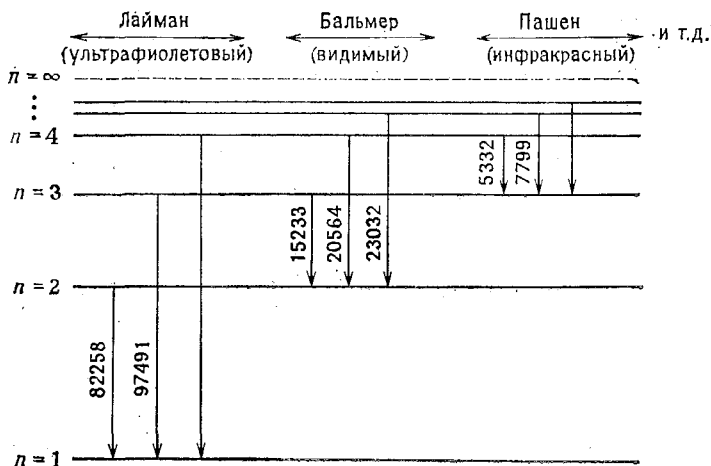


Рис. 1.2. Наблюдаемые переходы в атоме водорода с указанием некоторых волновых чисел в  $\text{см}^{-1}$ . Частоты получаются умножением на  $c = 2,99792458 \times 10^{10} \text{ см. с}^{-1}$ .

Утверждение о том, что собственные значения  $E_n$  имеют кратность  $n^2$ , следует из анализа неприводимых унитарных представлений группы вращений  $SO(3)$  трехмерного пространства, которые действуют в пространстве  $L_2(R^3)$  и оставляют инвариантным гамильтониан  $H$ . Такие представления  $\mathcal{D}^{(j)}$  имеют размерность  $2j+1$ , где  $j$  — неотрицательное целое число,  $j = 0, 1, 2, \dots$  (квантовые числа углового момента). При фиксированном  $n$  собственное подпространство  $\mathcal{H}_n$ , отвечающее собственному значению  $E_n$ , можно разложить на неприводимые относительно действия группы  $SO(3)$  компоненты. Это разложение имеет вид

$$\mathcal{H}_n \cong \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}^{(j)}. \quad (1.7.10)$$

Поэтому  $\dim \mathcal{H}_n = \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) = n^2$ .

Интерпретация числа  $j$  как углового момента является следствием постулата РЗ из § 1.3. В самом деле, классический угловой

момент  $\mathbf{J}$  одной частицы — это не что иное, как векторное произведение ее координаты на импульс:  $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ . Используя шредингерово представление  $p = -i\hbar \nabla_x$ , мы обнаружим, что компоненты вектора  $\mathbf{J}$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и образующие алгебры Ли группы  $SO(3)$ , т. е.  $[J_i, J_j] = i\hbar J_k$ , где  $(i, j, k)$  — циклическая перестановка чисел  $(1, 2, 3)$ . Переходя к экспонентам, мы получим представление группы вращений  $SO(3)$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = L_2(R^3)$ . Таким образом,

$$V(\mathbf{n}, \theta) = \exp(i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\theta/\hbar)$$

есть не что иное, как элемент группы, представляющий вращение на угол  $\theta$  вокруг оси, идущей в направлении единичного трехмерного вектора  $\mathbf{n}$ . С этим представлением коммутирует оператор Казимира

$$J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

который имеет собственные значения  $\hbar^2 j(j+1)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , каждое с кратностью 1. Собственное подпространство, отвечающее фиксированному  $j$ ,  $(2j+1)$ -мерно, и ограничение  $V$  на это подпространство является представлением  $\mathcal{D}^{(j)}$  с угловым моментом  $j$ . Поскольку группа  $SO(3)$  компактна, любое ее унитарное представление может быть разложено в сумму конечномерных представлений  $\mathcal{D}^{(j)}$ . В пространстве  $\mathcal{D}^{(j)}$  можно выделить естественный базис, состоящий из сферических гармоник  $P_n^j$ , что и приводит к появлению функций  $P_n^j$  в формуле (1.6.7).

В случае нескольких частиц полный угловой момент

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$$

обладает теми же свойствами, что и  $\mathbf{J}$ , и определяет представление группы вращений в пространстве  $L_2(R^{3N})$ . Как и выше,  $\mathcal{D}^{(j)}$  являются неприводимыми представлениями. В задаче с центрально-симметричными силами, подобной (1.7.1), операторы  $H$  и  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  коммутируют. Поэтому любое собственное подпространство оператора  $H$  может быть представлено в виде суммы пространств  $\mathcal{D}^{(j)}$ .

## 1.8 Зачем нужна квантовая теория поля

Точные спектроскопические измерения в атомной физике и точные вычисления по теории возмущений дали возможность тщательно проверить квантовую теорию. В процессе этой проверки были обнаружены физические эффекты, отклоняющиеся от теории, изложен-



ной в § 1.6 и 1.7. Эти эффекты — следствия теории относительности и наличия спина. Более того, в ядерной физике появляются новые законы взаимодействия между частицами. Спин, однако, легко включить в рассмотренную здесь модель нерелятивистской квантовой механики (см. также § 1.3 и представление (1.3.10)).

Первая же попытка создать релятивистскую теорию электрона приводит к уравнению Дирака (см. § 15.3). Рассмотрение спина и уравнения Дирака значительно улучшает согласие теории с экспериментом в атомной спектроскопии. Еще более важный сплав специальной теории относительности и квантовой механики дает квантовая теория поля. Она позволяет сделать дальнейшие поправки в атомной спектроскопии, в частности объяснить знаменитый лэмбов сдвиг и аномальный магнитный момент электрона. В пределах нынешней точности измерений и вычислений те дополнительные эффекты, которые появляются в квантовой физике благодаря теории поля, позволяют достичь полного согласия между теорией и экспериментом в атомной спектроскопии. Обсуждению этих вопросов посвящена гл. 15.

Ядерная физика или физика элементарных частиц изучают явления, происходящие на малых расстояниях и при больших энергиях, для которых поэтому велико значение релятивистских эффектов. Особенно возрастает роль теоретико-полевых эффектов в связи с тем, что при таких взаимодействиях частицы могут рождаться и исчезать. Добавим к тому же, что радиус протона и расстояния между частицами — величины сравнимые, и, следовательно, представление о протоне и нейтроне как о точечных объектах некорректно. Поэтому ядро и элементарные частицы по своей природе относятся к теории поля, и в противоположность атомной физике их приближенное описание как квантовой системы  $N$  частиц не приводит к последовательному описанию основных явлений. Подводя итог сказанному, отметим, что квантовая теория поля нужна для

1) создания на основе комбинации квантовой механики и специальной теории относительности стройной и последовательной картины явлений;

2) получения малых, но точно определенных поправок к атомной спектроскопии;

3) описания основных явлений в физике элементарных частиц и создания языка, на котором могут быть сформулированы фундаментальные законы ядерной физики.

#### Литературные ссылки

[Baum, 1969], [Kato, 1966], [Jauch, Rohrlich, 1976].

## Глава 2

### Классическая статистическая механика

#### 2.1 Введение

Статистическая механика является связующим звеном между молекулярной физикой и механикой сплошных сред. В своих построениях статистическая механика исходит из законов взаимодействия между частицами. Этими частицами могут быть атомы в кристалле, молекулы в газе или жидкости, электроны в плазме, аминокислотные остатки в белке, элементарные составляющие в сложном полимере и т. д. Силы, действующие между частицами, порождаются кулоновым взаимодействием электрических зарядов и магнитным диполь-дипольным взаимодействием в случае, если частицы обладают магнитными моментами. Классические законы взаимодействия могут видоизменяться с учетом квантовомеханического описания частиц (в особенности с учетом принципа запрета Паули). Обычно законы взаимодействия очень сложны и не выражаются простой аналитической формулой. Поэтому чаще всего их рассматривают одним или несколькими из следующих четырех способов. (1) Как некую функцию, явный вид которой неизвестен, а ее качественные свойства постулированы в виде физических законов. (2) Как некую конкретную функцию, например потенциал Леннарда-Джонса или потенциал твердых сфер. Эти функции используются потому, что они обладают теми же характерными свойствами, что и истинные законы взаимодействия, например они могут асимптотически совпадать с ними в предельных случаях. (3) Как результат вычисления, основанного, например, на сложном истинном законе взаимодействия, но с использованием приближения Хартри — Фока. (4) Как результат экспериментальных измерений.

Задача статистической механики состоит в том, чтобы на основе вводимого одним из описанных выше способов закона взаимодействия определить макроскопические свойства вещества. Большая часть этих свойств характеризуется термодинамическими величинами и коэффициентами переноса: плотностью, давлением, температурой, теплопроводностью и электропроводностью, намагниченностью, прочностью, вязкостью, теплоемкостью, скоростями химических реакций и т. д. Эти характеристики, вообще говоря, не независимы, а связаны каким-то уравнением состояния. Примером может служить уравнение состояния идеального газа

$$p = NkT/V. \quad (2.1.1)$$

Уравнение состояния есть следствие межмолекулярных законов взаимодействия и служит основой термодинамики и механики сплошных сред. Оно позволяет находить линейные и нелинейные «функции отклика», используемые в термодинамике и нужные для вывода уравнений механики сплошных сред. Статистическая механика занимается строгим выводом законов термодинамики и уравнений состояния.

Статистическая механика занимает определенное место и среди математических дисциплин. В каком-то смысле ее можно считать частью теории вероятностей или, более общо, частью анализа. Статистическая механика изучает системы, состоящие из бесконечно большого числа частиц, поэтому ей соответствует анализ в бесконечномерных пространствах. Физическое состояние каждой элементарной компоненты системы (например, частицы) описывается математически как точка некоторого конечномерного пространства  $X_i$ , например

$$X_i = R^1, R^n, S^0 = Z_2 = \{-1, +1\}, Z_n, S^n, SU(n). \quad (2.1.2)$$

Таким образом, статистическая механика изучает вероятностные меры, определенные на прямом произведении пространств состояний элементарных компонент:

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i. \quad (2.1.3)$$

Обычно задаются меры  $d\mu_i$  на  $X_i$ , и тогда простейшая мера на  $X$  является бесконечным произведением этих мер:

$$d\mu = \prod_{i=1}^{\infty} d\mu_i. \quad (2.1.4)$$

Эта мера не очень интересна, так как она соответствует ситуации, при которой нет взаимодействия между частицами (элементарными компонентами системы). Однако мера  $d\mu$  имеет определенный смысл, так как возникающие в статистической механике меры обычно близки к произведению мер.

В общем случае распределение вероятностей для состояний  $i$ -й частицы зависит, вообще говоря, от состояния  $j$ -й частицы,  $j \neq i$ . Для того чтобы система проявляла статистическое поведение, необходимо изначально ограничить эту зависимость конечным числом частиц — соседями  $i$ -й частицы. В физической терминологии это равносильно рассмотрению короткодействующих устойчивых взаимодействий. Для описания подобной ситуации рассмотрим меры  $d\mu^{(n)}$ , определенные на  $X^{(n)} = \prod_{i=1}^n X_i$ . Эти меры  $d\mu^{(n)}$  не являются уже произведением мер, а, как правило, представляются в виде

$$d\mu^{(n)} = e^{-U} \prod_{i=1}^n d\mu_i, \quad (2.1.5)$$

где  $U$  — энергия взаимодействия, которая может определяться, например, парным потенциалом взаимодействия  $V$ :

$$U = \sum_{i < j} V(x_i - x_j), \quad (2.1.6)$$

причем  $V$  задан одним из перечисленных выше способов (1) — (4) (см. также (2.3.1)). Предположим, что существует предел

$$d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} d\mu^{(n)}. \quad (2.1.7)$$

Меры, изучаемые в статистической механике, как правило, имеют вид (2.1.7), и в этом смысле предел (2.1.7) является подходящим обобщением (2.1.4).

Существенное различие между конечномерным и бесконечномерным случаями состоит в том, что в случае бесконечномерного пространства мера  $d\mu$  и, следовательно, связанные с нею физические величины могут быть разрывными функциями от параметров задачи. При этом наличие разрывов не какая-то неприятная патология, а одно из ключевых характерных качеств теории. Действительно, имеются физические основания ожидать, что эти величины — кусочно-аналитические функции параметров (температуры, внешнего поля и т. д.). Разрывы этих функций образуют в пространстве параметров множество коразмерности 1 и соответствуют физическому явлению, называемому фазовым переходом. Граничные точки множества разрывов образуют множество коразмерности 2, называемое критической поверхностью. В частном, но наиболее распространенном случае, когда система описывается двумя параметрами, критические поверхности коразмерности 2 становятся точками — отсюда термин критические точки. Поведение физических систем в окрестности критических точек играет большую роль в экспериментальных исследованиях, и одна из задач теории — дать количественные предсказания в этой области.

## 2.2 Классические ансамбли

Чтобы конкретизировать приведенные выше рассуждения, касающиеся меры  $d\mu$ , рассмотрим  $N$  одинаковых классических частиц с массой  $m$ , находящихся в области  $\Lambda \subset R^3$  и взаимодействующих с помощью парного потенциала  $V = V(q_i - q_j)$ . Предположим, что частица, достигающая границы  $\partial\Lambda$ , упруго отражается от нее. Кроме того, предположим, что частицы находятся во внешнем поле с потенциалом  $\Phi(q_i)$ . Таким образом,  $N$ -частичный гамильтониан равен

$$H_N(q, p) = H(q, p) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2m} p_i^2 + \Phi(q_i) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(q_i - q_j), \quad (2.2.1)$$

$$q = (q_1, \dots, q_N), \quad p = (p_1, \dots, p_N).$$

Классическое пространство состояний одной частицы  $X_i = \Lambda \otimes R^3$  называется одночастичным фазовым пространством. На пространстве состояний системы  $X^N = \prod_{i=1}^N X_i$  важную роль играет мера Лиувилля

$$d\mu_{\text{Лиувилля}} = d\mu_N = \prod_{i=1}^N dp_i dq_i; \quad (2.2.2)$$

эта мера, как было показано в предложениях 1.2.1—2, инвариантна под действием  $n$ -частичной классической динамики, определенной гамильтонианом  $H$ .

Основополагающий постулат Гиббса, относящийся к равновесным распределениям состояний изолированной механической системы, гласит: на поверхности постоянной энергии  $H = E$  равновесное распределение вероятностей является априори равномерным относительно меры Лиувилля, ограниченной на поверхность  $H = E$ . Равновесное распределение в пространстве состояний изолированной системы называется микроканоническим ансамблем Гиббса. Предположение состоит в том, что априорная вероятность классического состояния с энергией  $E$  пропорциональна

$$\delta(H - E) d\mu_N. \quad (2.2.3)$$

Можно нормировать меру (2.2.3), поделив ее на инвариантную площадь поверхности постоянной энергии  $V(E) = \int \delta(H - E) d\mu_N^{-1}$ .

Как можно обосновать эту гипотезу? В случае когда имеются другие интегралы движения, такие, как полный угловой момент, соответствующие  $\delta$ -функции включаются в (2.2.3), приводя к новому (микро-микроканоническому) ансамблю. Учтя таким образом очевидные интегралы движения, мы вводим математический постулат об отсутствии дополнительных интегралов, или, другими словами, об эргодичности микро-микроканонического ансамбля. Рассмотрим теперь классическую траекторию  $(q(t), p(t))$ —

<sup>1)</sup> Заметим, что, как и при доказательстве теоремы Лиувилля (предложение 1.2.1), используя равенство  $\int \delta(H - E) dp = \|\text{grad } H\|^{-1}$ , мы получаем, что (2.2.3) определяет объем, инвариантный при движениях на поверхности  $H = E$ . Однако пример  $H = p^2 + \alpha q^2$  показывает, что интеграл от инвариантной длины дуги

$$\int_p \delta(H - E) dp dq = \frac{1}{2\sqrt{E - \alpha q^2}} dp$$

не равен длине эллипса  $H = E$  (если  $\alpha = 1$ , то  $V(E) = \pi$ , а  $H = E$  — окружность длины  $2\pi E^{1/2}$ ). В случае когда  $\|\text{grad } H\|$  не постоянен на поверхности  $H = E$ , эти меры — площадь поверхности и равновесная мера — различаются не только нормировкой. Фундаментальную роль в выборе определения (2.2.3) играет инвариантность меры  $\delta(H - E) d\mu_N$ .

кривую на поверхности, на которой постоянны энергия  $E$ , угловой момент  $j$  и т. д. Для наблюдаемой физической величины, т. е. функции  $F(q, p)$  на  $X$ , ее среднее значение в состоянии равновесия совпадает с измеряемым временным средним, определяемым по формуле

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(q(t), p(t)) dt = \langle F \rangle_{\text{ср}}. \quad (2.2.4)$$

В предположении эргодичности (т. е. отсутствия нетривиальных относительно меры  $d\mu_N$  подмножеств, инвариантных под действием временных сдвигов) для почти всех начальных условий временные средние совпадают со средними по микро-микрoканоническому ансамблю:

$$\langle F \rangle_{\text{ср}} = V(E, j, \dots)^{-1} \int F(q, p) \delta(H - E) \delta(J - j) \dots d\mu_N, \quad (2.2.5)$$

где  $V$  — объем микро-микрoканонического ансамбля.

Для простоты ниже рассматривается случай, когда  $H$  — единственный интеграл движения. Несмотря на серьезные усилия и успехи, достигнутые в частных случаях, эргодическая проблема<sup>1)</sup> не поддается решению. Возможно, что другие подходы к важному вопросу обоснования постулата (2.2.3) о виде равновесного распределения окажутся более перспективными.

В терминах микроканонического распределения определим меру

$$d\mu_{\text{микрокан}} = \frac{1}{N!} \frac{1}{V(E)} \delta(H - E) d\mu_N. \quad (2.2.6)$$

Основные факты классической статистической механики должны опираться на квантовую статистическую механику. При таком подходе множитель  $1/N!$  в (2.2.6) объясняется эффектом симметризации или антисимметризации для бозонной или фермионной статистики<sup>2)</sup>.

Энтропия, или статистический вес, для различных значений числа частиц и энергии определяется следующим образом:

$$S(E) = \ln \left( \frac{1}{N!} \int \delta(H - E) d\mu_N \right). \quad (2.2.7)$$

Энтропия является *экстенсивной* величиной в том смысле, что  $S(E)$  растет при стремлении к бесконечности числа частиц  $N$  и объема  $|\Lambda|$ . (Термодинамический предел для большого канонического ансамбля определяется ниже как предел при  $|\Lambda| \rightarrow \infty$  и фиксиро-

<sup>1)</sup> Так называют проблему об эргодичности динамики на поверхности  $H = E$  или, что одно и то же, проблему обоснования равенства (2.2.5). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Ссылки на квантовую механику излишни. Множитель  $1/N!$  появляется при переходе от пространства  $X^{(N)}$  состояний  $N$  одинаковых различных частиц к факторпространству  $X^{(N)}/S^{(N)}$ , описывающему состояния  $N$  неразличимых частиц ( $S^{(N)}$  — группа перестановок  $N$  частиц). — *Прим. ред.*

ванной плотности  $\rho = N/|\Lambda|$ .) Энтропия, как и энергия, по своему физическому смыслу определяется с точностью до аддитивной константы. В этом смысле определение (2.2.7) включает в себя произвольный выбор этой константы. Соответствующая *интенсивная* величина — это

$$s(E) = S(E)/|\Lambda| = \text{энтропия на единицу объема.}$$

Обычно  $s(E)$  сходится к пределу при  $|\Lambda|, N \rightarrow \infty$  и фиксированных плотностях  $\rho \equiv N/|\Lambda|$  частиц и энергии  $e \equiv E/|\Lambda|$ .

Микроканоническое распределение предназначено для описания изолированных систем; в то же время многие физические системы не изолированы. В частности, такой системой является система, состоящая из фиксированного числа частиц и находящаяся в равновесии с термостатом, в котором поддерживается постоянная температура. Энергия перераспределяется между рассматриваемой системой и термостатом до тех пор, пока в обоих не установится температура  $T$ . Микроскопически температура пропорциональна среднему значению кинетической энергии, приходящейся на одну частицу.

Постулат Гиббса в этой ситуации определяет распределение, называемое (малым) каноническим ансамблем:

$$\begin{aligned} d\mu_{\text{кан}} &= \frac{1}{N!} e^{-\beta H} d\mu_N = \\ &= \frac{1}{N!} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} V(q_i - q_j)} \prod_{i=1}^N e^{-\beta [p_i^2/2m_i + \Phi(q_i)]} dp_i dq_i, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

где  $\beta = (kT)^{-1}$ ,  $k$  — постоянная Больцмана. Заметим, что мера (2.2.8) имеет общий вид (2.1.5):  $e^{-U}$ , умноженное на произведение мер, где  $U = \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} V(q_i - q_j)$ . Для канонического ансамбля определяется свободная энергия Гельмгольца

$$A_N = A = -\beta^{-1} \ln \int d\mu_{\text{кан}}. \quad (2.2.9)$$

Свободная энергия  $A$  является экстенсивной функцией; соответствующая ей интенсивная величина

$$a = \frac{A}{|\Lambda|} = \text{свободная энергия Гельмгольца на единицу объема.} \quad (2.2.10)$$

Нормирующий множитель для канонического распределения (2.2.8), так называемая каноническая статистическая сумма, равен

$$Z = Z_N = \int d\mu_{\text{кан}} = e^{-\beta A_N}. \quad (2.2.11)$$

Канонический ансамбль описывает ситуацию эксперимента, при котором известно точное значение температуры, определяемое

термостатом. При некоторых идеализированных условиях канонический ансамбль может быть получен из микроканонического. Рассмотрим систему  $A$ , погруженную в термостат  $B$ , и предположим, что объединенная система  $A \cup B$  изолирована, т. е. подчиняется микроканоническому распределению. Каноническое распределение для системы  $A$  можно определить как условное распределение, получающееся после усреднения по степеням свободы системы  $B$ :

$$\frac{\int_B d\mu_{A \cup B, \text{ микрокан}}}{\int_{A \cup B} d\mu_{A \cup B, \text{ микрокан}}} \quad (2.2.12)$$

и последующего предельного перехода:

$$|\text{объем } B| \rightarrow \infty, \quad |\text{удельная энергия в } B \text{ на одну частицу}| \rightarrow e_B. \quad (2.2.13)$$

Здесь мы приведем доказательство этого утверждения, используя дополнительные упрощающие предположения:

$$B \text{ есть идеальный газ: } H_A = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{|B|} p_i^2, \quad (2.2.14i)$$

$$A \text{ и } B \text{ слабо взаимодействуют: } H_{A \cup B} = H_A + H_B, \quad (2.2.14ii)$$

$$\text{средняя энергия частиц в термостате равна } \frac{3}{2} kT. \quad (2.2.14iii)$$

**Предложение 2.2.1.** Пусть выполнены предположения (2.2.14 i—iii). Тогда

$$\lim_{|B| \rightarrow \infty} \frac{\int_B d\mu_{A \cup B, \text{ микрокан}}}{\int_{A \cup B} d\mu_{A \cup B, \text{ микрокан}}} = Z_A^{-1} e^{-\beta H_A} d\mu_A = Z_A^{-1} \cdot d\mu_{A, \text{ кан}}, \quad (2.2.15)$$

где  $\beta$  определяется из условия (2.2.14 iii) и равно  $\beta = (kT)^{-1}$ .

*Доказательство.* Перепишем (2.2.12), используя предположения:

$$\begin{aligned} \frac{\int_B \delta(H_A + H_B - E) d\mu_B d\mu_A}{\int_{A \cup B} \delta(H_A + H_B - E) d\mu_B d\mu_A} &= \frac{V_B(E - H_A)}{V_{A \cup B}(E)} d\mu_A = \\ &= \left( \frac{V_B(E)}{V_{A \cup B}(E)} \right) \left( \frac{V_B(E - H_A)}{V_B(E)} \right) d\mu_A, \quad (2.2.16) \end{aligned}$$



причем по определению полный интеграл этой меры равен 1. Положим  $n = |B|$ . Согласно предположениям (2.2.14),

$$\begin{aligned} V_B(E) &= \int \delta(H_B - E) d\mu_B = (2m)^{3n/2} |\Lambda|^n \int \delta\left(\sum_{i=1}^n p_i^2 - E\right) dp_1 \dots dp_n = \\ &= (2m)^{3n/2} |\Lambda|^n |S^{3n-1}| \int_0^\infty \delta(k^2 - E) k^{3n-1} dk = cE^{(3n-2)/2}, \end{aligned}$$

где  $c = 2^{-1} (2m)^{3n/2} \cdot |\Lambda|^n |S^{3n-1}|$ , а  $|S^n|$  — площадь поверхности  $n$ -мерной сферы. Условие (2.2.14iii) означает, что при  $n \rightarrow \infty$  средняя энергия частицы из  $B$  сходится к константе  $e_B$ . Для фиксированного  $H_A = E_A$  величина  $E/|B|$  также сходится к  $e_B$ . При этом предельном переходе

$$\frac{V_B(E - H_A)}{V_B(E)} = \left(1 - \frac{H_A}{E}\right)^{(3n-2)/2} \rightarrow \exp\left[-\frac{3}{2} \frac{H_A}{e_B}\right]. \quad (2.2.17)$$

Классическое значение  $e_B$  рассматривается здесь как параметр. Стандартное определение температуры возникает при выборе средней энергии на одну частицу в термостате равной  $e_B = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \beta^{-1}$ . Таким образом, предел (2.2.17) есть  $e^{-\beta H_A}$ .

Множитель  $V_B(E)/V_A \cup_B(E)$  в (2.2.16) является нормирующим множителем. Так как  $Z_A^{-1}$  также нормирует меру  $d\mu_A$ , кан, предложение доказано.

Хотя для конечных систем микроканоническое и каноническое распределения различны, считается, что в термодинамическом пределе (при бесконечном объеме  $|\Lambda|$  и фиксированной плотности  $\rho = N/|\Lambda|$ ) оба распределения определяют одни и те же термодинамические функции<sup>1)</sup>.

Другую связь между микроканонической и канонической точками зрения дает соотношение между удельной свободной энергией и удельной энтропией:

$$a(\beta) = \inf_e \{\beta e - s(e)\} \beta^{-1}. \quad (2.2.18)$$

Преобразование (2.2.18) является известным преобразованием Лежандра. Обратное преобразование имеет вид

$$s(e) = \sup_\beta \{\beta e - \beta a(\beta)\} \quad (2.2.19)$$

Мы не будем выводить эти соотношения, но заметим, что если  $s(e)$  и  $a(\beta)$  — строго выпуклые функции, то преобразования (2.2.18—19) взаимно обратны, т. е. каждая из формул (2.2.18) и (2.2.19) влечет за собой другую. Мы хотим подчеркнуть фундаментальный ха-

<sup>1)</sup> Более точно: при термодинамическом предельном переходе  $|\Lambda| \rightarrow \infty$ ,  $N/|\Lambda| \rightarrow \rho$  в каноническом ансамбле предельные термодинамические функции зависят от параметров  $\beta$  и  $\rho$ , в то время как термодинамический предел  $|\Lambda| \rightarrow \infty$ ,  $N/|\Lambda| \rightarrow \rho$ ,  $E/|\Lambda| \rightarrow e$  для микроканонического ансамбля приводит к функциям от параметров  $(e, \rho)$ . Эти функции совпадают с аналогичными функциями канонического ансамбля при условии, что  $e = \lim \langle E/|\Lambda| \rangle_{\text{кан}}$ . — Прим. ред.

рактер эквивалентности ансамблей, хотя нигде не будем ею пользоваться.

Третья ситуация, возможная при эксперименте, когда и энергия и вещество могут перераспределяться между рассматриваемой системой и окружающей средой. Другими словами, мы отказываемся от условия постоянства числа частиц  $N$  в системе (при фиксированном  $\Lambda$ ). Для описания этой ситуации Гиббс ввел большой канонический ансамбль, обобщающий канонический. Такой ансамбль возникает, например, при рассмотрении химических реакций или диффузии вещества через проницаемую мембрану. В этих случаях резервуар, в который погружена система, является как тепловым (энергетическим) резервуаром, так и резервуаром частиц. Определим

$$d\mu_{\text{б. кан}} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N d\mu_{\text{кан}, N}. \quad (2.2.20)$$

Здесь  $d\mu_{\text{кан}, N}$  означает канонический ансамбль:

$$d\mu_{\text{кан}, N} = \frac{1}{N!} e^{-\beta H_N} d\mu_N, \quad (2.2.21)$$

а  $z$  — параметр, называемый активностью. Параметр  $z$  связан с другим параметром  $h$ , называемым химическим потенциалом, соотношением  $z = e^{\beta h}$ . Другими словами, вместо числа частиц  $N$  в качестве параметра используется химический потенциал на одну частицу,  $-h$ . В случае когда энергия имеет вид (2.2.1), потенциал  $-h$  может быть включен в нее как аддитивная добавка к  $\Phi$ . Кроме того, если в случае, когда энергия имеет вид (2.2.1), мы ограничимся рассмотрением средних от функций  $F(q)$ , не зависящих от импульсов  $p$ , то интегрирование по  $p$  приведет к эффективному значению активности  $z = (2\pi m/\beta)^{3/2} e^{\beta h}$ . Для большого канонического ансамбля величина

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N \int d\mu_{\text{кан}, N} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \int e^{-\beta H_N} d\mu_N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} e^{-\beta (A_N - h \cdot N)} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

называется большой статистической суммой. Среднее число частиц равно

$$\langle N \rangle = -\Xi^{-1} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{z^N}{(N-1)!} \int d\mu_{\text{кан}, N}. \quad (2.2.23)$$

В большом каноническом ансамбле плотность

$$\rho = \lim_{\Lambda \uparrow R^3} (\langle N \rangle / \Lambda) \quad (2.2.24)$$

и давление

$$p = \beta^{-1} \lim_{\Lambda \uparrow R^3} (|\Lambda|^{-1} \ln \Xi) \quad (2.2.25)$$

являются функциями  $\beta$  и  $h$ . Эта важная зависимость между  $\rho$ ,  $p$ ,  $\beta$  и  $h$  называется уравнением состояния. Для идеального газа (но не для других систем)  $p\beta = \rho$  и уравнение состояния определяется единственным соотношением  $\rho = \rho(\beta, h)$ .

Большой канонический ансамбль отличается от канонического ансамбля при конечном  $|\Lambda|$ , однако ожидается, что в предельном переходе к бесконечному объему  $\Lambda \uparrow R^3$  оба ансамбля порождают одинаковые термодинамические функции<sup>1)</sup>. В частности, термодинамические функции канонического и большого канонического ансамбля связаны преобразованием Лежандра по переменной  $\rho$  и сопряженной переменной  $h$ :

$$\begin{aligned} p(\beta, h) &= \sup_{\rho} \{\rho h - a(\beta, \rho)\}, \\ a(\beta, \rho) &= \inf_h \{\rho h - p(\beta, h)\}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

### 2.3 Модель Изинга и решеточные поля

В принципе твердые тела и жидкости, так же как и газы, описываются статистическими ансамблями, введенными в предыдущем параграфе, при условии, что задан некоторый потенциал взаимодействия между частицами  $V(q_i - q_j)$ . Из этого описания должно, вообще говоря, следовать, что при подходящей температуре в системе возникает локальная решеточная структура с преобладанием дефектов (в случае жидкостей) или глобальная кристаллическая решетка с изолированными дефектами (в случае кристаллических твердых тел). Однако до сих пор нет доказательств существования такой решеточной структуры, строго математически вытекающего из исходных принципов и предположений о некоторых свойствах потенциала  $V$ . Более того, даже если бы удалось получить доказательство, начинать таким образом изучение твердых тел было бы неудобно. Вместо этого мы вводим решетку непосредственно в формулировку задачи. Точки (узлы) решетки можно представлять себе как равновесные положения атомов или групп атомов в кристалле. С другой стороны, в приложениях к квантовой теории поля решетка  $Z^d$  вводится для аппроксимации континуума  $R^d$ . В обоих случаях для  $i \in Z^d$  переменная  $\xi_i \in X_i$  определяет состояние в точке  $i$ . Например,  $\xi_i$  может означать напряженность поля, ориентацию магнитного момента или какую-то дискретную переменную,

<sup>1)</sup> Здесь следует сделать то же уточнение, что и в случае эквивалентности между микроканоническим и каноническим ансамблями (см. предыдущее примечание). — *Прим. ред.*

например принимающую значение 0 или 1 в зависимости от наличия или отсутствия примеси в точке  $i \in Z^d$ .

Для определенности мы выбираем в (2.1.2), (2.1.5)

$$X_i = R^1, \quad d\mu_i = e^{-P(\xi_i)} d\xi_i / \int e^{-P} d\xi_i, \quad (2.3.1)$$

где  $\xi_i \in R^1$ ,  $d\xi$  — мера Лебега,  $P$  — ограниченный снизу полином. Допускается также предельный случай

$$d\mu_i = e^{h\xi_i} \frac{\delta_{-1}(\xi_i) + \delta_{+1}(\xi_i)}{2 \operatorname{ch} h} d\xi_i, \quad (2.3.2)$$

где  $\delta_{\pm 1}(\xi) = \delta(\xi \mp 1)$ . Нас интересуют кооперативные (или иногда антикооперативные) явления, т. е. такие явления, при которых некоторое событие, случившееся в точке  $i$ , а именно то, что переменная в точке  $i$  приняла некоторое значение  $\xi_i$ , благоприятствует (или мешает) появлению близких значений переменных  $\xi_j$  для точек  $j \in Z^d$ , соседних с  $i$ . Чаще всего это достигается следующим способом. Пусть  $\Delta$  — оператор вторых разностей на  $Z^d$ . После суммирования по частям получаем

$$\langle \xi, \Delta \xi \rangle \equiv - \sum_{i \in Z^d} \sum_{\nu=1}^d (\xi_{i+e_\nu} - \xi_i)^2, \quad (2.3.3)$$

где  $e_\nu$  — единичный вектор  $\nu$ -го координатного направления, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $l_2(Z^d)$ . Обозначим  $\Delta_{\partial\Lambda}$  оператор вторых разностей на  $Z^d$  с граничными условиями Дирихле на границе  $\partial\Lambda$  области  $\Lambda \subset R^d$  (определение и свойства  $\Delta_{\partial\Lambda}$  см. в § 9.5). Пусть

$$d\mu_\Lambda = e^{\beta \langle \xi, \Delta_{\partial\Lambda} \xi \rangle / 2} \prod_{i \in \Lambda} d\mu_i, \quad (2.3.4)$$

$$d\mu = \lim_{\Lambda \uparrow R^d} \left( d\mu_\Lambda / \int d\mu_\Lambda \right). \quad (2.3.5)$$

Предельная мера  $d\mu$  зависит от  $\beta$  ( $\sim 1/T = (\text{температура})^{-1}$ ) и от коэффициентов  $P$ . В случае (2.3.1) мы получаем решеточное поле, а в случае (2.3.2) — модель Изинга с внешним полем  $h$ . Предел (2.3.5) существует всегда и, вообще говоря, является разрывной функцией  $\beta$  и  $P$ . Модель Изинга используется для описания примесей в металлах (сплавах). Она применяется также для качественного описания магнетизма, хотя классическая модель ферромагнетизма, принадлежащая Гейзенбергу ( $X_i = S^2$  в (2.1.2)), ближе к реальности. Большое число подобных моделей с различными решетками, пространствами состояний  $X_i$  и мерами  $d\mu_i$  возникает при исследовании примеров из физики твердого тела.

Заметим, что решеточные модели (2.3.5) описывают совершенные кристаллы, в которых дефекты кристаллической структуры не допускаются. В природе совершенные кристаллы встречаются

редко, и их физические свойства резко отличаются от свойств несовершенных кристаллов. Действительно, дефекты кристаллической структуры в обычных реальных материалах определяют их механические свойства (твердость, хрупкость, усталость и т. д.), см. [Ashcroft, Mermin, 1976]. Некоторые считают, что в квантовой теории поля могут иметь место подобные явления, а именно что конфигурации поля, далекие от области минимума действия или от равновесных конфигураций (мешки, вихри, инстантоны и т. д.), могут обладать подавляющей мерой  $d\mu$  и, следовательно, определять основные черты квантового поля. В случае квантовой теории поля все конфигурации (близкие или далекие от равновесия) учитываются ансамблем (2.3.5). Влияние конфигураций, близких к равновесным, анализируется с помощью теории возмущений; вклад от других конфигураций, не охватываемых теорией возмущений, требует более глубокого анализа.

## 2.4 Методы разложений в ряд

Кластерными разложениями в статистической механике называют различные разложения в сходящиеся ряды для изучения мер  $d\mu$ , задаваемых либо формулой (2.1.5), либо формулой (2.3.5). Главный член разложения соответствует случаю невзаимодействующих частиц, т. е. произведению мер; последующие члены учитывают взаимодействие. Разложение сходится в области малых взаимодействий. Такого рода методы весьма полезны при исследовании решеточных полей, моделей Изинга, евклидовых квантовых полей (см. часть III). В этом параграфе мы проиллюстрируем метод на примере большого канонического ансамбля (2.2.20) для неидеального газа. Главный член в этом разложении соответствует идеальному газу.

Мы покажем, что давление  $p$ , определяемое выражением (2.2.25), является гладкой функцией от  $z$  и  $\beta$  в области малых  $z$  или малых  $\beta$ . Малые значения  $\beta$  соответствуют высокой температуре, а малая активность отвечает малой плотности. Таким образом, будет доказано, что в газе при малой плотности или высокой температуре не происходит фазового перехода (т. е. газ не переходит в жидкое состояние). Используемые при доказательстве разложения позволят описать все свойства газа в этой области параметров. Мы покажем, что

$$\beta p = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad (2.4.1)$$

где  $b_n$  выражаются в явном виде как интегралы по  $R^{3(n-1)}$ . Ряд (2.4.1) называется рядом Майера. Мы докажем сходимость этого ряда, откуда будет следовать аналитичность  $p$  при малых  $\beta$  или  $z$ .

Сделаем два предположения:

$$\|V\|_{L_1} = \int |V(\xi)| d\xi < \infty \quad (\text{короткодействующий потенциал}); \quad (2.4.2a)$$

существует положительная константа  $B$ , такая, что

$$\inf_{\xi_i \in R^3, 1 \leq i < j \leq n} \sum V(\xi_i - \xi_j) \geq -nB \quad (\text{устойчивость}). \quad (2.4.2b)$$

**Предложение 2.4.1.**  $\Xi_\Lambda$  является целой функцией от  $z$ .

Это утверждение доказывается подстановкой (2.4.2b) в (2.2.20). Оно отражает тот факт, что в конечных системах нет фазовых переходов. Однако это утверждение становится совершенно бесполезным при переходе к пределу  $\Lambda \uparrow R^3$ . Для того чтобы контролировать этот предельный переход, необходимо воспользоваться тем, что различные частицы почти независимы. Для этого прологарифмируем  $\Xi_\Lambda$  и поделим на  $|\Lambda|$  в (2.2.25). Пусть

$$Z_\Lambda^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \exp\left(-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} V(\xi_i - \xi_j)\right) \prod_{i=1}^n d\xi_i, \quad (2.4.3)$$

так что

$$\Xi_\Lambda = \sum z^n Z_\Lambda^{(n)}. \quad (2.4.4)$$

В дальнейшем мы построим величины  $K_\Lambda^{(i)}$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$Z_\Lambda^{(n)} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{i}{n} K_\Lambda^{(i)} Z_\Lambda^{(n-i)}. \quad (2.4.5)$$

**Предложение 2.4.2.** Пусть выполнено (2.4.5) и  $|K_\Lambda^{(n)}| \leq e^{O(n)}$ ; тогда

$$\Xi_\Lambda = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n K_\Lambda^{(n)}\right). \quad (2.4.6)$$

**Замечание.** Из (2.4.6) следует, что

$$b_n = \lim_{\Lambda \uparrow R^3} |\Lambda|^{-1} K_\Lambda^{(n)} \quad (2.4.7a)$$

являются искомыми коэффициентами ряда (2.4.1). Мы покажем, что

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{\beta}{2} \int_0^1 ds \int d\xi V(\xi) e^{-\beta s V(\xi)}. \quad (2.4.7b)$$

**Доказательство.** Умножив (2.4.5) на  $nz^n$  и просуммировав по  $n$ , получим, что

$$z \frac{d}{dz} \Xi_\Lambda = \left( \sum_{i=1}^{\infty} iz^i K_\Lambda^{(i)} \right) \Xi_\Lambda.$$

Так как  $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n K_{\Lambda}^{(n)}\right)$  удовлетворяет этому уравнению, мы получаем (2.4.6). ■

Рекуррентное уравнение (2.4.5) отвечает последовательному отщеплению одной частицы от остальных. Это уравнение и величины  $K_{\Lambda}^{(i)}$  играют центральную роль в построении кластерного разложения. Для вывода уравнения и нахождения в явном виде коэффициентов  $K_{\Lambda}^{(i)}$  введем параметры  $s_j$ ,  $0 \leq s_j \leq 1$ , линейно интерполирующие взаимодействие между нулевым ( $s_j = 0$ ) и полным взаимодействием ( $s_j = 1$ ). Параметр  $s_j$  приписывается взаимодействиям  $V(\xi_i - \xi_k)$  между всеми частицами с номерами  $i$  и  $k$ ,  $i \leq j < k$ . Он изменяет взаимодействие следующим образом: для  $i \leq j < k$

$$V(\xi_i - \xi_k) \rightarrow s_j V(\xi_i - \xi_k) = (1 - s_j) \cdot 0 + s_j V(\xi_i - \xi_k), \quad (2.4.8a)$$

для  $i, k \leq j$  и  $j < i, k$

$$V(\xi_i - \xi_k) \rightarrow V(\xi_i - \xi_k) = (1 - s_j) V(\xi_i - \xi_k) + s_j V(\xi_i - \xi_k). \quad (2.4.8b)$$

Заметим, что потенциал (2.4.8) является выпуклой суммой потенциалов  $V_{ik}$ . Каждое слагаемое, а следовательно, и их выпуклая сумма удовлетворяют условию устойчивости (2.4.2b):

$$\inf_{\xi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij}(\xi_i - \xi_j) \geq -nB.$$

Выполнив указанное преобразование для всех  $s_j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , получим  $n$ -частичную потенциальную энергию

$$W^{(n)}(\sigma_{n-1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_i \dots s_{j-1} V(\xi_i - \xi_j),$$

где  $\sigma_{n-1} = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ . Следующее предложение очевидно.

**Предложение 2.4.3.**  $W^{(n)}(\sigma_{n-1}) \geq -nB$ .

Перейдем теперь к выводу уравнения (2.4.5). Для произвольной функции  $Z^{(n)}(\sigma_{n-1})$  по теореме Ньютона — Лейбница имеем

$$\begin{aligned} Z^{(n)}(\sigma_{n-1} = 1) &= Z^{(n)}(s_1 = 0, s_2 = \dots = s_{n-1} = 1) + \\ &+ \int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} Z^{(n)}(s_1, s_2 = \dots = s_{n-1} = 1). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

В частности, пусть

$$Z^{(n)}(\sigma_{n-1}) = \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \exp(-\beta W^{(n)}(\sigma_{n-1})) \prod_{i=1}^n d\xi_i. \quad (2.4.10)$$

При  $s_1 = 0$  величина  $Z^{(n)}$  распадается на два множителя, причем при  $s_2 = \dots = s_{n-1} = 1$  один из сомножителей равен  $Z_{\Lambda}^{(n-1)}$ . Поэтому, если положить  $K_{\Lambda}^{(1)} = |\Lambda|$ , то первое слагаемое в (2.4.9) даст

член с  $i = 1$  в (2.4.5). Второе слагаемое в (2.4.9) можно переписать так:

$$\frac{1}{n} \int_0^1 ds_1 \frac{-\beta}{(n-2)!} \int_{\Lambda^n} V(\xi_1 - \xi_2) \exp\left(-\beta \sum_{2 \leq i < j \leq n} V(\xi_i - \xi_j) - \beta \sum_{2 \leq j \leq n} s_j V(\xi_1 - \xi_j)\right) \prod_{i=1}^n d\xi_i.$$

Мы воспользовались симметрией между последними  $n-1$  частицами и заменили  $\sum_{2 \leq j \leq n} V(\xi_1 - \xi_j)$  на  $(n-1)V(\xi_1 - \xi_2)$ .

Как и выше, применим теорему Ньютона — Лейбница к переменной  $s_2$ . Слагаемое, отвечающее значению  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = \dots = s_{n-1} = 1$ , равно

$$\frac{1}{n} \int_0^1 ds_1 \left(-\beta \int_{\Lambda^2} V(\xi_1 - \xi_2) e^{-\beta s_1 V(\xi_1 - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2\right) Z_{\Lambda}^{(n-2)} \quad (2.4.11)$$

и дает член с  $i = 2$  в (2.4.5), где

$$K_{\Lambda}^{(2)} = \frac{-\beta}{2} \int_0^1 ds_1 \int_{\Lambda^2} V(\xi_1 - \xi_2) e^{-\beta s_1 V(\xi_1 - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.4.12)$$

Таким же образом слагаемое, отвечающее  $s_i = 0$ , задает  $(i/n) K_{\Lambda}^{(i)} Z_{\Lambda}^{(n-i)}$  в (2.4.5) и определяет  $K_{\Lambda}^{(i)}$ .

Для нахождения явного выражения для  $K_{\Lambda}^{(i)}$  введем граф (дерево), определяемый целочисленной функцией  $\eta(l)$ ,  $l = 2, \dots, i$ , которая удовлетворяет условию  $1 \leq \eta(l) < l$ . Вершинами этого



Рис. 2.1.

графа являются числа  $1, 2, \dots, i$ , а ребрами — пары  $(\eta(l), l)$ ,  $l = 2, \dots, i$ , как показано на рис. 2.1. Определим также функцию

$$f(\eta, \sigma_{i-1}) = \prod_{l=1}^{i-1} s_{l-1} s_{l-2} \dots s_{\eta(l+1)},$$

считая, что при  $\eta(l+1) = l$  произведение (пустое)  $s_{l-1} s_{l-2} \dots = 1$ .



**Предложение 2.4.4.** Пусть

$$K_{\Lambda}^{(i)} = \sum_{\eta} K_{\Lambda}^{(i)}(\eta), \quad (2.4.13a)$$

$$K_{\Lambda}^{(i)}(\eta) = \frac{(-\beta)^{i-1}}{i} \int d\sigma_{i-1} \int_{\Lambda^i} d\xi f(\eta, \sigma_{i-1}) \prod_{l=1}^{i-1} V(\xi_{l+1} - \xi_{\eta(l+1)}) \times \\ \times e^{-\beta W^{(i)}(\sigma_{i-1})}. \quad (2.4.13b)$$

Тогда выполнено уравнение (2.4.5).

Доказательство такое же, как для случая  $K_{\Lambda}^{(1)}$ ,  $K_{\Lambda}^{(2)}$ , и мы его опускаем.

**Предложение 2.4.5.** Пусть выполнены предположения (2.4.2). Тогда

$$|K_{\Lambda}^{(i)}| \leq \beta^{i-1} \|V\|_{L_1}^{i-1} e^{i\beta B} \frac{e^{i-1}}{i} |\Lambda|.$$

**Замечание.** Таким образом, основной результат о сходимости ряда Майера (2.4.1) при  $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^3$  справедлив для  $|z| \leq (e^{\beta B+1} \beta \|V\|_{L_1})^{-1}$ .

*Доказательство.* Мы покажем, что

$$\sum_{\eta} \int d\sigma_{i-1} f(\eta, \sigma_{i-1}) \leq e^{i-1}. \quad (2.4.14)$$

Эта оценка и устойчивость  $W^{(i)}(\sigma_{i-1})$  (предложение 2.4.3) завершают доказательство. Прототипом неравенства (2.4.14) послужило неравенство

$$\int_0^1 ds v e^{sv} \leq e^v. \quad (2.4.15)$$

Левая часть неравенства (2.4.14) ограничена выражением

$$\sum_{\eta} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_{i-1} f(\eta, \sigma_{i-1}) \exp\left(\sum_{l=1}^{i-1} s_{i-1} \dots s_l\right).$$

Используя последовательно (2.4.15) при повторном интегрировании, получаем (2.4.14). ■

#### Литературные ссылки

[Friedman, 1962], [Huang, 1963], [Uhlenbeck, Ford, 1963], [Ruelle, 1969], [Lanford, 1973], [Thompson, 1980].

## 3.1 Мера Винера

В гл. 1 мы рассмотрели уравнения квантовой механики, однако лишь в редких случаях можно получить решения этих уравнений с помощью известных специальных функций или же записать их спектр в явном виде. Поэтому вычисления в квантовой механике выполняются приближенными методами, например нахождением нескольких первых членов формального степенного ряда. Разложение в ряд по константе связи известно как теория возмущений, а ряд по постоянной Планка называют классическим приближением.

Для того чтобы получить качественную картину поведения решения, а также оценить погрешность, очень полезно иметь интегральное представление решения. Его дает формула Фейнмана — Каца. Эта формула для широкого класса потенциалов определяет ядро  $\mathcal{K}_t(q, q')$  оператора  $e^{-tH}$ , т. е.

$$(e^{-tH}\theta)(q) = \int \mathcal{K}_t(q, q')\theta(q') dq',$$

даже в том случае, когда  $\mathcal{K}_t$  не может быть выражено через элементарные функции. Идея Фейнмана заключалась в том, чтобы найти такое представление для ядра унитарной группы  $e^{-itH}$ . Для классической траектории  $q(s)$ , где  $s$  означает время, рассмотрим действие

$$\mathcal{A}(-t/2, t/2) = \int_{-t/2}^{t/2} \mathcal{L}(q(s), \dot{q}(s)) ds. \quad (3.1.1)$$

Здесь  $\mathcal{L}$  — лагранжиан, полученный из гамильтониана

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + V(q) \quad (3.1.2)$$

при помощи преобразования Лежандра

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sup_p [\dot{q}p - H(p, q)] = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q). \quad (3.1.3)$$

Пусть  $\mathcal{W}(q, q', t)$  — множество непрерывных траекторий  $q(s)$ , принимающих фиксированные значения  $q(-t/2) = q$  и  $q(t/2) = q'$  на концах отрезка  $[-t/2, t/2]$ . Формула Фейнмана такова:

$$\left(\text{ядро } e^{-itH}\right)(q, q') = \text{const} \int_{\mathcal{W}(q, q', t)} e^{i\mathcal{A}(-t/2, t/2)} \prod_{-t/2 < s < t/2} dq(s). \quad (3.1.4)$$

Эта формула часто и успешно применяется физиками, поскольку она удобна при формальных преобразованиях. Однако

комплексной мере  $e^{i\mathcal{A}} \prod dq(s)$  не удалось придать удовлетворительного математического смысла<sup>1)</sup>, и по этой причине формула Фейнмана не играла значительной роли в математически строгих исследованиях по квантовой механике.

Аналогичным представлением ядра оператора  $e^{-tH}$  как интеграла по пространству траекторий является формула Фейнмана — Каца. В этом случае мера в пространстве траекторий положительна и, как мы сейчас увидим, допускает строгое математическое обоснование. Так как  $e^{-tH}$  получается из  $e^{-itH}$  аналитическим продолжением по  $t$ , при котором  $t$  переходит в  $-it$ , это наводит на мысль сделать такое же аналитическое продолжение в формуле (3.1.3). При помощи подстановки

$$ds \rightarrow -ids, \quad \dot{q}^2 = (dq/ds)^2 \rightarrow -\dot{q}^2$$

приходим к формальному выражению

$$\begin{aligned} & \text{(ядро } e^{-tH})(q, q') = \\ & = \int_{\mathcal{W}(q, q', t)} \exp\left(-\int_{-t/2}^{t/2} \left[\frac{1}{2}\dot{q}(s)^2 + V(q(s))\right] ds\right) \prod_{-t/2 < s < t/2} dq(s). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Сначала рассмотрим случай  $V = 0$ , т. е.

$$H = H_0 = \frac{1}{2} p^2. \quad (3.1.6)$$

Этот частный случай приводит к определению условной меры Винера на множестве  $\mathcal{W}(q, q', t)$  непрерывных траекторий  $q(s)$ , заданных на отрезке  $[-t/2, t/2]$  и соединяющих  $q$  и  $q'$ . Для простоты все формулы будут написаны для трехмерного случая.

Ядро  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  оператора  $e^{-tH_0}$  является фундаментальным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} u(q, t) = H_0 u = \frac{1}{2} \Delta u(q, t), \quad (3.1.7)$$

где  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial^2 / \partial q_i^2$ . Поэтому, если задано начальное условие  $u(q, 0) = f(q)$ , то решение (3.1.7) представляется в виде

$$u(q, t) = (e^{-tH_0} f)(q) = \int \mathcal{K}_t^0(q, q') f(q') dq'. \quad (3.1.8)$$

Ядром оператора  $e^{-tH_0}$  является хорошо известная гауссова плотность

$$(2\pi t)^{-3/2} e^{-(q-q')^2/2t} = \mathcal{K}_t^0(q, q'), \quad (3.1.9)$$

<sup>1)</sup> Тем не менее существует немало математических работ, посвященных корректному построению фейнманова интеграла (см. обзор Ю. Л. Далецкого: Интегрирование в функциональных пространствах. — Сер. Итоги науки. Математический анализ. — ВИНТИ, 1967). — *Прим. ред.*

представляющая собой преобразование Фурье функции  $e^{-p^2 t/2}$ . Вот его основные свойства:

- (i)  $\mathcal{K}_t^0(q, q') > 0$ ;
- (ii)  $\int \mathcal{K}_t^0(q, q') dq' = 1$ ;
- (iii)  $\mathcal{K}_{t+s}^0(q, q') = \int \mathcal{K}_t^0(q, r) \mathcal{K}_s^0(r, q') dr$ .

Свойства (i), (ii) позволяют интерпретировать  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  как плотность распределения вероятностей, а (iii) отвечает полугрупп-

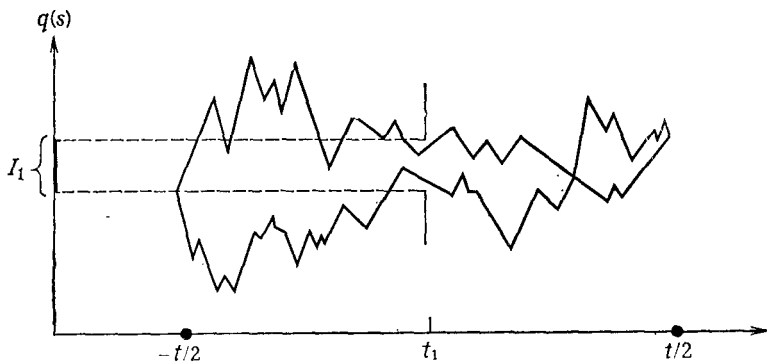


Рис. 3.1. Пример двух траекторий  $q(s) \in \mathscr{W}(q, q', t)$ , удовлетворяющих условию  $q(t_1) \in I_1$ .

повому свойству  $e^{-(t+s)H_0} = e^{-tH_0} \cdot e^{-sH_0}$ . Свойства (i)–(iii) ядра  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  дают возможность определить на  $\mathscr{W}(q, q', t)$  условную меру Винера («условие» заключается в том, что оба конца траектории фиксированы, в то время как в случае обычной меры Винера фиксируется лишь начало траектории). Полную меру множества  $\mathscr{W}(q, q', t)$  положим равной  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$ , а меру множества

$$\{q(s) \in \mathscr{W}(q, q', t): q(t_1) \in I_1\}$$

траекторий, попадающих в момент времени  $t_1$ ,  $-t/2 \leq t_1 \leq t/2$ , в подмножество  $I_1 \subset R^3$ , определим выражением

$$\int_{I_1} \mathcal{K}_{(t/2)+t_1}^0(q, q_1) \mathcal{K}_{(t/2)-t_1}^0(q_1, q') dq_1. \quad (3.1.10)$$

Это множество траекторий изображено на рис. 3.1. Заметим, что определение (3.1.10) корректно в силу свойства (iii), так как если мы возьмем в нем  $I_1 = R^3$ , то (3.1.10) совпадает с  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  — полной мерой  $\mathscr{W}(q, q', t)$ .

В общем случае рассмотрим подмножество траекторий в  $\mathscr{W}(q, q', t)$ , точки которых в  $n$  фиксированных последовательных

моментов времени  $t_j$  принадлежат борелевским множествам  $I_j \subset R^3$ . Здесь  $j = 1, 2, \dots, n$  и  $-t/2 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t/2$ . Такие подмножества в  $\mathscr{W}(q, q', t)$ , т. е. подмножества

$$\{q(s) : q(-t/2) = q, q(t/2) = q', q(t_j) \in I_j, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (3.1.11)$$

называются цилиндрическими множествами, а мера множества (3.1.11) определяется выражением

$$\begin{aligned} & \int_{I_1} dq_1 \int_{I_2} dq_2 \dots \int_{I_n} dq_n \mathcal{K}_{t_1+t/2}^0(q, q_1) \mathcal{K}_{t_2-t_1}^0(q_1, q_2) \dots \mathcal{K}_{t/2-t_n}^0(q_n, q') = \\ & = \int_{I_1} dq_1 \dots \int_{I_n} dq_n \prod_{j=1}^{n+1} [2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-3/2} e^{-(q_j - q_{j-1})^2 / (t_j - t_{j-1})}, \quad (3.1.12) \end{aligned}$$

$$\text{где } t_0 \equiv -t/2, q_0 \equiv q, t_{n+1} \equiv t/2, q_{n+1} \equiv q'.$$

Сформулируем без доказательства основную теорему о существовании меры Винера.

**Теорема 3.1.1.** *Условная мера Винера (3.1.12) счетно-аддитивна на цилиндрических подмножествах пространства  $\mathscr{W}(q, q', t)$  и имеет единственное продолжение на  $\sigma$ -алгебру борелевских подмножеств  $\mathscr{W}(q, q', t)^1$ .*

Пусть  $dW_{q, q'}^t$  обозначает интегрирование по условной мере Винера. Заменяя в формуле (3.1.12) характеристические функции  $\chi_{I_j}$  интервалов  $I_j$  произвольными ступенчатыми функциями  $A_j$ , мы с помощью предельного перехода и определения (3.1.8) ядра  $\mathcal{K}$  получаем

**Следствие 3.1.2.** *Пусть  $A_i$  — оператор умножения на ограниченную функцию  $A_i(q)$ , действующий в  $L_2(q, dq)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $-t/2 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t/2$ . Тогда*

$$\begin{aligned} & \int \prod_{i=1}^n A_i(q(t_i)) dW_{q, q'}^t = \\ & = (\text{ядро } (e^{-(t_1+t/2)H_0} A_1 e^{-(t_2-t_1)H_0} A_2 \dots A_n e^{-(t/2-t_n)H_0})) (q, q'). \quad (3.1.13) \end{aligned}$$

В частном случае, когда все функции  $A_i$  — тождественные единицы, (3.1.13) превращается в формулу

$$\int dW_{q, q'}^t = (\text{ядро } e^{-tH_0}) (q, q') = \mathcal{K}_t^0(q, q'). \quad (3.1.14)$$

Мы закончим этот параграф замечанием о том, что на формальном уровне приведенные здесь определения согласуются с выражением

<sup>1</sup> Топология в  $\mathscr{W}(q, q', t)$  индуцируется топологией равномерной сходимости в пространстве непрерывных траекторий на отрезке  $[-t/2, t/2]$ . — Прим. ред.

(3.1.5) в случае  $V = 0$ . Действительно,  $e^{-tH_0} = (e^{-tH_0/n})^n$ , поэтому, как и в (3.1.12), взяв  $I_j = R^3$ ,  $t_j = -t/2 + jt/n$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , получим, что

$$\begin{aligned} & \text{(ядро } e^{-tH_0})(q, q') = \\ & = \left(\frac{2\pi t}{n}\right)^{-3n/2} \int \dots \int \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta q_i}{\Delta t_i}\right)^2 \Delta t_i\right] \prod_{i=1}^{n-1} dq_i. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Здесь  $\Delta q_i = q(t_i) - q(t_{i-1})$ ,  $q_0 = q$ ,  $q_n = q'$ ,  $\Delta t_i = t/n$ . После формального перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$  подынтегральное выражение принимает вид  $\exp\left[-\frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \dot{q}(s)^2 ds\right]$ . Однако ни константа  $(2\pi t/n)^{-3n/2}$ , ни мера  $\prod_i dq_i$  не имеют предела при  $n \rightarrow \infty$ . Можно доказать, что мера Винера множества траекторий, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем  $\geq 1/2$ , равна нулю. Аналогично  $\exp\left[-\frac{1}{2} \int \dot{q}(s)^2 ds\right] = 0$  почти всюду по мере Винера, т. е. ни один из трех множителей в (3.1.15) не имеет предела при  $n \rightarrow \infty$ . Тем не менее их произведение под интегралом в (3.1.15) имеет предел, который совпадает с определенной выше условной мерой Винера  $dW_{q, q'}^t$ .

### 3.2 Формула Фейнмана — Каца

Рассмотрим две однопараметрические группы операторов  $e^{tA}$  и  $e^{tB}$ , действующие в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , инфинитезимальные генераторы которых равны соответственно  $A$  и  $B$ . Если операторы  $A$  и  $B$  ограничены, то при помощи формулы Ли из двух данных групп можно построить группу  $e^{t(A+B)}$ .

**Теорема 3.2.1.** Для ограниченных операторов  $A$  и  $B$

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n. \quad (3.2.1)$$

*Доказательство.* Пусть  $C = e^{(A+B)/n}$ ,  $D = e^{A/n} e^{B/n}$ . Мы покажем, что если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\|C^n - D^n\| \rightarrow 0$ . Действительно,

$$\|C^n - D^n\| = \left\| \sum_{m=0}^{n-1} C^m (C - D) D^{n-m-1} \right\| \leq \text{const} \cdot n \|C - D\|, \quad (3.2.2)$$

где использована оценка  $\|C\|, \|D\| \leq \exp\left[\frac{\|A\| + \|B\|}{n}\right] \leq \text{const}^{1/n}$ . Далее,

$$\|C - D\| \leq \text{const} \cdot n^{-2}, \quad (3.2.3)$$

так как при разложении в степенной ряд  $C - D = e^{(A+B)/n} - e^{A/n} e^{B/n}$  члены нулевого и первого порядков взаимно уничтожаются. Подстановка (3.2.3) в (3.2.2) завершает доказательство. ■

Если  $A$  и  $B$  не ограничены, доказательство формулы (3.2.1) требует дополнительных предположений. Мы сформулируем одну из теорем для этого случая.

**Теорема 3.2.2.** Пусть операторы  $H_0$ ,  $V$  ограничены снизу и существенно-самосопряжены, а оператор  $H = H_0 + V$  также существенно-самосопряжен. Тогда

$$e^{-H} = \text{s. lim}_{n \rightarrow \infty} (e^{-H_0/n} e^{-V/n})^n. \quad (3.2.4)$$

Мы установим формулу Фейнмана — Каца

$$\mathcal{K}_t(q, q') \equiv (\text{ядро } e^{-tH})(q, q') = \int \exp\left(-\int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds\right) dW_{q, q'}^t \quad (3.2.5)$$

для  $H = H_0 + V = -\frac{1}{2}\Delta + V$ . Чтобы упростить доказательство, будем считать потенциал  $V(q)$  достаточно регулярной функцией. Для потенциалов более общего вида формулу (3.2.5) можно получить при помощи подходящего предельного перехода. Заметим, что при вещественном  $V$  из формулы Фейнмана — Каца следует, что  $\mathcal{K}_t(q, q') > 0$ .

**Теорема 3.2.3.** Пусть  $V(q)$  — непрерывная ограниченная снизу вещественная функция на  $R^d$ , а оператор  $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$  существенно-самосопряжен. Тогда ядро  $\mathcal{K}_t(q, q')$  оператора  $e^{-tH}$  выражается формулой (3.2.5).

**Замечание.** Для  $V \in L_p(R^d)$ ,  $p > d/2$  из неравенства Соболева следует, что  $V$  является возмущением оператора  $\Delta$ , удовлетворяющим условию Като<sup>1)</sup>, и, таким образом,  $H$  существенно-самосопряжен. Если же  $V$  — ограниченный снизу полином, то  $H$  также существенно-самосопряжен.

**Доказательство.** По теореме 3.2.2

$$e^{-tH} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-tH_0/n} e^{-tV/n})^n, \quad (3.2.6)$$

где  $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ . Из следствия 3.1.2 вытекает, что

$$\text{ядро } (e^{-tH_0/n} e^{-tV/n})^n(q, q') = \int \exp\left[-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n V\left(q\left(-\frac{t}{2} + \frac{jt}{n}\right)\right)\right] dW_{q, q'}^t \quad (3.2.7)$$

В силу (3.2.6) ядро в левой части (3.2.7) при  $n \rightarrow \infty$  сходится к  $\mathcal{K}_t(q, q')$  в смысле сходимости обобщенных функций. Далее, так как  $V(q(s))$  интегрируема по Ри-

<sup>1)</sup> То есть выполнено неравенство  $\|V\phi\| \leq a\|\Delta\phi\| + b\|\phi\|$  для любой функции  $\phi \in D(\Delta) \subset L_2(R^d)$ , где  $0 < a < 1$  и  $b > 0$ . Это неравенство влечет за собой самосопряженность  $H = -\Delta + V$  (см. [Reed, Simon, 1972—1979, v. 2]). — Прим. ред.

ману, то в пространстве траекторий имеет место поточечная сходимость

$$\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n V \left( q \left( -t/2 + \frac{j t}{n} \right) \right) \rightarrow \int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds.$$

Поэтому подынтегральное выражение в правой части (3.2.7) сходится поточечно к  $\exp \left[ - \int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds \right]$ . Так как функция  $V(q)$  ограничена снизу, то подынтегральное выражение равномерно по  $n$  ограничено сверху константой, которая интегрируема по  $dW_{q, q'}^t$ . Применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем, что (3.2.7) сходится к (3.2.5) при  $n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим далее две модификации формулы Фейнмана — Каца (3.2.5). В этом параграфе мы выбираем гамильтониан  $H_0$  более общего вида и получим более общий класс ядер  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  и более общую меру на пространстве траекторий, чем мера Винера. В § 3.4 мы установим формулу, выражающую в виде интегралов по пространству траекторий среднее по основному состоянию  $\Omega$  гамильтониана  $H$ .

Первое обобщение заключается в замене  $H_0 = -\frac{1}{2} \Delta$  эллиптическим оператором второго порядка  $H_0 = -\frac{1}{2} \Delta + V$  (то, что  $H_0$  является эллиптическим оператором второго порядка, следует из положительности ядра оператора  $e^{-tH_0}$ ). Мы могли бы, например, заменить  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  ядром  $\mathcal{K}_t(q, q')$ , задаваемым формулой (3.2.5). Однако часто бывает желательно, чтобы сам оператор  $H_0$  приводил к точно решаемой задаче и индуцировал гауссову меру на пространстве траекторий, наиболее удобную в вычислениях. Типичным примером является гамильтониан  $H_0 = -\frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{2}$ , подробно рассмотренный в § 1.3. С этим гамильтонианом ассоциируется диффузионный процесс, так называемый процесс скоростей Орнштейна — Уленбека, для которого ядро  $\mathcal{K}_t^0(q, q')$  выражается формулой Мелера (1.5.26). Для процесса скоростей Орнштейна — Уленбека остаются справедливыми аналоги теоремы 3.1.1 и следствия 3.1.2. Пусть  $dU_{q, q'}^t$  обозначает меру на  $\mathcal{W}(q, q', t)$ , построенную тем же методом, что и мера Винера, только с помощью ядра Мелера. Тогда формула Фейнмана — Каца для  $H_0 = -\frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{2}$ ,  $H = H_0 + V$ , запишется в виде

$$\mathcal{K}_t(q, q') = (\text{ядро } e^{-tH}(q, q')) = \int \exp \left( - \int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds \right) dU_{q, q'}^t. \quad (3.2.8)$$

Перейдем ко второму обобщению формулы (3.2.5). Пусть  $\Omega_0(q)$  — основное состояние (вакуумный вектор) гамильтониана  $H_0 = -\frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{2}$ . В случае  $d = 1$  вектор  $\Omega_0(q)$  выражается



формулой (1.5.8), а в случае  $d > 1$  — с помощью ее естественного

обобщения:  $\Omega_0(q) = \prod_{i=1}^d \Omega_0(q_i)$ ,  $q \in R^d$ . Пусть

$$d\varphi_0 = \int_{R^d \times R^d} \Omega_0(q) \Omega_0(q') dU_{q, q'}. \quad (3.2.9)$$

Мера  $d\varphi_0$  определена на всех непрерывных траекториях  $q(s)$ ,  $s \in (-t/2, t/2)$ . Таким образом, если  $-t/2 < t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n < t/2$  и  $A_i(q)$  — ограниченные функции  $q$ , то

$$\int \prod_{i=1}^n A_i(q(t_i)) d\varphi_0 = \langle \Omega_0, A_1 e^{-(t_2-t_1)H_0} A_2 \dots A_n \Omega_0 \rangle. \quad (3.2.10)$$

Так как интеграл (3.2.10) не зависит от  $t$ , мы можем распространить меру  $d\varphi_0$  на множество непрерывных траекторий  $q(s)$ , определенных на произвольном конечном интервале значений  $s$ . Простые вычисления показывают, что мера  $d\varphi_0$  гауссова. Согласно предложениям § 1.5,

$$\int q(t_1) d\varphi_0 = \langle \Omega_0, q \Omega_0 \rangle = 0,$$

$$\int q(t_1) q(t_2) d\varphi_0 = \langle \Omega_0, q e^{-|t_1-t_2|H_0} q \Omega_0 \rangle = e^{|t_1-t_2|} \langle \Omega_0, q^2 \Omega_0 \rangle = \frac{1}{2} e^{-|t_1-t_2|}.$$

Обозначим вещественное скалярное произведение  $\langle q, f \rangle$  через  $q(f) = \int q(s) f(s) ds$ . Будем считать, что вещественная функция  $f$  гладкая и имеет компактный носитель. Аппроксимируя интеграл  $q(f)$  римановой интегральной суммой и воспользовавшись тем фактом, что преобразование Фурье функции  $e^{-|t|}$  равно  $\text{const} \cdot (1 + E^2)^{-1}$ , получим, что

$$\int q(f)^2 d\varphi_0 = \langle f, (1 - d^2/ds^2)^{-1} f \rangle_{L_2} = \int |\tilde{f}(E)|^2 (1 + E^2)^{-1} dE = \|f\|_{-1}^2.$$

Другими словами, второй момент меры  $d\varphi_0$  определяется положительным оператором  $(1 + E^2)^{-1}$ , который задает скалярное произведение в соболевском пространстве  $H_{-1}$  с нормой  $\|\cdot\|_{-1}$ . Вычисления также показывают, что

$$\int e^{iq(f)} d\varphi_0 = e^{\langle f, f \rangle_{-1}/2}, \quad (3.2.11)$$

и тем самым мера  $d\varphi_0$  гауссова. Следовательно,

$$\int q(f)^{2n} d\varphi_0 = (2n - 1)!! \|f\|_{-1}^{2n} = (2n - 1)(2n - 3) \dots 1 \|f\|_{-1}^{2n}, \quad (3.2.12)$$

$$\int q(f)^{2n+1} d\varphi_0 = 0.$$

Равенство (3.2.12) проще всего доказать, представляя  $q = (1/\sqrt{2}) \times (A + A^*)$  подобно формулам (1.5.3) и используя (3.2.10) вместе с равенством (1.5.21). Положив  $f = \sum z_j f_j$  и продифференцировав (3.2.11), получим, что

$$\int q(f_1) \dots q(f_{2n}) d\varphi_0 = \sum \langle f_{i_1}, f_{i_2} \rangle_{-1} \dots \langle f_{i_{2n-1}}, f_{i_{2n}} \rangle_{-1}, \quad (3.2.13)$$

где суммирование идет по всем  $(2n-1)!!$  разбиениям множества из  $2n$  функций  $f_j, j = 1, \dots, 2n$ , на пары.

### 3.3 Единственность основного состояния

Как правило, у гамильтонианов вида  $H = -\Delta + V$  основное состояние, или, иначе, вакуумный вектор, единственно. Эта единственность связана с теоремой Перрона — Фробениуса для матриц со строго положительными элементами или для интегральных операторов со строго положительными ядрами и будет доказана в этом параграфе. В случае когда задача нахождения собственных значений оператора  $H$  рассматривается в конечной области  $\mathcal{B}^1$ , у основного состояния  $\Omega$  во внутренности  $\mathcal{B}$  нет нулей, и, следовательно, оно может быть выбрано положительным. Для существования вакуумного вектора в случае неограниченной области  $\mathcal{B}$  (например,  $\mathcal{B} = R^3$ ) нужны дополнительные условия на функцию  $V$ ; см. теорему 1.5.9.

**Определение 3.3.1.** Пусть  $A$  — оператор в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = L_2(X, dv)$ , где  $X$  — некоторое пространство с мерой, а  $dv$  — мера на нем. Мы считаем, что оператор  $A$  имеет строго положительное ядро, если для любой неотрицательной функции  $\theta \in \mathcal{H}$ ,  $\|\theta\| \neq 0$ ,

$$A\theta > 0 \text{ почти всюду.} \quad (3.3.1)$$

Такой оператор обладает следующим свойством: для любых положительных векторов  $\theta, \psi$ , тождественно не равных нулю,  $\langle \theta, A\psi \rangle > 0$ .

**Замечание.** Оператор  $A = e^{-tH_0}$ , рассмотренный в теореме 1.5.10, имеет строго положительное ядро. Ниже мы увидим, что при соответствующих ограничениях на  $V$  то же самое верно для  $A = e^{-tH}$ . Заметим, что вакуумным вектором  $H$  является собственный вектор оператора  $e^{-tH}$ , соответствующий его наибольшему собственному значению.

**Теорема 3.3.2.** Пусть оператор  $A$  имеет строго положительное ядро и  $\|A\| = \lambda$  — собственное значение  $A$ . Тогда  $\lambda$  имеет кратность 1, а соответствующий собственный вектор  $\Omega$  может быть выбран строго положительным.

<sup>1)</sup> Например, при нулевых условиях на границе  $\mathcal{B}$ . — Прим. ред.

**Доказательство.** Так как  $A$  отображает вещественные функции в вещественные, мы можем считать  $\Omega$  также вещественным. В силу положительности ядра оператора  $A$ ,

$$\lambda \|\Omega\|^2 = \langle A\Omega, \Omega \rangle \leq \langle A|\Omega|, |\Omega| \rangle \leq \|A\| \|\Omega\|^2 = \lambda \|\Omega\|^2.$$

Поэтому

$$\langle A\Omega, \Omega \rangle = \langle A|\Omega|, |\Omega| \rangle. \quad (3.3.2)$$

Запишем  $\Omega = \Omega_+ - \Omega_-$ , где  $\Omega_{\pm}$  — положительная и отрицательная части  $\Omega$ . Тогда, в силу (3.3.2),

$$\langle \Omega_+, A\Omega_- \rangle + \langle \Omega_-, A\Omega_+ \rangle = 0, \quad (3.3.3)$$

откуда по определению положительности (3.3.1) либо  $\Omega_+ = 0$ , либо  $\Omega_- = 0$ . Поэтому мы можем взять  $\Omega \geq 0$ . Если  $\|\theta\| \neq 0$  и  $\theta \geq 0$ , то из (3.3.1) следует, что

$$0 < \langle \theta, A\Omega \rangle = \lambda \langle \theta, \Omega \rangle.$$

Так как  $\theta$  выбрано произвольно, то почти всюду  $\Omega > 0$ .

Наконец, если  $\psi$  и  $\Omega$  — два линейно независимых собственных вектора  $A$  с собственным значением  $\lambda$ , то, повторяя предыдущие рассуждения для компоненты  $\psi$ , ортогональной  $\Omega$ , получим, что существуют два строго положительных ортогональных вектора, а это невозможно. Следовательно,  $\lambda$  имеет кратность 1 и вакуумный вектор единствен. ■

Для того чтобы применять доказанную теорему к гамильтонианам квантовой механики, мы воспользуемся представлением Фейнмана — Каца из § 3.2 и сформулируем достаточное условие строгой положительности ядра оператора  $e^{-tH}$ .

**Теорема 3.3.3.** Пусть  $V$  — непрерывная ограниченная снизу функция, а  $H = H_0 + V$  — существенно-самосопряженный оператор. Тогда

$$0 < (\text{ядро } e^{-tH})(q, q') = \int \exp\left(-\int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds\right) dW_{qq'}^t. \quad (3.3.4)$$

**Доказательство.** Пусть  $M(R) = \sup\{V(q) : |q| \leq R\}$ , а  $I(R)$  — значение меры Винера  $dW_{q, q'}^t$  для множества  $\mathscr{W}(R)$  траекторий  $q(s)$ , для которых  $\sup\{|q(s)| : -t/2 \leq s \leq t/2\} \leq R$ . Тогда

$$(\text{ядро } e^{-tH})(q, q') \geq e^{-M(R)t} \int_{\mathscr{W}(R)} dW_{q, q'}^t \geq I(R) e^{-M(R)t}.$$

Так как  $I(R) \rightarrow 1$  при  $R \rightarrow \infty$ , то  $I(R)$  отлично от нуля при достаточно больших  $R$ . ■

**Следствие 3.3.4.** Пусть  $H$  удовлетворяет условиям теоремы 3.3.3. Тогда все его нормированные основные состояния  $\Omega$  отличаются друг от друга фазовым множителем  $e^{i\theta}$ , где  $\theta$  — вещественное число, и ровно одно из них может быть выбрано строго положительным.

**Замечание.** В этой теореме и ее следствии меру  $dW_{q, q'}^t$  можно заменить мерой Орнштейна — Уленбека  $dU_{q, q'}^t$ .

## 3.4 Перенормированная формула Фейнмана — Каца

Теперь мы вернемся ко второму обобщению формулы (3.2.5), а именно к «перенормированной» формуле Фейнмана — Каца. Для  $H = H_0 + V$ ,

$$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}$$

и непрерывной функции  $V$  определим «перенормированный» гамильтониан, полагая

$$\hat{H} = H - E_0. \quad (3.4.1)$$

Предположим, что  $H$  существенно-самосопряжен и его основным состоянием является  $\Omega$ ; тогда константа  $E_0$  выбирается так, чтобы  $\hat{H}\Omega = 0$ . По теоремам 3.3.2 и 3.3.3  $\Omega$  единствен и  $\langle \Omega, \Omega_0 \rangle \neq 0$ . Используя спектральное представление для  $H$

$$e^{-tH} = \int e^{-t\lambda} dE(\lambda),$$

получим, что

$$\Omega \langle \Omega, \Omega_0 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\hat{H}} \Omega_0. \quad (3.4.2)$$

Посмотрим теперь, что означает равенство (3.4.2) в терминах функционального интегрирования. Для этого определим вероятностную меру

$$d\mu_t = Z_t^{-1} \exp\left(-\int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds\right) d\varphi_0, \quad (3.4.3)$$

где мера  $d\varphi_0$  определена в (3.2.9), а нормирующий множитель  $Z_t$  дается формулой

$$Z_t = \int \exp\left(-\int_{-t/2}^{t/2} V(q(s)) ds\right) d\varphi_0. \quad (3.4.4)$$

Согласно формуле Фейнмана — Каца, для любых моментов времени  $-t/2 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t/2$  и любого набора ограниченных функций  $A_i$  имеем

$$\frac{\langle e^{-(t_1+t/2)H_0}\Omega, A_1 e^{-(t_2-t_1)H} A_2 \dots A_n e^{-(t/2-t_n)H}\Omega_0 \rangle}{\|e^{-tH/2}\Omega_0\|^2} = \int \prod_{i=1}^n A_i(q(t_i)) d\mu_t. \quad (3.4.5)$$

В силу (3.4.2) левая часть этого равенства сходится при  $t \rightarrow \infty$ , а возникающие в пределе множители  $|\langle \Omega_0, \Omega \rangle|^2$  в числителе и знаменателе сокращаются. Таким образом, установлена

**Теорема 3.4.1.** Пусть  $H$  удовлетворяет приведенным выше предположениям. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Omega, A_1 e^{-(t_2-t_1)} \hat{H} A_2 e^{-(t_3-t_2)} \hat{H} A_3 \dots A_n \Omega \rangle &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n A_i(q(t_i)) d\mu_t(q(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Теперь мы можем переформулировать этот результат, вводя некоторую счетно-аддитивную меру  $d\mu$  в пространстве  $\mathcal{D}'(R^1)$  вещественных обобщенных функций<sup>1)</sup> на прямой. Предел при  $t \rightarrow \infty$ , определяемый формулой (3.4.6), можно рассмотреть для всех моментов меры  $d\mu_t$ , а также для ее преобразования Фурье. Определим (обратное) преобразование Фурье  $S_t\{f\}$  меры  $d\mu_t$  формулой

$$S_t\{f\} = \int e^{iq(t)} d\mu_t, \quad f \in \mathcal{D}(R^1). \quad (3.4.7)$$

Функция  $S_t\{f\}$  отображает  $\mathcal{D}$  в поле скаляров  $C$ , т. е. является функционалом на пространстве  $\mathcal{D}$ . Иногда его называют порождающим или характеристическим функционалом меры  $d\mu_t$ . Легко убедиться в том, что  $S_t\{f\}$  обладает следующими тремя свойствами:

(1) *Непрерывность:*  $S_t\{f_n\} \rightarrow S_t\{f\}$  при  $f_n \rightarrow f$  в  $\mathcal{D}$  (т. е.  $f_n \rightarrow f$  и  $D^j f_n \rightarrow D^j f$  равномерно на компактных множествах).

(2) *Положительная определенность:*  $\sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j S_t\{f_i - \bar{f}_j\} \geq 0$  для любых последовательностей  $f_i \in \mathcal{D}$ ,  $c_i \in C$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

(3) *Нормировка:*  $S_t\{0\} = 1$ .

Заметим, что если положить  $A(q) = \sum_{j=1}^N c_j \exp[iq(f_j)]$ , то свойство

(2) эквивалентно неравенству  $\int |A|^2 d\mu_t \geq 0$ , т. е. положительности меры  $\mu_t$ .

Обратно, любой функционал  $S\{f\}$ , удовлетворяющий условиям (1)–(3), всегда является преобразованием Фурье некоторой вероятностной меры на  $\mathcal{D}'$ . Таким образом, свойства (1)–(3), которые наследуются и предельным функционалом  $S\{f\} = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t\{f\}$ ,

позволяют убедиться в существовании меры, порождаемой функционалом  $S\{f\}$ . Мы сформулируем соответствующий результат для  $R^d$ .

<sup>1)</sup> Обобщенной функцией называется непрерывный линейный функционал на пространстве  $\mathcal{D}$  функций класса  $C^\infty$  с компактным носителем. Формально можно написать  $q(f) = \int q(t)f(t)dt$ ,  $q \in \mathcal{D}'$ ,  $f \in \mathcal{D}$ . Сходимость в  $\mathcal{D}$  определяется как равномерная сходимость всех производных  $D^n f$  на компактных подмножествах  $R$ . Обобщенная функция  $q \in \mathcal{D}'$  определена двумя своими свойствами — линейностью и непрерывностью в нуле:  $q(f_n) \rightarrow 0$  при  $f_n \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ . Подробнее см. [Schwartz, 1950—1] или [Гельфанд, Шилдв, 1964—8, т. I].

**Теорема 3.4.2 (Минлос).** Пусть  $S\{f\}$  — функционал на  $\mathcal{D}(R^d)$ , удовлетворяющий условиям (1) — (3). Тогда существует единственная борелевская вероятностная мера  $d\mu(q)$  на  $\mathcal{D}'(R^d)$ , связанная с  $S\{f\}$  при помощи преобразования Фурье:

$$S\{f\} = \int e^{iq(t)} d\mu(q). \quad (3.4.8)$$

**Замечание.** Эта теорема обобщает известный результат — теорему Бохнера, в которой устанавливаются характеристические свойства преобразования Фурье борелевской вероятностной меры на  $R^N$ :  $S(X)$ ,  $X \in R^N$ , является непрерывной, положительно определенной и нормированной функцией на пространстве  $R^N$  (рассматриваемом как сопряженное пространство к  $R^N$ ). Доказательство теоремы Минлоса имеется в книге [Гельфанд, Виленкин, 1964]. Заметим, что если функционал  $S\{f\}$  может быть непрерывно продолжен на пространство Шварца  $\mathcal{S}(R^d)$  быстро убывающих функций:

$$\mathcal{S}(R^d) = \{f: x^r D^s f \in L_\infty \text{ для всех } r, s \geq 0\},$$

то мера  $d\mu$  сосредоточена на пространстве  $\mathcal{S}'(R^d)$  обобщенных функций умеренного роста.

Теперь мы покажем, как с помощью этой теоремы построить инвариантную относительно сдвигов по времени меру  $d\mu(q(\cdot))$  на  $\mathcal{D}'(R)$ . Интегрирование по этой мере дает перенормированную формулу Фейнмана — Каца: для  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$

$$\langle \Omega, A_1 e^{-(t_2-t_1)\hat{H}} A_2 \dots A_N \Omega \rangle = \int \prod_{i=1}^N A(q(t_i)) d\mu. \quad (3.4.9)$$

Мы называем эту формулу перенормированной потому, что она выражает среднее по основному состоянию  $\Omega$  гамильтониана  $A$ , а не по основному состоянию  $\Omega_0$  гамильтониана  $H_0$ . Мера  $d\mu$  строится как предел мер  $d\mu_t$  при  $t \rightarrow \infty$ . Но при этом удобнее доказывать не слабую сходимость мер  $d\mu_t$ , а сходимость их преобразований Фурье  $S_t\{f\}$  к пределу  $S\{f\}$ , который и определяет меру  $d\mu$ .

Чтобы избежать технических сложностей и представить наши результаты как частный случай результатов части II, мы ограничимся функциями  $V(q)$ , которые имеют вид четного полинома с произвольной линейной добавкой. Следующее утверждение имеет место, однако, и для гораздо более широкого класса потенциалов  $V(q)$ .

**Теорема 3.4.3.** При указанных выше предположениях для любой функции  $f \in \mathcal{D}(R)$  предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t\{f\} = S\{f\} \quad (3.4.10)$$

существует и удовлетворяет условиям (1) — (3). Следовательно, на  $\mathcal{D}'(R)$  определена мера  $d\mu$ , для которой справедливы формулы (3.4.8—9).

**Замечание.** Доказательство этой теоремы будет приведено в части II. Прямое доказательство можно было бы построить по следующей схеме. Для функции  $f$ , такой, что  $\text{supp } f \subset [\tau, T]$ , положим

$$q(f_N) = N^{-1} \sum_{j=1}^N q(t_j) f(t_j), \quad t_j = \tau + (T - \tau) \frac{j}{N},$$

где  $f_N$  — ступенчатая функция, построенная на сегментах  $[t_j, t_{j+1}]$  и такая, что  $f_N(t_j) = f(t_j)$ . Тогда по теореме 3.4.1 существует предел  $S\{f_N\} = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t\{f_N\}$ . Предельный переход при  $N \rightarrow \infty$  может быть обоснован с помощью обобщения теоремы 3.2.2.

Укажем два свойства функционала  $S\{f\}$ . Он инвариантен при сдвигах по времени и отражении во времени, т. е. при заменах  $t \rightarrow t + a$  и  $t \rightarrow -t$ , а также обладает следующим свойством положительности. Пусть  $f_t(s) = f(s - t)$  определяет временной сдвиг функции  $f$ , а  $(\theta f)(s) = f(-s)$  — действие в  $\mathcal{D}$  отражения во времени.

**Следствие 3.4.4.** *Характеристический функционал  $S\{f\}$ , задаваемый формулой (3.4.10), обладает следующими свойствами:*

- 1) *инвариантности:  $S\{f\} = S\{f_t\} = S\{\theta f\}$ ;*
- 2) *положительности при отражениях: если  $f_i(s)$  — вещественные функции, равные нулю при  $s < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , то матрица  $M_{ij} = S\{\theta f_i - f_j\}$  имеет положительные собственные значения.*

*Доказательство.* Свойство инвариантности очевидно; положительность следует из представления (3.4.9) для  $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j M_{ij}$ .

#### Литературные ссылки

[Кас, 1959], [Гельфанд, Виленкин, 1964].

## Глава 4

### Корреляционные неравенства и теорема Ли—Янга

Корреляционными неравенствами называются различные неравенства, связывающие корреляционные функции для моделей статистической механики. Корреляционные неравенства используются в квантовой теории поля для доказательства сходимости в пределе

бесконечного объема (гл. 11), при изучении фазовых переходов (гл. 16) и критической точки (гл. 17). Доказательство корреляционных неравенств для непрерывных квантовых полей основано на решеточной аппроксимации. Здесь мы приводим доказательства корреляционных неравенств только для решеточного случая. Этот случай представляет и самостоятельный интерес как модель кристаллических твердых тел. В этой же главе рассматриваются некоторые простые приложения корреляционных неравенств, а также теорема Ли — Янга, доказательство которой идейно близко к доказательству неравенств.

#### 4.1 Неравенства Гриффитса

Простейшими из корреляционных неравенств являются неравенства Гриффитса, которые утверждают, что для ферромагнитных взаимодействий общего вида математические ожидания и парные корреляционные функции положительны, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \xi^A \rangle &\geq 0 \text{ первое неравенство Гриффитса} \\ &\text{(теорема 4.1.1);} \\ \langle \xi^A \xi^B \rangle - \langle \xi^A \rangle \langle \xi^B \rangle &\geq 0 \text{ второе неравенство Гриффитса} \\ &\text{(теорема 4.1.3).} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Здесь  $A = \{a_i\}$  есть подмножество точек решетки  $i$ , взятых с кратностями  $a_i$ ,

$$\xi^A \equiv \prod_i \xi_i^{a_i} \quad (4.1.2)$$

обозначает произведение спиновых переменных. Пусть задан полиномиальный гамильтониан

$$H = - \sum_A J_A \xi^A. \quad (4.1.3)$$

Гамильтониан (4.1.3) называется *ферромагнитным*, если  $J_A \geq 0$  для всех  $A$ . Говорят, что гамильтониан порождается взаимодействием ближайших соседей, если  $J_A = 0$  для всех подмножеств  $A$ , за исключением тех, которые состоят из одной точки решетки или из двух соседних точек. Пусть  $d\mu_i(\xi_i)$  — распределение вероятностей отдельного спина, т. е. некоторая мера на  $R$ . Предположим, что для любого  $N$  выполнено следующее условие:

$$\int |\xi|^N e^{H(\xi)} \prod_{i=1}^n d\mu_i(\xi_i) < \infty. \quad (4.1.4)$$

Определим статистическую сумму

$$Z = \int e^{-H(\xi)} d\mu(\xi), \quad (4.1.5)$$



где  $d\mu(\xi) = \prod_i d\mu_i(\xi_i)$ . Среднее  $\langle F \rangle$  от функции  $F(\xi)$  по этой мере равно

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\xi) e^{-H(\xi)} d\mu(\xi) \quad (4.1.6)$$

(здесь обозначения отличаются от введенных в гл. 2 выделением из меры  $d\mu$  множителя  $e^{-H(\xi)}$ ). Неравенства Гриффитса справедливы для средних вида (4.1.6), где  $H$  — ферромагнитный гамильтониан.

Для доказательства неравенств (4.1.1) рассмотрим две решетки и два набора спиновых переменных

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \chi = (\chi_1, \dots, \chi_n).$$

Наборы  $\xi, \chi$  можно рассматривать как координаты в  $R^n \oplus R^n$ . Введем также повернутую систему координат

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_i + \chi_i), \quad q_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_i - \chi_i). \quad (4.1.7)$$

Обратное преобразование координат задается формулами

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (t_i + q_i), \quad \chi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (t_i - q_i). \quad (4.1.7')$$

Мономы  $\chi^A, t^A, q^A$  определяются так же, как и выше. Кроме того, для функции  $F = F(\xi, \chi)$  определим среднее

$$\langle F \rangle = Z^{-2} \int F(\xi, \chi) e^{-H(\xi) + H(\chi)} d\mu(\xi) d\mu(\chi). \quad (4.1.8)$$

Если функция  $F$  зависит только от  $\xi$  или только от  $\chi$ , то (4.1.8) совпадает с (4.1.6).

**Теорема 4.1.1.** Пусть  $H$  — ферромагнитный гамильтониан, меры  $d\mu_i(\xi_i)$  симметричны относительно преобразования  $\xi_i \rightarrow -\xi_i$ , и, кроме того, выполнено условие (4.1.4). Тогда все моменты меры (4.1.6) неотрицательны:

$$\langle \xi^A \rangle \geq 0.$$

*Доказательство.* Разложим экспоненту в (4.1.6) в ряд Тейлора. Учитывая (4.1.4), можно поменять порядок суммирования и интегрирования, так что

$$\langle \xi^A \rangle = Z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int \left( \sum_B J_B \xi^B \right)^j \xi^A \prod_{i=1}^n d\mu_i(\xi_i).$$

Поскольку  $Z = \int e^{-H} \prod_{i=1}^n d\mu_i(\xi_i) \geq 0$ , достаточно показать, что каждое слагаемое

неотрицательно. Возводя в степень  $\left( \sum_B \dots \right)^j$  и учитывая, что  $0 \leq J_B$ , мы сводим все к доказательству неравенств

$$0 \leq \prod_{i=1}^n \int \xi_i^C d\mu_i(\xi_i) = \int \xi^C \prod_{i=1}^n d\mu_i(\xi_i).$$

Но из симметрии мер  $d\mu_i$  вытекает, что интеграл  $\int \xi_i^{C_i} d\mu_i(\xi_i)$  или равен нулю (когда  $C_i$  нечетно), или положителен (когда  $C_i$  четно). ■

**Лемма 4.1.2.** Для любого  $A$  функция  $2^{|A|/2}(\xi^A \pm \chi^A) = (q+t)^A \pm \pm (q-t)^A$  является ферромагнитным полиномом переменных  $q$  и  $t$  (т. е. полиномом с положительными коэффициентами).

*Доказательство.* По формуле бинома Ньютона имеем

$$(q+t)^A = \sum_{0 \leq b_i \leq a_i} \prod_{i=1}^n \binom{a_i}{b_i} q_i^{a_i-b_i} t_i^{b_i},$$

$$(q-t)^A = \sum_{0 \leq b_i \leq a_i} (-1)^{\sum_{i=1}^n b_i} \prod_{i=1}^n \binom{a_i}{b_i} q_i^{a_i-b_i} t_i^{b_i}.$$

При сложении или вычитании этих разложений члены разных знаков сокращаются, а члены одного знака являются ферромагнитными. ■

**Теорема 4.1.3.** В предположениях предыдущей теоремы

$$\langle q^A t^B \rangle \geq 0, \quad (4.1.10)$$

$$\langle \xi^A \xi^B \rangle - \langle \xi^A \rangle \langle \xi^B \rangle \geq 0. \quad (4.1.11)$$

*Доказательство.* По лемме 4.1.2  $H(\xi) + H(\chi)$  есть ферромагнитный полином от переменных  $q, t$ . Как и в теореме 4.1.1, разлагая в ряд экспоненту  $e^{-(H(\xi)+H(\chi))}$ , мы сводим (4.1.10) к неравенству

$$\int q_i^{a_i} t_i^{b_i} d\mu_i(\xi_i) d\mu_i(\chi_i) \geq 0, \quad (4.1.12)$$

где  $a_i, b_i \geq 0$  — целые числа. Используя симметрию меры  $d\mu$ , получаем, что

$$\begin{aligned} d\mu(\xi) d\mu(\chi) &= d\mu(2^{-1/2}(q+t)) d\mu(2^{-1/2}(q-t)) = \\ &= d\mu(2^{-1/2}(-q-t)) d\mu(2^{-1/2}(-q+t)). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Отсюда видно, что мера (4.1.13) симметрична относительно преобразований  $(q, t) \rightarrow (-q, t)$  и  $(q, t) \rightarrow (-q, -t)$ . Следовательно, интеграл (4.1.12) или равен нулю (если  $a_i$  или  $b_i$  нечетны), или положителен (если  $a_i$  и  $b_i$  четны).

Докажем теперь неравенство (4.1.11). С помощью переменной  $\chi$  перепишем левую часть (4.1.11):

$$\begin{aligned} \langle \xi^A \xi^B \rangle - \langle \xi^A \rangle \langle \xi^B \rangle &= \langle \xi^A (\xi^B - \chi^B) \rangle = \\ &= 2^{-(|A|+|B|)/2} \langle (t+q)^A [(t+q)^B - (t-q)^B] \rangle, \end{aligned}$$

где  $|A| = \sum_{i=1}^n a_i$ . Как видно из леммы 4.1.2, в квадратных скобках стоит ферромагнитный полином, поэтому из (4.1.10) следует, что математическое ожидание неотрицательно. ■

## 4.2 Переход к бесконечному объему

Рассмотрим одно из простых приложений неравенств Гриффитса. Мы покажем, что корреляционные функции модели Изинга имеют предел при переходе к бесконечному объему. Корреляционные функции

$$\langle \xi^B \rangle = \langle \xi_1^{b_1} \dots \xi_n^{b_n} \rangle \quad (4.2.1)$$

являются моментами меры, определяемой соотношением (4.1.6).

**Предложение 4.2.1.** Пусть  $H$  — ферромагнитный гамильтониан. Тогда  $\langle \xi^B \rangle$  является монотонно возрастающей функцией констант взаимодействия  $J_A$  в  $H$ .

*Доказательство.* По теореме 4.1.3

$$0 \leq \langle \xi^B \xi^A \rangle - \langle \xi^A \rangle \langle \xi^B \rangle = \frac{d}{dJ_A} \langle \xi^B \rangle.$$

**Предложение 4.2.2.** Модель Изинга является ферромагнитной, и все ее корреляционные функции ограничены,  $\langle \xi^A \rangle \leq 1$ .

*Доказательство.* В модели Изинга  $\xi_i = \pm 1$ , следовательно,  $\xi^A = \pm 1$ . Так как  $\langle \cdot \rangle$  есть усреднение по нормированной вероятностной мере, то  $|\langle \xi^A \rangle| \leq 1$ .

Покажем теперь, что модель Изинга является ферромагнитной. Вспомним, что  $\xi_i^2 = 1$ , и перепишем (2.3.3) в виде

$$\langle \xi, \Delta_{\partial\Lambda} \xi \rangle = 2 \sum_{v=1}^d \sum_{i \in \Lambda, i+e_v \in \Lambda} (\xi_{i+e_v} \cdot \xi_i - 1).$$

Первый член является ферромагнитным, а константу можно отбросить, так как отвечающий ей множитель сокращается при делении на статистическую сумму в формуле (2.3.5). ■

Заметим, что при положительном внешнем поле  $h \geq 0$  остается ферромагнитной и модель Изинга с мерой

$$d\mu_{h, \Lambda} = \frac{\exp \left( h \sum_{i \in \Lambda} \xi_i \right) d\mu_{\Lambda}}{\int \exp \left( h \sum_{i \in \Lambda} \xi_i \right) d\mu_{\Lambda}}. \quad (4.2.2)$$

**Теорема 4.2.3.** Пусть  $h \geq 0$  в (4.2.2). Тогда корреляционные функции (4.2.1) модели Изинга (4.2.2) с внешним полем  $h$  имеют предел при  $\Lambda \uparrow R^d$ .

*Доказательство.* В формулах (2.3.4) и (4.1.6) для меры  $d\mu$  и среднего надо положить  $J_A = \beta$  при  $A = \{a_i, a_{i+e_v}\}$ ,  $i, i+e_v \in \Lambda$ ,  $a_i = a_{i+e_v} = 1$ ;  $J_A = h$  при  $A = \{a_i\}$ ,  $i \in \Lambda$ ,  $a_i = 1$  и  $J_A = 0$  в остальных случаях. Увеличение  $\Lambda$  эквивалентно возрастанию значений некоторых  $J_A$ , поэтому, согласно предложению 4.2.1,  $\langle \xi^B \rangle$  — монотонно возрастающая функция объема  $\Lambda$ . Сходимость вытекает из оценки сверху (предложение 4.2.2). ■

Аналогичное доказательство сходимости применяется и в случае решеточных полей, у которых исходное распределение для единичного спина имеет вид  $e^{-P(\xi)} d\xi$ , где  $P(\xi)$  — ограниченный снизу полином вида  $P =$  четный полином + линейная функция. В этом случае равномерная оценка моментов  $\langle \xi^A \rangle$  сверху требует дополнительного обоснования. Такая оценка легко доказывается с помощью метода многократных отражений, развиваемого в гл. 10 для непрерывных полей. Использование этого метода в решеточном случае проще, чем в непрерывном, но подробнее эти вопросы будут обсуждаться в части II.

### 4.3 $\xi^4$ -неравенства

Выберем распределение  $d\mu_i$  для отдельного спина в виде  $d\mu_i = e^{-P_i(\xi_i)} d\xi_i$ , где

$$P_i(\xi_i) = \lambda_i \xi_i^4 + \sigma_i \xi_i^2, \quad \lambda_i > 0 \text{ или } \lambda_i = 0, \sigma_i > 0. \quad (4.3.1)$$

В этом случае справедливы дополнительные корреляционные неравенства, называемые  $\xi^4$ -неравенствами, так как во взаимодействие входит четвертая степень спиновой переменной.

В дополнение к переменным  $\xi, \chi$ , введенным в § 4.1, определим две новые переменные  $\xi', \chi'$  и положим

$$\begin{aligned} t'_i &= 2^{-1/2} (\xi'_i + \chi'_i), & q'_i &= 2^{-1/2} (\xi'_i - \chi'_i), \\ \alpha_i &= 2^{-1/2} (t_i + t'_i), & \beta_i &= 2^{-1/2} (t_i - t'_i), \\ \gamma_i &= 2^{-1/2} (q_i + q'_i), & \delta_i &= 2^{-1/2} (q'_i - q_i). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Заметим, что переменные  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  и  $(\xi, \chi, \xi', \chi')$  связаны ортогональным преобразованием пространства  $R^4$ .

**Теорема 4.3.1.** Пусть полином  $P$  имеет вид (4.3.1), а гамильтониан

$$H = - \sum_{i,j} J_{i,j} \xi_i \xi_j - \sum_i h_i \xi_i; \quad J_{ij}, h_i \geq 0,$$

удовлетворяет условию (4.1.4). Тогда

$$\langle \alpha^A \beta^B \gamma^C \delta^D \rangle \geq 0, \quad (4.3.3)$$

где среднее берется по учетверенному набору переменных (произведение мер), подобно тому как это определялось в (4.1.8).

Корреляционные неравенства с дополнительными переменными (например, неравенство (4.3.3)) вводятся для того, чтобы получить затем неравенства, содержащие двойные разности исходных корреляционных функций. В качестве промежуточного шага выведем неравенства для простых разностей корреляционных функций переменных  $t, q$ .

**Следствие 4.3.2** (неравенства Лебовица):

$$\begin{aligned}\langle t^A t^B \rangle - \langle t^A \rangle \langle t^B \rangle &\geq 0, \\ \langle q^A q^B \rangle - \langle q^A \rangle \langle q^B \rangle &\geq 0, \\ \langle t^A q^B \rangle - \langle t^A \rangle \langle q^B \rangle &\leq 0.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Сначала при помощи леммы 4.1.2 убеждаемся, что каждое из выражений, стоящих ниже в квадратных скобках, ферромагнитно по переменным  $\alpha, \dots, \delta$ , а затем применяем (4.3.3):

$$\begin{aligned}\langle t^A t^B \rangle - \langle t^A \rangle \langle t^B \rangle &= \langle t^A (t^B - t'^B) \rangle = \\ &= 2^{-(|A|+|B|)/2} \langle (\alpha + \beta)^A [(\alpha + \beta)^B - (\alpha - \beta)^B] \rangle \geq 0, \\ \langle q^A q^B \rangle - \langle q^A \rangle \langle q^B \rangle &= \langle q'^A (q'^B - q^B) \rangle = \\ &= 2^{-(|A|+|B|)/2} \langle (\gamma + \delta)^A [(\gamma + \delta)^B - (\gamma - \delta)^B] \rangle \geq 0, \\ \langle t^A \rangle \langle q^B \rangle - \langle t^A q^B \rangle &= \langle t^A (q'^B - q^B) \rangle = \\ &= 2^{-(|A|+|B|)/2} \langle (\alpha + \beta)^A [(\gamma + \delta)^B - (\gamma - \delta)^B] \rangle \geq 0.\end{aligned}$$

*Доказательство теоремы 4.3.1.* Предположим, что  $\lambda_i > 0$  для всех  $i \in \Lambda$ . Общий случай рассматривается аналогично. С точностью до множителя  $Z^{-4}$  среднее в (4.3.3) имеет вид

$$\int \alpha^A \dots \delta^D e^{-[H(\xi) + H(\chi) + H(\xi') + H(\chi')]} \prod_i (d\mu_i(\xi_i) \dots d\mu_i(\chi'_i)). \quad (4.3.4)$$

Здесь  $H(\xi) + \dots + H(\chi') = - \sum_{i,j} J_{ij} [\xi_i \xi_j + \dots + \chi'_i \chi'_j] - \sum_i h_i [\xi_i + \chi_i + \xi'_i + \chi'_i]$ . Перепишем эти суммы в переменных  $\alpha, \dots, \delta$ . Так как преобразование  $(\xi_i, \chi_i, \xi'_i, \chi'_i) \rightarrow (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$  является ортогональным, а коэффициенты [...] при  $J_{ij}$  имеют вид скалярного произведения в переменных  $\xi, \dots, \chi'$ , то эти коэффициенты сохраняют прежний вид и в переменных  $\alpha, \dots, \delta$ . Поэтому, используя равенство  $2\alpha_i = 2^{1/2}(t_i + t'_i) = (\xi_i + \chi_i + \xi'_i + \chi'_i)$ , получаем, что

$$H(\xi) + \dots + H(\chi') = - \sum J_{ij} [\alpha_i \alpha_j + \dots + \delta_i \delta_j] - 2 \sum h_i \alpha_i. \quad (4.3.5)$$

Гамильтониан (4.3.5) является ферромагнитным, поскольку  $J_{ij} \geq 0$  и  $h_i \geq 0$ . Разложив экспоненту в (4.3.4) и взяв произведение интегралов по различным узлам решетки, мы сведем задачу к доказательству неравенства

$$\int \alpha_i^k \beta_i^l \gamma_i^m \delta_i^n d\mu_i(\xi_i) \dots d\mu_i(\chi'_i) \geq 0 \quad (4.3.6)$$

для всех  $k, l, m, n$ . Для простоты опускаем далее индекс  $i$ . Воспользуемся явным видом меры  $d\mu(\xi) = e^{-\lambda \xi^4 - \sigma \xi^2} d\xi$ , где  $\lambda > 0$ . В силу ортогональности замены переменных  $\xi, \dots \leftrightarrow \alpha, \dots$ , имеем  $d\xi \dots d\chi' = d\alpha d\beta d\gamma d\delta$  и

$$\sigma(\xi^2 + \chi^2 + \xi'^2 + \chi'^2) = \sigma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2).$$

С помощью явных вычислений получаем

$$\begin{aligned}2^4 (\xi^4 + \chi^4 + \xi'^4 + \chi'^4) &= (\alpha + \beta + \gamma - \delta)^4 + (\alpha + \beta - \gamma + \delta)^4 + \\ &+ (\alpha - \beta + \gamma + \delta)^4 + (-\alpha + \beta + \gamma + \delta)^4 = \\ &= 4(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4) + 12(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \dots) - 4! 4\alpha\beta\gamma\delta.\end{aligned}$$

Следовательно,  $P(\xi) + P(\chi) + P(\xi') + P(\chi')$  равняется ферромагнитному члену  $(-\alpha\beta\gamma\delta)$  плюс четная функция от  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , и можно переписать (4.3.6) в виде

$$\int \alpha^k \beta^l \gamma^n \delta^m e^{c\alpha\beta\gamma\delta} e^{-Q} d\alpha d\beta d\gamma d\delta \geq 0.$$

Здесь  $c$  — положительная константа, а  $Q$  — четная функция от  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ . Разложим  $e^{c\alpha\beta\gamma\delta}$  в степенной ряд. После этого, очевидно, достаточно доказать, что

$$\int \alpha^k \beta^l \gamma^m \delta^n e^{-Q} d\alpha d\beta d\gamma d\delta \geq 0 \quad (4.3.7)$$

для всех  $k, l, m, n$ . Но  $Q$  — четная функция, поэтому (4.3.7) обращается в нуль, если хотя бы одно из чисел  $k, l, m, n$  нечетно. ■

**Замечание.** Хотя неравенство (4.3.3) обобщается на случай поли-

номов  $P(x) = \sum_{j=2}^n c_j x^{2j} + \sigma x^2$ , где все  $c_j \geq 0$ , только  $\xi^4$ -полиномы (4.3.1) (при переходе к непрерывному полю в  $R^d$ ) допускают перенормировки в размерностях  $d \geq 2$ .

**Следствие 4.3.3.** Пусть  $h_i \equiv 0$  и  $|A|, |B|$  четны. Тогда

$$0 \leq \langle \xi^A \xi^B \rangle - \langle \xi^A \rangle \langle \xi^B \rangle \leq \sum \langle \xi^{A_1 B_1} \rangle \langle \xi^{A_2 \xi B_2} \rangle,$$

где суммирование проводится по всем разбиениям  $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, B_2)$ , для которых  $|A_1|, |B_1|$  нечетны.

**Доказательство.** Первое неравенство следует из теоремы 4.1.3. Для доказательства второго воспользуемся третьим неравенством из следствия 4.3.2:

$$\begin{aligned} 2(|A|+|B|)^2 \langle t^A q^B \rangle &= \sum_{\substack{A=(A_1, A_2) \\ B=(B_1, B_2)}} (-1)^{|B_2|} \langle \xi^{A_1} \chi^{A_2} \xi^{B_1} \chi^{B_2} \rangle = \\ &= \sum (-1)^{|B_2|} \langle \xi^{A_1} \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \xi^{B_2} \rangle \leq 2^{(|A|+|B|)^2} \langle t^A \rangle \langle q^B \rangle = \\ &= \sum (-1)^{|B_2|} \langle \xi^{A_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \rangle \langle \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{B_2} \rangle. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что, выбросив из этой суммы члены, соответствующие нетривиальным разбиениям с четным  $|B_2|$ , мы не нарушим неравенство. Действительно, положим

$$\langle \xi^A \xi^B \rangle^T = \langle \xi^A \xi^B \rangle - \langle \xi^A \rangle \langle \xi^B \rangle.$$

По теореме 4.1.3  $\langle \dots \rangle^T \geq 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \xi^{A_1} \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \xi^{B_2} \rangle - \langle \xi^{A_1} \rangle \langle \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \rangle \langle \xi^{B_2} \rangle &= \\ = \langle \xi^{A_1} \xi^{B_1} \rangle^T \langle \xi^{A_2} \xi^{B_2} \rangle^T + \langle \xi^{A_1} \rangle \langle \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \xi^{B_2} \rangle^T + \langle \xi^{A_1} \xi^{B_1} \rangle^T \langle \xi^{A_2} \rangle \langle \xi^{B_2} \rangle &\geq 0, \end{aligned}$$

что доказывает наше утверждение. Члены в правой части, соответствующие нечетным  $|B_2|$ , равны нулю. В самом деле,  $\langle \xi^{B_2} \rangle = 0$ , так как среднее инвариантно относительно преобразования  $\xi \rightarrow -\xi$ . По той же причине равны нулю те члены в левой части, для которых  $|B_2|$  нечетно, а  $|A_2|$  четно. Остальные члены и приводят к доказываемому неравенству. ■

**Следствие 4.3.4.** Пусть  $h_i \geq 0$  для всех  $i$  и выполнены условия теоремы. Тогда

$$\langle \xi_i \rangle \geq 0, \quad \langle \xi_i \xi_j \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle \geq 0$$

$$\text{и} \quad \langle \xi_i \xi_j \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \xi_k \rangle - \langle \xi_j \rangle \langle \xi_i \xi_k \rangle - \langle \xi_k \rangle \langle \xi_i \xi_j \rangle + 2 \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle \langle \xi_k \rangle \leq 0.$$

*Доказательство.* Последнее неравенство вытекает из следствия 4.3.2:

$$\begin{aligned} 2^{3/2} \langle t_i q_j q_k \rangle &= 2 (\langle \xi_i \xi_j \xi_k \rangle - \langle \xi_i \xi_j \rangle \langle \xi_k \rangle - \langle \xi_i \xi_k \rangle \langle \xi_j \rangle + \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \xi_k \rangle) \leq \\ &\leq 2^{3/2} \langle t_i \rangle \langle q_j q_k \rangle = 2 (2 \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \xi_k \rangle - 2 \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle \langle \xi_k \rangle). \end{aligned}$$

При  $h_i \geq 0$  имеем  $\langle \xi_j \rangle \geq 0$ , так как  $\langle \xi_j \rangle = 0$  в случае, когда  $h_i = 0$  при всех  $i$ , и  $d\langle \xi_j \rangle / dh_i = \langle \xi_i \xi_j \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle \geq 0$  по теореме 4.3.1. ■

**Замечание.** Легко видеть, что  $\langle \xi_i \rangle = \partial \ln Z / \partial h_i$ , и вообще усеченные корреляционные функции (иначе называемые функциями Урселла или связными  $n$ -точечными функциями):

$$U(i_1, \dots, i_\nu) = \partial^\nu \ln Z / \partial h_{i_1} \dots \partial h_{i_\nu},$$

при  $\nu = 1, 2, 3$  в точности являются комбинациями корреляционных функций, рассмотренных в предыдущем следствии. Если все  $h_i = 0$  и  $\nu$  нечетно, то  $U(i_1, \dots, i_\nu) = 0$  в силу симметрии относительно преобразования  $\xi \rightarrow -\xi$ . Если  $\nu$  четно и все  $h_i = 0$ , то  $U(i_1, i_2) \geq 0$  (теорема 4.1.3),  $U(i_1, i_2, i_3, i_4) \leq 0$  (частный случай следствия 4.3.3). Справедливо также неравенство  $U(i_1, \dots, i_6) \geq 0$  [Cartier, 1974; Percus, 1975; Sylvester, 1975]. Существует гипотеза, что для любого четного  $\nu$

$$(-1)^{\nu/2} U(i_1, \dots, i_\nu) \leq 0.$$

**Следствие 4.3.5.** Пусть  $h_i \geq 0$  для всех  $i$ . Тогда

$$\langle \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} \rangle \leq \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \rangle \dots \langle \xi_{i_{2j-1}} \xi_{i_{2j}} \rangle \langle \xi_{i_{2j+1}} \rangle \dots \langle \xi_{i_n} \rangle,$$

где внутреннее суммирование проводится по всевозможным наборам  $j$  пар из  $n$  индексов  $\{i_1, \dots, i_n\}$ .

*Доказательство.* Воспользуемся следствием 4.3.2:

$$\begin{aligned} 2^{(n+2)/2} \langle t_1 \dots t_n q_{n+1} q_{n+2} \rangle &= \sum_{\substack{\{1, \dots, n\} = A_1 \cup A_2 \\ \{n+1, n+2\} = B_1 \cup B_2}} (-1)^{|B_2|} \langle \xi^{A_1} \chi^{A_2} \xi^{B_1} \chi^{B_2} \rangle = \\ &= \sum (-1)^{|B_2|} \langle \xi^{A_1} \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \xi^{B_2} \rangle \leq \sum (-1)^{|B_2|} \langle \xi^{A_1} \rangle \langle \xi^{A_2} \rangle \langle \xi^{B_1} \rangle \langle \xi^{B_2} \rangle \end{aligned}$$

Отбрасывая (как и в доказательстве следствия 4.3.3) отрицательные члены в правой части (нечетные  $|B_2|$ ) и все члены, соответствующие четным  $|B_2|$  и нетривиальным разбиениям  $A = A_1 \cup A_2$ , получаем, что

$$\langle \xi_1 \dots \xi_{n+2} \rangle \leq \langle \xi_1 \dots \xi_n \rangle \langle \xi_{n+1} \xi_{n+2} \rangle + \sum_{A=A_1 \cup A_2} \langle \xi^{A_1} \xi_{n+1} \rangle \langle \xi^{A_2} \xi_{n+2} \rangle.$$

Из этого неравенства следствие 4.3.5 получается индукцией по  $n$ . ■

## 4.4 Неравенство ФКЖ

Неравенство ФКЖ<sup>1)</sup> формулируется так же, как второе неравенство Гриффитса. При этом, однако, налагаются другие условия и на вид взаимодействия, и на допустимый класс наблюдаемых. Определим отношение порядка в  $R^n$  следующим соотношением:  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \leq \chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \Leftrightarrow \xi_i \leq \chi_i$  для всех  $i$ . (4.4.1)

Функция  $F(\xi)$  называется *монотонной*, если она монотонна относительно этого порядка.

**Теорема 4.4.1.** Пусть  $F$  и  $G$  — монотонно возрастающие функции от  $\xi$ , а среднее  $\langle \cdot \rangle$  определяется выражениями (2.3.1) и (2.3.4). Тогда

$$\langle F \rangle \langle G \rangle \leq \langle FG \rangle. \quad (4.4.2)$$

**Замечание.** Это неравенство сохранится, если к квадратичной форме в (2.3.4), определяющей гауссову часть меры, добавить любое число граничных членов вида  $\alpha_j (\xi_j - \gamma_j)^2$ ,  $\alpha_j \geq 0$ , так как эти члены могут быть включены в полиномы  $P_j$ . При этом полином  $P_j$  не обязательно должен иметь вид: четный + линейный.

*Доказательство.* Переходя к двойному набору переменных  $\xi$  и  $\chi$ , необходимо показать, что

$$\langle [F(\xi) - F(\chi)] [G(\xi) - G(\chi)] \rangle \geq 0. \quad (4.4.3)$$

Пусть  $n = |\Lambda|$  — число точек в  $\Lambda$ . При  $n = 1$  утверждение справедливо, так как разности  $F(\xi) - F(\chi)$  и  $G(\xi) - G(\chi)$  имеют одинаковый знак в силу монотонности функций  $F$  и  $G$ . Предположим теперь по индукции, что теорема доказана для всех  $\Lambda$ , состоящих из  $n - 1$  точек. Введем обозначение

$$\xi = (\xi, \xi_n), \quad \xi = \xi_1, \dots, \xi_{n-1},$$

и аналогично представим  $\chi$ . Перепишем левую часть неравенства (4.4.3) в виде повторного интеграла и покажем, что при всех значениях  $\xi_n, \chi_n$  интеграл по  $d\xi d\chi$  неотрицателен. Точнее, пусть

$$Z(\alpha) = \langle \delta(\xi_n - \alpha) \rangle, \quad \langle F \rangle_{\xi_n = \alpha} = Z(\alpha)^{-1} \langle \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) \rangle \quad (4.4.4)$$

и  $\langle \cdot \rangle_{\xi_n = \alpha, \chi_n = \gamma} \equiv \langle \cdot \rangle_{\alpha\gamma}$  — аналогичное среднее по переменным  $\xi, \chi$ . В силу нормировки (4.4.4) справедливо тождество

$$\begin{aligned} \langle [F(\xi) - F(\chi)] [G(\xi) - G(\chi)] \rangle_{\alpha\gamma} &= \langle FG \rangle_{\alpha} + \langle FG \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\alpha} = \\ &= [\langle FG \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\alpha}] + [\langle FG \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\gamma}] + [\langle F \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\gamma}] [\langle G \rangle_{\alpha} - \langle G \rangle_{\gamma}]. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Покажем, что выражение (4.4.5) неотрицательно. Первые два члена неотрицательны по предположению индукции, следовательно, достаточно проверить, что множители, составляющие третий член, имеют одинаковый знак. Воспользуемся зависимостью  $Z$  от  $\alpha$  (см. (4.4.4)) и определениями (2.3.3—4); получим, что

$$\frac{d}{d\alpha} \langle F \rangle_{\alpha} = \beta \sum_i \{ (\xi_i - \alpha) F(\xi) \rangle_{\alpha} - \langle \xi_i - \alpha \rangle_{\alpha} \langle F(\xi) \rangle_{\alpha} \} + \left\langle \frac{dF}{d\xi_n} \right\rangle_{\alpha},$$

где суммирование проводится по ближайшим соседям  $n$ -й точки. Заметим, что члены, пропорциональные  $P'(\xi_n)$ , сокращаются. Поскольку линейная функция

<sup>1)</sup> Неравенство Фортунэна, Кастелена, Жинибра. — Прим. перев.



$\xi \rightarrow \xi_i - \alpha$  монотонна, вновь применимо индуктивное предположение, и, следовательно,  $\langle F \rangle_\alpha$  есть монотонно возрастающая функция от  $\alpha$ . То же самое верно и для  $\langle G \rangle_\alpha$ , поэтому третий член в (4.4.5) неотрицателен. ■

#### 4.5 Теорема Ли—Янга

Термодинамические функции, такие, как свободная энергия, давление и т. д., являются, вообще говоря, кусочно-аналитическими функциями. Границами областей аналитичности служат поверхности фазовых переходов. Вдоль этих поверхностей сами термодинамические функции или их производные испытывают разрывы. В некоторых случаях можно доказать отсутствие фазовых переходов при ненулевом магнитном поле  $h$  (т. е. при ненулевом линейном взаимодействии в гамильтониане). Одним из результатов такого типа является теорема Ли — Янга, в которой утверждается аналитичность по  $h$  при  $\operatorname{Re} h \neq 0$ , или, в терминах активности  $z = e^h$ , при  $|z| \neq 1$ .

Рассмотрим систему с гамильтонианом  $H$ , у которой распределение отдельного спина имеет вид  $d\mu_i(\xi) = e^{-P_i(\xi)} d\xi$ , где

$$P_i(\xi_j) = a_j \xi_j^4 + b_j \xi_j^2, \quad H(\xi) = - \sum_{i,j} J_{ij} \xi_i \xi_j - \sum_i h_i \xi_i. \quad (4.5.1)$$

Здесь  $a_j > 0$ ,  $J_{ij} \geq 0$ ,  $b_j$  — вещественные числа. Теорема Ли — Янга показывает, что при  $\operatorname{Re} h_i \neq 0$  в этой системе нет фазовых переходов.

Свободная энергия  $f$  определяется соотношением

$$f = f_\Lambda = (1/|\Lambda|) \ln Z_\Lambda, \quad (4.5.2)$$

где  $Z_\Lambda$  — статистическая сумма

$$Z_\Lambda(\{h_i\}) = \int e^{-H(\xi)} d\mu(\xi) = \int e^{-H(\xi)} \prod_{i \in \Lambda} e^{-P_i(\xi_i)} d\xi_i. \quad (4.5.3)$$

В конечном объеме  $\Lambda$  функция  $Z_\Lambda$ , с очевидностью, аналитична по переменным  $h_i$ . Поэтому  $f_\Lambda$  — аналитическая функция от  $h_i$  в любой области, не содержащей нулей функции  $Z_\Lambda$ .

**Теорема 4.5.1.** Пусть имеется система (4.5.1) с ферромагнитным парным взаимодействием

$$J_{ij} \geq 0, \quad (4.5.4)$$

и пусть  $h_i \equiv h$ . Тогда если  $\operatorname{Re} h \neq 0$ , то  $Z_\Lambda \neq 0$ .

**Замечание.** Доказательство этой теоремы, приведенное в работе [Simon, Griffiths, 1973], довольно запутано; сначала доказывается теорема Ли — Янга для модели Изинга, а затем распределение  $e^{-P(\xi)} d\xi$  приближается с помощью суперпозиций моделей Изинга. Мы приведем более простое доказательство, принадлежащее Данлопу [Dunlop, 1977]. Отсутствие нулей у  $Z_\Lambda$  доказывается при этом

в меньшей области  $|\operatorname{Im} h_i| \leq \operatorname{Re} h_i$ , однако в ходе доказательства удается получить оценку снизу для  $|Z_\Lambda|$ .

**Теорема 4.5.1'.** *Рассмотрим систему (4.5.1) с ферромагнитным парным взаимодействием (4.5.4). Пусть  $|\operatorname{Im} h_i| \leq \operatorname{Re} h_i$  при всех  $i \in \Lambda$ . Тогда*

$$0 < Z_\Lambda(h_i = 0) \leq Z_\Lambda(\operatorname{Re} h_i - |\operatorname{Im} h_i|) \leq |Z_\Lambda(h_i)|. \quad (4.5.5)$$

**Замечание 1.** В силу равенства  $Z_\Lambda(h) = Z_\Lambda(-h)$ , в отраженном секторе  $|\operatorname{Im} h_i| \leq -\operatorname{Re} h_i$ ,  $i \in \Lambda$ , выполняются неравенства

$$Z_\Lambda(h_i = 0) \leq Z_\Lambda(-\operatorname{Re} h_i - |\operatorname{Im} h_i|) \leq |Z_\Lambda(h_i)|. \quad (4.5.6)$$

**Замечание 2.** Для большинства приложений достаточно рассматривать случай  $h_i \equiv h$  (т. е. пространственно-однородное магнитное поле).

Для доказательства теоремы нам понадобится понятие положительно определенной функции  $f(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]^N$ ; пусть  $f(\theta)$  разлагается в ряд Фурье

$$f(\theta) = (2\pi)^{-N/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}, \quad n\theta \equiv \sum_{j=1}^N n_j \theta_j. \quad (4.5.7)$$

**Определение 4.5.2.** Функция  $f$  называется *положительно определенной*, если все ее коэффициенты Фурье неотрицательны,  $f_n \geq 0$ . Обозначим через  $\mathcal{P}$  множество положительно определенных функций  $f$ .  $\mathcal{P}$  определяет естественный порядок:  $f \leq g$ , если  $g - f \in \mathcal{P}$ , т. е.  $f_n \leq g_n$  при всех  $n$ .

**Предложение 4.5.3.** *Множество  $\mathcal{P}$  замкнуто относительно операций сложения и умножения функций, а также комплексного сопряжения, умножения на положительную константу и взятия экспоненты. Иными словами,  $\mathcal{P}$  есть мультипликативный выпуклый конус. Перечисленные операции сохраняют порядок, определяемый  $\mathcal{P}$ .*

**Доказательство.** Сложение и комплексное сопряжение, очевидно, не выводят из  $\mathcal{P}$ . Умножение задается сверткой коэффициентов Фурье и, следовательно, сохраняет их положительность. Разложив экспоненту в ряд, убеждаемся, что взятие экспоненты также не выводит из  $\mathcal{P}$ . ■

**Доказательство теоремы 4.5.1'.** Мы будем использовать представление  $Z(h)$  через удвоенный набор переменных  $\xi, \chi$ . Введем также переменные  $t, q$  и соответствующие им полярные координаты  $\rho, \theta$ :

$$t_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_j + \chi_j) = \rho_j \cos \theta_j, \quad q_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_j - \chi_j) = \rho_j \sin \theta_j. \quad (4.5.8)$$

План доказательства состоит в том, чтобы показать, что интеграл

$$|Z(h)|^2 = \int e^{-[H(\xi) + \overline{H}(\chi)]} \prod_{i \in \Lambda} e^{-[P_i(\xi_i) + P_i(\chi_i)]} d\xi_i d\chi_i, \quad (4.5.9)$$

выраженный в полярных координатах, является интегралом от произведения положительно определенных функций. Коэффициенты Фурье этих функций моно-

точно зависят от  $\operatorname{Re} h \pm \operatorname{Im} h$ . Вначале перепишем в полярных координатах

$$\exp[-P_i(\xi_i) - P_i(\chi_i)] d\xi_i d\chi_i = \nu_i(\rho_i, \theta_i) d\rho_i d\theta_i \quad (4.5.10)$$

и покажем, что  $\nu_i(\rho, \theta)$  — положительно определенная функция от  $\theta$ . Так как  $\prod_i \nu_i(\rho_i, \theta_i) d\rho_i d\theta_i$  есть произведение положительно определенных мер, то и сама эта мера является положительно определенной по переменным  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ .

Проверим теперь положительную определенность  $\nu_i$ . Заметим, что  $d\xi d\chi = \rho d\rho d\theta$ , поэтому

$$\begin{aligned} \nu_i(\rho, \theta) &= \rho \exp[-P_i(\xi) - P_i(\chi)] = \\ &= \rho \exp[-a_i(\xi^4 + \chi^4) - b_i(\xi^2 + \chi^2)]. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Замена переменных (4.5.8) ортогональна, следовательно,

$$\xi^2 + \chi^2 = t^2 + q^2 = \rho^2, \quad (4.5.12a)$$

$$\xi^2 - \chi^2 = \frac{1}{2}[(t+q)^2 - (t-q)^2] = 2tq = \rho^2 \sin 2\theta. \quad (4.5.12b)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \xi^4 + \chi^4 &= \frac{1}{2}[(\xi^2 + \chi^2)^2 + (\xi^2 - \chi^2)^2] = \frac{1}{2}\rho^4(1 + \sin^2 2\theta) = \\ &= \frac{1}{4}\rho^4[3 - \cos 4\theta], \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

$$\nu_i(\rho, \theta) = \rho \exp\left[-\frac{3}{4}a_i\rho^4 - b_i\rho^2\right] \exp\left[\frac{1}{4}a_i\rho^4 \cos 4\theta\right]. \quad (4.5.14)$$

Так как  $a_i > 0$ , а  $\cos 4\theta$  есть положительно определенная функция, то из предложения 4.5.3 следует, что функция  $\nu_i$  положительно определена.

В качестве второго шага доказательства перепишем выражение  $-[H(\xi) + \overline{H(\chi)}]$  в полярных координатах и проверим, что оно представляется в виде суммы двух положительно определенных функций. Действительно,

$$\xi_i \xi_j + \chi_i \chi_j = t_i t_j + q_i q_j = \rho_i \rho_j \cos(\theta_i - \theta_j),$$

поэтому сумма

$$\sum_{i,j} J_{ij}(\xi_i \xi_j + \chi_i \chi_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \rho_i \rho_j [e^{i(\theta_i - \theta_j)} + e^{-i(\theta_i - \theta_j)}] \quad (4.5.15)$$

положительно определена. Кроме того, функция

$$\begin{aligned} h_j \xi_j + \bar{h}_j \chi_j &= (\operatorname{Re} h_j)(\xi_j + \chi_j) + i(\operatorname{Im} h_j)(\xi_j - \chi_j) = \\ &= \sqrt{2}(\operatorname{Re} h_j)t_j + i\sqrt{2}(\operatorname{Im} h_j)q_j = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_j(\operatorname{Re} h_j + \operatorname{Im} h_j)e^{i\theta_j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_j(\operatorname{Re} h_j - \operatorname{Im} h_j)e^{-i\theta_j} \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

положительно определена при  $0 \leq \operatorname{Re} h_j \pm \operatorname{Im} h_j$ , т. е.  $|\operatorname{Im} h_j| \leq \operatorname{Re} h_j$ . Так как  $[-H(\xi) - \overline{H(\chi)}]$  есть положительно определенная функция (4.5.15) плюс сумма по  $j$  положительно определенных функций (4.5.16), то из предложения 4.5.3 следует, что

$$\exp[-H(\xi) - \overline{H(\chi)}] = \exp\left[\sum_{i,j} J_{ij}(\xi_i \xi_j + \chi_i \chi_j)\right] \exp\left[\sum_j (h_j \xi_j + \bar{h}_j \chi_j)\right]$$

есть произведение двух положительно определенных функций. Более того, в силу (4.5.16),  $|Z(h)|^2$ , заданное выражением (4.5.9), является монотонной функцией

от  $\operatorname{Re} h_j + \operatorname{Im} h_j$  и  $\operatorname{Re} h_j - \operatorname{Im} h_j$ . Отсюда следует неравенство (4.5.5), так как

$$0 \leq \operatorname{Re} h_j - |\operatorname{Im} h_j| = \min_{\pm} (\operatorname{Re} h_j \pm \operatorname{Im} h_j). \blacksquare$$

## 4.6 Аналитичность свободной энергии

В этом параграфе доказывается результат об аналитичности свободной энергии в бесконечном объеме для решеточных моделей теории поля в случае, когда применима теорема Ли — Янга. Рассматривается также кластерное свойство парной корреляционной функции для таких моделей и для соответствующих им изинговых пределов.

Пусть  $Z_\Lambda$  есть статистическая сумма в объеме  $\Lambda$ . Свободная энергия в объеме  $\Lambda$  определяется равенством

$$f_\Lambda = (1/|\Lambda|) \ln Z_\Lambda. \quad (4.6.1)$$

Теорема Ли — Янга, доказанная в предыдущем параграфе для  $\xi^4$ -моделей, утверждает аналитичность  $f_\Lambda(h_j)$  при  $\operatorname{Re} h_j \neq 0$ . Ниже изучаются пределы таких моделей, во-первых, при  $\Lambda \rightarrow \infty$  и, во-вторых, при таком изменении распределения отдельного спина, чтобы в пределе возникла непрерывная теория или модель Изинга.

Заметим вначале, что сходимость  $f_\Lambda$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$  следует из так называемых неравенств обусловленности, которые будут установлены в гл. 10. Для малых  $\beta$  сходимость может быть также получена с помощью методов разложения в ряд, развитых в гл. 2. Мы не будем сейчас доказывать сходимость, а только сформулируем частный случай предложения 10.3.3 для решеточных моделей.

**Предложение 4.6.1.** Пусть  $Z_\Lambda$  есть статистическая сумма решеточного поля с трансляционно-инвариантным парным ферромагнитным взаимодействием ближайших соседей

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \xi_i \xi_j - \sum_j h_j \xi_j, \quad J, h_j \geq 0,$$

и распределением отдельного спина  $d\mu_1(\xi_i) = e^{-P(\xi_i)} d\xi_i$ , и пусть выполнено условие (4.1.4). Тогда при  $\Lambda \uparrow \infty$  существует предел

$$f_\Lambda \rightarrow f. \quad (4.6.2)$$

**Теорема 4.6.2.** Пусть выполнены условия предложения 4.6.1. Если для  $Z_\Lambda(h)$  справедлива оценка Ли — Янга (4.5.5), то  $f(h)$  аналитична при  $|\operatorname{Im} h_j| < \operatorname{Re} h_j$ .

**Замечание 1.** С целью избежать технических сложностей, связанных с рассмотрением функций бесконечного числа комплексных переменных  $h_j$ , положим  $h_j = h$  и докажем аналитичность  $f(h)$  при  $|\operatorname{Im} h| < \operatorname{Re} h$ . Фактически, используя отражение и теорему Ли — Янга 4.5.1 (а не теорему 4.5.1', доказанную в предыдущем

параграфе), можно показать, что  $\operatorname{Re} h \neq 0$  есть область аналитичности.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$g_{\Lambda}(h) = Z_{\Lambda}(h)^{1/|\Lambda|} = e^{f_{\Lambda}(h)}. \quad (4.6.3)$$

Тогда

$$g_{\Lambda}(\operatorname{Re} h - |\operatorname{Im} h|) \leq |g_{\Lambda}(h)| \leq g_{\Lambda}(\operatorname{Re} h). \quad (4.6.4)$$

Оценка сверху получается, если взять абсолютную величину в определении  $Z_{\Lambda}$ , а оценка снизу вытекает из теоремы 4.5.1'. По предложению 4.6.1  $g_{\Lambda}(h) \rightarrow g(h)$  при вещественных  $h$ ; таким образом, из оценки (4.6.4) следует, что  $g_{\Lambda}(h)$  равномерно ограничено по  $\Lambda$  в любом компактном подмножестве  $K$  области  $|\operatorname{Im} h| < \operatorname{Re} h$ . Кроме того,  $g_{\Lambda}(h)$  аналитична по  $h$  при  $h \in K$ , так как, по теореме 4.5.1',  $Z_{\Lambda}(h) \neq 0$  при  $h \in K$ . В силу предложения 4.6.1,  $f_{\Lambda}(h)$  сходится при вещественных  $h$ . Выберем компактное множество  $K$  пересекающимся с вещественной осью  $h$ . Тогда на пересечении  $g_{\Lambda}(h) \rightarrow g(h)$ . По теореме Витали получаем, что  $g_{\Lambda}(h) \rightarrow g(h)$  для всех  $h$  из области  $|\operatorname{Im} h| < \operatorname{Re} h$ , причем функция  $g(h)$  аналитична в этой области и равномерно ограничена в любом компактном подмножестве  $K$ . Из (4.6.4) следует, что для любого  $h \in K$

$$|g(h)| = \lim_{\Lambda \uparrow \infty} |g_{\Lambda}(h)| \geq \lim_{\Lambda \uparrow \infty} g_{\Lambda}(\operatorname{Re} h - |\operatorname{Im} h|) = \exp[f(\operatorname{Re} h - |\operatorname{Im} h|)]. \quad (4.6.5)$$

Следовательно,  $|g(h)| \neq 0$  при  $|\operatorname{Im} h| < \operatorname{Re} h$ . Поэтому  $\ln g(h)$  существует и является аналитической функцией от  $h$ . ■

**Замечание 2.** Подобные рассуждения можно использовать и в случае, когда распределения отдельного спина имеют вид

$$d\mu_{\lambda}(\xi) = \frac{e^{-P_{\lambda}(\xi)} d\xi}{\int e^{-P_{\lambda}(\xi)} d\xi}, \quad P_{\lambda}(\xi) = \lambda(\xi^2 - 1)^2. \quad (4.6.6)$$

В пределе при  $\lambda \rightarrow \infty$  получается модель Изинга [J. Rosen, 1977], и для  $\Lambda < \infty$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем  $Z_{\Lambda}(\lambda, h) \rightarrow Z_{\Lambda}^{\text{Изинг}}(h)$ . При вещественных  $h$  сходимость вытекает из теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Таким образом, для модели Изинга справедлива, оценка Ли — Янга, и поэтому функция  $f^{\text{Изинг}}(h)$  аналитична при  $|\operatorname{Im} h| < \operatorname{Re} h$ .

**Замечание 3.** Аналогичные соображения применимы, когда существует непрерывный предел решеточной теории, например при надлежащем выборе  $J$ ,  $a$ ,  $b$  как функций параметра решетки  $\varepsilon$ . Известно, что при размерности пространства-времени  $d = 1, 2, 3$  предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (непрерывный предел теории поля) существует. В части II мы докажем существование этого предела при  $d = 2$ . Таким образом, мы заключаем, что свободная энергия  $f(h)$  для модели  $\phi^4$  квантовой теории поля аналитична в области  $|\operatorname{Im} h| < \operatorname{Re} h$ .

**Замечание 4.** Теорема Ли — Янга справедлива также для систем с двух- или трехкомпонентными спинами, инвариантными относи-

тельно группы вращений  $O(2)$  или  $O(3)$  соответственно. Другими словами, во взаимодействии  $\xi_i \xi_j$  заменяется на  $\xi_i \cdot \xi_j$ , а  $\xi_i^4$  на  $(\xi_i^2)^2$ , где  $\xi$  есть двух- или трехкомпонентный вектор [Dunlop, Newman, 1975]. Верна ли теорема Ли — Янга для спинов с числом компонент 4 и более, неизвестно.

**Замечание 5.** Теорема Ли — Янга и приведенное здесь доказательство обобщаются на случай  $Z_2$ -решеточных калибровочных теорий [Dunlop, 1980] (см. § 20.9). Верна ли теорема Ли — Янга для других калибровочных групп, неизвестно.

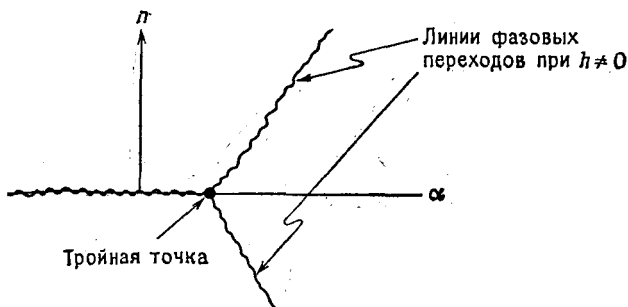


Рис. 4.1. Линии фазовых переходов для взаимодействия  $P(\xi) = \xi^2(\xi^2 - 1)^2 + \alpha\xi^2$  или для модели Изинга со спином 1 (распределение отдельного спина  $d\mu_i = (1/2 - \alpha)(\delta_{-1} + \delta_1) + 2\alpha\delta_0$ ). См. также § 20.5.

**Замечание 6.** В общем случае четного полинома  $P(\xi)$  степени 6 и выше нет оснований ожидать аналитичности при  $\text{Re } h \neq 0$ . То же самое относится к модели Изинга «со спином 1», для которой  $d\mu_i(\xi) = (\frac{1}{2} - \alpha)\delta_{-1}(\xi) + 2\alpha\delta_0(\xi) + (\frac{1}{2} - \alpha)\delta_1(\xi)$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ . Такая мера  $d\mu_i(\xi)$  может быть получена как предел мер, определяемых последовательностью полиномов степени 6. В случае приведенной выше меры  $d\mu_i$  или в случае  $P = \xi^2(\xi^2 - 1)^2 + \alpha\xi^2$  получается фазовая диаграмма, показанная на рис. 4.1. Из того, что при  $h \neq 0$  имеются линии фазовых переходов, вытекает, что для некоторых полиномов 6-й степени теорема Ли — Янга неверна.

Не существует критерия, позволяющего для полиномов  $P$  общего вида (например, с положительными коэффициентами) сказать, верна ли для них теорема Ли — Янга. Аналитичность в этом случае исследуется только с помощью методов разложения в ряд. Приближение среднего поля, являющееся главным членом такого разложения, дает качественную картину фазовых диаграмм, подобных представленной на рис. 4.1. Приближение среднего поля будет подробно обсуждаться в следующей главе.

### 4.7 Двухкомпонентные спины

Корреляционные неравенства и теорема Ли — Янга обобщаются на случай векторнозначных спинов. Мы приведем простейшие результаты, относящиеся к системе с двухкомпонентными спинами  $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2)$ . Пусть  $\xi_i \cdot \xi_j = \sum_{\alpha=1}^2 \xi_i^\alpha \cdot \xi_j^\alpha$ . Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \xi_i \xi_j - \sum_i \mathbf{h}_i \cdot \xi_i, \quad (4.7.1)$$

где  $0 \leq J_{ij}, h_i^\alpha$ . В случае  $\mathbf{h}_i = 0$  взаимодействие (4.7.1) инвариантно относительно одновременного  $SO(2)$ -поворота всех спиновых векторов  $\xi_i$ . В качестве распределения отдельного спина выберем  $SO(2)$ -инвариантную меру

$$d\mu_i(\xi_i) = e^{-P_i(\xi_i)} d\xi_i^1 d\xi_i^2, \quad (4.7.2)$$

где

$$P_i(\xi_i) = \lambda_i (\xi_i \cdot \xi_i)^2 + \sigma_i (\xi_i \cdot \xi_i), \quad \lambda_i > 0 \quad \text{или} \quad \lambda_i = 0, \quad \sigma_i > 0. \quad (4.7.3)$$

Предельным случаем является модель ротаторов с мерой

$$d\mu_i(\xi_i) = \delta(|\xi_i|^2 - 1) d\xi_i^1 d\xi_i^2. \quad (4.7.2')$$

Введем переменные

$$t_i = \xi_i^1, \quad q_i = \xi_i^2 \quad (4.7.4)$$

и, как и раньше,  $t^A = \prod_{i \in A} t_i$  и т. д.

**Теорема 4.7.1.** Для системы с гамильтонианом вида (4.7.1) и распределением отдельного спина (4.7.2—3) верны неравенства:

$$\langle t^A q^B \rangle \geq 0, \quad (4.7.5)$$

$$\langle t^A t^B \rangle - \langle t^A \rangle \langle t^B \rangle \geq 0, \quad (4.7.6)$$

$$\langle q^A q^B \rangle - \langle q^A \rangle \langle q^B \rangle \geq 0, \quad (4.7.7)$$

$$\langle t^A \rangle \langle q^B \rangle - \langle t^A q^B \rangle \geq 0. \quad (4.7.8)$$

*Доказательство.* В переменных  $t, q$

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} (t_i t_j + q_i q_j) - \sum_i (h_i^1 t_i + h_i^2 q_i), \quad (4.7.9)$$

$$P(\xi_i) = \lambda_i (t_i^2 + q_i^2)^2 + \sigma (t_i^2 + q_i^2) = \lambda_i (t_i^4 + q_i^4 + 2t_i^2 q_i^2) + \sigma (t_i^2 + q_i^2). \quad (4.7.10)$$

Неравенство (4.7.5) доказывается, как и неравенства Гриффитса, с помощью разложения  $e^{-H}$  в степенной ряд. Для доказательства (4.7.6—8) введем переменные  $\xi_i'$ , дополнительные к  $\xi_i$ , или, другими словами, переменные  $t_i', q_i'$ , дополнительные к  $t_i, q_i$ . Определим  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  формулами (4.3.2). Тогда, как и для (4.3.5), гамильтониан

$$H(\xi) + H(\xi') = - \sum_{i,j} J_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \dots + \delta_i \delta_j) - 2^{1/2} \sum (h_i^1 \alpha_i + h_i^2 \gamma_i)$$

является ферромагнитным по переменным  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Используя (4.7.10), получаем, что

$$P(\xi) + P(\xi') = \text{четный полином} -4\lambda\alpha\beta\gamma\delta,$$

т. е. имеет вид четного полинома с ферромагнитной добавкой. Далее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.3.1 и следствия 4.3.2.

Частным случаем доказанных неравенств являются следующие два неравенства.

**Следствие 4.7.2.** Для системы (4.7.1—3)

$$\left\langle \left( \prod_{i \in A} \xi_i^1 \right) \left( \prod_{j \in B} \xi_j^2 \right) \right\rangle \geq 0, \quad (4.7.11)$$

$$\langle \xi_i \cdot \xi_j \rangle - \langle \xi_i \rangle \cdot \langle \xi_j \rangle \geq 0. \quad (4.7.12)$$

**Литературные ссылки**

[Ruelle, 1969].

## Глава 5

### Фазовые переходы и критические точки

#### 5.1. Чистые и смешанные фазы

Статистическое поведение семейства случайных величин  $\xi_i$ , описанное в гл. 2, следует из условия слабой зависимости: величина  $\xi_i$  должна быть почти независима от остальных  $\xi_j$ , за исключением конечного числа. Это свойство выполняется для короткодействующих устойчивых взаимодействий, рассмотренных в гл. 2. Обсудим теперь другие различия между слабыми и сильными взаимодействиями. Слабое взаимодействие означает, что любая величина  $\xi_i$  почти независима от всех  $\xi_j$ ,  $j \neq i$ , в то время как для систем с сильным взаимодействием имеется существенная зависимость  $\xi_i$  от конечного числа  $\xi_j$ ,  $j \neq i$ . Случай слабого взаимодействия изучается с помощью кластерных разложений наподобие рассмотренных в гл. 2 и может рассматриваться как возмущение невзаимодействующей модели, т. е. модели, в которой мера равна бесконечному произведению мер.

Модель Изинга и решеточные модели теории поля, введенные в гл. 2, описывают кооперативные явления. Каждая из случайных величин  $\xi_i$  влияет на соседние так, чтобы уравнивать их:  $(\xi_i - \xi_{i+\nu})^2 \approx 0$ . Если это влияние достаточно сильное (случай низких температур или больших  $\beta$  в (2.3.5)), то общая тенденция к выравниванию может привести к совпадению всех  $\xi_i$ . Предположим далее, что  $\xi_i = \pm 1$  и оба значения равновероятны (как



в (2.3.2), (2.3.5)). В этом случае картина подавляющего совпадения спиновых переменных:  $\xi_i \approx 1$  при всех  $i$  или  $\xi_i \approx -1$  при всех  $i$  — не является единственно возможной и предельная мера  $d\mu$  зависит от характера предельного перехода  $\Lambda \uparrow R^d$

$$d\mu = \alpha d\mu^+ + (1 - \alpha) d\mu^-, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (5.1.1)$$

что и означает существование фазового перехода. Здесь меры  $d\mu^\pm$  являются чистыми фазами в том смысле, что для множества конфигураций, имеющего полную меру относительно  $d\mu^+(d\mu^-)$ ,  $\xi_i \approx \pm 1$  при почти всех  $i$ , или, иначе говоря,

$$\langle \xi_i \rangle_+ \equiv \int \xi_i d\mu^+ > 0, \quad (5.1.2)$$

и аналогично  $\langle \xi_i \rangle_- < 0$ . С математической точки зрения соотношение (5.1.1) означает, что мера  $d\mu$  разложена на эргодические компоненты  $d\mu^+$  и  $d\mu^-$ . Чистые фазы  $d\mu^\pm$  являются крайними точками некоторого выпуклого множества мер и в определенном смысле неразложимы. (Разложение на чистые фазы изучается в гл. 18.)

С понятием чистых фаз связаны следующие два вопроса. Более простой вопрос, обсуждаемый в этом параграфе: является ли мера, определенная для системы в бесконечном объеме, чистой или смешанной фазой, т. е. можно ли эту меру разложить, как в (5.1.1)? Другой вопрос, тесно связанный с первым, касается того, происходит или нет при заданном множестве значений параметров (т. е.  $\beta$ ,  $P$  в (2.3.1—5)) фазовый переход (см. § 5.2 и 16.1).

Мы приведем три критерия, характеризующие чистые фазы. Первый критерий состоит в том, что чистая фаза  $d\mu$  эргодична относительно группы трансляций решетки. Второй критерий состоит в том, что функция 1 является единственной собственной функцией трансфер-матрицы с собственным значением 1. Трансфер-матрица строится в гл. 6, а эквивалентность двух критериев (для непрерывных полей) доказана в § 19.7.

Во многих случаях эффективен более простой критерий. Этот критерий связан с исследованием поведения парной корреляционной функции

$$\begin{aligned} \langle \xi_i \xi_j \rangle^T &\equiv \int \xi_i \xi_j d\mu - \int \xi_i d\mu \int \xi_j d\mu = \langle \xi_i \xi_j \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle = \\ &= \langle (\xi_i - \langle \xi_i \rangle) (\xi_j - \langle \xi_j \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Физический смысл (5.1.3) становится понятным в терминах отклонений  $\delta$  переменных  $\xi$  от их средних значений:  $\delta_i \equiv \xi_i - \langle \xi_i \rangle$ . В них парная корреляционная функция имеет вид

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle^T = \langle \delta_i \delta_j \rangle \quad (5.1.4)$$

и характеризует совместное распределение флуктуаций в узлах  $i$  и  $j$ . Рассмотрим в качестве примера меру (5.1.1). Для чистых фаз

$d\mu^\pm$  имеем

$$0 < \pm \langle \xi_i \rangle_\pm = \pm \int \xi_i d\mu^\pm = \pm M_\pm = M$$

и  $\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} (\langle \xi_i \xi_j \rangle_\pm - \langle \xi_i \rangle_\pm \langle \xi_j \rangle_\pm) = 0$ .

Следовательно,  $\langle \xi_i \rangle = -M(1 - 2\alpha)$  и

$$\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \langle \xi_i \xi_j \rangle = \alpha M_+^2 + (1 - \alpha) M_-^2 = M^2,$$

поэтому

$$\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \langle \xi_i \xi_j \rangle^T = 4\alpha(1 - \alpha)M^2. \quad (5.1.5)$$

Таким образом, (5.1.5) принимает максимальное значение при  $\alpha = 1/2$  и обращается в нуль только в случаях чистых фаз  $\alpha = 0, 1$ .

В § 16.1 мы покажем, что обращение в нуль  $\langle \xi_i \xi_j \rangle^T$  при  $|i - j| = \infty$  является необходимым, а часто и достаточным условием для того, чтобы мера  $d\mu$  была чистой фазой.

В статистической механике смешанные состояния имеют физический смысл (например, смесь льда и воды), в то время как в квантовой теории поля экспериментальные факты свидетельствуют о единственности вакуума.

## 5.2 Приближение среднего поля

Для обсуждения проблемы фазовых переходов на интуитивном уровне удобно использовать решеточные поля (2.3.1—5) или их непрерывные пределы, определяемые формальным выражением

$$d\mu = Z^{-1} \exp \left[ - \int_{R^d} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + P(\varphi) \right] dx \right] \prod_x d\varphi(x), \quad (5.2.1)$$

где вместо поля  $\xi_i$ ,  $i \in Z^d$ , рассматривается непрерывное поле  $\varphi(x)$ ,  $x \in R^d$ . Мера (5.2.1) нужно понимать как меру на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$  обобщенных функций умеренного роста. Математические вопросы построения такой меры обсуждаются в гл. 6—12.

Естественно ожидать, что мера  $d\mu$  вида (2.3.5) или (5.2.1) сконцентрирована вблизи конфигураций, доставляющих максимум экспоненте, т. е. вблизи минимумов выражения

$$\sum_{i \in Z^d} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \xi_i)^2 + P(\xi_i) \right]. \quad (5.2.2)$$

Разумеется, этот минимум достигается при

$$\xi_i = \xi^c \text{ для всех } i, \text{ где } \xi^c = \text{глобальный минимум } P(\cdot). \quad (5.2.3)$$

Глобальные минимумы  $\xi^c$  называются классическими значениями переменной  $\xi$ . В простейшем приближении (уточняемом ниже)

единственность минимума указывает на отсутствие фазовых переходов, а наличие нескольких минимумов  $\xi^c, \xi^{c'}, \dots$  означает возможность фазового перехода с различными мерами (состояниями) в бесконечном объеме (чистыми фазами)

$$d\mu_{\xi^c}, d\mu_{\xi^{c'}}, \dots \quad (5.2.4)$$

и общей мерой, являющейся выпуклой суммой чистых фаз:

$$d\mu = \alpha_{\xi^c} d\mu_{\xi^c} + \alpha_{\xi^{c'}} d\mu_{\xi^{c'}} + \dots \quad (5.2.5)$$

Описанная картина нуждается в уточнении. Иногда такая картина приближенно верна, а иногда она приводит к совершенно неверным результатам. Для того чтобы выяснить, какая ситуация имеет место, вспомним исходную предпосылку о статистическом поведении флуктуаций около  $\xi^c$ . Пусть

$$\chi_i = \xi_i - \xi^c \quad (5.2.6)$$

есть поле флуктуаций. Перепишем  $P(\xi)$  в виде полинома от  $\chi$ . Поскольку  $\xi^c$  есть глобальный минимум,

$$P(\xi) = P(\xi^c) + \frac{1}{2} P''(\xi^c) \chi^2 + \frac{1}{3!} P'''(\xi^c) \chi^3 + \dots \quad (5.2.7)$$

Простейшим критерием того, что классическая картина приближенно верна, служит выполнение следующих двух условий: (а)  $P''$  больше всех старших производных:

$$P''(\xi^c) \gg P^{(j)}(\xi^c) \text{ для всех } j \geq 3; \quad (5.2.8)$$

(б) член старшего порядка в  $P$  сильно невырожден в следующем смысле:  $|P^{(j)}(\xi^c)| \ll \text{const } P^{(n)}(\xi^c)$  для всех  $3 \leq j < n = \text{deg } P$ . Грубо говоря, условие (5.2.8) означает, что потенциальный барьер, отделяющий  $\xi^c$  от других минимумов, должен быть достаточно высоким и широким. Предположим, что это условие выполнено, и рассмотрим (квазиклассическое) приближение

$$P_{\text{кв. кл}} = P(\xi^c) + \frac{1}{2} P''(\xi^c) \chi^2. \quad (5.2.9)$$

Тогда  $P_{\text{кв. кл}}$  есть квадратичный полином, и мера

$$d\mu_{\text{кв. кл}} = Z_{\text{кв. кл}}^{-1} e^{-\sum_l \left[ \frac{1}{2} (\sqrt{\chi_l})^2 + P_{\text{кв. кл}}(\chi_l) \right]} \prod_{l \in Z^d} d\chi_l \quad (5.2.10)$$

будет гауссовой со средним  $\langle \chi_l \rangle_{\text{кв. кл}} = 0$ , т. е.  $\langle \xi \rangle_{\text{кв. кл}} = \xi^c$ . Мера  $d\mu_{\text{кв. кл}}$  является промежуточным звеном между истинной мерой  $d\mu$  и классическим приближением  $\xi^c$ . (Классическое приближение может быть записано в виде меры  $d\mu_{\text{кв. кл}} = \delta_0(\xi - \xi^c)$ , где  $\delta_0$  есть мера в пространстве функций, сосредоточенная в точке  $\xi \equiv 0$ .) Квадратичный член ( $\sim \chi^2$ ) в энергии  $P_{\text{кв. кл}}$  приводит к линейным силам взаимодействия и к линейным уравнениям движения. Поэтому

(5.2.10) есть линеаризация статистической задачи в окрестности классического значения  $\xi^c$ . В статистической механике поправки более высокого порядка в (5.2.7) часто вообще не рассматриваются.

Статистические свойства гауссовых мер легко описать (см. также гл. 3 и 6). Ковариация меры (5.2.10) совпадает с ядром оператора  $(-\Delta + P''(\xi^c))^{-1}$ . На больших расстояниях асимптотическое поведение корреляций имеет вид

$$\langle \chi_i \chi_j \rangle_{\text{кв. кл}} = \text{ядро } (-\Delta + P''(\xi^c))^{-1} \sim |i - j|^{-(d-1)/2} e^{-P''(\xi^c)^{1/2} |i - j|} \quad (5.2.11)$$

(с точностью до поправок, связанных с решеточной структурой). В частности, при  $P'' > 0$  флуктуации  $\chi_i$  имеют экспоненциально убывающие корреляции, т. е., как и ожидалось выше, слабо зависят.

Квазиклассическое приближение (5.2.9—10) может быть использовано в качестве главного члена разложения, подобного разложению Майера в § 2.4, но значительно более сложного. Так же как в разложении Майера  $\rho = \beta^{-1}z + b_2 z^2 + \dots$ , взаимодействие приводит к поправкам в давлении  $p = \beta^{-1}z$ , отвечающем нулевому взаимодействию (идеальному газу), члены старших порядков  $(1/3!)P'''(\xi^c)\chi^3 + \dots$  в (5.2.7) вносят аналогичные изменения в теорию. Одно из уточнений относится к случаю, когда значения  $P(\xi)$  в различных минимумах совпадают:  $P(\xi^c) = P(\xi^{c'})$ . При этом взаимодействие может полностью исключить фазовые переходы. Тем не менее  $P$  и  $d\mu$  близки к фазовому переходу в том смысле, что для некоторого полинома  $P_{\text{эфф}} = P + \delta P$ , где полином  $\delta P$  мал, действительно происходит фазовый переход. При этом для одной из чистых фаз  $\langle \xi_i \rangle = \xi^c$ , для другой  $\langle \xi_i \rangle = \xi^{c'}$  и т. д. Полином  $\delta P$  можно рассматривать как эффект перенормировки; его вычисление основано на методах теории возмущений, аналогичных используемым в § 9.4 и 14.3. Полином  $\delta P$  мал в том смысле, что малы его коэффициенты; его влияние существенно только вблизи  $\chi = 0$ .

Описанная выше картина основана на более сильных утверждениях, чем это доказано в настоящее время. Тем не менее в типичных частных случаях подобные результаты доказаны строго. Весьма вероятно, что такого рода методами могут быть обоснованы многие линеаризации в статистической физике. Доказательство соответствующих теорем сводится, по существу, к проверке того, что малые вероятности больших отклонений от значений среднего поля подавляют статистические факторы (энтропию).

Это завершает обсуждение случая, когда квазиклассическое приближение дает правильную качественную картину, а именно случая, когда у  $P$  имеются большие потенциальные барьеры. При этом у  $P$  имеются глубокие колодцы с хорошо отделенными друг от друга минимумами, так что  $e^{-P}$  аппроксимируется произведением гауссовых множителей. В этой ситуации полином  $P + \delta P$  при

малом  $\delta P$  дает правильную структуру фаз, определяемых минимумами  $P$ . Если же различные минимумы не разделены достаточно высокими барьерами или члены более высоких порядков в (5.2.7) велики, то (5.2.9—10) дает плохое приближение, которое может привести к совершенно неверной картине.

Критическая точка есть, по определению, граничная точка области фазовых переходов. В рассмотренной выше классической

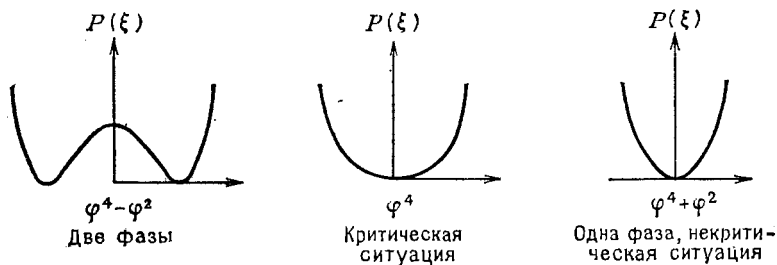


Рис. 5.1.

картине этот случай возникает из-за слияния двух минимумов, как на рис. 5.1, так что вместо (5.2.7) справедливо разложение

$$P(\xi) = P(\xi^c) + \frac{1}{4!} P^{(IV)}(\xi^c) \chi^4 + \dots \quad (5.2.12)$$

Поскольку  $P''(\xi^c) = 0$  и различные минимумы не только не разделены, но и сливаются в один, классическое описание критической точки не является точным, хотя его и можно использовать в качестве грубого ориентира. Для классической критической точки квазиклассическая мера (5.2.10) является гауссовой с ковариацией

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle_{\text{кв. кл}} = \text{ядро}(-\Delta)^{-1}(i, j) \sim |i - j|^{-d+2}. \quad (5.2.13)$$

Дальнодействующие (степенные) корреляции вида (5.2.13) типичны для критических теорий, хотя показатель  $(-d + 2)$  может быть заменен другим. В действительности этот показатель зависит от опущенных членов в (5.2.12). (При  $d = 2$  асимптотическое поведение функции (5.2.13) имеет вид  $-(1/2\pi) \ln|i - j|$ .)

Корреляционные неравенства дают оценки сверху для поправок к (5.2.13). Например, в критической точке для теории поля при  $|x - y| \rightarrow \infty$

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \leq O(|x - y|^{-d+2-\eta}), \quad (5.2.14)$$

где  $\eta$  называется аномальной размерностью. Аналогично для  $d$ -мерной модели Изинга при критической температуре

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle \sim |i - j|^{-d+2-\eta}. \quad (5.2.15)$$

При  $d = 1$  имеем  $\eta = 1$ ). Если  $d = 2$ , то  $\eta = 1/4$ . При  $d = 3$  приближенные вычисления дают значение  $\eta = 0,041$ .

При  $d = 1, 2$  и, возможно, при  $d = 3$  критические точки не являются гауссовыми. Так как (5.2.13) определяет неверную асимптотику на больших расстояниях, то члены старших порядков в (5.2.12) играют не менее важную роль, чем квазиклассический член  $\frac{1}{2}(\nabla\xi)^2 + P_{\text{кв. кл}}(\xi) = \frac{1}{2}(\nabla\xi^2) + \text{const}$ . Поэтому в критическом случае квазиклассическая теория не может служить отправной точкой теории возмущений. Для изучения критической точки физики применяют различные методы. Хотя большинство этих методов (в том числе метод ренормгруппы) не имеет достаточного математического обоснования, они с успехом применяются для определения приближенных численных значений критических индексов (например,  $\eta$ ). Введение в теорию критических явлений можно найти в книге [Stanley, 1971]. Двумерная модель Изинга и некоторые другие двумерные модели решаются в явном виде. В этих случаях критическое поведение исследовано во всех деталях, а критические индексы определены точно; см. [McCoу, Tracy, Wu, 1977], [McCoу, Wu, 1973]. Для так называемой иерархической модели [Dyson, 1969a] имеется математическая теория критических явлений [Блехер, Синай, 1973, 1975]; [Collet, Eckmann, 1978], хотя эта модель и не является точно решаемой.

### 5.3 Нарушение симметрии

Фазовые переходы и нарушение симметрии — это явления различной природы, но они так часто происходят одновременно, что имеет смысл рассматривать особые структуры, возникающие в результате их комбинации.

Мы видели, что в квантовой механике гамильтониан вида  $H = -\Delta + U(q)$  всегда имеет единственное основное состояние  $\Omega$ , и, следовательно,  $\Omega$  инвариантно относительно любой группы симметрий гамильтониана  $H$ . Точно так же в системах статистической механики с конечным числом степеней свободы мера  $d\mu$  вида (2.3.4) инвариантна относительно любой симметрии, сохраняющей  $d\mu(\xi_i)$  и  $\sum (\xi_i - \xi_{i'})^2$ .

С другой стороны, для систем с бесконечным числом степеней свободы (как в рассматриваемом здесь случае статистических систем, так и в случае квантовых полей, изучаемых в дальнейшем) мера  $d\mu$  может не обладать симметрией порождающего ее действия. В этом случае мы будем говорить о нарушении симметрии. Например, в модели Изинга с  $\hbar = 0$  действие инвариантно относительно преобразования  $\xi_i \rightarrow -\xi_i$  при всех  $i$ . Тем не менее при

4) В одномерной модели Изинга фазовый переход происходит при  $T = 0$ . При этом все спины жестко скоррелированы, что отвечает случаю  $\eta = 1$ . — Прим. перев.

$\beta > \beta_c$  имеются две чистые фазы  $d\mu_{\pm}$ , для которых симметрия нарушена:  $M_+ = \int \xi_i d\mu_+ = - \int \xi_i d\mu_- \neq 0$ . Фактически  $d\mu_+(\xi) = d\mu_-(-\xi)$ , так что симметрия отображает два основных состояния одно в другое.

В этом примере нарушением симметрии объясняется появление фазового перехода. Возможна, однако, и другая ситуация, когда фазовый переход не связан ни с какой симметрией (ни с ее нарушением). Так обстоит дело для решеточной теории со взаимодействием  $P(\varphi)$  вида

$$P(\varphi) = \lambda \varphi^2 (\varphi^2 - a)^2 + \epsilon \varphi^5 - \mu \varphi. \quad (5.3.1)$$

Фиксируя  $\lambda$ ,  $a$ ,  $\epsilon^{-1} \gg 0$ , можно найти такое  $\mu = \mu(\lambda, a, \epsilon)$  вблизи нуля, что  $P(\varphi)$  имеет два глобальных минимума (один вблизи  $\varphi = 0$ , другой при  $\varphi \gg 0$ ). Поэтому на основании приближения среднего поля (§ 5.2) мы ожидаем появления фазового перехода для  $P + \delta P$  при некотором малом  $\delta P$ . Здесь фазовый переход происходит без изменения группы симметрий.

Рассмотрим еще ряд примеров. Другой тип фазового перехода, не связанного с нарушением симметрии, есть переход жидкость — газ. В этом случае каждая из двух фаз симметрична относительно евклидовой группы  $\mathcal{E}(R^3)$  симметрий пространства  $R^3$ . С другой стороны, переход жидкость — твердое тело сопровождается нарушением симметрии относительно группы  $\mathcal{E}(R^3)$ . Твердое тело, рассматриваемое как совершенный кристалл с решеткой  $\mathcal{L}$ , имеет группу симметрий

$$\mathcal{E}(\mathcal{L}) = \{g \in \mathcal{E}(R^3) : g\mathcal{L} = \mathcal{L}\},$$

являющуюся дискретной подгруппой  $\mathcal{E}(R^3)$ . В этом примере решетка  $\mathcal{L}$  задается кристаллическим состоянием (отдельные атомы кристалла могут колебаться вокруг положений равновесия, определяемых  $\mathcal{L}$ , но как целое решетка  $\mathcal{L}$  неподвижна). Эквивалентные, но не совпадающие с  $\mathcal{L}$  решетки  $g\mathcal{L} \neq \mathcal{L}$  не могут возникнуть из состояния с решеткой  $\mathcal{L}$  в результате статистических флуктуаций атомов. Другими словами,  $g\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}$  определяют различные состояния или фазы. Часто решетка  $\mathcal{L}$  (или  $g\mathcal{L}$ ) полностью определяет статистическое состояние. Это означает, что переменные, характеризующие состояние жидкости (давление, температура и т. д.), должны быть дополнены новой переменной  $\xi = \xi^c$ , описывающей состояние твердого тела. Новая переменная

$$\xi \in \mathcal{E}(R^3) / \mathcal{E}(\mathcal{L}) \quad (5.3.2)$$

пробегает пространство классов смежности, т. е. пространство неэквивалентных решеток. При фиксированных значениях исходных переменных (давления, температуры и т. д.) любое состояние является, вообще говоря, смесью различных  $\xi$ -состояний. Следовательно, его можно представить в виде интеграла по составляющим фазам, помеченным индексом  $\xi$ . Отмеченное нами явление можно

сформулировать в общих терминах. В простейшем случае  $\xi$ -состояния являются чистыми фазами, и переменная  $\xi$  из (5.3.2) пробегает множество всех чистых фаз.

В качестве другого примера фазового перехода с нарушением симметрии рассмотрим решеточное поле  $P(\varphi)$  с четным полиномом  $P$ . При четном  $P$  теория обладает симметрией  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ . Если вместо  $P$  подставить в (2.3.1—5) полином

$$P(\varphi) + \sigma\varphi^2 \quad (\text{при фиксированном } \beta), \quad (5.3.3)$$

то на основании § 5.1 можно ожидать, что при  $\sigma \gg 1$  и фиксированном  $\beta$  теория единственна (т. е. фазовых переходов нет), в то время как при  $\sigma \ll -1$  и фиксированном  $\beta$  возникают две различные теории (чистые фазы), переходящие одна в другую под действием  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ . В обоих случаях группой симметрий служит  $Z_2$ , а множество чистых фаз совпадает с факторгруппой  $Z_2/H$ , где  $H$  — подгруппа симметрий отдельной чистой фазы ( $H = Z_2$  и  $Z_2/H = \{I\}$  при  $\sigma \gg 1$ ;  $H = \{I\}$  и  $Z_2/H = Z_2$  при  $\sigma \ll -1$ ).

При другом способе изучения фазовых переходов с нарушением симметрии вводят в явном виде возмущение: нарушающий симметрию оператор. Например, поле  $\varphi$  не инвариантно относительно симметрии  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ , и взаимодействие

$$P(\varphi) + \sigma\varphi^2 - h\varphi \quad (5.3.4)$$

рассматривается как возмущение (5.3.3).

С точки зрения теории магнетизма  $h$  представляет собой внешнее магнитное поле. Оно нарушает симметрию магнетика  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$  (вверх — вниз), т. е. намагничивает его. Пусть

$$M \equiv \langle \varphi(x) \rangle \quad (5.3.5)$$

есть намагниченность. Здесь  $\langle \cdot \rangle$  — среднее по мере  $d\mu$ , определяемой формулой (2.3.5). Положим

$$d\mu = d\mu_{\sigma, h} = d\mu_{\sigma, h, P, \beta} \quad (5.3.6)$$

и  $M = M(\sigma, h)$ . Величина  $M$ , называемая параметром порядка, используется в качестве характеристики фазового перехода. На рис. 5.2 показана область фазовых переходов для случая  $P(\varphi) = \varphi^4$ .

Из теоремы Ли — Янга следует, что для  $P = \varphi^4$  при  $h \neq 0$  имеется единственная чистая фаза (нет переходов). То же самое вытекает из кластерного разложения при  $\sigma \gg 1$ . Кластерное разложение другого типа (двухфазное), применимое в случае  $\sigma \ll -1$ , доказывает существование по крайней мере двух фаз. При  $\sigma \gg 1$  параметр  $M$  является гладкой функцией от  $h$ , в то время как при  $\sigma \ll -1$  он имеет разрыв при  $h = 0$  (см. рис. 5.3). Из корреляционных неравенств гл. 4 следует, что  $0 \leq dM/dh \leq \text{const}$ ,  $d^2M/dh^2 \leq 0$  при  $h \geq 0$ . Кроме того,  $dM/d\sigma|_{h=0} \leq 0$ . Вогнутость  $M$  ( $d^2M/dh^2 \leq 0$ ) вытекает из следствия 4.3.4 и отражает насыщение



$M(h)$  внешним полем  $h$ . Большие значения  $h$  приводят к кооперативному явлению выравнивания значений спинов. Если спины принимают ограниченные значения, как в случае модели Изинга, то  $M(h)$  стремится при  $h \rightarrow \infty$  к асимптотическому значению, отвечающему полному выравниванию. Многое известно также о поведении вблизи  $\sigma = \sigma_c$ ; см. гл. 17.

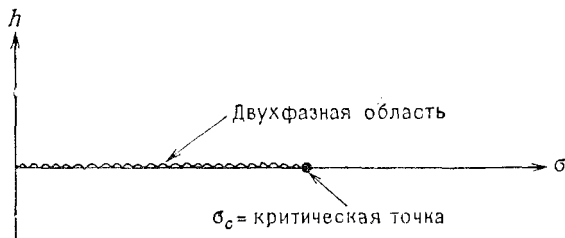


Рис. 5.2. Область фазовых переходов для взаимодействия  $\varphi^4$ .

Структура фаз для модели Изинга качественно такая же, как и для взаимодействия  $\varphi^4$ . В физике твердого тела и физической химии изучается большое число систем с различными типами ре-

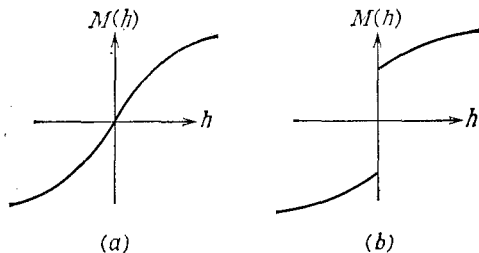


Рис. 5.3. График функции  $M(h)$ : (а) при  $\sigma \gg 1$ , (б) при  $\sigma \ll -1$ .

шеток  $\mathcal{L}$  и спиновых пространств  $X_i$  (вида 2.1.2), со взаимодействием ближайших соседей или же с дальнедействующими силами. Такие системы используются как упрощенные модели реальных молекулярных и атомных соединений. В общем случае уравнение состояния является кусочно-аналитической функцией термодинамических переменных, таких, как  $h$  и  $\sigma$  на рис. 5.2. Фазовым переходам отвечают точки неаналитичности, а наличие нескольких фаз связано с точками неоднозначности. Заметим, что в (5.3.5)  $M = d \ln Z / dh$ , где  $Z$  — статистическая сумма. Для этой задачи  $M = M(h, \sigma)$  есть уравнение состояния. В случае когда появляется разрыв у параметра порядка (как в указанном примере), фазовый переход называется переходом первого рода.

### 5.4 Модель капли и оценка Пайерлса

Для модели Изинга при низких температурах можно без большого труда провести анализ структуры фаз, как в § 5.1—5.2, на математическом уровне строгости. Доказательства поучительны, поскольку в них выявлены типичные конфигурации для двух ( $\pm$ ) чистых фаз. Обсудим вначале модель капли, на которую эти доказательства будут опираться.

В  $d$ -мерной модели Изинга конфигурации задаются функциями  $\sigma_i: Z^d \rightarrow Z_2$ , приписывающими знак «+» или «-» каждому узлу решетки  $i \in Z^d$ . При низких температурах имеется сильная тенденция к совпадению знаков в соседних узлах. В соответствии с

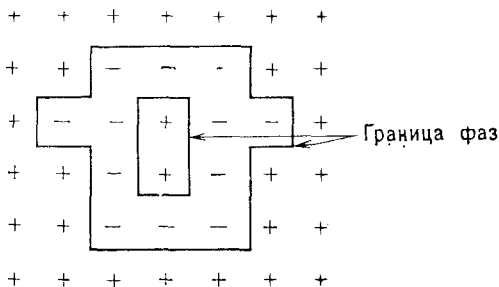


Рис. 5.4.

этим удобнее описывать конфигурации другим способом, эквивалентным первому. Вместо того чтобы следить за областями

$$X_{\pm} = \{i \in Z^d: \sigma_i = \pm 1\},$$

мы будем следить за множеством  $\partial X \equiv \partial X_+ = \partial X_-$  граничных элементов, разделяющих спины противоположных знаков. Точнее, рассмотрим ребро  $i, i'$  (т. е. отрезок, соединяющий соседние узлы  $i, i'$ , для которого  $\sigma_i \sigma_{i'} = -1$ ). Тогда  $\partial X$  содержит элемент гиперповерхности двойственной решетки, перпендикулярный этому ребру (рис. 5.4). Каждому множеству границ фаз  $\partial X$  отвечают ровно две конфигурации (переходящие одна в другую при изменении знаков всех спинов).

При низких температурах описание конфигураций с помощью границ фаз предпочтительнее. Действительно, число границ фаз невелико, и их вклад в статистику типичных конфигураций можно рассматривать как малое возмущение по отношению к случаю нулевой температуры, когда разрешены только две конфигурации ( $\sigma_i \equiv 1$  и  $\sigma_i \equiv -1$ ). В соответствии с этой картиной типичные конфигурации при низких температурах представляют собой море спинов одного знака (например, +) и случайные изолированные острова спинов противоположного знака. Типичные острова имеют небольшие размеры и целиком заполнены спинами противополож-

ного знака, однако с меньшей вероятностью найдутся большие острова, которые могут содержать подострова («озера») спинов основного знака, и т. д. Конфигурации, в которых доминирует знак «—», относятся к фазе «—». Любая мера в бесконечном объеме, построенная как предел мер в конечных объемах, должна быть смесью фаз «+» и «—», как в (5.1.1). Состав смеси, т. е. параметр  $\alpha$  в (5.1.1), зависит от подробностей предельного перехода  $V \uparrow \infty$  и особенно от граничных условий. При  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 1$  смешанная фаза становится чистой фазой. Случай  $d = 1$  исключительный; при  $d = 1$  дополнение к островам фаз несвязно, и, более того, при температурах  $T > 0$  ( $\beta < \infty$ ) фазового перехода не происходит.

Переходя к количественным оценкам, напомним, что гамильтониан модели Изинга  $H_\Lambda = -\beta \sum_{б.с.} \sigma_i \sigma_{i'}$  определяет в любой ограниченной области  $\Lambda$  меру

$$d\mu_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} e^{-H_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} \delta(\sigma_i^2 - 1) d\sigma_i,$$

$$Z_\Lambda = \int e^{-H_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} \delta(\sigma_i^2 - 1) d\sigma_i.$$

Мера в бесконечном объеме  $d\mu$  была построена в § 4.2. Записав  $H$  как функцию границы фаз  $\gamma$  и ее площади  $|\gamma|$  (или длины при  $d = 2$ ), получаем, что  $H = H(\gamma) = 2\beta |\gamma|$ . При этом мы вычли из гамильтониана  $H$  константу

$$H_{\min} = \min_{\sigma} H(\sigma) = -\beta \sum_{б.с.} 1.$$

Так как эта константа содержится и в числителе, и в знаменателе выражения для  $d\mu_\Lambda$ , ее вычитание не меняет ни меры  $d\mu_\Lambda$  ни физического смысла  $H$ .

Рассмотрим теперь другие конфигурации с границей фаз  $\partial X$ . Пусть  $\gamma$  обозначает также событие (т. е. множество конфигураций)  $\gamma \subset \partial X$ . Тогда

$$\text{Pr}(\gamma) = \frac{\sum_{\partial X \supset \gamma} e^{-H(\partial X)}}{\sum_{\partial X} e^{-H(\partial X)}},$$

где  $\partial X$  пробегает всевозможные границы фаз или, другими словами, все конфигурации спинов.

**Предложение 5.4.1.**  $\text{Pr}(\gamma) \leq e^{-2\beta |\gamma|}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\partial X \supset \gamma$ ; обозначим  $(\partial X)^*$  конфигурацию, получаемую при переворачивании всех спинов внутри  $\gamma$ . При этом из границы фаз исключается  $\gamma$ , т. е.  $(\partial X)^* = \partial X \setminus \gamma$ . Поэтому

$$e^{-H(\partial X)} / e^{-H((\partial X)^*)} = e^{-2\beta |\gamma|}.$$

Отображение  $\partial X \leftrightarrow (\partial X)^*$  взаимно однозначно отображает подмножество границ фаз  $\partial X$ , содержащих  $\gamma$ , на подмножество этих границ, не содержащих  $\gamma$ . Образ состоит в точности из таких границ фаз  $\partial Y$ , что  $\partial Y \cap \gamma = \emptyset$ , поскольку

для таких  $\partial Y$  мы можем вновь перевернуть все спины внутри  $\gamma$  и получить  $\partial X = \partial Y \cup \gamma$ , а следовательно,  $\partial Y = (\partial X)^*$ . Таким образом, опуская положительные члены в знаменателе, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \text{Pr}(\gamma) &= \frac{\sum_{\partial X \supseteq \gamma} e^{-H(\partial X)}}{\sum_{\partial Y} e^{-H(\partial Y)}} \leq \frac{\sum_{\partial X \supseteq \gamma} e^{-H(\partial X)}}{\sum_{\partial Y \cap \gamma = \emptyset} e^{-H(\partial Y)}} = \\ &= \frac{\sum_{\partial X \supseteq \gamma} e^{-H(\partial X)}}{\sum_{(\partial X)^*} e^{-H((\partial X)^*)}} = e^{-2\beta |\gamma|}. \blacksquare \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай граничных условий (+). Пусть  $d\mu_{\Lambda}^+$  — мера, соответствующая граничным условиям  $\sigma_i \equiv +1$  при  $i \notin \Lambda$ , а  $\langle \cdot \rangle_{+, \Lambda}$  — среднее по этой мере.

**Предложение 5.4.2.** При достаточно большом  $\beta$  и  $d \geq 2$

$$0 \leq 1 - \langle \sigma_i \rangle_{+, \Lambda} \leq e^{-\beta}.$$

*Доказательство.*  $1 - \langle \sigma_i \rangle = \langle 1 - \sigma_i \rangle$ , поэтому ненулевой вклад вносят только конфигурации с  $\sigma_i = -1$ . Для любой такой конфигурации с границей фаз  $\partial X$  найдется  $\gamma \subset \partial X$ , содержащее внутри себя узел  $i$ . Пусть  $\gamma(\partial X)$  — наименьшее из таких  $\gamma$ . Тогда

$$1 - \langle \sigma_i \rangle = 2 \sum_{\gamma} \sum_{\partial X: \gamma(\partial X) = \gamma} e^{-H(\partial X)} / \sum_{\partial X} e^{-H(\partial X)}.$$

В числителе суммирование проводится сначала по  $\partial X$  с фиксированным наименьшим  $\gamma$ , а затем по всем таким  $\gamma$ . Отношение только увеличится от добавления к числителю положительных членов, поэтому первую сумму заменим суммой по  $\{\partial X: \partial X \supseteq \gamma\}$ . Эта сумма является числителем в  $\text{Pr}(\gamma)$ , следовательно:

$$1 - \langle \sigma_i \rangle \leq \frac{2 \sum_{\gamma} \sum_{\partial X \supseteq \gamma} e^{-H(\partial X)}}{\sum_{\partial X} e^{-H(\partial X)}} = 2 \sum_{\gamma} \text{Pr}(\gamma) \leq 2 \sum_{\gamma} e^{-2\beta |\gamma|}.$$

Пусть  $N(|\gamma|)$  — число различных границ фаз  $\gamma$  площади  $|\gamma|$  (или длины  $|\gamma|$  при  $d=2$ ), содержащих  $i$ . Число допустимых сдвигов для  $\gamma$  не превосходит  $|\gamma|^d$ , так как  $\gamma$  должно содержаться внутри  $d$ -мерного куба с центром в  $i$  и длиной ребра  $|\gamma|$ . Начав с любого элемента  $\gamma$  и пристраивая каждый раз один элемент гиперповерхности, получим, что число различных типов  $\gamma$  не больше  $c^{|\gamma|}$  где  $c = c(d)$ . Таким образом,  $N(|\gamma|) \leq |\gamma|^d c^{|\gamma|}$  и при достаточно больших  $\beta$

$$1 - \langle \sigma_i \rangle \leq 2 \sum_{r=4}^{\infty} r^d c^r e^{-2\beta r} \leq e^{-\beta}. \blacksquare$$

Заметим, что случай  $d=1$  исключительный. В этом случае  $|\gamma|$  есть число точек в  $\gamma$ ,  $\gamma$  несвязно, и поэтому  $N(|\gamma|)$  не ограничено при  $|\gamma|=2$ .

Круг идей, изложенных в этом параграфе, важен и в квантовой теории поля, что иллюстрирует рис. 5.5. Рассмотрим взаимодейст-

вие  $\varphi^4 - \varphi^2$ , изображенное на рис. 5.1. Классическое основное состояние (отвечающее нулевой температуре) определяется конфигурацией поля, принимающей постоянные значения. Мы опишем типичные конфигурации поля, вносящие вклад в квантовое (т. е.

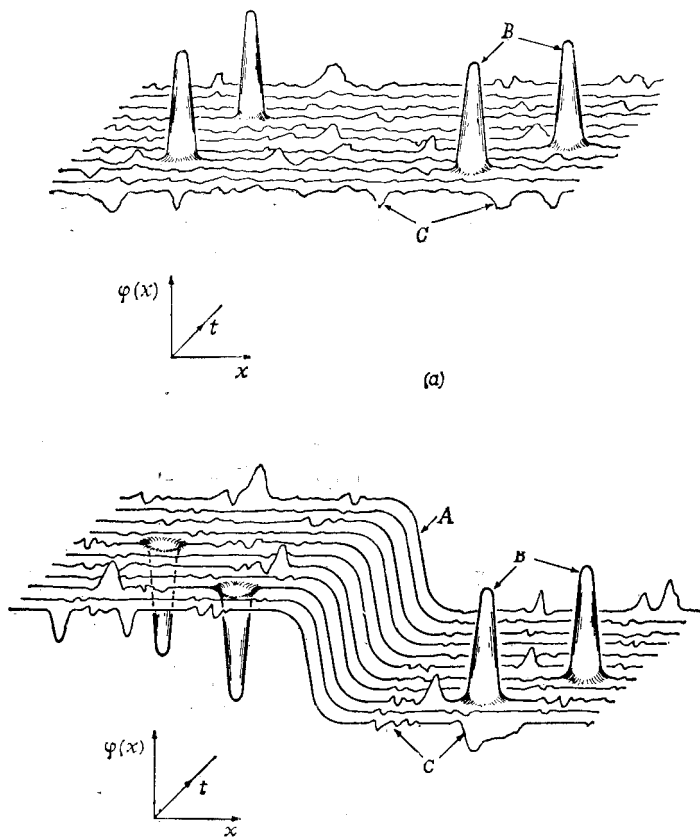


Рис. 5.5. Типичная конфигурация, отвечающая (а) вакуумному состоянию, (б) односолитонному состоянию. Здесь *A* — солитонный переход, *B* — флуктуации, соответствующие второму вакууму, *C* — флуктуации внутри отдельного вакуума.

отвечающее положительной температуре) основное состояние. Преобладающие конфигурации близки к классическим из-за множителя  $e^{-\mathcal{E}}$  в статистическом весе, однако они содержат различные флуктуации. На рис. 5.5(а) изображена конфигурация, содержащая флуктуации двух типов. Флуктуации малого масштаба — это флуктуации внутри одного из колодцев *W*-образного потенциала, изображенного на рис. 5.1. Они описываются в рамках теории среднего поля, изложенной в § 5.2. Флуктуации большого

масштаба отвечают туннельному переходу из одного колодца в другой. Они описываются изинговыми флуктуациями и моделью капли, рассмотренными в этом параграфе. На рис. 5.5(b) представлена конфигурация, относящаяся к солитонному (одночастичному) возбуждению вакуума. Рассмотрим вначале классическое стационарное (солитонное) решение уравнения

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + P'(\varphi) = 0,$$

а именно  $\varphi(x) = a \operatorname{th} bx$ . Изображенная конфигурация отличается от классического решения флуктуациями большого и малого масштаба, как и в случае вакуумной конфигурации. Рис. 5.5 поясняют фазовые переходы в квантовой теории поля, изучаемые в гл. 16, а также высокотемпературные и низкотемпературные кластерные разложения, которые будут обсуждаться в гл. 18 и § 20.5.

### 5.5 Пример

В заключение этой главы покажем, что картина среднего поля позволяет описывать другие механизмы фазовых переходов, не связанные с вырождением основного состояния. В термодинамике под фазовым переходом понимают неаналитичность какой-либо из термодинамических функций. Неаналитичность может иметь место даже тогда, когда основное состояние единственно. Например, в двумерных ( $d=2$ ) системах с непрерывной группой симметрий основное состояние симметрично (теорема Мермина — Вагнера). Простейшая система такого типа есть модель ротаторов, или XY-модель. Она описывается мерой изингова типа

$$d\mu_{\Lambda} = Z(\Lambda)^{-1} \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ |i-i'|=1}} (\xi_i - \xi_{i'})^2 \right] \prod_{i \in \Lambda} d\nu(\xi_i), \quad (5.5.1)$$

где  $\xi_i \in S^1$  есть единичный вектор в двумерном пространстве, а  $d\nu(\xi)$  — равномерное распределение на  $S^1$ . Действие группы преобразований симметрии  $U(1) = SO(2)$  задается одновременным поворотом всех спиновых векторов  $\xi_i$ . Теорема Мермина — Вагнера утверждает, что для любых граничных условий  $\lim_{\Lambda \uparrow \infty} d\mu_{\Lambda} = d\mu$  есть мера, инвариантная относительно этой группы симметрий и эргодическая относительно трансляций (см. § 16.3).

Несмотря на единственность основного состояния, простая и весьма привлекательная теория, построенная в работе [Kosterlitz, Thouless, 1973], предсказывает существование в этой модели фазового перехода при всех  $T < T_c$ , где  $T_c$  — некоторая положительная температура. Этот фазовый переход, с одной стороны, связан с вырожденностью многочастичных состояний при  $T < T_c$ , а с другой стороны, его можно интерпретировать в рамках теории среднего поля. В частности, конфигурации XY-модели можно рассма-

тривать как суперпозицию двух независимых конфигураций. Переходя к угловым переменным:  $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$ , напомним  $\theta = \theta_{\text{сп. в}} + \theta_{\text{в}}$ , где  $\theta_{\text{сп. в}}$  связано со спиновой волной, а  $\theta_{\text{в}}$  есть вихревая часть конфигурации. Приближение среднего поля предполагает независимость распределений  $\theta_{\text{сп. в}}$  и  $\theta_{\text{в}}$ . При этом энергия спиновой волны  $\theta_{\text{сп. в}}$  есть кинетическая энергия двумерного безмассового возбуждения, а энергия вихревой части  $\theta_{\text{в}}$  определяется энергией двумерного газа диполей с кулоновым взаимодействием. (Вихри всегда возникают парами, что приводит к конечной энергии конфигурации, и каждая пара образует элементарный диполь.) Таким образом, легко понять, как устроены парные корреляцион-

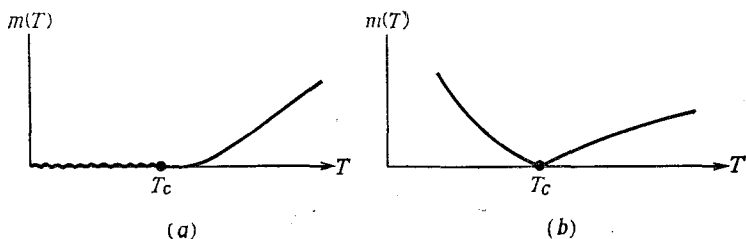


Рис. 5.6. (а) Предполагаемая зависимость обратного корреляционного радиуса от температуры для двумерной модели ротаторов. Имеется линия критических точек при  $T < T_c$ . (б) обратный корреляционный радиус для двумерной модели Изинга.

ные функции в модели ротаторов. В приближении среднего поля энергии складываются и, следовательно, средние перемножаются:

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = \langle e^{i(\theta_i - \theta_j)} \rangle_{\text{сп. в}} \langle e^{i(\theta_i - \theta_j)} \rangle_{\text{в}} = |i - j|^{-1/4\pi\beta} \langle e^{i(\theta_i - \theta_j)} \rangle_{\text{в}}. \quad (5.5.2)$$

Так как вихревое среднее ограничено единицей, двухточечная функция стремится к нулю на бесконечности при всех  $T$  в соответствии с теоремой Мермина — Вагнера. Вихревое среднее (кулонов газ диполей) при высоких температурах (малых  $\beta$ ) убывает экспоненциально, что дает экспоненциальное убывание корреляций  $\langle \xi_i \xi_j \rangle$ . Это неупорядоченная фаза. При низких температурах,  $\beta \sim T^{-1} \gg 0$ , ожидается конденсация диполей, приводящая к дальнейшему порядку для корреляций вихрь — вихрь. В этом режиме  $\langle \xi_i \xi_j \rangle$  убывает не экспоненциально, а степенным образом. Корреляционный радиус  $m(T)^{-1}$ , характеризующий экспоненциальное убывание:  $\langle \xi_i \xi_j \rangle \sim \exp(-m|i - j|)$ , обращается в  $\infty$  при  $T < T_c$ . Поэтому естественно ожидать, что обратный корреляционный радиус ведет себя так, как показано на рис. 5.6(а). Масштаб выбран в соответствии с предполагаемым асимптотическим поведением  $m(T) \sim \exp(-c(T - T_c)^{-1/2})$  при  $T \searrow T_c$  [Kosterlitz, 1974]. Для сравнения на рис. 5.6(б) изображен аналогичный график для двумерной модели Изинга с асимптотическим поведением  $m(T) \sim$

$\sim |T - T_c|$ . Критические индексы и асимптотическое поведение вблизи  $T_c$  подробнее обсуждаются в § 17.7.

Резюмируя, можно сказать, что фазовый переход в модели ротаторов связан с обращением в нуль обратного корреляционного радиуса или массы при всех  $T \leq T_c$ . В этой области нет дальнего порядка, основное состояние единственно, но щель в спектре трансфер-матрицы отсутствует. Фазовый переход можно интерпретировать как конденсацию диполей в пространстве состояний ротаторов. К настоящему времени приведенная картина фазового перехода, построенная Костерлицем и Таулессом, не подкреплена математически, но выглядит весьма убедительной<sup>1)</sup>.

Отметим в заключение, что, как предполагается, в некоторых калибровочных теориях фазовые переходы характеризуются убыванием операторов параллельного переноса. Эти фазовые переходы тоже происходят в теориях с единственным основным состоянием, но описываются в рамках картины среднего поля с помощью вихревых конфигураций.

#### Литературные ссылки

[Domb, Green, 1972], [Ruelle, 1969], [Stanley, 1971], [Синай, 1980].

## Глава 6

### Теория поля

В этой главе мы на формальном уровне введем понятие квантового поля. На этом будет закончено изложение предварительного материала. С другой стороны, эту главу можно рассматривать как подготовительную ко второй части. Читатели, знакомые со статистической механикой и квантовой теорией, могут начать сразу с этой главы.

#### 6.1 Аксиомы

##### (i) Евклидовы аксиомы

Мы определим квантовое поле при помощи его аналитического продолжения на мнимые значения времени. При таком продолжении метрика Минковского, определяющая волновой оператор

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{d-1}^2}, \quad (6.1.1)$$

<sup>1)</sup> В настоящее время имеется математически строгое доказательство существования фазового перехода в модели плоских ротаторов. См. [Fröhlich, Spencer, 1981b]. — Прим. ред.



заменяется евклидовой метрикой (причем уславливаются, что  $x_d = ix_0$ ), определяющей оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (6.1.2)$$

По этой причине поля, определенные для мнимых значений времени, называются евклидовыми. Евклидовы поля задаются вероятностной мерой  $d\mu(\varphi) = d\mu$  на пространстве обобщенных функций  $\mathcal{D}'(R^d)$ , где  $d$  — размерность пространства-времени. Здесь мера  $d\mu$  играет роль распределения Фейнмана — Каца в квантовой механике (см. гл. 3). В дальнейшем поля мы будем обозначать буквой  $\varphi$ . Обозначение  $g$  из гл. 3 сохраним для систем с конечным числом степеней свободы. Введем еще одно соглашение: значение обобщенной функции  $\varphi \in \mathcal{D}'(R^d)$  на основной функции  $f \in \mathcal{D}(R^d) = C_0^\infty(R^d)$  обозначим

$$\varphi(f) = \langle \varphi, f \rangle = \int_{R^d} \varphi(x) f(x) dx. \quad (6.1.3)$$

Значению функции  $\varphi(x)$  в точке в последнем интеграле можно придать только формальный смысл. Определим характеристический функционал как обратное преобразование Фурье борелевской вероятностной меры  $d\mu$  на пространстве  $\mathcal{D}'(R^d)$  (см. теорему 3.4.2):

$$S\{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu. \quad (6.1.4)$$

Начнем с перечисления аксиом, которые характеризуют интересующую нас меру  $d\mu$ . Они чуть сильнее тех, которые изложены в работах [Osterwalder, Schrader, 1973b, 1975]. Это аксиомы аналитичности, регулярности, евклидовой инвариантности, OS-положительности при отражениях и эргодичности. Сформулируем их подробно.

**OS 0 (Аналитичность).** Функционал  $S\{f\}$  является целой аналитической функцией. Точнее, для любого конечного набора основных функций  $f_j \in \mathcal{D}(R^d)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , и комплексных переменных  $z = \{z_1, \dots, z_N\} \in C^N$  функция  $z \rightarrow S\left\{\sum_{i=1}^N z_i f_i\right\}$  на пространстве  $C^N$  является целой. Другими словами, мера  $d\mu$  убывает на бесконечности быстрее любой экспоненты.

**OS 1 (Регулярность).** Существуют такое  $p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , и такая постоянная  $c$ , что для любой функции  $f \in \mathcal{D}(R^d)$  справедлива оценка

$$|S\{f\}| \leq \exp c(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^2). \quad (6.1.5)$$

В случае  $p = 2$  дополнительно вводится еще одна аксиома регу-

лярности: существует двухточечная корреляционная функция (т. е. второй момент меры  $d\mu$ ). Как функция разности аргументов  $x_1 - x_2$ , она принадлежит пространству локально интегрируемых функций  $L_1^{\text{loc}}(R^d)$ . В частности, в совпадающих точках  $x_1 = x_2$  она имеет только интегрируемые особенности<sup>1)</sup>.

**OS 2** (Инвариантность). Функционал  $S\{f\}$  инвариантен относительно евклидовых движений  $E$  в пространстве  $R^d$  (т. е. сдвигов, поворотов и отражений):  $S\{f\} = S\{Ef\}$ . Другими словами, мера  $d\mu$  евклидово-инвариантна, так что  $d\mu = Ed\mu$ .

Заметим, что отображение  $E: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  непрерывно, поэтому действие преобразования  $E$  на пространстве  $\mathcal{D}'(R^d)$  можно определить по формуле  $(E\varphi)(f) = \varphi(Ef)$ . Нам понадобится следующий класс функционалов экспоненциального типа:

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\varphi) = \sum_{j=1}^N c_j \exp(\varphi(f_j)), c_j \in \mathbb{C}, f_j \in \mathcal{D} \right\}. \quad (6.1.6)$$

Из определения (6.1.6) видно, что функционал  $A \in \mathcal{A}$  принимает комплексные значения.

Согласно аксиоме OS 0, все функционалы из множества  $\mathcal{A}$  интегрируемы, а так как само  $\mathcal{A}$  является алгеброй, то все они принадлежат пространству  $L_p$  для любого  $p < \infty$ . Поскольку мера  $d\mu$  евклидово-инвариантна, евклидовы преобразования определяют непрерывную унитарную группу, действующую в пространстве  $L_2(d\mu)$  (элементы которой также обозначаются  $E$ ). При этом

$$(EA)(\varphi) = A(E\varphi), \quad A \in \mathcal{A}. \quad (6.1.7)$$

**OS 3** (OS-положительность при отражениях). Пусть  $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$  обозначает подмножество тех функционалов (6.1.6), у которых носители функций  $f_j$  лежат в полупространстве  $R_+^d = \{\mathbf{x}, t: t > 0\}$ , т. е.  $f_j \in C_0(R_+^d)$ . Предположим далее, что отражение относительно гиперплоскости пространственных переменных  $\theta: \{\mathbf{x}, t\} \rightarrow \{\mathbf{x}, -t\}$  удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \langle \theta A, A \rangle_{L_1} = \int \overline{\theta A} A d\mu. \quad (6.1.8)$$

<sup>1)</sup> Иногда удобно формулировать аксиомы в терминах самого поля  $\varphi \in \mathcal{D}'(R^d)$ . Поступив таким образом, можно доказать сначала существование функционала  $S\{f\}$  для любой функции  $f(x)$  из основного пространства  $C_0^\infty$ , а затем и оценку (6.1.5). Из этой оценки вытекает, что  $S\{f\}$  продолжается до непрерывного функционала на пространстве Шварца  $\mathcal{S}(R^d)$  быстро убывающих функций. Воспользовавшись затем стандартными рассуждениями теории функциональных интегралов, можно показать, что в таком случае мера  $d\mu$  сосредоточена на пространстве  $\mathcal{S}'(R^d)$  [Гельфанд, Виленкин, 1964]. В случае свободных полей (т. е. гауссовых мер) с ковариационными операторами  $C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  мы часто будем обходиться без пространства  $\mathcal{D}'$ , определяя меру  $d\mu$  непосредственно на пространстве  $\mathcal{S}'$ .

В терминах функционала  $S\{f\}$  это требование эквивалентно следующему: для любой конечной последовательности функций  $f_j \in \mathcal{D}_{\text{вещ}}(R^d)$  матрица

$$M_{ij} = S\{f_i - \theta f_j\} \quad (6.1.9)$$

положительна (т. е. все ее собственные значения неотрицательны).

**OS 4** (Эргодичность). Подгруппа  $T(t)$  временных сдвигов эргодически действует на пространстве с мерой  $\{\mathcal{D}'(R^d), d\mu\}$ . Это означает, что для всех функций  $A(\varphi) \in L_1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) A(\varphi) T(s)^{-1} ds = \int A(\varphi) d\mu(\varphi). \quad (6.1.10)$$

Заметим, что из соотношения (6.1.10) следует, что стоящее в левой части среднее по времени не зависит от  $\varphi$ .

Эти аксиомы имеют определенный физический смысл; они описывают аналитическое продолжение квантовых полей в пространство Минковского. Евклидова инвариантность (OS 2) при этом аналитическом продолжении, когда  $t$  продолжается в физическую область, превращается в лоренц-инвариантность квантового поля в пространстве Минковского. Физической областью значений времени является чисто мнимая ось в принятых выше евклидовых обозначениях. Таким образом, для вещественного  $t$  лоренц-инвариантность получается с помощью подстановки  $\varphi(t) \rightarrow \varphi(-it)$ .

Эргодичность эквивалентна единственности вакуума. Аксиома регулярности чуть сильнее, чем это на самом деле нужно, однако в случае скалярных бозонных полей позволяет охватить ряд интересных примеров. Аксиома регулярности вводит ограничения на локальные особенности корреляционных функций. Для случая полиномиального взаимодействия степени  $n$  мы можем взять  $p = n/(n-1) = n'$ .

Пусть  $\mathcal{E} = L_2(\mathcal{D}'(R^d), d\mu)$ . Пространство  $\mathcal{E}$  есть замыкание множества векторов (6.1.6) по норме скалярного произведения в  $L_2(d\mu)^1$ . Это еще не квантовомеханическое гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ . Оно больше напоминает пространство квантовых траекторий. Из свойства положительности при отражениях вытекает положительность скалярного произведения в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , в котором действуют операторы квантового поля в пространстве Минковского. Определение скалярного произведения (6.18) в пространстве  $\mathcal{H}$  с помощью обращения времени можно

<sup>1)</sup> Чтобы в этом убедиться, заметим, что цилиндрические функции из  $L_2$  плотны в пространстве  $L_2(\mathcal{D}', d\mu)$ , поэтому можно ограничиться фиксированным конечномерным подпространством  $\mathcal{D}$ . Преобразование Фурье  $(Fd\mu) \sim$  функционала  $F(\varphi)$ , ортогонального всем функционалам вида (6.1.6), тождественно равно нулю. Поэтому  $Fd\mu$  ортогонально всем непрерывным функциям с компактным носителем. Последние плотны в пространстве  $L_2(d\nu)$  для любой меры Радона  $d\nu$ , следовательно, функционал  $F$  как элемент  $L_2$  равен 0.

истолковать как аналитическое продолжение эрмитова сопряжения  $(e^{-itH})^* = e^{itH}$  в область вещественных значений времени  $t$ .

Формально можно так перевести введенные здесь понятия на язык, принятый в гл. 3:

$\mathcal{D}'(R^d) =$  пространство траекторий,

$d\mu =$  мера Фейнмана — Каца на пространстве траекторий,

$\mathcal{D}'(R^{d-1}) =$  конфигурационное пространство,

$t \rightarrow \varphi(\mathbf{x}, \cdot) =$  траектория со значениями с  $\mathcal{D}'(R^{d-1})$ ,

$\mathcal{H} = L_2(\mathcal{D}'(R^{d-1}), d\nu)$  (шредингерово представление).

Здесь  $d\nu$  — мера, определенная основным состоянием гамильтониана  $H$ ; она совпадает с ограничением меры  $d\mu$  на подпространство обобщенных функций  $\varphi(x, 0) \in \mathcal{D}'(R^{d-1})$  ( $t = 0$ ). Шредингерово представление (при  $d > 1$ ) построено лишь в частных случаях.

Мы не будем буквально следовать этим формальным соотношениям, а определим пространство  $\mathcal{H}$  непосредственно. Пусть  $\mathcal{E}_+$  — линейная оболочка в пространстве  $\mathcal{E}$  векторов  $A$  из множества  $\mathcal{A}_+$ . Зададим на  $\mathcal{E}_+ \times \mathcal{E}_+$  билинейную форму  $b$  формулой

$$b(A, B) = \langle \theta A, B \rangle_{L_2} = \int \overline{\theta A} B d\mu = \langle \theta A, B \rangle_{\mathcal{E}}. \quad (6.1.11)$$

В силу соотношения (6.1.8), форма  $b$  положительна. Назовем подпространство  $\mathcal{E}_+ \subset \mathcal{E}$  подпространством будущего. Пусть  $\mathcal{N}$  — множество векторов из  $\mathcal{E}_+$ , для которых скалярное произведение (6.1.11) обращается в нуль. Теперь можно определить  $\mathcal{H}$  как пополнение множества классов эквивалентности  $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$  в метрике, определенной формулой (6.1.11)<sup>1</sup>.

**Предложение 6.1.1.** Пусть  $d\mu$  — вероятностная мера на пространстве  $\mathcal{D}'(R^d)$ , для которой выполнена аксиома (OS 3). Тогда множество  $\mathcal{N}$  является линейным пространством, а форма (6.1.11) задает на пространстве  $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$  скалярное произведение, которое мы обозначим  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ .

*Доказательство.* Надо показать, что если  $A, B \in \mathcal{E}_+$ , а  $n \in \mathcal{N}$ , то  $b(A + n, B) = b(A, B)$ . Это следует из неравенства Шварца, которое справедливо для неотрицательной билинейной формы  $b$ :

$$|b(A, B)| = \left| \int \overline{\theta A} B d\mu \right| \leq b(A, A)^{1/2} b(B, B)^{1/2}. \blacksquare$$

Для того чтобы отличать векторы  $A \in \mathcal{E}_+$  от соответствующих классов эквивалентности  $A + \mathcal{N} \in \mathcal{H}$ , обозначим через  $\hat{\cdot}: \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{H}$  каноническое вложение  $\hat{A} = A + \mathcal{N}$ , где  $A \in \mathcal{E}_+$ . Используя вло-

<sup>1</sup>) Заметим, что это определение пространства  $\mathcal{H}$  согласуется с теоретико-вероятностным понятием условного среднего функции из  $\mathcal{E}_+$  относительно  $\mathcal{E}_- \equiv \theta \mathcal{E}_+$ . (То есть  $\sigma$ -алгебры в  $\mathcal{D}'(R^d)$ , порожденной подпространством  $\mathcal{E}_-$  — Ред.)

жение  $\hat{\cdot}$ , мы можем по оператору  $S$ , действующему в пространстве  $\mathcal{E}_+$ , построить оператор  $\hat{S}$ , который будет действовать уже в пространстве  $\mathcal{H}$ . Естественно определить оператор  $\hat{S}$  формулой

$$\hat{S}\hat{A} = (SA)^\wedge. \quad (6.1.12a)$$

Это определение можно пояснить диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_+ & \xrightarrow{S} & \mathcal{E}_+ \\ \downarrow \hat{\cdot} & & \downarrow \hat{\cdot} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\hat{S}} & \mathcal{H} \end{array} \quad (6.1.12b)$$

Одновременно с произведением

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \theta A, B \rangle_{\mathcal{E}} \quad (6.1.12c)$$

определим билинейную форму

$$\langle \hat{A}, \hat{S}\hat{B} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \theta A, SB \rangle_{\mathcal{E}}. \quad (6.1.12d)$$

Определения (6.1.12) имеют смысл только в том случае, если оператор  $\hat{S}$  задан на классах эквивалентности. Другими словами, требуется, чтобы

$$S: \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+ \quad \text{и} \quad S: \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}, \quad (6.1.13)$$

где  $\mathcal{D}(S)$  — область определения оператора  $S$  (возможно, неограниченного).

**Предложение 6.1.2.** Пусть  $d\mu$  — вероятностная мера на пространстве  $\mathcal{D}'$ , обладающая свойствами положительности и инвариантности при отражениях. Тогда отображение  $\hat{\cdot}$  является сжатием, т. е.  $\|\hat{A}\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\|_{\mathcal{E}}$ .

*Доказательство.* По определению для любых двух элементов  $A, B \in \mathcal{E}_+$

$$\langle (A + \mathcal{N})^\wedge, (B + \mathcal{N})^\wedge \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \theta A, B \rangle_{\mathcal{E}},$$

а в силу неравенства Шварца в пространстве  $\mathcal{E}$

$$\|(A + \mathcal{N})^\wedge\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \theta A, A \rangle_{\mathcal{E}} \leq \|A\|_{\mathcal{E}} \|\theta A\|_{\mathcal{E}} = \|A\|_{\mathcal{E}}^2. \quad \blacksquare$$

Следующий результат позволяет определить гамильтониан, а тем самым аналитическое продолжение поля в пространство Минковского. Пусть  $T(E)$  — унитарное представление евклидовой группы движений пространства  $\mathcal{E}$ , определенное в силу аксиомы инвариантности OS 2. Кроме того, пусть  $T(t)$  — подгруппа временных сдвигов.

**Теорема 6.1.3** (Реконструкция квантовой механики). Пусть вероятностная мера  $d\mu$  на пространстве  $\mathcal{D}'$  удовлетворяет свойствам положительности при отражениях и инвариантности при отражениях и временных сдвигах. Тогда при  $t \geq 0$  для полугруппы операторов  $T(t)$  выполнены соотношения (6.1.13) и  $T(t)^\wedge = e^{-tH}$ . Здесь

$0 \leq H = H^*$ , а для вектора  $\Omega = \hat{1}$  верно равенство  $H\Omega = 0$ . Другими словами,  $H$  — положительный самосопряженный оператор, для которого вектор  $\Omega$  является основным состоянием.

*Доказательство.* Очевидно, что  $T(t): \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+$ . Если  $A \in \mathcal{A}$ , то, пользуясь унитарностью операторов  $T$ , получим, что

$$\begin{aligned} \langle \theta T(t)A, T(t)A \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle T(-t)\theta A, T(t)A \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \theta A, T(2t)A \rangle_{\mathcal{E}} \leq \\ &\leq \langle \theta A, A \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2} \langle \theta T(2t)A, \theta T(2t)A \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2} = 0, \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

где последнее неравенство вытекает из неравенства Шварца для формы (6.1.11). Отсюда следует, что  $T(t): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  и, значит, оператор  $T(t)^\wedge$  корректно определен. Для удобства обозначим  $R(t) = T(t)^\wedge$ . Теперь приступим к проверке следующих четырех свойств семейства операторов  $R(t)$ :

- (i) полугрупповое свойство:  $R(t)R(s) = R(t+s)$ ,  $s, t \geq 0$ ;
- (ii) эрмитовость;
- (iii)  $R(t)$  — сжатие:  $\|R(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ ;
- (iv) сильная непрерывность:  $R(t) \rightarrow I$  при  $t \rightarrow 0$ .

Эти свойства означают, что  $R(t)$  — сильно непрерывная полугруппа самосопряженных сжимающих операторов. Следовательно, существует положительный самосопряженный оператор  $H$ , такой, что  $R(t) = e^{-tH}$ . Кроме того,  $T(t)1 = 1$ . Поэтому для  $\Omega \equiv \hat{1}$  получим, что  $e^{-tH}\Omega = (T(t))^\wedge \Omega = \Omega$ , или, что то же самое,  $H\Omega = 0$ .

Свойство (i) следует из полугруппового свойства для семейства  $T(t)$ ; точнее, в силу соотношений (6.1.12), имеем

$$R(t)R(s) = (T(t)T(s))^\wedge = T(t+s)^\wedge = R(t+s).$$

Свойство (ii) доказывается следующей цепочкой равенств, верных для любого элемента  $A \in \mathcal{E}_+$ :

$$\begin{aligned} \langle R(t)\hat{A}, \hat{A} \rangle &= \langle (T(t)A)^\wedge, \hat{A} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \theta T(t)A, A \rangle_{\mathcal{E}} = \langle T(-t)\theta A, A \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle \theta A, T(t)A \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \hat{A}, (T(t)A)^\wedge \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{A}, R(t)\hat{A} \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Для доказательства свойства (iii) воспользуемся неравенством Шварца и доказанными утверждениями (i), (ii). Их применение к  $A \in \mathcal{E}_+$  дает

$$\|R(t)\hat{A}\|_{\mathcal{H}} = \langle R(t)\hat{A}, R(t)\hat{A} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} = \langle \hat{A}, R(2t)\hat{A} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|R(2t)\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}.$$

Продолжая действовать таким же образом, после  $n$ -кратного применения неравенства Шварца получим, что

$$\begin{aligned} \|R(t)\hat{A}\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1-2^{-n}} \|R(2^n t)\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{2^{-n}} = \\ &= \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1-2^{-n}} \|(T(2^n t)A)^\wedge\|_{\mathcal{H}}^{2^{-n}} \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1-2^{-n}} \|A\|_{\mathcal{H}}^{2^{-n}}. \end{aligned}$$

Здесь мы также воспользовались предложением 6.1.2 и унитарностью семейства  $T(t)$ . Полагая  $n \rightarrow \infty$ , получим, что  $\|R(t)\hat{A}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}$ . Так как такие элементы  $A$  плотны в пространстве  $\mathcal{H}$ , свойство (iii) доказано.

Для того чтобы доказать свойство (iv), заметим, что семейство  $T(t)$  сильно непрерывно на подпространстве  $\mathcal{E}_+$ , а отображение  $^\wedge$  является сжатием из  $\mathcal{E}_+$  в  $\mathcal{H}$ . Следовательно, семейство  $R(t)$  сильно непрерывно на плотном подмножестве в пространстве  $\mathcal{H}$ , составленном из векторов  $\hat{A}$ , где  $A \rightarrow \mathcal{E}_+$ . Поскольку  $\|R(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ , отсюда следует, что семейство  $R(t)$  сильно непрерывно и на всем гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . ■

**Замечание** (Трансфер-матрица в статистической физике). В случае решеточных полей, изучаемых в статистической механике, поля  $\varphi_x$  или  $\xi_x$  определены на некоторой решетке, например  $x \in Z^d$ . Поэтому аксиомы регулярности и инвариантности следует применять здесь в модифицированном виде. При этом полезительность при отражениях используется для определения трансфер-матрицы  $K$ , которая играет роль оператора  $e^{-H}$ .

Мы требуем инвариантности меры  $d\mu$  относительно группы  $T(x)$  сдвигов и отражений решетки, в частности относительно отражения  $\theta$  в гиперплоскости  $\Pi$ , расположенной на равных расстояниях от двух соседних параллельных гиперплоскостей решетки и параллельной им. (В качестве  $\Pi$  мы возьмем гиперплоскость  $t = 0$ .) Тогда из приведенного выше доказательства следует, что существует гильбертово пространство состояний  $\mathcal{H}$ , являющееся пополнением факторпространства  $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$  по норме, определенной скалярным произведением

$$\langle A, B \rangle_{\mathcal{H}} = \int \overline{\theta A} B d\mu.$$

Более того, на пространстве  $\mathcal{H}$  существует самосопряженный оператор  $K$ , такой, что  $K^t = T(t)^\wedge$ ,  $t \in Z$ ,  $0 \leq K \leq I$ , а  $\Omega = \hat{1}$  является инвариантным вектором оператора  $K$ :  $K\Omega = \Omega$ .

Аналогично, пространственные сдвиги (в направлении  $x$ , ортогональном оси  $t$ ) порождают семейство унитарных операторов

$$U(x) = T(x)^\wedge = \prod_{i=1}^{d-1} U_i^{x_i},$$

для которых  $\Omega$  тоже является собственным вектором:  $U(x)\Omega = \Omega$ .

Единственность вакуумного вектора  $\Omega$  (однократность собственного значения 1 оператора  $K$ ) и в этом случае эквивалентна эргодичности меры  $d\mu$  под действием временных сдвигов. Для решеточной трансфер-матрицы остается открытым вопрос о том, когда существует  $\ln K$ , или, другими словами, когда нуль не является собственным значением оператора  $K$ .

Теперь мы снова обратимся к непрерывному случаю и продемонстрируем применение аксиомы регулярности OS 1 при построении евклидова поля  $\varphi(f)$ .

**Предложение 6.1.4.** Пусть  $d\mu$  — вероятностная мера на пространстве  $\mathcal{D}'$ , удовлетворяющая аксиоме OS 0. Тогда у этой меры есть моменты любого порядка, причем  $n$ -й момент обладает ядром  $S_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}'(R^{nd})$ , т. е.

$$\int \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) d\mu = \int S_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) dx. \quad (6.1.15)$$

Если к тому же имеет место аксиома OS 1, то  $S_n \in L_1^{\text{loc}}(R^{nd})$ .

**Замечание.** Ядро  $S_n$  называется функцией Швингера.

*Доказательство.* Операторы  $U(t) = e^{it\varphi(t)}$ ,  $f \in \mathcal{S}_{\text{вещ}}$ , образуют унитарную группу, действующую в пространстве  $\mathcal{E}$ . Ее инфинитезимальным генератором является оператор умножения  $\varphi(t)$ . Утверждение о том, что функция 1 принадлежит области определения всех операторов  $\varphi(f)^n$ , эквивалентно существованию у меры  $d\mu$  моментов порядка  $2n$ . (Моменты четного порядка при помощи неравенства Шварца оцениваются четными моментами.) Для того чтобы показать, что 1 принадлежит области определения оператора  $\varphi(f)^n$ , воспользуемся определением  $n$ -го разностного отношения  $(\Delta/\Delta t)^n U(t)$  оператора  $U(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left[ \left( \frac{\Delta}{\Delta t_1} \right)^n - \left( \frac{\Delta}{\Delta t_2} \right)^n \right] U(t) 1 \right\|^2 = \\ = \left[ \left( \frac{\Delta}{\Delta t_1} \right)^n - \left( \frac{\Delta}{\Delta t_2} \right)^n \right] \left[ \left( \frac{\Delta}{\Delta s_1} \right)^n - \left( \frac{\Delta}{\Delta s_2} \right)^n \right] S\{(s-t)f\} \Big|_{s=t}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что, в силу аналитичности (а значит, и дифференцируемости) функции  $S$ ,  $n$ -е разностное отношение имеет сильный предел. Пусть  $f$  принадлежит ограниченному конечномерному подмножеству пространства  $\mathcal{D}$ . В силу непрерывности, модуль  $|S\{f\}|$  ограничен на этом подмножестве. Следовательно, можно применить интегральную формулу Коши

$$S_n(f_1, \dots, f_n) = \oint S\{g\} \prod_{j=1}^n (-dz_j / 2\pi z_j^2),$$

где  $g = \sum_{j=1}^n z_j f_j$ , а интегрирование ведется по окружностям  $|z_j| = 1$ . Это дает оценку функции  $S_n$ , необходимую для доказательства ее непрерывности на произведении  $\mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D}$ . Непрерывное продолжение  $S_n$  на все пространство  $\mathcal{D}'(R^{nd})$  получается при помощи теоремы о ядре.

В случае когда справедлива аксиома OSI, функция  $S_n$  продолжается по непрерывности до мультилинейного функционала на  $(L_1 \cap L_p) \times \dots \times (L_1 \cap L_p)$ . Это означает, в частности, что  $S_n$  локально интегрируема как функция  $nd$  переменных. ■

## (ii) Аксиомы поля в пространстве Минковского

При аналитическом продолжении по переменной времени,  $t \rightarrow -it$ , операторы поля для вещественного времени и представление группы Лоренца могут быть определены в пространстве  $\mathcal{H}$  так, чтобы выполнялись аксиомы Вайтмана и Хаага — Кастлера. Математическое доказательство этих утверждений слишком технично, поэтому мы отложим его до гл. 19, а здесь только сформулируем результаты.

Пусть  $\varphi = \varphi_E(\mathbf{x}, t)$  — евклидово поле, рассматриваемое, как и выше, в вещественной евклидовой точке  $\mathbf{x}, t$ . Аксиомы Вайтмана и Хаага — Кастлера относятся к его аналитическому продолжению на вещественное пространство Минковского, т. е. на чисто мнимое евклидово время. Чтобы различать поля с разными значениями аргументов, будем писать

$$\varphi_E(\mathbf{x}, t) = \varphi_M(it, \mathbf{x}).$$

Если же из контекста ясно, о каком поле идет речь, то  $\varphi$  может обозначать как  $\varphi_E$ , так и  $\varphi_M$ . Пусть  $x = (t, \mathbf{x})$  — вектор простран-



ства-времени Минковского; оператор поля  $\varphi_M$ , отвечающий вещественному времени, формально запишем в виде

$$\int \varphi_M(x) f(x) dx = \varphi_M(f). \quad (6.1.16)$$

Оказывается, что (в смысле операторнозначных обобщенных функций)

$$\varphi_M(\mathbf{x}, t) = e^{itH} \varphi_M(\mathbf{x}, 0) e^{-itH}.$$

Как следует из аксиом OS 1—3, оператор поля  $\varphi_M(f)$  самосопряжен при вещественных  $f$ . (Этого не требуется в аксиомах Вайтмана, но это свойство означает, что  $\varphi_M(t)$  есть наблюдаемая величина в смысле постулатов квантовой механики.) Эта величина измеряет напряженность поля  $\varphi_M$ , усредненную с помощью основной функции  $f$  по точкам пространства-времени.

Перейдем к формулировке аксиом.

**W 1** (Ковариантность). В гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  состояний квантового поля существует непрерывное унитарное представление неоднородной группы Лоренца  $g \rightarrow U(g)$ . Спектр генераторов ( $H = P_0, \mathbf{P}$ ) подгруппы сдвигов лежит в переднем конусе  $p_0^2 - \mathbf{p}^2 \geq 0, p_0 \geq 0$ . Существует вакуумный вектор  $\Omega \in \mathcal{H}$ , инвариантный относительно операторов  $U(g)$ .

**W 2** (Наблюдаемые). Существует семейство операторов поля  $\{\varphi_M(f) : f \in \mathcal{S}(R^d)\}$ , определенных на всюду плотном множестве в пространстве  $\mathcal{H}$ . Вакуумный вектор  $\Omega$  принадлежит области определения любого многочлена от операторов поля  $\varphi_M(f)$ , а линейная оболочка  $\mathcal{D}$  векторов вида  $\{\varphi_M(f_1) \dots \varphi_M(f_n) \Omega : 0 \leq n, f_i \in \mathcal{S}(R^d)\}$  плотна в пространстве  $\mathcal{H}$ . Поле  $\varphi_M(f)$  ковариантно под действием группы Лоренца на  $\mathcal{H}$  и линейно зависит от  $f$ . В частности,  $U(g) \varphi_M(f) U(g) = \varphi_M(f_g)$ .

**W 3** (Локальность). Если носители основных функций  $f$  и  $h$  пространственно-подобно отделены, то  $\varphi_M(f) \varphi_M(h) = \varphi_M(h) \varphi_M(f)$  на  $\mathcal{D}$ . (Вектор  $(t, \mathbf{x})$  пространственно-подобен, если  $|t| < |\mathbf{x}|$ .)

**W 4**. Вакуумный вектор  $\Omega$  — единственный (с точностью до числового множителя) вектор в пространстве  $\mathcal{H}$ , инвариантный относительно группы сдвигов по времени.

Обращение к теореме Шварца о ядре показывает, что операторы поля однозначно определяют моменты ( $n$ -точечные функции Вайтмана)

$$W_n = W(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega, \varphi_M(x_1) \dots \varphi_M(x_n) \Omega \rangle \in \mathcal{S}'(R^{nd}).$$

Перечисленные аксиомы могут быть эквивалентным образом переформулированы как свойства функций Вайтмана. Переход от этих функций к операторам поля осуществляется при помощи теоремы

реконструкции [Streater, Wightman, 1964]. В силу трансляционной инвариантности,  $W_n$  можно рассматривать как функции из пространства  $\mathcal{S}'(R^{(n-1)d})$  от  $x_j - x_1$ .

**Теорема 6.1.5.** Пусть для меры  $d\mu$  на пространстве  $\mathcal{D}'(R^d)$  выполнены аксиомы OS 0—3. Тогда поле  $\varphi_M$ , определенное для вещественного времени, удовлетворяет аксиомам W 1—3. Кроме того, аксиома OS 4 верна тогда и только тогда, когда справедлива аксиома W 4.

Доказательство. См. гл. 19.

**Замечание.** Функции Швингера и Вайтмана связаны посредством аналитического продолжения. Точным утверждением, которое доказывается в гл. 19, является следующая формула:

$$\int \varphi_E(x_1, t_1) \varphi_E(x_2, t_2) \dots \varphi_E(x_n, t_n) d\mu = \langle \Omega, \varphi_M(it_1, x_1) \varphi_M(it_2, x_2) \dots \varphi_M(it_n, x_n) \Omega \rangle. \quad (6.1.17)$$

Функции Вайтмана на вещественной оси времени являются граничными значениями аналитических функций, которые аналитически продолжаются в евклидову область (за вычетом диагоналей  $x_i = x_j$  при каких-нибудь  $i \neq j$ ) так, что выполняется (6.1.17).

Существующие стандартные методы построения квантовых полей естественно приводят к мере  $d\mu$ , для которой верны аксиомы OS, кроме, быть может, аксиомы OS 4. Вопрос о том, обладает ли данная мера единственным вакуумным вектором, обычно труден. Он тесно связан с возможностью фазовых переходов и выбором граничных условий в определении меры. Существует общая теория, которая позволяет, оставляя в стороне эти довольно сложные вопросы, построить поле, удовлетворяющее полному набору аксиом OS 0—4. Идея состоит в том, чтобы, получив какую-нибудь теорию, для которой справедливы аксиомы OS 0—3, разложить ее на неприводимые компоненты, каждая из которых имеет единственный вакуум и удовлетворяет аксиомам OS 0—4, а значит, и W 1—4. Пометим эти компоненты параметром  $\zeta$ . Они соответствуют чистым фазам, определенным каждая в своем гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_\zeta$ , так что  $\mathcal{H} = \int \mathcal{H}_\zeta d\rho(\zeta)$ , где  $d\rho$  — некоторая вероятностная мера. Кроме того,

$$\langle \Omega, \varphi_M(f_1) \dots \varphi_M(f_n) \Omega \rangle_{\mathcal{H}} = \int \langle \Omega_\zeta, \varphi_{\zeta, M}(f_1) \dots \varphi_{\zeta, M}(f_n) \Omega_\zeta \rangle_{\mathcal{H}_\zeta} d\rho(\zeta),$$

и подобное разложение имеет место для меры  $d\mu$ . Подробнее это построение изложено в § 19.7.

Аксиомы Хаага — Кастлера касаются скорее алгебраической структуры квантовых полей, не зависящей от их явной реализации в том или ином гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Поэтому они удобны при обсуждении общих свойств полей, не связанных с их

реализацией, таких, как построение секторов суперотбора заряда, построение зарядовых операторов и токов с помощью наблюдаемых поля и т. д. Приведем эти аксиомы.

**НК 1.** Каждой ограниченной открытой области  $B$  пространства-времени поставлена в соответствие  $C^*$ -алгебра  $\mathfrak{A}(B)$  с единицей. Полная алгебра  $\mathfrak{A} = \bigcup_B \mathfrak{A}(B)$  имеет точное неприводимое представление.

**НК 2.** Если  $B_1 \subset B_2$ , то  $\mathfrak{A}(B_1) \subset \mathfrak{A}(B_2)$ .

**НК 3 (Локальность).** Если множества  $B_1$  и  $B_2$  пространственно-подобно отделены, то алгебры  $\mathfrak{A}(B_1)$  и  $\mathfrak{A}(B_2)$  коммутируют.

**НК 4 (Лоренц-ковариантность).** Пусть  $\{a, \Lambda\}$  — элемент неоднородной группы Лоренца. Тогда существует  $*$ -автоморфизм  $\sigma_{\{a, \Lambda\}}$  алгебры  $\mathfrak{A}$ , такой, что для любого ограниченного множества  $B$

$$\sigma_{\{a, \Lambda\}}(\mathfrak{A}(B)) = \mathfrak{A}(\{a, \Lambda\}B).$$

Отображение  $\{a, \Lambda\} \rightarrow \sigma_{\{a, \Lambda\}}$  является представлением группы Лоренца.

Мы построим локальные алгебры  $\mathfrak{A}(B)$ , которые будут слабо замкнутыми (алгебры фон Неймана).

**Теорема 6.1.6.** Пусть  $d\mu$  — мера на пространстве  $\mathcal{D}'$ , удовлетворяющая аксиомам OS 0—3. Тогда, если  $f$  — вещественная функция, то  $\varphi_M(f)$  — самосопряженный оператор на пространстве  $\mathcal{H}$ . Алгебры фон Неймана  $\mathfrak{A}(B)$ , порожденные элементами  $\exp(i\varphi_M(f))$ , где  $f$  — вещественная функция с  $\text{supp } f \Subset B$ , удовлетворяют аксиомам НК 1—4.

*Доказательство.* См. гл. 19.

## 6.2 Свободное поле

Свободное поле описывает невзаимодействующие частицы. Однако, несмотря на свой тривиальный характер, свободные поля играют определенную роль и при описании взаимодействующих частиц. Всякая частица, изолированная от других частиц (а также внешних сил и полей), ведет себя как свободная. Более того, в асимптотическом пределе при  $t \rightarrow \pm\infty$  происходит разделение частиц благодаря различиям в скоростях, а также из-за дисперсии, свойственной эволюции квантовомеханических систем. Поэтому в пределе при  $t \rightarrow \pm\infty$  поведение частиц мало отличается от поведения свободных частиц, и они описываются свободными полями.

Свободные поля служат также отправной точкой при анализе и построении взаимодействующих полей с помощью теории возму-

щений по константе связи  $\lambda$ . Важнейшее в этом отношении свойство свободных полей состоит в том, что они допускают явное решение. Другие разрешимые в явном виде поля, такие, как двумерная модель Тирринга, задаются в виде нелинейной и нелокальной функции некоторого свободного поля. Иной возможной отправной точкой при построении взаимодействующих полей служит модель Изинга или какая-либо другая модель статистической физики, рассматриваемая в своей критической точке.

При подходе к квантовым полям как моделям статистической физики евклидово свободное поле известно как гауссова модель. Она описывает критическое поведение на больших расстояниях в случае канонической критической точки.

Мы начнем анализ свободного поля с применения к гауссовой мере  $d\mu$  на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$  теоремы реконструкции. Пусть  $C$  — непрерывная невырожденная билинейная форма на произведении пространств  $\mathcal{P}(R^d) \times \mathcal{P}(R^d)$ . Символически запишем ее в виде

$$C(f, g) \equiv \langle f, Cg \rangle. \quad (6.2.1)$$

На пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$  существует единственная гауссова мера  $d\varphi_C$  с ковариацией (т. е. двухточечной функцией)  $C$  и нулевым средним. Характеристический функционал меры  $d\varphi_C$  равен

$$S\{f\} = e^{-\langle f, Cf \rangle/2} = \int e^{i\varphi(f)} d\varphi_C. \quad (6.2.2)$$

Пользуясь равенством (6.2.2), можно вычислить моменты меры  $d\varphi_C$ , а именно

$$\begin{aligned} \int \varphi(f)^n d\varphi_C &= (-id/d\lambda)^n S\{\lambda f\} |_{\lambda=0} = \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно,} \\ (n-1)!! C(f, f)^{n/2}, & n \text{ четно,} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

где  $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 1$ . Заметим, что для любого конечного числа координат в  $\mathcal{P}'$ , скажем  $q_j = \varphi(f_j)$ , где  $f_j \in \mathcal{P}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , их значения распределены относительно  $d\varphi_C$  по формуле

$$d\varphi_C = (\det C)^{1/2} (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i C_{ij}^{-1} q_j} \prod_{i=1}^n dq_i, \quad (6.2.4)$$

где  $C$  — матрица  $C_{ij} = C(f_i, f_j) = \langle f_i, Cf_j \rangle$ , а  $C^{-1}$  обозначает обратную матрицу.

Очевидно, что мера  $d\varphi_C$  и функционал  $S$  инвариантны относительно сдвигов по времени, отражений или других евклидовых движений в том и только в том случае, если всеми этими свойствами обладает ковариация  $C$ . Как мы сейчас увидим, это же относится и к свойству положительности при отражениях.

**Определение 6.2.1.** Билинейная форма  $C$  на произведении пространств  $\mathcal{P}(R^d) \times \mathcal{P}(R^d)$  обладает свойством положительности при отражениях, если для любой функции  $f \in \mathcal{P}(R^d)$ , носитель которой лежит в области будущего, верно неравенство  $\langle \theta f, C f \rangle \geq 0$ .

**Теорема 6.2.2.** Гауссова мера  $d\mu_C$  обладает свойством положительности при отражениях тогда и только тогда, когда им обладает ковариация  $C$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $C$  обладает этим свойством, и положим

$$M_{ij} = S\{f_i - \theta f_j\} = S\{f_i\} S\{f_j\} \exp\langle \theta f_i, C f_j \rangle,$$

где  $\text{supp } f_i \subset \{x: t > 0\}$ . Тогда матрица  $M_{ij}$  имеет положительные собственные значения (т.е. эта матрица положительна) в том и только в том случае, если  $N_{ij} = \exp\langle \theta f_i, C f_j \rangle$  — положительная матрица. По предположению  $R_{ij} = \langle \theta f_i, C f_j \rangle$  — положительная матрица, а отсюда следует и положительность  $N_{ij} = e^{R_{ij}}$ . В самом деле, если  $A_{ij}, B_{ij}$  — две произвольные положительные матрицы, то матрица  $D_{ij} \equiv A_{ij} B_{ij}$  тоже положительна, а это означает, что положительна  $N_{ij} = \sum (1/r!) (R_{ij})^r$ . Для доказательства положительности матрицы  $D$  рассмотрим тензорное произведение матриц  $A \otimes B$  с элементами  $A_{ij} B_{kl}$ . Заметим, что оно положительно. Следовательно, оно останется положительным и при ограничении на подпространство векторов  $\alpha$  с компонентами  $\alpha_{jl} = 0$  при всех  $j, l$ , кроме  $j = l$ . Но на этом подпространстве  $A \otimes B = D$ . ■

Обратное утверждение верно также и для негауссовых мер, поэтому мы сформулируем его в виде отдельной теоремы.

**Теорема 6.2.3.** Пусть  $d\mu$  — мера на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$  с характеристическим функционалом  $S\{f\}$ . Предположим, что  $S\{f\}$  является целой аналитической функцией комплексной переменной  $f$  из пространства комплексных основных функций  $\mathcal{P}$ . Если мера  $d\mu$  обладает свойством положительности при отражениях, то им обладает двухточечная корреляционная функция этой меры.

*Доказательство.* Определим  $M_{ij}$ , как выше, функцию  $f_1$  возьмем вещественной,  $f_1 = \lambda f$ , а  $f_2 = 0$ . Пусть также  $\alpha_1 = \lambda^{-1}$ ,  $\alpha_2 = -\lambda^{-1}$ . Тогда

$$0 \leq \sum_{i, j=1}^2 \alpha_i M_{ij} \alpha_j \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int \varphi(\theta f) \varphi(f) d\mu. \quad \blacksquare$$

Приведенная ниже спектральная формула Лемана (6.2.7) дает представление для двухточечной функции в лоренц-инвариантной теории поля. Этот результат тоже верен и для негауссовых полей, но в гауссовом случае он дает полную классификацию мер  $d\mu$ , которые соответствуют лоренц-инвариантным теориям. Положим

$$\Theta(p_0) = \begin{cases} 1, & p_0 > 0, \\ 0, & p_0 < 0, \end{cases} \quad (6.2.5)$$

$$\Delta_m^+ = \int e^{ip \cdot x} \Theta(p_0) \delta(m^2 + p^2) dp, \quad (6.2.6)$$

где лоренцева метрика равна  $p \cdot x = \sum_{i=1}^{d-1} p_i x_i - p_0 x_0$ .

**Теорема 6.2.4.** Пусть мера  $d\mu$  на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$  удовлетворяет аксиомам OS 0—3. Тогда для аналитического продолжения функции Вайтмана  $W_2$  справедливо представление

$$W_2(x, y) = \int_0^\infty d\rho(m^2) \Delta_m^+(x - y), \quad (6.2.7)$$

где  $d\rho(m^2)$  — положительная мера не более чем степенного роста и такая, что

$$\int_0^1 \ln m^{-2} d\rho(m^2) < \infty, \quad d = 2, \quad (6.2.8)$$

$$\int_0^1 m^{-1} d\rho(m^2) < \infty, \quad d = 1.$$

Более того, каждая такая мера  $d\rho$  соответствует одной и только одной гауссовой мере  $d\mu$ , обладающей свойствами инвариантности и положительности при отражениях.

*Доказательство.* В силу результатов § 6.1, функция  $W_2 \in \mathcal{P}'(R^d)$ , как функция разности  $x - y$ , лоренц-инвариантна. Ее преобразование Фурье, рассматриваемое как функция импульсной переменной, сопряженной к разности  $x - y$  (т. е. функция относительного импульса), является положительной мерой. Это следует из соотношения

$$0 \leq \langle \varphi(f) * \varphi(f) \rangle = \langle \varphi(\bar{i})\varphi(f) \rangle$$

для  $f$  из пространства комплексных основных функций  $\mathcal{P}(R^d)$ . В соответствии со спектральным условием  $H \geq 0$  и предположением инвариантности получаем, что носитель этой меры лежит в переднем конусе  $p_0^2 - p^2 \geq 0$ ,  $p_0 \geq 0$ . Воспользовавшись инвариантностью относительно действия группы Лоренца, получим представление (6.2.7—8). В случае гауссовых мер функция  $S_2$  и мера  $d\varphi$  однозначно определяют одна другую, а в общем случае каждая из функций  $S_2$ ,  $W_2$  и  $d\rho$  однозначно определяет остальные. Итак, всякой спектральной мере  $d\rho$  соответствует по крайней мере одна гауссова мера.

Фиксируем теперь  $d\rho$  и построим соответствующую ему гауссову меру  $d\varphi$ . Сначала рассмотрим случай  $d\rho(m^2) = \delta_{m^2}$ . Тогда  $W_2 = \Delta_m^+$ . Интегрирование по мере  $d\rho$  можно выполнить точно, после чего аналитическое продолжение  $x_0 \rightarrow ix_0$  приведет к формуле

$$S_2(x) = \int e^{ipx} (p^2 + m^2)^{-1} d\rho(m^2). \quad (6.2.9)$$

Возьмем теперь ковариацию

$$C = (-\Delta + m^2)^{-1} \quad (6.2.10)$$

и с помощью формулы (6.2.2) построим меру  $d\mu$ .

Для произвольной меры  $d\rho$  умеренного роста, подчиняющейся условиям (6.2.8), определим

$$C = \int (-\Delta + m^2)^{-1} d\rho(m^2) \quad (6.2.11)$$

и опять построим меру  $d\mu = d\varphi_C$  по формуле (6.2.2). Сходимость интеграла (6.2.11) при малых (соответственно больших) значениях  $m^2$  следует из условий относительно  $d\rho$  и известного асимптотического поведения ядра оператора  $(-\Delta + 1)^{-1}$  при больших (соответственно малых) значениях  $x$ . ■

**Определение.** Квантовые поля, построенные выше по гауссовым мерам  $d\varphi_C$ , называются обобщенными свободными полями. В частном случае  $d\rho(m^2) = \delta_m$  (см. (6.2.9—10)) такое поле называется свободным полем с массой  $m$  и нулевым спином. Оно удовлетворяет свободному волновому уравнению

$$(\partial_{x_\mu} \cdot \partial_{x_\mu} - m^2) \varphi(x, t) = 0. \quad (6.2.12)$$

Для такого свободного поля построение физического гильбертова пространства § 6.1 можно выполнить явно. Пространство  $\mathcal{H}$  — это пространство  $L_2$  с гауссовой мерой  $d\varphi_0$  на  $\mathcal{P}'(R^{d-1})$ , определенной значениями поля в нулевой момент времени<sup>1)</sup>. В случае размерностей  $d = 1, 2$  мы будем считать, что  $m^2 > 0$ , в соответствии с соотношениями (6.2.8), хотя и в этих случаях легко построить свободное поле нулевой массы, если выбрать другое пространство основных функций.

Для функции  $f \in \mathcal{P}(R^{d-1})$  положим

$$\tilde{f}_t(x) = f(x) \delta_t(x_0), \quad (6.2.13)$$

и пусть  $\mathcal{P}_0 = \{f \in \mathcal{P}(R^{d-1}) : \tilde{f}(0) = 0\}$ . (Последнее ограничение позволяет рассматривать нулевую массу и в случае размерностей  $d = 1, 2$ .)

**Предложение 6.2.5.** Пусть  $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$ . Положим  $\Delta = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \partial_{x_\alpha}^2$  и

$$\mu = (-\Delta + m^2)^{1/2}. \quad (6.2.14)$$

Тогда для  $s, t \geq 0$  и функций  $f, g \in \mathcal{P}_0$  справедливо тождество

$$\langle \theta g_s, C f_t \rangle = \frac{1}{2} \langle g, \mu^{-1} e^{-\mu(s+t)} f \rangle. \quad (6.2.15)$$

Более того, оператор  $C$  обладает свойством положительности при отражениях.

*Доказательство.* Скалярное произведение в левой части соотношения (6.2.15) берется в пространстве  $L_2(R^d)$ , а в правой — в пространстве  $L_2(R^{d-1})$ . Для доказательства тождества перепишем левую часть для преобразований Фурье, затем при помощи вычетов выполним интегрирование по  $d\rho_0$  и сделаем обратное преобразование Фурье по переменным  $p = p_1, \dots, p_{d-1}$ . Для функций  $f = g$  из пространства  $\mathcal{P}(R^d)$ , носители которых лежат в области будущего, скалярное произведение в (6.2.15) неотрицательно. Поэтому оператор  $C$  положителен при отражениях. ■

**Теорема 6.2.6.** Пусть, как и ранее, мера  $d\mu$  гауссова, а  $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$ . Тогда векторы  $e^{i\varphi(f_0)}$ ,  $f \in \mathcal{P}_0$ , принадлежат пространству  $\mathcal{E}_+$  из § 6.1. Более того, вложение  $\sim$  переводит линейную оболочку этих векторов изометрично в пространство  $\mathcal{H}$ .

<sup>1)</sup> Значение  $\varphi(h, 0)$  поля в нулевой момент времени — это ограничение поля  $\varphi(x, t)$  на гиперплоскость  $t = 0$ . Тот факт, что  $\varphi(h, 0)$  является случайной величиной из  $L_p$ , следует из свойств рассмотренной выше меры  $d\varphi_C$ . См. по этому поводу следствие 6.2.8 и гл. 8.

*Доказательство.* Непосредственные вычисления из тождества (6.2.2) для вещественных функций  $f$  и  $g$  дают

$$\int |e^{i\varphi(f)} - e^{i\varphi(g)}|^2 d\varphi_C = 2(1 - e^{-\langle f-g, C(f-g) \rangle / 2}).$$

Взяв последовательность  $g^{(n)} \in \mathcal{D}(R_+^d)$ ,  $g^{(n)} \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$ , при  $t > 0$  и  $f \in \mathcal{P}_0$  получим, что  $e^{i\varphi(f_t)} \in \mathcal{E}_+$  и аналогично  $e^{i\varphi(f_0)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i\varphi(f_t)} \in \mathcal{E}_+$ . Если  $f_j \in \mathcal{P}_0$ ,

то  $\theta\varphi(f_j, 0) = \varphi(f_j, 0)$  и

$$\|(\sum_j c_j e^{i\varphi(f_j, 0)})^\wedge\|_{\mathcal{E}}^2 = \left\langle \sum_j c_j e^{i\varphi(f_j, 0)}, \sum_j c_j e^{i\varphi(f_j, 0)} \right\rangle_{\mathcal{E}}.$$

Поэтому  $\hat{\cdot}$  — изометрия.

Пусть  $\mathcal{E}_t$  — подпространство, натянутое на векторы  $e^{i\varphi(f_t)}$ , т. е. соответствующее моменту времени  $t$ . Для функции  $f \in \mathcal{P}_0$  пусть  $f^t = e^{-t\mu} f$ . Тогда, в силу (6.2.2) и предложения 6.2.5,

$$\langle \hat{A}, : \exp(i\varphi(f_t)) : \hat{\cdot} \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \hat{A}, : \exp(i\varphi(f_0^t)) : \hat{\cdot} \rangle_{\mathcal{E}}. \quad (6.2.16)$$

Это соотношение можно доказать сначала для  $A = e^{i\varphi(g_s)}$ , а затем, рассмотрев линейные комбинации и перейдя к пределу, и для любого элемента  $A$  из  $\bigcup_{t>0} \mathcal{E}_t$ .

В формуле (6.2.16)  $: \exp \varphi(f) : = \exp[\varphi(f) - \frac{1}{2}\langle f, Cf \rangle]$ . Имеет место включение  $\hat{\mathcal{E}}_0 \supset (\bigcup_{t>0} \mathcal{E}_t)^\wedge$ .

Доказательство будет закончено, если мы покажем, что объединение  $\bigcup_{t>0} \mathcal{E}_t$

порождает пространство  $\mathcal{E}_+$ . Поскольку характеристический функционал является целой функцией от  $f \in \mathcal{P}(R^d)$  и  $f_t, f \in \mathcal{P}_0$ , то существуют моменты всех порядков. Поэтому полиномы от поля  $\{\varphi(f) \mid f \in \mathcal{P}(R^d), \text{supp } f \subset R_+^d\}$  порождают все пространство  $\mathcal{E}_+$ . Из аппроксимации интеграла по  $dx_0$  римановыми суммами вытекает, что то же самое верно и для полиномов от  $\{\varphi(f_t) \mid f \in \mathcal{P}_0, t > 0\}$ . Поэтому  $\bigcup_{t>0} \mathcal{E}_t$  порождает пространство  $\mathcal{E}_+$ . ■

**Следствие 6.2.7.** Для функции  $f \in \mathcal{P}_0$  справедливо соотношение  $e^{-tH} : \exp(i\varphi(f_0)) : \hat{\cdot} = : \exp(i\varphi(f_0^t)) : \hat{\cdot}$ .

*Доказательство.* Утверждение получается комбинацией соотношения (6.2.16) с формулой  $T(t) e^{i\varphi(f_0)} = e^{i\varphi(f_t)}$  и определением  $e^{-tH} = T(t) \hat{\cdot}$  оператора  $H$ .

**Следствие 6.2.8.** После отождествления пространства  $\mathcal{H}$  с  $\mathcal{E}_0$  скалярное произведение в  $\mathcal{H}$  задается с помощью гауссовой меры на пространстве  $\mathcal{P}'(R^{d-1})$ , у которой характеристический функционал имеет вид

$$S\{f\} = e^{-\langle f, (2\mu)^{-1} f \rangle / 2}. \quad (6.2.17)$$

Этот результат можно выразить формулой

$$\mathcal{H} = L_2(\mathcal{P}'(R^{d-1}), d\varphi_{1/(2\mu)}). \quad (6.2.18)$$

В этом представлении для пространства  $\mathcal{H}$  операторы поля в нулевой момент времени суть не что иное, как операторы умножения,



и, следовательно, диагонализуемы. Эти операторы являются линейными координатными функциями на пространстве  $\mathcal{F}'(R^{d-1})$ , которое служит пространством конфигураций классического поля. Таким образом, представление (6.2.18) задает квантование свободного поля, являющееся непосредственным обобщением квантования систем с конечным числом степеней свободы, которое обсуждалось в гл. 1. См. также § 6.4.

Механика, определенная следствиями 6.2.7—8, — это механика системы невзаимодействующих осцилляторов. В самом деле, любую гауссову меру можно рассматривать как тензорное произведение одномерных гауссовых мер в том же смысле, в каком любой самосопряженный оператор является, в силу спектральной теоремы, прямой суммой или прямым интегралом одномерных операторов. В частности, в случае (6.2.18) оператор  $\mu^{-1}$  диагонализуется при помощи преобразования Фурье в пространстве импульсных переменных  $\mathbf{p} \in R^{d-1}$ . Разложение по (нормальным) фурье-модам технически проще в случае дискретных прямых сумм или интегралов, поэтому мы и ограничимся этим случаем.

Пусть  $\Delta_D$  — оператор Лапласа с нулевыми условиями Дирихле на границе и вне полосы

$$-\infty \leq t \leq \infty, \quad 0 \leq x_j \leq L.$$

Пусть, кроме того,  $\Delta_D = \Delta_D - d^2/dt^2$  — соответствующий лапласиан по пространству,  $\mu_D = (-\Delta_D + m^2)^{1/2}$ . Функции

$$e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = (2/L)^{(d-1)/2} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \sin(k_{\alpha} x_{\alpha}), \quad k_{\alpha} \in (\pi/L) Z_+,$$

являются собственными для оператора  $-\Delta_D$  и образуют полное множество собственных функций операторов  $\Delta_D$  и  $\mu_D$ , когда последние действуют в пространстве  $L_2([0, L]^{d-1})$ . Собственное значение оператора  $\Delta_D$ , соответствующее  $e_{\mathbf{k}}$ , равно  $\lambda_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ .

Начав со свободного гауссова поля, определенного ковариационным оператором  $-\Delta_D^{-1}$ , мы построим евклидово и физическое пространства  $\mathcal{E}_D$  и  $\mathcal{H}_D$  и, как и выше, покажем, что

$$\mathcal{H}_D = L_2(\mathcal{F}'(R^{d-1}, d\varphi_{(2\mu_D)^{-1}})).$$

Диагонализуя, как и ранее, оператор  $\mu_D$ , можно написать

$$\mathcal{H}_D = \prod_{\mathbf{k} \in ((\pi/L) Z_+)^{d-1}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}}, \quad \text{где } \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = L_2(R, d\varphi_{2^{-1}(\mathbf{k}^2 + m^2)^{-1/2}}).$$

Другими словами,  $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$  является  $L_2$ -пространством с одномерным гауссовым весом с дисперсией  $\frac{1}{2}(\mathbf{k}^2 + m^2)^{-1/2}$ . Разложим и пространство  $\mathcal{E}_D$  в тензорное произведение

$$\mathcal{E}_D = \prod_{\mathbf{k} \in ((\pi/L) Z_+)^{d-1}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}.$$

Если повторить в обратном порядке рассуждения, приведшие нас от формулы (6.2.10) к (6.2.14), то получим, что

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = L_2(\mathcal{P}'(R^d), d\varphi_{C(\mathbf{k})}), \quad \text{где } C(\mathbf{k}) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{k}^2 + m^2\right)^{-1}.$$

Иначе можно сказать, что  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  и  $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$  являются соответственно евклидовым и физическим гильбертовыми пространствами для одного гармонического осциллятора.

### 6.3 Пространство Фока и виково упорядочение

Продолжая изучение свободных полей, мы хотим определить понятие частицы в пространстве

$$\mathcal{H} = L_2(\mathcal{P}'(R^{d-1}), d\varphi_{(2\mu)^{-1}}). \quad (6.3.1)$$

Как и в случае систем с одной степенью свободы (§ 1.5), это эквивалентно разложению пространства  $\mathcal{H}$  по полиномам Эрмита, поскольку  $n$ -частичные состояния в  $\mathcal{H}$  совпадают с подпространством, порожденным всеми полиномами Эрмита  $n$ -й степени. Это разложение приводит к хорошо известной конструкции пространства Фока. Представление Эрмита—Фока применимо к любой гауссовой мере, поэтому ради большей общности рассмотрим произвольную гауссову меру  $d\varphi_C$  с характеристическим функционалом (6.2.2). В качестве технического средства нам понадобится формула интегрирования по частям. Положим

$$\left\langle f, C \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle = \int f(x) C(x, y) \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} dx dy. \quad (6.3.2)$$

Здесь  $C(x, y)$  — интегральное ядро ковариационного оператора, а  $\delta/\delta\varphi(y)$  — производная по  $\varphi$  (см. § 9.1).

**Теорема 6.3.1.** Пусть  $A(\varphi)$  — полином, определенный на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$ , а  $C$  — непрерывная билинейная форма на  $\mathcal{P}(R^d) \times \mathcal{P}(R^d)$ . Тогда

$$\int \varphi(f) A(\varphi) d\varphi_C = \int \left\langle f, C \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle A(\varphi) d\varphi_C. \quad (6.3.3)$$

*Доказательство.* Сначала докажем эту формулу для  $A = e^{i\varphi(g)}$ . К полиномам можно будет перейти при помощи линейных комбинаций экспонент и взятия предела. Пусть

$$F(\lambda) = \int e^{i\varphi(g+\lambda f)} d\varphi_C = e^{-\langle g+\lambda f, C(g+\lambda f) \rangle / 2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i \int \varphi(f) e^{i\varphi(g)} d\varphi_C &= F'(0) = -\langle f, Cg \rangle e^{-\langle g, Cg \rangle / 2} = \\ &= -\langle f, Cg \rangle \int e^{i\varphi(g)} d\varphi_C = i \int \left\langle f, C \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle e^{i\varphi(g)} d\varphi_C. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание.** Полученная формула интегрирования по частям продолжается по непрерывности на значительно более широкий класс функций  $A(\varphi)$  и оказывается весьма полезной во многих случаях (см. § 9.1).

**Определение 6.3.2.** Пусть  $\mathcal{F}$  — вещественное предгильбертово пространство. Представлением канонических коммутационных соотношений на  $\mathcal{F}$  называется пара линейных отображений  $f \rightarrow a(f)$ ,  $g \rightarrow a^*(g)$  из  $\mathcal{F}$  в пространство операторов  $a(f)$  и  $a^*(g)$ , определенных на плотном множестве  $\mathcal{D}$  комплексного гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , такая, что для любых  $A, A_1, A_2 \in \mathcal{D}$  и любых функций  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{F}$  справедливы соотношения

$$a(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad a^*(g)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad (6.3.4a)$$

$$\langle A_1, a(f)A_2 \rangle = \langle a^*(f)A_1, A_2 \rangle, \quad (6.3.4b)$$

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0, \quad (6.3.4c)$$

$$[a(f), a^*(g)]A = \langle f, g \rangle A. \quad (6.3.4d)$$

Это представление называется фоковым, если существует единичный вектор  $\Omega \in \mathcal{H}$ , такой, что для всех  $f \in \mathcal{F}$

$$a(f)\Omega = 0,$$

а множество  $\mathcal{D}$  представляет собой линейную оболочку векторов  $a^*(f_1) \dots a^*(f_n)\Omega$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**Пример.** Пусть  $\mathcal{F}_n$  — пространство симметрических  $L_2$ -функций на  $R^{nd}$ . В частности,  $\mathcal{F}_0$  — множество комплексных чисел. Определим

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n, \quad \Omega = 1 \in \mathcal{F}_0. \quad (6.3.5a)$$

Обозначим через  $S_n$  симметризацию, т. е. проекцию пространства  $L_2(R^{nd})$  на  $\mathcal{F}_n$ , и пусть  $\mathcal{D}$  — линейная оболочка в  $\mathcal{F}$  вектора  $\Omega$  и векторов вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = S_n f_1(x_1) \dots f_n(x_n),$$

где  $f_j \in \mathcal{F}(R^d)$ , а  $n = 1, 2, \dots$ . Для таких функций  $f$  определим операторы  $a$  и  $a^*$  на  $\mathcal{D}$  формулами

$$\begin{aligned} (a^*(g)f)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (n+1)^{1/2} S_{n+1} g(x_{n+1}) f(x_1, \dots, x_n), \\ (a(g)f)(x_1, \dots, x_{n-1}) &= n^{1/2} \int g(x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned} \quad (6.3.5b)$$

Непосредственные вычисления показывают, что равенства (6.3.5) задают фоковое представление канонических коммутационных соотношений.

Переходя к следующему примеру фокова представления, возьмем  $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{P}'(R^d), d\varphi_C)$ ,  $\Omega = 1$ , а множество  $\mathcal{D}$  определим как пространство многочленов на  $\mathcal{P}'(R^d)$ . Рассмотрим  $\varphi(f)$  (это линейная координатная функция на  $\mathcal{P}'(R^d)$ ) как оператор умножения на пространстве  $\mathcal{H}$  с областью определения  $\mathcal{D}$ . Тогда  $\varphi(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ . Как и в формуле (6.3.2), пусть

$$\pi(f) = -i\langle f, \delta/\delta\varphi \rangle + 2^{-1}i\varphi(C^{-1}f).$$

Если обратный оператор  $C^{-1}$  действует из  $\mathcal{F}(R^d)$  в  $\mathcal{F}(R^d)$ , то к тому же

$\pi(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$  и можно проверить, что  $\varphi$  и  $\pi$  как операторы на  $\mathcal{D}$  симметричны и удовлетворяют соотношениям

$$[\varphi(f), \pi(g)] = i\langle f, g \rangle I, \quad (6.3.6a)$$

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = 0 = [\pi(f), \pi(g)]. \quad (6.3.6b)$$

**Теорема 6.3.3.** Допустим, что у оператора  $C$  существует квадратный корень  $C^{1/2}$  и что  $C^{\pm 1/2}$  — операторы из  $\mathcal{S}(R^d)$  в  $\mathcal{S}(R^d)$ . Тогда, если положить

$$a(f) = 2^{-1}\varphi(C^{-1/2}f) + i\pi(C^{1/2}f), \quad (6.3.7a)$$

$$a^*(f) = 2^{-1}\varphi(C^{-1/2}f) - i\pi(C^{1/2}f), \quad (6.3.7b)$$

то операторы  $a, a^*$  задают фоково представление канонических коммутационных соотношений.

*Доказательство.* Коммутационные соотношения для  $a, a^*$  следуют из соотношений для  $\varphi$  и  $\pi$ . Так как  $\Omega \equiv 1$  и  $a(f) = \langle C^{-1/2}f, \delta/\delta\varphi \rangle$ , то  $a(f)\Omega = 0$ . Соотношение между  $a$  и  $a^*$  следует из того, что  $\varphi$  симметричен (как оператор умножения на вещественную функцию) и оператор  $\pi$  тоже симметричен (по теореме 6.3.2). ■

Наконец, разложение Эрмита пространства  $L_2(\mathcal{S}'(R^d), d\varphi_C)$  получается при помощи отождествлений

$$\mathcal{H} = L_2(\mathcal{S}'(R^d), d\varphi_C) = \mathcal{F},$$

которые допустимы в силу единственности фокова представления, доказываемой ниже.

**Теорема 6.3.4.** Пусть  $\{a_i, a_i^*\}, i=1, 2, \dots$  — два фоковых представления канонических коммутационных соотношений на  $\mathcal{S}$  с вакуумными векторами  $\Omega_i$ . Тогда они унитарно эквивалентны и, более того, оператор  $U$ , устанавливающий эту эквивалентность, однозначно определен требованием  $U\Omega_1 = \Omega_2$ .

*Доказательство.* Положим

$$A_i = a_i^*(f_1) \dots a_i^*(f_n)\Omega_i, \quad B_i = a_i^*(g_1) \dots a_i^*(g_m)\Omega_i.$$

Мы убедимся, что  $\langle A_1, B_1 \rangle = \langle A_2, B_2 \rangle$ , так что оператор  $U$ , определенный равенством  $UA_1 = A_2$  и продолженный по линейности (и непрерывности) до унитарного оператора из  $\mathcal{H}_1$  в  $\mathcal{H}_2$ , устанавливает требуемую эквивалентность. Если  $U'$  — какой-нибудь другой оператор, устанавливающий унитарную эквивалентность и такой, что  $U'\Omega_1 = \Omega_2$ , то с неизбежностью  $U'A_1 = A_2$ , т.е.  $U = U'$ , и тем самым  $U$  единствен.

Из коммутационных соотношений и равенства  $a_i\Omega_i = 0$  следует, что

$$\begin{aligned} \langle A_i, B_i \rangle &= \\ &= \sum_{j=1}^m \langle f_1, g_j \rangle \langle a_i^*(g_1) \dots a_i^*(g_{j-1}) a_i^*(g_{j+1}) \dots a_i^*(g_m)\Omega_i, a_i^*(f_2) \dots a_i^*(f_n)\Omega_i \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь индукцией по  $m$ , получим окончательно, что  $\langle A_1, B_1 \rangle = \langle A_2, B_2 \rangle$ . ■

**Определение 6.3.5.** Подпространство  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$  называется  $n$ -частичным подпространством  $\mathcal{F}$ . Пусть  $f = \{f_n\}_{n=0}$ , где  $f_n \in \mathcal{F}_n$ , — разложение вектора  $f \in \mathcal{F}$  на  $n$ -частичные компоненты. Оператор  $Nf = \{nf_n\}_{n=0}^\infty$  с областью определения

$$\mathcal{D}(N) = \{f: f \in \mathcal{F}, \sum n^2 \|f_n\|^2 < \infty\}$$

называется оператором числа частиц.

Фоково представление облегчает построение ортогональных полиномов Эрмита. Пусть  $E_n$  — ортогональная проекция пространства  $\mathcal{F}$  на  $n$ -частичное подпространство  $\mathcal{F}_n$ . Так как  $\varphi = c^{1/2}(a^* + a)$ , то полиномы степени  $n$  порождают пространство  $\sum_{j=0}^n \mathcal{F}_j$ . Поэтому процесс ортогонализации мономов степени  $n$  можно определить формулой

$$:\varphi(f_1) \dots \varphi(f_n): = E_n \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n), \quad (6.3.8)$$

и, в частности,

$$:\varphi(j)^n: = c^{n/2} (c^{-1/2} \varphi(f)), \quad (6.3.9)$$

где  $P_n(x)$  — полином Эрмита от одной переменной, определенный формулами (1.5.12), (1.5.13), а нормирующий множитель  $c$  теперь равен

$$c = \langle f, Cf \rangle = \int \varphi(f)^2 d\varphi_C$$

вместо нормировки  $\langle Q^2 \rangle = 1/2$  в формуле (1.5.18). Продолжим по линейности виково двоеточие  $:$  на многочлены и сходящиеся степенные ряды. Тогда, в силу (1.5.12), получим, что

$$:e^{\varphi(f)}: = \sum \frac{:\varphi(f)^n:}{n!} = e^{-c/2} e^{\varphi(f)}. \quad (6.3.10)$$

В следующей формуле заключены многие комбинаторные факты, связанные с мономами Вика:

$$\int :e^{\varphi(f)}: :e^{\varphi(g)}: d\varphi_C = e^{-\langle f, Cf + (g, Cg) \rangle / 2} \int e^{\varphi(f+g)} d\varphi_C. \quad (6.3.11)$$

В частности, положив  $f = \sum \alpha_i f_i$ ,  $g = \sum \beta_j g_j$ , применив к обеим частям равенства (6.3.11) дифференцирование  $\prod_{i=1}^n (d/d\alpha_i) \prod_{j=1}^m (d/d\beta_j)$ , а затем подставив  $\alpha = \beta = 0$ , получим тождество

$$\int : \prod_{i=1}^n \varphi(f_i) : : \prod_{j=1}^m \varphi(g_j) : d\varphi_C = \delta_{nm} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \langle f_1, Cg_{\pi(1)} \rangle \dots \langle f_n, Cg_{\pi(n)} \rangle, \quad (6.3.12)$$

где  $\mathfrak{S}_n$  — группа из  $n!$  перестановок  $\pi$  чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Сравнение полученного представления с фоковым осуществляется с помощью формулы

$$:\prod_{i=1}^n \varphi(f_i): \Omega = \prod_{i=1}^n (a^*(C^{1/2}f)) \Omega. \quad (6.3.13)$$

Вернемся теперь к свободному полю с ковариацией  $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$  и представлением (6.2.18). Имеем

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_0 = \mathcal{F} = L_2(\mathcal{P}'(R^{d-1}), d\varphi_{(2\mu)^{-1}}). \quad (6.3.14)$$

Здесь  $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_n$  — фоково представление для полей в нулевой момент времени, определенное гауссовой мерой на  $\mathcal{P}'(R^{d-1})$  с ковариацией  $(2\mu)^{-1}$ ,  $\mu = (-\Delta + m^2)^{1/2}$ . Пусть  $\mu_j$  — действие  $\mu$  на  $j$ -ю переменную функции  $f_n \in \mathcal{F}_n$ . Для  $f \in \mathcal{D}(H)$ , где

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in \mathcal{F} : f_n \in \mathcal{D}(\mu_j), \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^n \mu_j f_n \right\|^2 < \infty \right\}, \quad (6.3.15a)$$

положим

$$Hf = \{Hf_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{j=1}^n \mu_j f_n \right\}_{n=0}^{\infty}. \quad (6.3.15b)$$

**Теорема 6.3.6.** В фоковом представлении (6.3.14) гамильтониан свободного поля определяется соотношениями (6.3.15) и, кроме того,

$$e^{-itH} f_n = \left( \prod_{j=1}^n e^{-it\mu_j} \right) f_n. \quad (6.3.16)$$

**Замечание.** Формула (6.3.16) означает, что каждая из частиц в  $f_n$  движется под действием свободной динамики независимо от остальных частиц и, более того, ее движение совпадает с движением одной частицы в  $\mathcal{F}_1$  под действием динамики  $e^{-it\mu}$ . Символически  $H$  можно записать в виде  $H = \int \mu(k) a^*(k) a(k) dk$ .

**Доказательство.** Рассматривая все функции в нулевой момент времени, имеем, в силу аналитического продолжения и следствия 6.2.7,  $e^{-itH} e^{i\varphi(f)} = \exp(i\varphi(e^{-it\mu}f))$ . Согласно формуле (6.3.10), получаем, что

$$e^{-itH} : e^{i\varphi(f)} : = \exp \left[ \langle (e^{-it\mu}f, (2\mu)^{-1} e^{-it\mu}f) - \langle f, (2\mu)^{-1} f \rangle / 2 \right] : \exp(i\varphi(e^{-it\mu}f)) :.$$

Так как группа унитарна, то выражение под знаком первой экспоненты в правой части на самом деле равно нулю. Разложение в соответствии с (6.3.10) приводит к равенству  $e^{-itH} : \varphi(n)^n : = : \varphi(e^{-it\mu}f)^n :.$  Воспользовавшись представлением (6.3.14) с тем, чтобы отождествить  $\mathcal{F}$  с  $L_2(\mathcal{P}'(R^{d-1}))$ , получим равенство (6.3.16). ■

**Теорема 6.3.7.** В пространстве  $\mathcal{H} = \mathcal{F}$  гамильтониан свободного поля можно записать в виде

$$H = \int_{t=0} H(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{t=0} a^*(\mathbf{x}) \mu a(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где плотность энергии равна

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} : \pi^2(\mathbf{x}) : + \frac{1}{2} : (\nabla\varphi)^2(\mathbf{x}) : + \frac{1}{2} m^2 : \varphi^2(\mathbf{x}) :.$$

*Доказательство.* Разлагая  $a(\mathbf{x})^* a(\mathbf{x})$  с использованием формул перехода (6.3.7), в которых положено  $C = (2\mu)^{-1}$ , приходим к написанному выше выражению для  $H(\mathbf{x})$ . ■

#### 6.4 Каноническое квантование

Начнем с подведения итогов § 6.2—3 для случая  $d = 1$  и сравнения конструкций пространств  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{F}$ , операторов  $H$ ,  $\pi$  и т. д. с соответствующими понятиями гл. 1, 3. Фактически абстрактное построение пространства Фока воспроизводит квантование гармонического осциллятора. В общем же случае различным мерам в  $\mathcal{P}'(R^d)$  при  $d = 1$  соответствуют другие квантовомеханические системы с одной степенью свободы. С помощью векторнозначных полей  $\varphi(t)$  можно получить все шредингеровы гамильтонианы из гл. 1.

В частности, начнем с рассмотрения гауссовой меры  $d\varphi_C$  на пространстве  $\mathcal{P}'(R)$  с нулевым средним и ковариационным оператором  $C = (-d^2/dt^2 + m^2)^{-1}$ . В силу следствия 6.2.8, мы получим в качестве  $\mathcal{H}$  гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = L_2(R, d\nu), \quad (6.4.1)$$

где  $d\nu$  — гауссова мера на прямой с нулевым средним и дисперсией  $(2\mu)^{-1} = 1/2m = \text{const}$ . В стандартном представлении

$$d\nu(q) = (m/\pi)^{1/2} e^{-mq^2} dq, \quad (6.4.2)$$

где  $dq$  — мера Лебега на прямой, и  $\Omega = 1$ . Теперь выпишем соответствующее представление канонических коммутационных соотношений. Оно было определено в теореме 6.3.3, а его единственность доказана в теореме 6.3.4. Для того чтобы воспользоваться этими теоремами, подставим в (6.3.7)  $(2\mu)^{-1} = (2m)^{-1}$  вместо  $C$ ,  $q$  вместо  $\varphi$ ,  $p$  вместо  $\pi$  и т. д. Получим формулы

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (m^{1/2}q + im^{-1/2}p), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (m^{1/2}q - im^{-1/2}p) \quad (6.4.3)$$

и их обращения

$$q = (2m)^{-1/2} (a^* + a), \quad p = (m/2)^{1/2} i (a^* - a). \quad (6.4.4)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} p &= p^* = -i(d/dq) + imq, \quad [p, q] = -i, \\ a &= (2m)^{-1/2} d/dq, \quad a^* = (2m)^{1/2} q - (2m)^{-1/2} d/dq, \\ &[a, a^*] = 1. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Это и есть канонические коммутационные соотношения (ККС). В силу формулы (6.3.9) при  $c = (2m)^{-1}$  получим, что

$$a^{*n} \Omega = P_n(q \sqrt{2m}) \quad (6.4.6)$$

есть собственный вектор оператора  $H$  с собственным значением  $nm$ . Сравнивая полученные формулы с соответствующими результатами § 1.5, видим, что в представлении, где  $\Omega_0 \equiv 1$ , они совпадают при  $m = 1$ . Итак, гауссова мера в случае  $d = 1$  описывает квантовомеханический гармонический осциллятор. Переписанный с помощью  $(q, d/dq)$  гамильтониан  $ma^*a$  примет вид

$$H_{\text{osc}} = -\frac{1}{2} d^2/dq^2 + mq d/dq. \quad (6.4.7)$$

Чтобы перейти к более привычному виду гамильтониана  $H$  в пространстве  $L_2(R, dq)$ , воспользуемся подобным преобразованием

$$H_{\text{Лебег}} = \exp\left(-\frac{mq^2}{2}\right) H \exp\left(\frac{mq^2}{2}\right) = \frac{1}{2} m \left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 - 1\right). \quad (6.4.8)$$

На этом мы закончим обсуждение гауссовых мер и канонического квантования гармонического осциллятора.

Рассмотрим теперь возмущение  $H$  и установим формулу Фейнмана — Каца.

**Теорема 6.4.1.** Пусть  $d\mu$  — рассмотренное выше гауссово распределение в  $\mathcal{F}'(R^d)$  при  $d = 1$ , а  $V(q)$  — вещественная непрерывная ограниченная снизу функция. Если при этом оператор  $H + V$  самосопряжен, то

$$\begin{aligned} e^{-t(H+V)} &= \left( \exp \left[ - \int_0^t V(\varphi(s)) ds \right] T(t) \right)^\wedge = \\ &= \left( \exp \left[ - \int_0^t V(\varphi(s)) ds \right] \right)^\wedge e^{-tH}. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

*Доказательство.* Имеем

$$\int_0^t V(\varphi(s)) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V(\varphi(it/n)).$$



Поэтому

$$\exp \left[ - \int_0^t V(\varphi(s)) ds \right] T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{-(t/n) V(\varphi(0))} T\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n. \quad (6.4.10)$$

Но  $[(e^{-(t/n) V(\varphi(0))} T(t/n))^n]^\wedge = (e^{-(t/n) V(q)} e^{-(t/n) H})^n$ . В силу формулы (3.2.4), правая часть  $n \rightarrow \infty$  стремится к  $e^{-t(H+V)}$ . Левая же часть в пространстве  $\mathcal{E}$  поточечно сходится к (6.4.10). ■

Далее, пусть  $\Omega(q)$  — вектор основного состояния оператора  $H + V$  в представлении, в котором  $H1 = 0$ . Тогда  $(H + V)\Omega = E\Omega$ . Положив

$$p = -i \frac{d}{dq} + imq - i \frac{d}{dq} \ln \Omega(q), \quad (6.4.11)$$

получим, что операторы  $p$  и  $q$  задают представление канонических коммутационных соотношений в пространстве  $L_2(R, \Omega^2 dv)$  и являются самосопряженными. Мера

$$d\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)^{-1} \exp \left[ - \int_{-t}^t V(q(s)) ds \right] d\varphi_C \quad (6.4.12)$$

тоже определяет представление канонических коммутационных соотношений. Этой мере отвечает гамильтониан  $H + V - E$ .

Заметим, что в случае системы с одной степенью свободы при заданных канонических коммутационных соотношениях операторы

$$\hat{q}(t) = e^{-tH} q e^{tH}, \quad (6.4.13)$$

$$q(t) \equiv e^{tH} q e^{-tH} \quad (6.4.14)$$

связаны при помощи аналитического продолжения  $t \rightarrow -it$ , а операторная функция (6.4.14) удовлетворяет уравнению

$$\dot{q}(t) = p(t)/m = e^{itH} [iH, q] e^{-itH}$$

(полагаем, что  $\hbar = 1$ ). Продифференцировав дважды, получаем уравнение Ньютона

$$m\ddot{q}(t) = F(q(t)),$$

где  $F(q) = -[iV, p] = -dV/dq$ , а  $V$  — полная потенциальная энергия (являющаяся функцией  $q$ ).

Теперь обобщим эти идеи применительно к квантовым полям, опираясь на анализ свободного поля, проведенный в § 6.2 и 6.3. Конструкцию физического гильбертова пространства  $\mathcal{H} = \mathcal{E}_+/\mathcal{N}$  из § 6.1 можно упростить, по крайней мере на формальном уровне. Для свободного поля пространство  $\mathcal{H}$  является  $L_2$ -пространством, состоящим из функций от пространственной переменной  $x \in R^{d-1}$ , взятых в момент времени  $t = 0$  (§ 6.2). Следует ожидать, что

аналогичное утверждение справедливо в случае полей  $P(\varphi)_2$  и  $\varphi^4$  при  $d \leq 4$ . Соответственно примем, что

$$\mathcal{H} = L_2(\mathcal{P}'(R^{d-1}), dv), \quad (6.4.15)$$

где  $dv$  — мера на  $\mathcal{P}'(R^{d-1})$ , являющаяся ограничением евклидова вакуумного вектора  $\Omega$  и меры  $d\mu$ . Поэтому

$$\int F(\varphi) dv = Z^{-1} \int F(\varphi) e^{-\mathcal{A}_I(\varphi)} d\varphi_C = \int F(\varphi) d\mu, \quad (6.4.16)$$

где  $Z$  — нормирующий множитель, а  $\mathcal{A}_I(\varphi) = \lambda \int : \varphi^4(x) : d^d x$  (с соответствующими контрчленами; см. § 9.4, 14.3). Формально мы сделаем еще один шаг и перепишем гауссов интеграл по  $d\varphi_C$  в виде плотности по лебеговой мере на  $\mathcal{P}'(R^d)$ , и для нового нормирующего множителя  $Z$  получим, что

$$d\mu = Z^{-1} e^{-\mathcal{A}(\varphi)} \prod_{x \in R^d} d\varphi(x), \quad (6.4.17)$$

где

$$\mathcal{A}(\varphi) = \int : \left( \frac{1}{2} \nabla \varphi^2(x) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \lambda \varphi^4(x) \right) : d^d x. \quad (6.4.18)$$

Классическое поле  $\varphi^4$  (в пространстве Минковского) является решением нелинейного гиперболического волнового уравнения

$$-\square \varphi + m^2 \varphi + 4\lambda \varphi^3 = 0. \quad (6.4.19)$$

Решение  $\varphi$  однозначно определяется данными Коши

$$\varphi|_{t=0}, \quad \partial_t \varphi = \dot{\varphi}|_{t=0}. \quad (6.4.20)$$

Таким образом, множество пар функций  $\varphi|_{t=0}, \partial\varphi/\partial t|_{t=0}$  является пространством состояний классической нелинейной системы, описываемой уравнением (6.4.19). При этом конфигурационным пространством будет множество функций  $\varphi|_{t=0}$  (конфигурации поля, отвечающие нулевому моменту времени). Точный класс функций  $\varphi|_{t=0}$  не определяется из этих соображений, но с точки зрения функционального интегрирования, как это, например, требуется для представления (6.4.15), по существу нужно только то, чтобы этот класс был достаточно обширным. Запас обобщенных функций  $\mathcal{P}'(R^{d-1})$  очень богат и, как оказалось, достаточен для наших целей.

Квантовое поле  $\varphi$  — это оператор умножения, действующий на функции от конфигураций классических полей. Канонически сопряженный с ним оператор импульса  $\pi$  — это генератор унитарной группы, порождаемой сдвигами  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + g(x)$  в пространстве классических конфигураций.

Так как операторы  $\varphi$  и  $\pi = -i\delta/\delta\varphi + \dot{\varphi}(\varphi)$  образуют полное множество наблюдаемых, через них можно выразить гамильтониан  $H$  и меру  $dv = d\mu|\mathcal{P}'(R^{d-1})$ . Мы уже решили в § 6.2 эту задачу

для случая меры  $d\varphi_C$  свободного поля и, в частности, в теореме 6.3.7 для гамильтониана  $H_0$  этого поля. При этом (6.4.16) превращается в формулу Фейнмана — Каца для возмущения гамильтониана  $H_0$ . Для того чтобы пояснить эту связь, напомним  $\varphi = \varphi(t)$  (опуская зависимость  $\varphi$  от  $\mathbf{x} \in R^{d-1}$ ) и положим  $\mathcal{A}_I(\varphi(t)) = = \lambda \int : \varphi^4(x) : d^{d-1}\mathbf{x}$ ,

$$\mathcal{A}_I(\varphi) = \int_0^{\infty} \mathcal{A}_I(\varphi(t)) dt + \int_{-\infty}^0 \mathcal{A}_I(\varphi(t)) dt.$$

Пусть  $\Omega_0$  — основное состояние оператора  $H_0$ , а  $\Omega$  — основное состояние оператора  $H = H_0 + \mathcal{A}_I(\varphi(t=0))$ . Тогда из (6.4.16) и формулы Фейнмана — Каца (§ 3.2—4) следует, что

$$\begin{aligned} \int F(\varphi) d\nu &= \int F(\varphi) d\mu = \\ &= Z^{-1} \int \exp\left(-\int_{-\infty}^0 \mathcal{A}_I(\varphi(t)) dt\right) F(\varphi) \exp\left(-\int_0^{\infty} \mathcal{A}_I(\varphi(t)) dt\right) d\varphi_C = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} Z^{-1} \langle \exp[-t(H_0 + \mathcal{A}_I(\varphi(t=0)))] \Omega_0, \\ &\quad F(\varphi) \exp[-t(H_0 + \mathcal{A}_I(\varphi(t=0)))] \Omega_0 \rangle = \langle \Omega, F(\varphi) \Omega \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, вакуумный вектор, абстрактно определенный при помощи теоремы реконструкции из § 6.1, совпадает с основным состоянием  $\Omega$  гамильтониана  $H$ , заданного формулой  $H = = \int \mathcal{H}(\mathbf{x}) d^{d-1}\mathbf{x}$ , где

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = : \left( \frac{1}{2} \pi(\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2} \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} m^2\varphi(\mathbf{x})^2 + \lambda\varphi(\mathbf{x})^4 \right) :.$$

Аналогично, динамика, абстрактно определенная в § 6.1, задается гамильтонианом  $H$ , что находится в соответствии с результатами гл. 3.

## 6.5 Фермионы

В зависимости от спина и статистики частицы делятся на две группы. Электроны и кварки имеют полуцелый спин и подчиняются статистике Ферми — Дирака; они называются фермионами. То же самое относится к связанным состояниям, составленным из нечетного числа фермионов, таким, как протоны, нейтроны или ядра  $H^3$ . Фотон имеет целый спин и подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна, так же как и связанные состояния, составленные из четного числа фермионов, как, например, мезоны (в теории кварков и глюонов), ядра  $H^2$  или куперовы пары электронов в сверхпроводнике. Такие частицы называются бозонами. В § 6.2, 6.3 мы описали свободное поле Клейна — Гордона, преобразующееся по представлению группы Лоренца с нулевым спином и подчиняю-

щесся бозе-статистике. Здесь мы опишем квантование свободного поля Дирака, преобразующегося с помощью (двухзначного) представления группы Лоренца со спином  $1/2$  и подчиненного ферми-статистике.

В этом параграфе изложены две важные конструкции. Первая — построение фермионного пространства Фока и представления канонических антикоммутирующих соотношений, а вторая — введение античастиц как способ избавиться от состояния с отрицательной энергией при квантовании уравнения Дирака. Само уравнение Дирака приводится в § 15.3.

Для данного гильбертова пространства  $\mathcal{F}_1$  пусть  $\mathcal{F}_n$  обозначает антисимметрическое тензорное произведение  $n$  экземпляров  $\mathcal{F}_1$ :

$$\mathcal{F}_n = A_n \otimes^n \mathcal{F}_1, \quad (6.5.1)$$

где  $A_n$  — антисимметризирующий проекционный оператор. Тогда фермионное пространство Фока образуется как ортогональная сумма

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n. \quad (6.5.2)$$

Векторы из подпространства  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$  задают  $n$ -частичные состояния. Обычно  $\mathcal{F}_1$  — это  $L_2$ -пространство векторнозначных функций, определенных на  $R$  или  $R^{d-1}$  со значениями в  $C^v$  при некотором  $v$ . Тогда  $\mathcal{F}_n$  — это пространство векторнозначных функций на  $R^{nd}$  (со значениями в  $C^{nv}$ ), компоненты которых принадлежат пространству  $L_2(R^{nd})$  (или пространству  $L_2(R^{n(d-1)})$ ) и которые антисимметричны при перестановке аргументов. Операторы рождения и уничтожения определяются так же, как в (6.3.5b), с той разницей, что  $S_{n+1}$  надо заменить на  $A_{n+1}$ . В лоренц-инвариантной теории свободного поля группа Лоренца (а также евклидова группа) действует в пространстве  $\mathcal{F}$  и в каждой его компоненте  $\mathcal{F}_n$  при помощи тензорного произведения преобразований, определенных в одночастичном пространстве  $\mathcal{F}_1$ . Другими словами, закон преобразования  $n$ -частичного состояния определяется независимым действием преобразований на каждую из частиц этого состояния так, как это предписано правилом преобразований одночастичных состояний в  $\mathcal{F}_1$ . Конечномерное пространство  $C^v$  называется спинным пространством. В нем действует представление группы  $SU(2)$  (которая является накрывающей группы пространственных вращений  $O(3)$ , содержащейся в группе Лоренца). Это представление определяется размерностью  $v$ , а спин равен  $(v-1)/2$ . Для скалярных бозонных полей § 6.2, 6.3  $v=1$  и спин равен нулю. У фотонов спин равен единице ( $v=3$ )<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Точнее, спин поля равен  $(v^* - 1)/2$ , где  $v^* \leq v$  — наибольшая из размерностей неприводимых компонент представления группы  $SU(2)$  (или  $O(3)$ ), входящих в представление группы Лоренца в  $C^v$ . Так, в случае поля фотонов  $v=4$ , а  $v^*=3$ . — *Прим. ред.*

Как мы видели выше, свободное поле полностью характеризуется своим одночастичным подпространством  $\mathcal{F}_1$ , статистикой и группой инвариантности, действующей в  $\mathcal{F}_1$ . Теперь перейдем к явному построению. Операторы уничтожения и рождения  $a$  и  $a^*$  определим формулами

$$\begin{aligned} a^*(g) f(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (n+1)^{1/2} A_{n+1} g(x_{n+1}) f(x_1, \dots, x_n), \\ a(g) f(x_1, \dots, x_{n-1}) &= n^{1/2} \int \overline{g(x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

Здесь  $f \in \mathcal{F}_n$ ,  $g \in \mathcal{F}_1$ . В частности,  $f$  и  $g$  для каждого переменного  $x_j$  имеют спиновый индекс (подразумеваемый и в (6.5.3)), а интегрирование  $\int \dots dx_n$  содержит суммирование по этим индексам. При помощи непосредственных вычислений доказываются антикоммутационные соотношения

$$\{a(f), a(g)\} = \{a^*(f), a^*(g)\} = 0, \quad (6.5.4a)$$

$$\{a(f), a^*(g)\} = \langle f, g \rangle, \quad (6.5.4b)$$

где скалярное произведение берется в пространстве  $\mathcal{F}_1$ , и

$$\langle A_1, a(f)A_2 \rangle = \langle a^*(f)A_1, A_2 \rangle, \quad (6.5.4c)$$

где скалярное произведение берется уже в  $\mathcal{F}$  и  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ . Заметим, что  $\mathcal{F}_0$  — одномерное подпространство, натянутое на вакуумный вектор  $\Omega$ , и

$$a(f)\Omega = 0, \quad a^*(g)\Omega = g \in \mathcal{F}_1. \quad (6.5.4d)$$

Простым алгебраическим следствием соотношения (6.5.4b) является неравенство

$$0 \leq a(f)a^*(f) \leq \{a(f), a^*(f)\} = \|f\|^2,$$

откуда следует, что  $a(f)$  и  $a^*(f)$  — ограниченные операторы в  $\mathcal{F}$ .

То, что операторы  $a$  и  $a^*$  ограничены, в отличие от бозонных операторов рождения и уничтожения, легко понять из физических соображений. Бозе-операторы  $a$  и  $a^*$  неограничены из-за того, что одно и то же состояние  $f \in \mathcal{F}_1$  можно заполнить неограниченным числом бозе-частиц. Среднее значение бозе-операторов  $a(f)$  и  $a^*(f)$  на  $n$ -частичных состояниях, в которых каждая частица находится в состоянии  $f \in \mathcal{F}_1$ , равно примерно  $n^{1/2}$ . В ферми-случае максимальное значение  $n$  равно единице. Из антисимметрической статистики Ферми — Дирака следует принцип запрета Паули, согласно которому каждое состояние  $\theta$  в пространстве Фока  $\mathcal{F}$  содержит не более одной частицы в данном состоянии  $f \in \mathcal{F}_1$ . Этот факт легко следует из соотношений (6.5.4). В самом деле,

$$a(f)^2\theta = \frac{1}{2} \{a(f), a(f)\}\theta = 0$$

для любого  $\theta \in \mathcal{F}$ , поэтому  $a(f)\theta$  не имеет ни одной частицы в состоянии  $f \in \mathcal{F}_1$ , а  $\theta$  может иметь не более одной такой частицы.

Линейное преобразование, переводящее систему операторов  $a$  и  $a^*$ , удовлетворяющих антикоммутиационным соотношениям (6.5.4), снова в такую же систему, называется преобразованием Боголюбова. Эти преобразования полезны во многих случаях. Они позволяют переформулировать задачи линейных квантовых полей (например, в случае полей, взаимодействующих с внешним источником или потенциалом) при помощи свободного поля и решений (классических) дифференциальных уравнений в частных производных. Мы обсудим здесь одно конкретное преобразование Боголюбова, которое возникает при квантовании поля Дирака:

$$a^*(f) \rightarrow a(f), \quad a(f) \rightarrow a^*(f). \quad (6.5.5)$$

Преобразуя соответствующим образом сами состояния, мы получим видоизмененный вариант соотношения (6.5.4d):

$$a^*(f)\Omega' = 0, \quad a(g)\Omega' = g' \in \mathcal{F}'_1, \quad (6.5.4d')$$

где  $\Omega'$ ,  $g'$  и  $\mathcal{F}'_1$  — преобразованные состояния. Подобно тому как соотношение (6.5.4d) описывает  $\Omega$  как состояние без частиц, (6.5.4d') характеризует  $\Omega'$  как состояние с полным набором частиц. В случае когда  $\mathcal{F}_1$ , как обычно и бывает, бесконечномерно, преобразованное пространство Фока  $\mathcal{F}'$  отлично от  $\mathcal{F}$  в том смысле, что действие системы операторов  $a$  и  $a^*$  в  $\mathcal{F}$  не унитарно эквивалентно действию этой же системы в  $\mathcal{F}'_1$ . Пространство  $\mathcal{F}'_1$  можно мыслить как пространство дырок, а  $\Omega'$  — как состояние поля, в котором все дырки заполнены. Пространство  $\mathcal{F}'$  — это пространство Фока, порожденное состояниями с конечным числом дырок (образованных оператором  $a$  рождения дырок), точно так же как  $\mathcal{F}$  — пространство Фока, порожденное состояниями с конечным числом частиц.

При квантовании поля Дирака используется не одно  $\mathcal{F}$  или  $\mathcal{F}'$ , а их комбинация. Для оператора Дирака, действующего в пространстве  $\mathcal{F}_1$ , разложение

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{(+)} \oplus \mathcal{F}_1^{(-)} \quad (6.5.6)$$

означает разложение на подпространства состояний соответственно с положительной и отрицательной энергией. Тогда пространство Фока  $\mathcal{F}''$  для поля Дирака — это

$$\mathcal{F}'' = \sum_{m, n} \mathcal{F}_m^{(+)} \otimes \mathcal{F}_n^{(-)}. \quad (6.5.7)$$

Другими словами, пространство  $\mathcal{F}''$  порождено частицами, т. е. состояниями с положительной энергией из  $\mathcal{F}_1^{(+)}$ , и дырками (называемыми иначе античастицами), т. е. состояниями с отрицательной

энергией из пространства  $\mathcal{F}_1^{(-)}$ . Это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} a(f) \Omega'' = 0, & \quad a^*(f) \Omega'' = f'' \in \mathcal{F}_1^{(+)'}, \\ a^*(g) \Omega'' = 0, & \quad a(g) \Omega'' = g'' \in \mathcal{F}_1^{(-)'}, \end{aligned} \quad (6.5.4d'')$$

с помощью которых можно интерпретировать  $\Omega''$  как море Дирака: в нем заняты все состояния с отрицательной энергией и нет состояний с положительной энергией.

Чтобы явно произвести разложение (6.5.6), нужно задать оператор энергии Дирака (см. § 15.3). Однако здесь мы лишь заметим, что интерпретация классических состояний с отрицательной энергией как античастиц с *положительной* энергией приводит к положительному оператору энергии квантового поля. В самом деле, если  $E(f)$  — классическая энергия состояния  $f$ , то, в силу антикоммутационных соотношений,

$$E(f) a^*(f) a(f) = -E(f) a(f) a^*(f) + E \|f\|^2.$$

Аддитивную постоянную  $E \|f\|^2$  можно вычесть при нормировке, и тогда при  $E < 0$  оператор  $-E a a^*$  положителен.

## 6.6 Взаимодействующие поля

Наибольший интерес представляют взаимодействующие поля. Построение таких квантовых полей становится тем сложнее, чем больше размерность  $d$  пространства-времени. Здесь мы изложим программу построения взаимодействующих полей, которые, как предполагается, соответствуют физическим полям ( $d = 4$ ). Эту программу не следует воспринимать как введение в часть II, где это построение проведено для случая  $d = 2$ . В этом случае возникают значительные упрощения, которые и используются в части II.

Взаимодействующие поля строятся с помощью решеточных полей (гл. 2 и 4) с шагом решетки  $\varepsilon$  как предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом пределе совершается тривиальное преобразование масштаба, при котором все длины (шаг решетки, корреляционная длина и т. п.) умножаются на  $\varepsilon$ . Этот масштабный пересчет определяет унитарное преобразование, которое переводит решеточные модели (с их характерными длинами) в другие, но эквивалентные им модели. Преимущество этой точки зрения в том, что нам безразлично, какой предел рассматривать: предел, в котором

$$\text{шаг решётки} \rightarrow 0, \text{ корреляционная длина} = \text{const}, \quad (6.6.1)$$

или предел, в котором

$$\text{шаг решетки} = \text{const}, \text{ корреляционная длина} \rightarrow \infty. \quad (6.6.2)$$

Второй из этих эквивалентных предельных переходов определяет критическую точку решеточной теории. Простое масштабное преобразование, при котором предел (6.6.2) переходит в (6.6.1), опре-

деляет скейлинговый предел в критической точке. Итак, мы видим, что теория поля может быть построена как скейлинговый предел решеточной теории и что эта конструкция эквивалентна обычному построению, при котором шаг решетки стремится к нулю. Полученная теория поля может все еще иметь несколько параметров размерности длины, что бывает, как мы знаем, в  $P(\varphi)_2$ -теориях. Когда же все эти параметры, за исключением корреляционной длины, полагают равными нулю, получается то, что называется скейлинговым пределом.

Проиллюстрируем эти идеи хорошо известными одномерными примерами. Решеточная теория описывает случайное блуждание, в то время как ее непрерывный предел, т. е. одномерная теория поля, есть непрерывный стохастический процесс, у которого инфинитезимальный оператор совпадает с оператором гармонического или ангармонического осциллятора. Один параметр размерности длины — это корреляционная длина, а второй определяется максимальным расстоянием, при котором процесс подобен гауссову. Если второй параметр положить равным нулю, то получится скейлинговый предел, см. [Isacson, 1977]. Этот процесс не является гармоническим (гауссовым) при произвольном значении масштаба длины, но гораздо проще, чем процесс, соответствующий  $\varphi_4^4$ -ангармоническому осциллятору. На самом деле это пуассонов процесс. Его генератором служит матрица размера  $2 \times 2$ .

В случае размерности  $d \geq 2$  скейлинговый предел модели  $\varphi_d^4$  можно рассматривать как обобщение пуассонова процесса. Так же как последний служит для описания случайных событий (точек или интервалов между ними) на прямой, так и скейлинговый предел модели  $\varphi_d^4$  должен описывать случайные события (связные множества) в пространстве  $R^d$ . Считается, что эта модель теории поля совпадает со скейлинговым пределом модели Изинга в критической точке. При  $d = 2$  эта гипотеза была полностью установлена при помощи изящных асимптотических вычислений; см. [McCoу, Тгасу, Wu, 1977].

Для предельных переходов (6.6.1—2) критическая точка является гауссовой (называемой также канонической или тривиальной) в том и только том случае, когда соответствующая модель теории поля гауссова (т. е. поле свободно, см. § 6.2—3). Поэтому задачу о существовании нетривиальных квантовых полей можно переформулировать как задачу построения скейлингового предела в нетривиальной критической точке. Мы обнаруживаем глубокое единство математических структур этих двух теорий — теории квантовых полей и теории критических точек, которое проявляется в столь далеких областях физики.

Существование квантовых полей доказано для многих двумерных моделей, а также для  $\varphi_3^4$ -взаимодействия ( $d = 3$ ). Вдобавок была подробно изучена структура этих моделей, а в некоторых



особенно удачных случаях проверены аксиомы Вайтмана, доказана нетривиальность  $S$ -матрицы, асимптотическая полнота и суммируемость по Борелю рядов теории возмущений, наличие фазовых переходов и неравенства для критических индексов.

Для  $\phi_4^4$ -взаимодействия получен ряд частных результатов, связанных с вопросом существования поля (см. [Glimm, Jaffe, 1974d, 1975c]). Фактически равномерная по  $\varepsilon$  оценка перенормированной двухточечной функции завершила бы доказательство. В свою очередь эта оценка есть следствие некоторых гипотетических корреляционных неравенств. В  $\phi_4^4$ -теориях необходима перенормировка константы связи. Это означает, что в лагранжиан входит член  $\lambda\phi^4$  с параметром  $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ , зависящим от  $\varepsilon$ . По мере изменения  $\varepsilon$  структура решеточной критической точки может меняться, и, в частности, значение параметра длины, при котором имеется нетривиальное критическое поведение, тоже может измениться. При  $\lambda = 0$  критическая точка (как и вся теория) гауссова, а для фиксированного  $\varepsilon$  при  $\lambda = \infty$  решеточная теория совпадает с моделью Изинга. Пусть  $\lambda_{\text{физ}}(\lambda, \varepsilon)$  — физическая константа связи, определенная, например, как в гл. 14. В случае если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\lambda \geq 0} \lambda_{\text{физ}}(\lambda, \varepsilon) = 0,$$

может получиться лишь тривиальная  $\phi_4^4$ -теория поля. В противном случае можно ожидать, что будет построена нетривиальная теория. В настоящее время доводы в пользу того, что теория тривиальна, выглядят более сильными, однако существующие методы вряд ли позволят дать определенный ответ на этот вопрос. Все эти доводы применимы в равной степени и к четырехмерному полю Юкавы, и к электродинамическому (КЭД) взаимодействию. Если бы все эти поля были тривиальны, то это означало бы, что ультрафиолетовое обрезание, возникающее из-за кварковых взаимодействий, существенно для теории протонов, фотонов, мезонов и электронов как элементарных частиц. Поскольку экспериментально установлено, что протоны и мезоны не являются элементарными частицами, а составлены из кварков и калибровочных полей («глюонов»), то такое ультрафиолетовое обрезание, например, применительно к радиусу протона, не может повлиять на экспериментальные данные.

Большая часть современных работ, в которых рассматривается проблема существования в случае размерности  $d = 4$ , посвящена калибровочным теориям. Как с математической, так и с физической точки зрения эти поля обладают двумя преимуществами. Первое из них называется асимптотической свободой и означает, что поведение поля на малых расстояниях почти гауссово, как для ангармонического осциллятора  $\phi_4^4$ , в отличие от пуассоновского процесса. Вторым преимуществом считается явление, которое на-

зывают удержанием (неразлетанием) кварков; оно приводит к мысли о том, что соответствующая критическая точка появляется при нулевой температуре, как и во многих одномерных процессах.

В духе современной дифференциальной геометрии классическое калибровочное поле определяется как форма связности на главном расслоении. Другими словами, калибровочное поле представляет собой (локально) векторнозначную функцию со значениями в алгебре Ли, преобразующуюся как ковариантный вектор.

Такое поле  $A$  порождает 2-форму кривизны

$$F = DA \equiv dA + A \wedge A, \quad (6.6.3)$$

где  $D$  — ковариантная производная, определенная полем  $A$ . При этом действие поля равно

$$\mathcal{A} = \int \text{Tr } F^2(x) dx, \quad (6.6.4)$$

и задача квантования состоит в том, чтобы определить подходящую меру на пространстве связностей, формально пропорциональную мере

$$d\mu = e^{-\mathcal{A}} \prod_x dA(x). \quad (6.6.5)$$

Заметим, что (6.6.5) не гауссова мера, потому что действие (6.6.4) не квадратично относительно  $A$ . Классические калибровочные поля являются решениями уравнения Янга — Миллса

$$D^*F = 0. \quad (6.6.6)$$

Это уравнение есть уравнение Эйлера для действия  $\mathcal{A}$ , т. е. оно получается приравниванием нулю первой вариации  $\delta\mathcal{A}$ . В § 20.9 мы продолжим обсуждение этого вопроса.

Из сказанного видно, что существование квантовых полей в случае размерности  $d = 4$  остается открытой проблемой как с математической, так и с физической точки зрения. Если можно, экстраполируя прошлое, предсказать будущее, то мы вправе ожидать, что дальнейшие усилия в решении этой проблемы приведут к интересным математическим структурам и более глубокому пониманию математики и физики в системах с бесконечным числом степеней свободы.

#### Литературные ссылки

[Bjorken, Drell, 1964—5], [Kastler, 1961], [Schweber 1961], [Боголюбов, Ширков, 1959], [Thirring, 1958], [Itzykson, Zuber, 1980], [Березин, 1965].

В части II приведено замкнутое изложение конструкции некоторых негауссовых мер в пространстве функций. Построенные примеры удовлетворяют аксиомам гл. 6 и определяют нелинейные квантовые поля. Изложение развивается в логическом порядке. Общие концепции, представляющие широкий интерес, перемежаются со специальными техническими приемами, характерными для этих построений. К первым относятся диаграммы Фейнмана, теория возмущений и анализ в функциональном пространстве. Эти вопросы рассматриваются во вступительных частях гл. 8—10, и их можно изучать независимо от остального материала. Некоторые технические аспекты приведенных здесь построений являются новыми; в особенности прием многократных несимметрических отражений в гл. 10 и 12.

Технические оценки изложены в части II применительно к случаю бозонных взаимодействий  $P(\varphi)_{d=2}$ . Однако оценки вакуумной энергии (гл. 8) обобщаются с помощью перенормировок на случай моделей  $\varphi_{d=3}^4$  и Юкавы  $d=2, 3$ . Формально эти оценки справедливы для всех сверхперенормируемых взаимодействий. Остальные методы, представленные в части II, — многократные отражения и монотонность — не зависят от размерности. Методы многократных отражений и оценки, равномерные относительно объема области взаимодействия, обобщаются на случай частиц со спином. Однако свойства монотонности и приведенное нами доказательство сходимости в предельном переходе к бесконечному объему (т. е. свойства, основанные на корреляционных неравенствах) не распространяются на случай произвольного спина. В гл. 18 сходимость поля в этом предельном переходе для некоторых значений констант связи будет доказана другим методом, уже не зависящим от спина частиц.

## Глава 7

## Ковариационный оператор

- = Функция Грина
- = Ядро резольвенты
- = Евклидов пропагатор
- = Фундаментальное решение

## 7.1 Введение

Ковариационные операторы  $C$  гауссовых свободных полей, введенные в гл. 6, часто появляются в самых разнообразных задачах. Ядра этих операторов  $C(x, y)$  характеризуются тем, что являются решениями уравнения Лапласа

$$(-\Delta + m^2)C(x, y) = \delta(x - y). \quad (7.1.1)$$

Основные свойства ковариационных операторов — евклидова инвариантность, OS-положительность и регулярность — формулируются так же, как аксиомы § 6.1. Так как ядра  $C(x, y)$  являются функциями класса  $C^\infty$  всюду, за исключением диагонали  $x = y$ , их регулярность выражается в степенной асимптотике при малых и больших значениях  $x - y$ . Если  $m|x - y|$  мало, то

$$C(x, y) \sim \begin{cases} \alpha |x - y|^{-d+2} & \text{при } d \geq 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln(m|x - y|) & \text{при } d = 2, \end{cases} \quad (7.1.2)$$

где константа  $\alpha = \alpha(d)$  равна

$$\alpha = [(d-2) |S^{d-1}|^{-1}] = 4^{-1} \pi^{-d/2} \Gamma((d-2)/2).$$

Здесь  $|S^n|$  обозначает объем  $n$ -мерного шара, а  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$  — гамма-функцию. Например,  $\alpha(3) = (4\pi)^{-1}$ ,  $\alpha(4) = (4\pi^2)^{-1}$  и т. д.

Если же  $m|x - y|$  велико, то

$$C(x, y) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (2\pi)^{-d/2} m^{(d-3)/2} |x - y|^{-(d-1)/2} \exp(-m|x - y|). \quad (7.1.3)$$

Те же самые свойства — инвариантность, положительность и регулярность — справедливы (или предполагаются таковыми) для двухточечной корреляционной функции взаимодействующего поля, с той лишь разницей, что показатели при  $|x - y|$  в асимптотиках (7.1.2—3) могут отличаться от канонических значений  $-(d-1)/2$

(в асимптотике на дальних расстояниях) и  $-d + 2$  (в асимптотике на близких расстояниях). В этом случае говорят, что асимптотика определяется нетривиальной критической точкой (см. гл. 17).

Свойство положительности ковариационного оператора формулируется в зависимости от значения спина. Для бозонов с нулевым спином, которые мы рассматриваем, справедливы как поточечное, так и операторное неравенства

$$0 \leq C(x, y), \quad (P1)$$

$$0 \leq C \leq m^{-2}I. \quad (P2)$$

Положительность операторов (P2) эквивалентна существованию гауссовой меры и поэтому важна для развиваемых ниже методов. Для фермионов ситуация несколько сложнее, хотя и для этих полей можно определить интеграл, имеющий, правда, несколько иной характер (см. [Березин, 1966] и [Osterwalder, Schrader, 1973a]). Что касается OS-положительности или положительности при отражениях, то она связана с положительностью скалярного произведения в гильбертовом пространстве состояний (см. теорему 6.2.3). Пусть  $\Pi$  — гиперплоскость в  $R^d$ , а  $\theta_\Pi$  — отражение относительно этой гиперплоскости. Положительность при отражениях относительно гиперплоскости  $\Pi$  означает, что

$$0 \leq \langle \theta_\Pi f, C f \rangle_{L_2} = \int \overline{(\theta_\Pi f)(y)} C(x, y) f(x) dx dy \quad (P3)$$

для произвольной функции  $f$ , носитель которой расположен по одну сторону от гиперплоскости  $\Pi$ .

Мы будем изучать операторы  $C$ , соответствующие различным классическим граничным условиям: свободным граничным условиям, условиям Дирихле и Неймана, а также периодическим граничным условиям. Задание граничных условий приводит к нарушению некоторых аксиом, но не меняет ни локальной сингулярности (7.1.2), ни положительности (P1), (P2). Условие положительности (P3) требует инвариантности граничных условий при отражениях.

В двумерном случае ядра  $C(x, y)$  имеют очень слабые (логарифмические) особенности. Поэтому удобно сформулировать свойство локальной регулярности в терминах пространств  $L_p$ . Пусть  $\xi$  обозначает оператор умножения на функцию  $\xi \in C_0^\infty(R^2)$ . Тогда первая аксиома локальной регулярности утверждает, что

$$\sup_x \|(C\xi)(x, \cdot)\|_{L_q} < \infty \quad \text{для всех } q < \infty. \quad (LR1)$$

Для того чтобы сформулировать другие аксиомы, введем «размазанную» дельта-функцию Дирака  $\delta_h(x)$ . Пусть  $h$  — некоторая

фиксированная функция из  $C_0^\infty(R^2)$ , удовлетворяющая условиям

$$h \geq 0, \quad h(0) > 0 \quad \text{и} \quad \int h(x) dx = 1. \quad (7.1.4)$$

Определим  $\delta_\kappa(x)$  формулой

$$\delta_\kappa(x) = \kappa^2 h(\kappa x). \quad (7.1.5)$$

Это обозначение распространим и на задаваемый  $\delta_\kappa$  оператор свертки в  $L_2$ , а именно  $(\delta_\kappa f)(x) = \int \delta_\kappa(x-y)f(y) dy$ . С помощью  $\delta_\kappa$  сформулируем еще две аксиомы. Для любого  $q < \infty$  существует такое  $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$ , что

$$\|\xi \delta_\kappa C \delta_\kappa \xi - \xi C \xi\|_{L_q(R^2 \times R^2)} \leq O(\kappa^{-\varepsilon}), \quad \kappa \rightarrow \infty. \quad (LR2)$$

Другими словами,  $\delta_\kappa C \delta_\kappa \rightarrow C$  в  $L_q^{\text{loc}}$  со скоростью  $O(\kappa^{-\varepsilon})$ . Для особенности функции Грина на диагонали оценка может быть записана аналогичным образом:

$$\sup_x (\delta_\kappa C \delta_\kappa)(x, x) \leq O(\ln \kappa). \quad (LR3)$$

Константы в аксиомах LR зависят от  $\xi$ , поскольку ковариация свободного поля  $C(x, y)$  является функцией разности  $x - y$ , и, следовательно,  $C(x, y)$  не принадлежит никакому пространству  $L_q(R^2 \times R^2)$ .

Рассмотрим в  $R^d$  решетку из единичных кубов  $\Delta$  и зададим граничные условия на некоторых гранях границы  $\partial\Delta$  куба  $\Delta$ . Например, если  $d = 2$ , то  $\{\Delta\}$  — покрытие  $R^2$  единичными квадратами, а граничные условия задаются на некотором контуре из ребер, разделяющих квадраты. При  $d = 3$  решетка состоит из единичных кубов, граничные условия задаются на их гранях, т. е. на единичных квадратах, и т. д. Пусть  $\Gamma$  обозначает некоторый набор гиперграней решетки. Рассмотрим оператор Лапласа  $-\Delta$ . Вводя для него какое-нибудь классическое граничное условие (т. е. свободное, периодическое, условие Дирихле или Неймана) — обозначим его  $B$ , — получим самосопряженный положительный оператор в пространстве  $L_2(R^d)$ , который обозначим  $-\Delta_{B(\Gamma)}$ . Ковариационный оператор  $C_{B(\Gamma)} = (-\Delta_{B(\Gamma)} + m^2)^{-1}$  мы будем изучать двумя способами: с помощью винеровых интегралов и методом изображений. В обоих случаях мы свяжем оператор  $C_{B(\Gamma)}$  со свободным ковариационным оператором  $C = C_\phi$ , оценки для которого выводятся в предложении 7.2.1.

Пусть  $\mathcal{E}_m$  — выпуклое множество, порожденное ковариационными операторами  $C_B$  с массой не меньше  $m$  (точное определение этого множества будет дано в § 7.9). Основные результаты этой главы сформулированы в следующих двух теоремах.

**Теорема 7.1.1.** *Любой оператор  $C \in \mathcal{E}_m$  обладает свойствами локальной регулярности (7.1.2) и положительности (P1), (P2). Если*

$d = 2$ , то для  $C \in \mathcal{C}_m$  выполнены аксиомы (LR1—3) с константами, не зависящими от  $C \in \mathcal{C}_m$ .

**Теорема 7.1.2.** Пусть  $C \in \mathcal{C}_m$ , причем разложение  $C$  по крайним точкам не содержит ковариационных операторов с периодическими граничными условиями. Тогда для ядра  $C$  справедлива оценка (7.1.3). В случае когда  $C = C_B$  (т. е. оператор  $C$  совпадает с крайней точкой суммы), он обладает свойством положительности при отражениях (P3), если он коммутирует с  $\theta_{\Pi}$ . В периодическом же случае, когда  $C = C_p$ , справедливо модифицированное свойство положительности при отражениях (см. § 7.10).

Доказательства этих теорем будут изложены в этой главе. В частности, § 7.9 посвящен свойству регулярности, а § 7.10 — свойству положительности при отражениях.

## 7.2 Свободная ковариация

Простейший ковариационный оператор — это так называемый голый евклидов пропагатор или свободный ковариационный оператор  $C = C_{\emptyset}$ . Он совпадает с функцией Грина уравнения (7.1.1) и может быть определен с помощью преобразования Фурье

$$C(x, y) = C(x - y) = (2\pi)^{-d} \int e^{-ip(x-y)} (p^2 + m^2)^{-1} dp. \quad (7.2.1)$$

Зависимость  $C$  от  $m$  видна из равенства

$$\begin{aligned} C(m; x - y) &= m^{d-2} C(1; m(x - y)) = \\ &= (2\pi)^{-d/2} \left( \frac{m}{|x - y|} \right)^{(d-2)/2} K_{(d-2)/2}(m|x - y|). \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Здесь  $K_\nu(x) > 0$  — модифицированная функция Бесселя; с точностью до множителя она совпадает с функцией Ганкеля от мнимого аргумента (см. [Erdélyi et al., 1953]). При  $d = 3$

$$C(x - y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} e^{-m|x - y|}.$$

Многие свойства ковариационных операторов могут быть выведены из (7.2.2) и известных свойств бесселевых функций, таких, как характер особенности при  $|x - y| \rightarrow 0$ , экспоненциальное убывание при  $m|x - y| \rightarrow \infty$  (см. (7.1.2—3)) и т. д. Однако мы предложим прямые доказательства, основанные на методах, которые имеют широкое применение.

**Предложение 7.2.1.** Свободная ковариация  $C(m; x - y) = C(x, y) = C(x - y)$  обладает следующими свойствами:

(а)  $C(x, y)$  является ядром положительного оператора, действующего в пространстве  $L_2$ ;

(б)  $C(x, y) > 0$ ;

(с) если произведение  $m|x-y|$  отделено от нуля, то

$$C(x, y) \leq O(1) m^{(d-3)/2} |x-y|^{-(d-1)/2} \exp(-m|x-y|); \quad (7.2.3)$$

(d) если  $d \geq 3$ , а произведение  $m|x-y|$  близко к нулю, то

$$C(x, y) \sim |x-y|^{-d+2}; \quad (7.2.4)$$

(е) если  $d = 2$ , а произведение  $m|x-y|$  близко к нулю, то

$$C(x, y) \sim -\ln(m|x-y|). \quad (7.2.5)$$

*Доказательство.* В силу (7.2.2), мы можем считать, что  $m=1$ . Свойство (а) доказывается с помощью преобразования Фурье:  $\langle f, Cf \rangle_{L_2} = \int_{R^d} (p^2 + 1)^{-1} |\tilde{f}(p)|^2 dp$

Определим  $g(t)$  формулой

$$0 < g(t) \equiv \int_{R^{d-1}} e^{-t\mu} \mu^{-1} d\mathbf{p} = \int d\omega \int_0^\infty e^{-t\mu} \mu^{-1} k^{d-2} dk. \quad (7.2.6)$$

Здесь  $\mathbf{p} \in R^{d-1}$ ,  $|\mathbf{p}| = k \in R$ ,  $\mu = \mu(k) = (k^2 + 1)^{1/2}$ , а  $d\omega$  означает интегрирование по переменной  $\mathbf{p}/k$  по  $(d-2)$ -мерной единичной сфере (т.е. интегрирование по угловой переменной). Применяя интегральную формулу Коши для частичного вычисления обратного преобразования Фурье (7.2.1) (т.е. интегрируя вдоль вектора  $x-y$ ), получим равенство  $C(x, y) = (2\pi)^{-d+1} 2^{-1} g(|x-y|)$ , из которого следует (b).

Оценки (с) — (е) можно установить следующим образом. Для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$\mu(k) \geq \begin{cases} 1 + \varepsilon |k|^2 & \text{при } |k| \leq 1, \\ 1 + \varepsilon |k| & \text{при } |k| \geq 1. \end{cases} \quad (7.2.7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \text{const } e^{-t} \left( \int_0^1 e^{-tek^2} k^{d-2} dk + \int_1^\infty e^{-tek} k^{d-2} dk \right) \leq \\ &\leq \text{const } e^{-t} (t^{-(d-1)/2} + t^{-(d-1)}). \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Для значений  $t$ , отделенных от нуля, имеем

$$g(t) \leq \text{const } e^{-t} t^{-(d-1)/2}, \quad (7.2.9)$$

откуда и вытекает утверждение (с).

Для изучения локальных особенностей функции  $g$  произведем замену  $k^2 = s^2 t^{-2}$ , так что

$$t^{d-2} g(t) = |S^{d-2}| \int_0^\infty \exp[-s(1+t^2 s^{-2})^{1/2}] s^{d-3} (1+t^2 s^{-2})^{-1/2} ds. \quad (7.2.10)$$

В случае  $d \geq 3$  интеграл (7.2.10) ограничен своим значением при  $t=0$  и  $t^{d-2} g(t)$  монотонно сходится при  $t \rightarrow 0$  к этому ненулевому пределу. Поэтому  $g(t) \sim t^{-d+2}$  при  $t \rightarrow 0$ , и свойство (d) установлено. Если же  $d = 2$ , то, написав  $s = t\mu$ , получим, что при  $t \rightarrow 0$

$$g(t) = \int_t^\infty e^{-s} (s^2 - t^2)^{-1/2} ds \sim -\ln t, \quad (7.2.11)$$



и этим завершается доказательство предложения. (В самом деле, используя соотношение  $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ , получим значение постоянной  $\alpha$  в (7.1.2) при  $d \geq 3$ , а в случае  $d = 2$  значение  $\alpha = 1/2\pi$  получается из (7.2.11). Постоянная в (7.1.3) находится совершенно аналогично путем анализа констант в соотношениях (7.2.8–9).)

### 7.3 Периодические граничные условия

Рассмотрим периодические граничные условия с периодом  $L \equiv (L_1, \dots, L_d)$ ,  $L_j \in Z_+$ . Тогда функции  $f$  из области определения оператора Лапласа  $\Delta_p$  удовлетворяют равенству  $f(x) = f(x + n_L)$ , где  $n_L = \{n_j L_j; j = 1, 2, \dots, d\} \in Z^d$ . В случае  $d = 2$ , например, граничные условия задаются на совокупности  $\Gamma$  ребер решетки, лежащих на границе конгруэнтных прямоугольников  $L_1 \times L_2$ , которые образуют «паркетное» покрытие плоскости  $R^2$ .

**Предложение 7.3.1.** При  $m > 0$  для ковариации, отвечающей периодическим граничным условиям, справедлива формула

$$C_p(x, y) = \sum_{n_L \in Z^d} C(x - y + n_L). \quad (7.3.1)$$

Бесконечный период  $L_j = \infty$  означает отсутствие граничных условий в направлении  $j$ -й координатной оси. Ряд (7.3.1) расходится при  $m = 0$ , а основанные на нем оценки неравномерны при  $mL_j \rightarrow 0$ . По этой причине мы предполагаем, что  $mL_j$  отделено от нуля. То же ограничение вводится при рассмотрении ковариационных операторов с граничными условиями Дирихле и Неймана.

*Доказательство.* Ряд сходится экспоненциально в силу оценки (7.2.3). Как видно из (7.3.1), сумма  $C_p$  является периодической функцией. Каждый куб укрупненной решетки (т. е. вымощенной кубами с ребром  $L$ ) содержит единственный вектор  $n_L$ . Поэтому  $(-\Delta + m^2) C_p = \sum_{n_L} \delta(x - y + n_L)$ . Следовательно, в силу един-

ственности решения линейной граничной задачи,  $C_p$  является периодической ковариацией. ■

**Следствие 7.3.2.** Периодическая ковариация  $C_p$  обладает следующими свойствами:

- (а)  $C_p$  — положительный оператор в пространстве  $L_2^1$ ;
- (б)  $0 < C(x, y) < C_p(x, y) = C_p(y, x)$ ;
- (с) если произведение  $m|x - y|$  близко к нулю, то

$$C_p(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{-d+2} & \text{при } d \geq 3, \\ -\ln(m|x - y|) & \text{при } d = 2. \end{cases}$$

*Доказательство.* Свойство положительности оператора  $C_p$  в пространстве  $L$  следует из того, что после преобразования Фурье оператор  $C_p$  становится оператором умножения на  $(\rho^2 + m^2)^{-1} \geq 0$ . Свойства (б) и (с) вытекают из формулы (7.3.1) и предложения 7.2.1 ■

<sup>4)</sup> Этот оператор следует рассматривать в пространстве функций, определенных на кубе. — Прим. ред.

## 7.4 Граничные условия Неймана

Для задания граничных условий Неймана в качестве границы  $\Gamma$  рассмотрим набор гиперплоскостей, разбивающих пространство  $R^d$  на периодическую решетку (как в рассмотренном выше периодическом случае). Область определения оператора Лапласа  $-\Delta_N$  с граничными условиями Неймана состоит из функций  $f(x)$ , у которых нормальная производная  $df/dn$  во всех точках границы  $\Gamma$  равна нулю.

С помощью метода изображений получим простую формулу для ковариационного оператора Неймана  $C_N(x, y)$ . Пусть задано  $y \equiv y_0$ ; определим множество точек  $\{y_j\}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , следующими двумя условиями:

1)  $y_0 \in \{y_j\}$ ;

2) множество  $\{y_j\}$  инвариантно при отражениях относительно любой гиперплоскости, принадлежащей границе  $\Gamma$ .

Пусть  $\Lambda$  — связная компонента множества  $R^d \setminus \Gamma$ . В соответствии с данным определением каждая  $\Lambda = \Lambda_j$  содержит ровно одну точку  $y_j$ .

**Предложение 7.4.1.** Пусть  $m > 0$ . Тогда для ковариации Неймана справедлива формула

$$C_N(x, y) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} C(x - y_j) & \text{при } x, y \in \Lambda, \\ 0 & \text{при } x \in \Lambda, y \in \Lambda' \neq \Lambda. \end{cases} \quad (7.4.1)$$

*Доказательство.* Так как каждая компонента  $\Lambda_j$  содержит только одну точку  $y_j$ , то применение оператора  $(-\Delta_N + m^2)$  к правой части равенства (7.4.1) дает  $\delta(x - y)$ . Далее, выполнение граничных условий Неймана гарантируется инвариантностью множества  $\{y_j\}$  при отражениях относительно гиперплоскостей из набора  $\Gamma$ . Следовательно, правая часть формулы (7.4.1) равна  $C_N$  в силу единственности решения линейной граничной задачи. ■

Теорема единственности может быть использована и для доказательства симметрии  $C_N(x, y) = C_N(y, x)$  в следующем утверждении.

**Следствие 7.4.2.** Ковариация Неймана удовлетворяет следующим условиям:

- (а)  $C_N$  — положительный оператор в пространстве  $L_2$ ;
- (б)  $0 < C(x, y) < C_N(x, y) = C_N(y, x)$ ,  $x, y \in \Lambda$ ;
- (в) если произведение  $m|x - y|$  близко к нулю, то

$$C_N(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{-d+2} & \text{при } d \geq 3, \\ -\ln(m|x - y|) & \text{при } d = 2. \end{cases}$$

## 7.5 Граничные условия Дирихле

Определим оператор Лапласа  $\Delta_\Gamma$  с граничными условиями Дирихле на  $\Gamma$ , взяв в качестве его области определения набор функций  $f(x)$ , которые обращаются в нуль при  $x \in \Gamma$ . Другими словами,  $-\Delta_\Gamma$  есть расширение Фридрихса (см. [Kato, 1966]) оператора  $-\Delta$ , ограниченного (как билинейная форма) на  $C^\infty$ -функции с носителем в  $R^d \setminus \Gamma$ . Пусть  $C_\Gamma = (-\Delta_\Gamma + m^2)^{-1}$ . Случай множества  $\Gamma$  общего вида будет рассмотрен в § 7.7—8, а здесь мы ограничимся таким  $\Gamma$ , которое, как и выше, является набором гиперплоскостей, разделяющих  $R^d$  на периодическую решетку. Пусть  $C_D$  — ковариационный оператор  $C_\Gamma$  в этом специальном случае.

Применив метод изображений, мы получим для  $C_D$  явную формулу. Пусть  $\{y_j\}$  — множество изображений, использованное выше при изучении оператора  $C_N$ , а точка  $y_j$  получена из  $y = y_0$  при помощи  $\varepsilon_j$  отражений относительно гиперплоскостей из  $\Gamma$ . Заметим, что  $(-1)^{\varepsilon_j}$  не зависит от выбора последовательности отражений.

**Предложение 7.5.1.**

$$C_D(x, y) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{\varepsilon_j} C(x - y_j) & \text{при } x, y \in \Lambda, \\ 0 & \text{при } x \in \Lambda, y \in \Lambda' \neq \Lambda. \end{cases} \quad (7.5.1)$$

*Доказательство.* Множители  $(-1)^{\varepsilon_j}$  выбраны так, чтобы сумма (7.5.1) обращалась в нуль при  $x \in \partial\Lambda$ . Поскольку каждое множество  $\Lambda_j$  содержит только одно  $y_j$ , применение оператора  $-\Delta_D + m^2$  к сумме (7.5.1) дает  $\delta(x - y)$  для любой точки  $x$  из внутренности  $\Lambda$ . В силу единственности решения линейной граничной задачи, правая часть (7.5.1) равна  $C_D$ . ■

**Следствие 7.5.2.** Для ковариации Дирихле справедливы следующие утверждения:

- (а)  $C_D$  — положительный оператор в пространстве  $L_2$ ;
- (б)  $0 \leq C_D(x, y) = C_D(y, x) < C(x, y)$ ;
- (в) если произведение  $m|x - y|$  близко к нулю, то

$$C_D(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{-d+2} & \text{при } d \geq 3, \\ -\ln(m|x - y|) & \text{при } d = 2. \end{cases}$$

*Доказательство.* Свойство (а) следует из того, что оператор  $C_D$  является обратным к положительному оператору  $-\Delta_D + m^2$ . Локальная регулярность (в) следует из равенства (7.5.1). Для доказательства свойства (б) воспользуемся принципом максимума: функция  $f(x)$ , непрерывная в ограниченной замкнутой области  $\Omega$  и удовлетворяющая во внутренности  $\Omega$  уравнению  $(-\Delta + m^2)f(x) = 0$ , достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума на границе  $\partial\Omega$ . Пусть  $\Omega = \Lambda$  — связное подмножество  $R^d \setminus \Gamma$ . Для точки  $y \in \Lambda$  положим  $f(x) = C(x, y) - C_D(x, y)$ . Поскольку на границе  $\partial\Lambda$  функция  $f(x) = C(x, y) - C_D(x, y)$  положительна, ее минимум не может быть ни отрицательным, ни нулевым, т. е.  $f(x) > 0$ . Это рассуждение доказывает верхнюю оценку в (б).

Нижняя оценка для  $y \in \partial\Lambda$  очевидна, так как в этом случае  $C_D(x, y) = 0$ . Пусть  $y \in \text{Int } \Lambda$ , а  $\Lambda_\varepsilon$  обозначает множество  $\Lambda$  без  $\varepsilon$ -окрестности точки  $y$ . В силу утверждения (в), при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  для  $x \in \partial\Lambda_\varepsilon$  верно нера-

венство  $C_D(x, y) \geq 0$ . Но в области  $\Lambda_\varepsilon$  мы имеем  $(-\Delta + m^2)C_D = 0$ . Поскольку ковариация  $C_D$  не имеет особенностей в  $\Lambda_\varepsilon$ , снова можно применить принцип максимума. Поэтому ковариация  $C_D$  не может иметь внутри  $\Lambda$  отрицательного минимума и, следовательно,  $C_D \geq 0$ . ■

## 7.6 Изменение граничных условий

Несмотря на то что ядро  $C_B(x, y)$  с произвольными граничными условиями  $B = \emptyset, N, D, p$  и т. д. имеет особенности на диагонали  $x = y$ , разность двух таких ядер сингулярна только на границе  $\Gamma$ . С этими разностями мы встретимся при обсуждении перемены викова упорядочения, поэтому весьма интересны их оценки. Для  $B = N, D$  или  $p$  положим

$$\delta c_B(x) = \lim_{y \rightarrow x} [C(x, y) - C_B(x, y)] \quad (7.6.1)$$

( $c(x) \equiv C(x, x)$  равно бесконечности). Как и выше, пусть  $\Lambda$  обозначает связную компоненту множества  $R^d \setminus \Gamma$ .

**Предложение 7.6.1.** Для любого  $x \in \Lambda$

$$0 \leq \delta c_D(x) \leq -\delta c_N(x) \leq \begin{cases} \text{const dist}(x, \partial\Lambda)^{-d+2} & \text{при } d \geq 3, \\ \text{const}(1 + |\ln \text{dist}(x, \partial\Lambda)|) & \text{при } d = 2. \end{cases} \quad (7.6.2)$$

Кроме того, разность  $-\delta c_p(x)$  положительна и допускает такую же оценку сверху.

*Доказательство.* Положительность  $\delta c_D(x)$  следует из предложения 7.5.1 и определения разности  $\delta c_D$ . Второе неравенство вытекает из (7.6.1) и положительности функции  $C(x, y)$ , а именно

$$\delta c_D(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j I C(x - x_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} C(x - x_j) = -\delta c_N(x). \quad (7.6.3)$$

Заметим, что при  $x \rightarrow \partial\Lambda$  точка  $x$  приближается не менее чем к одной и не более чем к  $2^d - 1$  (в углах  $\Lambda$ ) точек  $x_j$ . Поэтому верхняя оценка (7.6.2) вытекает из предложения 7.2.1 о локальных особенностях ядра  $C(x - y)$ . Для  $c_p$  доказательство проводится аналогично. ■

## 7.7 Ковариационные неравенства

В предыдущих параграфах мы сравнивали ядра ковариационных операторов с разными граничными условиями; теперь займемся сравнением самих операторов, рассматриваемых как билинейные формы на пространстве  $L_2 \times L_2$ . Наметим основные идеи, опустив строгие доказательства. Напомним, что  $A \leq B$  означает, во-первых, включение для областей определения билинейных форм  $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_A$  и, во-вторых, выполнение неравенства  $\langle x, Ax \rangle \leq \langle x, Bx \rangle$  для любого  $x \in \mathcal{D}_B$ . Областью определения билинейной формы опе-

ратора  $\Delta_B$  является множество функций

$$\mathcal{D}_\Delta = \{f \in L_2: \nabla f \in L_2\}.$$

Здесь  $\nabla f$  — производная обобщенной функции, так что  $\nabla f \in \mathcal{D}'$  определена для всех  $f \in L_2$ . Если  $\nabla f \in L_2$ , то можно показать, что ограничение  $f|_\Gamma$  определено и принадлежит  $L_2$ -пространству на гиперповерхности. Будучи элементом  $L_2$  как функция на гиперповерхности, функция  $f$  непрерывна вдоль нормального направления. Подобный анализ применим и к односторонним производным. Пусть  $\nabla_{+/-} f$  обозначает градиент, двусторонний (т. е. обычный) во внутренности  $R^d \setminus \Gamma$  и односторонний в направлении, нормальном к  $\Gamma$ . Тогда область определения оператора  $\nabla_N$  будет множеством

$$\mathcal{D}_{\Delta_N} = \{f \in L_2: \nabla_{+/-} f \in L_2\}. \quad (7.7.1)$$

Заметим, что функция  $f \in \mathcal{D}_{\Delta_N}$  как элемент пространства  $L_2$  на гиперповерхности односторонне непрерывна в нормальном направлении, но может иметь скачок при переходе через  $\Gamma$ . Аналогично

$$\mathcal{D}_{\Delta_\Gamma} = \{f \in L_2: \nabla f \in L_2, f|_\Gamma = 0\}. \quad (7.7.2)$$

Так как  $\mathcal{D}_{\Delta_\Gamma} \subset \mathcal{D}_\Delta \subset \mathcal{D}_{\Delta_N}$ , то

$$-\Delta_N \leq -\Delta \leq -\Delta_{\Gamma_1} \leq -\Delta_{\Gamma_2}, \quad (7.7.3)$$

где  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ . Для обратных операторов, следовательно, имеют место неравенства

$$0 \leq C_{\Gamma_2} \leq C_{\Gamma_1} \leq C \leq C_N. \quad (7.7.4)$$

Областями определения этих операторов являются множества

$$\mathcal{D}(\text{оператор}) = \{f \in \mathcal{D}(\text{билинейная форма}): |\langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L_2}| \leq \leq \text{const} \|g\|_{L_2} \text{ для всех } g \in \mathcal{D}(\text{билинейная форма})\}.$$

С помощью интегрирования по частям легко убедиться, что это определение эквивалентно общепринятому. К примеру, для функции  $f$  из области определения оператора  $\Delta_N$  и функции  $g \in C^\infty$  (у которой скачки через  $\Gamma$ , тем не менее, допустимы),  $g \in \mathcal{D}_{\Delta_N}$ , справедливо равенство

$$\int \nabla f(x) \nabla g(x) dx = \int (-\Delta f(x)) g(x) dx - \int_{\Gamma_+} (\mathbf{n} \cdot \nabla f) g dx + \int_{\Gamma_-} (\mathbf{n} \cdot \nabla f) g dx.$$

Здесь  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  — две стороны гиперповерхности  $\Gamma$ , так что функция  $g$  однозначна на  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , даже если она имеет скачок на  $\Gamma$ . Так как слагаемые в последней формуле независимы, то каждое из них

определяет непрерывный функционал на  $L_2$ . Выбирая, например, функцию  $g$  непрерывной при переходе через  $\Gamma$ , получим, что второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются. Поскольку  $\Delta f \in L_2$  (берутся односторонние вторые производные на  $\Gamma$ ), то функция  $\nabla f$  односторонне непрерывна в нормальном направлении и, следовательно, во втором и третьем слагаемых  $\nabla f|_{\Gamma_{+/-}} \in L_2(\Gamma)$ . Поскольку отображение  $g \rightarrow g|_{\Gamma_{+/-}}$  не является непрерывным в  $L_2$ , а функционалы от  $g$ , определяемые вторым и третьим слагаемыми, непрерывны в пространстве  $L_2$ , они должны обратиться в нуль. Поэтому  $\nabla f|_{\Gamma} = 0$ .

## 7.8 Общие граничные условия Дирихле

При изучении кластерного разложения в гл. 18 нам понадобятся граничные условия Дирихле на множестве  $\Gamma$ , являющемся объединением гиперплоскостей, образующих решетку. При исследовании предельного перехода к бесконечному объему в гл. 11, 18 в качестве  $\Gamma$  будет выбираться поверхность двух кубов, вложенных один в другой и отделенных друг от друга. Для того чтобы изучать именно такие ковариационные операторы, удобно иметь соответствующее представление для оператора  $C_\Gamma$ , которое мы здесь и получим. Вообще говоря, не существует разложения  $C_\Gamma$  в элементарный ряд (типа (7.5.1)), однако утверждения следствия 7.5.2 остаются справедливыми.

Формула для оператора  $C_\Gamma$ , которую мы хотим получить, использует винеровское интегральное представление. Метод, применяемый при ее выводе, идейно прост, но технически сложен. Поэтому мы ограничимся лишь схемой доказательства. Пусть  $dW_{xy}^t$  обозначает условную меру Винера на множестве непрерывных траекторий  $\omega(\tau)$  из точки  $x$  в точку  $y$ , таких, что  $\omega(0) = x$ ,  $\omega(t) = y$ . Обозначим  $\chi_\Gamma$  характеристическую функцию множества тех траекторий, которые не пересекают  $\Gamma$ . Иначе говоря,

$$\chi_\Gamma(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega(\tau) \in \Gamma \text{ для некоторого } \tau, 0 \leq \tau \leq t, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7.8.1)$$

Покажем, что ядро оператора  $e^{t\Delta_\Gamma}$  можно получить, рассматривая только те траектории, которые не пересекают  $\Gamma$ , а именно

$$e^{t\Delta_\Gamma}(x, y) = \int \chi_\Gamma(\omega) dW_{xy}^t(\omega). \quad (7.8.2)$$

В частности, если  $\Gamma = \emptyset$ , то соотношение (7.8.2) превращается в известную уже формулу (3.1.14) для свободных граничных условий. Взяв преобразование Лапласа от (7.8.2), получим ядро опе-

ратора

$$\begin{aligned}
 C_{\Gamma}(x, y) &= \int_0^{\infty} dt e^{-t(m^2 - \Delta_{\Gamma})}(x, y) = \\
 &= \int_0^{\infty} dt e^{-tm^2} \int \chi_{\Gamma}(\omega) dW_{xy}^t(\omega). \quad (7.8.3)
 \end{aligned}$$

Более подробное изложение винеровского интегрального представления для граничных условий Дирихле (и Неймана) см. в работе [Ginibre, 1971].

Наше доказательство формулы (7.8.3) опирается на другое определение граничных условий Дирихле. Введем граничные условия Дирихле на границе  $\Gamma = \partial\Lambda$  области  $\Lambda$ , рассматривая потенциал, равный константе на  $R^d \setminus \Lambda$ , и устремляя затем эту константу к бесконечности. Тем самым в пределе мы получим  $\Delta_{\Lambda}$  — оператор Лапласа в пространстве  $L_2(\Lambda)$  с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ . Аналогично построим  $\Delta_{R^d \setminus \Lambda}$ . После этого оператор  $\Delta_{\Gamma}$  есть не что иное, как сумма двух коммутирующих операторов  $\Delta_{\Lambda}$  и  $\Delta_{R^d \setminus \Lambda}$  в пространстве  $L_2(R^d)$ . В случае когда контур  $\Gamma$  не охватывает никакой области  $\Lambda$ , мы построим  $\Delta_{\Gamma}$ , «раздувая»  $\Gamma$  так, чтобы получилась небольшая область, а затем устремим «раздутие» к нулю.

**Предложение 7.8.1.** Пусть  $\Lambda$  — область в  $R^d$  с границей  $\partial\Lambda$ , а  $\chi_{\Lambda}(x)$  — характеристическая функция  $\Lambda$ . Тогда

$$\chi_{\Lambda}(-\Delta_{\partial\Lambda} + m^2)^{-1}\chi_{\Lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (-\Delta + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda'})^{-1}, \quad (7.8.4)$$

где  $\Lambda' = R^d \setminus \Lambda$ .

**Следствие 7.8.2.** Для области  $\Lambda$  с границей  $\Gamma = \partial\Lambda$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
 C_{\Gamma} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (-\Delta + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda})^{-1} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (-\Delta + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda'})^{-1} = \\
 &= (-\Delta_{\Gamma} + m^2)^{-1}. \quad (7.8.5)
 \end{aligned}$$

**Лемма 7.8.3.** Оператор  $C(\lambda) \equiv (-\Delta + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda'})^{-1}$  монотонно убывает по  $\lambda$  и сходится при  $\lambda \rightarrow \infty$  к сильному пределу  $C$ . Ядро  $C(\lambda, x, y)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  убывает и сходится при  $x \neq y$  к ядру  $C(x, y)$ . Кроме того, оператор  $C$  самосопряжен.

**Замечание.** Далее в тексте оператор  $C$  отождествляется с левой частью формулы (7.8.4).

**Доказательство.** Монотонность следует из тождества

$$dC(\lambda)/d\lambda = -C(\lambda)\chi_{\Lambda'}C(\lambda) \leq 0. \quad (7.8.6)$$

Поскольку  $C(\lambda)$  — положительный оператор, для любой функции  $f \in L_2$  существует  $\lim \langle f, C(\lambda)f \rangle$ , а оператор  $C = w.\lim C(\lambda)$  ограничен и самосопряжен. Положим  $B(\lambda) = C(\lambda) - C \geq 0$ . Тогда  $\|B(\lambda)^{1/2}f\| \rightarrow 0$  для произвольной функции  $f$ , поэтому  $s.\lim B(\lambda)^{1/2} = 0$  и  $s.\lim B(\lambda) = 0$ . Значит, оператор  $C(\lambda)$  сильно сходится к  $C$ , что и утверждалось.

Как и в § 7.5, оператор  $C(\lambda)$  имеет строго положительное ядро, а тождество (7.8.6) гарантирует поточечное монотонное убывание ядра  $C(\lambda, x, y)$ . Следовательно,  $\lim C(\lambda, x, y) = C(x, y) \geq 0$  существует для всех точек  $x \neq y$ . ■

Следующий результат является частным случаем сходимости графиков операторов. Общее обсуждение см. в работах [Glimm, Jaffe, 1969, 71b].

**Лемма 7.8.4.** *Оператор  $C = s.\lim C(\lambda)$  отображает пространство  $L_2(\Lambda)$  в себя. Более того, оператор  $C = \chi_\Lambda C \chi_\Lambda$  имеет самосопряженный обратный в  $L_2(\Lambda)$ .*

*Доказательство.* Чтобы определить оператор, обратный к  $C$ , покажем, что  $\text{Ker } C = L_2(R^d \setminus \Lambda) = (\text{Im } C)^\perp$ . Из этих двух равенств следует, что оператор  $C$  имеет обратный  $C^{-1}$ , который определен на плотном множестве и действует в пространстве  $L_2(\Lambda)$ . Так как  $C$  самосопряжен (и ограничен), то  $\text{Im } C^{-1} = \text{область определения } C = L_2(\Lambda)$  и оператор  $C^{-1}$  также самосопряжен.

Сначала докажем, что  $L_2(R^d \setminus \Lambda) \subset \text{Ker } C$ . Так как оператор  $C$  ограничен, множество  $\text{Ker } C$  замкнуто. Поэтому достаточно проверить, содержится ли в  $\text{Ker } C$  плотное подмножество  $L_2(R^d \setminus \Lambda)$ . В качестве такого подмножества выберем функции класса  $C^2$  с компактными носителями в  $R^d \setminus \Lambda$ . Для таких функций  $f \in C_0^2(R^d \setminus \Lambda)$  положим

$$f(\lambda) = \lambda^{-1} C(\lambda)^{-1} f = \lambda^{-1} (-\Delta + m^2) f + f. \quad (7.8.7)$$

Тогда  $\|f(\lambda) - f\| = \lambda^{-1} \|(-\Delta + m^2) f\| = O(\lambda^{-1})$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Из тождества  $C(\lambda)f(\lambda) = \lambda^{-1} f$  следует, что

$$\begin{aligned} \|C(\lambda)f\| &= \|C(\lambda)\{f - f(\lambda)\} + C(\lambda)f(\lambda)\| \leq \\ &\leq \|C(\lambda)\| \|f - f(\lambda)\| + \lambda^{-1} \|f\| \leq O(\lambda^{-1}) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.8.8)$$

Так как оператор  $C(\lambda)$  сильно сходится к оператору  $C$ , то  $Cf = 0$ .

Теперь покажем, что  $\text{Ker } C \subset L_2(R^d \setminus \Lambda)$ . Пусть  $f \in \text{Ker } C$ , а  $g \in C_0^2(\Lambda)$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (-\Delta + m^2)g, Cf \rangle = \langle (-\Delta + m^2 + \lambda \chi_\Lambda)g, Cf \rangle = \\ &= \langle C(\lambda)^{-1}g, Cf \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle C(\lambda)^{-1}g, C(\lambda)f \rangle = \langle g, f \rangle. \end{aligned} \quad (7.8.9)$$

Поскольку векторы  $g$  плотны в пространстве  $L_2(\Lambda)$ , это означает, что  $f \in L_2(\Lambda)^\perp = L_2(R^d \setminus \Lambda)$  и  $\text{Ker } C = L_2(R^d \setminus \Lambda)$ .

Так как оператор  $C$  самосопряжен,  $\text{Ker } C = (\text{Im } C)^\perp$ . В самом деле, для векторов  $g \in \text{Ker } C$  и  $f \in L_2(R^d)$

$$\langle g, Cf \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle g, C(\lambda)f \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle C(\lambda)g, f \rangle = \langle Cg, f \rangle = 0 \quad (7.8.10)$$

и, значит,  $g \in (\text{Im } C)^\perp$  и  $\text{Ker } C \subset (\text{Im } C)^\perp$ . Аналогично доказывается обратное включение. ■

*Доказательство предложения 7.8.1.* Осталось только отождествить операторы  $C^{-1}$  и  $-\Delta_\Lambda + m^2$ . Для этого заметим, что оператор Лапласа с граничными усло-



виями Дирихле является расширением по Фридрихсу оператора  $\Delta$ , рассматриваемого как билинейная форма на  $C_0^2(\Lambda) \times C_0^2(\Lambda)$ . Для  $g \in C_0^2(\Lambda)$  и  $f \in L_2(R^d)$  справедливо равенство

$$(-\Delta + m^2)g = (-\Delta + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda'})g = C(\lambda)^{-1}g \quad (7.8.11)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta + m^2)g, Cf \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle C(\lambda)^{-1}g, C(\lambda)f \rangle = \langle g, f \rangle \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle C(\lambda)(-\Delta + m^2)g, f \rangle = \langle C(-\Delta + m^2)g, f \rangle. \end{aligned} \quad (7.8.12)$$

Отсюда  $g = C(-\Delta + m^2)g \in \text{Im } C = \mathcal{D}(C^{-1})$  и  $C^{-1} \supset -\Delta + m^2|_{C_0^2(\Lambda)}$ . Так как

оператор  $C^{-1}$  самосопряжен и положителен, он замкнут одновременно и как оператор, и как билинейная форма. Поэтому  $C^{-1}$  есть расширение замыкания билинейной формы  $-\Delta_{\Lambda} + m^2$ , рассматриваемой первоначально на области  $C_0^2(\Lambda)$ .

Область определения билинейной формы положительного самосопряженного оператора совпадает с операторной областью определения корня квадратного из него (см. [Kato, 1966]). Поэтому мы закончим доказательство, установив следующее включение для области определения операторов:

$$\mathcal{D}(C^{-1/2}) \subset \mathcal{D}((-\Delta + m^2)^{1/2}). \quad (7.8.13a)$$

В силу неравенства  $-\Delta \leq C(\lambda)^{-1}$ , получим  $\|\nabla C(\lambda)^{1/2}f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}$ , поэтому последовательность  $\{C(\lambda)^{1/2}f\}$  ограничена по  $\lambda$  в градиентной норме. Для функции  $h \in \mathcal{D}(\Delta)$  имеет место сходимость  $\langle \nabla h, \nabla C(\lambda)^{1/2}f \rangle \rightarrow \langle -\Delta h, C^{1/2}f \rangle$ . Поэтому последовательность  $C(\lambda)^{1/2}f$  для всюду плотного множества  $f$  слабо сходится в градиентной норме и равномерно ограничена (относительно этой нормы). Следовательно, в гильбертовом пространстве с градиентной нормой она слабо сходится к пределу  $C^{1/2}f$ . Кроме того, справедливы неравенства

$$\|\nabla C^{1/2}f\|_{L_2} \leq \overline{\lim}_{\lambda} \|\nabla C(\lambda)^{1/2}f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}.$$

Поэтому

$$\mathcal{D}(C^{-1/2}) = \text{Im } C^{1/2} \subset \mathcal{D}(-\Delta^{1/2}).$$

Другими словами, функция  $C^{1/2}f$  имеет конечную норму Дирихле для функций  $f$  таких, что  $\nabla f \in L_2(R^d)$ . Из леммы 7.8.4 следует, что  $C^{1/2}f = 0$  на множестве  $\Delta'$ . Теперь мы оценим  $L_2(R^{d-1})$ -норму  $\| \cdot \|_{\varepsilon}$  функции  $C^{1/2}f$  в плоскости, параллельной  $\partial\Delta$  и отстоящей от нее на  $\varepsilon$ . Пусть  $n$  — координата, нормальная к  $\partial\Delta$ , а  $p$  — набор координат в плоскости, параллельной  $\partial\Delta$  (тангенциальные координаты). В этих обозначениях положим  $\|f\|_n^2 = \int |f(n, p)|^2 dp$ ; тогда

$$\|C^{1/2}f\|_{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon} \left( \frac{d}{dn} \|C^{1/2}f\|_n \right) dn.$$

Из неравенства треугольника для нормы в пространстве  $L_2(R^{d-1})$  получим, что

$$\left| \frac{d}{dn} \|C^{1/2}f\|_n \right| \leq \left\| \frac{d}{dn} C^{1/2}f \right\|_n. \text{ Подставляя эту оценку в предыдущее равенство и применяя к интегралу по } n \text{ неравенство Шварца, найдем, что}$$

$$\|C^{1/2}f\|_{\varepsilon} \leq e^{1/2} \|\nabla C^{1/2}f\|_{L_2} \leq e^{1/2} \|f\|_{L_2}. \quad (7.8.13b)$$

Стандартным способом применяя операцию свертки, легко показать, что  $C^{1/2}f$  аппроксимируется в градиентной норме гладкими функциями. Слегка видоизме-

няя свертку вблизи границы  $\Lambda$ , можно аппроксимировать  $C^{1/2}f$  (в той же градиентной норме) и функциями класса  $C_0^2(\Lambda)$ . Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}(-\Delta^{1/2}) \cap L_2(\Lambda) \subset \mathcal{D}((-\Delta_\Lambda + m^2)^{1/2}),$$

а это и доказывает включение (7.8.13а). ■

**Замечание 1.** Из неравенства (7.8.13б) вытекает, что функции из  $\mathcal{D}(-\Delta^{1/2}) \cap L_2(\Lambda)$ , рассматриваемые как  $L_2$ -функции по тангенциальным переменным, удовлетворяют условию Гёльдера по переменной, нормальной к  $\partial\Lambda$ . Таким образом, предельные значения этих функций на границе  $\partial\Lambda$  существуют и обращаются в нуль. См. подробности в книге [Agmon, 1965].

**Замечание 2.** Пусть  $\Gamma = \partial\Lambda$ . По формуле Фейнмана — Каца из гл. 3 получим

$$\begin{aligned} e^{-tC(\lambda)^{-1}}(x, y) &= e^{-t(-\Delta + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda'})}(x, y) = \\ &= e^{-tm^2} \int \exp\left[-\lambda \int_0^t \chi_{\Lambda'}(\omega(\tau)) d\tau\right] dW_{xy}^t(\omega). \end{aligned} \quad (7.8.14)$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  правая часть по теореме Лебега о мажорированной сходимости стремится к  $e^{-tm^2} \int \chi_{\Lambda'}(\omega) dW_{xy}^t(\omega)$ . Левая же часть, согласно доказанному предложению, стремится к ядру оператора  $\chi_{\Lambda'} \exp[t(\Delta_{\partial\Lambda} - m^2)] \chi_{\Lambda}$ . Складывая это выражение с соответствующей формулой для области  $R^2 \setminus \Lambda$ , получим равенство (7.8.3) как тождество ядер операторов в  $L_2$ .

**Замечание 3.** Граничные условия Дирихле можно определить последовательно на контурах  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , охватывающих области  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , при помощи следующей формулы, которая доказывается аналогично предложению 7.8.1:

$$\begin{aligned} (-\Delta_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} + m^2)^{-1} &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ (-\Delta_{\Gamma_2} + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda_2'})^{-1} + (-\Delta_{\Gamma_1} + m^2 + \lambda\chi_{\Lambda_1'})^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (7.8.15)$$

**Замечание 4.** Можно задать граничные условия Дирихле на «ребре»  $b$ , не охватывающем никакой области. Используя изложенный выше метод, определим граничные условия Дирихле на контуре  $\partial b_\varepsilon$ , где  $b_\varepsilon$  — некоторая  $\varepsilon$ -окрестность  $b$ . Монотонность соответствующего ковариационного оператора по  $\varepsilon$  следует из тождества (7.8.6) (ср. с замечанием 3). Тогда

$$(-\Delta_{\Gamma \cup b} + m^2)^{-1}(x, y) = \sup_{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma \cup \partial b_\varepsilon} + m^2)^{-1}(x, y). \quad (7.8.16)$$

Как и выше, можно показать, что векторы  $((-\Delta_{\Gamma \cup b} + m^2)^{-1}f)(x)$  из образа оператора с ядром (7.8.16) при  $x \rightarrow b$  стремятся к нулю по нормальной переменной.

**Замечание 5.** Из предыдущих рассуждений, обобщая предложение 7.6.1, можно вывести, что ядро ковариационного оператора Дирихле  $C_\Gamma$  монотонно убывает при расширении множества  $\Gamma$ . Положим

$$\delta c_\Gamma(x) = \lim_{y \rightarrow x} [C_\emptyset(x, y) - C_\Gamma(x, y)]. \quad (7.8.17)$$

**Предложение 7.8.5.** Если  $\Gamma_1 \subset \Gamma$ , то

$$0 \leq C_\Gamma(x, y) \leq C_{\Gamma_1}(x, y) \leq C(x, y), \quad (7.8.18)$$

$$0 \leq \delta c_{\Gamma_1}(x) \leq \delta c_\Gamma(x) \leq \begin{cases} \text{const}(1 + \text{dist}(x, \Gamma)^{-d+2}) \text{ при } d \geq 3, \\ \text{const}(1 + |\ln \text{dist}(x, \Gamma)|) \text{ при } d = 2. \end{cases} \quad (7.8.19)$$

*Доказательство.* Нужно установить только верхнюю оценку в неравенстве (7.8.19). Пусть точка  $x$  лежит в ячейке  $\Delta$  решетки, а  $b \subset \partial\Delta$  — гиперплоскость (ребро), ближайшая к  $x$ . Если  $b \subset \Gamma$ , то верхняя оценка следует из неравенства (7.6.2), так как  $\delta c_\Gamma \leq \delta c_D$ . Теперь предположим, что ребро  $b$  не содержится в множестве  $\Gamma$ , а  $\Lambda = \Delta \cup \Delta'$  — параллелепипед, образованный двумя смежными ячейками решетки, так что  $b \subset \partial\Delta \cup \partial\Delta'$ . Сдвиги параллелепипеда  $\Lambda$  покрывают все пространство  $R^d$ ; ковариационный оператор с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$  обозначим  $C_{\partial\Lambda} = C_D$ . (При подходящем выборе решетки этот оператор  $C_D$  совпадает с оператором  $C_D$  из § 7.5.) Таким образом, если  $x, y \in \Lambda$ , то, в силу (7.8.18),  $C_{\partial\Lambda}(x, y) \leq C_\Gamma(x, y)$  и  $\delta c_\Gamma(x) \leq \delta c_{\partial\Lambda}(x)$  при  $x \in \Lambda$ .

Пусть  $b'$  — «ребро», ближайшее к точке  $x$ . Если  $b' \cap \Gamma \neq \emptyset$ , то верхняя оценка, как и выше, следует из неравенства (7.6.2). Если же  $b' \cap \Gamma = \emptyset$ , то мы построим новый параллелепипед  $\Lambda \cup \Lambda'$  и повторим предыдущие рассуждения. В случае, когда точка  $x$  лежит внутри  $\Lambda$ , мы закончим доказательство самое большее после  $d$  шагов. В случае, когда  $x$  лежит вне  $\Lambda$ , оно с помощью монотонности по-прежнему сводится к оценке (7.6.2). ■

Дополним оценку (7.8.19) оценкой убывания величины  $\delta c_\Gamma(x)$  на больших расстояниях.

**Предложение 7.8.6.** Пусть величина  $\delta c_\Gamma$  определена формулой (7.8.17), а расстояние  $\text{dist}(x, \Gamma)$  отделено от нуля. Тогда

$$0 \leq \delta c_\Gamma(x) \leq O(1) e^{-2m \text{dist}(x, \Gamma)/\sqrt{d}}. \quad (7.8.20)$$

*Доказательство.* Если  $\text{dist}(x, \Gamma) = r$ , то точку  $x$  можно выбрать в качестве центра  $d$ -мерного куба  $B$  со стороной  $l = 2r/\sqrt{d}$ , такого, что  $B \cap \Gamma = \emptyset$ . Пусть граница этого куба  $\partial B$  и ее сдвиги порождают некоторую решетку  $\Gamma_1$ . По предложению 7.8.5 для  $x \in B$  имеем  $0 \leq \delta c_\Gamma(x) \leq \delta c_{\Gamma_1}(x)$ . Но  $\delta c_{\Gamma_1}$  выражается формулой (7.6.3) при  $x - x_j \geq l$ . Следовательно,

$$\delta c_\Gamma \leq O(1) e^{-2m \text{dist}(x, \Gamma)/\sqrt{d}}. \quad \blacksquare$$

**Предложение 7.8.7.** Пусть  $d = 2$ . Для любого  $1 \leq q \leq \infty$  существует такая постоянная  $K = K(q)$ , не зависящая от  $m \geq 1$  и от оператора  $C \in \mathcal{E}_m$  (множество ковариационных операторов  $\mathcal{E}_m$  определено ниже в § 7.9), что для любой ячейки  $\Delta$  решетки

$$\|\delta c_\Gamma(x)\|_{L_q(\Delta)} \leq Km^{-1/q}. \quad (7.8.21)$$

*Доказательство.* Изменяя, если нужно, масштаб, можем считать, что  $m = 1$ . Тогда утверждение вытекает из предложений 7.8.5, 7.8.6 и формулы (7.2.2). ■

7.9 Регулярность оператора  $C_\sigma$ 

**Определение.** Обозначим  $\mathcal{E}_m$  выпуклую линейную оболочку ковариационных операторов, рассмотренных в § 7.1—8, с массой  $\geq m$ . Точнее,  $\mathcal{E}_m$  состоит из операторов  $C_B = (-\Delta_B + m_1^2)^{-1}$ , где  $m_1 \geq m$  и  $B = \emptyset, \rho, D, N$  или  $\Gamma$ . Кроме того, пусть  $\mathcal{E}_m^M \subset \mathcal{E}_m$  обозначает подмножество тех выпуклых комбинаций операторов, для которых  $m \leq m_1 \leq M$ .

Мы будем опускать индексы  $m$  и  $M$ , когда в них нет необходимости.

В этом параграфе будет закончено доказательство теоремы 7.1.1. Резюмируя содержание предыдущих параграфов этой главы, заметим, что свойство локальной регулярности (7.1.2) и свойство P1 поточечной положительности (§ 7.1) вытекают из асимптотик (7.2.4—5), следствий 7.3.2, 7.4.2, 7.5.2 и неравенства (7.8.18). Свойство (P2) положительности оператора (§ 7.1) следует из определения ковариационного оператора  $C_B$ .

Осталось доказать свойства локальной регулярности (LR1—3) (§ 7.1). В случае, когда ковариационные операторы с периодическими граничными условиями  $C_\rho$  исключены из выпуклой суммы  $C$ , можно доказать убывание  $C(x, y)$  на больших расстояниях между  $x$  и  $y$ . Пусть  $\{\Delta_i\}$  — покрытие  $R^2$  единичными квадратами, причем  $i \in Z^2$  — левая нижняя вершина квадрата  $\Delta_i$ . Напомним, что  $h, \delta_x$  и  $\xi$  были определены в § 7.1.

**Предложение 7.9.1.** Пусть  $C \in \mathcal{E}_m$ , где масса  $m$  отвлечена от нуля. Тогда для  $p < \infty$  и  $d = 2$

$$\sup_x \|(C\xi)(x, \cdot)\|_{L_p} \leq \text{const}, \quad (7.9.1)$$

$$\|(\delta_x C \delta_x)(x, x)\|_{L_\infty} \leq \text{const} \ln x. \quad (7.9.2)$$

Если операторы  $C_\rho$  исключены из суммы  $C$ , то справедлива асимптотика (7.1.3) и, кроме того,

$$\sup_x \|C(x, \cdot)\|_{L_p} \leq \text{const}, \quad (7.9.3)$$

$$\|C\|_{L_p(\Delta_i \times \Delta_j)} \leq \text{const} \cdot m^{-2/p} e^{-m \text{dist}(\Delta_i, \Delta_j)}, \quad (7.9.4)$$

причем здесь все константы не зависят от  $C$  и  $x$ .

**Доказательство.** Все эти оценки следуют из неравенств (7.2.3) и (7.2.5) для свободной ковариации  $C_\emptyset$ . С помощью разложений (7.3.1), (7.4.1) и (7.5.1) и поточечной верхней оценки  $0 \leq C_\Gamma \leq C_\emptyset$  (7.8.18) можно получить аналогичные неравенства для операторов  $C_B$ ,  $B = \rho, N$  или  $D$ . Для доказательства оценки (7.9.4) воспользуемся соотношением (7.2.2). Для  $C = C_\emptyset$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Delta_I \times \Delta_J} C(m; x-y)^p dx dy \right)^{1/p} &= \left( \int_{\Delta_I \times \Delta_J} C(1; m(x-y))^p dx dy \right)^{1/p} = \\ &= \left( \int_{m\Delta_I \times m\Delta_J} m^{-4} C(1; x-y)^p dx dy \right)^{1/p}, \quad (7.9.5) \end{aligned}$$

где  $m\Delta_I = \{mx: x \in \Delta_I\}$ . В силу оценок (7.2.3) и (7.2.5), выражение (7.9.5) ограничено сверху величиной

$$\left( \int_{m\Delta_I} m^{-4} dx \right)^{1/p} e^{-m \operatorname{dist}(\Delta_I, \Delta_J)} = \operatorname{const} m^{-2/p} e^{-m \operatorname{dist}(\Delta_I, \Delta_J)}.$$

Для операторов  $C_N$  и  $C_D$  эта оценка получается аналогично с помощью явных формул, а для  $C_T$  с помощью поточечной верхней оценки. ■

Доказательство теоремы 7.1.1 сводится теперь к проверке свойства (LR2), для которого существенна оценка дробных производных  $C$  в классе  $L_q^{\operatorname{loc}}$ . Эта оценка является более тонкой, потому что ее нельзя вывести из поточечных верхних оценок.

**Теорема 7.9.2.** Пусть  $C \in \mathcal{C}_m$ , где масса  $m$  отделена от нуля,  $p < \infty$ , а  $d = 2$ . Тогда для некоторого  $\varepsilon > 0$  и  $\kappa_1 \leq \kappa_2$  справедливо неравенство

$$\| \xi_1 C(\delta_{\kappa_1} - \delta_{\kappa_2}) \xi_2 \|_{L_p(R^2 \times R^2)} \leq \operatorname{const} \kappa_1^{-\varepsilon}$$

при  $\kappa_1 \rightarrow \infty$ , причем постоянная не зависит от оператора  $C$ , но зависит от значений  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

**Замечание.** Для данной функции  $\zeta \in C_0^\infty$  выберем функцию  $\xi_1 \in C_0^\infty$  равной 1 в окрестности носителя  $\zeta$ . Тогда для достаточно большого  $\kappa$  справедливо соотношение  $\zeta \delta_\kappa C = \zeta \delta_\kappa \xi_1 C$ . При доказательстве свойства (LR2) мы выберем значения параметров  $\kappa$ , стоящих в (LR2) по обе стороны от оператора  $C$ , независимо. Тогда

$$\begin{aligned} \| \zeta \delta_\kappa C \delta_{\kappa_1} \xi - \zeta \delta_\kappa C \delta_{\kappa_2} \xi \|_{L_p} &= \| \zeta \delta_\kappa \xi_1 C(\delta_{\kappa_1} - \delta_{\kappa_2}) \xi \|_{L_p} \leq \\ &\leq \operatorname{const} \| \xi_1 C(\delta_{\kappa_1} - \delta_{\kappa_2}) \xi \|_{L_p}, \end{aligned}$$

так что свойство (LR2) следует теперь из теоремы 7.9.2.

**Доказательство для  $p = 2$ ,  $C = C_\emptyset$ .** В этом случае операторы  $\delta_\kappa$  и  $C$  коммутируют, поэтому утверждение теоремы содержится в двух следующих леммах. Напомним, что норма Гильберта—Шмидта  $\|A\|_{\text{HS}}$  оператора  $A$ —это норма его ядра в пространстве  $L_2$ , для которой выполняется неравенство  $\|AB\|_{\text{HS}} \leq \|A\| \|B\|_{\text{HS}}$ . ■

**Лемма 7.9.3.** Пусть  $C = C_\emptyset$ . Тогда при  $0 \leq a \leq 1/2$

$$\|C^a(\delta_{\kappa_1} - \delta_{\kappa_2})\| \leq O(\kappa_1^{-2a}).$$

**Доказательство.** Норма оператора  $C^a(\delta_{\kappa_1} - \delta_{\kappa_2})$  совпадает с  $L_\infty$ -нормой преобразования Фурье его ядра. Вычисления с использованием определений (7.1.4—5) показывают, что эта норма равна  $\sup_p (\rho^2 + 1)^{-a} |\tilde{h}(\rho/\kappa_1) - \tilde{h}(\rho/\kappa_2)|$ .

Для  $|p| \leq \kappa_1$ , подставляя, получим

$$|\tilde{h}(\rho/\kappa_1) - \tilde{h}(\rho/\kappa_2)| \leq O(1) |p/\kappa_1|^{2a}, \quad (7.9.6)$$

а для  $|p| \geq \kappa_1$  аналогично

$$|\tilde{h}(\rho/\kappa_1) - \tilde{h}(\rho/\kappa_2)| \leq O(1). \quad (7.9.7)$$

Константа  $O(1)$  зависит от  $h$ , но  $h$  фиксировано. ■

**Лемма 7.9.4.** Пусть  $C = C_\emptyset$  и  $A = C^a \xi$ . Тогда для  $a > 1/4$  оператор  $A^*A$  является оператором Гильберта — Шмидта, так же как и сам оператор  $A$  при  $a > 1/2$ .

**Доказательство.** Имеем  $\|A^*A\|_{\text{HS}} = \|\xi C^{2a} \xi\|_{\text{HS}} \leq \|\xi\| \|C^{2a} \xi\|_{\text{HS}}$ . Преобразование Фурье ядра оператора  $C^{2a} \xi$  равно  $(\rho^2 + 1)^{-2a} \tilde{\xi}(\rho - q)$ , и, следовательно, при  $a > 1/4$  ядро принадлежит пространству  $L^2(R^4)$ .

**Доказательство теоремы 7.9.2 для  $p = 2$ ,  $C = C_p, C_D$  или  $C_N$ .** Так как функция  $\xi_t$  имеет компактный носитель, можно рассматривать вместо  $C$  оператор  $\chi_\Lambda C \chi_\Lambda$ . Пусть

$$F_\gamma(p) = (\rho_1^2 + 1)^{-1/2+\gamma} (\rho_2^2 + 1)^{-1/2+\gamma},$$

а  $\mathcal{C}(p, q)$  обозначает преобразование Фурье ядра оператора  $\chi_\Lambda C \chi_\Lambda$ . Доказательство теоремы содержится в следующих двух леммах.

**Лемма 7.9.5.** Для любого  $\gamma > 0$

$$|\tilde{C}(p, q)| \leq \text{const } F_\gamma(p) F_\gamma(q).$$

**Доказательство.** По условию ядро  $C$  есть сумма сдвигов и отражений ядра оператора  $C_\emptyset$ . Пусть  $C_i$  — один член из этой суммы. Сдвиги по пространственной переменной  $x$  никак не влияют на  $|\tilde{C}_i|$ , а вот отражения соответствуют преобразованию  $p \rightarrow -p$ . Умножению на характеристическую функцию  $\chi_\Lambda$  в преобразовании Фурье соответствует, как известно, свертка с  $\tilde{\chi}_\Lambda$ , причем  $|\tilde{\chi}_\Lambda| \leq \text{const } F_\gamma$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |\tilde{C}_i| &\leq \text{const} \int F_\gamma(p-r) (r^2+1)^{-2} F_\gamma(r-q) dr \leq \\ &\leq \text{const } F_{2\gamma}(p) F_{2\gamma}(q). \end{aligned} \quad (7.9.8)$$

Для того чтобы получить оценку, обеспечивающую сходимость суммы по  $j$ , мы поступим следующим образом. С помощью тождества  $C_\emptyset(x, y) = \text{const } g(|x-y|)$  и представления (7.2.6) для функции  $g$  легко показать, что при больших значениях разности  $|x-y|$  все производные ядра оператора  $C_\emptyset$  экспоненциально убывают на бесконечности. Поэтому  $C_j(x, y) = \chi_\Lambda(x) v_j(x, y) \chi_\Lambda(y)$ , где

$$|\tilde{v}_j(r, s)| \leq \text{const} (1+r^2+s^2)^{-n} e^{-O(\text{dist}(\Lambda, y_j))}$$

при любом конечном  $n$ . После этого (7.9.8) можно изменить так, чтобы последняя константа стала экспоненциально малой по сравнению с константой в неравенстве (7.9.8). Теперь для завершения доказательства осталось только просуммировать по  $j$ . ■

**Лемма 7.9.6.** Для любого  $\gamma \gg 0$  справедлива оценка

$$\| \chi_{\Lambda} C \chi_{\Lambda} (\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) \xi \|_{\text{HS}} \leq \text{const } \kappa_1^{-1/2+\gamma}.$$

*Доказательство.* Пусть  $c$  обозначает преобразование Фурье ядра оператора  $\chi_{\Lambda} C \chi_{\Lambda} (\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) \xi$ . В силу (7.9.6), (7.9.7) и леммы 7.9.5,

$$\begin{aligned} |c| &\leq \text{const } F_{\gamma}(p) \int F_{\gamma}(r) | \tilde{h}(r/\kappa_1) - \tilde{h}(r/\kappa_2) | \tilde{\xi}(r-q) dr \leq \\ &\leq \text{const } F_{\gamma}(p) \int F_{\gamma}(r)^{1-a} \kappa_1^{-a(1-\gamma)} (|r-q|^2 + 1)^{-2} dr \leq \\ &\leq \text{const } F_{\gamma}(p) F_{\gamma}(q)^{1-a} \kappa_1^{-a(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Выберем  $a < 1/2$ ,  $(1-a)(1-\gamma) > 1/2$ ; тогда  $\|c\|_{L_2} = O(\kappa_1^{-a(1-\varepsilon)})$ , что и доказывает лемму. ■

*Доказательство теоремы 7.9.2* для  $p = 2$ ,  $C = O_{\Gamma}$ . В рассматриваемом случае  $0 \leq C \leq C_{\emptyset}$ , поэтому  $0 \leq C_{\emptyset}^{-1/2} C C_{\emptyset}^{-1/2} \leq 1$ . Введем операторы

$$A = \xi_1 C_{\emptyset}^{1/2} C_{\emptyset}^{-1/2} C C_{\emptyset}^{-1/2}, \quad B = C_{\emptyset}^{1/2} (\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) \xi.$$

Так как  $\|AB\|_{\text{HS}}^2 = \text{Tr}(AB)^* AB = \text{Tr} B^* A^* AB = \text{Tr} A^* A B B^* \leq$   
 $\leq (\text{Tr}(A^* A)^2)^{1/2} (\text{Tr}(B^* B)^2)^{1/2} = \|A^* A\|_{\text{HS}} \|B^* B\|_{\text{HS}},$

то

$$\| \xi_1 C (\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) \xi \|_{\text{HS}} = \| AB \|_{\text{HS}} \leq \| A^* A \|_{\text{HS}}^{1/2} \| B^* B \|_{\text{HS}}^{1/2}.$$

По леммам 7.9.3 и 7.9.4 для любого  $\varepsilon > 0$  верно неравенство  $\|B^* B\|_{\text{HS}} \leq \leq \text{const } \kappa_1^{-1/2+\varepsilon}$ , и аналогично, в силу леммы 7.9.4,

$$\|A^* A\|_{\text{HS}} \leq \|C_{\emptyset}^{-1/2} C C_{\emptyset}^{-1/2}\|^2 \|C_{\emptyset}^{1/2} \xi_1^2 C_{\emptyset}^{1/2}\|_{\text{HS}} \leq \| \xi_1 C_{\emptyset} \xi_1 \|_{\text{HS}} \leq \text{const}. \quad \blacksquare$$

*Доказательство теоремы 7.9.2, общий случай.* Для того чтобы доказать теорему для  $p = 2$  и произвольного  $C$ , достаточно рассмотреть выпуклую сумму оценок, полученных для  $C = C_{\Gamma}$ ; тем самым общий случай сводится к предыдущему. Обозначим  $c_{\kappa}$  ядро оператора  $\xi_1 C \delta_{\kappa} \xi_2$ ; тогда  $c_{\kappa} \in L_p(R^2 \times R^2)$ , причем по предложению 7.9.1  $L_p$ -норма  $c_{\kappa}$  равномерно ограничена по  $\kappa$ . Поэтому для  $\delta c = c_{x_1} - c_{x_2}$ , в силу доказанного для случая  $p = 2$ , имеем

$$\begin{aligned} \|\delta c\|_{L_{2n}}^{2n} &= \int \delta c^{2n} dx \leq \left( \int \delta c^2 dx \right)^{1/2} \left( \int \delta c^{4n-2} dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \text{const } \kappa_1^{-\varepsilon} (\|c_{x_1}\|_{L_{4n-2}} + \|c_{x_2}\|_{L_{4n-2}})^{2n-1} \leq \text{const } \kappa_1^{-\varepsilon}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 7.10 Положительность при отражениях

Положительность скалярного произведения в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  квантовомеханических состояний была выведена нами из свойства положительности при отражениях, которым обладает ковариационный оператор  $C$  гауссовой меры  $d\varphi_C$  (теорема 6.2.2). В гл. 6 мы установили при помощи прямого подсчета такую

положительность у свободной ковариации  $(-\Delta + I)^{-1}$  (предложение 6.2.5). В § 10.4 мы увидим, что доказательство положительности в негауссовом случае опирается на соответствующий факт для гауссовых квантовых полей.

Для построения нелинейных квантовых полей удобно установить свойство положительности и некоторых других мер, встречающихся на промежуточных этапах построения. С этой целью проанализируем ковариационный оператор  $C = (-\Delta_B + I)^{-1}$ , где  $B$  — граничные условия Дирихле и (или) Неймана, заданные на объединении  $\Gamma$  кусочно-гладких гиперповерхностей. Предполагая граничные условия инвариантными относительно отражений, дадим общее доказательство положительности при отражениях для  $C$ . А именно, мы покажем, что положительность при отражениях эквивалентна уменьшению ядра оператора  $C$  при введении условия Дирихле или Неймана на гиперповерхности, относительно которой происходит отражение. Применяемый метод устанавливает положительность при отражениях и в случае периодических граничных условий, а также для решеточной аппроксимации оператора  $C$ .

Сформулируем свойство положительности при отражениях для оператора  $C = (-\Delta_B + I)^{-1}$ . Пусть  $\Pi$  — гиперплоскость в пространстве  $R^d$ , а  $\theta_\Pi = \theta$  — отражение (как преобразование  $R^d$ ) относительно  $\Pi$ ; той же буквой будем обозначать соответствующее преобразование функций на  $R^d$ . Пусть, кроме того,  $R^\pm$  — две связанные компоненты множества  $R^d \setminus \Pi$ . Заметим, что в пространстве  $L_2(R^d)$  оператор  $\theta$  самосопряжен и  $\theta^2 = I$ . Пусть  $\Pi_\pm$  — ортогональная проекция на  $L_2(R^\pm)$ .

**Определение 7.10.1.** Если  $[\theta, C] = 0$ , то оператор  $C$  назовем  $\theta$ -инвариантным (т. е. инвариантным при отражениях относительно  $\Pi$ ).

**Определение 7.10.2.**  $\theta$ -инвариантный оператор  $C$  назовем положительным при отражении  $\theta$  относительно  $\Pi$ , если

$$\Pi_+ \theta C \Pi_+ \geq 0. \quad (7.10.1)$$

**Замечание 1.** Так как  $[\theta, C] = 0$ , то неравенство (7.10.1) эквивалентно неравенству  $\Pi_- \theta C \Pi_- \geq 0$ . Таким образом, (7.10.1) — переформулировка определения 6.2.1.

**Замечание 2.** По теореме 6.2.2 положительный при отражениях оператор  $C$  является ковариационным оператором положительной при отражениях гауссовой меры  $d\mu_C$ .

**Теорема 7.10.1.** Рассмотрим  $\theta$ -инвариантный оператор  $C = (-\Delta_B + I)^{-1}$ , где  $B$  обозначает граничные условия Дирихле и (или) Неймана на множестве  $\Gamma$ . Тогда  $C$  положителен при отражениях.

**Доказательство.** Пусть  $P_\pm = (I \pm \theta)/2$  — проекции соответственно на четное и нечетное собственные подпространства оператора  $\theta$ . Заметим, что  $(I - \theta)C =$



$= 2P_-C = 2CP_-$ . Поэтому условие положительности (7.10.1) можно записать в виде

$$\Pi_+[C - 2P_-C]\Pi_+ \geq 0. \quad (7.10.2)$$

Сначала докажем, что ограничение оператора  $2P_-C$  на подпространство  $L_2(R_{\pm}^d)$  совпадает с ограничением на  $L_2(R_{\pm}^d)$  оператора  $C_D$ . Здесь  $C_D = (-\Delta_{B'} + T)^{-1}$ , где  $\Delta_{B'}$  — оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле на  $\Pi$  и граничными условиями  $B$  на  $\Gamma \setminus \Pi$ . Затем мы покажем, что  $C_D \leq C$ . После этого положительность (7.10.2) получается как следствие этих двух утверждений.

Первое утверждение вытекает из того, что  $(I - \theta)C(x, y)$  равно нулю на  $\Pi$  и  $(I - \theta)C$  удовлетворяет уравнению  $(-\Delta + I)(I - \theta)C(x, y) = \delta(x - y)$ . Второе утверждение становится очевидным, если охарактеризовать билинейную форму  $\Pi_{\pm}C_D^{-1}\Pi_{\pm}$  как ограничение билинейной формы  $C^{-1}$  на множество функций с носителем в  $\Pi_{\pm}$ , равных нулю на  $\Pi$ . Более подробное объяснение см. в § 7.7.

**Замечание 1.** Случай свободной ковариации  $\Gamma = \emptyset$  особый. Используя представление (7.5.1) с  $\Gamma = \Pi$ , обнаружим, что  $C_D$  — это обычный ковариационный оператор  $(-\Delta_{\Pi} + I)^{-1}$  с граничными условиями Дирихле, заданными только на  $\Pi$ .

**Замечание 2.** Положим по определению

$$C_N = (I + \theta)C = 2P_+C = 2CP_+. \quad (7.10.3)$$

Вместо (7.10.2) можно записать условие положительности при отражениях (7.10.1) в виде

$$0 \leq \Pi_+\theta C\Pi_+ = \Pi_+(C_N - C)\Pi_+ \quad (7.10.4)$$

или, что эквивалентно,  $\Pi_-(C_N - C)\Pi_+ \geq 0$ . Мы утверждаем, опуская доказательство, что здесь  $C_N$  — ковариационный оператор с граничными условиями Неймана на  $\Pi$  и граничными условиями  $B$  на  $\Gamma \setminus \Pi$ . Лишь в частном случае свободной ковариации можно непосредственно отождествить оператор  $C_N$  с ковариационным оператором в случае граничных условий Неймана, определенным формулой (7.4.1).

**Замечание 3.** Из (7.10.2—4) следует, что положительность при отражениях эквивалентна неравенству

$$0 \leq \Pi_+\theta C\Pi_+ = (1/2)\Pi_+(C_N - C_D)\Pi_+$$

или  $0 \leq \Pi_-(C_N - C_D)\Pi_+$ . Так как  $\Pi_+(C_N - C_D)\Pi_+ = 0$ , можно сделать вывод, что

$$C_D \leq C_N. \quad (7.10.5)$$

В предыдущем замечании мы объяснили, что  $C_N$  — это ковариационный оператор  $C$  с граничными условиями Неймана на гиперплоскости  $\Pi$ , и при этом доказали обобщение свойства монотонности, установленного в § 7.7—8. А именно, если оператор  $C = (-\Delta_B + I)^{-1}$   $\theta$ -инвариантен, то  $C_D \leq C_N$ , где  $D$  и  $N$  — соответственно граничные условия Дирихле и Неймана на  $\Pi$  и граничные

условия  $B$  на  $\Gamma \setminus \Pi$ . Более того, свойство монотонности (7.10.5) эквивалентно свойству положительности при отражениях относительно  $\Pi$ .

Рассмотрим теперь периодические граничные условия. Для этого вместо  $R^d$  возьмем тор  $T^d$ , а вместо гиперплоскости  $\Pi$  — перегородку, делящую тор на две равные части. Это легко представить наглядно, вложив тор  $T^d$  в пространство  $R^{d+1}$  и продолжив перегородку  $\Pi$  по гиперплоскости в  $R^{d+1}$ . Случай  $d = 1$  изображен на рис. 7.1. Теперь  $\Pi_{\pm}$  — проекции на пространство  $L_2$ -функций, носители которых лежат по одну сторону от  $\Pi$ . Наряду с периодическими допускаются и граничные условия  $B$  Дирихле и (или) Неймана. С учетом этих изменений формулируются определения 7.10.1—2. Как и ранее, доказывается

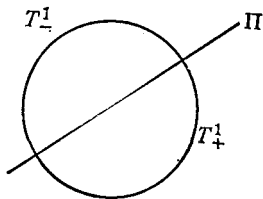


Рис. 7.1. Отражение тора  $T^1$  относительно гиперплоскости;  $T_{\pm}^1$  — две компоненты множества  $T^1 \setminus \Pi$ .

**Теорема 7.10.2.** Пусть оператор  $C = (-\Delta_B + I)^{-1}$   $\theta$ -инвариантен в пространстве  $L_2(T^d)$ . Тогда  $C$  положителен при отражениях.

В заключение отметим, что вместо пространства  $R^d$  или тора  $T^d$  можно рассмотреть решетку  $Z^d$  или конечную периодическую решетку  $Z_n^d$  с шагом  $\delta$ . И в этом случае для классических  $\theta$ -инвариантных граничных условий имеет место свойство OS-положительности. Для доказательства опять используется неравенство  $C_D \leq C$ , которое снова можно установить, введя граничные условия Дирихле для решеточного оператора  $C^{-1}$  и подходящим образом варьируя его массу (см. § 7.8 и 9.5).

**Теорема 7.10.3.** Имеют место решеточные аналоги теорем 7.10.1 и 7.10.2.

## Глава 8

### Квантование = Интегрирование по функциональному пространству

#### 8.1 Введение

В этой главе мы начинаем построение квантовой модели  $P(\varphi)_2$ , которое закончим в гл. 11—12. Мы изложим здесь эффективные методы подсчета и оценивания интегралов

$$\int A d\varphi = \sum_{G=\text{граф}} I(G) \quad (8.1.1)$$

от полиномов  $A = A(\varphi)$  по гауссовой мере  $d\varphi$ . Имеются различные эквивалентные способы вычисления гауссова интеграла от полинома, такие, как интегрирование по частям, разложение  $A(\varphi)$  по полиномам Эрмита или использование операторов рождения и уничтожения. Все эти методы чисто алгебраические. Графы (или диаграммы) Фейнмана  $G$  служат удобным мнемоническим средством для записи и перечисления всех слагаемых, получающихся при вычислении интеграла (8.1.1) любым из этих способов. Каждое такое слагаемое  $I(G)$  — это интеграл по пространству конечной размерности, зависящий от ковариации  $C$  меры  $d\varphi$ . Оценки таких интегралов получаются с помощью неравенства Гельдера и оценок для  $C$  типа

$$C(x - y) \equiv \text{ядро}(-\Delta + m^2)^{-1} \in L_p(x - y),$$

которые существенно зависят от размерности  $d$  пространства-времени. В этой главе мы рассматриваем случай  $d = 2$  (случай  $d = 1$  содержится в нем как частный случай). При  $d = 2$  перенормировки в квантовой теории поля достаточно просты. В частности, для модели  $P(\varphi)_2$  перенормировки ограничиваются вычитанием, связанным с виковым упорядочением. Мы покажем, что это бесконечное вычитание приводит к определенному ответу. Так, например, в конечном объеме  $\Lambda$  определен интеграл

$$V = \int_{\Lambda} : P(\varphi(x)) : dx \in L_2(d\varphi),$$

в то время как  $\int_{\Lambda} \varphi(x)^2 dx$  обращается в бесконечность для почти всех  $\varphi \in \mathcal{D}'$ . Далее мы будем рассматривать только ограниченные снизу полиномы  $P$ . Хотя при этом интеграл  $\int : P(\varphi)(x) : dx$  не ограничен снизу (в силу викова упорядочения), он, тем не менее, полуограничен всюду, за исключением множества малой меры. Этот факт позволяет показать, что  $e^{-V} \in L_p(d\varphi)$  для всех  $p < \infty$ .

## 8.2 Диаграммы Фейнмана

Диаграммы (или графы) Фейнмана — это мнемонический прием, позволяющий сводить гауссовы функциональные интегралы к конечномерным интегралам. Они получаются в результате применения формулы интегрирования по частям из § 6.3:

$$\int \varphi(f) A(\varphi) d\varphi_C = \int \langle Cf, \delta A / \delta \varphi \rangle d\varphi_C. \quad (8.2.1)$$

После многократного интегрирования по частям интеграл  $\int A d\varphi_C$  от полинома  $A(\varphi)$  сводится к сумме конечномерных интегралов

$$\int A d\varphi_C = \sum_{\{G\}} I(G), \quad (8.2.2)$$

где  $G$  пробегает множество диаграмм,  $I(G)$  — величины, выражаемые в виде некоторых конечномерных интегралов, приписываемых диаграммам  $G$ , а  $C$  обозначает ковариацию гауссовой меры. (Некоторые авторы определяют диаграммы как классы эквивалентных графов, мы же не делаем различия между словами «диаграмма» и «граф».)

Простейший пример, на который будут опираться наши дальнейшие примеры — это интеграл от произведения  $A(\varphi) = \varphi(f_1)\varphi(f_2) \dots \varphi(f_r)$ . Интеграл  $\int A d\varphi_C$  есть не что иное, как момент меры  $d\varphi_C$ . В частности, положим

$$(f, g)_C = \int f(x) C(x, y) g(y) dx dy. \quad (8.2.3)$$

Тогда  $\int \varphi(f_1) \dots \varphi(f_r) d\varphi_C = 0$  при нечетном  $r$ , а при четном  $r$

$$\begin{aligned} \int A(\varphi) d\varphi_C &= \int \varphi(f_1) \dots \varphi(f_r) d\varphi_C = \\ &= \sum (f_{i_1}, f_{i_2})_C \dots (f_{i_{r-1}}, f_{i_r})_C, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

где суммирование идет по всем  $(r-1)(r-3)(r-5) \dots 1 = (r-1)!!$  различным способам разбиения  $r$  элементов на пары  $\{f_{i_j}, f_{i_{j+1}}\}$ .

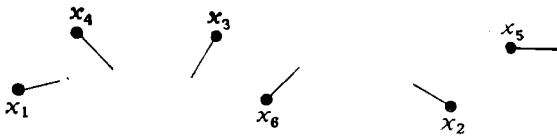
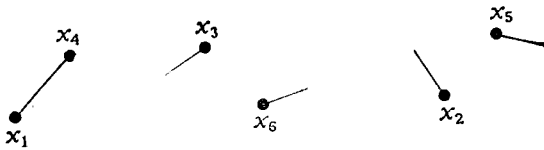
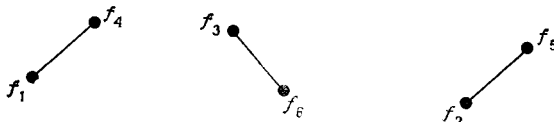
Каждому слагаемому суммы (8.2.4) сопоставим некоторую диаграмму Фейнмана  $G$ , а величину  $I(G)$  положим равной самому этому слагаемому. В общем случае мы сформулируем совокупность правил, по которым каждой диаграмме сопоставляется некоторый конечномерный интеграл, а также другой набор правил, сопоставляющий интегралам вида  $\int A(\varphi) d\varphi_C$  определенные диаграммы.

Под диаграммой понимается набор вершин (представленных точками в пространстве  $R^d$ ), ребер (представленных отрезками, соединяющими две вершины) и отростков (представленных отрезками, у которых лишь один конец совпадает с некоторой вершиной, а второй свободен). Каждый отросток отвечает множителю  $\varphi(x)$  в подынтегральном выражении, а вершина, из которой он выходит, отвечает аргументу  $x$  этого множителя. Формулу интегрирования по частям (8.2.1) можно интерпретировать на языке диаграмм как спаривание (соединение) двух отростков и образование ребра, которое вносит в подынтегральное выражение для  $I(G)$  пропагатор  $C(x, y)$ .

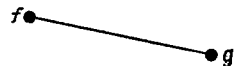
Преимущество диаграммной техники состоит в том, что она позволяет сразу проверить, нет ли среди слагаемых  $I(G)$  в сумме (8.2.2) расходящихся интегралов. Как мы увидим в § 8.3, при  $d=2$  виково упорядочение приводит к тому, что такие бесконечные члены не входят в сумму (8.2.2).

В качестве примера рассмотрим вычисление интеграла

$$\int \varphi(x_1) \dots \varphi(x_6) d\varphi_C. \quad (8.2.5)$$

Рис. 8.1. Диаграмма для монома  $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_6)$ .Рис. 8.2. Вид подынтегрального выражения после того, как член  $\varphi(x_4)$  проинтегрирован по частям: одна из пяти возможных диаграмм.Рис. 8.3. Фейнмановская диаграмма, дающая вклад в интеграл  $\int \varphi(f_1) \dots \varphi(f_6) d\varphi_C$ .

Здесь мы взяли предельный случай  $f_i = \delta_{x_i}$ . Подынтегральному выражению сопоставим граф, в котором каждой точке  $x_i$  отвечает вершина, а каждой вершине — отросток, обозначаемый  $\delta_{x_i}$  (рис. 8.1). Интеграл  $\int A d\varphi_C$  выражается в виде суммы по диаграммам без свободных отростков (которым соответствует функция на пространстве  $\mathcal{D}'$ , равная константе). Соответствующие 15 диаграмм (в случае интеграла (8.2.5)) можно получить, соединяя между собой всевозможными способами отростки, изображенные на рис. 8.1. В частности, если мы с помощью формулы (8.2.1) проинтегрируем (8.2.5) по частям, выделив сомножитель  $\varphi(x_4)$ , то получим в правой части (8.2.4) сумму по тем диаграммам, у которых отросток  $x_4$  спарен с одним из остальных пяти отростков (рис. 8.2). Диаграмма, изображенная на рис. 8.2, соответствует подынтегральному выражению  $C(x_1, x_4)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_5)\varphi(x_6)$ . После трех последовательных интегрирований по частям интеграл от произведения  $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_6)$  сведется к сумме, каждому слагаемому которой отвечает некоторая диаграмма (рис. 8.3). Диаграмму без отростков мы будем называть полностью спаренной. Мы можем снова вернуться к мно-

Рис. 8.4. Простейший граф для  $\int \varphi(f)\varphi(g)d\varphi_C$ .

жителям  $f(x_1) \dots f(x_6)$ , и тогда интеграл  $\int \varphi(f_1) \dots \varphi(f_6) d\varphi_C$  представится как сумма величин  $I(G)$ . Диаграмма, изображенная на рис. 8.4, отвечает величине  $I(G) = (f, g)_C = \int f(x) C(x, y) \times \times g(y) dx dy$ . Полностью спаренному графу  $G$ , состоящему из связанных компонент  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ , соответствует величина

$$I(G) = I(G_1) I(G_2) \dots I(G_k) = \prod_{\substack{\text{Связные} \\ \text{компоненты}}} I(G_j). \quad (8.2.6)$$

Пусть  $G$  — граф с ребрами  $l$ , соединяющими точки пространства-времени  $x_{l_1}, x_{l_2}$ . Кроме того, пусть  $l_j$  — вершина графа  $G$ , соответствующая точке  $x_{l_j}$ . Вклад такого графа  $G$  запишется в виде

$$I(G) = \int \left( \prod_{\substack{\text{Ребра} \\ l \text{ в } G}} C(x_{l_1}, x_{l_2}) \right) \prod_{\substack{\text{Вершины} \\ l_j \text{ в } G}} (f_j(x_{l_j}) dx_{l_j}). \quad (8.2.7)$$

### 8.3 Виковы произведения

Гораздо важнее уметь интегрировать более сложные функции, и особенно виковы мономы и их произведения. Пусть

$$\begin{aligned} : \varphi^n(f) :_C &= \int : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) :_C f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ \text{и } A(\varphi) &= \prod_{i=1}^r : \varphi^{n_i}(f_i) :_{C_i}. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Здесь  $: :_C$  обозначает виково упорядочение, соответствующее гауссовой мере с ковариационным оператором  $C$  (§ 6.3). Введем обозначения

$$\delta C_i(x, y) = C(x, y) - C_i(x, y), \quad \delta c_i(x) = \delta C_i(x, x). \quad (8.3.2)$$

При выводе правил вычисления интеграла  $\int A(\varphi) d\varphi_C$  удобно пользоваться диаграммами, в которых член  $: \varphi^n(f) :_C$  представлен единственной вершиной (помеченной символом  $f$  или  $(x_1, \dots, x_n)$ ) с  $n$  свободными отростками, обозначенными  $x_1, \dots, x_n$ . В качестве примера рассмотрим полином  $A(\varphi)$  вида (8.3.1), у которого  $r = 3$ ,  $n_1 = n_2 = 4$ ,  $n_3 = 2$ . Ему соответствует граф, изображенный на рис. 8.5, а сам интеграл  $\int A d\varphi_C$  отвечает, как и выше, сумме по графам, полученным спариванием отростков графа для  $A$  всеми возможными способами. (В этом примере будет  $9!!$  таких графов.)

Мы должны различать два типа ребер в диаграммах, дающих вклад в интеграл  $\int A d\varphi_C$ , а именно петли («самодействующие» ребра), полученные соединением двух отростков, выходящих из

одной вершины, и «взаимодействующие» ребра, полученные соединением двух отростков, выходящих из разных вершин. Множества петель и взаимодействующих ребер в диаграмме  $G$  обозначаются соответственно  $\mathcal{L}_s, \mathcal{L}_i$ . На рис. 8.6(а—с) показаны три возможные

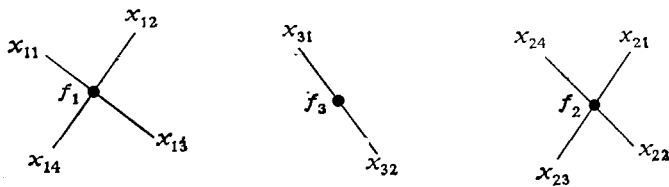


Рис. 8.5. Диаграмма для  $A = : \varphi^4(f_1) :_{C_1} : \varphi^4(f_2) :_{C_2 C_3} : \varphi^2(f_3) :_{C_4}$ .

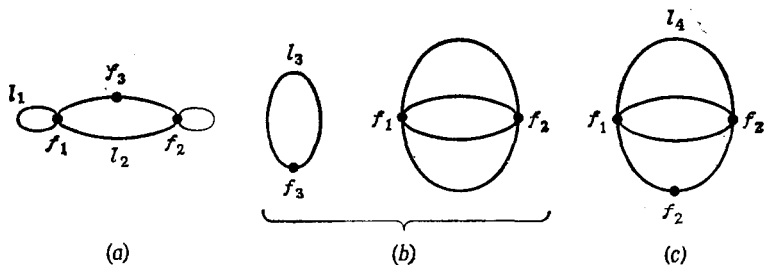


Рис. 8.6. Три диаграммы (а), (b), (с), дающие вклад в интеграл рис. 8.5. Диаграмма (b) несвязна. Ребра  $l_1$  и  $l_3$  отвечают самодействию, а  $l_2, l_4$  — взаимодействию. Диаграмма (с) не имеет петель.

диаграммы, дающие вклад в интеграл от полинома  $A$ , графически изображенного на рис. 8.5. Общая формула для вычисления интеграла  $\int A d\varphi_C$  дана в следующем предложении.

**Предложение 8.3.1.** Для интеграла от полинома  $A(\varphi)$  вида (8.3.1) справедливо представление

$$\int A(\varphi) d\varphi_C = \sum_{\{G\}} I(G), \quad (8.3.3)$$

где суммирование распространено на все  $\left(\prod_{i=1}^r n_i - 1\right)!!$  полностью спаренных графов с  $r$  вершинами и  $n_i$  отростками в  $i$ -й вершине. При этом

$$I(G) = \int \left( \prod_{l \in \mathcal{L}_i} C(x_{l_1}, x_{l_2}) \right) \left( \prod_{l \in \mathcal{L}_s} \delta C_{l_1}(x_{l_1}, x_{l_2}) \right) \times \\ \times \prod_{i=1}^r f_i(x_{i1}, \dots, x_{in_i}) \prod_{j=1}^{n_i} dx_{ij}. \quad (8.3.4)$$

**Замечание 1.** В формуле (8.3.3) отростки диаграммы  $G \in \mathcal{G}$  считаются перенумерованными. Это естественно, поскольку никаких свойств симметрии у функций  $f_i(x_{ij})$  не предполагается. Если же некоторые из функций  $f_i$  (или все они) симметричны при перестановке своих  $n_i$  аргументов, то равенство (8.3.3) можно переписать в виде

$$\int A(\varphi) d\varphi_C = \sum_{\{G\}'} I(G) c(G), \quad (8.3.3')$$

где  $\{G\}'$  — класс эквивалентных графов (дающих одинаковое значение для величины  $I(G)$ , поскольку они различаются только нумерацией отростков, выходящих из одной вершины), а  $c(G)$  — число эквивалентных графов (с перенумерованными отростками).

*Доказательство.* Воспользуемся рекуррентным соотношением (восходящим к Эрмиту)

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : C_i = & \varphi(x_1) : \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) : C_i - \\ & - \sum_{j=2}^n C_i(x_1, x_j) : \varphi(x_2) \dots \widehat{\varphi(x_j)} \dots \varphi(x_n) : C_i, \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

где сомножитель под крышкой опущен в произведении (см. (9.1.7—8)). Нам понадобится также тождество (см. (9.1.6))

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} : \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) : C_i = \sum_{j=2}^n \delta(y - x_j) : \varphi(x_2) \dots \widehat{\varphi(x_j)} \dots \varphi(x_n) : C_i. \quad (8.3.6)$$

Применяя формулы (8.3.5—6) и (8.2.1), можно путем интегрирования по частям исключить из интеграла

$$\int : \varphi(x_{11}) \dots \varphi(x_{1n_1}) : C_1 B(\varphi) d\varphi_C$$

сомножитель  $\varphi(x_{11})$ . При этом в подынтегральном выражении появится член с производной  $\delta/\delta\varphi$ , примененной к произведению  $: \varphi(x_{12}) \dots \varphi(x_{1n_1}) : C_1 B(\varphi)$ . Производная  $\delta B/\delta\varphi$ , как видно из формулы интегрирования по частям, породит взаимодействующее ребро в  $G$  и ковариацию  $C$  гауссовой меры. Производная выражения  $: \varphi(x_{12}) \dots \varphi(x_{1n_1}) : C_1$  вместе со вторым членом в правой части (8.3.5) породит петлю в графе  $G$  и ковариацию  $\delta C_1$ . Повторяя эту процедуру до тех пор, пока не останется ни одного  $\varphi$ , придем к формулам (8.3.3—5). ■

**Замечание 2.** Если  $C_1 = \dots = C_r = C$ , то  $\delta C_i = 0$  для всех  $i$ . В этом случае пропадают все петли и мы получаем

**Следствие 8.3.2.** Пусть

$$A(\varphi) = \prod_{i=1}^r : \varphi^{n_i}(f_i) : C. \quad (8.3.7)$$

Тогда

$$\int A d\varphi_C = \sum_{\{G\}} I(G), \quad (8.3.8)$$



где суммирование происходит по всем графам без петель, и

$$I(G) = \int \left( \prod_{l \in \mathcal{L}_i = \mathcal{L}} C(x_{l_1}, x_{l_2}) \right) \prod_{i=1}^r f_i(x_{i1}, \dots, x_{in_i}) \prod_{i=1}^{n_i} dx_{ij}. \quad (8.3.9)$$

**Замечание 3.** В предельном случае (который обоснован в § 8.5) функций вида

$$f_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir}) = \int f_i(x) \delta(x - x_{i1}) \dots \delta(x - x_{ir}) dx \quad (8.3.10)$$

рассматриваются мономы Вика

$$:\varphi^{n_i}(f_i):_{c_i} = \int :\varphi^{n_i}(x):_{c_i} f_i(x) dx \quad (8.3.11)$$

и их произведения. Для таких полиномов получаем

**Следствие 8.3.3.** Пусть

$$A(\varphi) = \sum_{i=1}^r \int :\varphi^{n_i}(x):_{c_i} f_i(x) dx. \quad (8.3.12)$$

Тогда

$$\int A(\varphi) d\varphi_C = \sum_{\{G\}} I(G), \quad (8.3.13)$$

где  $G$  пробегает то же множество графов, что и в формуле (8.3.3), а

$$I(G) = \int \prod_{l \in \mathcal{L}_i} C(x_{l_1}, x_{l_2}) \prod_{l \in \mathcal{L}_s} \delta c_l(x_{l_1}) \prod_{i=1}^r f_i(x_i) dx_i. \quad (8.3.14)$$

## 8.4 Формальная теория возмущений

Интересны не только гауссовы интегралы, но и интегралы от виковых произведений  $A(\varphi)$  по мерам вида

$$d\mu = d\mu_C = (1/Z) e^{-V} d\varphi_C, \quad (8.4.1)$$

где нормирующий множитель  $Z$  выбран так, чтобы  $\int d\mu = 1$ .

В этом случае интегрирование по частям не позволяет свести интеграл от  $A(\varphi)$  к сумме конечномерных интегралов. Формула интегрирования по частям

$$\int \varphi(f) A(\varphi) d\mu = \int \left\langle C\varphi, \left( \frac{\delta A}{\delta \varphi} - A \frac{\delta V}{\delta \varphi} \right) \right\rangle d\mu \quad (8.4.2)$$

содержит дополнительный член, возникающий в результате дифференцирования экспоненты  $e^{-V}$ . Многократное применение этой формулы приводит к ряду, каждый член которого есть интеграл по мере  $d\mu$  от степеней  $V$  (точнее, степеней  $\delta V/\delta \varphi$ ). Как и в § 8.2,

представим каждый интеграл в виде суммы вкладов по диаграммам Фейнмана. Для монома  $\varphi^n$ : с диаграмма представляет собой вершину с  $n$  свободными отростками. Первому члену в правой части (8.4.2) соответствуют ребра, полученные спариванием этих отростков. Второму члену соответствует новая вершина (с одним отростком, спаренным с одним из отростков  $\varphi$ ).

Многочисленное применение формулы (8.4.2) приводит к выражению, в котором отростки соединены либо друг с другом, либо с отростком «экспоненциальной» вершины, порожденной новым множителем  $\delta V/\delta\varphi$ .

Теперь вместо функции  $V$  рассмотрим  $\lambda V$  и напомним

$$\int A(\varphi) d\mu \sim \sum a_l \lambda^l. \quad (8.4.3)$$

Поскольку мера  $d\mu$  в общем случае является сингулярным возмущением меры  $d\varphi$ , то  $\int A(\varphi) d\mu$ , вообще говоря, не аналитическая функция переменной  $\lambda$ . В таких случаях разложение (8.4.3) следует понимать как формальный степенной ряд для величины  $\int A(\varphi) d\mu$ , которая предполагается  $C^\infty$ -функцией  $\lambda$  в окрестности  $\lambda = 0$  и ее  $l$ -я производная в нуле равна  $a_l \cdot l!$ .

Теперь мы покажем, что каждый коэффициент  $a_l$  представляется в виде суммы по графам Фейнмана. А именно

$$a_l = \sum_{G \in \mathcal{G}_l} I(G), \quad (8.4.4)$$

где  $\mathcal{G}_l$  — множество полностью спаренных графов с перенумерованными отростками (т. е. диаграмм, у которых есть вершины и ребра, но нет свободных отростков). По определению каждый граф  $G \in \mathcal{G}_l$  имеет  $l$   $V$ -вершин (порожденных экспонентой) и некоторое количество вершин, порожденных подынтегральным полиномом  $A(\varphi)$ . Кроме того, каждый граф  $G \in \mathcal{G}_l$  связан в том смысле, что каждая его связная компонента содержит по крайней мере одну  $A(\varphi)$ -вершину. Совокупность  $\mathcal{G}_l$  состоит из всех таких графов, а величина  $I(G)$  задается выражением (8.3.4).

Чтобы доказать равенство (8.4.4) для некоторого  $l$ , будем интегрировать по частям, если это возможно, до тех пор, пока после  $l+1$  дифференцирований экспоненты не появится  $l+1$  сомножителей  $\lambda \delta V/\delta\varphi$ . Такие слагаемые имеют порядок  $O(\lambda^{l+1})$ , и ими можно пренебречь. Останутся члены, которые уже нельзя интегрировать по частям. Это именно те члены, в которых подынтегральный полином оказывается равным константе. Они тривиально интегрируются, так как

$$\frac{1}{Z} \int \text{const} d\mu = \frac{Z}{Z} \cdot \text{const} = \text{const}, \quad (8.4.5)$$

где константа равна  $I(G)$  для некоторого графа  $G$ . Возникающий таким образом граф  $G$  принадлежит определенному выше множеству  $\mathcal{G}_l$ .

Стандартный вывод формулы (8.4.4) исходит обычно из представления единицы  $1 = Z/Z$  по степеням  $\lambda$ , которое после сокращений несвязных вакуумных диаграмм приводит к тому же результату. Если формулу переписать в терминах диаграмм с перенумерованными отростками, то в нее войдет комбинаторный множитель  $c(G)$ , как и в (8.3.4). Заметим, что нулевой член ряда равен

$$a_0 = \int A(\varphi) d\varphi_C = (8.2.2),$$

т. е. сумме по графам Фейнмана, которые содержат только  $A(\varphi)$ -вершины.

Диаграммы обладают многими свойствами связности, полезными при описании диаграмм, дающих вклад в так называемые усеченные средние. Простейший пример — формулы (8.4.4—5). Другой пример возникает при рассмотрении усеченного среднего

$$\int AB d\mu - \int A d\mu \cdot \int B d\mu \equiv \langle AB \rangle^T \quad (8.4.6)$$

Из разложений (8.4.3—4) следует, что

$$\langle AB \rangle^T = \sum b_l \lambda^l, \quad (8.4.7)$$

где

$$b_l = \sum_{G \in \mathcal{G}_l^T} I(G). \quad (8.4.8)$$

Здесь мы обозначаем  $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_l(AB)$  множество графов, дающих вклад в интеграл  $\int AB d\mu$  в соответствии с формулами (8.4.3—4).

Множество  $\mathcal{G}_l^T \subset \mathcal{G}_l(AB)$  состоит из тех графов, которые связны в более сильном смысле, чем это определено выше, а именно: по крайней мере одна их связная компонента должна содержать вершины как из  $A$ , так и из  $B$ . Заметим, что при помощи других, более сложных свойств связности можно определить различные ядра Бете — Солпитера (см. гл. 14) и преобразования Лежандра.

## 8.5 Оценки гауссовых интегралов

В двумерном случае виковы полиномы и экспоненты принадлежат пространству  $L_p(d\varphi_C)$  для любого  $p < \infty$ . В случае размерности два (и выше) гауссова мера  $d\varphi_C$  сосредоточена на пространстве обобщенных функций, поэтому сомнительно, что можно применять поточечные операции, такие, как  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)^2$ . В самом деле,

$$\varphi(x)^2 = +\infty \text{ почти всюду по мере } d\varphi_C, \quad (8.5.1)$$

так как

$$\int_{\Lambda} : \varphi(x)^2 :_C dx \in L_2(d\varphi_C). \quad (8.5.2)$$

В силу асимптотики (7.2.5), в формуле (8.5.2) константа  $c$  викава упорядочения для  $:\varphi^2:_C$  растет логарифмически при  $d = 2$ , так как  $c = C(x, x)$ . Но формально

$$\int_{\Lambda} \varphi(x)^2 dx = \int_{\Lambda} : \varphi(x)^2 : dx + c |\Lambda|.$$

На самом деле локально интегрируемые функции из пространства  $\mathcal{D}'$  образуют подмножество нулевой меры в носителе меры  $d\varphi_C$ . Это означает, что типичные реализации для меры  $d\varphi_C$  не похожи на обычные функции. Для того чтобы вести изложение на строгом математическом уровне, введем импульсное обрезание. Как в § 7.1, возьмем функцию  $h \in C_0^\infty(R^2)$ , удовлетворяющую условиям  $h(y) \geq 0$  и  $\int h(y) dy = 1$ , и определим размазанную  $\delta$ -функцию в точке  $x \in R^2$  формулой

$$\delta_{\kappa, x}(y) = \kappa^2 h(\kappa(x - y)). \quad (8.5.3)$$

После этого определим импульсное обрезание  $\varphi_\kappa$  поля  $\varphi$  следующим образом:

$$\varphi_\kappa(x) = \varphi(\delta_{\kappa, x}) = \int \varphi(y) \delta_{\kappa, x}(y) dy. \quad (8.5.4)$$

Мономы Вика от импульсного обрезания  $\varphi_\kappa$  определяются как ортогональные полиномы относительно гауссовой меры  $d\varphi_C$ . В частности,  $n$ -я викава степень поля  $\varphi_\kappa(x)$  — это  $n$ -й полином Эрмита

$$:\varphi_\kappa(x)^n:_C = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^j n!}{(n-2j)! j! 2^j} c_\kappa(x)^j \varphi_\kappa(x)^{n-2j}, \quad (8.5.5)$$

где  $c_\kappa(x) = \langle \delta_{\kappa, x}, C \delta_{\kappa, x} \rangle$  и

$$:\varphi_\kappa^n(f):_C = \int : \varphi_\kappa(x)^n :_C f(x) dx. \quad (8.5.6)$$

Заметим, что, в силу (8.5.4), определения (8.5.5) и (6.3.9) совпадают с точностью до замены  $c = c_\kappa$ . В этом можно убедиться при помощи формул (1.5.12—16) для гармонического осциллятора. Здесь  $C$  может быть любым ковариационным оператором, принадлежащим множеству  $\mathcal{E}_m$  выпуклых комбинаций евклидовых пропагаторов  $(-\Delta_B + m_1^2)^{-1}$  с классическими граничными условиями и массой  $m \leq m_1$  (см. § 7.9).

**Предложение 8.5.1.** Пусть  $C \in \mathcal{E}_m$ , а функция  $f \in L_p(R^2)$  для некоторого  $p > 1$  имеет компактный носитель. Тогда  $:\varphi_\kappa^n(f):_C \in L_2(d\varphi_C)$

и этот функционал имеет предел в пространстве  $L_2$  при  $\kappa \rightarrow \infty$ . Пусть  $:\Phi^n(f):_C$  обозначает этот предел. Тогда для некоторого  $\delta > 0$  при  $\kappa \rightarrow \infty$  справедлива оценка

$$\|:\Phi_\kappa^n(f):_C - :\Phi^n(f):_C\|_{L_2(d\Phi_C)} \leq O(\kappa^{-\delta}). \quad (8.5.7)$$

*Доказательство.* Как и в § 8.4, представим интеграл  $\int :\Phi_\kappa^n(f):_C^2 d\Phi_C$  в виде суммы  $n!$  одинаковых фейнмановских диаграмм, показанных на рис. 8.7. Для каждой из этих диаграмм

$$I(G) = \int f(x) C_\kappa(x, y)^n f(y) dx dy, \quad (8.5.8)$$

где

$$C_\kappa(x, y) = \delta_\kappa C \delta_\kappa = \int \delta_\kappa(x - x') C(x', y') \delta_\kappa(y' - y) dx' dy'. \quad (8.5.9)$$

Пусть  $\xi$  — непрерывная функция с компактным носителем, причем  $\xi \equiv 1$  на носителе  $f$ . Обозначим интеграл (8.5.8)  $I(G, \kappa)$ . Пусть, кроме того,  $\delta C = C_{\kappa_1} - C_{\kappa_2}$ . Согласно неравенству Гёльдера и свойству (LR 2) (теорема 7.1.1), для  $\kappa = \min(\kappa_1, \kappa_2)$  и некоторого  $\delta > 0$  верно неравенство

$$\begin{aligned} |I(G, \kappa_1) - I(G, \kappa_2)| &\leq \text{const} \|f\|_{L_p}^2 \|\xi \delta C \xi\|_{L_{p'}} \leq \\ &\leq O(\kappa^{-\delta}). \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

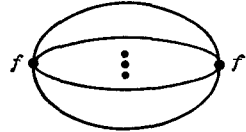


Рис. 8.7. Фейнмановская диаграмма для интеграла

$$\int_j :\Phi_\kappa^n(f):_C^2 d\Phi_C.$$

Это означает, что  $:\Phi_\kappa^n(f):_C$  сходится со скоростью  $O(\kappa^{-\delta})$  в пространстве  $L_2$ .

Теперь мы систематизируем использование неравенства Гёльдера, чтобы применить затем полученные результаты к более сложным диаграммам. Рассмотрим функцию вида

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \prod_l F_l(x_{i_1(l)}, x_{i_2(l)}), \quad (8.5.11)$$

где  $1 \leq i_1(l) < i_2(l) \leq n$  для любого  $l$ . Такая функция  $F$  соответствует диаграммам с  $n$  вершинами, помеченными индексом  $i$ , и некоторым количеством ребер  $l$ , соединяющих вершины с номерами  $i_1(l)$  и  $i_2(l)$ . Функции  $f_i$  либо представляют петли, либо являются пробными функциями, а  $F_l$  соответствуют ковариационному оператору ребра  $l$ , ограниченному на носитель функции  $f_{i_1(l)} \times f_{i_2(l)}$ . Мы будем считать, что вершины диаграммы упорядочены (при помощи индекса  $i$ ), а каждое ребро ориентировано (в направлении от  $i_2(l)$  к  $i_1(l)$ ). Пусть

$$\mathcal{L}_i^{\text{in}} = \{l: i_1(l) = i < i_2(l)\}, \quad \mathcal{L}_i^{\text{out}} = \{l: i_1(l) < i = i_2(l)\}$$

обозначают соответственно множества ребер, входящих в  $i$ -ю вершину и выходящих из нее (рис. 8.8).

**Лемма 8.5.2.** В этих обозначениях при условии, что для любого  $l$  числа  $q_l, q_l, q$  связаны соотношением

$$q_l^{-1} + \sum_{l \in \mathcal{I}_i^{\text{in}} \cup \mathcal{I}_i^{\text{out}}} q_l^{-1} = q^{-1},$$

верно неравенство

$$\|F\|_{L_q} \leq \prod_i \|f_i\|_{L_{q_i}} \prod_i \|F_i\|_{L_{q_i}}.$$

**Доказательство.** При помощи подстановки  $F \rightarrow F^q$  все сводится к случаю  $q = 1$ . Применим неравенство Гёльдера поочередно к интегралам по каждой из пере-

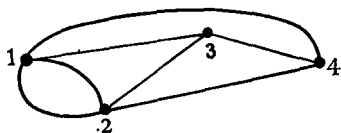


Рис. 8.8. Упорядочение вершин слева направо; in-ребра выходят из вершины вправо, а out-ребра — влево. У вершины 1 есть только in-ребра, а у вершины 4 — только out-ребра.

менных функции  $F$ , начиная с  $i = n$  и кончая  $i = 1$ . При этом  $i$ -е неравенство имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{R^2} |f_i(x_i)| \prod_{l \in \mathcal{I}_i^{\text{out}}} |F_l(x_{i_l(l)}, x_i)| \prod_{l \in \mathcal{I}_i^{\text{in}}} \|F_l(x_i, \cdot)\|_{L_{q_l}(R^2)} dx_i &\leq \\ &\leq \|f_i\|_{L_{q_i}(R^2)} \prod_{l \in \mathcal{I}_i^{\text{out}}} \|F_l(x_{i_l(l)}, \cdot)\|_{L_{q_l}(R^2)} \prod_{l \in \mathcal{I}_i^{\text{in}}} \|F_l\|_{L_{q_l}(R^2 \times R^2)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$R = \int \omega(x) \prod_{i=1}^r : \varphi(x_i)^{n_i} :_C dx, \quad x = (x_1, \dots, x_r), \quad x_i \in R^2, \quad (8.5.12)$$

и его аппроксимацию при импульсном обрезании

$$R_\kappa = \int \omega(x) \prod_{i=1}^r : \varphi_\kappa(x_i)^{n_i} :_C dx. \quad (8.5.13)$$

**Теорема 8.5.3.** Пусть функция  $\omega$  имеет компактный носитель и  $\omega \in L_p$  для некоторого  $p > 1$ . Тогда  $R_\kappa, R \in L_q(d\varphi_C)$  для любого  $q < \infty$ , причем нормы  $\|R_\kappa\|_{L_q}$  равномерно ограничены по  $\kappa$ . Более того, для некоторого  $\varepsilon > 0$  и любого целого  $j$

$$\left| \int (R - R_\kappa)^j d\varphi \right| \leq j!^{\sum n_i/2} (\text{const} \|\omega\|_{L_p} \kappa^{-\varepsilon})^j. \quad (8.5.14)$$

Здесь  $\varepsilon$  и константа в правой части не зависят ни от  $j$ , ни от оператора  $C \in \mathcal{C}_m$ ; однако эта константа пропорциональна  $(\sum n_i/2)!$  и зависит от носителя функции  $\omega$ .

**Доказательство.** В соответствии с предложением 8.3.1 разложим интегралы  $\int R^j$  в  $\int R_{\kappa}^j$  в сумму диаграмм. В этом разложении будет не более  $[(j \sum n_i) - 1]! \leq j!^{\sum n_i/2} (\text{const})^j$  диаграмм. Константа здесь пропорциональна  $(\sum n_i/2)!$ . Мы оценим вклад  $I(G)$  каждой диаграммы следующим образом. В общем случае

$$I(G) = \int \left( \prod_{k=1}^i \omega(x^k) \right) F(x^1, \dots, x^j) dx^1 \dots dx^j,$$

где  $x^k \in R^{2r}$  — набор из  $2r$  переменных. Согласно неравенству Гёльдера,  $|I(G)| \leq (\|\omega\|_{L_{p_i}})^j \|F\|_{L_{p_i}}$ , причем норму  $\|F\|_{L_{p_i}}$  можно оценить сверху с помощью леммы 8.5.2. При этом в качестве функции  $f_i$  можно выбрать характеристическую функцию проекции носителя  $\omega$  на плоскость переменной  $x_i$ . Функции  $F_i$  — это пропагаторы или разности пропагаторов (ограниченные на  $\text{supp } \omega$ ).  $L_{p_i}$ -норма функции  $F_i$  ограничена в силу предложения 7.9.1. Для  $R_{\kappa}$  все эти оценки равномерны по  $\kappa$ .

Аналогично оценим  $(R - R_{\kappa})^j$ . В этом случае каждый множитель  $R - R_{\kappa}$  можно записать в виде

$$R - R_{\kappa} = \sum_{j=1}^r \int \left( \prod_{i=1}^{j-1} : \varphi(x_i)^{n_i} :_C \right) \left( : \varphi(x_j)^{n_j} :_C - : \varphi_{\kappa}(x_j)^{n_j} :_C \right) \times \\ \times \left( \prod_{i=j+1}^r : \varphi_{\kappa}(x_i)^{n_i} :_C \right) \omega(x) dx,$$

где

$$: \varphi(x_j)^{n_j} :_C - : \varphi_{\kappa}(x_j)^{n_j} :_C = \sum_{m=1}^{n_j} : \varphi(x_j)^{m-1} \{ \varphi(x_j) - \varphi_{\kappa}(x_j) \} \varphi_{\kappa}(x_j)^{n_j-m} :.$$

Таким образом, каждый сомножитель  $R - R_{\kappa}$  добавляет к одной из функций  $F_i$  множитель  $\delta - \delta_{\kappa}$ . Поскольку к каждой из  $F_i$  можно присоединить не более двух таких множителей,  $\delta - \delta_{\kappa}$  появится по меньшей мере на  $j/2$  ребрах. По теореме 7.1.1 (см. также предложение 8.5.1)  $\|F_i\|_{L_{q_i}} \leq O(\kappa^{-\varepsilon})$  при условии, что  $F_i$  содержит множитель  $\delta C$  и имеет компактный носитель. Таким образом, мы получаем в формуле (8.5.14) множитель  $\kappa^{-\varepsilon j}$ . ■

**Следствие 8.5.4.** Пусть  $R^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, j$ , — последовательность полиномов, удовлетворяющих условиям теоремы, и пусть числа  $p_l$  отделены от 1 и для любого  $l$  справедливо неравенство  $\sum_i n_i^{(l)} \leq p$ .

Тогда при достаточно большом  $\kappa$

$$\left| \int \prod_{l=1}^j (R^{(l)} - R_{\kappa}^{(l)}) d\varphi_C \right| \leq j!^{n_j/2} \kappa^{-\varepsilon j} \prod_{l=1}^j \|\omega^{(l)}\|_{L_{p_l}}.$$

**Доказательство.** Неравенство Гёльдера дает

$$\int \prod_{l=1}^j (R^{(l)} - R_{\kappa}^{(l)}) d\varphi_C \leq \prod_{l=1}^j \|R^{(l)} - R_{\kappa}^{(l)}\|_{L_{p_l}}.$$

Применим теорему к каждому сомножителю. Константа в теореме равномерно ограничена для любого  $p$ , отделенного от 1. Выбрав достаточно большое  $n$  и чуть уменьшив  $\varepsilon$ , мы сможем заменить  $(\text{const})^j$  единицей. Это и дает требуемое неравенство. ■

В этих оценках мы не воспользовались замечательным фактом, что ядро каждой отдельной диаграммы локализовано в пространстве-времени. Для рассмотренных выше функций  $R$  вклад в интеграл дают  $O((\sum n_i/2)!)^2$  диаграмм. Но вклад большинства из них ничтожно мал в силу экспоненциального убывания ядра  $C(x, y)$  при  $|x - y| \rightarrow \infty$ . Чтобы воспользоваться этим обстоятельством, рассмотрим покрытие плоскости  $R^2$  единичными квадратами  $\Delta_i$ , помеченными точками решетки  $i \in Z^2$ . Будем считать, что носитель функции  $\omega(x)$  из (8.5.12) лежит в  $\Delta_{i_1} \times \dots \times \Delta_{i_r}$ . Пусть

$$N(\Delta) = \sum_j \{n_j: \Delta_{i_j} = \Delta\}$$

обозначает число отростков (линейных множителей  $\varphi(x)$ ) полинома  $R$ , вершины которых попали в ячейку  $\Delta$ .

**Теорема 8.5.5.** Пусть полином  $R$  определен выражением (8.5.12), причем  $\text{supp } \omega \subset \Delta_{i_1} \times \dots \times \Delta_{i_r}$  и  $n_i \leq n$ . Пусть, кроме того, выпуклое разложение оператора  $C \in \mathcal{E}_m$  не содержит ковариационных операторов с периодическими граничными условиями. Тогда

$$\left| \int R d\varphi_C \right| \leq \|\omega\|_{L_p} \prod_{\Delta} N(\Delta)! (\text{const } m^{-1/q})^{N(\Delta)},$$

где  $q = p'n$ , а  $p'$  — индекс, сопряженный к  $p$ .

*Доказательство.* Мы повторим здесь оценки теоремы 8.5.3. Напишем

$$\left| \int R d\varphi_C \right| \leq \sum |I(G)|.$$

По предложению 7.9.1

$$\|C\|_{L_q(\Delta_I \times \Delta_J)} \leq O(m^{-2/q}) e^{-m \text{dist}(\Delta_I, \Delta_J)}.$$

Отсюда, так как каждое ребро состоит из двух отростков,

$$|I(G)| \leq O\left(\prod_{\Delta} (m^{-1/q})^{N(\Delta)}\right) e^{-m \text{dist}(G)} \|\omega\|_{L_p},$$

где  $\text{dist}(G) = \sum_{i \in G} \text{dist}(\Delta_{i_1(i)}, \Delta_{i_2(i)})$ . Надо показать, что

$$\sum_G e^{-m \text{dist}(G)} \leq \prod_{\Delta} (\text{const}^{N(\Delta)} N(\Delta)!).$$

Во-первых, заметим, что для фиксированной ячейки  $\Delta$  всевозможные перестановки ее отростков приводят к различным диаграммам. Далее, если мы фиксируем какой-нибудь способ соединения отростков из разных ячеек  $\Delta$ , то каж-



дому такому способу соответствует  $\prod_{\Delta} N(\Delta)!$  диаграмм, отличающихся лишь перестановками отростков в каждой ячейке. Поэтому надо просуммировать  $\exp\{-m \text{dist}(G)\}$  только по всем этим способам. Покажем, что

$$\sum_{i_2(l)} e^{-m \text{dist}(G)} = \sum_{i_2(l)} \prod_l \exp[-m \text{dist}(\Delta_{i_1(l)}, \Delta_{i_2(l)})] \leq \prod_{\Delta} \text{const}^{N(\Delta)}.$$

Мы только увеличим сумму, если для каждого ребра будем суммировать по всем ячейкам. Следовательно, верны оценки

$$\begin{aligned} \sum_{i_2(l)} e^{-m \text{dist}(G)} &\leq \left[ \sum_{\Delta'} e^{-m \text{dist}(\Delta, \Delta')} \right]^{\text{число ребер}} \leq \\ &\leq \text{const}^{\text{число ребер}} = \prod_{\Delta} \text{const}^{N(\Delta)}. \blacksquare \end{aligned}$$

## 8.6 Негауссовы интегралы для случая $d = 2$

В этом параграфе мы установим основной результат всей главы: в двумерном случае для ограниченного снизу полинома  $P$  экспонента  $e^{-:P:}$  интегрируема. Этот результат — ключевой момент в построении модели  $P(\varphi)_2$ , поскольку соответствующая ей мера в функциональном пространстве с точностью до нормирующего множителя имеет вид  $e^{-:P:} d\varphi$ . Наш результат относится к взаимодействию  $P$ , определенному в конечном объеме, и  $:P: = \int_{\Lambda} :P(\varphi(x)):_C dx$ ,  $Z = \int e^{-:P:} d\varphi$ . В гл. 11 (а также с помощью другого метода в гл. 18) мы совершим предельный переход к бесконечному объему.

В дальнейшем нам понадобится изменять ковариацию. Для  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_m$  определим функцию  $\delta c(x) = \lim_{y \rightarrow x} [C_2(x, y) - C_1(x, y)]$ . В этих обозначениях формула викова переупорядочения выглядит так:

$$:\varphi(x)^n:_{C_1} = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j} \delta c(x)^j : \varphi(x)^{n-2j} :_{C_2}. \quad (8.6.1)$$

Обозначим  $f = \{f_0, \dots, f_n\}$  набор коэффициентов полинома  $P(\xi, f) = \sum_{j=0}^n f_j(x) \xi^j$  и положим

$$:P(\varphi, f):_C \equiv \sum_{j=0}^n : \varphi^j(f_j) :_C. \quad (8.6.2)$$

Виково переупорядочение можно рассматривать как преобразование  $T$  коэффициентов  $f$ , определяемое тождеством

$$:P(\varphi, f):_{C_1} = :P(\varphi, Tf):_{C_2}. \quad (8.6.3)$$

Поскольку мы интересуемся, главным образом, аппроксимацией трансляционно-инвариантных взаимодействий в конечном объеме, естественно было бы выбирать коэффициенты в виде  $f_j = \text{const } \chi_\Lambda$ , где  $\chi_\Lambda$  — характеристическая функция ограниченной области  $\Lambda$ . Однако при изменении ковариаций и соответствующем виговом переупорядочении этот класс коэффициентных функций оказывается слишком узким (т. е. не инвариантным относительно преобразования  $T$ ). Это видно также из определения характеристического функционала  $S\{f\}$ , приведенного в § 6.1. В самом деле, функционал  $S\{g\}$  определен при помощи возмущения  $f_1 \rightarrow f_1 + ig = f'_1$ , так что  $S\{g\} = Z\{f'\}/Z\{f\}$ . Чтобы коэффициентные функции  $f_j$  изучать более систематически, потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{supp } f_j &\subset \text{supp } f_n = \Lambda, \quad \Lambda \text{ ограничено,} \\ f_j/f_n &\in L_{n/(n-j)}, \quad 0 \leq f_n \in L_\infty, \\ 0 \leq 1/f_n &\in L_\infty(\Lambda), \quad n = \text{deg } P \text{ четно.} \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

Введем два функционала, измеряющих величину набора  $f$ :

$$N(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \|f_j/f_n\|_{L_{n/(n-j)}}^{n(n-j)}, \quad (8.6.5)$$

$$M(f) = \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{n/(n-j)}}. \quad (8.6.6)$$

**Предложение 8.6.1.** Пусть в преобразовании  $f \rightarrow Tf$  вигова переупорядочения, определяемом формулой (8.6.3), операторы  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_m^M$ . Тогда отображение  $T$  переводит класс наборов (8.6.4) в себя и, кроме того,  $(Tf)_n = f_n$ .

Пусть  $m^{-1} + (M/m) + n + |\Lambda| \leq K$ . Тогда

$$N(Tf) \leq \text{const} \cdot N(f) + \text{const}, \quad M(Tf) \leq \text{const} \cdot M(f),$$

где константы зависят только от  $K$ .

*Доказательство.* Оценку для  $\delta c(x)$  получим в два этапа. Представим операторы  $C_1, C_2$  в виде выпуклых сумм операторов  $(-\Delta_{B_j} + m_j^2)^{-1}$ . Прежде всего перейдем от граничных условий  $B_j$  в каждом операторе  $\Delta_{B_j}$  к свободным граничным условиям для оператора Лапласа  $\Delta$ . На втором шаге заменим массу  $m_j$  некоторым фиксированным значением  $\bar{m} \in [m, M]$ .

Разность  $\delta c(x)$ , возникающую на первом шаге после перехода к новым граничным условиям при фиксированной массе  $m_j \geq m$ , можно оценить при помощи логарифмических неравенств (7.6.2) и (7.6.19), используя допущения относительно объема  $|\Lambda|$  и массы  $m^{-1}$ . Получим, что  $\|\delta c(x)\|_{L_p(\Lambda)} < R$ , причем постоянная  $R$  зависит только от  $K$  и  $p < \infty$ . Теперь оценки для  $N(Tf)$  и  $M(Tf)$  вытекают из равенства (8.6.1) и неравенства Гельдера, примененного следующим образом:

$$\|(\delta c)^{l/2} h\|_{L_{n/(n-j+l)}} \leq \|\delta c\|_{L_{n/2}^{l/2}(\Lambda)} \|h\|_{L_{n/(n-j)}} \leq R(K, n)^{l/2} \|h\|_{L_{n/(n-j)}}.$$

Здесь  $h$  равно либо  $f_j$ , либо  $f_l/f_n$ ,  $l \leq j \leq n$ . Поскольку  $n$  по условию ограничено, постоянные можно выбрать зависящими только от  $K$ .

Таким образом, осталось рассмотреть, что происходит при изменении массы в свободной ковариации  $C_\emptyset$ . В этом случае  $\delta c(x) = (2\pi)^{-1} \ln(m_j/\bar{m})$ , что равномерно ограничено для всех  $\bar{m}$ ,  $m_j \in [m, M]$ , так что  $K^{-1} \leq m_j/\bar{m} \leq K$ . Теперь оценки для  $N(Tf)$  и  $M(Tf)$  при замене массы снова следуют из допущения относительно  $|\Lambda|$  и неравенства Гельдера. ■

Основным результатом этого параграфа является

**Теорема 8.6.2.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям (8.6.4), а операторы  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_m^M$ . Если  $m^{-1} + (M/m) + n + |\Lambda| \leq K$ , то

$$\int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_1}) d\varphi_{C_2} \leq \leq \text{const} \exp \left\{ \text{const} \|f_n\|_{L_\infty} [N(f) + (\ln(M(f) + 1))^{n/2}] \right\}. \quad (8.6.7)$$

Если же  $\|f_n\|_{L_\infty} + m^{-1} + (M/m) + n + |\Lambda| \leq K$ , то

$$\int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_1}) d\varphi_{C_2} \leq \exp(\text{const}(N(f) + 1)). \quad (8.6.8)$$

В обоих случаях постоянные зависят только от  $K$ .

Сначала мы рассмотрим случай  $C_1 = C_2 = C$ . Доказательство проведем в два этапа. Первым шагом будет установление полуограниченности функции  $:P(\varphi, f):_C$ . Несмотря на то что многочлен  $P(\varphi, f)$  ограничен снизу, при виковом упорядочении это свойство нарушается. Используя размазанную дельта-функцию  $\delta_x$  (7.1.5), положим

$$\varphi_x = \varphi * \delta_x. \quad (8.6.9)$$

Тогда для  $:P_x: \equiv :P(\varphi_x, f):_C$  имеется зависящая от  $x$  нижняя оценка:  $-O(\ln x)^{(\deg P)/2} \leq :P_x:$ . Эта оценка составляет содержание предложения 8.6.3.

На втором шаге устанавливается, что множество конфигураций  $\varphi \in \mathcal{D}'$ , на которых значения полинома  $:P:$  меньше чем  $\inf :P_x:$ , имеет малую меру, примерно порядка  $O(e^{-x^\delta})$ , где  $\delta > 0$ . Эта оценка следует из оценок гауссовых интегралов в § 8.5 и является содержанием предложения 8.6.4.

**Предложение 8.6.3.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям (8.6.4), а оператор  $C \in \mathcal{C}_m$ . Тогда при  $x \geq 2$

$$-\text{const} \left[ \|f_n\|_{L_1} (\ln x)^{(\deg P)/2} + \|f_n\|_{L_\infty} N(f) \right] \leq :P(\varphi_x, f):_C. \quad (8.6.10)$$

Константа в этом неравенстве зависит только от массы  $m$  и степени  $n = \deg P$ .

**Замечание.** Чтобы проиллюстрировать идею доказательства, рассмотрим моном  $P$  степени  $n = 4$ , т. е. возьмем  $f_0 = \dots = f_3 = 0$ .

Заметим, что, в силу (8.5.5),

$$\begin{aligned} : \varphi_{\kappa}(x)^4 : &= \varphi_{\kappa}(x)^4 - 6c_{\kappa}(x)\varphi_{\kappa}(x)^2 + 3c_{\kappa}(x)^2 = \\ &= (\varphi_{\kappa}(x)^2 - 3c_{\kappa}(x))^2 - 6c_{\kappa}(x)^2. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 7.1.1 последнее выражение ограничено снизу величиной  $-6c_{\kappa}(x)^2 = -O(\ln \kappa)^2$ . Интегрирование этой оценки дает неравенство (8.6.10).

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством Гёльдера для интегралов по мере  $f_n(x)dx$ . Пусть  $p_1^{-1} = 0$ ,  $p_2^{-1} = (j-2l)/n$ ,  $p_3^{-1} = (n-j)/n$ ,  $p_4^{-1} = 2l/4$ , так что  $\sum p_v^{-1} = 1$ . Оценим все члены со степенями  $\varphi^m$ ,  $m < n$ , старшим членом  $\varphi^n$  полинома  $P$ :

$$\begin{aligned} \left| \int c_{\kappa}^l(x) \varphi_{\kappa}^{j-2l} f_j(x) dx \right| &= \left| \int [c_{\kappa}^l(x)] [\varphi_{\kappa}(x)^{j-2l}] [f_j/f_n](x) f_n(x) dx \right| \leq \\ &\leq \|c_{\kappa}\|_{L_{\infty}}^l \left( \int \varphi_{\kappa}(x)^n f_n(x) dx \right)^{(j-2l)/n} \left( \int |f_j/f_n|^{n/(n-l)} f_n dx \right)^{(n-l)/n} \|f_n\|_{L_1}^{2l/n}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства в силу оценки  $ab \leq a^p + b^q$ ,  $a, b \geq 0$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , не превосходит

$$\begin{aligned} \varepsilon \int \varphi_{\kappa}(x)^n f_n(x) dx + a(\varepsilon) \|c_{\kappa}\|_{L_{\infty}}^{n/2} \|f_n\|_{L_1} + \int |f_j/f_n|^{n/(n-l)} f_n dx \leq \\ \leq \varepsilon \int \varphi_{\kappa}(x)^n f_n(x) dx + a(\varepsilon) \|c_{\kappa}\|_{L_{\infty}}^{n/2} \|f_n\|_{L_1} + \|f_j/f_n\|_{L_{n/(n-l)}}^{n/(n-l)} \|f_n\|_{L_{\infty}}. \end{aligned}$$

Более того, если левую часть неравенства умножить на комбинаторный множитель  $[j/2]j!/((j-2l)!2^l)$ , то верна та же оценка с другой константой  $a = a(\varepsilon, n)$ . Фигурирующее в этой оценке  $\varepsilon$  произвольно, но положительно. Выберем  $\varepsilon$  малым и обозначим  $\mathcal{N}$  общее число членов. Тогда, если  $1 - \mathcal{N}\varepsilon > 0$ , то, просуммировав по  $j$  и  $l$  и воспользовавшись разложением (8.5.5), получим неравенство (8.6.10). Оценка  $\|c_{\kappa}\|_{L_{\infty}} \leq O(\ln \kappa)$  следует из свойства (LR3) (теорема 7.1.1). ■

Перейдем ко второму этапу доказательства интегрируемости экспоненты  $e^{-P}$ , а именно покажем, что высокоэнергетическая часть  $\delta P$  полинома  $P$  принимает большие значения только на небольшом множестве конфигураций поля. Чтобы придать этому утверждению точный смысл, определим

$$\delta P_{\kappa} \equiv :P(\varphi, f):_c - :P(\varphi_{\kappa}, f):_c, \quad (8.6.11)$$

так что  $:P: = :P_{\kappa}: + \delta P_{\kappa}$ . Обозначим  $X(\kappa)$  множество конфигураций  $\varphi$ , для которых  $|\delta P_{\kappa}| \geq 1$ , т. е.

$$X(\kappa) = \{\varphi: |\delta P_{\kappa}| \geq 1\}.$$

**Предложение 8.6.4.** Пусть  $C \in \mathcal{C}_m$  и  $m^{-1} + n + |\Lambda| \leq K$ . Тогда существует константа  $\alpha$ , зависящая только от  $K$ , такая, что при  $\kappa > 2$

$$\int_{X(\kappa)} d\varphi_C \leq \exp[-\alpha(\kappa^{\varepsilon}/M(f))^{2/\deg P}], \quad (8.6.12)$$

где  $\varepsilon$  — константа из теоремы 8.5.3.

*Доказательство.* Так как  $|\delta P_{\kappa}| \geq 1$  на множестве  $X(\kappa)$ , то для любого четного  $j$  верно неравенство

$$\int_{X(\kappa)} d\varphi_C \leq \int_{\mathcal{F}'} (\delta P_{\kappa})^j d\varphi_C.$$

Имеем  $\delta P_{\kappa} = \sum_{l=1}^n :(\varphi^l - \varphi_{\kappa}^l):_C(f_l)$ . Заметим, что член с индексом  $l = 0$  отсутствует. Таким образом,  $\delta P_{\kappa}^j$  есть сумма не более чем  $n^j$  мономов, каждый из которых имеет вид  $\prod_{i=1}^j (R^{(i)} - R_{\kappa}^{(i)})$ , где  $R^{(i)} = : \varphi^{m_i} (f_{m_i}) :_C$  и  $1 \leq m_i \leq n$ . Применяя следствие 8.5.4 при  $r = 1$ ,  $\sum n_i = m_i \leq n$  и  $p_i = p_{m_i} = n/(n - m_i)$ , получаем, что все такие мономы ограничены. Далее,  $\| \omega^{(j)} \|_{L_{p_i}} = \| f_{m_i} \|_{L_{p_i}} \leq M(f)$ . В результате этих оценок получим, что

$$\int_{X(\kappa)} d\varphi_C \leq (j!)^{n/2} (\text{const } M(f) \kappa^{-\varepsilon})^j, \quad (8.6.13)$$

где константа зависит только от  $K$ . Правая часть этого неравенства примет наименьшее значение, если в качестве  $j$  взять наибольшее четное число, меньшее  $(\kappa^{\varepsilon}/\text{const } M(f))^{2/n}$  (константа та же, что и в (8.6.13)). После этого применение формулы Стирлинга приводит к неравенству (8.6.12). ■

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее элементарное тождество.

**Лемма 8.6.5.** Пусть  $\{X, d\mu\}$  — вероятностное пространство и  $g(\varphi) \in \in L_p(X, d\mu)$  — определенная на нем функция. Обозначим

$$h(a) \equiv \mu\{\varphi: a \leq |g(\varphi)|\}. \quad (8.6.14)$$

Тогда

$$\int |g|^p d\mu = p \int_0^{\infty} a^{p-1} h(a) da. \quad (8.6.15)$$

*Доказательство.* Формула (8.6.15) получается из равенства  $\int |g|^p d\mu = - \int_0^{\infty} a^p dh(a)$  при помощи интегрирования по частям.

Применим тождество (8.6.15) в частном случае  $p = 1$ . Для доказательства того, что  $g \in L_1(d\mu)$ , достаточно показать, что функция  $h(a)$  интегрируема на бесконечности. Пусть, далее,  $a(\kappa)$  — непрерывно дифференцируемая монотонно возрастающая функция и  $a(\kappa) \rightarrow \infty$  при  $\kappa \rightarrow \infty$ ; тогда, если функция  $h(a(\kappa)) da(\kappa)/d\kappa$  интегрируема по  $\kappa$  на бесконечности, то  $g \in L_1(d\mu)$ . Предположим,

что  $da(\kappa)/d\kappa \leq a(\kappa)^2$ . Тогда для  $e \leq \kappa_0 \leq \kappa$  справедливо неравенство

$$\int |g| d\mu \leq a(\kappa_0) + \sup_{\kappa \geq \kappa_0} \kappa^2 (a(\kappa)^2 h(a(\kappa))). \quad (8.6.16)$$

*Доказательство теоремы 8.6.2.* В качестве функции  $g(\varphi)$  возьмем  $\exp[-:P(\varphi, f):_C]$ , а функцию  $a(\kappa)$  выберем в виде экспоненты от выражения, стоящего в левой части оценки (8.6.10), т. е.

$$a(\kappa) \equiv \exp \left\{ 1 + \text{const} \left[ \|f_n\|_{L_1} (\ln \kappa)^{(\deg P)/2} + \|f_n\|_{L_\infty} N(f) \right] \right\}.$$

При таком определении  $da(\kappa)/d\kappa \leq a(\kappa)^2$ . Разложим экспоненту:  $e^{-:P:} = e^{-:P:\kappa} \cdot e^{-\delta P \kappa}$ . По предложению 8.6.3

$$h(a(\kappa)) \leq \int_{X(\kappa)} d\varphi_C \leq \exp \left[ -\alpha (\kappa^e/M(f))^{2/\deg P} \right],$$

причем второе неравенство следует из предложения 8.6.4. Итак,

$$\ln \{ \kappa^2 a(\kappa)^2 h(a(\kappa)) \} \leq \text{const} \left\{ \ln \kappa + \|f_n\|_{L_\infty} \left( (\ln \kappa)^{n/2} + N(f) \right) - (\kappa^e/M(f))^{2/n} \right\} + \text{const}. \quad (8.6.17)$$

Предположим, что правая часть этого неравенства не превосходит

$$\text{const} \|f_n\|_{L_\infty} \left[ N(f) + \{ \ln(1 + M(f)) \}^{n/2} \right] + \text{const}. \quad (8.6.18)$$

Отсюда следует неравенство (8.6.7). Более того, так как

$$M(f) \leq \|f_n\|_{L_\infty} (N(f) + n), \quad (8.6.19)$$

то верно и второе утверждение теоремы.

Теперь займемся доказательством оценки (8.6.18). Выберем  $\kappa_0$  настолько большим, чтобы из  $\kappa_0 \leq \kappa$  следовало  $1 \leq (\ln \kappa)^{n^2} \leq \kappa^e$ .

*Случай 1:*  $\kappa^e \leq (1 + M(f))^{n+1}$ . Отбросим отрицательные члены в правой части (8.6.17). Заметим, что  $\|f_n\|_{L_\infty} \leq M(f)$ . Следовательно,

$$\|f_n\|_{L_\infty} \leq \text{const} \left[ 1 + \|f_n\|_{L_\infty} \{ \ln(1 + M(f)) \}^{n/2} \right]. \quad (8.6.20)$$

Используя оценки (8.6.19—20), получим, что

$$\begin{aligned} \ln \kappa &\leq (n+1) e^{-1} \ln(1 + M(f)) \leq \text{const} M(f) \leq \text{const} \|f_n\|_{L_\infty} (N(f) + n) \leq \\ &\leq \text{const} \|f_n\|_{L_\infty} \left[ N(f) + \{ \ln(1 + M(f)) \}^{n/2} \right] + \text{const}. \end{aligned} \quad (8.6.21)$$

Более того, в силу нашего предположения,

$$\|f_n\|_{L_\infty} (\ln \kappa)^{n/2} \leq \text{const} \|f_n\|_{L_\infty} \{ \ln(1 + M(f)) \}^{n/2}. \quad (8.6.22)$$

Неравенства (8.6.21—22) в совокупности дают требуемую оценку (8.6.18).

*Случай 2:*  $\kappa^e > (1 + M(f))^{n+1}$ . В этом случае

$$\kappa^e = \kappa^{3e/4} \kappa^{e/4} \geq (1 + M(f))^{3(n+1)/4} (\ln \kappa)^{n^2/4}.$$

В силу элементарного неравенства  $\{(3(n+1)/4) - 1\} (2/n) = 1 + \frac{1}{2}(1 - n^{-1}) \geq 1$  и оценки  $M(f) \geq \|f_n\|_{L_\infty}$ , получаем, что

$$(\kappa^e/M(f))^{2/n} \geq (1 + M(f)) (\ln \kappa)^{n/2} \geq \ln \kappa + \|f_n\|_{L_\infty} (\ln \kappa)^{n/2}.$$

Поэтому выражение (8.6.17) ограничено сверху величиной  $\text{const} \|f_n\|_{L_\infty} N(f)$ , и тем самым оценка (8.6.18) доказана.

Этим завершается доказательство теоремы в частном случае  $C_1 = C_2$ , к которому мы сведем сейчас общий случай. Достаточно установить оценку (8.6.7). Пусть  $:P(\varphi, f):_{C_1} = :P(\varphi, Tf):_{C_2}$ . Воспользуемся доказанной уже в частном случае оценкой (8.6.7), в которой набор  $f$  заменен на  $Tf$ . С помощью предложения 8.6.1 и неравенства (8.6.20) получим, что

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L_\infty} [N(Tf) + \{\ln(1 + M(Tf))\}^{n/2}] &\leq \\ &\leq \text{const} \|f_n\|_{L_\infty} [N(f) + \{\ln(1 + M(f))\}^{n/2}] + \text{const}. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает оценка (8.6.7). ■

**Замечание 1.** Из доказательства теоремы 8.6.2 можно извлечь еще одну оценку, которая пригодится нам при изучении фазовых переходов в гл. 16. Пусть  $m^{-1} + (M/m) + n + |\Lambda| \leq K$  и существуют функция  $L(f)$  и постоянная, зависящая только от  $K$ , такие, что

$$-\text{const} [(1 + M(f)) (\ln \kappa)^{n/2} + L(f)] \leq :P(\varphi_\kappa, f):_{C_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_1}) d\varphi_{C_2} &\leq \\ &\leq \text{const} \exp\{\text{const} [L(f) + \{1 + M(f)\} \{\ln(1 + M(f))\}^{n/2}]\}, \end{aligned} \quad (8.6.23)$$

причем константы здесь также зависят только от  $K$ .

**Замечание 2.** При помощи масштабных преобразований из доказанных неравенств можно получить еще один результат. Для произвольного  $\alpha > 0$  рассмотрим преобразование массы  $m \rightarrow m/\alpha$  и расстояния  $x \rightarrow \alpha x$ . Пусть  $C_B(m) = (-\Delta_B + m^2)^{-1}$ , где  $B$  обозначает какие-нибудь классические граничные условия на множестве  $\Gamma$ . Определим масштабный ковариационный оператор  $C_{\alpha B}(\alpha m) = (-\Delta_{\alpha B} + (m/\alpha)^2)^{-1}$ , где  $\Delta_{\alpha B}$  обозначает оператор  $\Delta$  с аналогичными граничными условиями на множестве  $\alpha\Gamma$ , т. е. на множестве точек  $\alpha x$ ,  $x \in \Gamma$ . В случае  $d = 2$

$$C_B(m; x, y) = C_{\alpha B}(m/\alpha; \alpha x, \alpha y), \quad (8.6.24)$$

подобно формуле (7.2.2) для свободной ковариации.

Определим масштабное преобразование  $R_\alpha$  (для  $d = 2$ ) равенствами

$$R_\alpha C_B(m) = C_{\alpha B}(m/\alpha) \quad \text{и} \quad (R_\alpha f)_j(x) = \alpha^{-2} f_j(x/\alpha). \quad (8.6.25)$$

При этих обозначениях верно следующее так называемое масштабное тождество:

$$\int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_1}) d\varphi_{C_2} = \int \exp(-:P(\varphi, R_\alpha f):_{R_\alpha C_1}) d\varphi_{R_\alpha C_2}. \quad (8.6.26)$$

В гауссовом случае (т. е. когда  $P$  — линейная функция) оно следует из свойств (8.6.24—25) и определения гауссова интеграла. В общем случае оно получается с помощью гауссова тождества и определения (8.5.5) викового упорядочения.

## 8.7 Конечномерная аппроксимация

Для доказательства некоторых тождеств гл. 9, связанных с интегрированием по частям, нам понадобится аппроксимация экспоненты  $e^{-:P(\varphi, f):}$  функцией, зависящей лишь от конечного числа переменных. Существенным шагом при этом является конструкция из § 8.6, где функция  $e^{-:P(\varphi, f):}$  аппроксимирована экспонентой  $e^{-:P(\varphi_\kappa, f):}$ . Далее мы приблизим набор функций  $f$  функциями класса  $C_0^\infty$ , а затем аппроксимируем риманов интеграл в определении  $:P(\varphi_\kappa, f):$  римановой интегральной суммой. Другую конечномерную аппроксимацию, основанную на разностной (решеточной) аппроксимации оператора Лапласа, мы изложим в § 9.5—6. Переход к разностному оператору сохраняет ферромагнитное свойство оператора Лапласа, а оно очень полезно при доказательстве корреляционных неравенств.

Пусть  $\chi_\Lambda$  — характеристическая функция множества  $\Lambda = \text{supp } f_n$ ; положим

$$f_{j, \lambda} = \chi_\Lambda (f_j * \delta_\lambda), \quad f_\lambda = \{f_{j, \lambda}: j = 0, \dots, n\}, \quad (8.7.1)$$

где  $\delta_\lambda$  определено формулой (7.1.5). Тогда  $f_\lambda \rightarrow f$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  в пространстве  $L_p$  для некоторого  $p > 1$ , а также  $N(f_\lambda) \rightarrow N(f)$  (см. (8.6.5)). Пусть  $P^{(\delta, \lambda, \kappa)}$  — аппроксимация интеграла  $:P(\varphi_\kappa, f_\lambda):_C$  римановыми суммами, т. е.

$$P^{(\delta, \lambda, \kappa)} = \delta^2 \sum_{j=0}^n \sum_{x \in \delta Z^2} : \varphi_\kappa(x) :_C f_{j, \lambda}(x). \quad (8.7.2)$$

**Предложение 8.7.1.** Для любого  $C \in \mathcal{C}$  и любого  $1 \leq p < \infty$  существует следующий двойной предел в пространстве  $L_p(d\varphi_C)$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow \infty} P^{(\delta, \lambda, \kappa)} = :P(\varphi_\kappa, f):_C.$$

**Замечание.** Сходимость при  $\kappa \rightarrow \infty$  была установлена в теореме 8.5.3.

**Доказательство.** Пусть  $f_{\lambda, \delta}$  — семейство  $\delta$ -функций, выбранных, как в (8.7.2), так чтобы

$$P^{(\delta, \lambda, \kappa)} = :P(\varphi_\kappa, f_{\lambda, \delta}):_C.$$



Как и в доказательстве теоремы 8.5.3,  $L_p$ -сходимость полиномов  $P^{(\delta, \lambda, \kappa)}$  сводится к сходимости

$$\langle f, \lambda, \delta, C_{\kappa}^I f, \lambda, \delta \rangle \rightarrow \langle f, C_{\kappa}^I f \rangle. \quad (8.7.3)$$

Предел при  $\delta \rightarrow 0$  в соотношении (8.7.3) существует по определению интеграла Римана, а сходимость при  $\lambda \rightarrow \infty$  следует из  $L_p$ -сходимости последовательности  $\tilde{f}_i$ , так как функции  $C_{\kappa}$  и  $C_{\kappa}^I$  принадлежат пространству  $L_{\infty}$ . ■

**Предложение 8.7.2.** Для определенной выше последовательности  $P^{(\delta, \lambda, \kappa)}$  при любом  $1 \leq p < \infty$  в пространстве  $L_p(d\varphi_C)$  существуют пределы

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp(-P^{(\delta, \lambda, \kappa)}) = \exp(-:P(\varphi, f):_C). \quad (8.7.4)$$

*Доказательство.* Как следует из теоремы 8.6.2 и ее доказательства, экспонента  $\exp(-P^{(\delta, \lambda, \kappa)})$  при фиксированных  $\lambda$  и  $\kappa$  ограничена в  $L_p$  равномерно по  $\delta$ . В силу неравенства Шварца, то же самое верно и для интерполяции экспоненты

$$\exp(-P^{(t)}) = \exp[-tP^{(\delta, \lambda, \kappa)} - (1-t)P^{(0, \lambda, \kappa)}]$$

при  $0 \leq t \leq 1$ . Сходимость в пространстве  $L_p$  вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \|e^{-P^{(0)}} - e^{-P^{(1)}}\|_{L_p} &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} e^{-P^{(t)}} \right\|_{L_p} dt \leq \sup_t \left\| \frac{d}{dt} e^{-P^{(t)}} \right\|_{L_p} = \\ &= \sup_t \|(P^{(0)} - P^{(1)})e^{-P^{(t)}}\|_{L_p} \leq \|P^{(0)} - P^{(1)}\|_{L_{2p}} \sup_t \|e^{-P^{(t)}}\|_{L_{2p}}. \end{aligned}$$

В силу сделанных замечаний, второй множитель ограничен равномерно по  $\delta$ , а первый сходится по предложению 8.7.1. Пределы при  $\lambda \rightarrow \infty$  и  $\kappa \rightarrow \infty$  рассматриваются аналогично. ■

**Предложение 8.7.3.** Определим формальные производные

$$\langle v, \delta/\delta\varphi \rangle = \int v(x) (\delta/\delta\varphi)(x) dx,$$

$$\Delta_w \equiv \left\langle \frac{\delta}{\delta\varphi}, w \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle = \int w(x, y) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x) \delta\varphi(y)} dx dy,$$

действующие на полиномы  $R(\varphi)$  от  $\varphi$ . Тогда для введенных выше полиномов  $P^{(\delta, \lambda, \kappa)}$  и  $:P(\varphi, f):_C \equiv :P:$  и непрерывных функций  $v$  и  $w$  с компактными носителями существуют пределы в  $L_p$  для всех  $1 \leq p < \infty$ :

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle v, \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle P^{(\delta, \lambda, \kappa)} = \left\langle v, \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle :P:, \quad (8.7.5)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_w P^{(\delta, \lambda, \kappa)} = \Delta_w :P:. \quad (8.7.6)$$

*Доказательство* аналогично доказательству предложения 8.7.1, причем следует применить теорему 8.5.3. ■

**Замечание.** В предложениях 8.7.1 и 8.7.3  $P$  могут быть и неограниченными снизу. Кроме того, если считать в последних трех предложениях полиномы  $P$  различными, то в результате получим следующие пределы:

$$(\partial R^{(\delta, \lambda, \kappa)}) e^{-P^{(\delta, \lambda, \kappa)}} \rightarrow (\partial R) e^{-:P:},$$

где  $\partial = I$ ,  $\delta/\delta\varphi$  или  $\delta^2/\delta\varphi\delta\varphi$ .

## Глава 9

### Анализ и перенормировки в функциональном пространстве

#### 9.1 Список полезных формул

В этом параграфе мы приведем основные формулы и равенства с указанием параграфа, в котором они доказываются. Как и в § 8.5, обозначим  $R(\varphi)$  полином от  $\varphi$  или полином от  $\varphi, \dots, : \varphi(x)^j :$ . Положим

$$A(\varphi) = R(\varphi) e^{i\varphi(f)}. \quad (9.1.1)$$

(I) Равенства для полиномов Вика

Упорядочение экспоненты (§ 6.3):

$$: e^{\varphi(f)} :_C = e^{\varphi(f)} e^{-\langle f, Cf \rangle / 2}. \quad (9.1.2)$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение в вещественном пространстве  $L_2$ .

**Дифференцирование функционалов.** Производная функционала  $A(\varphi)$  на  $\mathcal{D}'(R^d)$  вдоль направления  $\psi$  определяется формулой

$$(D_\psi A)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\varphi + \varepsilon\psi) - A(\varphi)}{\varepsilon}. \quad (9.1.3)$$

Здесь  $\psi \in \mathcal{D}'$ , а производная, в зависимости от  $A(\varphi)$ , может существовать в каждой точке, или как функция из  $L_p$  относительно меры  $d\mu(\varphi)$ , и т. д. Вот два примера производных от функций вида (9.1.1):

$$D_\psi \varphi(f)^n = n\psi(f)\varphi(f)^{n-1}, \quad D_\psi e^{\varphi(f)} = \psi(f)e^{\varphi(f)}.$$

В важном частном случае, когда  $\psi = \delta_x$  есть функция Дирака в точке  $x$ , используется специальное обозначение:

$$\delta A(\varphi) / \delta\varphi(x) \equiv D_{\delta_x} A(\varphi). \quad (9.1.4a)$$

Для полиномов  $A$  с гладкими коэффициентами, т. е. для линейных комбинаций мономов вида  $\varphi(f_1) \dots \varphi(f_n)$ ,  $f_j \in \mathcal{D}$ , определение

(9.1.3) совпадает с алгебраическим определением, использованным в § 1.5 и 6.3. В случае негладких коэффициентов, например когда  $A$  в (9.1.1) содержит локальные виковы произведения  $:\varphi(x)^i$ , определение (9.1.3) следует продолжить по непрерывности. Такое продолжение зависит и от коэффициентов в  $A$ , и от меры в функциональном пространстве, относительно которой и проводится продолжение. Напомним, что  $\varphi(y)$  и  $:\varphi(y)^i$  нельзя рассматривать ни как функции на  $\mathcal{D}'$ , ни как операторы умножения. На самом деле  $\varphi(y)$  и  $:\varphi(y)^i$  являются билинейными формами с соответствующими областями определения, поэтому либо нужно понимать равенство (9.1.4а) как равенство билинейных форм, либо рассматривать  $\delta/\delta\varphi(x)$  как обобщенную функцию по переменной  $x$ , а тогда равенство (9.1.4а) приобретает смысл после интегрирования по  $x$ .

Другим примером служит

$$\delta\varphi(y)/\delta\varphi(x) = \delta(x - y). \quad (9.1.4b)$$

**Определение викова упорядочения относительно ковариации  $C$  (§ 8.5).** Пусть  $c_x = \delta_x * C * \delta_x$ . Тогда

$$:\varphi^n(x):_C = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^j n!}{(n-2j)! j! 2^j} c_x(x)^j \varphi_x(x)^{n-2j}. \quad (9.1.5)$$

**Дифференцирование виковых полиномов:**

$$\delta:A:C/\delta\varphi(x) = :\delta A/\delta\varphi(x):_C. \quad (9.1.6)$$

Пример:  $\delta:\varphi(y)^n:C/\delta\varphi(x) = n\delta(x - y):\varphi(y)^{n-1}:_C$ .

**Умножение виковых полиномов:**

$$\varphi(f):A(\varphi):_C = :\varphi(f)A:C + \langle Cf, \delta/\delta\varphi \rangle :A:C. \quad (9.1.7)$$

Пример:

$$\varphi(x):\varphi(y)^n:C = :\varphi(x)\varphi(y)^n:C + nC(x, y):\varphi^{n-1}(y):_C. \quad (9.1.8)$$

**Инфинитезимальное изменение викова упорядочения.** Пусть  $C(t)$  — семейство ковариационных операторов, гладко зависящее от  $t$ . Тогда

$$d:A:C(t)/dt = -\frac{1}{2}\Delta\dot{C}:A:C(t). \quad (9.1.9)$$

Здесь  $\dot{C} = (d/dt)C(t)$ , а

$$\Delta_C \equiv \left\langle C \frac{\delta}{\delta\varphi}, \frac{\delta}{\delta\varphi} \right\rangle \equiv \int C(x, y) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} dx dy \quad (9.1.10)$$

обозначает дифференциальный оператор второго порядка в пространстве функций  $\varphi$ , отвечающий оператору  $C$ .

Пример дифференцирования (9.1.9):

$$d:\varphi(x)^n:C(t)/dt = -\binom{n}{2}\dot{C}(x, x):\varphi(x)^{n-2}:C(t). \quad (9.1.11)$$

**Конечное изменение виково упорядочения.** Если  $C_1$  и  $C_2$  — ковариационные операторы из класса  $\mathcal{C}$  и  $\delta c(x) = \lim_{y \rightarrow x} [C_2(x, y) - C_1(x, y)]$ , то

$$:\varphi(x)^n:_{C_1} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j} \delta c(x)^j : \varphi(x)^{n-2j} :_{C_2}. \quad (9.1.12)$$

Это равенство следует из (9.1.2) и формулы (1.5.12) для полиномов Эрмита.

*Доказательство формулы (9.1.6).* Пусть  $h(\lambda, \varphi) = \exp[\lambda \varphi(f) - \frac{1}{2} \lambda^2 \langle f, Cf \rangle]$ , так что  $:\varphi(f)^n:_{C_1} = d^n h(\lambda, \varphi) / d\lambda^n |_{\lambda=0}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} : \varphi(f)^n :_{C_1} &= \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \frac{d^n}{d\lambda^n} h(\lambda, \varphi) \Big|_{\lambda=0} = \frac{d^n}{d\lambda^n} [\lambda f(x) h(\lambda, \varphi)]_{\lambda=0} = \\ &= n f(x) \left[ \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} h(\lambda, \varphi) \right]_{\lambda=0} = n f(x) : \varphi(f)^{n-1} :_{C_1} = : \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \varphi(f)^n :_{C_1}. \end{aligned}$$

Полилинейность полиномов Вика и так называемое поляризационное тождество  $x_1 \dots x_n = 2^{-n} (n!)^{-1} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n (\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)^n$  (9.1.13)

позволяют доказать (9.1.6) в случае  $A = \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n)$ . Для  $A$  вида (9.1.1) с гладкими коэффициентами у полинома  $R$  равенство можно получить, суммируя сходящийся ряд разложения экспоненты. Для доказательства формулы в случае, когда  $A$  содержит полиномы Вика из § 8.5, мы должны ограничиться лишь функциональным пространством, в котором сосредоточена мера, и распространить определение  $D_f$  на функционалы  $A(\varphi)$ .

В случае  $d = 2$  для гауссовых мер и  $P(\varphi)$ -мер в конечном объеме в гл. 8 было введено ультрафиолетовое импульсное обрезание для полиномов  $A$ . В результате получается полином с гладкими коэффициентами, для которого выполняется (9.1.6). После интегрирования по  $x$ , как в (9.1.4), в полученной формуле можно перейти к пределу при снятии обрезания (это вытекает из оценок § 8.5). Таким образом, определение  $D_f$  можно продолжить по непрерывности так, что останется справедливой формула (9.1.6).

*Доказательство формулы (9.1.7).* Для определенной выше величины  $h(\lambda, \varphi)$  находим, что

$$\langle Cf, \delta / \delta \varphi \rangle h(\lambda, \varphi) = \lambda \langle f, Cf \rangle h(\lambda, \varphi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} : \varphi(f)^n :_{C_1} &= \frac{d^n}{d\lambda^n} h(\lambda, \varphi) \Big|_{\lambda=0} = \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} [(\varphi(f) - \lambda \langle f, Cf \rangle) h(\lambda, \varphi)]_{\lambda=0} = \\ &= \varphi(f) : \varphi(f)^{n-1} :_{C_1} - \langle Cf, \delta / \delta \varphi \rangle : \varphi(f)^{n-1} :_{C_1}. \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

Применяя (9.1.13) и суммируя сходящиеся ряды для  $e^{\varphi(f)}$ , получаем (9.1.7) в случае гладких коэффициентов. Общий случай доказывается введением ультрафиолетового обрезания, а затем снятием его, как в § 8.5.

*Доказательство формулы (9.1.9).* Для  $A(\varphi) = e^{i\varphi(f)}$ , используя обозначение (9.1.10), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} : A :_{C(t)} &= \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{1}{2} \langle f, C(t) f \rangle + i\varphi(f)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \langle f, \dot{C}(t) f \rangle : A :_{C(t)} = -\frac{1}{2} \Delta_{\dot{C}} : A :_{C(t)}. \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

Для того чтобы доказать формулу для полиномов, заменим в предыдущем равенстве  $f$  на  $\lambda f$  и возьмем производную соответствующего порядка по  $\lambda$  в точке  $\lambda = 0$ . Негладкие  $A$  рассматриваются, как и раньше, с помощью ультрафиолетового обрезания. Для того чтобы намеченное здесь доказательство было корректным, достаточно предположить, что  $C(t) \in \mathcal{E}$  (см. § 7.9) и что ядро  $\dot{C}(t, x, y)$  оператора  $\dot{C}(t)$  удовлетворяет условию  $|\dot{C}(t, x, y)| \leq \text{const } C(x, y)$  для некоторого  $C \in \mathcal{E}$ . Фактически нужно рассматривать только простейший случай

$$C(t) = tC_1 + (1-t)C_2, \quad \dot{C} = \delta C = C_1 - C_2.$$

## (II) Гауссовы интегралы (§ 6.3)

**Преобразование Фурье** (Характеристическая функция. Среднее  $0$ , ковариация  $C$ ):

$$S(f) = \int e^{i\varphi(f)} d\varphi_C = e^{-\langle Cf, f \rangle/2}. \quad (9.1.16)$$

**Моменты:**

$$\int \varphi(f)^{2n+1} d\varphi_C = 0, \quad \int \varphi(f)^{2n} d\varphi_C = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle Cf, f \rangle^n. \quad (9.1.17)$$

**Скалярное произведение экспонент.** В качестве следствия из (9.1.16) и (9.1.2) получаем равенство

$$\int :e^{-i\varphi(f)}:_C :e^{i\varphi(g)}:_C d\varphi_C = e^{\langle f, Cg \rangle}. \quad (9.1.18)$$

**Ортогональность полиномов Эрмита (Вика).** Разлагая (9.1.18) в степенной ряд, получаем, что

$$\int : \varphi(f)^n :_C : \varphi(g)^m :_C d\varphi_C = \delta_{nm} n! \langle f, Cg \rangle^n. \quad (9.1.19)$$

**Примеры:** при  $n \geq 1$

$$\int : \varphi(f)^n :_C d\varphi_C = 0, \quad (9.1.20)$$

$$\int : A(\varphi) :_C d\varphi_C = A(\varphi = 0). \quad (9.1.21)$$

Ниже мы будем обозначать через  $v$  интегральный оператор с ядром  $v(x, y)$ , действующий в пространстве  $L_2(R^d, dx)$ . Кроме того, будем предполагать, что  $I + C^{1/2}vC^{1/2} > 0$ . Пусть

$$:V: = \frac{1}{2} \int : \varphi(x) v(x, y) \varphi(y) : dx dy. \quad (9.1.22)$$

**Константа викового упорядочения.** Пусть оператор  $vC$  имеет след; тогда

$$:V:_C = V - \frac{1}{2} \text{Tr}(vC). \quad (9.1.23)$$

Равенство следует из соотношений  $: \varphi(x) \varphi(y) :_C = \varphi(x) \varphi(y) - C(x, y)$  и  $\text{Tr}(vC) = \int v(x, y) C(y, x) dx dy$ .

**Функциональный определитель (§ 9.3):**

$$Z \equiv \int e^{-:V:C} d\varphi_C = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (I + C^{1/2} v C^{1/2}) - C^{1/2} v C^{1/2}] \right\}. \quad (9.1.24)$$

**Гауссово возмущение (§ 9.3):**

$$d\varphi_{(C^{-1}+v)^{-1}} = Z^{-1} e^{-:V:C} d\varphi_C. \quad (9.1.25)$$

Пример: пусть  $v$  есть оператор умножения на  $m(x)^2$ ,  $C = (-\Delta + I)^{-1}$ . Тогда

$$:V: = \frac{1}{2} \int m(x)^2 : \varphi(x)^2 :_C dx, \quad (9.1.26a)$$

$$d\varphi_{(-\Delta + I + m(x)^2)^{-1}} = Z^{-1} e^{-:V:} d\varphi_{(-\Delta + I)^{-1}},$$

$$Z = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (I + C^{1/2} m^2 C^{1/2}) - C^{1/2} m^2 C^{1/2}] \right\}. \quad (9.1.26b)$$

**Масштабное преобразование (§ 8.6).** Пусть  $\alpha > 0$  и  $R_\alpha$  обозначает преобразование, изменяющее масштаб длины в  $\alpha$  раз. В частности, для  $C = (-\Delta_\Gamma + m^2)^{-1}$  определим  $R_\alpha C = (-\Delta_{\alpha\Gamma} + (m/\alpha)^2)^{-1}$ . Для  $f \in C_0^\infty$  положим  $(R_\alpha f)(x) = \alpha^{-(d+2)/2} f(x/\alpha)$ . Тогда справедливо равенство

$$\int e^{i\varphi(R_\alpha f)} d\varphi_{R_\alpha C} = \int e^{i\varphi(f)} d\varphi_C,$$

называемое масштабным тождеством. Масштабное тождество в негауссовом случае заключено в формуле (8.6.26).

**Сдвиг гауссовой меры.** Пусть  $g \in \mathcal{S}$  и  $\psi = \varphi - g$ . Заменяем интегрирование по  $\varphi$  интегрированием по сдвинутой переменной  $\psi$ . Тогда

$$d\varphi_C = \exp \left[ -\frac{1}{i^2} \langle g, C^{-1} g \rangle - \langle C^{-1} g, \psi \rangle \right] d\psi_C. \quad (9.1.27)$$

*Доказательство формулы (9.1.27).* Докажем это равенство для преобразований Фурье обеих мер. Проинтегрируем обе части (9.1.27), умножив их на функцию  $\exp(i\varphi(f)) = \exp(i\psi(f)) \exp(i\langle g, f \rangle)$ . Оба интеграла можно вычислить, используя (9.1.16), и они оказываются равными  $\exp(-\frac{1}{2} \langle f, Cf \rangle)$ . Так как мера однозначно определяется своим преобразованием Фурье, то равенство (9.1.27) доказано. ■

### (III) Интегрирование по частям

Формула гауссова интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int \varphi(f) A d\varphi_C &= \int \langle Cf, \delta/\delta\varphi \rangle A d\varphi_C = \\ &= \int (\delta A/\delta\varphi(Cf)) d\varphi_C = \int D_{Cf} A d\varphi_C \end{aligned} \quad (9.1.28)$$

была доказана в § 6.3. Она вытекает также из соотношений (9.1.6), (9.1.7) и (9.1.20). Для обобщения этого равенства на случай не-

гауссовых мер положим

$$V = \int_{\Lambda} :P(\varphi):_{C_1} dx, \quad (9.1.29)$$

$$d\mu = d\mu_{\Lambda} = e^{-V} d\varphi_{C_2} / \int e^{-V} d\varphi_{C_2}, \quad (9.1.30)$$

$$B = Ae^{-V}. \quad (9.1.31)$$

**Интегрирование по частям** (общий случай: § 12.2):

$$\int \varphi(f) A d\mu = \int \left\langle C_2 f, \frac{\delta A}{\delta \varphi} - A \frac{\delta V}{\delta \varphi} \right\rangle d\mu. \quad (9.1.32)$$

Заметим, что если в (9.1.32) можно перейти к пределу при  $\Lambda \uparrow R^d$ , то формула (9.1.32) верна и для меры  $d\mu$  в бесконечном объеме.

**Инфинитезимальное изменение ковариации** (гауссов случай: § 9.2). Пусть  $C(t)$  есть гладкая операторнозначная функция от  $t$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \int B d\varphi_{C(t)} = \frac{1}{2} \int \Delta_{\dot{C}} B d\varphi_{C(t)}, \quad (9.1.33)$$

где  $\dot{C} = dC/dt$ , а  $\Delta_C$  определено в (9.1.10).

**Инфинитезимальное изменение ковариации** (общий случай: § 9.2, 12.2). Пусть  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  — гладкие операторнозначные функции от  $t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int Ae^{-V} d\varphi_{C_2(t)} = & \frac{1}{2} \int \left\{ \Delta_{\dot{C}_2} A + A \Delta_{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} V + \right. \\ & \left. + A \left\langle \dot{C}_2 \frac{\delta V}{\delta \varphi}, \frac{\delta V}{\delta \varphi} \right\rangle - \left\langle \dot{C}_2 \frac{\delta V}{\delta \varphi}, \frac{\delta A}{\delta \varphi} \right\rangle \right\} e^{-V} d\varphi_{C_2(t)}. \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

Из (9.1.34) вытекает формула для  $(d/dt) \int A d\mu$ , где  $d\mu$  есть мера (9.1.30) или соответствующая мера в бесконечном объеме, если в (9.1.34) возможен предельный переход к бесконечному объему.

**Обусловленность.** Положим в (9.1.31, 34)  $A = I$ ,  $C_1 = C_2 = C(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \int e^{-V} d\varphi_{C(t)} = \frac{1}{2} \int \left\langle \dot{C} \frac{\delta V}{\delta \varphi}, \frac{\delta V}{\delta \varphi} \right\rangle e^{-V} d\varphi_{C(t)}. \quad (9.1.35)$$

Это равенство чаще всего используется, когда  $\dot{C} \geq 0$  или  $\dot{C} \leq 0$ , как, например, в случае  $C = tC_1 + (1-t)C_2$ ,  $\dot{C} = C_1 - C_2$  и  $C_1 \geq C_2$  или  $C_2 \geq C_1$ .

**Трансляция.** Для случая взаимодействия в конечном объеме формула (9.1.27) принимает вид  $e^{-V(\varphi)} d\varphi_{C_2} = e^{-W(\psi)} d\psi_{C_2}$ , где

$$W(\psi) = \int_{\Lambda} :P(\psi + g):_{C_1} dx + \langle C_2^{-1} g, \psi \rangle + \frac{1}{2} \langle g, C_2^{-1} g \rangle. \quad (9.1.27')$$

**Доказательство формулы (9.1.32).** Если вместо  $A$  подставить  $B$  в (9.1.28), то (9.1.32) сводится к (9.1.28). Таким образом, достаточно проверить для производной  $\delta B/\delta\phi$  правило дифференцирования сложной функции. Введя ультрафиолетовое обрезание и используя предложение 8.7.2, можно аппроксимировать  $\hat{V}$  последовательностью полиномов  $Q^{(l)}$  вида (8.7.2). Для  $B^{(l)} = Ae^{-Q^{(l)}}$  правило дифференцирования сложной функции и формула интегрирования по частям верны, так как  $Q^{(l)}$  — цилиндрические функционалы (зависящие от значений функции только в конечном числе переменных точек) и функциональные производные функции  $e^{-Q^{(l)}}$  превращаются в обычные производные. Следовательно, равенство справедливо для  $B^{(l)}$ . Кроме того, по предложению 8.7.3 обе части равенства сходятся при  $l \rightarrow \infty$ . ■

#### (IV) Пределы мер

Пусть  $C_n$  — последовательность операторов ковариации. Если  $C_n \rightarrow C$  в смысле слабой сходимости билинейных форм на  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ , то из (9.1.16), (9.1.17) вытекает сходимость гауссовых мер  $d\phi_{C_n} \rightarrow d\phi_C$  в смысле сходимости характеристических функций и моментов. Пусть  $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}$  есть конечномерное подпространство. Цилиндрическая функция  $f$ , определяемая с помощью  $\mathcal{W}$ , есть функция вида

$$f(\phi) = F(\langle \phi, \omega_1 \rangle, \dots, \langle \phi, \omega_n \rangle),$$

где  $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{W}$ . Интеграл  $\int f d\phi_C$  можно записать как конечномерный гауссов интеграл с гауссовым показателем  $C_w^{-1}/2$ , где  $C_w$  — ограничение  $C$  на  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ . Из сходимости  $C_n$  к  $C$  вытекает сходимость  $C_{n\omega}$  к  $C_w$  и  $C_{n\omega}^{-1}$  к  $C_w^{-1}$  (в предположении невырожденности  $C$ ). В случае же вырождения  $C$  гауссова мера будет содержать  $\delta$ -функцию. Из этих соображений вытекает, что для непрерывной ограниченной цилиндрической функции  $f$

$$\int f(\phi) d\phi_{C_n} \rightarrow \int f(\phi) d\phi_C. \quad (9.1.36)$$

В ряде ситуаций бывает нужно обобщить эту сходимость на случай  $P(\phi)_2$ -меры (9.1.30).

**Снятие решеточного обрезания (§ 9.5, 9.6).** Пусть  $C \in \mathcal{E}$  и  $C_\delta$  — решеточная аппроксимация  $C$  с шагом решетки  $\delta$ . Тогда  $C_\delta \rightarrow C$  в смысле слабой сходимости операторов в  $L_2$  и соответствующие решеточные меры  $d\mu_{C_\delta}$  сходятся к мере  $d\mu_C$  в смысле сходимости характеристических функций.

**Предел Дирихле (§ 7.8).** Пусть  $C \in \mathcal{E}$ ,  $\Lambda$  — прямоугольник и  $\chi_{\Lambda'}$  — характеристическая функция множества  $\Lambda'$  (дополнение к  $\Lambda$ ). Положим  $C_\lambda = (C^{-1} + \lambda\chi_{\Lambda'})^{-1}$ . Тогда существует предел  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda = C_\infty$  и  $C_\infty f = 0$ , если  $\text{supp } f \subset \Lambda'$ . Предположим, кроме того, что  $C^{-1} = -\Delta_\Gamma + m^2 I$ , где  $\Delta_\Gamma$  есть лапласиан Дирихле с



нулевыми граничными условиями на  $\Gamma \subset \Lambda$ . Тогда оператор  $C_\infty^{-1} = -\Delta_{\Gamma \cup \partial\Lambda} + m^2 I$  в пространстве  $L_2(\Lambda)$  есть лапласиан Дирихле с нулевыми граничными условиями и на  $\Gamma$ , как  $C^{-1}$ , и дополнительно на  $\partial\Lambda$ .

**Предел Неймана.** Пусть

$$\langle f, C_\lambda^{-1} f \rangle = \langle f, C^{-1} f \rangle + \lambda \int_{\Lambda'} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

Тогда существует предел  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda = C_\infty$ , и оператор  $C_\infty$  соответствует (по крайней мере формально) граничным условиям Неймана на  $\partial\Lambda$ . В дальнейшем мы не будем использовать этот предельный переход.

## 9.2 Инфинитезимальное изменение ковариации

В этом параграфе мы рассмотрим формулы интерполяции для мер  $d\mu$  вида (9.1.30). Вначале обсудим гауссов случай и докажем (9.1.33).

**Предложение 9.2.1.** Пусть  $C(t)$  — гладкое однопараметрическое семейство ковариационных операторов в  $\mathcal{E}$ , и пусть  $A$  имеет вид (9.1.1). Тогда

$$\frac{d}{dt} \int Ad\varphi_{C(t)} = \frac{1}{2} \int (\Delta_{\dot{C}} A) d\varphi_{C(t)}. \quad (9.2.1)$$

*Доказательство I.* Предположим, что  $A = e^{i\varphi(g)}$ . Для простоты положим  $C(t) = tC_1 + (1-t)C_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int Ad\varphi_{C(t)} &= \frac{d}{dt} \int e^{i\varphi(g)} d\varphi_{C(t)} = \frac{d}{dt} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle g, C(t)g \rangle\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \langle g, \dot{C}(t)g \rangle \exp\left(-\frac{1}{2} \langle g, C(t)g \rangle\right) = \frac{1}{2} \int (\Delta_{\dot{C}} A) d\varphi_{C(t)}. \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

Случай произвольных  $A$  вида (9.1.1) рассматривается по аналогии с доказательством (9.1.6,7).

*Набросок доказательства II.* Это альтернативное доказательство показывает, что (9.1.33) фактически есть формула интегрирования по частям. Мы аппроксимируем интегралы в (9.1.33) конечномерными интегралами по мере  $d\varphi_n$  вида

$$d\varphi_n = Z_n^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \varphi, C(t)_n^{-1} \varphi \rangle\right) d\varphi_{\text{Лебег}} \rightarrow d\varphi_{C(t)}. \quad (9.2.3)$$

Здесь  $d\varphi_{\text{Лебег}}$  — мера Лебега, а викуво упорядочение проводится относительно ковариации  $C(t)_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int Ad\varphi_n &= -\frac{1}{2} \int \langle \varphi, \frac{d}{dt} C_n(t)^{-1} \varphi \rangle : Ad\varphi_n = \\ &= \frac{1}{2} \int \langle C_n(t)^{-1} \varphi, \dot{C}_n(t) C_n(t)^{-1} \varphi \rangle : Ad\varphi_n. \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Применяя формулу интегрирования по частям к каждому  $\varphi$  в выражении  $\langle C^{-1}\varphi, \dot{C}C^{-1}\varphi \rangle$ , находим, что

$$\frac{d}{dt} \int A d\varphi_n = \frac{1}{2} \int (\Delta_{\dot{C}_n} A) d\varphi_n.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем (9.1.33). Мы не доказываем здесь сходимость при  $n \rightarrow \infty$ , поскольку она вытекает, например, из предложений § 9.5.

**Следствие 9.2.2.** Пусть  $C_1, C_2$  — ковариационные операторы и  $A$  имеет вид (9.1.1). Тогда

$$\int A d\varphi_{C_2} = \int A d\varphi_{C_1} + \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int (\Delta_{C_2 - tC_1} A) d\varphi_{tC_2 + (1-t)C_1}. \quad (9.2.5)$$

**Следствие 9.2.3.** Для мер в конечном объеме справедлива формула (9.1.34).

*Доказательство.* Включим в  $A$  множитель  $\exp(-:V:c^{(t)})$  и применим правило вычисления производной сложной функции; его законность обосновывается с помощью 8.7.1—3.

### 9.3 Квадратичные возмущения

В этом параграфе мы будем изучать квадратичное возмущение

$$:V:c = \frac{1}{2} \int : \varphi(x) v(x, y) \varphi(y) :_C dx dy \quad (9.3.1)$$

(см. (9.1.22)) и гауссову меру

$$d\mu = \frac{e^{-:V:c} d\varphi_C}{\int e^{-:V:c} d\varphi_C} = Z^{-1} e^{-:V:c} d\varphi_C. \quad (9.3.2)$$

Здесь предполагается, что  $C$  — ограниченный положительный самосопряженный оператор в  $L_2(R^d)$ . Например, любой оператор  $C \in \mathcal{S}$  удовлетворяет этим условиям. Основное ограничение:

$$C^{-1} + v > 0. \quad (9.3.3)$$

Мы требуем также, чтобы функция  $v(x, y)$  была вещественной и симметричной. Во избежание технических трудностей предположим также, что  $v$  — ограниченный оператор. Положим

$$\hat{v} = C^{1/2} v C^{1/2}. \quad (9.3.4)$$

**Предложение 9.3.1.** Предположим, что выполнено условие (9.3.3). Пусть  $C$  — ограниченный положительный самосопряженный оператор,  $v$  — ограниченный оператор, а  $\hat{v}$  — оператор Гильберта — Шмидта. Тогда функционалы  $:V:c$  и  $e^{-:V:c}$  принадлежат  $L_p(d\varphi_C)$  при всех  $p < \infty$  и

$$Z = \int e^{-:V:c} d\varphi_C = \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(I + \hat{v}) - \hat{v}]\right). \quad (9.3.5)$$

Если  $\|\hat{\vartheta}\|_{\text{HS}} < 1$ , то

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int (:V:_C)^n d\varphi_C, \quad (9.3.6)$$

и ряд абсолютно сходится.

**Замечание 1.** Нормирующий множитель  $Z$  называется функциональным определителем, так как в случае, когда возмущение  $V$  рассматривается без викового упорядочения,

$$\int e^{-V} d\varphi_C = \det(I + \hat{\vartheta})^{-1/2}, \quad (9.3.7)$$

при условии, что интеграл (9.3.7) существует. Заметим, что для симметричных положительных  $A$  имеет место равенство  $\det A = \exp(\text{Tr} \ln A)$ , поэтому формально

$$\begin{aligned} \det(I + \hat{\vartheta})^{-1/2} &= \det C^{-1/2} \det(C^{-1} + \vartheta)^{-1/2} = \\ &= \exp[( - 1/2) \text{Tr} \ln(I + \hat{\vartheta})] \end{aligned}$$

(в случае конечномерных гауссовых интегралов эти равенства имеют точный смысл). В частности,  $Z$  определяется с помощью выражения (9.3.7) только в том случае, когда  $\hat{\vartheta}$  имеет след.

**Замечание 2.** Виковое упорядочение  $V$ , т. е. замена  $V$  на  $:V:_C$  в (9.3.7), исключает из экспоненты члены, линейные по  $\hat{\vartheta}$ . Это есть в точности множитель  $\exp((1/2) \text{Tr} \hat{\vartheta})$ , так как  $:V:_C = V - (1/2) \text{Tr} \hat{\vartheta}$ . Таким образом, можно определить перенормированный определитель  $\det_1$ :

$$\begin{aligned} \det_1(I + \hat{\vartheta})^{-1/2} &= \det(I + \hat{\vartheta})^{-1/2} \det(\exp \hat{\vartheta})^{1/2} = \\ &= \exp[( - 1/2) \text{Tr}(\ln(I + \hat{\vartheta}) - \hat{\vartheta})]. \end{aligned}$$

В этом случае  $Z$  определено и тогда, когда оператор  $\hat{\vartheta}$  не имеет следа.

**Замечание 3.** Отметим несколько различных случаев. (1) Если  $\|\hat{\vartheta}\|_{\text{HS}} < 1$  и  $V$  рассматривается в виковом упорядочении, то  $Z$  разлагается в сходящийся ряд по степеням  $\vartheta$ . (2) Если  $\hat{\vartheta}$  есть оператор Гильберта — Шмидта и выполнено условие (9.3.3), то  $Z$  определяется формулой (9.3.5) и равно  $\det_1(I + \hat{\vartheta})$ . (3) Даже если  $Z$  равно 0 или  $\infty$ , мера  $d\mu$ , определяемая формулой (9.3.2), может существовать как предел аппроксимирующих мер. В предложении 9.3.3 ниже рассматривается ситуация, когда  $Z$  может равняться 0. Если мера  $d\mu$  существует, а  $Z$  не определено, то говорят о перенормировке вакуумного вектора, связанной с делением на  $Z$ . Аналогичное явление происходит в случае негауссовых мер: см., например, обсуждение перенормировок в модели  $\varphi^4$  в § 14.3. (В гл. 8—12 мы следуем терминологии, принятой в статистической механике. Так, при мультипликативной перенормировке меры соответствующий множитель называется статистической суммой и

обозначается  $Z$ . В гл. 14 обозначение  $Z$  используется для перенормировки величины поля, т. е. мультипликативной перенормировки поля  $\varphi$ .)

*Доказательство.* Непосредственные вычисления дают

$$\int :V:C^2 d\varphi_C = \|\hat{\vartheta}\|_{HS}^2.$$

Аналогичные равенства верны и для старших степеней, следовательно,  $:V:C \in L_p$  и  $:V:C$  непрерывно зависит от  $\hat{\vartheta}$ . Поскольку  $\text{Tr}[\ln(I + \hat{\vartheta}) - \hat{\vartheta}] = \sum_{i=1}^{\infty} [\ln(1 + \lambda_i) - \lambda_i]$ , где  $\lambda_i$  — собственные значения симметрического оператора  $\hat{\vartheta}$ , а  $\ln(1 + x) - x = O(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ , этот ряд в случае, когда  $\hat{\vartheta}$  — оператор Гильберта — Шмидта, сходится. Таким образом, правая часть (9.3.5) конечна и непрерывно (по норме  $\|\cdot\|_{HS}$ ) зависит от  $\hat{\vartheta}$ .

Предположим, что равенство (9.3.5) выполнено для  $\hat{\vartheta}$  из всюду плотного линейного подпространства пространства операторов Гильберта — Шмидта. Аппроксимируем произвольный оператор  $\hat{\vartheta}$  последовательностью  $\hat{\vartheta}_j$  из этого подпространства. Тогда  $:V_j:C \rightarrow :V:C$  в  $L_p$ , и можно выбрать подпоследовательность, для которой имеет место поточечная сходимость почти всюду. Таким образом, можно считать, что  $e^{-:V_j:C} \rightarrow e^{-:V:C}$  поточечно почти всюду. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|e^{-:V_i:C} - e^{-:V_j:C}\|_{L_2}^2 &= \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(I + 2\hat{\vartheta}_i) - 2\hat{\vartheta}_i]\right) + \\ &+ \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(I + 2\hat{\vartheta}_j) - 2\hat{\vartheta}_j]\right) - \\ &- 2 \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(I + \hat{\vartheta}_i + \hat{\vartheta}_j) - \hat{\vartheta}_i - \hat{\vartheta}_j]\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } i, j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $e^{-:V:C} \in L_2$  и имеет место равенство (9.3.5). Применяя аналогичные соображения к  $e^{-(p/2):V:C}$ , получаем, что  $e^{-:V:C} \in L_p$  при всех  $p < \infty$ . Наконец, правая часть (9.3.5) при  $\|\hat{\vartheta}\|_{HS} < 1$  разлагается в сходящийся ряд по степеням  $\hat{\vartheta}$ , откуда следует сходимость в (9.3.6). (В качестве упражнения на вычисления с помощью диаграмм Фейнмана мы приведем независимое доказательство формулы (9.3.6) после следующего ниже предложения 9.3.2.)

Рассмотрим теперь подпространство операторов  $v$  с гладким ядром вида

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^J \lambda_j f_j(x) f_j(y),$$

где  $f_j \in \mathcal{F}$ . В этом случае  $:V:C$  и  $e^{-:V:C}$  являются цилиндрическими функциями и  $Z$  можно вычислить точно (как конечномерный гауссов интеграл). Положим  $g_j = C^{1/2} f_j$ , так что

$$\hat{\vartheta}(x, y) = \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) g_j(y).$$

Не теряя общности, можно считать, что функции  $g_j$  ортонормированы. В силу (9.3.3),  $\lambda_j > -1$  при всех  $j$ , следовательно,

$$Z = e^{(1/2) \text{Tr} \hat{\vartheta}} (2\pi)^{-J/2} \int \prod_j e^{-(1/2)(\lambda_j + 1) x_j^2} dx_j =$$

$$= e^{(1/2) \text{Tr} \hat{\vartheta}} \det(I + \hat{\vartheta})^{-1/2} = e^{(-1/2) \text{Tr} [\ln(I + \hat{\vartheta}) - \hat{\vartheta}]}. \quad \blacksquare$$

**Предложение 9.3.2.** Мера  $d\mu$ , определяемая формулой (9.3.2) и предложением 9.3.1, имеет ковариацию

$$C_v \equiv (C^{-1} + v)^{-1}. \tag{9.3.8}$$

*Доказательство.* Так как  $\vartheta$  есть оператор Гильберта — Шмидта и  $-1 < \vartheta$  по условию (9.3.3), то  $-1 + \varepsilon < \vartheta$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, оператор  $(I + \vartheta)^{-1}$  ограничен, так же как и оператор  $C^{1/2}(I + \vartheta)^{-1}C^{1/2} = C_v$ . При этом  $C_v$  удовлетворяет тождеству

$$C_v = C - C v C_v. \tag{9.3.9}$$

Последняя формула есть результат применения формулы интегрирования по частям к двухточечной функции  $\int \varphi(x)\varphi(y)d\mu$ . ■

*Прямое доказательство формулы (9.3.6) в предположении  $\|\vartheta\|_{\text{HS}} < 1$ .* Используя разложение на графы Фейнмана (следствие 8.3.2), вычислим каждый из интегралов, входящих в (9.3.6), и покажем, что ряд (9.3.6) сходится. Графы, дающие вклад в  $\int (:V:C)^n d\varphi_C$ , имеют ровно  $n$   $v$ -вершин. Каждая  $v$ -вершина имеет два отростка, и соответствующий граф  $G$  есть объединение связанных компонент  $G_i$ , где  $G_i$  — петля с числом вершин  $n_i \geq 2$ , см. рис. 9.1. Из-за формы этих графов разложение (9.3.6) называется петельным разложением.

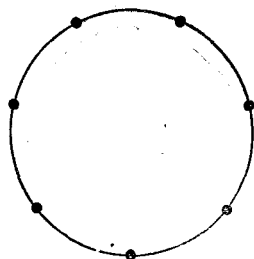


Рис. 9.1. Связная компонента диаграммы, отвечающей  $\int (:V:C)^n d\varphi_C$ .

Пусть граф, вносящий вклад в  $(-1)^n \int (:V:C)^n d\varphi_C$ , имеет  $r$  связанных компонент и  $n_1 + \dots + n_r = n$ . В силу равенства

$$\begin{aligned} & \int dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n v(x_1, y_1) C(y_1, x_2) v(x_2, y_2) \times \\ & \times C(y_2, x_3) \dots v(x_n, y_n) C(y_n, x_1) = \text{Tr}((vC)^n) = \\ & = \text{Tr}((C^{1/2}vC^{1/2})^n) = \text{Tr}(\vartheta^n), \end{aligned}$$

вклад  $i$ -й компоненты равен  $I(G_i) = (-1/2)^{n_i} \text{Tr}(\vartheta^{n_i})$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} (-1)^n \int (:V:C)^n d\varphi_C &= \sum_G I(G) = \sum_G \prod_i I(G_i) = \\ &= \sum_G \prod_i (-1/2)^{n_i} \text{Tr}(\vartheta^{n_i}), \end{aligned}$$

где  $\{G_i\}$  — множество связанных компонент графа  $G$ . Подставляя в (9.3.6), получаем, что

$$Z = 1 + \sum_n \frac{1}{n!} \sum_r \sum_{\{n_1, \dots, n_r: \sum n_i = n, n_i \geq 2\}} \sum'_G \prod_{j=1}^r \left(-\frac{1}{2}\right)^{n_j} \text{Tr}(\vartheta^{n_j}),$$

где  $\sum'_G$  есть число всех  $G$ , имеющих одинаковое количество петель и одни и те же их размеры. Точнее, будем считать, что вершины  $G$  занумерованы и что  $n_1$  — размер петли, содержащей первую вершину,  $n_2$  — размер петли, содержащей первую из вершин, не входящих в предыдущую петлю, и т. д. Разложение для  $Z$

упрощается, если объединить суммирование по  $n$  с суммированием по  $n_i$ . При этом снимается ограничение на  $\sum n_i$ , так что

$$Z = 1 + \sum_r \sum_{\{n_1, \dots, n_r; n_i \geq 2\}} \left( (\sum n_i)! \right)^{-1} \Sigma'_G \prod_j \left( -\frac{1}{2} \right)^{n_j} \text{Tr}(\vartheta^{n_j}).$$

Заметим, что  $\Sigma'_G$  можно вычислить точно:

$$\Sigma'_G = \frac{(\sum n_i)!}{n_1! \dots n_r!} \frac{1}{r!} \prod_j 2^{n_j-1} (n_j - 1)!.$$

Здесь биномиальный коэффициент равен числу способов разбиения всех вершин на петли фиксированной длины. Деление на  $r!$  учитывает тот факт, что петли считались упорядоченными. Число различных расположений вершин внутри петли (с точностью до изменения ее ориентации) есть  $\frac{1}{2} (n_j - 1)!$ . Наконец, каждой вершине отвечает множитель 2, учитывающий две возможности соединения двух отростков. Воспользовавшись выражением для  $\Sigma'_G$ , представим сумму произведений в виде произведения сумм:

$$Z = \sum_{r=0}^{\infty} (r!)^{-1} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{Tr}(-\vartheta^n) \right)^r = \exp \left( -\frac{1}{2} \text{Tr} [\ln(I + \vartheta) - \vartheta] \right).$$

Таким образом, равенства (9.3.5), (9.3.6) доказаны при условии, что  $\|\vartheta\|_{\text{нс}} < 1$ . ■

Рассмотренные выше результаты применимы к локальным возмущениям массового члена и в случае размерности  $d = 3$ , а не только  $d = 2$ . Следующее утверждение относится к случаю более сингулярных возмущений.

**Предложение 9.3.3.** *Определение (9.3.2) меры  $d\mu$  можно распространить по непрерывности на случай, когда  $\vartheta$  — ограниченный оператор и  $0 < \varepsilon \leq I + \vartheta$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\vartheta_j \rightarrow \vartheta$  в сильной операторной топологии. Тогда  $(I + \vartheta_j)^{-1} \rightarrow (I + \vartheta)^{-1}$  и  $C_{\vartheta_j} \rightarrow C_{\vartheta}$ . Отсюда вытекает сходимость гауссовых мер в смысле сходимости характеристических функций и моментов <sup>4)</sup>.

В типичных случаях ядра, аппроксимирующие ядро  $v$ , определяются с помощью импульсного и пространственного обрезания:

$$v_{\kappa, \Lambda}(x, y) = \chi_{\Lambda}(x) v_{\kappa}(x, y) \chi_{\Lambda}(y),$$

где  $v_{\kappa}(x, y) = \int v(x - x', y - y') \delta_{\kappa}(x') \delta_{\kappa}(y') dx' dy'$ .

<sup>4)</sup> См. по этому поводу работу: Добрушин Р. Л., Минлос Р. А. Полиномы от линейных случайных функций. — УМН 32, № 2 (1977), с. 67—122.—Прим. ред.

## 9.4 Перенормировка по теории возмущений<sup>1)</sup>

Перенормировка есть изменение параметров (перепараметризация) в лагранжиане. Параметры в исходном лагранжиане не являются непосредственно наблюдаемыми величинами, и перепараметризация делается для того, чтобы заменить разложение по теории возмущений, использованное в § 8.4, разложением, включающим лишь наблюдаемые величины: массы частиц и константы связи. Массы определяются как собственные значения в спектре массового оператора  $M = (H^2 - P^2)^{1/2}$ . При этом каждому значению массы соответствует лоренц-инвариантный гиперboloид в спектре оператора энергии-импульса. Эквивалентным образом массу можно определить как показатель экспоненциального убывания корреляций (см. гл. 14). Константы связи определяются в терминах теории рассеяния. В частности, в нерелятивистском пределе рассеяния константа связи определяется характером взаимодействия между частицами на больших расстояниях. Бозонным теориям, рассматриваемым в этом параграфе, в нерелятивистском пределе обычно отвечают короткодействующие потенциалы типа Юкавы. При этом характерное асимптотическое поведение потенциала на больших расстояниях имеет вид

$$V(r) = (\lambda/4\pi r) e^{-mr} + O(\varepsilon^{-(m+\varepsilon)r}), \quad (9.4.1)$$

где  $\lambda$  есть константа связи, а  $m > 0$  — масса. Параметры  $\lambda$  и  $m$  являются функциями от параметров  $\lambda_b$  и  $m_b$ , входящих в исходный лагранжиан  $\mathcal{L}$ . Так как теория поля должна описывать наблюдаемые частицы, нам бы хотелось подобрать  $\lambda_b$  и  $m_b$  так, чтобы  $\lambda$  и  $m$  имели предписанные значения. Другими словами, мы обращаем функциональные соотношения  $\lambda = \lambda(\lambda_b, m_b)$ ,  $m = m(\lambda_b, m_b)$ . После этого можно рассматривать лагранжиан как функцию (не обязательно однозначную) от  $\lambda$  и  $m$ , определяемую обратными соотношениями  $\lambda_b = \lambda_b(\lambda, m)$ ,  $m_b = m_b(\lambda, m)$ . Перенормированная теория должна определять связанные состояния (другие собственные значения  $M$ ) и дифференциальные сечения рассеяния, резонансы, вероятности рождения и распада частиц, отношение ширин распадов и т. д. Таким образом, фиксируя  $\lambda$  и  $m$ , мы выделяем некоторую конкретную теорию поля из двухпараметрического семейства таких теорий. После того как этот выбор произведен, теория должна предсказывать любое наблюдение.

Второй, более технический, подход к понятию перенормировки связан с сокращением расходящихся, возникающих при вычислениях по теории возмущений. С математической точки зрения эти

<sup>1)</sup> В этом параграфе основные идеи и понятия теории перенормировок поля в рамках теории возмущений изложены столь кратко, что читателю, по-видимому, следует обратиться к более подробным руководствам (см., например, Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969, или [Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., 1976]. — *Прим. ред.*

расходимости появляются из-за того, что функционал  $V(\varphi)$  в случае нелинейной функции  $V$  нельзя корректно определить на пространстве обобщенных функций  $\mathcal{S}'$ . Такой подход к перенормировкам обобщает идею перепараметризации, описанную выше. Мы вновь рассматриваем  $\lambda_b$  и  $m_b$  как функции от  $\lambda$  и  $m$ . При этом конечным значениям  $\lambda$  и  $m$  могут отвечать бесконечные  $\lambda_b$  и  $m_b$ . Таким образом, перепараметризация изменяет потенциал так, что коэффициенты  $\lambda_b$  и  $m_b$  в  $\mathcal{L}$  становятся бесконечными, причем бесконечности сокращаются при вычислении  $m$  или  $\lambda$ . В результате в перенормированной теории наблюдаемые величины имеют конечные значения.

Рассмотрим более подробно перепараметризацию на примере теории поля  $\varphi^4$ . Голый евклидов лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_b(\varphi) = \int \left( \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} m_b^2 \varphi^2 + \lambda_b \varphi^4 \right) dx. \quad (9.4.2)$$

Здесь  $m_b$  есть голая масса, а  $\lambda_b$  — голая константа связи. Положим  $\varphi = \varphi_b$  и запишем перепараметризацию в виде

$$\begin{aligned} m^2 &= m_b^2 + \delta m^2, & \varphi_r &= Z_\varphi^{-1/2} \varphi, \\ \lambda &= \lambda_b Z_\lambda^{-1} Z_\varphi^2 = (\lambda_b + \delta\lambda) Z_\varphi^2, \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

где  $m$ ,  $\lambda$  и константа перенормировки поля  $Z_\varphi$  будут определены позднее. Тогда перенормированный лагранжиан  $\mathcal{L}_r$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\varphi_r) = \mathcal{L}_b(\varphi) &= \int \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\varphi_r)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi_r^2 + \lambda \varphi_r^4 + \frac{1}{2} (Z_\varphi - 1) (\nabla\varphi_r)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (m^2 (Z_\varphi - 1) - \delta m^2 Z_\varphi) \varphi_r^2 - Z_\varphi^2 \delta\lambda \varphi_r^4 \right\} dx. \end{aligned} \quad (9.4.4)$$

Теперь мы будем рассматривать  $\lambda$  и  $m$  как основные параметры теории, а  $\delta m^2$ ,  $Z_\varphi$  и  $\delta\lambda$  как функции от  $\lambda$  и  $m$ , задаваемые в виде рядов по степеням  $\lambda$  с коэффициентами, зависящими от  $m$ . Эти степенные ряды будут определяться из того условия, что  $\lambda$  и  $m$  выбраны соответственно как физическая константа связи и масса физической частицы. Константа  $Z_\varphi$  будет определена с помощью дополнительных соглашений.

Введенная таким образом перепараметризация лагранжиана порождает в описанных в § 8.4 диаграммах теории возмущений новые вершины, соединенные новыми ребрами. Члены  $\frac{1}{2} (\nabla\varphi_r)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi_r^2$  в  $\mathcal{L}_r(\varphi_r)$  определяют ковариацию и гауссову меру, с помощью которой строятся ряды теории возмущений. Новая ковариация определяет значения, приписанные ребрам в графах перенормированного разложения. Каждой  $\varphi^4$ -вершине в разложении из § 8.4 соответствуют теперь два члена: один, отвечающий  $\lambda\varphi_r^4$ -вершине, и другой, отвечающий  $\delta\lambda\varphi_r^4$ -вершине. Разлагаются



также остальные квадратичные члены  $-\frac{1}{2}\langle\varphi_r, \delta Q\varphi_r\rangle$  лагранжиана (9.4.4). Здесь

$$\frac{1}{2}\langle\varphi_r, \delta Q\varphi_r\rangle = \frac{1}{2}(1 - Z_\varphi)(\nabla\varphi_r)^2 + \frac{1}{2}(\delta m^2 Z_\varphi + m^2(1 - Z_\varphi))\varphi_r^2. \quad (9.4.5)$$

Разложение квадратичных членов можно связать с рассмотренными § 9.3. Действительно, ковариация для  $\mathcal{L}_r$  равна  $C_r = (-\Delta + m^2)^{-1}$ , а ковариация для  $\mathcal{L}_b$  равна  $C_b = (-\Delta + m_b^2)^{-1}Z_\varphi^{-1}$  (если в качестве переменной интегрирования в обоих случаях использовать  $\varphi_r$ ). Тогда, согласно § 9.3,  $C_r^{-1} = C_b^{-1} + \delta Q$ , где  $\delta Q$  обозначает ядро квадратичной формы  $\delta Q$ , определяемой формулой (9.4.5).

Ряд Неймана, выражающий  $C_b$  через  $C_r$ , можно записать в виде суммы графов Фейнмана (рис. 9.2). Подставляя это графическое

$$C_b = C_r + C_r \delta Q C_r + \dots$$

Рис. 9.2.

представление ряда Неймана в перенормированное разложение § 8.4, получаем перенормированное разложение, содержащее перенормированные ребра с пропагатором  $C_r$  и  $\delta Q$ -вершины.

Мы утверждаем, что комбинаторная структура диаграмм, содержащих  $\delta Q$ -вершины, в точности соответствует комбинаторной структуре некоторого класса поддиаграмм нашего разложения. Это комбинаторное соответствие позволяет указать подобные члены. Затем, сравнивая подобные члены, мы обнаруживаем, что они частично сокращаются. Таким образом происходит сокращение бесконечностей в перенормированной теории возмущений. Фактически вклад в  $\delta m^2$  и  $Z_\varphi$  дают как  $\delta Q$ -члены, так и соответствующие им члены разложения. Определение  $\delta m^2$  и  $Z_\varphi$  фиксирует  $\delta Q$  и приводит к частичному сокращению.

Диаграммы, подобные по комбинаторной структуре  $\delta Q$ -диаграммам, называются массовыми диаграммами. Такие диаграммы имеют два внешних отростка и не распадаются на несвязанные части при выбрасывании одного ребра (одночастично-неразложимые диаграммы, или 1ЧН).

Определим массовые скелетные диаграммы как диаграммы (с произвольным числом внешних отростков), не содержащие массовых диаграмм в качестве поддиаграмм, за исключением отдельных ребер (пропагаторов). Общей диаграмме отвечает массовая скелетная диаграмма, которая получается превращением каждой линейной цепочки массовых диаграмм в отдельный пропагатор. Пропагатор в скелетной диаграмме имеет структуру ряда

Неймана (рис. 9.2), и поэтому общую диаграмму можно восстановить по ее массовой скелетной диаграмме, вставляя в последнюю произвольным образом массовые диаграммы. Каждая  $\delta Q$ -вершина также является массовой диаграммой, и ее вклад выбирается таким образом, чтобы сократить вклад от других массовых диаграмм. Это приводит к сдвигу спектра масс и изменению величины поля.

Аналогичные соображения применимы к вершинным диаграммам. В случае  $\varphi^4$ -теории вершинные диаграммы имеют четыре внешних отростка и не распадаются при выбрасывании двух или одного внутреннего ребра (двухчастично-неразложимые диаграммы, или 2ЧН). К вершинным диаграммам относятся и  $\delta\lambda$ -вершины. Все вершинные диаграммы имеют одинаковую комбинаторную структуру. Вершинная скелетная диаграмма не содержит вершинных поддиаграмм, за исключением отдельных  $\lambda\varphi^4$ -вершин. Общая диаграмма может быть построена из вершинной скелетной диаграммы, если в нее вставить вершинные поддиаграммы. Для вершинных диаграмм также происходит частичное сокращение (связанное с  $\delta\lambda$ -вершинами).

Полной скелетной диаграммой называется диаграмма, являющаяся одновременно массовой скелетной и вершинной скелетной диаграммой. Так как для вершинной перенормировки необходимо производить вставки массовых диаграмм и наоборот, то массовую и вершинную перенормировки нужно делать одновременно в виде вставок массовых и вершинных диаграмм в полные скелетные диаграммы.

Следующий этап перенормировки состоит в явном определении  $\delta m^2$ ,  $\delta\lambda$  и  $Z_\varphi$  в соответствии с исходными данными (массами частиц и данными рассеяния). Это мы отложим до § 14.3, поскольку к тому времени у нас будет больше теоретических средств для решения этой задачи. В результате  $\delta m^2$ ,  $\delta\lambda$  и  $Z_\varphi$  будут представлены в виде рядов по степеням  $\lambda$ . Коэффициент при  $\lambda^n$  выбирается так, чтобы обеспечить сокращение в массовых и вершинных диаграммах порядка  $\lambda^n$ . Если диаграмма содержит массовые или вершинные поддиаграммы, то эти поддиаграммы можно включить в сокращенном виде, т. е. в виде конечной суммы двух частично сокращающихся поддиаграмм. Массовые и вершинные диаграммы в низших порядках теории возмущений для взаимодействия  $\varphi^4$  приведены в § 14.3.

Теория поля называется перенормируемой, если каждая скелетная диаграмма с произвольными вставками перенормированных (т. е. частично сокращенных) массовых и вершинных поддиаграмм задает абсолютно сходящийся интеграл по пространству  $R^n$  при некотором  $n$  (как в § 8.2). Поля  $\varphi^4$ , Юкавы, Дирака, Максвелла, КЭД и Янга — Миллса являются перенормируемыми в размерностях  $d \leq 4$ : см. [Боголюбов, Парасюк, 1957], [Hepp 1971], [t Hooft, 1971a, b], [Abers, Lee, 1973] и [Becchi, Rouet, Stora,

1976]. Существует общее правило: теория перенормируема, если константа связи имеет размерность (длина)<sup>*j*</sup>, где  $j \leq 0$ . Сверхперенормируемость теории означает, что расходимости появляются только в конечных порядках теории возмущений по  $\lambda$ . В этом случае константа связи имеет размерность (длина)<sup>*j*</sup> и  $j < 0$ . Такие поля, как  $\varphi^4$ , КЭД, поле Янга — Миллса сверхперенормируемы, когда  $d \leq 3$ , и перенормируемы при  $d = 4$ . Перенормируемые, но не сверхперенормируемые теории имеют безразмерную константу связи, например константа тонкой структуры  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$  в электродинамике или  $\lambda$  в модели  $\varphi^4$ . Эти теории характеризуются также тем, что неравенство Соболева, с помощью которого член со взаимодействием в евклидовом действии мажорируется его кинетической (свободной) частью, может превращаться в равенство.

Безмассовым теориям отвечают специальные значения  $m_b$  и  $\lambda_b$ ; см. гл. 17. Перенормировка в таких теориях сложнее.

## 9.5 Решеточные операторы Лапласа и ковариационные операторы

В этом параграфе мы рассматриваем решеточные аппроксимации  $C_\delta$  ковариационных операторов  $C$ , определенных в гл. 7. Из сходимости  $C_\delta \rightarrow C$  при  $\delta \rightarrow 0$  в операторной норме вытекает, что решеточная аппроксимация  $d\varphi_{C_\delta}$  гауссовой меры  $d\varphi_C$  сходится к ней при  $\delta \rightarrow 0$  в смысле сходимости характеристических функционалов (преобразований Фурье). Эта сходимость имеет место при произвольной размерности  $d$ .

Здесь подробно разбирается только случай граничных условий Дирихле. Однако полученные результаты справедливы и в более общем случае ковариационных операторов  $C$  из класса  $\mathcal{E}$  с другими граничными условиями, рассмотренными в гл. 7.

Для простоты пусть  $\Lambda$  — единичный куб в  $R^d$ :

$$\Lambda = \{x = (x_1, \dots, x_d): 0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2, \dots, d\}. \quad (9.5.1)$$

Можно рассмотреть также произвольную прямоугольную область  $l_1 \times \dots \times l_d$ , по-разному изменяя длину ребер куба. Оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле диагонализуется с помощью разложения в ряд Фурье по ортонормированному базису

$$e_k(x) = 2^{d/2} \prod_{\alpha=1}^d \sin(k_\alpha x_\alpha), \quad k_\alpha \in \pi Z_+. \quad (9.5.2)$$

(По повторяющимся индексам суммирование не производится.)  
При этом

$$-\Delta_D e_k = k^2 e_k, \quad (9.5.3)$$

где  $k^2 = \sum_\alpha k_\alpha^2$ . Напомним, что  $C_D = (-\Delta_D + m^2)^{-1}$ .

Рассмотрим конечную решетку  $\Lambda_\delta$  с шагом  $\delta$ . Пусть

$$\begin{aligned}\delta Z^d &= \{\delta z: z \in Z^d\}, \\ \text{Int } \Lambda_\delta &= \text{Int } \Lambda \cap \delta Z^d, \quad \partial \Lambda_\delta = \partial \Lambda \cap \delta Z^d, \\ \Lambda_\delta &= \text{Int } \Lambda_\delta \cup \partial \Lambda_\delta = \Lambda \cap \delta Z^d.\end{aligned}\tag{9.5.4}$$

Для того чтобы приближения были между собой согласованы, выберем  $\delta = 2^{-\nu}$ ,  $\nu \in Z_+$ . Определим гильбертово пространство  $l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$  со скалярным произведением

$$\langle f, f \rangle_{\text{Int } \Lambda_\delta} = \sum_{x \in \text{Int } \Lambda_\delta} \delta^d |f(x)|^2.\tag{9.5.5}$$

Пространство  $l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$  будем рассматривать как подпространство в  $l_2(\Lambda_\delta)$ .

Прямой решеточный градиент на  $l_2(\delta Z^d)$  определяется формулой

$$(\partial_{\delta, \alpha} f)(x) = \delta^{-1} [f(x + \delta e_\alpha) - f(x)],\tag{9.5.6}$$

где  $e_\alpha$  — единичный вектор  $\alpha$ -го координатного направления. Обратным градиентом служит сопряженный к  $\partial_{\delta, \alpha}$  относительно скалярного произведения в  $l_2(\delta Z^d)$  оператор  $\partial_{\delta, \alpha}^*$  и

$$-\Delta_\delta = \partial_\delta^* \partial_\delta = \partial_\delta \partial_\delta^* = \sum_\alpha \partial_{\delta, \alpha}^* \partial_{\delta, \alpha},$$

так что

$$(\Delta_\delta f)(x) = \delta^{-2} \left[ -2df(x) + \sum_{\text{б.с. } x} f(x') \right].\tag{9.5.7}$$

Для упрощения обозначений мы ниже будем писать  $\partial_\alpha$  вместо  $\partial_{\delta, \alpha}$ . В (9.5.7) суммирование ведется по  $2d$  узлам решетки  $x'$  — ближайшим соседям точки  $x$ . Обозначим  $\Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta}$  ортогональный проектор из  $l_2(\delta Z^d)$  на подпространство  $l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$ . Разностный оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле определяется соотношением

$$\Delta_{\delta, D} = \Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta} \Delta_\delta \Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta}.\tag{9.5.8}$$

В частности, если  $x \in \text{Int } \Lambda_\delta$  и  $f \in l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$ , то  $(\Delta_{\delta, D} f)(x)$  совпадает с (9.5.7). Суммирование по частям дает

$$\langle f, -\Delta_\delta f \rangle_{\delta Z^d} = \delta^d \sum_{\delta Z^d} |\partial_\delta f(x)|^2.\tag{9.5.9}$$

Градиент удобно рассматривать как функцию, определенную на ребрах, связывающих соседние узлы. Пусть  $B(\delta Z^d)$  — множество

ребер решетки  $\delta Z^d$ , а  $B(\Lambda_\delta)$  — множество тех из них, которые содержатся в  $\Lambda_\delta$ . Тогда для  $f \in l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$

$$\langle f, -\Delta_\delta f \rangle_{\text{Int } \Lambda_\delta} = \langle f, -\Delta_\delta f \rangle_{\delta Z^d} = \delta^d \sum_{b \in B(\Lambda_\delta)} |\partial_\delta f(b)|^2. \quad (9.5.10)$$

Таким образом, разностный оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле, как и в непрерывном случае, возникает в результате сужения области определения билинейной формы, соответствующей разностному оператору Лапласа в  $l_2(\delta Z^d)$ .

**Предложение 9.5.1.** *Оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле  $-\Delta_{\delta, D}$  определяет ферромагнитное взаимодействие. Для этого взаимодействия справедливы корреляционные неравенства, доказанные в гл. 4.*

*Доказательство.* Внедиагональные члены в  $\langle f, -\Delta_{\delta, D} f \rangle_{\Lambda_\delta}$  появляются из  $\sum_{b, c \in \Lambda_\delta}$  в (9.5.7). Эти члены ферромагнитны, так как имеют вид: отрицательное число, умноженное на  $f(x)f(x')$ . Диагональные члены этой квадратичной формы (имеющие противоположный знак и не являющиеся ферромагнитными) будем относить не к взаимодействию  $H$ , а к плотностям  $d\mu_i(\xi_i)$ , введенным в § 4.1. Таким образом, взаимодействие является ферромагнитным. ■

Пусть  $C_{\delta, D} = (-\Delta_{\delta, D} + m^2)^{-1}$  есть решеточный ковариационный оператор с граничными условиями Дирихле, а  $C_\delta = C_{\delta, \emptyset} = (-\Delta_\delta + m^2)^{-1}$  — свободный решеточный ковариационный оператор. Рассмотрим  $C_{\delta, D}$  как оператор во всем пространстве  $l_2(\delta Z^d)$ . При этом граничные условия Дирихле задаются на всех гиперплоскостях, порожденных сдвигами  $\partial \Lambda_\delta$ . Тогда  $C_{\delta, D}$  и  $C_\delta$  связаны формулой, аналогичной (7.5.1) (полученной с помощью многократных нечетных отражений).

**Предложение 9.5.2.** *Равномерно по  $\delta$  выполняются следующие неравенства (первое в смысле  $l_2$ -операторов, а второе поточечно):*

$$0 \leq C_{\delta, D} \leq m^{-2}I,$$

$$C_{\delta, D}(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \text{Int } \Lambda_\delta.$$

*Доказательство.* Поточечная положительность выводится из решеточного принципа максимума [Bers, John, Schechter, 1964], как и при доказательстве следствия 7.5.2. Из (9.5.10) вытекает, что  $-\Delta_{\delta, D} \geq 0$ , откуда получаются операторные неравенства. ■

Для подробного анализа  $C_{\delta, D}$  диагонализуем  $\Delta_{\delta, D}$ , выбрав в  $l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$  базис, состоящий из  $(\delta^{-1} - 1)^d$  функций вида

$$\{e_k^\delta(x) = e_k(x) : x \in \text{Int } \Lambda_\delta, k_\alpha = \pi, 2\pi, \dots, (\delta^{-1} - 1)\pi\}, \quad (9.5.11)$$

где  $e_k$  определяются формулой (9.5.2). Заметим, что  $e_k$  обращаются в нуль на  $\partial \Lambda_\delta$ , поэтому  $e_k \in l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$ .

**Предложение 9.5.3.** Векторы  $e_k^\delta$  являются собственными векторами оператора  $-\Delta_{\delta,D}$  и

$$-\Delta_{\delta,D} e_k^\delta = \lambda_k^\delta e_k^\delta, \quad \lambda_k^\delta = 4\delta^{-2} \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(\delta k_\alpha/2). \quad (9.5.12)$$

Кроме того,

$$\langle e_k^\delta, e_l^\delta \rangle_{\text{Int } \Lambda_\delta} = \delta_{k,l}. \quad (9.5.13)$$

**Доказательство.** Так как  $-\Delta_{\delta,D} = \sum_{\alpha=1}^d \Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta} \partial_\alpha^* \partial_\alpha \Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta}$  и слагаемые суть коммутирующие самосопряженные операторы, мы можем диагонализировать каждое слагаемое  $\Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta} \partial_\alpha^* \partial_\alpha \Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta}$  независимо. Проверим, что  $\sin(k_\alpha x_\alpha)$  есть собственная функция  $\Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta} \partial_\alpha^* \partial_\alpha \Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta}$ . Действительно,  $\Pi_{\text{Int } \Lambda_\delta} \sin(k_\alpha x_\alpha) = \sin(k_\alpha x_\alpha)$ ,  $x \in \text{Int } \Lambda_\delta$ ,

$$\partial_\alpha^* \partial_\alpha \sin(k_\alpha x_\alpha) = 2\delta^{-2} \{1 - \cos(k_\alpha \delta)\} \sin(k_\alpha x_\alpha), \quad (9.5.14)$$

поэтому имеет место равенство (9.5.12). Кроме того,  $\sin(k_\alpha x_\alpha)$  есть простая собственная функция оператора  $\partial_\alpha^* \partial_\alpha$ , следовательно,  $\langle e_k^\delta, e_l^\delta \rangle = 0$  при  $k \neq l$ .

Для вычисления нормировки  $e_k^\delta$  заметим, что квадрат нормы разлагается в произведение:

$$\|e_k^\delta\|_{\text{Int } \Lambda_\delta}^2 = (2\delta)^d \prod_{\alpha=1}^d \sum_{j_\alpha=0}^{\delta-1} \sin^2(k_\alpha \delta j_\alpha), \quad (9.5.15)$$

поэтому достаточно найти сумму, отвечающую  $\alpha = 1$ . При  $k = \pi l$  и  $l = 1, 2, \dots, \delta^{-1} - 1$  имеем

$$\begin{aligned} 2\delta \sum_{j=0}^{1/\delta} \sin^2(k\delta j) &= \delta \sum_{j=0}^{(1/\delta)-1} \{1 - \text{Re } e^{2ik\delta j}\} = \\ &= 1 - \delta \text{Re} [(1 - e^{2ik}) / (1 - e^{2ik\delta})] = 1, \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

так как  $2k = 2\pi l$ ,  $e^{2ik} = 1$  и  $0 < 2k\delta < 2\pi$ . Таким образом, равенство (9.5.13) доказано. ■

**Следствие 9.5.4.** Отображение

$$i_\delta: e_k^\delta \rightarrow e_k \quad (9.5.17)$$

определяет изометрическое вложение  $l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$  в  $L_2(\Lambda)$ .

Пусть  $\Pi_\delta$  есть оператор проектирования, действующий в  $L_2(\Lambda)$  и обрезающий ряд Фурье при  $k_\alpha/\pi = \delta^{-1}$ , т. е.

$$\Pi_\delta \sum \alpha_k e_k = \sum_{1 \leq k_\alpha/\pi \leq (1/\delta)-1} \alpha_k e_k. \quad (9.5.18)$$

Тогда  $i_\delta^*$  вычисляется по формуле

$$(i_\delta)^* f = (\Pi_\delta f)|_{\Lambda_\delta}, \quad (9.5.19)$$

т. е. проекция  $\Pi_\delta f$  ограничивается на точки решетки.

В силу изометричности вложения, установленной в следствии 9.5.4, мы можем рассматривать  $C_{\delta, D}$  как оператор, действующий в  $L_2(\Lambda)$ . Иначе говоря,

$$C_{\delta, D} = i_{\delta} C_{\delta, D} i_{\delta}^* \tag{9.5.20}$$

где в правой части равенства  $C_{\delta, D}$  действует в  $l_2(\text{Int } \Lambda_{\delta})$ , а в левой части — в  $L_2(\Lambda)$ . Как оператор в  $L_2(\Lambda)$ ,  $C_{\delta, D}$  имеет ядро

$$C_{\delta, D}(x, y) = \sum_{1 \leq k_{\alpha}/\pi \leq (1/\delta)-1} (\lambda_k^{\delta} + m^2)^{-1} e_k(x) e_k(y). \tag{9.5.21}$$

Ограничение этого ядра на точки решетки  $x, y \in \text{Int } \Lambda_{\delta}$  совпадает с матричным представлением  $C_{\delta, D}$  как оператора в  $l_2(\text{Int } \Lambda_{\delta})$ .

**Предложение 9.5.5.** Операторы  $C_{\delta, D}$  сходятся по норме при  $\delta \rightarrow 0$  к  $C_D$ , где  $C_D$  — ковариационный оператор в  $L_2(\Lambda)$  с граничными условиями Дирихле. Все операторы рассматриваются как действующие в  $L_2(\Lambda)$  (следствие 9.5.4). Фактически  $\|C_{\delta, D} - C_D\| \leq O(\delta^2)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $D_{\delta} \equiv \sum_{1 \leq k_{\alpha}/\pi \leq (1/\delta)-1} (k^2 + m^2)^{-1} e_k(x) e_k(y)$ . Мы утверждаем, что  $\|C_{\delta, D} - D_{\delta}\| \leq O(\delta^2)$ . Действительно,

$$(\lambda_k^{\delta} + m^2)^{-1} - (k^2 + m^2)^{-1} = (k^2 - \lambda_k^{\delta})(\lambda_k^{\delta} + m^2)^{-1} (k^2 + m^2)^{-1}. \tag{9.5.22}$$

При этом

$$\lambda_k^{\delta} = \sum_{\alpha=1}^d \left[ 2\delta^{-1} \sin \frac{k_{\alpha} \delta}{2} \right]^2 = \sum_{\alpha=1}^d k_{\alpha}^2 \left[ \frac{\sin \theta_{\alpha}^{\delta}}{\theta_{\alpha}^{\delta}} \right]^2, \tag{9.5.23}$$

где  $\theta_{\alpha}^{\delta} \equiv k_{\alpha} \delta/2$ . Поскольку  $0 \leq \theta_{\alpha}^{\delta} \leq \pi/2$ , имеем

$$4k^2/\pi^2 \leq \lambda_k^{\delta} \leq k^2. \tag{9.5.24}$$

Поэтому

$$0 \leq k^2 - \lambda_k^{\delta} = \sum_{\alpha=1}^d k_{\alpha}^2 (1 - [\sin \theta_{\alpha}^{\delta}/\theta_{\alpha}^{\delta}]^2) \leq O(1) \sum_{\alpha=1}^d k_{\alpha}^2 (\theta_{\alpha}^{\delta})^2 \leq O(1) |k|^4 \delta^2, \tag{9.5.25}$$

так как  $0 \leq 1 - x^{-2}(\sin x)^2 \leq O(x^2)$ . Таким образом, правая часть (9.5.22) не превосходит  $O(1)\delta^2$ . Поскольку  $e_k(x) e_k(y)$  есть ядро ортогональной проекции на  $e_k$ , получаем:  $\|C_{\delta, D} - D_{\delta}\| \leq O(\delta^2)$ . Наконец,

$$C_D(x, y) = \sum_{1 \leq k_{\alpha}/\pi < \infty} (k^2 + m^2)^{-1} e_k(x) e_k(y).$$

Следовательно,

$$\|D_{\delta} - C_D\| \leq \inf \{ (k^2 + m^2)^{-1} : k_{\alpha}/\pi \geq \delta^{-1} \text{ для некоторого } \alpha \}$$

и  $C_{\delta, D} \rightarrow C_D$  по норме. ■

Введем теперь выпуклое множество  $\mathcal{E}_{m, \Lambda}$ , порожденное всеми операторами  $C_{\delta, D}(m$  и  $\Lambda$  фиксированы) при  $\delta = 0$  и  $\delta = 2^{-\nu}$ ,  $\nu \in Z_+$ . Оно пригодится нам при изучении пределов решеточных

мер  $P(\varphi)_2$ , когда  $\delta \rightarrow 0$ . Каждый оператор  $C \in \mathcal{C}_{m, \Lambda}$  диагонализуется в базисе  $\{e_k\}$ , поэтому уравнение

$$C e_k = (\lambda_k^{(C)} + m^2)^{-1} e_k \quad (9.5.26)$$

определяет числа  $\lambda_k^{(C)}$ . Из (9.5.24) и свойства выпуклости следует, что

$$4k^2/\pi^2 \leq \lambda_k^{(C)}. \quad (9.5.27)$$

Заметим также, что  $\Pi_\delta C = C \Pi_\delta = \Pi_\delta C \Pi_\delta$ .

**Предложение 9.5.6.** *Определим для каждого  $C \in \mathcal{C}_{m, \Lambda}$  постоянную викова упорядочения*

$$c_\delta(x) = (\Pi_\delta C)(x, x).$$

Тогда

$$0 \leq c_\delta(x) \leq \begin{cases} \text{const} \ln \delta^{-1} & \text{при } d = 2, \\ \text{const} \delta^{-d+2} & \text{при } d \geq 3 \end{cases}$$

и константы не зависят от  $C \in \mathcal{C}_{m, \Lambda}$ .

*Доказательство.* Согласно (9.5.2),  $|e_k(x)| < 2^{d/2}$ , поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq c_\delta(x) &= \sum_{1 \leq k_\alpha/\pi \leq (1/\delta)-1} (\lambda_k^{(C)} + m^2)^{-1} e_k(x)^2 \leq \\ &\leq 2^d \cdot \sum_{1 \leq k_\alpha/\pi \leq (1/\delta)-1} (\lambda_k^{(C)} + m^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (9.5.27), получаем оценку

$$c_\delta(x) \leq 2^d \cdot \sum_{1 \leq k_\alpha/\pi \leq (1/\delta)-1} (4k^2\pi^{-2} + m^2)^{-1},$$

из которой легко следует наше утверждение. ■

**Предложение 9.5.7.** *Пусть  $d = 2$ ,  $p < \infty$ . Тогда для  $C \in \mathcal{C}_{m, \Lambda}$*

$$C(x, \cdot) \in L_p(\Lambda), \quad (\Pi_\delta C)(x, \cdot) \in L_p(\Lambda),$$

и их нормы ограничены равномерно по  $x$  и  $C$ . Для любого  $\varepsilon < \min\{2/p, 1\}$  при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно по  $C$  справедливы оценки

$$\sup_{x \in \Lambda} \|C(x, \cdot) - (\Pi_\delta C)(x, \cdot)\|_{L_p(\Lambda)} \leq O(\delta^\varepsilon),$$

$$\sup_{x \in \Lambda} \|C_{\delta, D}(x, \cdot) - C_D(x, \cdot)\|_{L_p(\Lambda)} \leq O(\delta^\varepsilon).$$

*Доказательство.* Так как  $\Lambda$  — ограниченная область, можно считать, что  $2 \leq p$ . Неравенство Хаусдорфа — Юнга доказывается для разложений по синусам так же, как и в случае обычных рядов Фурье. Нужно лишь отдельно рассмотреть вклад от четных и нечетных  $k_\alpha/\pi$ . (Периодический случай см. в книге [Zugmuid, 1959].) Поэтому  $\|f\|_{L_p(\Lambda)} \leq \|\tilde{f}\|_{L_{p'}(\pi z^d)}$ , где  $p' = p/(p-1) \in [1, 2]$ . Заметим,



что

$$\|C_{\delta, D}(x, \cdot)\|_{L_p(\Lambda)} = \left\| \sum_{k/\pi} (\lambda_k^\delta + m^2)^{-1} e_k(x) e_k(\cdot) \right\|_{L_p(\Lambda)}. \quad (9.5.28)$$

Коэффициенты Фурье для  $C_{\delta, D}(x, \cdot)$  равны  $(\lambda_k^\delta + m^2)^{-1} e_k(x)$ . Следовательно, применяя (9.5.24), получаем оценку для  $l_{p'}$ -нормы ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \|(\lambda_k^\delta + m^2)^{-1} 2^{d/2}\|_{l_{p'}} &\leq \text{const} \| (k^2 + 1)^{-1} \|_{l_{p'}} = \\ &= \text{const} \| (k^2 + 1)^{-p'} \|_{l_1}^{1/p'} \leq \text{const}, \end{aligned} \quad (9.5.29)$$

так как  $p' > 1$ . Рассмотрев вместо  $C_{\delta, D}$  оператор  $C_{\delta, D} - C_D$ , найдем его коэффициенты Фурье:

$$\left[ (\lambda_k^\delta + m^2)^{-1} - (k^2 + m^2)^{-1} \right] e_k(x) \equiv \alpha(k).$$

Как и при оценивании выражения (9.5.22), воспользуемся неравенством  $1 - (x^{-1} \sin x)^2 \leq O(x^\varepsilon)$  при  $0 \leq \varepsilon \leq 2$  и оценкой (9.5.25); получим

$$|\alpha(k)| \leq \text{const} \delta^\varepsilon (k^2 + 1)^{-1+\varepsilon/2} \quad \text{для любого } 0 \leq \varepsilon \leq 2.$$

Выберем теперь  $\varepsilon < 2/p$ . Тогда

$$(-2 + \varepsilon)p' < (-2 + 2(1 - 1/p'))p' = -2,$$

так что  $(k^2 + 1)^{-1+\varepsilon/2} \in l_{p'}$ . Следовательно,  $\|\alpha(\cdot)\|_{l_{p'}} \leq O(\delta^\varepsilon)$ . Доказательства для операторов  $C \in \mathcal{C}_{m, \Lambda}$  общего вида аналогичны. ■

В заключение этого параграфа обсудим соотношение между ковариационными операторами с граничными условиями Дирихле на границах  $\partial\Lambda_1$  и  $\partial\Lambda_2$  двух областей  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ . Чтобы указать зависимость от  $\Lambda$  явно, введем обозначение  $C_{\delta, \Lambda} \equiv C_{\delta, D}$ . Удобно рассматривать  $C_{\delta, \Lambda_1}$  и  $C_{\delta, \Lambda_2}$  как матричные операторы в пространстве  $l_2(\Lambda_{2, \delta})$ , причем  $C_{\delta, \Lambda_1} = 0$  на  $l_2(\Lambda_{2, \delta} \setminus \text{Int } \Lambda_{1, \delta})$ .

При расширении области  $\Lambda$  происходит монотонное возрастание  $C_{\delta, \Lambda}$  и в операторном смысле, и поточечно (в смысле матричных элементов). Это есть решеточный аналог монотонности, доказанной в § 7.8, причем результаты § 7.8 можно получать из этой решеточной монотонности в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Предложение 9.5.8.** Решеточные ковариационные операторы  $C_{\delta, \Lambda}$  монотонны по  $\Lambda$ . При  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$

$$C_{\delta, \Lambda_1} \leq C_{\delta, \Lambda_2} \quad (9.5.30)$$

$$\text{и } 0 \leq C_{\delta, \Lambda_1}(x, y) \leq C_{\delta, \Lambda_2}(x, y), \quad x, y \in \Lambda_{2, \delta}. \quad (9.5.31)$$

*Доказательство.* Как и в § 7.8, мы вводим интерполирующее семейство для операторов с граничными условиями на  $\partial\Lambda_2$  и  $\partial\Lambda_1$  с помощью локального возмущения массы. При этом к  $C_{\delta, \Lambda_2}^{-1}$  добавляется член  $m(x)^2 \rightarrow \infty$  при  $x \in \Lambda_{2, \delta} \setminus \text{Int } \Lambda_{1, \delta}$ . Доказательство соотношения

$$C_{\delta, \Lambda_1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} C(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (C_{\delta, \Lambda_2}^{-1} + \lambda \chi_{\Lambda_2 \setminus \text{Int } \Lambda_1})^{-1} \quad (9.5.32)$$

проводится аналогично доказательству предложения 7.8.1, хотя (9.5.32) элементарно, так как  $C_{\delta, \Lambda_1}$  — конечная матрица. Операторная монотонность следует из неравенства

$$dC/d\lambda = -C(\lambda) \chi_{\Lambda_2} \setminus \text{Int } \Lambda_1 C(\lambda) \leq 0. \quad (9.5.33)$$

Поточечная положительность ( $C_{\delta, \Lambda}(x, y) \geq 0$ ) в узлах решетки  $x, y \in \Lambda_\delta$  вытекает из решеточного принципа максимума; см. предложение 9.5.2. Поточечная монотонность следует из (9.5.33) и поточечной положительности. ■

В гл. 18 мы получим решеточный аналог представления ковариации через интеграл Винера (7.8.3). При этом диффузионный процесс заменяется случайным блужданием по решетке  $\delta Z^d$ . Поточечная и операторная монотонность могут быть также доказаны применением решеточного аналога формулы (7.8.14) к (9.5.33).

## 9.6. Решеточные аппроксимации мер $P(\varphi)_2$

В этом параграфе вводится решеточная аппроксимация для мер  $P(\varphi)_2$ , рассмотренных в гл. 8. В действительности мы уже пользовались в § 8.7 дискретной аппроксимацией, основанной на приближении суммами Римана. Изучаемая ниже аппроксимация связана с обрезанием рядов Фурье. Хотя обе эти аппроксимации весьма полезны, вторая имеет некоторое преимущество: она сохраняет OS-положительность и ферромагнитные свойства меры. Поэтому решеточную аппроксимацию удобно использовать для доказательства корреляционных неравенств. Можно также доказать сходимость решеточных аппроксимаций для модели  $\varphi^4$  в размерности  $d = 3$ , но мы не будем здесь этого касаться.

Для простоты, как и в § 9.5, выберем в качестве  $\Lambda$  единичный квадрат. Пусть

$$f(x) = \sum_{k_a/\pi \in Z_+} \tilde{f}(k) e_k(x) \quad (9.6.1)$$

есть разложение Фурье по синусам для функции  $f$ . Здесь базис  $e_k(x)$  определен формулой (9.5.2). Пусть  $C_{\delta, D}$  есть оператор (9.5.21), действующий в  $L_2(\Lambda)$ . Тогда

$$(C_{\delta, D} f)(x) = \sum_{1 \leq k_a/\pi \leq (1/\delta)-1} (\lambda_k^\delta + m^2)^{-1} \tilde{f}(k) e_k(x). \quad (9.6.2)$$

Напомним, что отображение  $i_\delta: l_2(\text{Int } \Lambda_\delta) \rightarrow L_2(\Lambda)$ , определяемое формулой (9.5.17), есть изометрическое вложение, а  $i_\delta^*: L_2(\Lambda) \rightarrow l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$  определяется обрезанием ряда Фурье с последующим ограничением на узлы решетки.

Если имеется гауссов процесс  $\varphi(y)$  с ковариацией  $C$ , то

$$\varphi_\delta(x) \equiv (i_\delta^* \varphi)(x), \quad x \in \text{Int } \Lambda_\delta, \quad (9.6.3)$$

определяет гауссово поле на решетке с ковариацией

$$C_\delta = i_\delta^* C i_\delta = i_\delta^* \Pi_\delta C i_\delta. \quad (9.6.4)$$

Здесь мы выбираем

$$C \in \mathcal{E}_{m, \Lambda} \quad (9.6.5)$$

где  $\mathcal{E}_{m, \Lambda}$  — выпуклое множество ковариационных операторов, порожденное операторами  $C_{\delta, D}$  при  $\delta = 0$  или  $\delta = 2^{-\nu}$  (§ 9.5). Поле  $\varphi_\delta$  можно рассматривать как гауссову меру на  $R^{|\text{Int } \Lambda_\delta|}$  или на  $\mathcal{S}'$ . Обе меры имеют ковариацию  $C_\delta$ , хотя в первом случае надо считать  $C_\delta$  оператором в  $l_2(\text{Int } \Lambda_\delta)$ , а во втором случае  $C_\delta$  действует с помощью изометрии  $i_\delta$  в пространстве  $L_2(\Lambda)$ . Переходя к явным формулам, обозначим  $\prod_{x \in \text{Int } \Lambda_\delta} d\varphi_\delta(x)$  меру Лебега в  $R^{|\text{Int } \Lambda_\delta|}$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\varphi_{\delta, D} &= (\det C_{\delta, D})^{-1/2} \pi^{-|\text{Int } \Lambda_\delta|/2} \times \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{\delta^{2d}}{2} \sum_{x, y \in \text{Int } \Lambda_\delta} \varphi_\delta(x) C_{\delta, D}^{-1}(x, y) \varphi_\delta(y) \right] \prod_x d\varphi_\delta(x) = \\ &= (\det C_{\delta, D})^{-1/2} \pi^{-|\text{Int } \Lambda_\delta|/2} \times \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (\|\nabla \varphi_\delta\|_{l_2}^2 + m^2 \|\varphi_\delta\|^2) \right] \prod_x d\varphi_\delta(x) \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

есть гауссова мера в  $R^{|\text{Int } \Lambda_\delta|}$  с ковариацией  $C_{\delta, D}$ .

Для изучения сходимости при  $\delta \rightarrow 0$  удобно рассматривать  $d\varphi_{\delta, D}$  как меру в  $\mathcal{S}'(R^d)$  с ковариацией  $C_{\delta, D}$ . Сходимость гауссовых мер в смысле сходимости моментов и производящих функций есть прямое следствие сходимости ковариационных операторов; она вытекает из формулы (6.2.2), выражающей производящую функцию с помощью оператора  $C_{\delta, D}$ .

Решеточная аппроксимация полиномиальных взаимодействий  $:P(\varphi, f):$  (§ 8.6) задается выражением

$$:P(\varphi_\delta, f):_{C_{\delta, D}} = \delta^d \sum_{x \in \Lambda_\delta} \sum_{j=0}^n : \varphi_\delta(x)^j :_{C_{\delta, D}} f_j(x). \quad (9.6.7)$$

В этом параграфе мы ограничимся функциями  $f_j$ , удовлетворяющими условиям (8.6.4) и имеющими вид: гладкая функция, умноженная на характеристическую функцию прямоугольника. Для сходимости решеточных аппроксимаций существенно, чтобы функции  $f_j$  были интегрируемы по Риману. Для краткости введем обозначение

$$:P_\delta : c = :P(\varphi_\delta, f) : c$$

и рассмотрим пределы при  $\delta \rightarrow 0$  мер

$$d\mu_{\delta, D} = \frac{\exp(-:P_{\delta}:C_{\delta, D}) d\varphi_{\delta, D}}{\int \exp(-:P_{\delta}:C_{\delta, D}) d\varphi_{\delta, D}}. \quad (9.6.8)$$

Сходимость мер (9.6.8) не вытекает из сходимости операторов  $C_{\delta, D}$ , поэтому необходимо доказать решеточный аналог теоремы 8.6.2. Положим

$$C(t) = tC_D + (1-t)C_{\delta, D},$$

$$d\mu_{\delta, D, t} = \frac{\exp(-:P_{\delta}:C(t)) d\varphi_C(t)}{\int \exp(-:P_{\delta}:C(t)) d\varphi_C(t)}.$$

**Предложение 9.6.1.** Пусть  $d = 2$ , и пусть  $Q(\varphi_{\delta'})$  — полином от поля  $\varphi_{\delta'}$ . Тогда при  $\delta \rightarrow 0$

$$\left| \int Q(\varphi_{\delta'}) d\mu_{\delta, D, 1} - \int Q(\varphi_{\delta'}) d\mu_{\delta, D, 0} \right| \leq O(\delta).$$

**Замечание.** Мы переходим к пределу при  $\delta \rightarrow 0$  в два этапа. Вначале рассматриваем предел при  $\delta \rightarrow 0$  ковариации меры  $d\varphi_{\delta, D}$  и виково упорядочения полинома  $P$ , а затем изучаем сходимость поля  $\varphi_{\delta}$  и дискретной суммы  $\sum_{x \in \text{Int } \Lambda_{\delta}} \text{ в } P$ .

**Доказательство.** Воспользуемся решеточным вариантом формулы изменения ковариации (9.1.34). В действительности конечномерное представление (9.6.6) меры  $d\varphi_{\delta, D}$  позволяет свести формулу (9.1.34) к обычным правилам вычисления производных. Так как, согласно предложению 9.5.5,  $\|\dot{C}\| = \|C_{\delta, D} - C_D\| = O(\delta^2)$ , матричный оператор

$$\dot{C}_{\delta} \equiv i_{\delta}^* \dot{C} i_{\delta}: l_2(\text{Int } \Lambda_{\delta}) \rightarrow l_2(\text{Int } \Lambda_{\delta})$$

сходится с той же скоростью. С помощью неравенства Шварца отделим в интеграле по  $d\varphi_C(t)$  полиномиальный множитель  $Q$  и множитель, отвечающий экспоненте:

$$\left| \int Q e^{-:P_{\delta}:C(t)} d\varphi_C(t) \right| \leq \left( \int |Q|^2 d\varphi_C(t) \right)^{1/2} \left( \int e^{-2:P_{\delta}:C(t)} d\varphi_C(t) \right)^{1/2}.$$

Первый множитель в правой части сходится как  $O(\delta^2)$ , поскольку  $\|C_{\delta}\| \leq O(\delta^2)$ . Для завершения первого этапа доказательства осталось показать, что экспоненциальный множитель ограничен равномерно по  $\delta$  и  $t$ . Равномерная оценка установлена в следующей лемме, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 8.6.2.

**Лемма 9.6.2.** Допустим, что  $d = 2$  и  $0 \leq t \leq 1$ . Тогда интеграл  $\int e^{-:P_{\delta}:C(t)} d\varphi_C(t)$  ограничен и отделен от нуля равномерно по  $\delta$  и  $t$ .

**Набросок доказательства.** Вместо  $\kappa^{-1}$ , т. е. обратного ультрафиолетового обрезания, возьмем  $\delta_1 \geq \delta$ . Имеются две важные оценки. Во-первых, в силу предложения 9.5.6, полином  $:P_{\delta_1}:C(t)$  ограничен снизу величиной  $O(\ln |\delta_1| + 1)^{(\deg P)/2}$ .

Во-вторых, справедлива оценка, аналогичная теореме 8.5.3:

$$\left| \int ( :P_{\delta'_i} :_{C(t)} - :P_{\delta''_i} :_{C(t)})^j d\varphi_{C(t)} \right| \leq j!^{(\deg P)/2} O(\delta_1^\epsilon), \quad j - \text{четное число.} \quad (9.6.9)$$

Множитель  $O(\delta_1^\epsilon)$  связан с оценками из предложения 9.5.7. Оценка сверху доказывается теперь так же, как и в теореме 8.6.2. Оценка снизу вытекает из равномерной оценки сверху интеграла  $\int :P_{\delta''_i} :_{C(t)}^2 d\varphi_{C(t)}$ .

Переходя ко второму этапу доказательства сходимости при  $\delta \rightarrow 0$ , положим

$$P(t) = t :P_{\delta=0} :_{C_D} + (1-t) :P_{\delta} :_{C_D},$$

$$d\mu_t = e^{-P(t)} d\varphi_{C_D} / \int e^{-P(t)} d\varphi_{C_D}.$$

**Предложение 9.6.3.** Пусть  $d = 2$  и  $Q(\varphi_{\delta'})$  — полином от поля  $\varphi_{\delta'}$ . Тогда при фиксированном  $\delta'$  и  $\delta \rightarrow 0$

$$\left| \int Q(\varphi_{\delta'}) d\mu_1 - \int Q(\varphi_{\delta'}) d\mu_0 \right| \leq O(\delta^\epsilon).$$

*Доказательство.* Гауссова мера считается теперь определенной на  $\mathcal{S}'(R^2)$ . Оцениваемая разность ограничена величиной

$$\sup_t \left| \int Q(\varphi_{\delta'}) \frac{d}{dt} d\mu_t \right|. \quad (9.6.10)$$

Вновь выделяем полиномиальный и экспоненциальный множители. Применяя неравенство Шварца второй раз, выделяем экспоненциальные множители, отвечающие соответственно  $:P_{\delta=0} :$  и  $:P_{\delta} :$ . Множитель, содержащий  $\exp(-:P_{\delta=0} :_{C_D})$ , был оценен в § 8.6, и, поскольку он не зависит от  $\delta$ , оценка равномерна по  $\delta$ . Множитель, отвечающий  $:P_{\delta} :$ , ограничен согласно лемме 9.6.2.

Наконец, рассмотрим полиномиальные множители, ограничивающие (9.6.10). Они содержат гауссов интеграл  $\int Q^2(dP(t)/dt)^2 d\mu_{C_D}$ , который стремится к нулю, как в теореме 8.5.3. ■

Объединим два предложения в одну теорему, из которой вытекает сходимость решеточных мер  $P(\varphi)_2$  к соответствующим непрерывным мерам.

**Теорема 9.6.4.** Пусть  $d = 2$  и  $Q(\delta')$  — полином от поля  $\varphi_{\delta'}$ . Тогда при фиксированном  $\delta'$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int Q(\delta') d\mu_{\delta, D} = \int Q(\delta') d\mu_D.$$

**Замечание.** Аналогично доказываются соответствующие результаты для граничных условий  $B = \emptyset, P, N$ .

## 10.1 Введение

В этой главе мы получим основные оценки, используемые при предельном переходе к бесконечному объему. Формально эти оценки не зависят от размерности. Хотя доказательства относятся к случаю  $P(\varphi)_2$ -мер в конечном объеме (гл. 8), аналогичные методы применимы и в более общей ситуации. Например, для решеточных полей на решетке произвольной размерности оценки, получаемые в этой главе, не зависят от шага решетки. В этом проявляется существенное отличие от случая ультрафиолетовых оценок гл. 8, так как последние сильно зависят от размерности пространства. Результаты § 12.2, т. е. формулы интегрирования по частям, также справедливы в любой размерности.

10.2 Корреляционные неравенства для полей  $P(\varphi)_2$ 

В этом параграфе мы обобщим на случай полей  $P(\varphi)_2$  корреляционные неравенства и теорему Ли—Янга, доказанные в гл. 4 для полей на конечной решетке. Напомним ограничения на полином  $P$ , налагаемые различными неравенствами:

неравенства ФКЖ (§ 4.4):

$$\text{произвольный полуограниченный } P; \quad (10.2.1a)$$

неравенства Гриффитса (§ 4.1):

$$P = \text{четный полином} - \mu\varphi, \quad \mu \geq 0; \quad (10.2.1b)$$

неравенства Лебовица (§ 4.3):

$$P = \lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^2 - \mu\varphi, \quad \lambda > 0, \quad \mu \geq 0; \quad (10.2.1c)$$

теорема Ли—Янга (§ 4.5):

$$P = \lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^2 - \mu\varphi, \quad \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > 0. \quad (10.2.1d)$$

Корреляционные неравенства (10.2.1a—c) справедливы для любой меры, являющейся пределом мер (в смысле сходимости моментов), удовлетворяющих этим неравенствам. Теорема Ли—Янга остается верной, если свободная энергия

$$f \equiv \ln Z / \text{объем}$$

равномерно ограничена и сходится для  $\mu$  из комплексной области. В силу теоремы 9.6.4, решеточные поля, сходящиеся к непрерывному полю в конечном объеме при граничных условиях Дирихле, удовлетворяют сформулированным условиям. Аналогично, решеточные аппроксимации сходятся при граничных усло-

виях Неймана и при периодических граничных условиях. Таким образом, имеет место следующая

**Теорема 10.2.1.** Пусть выполнены условия (10.2.1). Тогда для непрерывного поля  $P(\varphi)_2$  в конечном объеме справедливы корреляционные неравенства и теорема Ли — Янга.

**Замечание.** После того как в гл. 11 (и в гл. 18) будут построены меры в бесконечном объеме, мы увидим, что для них также верны корреляционные неравенства и теорема Ли — Янга.

В качестве первого приложения корреляционных неравенств докажем утверждение о монотонной зависимости функций Швингера от объема (при граничных условиях Дирихле). Аналогичные результаты для систем статистической механики получены в § 4.2.

**Теорема 10.2.2.** Пусть  $\langle \cdot \rangle_{\partial\Lambda, D}$  обозначает среднее по  $P(\varphi)_2$ -мере (9.1.30), определенной в прямоугольнике  $\Lambda \subset R^2$  с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ . В формуле (9.1.30) мы полагаем  $C_2 = (-\Delta_{\partial\Lambda} + m^2)^{-1}$ , а оператор  $C_1$  считаем не зависящим от  $\Lambda$ . Предположим, что выполнено условие (10.2.1b). Тогда функции Швингера

$$S^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle_{\partial\Lambda, D} \quad (10.2.2)$$

неотрицательны и монотонно возрастают при увеличении  $\Lambda$ . Кроме того, при  $0 \leq f \in C_0^\infty$  характеристический функционал

$$\langle e^{\varphi(f)} \rangle_{\partial\Lambda, D} = S\{-if\}_{\partial\Lambda, D} \quad (10.2.3)$$

положителен и монотонно возрастает с увеличением  $\Lambda$ .

**Замечание.** В этой теореме виково упорядочение полинома  $P$  не должно зависеть от  $\Lambda$ . Например, это упорядочение можно проводить с помощью свободного ковариационного оператора  $C_\varphi$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Lambda_1 \subset \Lambda$ . Рассмотрим решеточную аппроксимацию из § 9.5.6 с шагом решетки  $\delta$ . Пусть  $\langle \cdot \rangle_{\delta, \partial\Lambda_1, D} = \langle \cdot \rangle$  обозначает усреднение относительно решеточной меры  $d\mu_{\delta, D}$  вида (9.6.8) с граничными условиями Дирихле. Мы покажем, что при фиксированном  $\delta$  имеет место монотонность по  $\Lambda$  функций (10.2.2—3) со средним  $\langle \cdot \rangle$ . Сходимость решеточных аппроксимаций при  $\delta \rightarrow 0$  (см. теорему 9.6.4) завершает доказательство.

Докажем теперь, что монотонность в случае решеточной аппроксимации следует из неравенства Гриффитса. Действительно, рассмотрим, как и в предложении 9.5.8, локальное возмущение массы  $m(x)^2 = \lambda \chi_{\Lambda \setminus \text{Int } \Lambda_1}(x)$ . При фиксированном  $\delta$ , переходя к пределу  $\lambda \rightarrow \infty$ , получаем оператор ковариации и меру  $d\mu_{\delta, D}$  с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda_1$ . С другой стороны, при возрастании  $\lambda$  функции Швингера и характеристический функционал уменьшаются, так как

$$-\frac{d}{d\lambda} S_{\delta, \partial\Lambda_1, D}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \delta^d \sum_{x \in \Lambda_\delta \setminus \Lambda_{1\delta}} [\langle \varphi_\delta(x_1) \dots \varphi_\delta(x_n) : \varphi_\delta(x)^2 : \rangle - \langle \varphi_\delta(x_1) \dots \varphi_\delta(x_n) \rangle \langle : \varphi_\delta(x)^2 : \rangle]. \quad (10.2.4)$$

Без виково упорядочения правая часть была бы положительна в силу второго неравенства Гриффитса. Усложнение, связанное с наличием упорядочения, можно преодолеть, заметив, что  $:\Phi_\delta(x)^2: = \Phi_\delta(x)^2 - c_\delta(x)$ , где константа  $c_\delta(x)$  не зависит от  $\phi$ . Поэтому слагаемые в правой части (10.2.4), содержащие  $c_\delta(x)$ , сокращаются. ■

**Следствие 10.2.3.** *Предположим, что выполнено условие (10.2.1b). Тогда функции Швингера и характеристический функционал  $S\{-if\}$ , где  $f \geq 0$ , монотонно возрастают по  $\mu$ .*

*Доказательство.* Производная функционала  $S$  есть функция Швингера, а производная функции Швингера есть усеченная функция Швингера. Таким образом, утверждения следствия вытекают из первого и второго неравенств Гриффитса. ■

### 10.3 Монотонность и расщепление при условиях Дирихле или Неймана

В этом параграфе мы будем рассматривать статистическую сумму

$$Z_B(\Lambda) = \int \exp(-:V:c_B) d\varphi_{C_B}$$

и свободную энергию

$$\alpha^B(\Lambda) = (\ln Z_B(\Lambda)) / |\Lambda|. \quad (10.3.1)$$

Здесь, как и в гл. 7, 8,  $B = \emptyset, N, \Gamma, D, p$  обозначает граничные условия (соответственно свободные, Неймана, Дирихле или периодические), определяющие ковариационный оператор  $C_B$ , а  $V = \int_{\Lambda} P(\varphi(x)) dx$ . Мы будем считать, что константы связи удовлетворяют условиям (8.6.2, 4). В случаях  $N, D$  и  $p$  предполагается, что имеется решетка в  $R^2$  и граничные условия задаются на всех ее линиях, а в случае  $\Gamma$ , где  $\Gamma$  — часть этой решетки, только на линиях  $\Gamma$ .

**Предложение 10.3.1** (Обусловленность). *Пусть  $\Lambda$  фиксировано и  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ . Тогда*

$$Z_D \leq Z_{\Gamma_2} \leq Z_{\Gamma_1} \leq Z_{\emptyset} \leq Z_N, \quad Z_D \leq Z_p \leq Z_N. \quad (10.3.2)$$

*Доказательство.* Мы докажем второе неравенство: первое и третье являются частными случаями второго, а остальные доказываются аналогично. Пусть  $C(t) = tC_{\Gamma_1} + (1-t)C_{\Gamma_2}$ , и  $Z(t) = \int \exp(-:V:c(t)) d\varphi_{C(t)}$ . Тогда  $\dot{C}(t) = C_{\Gamma_1} - C_{\Gamma_2} \geq 0$  по неравенству (7.7.4), и, следовательно,  $dZ(t)/dt \geq 0$  в силу (9.1.35). ■

Заметим, что  $Z_D$  и  $Z_N$  представляются в виде произведения, т. е. расщепляются, причем каждый множитель отвечает некоторому квадрату решетки  $\Delta \subset \Lambda$ :

$$Z_D(\Lambda) = \prod_{\Delta \subset \Lambda} Z_D(\Delta). \quad (10.3.3)$$

$$Z_N(\Lambda) = \prod_{\Delta \subset \Lambda} Z_N(\Delta). \quad (10.3.4)$$



**Следствие 10.3.2.** Предположим, что коэффициенты  $f$  полинома взаимодействия  $P$  на каждом квадрате решетки  $\Delta$  имеют конечные нормы  $N(f)$  и  $M(f)$ , определенные в (8.6.5—6). Пусть, кроме того, эти нормы равномерно ограничены по  $\Delta$ . Тогда

$$e^{-O(|\Lambda|)} \leq Z_B(\Lambda) \leq e^{O(|\Lambda|)} \quad (10.3.5)$$

и свободная энергия (10.3.1) равномерно ограничена при всех  $\Lambda$ .

**Доказательство.** Оценка сверху вытекает из оценки сверху для  $Z_N$  в теореме 8.6.2 и из (10.3.4). Пусть  $f_0$  в (8.6.2) есть константа связи, отвечающая свободному члену полинома  $P$ . Тогда из (8.6.4) и предположения о равномерной ограниченности норм следует, что  $|\int f_0 dx| \leq \text{const}|\Lambda|$ . Положим  $V_1 = V - \int f dx$ , так что

$\int :V_1:_{C_B} d\varphi_{C_B} = 0$ . Для функции

$$F_B(s) = \int \exp(-s \cdot V_1:_{C_B}) d\varphi_{C_B}$$

имеем  $F_B(0) = 1$ ,  $F'_B(0) = 0$ ,  $F''_B(s) \geq 0$ . Следовательно,  $F_B(s) \geq 1$  и

$$\exp\left(-\int f_0 dx\right) \leq \exp\left(-\int f_0 dx\right) F_D(1) = Z_D(\Lambda).$$

**Замечание 1.** Пусть  $:V:_{C_B} = \sum_{f=0}^n \varphi'(f_f):_{C_B} = :P(\varphi, f):_{C_B}$ . Из приведенного выше доказательства следует, что

$$\exp\left(-\int f_0 dx\right) \leq \int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_B}) d\varphi_{C_B} \equiv Z_B(f). \quad (10.3.6)$$

**Замечание 2.** Рассмотрим случай, когда оператор  $C_{B'}$ , определяющий виково упорядочение в  $P$ , отличен от ковариационного оператора меры  $d\varphi_{C_B}$ . Пусть  $T$  — преобразование викова перепорядочения, определяемое равенством  $:P(\varphi, f):_{C_{B'}} = :P(\varphi, Tf):_{C_B}$ . Обозначим  $\chi_\Delta$  характеристическую функцию квадрата решетки  $\Delta$  и положим  $f\chi_\Delta \equiv \{f_j\chi_\Delta\}$ . Поскольку преобразование  $T$  локально,  $T(f\chi_\Delta) = (Tf)\chi_\Delta$ . Как вытекает из доказанного предложения,

$$\prod_{\Delta} Z_D(Tf\chi_\Delta) \leq \int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_{B'}}) d\varphi_{C_B} \leq \prod_{\Delta} Z_N(Tf\chi_\Delta). \quad (10.3.7)$$

Предположим далее, что  $C_B, C_{B'}$  принадлежит классу  $\mathcal{E}_m^M$ , определенному в § 7.9, и что

$$m + (M/m) + n + \sup_{\Delta} N(f\chi_\Delta) + \sup_{\Delta} M(f\chi_\Delta) \leq K.$$

Тогда

$$\exp(-\text{const}|\Lambda|) \leq \int \exp(-:P(\varphi, f):_{C_{B'}}) d\varphi_{C_B} \leq \exp(\text{const}|\Lambda|),$$

$$(10.3.8)$$

причем константы зависят только от  $K$ .

Рассмотрим теперь свободную энергию (10.3.1). Пусть  $B = \partial\Lambda$ ,  $D$  и  $B = \partial\Lambda$ ,  $N$  — граничные условия Дирихле или Неймана, заданные на границе прямоугольника  $\Lambda$ .

**Предложение 10.3.3.** Свободные энергии  $P(\varphi)_2$ -моделей, отвечающих различным граничным условиям (Дирихле, свободным, Неймана) на границе прямоугольника  $\Lambda$ , удовлетворяют неравенствам

$$\alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda) \leq \alpha^{\emptyset}(\Lambda) \leq \alpha^{\partial\Lambda, N}(\Lambda). \quad (10.3.9)$$

Кроме того,  $\alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda)$  и  $\alpha^{\partial\Lambda, N}(\Lambda)$  сходятся при  $\Lambda \uparrow R^2$ .

**Замечание.** В действительности указанные пределы совпадают. Для предельных свободных энергий  $\alpha^D$ ,  $\alpha^{\emptyset}$ ,  $\alpha^N$  имеет место равенство  $\alpha^D = \alpha^{\emptyset} = \alpha^N$  [Guegga, Rosen, Simon, 1976].

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда  $\Lambda_1$  есть объединение  $n$  непересекающихся областей, полученных сдвигом  $\Lambda$ . Тогда по неравенству обусловленности (10.3.2)

$$Z^{\partial\Lambda, D}(\Lambda)^n = Z^{\partial\Lambda_1, D}(\Lambda_1) \leq Z^{\emptyset}(\Lambda_1) \leq Z^{\partial\Lambda_1, N}(\Lambda_1) = Z^{\partial\Lambda, N}(\Lambda)^n. \quad (10.3.10)$$

Прологарифмировав, получаем

$$\alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda) = \alpha^{\partial\Lambda_1, D}(\Lambda_1) \leq \alpha^{\emptyset}(\Lambda_1) \leq \alpha^{\partial\Lambda_1, N}(\Lambda_1) = \alpha^{\partial\Lambda, N}(\Lambda). \quad (10.3.11)$$

Перейдем к более общей ситуации. Пусть  $\bar{\alpha} = \overline{\lim}_{\Lambda} \alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda)$ . Для  $\varepsilon > 0$  выберем  $\Lambda$  так, чтобы выполнялось неравенство  $\bar{\alpha} \leq \alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda) + \varepsilon$ . Если  $\Lambda_1$  есть объединение  $n = n_x n_y$  непересекающихся сдвигов  $\Lambda$  и граничной области, покрываемой  $(n_x + n_y + 1)$  сдвигами,  $\Lambda$ , то, как и выше,

$$\alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda) \leq \alpha^{\partial\Lambda_1, D}(\Lambda_1) + O(1)(n_x + n_y + 1)/n_x n_y.$$

Пусть  $\Lambda$  фиксировано и  $\Lambda_1 R^2$ . Тогда  $n_x \rightarrow \infty$ ,  $n_y \rightarrow \infty$  и  $(n_x + n_y + 1)/n_x n_y \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\bar{\alpha} \leq \alpha^{\partial\Lambda, D}(\Lambda) + \varepsilon \leq \alpha^{\partial\Lambda_1, D}(\Lambda_1) + 2\varepsilon,$$

и сходимость доказана. Случай  $\alpha^{\partial\Lambda, N}(\Lambda)$  рассматривается аналогично. ■

## 10.4 Положительность при отражениях

Мы покажем здесь, что  $\theta$ -инвариантная мера  $\mu$  положительна при отражении  $\theta$ . Случай неинвариантных мер рассматривается в § 10.6.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  определяется билинейной формой

$$b(A, B) = (\theta A, B)_{L_2(d\mu)} = \int \overline{\theta A} B d\mu = \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (10.4.1)$$

Условие положительности при отражении  $\theta$  состоит в том, что

$b(A, A) \geq 0$  для всех  $A \in \mathcal{E}_+$ . В случае квантовых полей  $\mathcal{H}$  есть пространство квантовых состояний. В классической статистической механике  $\mathcal{H}$  есть пространство, в котором трансфер-матрица действует как самосопряженный оператор. В обоих случаях  $\theta$  есть отражение относительно гиперплоскости  $\Pi$ . Пространство  $\mathcal{E}_+$  порождается функционалами  $e^{i\varphi(f)}$ , где  $\text{supp } f \subset \Pi_+$ ;  $\Pi_{\pm}$  — две связные компоненты множества  $R^d \setminus \Pi$ . Мы изучаем здесь  $P(\varphi)_2$ -меры, решеточные поля и модели изингова типа с граничными условиями Дирихле, Неймана или периодическими граничными условиями. Для простоты используются квантовополевые обозначения.

Основным следствием положительности при отражениях является неравенство Шварца:

$$\begin{aligned} |b(A, B)| &= |\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}} \|\hat{B}\|_{\mathcal{H}} = \\ &= b(A, A)^{1/2} b(B, B)^{1/2}, \end{aligned} \quad (10.4.2)$$

справедливое для всех  $A, B \in \mathcal{E}_+$ .

В гл. 6 было введено преобразование Фурье  $S_{\mu}$  меры  $d\mu$ , заданной на  $\mathcal{D}'$ :  $S_{\mu}\{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu(\varphi)$ . Отражение  $\theta$ , как и любой непрерывный изоморфизм  $\mathcal{D}'$ , определяет преобразованную меру  $\theta d\mu$  с помощью соотношения

$$S_{\mu}\{\theta^{-1}f\} = S_{\theta\mu}\{f\}. \quad (10.4.3)$$

**Определение 10.4.1.** Мера  $d\mu$  называется  $\theta$ -инвариантной, если

$$\theta d\mu = d\mu, \text{ т. е. } S_{\mu}\{\theta f\} = S_{\mu}\{f\} \text{ для всех } f.$$

Напомним также, что для гауссовой меры со средним нуль и ковариацией  $C$  характеристический функционал задается формулой (см. гл. 6)

$$S_C\{f\} = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle f, Cf \rangle\right) = \int e^{i\varphi(f)} d\varphi_C$$

(в гауссовом случае ковариация однозначно определяет меру). Следовательно, преобразование Фурье новой меры имеет вид

$$S_C\{\theta^{-1}f\} = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle f, \theta C \theta^{-1}f \rangle\right) = S_{\theta C \theta^{-1}}\{f\}.$$

Таким образом,  $\theta d\varphi_C$  есть гауссова мера со средним нуль и ковариацией  $\theta C \theta^{-1}$ , поэтому мера  $d\varphi_C$   $\theta$ -инвариантна тогда и только тогда, когда  $[\theta, C] = 0$ .

**Теорема 10.4.2.** Пусть мера  $d\varphi_C$   $\theta$ -инвариантна, а  $C = (-\Delta_B + I)^{-1} = C_B$  — ковариационный оператор с классическими граничными условиями, рассмотренными в § 7.10. Тогда мера  $d\varphi_C$  удовлетворяет условию положительности относительно отражения  $\theta$ .

**Замечание.** Так как оператор  $C$  может быть определен на  $R^d$ , на

$T^d$  или на  $Z^d$ , то квантовые и решеточные поля, модель Изинга, модель Гейзенберга и т. д. являются частными случаями систем, для которых выполнена теорема 10.4.2.

*Доказательство.* Из сказанного выше вытекает, что  $[\theta, C] = 0$ . В силу теорем 7.10.1—3, ковариационный оператор  $C$  положителен при отражении  $\theta$ . По теореме 6.2.2 мера  $d\varphi_C$  также положительна при отражении  $\theta$ . ▀

Рассмотрим меру  $P(\varphi)_2$  (или решеточную меру  $P(\varphi)_d$ ) в конечном объеме с классическими граничными условиями. Пусть  $C_B$  — ковариационный оператор с граничными условиями на  $\Gamma \supset \partial\Lambda$ , где  $\Lambda$  — ограниченная область в  $R^2$ , а  $\Gamma$ , как и в § 7.10, есть объединение прямолинейных отрезков решетки. Определим следующую меру:

$$d\mu = d\mu(V, \Lambda, C_B) = Z^{-1} e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{C_B}, \quad (10.4.4)$$

где

$$V(\Lambda) = \int_{\Lambda} :P(\varphi(x)):_C dx, \quad (10.4.5)$$

$$Z = Z(V, \Lambda, C_B) = \int e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{C_B}. \quad (10.4.6)$$

Заметим, что  $\theta d\mu(V, \Lambda, C_B) = d\mu(\theta V, \theta\Lambda, \theta C_B \theta^{-1})$ . В этом случае  $\theta$ -инвариантность означает, что выполнены условия  $\theta\Lambda = \Lambda$ ,  $\theta V = V$  и  $[\theta, C_B] = 0$ .

**Теорема 10.4.3.** Если мера  $d\mu$ , определенная соотношением (10.4.4),  $\theta$ -инвариантна, то она удовлетворяет условию положительности относительно отражения  $\theta$ .

**Замечание.** Так как свойство положительности при отражениях сохраняется после перехода к пределу, то мера в бесконечном объеме  $d\mu(V, C_B)$  (в тех случаях, когда она существует) положительна при отражениях.

*Доказательство.* Перепишем  $V(\Lambda)$  в виде  $V(\Lambda) = V_+ + V_-$ , где

$$V_{\pm} = V(\Lambda_{\pm}) \quad \text{и} \quad \Lambda_{\pm} = \Lambda \cap \Pi_{\pm}. \quad (10.4.7)$$

Таким образом,  $\theta V_{\pm} = V_{\mp}$  и  $V = V_+ + \theta V_+$ . По теореме 10.4.2 мера  $d\varphi_C$  положительна относительно отражения  $\theta$ . Поэтому и мера  $d\mu$  положительна относительно  $\theta$ , что видно из записи  $Z d\mu = (\theta e^{-V_+}) e^{-V_+} d\varphi_C$ .

## 10.5. Многократные отражения

Для оценивания функциональных интегралов применяется неравенство Шварца (10.4.2). В этом параграфе мы получим оценки, связанные с использованием метода многократных отражений. Эти оценки получаются при помощи последовательного применения неравенств Шварца, отвечающих последовательности гиперплоскостей  $\Pi$  и операторов отражения  $\theta_{\Pi}$ .

Мы рассматриваем общую вероятностную меру  $d\mu$  на  $\mathcal{D}'$ , удовлетворяющую аксиомам OS 0, 2, 3 из § 6.1 (аналитичность преобразования Фурье, инвариантность и положительность при отражениях), или  $P(\varphi)_2$ -меру  $d\mu_\Delta$  в конечном объеме, построенную в § 8.6. В обоих случаях положим  $\mathcal{E} = L_2(\mathcal{D}', d\mu)$  и для любого открытого множества  $\Lambda \subset R^d$  определим  $\mathcal{E}(\Lambda)$  как подпространство в  $\mathcal{E}$ , порожденное функционалами  $e^{i\varphi(f)}$ , где  $\text{supp } f \subset \Lambda$ . Так,  $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}(R^{d-1} \times (0, \infty))$ , а для множеств  $\Lambda$  вида  $R^{d-1} \times (s_1, s_2)$  введем специальное обозначение

$$\mathcal{E}(s_1, s_2) = \mathcal{E}(R^{d-1} \times (s_1, s_2)). \quad (10.5.1)$$

Оценки по методу многократных отражений применяются в трех разных случаях. При этом возникают различные геометрические конфигурации. Первая конфигурация связана с отражениями  $\theta_{\Pi_\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, d$ , относительно ортогональных координатных гиперплоскостей.

Пусть  $(R_+)^d$  — первый октант, т. е. множество  $\{x: x_\nu > 0, \nu = 1, 2, \dots, d\}$ . Тогда каждой функции  $k \in \mathcal{E}((R_+)^d)$  соответствует отраженная функция  $R(k)$ :

$$\begin{aligned} R(k) &= \\ &= \prod_{l \in \{1, 2, \dots, d\}} \left[ \left( \prod_{\nu \in l} \theta_{\Pi_\nu} \right) k^{(-)} \right]. \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

Здесь  $(-)$  обозначает комплексное сопряжение при нечетных  $|l|$  и тождественное преобразование при четных  $|l|$ . На рис. 10.1 показано действие  $R$ . При этом подмножества  $R^d$  рассматриваются как носители функции  $k$  и ее отражений. Операторы отражений  $\prod_{\nu \in l} \theta_{\Pi_\nu}$  образуют группу, называемую группой решеточных отражений.

**Предложение 10.5.1.** Пусть мера  $d\mu$  инвариантна и положительна при отражениях, отвечающих образующим  $\theta_{\Pi_\nu}$  решеточной группы отражений. Пусть  $k \in \mathcal{E}((R_+)^d)$ . Тогда

$$\left| \int k d\mu \right| \leq \left( \int R(k) d\mu \right)^{2^{-d}}, \quad (10.5.3)$$

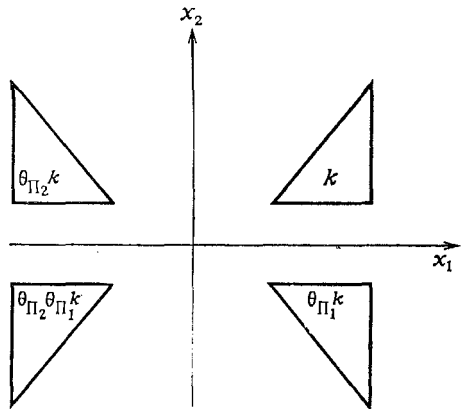


Рис. 10.1. Многократные отражения в случае группы решеточных отражений.

*Доказательство.* Для доказательства неравенства (10.5.3) нужно  $d$  раз применить неравенство Шварца относительно скалярных произведений

$$(A, B)_\nu = \int \overline{\theta_{\Pi_\nu} AB} d\mu.$$

Здесь  $\nu = 1, 2, \dots, d$  и  $A, B \in \mathcal{E}(R^{\nu-1} \times (R_+)^{d-\nu+1})$ . Положительная определенность скалярных произведений следует из теоремы 10.4.3. ■

Второй геометрической конфигурации отвечают отражения относительно гиперплоскостей, порождаемых решеточными сдвигами некоторой гиперплоскости  $\Pi$ . В качестве  $\Pi$  возьмем гиперплоскость  $t = 0$ . В этом случае мы изучаем отражения, изображенные на рис. 10.2. Эти отражения порождаются группой цело-

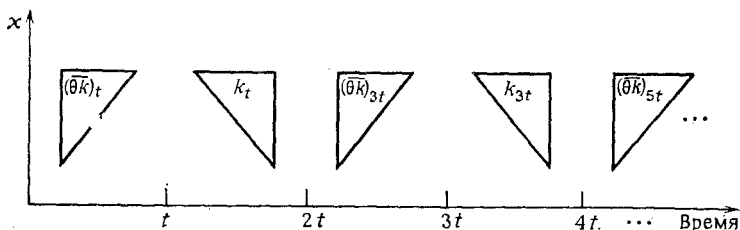


Рис. 10.2. Многократные отражения, порожденные целочисленной группой временных трансляций.

численных временных трансляций. Предположим, что  $k \in \mathcal{E}(0, t)$ , и определим функцию

$$M_n(k) = \prod_{j=1}^n \overline{(\theta k)_{(2j-1)t}} k_{(2j-1)t}. \tag{10.5.4}$$

Здесь  $\theta$  — отражение относительно гиперплоскости  $t = 0$ , а  $k_s = = T(s)kT(s)^{-1}$  — функция  $k$ , сдвинутая по времени на величину  $s$ . Кроме того, положим

$$M(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int M_n(k) d\mu \right)^{1/2n}. \tag{10.5.5}$$

**Предложение 10.3.2.** Пусть мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS2—3 (инвариантность и положительность при отражениях). Тогда для  $k \in \mathcal{E}(0, t)$

$$\left| \int k d\mu \right| \leq M(k). \tag{10.5.6}$$

*Доказательство.* Используя положительность при отражениях и трансляционную инвариантность меры  $d\mu$ , получаем с помощью неравенства Шварца, что

$$\left| \int k d\mu \right| = | \langle 1, k \rangle_{\mathcal{E}} | = | \langle \theta 1, k \rangle_{\mathcal{E}} | \leq \langle \theta k, k \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2} = \langle 1, (\overline{\theta k})_t k_t \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2} = \langle \theta 1, (\overline{\theta k})_t k_t \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2}.$$

Дальше продолжаем применять неравенство Шварца и трансляционную инвариантность. После  $r$  применений имеем (подставив  $2^r = n$ ):

$$\left| \int k d\mu \right| \leq \langle 1, M_{2^r}(k) \rangle_{\mathfrak{H}}^{2^{-r-1}} = \left( \int M_{2^r}(k) d\mu \right)^{2^{-r-1}}$$

$$\text{и } \left| \int k d\mu \right| \leq M(k). \blacksquare$$

Третья геометрическая конфигурация осуществляется тогда, когда носитель функции  $k$  содержится внутри единичного куба  $\Delta$  (или, в более общем случае, внутри прямоугольника  $X \equiv [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_d]$ ). Тогда, используя полную группу решеточных трансляций, можно обобщить рассмотренную выше картину отражений (10.5.4). Пусть  $\mathcal{L}_n^{(v)}$  обозначает произведение (10.5.4), построенное вдоль  $v$ -го координатного направления:

$$\mathcal{L}_n^{(v)}(k) = \prod_{j=1}^n (\overline{\theta_v k})_{(2j-1)a_v} k_{(2j-1)a_v}. \quad (10.5.7)$$

Здесь  $\theta_v = \theta_{\Pi_v}$  — отражение относительно гиперплоскости  $x_v = 0$ . Заметим, что в случае единичного куба  $\Delta$  все  $a_v = 1$ ,  $v = 1, 2, \dots, d$ . Положим

$$\mathcal{L}(k) = \overline{\lim}_{n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty} \left[ \int \mathcal{L}_{n_1}^{(1)}(\mathcal{L}_{n_2}^{(2)}(\dots \mathcal{L}_{n_d}^{(d)}(k) \dots)) d\mu \right]^{1/(2^{n_1} \dots 2^{n_d})}. \quad (10.5.8)$$

При  $d = 2$  решетка, порожденная отражениями, изображена на рис. 10.3.

**Предложение 10.5.3.** Пусть  $k \in \mathcal{E}(X)$  и мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS2—3 (трансляционная инвариантность и положительность при отражениях). Тогда

$$|\int k d\mu| \leq \mathcal{L}(k). \quad (10.5.9)$$

*Доказательство.* Относительно каждого координатного направления применяем те же соображения, что и при доказательстве предыдущего предложения.

В случае трансляционно-инвариантной меры удобно вместо функции  $k$  рассматривать оператор  $k_{\mathfrak{H}} = \hat{k}$ , который является оператором умножения на  $k$  в гильбертовом пространстве квантовомеханических состояний  $\mathfrak{H}$ . В гл. 6 было определено каноническое вложение функционального пространства  $\mathcal{E}_+$  в  $\mathfrak{H}$ :

$$\hat{\cdot} : \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+ / \mathcal{N} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Здесь  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{E}_+$  есть нуль-пространство положительной при отражениях билинейной формы на  $\mathcal{E}_+$ . Это вложение позволяет по некоторым операторам  $S$  на  $\mathcal{E}_+$  строить с помощью формул

(6.1.12) операторы  $S_{\mathcal{H}} = \mathcal{S}$  на  $\mathcal{H}$ . Например, по теореме 6.1.3  $\hat{T}(t) = T(t)_{\mathcal{H}} = e^{-tH}$ . Заметим, что при доказательстве теоремы 6.1.3 мы пользовались оценкой, получаемой с помощью метода многократных отражений.

Займемся теперь построением оператора  $\hat{k}$  в  $\mathcal{H}$ . Для этого обобщим

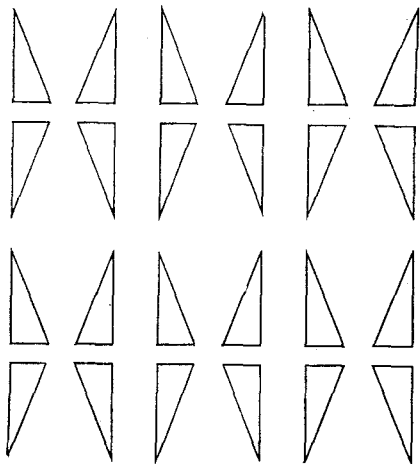


Рис. 10.3. Многократные отражения в случае полной группы решеточных трансляций.

оператор  $\hat{k}$ , задаваемый соотношениями (6.1.12), определен на плотном множестве в  $\mathcal{H}$ .

**Доказательство.** Вначале мы покажем, что область определения  $\mathcal{D}(k)^\wedge = (T(t)(L_\infty \cap \mathcal{E}_+))^\wedge$  плотна в  $\mathcal{H}$ . Из теоремы 6.1.3 и соотношения  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-tH} = I$  следует, что  $\text{Ker } e^{-tH} = \{0\}$ . Действительно, если  $e^{-tH}\psi = 0$  при некотором  $t$ , то  $e^{-tH/2}\psi = 0$  и т. д., так что  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-tH}\psi = 0$  и, следовательно,  $\|\psi\| = 0$ . Пусть вектор  $\psi$  в  $\mathcal{H}$  ортогонален  $\mathcal{D}(k)^\wedge$ . Тогда  $e^{-tH}\psi \perp (L_\infty \cap \mathcal{E}_+)^\wedge$ , а так как  $(L_\infty \cap \mathcal{E}_+)^\wedge$  всюду плотно в  $\mathcal{H}$ , то  $e^{-tH}\psi = 0$  и по доказанному выше  $\psi = 0$ . Таким образом,  $\mathcal{D}(k)^\wedge$  плотно в  $\mathcal{H}$ .

Для того чтобы доказать, что оператор  $\hat{k}$  корректно определен, достаточно проверить условия (6.1.13), т. е.

$$A \in \mathcal{D}(k) \cap \mathcal{N} \Rightarrow b(kA, kA) = \langle \theta kA, kA \rangle_{\mathcal{G}} = 0. \quad (10.5.10)$$

Рассмотрим вначале случай ограниченных  $k$ , т. е.  $k \in L_\infty$ . Пусть  $A$  имеет вид  $A = T(t)B$ ,  $B \in \mathcal{E}_+$ . Поскольку  $\theta(kT(t)B) = (\theta k)T(-t)\theta B$  и  $T(t)^* = T(-t)$ , получаем, что

$$\begin{aligned} b(kA, kA) &= \langle \theta kT(t)B, kT(t)B \rangle_{\mathcal{G}} = \langle \theta B, T(t)\overline{\theta k}kT(t)B \rangle_{\mathcal{G}} = \\ &= b(B, \overline{(\theta k)}_t k_t T(2t)B) \leq b(B, B)^{1/2} b(C, C)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $C = \overline{(\theta k)}_t k_t T(2t)B \in \mathcal{E}_+$ . По предположению  $\hat{A} = 0$  и  $\hat{A} = e^{-tH}B$ . Отсюда следует, что  $B = 0$ , т. е.  $B \in \mathcal{N}$ . Таким образом,  $b(B, B) = 0$ , и равенство (10.5.10) выполнено.

по функции  $k \in \mathcal{E}(0, t)$  оператора  $\hat{k}$  в  $\mathcal{H}$ . Для этого обобщим доказательство теоремы 6.1.3. Так как  $k \in L_2(d\mu)$ , то умножение на  $k$  задает оператор в пространстве  $\mathcal{E}_+$  с областью определения  $\mathcal{E}_+ \cap L_\infty$ . Для построения  $\hat{k}$  сузим область определения оператора  $k$ . С помощью многократных отражений можно получить оценку нормы  $\hat{k}$  как оператора в пространстве  $\mathcal{H}$ .

**Предложение 10.5.4.** Рассмотрим вероятностную меру  $d\mu$  на  $\mathcal{D}'$ , удовлетворяющую аксиомам OS 0, 2, 3 (аналитичность, инвариантность и положительность при отражениях). Рассмотрим  $k \in \mathcal{E}(0, t)$ ,  $t > 0$ , как оператор умножения в  $\mathcal{E}_+$  с областью определения  $\mathcal{D}(k) = T(t)(\mathcal{E}_+ \cap L_\infty)$ . Тогда



В общем случае, когда функция  $k$  неограничена, рассмотрим вместо нес функции

$$k_j = \begin{cases} k, & \text{если } |k| \leq j, \\ 0, & \text{если } |k| > j. \end{cases}$$

Тогда  $\|k - k_j\|_{L_2(d\mu)} \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Так как  $A \in \mathcal{D}(k)$ , то  $A \in T(t)L_\infty \subset L_\infty$ . В силу доказанного выше,  $k_j A \in \mathcal{N}$ , поэтому члены, отвечающие  $k_j A$  (включая перекрестные члены), не дают вклада в следующее неравенство:

$$\begin{aligned} b(kA, kA) &= b((k - k_j)A, (k - k_j)A) \leq \| (k - k_j)A \|_{L_2(d\mu)}^2 \leq \\ &\leq \|k - k_j\|_{L_2}^2 \|A\|_{L_\infty}^2 \rightarrow 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Теорема 10.5.5.** Пусть  $d\mu$  — вероятностная мера на  $\mathcal{D}'$ , удовлетворяющая аксиомам OS 0, 2, 3 (аналитичность, инвариантность, положительность при отражениях), и пусть  $k \in \mathcal{E}(0, t)$ ,  $t > 0$ . Тогда

$$\|\hat{k}e^{-tH}\|_{\mathcal{H}} \leq M(k). \tag{10.5.11}$$

*Доказательство.* Пусть  $Q = e^{-tH}\hat{k}e^{-tH}$  и  $A \in \mathcal{E}_+ \cap L_\infty$ . Тогда, согласно неравенству Шварца,

$$\|\hat{k}e^{-tH}\hat{A}\| = \langle \hat{A}, Q\hat{A} \rangle^{1/2} \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|Q\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}.$$

Продолжаем применять неравенство Шварца; после  $n$  применений получаем, что

$$\|\hat{k}e^{-tH}\hat{A}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{1-2^{-n}} \|Q^{2^{n-1}}\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{2^{-n}}. \tag{10.5.12}$$

По определению  $(\hat{k}e^{-tH})^* \hat{A} = (T(t)\overline{\theta k A})^\wedge = ((\overline{\theta k})_t T(t)A)^\wedge$ , или  $e^{-tH}\hat{k}^* = ((\overline{\theta k})_t)^\wedge e^{-tH}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|Q^{2^{n-1}}\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle \theta M_{2^{n-1}}(k) T(2^n t)A, M_{2^{n-1}}(k) T(2^n t)A \rangle_{\mathfrak{E}} = \\ &= \langle \theta A, M_{2^n}(k) T(2^{n+1}t)A \rangle_{\mathfrak{E}} \leq \|A\|_{L_\infty}^2 \left( \int |M_{2^n}(k)| d\mu \right), \end{aligned}$$

где  $M_n(k)$  определено выражением (10.5.4). Используя равенство (10.5.5), получаем, что

$$\overline{\lim}_n \|Q^{2^{n-1}}\hat{A}\|_{\mathcal{H}}^{2^{-n}} \leq \overline{\lim}_n \|A\|_{L_\infty}^{2^{-n}} M(k).$$

Для завершения доказательства остается подставить последнюю оценку в (10.5.12):

$$\|\hat{k}e^{-tH}\hat{A}\|_{\mathcal{H}} \leq M(k) \|\hat{A}\|_{\mathcal{H}}. \blacksquare$$

Определим теперь область  $\mathcal{H}_\delta$ , состоящую из аналитических векторов для оператора  $H$ :

$$\mathcal{H}_\delta = e^{-\delta H}\mathcal{H}. \tag{10.5.13}$$

Области  $\mathcal{H}_\delta$  используются для построения аналитического продолжения из евклидова пространства в пространство Минковского и для доказательства евклидовой формулы Фейнмана — Каца в гл. 19. При этом в качестве первого шага применяется оценка, доказываемая ниже.

**Следствие 10.5.6.** Пусть  $\delta > 0$ ,  $0 \leq \tau < \delta/4$ ,  $\delta' > t + \delta/2$  и  $M(k) < \infty$ . Тогда  $\hat{k}_\tau$ , как билинейная форма на  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_{\delta'}$ , аналитична по  $\tau$  и продолжается до комплексно аналитической функции в круге  $|\tau| < \delta/8$ . Кроме того,

$$\left\| e^{-\delta H} \frac{d^n}{d\tau^n} \hat{k}_\tau e^{-\delta' H} \right\| \leq \left( \frac{8}{\delta} \right)^n n! \|\hat{k} e^{-(t+\delta/4)H}\|. \quad (10.5.14)$$

*Доказательство.* Так как имеет место равенство

$$e^{-\delta H} \frac{d}{d\tau} \hat{k}_\tau e^{-\delta' H} = e^{-(\delta+\tau)H} [\hat{k}, H] e^{-(\delta'-\tau)H},$$

то оценку (10.5.14) можно доказать при помощи теоремы 10.5.5 и соотношений

$$C_m = \|H^m e^{-\delta H/4}\| \leq (4/\delta)^m m!, \quad C_m C_{n-m} \leq (4/\delta)^n n! \binom{n}{m}^{-1}.$$

Аналитичность следует из (10.5.14). ■

С помощью оценок норм операторов в  $\mathcal{H}$  можно получать оценки интегралов по мере  $d\mu$ .

**Следствие 10.5.7.** Пусть  $k^{(0)}, k^{(1)}, \dots, k^{(r)} \in \mathcal{E}(0, t)$ . Тогда

$$\left| \int \prod_{j=0}^r k_{jt}^{(j)} d\mu \right| \leq \prod_{j=0}^r M(k^{(j)}). \quad (10.5.15)$$

*Доказательство.* Заметим, что  $k_{jt} \in \mathcal{E}(jt, (j+1)t)$ . Кроме того,

$$\int \prod_{j=0}^r k_{jt}^{(j)} d\mu = \left\langle \Omega, \left( \prod_{j=0}^r k_{jt}^{(j)} \right) \hat{\Omega} \right\rangle = \left\langle \Omega, \prod_{j=0}^r (\hat{k}^{(j)} e^{-tH}) \Omega \right\rangle. \quad (10.5.16)$$

Произведение операторов в правой части упорядочено следующим образом: слева направо от  $\hat{k}^{(0)} e^{-tH}$  до  $\hat{k}^{(r)} e^{-tH}$ . Применяя теорему и неравенство для операторных норм  $\left\| \prod_j A_j \right\|_{\mathcal{H}} \leq \prod_j \|A_j\|_{\mathcal{H}}$ , получаем (10.5.15). ■

**Следствие 10.5.8.** Пусть  $J \subset \mathbb{Z}^d$  — конечное множество, и пусть для каждого  $j \in J$  задана функция  $k^{(j)} \in \mathcal{E}(\Delta_j)$ . Тогда

$$\left| \int \prod_{j \in J} k_{jt}^{(j)} d\mu \right| \leq \prod_{j \in J} \mathcal{L}(k^{(j)}), \quad (10.5.17)$$

где  $\mathcal{L}(k)$  определено равенством (10.5.8).

*Доказательство.* Формально достаточно применить следствие 10.5.7 по каждому координатному направлению. Фактически нужно рассуждать аналогично доказательству теоремы 10.5.5 и следствия 10.5.7, т. е. переходить к пределу  $n_\nu \rightarrow \infty$  только после того, как выполнены отражения по всем направлениям. ■

**Замечание.** Несимметричная оценка по методу многократных отражений доказывается в теореме 12.4.2. В этом случае не предполагается, что мера  $d\mu$  инвариантна относительно отражений. В несимметричном случае вместо неравенства Шварца используется неравенство (10.6.8).

## 10.6. Несимметричные отражения

Неравенство Шварца, используемое в симметричной ситуации, допускает обобщение на случай, когда мера  $d\mu$  не симметрична относительно отражения  $\theta$ , определяемого некоторой гиперплоскостью  $\Pi$ . В несимметричном случае неравенство Шварца имеет вид

$$|b(A, B)| \leq \text{const } b_1(A, A)^{1/2} b_2(B, B)^{1/2}, \quad (10.6.1)$$

где  $b_1, b_2$  положительны при отражении  $\theta$  и  $\theta$ -инвариантны. Изложение в этом параграфе носит более технический характер по сравнению с симметричным случаем (§ 10.4). Заметим, однако, что доказанные ниже оценки используются лишь для проверки регулярности полей  $P(\varphi)_2$ , но не для доказательства их существования.

Пусть  $d\mu$  есть мера вида (10.4.4) с классическими граничными условиями на  $\Gamma$ . Определим вначале отвечающие ей  $\theta$ -инвариантные меры  $d\mu_{\pm}$ . Мы предполагаем, что  $\Gamma \cap \Pi \neq \emptyset$  и пересечение трансверсально, т. е.  $\dim(\Gamma \cap \Pi) \leq d - 2$ . Пусть  $\Pi_{\pm}$  — два полупространства  $R^d \setminus \Pi$ . Положим

$$\Gamma_+ = (\Gamma \cap \Pi_+) \cup (\theta\Gamma \cap \Pi_-), \quad (10.6.2)$$

$$\Gamma_- = (\Gamma \cap \Pi_-) \cup (\theta\Gamma \cap \Pi_+). \quad (10.6.3)$$

Легко видеть, что  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$   $\theta$ -инвариантны. Пусть  $\theta B$  — граничные условия  $B$ , отраженные относительно  $\Pi$ , и пусть

$$B_+ \equiv \begin{array}{l} \text{граничные условия } B \text{ на } \Gamma \cap \Pi_+ \text{ и} \\ \text{граничные условия } \theta B \text{ на } \theta\Gamma \cap \Pi_-; \end{array} \quad (10.6.4)$$

$$B_- \equiv \begin{array}{l} \text{граничные условия } B \text{ на } \Gamma \cap \Pi_- \text{ и} \\ \text{граничные условия } \theta B \text{ на } \theta\Gamma \cap \Pi_+. \end{array}$$

$$C_+ = C_{B_+}, \quad C_- = C_{B_-}.$$

По построению операторы  $C_+$  и  $C_-$   $\theta$ -инвариантны.

Рассматриваемые нами меры  $d\mu$  характеризуются тремя объектами: взаимодействием  $V$ , объемом  $\Lambda$  и гауссовой ковариацией  $C$ . Положим  $V_{\pm} = V(\Lambda_{\pm})$ ,  $\Lambda_{\pm} = \Lambda \cap \Pi_{\pm}$  и определим меры  $d\mu_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} d\mu_+ &= d\mu(V_+ + \theta V_+, \Lambda_+ \cup \theta\Lambda_+, C_{B_+}) = \\ &= Z_+^{-1} e^{-(V_+ + \theta V_+)} d\varphi_{C_+}, \\ d\mu_- &= d\mu(V_- + \theta V_-, \Lambda_- \cup \theta\Lambda_-, C_{B_-}) = \\ &= Z_-^{-1} e^{-(V_- + \theta V_-)} d\varphi_{C_-}. \end{aligned} \quad (10.6.5)$$

Здесь  $Z_{\pm}$  — обычные нормирующие множители, выбранные так, чтобы  $\int d\mu_{\pm} = 1$ . Так как  $V_{\pm}$ ,  $\Lambda_{\pm}$  и  $C_{\pm}$ , определяющие  $d\mu_{\pm}$ ,  $\theta$ -инвариантны, то

$$\theta d\mu_{\pm} = d\mu_{\pm}. \quad (10.6.6)$$

По теореме 10.4.2 меры  $d\mu_{\pm}$  положительны при отражении  $\theta$ . Если мера  $d\mu$   $\theta$ -инвариантна, то  $C = C_+ = C_-$ ,  $d\mu = d\mu_+ = d\mu_-$  и  $Z = Z_+ = Z_-$ .

В симметричном случае, т. е. когда мера  $d\mu$   $\theta$ -инвариантна, неравенство Шварца можно записать в виде

$$|\langle A, B \rangle_{\mu}|^2 \leq \langle \theta A, H \rangle_{\mu} \langle \theta B, B \rangle_{\mu}, \quad A \in \mathcal{E}_-, \quad B \in \mathcal{E}_+. \quad (10.6.7)$$

Обобщением неравенства (10.6.7) является неравенство

$$|\langle A, B \rangle_{\mu}|^2 \leq \frac{Z_+ Z_-}{Z^2} \det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2} \langle \theta A, A \rangle_{\mu_-} \langle \theta B, B \rangle_{\mu_+}. \quad (10.6.8)$$

Заметим, что билинейная форма  $\langle A, B \rangle_{\mu}$  может не быть положительно определенной.

**Предложение 10.6.1.** Если неравенство (10.6.8) справедливо в гауссовом случае, то оно выполняется и для меры  $d\mu$ .

*Доказательство.* Множитель  $Z_+ Z_- Z^{-2}$  можно устранить, если вместо мер  $d\mu$ ,  $d\mu_+$  и  $d\mu_-$  рассмотреть ненормированные меры  $d\bar{\mu} = Z d\mu$ ,  $d\bar{\mu}_{\pm} = Z_{\pm} d\mu_{\pm}$ . Кроме того, множитель  $e^{-\nu} = e^{-V_+} e^{-V_-}$  можно включить в  $A$  и  $B$ . После этого неравенство (10.6.8) сводится к следующему неравенству, которое отвечает гауссову случаю:

$$|\langle A, B \rangle_{d\bar{\mu}}|^2 \leq \det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2} \langle \theta A, A \rangle_{d\bar{\mu}_{C_-}} \langle \theta B, B \rangle_{d\bar{\mu}_{C_+}}. \quad \blacksquare \quad (10.6.9)$$

Доказательство неравенства в гауссовом случае проводится по аналогичному образцу: задача сводится к рассмотрению гауссовой меры с  $\theta$ -инвариантной ковариацией  $C_0$ , т. е. к случаю теоремы 10.4.2. Мы приведем вначале формальные соображения, а позже обсудим детали в некоторых частных случаях, а именно при доказательстве теоремы 10.6.2 и следствия 10.6.3. Эти частные случаи понадобятся нам в гл. 12.

Неравенство (10.6.9) легче понять, если переписать определитель в виде отношения статистических сумм:

$$\det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2} = Z_{C_+} Z_{C_-} / Z_C^2. \quad (10.6.10)$$

При этом удобно представлять себе множитель  $Z_{C_+} / Z_C$  как нормировку гауссовой меры  $d\varphi_{C_+}$  по отношению к мере  $d\varphi_C$ . Однако обе эти меры вероятностные, поэтому последнему утверждению необходимо придать более точный смысл. Для этого представим меры  $d\varphi_C$  и  $d\varphi_{C_{\pm}}$  как возмущения некоторой гауссовой меры  $d\varphi_{C_0}$ . Определим интегральные операторы  $v$  и  $v_{\pm}$ , полагая

$$v = C^{-1} - C_0^{-1}, \quad v_+ = C_+^{-1} - C_0^{-1}, \quad v_- = C_-^{-1} - C_0^{-1}. \quad (10.6.11)$$

Эти операторы имеют ядра  $v(x, y)$ ,  $v_{\pm}(x, y)$ . Определим также  $V_C$  формулой

$$V_C = \frac{1}{2} \int \varphi(x) v(x, y) \varphi(y) dx dy \quad (10.6.12)$$

и аналогично определим  $V_{C_{\pm}}$ . Используя (9.3.8), можно формально выразить  $d\varphi_C$  через  $d\varphi_{C_0}$ :

$$d\varphi_C = Z_C^{-1} e^{-V_C} d\varphi_{C_0}, \quad (10.6.13)$$

где

$$Z_C = \int e^{-V_C} d\varphi_{C_0}. \quad (10.6.14)$$

Подставив  $v_{\pm}$  вместо  $v$ , получим аналогичные представления для  $d\varphi_{C_{\pm}}$ . По формуле (9.3.7) для гауссовых функциональных интегралов  $Z_C = \det(I + C_0^{1/2} v C_0^{1/2})^{-1/2}$ . Поэтому отношение  $Z_{C_+}/Z_C = \det(C^{-1} C_+)^{1/2}$  не зависит от  $C_0$ . Таким же способом можно получить формулу (10.6.10). В этих вычислениях можно было бы взять в качестве  $C_0$  оператор  $C$ . Тогда  $Z_C = 1$ . Однако удобнее выбрать оператор  $C_0$  положительным при отражении  $\theta$ . Тогда неравенство (10.6.9) будет следовать из положительности меры  $d\varphi_{C_0}$  при отражении  $\theta$  (теорема 10.4.2). Для доказательства (10.6.9) воспользуемся неравенством Шварца относительно скалярного произведения, порожденного мерой  $d\varphi_{C_0}$ . А именно, пусть  $A \in \mathcal{E}_-$ ,  $B \in \mathcal{E}_+$ . Тогда

$$|\langle A, B \rangle_{d\varphi_{C_0}}|^2 \leq \langle \theta A, A \rangle_{d\varphi_{C_0}} \langle \theta B, B \rangle_{d\varphi_{C_0}}. \quad (10.6.15)$$

Перепишем (10.6.15) в виде

$$\begin{aligned} |\langle A, B \rangle_{d\varphi_C}|^2 &= Z_C^{-2} |\langle A B e^{-V_C} \rangle_{d\varphi_{C_0}}|^2 \leq \\ &\leq Z_C^{-2} \langle (\theta A) A \exp(-V_{C_-}) \rangle_{d\varphi_{C_0}} \langle (\theta B) B \exp(-V_{C_+}) \rangle_{d\varphi_{C_0}} = \\ &= Z_{C_+} Z_{C_-} Z_C^{-2} \langle \theta A, A \rangle_{d\varphi_{C_-}} \langle \theta B, B \rangle_{d\varphi_{C_+}} = \\ &= \det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2} \langle \theta A, A \rangle_{d\varphi_{C_-}} \langle \theta B, B \rangle_{d\varphi_{C_+}}. \end{aligned} \quad (10.6.16)$$

Таким образом, требуемое неравенство получено. При этом мы воспользовались разложением  $v = v_1 + v_2$ , где  $v_1$  и  $v_2$  локализованы в  $\Pi_-$  и  $\Pi_+$  соответственно и определены соотношениями  $v_- = v_1 + \theta v_1 \theta^{-1}$ ,  $v_+ = v_2 + \theta v_2 \theta^{-1}$ .

Строгое обоснование приведенных выше формальных рассуждений затруднено тем, что гауссовы меры  $d\varphi_{C_B}$  с различными граничными условиями  $B$  взаимно сингулярны. Поэтому операторы  $v$ ,  $v_{\pm}$  также сингулярны, а статистические суммы  $Z_{C_+}$ ,  $Z_{C_-}$ ,  $Z_C$  не существуют. Для преодоления этих трудностей можно ре-

гуляризовать величины (10.6.11—12) и перейти к пределу в (10.6.16). При этом статистические суммы  $Z_C, Z_{C_+}, Z_{C_-}$  расходятся, однако их отношение, равное  $\det(C^{-2}C_+C_-)^{1/2}$ , сходится, и средние  $\langle \cdot \rangle_{d\Phi_C}, \langle \cdot \rangle_{d\Phi_{C_{\pm}}}$  корректно определены.

Неравенством (10.6.8) можно реально воспользоваться только после того, как будут получены оценки  $Z_+Z_-/Z^2$  и  $\det(C^{-2}C_+C_-)^{1/2}$

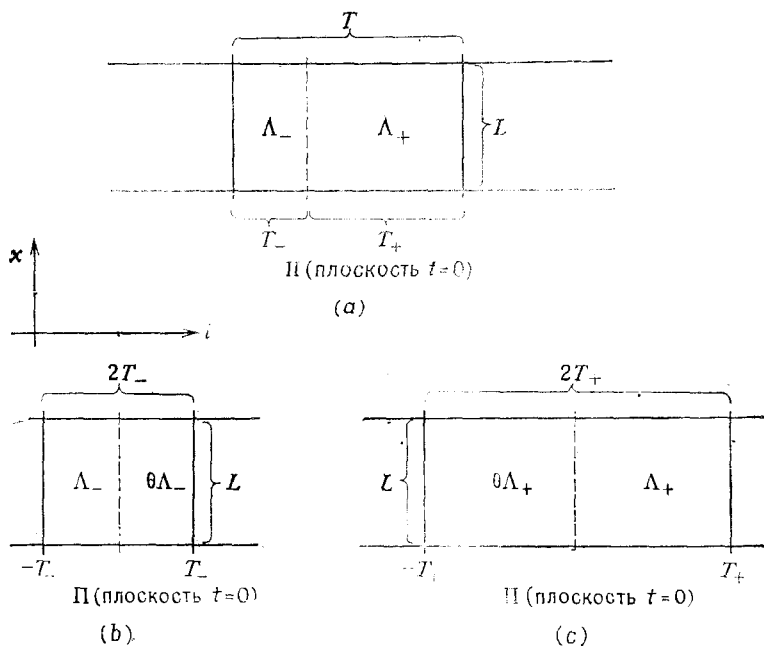


Рис. 10.4. (а) Функция  $V$ , определяющая меру  $d\mu$ , имеет носитель в  $\Lambda \equiv \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ , где  $\Pi \subset \Lambda_+ \cap \Lambda_-$ . Сплошные линии изображают  $\Gamma$ , состоящее из  $\partial\Lambda$  и прямых, продолжающих две стороны  $\partial\Lambda$ . Пунктирная линия изображает плоскость  $\Pi$  (в качестве  $\Pi$  выбирается плоскость  $t=0$ ). (б, в) Второй и третий рисунки отвечают мерам  $d\mu_-, d\mu_+$ , определяемым ковариационными операторами  $C_{V_{\pm}}$  с граничными условиями Дирихле на сплошных линиях  $\Gamma_{\pm}$ .

в зависимости от объема  $\Lambda$ . В этом параграфе мы исследуем отношение функциональных определителей  $\det(C^{-2}C_+C_-)^{1/2}$ , а оценку отношения  $Z_+Z_-/Z^2$  отложим до § 12.4. Для простоты мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда на  $\Gamma \supset \partial\Lambda$  заданы граничные условия Дирихле.

Ниже мы рассматриваем случай  $d=2$  и предполагаем, что  $\Lambda$  есть прямоугольник  $L \times T$ , ориентированный вдоль осей  $(x, t)$  (рис. 10.4). Пусть  $\Pi$  — гиперплоскость  $t=0$ . Предположим, что  $\Pi$  делит  $\Lambda$  на два прямоугольника  $\Lambda_- \cup \Lambda_+ = \Lambda$  размера  $L \times T_-$  и  $L \times T_+$  соответственно. Тогда  $T = T_- + T_+$ . Пусть ось  $x$  выбрана

так, что прямые  $x = 0$ ,  $x = L$  проходят через  $\partial\Lambda$ . Положим

$$\Gamma_0 = \{(x, t): x = 0 \text{ или } x = L\}, \quad \Gamma = \partial\Lambda \cup \Gamma_0, \\ C_0 = (-\Delta_{\Gamma_0} + m^2)^{-1}, \quad C_B = (-\Delta_{\Gamma} + m^2)^{-1}.$$

**Теорема 10.6.2.** При указанных выше условиях на  $B$  справедливо неравенство (10.6.8)<sup>1)</sup>. Пусть  $\Gamma$  и  $C_B$  такие же, как выше, и кроме того,  $m^{-1} \leq T_- \leq T_+$ , где  $m$  — масса в  $C_B$ . Тогда

$$1 \leq \det(C^{-2}C_+C_-)^{1/2} \leq \text{const } e^{\text{const } L/T_-} \quad (10.6.17)$$

и константы не зависят от  $L$ ,  $T_{\pm}$ .

*Доказательство.* Оценка снизу следует из (10.6.9) при  $A = B = 1$ . Для доказательства неравенства (10.6.9) и оценки сверху вычислим отношение определителей. Пусть  $H_0$  обозначает гамильтониан в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_0$ , отвечающий мере  $d\varphi_{C_0}$ . В гл. 6 указан канонический способ построения гамильтониана  $H_0$ , использующий  $\theta$ -отражения относительно гиперплоскости  $\Pi(t = 0)$ . Так как мера  $d\varphi_{C_0}$  гауссова, то  $\mathcal{H}_0$  является пространством Фока и  $H_0$  есть гамильтониан свободного поля в  $\mathcal{H}_0$ . Таким образом,  $\mathcal{H}_0$  есть симметрическая тензорная алгебра над одночастичным пространством

$$L_2([0, L], dx) \oplus L_2((-\infty, 0], dx) \oplus L_2([L, \infty), dx).$$

Следовательно,  $\mathcal{H}_0$  — тензорное произведение пространств Фока, отвечающих этим трем подпространствам. В определитель вносит вклад только первое из них. Поскольку  $e^{-tH_0}$  сохраняет структуру тензорного произведения, можно ограничиться рассмотрением множителя  $\mathcal{H}_0([0, L])$ , являющегося симметрической тензорной алгеброй над  $L_2([0, L], dx)$ . Обозначим  $h_0$  ограничение  $H_0$  на это одночастичное пространство. Собственные числа оператора  $h_0$  равны  $(k^2 + m^2)^{1/2} = \mu(k)$ , где  $k \in (\pi/L)\mathbb{Z}$ , а соответствующие собственные функции имеют вид  $\sin kx$ .

В шредингеровом представлении  $\mathcal{H}_0$  можно записать в виде бесконечного тензорного произведения

$$\mathcal{H}_0 = \bigotimes_{k \in (\pi/L)\mathbb{Z}} L_2(\mathbb{R}, dv_k(q_k)) = \bigotimes_{k \in (\pi/L)\mathbb{Z}} \mathcal{H}_0^{(k)}. \quad (10.6.18)$$

Здесь  $dv_k(q_k) = (\mu(k)/\pi)^{1/2} \exp(-q_k^2 \mu(k)) dq_k$ , а  $\mathcal{H}_0^{(k)}$  есть пространство состояний гармонического осциллятора с координатой  $q_k$  (см. § 1.5, 6.2 и 6.4). Оператор  $e^{-tH_0}$  также факторизуется:  $e^{-tH_0} = \prod_k e^{-tH_0^{(k)}}$ . Здесь  $H_0^{(k)}$  есть гамильто-

ниан  $k$ -го гармонического осциллятора, и ядро оператора  $e^{-tH_0^{(k)}}$  определяется по формуле Мелера (1.5.26):

$$e^{-tH_0^{(k)}}(q_k, q'_k) \equiv p_t^{(k)}(q_k, q'_k) = \pi^{-1/2} (1 - e^{-2\mu(k)t})^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(q_k^2 - q_k'^2) \mu(k)}{2} - \frac{\mu(k) (e^{-\mu(k)t} q_k - q_k')^2}{1 - e^{-2\mu(k)t}} \right\}. \quad (10.6.19)$$

<sup>1)</sup> Не следует путать  $B$  в неравенстве (10.6.8) и  $B$  — граничные условия в данной формулировке. — *Прим. перев.*

Для состояния  $\psi$ , разложенного в произведение  $\psi = \prod_k f_k(q_k)$ , выполнено равенство

$$\langle \psi, e^{-tH_0} \psi \rangle_{\mathcal{H}_0} = \prod_k \langle f_k, e^{-tH_0^{(k)}} f_k \rangle_{\mathcal{H}_0^{(k)}}. \quad (10.6.20)$$

С целью сделать изложение более прозрачным мы проводим вначале формальные вычисления, а их математическое обоснование рассматривается только в конце доказательства. Используя формулу Фейнмана — Каца в пространстве  $\mathcal{H}_0$ , получаем

$$Z_C = \int e^{-V_C} d\varphi_C = \langle \psi, e^{-TH_0} \psi \rangle_{\mathcal{H}_0}. \quad (10.6.21)$$

Здесь  $V_C = V_1 + V_2$ , где  $V_C = \Delta_{C_0} - \Delta_C$  — локальное выражение с носителем на  $\Gamma \cup \{x = 0, L\} \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  определяются из условий  $\Gamma_1 \cap \Pi_+ = \Gamma_1, \Gamma_2 \cap \Pi_- = \Gamma_2$ , а  $V_1, V_2$  совпадают с  $V_C$  в  $L_2(\Pi_{\pm})$ . Тогда  $\psi$  есть состояние  $e^{-V_1}$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_0$ , отвечающем моменту времени  $t = T_+$ , или состояние  $e^{-V_2}$  в пространстве, отвечающем  $t = -T_-$ . Как мы увидим ниже,  $\psi$  есть произведение состояний по различным модам, пропорциональных  $\delta$ -функции по каждой моде,  $\psi = \prod_k c \delta(q(k))$ . (Состоянию  $\psi$  соответствуют граничные условия

Дирихле по каждой моде.) Таким образом, в отношении  $Z_{C_+} Z_{C_-} / Z_C^2$  нормирующие множители  $(\prod_k c)$  сокращаются:

$$\begin{aligned} \frac{Z_{C_+} Z_{C_-}}{Z_C^2} &= \frac{\langle \psi, e^{-2T_+ H_0} \psi \rangle \langle \psi, e^{-2T_- H_0} \psi \rangle}{\langle \psi, e^{-TH_0} \psi \rangle^2} = \\ &= \prod_{k, k_+, k_-} \frac{\langle \delta, \exp(-2T_+ H_0^{(k_+)}) \delta \rangle \langle \delta, \exp(-2T_- H_0^{(k_-)}) \delta \rangle}{\langle \delta, \exp(-TH_0^{(k)}) \delta \rangle^2} = \\ &= \det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.6.22)$$

В этом произведении импульсы  $k, k_{\pm}$  пробегает одну и ту же решетку:

$$k, k_+, k_- \in (\pi/L)Z. \quad (10.6.23)$$

При помощи (10.6.19) можно представить (10.6.22) в виде

$$\det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2} = \prod_{k, k_{\pm}} \frac{1 - e^{-2\mu(k)T}}{(1 - e^{-4\mu(k_+)T_+})^{1/2} (1 - e^{-4\mu(k_-)T_-})^{1/2}}. \quad (10.6.24)$$

Для фиксированных  $T_+, T_-, L$  каждое из произведений по  $k, k_+$  и  $k_-$  сходится, так как при  $\alpha t > 0$  любое выражение вида  $e^{-\alpha\mu(k)t}$  сходится к нулю экспоненциально.

Поскольку числитель в (10.6.24) меньше 1 и по условиям теоремы  $T_- \leq T_+$ , имеем оценку

$$\begin{aligned} \det(C^{-2} C_+ C_-)^{1/2} &\leq \prod_k (1 - e^{-4\mu(k)T_-})^{-1} = \\ &= \exp \sum_k \ln (1 - e^{-4\mu(k)T_-})^{-1}. \end{aligned} \quad (10.6.25)$$



Ковариация  $C_B \in \mathcal{E}_m$  имеет массу не меньше  $m$ , поэтому  $m \leq \mu(k)$ . Следовательно,  $4 < 4\mu(k)T_-$ , так как по условию  $m^{-1} \leq T_-$ . Таким образом, показатель  $4\mu(k)T_-$  в (10.6.25) отделен от нуля, а экспонента

$$e^{-4\mu(k)T_-} \leq e^{-4mT_-} \leq e^{-4} < 1$$

отделена от 1. Воспользовавшись неравенством  $\ln(1 - \varepsilon)^{-1} \leq \text{const } \varepsilon$ , где  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$  и константа зависит от  $\varepsilon_0$ , получаем

$$\det(C_-^{-2}C_+C_-)^{1/2} \leq \exp\left(\text{const} \sum_k e^{-4\mu(k)T_-}\right) \leq \text{const} \cdot \exp O(L/T_-).$$

Для обоснования этих формальных рассуждений вернемся к формуле (10.6.21). Найдем теперь регуляризованное  $Z_C$ , подставив вместо  $e^{-V_{i,2}}$  сглаженное произведение волновых функций  $\psi^k = \prod_{|k| \leq \kappa_1} c\delta_{\kappa_2}(q(k))$ . Заметим, что для доказательства неравенства (10.6.9) достаточно выбирать величины  $A, B$  из каких-нибудь плотных подпространств в пространствах  $\mathcal{E}_{\pm}$ . Пусть  $A, B$  — непрерывные ограниченные функции от конечного числа ортогональных мод, зависящие от конечного числа моментов времени (цилиндрические функции). Для таких  $A, B$  сходимость гауссова интеграла при  $\kappa_1 \rightarrow \infty$  следует из сходимости характеристического функционала и, следовательно, из слабой сходимости ковариационных операторов как  $L_2$ -операторов. Так как ортогональные моды диагонализуют ковариационный оператор, слабая сходимость при увеличении числа мод очевидна. Следовательно, достаточно рассмотреть фиксированное конечное значение  $\kappa_1$ .

Применяя неравенство Шварца последовательно в каждом множителе  $\mathcal{H}_0^k$ , мы видим, что неравенство (10.6.9) достаточно доказать для отдельного множителя. Поэтому достаточно рассмотреть одну моду, т. е. обычную меру Винера на траекториях в  $R$ . В § 7.8 было показано, что локальное бесконечное возмущение массы в ковариационном операторе порождает граничные условия Дирихле. Этот вывод применим к каждой ортогональной моде, т. е. к ковариационным операторам, являющимся функциями только от  $t$ . Такие ковариации Дирихле  $C^{(k)}$  определяют гауссову меру в пространстве траекторий  $k$ -го осциллятора, причем масса осциллятора зависит от  $t$ . Рассмотрим аппроксимирующие операторы  $C^{(k, \kappa_2)}$ , где  $\kappa_2$  характеризует массу, зависящую от  $t$ . При  $\kappa_2 \rightarrow \infty$  масса становится бесконечной в точках, где локализованы граничные условия Дирихле (например, в точках  $t = \pm T$ ), и  $C^{(k, \kappa_2)}$  сходится к ковариации Дирихле.

Из результатов § 9.3 вытекает, что возмущение массы в ковариации  $C^{(k, \kappa_2)}$  можно представить с помощью экспоненциального множителя Фейнмана — Каца в гауссовой мере, определяемой оператором  $C^{(k, \kappa_2)}$ . Показатель экспоненты зависит от времени и имеет вид  $V(q_k, t) = 0$  или  $\kappa_2 q_k^2$ , причем выбор между этими двумя значениями делается в зависимости от  $t$ . Таким способом мы получаем явную последовательность размазанных  $\delta$ -функций  $\delta_{\kappa_2}$  в  $\mathcal{H}_0^{(k)}$ , каждая из них определяет гауссову меру и ковариации этих мер сходятся к ковариации Дирихле  $C^{(k)}$ , отвечающей  $k$ -му осциллятору.

Из оценок, с помощью которых доказывается непрерывность по Гельдеру типичной винеровской траектории, следует, что  $\delta_{\kappa_2} \rightarrow \delta$  при  $\kappa_2 \rightarrow \infty$ . Следовательно, полагая в формуле (10.6.19)  $q = q' = 0$ , представим выражение (10.6.22) в виде (10.6.24).

В случае, когда  $A$  и  $B$  — ограниченные непрерывные цилиндрические функции, сходимость интегралов в (10.6.9) следует из сходимости ковариаций при  $\kappa_2 \rightarrow \infty$ . ■

В качестве следствия доказанной теоремы сформулируем оценку для случая меры с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$  (по

не на бесконечных прямых  $x = 0, L$ , как было выше). Мы будем считать, что  $A, B$  локализованы в  $\Lambda_-, \Lambda_+$ .

**Следствие 10.6.3.** Пусть  $\Lambda$  есть прямоугольник  $L \times T$ , как и в предыдущей теореме. Пусть  $S_B = S_{\partial\Lambda}$  есть ковариационный оператор с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ , и пусть  $A \in \mathcal{E}(\Lambda_-), B \in \mathcal{E}(\Lambda_+)$ . Тогда

$$\langle A, B \rangle_{\mu} \leq \text{const} \frac{Z_+ Z_-}{Z^2} \langle \theta A, A \rangle_{\mu_-} \langle \theta B, B \rangle_{\mu_+} \exp\left(\frac{L}{T_+} + \frac{L}{T_-}\right), \quad (10.6.26)$$

где константа не зависит от  $L, T_{\pm} \geq 1$ .

*Доказательство.* Так как  $A, B, V$  локализованы в  $\Lambda$  (т. е. являются элементами  $\mathcal{E}(\Lambda)$ ), а мера  $d\varphi_{S_{\partial\Lambda}}$  факторизуется в  $\mathcal{E}(\Lambda) \otimes \mathcal{E}(R^2 \setminus \Lambda)$ , то  $\langle A, B \rangle_{\mu} = \langle A, B \rangle_{\tilde{\mu}}$ , где мера  $\tilde{\mu}$  получается заменой  $S_{\partial\Lambda}$  на ковариационный оператор  $S$ , рассмотренный в теореме 10.6.2. Аналогично, при вычислении средних на пространствах  $\mathcal{E}(\Lambda_{\pm} \cup \theta\Lambda_{\pm})$  можно заменить  $\mu_{\pm}$  на  $\tilde{\mu}_{\pm}$ . Далее применяем доказанную теорему, используя меры  $\tilde{\mu}, \tilde{\mu}_{\pm}$ . ■

## Глава 11

### Поля без обрезания

#### 11.1 Введение

В этой главе приводится конструкция квантового поля  $P(\varphi_2)$  в случае, когда полуограниченный полином взаимодействия  $P$  имеет вид  $P =$  четный полином  $+$  линейный член. Для полуограниченных  $P$  общего вида используются иные методы, см. гл. 18. В этой главе рассмотрена проблема существования полей, а вопрос об их регулярности отнесен к гл. 12. Доказано существование евклидовой меры  $d\mu$ , являющейся пределом мер в конечных объемах, построенных в гл. 8, при переходе к бесконечному объему. Доказательство основано на монотонной сходимости и равномерных оценках сверху.

#### 11.2 Монотонная сходимость

Все результаты в этом параграфе связаны с монотонной сходимостью. В случае, когда  $P =$  четный полином  $+$  линейный член, монотонность функций Швингера вытекает из корреляционных неравенств. В § 11.3 доказывается равномерная оценка сверху. При этом используются оценки для мер в конечном объеме, полученные в гл. 8, и оценки по методу многократных отражений, доказанные в гл. 10.

Пусть  $d\mu_\Lambda$  есть  $P(\varphi)_2$ -мера в конечном объеме с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ :

$$d\mu_\Lambda = Z^{-1} e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{C_{\partial\Lambda}}. \quad (11.2.1)$$

Здесь  $C_{\partial\Lambda} = (-\Delta_{\partial\Lambda} + m^2)^{-1}$ , а  $\Delta_{\partial\Lambda}$  — оператор Лапласа в  $R^2$  с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ . Далее,

$$V(\Lambda) = \int_\Lambda P(\varphi(x)) : c_\phi dx,$$

где  $P(\xi)$  — ограниченный снизу полином, а упорядочение Вика производится по отношению к свободному ковариационному оператору  $C_\emptyset = (-\Delta + m^2)^{-1}$ . Нормирующий множитель определяется соотношением

$$Z = Z(\Lambda) = \int e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{C_{\partial\Lambda}}. \quad (11.2.3)$$

Наконец, положим

$$S_\Lambda \{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu_\Lambda. \quad (11.2.4)$$

**Теорема 11.2.1** (существование). *Пусть  $P =$  четный полином  $+$  линейный член и  $f \in C_0^\infty$ . Тогда существует предел*

$$S\{f\} = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} S_\Lambda \{f\} \quad (11.2.5)$$

*и предельный функционал  $S\{f\}$  удовлетворяет евклидовым аксиомам OS 0 и OS 2—3 из § 6.1.*

*Доказательство.* Предположим, что предел (11.2.5) существует. Мера  $d\mu_\Lambda$  обладает свойством положительности при отражениях OS 3, если отражение  $\theta$  таково, что  $\theta\Lambda = \Lambda$  (теорема 10.4.2). Так как свойство положительности сохраняется при переходе к пределу, то предельный функционал  $S\{f\}$  тоже удовлетворяет аксиоме OS 3.

Евклидова инвариантность также следует из существования предела (11.2.5). Пусть  $E$  — произвольное евклидово преобразование. По предположению  $S_\Lambda \{f\}$  и  $S_{E\Lambda} \{f\}$  оба имеют предел при  $\Lambda \uparrow R^2$  и эти пределы совпадают. Так как  $S_{E\Lambda} \{f\} = S_\Lambda \{Ef\}$ , то и  $S\{f\} = S\{Ef\}$ .

Итак, доказательство положительности при отражениях и евклидовой инвариантности сводится к доказательству существования предела (11.2.5). Основная оценка сверху дается теоремой 11.3.1 ниже. В предположении, что эта оценка установлена, докажем (11.2.5).

Не теряя общности, можно считать, что коэффициент в линейном члене у  $P$  отрицателен. В противном случае заменим  $\varphi$  на  $-\varphi$ . Выберем теперь  $g \in C_0^\infty$ ,  $g \geq 0$ . По теореме 10.2.2 функционал  $S_\Lambda \{-ig\}$  положителен и монотонно возрастает при увеличении  $\Lambda$ . Кроме того, имеется равномерная оценка теоремы 11.3.1, поэтому предел  $S\{-ig\}$  существует.

Рассмотрим теперь множество  $\{g_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , состоящее из  $n$  неотрицательных функций класса  $C_0^\infty$ , и  $n$  комплексных чисел  $z_j$ . Положим  $zg \equiv z_1 g_1 + \dots + z_n g_n$ . Характеристический функционал в конечном объеме  $S_\Lambda \{zg\}$  является целой функцией на  $C^n$ . По теореме 11.3.1 она удовлетворяет оценке,

равномерной по  $\Lambda$  (но не по  $n$ ):

$$|S_{\Lambda}\{zg\}| \leq \prod_{i=1}^n \exp \left\{ c \left( |K| + \|nz_i g_i\|_{L_p}^p \right) \right\}. \quad (11.2.6)$$

Следовательно, по теореме Витали, при  $\Lambda \uparrow R^2$

$$S_{\Lambda}\{zg\} \rightarrow S\{zg\}, \quad (11.2.7)$$

причем сходимость равномерна на любом компактном множестве точек  $z$ , и предельный функционал является целой функцией. В частности, при  $g \geq 0$  сходятся также функции Швингера:

$$\int \Phi(g_1) \dots \Phi(g_n) d\mu_{\Lambda} \rightarrow \int \Phi(g_1) \dots \Phi(g_n) d\mu. \quad (11.2.8)$$

Оценка (11.2.6) и сходимость (11.2.7) продолжают по непрерывности на случай функций  $g_i \in L_1 \cap L_p$  с компактным носителем. Пусть теперь  $f_j \in C_0^{\infty}$ . Положим

$$f_{j\pm}(x) = \begin{cases} \pm f_j(x) & \text{при } \pm f_j(x) \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

так что  $f_j = f_{j+} - f_{j-}$  и  $f_{j\pm} \geq 0$ . Функции  $f_{j\pm}$ , вообще говоря, не содержатся в  $C_0^{\infty}$ , но принадлежат классу  $L_1 \cap L_p$ . Поэтому сходимость (11.2.8) имеет место, если  $g_j$  заменить на  $f_{j\pm}$ . После конечного суммирования получаем

$$\int \Phi(f_1) \dots \Phi(f_n) d\mu_{\Lambda} \rightarrow \int \Phi(f_1) \dots \Phi(f_n) d\mu. \quad (11.2.9)$$

Отсюда следует, что при  $f_i \in C_0^{\infty}$ ,  $z_i \in C$

$$S_{\Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^n z_i f_i \right\} \rightarrow S \left\{ \sum_{i=1}^n z_i f_i \right\}, \quad (11.2.10)$$

и предел (11.2.10) является целой функцией от  $(z_1, \dots, z_n) \in C^n$ . Следовательно,  $S\{f\}$  — целая функция на  $C_0^{\infty}$ . Таким образом, теорема доказана в предположении, что верна теорема 11.3.1. ■

### 11.3 Оценки сверху

Теперь мы докажем основную оценку, использованную при доказательстве существования предельной меры.

**Теорема 11.3.1.** Пусть  $m > 0$  и  $d\mu_{\Lambda}$  определяется формулой (11.2.1). Пусть  $P(\xi)$  — ограниченный снизу полином степени  $n$ , имеющий вид  $P(\xi) = \text{четный полином} + \text{линейный член}$ . Пусть  $p = n/(n-1)$ , и пусть функция  $f \in L_1 \cap L_p$  имеет носитель внутри прямоугольника  $K$  площади  $|K|$ . Тогда существует такая константа  $c < \infty$ , не зависящая от  $\Lambda$ , что

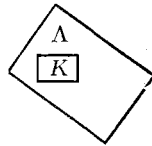
$$\left| \int e^{\Phi(f)} d\mu_{\Lambda} \right| \leq \exp \left\{ c \left( |K| + \|f\|_{L_p}^p \right) \right\}. \quad (11.3.1)$$

**Замечание.** В гл. 12 мы исключим  $K$  из оценки (11.3.1), как это требуется аксиомой OS 1.

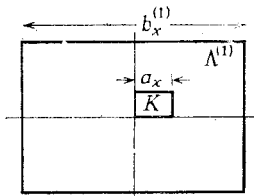
*Доказательство.* Не теряя общности, можно считать, что  $f \geq 0$ . Действительно, в силу положительности функций Швингера (теорема 10.2.2),  $|\int e^{\varphi(f)} d\mu_{\Lambda}| \leq \int e^{\varphi(|f|)} d\mu_{\Lambda}$ . Из теоремы 10.2.2 следует также, что при  $f \geq 0$

$$\langle e^{\varphi(f)} \rangle_{\Lambda} = S_{\Lambda} \{-if\} \quad (11.3.2)$$

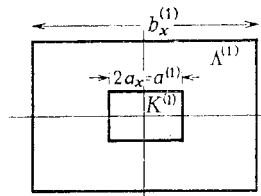
монотонно возрастает с увеличением  $\Lambda$ .



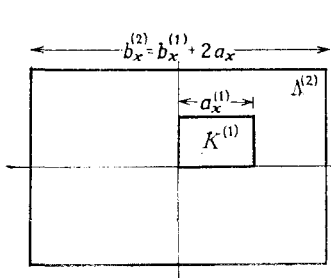
(a)



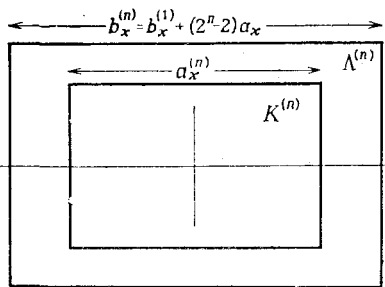
(b)



(c)



(d)



(e)

Рис. 11.1. Прямоугольники  $K$ ,  $\Lambda$ , используемые при доказательстве оценок по методу многократных отражений: (a) исходная картина; (b) после увеличения  $\Lambda$  до  $\Lambda^{(1)}$ ; (c) после одного отражения относительно каждой из осей; (d) после увеличения  $\Lambda$  до  $\Lambda^{(2)}$ ; (e) после  $n$  отражений и увеличений объема (масштаб изменен).

Теперь мы начнем последовательно применять преобразования, при которых происходят увеличение объема и отражения. Пусть  $K \subset \Lambda$  — прямоугольник, содержащий  $\text{supp } f$ , и пусть  $\Lambda^{(1)} \supset \Lambda$  — другой прямоугольник с центром в одной из вершин  $K$  и осями, параллельными осям  $K$  (рис. 11.1 (b)). Будем считать, что

стороны  $K$  параллельны осям  $x$  и  $y$ . Обозначим  $\{a_x, a_y\}$  длины сторон  $K$  и  $\{b_x^{(1)}, b_y^{(1)}\}$  длины сторон  $\Lambda^{(1)}$ . Выполним отражения относительно осей прямоугольника  $\Lambda^{(1)}$ . Поскольку  $\Lambda^{(1)}$  инвариантен относительно этих отражений, можно воспользоваться положительностью при отражениях меры  $d\mu_{\Lambda^{(1)}}$  и получить оценку сверху. Положим

$$f^{(1)} \equiv f + \theta_{\Pi_x} f + \theta_{\Pi_y} f + \theta_{\Pi_x} \theta_{\Pi_y} f = (1 + \theta_{\Pi_x})(1 + \theta_{\Pi_y}) f,$$

$$K^{(1)} = K \cup \theta_{\Pi_x} K \cup \theta_{\Pi_y} K \cup \theta_{\Pi_x} \theta_{\Pi_y} K.$$

Легко видеть, что  $\text{supp } f^{(1)} \subset K^{(1)}$ . Пусть  $R$  — оператор отражения (10.5.2). Тогда  $R(e^{\Phi(f)}) = e^{\Phi(f^{(1)})}$ . По предложению 10.5.1 и теореме 10.2.2

$$\int e^{\Phi(f)} d\mu_{\Lambda} \leq \int e^{\Phi(f)} d\mu_{\Lambda^{(1)}} \leq \left( \int e^{\Phi(f^{(1)})} d\mu_{\Lambda^{(1)}} \right)^{1/4}. \quad (11.3.3)$$

Отражения относительно осей  $\Lambda^{(1)}$  изображены на рис. 11.1(c).

Будем теперь повторять этот процесс. Вначале увеличиваем  $\Lambda^{(1)}$ , выбирая  $\Lambda^{(j+1)}$  так, чтобы прямоугольник  $K^{(j)}$  лежал в первом квадранте  $\Lambda^{(j+1)}$ . Затем производим отражение относительно осей  $\Lambda^{(j+1)}$  и получаем функцию  $f^{(j+1)}$  с носителем в  $K^{(j+1)}$ , как на рис. 11.1(d — e). Этот процесс увеличений — отражений прекращается после того, как на  $n$ -м шаге будут получены прямоугольники  $K^{(n)}$  и  $\Lambda^{(n)}$ , размеры которых имеют одинаковый порядок. Применяя  $n$  раз неравенство (11.3.3), получаем

$$\langle e^{\Phi(f)} \rangle_{\Lambda} \equiv \langle e^{\Phi(f)} \rangle_{\Lambda} \cdot c_{\partial\Lambda} \leq \langle e^{\Phi(f)} \rangle_{\Lambda^{(1)}} \leq \langle e^{\Phi(f^{(n)})} \rangle_{\Lambda^{(n)}}^{4^{-n}}. \quad (11.3.4)$$

Чтобы оценить (11.3.4), заметим, что  $K^{(n)}$  есть прямоугольник со сторонами длины

$$a_x^{(n)} = 2^n a_x, \quad a_y^{(n)} = 2^n a_y. \quad (11.3.5)$$

Его площадь равна  $|K^{(n)}| = 4^n |K|$ . Прямоугольник  $\Lambda^{(n)}$  имеет стороны длины

$$\begin{aligned} b_x^{(n)} &= b_x^{(1)} + (2^n - 2) a_x \leq b_x^{(1)} + 2^n a_x, \\ b_y^{(n)} &= b_y^{(1)} + (2^n - 2) a_y \leq b_y^{(1)} + 2^n a_y. \end{aligned} \quad (11.3.6)$$

Это вытекает из равенства

$$b_x^{(n)} = b_x^{(n-1)} + a_x^{(n-1)} = (2^{n-1} + \dots + 2) a_x + b_x^{(1)} = (2^n - 2) a_x + b_x^{(1)}.$$

При достаточно больших  $n$

$$b_x^{(1)} \leq 2^n a_x, \quad b_y^{(1)} \leq 2^n a_y. \quad (11.3.7)$$

Тогда

$$|\Lambda^{(n)}| \leq 4 \cdot (2^n)^2 |K| = 4 |K^{(n)}|, \quad (11.3.8)$$

так что  $K^{(n)}$  по крайней мере одну четверть площади  $\Lambda^{(n)}$  (рис. 11.1(e)). Записывая (11.3.4) в виде отношения

$$\langle e^{\Phi(f^{(n)})} \rangle_{\Lambda^{(n)}} = \int e^{\Phi(f^{(n)} - V(\Lambda^{(n)}))} d\Phi_{\partial\Lambda^{(n)}} / \int e^{-V(\Lambda^{(n)})} d\Phi_{\partial\Lambda^{(n)}},$$

мы оцениваем числитель и знаменатель по отдельности. В силу предложения 10.3.1 и оценки (10.3.8),

$$\langle e^{\Phi(f)} \rangle_{\Lambda, c} \leq \left( O(1) |\Lambda^{(n)}| \int e^{\Phi(f^{(n)}) - V(\Lambda^{(n)})} d\varphi_{\partial\Lambda^{(n)}}^N \right)^{4^{-n}}, \quad (11.3.9)$$

где  $d\varphi_{\partial\Lambda^{(n)}}^N$  обозначает гауссову меру с граничными условиями Неймана на всех единичных квадратах в  $\Lambda^{(n)}$ . Так как правая часть (11.3.9) факторизуется, мы оцениваем ее с помощью теоремы 8.6.2. Действительно, (8.6.8) дает оценку сверху вида  $\exp(O(N(g) + |\Lambda|))$ , где  $g_j = f_j$  при  $j \neq 1$  суть коэффициенты полинома  $P$ , а  $g_1 = f_1 + f^{(n)}$  (см. (8.6.2, 4)). Норма  $N(g)$  оценивается следующим образом:  $N(g) \leq O(|\Lambda|) \left( 1 + \|f^{(n)}\|_{L_p}^p \right)$ , где константа зависит от  $P$ , т. е. от функций  $f_j$ , но не зависит от  $f$  и  $f^{(n)}$ . Таким образом,

$$\langle e^{\Phi(f)} \rangle_{\Lambda, c} \leq \left[ O(1) |\Lambda^{(n)}| \exp \left\{ c \|f^{(n)}\|_{L_p}^p \right\} \right]^{4^{-n}}. \quad (11.3.10)$$

Заметим, что  $f^{(n)}$  есть сумма отражений  $f$ , причем носители  $f$  при различных отражениях не пересекаются. Поэтому  $\|f^{(n)}\|_{L_p}^p = 4^n \|f\|_{L_p}^p$ . Применяя (11.3.8), (11.3.10), окончательно получаем, что

$$\langle e^{\Phi(f)} \rangle_{\Lambda, c} \leq \exp \left\{ c (|K| + \|f\|_{L_p}^p) \right\}. \quad \blacksquare \quad (11.3.11)$$

**Замечание** (из истории вопроса). Впервые идея использовать многократные отражения относительно полной решеточной группы  $Z^d$  для того, чтобы свести оценки локальных возмущений к оценкам свободной энергии, появилась в работе [Glimm, Jaffe, Spencer, 1975]. Этот метод значительно упростил исследование предельного перехода  $V \rightarrow \infty$ . Для полуограниченных  $P$  общего вида граничные условия со слабой связью [Glimm, Jaffe, 1975b] определяются с помощью кластерного разложения при большом внешнем поле [Spencer, 1974b]; см. также гл. 18. Из неравенств ФКЖ § 10.2 следует монотонность по внешнему полю. Монотонность и оценки многократных отражений позволяют избавиться от большого внешнего поля. См. [Fröhlich, Simon, 1977].

## Глава 12

### Регулярность поля и проверка аксиом

#### 12.1. Введение

Анализ, основанный на формуле интегрирования по частям, который был развит в гл. 9 для случая меры  $d\mu_{\Lambda}$  в конечном объеме, можно перенести и на случай меры  $d\mu$  в бесконечном объеме, построенной в гл. 11. Соответствующие основные тождества порождают ряды, с помощью которых можно установить регуляр-

ность и другие свойства моделей квантового поля. Разложение по теории возмущений, проведенное нами в § 8.4 и 9.4, основывалось на тождествах, связанных с интегрированием по частям. Это же относится к высокотемпературным и низкотемпературным разложениям, изучаемым в части III и в другой обширной литературе. Эти разложения являются мощным средством, позволяющим подробно исследовать, с одной стороны, локальные (ультрафиолетовые) особенности модели и, с другой стороны, характер убывания взаимодействия на бесконечности (инфракрасное поведение).

Так как  $P(\varphi)_2$ -модели суперперенормируемы, то ультрафиолетовое поведение определяется членами низших порядков в рядах теории возмущений. При этом главная особенность такая же, как и у свободного поля. Для функции Грина она была представлена в явной форме в гл. 7. Добавок, обусловленный взаимодействием, как мы увидим ниже, оказывается регулярным. В § 12.5 мы воспользуемся интегрированием по частям для того, чтобы установить инфракрасное поведение с помощью оценки сверху характеристического функционала  $S\{if\}$  и исключить в оценках теоремы 12.4.1 зависимость от площади  $K(\text{supp } f \subset K)$ .

Иначе формулу интегрирования по частям (9.1.32) можно рассматривать как евклидово уравнение движения. Именно, для  $P(\varphi)$ -моделей это уравнение имеет вид

$$(-\Delta + m^2)\varphi(x) + P'(\varphi(x)) = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} + \left(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right)^* \quad (12.1.1)$$

В частности, после аналитического продолжения на вещественную ось времени правая часть уравнения (12.1.1) обращается в нуль, а левая превращается в нелинейное уравнение относительно  $\varphi$ :

$$(-\square + m^2)\varphi(x) + P'(\varphi(x)) = 0. \quad (12.1.2)$$

Трудности, возникающие при корректном выводе соотношения (12.1.1), знакомы нам по модели в конечном объеме и были изучены в § 9.1. Они связаны с определением и регулярностью перенормированного (в данном случае упорядоченного по Вику) полинома  $P(\varphi)$ . В этой главе мы получаем те же результаты для случая модели в бесконечном объеме с помощью равномерных по объему оценок для  $\varphi^j$ . Из сходимости мер  $d\mu_\Lambda$  к мере  $d\mu$  в бесконечном объеме, установленной в гл. 11, вытекает, что полином  $\varphi^j$  в бесконечном объеме можно получить, с одной стороны, как предел аналогичных выражений для конечных объемов, а с другой стороны, построить его непосредственно с помощью виково упорядочения в бесконечном объеме. Благодаря этому обстоятельству мы сможем обосновать перестановку предельных переходов ( $|\Lambda| \rightarrow \infty$  и виково упорядочение) и выведем формулу интегрирования по частям для бесконечного объема. В конце главы мы рассмотрим некоторые применения этих результатов, а также



завершим доказательство евклидовой аксиомы OS 1 и затем проверим условия теоремы реконструкции 6.1.5. Характеристический функционал

$$S\{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu(\varphi)$$

рассматривается для случая ограниченного снизу полинома вида  $P(\xi) =$  четный полином  $+$  линейный член.

**Теорема 12.1.1** (Выполнение аксиом). *Характеристический функционал  $S\{f\}$  существует (теорема 11.2.1) и удовлетворяет евклидовым аксиомам OS 0—3 из § 6.1. Следовательно, он порождает квантовое поле, удовлетворяющее аксиомам Вайтмана W 1—3.*

*Доказательство.* Эта теорема — прямое следствие теорем 11.2.1 и 12.5.1. ■

## 12.2 Интегрирование по частям

Так как всякая формула интегрирования по частям (например, (12.1.1)) содержит производные и виковы полиномы  $:P'(\varphi(x)):$ , мы начнем с введения подходящего класса дифференцируемых функций  $A(\varphi)$  на евклидовом пространстве  $\mathcal{E} = L_2(\mathcal{D}', d\mu)$ . Построения гл. 11 приводят к полю  $\varphi(f)$  и произведениям вида  $A(\varphi) = \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n)$ , но не определяют викову степень  $:\varphi^j:$ . Сейчас мы покажем, что в случае бесконечного объема виковы степени получаются как пределы обрезанных степеней:

$$:\varphi(x)^j: = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} :\varphi_\kappa(x)^j:. \quad (12.2.1)$$

Здесь  $\varphi_\kappa = \delta_\kappa * \varphi$ , а  $\delta_\kappa$ , как и раньше, обозначает размазанную дельта-функцию  $\delta_\kappa(x) = \kappa^2 h(\kappa x) \in C^\infty$ ,  $\int h dx = 1$ . Кроме того, мы покажем, что предельный переход  $\kappa \rightarrow \infty$  будет равномерным по всем объемам  $\Lambda \subset R^2$  и, следовательно, предельные переходы  $\Lambda \uparrow R^2$  и  $\kappa \rightarrow \infty$  можно переставлять. Итак,  $:\varphi^j:$  — это функция от поля  $\varphi$ , определенная на евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$  и удовлетворяющая соотношениям

$$:\varphi^j: = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} :\varphi_\kappa^j: \Lambda = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \uparrow R^2} :\varphi_\kappa^j: \Lambda. \quad (12.2.2)$$

Оценки, необходимые для доказательства соотношений (12.2.2), носят технический характер и требуют обобщения неравенств § 8.6 на класс нелокальных возмущений. Однако с помощью этих оценок можно обобщить результаты гл. 11 на случай мономов Вика произвольной степени. В частности, мы определим обобщенные функции Швингера

$$\int \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k) : \varphi^2(y_1) : \dots : \varphi^2(y_l) : \dots : \varphi^{q-1}(z_1) : \dots : \varphi^{q-1}(z_m) : d\mu$$

и выведем оценки, устанавливающие их регулярность. Произвольные виковы степени  $:\varphi^r:$ ,  $n < r$ , после применения формулы инте-

группирования по частям сводятся к этим обобщенным функциям Швингера.

В следующей теореме рассматриваются коэффициенты  $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$ , принадлежащие классу  $C_0^\infty$ . Это коэффициенты при более низких степенях в полиноме  $\delta P = \sum_{j=1}^{n-1} :\varphi^j(g_j):$ . Здесь  $n = \text{deg } P$ . Мы полагаем  $:\varphi^j: \equiv :\varphi^j:_C$ , где ковариационный оператор  $C$  принадлежит множеству  $\mathcal{C}_m$ , введенному в гл. 7.

**Теорема 12.2.1.** Пусть  $P =$  четный полином  $+$  линейный член. Тогда характеристический функционал

$$S\{g\} = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \int \exp\left(i \sum_{j=1}^{n-1} :\varphi^j(g_j):\right) d\mu_\Lambda \quad (12.2.3)$$

существует и определяет виковы степени  $:\varphi^j:$  относительно меры  $d\mu$ . Предельные переходы по  $\kappa$  и  $\Lambda$  перестановочны, так что  $:\varphi^j: \equiv \lim_{\kappa \rightarrow \infty} :\varphi^j:_\kappa$  в пространстве  $L_2(d\mu)$  и  $:\varphi^j:$  является функцией от поля  $\varphi$ . Более того,  $S\{g\}$  — целая аналитическая функция от  $g_1, \dots, g_{n-1}$ .

*Доказательство.* См. § 12.4. ■

**Теорема 12.2.2.** Существует такая константа  $c < \infty$ , что для произвольной функции  $g \in L_1 \cap L_p$  с носителем  $\text{supp } g \subset \Lambda \subset R^2$  и  $p = n/(n-j)$  справедливо неравенство

$$\left| \int \exp(:\varphi^j(g):) d\mu_\Lambda \right| \leq \exp\left\{c \left(\|g\|_{L_1} + \|g\|_{L_p}^p\right)\right\}. \quad (12.2.4)$$

В § 12.5 рассмотрен частный случай этой теоремы (теорема 12.5.1) при  $j=1$  и вкратце указан способ модификации этого доказательства применительно к общему случаю.

Пусть  $\mathfrak{A}$  обозначает алгебру функций  $A = A(\varphi)$ , порожденную виковыми степенями  $:\varphi^j(g_j):$  и экспонентами от них. Как и в гл. 7, пусть  $C_\emptyset = (-\Delta + m^2)^{-1}$ .

**Следствие 12.2.3.** Для любого элемента  $A \in \mathfrak{A}$  справедливы формулы интегрирования по частям (9.1.32) и (12.1.1). Именно, для произвольной функции  $f \in C_0^\infty$

$$\int \varphi(f) A(\varphi) d\mu = \int \left( \langle C_\emptyset f, \frac{\delta A}{\delta \varphi} \rangle - A(\varphi) \langle C_\emptyset f, \frac{\delta V}{\delta \varphi} \rangle \right) d\mu. \quad (12.2.5)$$

*Доказательство.* Для ограниченной области  $\Lambda$  формула интегрирования по частям, в которой вместо свободной ковариации  $C_\emptyset$  рассматривалась ковариация  $C_{\partial\Lambda}$ , была установлена в § 9.1. Подставим в эту формулу вместо  $f$  функцию  $C_{\partial\Lambda}^{-1}f = C_\emptyset^{-1}f$ . Тогда в обеих частях равенства окажутся основные функции с компактными носителями, не зависящие от области  $\Lambda$ . По теореме 12.2.1 обе

части равенства сходятся к соответствующим выражениям для  $\Lambda = R^2$ . Тем самым тождество доказано для произвольной функции  $f \in C_{\mathcal{Q}}^{-1}C_0^\infty$ . По теореме 12.2.2 и интегральной теореме Коши это тождество продолжается по непрерывности на любую функцию  $f \in L_1 \cap L_{n/(n-1)}$ . ■

**Замечание.** Тождество (12.2.5) можно распространить и на дельта-функции  $f = \delta_x$  при условии, что каждое слагаемое в правой части продолжается по непрерывности. В этом случае поле  $\varphi(x)$  в левой части (12.2.5) следует рассматривать как билинейную форму; оно не является ни оператором, ни функцией.

Предположим, что носитель функции  $g$  принадлежит объединению непересекающихся единичных ячеек  $\Delta$ , т. е.  $\text{supp } g \subset \bigcup_{\Delta \in \mathcal{N}} \Delta$ . Положим  $g_\Delta = \chi_\Delta g$ , где  $\chi_\Delta$  — характеристическая функция ячейки  $\Delta$ ; при этом, конечно,

$$g = \sum_{\Delta \in \mathcal{N}} g_\Delta. \quad (12.2.6)$$

Оценить обобщенные функции Швингера позволяет интегральная теорема Коши.

**Следствие 12.2.4.** Пусть  $g$  удовлетворяет прежним условиям,  $p = n/(n-j)$ ,  $j < n$  и носитель функции  $h_{\Delta, i}$  содержится в ячейке  $\Delta$ . Тогда

$$\left| \int \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \left[ \left( \prod_{i=1}^{n_\Delta} : \Phi^j(h_{\Delta, i}) : \right) \exp( : \Phi^j(g_\Delta) : ) \right] d\mu \right| \leq \\ \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \left[ (n_\Delta!)^{1-1/p} \left( \prod_{i=1}^{n_\Delta} c \|h_{\Delta, i}\|_{L_p} \right) \exp \left\{ c \left( 1 + \|g_\Delta\|_{L_p}^p \right) \right\} \right]. \quad (12.2.7)$$

**Доказательство.** Воспользуемся неравенством Шварца, чтобы отделить многочлены от экспонент и ограничиться таким множеством  $\mathcal{N}$ , что для входящих в него ячеек  $\Delta$  справедливо  $n_\Delta \neq 0$ . Нужная оценка для интеграла от экспоненты получается из теоремы 12.2.2. Положив таким образом  $g = 0$ , мы при помощи поляризационного тождества сведем все к случаю одной функции  $h_{\Delta, i}$  для каждой фиксированной ячейки  $\Delta$ . Предполагая, что в этом частном случае неравенство (12.2.7) доказано, воспользуемся поляризационным тождеством

$$2^{n-1} n! \prod_{i=1}^n a_i = \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n (a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n)^n. \quad (12.2.8)$$

Поскольку неравенство (12.2.7) не меняется при умножении  $h_{\Delta, i}$  на константу, можно считать, что все нормы  $\|h_{\Delta, i}\|_{L_p}$  равны между собой. С помощью тождества (12.2.8) и неравенства треугольника

$$\|h_{\Delta, 1} + \varepsilon_2 h_{\Delta, 2} + \dots\|_{L_p} \leq n_\Delta \|h_{\Delta, i}\|_{L_p}$$

получим, что левая часть (12.2.7) допускает оценку

$$\left| \int \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \prod_{i=1}^{n_{\Delta}} : \Phi^j(h_{\Delta}, i) : d\mu \right| \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} c(n_{\Delta}!)^{-1/p} n_{\Delta}^{n_{\Delta}} \|h_{\Delta}, i\|_{L_p}^{n_{\Delta}}.$$

Наконец, применение формулы Стирлинга завершает доказательство следствия в предположении, что оно верно в указанном выше частном случае.

Проведем теперь доказательство в этом частном случае. Обозначим  $z_{\Delta} \in C^{[1, p]}$  семейство комплексных переменных, помеченных ячейками  $\Delta \in \mathcal{N}$ . Положим  $zh(x) = \sum_{\Delta \in \mathcal{N}} z_{\Delta} h_{\Delta}(x)$ . Тогда левая часть неравенства (12.2.7) равна

$$\mathcal{M} = \left( \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \left( \frac{d}{dz_{\Delta}} \right)^{n_{\Delta}} \right) \int \exp(:\Phi^j(zh):) d\mu \Big|_{z(\Delta)=0}.$$

Согласно теореме 12.2.2,  $S\{-izh\} = \int \exp(:\Phi^j(zh):) d\mu$  — целая аналитическая функция. Поэтому, в силу интегральной формулы Коши,

$$\mathcal{M} = \int S\{-izh\} \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \frac{n_{\Delta}! dz_{\Delta}}{(2\pi i) z_{\Delta}^{n_{\Delta}+1}}, \quad (12.2.9)$$

где интегралы берутся по произведению окружностей с центром в точке  $z_{\Delta} = 0$  и радиусом  $r_{\Delta}$ . Отсюда, в силу оценки (12.2.4), имеем

$$\mathcal{M} \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} n_{\Delta}! r_{\Delta}^{-n_{\Delta}} \exp \left\{ c \left( r_{\Delta} \|h_{\Delta}\|_{L_1} + r_{\Delta}^p \|h_{\Delta}\|_{L_p}^p \right) \right\}. \quad (12.2.10)$$

Выберем теперь радиус  $r_{\Delta}$  равным  $(1/2) n_{\Delta}^{1/p} \|h_{\Delta}\|_{L_p}^{-1}$ . Так как  $\|h_{\Delta}\|_{L_1} \leq \|h_{\Delta}\|_{L_p}$ , то  $r_{\Delta} \|h_{\Delta}\|_{L_1} + r_{\Delta}^p \|h_{\Delta}\|_{L_p}^p \leq n_{\Delta}$ . Применяя неравенство (12.2.10), получаем, что

$$|\mathcal{M}| \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} (n_{\Delta}!)^{1-1/p} (c \|h_{\Delta}\|_{L_p})^{n_{\Delta}}. \blacksquare$$

### 12.3 Нелокальные $\Phi^j$ -оценки

В гл. 8 оценки полиномов Вика  $:\Phi^j:$  были выведены из слабо сходящихся при  $\kappa \rightarrow \infty$  оценок для обрезанных полей  $:\Phi_{\kappa}^j:$  (предложение 8.6.3). Для получения равномерных оценок функций  $:\Phi_{\kappa}^j:$  (при  $\kappa \rightarrow \infty$ ) мы введем дважды обрезанное по импульсам поле

$$\Phi_{\kappa, \kappa'} = \delta_{\kappa} * \delta_{\kappa'} * \Phi \quad (12.3.1)$$

и воспользуемся слабо сходящимися оценками, справедливыми для этого поля. Двойное импульсное обрезание (12.3.1) вводит соответствующее виково упорядочение вместе с его константами  $c_{\kappa, \kappa'}$ , используемыми ниже. Как указывает название этого параграфа, поле  $\Phi_{\kappa}$  нелокальное.

По техническим причинам удобно предположить, что объединение носителей  $\bigcup_{j=1}^{n-1} \text{supp } g_j$  содержится во внутренности множества  $\Lambda = \text{supp } f_n$ . Далее мы будем пользоваться обозначениями (8.6.4). Функции  $g_j$  определяют возмущения полинома  $P$ . Они впервые появляются при рассмотрении двойного обрезания. Возмущение старшего члена функцией  $g_n$  также допустимо в предположении, что норма  $\|g_n\|_{L_\infty}$  достаточно мала. Положим

$$:Q(\varphi_{\kappa, \kappa'}, g): = \sum_{j=1}^{n-1} \int : \varphi_{\kappa, \kappa'}(x)^j : g_j(x) dx. \quad (12.3.2)$$

По аналогии с формулой (8.6.5) определим

$$N'(g) = \sum_{j=1}^{n-1} \|g_j\|_{L_{n/(n-j)}}^{n/(n-j)}.$$

**Предложение 12.3.1.** *Существует такая константа  $c$ , зависящая от  $t, n$  и суммы норм  $\|f_n\|_{L_\infty} + \|f_n^{-1}\|_{L_\infty(\Lambda)}$ , что*

$$-c \|f_n\|_{L_1} (\ln \kappa)^{(\deg P)/2} + c(N(f) + N'(g)) \leq :P(\varphi_{\kappa, f}): + :Q(\varphi_{\kappa, \kappa'}, g):. \quad (12.3.3)$$

*Доказательство.* Поскольку  $\varphi_{\kappa, \kappa'}$  — нелокальная функция  $\varphi_{\kappa}$ , требуется некоторая модификация доказательства предложения 8.6.3. По определению

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa, \kappa'}(x)^j &= \prod_{i=1}^j \int \varphi_{\kappa}(y_i) \delta_{\kappa'}(y_i - x) dy_i = \\ &= \int \left( \prod_{i=1}^j \varphi_{\kappa}(y_i) \right) \left( \prod_{i=1}^j \delta_{\kappa'}(y_i - x) dy_i \right). \end{aligned}$$

Применение неравенства  $\prod_{i=1}^j a_i \leq \sum_{i=1}^j a_i^j$ , верного для любых  $a_i \geq 0$ , дает

$$|\varphi_{\kappa, \kappa'}(x)^j| \leq \int \sum_{i=1}^j |\varphi_{\kappa}(y_i)^j| \prod_{l=1}^j \delta_{\kappa'}(y_l - x) dy_l.$$

Поскольку  $\int \delta_{\kappa}(y) dy = 1$ , получаем, что

$$|\varphi_{\kappa, \kappa'}(x)^j| \leq \int \sum_{i=1}^j |\varphi_{\kappa}(y_i)^j| \delta_{\kappa'}(y_i - x) dy_i$$

$$\left| \int \varphi_{\kappa, \kappa'}(x)^j g_j(x) dx \right| \leq j \int |\varphi_{\kappa}(x)^j| (\delta_{\kappa'} * |g_j|)(x) dx.$$

Как и в предложении 8.6.3, применяя неравенство Гёльдера, получаем, что

$$\left| \int c_{\kappa, \kappa'}^f \Phi_{\kappa, \kappa'}(x)^{f-2l} g_f(x) dx \right| \leq \varepsilon \int \Phi_{\kappa}(x)^n f_n(x) dx + a(\varepsilon) c_{\kappa, \kappa'}^{n/2} \int f_n(x) dx + \\ + \int \left( \frac{(\delta_{\kappa'} * |g_f|)(x)}{f_n(x)} \right)^{n/(n-l)} f_n(x) dx. \quad (12.3.4)$$

Так как  $\|\delta_{\kappa'} * g\|_{L_p} \leq \|\delta_{\kappa'}\|_{L_1} \|g\|_{L_p} = \|g\|_{L_p}$ , а для  $g = |g_f|$

$$\int \left( \frac{\delta_{\kappa'} * g}{f_n} \right)^{n/(n-l)} f_n dx = \\ = \int (\delta_{\kappa'} * g)^{n/(n-l)} f_n^{-l/(n-l)} dx \leq \text{const} \int g^{n/(n-l)} dx = \text{const } N'(g),$$

то теперь утверждение следует из неравенства (12.3.4), как и в подобном месте доказательства предложения 8.6.3. ■

Далее, следуя доказательству теоремы 8.6.2, убеждаемся, что справедливо

**Предложение 12.3.2.** Пусть  $\kappa \leq \kappa' \leq \infty$  и  $\|f_n\|_{L_\infty} + \|f_n^{-1}\|_{L_\infty(\Lambda)} + m^{-1} + n + |\Lambda| \leq L$ . Тогда

$$\int \exp(:Q(\Phi_{\kappa}, g):) d\mu_\Lambda \leq \exp(\text{const}(N(f) + N'(g) + 1)), \\ \int \exp(:Q(\Phi_{\kappa}, g) - Q(\Phi_{\kappa'}, g):) d\mu_\Lambda \leq \\ \leq \kappa^{-\varepsilon} M(g) \exp(\text{const}(N(f) + N'(g) + 1))$$

В обоих случаях константы зависят только от  $L$ .

## 12.4 Равномерность относительно объема

По аналогии с теоремой 11.3.1 мы покажем, что оценки § 12.3 равномерны относительно объема  $|\Lambda|$  области  $\Lambda$ . Поскольку полиномиальная функция  $Q$ , которую требуется оценить, не представима в виде суммы четного полинома и линейного члена, мы не можем пользоваться монотонностью функционала  $S_\Lambda$  по  $\Lambda$ . Поэтому потребуются другая серия оценок по методу многократных отражений. Мы воспользуемся методом несимметричных отражений, развитым в § 10.6. Преимущество этого общего метода состоит в том, что от полинома взаимодействия  $P$  требуется лишь полуограниченность, а в остальном он может быть произвольным. В частности, в этом параграфе полином  $P$  необязательно имеет вид четный полином + линейный член.

Ниже  $K$  и  $\Lambda$  будут прямоугольниками, причем  $K \subset \Lambda$ . Мы предполагаем, что  $\Lambda$  выбирается из некоторой специальной последовательности прямоугольников  $\Lambda_\nu \uparrow \infty$ , зависящей от  $K$ . Все эти соглашения имеют чисто технический характер и не мешают делать заключения о предельной мере в бесконечном объеме.

**Теорема 12.4.1.** *Существуют такие константы  $c$  и  $\varepsilon$ , что для любых  $\kappa < \kappa' < \infty$  и произвольного прямоугольника  $K$ , длины сторон которого отделены от нуля, найдется последовательность прямоугольников  $\Lambda_\nu \uparrow R^2$ , для которых верны неравенства*

$$\int \exp(:\Phi_\kappa^j(g):) d\mu_{\Lambda_\nu} \leq \exp(c \{ |K| + \|g\|_{L^p}^p \}),$$

$$\int \exp(:\Phi_\kappa^j(g) - \Phi_{\kappa'}^j(g):) d\mu_{\Lambda_\nu} \leq \kappa^{-\varepsilon} M(g) \exp(c \{ |K| + \|g\|_{L^p}^p \}),$$

при условии что  $\text{supp } g \subset K$ .

*Доказательство.* Вначале выберем прямоугольники  $\Lambda_\nu$  и  $K$  с общим центром и параллельными сторонами. Пусть  $K$  — прямоугольник размера  $l \times t$ , а  $\Lambda_\nu$  — размера  $(2L_\nu + l) \times (2T_\nu + t)$ . Будем считать, что  $T_\nu$  намного больше  $L_\nu + l$ , и рассмотрим соответствующую последовательность  $\Lambda_\nu \uparrow R^2$ . Мы займемся выводом оценок при фиксированном  $\nu$  и, таким образом, опустим индекс  $\nu$  у  $\Lambda_\nu, L_\nu, T_\nu$ . Полученные оценки окажутся равномерными по  $\nu$ . Без ограничения общности

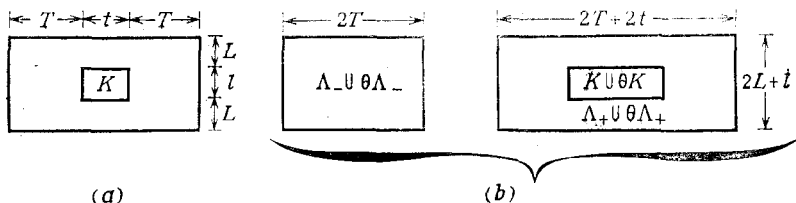


Рис. 12.1. (а) до и (б) после отражения.

будем также считать, что  $l \leq L$ . Осью, относительно которой мы сделаем первое отражение, будет одна из сторон прямоугольника  $K$ . Она не является осью симметрии ни для прямоугольника  $\Lambda$ , ни для линии граничных условий  $B$ . Таким образом, мы используем несимметричную форму свойства положительности при отражениях (предложение 10.6.1). Выбранная нами ось разрезает прямоугольник  $\Lambda$  на две части; пусть  $\Lambda_+$  — та из них, которая содержит  $K$ . Тогда в формуле (10.6.8)  $A = I$ , а множитель, содержащий  $A$ , в силу нормировки, обращается в единицу. Это преобразование назовем основным шагом (рис 12.1).

Далее, как и в доказательстве теоремы 11.3.1, основной шаг повторяется несколько раз. После  $n$  повторений получим области  $K^{(n)}, \Lambda^{(n)}$  и функцию  $B^{(n)}$ , причем  $|\Lambda^{(n)}| \leq 4|K^{(n)}|$  для большого  $n$ . Пусть  $B = B^{(0)} = \exp(:\Phi_\kappa^j(g):)$ . После  $n$  последовательных отражений получаем неравенство

$$\left| \int B d\mu_{\Lambda} \right| \leq \prod_{j=1}^n \left[ \left( \frac{Z_+^{(j)} Z_-^{(j)}}{Z^{(j)2}} \right)^{2^{-j}} \det (C^{(j)-2} C_+^{(j)} C_-^{(j)})^{2^{-j-1}} \right] \times \left( \int \overline{\Theta B^{(n-1)}} B^{(n-1)} d\mu_{\Lambda^{(n)}} \right)^{2^{-n}}. \quad (12.4.1)$$

Выше мы предположим, что (в обозначениях рис. 12.1) для достаточно большого  $T(2L + l)$  выполняется неравенство  $L + l \ll T(2L + l) \leq T^2$ . Прямоугольник  $\Lambda$ , удовлетворяющий этим требованиям, должен быть очень вытянутым. Как было сказано, первое отражение делается относительно вертикальной стороны  $K$ . Если  $j_0$  и  $j_1$  выбраны так, что  $2^{j_0} t < 2T + t \leq 2^{j_0+1} t$  и  $2^{j_1} l < 2L + l \leq 2^{j_1+1} l$ , то

мы сделаем  $j_0$  отражений относительно вертикальной оси и  $j_1$  относительно горизонтальной.

Оценим каждый из сомножителей правой части (12.4.1). Сначала оценим определители с помощью теоремы 10.6.2. Для начальных  $j_0$  отражений относительно вертикальной оси выполнены соотношения

$$L_j = 2L + l, \quad (T_j)_- = T, \quad (T_j)_+ = T + 2^{j-1}t.$$

Поэтому  $L_j/(T_j)_\pm \leq (2L + l)/T \leq 1$ , и эти определители ограничены выраже-

$$\prod_{j=1}^{j_0} O(1)2^{-j} \leq O(1).$$

Для отражений относительно горизонтальной оси выполнены аналогичные соотношения

$$(L_{j_0+k})_- = L, \quad (L_{j_0+k})_+ = L + 2^{k-1}l, \quad T_{j_0+k} = 2T + 2^{j_0}t.$$

Поскольку  $L \geq 1$ ,  $T_{j_0+k}/(L_{j_0+k})_\pm \leq (2T + 2^{j_0}t)/L \leq 2^{j_0+2}t$ . Следовательно, опре-

делители, отвечающие индексам  $j_0 < j \leq j_0 + j_1$ , мажорируются величиной

$$\prod_{k=1}^{j_1} \exp [O(2^{j_0}t)2^{-j_0-k}] \leq \exp(O(t)) \leq \exp(O(|K|)).$$

Теперь рассмотрим произведение функций  $Z$ . После частичного сокращения (в силу равенства  $Z_+^{(j)} = Z^{(j+1)}$ ) это произведение принимает вид

$$\left( \prod_{j=1}^{j_0+j_1} \left( \frac{Z_-^{(j)}}{Z_-^{(1)}} \right)^{2-j} \right) \left( \frac{Z_+^{(j_0+j_1)}}{Z_+^{(1)}} \right)^{2-(j_0+j_1)}. \quad (12.4.2)$$

В силу двусторонней оценки (10.3.8), функции  $Z$  ограничены снизу и сверху. Поэтому сомножитель с  $Z_+$  можно оценить с помощью приведенных выше соотношений для площадей  $\Lambda^{(n)}$ ,  $n = j_0 + j_1$ . Имеем

$$(Z_+^{(n)}/Z_+^{(1)})^{2-n} \leq \exp(O(TL)2^{-n}) \leq \exp(O(tl)) = \exp(O(|K|)).$$

С учетом предложения 12.3.2 подобные оценки можно применить и к интегралу в правой части (12.4.1). Это приводит к появлению множителя  $\exp[\text{const } N'(g)]$ . (Здесь мы считаем функцию  $f$  фиксированной.)

Пусть  $Z(a, b)$  обозначает нормирующую статистическую сумму для прямоугольника  $a \times b$ . Тогда

$$Z^{(1)} = Z(2T + t, 2L + l),$$

$$Z_-^{(j)} = Z(2T, 2L + l), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

$$Z_-^{(j)} = Z(2T + 2^{j_0}t, 2L), \quad j_0 + 1 \leq j \leq j_0 + j_1 = n.$$

Поэтому оставшееся отношение в произведении (12.4.2) сводится к выражению

$$\left( \frac{Z(2T, 2L + l)}{Z(2T + t, 2L + l)} \right)^{1-2^{-j_0}} \cdot \left( \frac{Z(2T + 2^{j_0}t, 2L)}{Z(2T + t, 2L + l)} \right)^{2^{-j_0}(1-2^{-j_1})}. \quad (12.4.3)$$

Второй сомножитель в произведении (12.4.3) оценивается при помощи дополнительных несимметричных отражений относительно горизонтальной оси. В самом деле, в силу предыдущих рассуждений и неравенства (10.6.8),

$$Z(2T + 2^{j_0}t, 2L) \leq e^{O(T)} Z(2T + 2^{j_0}t, 2L - l)^{1/2} Z(2T + 2^{j_0}t, 2L + l)^{1/2}. \quad (12.4.4)$$



Применив это неравенство  $j_1$  раз, мажорируем второй сомножитель в произведении (12.4.3) выражением

$$e^{O(1K_1)} \left( \frac{Z(2T + 2^{j_1}t, 2L - (2^{j_1} - 1)l)}{Z(2T + t, 2L + l)} \right)^{2^{-j_0}(1-2^{-j_1})2^{-j_1}} \times \\ \times \left( \frac{Z(2T + 2^{j_0}t, 2L + l)}{Z(2T + t, 2L + l)} \right)^{2^{-j_0}(1-2^{-j_1})(1-2^{-j_1})}.$$

Снова пользуясь двусторонней оценкой (10.3.8), установим, что последнее выражение не превосходит

$$e^{O(1K_1)} \left( \frac{Z(2T + 2^{j_0}t, 2L + l)}{Z(2T + t, 2L + l)} \right)^{2^{-j_0}(1-2^{-j_1})^2}. \quad (12.4.5)$$

Оставшаяся часть доказательства посвящена асимптотическому анализу функции  $Z(t, l)$  при фиксированном  $l$  и  $t \rightarrow \infty$ . Воспользуемся конструкцией гл. 6 и рассмотренным в гл. 11 предельным переходом к бесконечному объему применительно к прямоугольнику  $t \times l$  при фиксированном  $l$  и  $t \rightarrow \infty$ . Получим гамильтониан  $H_l$  и полугруппу  $e^{-tH_l}$ , ассоциированные с интервалом длины  $l$  и граничными условиями Дирихле. В силу выбора вектора  $\psi_l$ , имеем

$$Z(t, l) = \langle \psi_l, e^{-tH_l} \psi_l \rangle = \int e^{-\lambda t} d\rho_l(\lambda),$$

где  $d\rho_l$  — спектральная мера, определенная гамильтонианом  $H_l$  и вектором  $\psi_l$ . Пусть  $E_l = \inf \operatorname{supp} d\rho_l$ . Тогда

$$Z(t, l) = O(e^{-tE_l}) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (12.4.6)$$

В силу нормировки, введенной в гл. 6,  $H \geq 0$ , и поэтому  $E_l \geq 0$ . В частности, выражение (12.4.5) ограничено сверху величиной

$$e^{O(1K_1)} \exp[-(2^{j_0} - 1)tE_{2L+t} 2^{-j_0}(1-2^{-j_1})(1-2^{-j_1})]. \quad (12.4.7)$$

Для того чтобы получить оценку первого множителя в произведении (12.4.3), воспользуемся спектральной теоремой. Она дает следующее усиление соотношения (12.4.6):

$$\frac{Z(2T, 2L + l)}{Z(2T + t, 2L + l)} \leq 2e^{tE_{2L+l}} \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty, \quad (12.4.8)$$

где  $l, t$  и  $L$  фиксированы. При этом  $T(2L + l)$  выбрано так, чтобы при минимальном  $T$  имело место неравенство (12.4.8). Заметим, что, вообще говоря, произведение  $T(2L + l)$  могло бы зависеть и от  $t$ , но спектральная теорема исключает такую возможность. Итак,

$$\exp[-\operatorname{const} N'(g)] \left| \int B d\mu_\Lambda \right| \leq e^{O(1K_1)} \exp[tE_{2L+l}(1-2^{-j_0})] \times \\ \times \exp[-tE_{2L+l}(1-2^{-j_0})(1-2^{-j_1})^2] \leq e^{O(1K_1)} \exp[tE_{2L+l}(O(2^{-j_1}))].$$

Однако, в силу двусторонней оценки (10.3.8),  $|E_{2L+l}| \leq O(2L + l) \leq O(2^{j_1})$ , поэтому

$$\exp[-\operatorname{const} N'(g)] \left| \int B d\mu_\Lambda \right| \leq e^{O(1K_1)} e^{O(tl)} = e^{O(1K_1)}.$$

Этим доказано первое неравенство теоремы. Второе доказывается аналогично, с той лишь разницей, что вместо первого неравенства предложения 12.3.2 следует воспользоваться вторым.

*Доказательство теоремы 12.2.1.* По теореме 11.2.1 функции Швингера для взаимодействия  $\Phi_{\kappa}^j$  сходятся и в пределе определяют в пространстве  $L_2(d\mu)$  поле  $\Phi_{\kappa}^j$ . По теореме 12.4.1 и интегральной формуле Коши (как и в доказательстве следствия 12.2.4) эти функции Швингера допускают оценки, из которых следует суммируемость экспоненты. Соответствующие оценки равномерны относительно  $\Lambda$  и, следовательно, верны для  $\Lambda = R^2$ . Поэтому при  $\kappa < \infty$  интеграл  $\int \exp(\Phi_{\kappa}^j(g_j)) d\mu_{\Lambda}$  сходится. В силу равномерных оценок теоремы 12.4.1 и стандартных  $\exists\epsilon$ -рассуждений, сходится также интеграл  $\int \exp(\Phi^j(g_j)) d\mu_{\Lambda}$ . Аналогично доказываются и остальные неравенства. ■

Сформулируем теперь теорему об оценках по методу отражений, которые являются для нас основным средством исследования.

**Теорема 12.4.2.** *Предположим, что  $\Lambda$  — прямоугольник  $L \times T$ , мера  $d\mu_{\Lambda}$  определена формулами (11.2.1—3) и при некоторой постоянной  $a$  выполнена равномерная оценка*

$$\exp(-a|\Lambda|) \leq Z(\Lambda) \leq \exp(a|\Lambda|). \quad (12.4.9)$$

*Пусть  $B$  — функция поля  $\Phi$ , локализованная в прямоугольнике  $K \subset \Lambda$ , причем  $K$  и  $\Lambda$  имеют параллельные стороны и длины сторон прямоугольника  $K$  отделены от нуля. Пусть функция  $B^{(n)}$  есть результат  $n$  отражений функции  $B$ , локализованный, как и выше, в множестве  $K^{(n)} \subset \Lambda^{(n)}$ . Тогда для достаточно большого  $T$  (т. е.  $T \geq T_0 = T_0(L, P, m)$ ) справедливо неравенство*

$$\left| \int B d\mu_{\Lambda} \right| \leq e^{\text{const}|K|} \left( \int B^{(n)} d\mu_{\Lambda^{(n)}} \right)^{2^{-n}}, \quad (12.4.10)$$

*причем константа зависит только от постоянной  $a$ .*

*Доказательство.* Следуем доказательству теоремы 12.4.1, но вместо неравенства (10.3.8) используем (12.4.9).

## 12.5 Регулярность поля $P(\varphi)_2$

В этом параграфе мы займемся изучением модели  $P(\varphi)_2$ , где  $P =$  четный полином + линейный член. Здесь мы закончим проверку для нее аксиом OS 0—3, приведенных в гл. 6, доказав свойство регулярности OS 1. Для этого мы сначала избавимся от  $|K|$  в неравенстве (11.3.1). После этого существование теории поля  $P(\varphi)_2$ , удовлетворяющей аксиомам Вайтмана и Хаага — Кастлера, следует из теоремы реконструкции, изложенной в гл. 6, 19. Свойство регулярности, которое нам нужно, заключено в следующей теореме.

**Теорема 12.5.1.** *Пусть  $P =$  четный полином + линейный член. Тогда существует такая постоянная  $c < \infty$ , что для всех  $f \in C_0^{\infty}$*

$$S\{-if\} = \int \exp(\varphi(f)) d\mu \leq \exp\left\{c\left(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_D}^2\right)\right\}. \quad (12.5.1)$$

Здесь  $p = n/(n-1)$ , а  $n = \deg P$ . Мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиоме OS 1.

Первый шаг на пути избавления от  $|K|$  в теореме 12.4.1 делается при помощи многократных отражений.

**Лемма 12.5.2.** Пусть  $p = n/(n-j)$ , где  $j < n$ , и пусть  $g \in L_1 \cap L_p$  — функция с компактным носителем. Определим  $g_\Delta$  формулой (12.2.2). Тогда

$$\left| \int \exp(:\varphi^j(g):) d\mu \right| \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \exp \left\{ c \left( 1 + \|g_\Delta\|_{L_p}^p \right) \right\} = \exp \left\{ c \left( |\mathcal{N}| + \|g\|_{L_p}^p \right) \right\}. \quad (12.5.2)$$

*Доказательство.* Применим оценку по методу многократных отражений из следствия 10.5.8, в которой возьмем  $k^{(i)} = \exp(:\varphi^j(g_\Delta):)$ . При оценке каждого сомножителя  $\mathcal{L}(k^{(i)})$  воспользуемся теоремой 12.4.1.

**Лемма 12.5.3.** В предположениях предыдущей леммы возьмем набор функций  $h_{\Delta, i}$ , каждая из которых имеет носитель в ячейке  $\Delta$ . Тогда

$$\left| \int \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \left[ \left( \prod_{i=1}^{n_\Delta} :\varphi^j(h_{\Delta, i}): \right) \exp(:\varphi^j(g_\Delta):) \right] d\mu \right| \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{N}} \left[ (n_\Delta!)^{1-1/p} \left( \prod_{i=1}^{n_\Delta} c \|h_{\Delta, i}\|_{L_p} \right) \exp \left\{ c \left( 1 + \|g_\Delta\|_{L_p}^p \right) \right\} \right].$$

*Доказательство.* Следуем доказательству следствия 12.2.4, но вместо теоремы 12.2.2 пользуемся теоремой 12.4.1. ■

*Доказательство теоремы 12.5.1.* Прежде всего разложим функцию  $f$  на два слагаемых: большое и малое. Пусть  $f = g + h$ , где

$$h = \sum_{i \in \mathcal{M}} \chi_{\Delta_i} f, \quad g = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{M}} \chi_{\Delta_i} f. \quad (12.5.3)$$

Здесь  $\chi_{\Delta_i}$  — характеристическая функция единичной ячейки  $\Delta_i$  решетки  $\{\Delta_i\}$ , покрывающей всю плоскость  $R^2$ , а  $\mathcal{M}$  — такое множество индексов, что

$$\|f\|_{L_1(\Delta_i)} + \|f\|_{L_p(\Delta_i)}^p \leq 1. \quad (12.5.4)$$

Таким образом, функция  $g$  — это «большая», а функция  $h$  — «малая» части  $f$ . Кроме того,

$$\|f\|_{L_1(\Delta_i)} + \|f\|_{L_p(\Delta_i)}^p > 1 \quad \text{для} \quad i \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{M}. \quad (12.5.5)$$

В качестве предварительного шага применим неравенство Шварца, чтобы отделить  $g$  от  $h$ :

$$\int e^{\varphi(f)} d\mu \leq \left( \int e^{\varphi(2g)} d\mu \int e^{\varphi(2h)} d\mu \right)^{1/2}. \quad (12.5.6)$$

Пользуясь леммой 12.5.2 и неравенством (12.5.5), получим нужную оценку для сомножителя, содержащего  $g$ . Следовательно, без ограничения общности можно

считать, что  $g = 0$ , т. е.  $f = h$ . Действуя далее аналогично, снова воспользуемся неравенством Шварца с тем, чтобы представить функцию  $h$  в виде суммы четырех слагаемых. При этом для каждого слагаемого множество  $\mathcal{M}$  состоит из ячеек без общих ребер и вершин. Другими словами, либо  $\chi_{\Delta_i} h = 0$ , либо  $\chi_{\Delta_j} h = 0$ , если  $i \neq j$ , но  $\text{dist}(\Delta_i, \Delta_j) \leq 1$ .

Для удобства припишем индекс  $j$  носителю функции  $f$ . Пусть  $f_j = h_j = \chi_{\Delta_j} f$ . Тогда

$$e^{\varphi(f_i)} = 1 + F_i + G_i, \quad (12.5.7)$$

где  $F_i = \varphi(f_i)$ ,  $G_i = \varphi(f_i)^2 \int_0^1 \int_0^1 \lambda e^{\lambda \varphi(f_i)} d\lambda d\gamma$ , и аналогично

$$e^{\varphi(f)} = \sum_{I \subset Z^2} \sum_{J \subset I} F_j G_{I \setminus J}, \quad (12.5.8)$$

где  $F_J = \prod_{j \in J} F_j$ ,  $G_J = \prod_{j \in J} G_j$ . Суммирование в разложении (12.5.8) идет по всем конечным подмножествам решетки  $Z^2$ . Все произведения и суммы здесь конечны, так как лишь конечное число функций  $f_i$  отлично от нуля. Мы утверждаем, что существует  $c < \infty$ , при котором выполняется неравенство

$$\left| \int F_J G_{I \setminus J} d\mu \right| \leq \prod_{i \in J} c \left\{ \|f_i\|_{L_1} + \|f_i\|_{L_p}^p \right\}. \quad (12.5.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int e^{\varphi(f)} d\mu &\leq \sum_{I \subset Z^2} \sum_{J \subset I} \prod_{i \in I} (c \{ \|f_i\|_{L_1} + \|f_i\|_{L_p}^p \}) \leq \\ &\leq \sum_{I \subset Z^2} \prod_{i \in I} (2c \{ \|f_i\|_{L_1} + \|f_i\|_{L_p}^p \}) = \prod_{i \in Z^2} (1 + 2c \{ \|f_i\|_{L_1} + \|f_i\|_{L_p}^p \}), \end{aligned} \quad (12.5.10)$$

где второе неравенство есть следствие тождества  $\sum_{J \subset I} 1 = 2^{|I|}$ . Теперь осталось воспользоваться элементарным неравенством  $e^{\alpha X} \geq 1 + \alpha X$ , для того чтобы получить оценку

$$\int e^{\varphi(f)} d\mu \leq \exp(2c \{ \|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p \}). \quad (12.5.11)$$

Закончим доказательство теоремы выводом неравенства (12.5.9). Для этого каждый сомножитель  $\varphi(f_j)$  в произведении  $F_J$  проинтегрируем по частям (см. (12.2.5)). В результате мы получим слагаемые трех типов, в которых  $\varphi$  связано с: (i) такими же множителями, (ii) множителями вида  $\varphi(f_j)^2 \exp(\lambda \mu \varphi(f_j))$ , входящими в  $G_{I \setminus J}$ , и (iii) экспонентой. Оценивать полученные выражения мы будем при помощи леммы 12.5.3, явных оценок ковариационных операторов и элементарных комбинаторных неравенств.

Члены типа (i), возникшие в результате связи линейных сомножителей из  $F$ , и члены типа (ii), возникшие в результате связи линейных сомножителей из  $F$  и  $G$ , могут относиться только к непримыкающим ячейкам. Такие члены дают множитель  $\langle f_i, C f_j \rangle$ , для которого справедлива оценка

$$|\langle f_i, C f_j \rangle| \leq O(1) e^{-m|i-j|} \|f_i\|_{L_1} \|f_j\|_{L_1}, \quad (12.5.12)$$

Здесь ядро оператора  $C = C_{\emptyset}$  ограничено согласно предложению 7.2.1.

Члены третьего типа приводят к сомножителям вида  $(P^{(r)}(\varphi))(\bar{f}_{j_1} \times \dots \times \bar{f}_{j_r})$ , где  $r \leq n$ , а  $j_1, \dots, j_r$  — индексы, нумерующие различные ячейки. Здесь  $P^{(r)}$  обозначает  $r$ -ю производную полинома  $P$ , а  $\bar{f}_j \equiv Cf_j$ . В  $P^{(r)}$  входят мономы степени не больше  $n - r$ . Поэтому если мы хотим воспользоваться леммой 12.5.3, то следует обратить внимание на локальную  $L_{p(r)}$ -норму ядра при  $p(r) \leq n/r$ . Поскольку эта норма возрастает с ростом  $p$ , без ограничения общности будем считать, что  $p(r) = n/r$ .

**Лемма 12.5.4.** Если  $\alpha < m$ , то существует такая постоянная  $c < \infty$ , что при всех  $r \leq n$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e^{\alpha(|i-j_1| + \dots + |i-j_r|)} \|\bar{f}_{j_1} \dots \bar{f}_{j_r}\|_{L_{p(r)}(\Delta_i)} \leq c \|f_{j_1}\|_{L_1} \dots \|f_{j_r}\|_{L_1}. \quad (12.5.13)$$

*Доказательство.* В силу неравенства Гёльдера,

$$\|\bar{f}_{j_1} \dots \bar{f}_{j_r}\|_{L_{p(r)}(\Delta_i)} \leq \prod_{s=1}^r \|\bar{f}_{j_s}\|_{L_n(\Delta_i)}. \quad (12.5.14)$$

Утверждается, что имеет место оценка

$$\|\bar{f}_j\|_{L_n(\Delta_i)} \leq O(1) e^{-m|i-j|} \|f_j\|_{L_1}. \quad (12.5.15)$$

Подставляя ее в соотношение (12.5.14) и суммируя, получим как раз требуемое неравенство (12.5.13). Утверждение (12.5.15) при  $|i-j| > 1$  вытекает из оценки  $|\bar{f}_j(x)| \leq O(1) e^{-m|x-j|} \|f_j\|_{L_1}$  подобно неравенству (12.5.12). При  $|i-j| \leq 1$  для доказательства (12.5.15) воспользуемся неравенствами Хаусдорфа — Юнга и Гёльдера. Получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_j\|_{L_n(\Delta_i)} &\leq \|\bar{f}_j\|_{L_n(\mathbb{R}^2)} \leq \|\tilde{C}\varnothing f_j\|_{L_{n'}} \leq \\ &\leq \|\tilde{C}\varnothing\|_{L_{n'}} \|\tilde{f}_j\|_{L_\infty} \leq \|\tilde{C}\varnothing\|_{L_{n'}} \|f_j\|_{L_1} \leq O(1) \|f_j\|_{L_1}. \end{aligned} \quad (12.5.16)$$

Здесь  $n' = n/(n-1)$ , а  $\tilde{C}\varnothing = \text{const}(p^2 + m^2)^{-1} \in L_p$  при  $p > 1$ . Так как  $n < \infty$ , то  $n' > 1$  и (12.5.16) действительно имеют место. Этим закончено доказательство леммы.

Возвращаясь к доказательству теоремы, обозначим  $n(\Delta)$  число связей  $P^{(r)}$ -вершин с  $F_i$ -вершинами, находящимися в ячейке  $\Delta$ , где  $r = 1, 2, \dots, n$ . Занумеруем эти  $n(\Delta)$  связей индексами  $k = 1, 2, \dots, n(\Delta)$  в порядке возрастания расстояния  $P^{(r)}$ -вершин до  $\Delta$ , которое мы обозначим  $d_k$ . Так как каждая ячейка  $\Delta$  содержит не более одной  $F_i$ -вершины, где  $i \in J$ , то  $d_k$  удовлетворяет неравенству

$$\text{const} \cdot d_k^2 \geq k. \quad (12.5.17)$$

Согласно неравенству (12.5.12) и предыдущей лемме, каждое слагаемое, соответствующее  $k$ -й связи, имеет экспоненциальную оценку  $O(1) e^{(m-\varepsilon)d_k}$ . Поэтому произведение таких слагаемых можно оценить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n(\Delta)} (O(1) e^{-(m-\varepsilon)d_k}) &= \prod_{k=1}^{n(\Delta)} O(1) e^{-\text{const} \cdot k^{1/2}} \leq \\ &\leq e^{\text{const} \cdot n(\Delta) - \text{const} \cdot n(\Delta)^{3/2}} \leq \text{const} e^{-\text{const} \cdot n(\Delta)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12.5.18)$$

Далее, число множителей с одним и тем же  $d_k$  не превосходит  $\prod_{\Delta} n(\Delta)!^{\text{const}}$ .

Применение леммы 12.5.3 для оценки мономов  $P^{(r)}$  дает еще один множитель  $\prod_{\Delta} n(\Delta)!^{\text{const}}$ . Так как  $n(\Delta)! \leq \exp(n(\Delta) \cdot \ln n(\Delta))$ , то оба множителя мажорируются сходящимся выражением (12.5.18). Пусть  $J_e \equiv \{j: \varphi(f_j) \text{ связано с экспонентой}\}$ . Приведенные неравенства позволяют оценить сумму членов вида (iii) (связь с экспонентой)

$$\sum_{\text{связи ячейки}} \sum \|\text{ядро}\|_{L_p(r)} \prod_{\Delta} n(\Delta)!^{\text{const}} \leq \prod_{j \in J_e} \text{const} \|f_j\|_{L_1}. \quad (12.5.19)$$

Чтобы получить оценку для  $G$ -вершин, оставшихся после учета  $F$ -вершин, воспользуемся леммой 12.5.3. Поскольку каждая из ячеек, входящих в множество  $I \setminus J$ , содержит не менее двух  $G$ -вершин, то

$$\left| \int F_j G_{I \setminus J} d\mu \right| \leq \left[ \prod_{j \in J} (\text{const} \|f_j\|_{L_1}) \right] \left[ \prod_{i \in I \setminus J} (\text{const} \|f_i\|_{L_p}^2) \right], \quad (12.5.20)$$

так как  $p \geq 2$ ,  $\|f_i\|_{L_p} \leq 1$  и  $\|f_i\|_{L_p}^2 \leq \|f_i\|_{L_p}^p$ . С помощью неравенств

$$\|f_j\|_{L_1}, \|f_j\|_{L_p}^p \leq \|f_j\|_{L_1} + \|f_j\|_{L_p}^p$$

мы увеличим правую часть неравенства (12.5.20) и придем к оценке (12.5.9). ■

Теорема 12.2.2 доказывается аналогично. При  $n/2 < j < n$ , т. е. при  $p > 2$ , нужно проинтегрировать по частям также и  $G$ -вершины.

## Физические свойства квантовых полей

В части III изучаются физические свойства квантовых полей и систем статистической механики. Отдельные главы можно читать независимо, однако материал представлен здесь не в таком полном виде, как в предыдущих частях, и от читателей требуется определенная подготовка. Вначале обсуждаются вопросы, связанные с интерпретацией теории поля в терминах частиц: рассматривается матрица рассеяния, спектр связанных состояний и вопрос об асимптотической полноте теории. В гл. 16 изложено полное доказательство существования фазовых переходов для квантовых полей  $\phi^4$ . Вслед за этим в гл. 17 приведен обзор нынешнего состояния знаний о критической точке для полей  $\phi^4$ . В гл. 18 дано второе доказательство существования квантовых полей в размерности  $d = 2$ . При этом для изучения предельного перехода к бесконечному объему используются методы теории возмущений (кластерные разложения). В той области, где соответствующие разложения сходятся, мы не только получаем новое (по сравнению с тем, которое проведено в ч. II методом многократных отражений) доказательство существования полей, но и устанавливаем экспоненциальное убывание корреляций и, таким образом, получаем возможность исследовать свойства массового спектра. В принципе кластерные разложения позволяют полностью изучить низкоэнергетические состояния изучаемой модели. В гл. 19 мы устанавливаем соответствие между полями Минковского и евклидовыми полями, о котором говорилось в гл. 6. Попутно обсуждается связь между полями с неединственным вакуумом в квантовой теории и разложением равновесных состояний в статистической механике на чистые фазы. Фактически результаты, изложенные в гл. 16—19, относятся также к свойствам равновесных состояний и трансфер-матрицы в статистической физике, и мы неоднократно подчеркиваем это обстоятельство в тексте. Гл. 20 можно рассматривать как введение в литературу, посвященную основным вопросам теории поля, оставшимся за рамками этой книги.

## Глава 13

## Теория рассеяния: нестационарные методы

## 13.1 Введение

Теория рассеяния изучает асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \pm\infty$  решений

$$\theta(t) = e^{-itH}\theta(0) \quad (13.1.1)$$

уравнения Шредингера  $i\dot{\theta} = H\theta$ . Поскольку для собственного или обобщенного собственного вектора  $\theta$  оператора  $H$  с собственным значением  $\omega$  справедливо равенство  $\theta(t) = e^{it\omega}\theta(0)$ , эта задача по существу сводится к спектральному анализу оператора  $H$ . В трансляционно-инвариантном случае, когда операторы  $H$  и  $\mathbf{P}$  коммутируют, для них ищут совместное спектральное разложение. Однако задача о совместном спектре не проста, поэтому, чтобы ее корректно поставить, вернемся к формуле (13.1.1).

При больших значениях параметра  $|t|$  волновая функция  $\theta(t)$  распадается на части, отвечающие отдельным изолированным невзаимодействующим частицам и кластерам (связанным состояниям). Это разделение происходит в  $x$ -пространстве, а его следствием является существование оператора свободной энергии  $H_0$ , который описывает движение невзаимодействующих отдельных частиц и связанных состояний. При  $t \rightarrow \pm\infty$  мы выбираем такой обобщенный собственный вектор  $\theta$  оператора  $H$ , что асимптотика  $\theta(t)$  определяется свободной динамикой  $e^{-itH_0}$ . Такие собственные векторы определяют спектральное in/out-разложение оператора  $H$ . Унитарный оператор, переводящий одно из этих разложений в другое, можно рассматривать как оператор, переводящий асимптотические режимы при  $t \rightarrow -\infty$  в асимптотические режимы при  $t \rightarrow +\infty$ . Он называется  $S$ -матрицей.

В релятивистской теории поля in/out-асимптотики описываются свободными полями (см. гл. 6), обозначаемыми, например,  $\varphi_{\text{in/out}}$ . Эти in/out-поля действуют в пространстве Фока  $\mathcal{F}$ , а векторами  $\theta_{\text{in/out}} \in \mathcal{F}$  помечены асимптотики квантового поля при больших  $|t|$ . В случае, когда в теории содержится несколько типов частиц (элементарные частицы и связанные состояния), им соответствуют и несколько in/out-полей, которые действуют в тензорном произведении пространств Фока  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots = \mathcal{F}$ . В силу лоренц-инвариантности спектр энергии-импульса лежит на гиперболоидах вида  $M = (P_0^2 - \mathbf{P}^2)^{1/2}$  (рис. 13.1). Пусть  $\mathcal{H}_\mu$  обозначает собственное подпространство оператора  $M$ , отвечающее собственному значению  $\mu$ . Для многочастичного подпространства



$\mathcal{H}_{\geq 2m}$  на рис. 13.1 изображены порог  $M = m + m_b$ , частица — связанное состояние и трехчастичный порог  $M = 3m$ .

Асимптотическая полнота — это утверждение о том, что все состояния квантового поля помечаются состояниями в пространстве  $\mathcal{F}$  асимптотического свободного поля. Точнее, дискретный спектр оператора  $M$  (а также спектр оператора спина и другие «внутренние» квантовые числа, входящие в теорию) определяет одночастичные подпространства в сомножителях  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  пространства  $\mathcal{F}$ , которое в свою очередь описывает многочастичные состояния, составленные из этих масс, спинов и внутренних

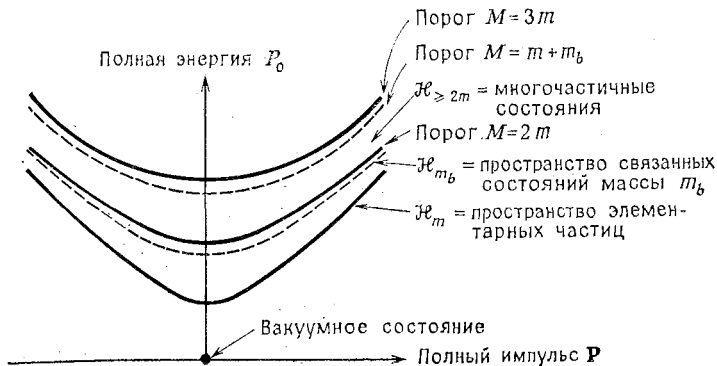


Рис. 13.1.

квантовых чисел. Если асимптотическая полнота имеет место, то в теории нет никаких других состояний, кроме этих многочастичных состояний.

В § 13.2 мы обсудим случай так называемого многочастичного потенциального рассеяния. С тем чтобы изложить теорию рассеяния в ее наиболее изученном виде, мы построим волновые операторы и  $S$ -матрицу. Остаток главы мы посвятим описанию нестационарных методов в квантовой теории поля. Обобщением методов, с помощью которых строятся волновые операторы и  $S$ -матрица, на случай теории поля получают, в частности, и конструкцию Хаага — Рюэля.

Исходным пунктом теории Хаага — Рюэля является предположение <sup>1)</sup> о существовании изолированного собственного значения  $m$  у массового оператора  $M$ . В дополнение к этому предполагается, что поле  $\phi$  удовлетворяет аксиомам Вайтмана. В итоге будут построены многочастичные состояния. Эти состояния фактически являются асимптотическими входящими и выходящими многочас-

<sup>1)</sup> Для частиц нулевой массы это предположение неверно. И хотя в теории рассеяния для частиц нулевой массы достигнуты большие успехи, адекватного обобщения нестационарных методов на этот случай не существует.

тичными состояниями для рассеяния частиц массы  $m$ . В случае, когда теория поля описывает много типов частиц и связанных состояний, конструкцию Хаага — Рюэля можно использовать для построения многочастичных состояний с  $n_1$  частицами первого типа,  $n_2$  частицами второго типа и т. д. Единственным изначальным требованием по-прежнему остается наличие у оператора  $M$  изолированного собственного значения  $m_i$  для каждой частицы или связанного состояния.

Пространства  $\mathcal{H}_{in/out}$ , построенные с помощью теории Хаага — Рюэля, — это подпространства  $\mathcal{H}$ . Они имеют естественную структуру пространства Фока и изоморфны пространству  $\mathcal{F}$ , элементами которого помечены состояния рассеяния. На самом деле можно отождествить пространство  $\mathcal{F}$  с пространством  $\mathcal{H}_{in}$  или  $\mathcal{H}_{out}$ ; как следствие получаем равенство  $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out} (= \mathcal{F})$ . Таким образом, теория Хаага — Рюэля дает конкретное представление для пространств  $\mathcal{H}_{in/out}$ .

Затронутый выше вопрос об асимптотической полноте — это вопрос о справедливости равенства  $\mathcal{H}_{in/out} = \mathcal{H}$ . Имеются физические основания ожидать такой полноты. Другими словами, мы считаем, что каждое состояние физической системы можно рассматривать либо как составленное из частиц (в том числе из связанных состояний), либо как распадающееся в такое состояние со временем. Примером ситуации, когда асимптотическая полнота нарушена, служит пространство Фока, в котором имеются лишь векторы с четным числом частиц. Таким образом, одночастичные состояния никогда не появляются в такой теории. Если бы для теории поля в пространстве  $\mathcal{H}$  пространство  $\mathcal{H}_{in}$  состояло только из таких четночастичных состояний (называемых солитонными парными состояниями), то можно было бы заключить, что для адекватного описания физической картины основное пространство  $\mathcal{H}$  нуждается в расширении. С точки зрения теории Хаага — Рюэля (или с физической точки зрения) такие примеры патологичны. С другой стороны, доказательство соотношения  $\mathcal{H}_{in/out} = \mathcal{H}$  даже для конкретных примеров квантовых полей, построенных в части II, является серьезной (и открытой) математической проблемой. Частичные результаты (относящиеся к малым энергиям и слабым связям) описаны в гл. 14.

$S$ -матрица может быть выражена в терминах хронологически упорядоченных функций Вайтмана (формализм Лемана — Симанзика — Циммермана). Таким образом, в некотором смысле  $S$ -матрица может быть эффективно вычислена. При изучении спектра частиц и связанных состояний (т. е. пространств  $\mathcal{H}_m$ ), а также асимптотической полноты используется уравнение Бете — Солпитера. Оно является в теории поля аналогом стационарных методов в теории потенциального рассеяния. Согласно этой аналогии, ядро Бете — Солпитера  $K$  соответствует потенциалу  $V$  в теории рассеяния. Аналогия становится точной в нерелятивист-

ском пределе  $c \rightarrow \infty$ , когда после соответствующего изменения масштаба  $K$  сходится к  $V$ .

В теории поля ядро  $K$  считается вторичным объектом, так как оно не фигурирует ни в выражении оператора энергии, ни в уравнениях движения. Придерживаясь этой традиции, для (голого) взаимодействия, скажем  $:\varphi^4:$ , можно вывести требуемые свойства ядра  $K$  (во всяком случае для малых значений константы связи). В этом выводе используются высокотемпературные кластерные разложения (гл. 18).

### 13.2 Многочастичное рассеяние

Рассмотрим действующий в пространстве  $L_2(R^{3n})$  оператор полной энергии

$$H = H_0 + V = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2m_j} p_j^2 + \sum_{i \neq j} V_{ij}(q_i - q_j).$$

Введем кластерное разбиение  $\mathcal{D} = \{C_1, \dots, C_m\}$ . По определению это — разбиение множества  $\{1, \dots, n\}$  на непересекающиеся подмножества. Определим полный импульс кластера, его массу, энергию, центр масс и т. д. формулами

$$P_k = \sum_{j \in C_k} p_j, \quad M_k = \sum_{j \in C_k} m_j,$$

$$H_k = \sum_{j \in C_k} \frac{1}{2m_j} p_j^2 + \sum_{i \neq j \in C_k} V_{ij}(q_i - q_j) = H_{0,k} + V_k,$$

$$H_{\mathcal{D}} = \sum_{k=1}^m H_k, \quad Q_k = \frac{\sum_{j \in C_k} m_j q_j}{M_k}.$$

Для того чтобы задать асимптотику, т. е. in/out-состояние рассеяния, необходимо знать:

- 1) кластерное разбиение  $\mathcal{D}$ ;
- 2) свободное движение центра масс каждого кластера;
- 3) движение частиц в каждом кластере.

Чтобы отделить внутреннее движение частиц в кластере от движения центра масс всего кластера, сделаем в каждом кластере замену координат. Переменная  $Q_k$  — это координата центра масс кластера  $C_k$ ; пусть  $q_{k, \text{rel}}$  обозначает набор из  $|C_k| - 1$  независимых координат, выбранных каким-либо способом из набора величин  $\{q_i - q_j; i, j \in C_k\}$ .

Линейное преобразование  $A: \{q_i\} \rightarrow \{Q_k, q_{k, \text{rel}}\}$  индуцирует линейное преобразование  $A^{*-1}$  набора импульсов  $p_i$  в координаты, сопряженные к  $\{Q_k, q_{k, \text{rel}}\}$ . Можно избежать утомительного счета, если заметить, что линейное преобразование  $A^{*-1}$  определяется

так, что преобразование координат  $p$  и  $q$  является каноническим, т. е. сохраняет коммутатор или скобки Пуассона. Так как

$$\{Q_k, P_k\} \equiv \sum \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 1,$$

$$\{q_i - q_j, P_k\} = 0,$$

координата  $P_k$  сопряжена координате центра масс  $Q_k$ . Пусть  $p_{k, \text{rel}}$  обозначает набор импульсных переменных, сопряженных набору  $q_{k, \text{rel}}$ . Тогда  $H_0$  — билинейная форма от переменных  $P_k$  и  $p_{k, \text{rel}}$ , причем член, содержащий  $P_k$ , можно найти, вычисляя скобки Пуассона в обеих координатных системах  $\{Q_k, q_{k, \text{rel}}\}$  и  $\{q_i\}$ . Так как

$$\frac{\partial H_{0, k}}{\partial P_k} = \{Q_k, H_{0, k}\} = \frac{\sum m_l \partial H_{0, k} / \partial p_l}{\sum m_l} = \frac{P_k}{M_k},$$

то

$$H_{0, k} = \frac{1}{2M_k} P_k^2 + h_{0, k}(p_{k, \text{rel}}),$$

где  $h_{0, k}$  — некоторая квадратичная форма. Последовательно обрабатывая таким образом каждый кластер нашего разложения и выделяя при этом на каждом шаге движение центра масс, мы приходим к координатам, известным как координаты Якоби. Итак, мы показали, что в координатах  $Q_k, q_{k, \text{rel}}$

$$H_k = \frac{1}{2M_k} P_k^2 + h_{0, k}(p_{k, \text{rel}}) + V_k(q_{k, \text{rel}})$$

и при разложении в тензорное произведение

$$\mathcal{H}_k = L_2(R^{3|C_k|}, dq) = L_2(R^3, dQ_k) \otimes L_2(R^{3(|C_k|-1)}, dq_{\text{rel}})$$

оператор  $(2M_k)^{-1} P_k^2$  действует в первом сомножителе, а  $h_k \equiv h_{0, k} + V_k$  — во втором. Определим связанное состояние кластера  $C_k$  как собственный вектор  $\varphi_k$  оператора  $h_k$  с дискретным собственным значением:

$$h_k \varphi_k = E_k \varphi_k.$$

Вектор  $\varphi_k$  определяет внутреннее движение частиц кластера. Если кратность собственного значения  $E_k$  больше 1, то выберем в качестве вектора  $\varphi_k$  любой элемент ортогонального базиса собственного подпространства, соответствующего  $E_k$ . Разбиение  $\mathcal{D}$  на кластеры  $C_k$  вместе с набором связанных состояний  $\varphi_k$ , выбранных для каждого кластера  $C_k$ , имеющего не менее двух эле-

ментов <sup>1)</sup>), называется каналом:

$$\alpha = \{\mathcal{D}, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}.$$

Для каждого канала  $\alpha$  определим изометрию

$$U_\alpha: \mathcal{H}_\mathcal{D} \equiv L_2(R^{3m}) \rightarrow L_2(R^{3n})$$

формулой  $U_\alpha f = f(Q_{k_1}, \dots, Q_{k_m}) \prod_{k=1}^m \varphi_k(q_{k, \text{rel}})$ . Здесь  $f$  определяет состояния центров масс всех кластеров. Оператор  $\sum_\alpha U_\alpha$  — это довольно грубая аппроксимация волнового оператора, который мы сейчас определим. Пусть

$$W_\mathcal{D}(t) = e^{itH} e^{-itH_\mathcal{D}}, \quad W_\mathcal{D}^\pm = \text{s. lim}_{t \rightarrow \pm\infty} W_\mathcal{D}(t), \quad W^\pm = \sum_\alpha W_\mathcal{D}^\pm U_\alpha.$$

**Теорема 13.2.1.** Если все  $V_{ij} \in L_2 + L_{3-\varepsilon}$ , то  $W^\pm$  — изометрическое отображение из пространства  $\mathcal{H}' = \sum_\alpha \oplus \mathcal{H}_\mathcal{D}$  в пространство  $\mathcal{H} = L_2(R^{3n}, dq)$ . В частности, сильный предел, определяющий  $W_\mathcal{D}^\pm$ , существует и образы операторов  $W_\mathcal{D}^\pm U_\alpha$  при различных  $\alpha$  ортогональны.

**Лемма 13.2.2.** Ядром оператора  $e^{-it\Delta}$  в пространстве  $L_2(R^d)$  служит функция  $(-4\pi it)^{-d/2} e^{-i(x-y)^2/4t}$ ,  $x, y \in R^d$ .

*Доказательство.* Достаточно аналитически продолжить решение уравнения теплопроводности, задаваемое оператором  $e^{t\Delta}$ .

**Лемма 13.2.3.** Для оператора  $e^{-itP^2}$ , рассматриваемого как отображение пространства  $L_1(R^d)$  в  $L_\infty(R^d)$ , выполнено неравенство  $\|e^{-itP^2}\| \leq t^{-d/2}$ .

*Доказательство.* Легко видеть, что  $\|e^{-itP^2}\| = \|(-4\pi it)^{-d/2} e^{-x^2/4it}\|_{L_\infty}$ .

**Лемма 13.2.4.** Как оператор в пространстве  $L_2(R^d)$ ,  $e^{-itP^2}$  слабо сходится к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

*Доказательство.* В силу леммы 13.2.3, для векторов  $\theta_1, \theta_2 \in L_1 \cap L_2$  имеем  $\langle \theta_1, e^{-itP^2} \theta_2 \rangle \rightarrow 0$ . Так как оператор  $e^{-itP^2}$  унитарен, для доказательства слабой сходимости достаточно ее проверить на всюду плотном множестве векторов. ■

**Лемма 13.2.5.** Если  $\alpha = \{\mathcal{D}, \varphi\} \neq \beta = \{\mathcal{D}', \varphi'\}$ , то  $W_\mathcal{D}^\pm U_\alpha \mathcal{H}_\mathcal{D} \perp W_{\mathcal{D}'}^\pm U_\beta \mathcal{H}_{\mathcal{D}'}$ .

*Доказательство.* Предположим, что сильный предел  $W_\mathcal{D}^\pm$  существует. Пусть  $\psi_\alpha \in \mathcal{H}_\mathcal{D}$ ,  $\psi_\beta \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}'}$ . Если  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ , то

$$\langle W_\mathcal{D}^\pm U_\alpha \psi_\alpha, W_\mathcal{D}^\pm U_\beta \psi_\beta \rangle = \langle U_\alpha \psi_\alpha, U_\beta \psi_\beta \rangle = \langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle \langle \varphi, \varphi' \rangle = 0,$$

<sup>1)</sup> Для одноэлементных кластеров  $C_k \in \mathcal{D}$  полагают  $\varphi_k = 1$ . — Прим. ред.

так как в этом случае  $\varphi$  и  $\varphi'$  — ортогональные собственные векторы оператора внутренней энергии, входящего в  $H_{\mathcal{D}}$ . Если  $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$ , то

$$\begin{aligned} & \left| \langle W_{\mathcal{D}}^{\pm} U_{\alpha} \psi_{\alpha}, W_{\mathcal{D}'}^{\pm} U_{\beta} \psi_{\beta} \rangle \right| = \\ & = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \left| \langle e^{itH} e^{-itH_{\mathcal{D}}} U_{\alpha} \psi_{\alpha}, e^{itH} e^{-itH_{\mathcal{D}'}} U_{\beta} \psi_{\beta} \rangle \right| = \\ & = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \left| \langle e^{-itH_{\mathcal{D}}} U_{\alpha} \psi_{\alpha}, e^{-itH_{\mathcal{D}'}} U_{\beta} \psi_{\beta} \rangle \right| = \\ & = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \left| \langle e^{-it \sum_k P_k^2} U_{\alpha} \psi_{\alpha}, e^{-it \sum_{k'} P_{k'}^2} U_{\beta} \psi_{\beta} \rangle \right| = \\ & = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \left| \langle U_{\alpha} \psi_{\alpha}, e^{it \left( \sum_k P_k^2 - \sum_{k'} P_{k'}^2 \right)} U_{\beta} \psi_{\beta} \rangle \right|. \end{aligned}$$

Заменой переменных диагонализуем экспоненту, так что

$$\sum_k P_k^2 - \sum_{k'} P_{k'}^2 = \lambda \frac{\partial^2}{\partial \omega_1^2} + \dots, \quad \lambda \neq 0.$$

Тогда  $e^{it \left( \sum_k P_k^2 - \sum_{k'} P_{k'}^2 \right)} = e^{-it \lambda \partial^2 / \partial \omega_1^2} \otimes U_1(t)$ , где  $U_1(t)$  — унитарный оператор. В силу леммы 13.2.4, предел приведенного выше выражения равен нулю, и доказательство закончено.

**Лемма 13.2.6.** Пусть все  $V_{ij} \in L_2 + L_{\infty}$  и  $\theta \in \mathcal{D}(H)$  (где  $\mathcal{D}(H)$  — область определения  $H$ ). Тогда вектор  $W_{\mathcal{D}}(t)\theta$  дифференцируем в сильном смысле и

$$\frac{d}{dt} W_{\mathcal{D}}(t)\theta = ie^{itH} V'_{\mathcal{D}} e^{-itH} \theta,$$

где  $V'_{\mathcal{D}} = H - H_{\mathcal{D}}$  есть оумма всех межкластерных взаимодействий.

*Доказательство.* Оператор  $V$  является возмущением по Като оператора  $H_0$ , и аналогично  $V'_{\mathcal{D}}$  — это возмущение по Като операторов  $H$  и  $H_{\mathcal{D}}$ . Поэтому  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}(H_0)$ . Далее доказательство проводится стандартными методами теории операторов.

**Лемма 13.2.7.** Пусть  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  обозначает множество состояний  $\varphi$ , для которых при  $t \rightarrow \pm \infty$

$$\|V'_{\mathcal{D}} e^{-itH} \varphi\| \leq O(|t|^{-3/2}).$$

Тогда пересечение  $\mathcal{M} \cap \mathcal{D}(H)$  плотно в пространстве  $\mathcal{H}$ .

*Доказательство теоремы 13.2.1.* Так как оператор  $W_{\mathcal{D}}(t)$  унитарный, то сходимость достаточно доказать для произвольного вектора  $\theta$  из плотного множества  $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}$ . Для такого  $\theta$  справедливы неравенства

$$\| [W_{\mathcal{D}}(t_1) - W_{\mathcal{D}}(t_2)] \theta \| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| V'_{\mathcal{D}} e^{-itH} \theta \| dt \leq \int_{t_1}^{t_2} O(|t|^{-3/2}) dt.$$

Так как последний интеграл стремится к нулю при  $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$ , теорема доказана.

*Доказательство леммы 13.2.7.* Для того чтобы упростить доказательство, рассмотрим случай  $V_{ij} \in L_2$ . Положим

$$\theta(q) = \prod_{k=1}^m f_k(Q_k) g_k(q_{k, \text{rel}}).$$

Взяв  $f_k, g_k \in \mathcal{S}$ , мы докажем, что  $\theta \in \mathcal{M}$ .

Пусть  $V_{jl}$ , где  $j \in C_k, l \in C_{k'}, k \neq k'$ , — отдельный член из суммы  $V'_{\mathcal{D}}$ . Определим

$$Q_{kk'} = \frac{M_k Q_k + M_{k'} Q_{k'}}{M_k + M_{k'}}, \quad q_{kk', \text{rel}} = Q_k - Q_{k'}.$$

Как и выше,

$$\frac{1}{2M_k} P_k^2 + \frac{1}{2M_{k'}} P_{k'}^2 = \frac{1}{2(M_k + M_{k'})} \frac{\partial^2}{\partial Q_{kk'}^2} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q_{kk', \text{rel}}^2},$$

где  $m = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ ,

$$V_{jl} = V_{jl}(q_{kk', \text{rel}} + L(q_{k, \text{rel}}, q_{k', \text{rel}})),$$

а  $L$  — некоторый линейный функционал. Тогда

$$\begin{aligned} \|V_{jl} e^{-itH} \mathcal{D}\theta\|^2 &= \text{const} \|V_{jl} e^{-it(H_k + H_{k'})} f_k f_{k'} g_k g_{k'}\|^2 = \\ &= \text{const} \int |V_{jl}|^2 |\psi_1(Q_{kk'}, q_{kk', \text{rel}})|^2 |\psi_2(q_{k, \text{rel}}, q_{k', \text{rel}})|^2 dq, \end{aligned}$$

где константа не зависит от  $t$  и

$$\psi_1 = e^{-i(t/2m) \partial^2 / \partial q_{kk', \text{rel}}^2} f_k f_{k'}, \quad \psi_2 = e^{-it(h_k + h_{k'})} g_k g_{k'}.$$

Поэтому, сделав замену переменных и применив неравенство Гёльдера, получим, что

$$\|V_{jl} e^{-itH} \mathcal{D}\theta\|^2 \leq \text{const} \|V_{jl}\|_2^2 \|\psi_2\|_2^2 \sup_{q_{kk', \text{rel}}} \|\psi_1\|_{L_2(Q_{kk'})}^2.$$

Так как эволюционный оператор Шредингера, входящий в выражение для  $\psi_1$ , как оператор из  $L_1$  в  $L_\infty$  имеет норму порядка  $t^{-3/2}$ , то

$$\| \sup_{q_{kk', \text{rel}}} \|\psi_1\|_{L_2(Q_{kk'})}^2 \leq O(|t|^{-3}) \int \left[ \int |\chi(Q_{kk'}, q_{kk', \text{rel}})|^2 dq_{kk', \text{rel}} \right]^2 dQ_{kk'},$$

где  $\chi(Q_{kk'}, q_{kk', \text{rel}}) = f_k(q_k) f_{k'}(q_{k'}) \in \mathcal{S}$ . ■

### 13.3 Волновой оператор для квантовых полей

В этом параграфе мы определим волновой оператор в случае квантового поля. Как и в § 13.1, пусть  $\mathcal{H}_{m_1}, \mathcal{H}_{m_2}, \dots$  — собственные подпространства массового оператора  $M$ , отвечающие собственным значениям  $m_1, m_2, \dots$ . В каждом пространстве  $\mathcal{H}_{m_i}$  действует представление группы Лоренца. Пусть  $\mathcal{F}_i$  — простран-

ство Фока свободного поля с одночастичным подпространством  $\mathcal{H}_{m_i}$ , и пусть  $\mathcal{F} = \bigotimes_i \mathcal{F}_i$ . Тогда  $\mathcal{F}$  можно интерпретировать как пространство, элементами которого помечены асимптотические состояния.

Волновой оператор, который мы собираемся построить, можно рассматривать как отображение пространства  $\mathcal{F}$  меток асимптотических состояний в пространство  $\mathcal{H}$ . Определяемая при помощи волнового оператора  $S$ -матрица действует в пространстве  $\mathcal{H}$  (в частности, отображает  $\mathcal{H}_{\text{out}}$  на  $\mathcal{H}_{\text{in}}$ ). В конце наших построений мы отождествим пространства  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{H}_{\text{in/out}}$ , так что  $S$ -матрица тоже окажется определенной на пространстве меток  $\mathcal{F}$ .

Конструкцию волнового оператора мы начнем с грубой аппроксимации  $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$  (см. § 13.2). Обозначим  $H_0$  оператор энергии свободного поля на  $\mathcal{F}$  и определим

$$W(t) = e^{itH} U e^{-itH_0}. \quad (13.3.1)$$

Ниже мы займемся изучением отображения  $U$  и условий, при которых существует предел

$$W^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} W(t). \quad (13.3.2)$$

При этом окажется, что оператор  $W^\pm$  переплетает  $H_0$  и  $H$  (т. е.  $HW^\pm = W^\pm H_0$ ), а отображение

$$S = W^+(W^-)^* \quad (13.3.3)$$

является унитарным преобразованием пространства  $\mathcal{H}_{\text{in/out}} = \text{Im } W^+ = \text{Im } W^-$ .

Оператор  $U$  называется решением одночастичной задачи. Точнее, мы укажем такой полином  $\psi_m$  от (физического) поля  $\varphi$ , что  $0 \neq \psi_m \Omega \in \mathcal{H}_m$ . Для простоты предположим, что в пространстве  $\mathcal{H}_m$  действует неприводимое представление группы Лоренца с нулевым спином. (Более общий случай см. в работе [Нерр, 1965а].) Пусть

$$\psi_m(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} \psi_m e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}. \quad (13.3.4)$$

Обозначим  $\varphi_{m_i}$  свободное поле в пространстве  $\mathcal{F}_i$ , а  $\# \varphi_{m_i}$  — поле  $\varphi_{m_i}$  или производная по времени от  $\varphi_{m_i}$ . Отображение  $U$  задается действием на векторы, полученные применением полиномов от  $\# \varphi_{m_i}$  к вектору  $\Omega$ . В частности,

$$U^\# \varphi_{m_1}(0, \mathbf{x}_1) \dots \# \varphi_{m_n}(0, \mathbf{x}_n) \Omega = \# \psi_{m_1}(0, \mathbf{x}_1) \dots \# \psi_{m_n}(0, \mathbf{x}_n) \Omega. \quad (13.3.5)$$

Здесь  $\Omega$  в левой части обозначает фоков вакуум, а справа  $\Omega$  — физический вакуумный вектор в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Решение одночастичной задачи получается в несколько шагов. Гиперболоиды  $M = \mu_i$  для частицы или связанного состояния



чаще всего бывают изолированными. В случае некоторой симметрии (например,  $\varphi \rightarrow -\varphi$  для четных теорий) или наличия правила суперотбора гиперболоиды  $M = \mu_i$  могут быть изолированными только относительно спектров в пространстве той же симметрии или значений суперотбора. Физической основой этой идеи служит тот факт, что иначе частицы были бы энергетически неустойчивы относительно распада на составные части. Такие неустойчивые объекты действительно встречаются в физике. Это резонансы, а соответствующие спектры лежат вне физической области и не могут быть собственными значениями оператора  $M$ . В самом худшем случае в теории появляются безмассовые частицы или, более общо, спектр, целиком заполняющий передний конус. В этом случае теория рассеяния становится намного сложнее и фактически понята не до конца. Во избежание технических трудностей мы с самого начала исключаем такую возможность. (Однако необходимо понять рассеяние в присутствии фотонов и нейтрино, которые считаются безмассовыми частицами.)

Можно доказать, что в сверхперенормируемых теориях вдали от критических точек (при малых константах связи, т. е. в области, аппроксимируемой гауссовой моделью) собственные значения  $m_i$  частиц и связанных состояний изолированы (в указанном выше смысле).

Поскольку векторы  $P(\varphi)\Omega$ , где  $P$  — произвольный полином от поля  $\varphi$ , плотны в пространстве  $\mathcal{H}$ , можно выбрать свободный полином  $\psi_m^{cb}$ , такой, что вектор  $\psi_m^{cb}\Omega$  не ортогонален подпространству  $\mathcal{H}_m$ . Рассмотрим свертку  $\psi_m^{cb}$  с функцией  $h_m$ , преобразование Фурье которой имеет вид  $\tilde{h}_m = \bar{\tilde{h}}_m = \tilde{f}(p^2)$ . Предположим далее, что  $\text{supp } \tilde{h}_m$  пересекается со спектром  $\sigma(M)$  оператора массы  $M = (H^2 - P^2)^{1/2}$  по точке  $m$ :

$$\text{supp } \tilde{h}_m \cap \sigma(M) = \{M = m\}. \quad (13.3.6)$$

Тем самым мы определим полином

$$\psi_m = h_m * \psi_m^{cb}. \quad (13.3.7)$$

Ради простоты будем считать, что  $\psi_m = \psi_m^*$  (нейтральные частицы). Существование функции  $h_m$  со свойством (13.3.6) следует из предположения, что  $m$  — изолированная точка спектра оператора  $M$ . Построенные полиномы  $\psi_m$  дают решение одночастичной проблемы. Функция  $h_m$  содержит произвольный множитель, который надо выбрать так, чтобы асимптотические поля  $\varphi_{\text{in/out}}$  (определенные ниже) совпадали с канонически перенормированным свободным полем, а не просто были ему пропорциональны.

**Предложение 13.3.1.** *Предположим, что  $\psi_m^{cb}(t, x)$  есть обобщенная функция умеренного роста по переменным  $t, x$ . Пусть, кроме*

того,  $\psi_m^{cb}(t, \mathbf{x})$  — неограниченный оператор в пространстве  $\mathcal{H}$ , определенный на лоренц-инвариантном и  $\psi_m^{cb}$ -инвариантном подмножестве. Тогда на этом же подмножестве определен оператор  $\psi_m(t, \mathbf{x})$ , также являющийся обобщенной функцией умеренного роста по  $\mathbf{x}$  и принадлежащий классу  $C^\infty$  по  $t$ . В частности, средние при совпадающих моментах времени существуют, не завися от  $t$  и

$$\langle \Omega, \psi_{m_1}(t, \mathbf{x}) \dots \psi_{m_n}(t, \mathbf{x}) \Omega \rangle \in \mathcal{F}'(R^{n(d-1)}). \quad (13.3.8)$$

**Доказательство.** Пусть  $f \in \mathcal{F}(R^{d-1})$  — основная функция для  $\psi_m$ ; тогда  $\tilde{f}(\mathbf{p}) \hat{h}_m(p) e^{ip_0 t} \in \mathcal{F}(R^d)$  является основной функцией для  $\psi_m^{cb}$ . Вакуумное среднее от произведения функций  $\psi_m$  при совпадающих моментах времени существует, и то же самое верно для производных  $\psi_m$  по времени. ■

**Замечание.** В типичном случае полагают  $\psi_m^{cb} = \varphi$ , где  $\varphi$  — поле Вайтмана. Для простоты мы предположим ниже, что это условие выполнено. Тогда утверждения предложения 13.3.1 содержатся в аксиомах Вайтмана, а условия нормировки функции  $h$  превращаются в условия нормировки поля  $\varphi$ . Это есть обычная перенормировка величины поля, при которой вместо  $\varphi$  рассматривается  $\varphi_{\text{перен}} = Z^{-1/2} \varphi$ .

Полезно представить  $e^{-itH_0}$  в виде интегрального оператора. В следующем параграфе этот оператор будет изучен более подробно. Пусть  $H_{0, m_i}$  — оператор энергии в пространстве  $\mathcal{F}_i$ ; тогда  $H_0 = \sum_i H_{0, m_i}$ . Обозначим  $\dot{\varphi}_m$  производную  $\varphi_m$ . Для упрощения обозначений положим

$$u_m(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_m(t, \mathbf{x}) \\ \dot{\varphi}_m(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_m(t, \mathbf{x}) \\ \partial_t \varphi_m(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (13.3.9)$$

Аналогично, пусть  $v_m(t, \mathbf{x})$  обозначает вектор с компонентами  $\psi_m$  и  $\dot{\psi}_m$ , а  $G_m(t)$  — матрицу размера  $2 \times 2$ , дающую решение задачи Коши

$$u_m(t, \mathbf{x}) = G_m(t) u_m(0, \mathbf{x}) = e^{itH_0} u_m(0, \mathbf{x}) e^{-itH_0}.$$

Поэтому для тензорного произведения имеем

$$\begin{aligned} W(t) u_{m_1}(0, \mathbf{x}_1) \dots u_{m_n}(0, \mathbf{x}_n) \Omega &= \\ &= e^{itHU} G_{m_1}(-t) u_{m_1}(0, \mathbf{x}_1) \dots G_{m_n}(-t) u_{m_n}(0, \mathbf{x}_n) \Omega = \\ &= e^{itH} G_{m_1}(-t) v_{m_1}(0, \mathbf{x}_1) \dots G_{m_n}(-t) v_{m_n}(0, \mathbf{x}_n) \Omega = \\ &= G_{m_1}(-t) v_{m_1}(t, \mathbf{x}_1) \dots G_{m_n}(-t) v_{m_n}(t, \mathbf{x}_n) \Omega. \end{aligned} \quad (13.3.10)$$

В следующих параграфах будет доказана

**Теорема 13.3.2.** Рассмотрим подчиняющуюся аксиомам Вайтмана теорию поля с изолированным одночастичным спектром и  $\Psi_m^{\text{ca}} = \varphi$ . Усредним выражение (13.3.10) с основными функциями  $f_i(\mathbf{x})$ ,  $f_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}(R^{d-1})$ , носители которых в пространстве скоростей не пересекаются. Тогда усредненное выражение (13.3.10) сильно сходится со скоростью  $O(t^{-N})$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $N$  произвольно. Предельные операторы  $W^\pm$  являются изометриями.

**Замечание.** В силу предложений 13.3.1 и 13.4.1, оператор  $W(t)$  определен, как и в формуле (13.3.10), на векторах  $u \dots u\Omega$ . Пространство скоростей и носители  $f$  в этом пространстве определяются в § 13.4.

**Следствие 13.3.3.** Пределы полей на  $\pm\infty$ :

$$\varphi_{m, \text{in/out}}(t, \mathbf{x}) = W^\pm \varphi_m(t, \mathbf{x}) (W^\pm)^*$$

представляют собой свободные поля.

**Следствие 13.3.4.** Справедливо равенство  $HW^\pm = W^\pm H_0$ , где  $H_0$  — гамильтониан свободной динамики поля  $\varphi_{m, \text{in/out}}$ .

**Следствие 13.3.5.**  $S$ -матрица, определенная формулой (13.3.3), является унитарным оператором на пространстве  $\mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}} = \text{Im } W^\pm$ .

**Доказательство.** Важным следствием аксиом Вайтмана является тождество  $TCP = I$ , где  $T$  — оператор обращения времени,  $P$  — оператор отражения в пространстве, а  $C$  — оператор зарядового сопряжения [Streater, Wightman, 1964], [Jost, 1965]. В силу равенств  $CS\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_m = P\mathcal{H}_m$ , оператор  $T$  тоже оставляет пространство  $\mathcal{H}_m$  инвариантным. Аналогично этому, поскольку операторы  $C$  и  $P$  отображают многочастичные in/out-состояния  $\text{Im } W^\pm$  на себя, то же самое делает и оператор  $T$ . Однако по определению  $T$  меняет местами  $\text{Im } W^+$  и  $\text{Im } W^-$ , следовательно, эти пространства совпадают. Ограничение  $S$ -матрицы на пространство  $\mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}} = \text{Im } W^\pm$  определено формулой (13.3.3) как произведение двух унитарных операторов, и поэтому само является унитарным оператором. ■

## 13.4 Волновые пакеты для свободных частиц

Как и в § 13.2, для свободного поля в пространстве-времени размерности  $d = 4$  можно доказать, что решения убывают как  $t^{-3/2}$ . Однако в случае, когда множества скоростей не пересекаются, убывание для любой размерности  $d \geq 2$  происходит быстрее, чем  $t^{-N}$ , где  $N$  произвольно. Этот последний результат об убывании мы и установим в этом параграфе. Он используется при доказательстве теоремы 13.3.1 для сверхперенормируемых теорий в размерности  $d = 2, 3$  при условии, что основные функции имеют непересекающиеся носители в пространстве скоростей. Убывание имеет место вне конусов в  $x, t$ -пространстве, и поэтому означает, что свободные частицы в основном остаются внутри конусов, определенных их скоростями, причем скорости вычисляются по их

носителям в импульсном пространстве. Внутри конуса скоростей мы воспользуемся следующей простой оценкой.

**Предложение 13.4.1.** Пусть функция  $f(t, \mathbf{x})$  является решением уравнения Клейна — Гордона с начальными данными из пространства  $\mathcal{S}(R^{d-1})$ . Тогда относительно любой нормы  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$  в пространстве  $\mathcal{S}(R^{d-1})$  и любой производной  $\partial_t^j$  по  $t$ ,  $j \geq 0$ , функция  $\mathbf{x} \rightarrow \partial_t^j f(t, \mathbf{x})$  обладает конечной нормой  $\|\partial_t^j f(t, \cdot)\|_{\mathcal{S}}$ , возрастающей по  $t$  не более чем степенным образом.

*Доказательство.* Частичное преобразование Фурье  $\tilde{f}(t, \mathbf{p})$  (по переменной  $\mathbf{x}$ ) имеет вид

$$\tilde{f}(t, \mathbf{p}) = (2\pi)^{-(d-1)/2} [e^{-i\mu(\mathbf{p})t} g_+(\mathbf{p}) + e^{i\mu(\mathbf{p})t} g_-(\mathbf{p})],$$

где  $\mu = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $g_{\pm} \in \mathcal{S}$ . Предложение следует теперь из того, что  $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$  (где  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье). ■

Скорости и импульсы связаны релятивистскими формулами

$$\mathbf{p} = \pm m \frac{\mathbf{v}}{(1 - v^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{p} \in \text{supp } g_{\pm}, \quad (13.4.1)$$

$$\mathbf{v} = \pm \mathbf{p}/\mu(\mathbf{p}). \quad (13.4.2)$$

Пусть  $\mathcal{Y}$  — некоторое множество в пространстве скоростей. Конус будущего  $\mathcal{C}_r$  в пространстве скоростей определяется следующим образом:

$$\mathcal{C}_r = \{t, \mathbf{x} \in R^d \mid t \geq 0, \mathbf{x}/t \in \mathcal{Y}\} = \{t, t\mathcal{Y} \mid t \geq 0\}.$$

Множество  $\mathcal{Y}$  мы выберем замкнутым и содержащим некоторую окрестность множества скоростей, определенных импульсами  $\mathbf{p} \in \text{supp } g_{\pm}$ .

**Предложение 13.4.2.** Если функция  $f$  и множество  $\mathcal{Y}$  выбраны такими, как сказано выше, то  $f$  вне конуса  $\mathcal{C}_r$  быстро убывает по переменной  $t$ . Другими словами, для любых  $L, N$  при  $t \rightarrow \infty$

$$\sup_{\{\mathbf{x}: \mathbf{x}/t \notin r\}} (1 + |\mathbf{x}|)^L |f(t, \mathbf{x})| \leq O(t^{-N})$$

и такая же оценка справедлива для любой производной функции  $f$  по  $\mathbf{x}$ .

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда имеется лишь функция  $g_+$ . Тогда

$$f(t, t\mathbf{v}) = (2\pi)^{(d-1)/2} \int e^{it(-\mu + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p})} g_+(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int e^{its} h_{\mathbf{v}}(s) ds,$$

где

$$h_{\mathbf{v}}(s) = (2\pi)^{(d-1)/2} \int \delta(s + \mu(\mathbf{p}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) g_+(\mathbf{p}) d\mathbf{p}.$$

Геометрически нагляднее перейти к пространству энергии-импульса, где интегрирование происходит по пересечению гиперboloида  $p_0 = \mu(\mathbf{p})$  с гиперплоскостью  $s = -p_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = ((1, \mathbf{v}), \mathbf{p})$  (где  $(\cdot, \cdot)$  — лоренцево скалярное произведение). Регулярность функции  $h_s(s)$  может нарушиться лишь при тех  $s$ , при которых эта гиперплоскость касается гиперboloида. Мы утверждаем, что условие касания в точности совпадает с приведенным выше релятивистским соотношением между скоростью и импульсом. Следовательно, для  $\mathbf{v} \notin \mathcal{V}$  и импульсов  $\mathbf{p} \in \text{supp } g_+$ , по которым происходит интегрирование, указанная гиперплоскость составляет положительный угол с гиперboloидом, отделенный от нуля равномерно по  $s$ . Отсюда следует, что функция  $h$  и все ее производные по  $s$  принадлежат пространству  $L_1(ds)$ , и, значит, функция  $f(t, \mathbf{iv})$  имеет требуемый порядок убывания. Для ограниченных скоростей  $\mathbf{v}$  утверждение доказано. Если же скорость  $\mathbf{v}$  неограничена (например,  $|\mathbf{v}| > 1$ ), то мы воспользуемся тем, что скорость распространения начальных данных конечна, а сами эти данные принадлежат пространству  $\mathcal{P}$ .

Для доказательства утверждения об условии касания заметим, что это условие влечет за собой неравенство  $v^2 < 1$ . Сделав это предположение, проверим, что значения  $\hat{p} = m\mathbf{v}/(1-v^2)^{1/2}$ ,  $s = -m(1-v^2)^{1/2}$  определяют точку пересечения  $(\mu(\hat{p}), \hat{p})$  гиперboloида и гиперплоскости. Произвольная точка гиперплоскости имеет вид  $p = (\mu(\hat{p}), \hat{p}) + p^\perp$ , где  $(p^\perp, (1, \mathbf{v})) = 0$ . Тогда вектор  $p^\perp$ , будучи лоренц-ортогональным времени-подобному вектору  $(1, \mathbf{v})$ , является пространственно-подобным, т. е.  $(p^\perp, p^\perp) \geq 0$ . Пользуясь соотношением (13.4.2), мы убеждаемся, что  $-(p, p) < m^2$ , когда  $p^\perp \neq 0$ . Отсюда следует, что  $p^\perp = 0$  определяет единственную точку пересечения гиперплоскости и гиперboloида. ■

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций  $f^{(t)} \in \mathcal{P}(R^d)$ , заданных для  $f \in \mathcal{P}(R^d)$  формулой

$$\widetilde{f^{(t)}}(p) = \widetilde{f}(p) e^{i(p_0 - \varepsilon(p_0)\mu(\mathbf{p}))t}, \quad (13.4.3)$$

$$\text{где } \varepsilon(p_0) = \varepsilon(p) = \text{sign } p_0. \quad (13.4.4)$$

Пусть  $f = 0$  в окрестности  $p_0 = 0$ .

**Предложение 13.4.3.** Для произвольной нормы  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$  на пространстве  $\mathcal{P}(R^{d-1})$  и любой производной  $\partial_t^l$  по  $t$  существует такое число  $L$ , что при любом  $K$

$$\|\partial_t^l f^{(t)}(x_0, \cdot)\|_{\mathcal{P}} \leq C_K (1 + |x_0 - t|)^{-K} (1 + |t|)^L.$$

Кроме того, для произвольного  $N$  при  $t \rightarrow \infty$

$$\sup_{\{\mathbf{x}: |\mathbf{x}|/t \neq \nu\}} (1 + |\mathbf{x}|)^L |f(t, \mathbf{x})| \leq O(t^{-N}),$$

и аналогичная оценка имеет место для любой производной функции  $f$ .

**Доказательство.** Будем считать  $x_0 - t$ ,  $t$  и  $\mathbf{x}$  независимыми переменными. Так как

$$f^{(t)}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int g(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} e^{it(p_0 - \varepsilon(p_0)\mu(\mathbf{p}))} d\mathbf{p},$$

где  $g(\mathbf{p}) = \widetilde{f}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}_0(x_0 - t)}$ , то функции  $f^{(t)}(\mathbf{x})$  принадлежат пространству  $\mathcal{S}(R^d)$  по переменной  $x_0 - t$  и являются гладким решением уравнения Клейна — Гордона по  $(t, \mathbf{x})$ . Теперь нужно воспользоваться предложением 13.4.1. ■

## 13.5 Теория Хаага — Рюэля

При доказательстве сходимости волновых операторов в теории поля мы используем тот же метод, что и в случае потенциального рассеяния, но сталкиваемся при этом с новой трудностью. Условия убывания потенциала, например  $V_{ij} \in L_2$  (как мы предполагали в § 13.2), заменяются в теории поля требованием убывания усеченных вакуумных средних. Эти специальные корреляционные функции в определенном смысле отражают свойства многочастичных взаимодействий. Трудность состоит в том, что это убывание не предполагается, а выводится из исходных принципов (из аксиом или же выбора лагранжиана взаимодействия). Мы начнем этот параграф с того, что обойдем эту трудность, предположив требуемый характер убывания.

Для любого заданного семейства  $n$ -точечных функций (например, функций Вайтмана  $\mathscr{W}_n(x_1, \dots, x_n)$ ) определим усеченные функции  $\mathscr{W}_n^T(x_1, \dots, x_n)$  формулами

$$\mathscr{W}_n = \sum_{\pi \in \mathscr{P}} \prod_{P \in \pi} \mathscr{W}_{|P|}^T(x_{i_1}, \dots, x_{i_{|P|}}), \quad (13.5.1)$$

$$\mathscr{W}_n^T = \sum_{\pi \in \mathscr{P}} (-1)^{|\pi|+1} (|\pi| - 1)! \prod_{P \in \pi} \mathscr{W}_{|P|}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{|P|}}). \quad (13.5.2)$$

Здесь  $\mathscr{P}$  обозначает совокупность всех разбиений множества  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\pi = \{P_1, \dots, P_{|\pi|}\} \in \mathscr{P}$  — разбиение, а  $p = \{i_1, \dots, i_{|p|}\}$  — элемент  $\pi$ . Комбинаторные рассуждения, известные под названием теоремы Мёбиуса, показывают, что формулы (13.5.1) и (13.5.2) дают эквивалентные определения усеченных функций  $\mathscr{W}^T$  в терминах функций  $\mathscr{W}$ .

Пусть, как и выше,  $\#$  означает, что  $\psi$ , возможно, заменено своей производной по времени, и положим

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \langle \Omega, \# \psi_{m_1}(0, \mathbf{x}_1) \dots \# \psi_{m_n}(0, \mathbf{x}_n) \Omega \rangle. \quad (13.5.3)$$

**Теорема 13.5.1.** В предположениях теоремы 13.3.2  $\mathcal{F}_n^T$  как функция разности переменных  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j$  является обобщенной функцией умеренного роста.

*Доказательство теоремы 13.3.2.* Обозначим  $\theta(t)$  левую часть равенства (13.3.10), усредненную с основными функциями  $f, \dot{f}$ . Предположим, что разные функции имеют непересекающиеся носители в пространстве скоростей. Тогда

$$\|\theta(t_1) - \theta(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|d\theta(t)/dt\| dt,$$

и норму  $\|d\theta(t)/dt\|^2$  можно выразить через скалярное произведение (13.5.3), которое в свою очередь разлагается в сумму произведений усеченных средних  $\mathcal{F}_n^T$ .

Каждый член, содержащий сомножитель  $\mathcal{F}_1^T$ , равен нулю, так как  $\psi_m \Omega \in \mathscr{H}_m \perp \Omega$  и, значит,  $\langle \Omega, \psi_m \Omega \rangle = 0$ . Каждый член, содержащий только

сомножители вида  $\mathcal{F}_2^T$ , тоже равен нулю. В самом деле, такой член содержит множитель с производной по времени, а именно

$$\left\langle e^{-itH} \# \left\{ G_{m_i}(-t) \left( \psi_{m_i}(0, \mathbf{x}_i) \Omega \right) \right\}, \frac{d}{dt} e^{-itH} \# \left\{ G_{m_j}(-t) \left( \psi_{m_j}(0, \mathbf{x}_j) \Omega \right) \right\} \right\rangle.$$

Однако для векторов  $\psi_m \Omega$  и  $\dot{\psi}_m \Omega$  свободная и физическая динамика (определенные соответственно однопараметрическими группами  $G_m(t)$  и  $e^{-itH}$ ) совпадают, так как  $\# \psi \Omega \in \mathcal{H}_m$ . Поэтому, принимая во внимание знак минус в каждом  $G_m(-t)$ , заметим, что любой вектор (до применения  $d/dt$ ) в скалярном произведении не зависит от времени. Применение производной по времени обращает произведение в нуль.

Теперь перейдем к рассмотрению слагаемых, содержащих хотя бы один сомножитель  $\mathcal{F}_j^T$ ,  $j \geq 3$ . В этом случае производная  $d/dt$  не играет никакой роли. В сомножителе  $\mathcal{F}_j^T$  некоторые из точек относятся к полям  $\psi_m$  из левой части скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , а некоторые — из правой части. Поскольку  $j \geq 3$ , то по крайней мере две точки относятся к одной части. Основные функции для этих двух точек имеют непересекающиеся носители в пространстве скоростей. Поэтому соответствующие конусы скоростей не пересекаются. Вне конуса скоростей свободное поле  $G_m(-t)f$  быстро убывает; то же самое происходит и внутри конуса, но только за счет убывания  $\mathcal{F}_j^T$  как функции разности  $\mathbf{x}_{i_1} - \mathbf{x}_{i_2}$ . Отсюда следует, что члены, содержащие множитель  $\mathcal{F}_j^T$ , при  $j \geq 3$  быстро убывают.

Из этого доказательства видно, что предел вектора (13.3.10) при  $t \rightarrow \pm\infty$  определяется не зависящими от времени произведениями сомножителей  $\mathcal{F}_2^T$ . Этот предел, как можно убедиться, порождается свободным полем  $\phi$ . Из сказанного следует, что  $W^\pm$  — изометрии. ■

Обратимся теперь к доказательству теоремы 13.5.1. Его ключом служит свойство быстрого убывания функций  $\mathcal{F}^T$  при пространственно-подобном удалении переменных, что в свою очередь есть следствие предположения о массовой щели. Мы знаем, что  $\mathcal{F}^T$  является обобщенной функцией умеренного роста по относительной переменной  $\mathbf{x}_{\text{rel}}$  тогда и только тогда, когда преобразование Фурье  $\widetilde{\mathcal{F}}^T(\mathbf{p}_{\text{rel}})$  по переменной  $\mathbf{p}_{\text{rel}}$  имеет степенной рост и принадлежит классу  $C^\infty$ . Напишем

$$\widetilde{\mathcal{F}}_n^T(\mathbf{p}_{\text{rel}}) = \int \dots \int \prod_{i=1}^n \tilde{h}(p_i \cdot p_i) \widetilde{\mathcal{W}}^T(p_{\text{rel}}) \prod_{i=1}^n dp_{0,i},$$

где  $p_i = (p_{0,i}, \mathbf{p}_i)$ , и заметим, что достаточно, чтобы для всех  $f \in \mathcal{S}(R^{dn})$  выполнялось

$$\int \dots \int \tilde{f}(p) \widetilde{\mathcal{W}}^T(p) \prod_{i=1}^n dp_{0,i} \in \mathcal{S}(\mathbf{p}_{\text{rel}}),$$

а значит, достаточно, чтобы для всех  $f \in \mathcal{S}(R^{dn})$

$$(f * \mathcal{W}^T)(\mathbf{y}_{\text{rel}}) = \int f(x) \mathcal{W}^T(\mathbf{y}_{\text{rel}} - x) dx \in \mathcal{S}(R^{(d-1)(n-1)}). \quad (13.5.4)$$

Так как гладкость обеспечивается этой сверткой, то ключевым свойством является быстрое убывание по переменной  $\mathbf{y}_{\text{rel}}$ .

Теперь удалим из области интегрирования по  $x$  ту часть, где  $\|x\| \geq \sum \|y_{\text{rel}}\|/n$ . Пусть  $g$  — функция класса  $C^\infty$ , равная 1 в малой окрестности нуля, носитель которой содержится в большей, но по-прежнему малой окрестности начала координат. Тогда

$$f^*(1-g) \mathcal{W}^T \equiv \int f(x) \left[ 1 - g\left(\frac{x^2}{x^2 + y_{\text{rel}}^2}\right) \right] \mathcal{W}^T(y_{\text{rel}} - x) dx \in \mathcal{P}(y_{\text{rel}}),$$

и нам осталось исследовать свертку  $f * g \mathcal{W}^T$ .

Рассмотрим  $y \equiv (0, y_{\text{rel}})$  как набор  $n$  точек в пространстве  $R^{d-1}$ . Простые геометрические рассуждения показывают, что найдутся две параллельные гиперплоскости в пространстве  $R^{d-1}$ , отстоящие одна от другой на расстояние, не меньшее  $\|y_{\text{rel}}\|/n$ , и разбивающие эти  $n$  точек на два непересекающихся множества, расположенных по разные стороны от заключенного между этими гиперплоскостями слоя. Далее, при  $\|x\| \leq \sum \|y_{\text{rel}}\|/n$  полученные из  $y$  сдвигом  $n$  точек  $y - x$  в пространстве  $R^d$  подобным же образом разбиваются на два подмножества, таких, что точки первого (например,  $y_i - x$ ,  $i \in X$ ) пространственно-подобно отделены от точек второго (например,  $y_j - x$ ,  $j \in X'$ ).

Пусть  $\pi \in \mathcal{S}_n$  — перестановка чисел  $\{1, \dots, n\}$ , в которой набор индексов  $i \in X$  предшествует набору  $j \in X'$  и которая не меняет относительного расположения внутри множеств  $X$  и  $X'$ . Аналогично, пусть  $\pi' \in \mathcal{S}_n$  — подобная же перестановка, в которой набор  $X'$  предшествует  $X$ . Если  $\mathcal{W}_\pi$  обозначает действие перестановки  $\pi$  на аргументы функции  $\mathcal{W}$ , то из аксиомы локальности и приведенных выше рассуждений следует, что  $g \mathcal{W}^T = g \mathcal{W}_\pi^T = g \mathcal{W}_{\pi'}^T$ .

Обозначим  $\{\chi_X\}$ , где  $X$  — подмножество индексов  $1, 2, \dots, n$ , разбиение единицы по переменным  $y_{\text{rel}}$ , где каждая функция  $\chi_X$  отлична от нуля только для тех  $y_{\text{rel}}$ , которые при указанном выше разбиении могут привести к этому  $X$ . Поскольку

$$\chi_X f * (\mathcal{W}^T - \mathcal{W}_\pi^T), \quad \chi_X f * (\mathcal{W}_\pi^T - \mathcal{W}_{\pi'}^T) \in \mathcal{P}(y_{\text{rel}}),$$

ключом к использованию массовой щели служит следующая

**Лемма 13.5.2.** *Существует такая обобщенная функция  $h_X \in \mathcal{P}(R^{dn})$  умеренного роста, что*

$$h_X * \mathcal{W}_\pi^T = \mathcal{W}_\pi^T, \quad h_X * \mathcal{W}_{\pi'}^T = 0.$$

Из этой леммы следует, что

$$\begin{aligned} f * \mathcal{W}^T &= \sum_X \chi_X f * \mathcal{W}^T = \\ &= \sum_X \chi_X f * (\mathcal{W}^T - \mathcal{W}_\pi^T) + \sum_X \chi_X f * h_X * (\mathcal{W}_\pi^T - \mathcal{W}_{\pi'}^T), \end{aligned}$$

а так как  $f * h_X \in \mathcal{P}(R^{dn})$ , то  $f * \mathcal{W}^T \in \mathcal{P}(y_{\text{rel}})$ , что и завершает доказательство теоремы 13.5.1.



Введем обозначение:  $V_+^m = \{p \in R^d: -p \cdot p \geq m^2, p_0 > 0\}$ .

**Предложение 13.5.3.** В теории Вайтмана с массой  $m > 0$  носитель функции  $\widetilde{\mathcal{W}}^T(p_1, \dots, p_n)$  содержится в множестве

$$\sum_{l=s}^n p_l \in V_+^m, \quad s \neq 1; \quad \sum_{l=1}^n p_l = 0.$$

*Доказательство леммы 13.5.2.* Пусть  $P_X = \sum_{i \in X} p_i$  и  $P_{X'} = \sum_{i \in X'} p_i$ . Тогда носитель функции  $\mathcal{W}_\pi^T$  принадлежит множеству  $-P_X, P_{X'} \in V_+^m$ , а носитель  $\widetilde{\mathcal{W}}_\pi^T$  — множеству  $P_X, -P_{X'} \in V_+^m$ .

Выберем ограниченную бесконечно дифференцируемую функцию  $\tilde{h}_X$ , зависящую от  $P_X$ ,  $0 < \tilde{h}_X < -m/2$  и нулю при  $P_X, 0 > m/2$ . ■

*Доказательство предложения 13.5.3.* Условие  $\sum_{l=1}^n p_l = 0$  следует из трансляционной инвариантности. Обозначим  $\hat{V} = \{0\} \cup V_+^m$ ; тогда множество  $\hat{V}$  содержит носитель спектральной меры группы операторов сдвига, и, следовательно, носитель функции  $\widetilde{\mathcal{W}}(p_1, \dots, p_n)$  лежит в множестве

$$P_s = \sum_{l=s}^n p_l \in \hat{V}, \quad \sum_{l=1}^n p_l = 0. \quad (13.5.5)$$

Заметим, что множество  $\hat{V}$  — полугруппа, т. е. замкнуто относительно сложения. Из соотношения (13.5.2) или из равенства (13.5.1) при помощи индукции по  $n$  следует, что носитель функции  $\widetilde{\mathcal{W}}^T$  также лежит в множестве (13.5.5). Главный момент при переходе к усеченным функциям состоит в том, что начало координат  $p = 0$  удаляется из носителей, т. е. множество  $\hat{V}$  заменяется на  $V_+^m$ .

Для доказательства предложения воспользуемся индукцией по  $n$ . Для  $n = 1$  утверждение о том, что  $P_s \in V_+^m, s \neq 1$ , относится к пустому множеству и, значит, верно. Предположим, что утверждение доказано для  $l \leq n - 1$ . Пусть функция  $g \in \mathcal{S}(R^d)$  обладает свойством  $\text{supp } \tilde{g} \cap \hat{V} \subset \{0\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int g(a) \mathcal{W}_l(x_1, \dots, x_{l-1}, x_l + a, \dots, x_l + a) da = \\ & = \left\langle \Phi(x_{l-1}) \dots \Phi(x_l) \Omega, \int e^{-ia \cdot P} g(a) da \Phi(x_l) \dots \Phi(x_l) \Omega \right\rangle = \\ & = \tilde{g}(0) \langle \Omega, \Phi(x_1) \dots \Phi(x_{l-1}) \Omega \rangle \langle \Omega, \Phi(x_l) \dots \Phi(x_l) \Omega \rangle = \\ & = \tilde{g}(0) \mathcal{W}_{l-1}^\circ(x_1, \dots, x_{l-1}) \mathcal{W}_{l-l+1}^\circ(x_l, \dots, x_l). \end{aligned}$$

Теперь положим  $l = n$  и подставим сюда выражение (13.5.1). В результате получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{g}(0) \mathcal{W}_{j-1}^\circ \mathcal{W}_{n-j+1}^\circ &= \int g(a) \mathcal{W}_n^T(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + a, \dots, x_n + a) da + \\ &+ \sum_{\{1, \dots, n\} \neq \pi \in \mathcal{S}} (\dots). \end{aligned}$$

Согласно индуктивному предположению, ненулевой вклад в последнюю сумму могут дать только те разбиения  $\pi$ , которые являются измельчениями разбиения  $\pi_j = \{\{1, \dots, j-1\}, \{j, \dots, n\}\}$ . Суммарный вклад от таких разбиений равен  $\tilde{g}(0) \mathcal{W}_{j-1}^{\rho} \mathcal{W}_{n-j+1}^{\rho}$  в силу (13.5.1). Итак,

$$\begin{aligned} 0 &= \int g(a) \mathcal{W}_n^{\rho T}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + a, \dots, x_n + a) da = \\ &= \tilde{g}(P_j) \widetilde{\mathcal{W}}^T|_{P_j=0}. \end{aligned}$$

Этим завершается индукция, а вместе с ней и доказательство. ■

Переформулируем и обобщим теорему 13.3.2. Асимптотический предел при  $t \rightarrow \pm\infty$  может быть полностью описан как эволюция основной функции  $f \in \mathcal{S}(R^d)$ . В самом деле, действие физической динамики  $\varphi(x_0, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x_0 + t, \mathbf{x})$  и соответствующая замена переменных эквивалентны переходу  $f(x_0, \mathbf{x}) \rightarrow f(x_0 - t, \mathbf{x})$ , или, на языке преобразования Фурье,  $\tilde{f} \rightarrow e^{it\rho_0} \tilde{f}$  при следующем соглашении о знаках в интеграле Фурье:

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{ipx} \tilde{f}(p) dp, \quad (13.5.6)$$

$$p \cdot x = -\rho_0 x_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (13.5.7)$$

При заданных начальных условиях  $f_0, \dot{f}_0 \in \mathcal{S}(R^{d-1})$  конструкция поля  $\psi$  по свободному полю  $\psi^{\text{св}} = \varphi$ , данная в § 13.3, эквивалентна замене интегрирования основной функции

$$f(y) = f_0(\mathbf{x}) \delta(y_0) + \dot{f}_0(\mathbf{x}) \delta'(y_0)$$

с полем  $\psi$  на интегрирование основной функции

$$f(x) = \int (h(x-y) f_0(y) - \partial_x h(x-y) \dot{f}_0(y)) dy$$

или

$$\tilde{f}(p) = (\tilde{f}_0(\mathbf{p}) + ip_0 \tilde{f}_0(\mathbf{p})) \tilde{h}(p) \quad (13.5.8)$$

с полем  $\varphi$ . Комбинация физической и (обратной по времени) свободной динамики, как и в формуле (13.3.10), выражается с помощью фурье-образов в виде

$$\tilde{f}(p) \rightarrow e^{it(\rho_0 - \varepsilon(\rho_0) \mu(\mathbf{p}))} \tilde{f}(p) \equiv \tilde{f}^{(t)}(p), \quad (13.5.9)$$

где  $\varepsilon$  определено соотношением (13.4.4). Ключевые оценки для доказательства утверждения (13.5.9) содержатся в предложении 13.4.3.

При доказательстве теоремы 13.3.2 важную роль играет следующее свойство функции  $\tilde{f}$ :

$$\text{supp } \tilde{f} \subset \{p: |p^2 + m^2| \leq \varepsilon\}, \quad (13.5.10)$$

где  $\varepsilon > 0$  настолько мало, что из (13.5.10) вытекает соотношение  $\text{supp } \tilde{f} \cap \sigma(H, \mathbf{p}) = \{p: -p^2 = m^2\}$ .

Динамику  $f \rightarrow f^{(t)}$  можно продолжить на все функции  $f$ , обладающие свойством (13.5.10). Кроме того, теорема 13.3.2 также обобщается на все такие  $f$  и утверждает, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \prod_{i=1}^n \varphi(f_i^{(t)}) \Omega = \prod_{i=1}^n \varphi_{\text{in/out}}(f_i) \Omega$$

в предположении, что носители  $f_i$  в пространстве скоростей не пересекаются, причем порядок сходимости равен  $O(t^{-N})$ ,  $N$  произвольно.

Обобщение этого результата состоит в том, что в каждом полиноме мы можем выбрать значение  $t = t_i$  независимо и затем перейти к пределу в отдельности для каждого  $t_i$ .

**Теорема 13.5.4.** Пусть набор функций  $\{f_i\}$  имеет непересекающиеся носители в пространстве скоростей и каждая из них удовлетворяет условию (13.5.10). Пусть, кроме того,  $\theta_{\text{in/out}} = \prod_{i=m+1}^n \varphi_{\text{in/out}}(f_i) \Omega$ .

Тогда

$$\lim_{\substack{t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m \\ t_i \rightarrow +\infty}} \varphi(f_1^{(t_1)}) \dots \varphi(f_m^{(t_m)}) \theta_{\text{out}} = \prod_{i=1}^n \varphi_{\text{out}}(f_i) \Omega.$$

Аналогичное утверждение справедливо для  $\theta_{\text{in}}$  и  $t_i \rightarrow -\infty$  при условии, что в процессе предельного перехода  $t_m \leq \dots \leq t_2 \leq t_1$ .

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по  $m$ , начало которой составляет тривиальный случай  $m = 0$ . Сначала будем изменять моменты времени  $t_{m+1} = t_{m+2} = \dots = t_n$  от  $\infty$  к  $t_m$ , а затем устремим  $t_m = t_{m+1} = \dots$  обратно к  $\infty$ . В результате первой процедуры (от  $\infty$  к  $t_m$ ) возникнет поправка, ограниченная по норме выражением

$$\int_{t_m}^{\infty} \left\| \varphi(f_1^{(t_1)}) \dots \varphi(f_m^{(t_m)}) \frac{d}{ds} \prod_{i=m+1}^n \varphi(f_i^{(s)}) \Omega \right\| ds.$$

Квадрат подынтегрального выражения — это скалярное произведение; оно может быть выражено с помощью усеченных вакуумных средних. Как и в доказательстве теоремы 13.3.2, обратим особое внимание на множители вида  $\partial_s \varphi(f_i^{(s)})$ . Если этот множитель действует на вектор  $\Omega$  непосредственно, то результат равен нулю, так как  $\partial_s \varphi(f_i^{(s)}) \Omega = 0$ . В противном случае должно быть два полевых множителя, стоящих по одну и ту же сторону в скалярном произведении, у которых  $t = s$ . Два этих множителя имеют непересекающиеся носители в пространстве скоростей, и это приводит к тому, что порядок сходимости равен  $O(s^{-N})$ . После интегрирования по  $s$  это дает порядок  $O(t_m^{-N})$ .

Поправка при втором изменении времени по тем же причинам ограничена

по норме величиной

$$\int_{t_{m-1}}^{\infty} \left\| \varphi(f_1^{(t_1)}) \dots \varphi(f_{m-1}^{(t_{m-1})}) \frac{d}{dt} \prod_{i=m}^n \varphi(f_i^{(s)}) \Omega \right\| ds \leq O(t_{m-1}^{-N}). \blacksquare$$

Литературные ссылки

[Jost, 1965], [Hepp, 1966a], [Reed, Simon, 1972—9].

## Глава 14

### Теория рассеяния: стационарные методы

#### 14.1 Хронологически упорядоченные корреляционные функции

$S$ -матрица представляет собой главный объект изучения в теории поля, так как с ее помощью выражаются наблюдаемые взаимодействия между частицами. Приведенное в гл. 13 определение  $S$ -матрицы не дает удобной основы для изучения ее дальнейших свойств. Однако сейчас мы покажем, что  $S$ -матрица имеет простое и удобное представление в терминах хронологически упорядоченных корреляционных функций. Оно позволяет, например, строить ряды теории возмущений, разбивать на связные компоненты и исследовать аналитичность в импульсном пространстве.

Для определения хронологически упорядоченных произведений положим

$$\theta(x) = \theta(x_0, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_0 > 0, \\ 0 & \text{при } x_0 < 0; \end{cases}$$

$$T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \theta(x_{\pi(1)} - x_{\pi(2)}) \dots \theta(x_{\pi(n-1)} - x_{\pi(n)}) \times \\ \times \varphi(x_{\pi(1)}) \dots \varphi(x_{\pi(n)}), \quad (14.1.1)$$

где  $\mathfrak{S}_n$  — группа перестановок  $n$  элементов. Наша цель — показать, что

$$T(x_1, \dots, x_n) = \langle T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \quad (14.1.2)$$

является обобщенной функцией умеренного роста, преобразование Фурье  $\tilde{t}(p)$  которой настолько регулярно, что допускает умножение на  $\delta$ -функцию: выражение

$$\prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 + m^2) \theta(p_i^0) \left[ \prod_{i=1}^n (p_i^2 + m^2) \right] \tilde{t}(p_1, \dots, p_n, -p_{n+1}, \dots, -p_n) \quad (14.1.3)$$

(с точностью до постоянного множителя) является матричным элементом  $S$ -матрицы между out-состоянием со значением импульсов  $p_1, \dots, p_m$  и in-состоянием со значением импульсов  $p_{m+1}, \dots, p_n$ .

Первая задача состоит в том, чтобы показать, что  $\tau$  — обобщенная функция умеренного роста или по крайней мере в каком-нибудь смысле определена. Поскольку  $\theta \notin C^\infty$ , умножение функции Вайтмана  $W \in \mathcal{S}'$  на функцию  $\theta$ , вообще говоря, не определено. Используя свойство регулярности, содержащееся в аксиомах гл. 6 (которая сильнее регулярности, выводимой из аксиом Вайтмана), и, в частности, то обстоятельство, что функции Швингера допускают непрерывное продолжение до функционала, определенного на всем пространстве  $\mathcal{P}(R^{dn})$  (включая совпадающие точки), можно показать, что  $\tau \in \mathcal{S}'(R^{dn})$  [Eckmann, Epstein, 1979a]. Однако, как мы сейчас покажем, проще не заниматься этой проблемой, а оставить ее в стороне. Пусть функция  $\alpha \in C_0^\infty$  неотрицательна и интеграл от нее равен 1. Положим

$$T_\alpha \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \theta * \alpha(x_{\pi(1)} - x_{\pi(2)}) \dots \theta * \alpha(x_{\pi(n-1)} - x_{\pi(n)}) \times \\ \times \varphi(x_{\pi(1)}) \dots \varphi(x_{\pi(n)}). \quad (14.1.4)$$

Так как  $\theta * \alpha \in \mathcal{S}$ , то

$$\tau_\alpha = \langle T_\alpha \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \in \mathcal{S}'. \quad (14.1.5)$$

Впоследствии окажется, что в выражение (14.1.3) вместо  $\tau$  можно подставить  $\tau_\alpha$ . Вторую проблему — гладкость в  $p$ -пространстве — уже не обойти. Она эквивалентна определенным свойствам убывания в  $x$ -пространстве и обобщает результаты § 13.5.

Пусть функции  $f_i \in \mathcal{P}(R^d)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , имеют непересекающиеся носители в пространстве скоростей, а функции  $f_i^t$  определены соотношением (13.5.9). Кроме того, предположим, что выполнено условие (13.5.10). Определим

$$X^{\text{out}} = \prod_{i=1}^k \varphi^{\text{out}}(f_i) \Omega, \quad X^{\text{in}} = \prod_{i=m+1}^n \varphi^{\text{in}}(f_i) \Omega, \quad \dot{f}_i^{(t)} = \partial_t f_i^{(t)}.$$

**Теорема 14.1.1.** Пусть носители всех функций  $f_i$  сосредоточены в малой окрестности гипербоида  $-p^2 = m^2$ . Тогда интеграл

$$\int \left( \prod_{i=k+1}^m \dot{f}_i^{(t_i)} dx_i \right) \langle X^{\text{out}}, T_\alpha \varphi(x_{k+1}) \dots \varphi(x_m) X^{\text{in}} \rangle \quad (14.1.6)$$

как функция переменных  $t_{k+1}, \dots, t_m$  принадлежит пространству  $\mathcal{S}(R^{m-k})$ .

*Доказательство.* Производная  $\partial_t f^{(t)}$  имеет тот же вид, что и  $f^{(t)}$ , следовательно, надо доказать лишь быстрое убывание. Идея состоит в том, что блок полевых множителей с наибольшими по величине и почти равными значениями времени

может быть вынесен из-под знака операции хронологического упорядочения. Этот блок множителей при  $t \rightarrow \infty$  сходится к произведению out-полей, действующему на вектор  $X^{\text{out}}$ , как это следует из теорем 13.3.2 и 13.5.4, причем порядок сходимости равен  $O(t^{-N})$ . Так как действие производной  $d_t$  на out-поле дает нуль, то быстрое убывание обеспечивается скоростью сходимости. Аналогично, блок полей с наименьшими по величине и почти равными значениями времени также может быть вынесен за знак операции  $T_\alpha$ , и его применение к  $X^{\text{in}}$  приводит к тому же результату.

В силу симметрии, можно изучать функцию (14.1.6) в секторе

$$t_{k+1} \geq \dots \geq t_m \quad \text{и} \quad t \equiv t_{k+1} \geq |t_m| \quad (14.1.7)$$

Для некоторого  $l$ ,  $k+1 \leq l \leq m$ , в качестве аппроксимации функции (14.1.6) рассмотрим функцию

$$\int \left( \prod_{i=k+1}^m f_i^{(t_i)} dx_i \right) \langle X^{\text{out}}, \varphi(x_{k+1}) \dots \varphi(x_l) T_\alpha (\varphi(x_{l+1}) \dots \varphi(x_m)) X^{\text{in}} \rangle. \quad (14.1.8)$$

В соответствии с теоремой 13.5.4 в секторе (14.1.7) имеет место асимптотика

$$\left\| \prod_{i=k+1}^l \varphi(f_i^{(t_i)}) X^{\text{out}} \right\| = O(t^{-N}),$$

так как  $\varphi_{\text{in/out}}(f_i) = 0$ . Аналогично, для некоторого  $L$ , в силу предложения 13.4.3, верна оценка

$$\left\| \int \left( \prod_{i=l+1}^m f_i^{(t_i)} dx_i \right) T_\alpha (\varphi(x_{l+1}) \dots \varphi(x_m)) X^{\text{in}} \right\| \leq O(t^L),$$

поскольку регуляризованные хронологически упорядоченные произведения можно переписать с помощью обычных произведений с гладкими коэффициентами. Таким образом, выражение (14.1.8) ограничено величиной порядка  $O(t^{-N})$ , где  $N$  произвольно.

Для того чтобы показать, что функции (14.1.6) и (14.1.8) отличаются на величину порядка  $O(t^{-N})$ , выберем  $l$ , зависящее от набора  $\{t_{k+1}, \dots, t_m\}$ , так, что моменты времени  $t_{k+1}, \dots, t_l$  из начального блока почти совпадают, например

$$0 \leq t_i - t_{i+1} \leq \varepsilon t, \quad k+1 \leq i \leq l-1; \quad t_l - t_{l+1} > \varepsilon t. \quad (14.1.9)$$

В определении  $T_\alpha$  рассмотрим сначала перестановки  $\pi \in \mathfrak{S}_{m-k}$ , которые переводят множество индексов  $\{k+1, \dots, l\}$  в себя, т. е. имеют вид  $\pi = (\pi^{l-k}, \pi^{m-l}) \in \mathfrak{S}_{l-k} \times \mathfrak{S}_{m-l}$ . Так как носители функций  $f_i$  в пространстве скоростей не перекрываются, то носители основных функций  $f_i^{(t_i)}$ ,  $k+1 \leq i \leq l$ , с точностью до величин порядка  $O(t^{-N})$  (предложение 13.4.3) пространственно-подобно отделены друг от друга. Поэтому, в силу локальности, вклад перестановки  $\pi$  в сумму  $T_\alpha$  с точностью до  $O(t^{-N})$  не зависит от ее части  $\pi^{l-k}$ . Это означает, что при суммировании по перестановкам  $\pi^{l-k} \in \mathfrak{S}_{l-k}$  начальные  $l-k$  полей могут быть вынесены за знак хронологического упорядочения, а суммирование по перестановкам  $\pi^{m-l} \in \mathfrak{S}_{m-l}$  приводит к хронологическому упорядочению последних  $m-l$  полей. Итак, мы показали, что суммирование по перестановкам  $\pi \in \mathfrak{S}_{l-k} \times \mathfrak{S}_{m-l}$  функции (14.1.6) совпадает с аппроксимацией (14.1.8) с точностью до величины порядка  $O(t^{-N})$ .

Осталось рассмотреть перестановки  $\pi \notin \mathfrak{S}_{l-k} \times \mathfrak{S}_{m-l}$ , т. е. те, которые не сохраняют сектор (14.1.9). Носитель соответствующего слагаемого в  $T_\alpha$  лежит в множестве

$$x_0, \pi(j) - x_0, \pi(j+1) \geq -\text{const} \equiv -\max \{ |s| : s \in \text{supp } \alpha \}.$$

Для любой из рассматриваемых перестановок  $\pi$  найдется такое  $j$ , что  $\pi(j+1) \leq l < \pi(j)$ . Поэтому

$$t_{\pi(j)} - t_{\pi(j+1)} \leq -\varepsilon t \quad \text{и} \quad |x_{0, \pi(j)} - t_{\pi(j)}| + |x_{0, \pi(j+1)} - t_{\pi(j+1)}| \geq \varepsilon t/3.$$

Согласно предложению 13.4.3, вклад этой перестановки в  $T_\alpha$  в формуле (14.1.6) имеет порядок  $O(t^{-N})$ . ■

## 14.2 S-матрица

Формулы редукции Лемана — Симанзика — Циммермана выражают S-матрицу с помощью функций  $\tau$  из § 14.1. Эти формулы являются простым следствием теоремы 14.1.1.

### Предложение 14.2.1.

$$\left\langle S \prod_{i=1}^n \varphi(f_i)^{\text{in}} \Omega, \prod_{j=1}^m \varphi(g_j)^{\text{in}} \Omega \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^n \varphi(f_i)^{\text{out}} \Omega, \prod_{j=1}^m \varphi(g_j)^{\text{in}} \Omega \right\rangle. \quad (14.2.1)$$

*Доказательство.*  $\varphi^{\text{out}} = S\varphi^{\text{in}}S^{-1}$ . ■

**Предложение 14.2.2.** Пусть для функций  $f_i$  выполнено (13.5.10) и их носители в пространстве скоростей не перекрываются. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{X \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|X|} \left\langle \prod_{i \notin X} \varphi(f_i)^{\text{out}}, \prod_{j \in X} \varphi(f_j)^{\text{in}} \right\rangle = \\ = \int \left( \prod_{i=1}^n \partial_{t_i} f_i^{(t_i)}(x_i) \right) \tau_\alpha(x) dx dt. \quad (14.2.2) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Из доказательства теоремы 14.1.1 видно, что интеграл по  $dt$  сходится со скоростью  $O(t^{-N})$ , поэтому доказываемое тождество получается при помощи многократного применения формулы Ньютона — Лейбница. При этом подстановка  $\left|_{t_i = -\infty}^{t_i = +\infty} \right.$  тоже вычисляется с помощью доказательства теоремы 14.1.1. ■

**Замечание.** Простые комбинаторные выкладки, связанные со свободным полем, позволяют избавиться от суммирования по  $X$  в левой части тождества (14.2.2) и с помощью равенства (14.2.1) получить выражение элементов S-матрицы через функции  $\tau$ . Мы опускаем этот шаг и продолжаем вычислять правую часть (14.2.2).

**Предложение 14.2.3.** В условиях предыдущего предложения

$$\int \left( \prod_{j=1}^n \partial_{t_j} f_j^{(t_j)} \right) \tau_\alpha(x) dx dt = \int \prod_{j=1}^n [i\Delta_m * (\square - m^2) f_j(x_j)] \tau_\alpha(x) dx,$$

где  $\tilde{\Delta}_m(p) = \varepsilon(p) \delta(p^2 + m^2)$ .

*Доказательство.* Левую часть равенства можно преобразовать так:

$$\int \prod_{j=1}^n \partial_{t_j} e^{it_j(p_{0,j} - \varepsilon(p_j) \mu(p_j))} \tilde{f}_j(p_j) \tilde{\tau}_\alpha(-p) dp dt = \\ = \int \prod_{j=1}^n \frac{e^{it_j(p_{0,j} - \varepsilon(p_j) \mu(p_j))}}{i(p_{0,j} + \varepsilon(p_j) \mu(p_j))} (p_j^2 + m^2) \tilde{f}_j(p_j) \tilde{\tau}_\alpha(-p) dp dt.$$

После замены переменных  $dp = dp d(p_0 - \varepsilon(p) \mu(p))$  благодаря быстрому убыванию по  $t$  можно поменять порядок интегрирования по  $dt$  и  $dp$ . Это приводит к выражению

$$\int \prod_{j=1}^n (-i\varepsilon(p_j)) \frac{\delta(p_{0,j} - \varepsilon(p_j) \mu(p_j))}{2\mu(p_j)} (p_j^2 + m^2) \tilde{f}_j(p_j) \tilde{\tau}_\alpha(-p) dp = \\ = \int \prod_{j=1}^n (-i\varepsilon(p_j)) \delta(p_j^2 + m^2) (p_j^2 + m^2) \tilde{f}_j(p_j) \tilde{\tau}_\alpha(-p) dp = \\ = \int \prod_{j=1}^n i\Delta_m * (\square - m^2) f(x) \tilde{\tau}_\alpha(x) dx.$$

При этом первое равенство является следствием равенства  $\delta$ -функций в обеих его частях. ■

**Замечание.** Разложение  $S$ -матрицы по теории возмущений является асимптотическим, во всяком случае в сверхперенормируемых теориях это удается установить математически точно. В четырехмерной квантовой электродинамике, например, коэффициенты разложения подсчитаны вплоть до шестого порядка. Здесь требуется аккуратное исследование хронологически упорядоченных произведений. Достаточно показать, что особенности, возникающие при совпадении точек, по крайней мере не выводят нас из класса обобщенных функций, так что функции Швингера принадлежат пространству  $\mathcal{S}'$ . Такого рода оценки следуют из евклидовых аксиом в той форме, в которой они здесь приведены. Обсуждение этих вопросов в более общей постановке см. в работе [Eckmann, Epstein, 1979a].

### 14.3 Перенормировки

Простейшей из перенормировок квантовой теории поля является перенормировка вакуума. В евклидовой формулировке это есть утверждение о том, что мера  $d\mu$  из § 6.1 гл. 11 является вероятностной. Это означает, как и в § 11.1, что выполнено деление на нормирующий множитель  $Z$ . В формализме канонических ансамб-



лей процедуру перенормировки вакуума можно рассматривать как состоящую из двух отдельных этапов. Напишем

$$1 = Z/Z = Z^{-1} \int e^{-\int : P(\varphi(x)) : dx} d\varphi_C = \\ = \int \exp \left[ -\ln Z - \int : P(\varphi(x)) : dx \right] d\varphi_C.$$

В качестве области взаимодействия возьмем прямоугольник  $\Lambda$ . Тогда  $\ln Z$  имеет асимптотическое разложение  $\ln Z = c_1 T + c_2$ , где  $T$  — длина временного интервала, в течение которого происходит взаимодействие, а  $|\Lambda|/T$  фиксировано (см. гл. 11). Коэффициент  $c_1 = \delta E$  можно интерпретировать как аддитивную константу, дающую вклад в гамильтониан  $H$ . В свою очередь  $e^{-c_2}$  — это мультипликативная константа, с помощью которой норма вакуумного состояния  $\Omega \in \mathcal{H}$  приводится к 1.

На уровне формальной теории возмущений перенормировки вакуума выражаются в том, что, как объяснено в § 8.4, только связные диаграммы дают вклад в функции Швингера. Поэтому перенормировка функций Швингера и  $S$ -матрицы, основанная на теории возмущений, не использует явно перенормировку вакуума. Из определения

$$\delta E = T^{-1} \ln Z + o(1) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty$$

можно вывести разложение по теории возмущений для величины  $\delta E$ . В случае  $P = \lambda \varphi^4$  первые члены разложения  $\delta E$  по степеням  $\lambda$  изображены на рис. 14.1.

$$\delta E = \lambda^2 \left( \text{diagram 1} \right) - \lambda^3 \left( \text{diagram 2} \right) + \dots$$

Рис. 14.1. Разложение  $\delta E$  до третьего порядка в случае полинома взаимодействия  $P(\varphi) = \lambda \varphi^4$ .

Постоянную  $c_2$  (которую будем называть перенормировочной константой вакуумной волновой функции) тоже можно с помощью теории возмущений представить в виде суммы по связным диаграммам. Это те же диаграммы, что и для разложения величины  $\delta E$ , но с другими числовыми коэффициентами. Например, разложение  $\delta E$  имеет только одну вершину с  $t = 0$ , что позволяет выполнить деление на  $T$ . В силу викава упорядочения вклады первого порядка по  $\lambda$  как в  $\delta E$ , так и в  $c_2$  отсутствуют.

Следующими по сложности являются перенормировки массы и величины поля. Эти перенормировки определяются с помощью двухточечных функций, которые мы исследуем с использованием уравнения Дайсона и его ядра — соответствующим образом определенным оператором собственной энергии  $\Sigma$ . Переходя к пере-

нормировке массы, мы предположим, что масса частиц  $m$  задана с самого начала, например измерена, мы же хотим найти такие полиномы взаимодействия  $P$ , что соответствующие им поля имеют частицы массы  $m$ . Оказывается, такое ограничение (фиксирована масса частиц) выделяет в пространстве всех полиномов подмногообразие коразмерности 1. (Конечно, можно потребовать, чтобы существовало  $n > 1$  частиц с фиксированной массой  $m$  при условии, что кратность собственного значения  $m$  оператора массы больше единицы. В этом случае полноты  $P_{\text{перен}}$  составляют подмногообразие коразмерности  $n$ .) Ради простоты изучим случай  $n = 1$ . Перенормировкой массы является любое отображение

$$P \rightarrow P_{\text{перен}} = P + \delta P$$

пространства всех полиномов в подмногообразии полиномов, порождающих поле с частицами массы  $m$ , удовлетворяющее условию  $P_{\text{перен}} = P$ , если поле, соответствующее  $P$ , имеет частицы массы  $m$ .

Такое определение неоднозначно и является слишком общим. В области малых констант связи однозначное определение получается с помощью требования

$$\delta P(\varphi) = \frac{1}{2} \delta m^2 \varphi^2,$$

где  $\delta m^2$  является функцией от  $m$  и коэффициентов полинома  $P$ , нахождение которой и составляет проблему перенормировки.

Пусть  $\widetilde{S}^{(2)T}$  обозначает усеченную двухточечную функцию Швингера в (евклидовом) импульсном пространстве, а  $\widetilde{S}_0^{(2)T}$  аналогичную функцию свободного поля с той же массой  $m$ . Тогда

$$\widetilde{S}_0^{(2)T} = (p^2 + m^2)^{-1} \quad (14.3.1)$$

и, согласно спектральной формуле Лемана,

$$\widetilde{S}^{(2)T} = \frac{Z}{p^2 + m^2} + \int_M^\infty \frac{d\nu(a)}{p^2 + a^2}. \quad (14.3.2)$$

Здесь мы предполагаем, что одночастичный гиперболоид изолирован, так что  $M > m$ . Более того,  $Z$  (константа перенормировки величины поля) определяется из формулы (14.3.2). (Константа  $Z$  не имеет никакого отношения к статистической сумме  $Z$ , связанной с перенормировкой вакуума.) Следующее уравнение называется уравнением Дайсона:

$$\widetilde{S}^{(2)T} = \widetilde{S}_0^{(2)T} - \widetilde{S}_0^{(2)T} \hat{\Sigma} \widetilde{S}^{(2)T} \quad (14.3.3a)$$

и служит определением оператора  $\Sigma$ . Это есть в точности резольвентное уравнение, и его можно переписать в виде

$$-\tilde{\Gamma}^{(2)} \equiv (S^{(2)T})^{-1} = (\tilde{S}_0^{(2)})^{-1} + \tilde{\Sigma}. \quad (14.3.3b)$$

При этом в импульсном пространстве взятие обратного и умножение являются поточечными операциями.

Продолжив аналитически по  $p^2$  функции  $S_0^{(2)T}$  и  $\tilde{S}^{(2)T}$  вплоть до полюса в точке  $p^2 = -m^2$ , мы увидим, что из (14.3.3) вытекает условие

$$\tilde{\Sigma}|_{p^2=-m^2} = 0. \quad (14.3.4)$$

Именно это условие выделяет подмногообразие полиномов, приводящих к частицам массы  $m$ .

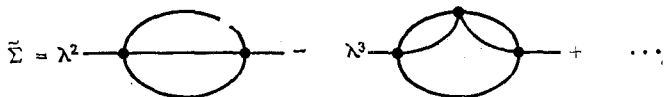


Рис. 14.2. Разложение  $\tilde{\Sigma}$  для  $P(\varphi) = \lambda\varphi^4$  вплоть до третьего порядка.

На языке диаграмм функция  $\tilde{\Sigma}$  представляется в виде суммы диаграмм с двумя внешними отростками, причем каждая диаграмма относительно этих отростков одночастично-неприводима. Последнее означает, что такая диаграмма связна, а стирание одного ребра не может разбить ее на две компоненты, каждая из которых содержит один из двух внешних отростков. Примеры таких диаграмм см. на рис. 14.2.

Мы разложим  $\tilde{\Sigma}|_{p^2=-m^2}$  в формальный степенной ряд по параметрам  $a_j$  — коэффициентам полинома  $P(\varphi) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi^j$ . Тогда  $a_2 \equiv \frac{1}{2} \delta m^2$  и

$$\tilde{\Sigma}|_{p^2=-m^2} = \delta m^2 + O(a_1^2, a_3^2, \dots, a_n^2). \quad (14.3.5)$$

Эта формула вместе с соотношением (14.3.4) задает функцию  $\delta m^2$  как формальный ряд по коэффициентам  $a_1, \dots, a_n$ , который и является определением перенормировки массы с помощью теории возмущений.

Сравнивая выражения (14.3.2) и (14.3.3), мы получим также, что

$$Z^{-1} - 1 = \partial \tilde{\Sigma} / \partial p^2 |_{p^2=-m^2} \quad (14.3.6)$$

поэтому функция  $\tilde{\Sigma}$  заодно определяет перенормировочную константу  $Z$  для перенормировки величины поля. Условимся писать

$$\varphi_{\text{перен}} = Z^{-1/2}\varphi, \tag{14.3.7}$$

так что двухточечная функция Швингера, выраженная через перенормированное поле  $\varphi_{\text{перен}}$ , имеет полюс в точке  $p^2 = -m^2$  с вычетом 1. С помощью уравнения Дайсона в форме (14.3.3b) можно доказать, что при малых константах связи одночастичный гиперболоид изолирован (например, что  $M > m$  в (14.3.2)). Пусть  $S_0$  имеет голую массу  $m_0$ . Нам нужно знать, что при  $M^2 > m^2$  функция  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  аналитична в полосе  $\text{Re } p^2 \geq -M^2$ , а функция  $\tilde{\Sigma}$  мала при малых константах связи. После этого, применив теорему Руше, получим, что функция  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  от переменной  $p^2$  имеет в окрестности точки  $-m_0^2$  простой нуль. Этот нуль определяет (физическую) массу  $m$ . С другой стороны, этот факт следует из монотонности функции  $\tilde{\Gamma}$  [Вигпар, 1977].

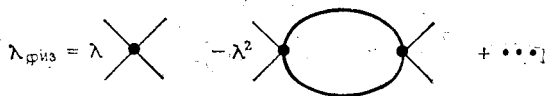


Рис. 14.3. Разложение  $\lambda_{\text{физ}}$  до второго порядка  $\lambda\varphi^4$ -модели.

**Таблица 14.1.** Расходимости перенормировок на малых расстояниях как функций параметра  $\kappa$  ультрафиолетового обрезания

	$: P(\varphi) :_2$	Юкава <sub>2</sub>	$\varphi_3^4$	$\varphi_4^4$
Вакуумная энергия	конечная	$(\ln \kappa)^2$	$\kappa^2$	$\kappa^4$
Перенормировка вакуумной волновой функции	конечная	конечная	$\ln \kappa$	$\kappa^3$
Масса	конечная	$\ln \kappa$	$\ln \kappa$	$\kappa^2$
$Z$ =перенормировка величины поля	конечная	конечная	конечная	$\ln \kappa$
Заряд	конечная	конечная	конечная	$\ln \kappa$

Последней перенормировкой является перенормировка заряда. Ее определение можно ввести многими способами с помощью тех или иных требований. В модели  $\lambda\varphi^4$  во все определения входит связная четырехточечная функция, так как последняя, в силу результатов § 14.2, задает процесс рассеяния двух частиц. По любому из этих определений физический заряд  $\lambda_{\text{физ}}$  с помощью теории возмущений представляется в виде степенного ряда по  $\lambda$ , коэффициенты которого выражаются с помощью фейнмановых диаграмм (рис. 14.3). Числовые значения коэффициентов, соот-

ветствующих диаграммам, зависят от способа перенормировки. Перенормировка заряда — это всего лишь обращение функционального соответствия  $\lambda_{\text{физ}} = \lambda_{\text{физ}}(\lambda)$ , так что выражение для  $\lambda = \lambda(\lambda_{\text{физ}})$  в виде ряда по  $\lambda_{\text{физ}}$  подставляется вместо  $\lambda$  в соответствующий лагранжиан. При одном из способов перенормировки в качестве  $\lambda_{\text{физ}}$  выбирается, например, значение четырехточечной урезанной связной функции перенормированного поля  $\Phi_{\text{перен}}$  при значении импульса  $\mathbf{p} = 0$ . Урезание здесь означает, что, как и в предложении 14.2.3, оператор  $-\square + m^2$  применяется к каждой переменной.

Результаты этого параграфа представлены в таблице 14.1.

#### 14.4 Ядро Бете — Солпитера

Уравнение Бете — Солпитера применяется для изучения четырехточечной, а в общем случае и  $n$ -точечной функции при ограниченных  $n$ ,  $n \leq N$ . Это уравнение содержит новую неизвестную  $K$  — ядро Бете — Солпитера (и, таким образом, может считаться определением  $K$ ). В предположении, что ядро  $K$  аналитично в пространстве энергии-импульса, уравнение Бете — Солпитера можно применить к изучению спектра масс и состояний рассеяния с низкой энергией, которые имеют вид полиномов ограниченной степени

$$\varphi(x_1) \dots \varphi(x_j)\Omega, \quad j \leq J \quad (\text{например, } j = 2). \quad (14.4.1)$$

Этот метод применим к задаче о связанных состояниях и резонансах, а также к вопросам асимптотической полноты при низких энергиях. Требуемые аналитические свойства ядра  $K$  могут быть при малых константах доказаны для сверхперенормируемых моделей теории поля. Результаты, установленные к настоящему времени, приводят к ожидаемой картине, но все это еще не доказано с нужной степенью общности. Некоторые успехи достигнуты и в реализации обратной программы, т. е. установления аналитических свойств ядра  $K$  исходя из предполагаемых свойств спектра масс [Bros, 1970], [Bros, LaSalle, 1977].

При  $n = 2$  уравнение Бете — Солпитера — это уравнение Дайсона. При  $n = 4$  уравнение Бете — Солпитера тоже имеет резольвентную структуру

$$R = R_0 - R_0 K R. \quad (14.4.2)$$

Для того чтобы упростить изложение, рассмотрим теорию с четным полиномом взаимодействия, в которой функции Швингера нечетного порядка равны нулю:  $S^{(2j+1)} = 0$ . Мы будем работать в евклидовом пространстве-времени. Оператор  $R_0$ , который играет роль «свободной резольвенты», по определению равен

$$R_0(x, y) = S^{(2)T}(x_1 - y_1) S^{(2)T}(x_2 - y_2) + \\ + S^{(2)T}(x_1 - y_2) S^{(2)T}(x_2 - y_1), \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2). \quad (14.4.3)$$

Кроме того,

$$R(x, y) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2), (1 - P_\Omega) \varphi(y_1) \varphi(y_2) \rangle = S^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) - S^{(2)}(x_1 - x_2) S^{(2)}(y_1 - y_2), \quad (14.4.4)$$

где  $P_\Omega$  — ортогональная проекция в евклидовом гильбертовом пространстве на подпространство, порожденное вакуумным вектором  $\Omega \equiv 1$ . Заметим, что имеются как обобщения уравнения (14.4.2), так и альтернативные ему уравнения, но мы здесь не обсуждаем эти вопросы.

В теории возмущений ядро  $K$  определяется как сумма по всевозможным связным диаграммам с четырьмя внешними (урезанными) отростками, неприводимым относительно двухчастичного канала. Чтобы объяснить последний термин, в каждой диаграмме, дающей вклад в  $K$ , сопоставим двум из четырех внешних отростков

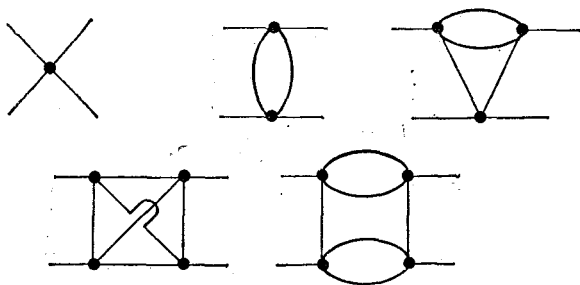


Рис. 14.4. Диаграммы для  $K$  в модели со взаимодействием  $P(\varphi) = \varphi^4$ .

стков переменные  $x$  (out-отростки), а двум остальным переменные  $y$  (in-отростки). Тогда неприводимость относительно двухчастичного канала означает, что после стирания двух внутренних ребер диаграммы каждая связная компонента вновь получившейся диаграммы должна содержать по крайней мере один in-отросток и один out-отросток (рис. 14.4). При этом компоненты, состоящие только из одного внешнего отростка, в этом определении не учитываются.

Вне рамок теории возмущений ядро  $K$  определяется уравнением (14.4.2) [Glimm, Jaffe, 1975e]. Однако, пока нет никакой информации о ядре  $K$ , полученной из других источников, этот факт не представляет особого интереса. Для анализа функций  $K$  и  $R$  обсудим несколько общих аксиом. Мы будем различать частные утверждения, которые можно доказать для малых констант связи и которые служат для обоснования вычислений по теории возмущений, и более общие утверждения, которые должны быть справедливы для всех некритических теорий.

**BS 1** (Полнота полиномиальных состояний). Для фиксированного значения энергии  $E$  существует такое  $J = J_E$ , что состояния с энер-

гией  $\leq E$  не ортогональны семейству (14.4.1). В формуле (14.4.1)  $\Omega \equiv 1$  является евклидовым вакуумом, т. е.  $\Omega \in \mathcal{E}$ , а  $x_v \in R^d$  — точка евклидова пространства-времени, причем координата времени  $x_{d,v}$  неотрицательна. Евклидов вектор (14.4.1) в пространстве  $\mathcal{E}$  проектируется в физическое гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ .

Эта аксиома была проверена при малых константах связи в модели  $\lambda P(\varphi_2)$  [Glimm, Jaffe, Spencer, 1974]. Здесь, правда, мы должны взять константу  $\lambda = \lambda(E)$  достаточно малой. В частности, при анализе связанных состояний вблизи двухчастичного порога мы должны положить  $E = 4m - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , и рассмотреть векторы с  $J = 2$  в подпространстве четных состояний.

**BS 2** (Решение одночастичной задачи). Самое слабое допущение — наличие изолированного одночастичного спектра. Более сильное — ограниченность функций  $\tilde{\Sigma}(p)$  и ее аналитичность в областях (в евклидовом пространстве)

$$\text{для четных теорий: } p^2 > -(3m)^2 + \varepsilon \quad (14.4.5a)$$

и

$$\text{для нечетных теорий: } p^2 > -(2m)^2 + \varepsilon. \quad (14.4.5b)$$

Аналитичность  $\tilde{\Sigma}(p)$  в областях (14.4.5) доказана для модели  $\lambda p(\varphi)_2$  при малой константе связи [Spencer, 1975]. Однако этой области аналитичности соответствуют малые значения энергии связи, которые в случае полей общего вида могут оказаться и большими.

**BS 3** (Аналитичность  $K$ ). Самое слабое допущение состоит в том, что для фиксированного  $E$  достаточно сложные ядра  $K$  (при больших  $n$ ) должны быть аналитическими в области  $p^2 \geq -E$ .

При  $n = 2$  положим

$$x_{\text{tot}} = (x_1 + x_2)/2, \quad x_{\text{rel}} = (x_1 - x_2)/2$$

и аналогично определим  $y_{\text{tot}}$ ,  $y_{\text{rel}}$ . Пусть  $p$  и  $q$  обозначают евклидовы импульсы, сопряженные соответственно к  $x$  и  $y$ . Тогда  $p_1 + p_2 = p_{\text{tot}}$  и  $p_1 - p_2 = p_{\text{rel}}$  сопряжены к  $x_{\text{tot}}$  и  $x_{\text{rel}}$ . То же самое верно для  $q_{\text{tot}}$  и  $q_{\text{rel}}$ . В силу трансляционной инвариантности, ядро  $K = K(x, y)$  является функцией только от разности аргументов. Это означает, что ядро оператора  $K$  имеет преобразование Фурье вида

$$\delta(p_{\text{tot}} - q_{\text{tot}}) \tilde{K}(p_{\text{tot}}, p_{\text{rel}}, q_{\text{rel}}).$$

В подпространстве, в котором импульс принимает фиксированное значение  $p_{\text{tot}}$ , функция  $\tilde{K}$  является ядром оператора из пространства функций от переменной  $q_{\text{rel}}$  в пространство функций от  $p_{\text{rel}}$ . В силу лоренц-инвариантности, без ограничения общности можно положить  $p_{\text{tot}} = 0$ . Определим  $E = ip_{\text{tot}}^0$ . Предполагается, что в области

$$|E| \leq 4m - \varepsilon, \quad |\text{Im } p_{\text{rel}}| \leq m - \varepsilon, \quad |\text{Im } q_{\text{rel}}| \leq m - \varepsilon \quad (14.4.6)$$

функция  $R$  аналитична и ограничена. При малой константе связи в модели  $P(\varphi)_2$  эта ограниченность была установлена для чуть меньших областей [Spencer, 1975]. При этом  $\sup|\tilde{K}|$  при  $\lambda \rightarrow 0$  является величиной порядка  $O(\lambda)$ .

Резюмируем известные результаты.

*I. Компактность оператора  $K$ , ограниченность  $R_0$  и  $R$ .* Ниже мы введем пространства Пэли — Винера — Соболева  $A_\delta$ . При подходящем выборе пары пространств из семейства  $A_\delta$  операторы  $R_0$ ,  $R$  и  $K$  действуют из одного такого пространства в другое, причем  $R_0$  и  $R$  ограничены, а  $K$  компактен.

*II. Продолжение на другой лист.* Функция  $R_0$  аналитична всюду в области (14.4.6), кроме разрывов с началом в точках  $E = \pm 2m$ . Эти точки являются для  $R_0$  точками ветвления второго порядка, и функция  $R_0$  аналитически продолжается на двулистную риманову поверхность при обходе вокруг точек ветвления. Из теории Фредгольма следует, что функция  $R$  также имеет мероморфное продолжение на второй лист римановой поверхности функции  $R_0$ . Все полюсы функции  $R$  на первом листе лежат на вещественной осн  $E$  и совпадают с точечным спектром массового оператора (энергии связанных состояний). Полюсы функции  $R$  на втором листе интерпретируются как резонансы.

*III. Спектральные свойства.* Для четной  $P(\varphi)_2$ -теории с малой константой связи существует не более одного связанного состояния. В этой модели известна асимптотическая полнота при  $E \leq 3m - \varepsilon$  и получена матрица рассеяния для состояний: частица вместе со связанным состоянием (при всех значениях энергии). Для этой модели ряды теории возмущений являются асимптотическими.

Пространства  $A_\delta$  состоят из функций от двух переменных:  $x_{\text{rel}} = x_{\text{rel}}^0, \mathbf{x}_{\text{rel}}$ . Здесь  $\delta$  обозначает мультииндекс

$$\delta = (\delta_1, \delta_2) = (\delta_1^0, \delta_1, \delta_2^0, \delta_2),$$

а  $\delta$  — вещественный параметр (т. е. скаляр, а не вектор). Простейшее из этих пространств  $A_0 = L_2^{\text{sym}}$  является подпространством в  $L_2$ , состоящим из функций, инвариантных при замене  $x_{\text{rel}} \rightarrow -x_{\text{rel}}$ . Пространство  $A_{\delta_1, 0}$  — это соболевское пространство

$$A_{\delta_1, 0} = \left\{ f: \left( -\partial_{x_0, \text{rel}}^2 + (5m)^2 \right)^{\delta_1^0/2} f \in A_0, \left( -\partial_{\mathbf{x}_{\text{rel}}}^2 + (5m)^2 \right)^{\delta_2/2} f \in A_0 \right\}.$$

Наконец,

$$A_\delta = \left\{ f: e^{\delta_1^0(x_{0, \text{rel}}^2)^{1/2}} e^{\delta_2(x_{\text{rel}}^2)^{1/2}} f \in A_{\delta_1, 0} \right\}.$$

Простейшие свойства этих пространств изложены в работе [Glimm, Jaffe, 1979c]. (Приведенный там анализ функций, зависящих только от  $x_{\text{rel}}$ , легко распространяется и на функции от  $x_{0, \text{rel}}, \mathbf{x}_{\text{rel}}.$ )



При  $\delta_2 > 0$  пространство  $A_\delta$  есть пространство фурье-образов функций, аналитических в полосе  $|\text{Im } p_{0, \text{rel}}| < \delta_2^0$ ,  $|\text{Im } p_{\text{rel}}| < \delta_2$ , а граничные значения на краях полосы после умножения на величину

$$(p_{0, \text{rel}}^2 + (5m)^2)^{\delta_1^0/2} + (p_{\text{rel}}^2 + (5m)^2)^{\delta_1/2}$$

принадлежат пространству  $L_2$ . Если  $\gamma \leq \delta$ , то вложение  $I(\delta, \gamma): A_\delta \rightarrow A_\gamma$  ограничено, а если  $\gamma < \delta$  (это означает, что для всех четырех компонент  $\gamma_1^0 < \delta_1^0$  и т. д.), то вложение  $I(\delta, \gamma)$  компактно.

Рассмотрим оператор  $K$  как отображение пространств  $A_\delta \rightarrow A_\gamma$ . В силу аксиомы аналитичности BS 3, действие  $K$  увеличивает значение  $\delta_2$ , а так как ядро  $K$  всего лишь ограничено (а не лежит, например, в  $L_2$ ), то  $K$  уменьшает величину  $\delta_1$ . В частности, если выбрать значения  $\gamma, \delta$  так, как это указано ниже, то  $K$  будет компактным оператором и даже оператором Гильберта — Шмидта:

$$\begin{aligned} \delta_1^0, \delta_1 &> 1, & \gamma_1^0, \gamma_1 &< -1, \\ \delta_2^0, \delta_2 &> -m, & \gamma_2^0, \gamma_2 &< m. \end{aligned} \quad (14.4.7)$$

Оператор  $R_0$  как отображение пространств  $A_\delta \rightarrow A_\gamma$  оказывает противоположное действие на индексы  $\delta$ . Как показано в § 14.3, можно написать  $S^{(2)T} = ZS_0^{(2)T} +$  остаточный член, причем остаточный член, рассматриваемый как оператор, действующий на функции в импульсном пространстве, не нарушает их аналитичности и сохраняет степенное убывание. Аналогично,  $R_0$ , рассматриваемый как оператор умножения в импульсном пространстве, может быть записан в виде

$$\frac{Z}{p_1^2 + m^2} \frac{Z}{p_2^2 + m^2} + \text{остаточный член}, \quad (14.4.8)$$

где остаточный член может лишь увеличить индексы  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Все необходимые свойства остаточного члена вытекают из предположения BS 3 об аналитичности и ограниченности. Первое слагаемое в сумме (14.4.8) перепишем в виде

$$R_{00} = \frac{16Z^2}{[(p_{0, \text{rel}} - iE)^2 + p_{\text{rel}}^2 + 4m^2][(p_{0, \text{rel}} + iE)^2 + p_{\text{rel}}^2 + 4m^2]}.$$

Оператор  $A_\gamma^*$ , где \* понимается как сопряжение относительно скалярного произведения в  $L_2$ , оказывается равным  $A_{-\gamma}$ :  $A_\gamma^* = A_{-\gamma}$ . Поэтому мы рассматриваем  $R_{00}$  как ограниченную билинейную форму на тензорном произведении  $A_{-\gamma} \times A_\delta$ . Поскольку пространство  $A_\delta$  определяется с помощью симметричного пространства

$L_2^{\text{sym}}$ , верно равенство  $\tilde{g}(p) = -\tilde{g}(p) \in A_\delta$ , причем, скалярное произведение

$$\langle \tilde{g}, R_{00}\tilde{f} \rangle = \int \tilde{g}(p_{\text{rel}}) R_{00}(p_{\text{rel}}) \tilde{f}(p_{\text{rel}}) dp_{\text{rel}}$$

имеет аналитическое продолжение в полосу (по переменной  $E$ ). Итак, мы считаем, что  $g \in A_{-\gamma}$ ,  $f \in A_\delta$  и  $\delta_2^0, \delta_2 > m - \varepsilon$ ,  $\gamma_2^0, \gamma_2 < -m + \varepsilon$ .

Интеграл по  $dp_{0, \text{rel}}$  может быть вычислен как интеграл по верхней границе полосы плюс вычет в полюсе, лежащем в верхней части полосы. Первое из этих двух слагаемых ограничено и аналитично по  $E$  (вне разреза) при условии, что

$$\delta_1^0, \delta_1 \geq -2, \quad \gamma_1^0, \gamma_1 \leq 2.$$

Второй член аналитичен при всех  $\delta_1^0, \gamma_1^0$  и ограничен при

$$\delta_1 \geq -3/2, \quad \gamma_1 \leq 3/2.$$

При этом для таких значений  $\delta, \gamma$  второе слагаемое допускает аналитическое продолжение по переменной  $\xi = (4m^2 - E^2)^{1/2}$  через разрез.

Объединяя все полученные оценки, находим, что ряд Неймана

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} (-R_0 K)^n R_0$$

сходится и при

$$-3/2 \leq \delta_1^0, \delta_1 < -1, \quad 0 < \delta_2^0, \delta_2 < m - \varepsilon$$

определяет ограниченный оператор из  $A_\delta$  в  $A_\delta$ . Кроме того, при малых  $\lambda$  этот оператор допускает мероморфное продолжение по переменной  $\xi$  как ограниченный оператор из  $A_\delta$  в  $A_\delta$ .

Дальнейший анализ спектра и рассеяния следует той же общей схеме, что и в случае потенциального рассеяния (см. [Spencer, Zirilli, 1976], [Dimock, Eckmann, 1976, 1977]). Регуляризации неприводимых ядер Бете — Солпитера высших порядков изучаются в работе [Combescure, Dunlop, 1979].

## Глава 15

### Магнитный момент электрона

#### 15.1 Классический магнитный момент

Рассмотрим классический магнит  $m$ , помещенный во внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Такое поле не создает силы, действующей на  $m$  (т. е. центр масс остается неподвижным), однако маг-

нит будет стремиться повернуться вдоль направления вектора  $\mathbf{B}$ . Вращающий момент, действующий на  $m$ , линейно зависит от  $\mathbf{B}$  (предполагается, что  $\mathbf{B}$  не изменяет намагниченности  $m$ ). Таким образом,

$$\text{вращающий момент} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (15.1.1)$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  — вектор, направленный вдоль оси  $m$ . Вектор  $\boldsymbol{\mu}$  является магнитным моментом магнита  $m$ . Уравнение (15.1.1) эквивалентно утверждению о том, что потенциальная энергия магнита  $m$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$  равна  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ . Энергия достигает минимума при совпадении направлений векторов  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\mathbf{B}$ .

Простой пример, когда возникает магнитный момент, — это классический контур с током. Пусть  $l$  обозначает круговой контур радиуса  $r$ , по которому течет ток  $\mathbf{J}$  (его размерность: заряд/время), см. рис. 15.1. Представим себе ток  $\mathbf{J}$  в виде плотности заряда  $\rho$  (заряд/см), движущейся по контуру  $l$  со скоростью  $\mathbf{v}$  (см/с), т. е.

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \quad (15.1.2)$$

Определим момент  $\boldsymbol{\mu}$  тока  $\mathbf{J}$  относительно центра контура:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int_l \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \frac{\rho v}{c} (\pi r^2) \mathbf{n} = \frac{1}{c} (\text{ток}) (\text{площадь}) \mathbf{n}. \quad (15.1.3)$$

Здесь  $c$  — скорость света, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормален к плоскости контура (ориентация определяется направлением тока).

В общем случае магнитный момент плоского (но не обязательно кругового) контура равен

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int_l \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \frac{1}{c} (\text{ток}) (\text{площадь}) \mathbf{n}, \quad (15.1.4)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к плоскости контура.

Для оправдания такого определения магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  покажем, что вращающий момент, действующий на круговой контур, определяется выражением (15.1.1). Силу  $\mathbf{F}$ , действующую на единичный заряд, можно найти по формуле Лоренца (при нулевом электрическом поле)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (15.1.5)$$

По определению, вращающий момент  $\mathbf{T}$  равен

$$\mathbf{T} = \int_l \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \int_l \mathbf{r} \times \frac{\rho}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (15.1.6)$$

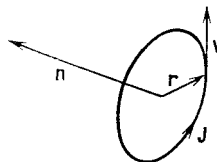


Рис. 15.1. Круговой контур с током  $l$ .

Введем в качестве параметра на контуре угол  $\theta \in [0, 2\pi)$ , причем углу  $\theta = 0$  пусть отвечает направление вектора  $\mathbf{B}_l$  — проекции  $\mathbf{B}$  на плоскость контура  $l$ . Поскольку  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ ,

$$\mathbf{T} = \frac{\rho}{c} \int_0^{2\pi} \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) r d\theta = \frac{\rho}{c} \int_0^{2\pi} \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_l) r d\theta. \quad (15.1.7)$$

Пусть 1 и 2 обозначают направления в плоскости контура, соответственно параллельное и перпендикулярное к  $B_l$ . Тогда

$$v_1 = -v \sin \theta, \quad v_2 = v \cos \theta, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_l = r B_l \cos \theta.$$

В силу тождества  $\int \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$ , мы получаем, что  $T_1 = 0$  и

$$\mathbf{T} = (0, (c^{-1} \rho v) (\pi r^2) B_l, 0) = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

Таким образом, справедлива формула (15.1.1).

Предположим далее, что плотность заряда  $\rho$  пропорциональна плотности массы, т. е.

$$\rho = (e/m) \rho_{\text{mass}}, \quad (15.1.8)$$

где  $e/m$  — фиксированное отношение заряда к массе. Тогда

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} = \frac{e}{2mc} \int \mathbf{r} \times \rho_{\text{mass}} \mathbf{v} = \left( \frac{e}{2mc} \right) \mathbf{L} = g \mu_B \mathbf{L}, \quad (15.1.9)$$

где  $\mathbf{L}$  обозначает угловой момент зарядов в контуре с током. Коэффициент пропорциональности между магнитным моментом распределения зарядов и их угловым моментом называется гиромагнитным отношением и обозначается  $g$ . Единицей магнитного момента является магнетон Бора<sup>1)</sup>, равный, по определению,

$$\mu_B = e/2mc, \quad (15.1.10)$$

где  $e/m$  — отношение заряда электрона к его массе.

Магнитный момент электрона равен  $g \mu_B$ . Согласно классическому подсчету, приведенному выше,  $g = 1$ . Для диракова электрона, рассматриваемого в § 15.3,  $g = 2$ . Аномальный магнитный момент электрона, учитывающий полевые эффекты, приводит к значению  $g = 2,002$ ; см. § 15.4.

## 15.2 Тонкая структура атома водорода и уравнение Дирака

При пренебрежении спином электрона  $n$ -й уровень энергии атома водорода имеет кратность  $n^2$ ; см. § 1.7. Рассмотрим первое возбужденное состояние  $n = 2$  с кратностью вырождения  $n^2 = 4$ . С учетом двух возможных спиновых состояний электрона и двух спиновых состояний протона вырождение имеет кратность  $4n^2 = 16$ . Спином соответствуют магнитные моменты. Магнитные моменты

<sup>1)</sup> См. § 15.3. — Прим. перев.

взаимодействуют между собой, что приводит к изменению гамильтониана, изученного в § 1.7. Точный вид возмущающей добавки приводится ниже; он выведен в § 15.3 на основе нерелятивистского предельного перехода в уравнении Дирака. Этот дополнительный член, называемый спин-орбитальным взаимодействием, изменяет спектр гамильтониана  $H$  и частично разрушает  $4n^2$ -кратное вырождение  $n$ -го уровня энергии. Такое расщепление спектра, связанное со спином и магнитным моментом электрона, называется тонкой структурой. Ему и посвящен этот параграф.

Напомним, что в соответствии с § 1.3 спиновое пространство  $S$ , отвечающее значению спина электрона  $s = 1/2$ , есть  $S = C^{2s+1} = C^2$ . В этом пространстве угловой момент определяется двумерным представлением  $\mathcal{D}^{(1/2)}$  группы  $SU(2)$  (накрывающей группы для группы пространственных вращений  $SO(3)$ ). Соответствующее гильбертово пространство (без учета движения центра масс) есть  $\mathcal{H} = L_2(R^3) \otimes S$ , и полный угловой момент определяется представлением  $SU(2)$  в  $\mathcal{H}$ .

В частности, представление  $SU(2)$  в  $\mathcal{H}_n \otimes S$  можно разложить с помощью формул Клебша — Гордана:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(l)} \otimes \mathcal{D}^{(1/2)} &= \mathcal{D}^{(l+1/2)} \oplus \mathcal{D}^{(l-1/2)} \quad (l \neq 0), \\ \mathcal{D}^{(0)} \otimes \mathcal{D}^{(1/2)} &= \mathcal{D}^{(1/2)}. \end{aligned} \quad (15.2.1)$$

Таким образом, разложение (1.7.10) заменяется разложением

$$\mathcal{H}_n \otimes S = \mathcal{D}^{(2n-1)/2} \bigoplus_{l=1}^{n-1} 2\mathcal{D}^{(2l-1)/2}. \quad (15.2.2)$$

Можно интерпретировать (15.2.2) как утверждение о том, что электрон в атоме водорода имеет полный угловой момент  $\mathbf{J}\hbar$ , где  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Здесь  $\mathbf{L}$  — «орбитальный» угловой момент, связанный с вращением вокруг ядра, а  $\mathbf{S}$  — внутренний спин  $1/2$ . Неприводимое представление в разложении (15.2.2), отвечающее полному угловому моменту  $j$ , возникает из комбинации представлений, отвечающих спину  $1/2$  и орбитальному угловому моменту  $l = j \pm 1/2$ .

Тонкая структура атома водорода может быть получена путем включения в гамильтониан  $H$  возмущения

$$W(x_1 - x_2) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (15.2.3)$$

описывающего взаимодействие орбитального момента и внутреннего спина электрона (вид  $W$  можно найти из взаимодействия магнитного момента движущегося электрона с кулоновым полем; см. [Ваун, 1969]). Разложение (15.2.2) объясняет появление  $n$  собственных значений в  $\mathcal{H}_n \otimes S$ , так же как и их кратности. Заметим, что  $\dim \mathcal{H}_n \otimes S = 2n^2$ . Вычисление в первом порядке теории возмущений сдвига энергии, связанного с членом (15.2.3), позволяет приближенно определить тонкую структуру.

Дирак предложил лоренц-инвариантное уравнение для волновой функции электрона, принимающей значения (в случае одной частицы) в пространстве  $L_2(R^3) \otimes \{S \oplus S\}$ . (Заметим, что пространство  $S \oplus S$  возникает естественным образом при разложении представления группы Лоренца  $\mathcal{D}^{(1/2, 0)} \oplus \mathcal{D}^{(0, 1/2)}$  со спином  $1/2$  на компоненты, неприводимые относительно собственной группы Лоренца (не содержащей отражений).) Гамильтониан Дирака для частицы массы  $\mu$  в кулоновом поле  $-e^2/|x|$  есть дифференциальный оператор первого порядка вида

$$H = \alpha_4 \mu - c \sum_{j=1}^3 \alpha_j \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e^2}{|x|}. \quad (15.2.4)$$

Здесь  $\alpha_i$  — постоянные  $4 \times 4$ -матрицы, действующие в  $S \oplus S$ . Кроме того, матрицы  $\alpha$  задают представление клиффордовой алгебры

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I. \quad (15.2.5)$$

Собственные значения оператора (15.2.4) могут быть найдены точно. Они имеют вид

$$E_{n,j} = \mu \left\{ 1 + \left( \frac{\alpha}{(n-j-1/2) + \sqrt{(j+1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad (15.2.6)$$

где  $\alpha = e^2/(\hbar c)$  — постоянная тонкой структуры; см. (1.7.2). В (15.2.6)  $n = 1, 2, \dots$  — главное квантовое число, а  $j = 1/2, 3/2, \dots, n - 1/2$ . Заметим, что значения  $j$  совпадают со значениями углового момента в (15.2.2). Кратности собственных значений совпадают с размерностью соответствующих представлений, поэтому  $j$  — квантовое число углового момента.

При  $\alpha \ll j + 1/2$  выражение (15.2.6) можно разложить в ряд по степеням  $\alpha$ :

$$E_{n,j} = \mu - \frac{\mu \alpha^2}{2n^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right\} + O(\alpha^6). \quad (15.2.7)$$

Член  $\mu$  есть масса покоя электрона. Член порядка  $O(\alpha^2)$  совпадает с нерелятивистским выражением (1.7.6) для  $E_n$ , а член порядка  $O(\alpha^4)$  определяет сдвиг, связанный со спин-орбитальным взаимодействием. Вычислив этот член, мы получим измеренную величину тонкой структуры.

### 15.3 Теория Дирака

Классическая модель контура с током, рассмотренная в § 15.1, дает значение магнитного момента

$$\mu_{\text{кл}} = \mu_B \mathbf{S}, \quad (15.3.1)$$

где  $\mathbf{S} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$  — внутренний спин, а

$$\mu_B = e\hbar/2mc = 0,578 \dots \times 10^{-14} \text{ МэВ} \cdot \text{Гс}^{-1}$$

есть магнетон Бора. Магнитный момент электрона можно измерить, наблюдая эффект Зеемана, т. е. изучая расщепление уровней энергии во внешнем магнитном поле  $\mathbf{h}$  (рис. 15.2). Результаты экспериментов указывают на то, что истинное значение момента равно  $2\mu_{\text{кл}}$ , где  $\mu_{\text{кл}}$  определено выражением (15.3.1), т. е. гиромагнитное отношение  $g = 2$ .

Теория Дирака прекрасно объясняет это значение  $g$ . Если электрон находится во внешнем магнитном поле с потенциалом  $A(x)$ , то гамильтониан (15.2.4) изменяется следующим образом:

$$H = \alpha_4 \mu - c \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left( \hbar \partial / \partial x_j - \frac{e}{c} A_j(x) \right) = H_0 + e \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}, \quad (15.3.2)$$

где  $H_0$  — гамильтониан свободного электрона.

Среднее значение гамильтониана (15.3.2) в состоянии  $\psi$  (если использовать естественное скалярное произведение в пространстве дираковых спиноров) равно

$$\langle H \rangle_\psi = \langle H_0 \rangle_\psi + \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dx, \quad (15.3.3)$$

где  $\mathbf{J} = e \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_i = \alpha_i \alpha_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  и  $\bar{\psi} = \psi^* \alpha_4$ . Поправочный член  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$  имеет вид скалярного произведения, совпадающего с видом классической энергии плотности тока в магнитном поле. Истолкуем теперь этот результат.

Используя уравнение Дирака для  $\psi$ , а именно

$$\sum_i \gamma_i \left( \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{e}{c} A_i \right) \psi = mc \psi,$$

где  $\gamma_4 = \alpha_4$ ,  $x_4 = it$ , ток  $J_\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  можно переписать в виде

$$J_\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = \left( \frac{e \hbar}{2mc} \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi) + \frac{e \hbar}{2mc} \text{Im} \left( \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi \right) + i \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) A_\mu (\bar{\psi} \psi), \quad (15.3.4)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (15.3.5)$$

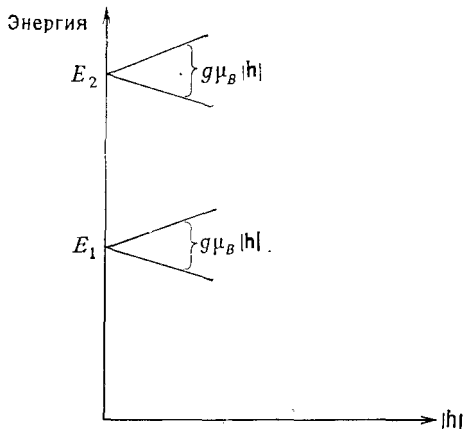


Рис. 15.2. Нерелятивистский эффект Зеемана: расщепление уровня энергии  $E_n$  (§ 1.7) в слабом магнитном поле  $\mathbf{h}$ .

Второй член в правой части (15.3.4) имеет вид шредингера электрического тока. Последний член содержит лишний множитель  $c^{-1}$ , но его можно не учитывать в пределе при  $c \rightarrow \infty$ . Первый член отвечает взаимодействию с магнитным полем. Действительно, подставляя этот член вместо  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$  в (15.3.3), после интегрирования по частям (поверхностным членом пренебрегаем) получаем, что

$$-\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right) \sum \int \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \partial_\nu A_\mu dx = \frac{e\hbar}{4mc} \int \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} dx. \quad (15.3.6)$$

Заметим теперь, что матрицы  $\gamma_i$  образуют клиффордову алгебру:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Дираково представление есть неприводимое представление этой алгебры в пространстве  $4 \times 4$ -матриц. В этом представлении, единственном с точностью до унитарной эквивалентности,

$$\sigma_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \begin{pmatrix} \sigma_\lambda & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda \end{pmatrix}, \quad (15.3.7)$$

где  $\mu, \nu = 1, 2, 3$ , а  $\sigma_\lambda, \lambda = 1, 2, 3$ , — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15.3.8)$$

Следовательно, выражение (15.3.6) равняется магнитному члену

$$\left(\frac{e\hbar}{mc}\right) \int \bar{\psi} \mathbf{S} \psi \cdot \mathbf{B} dx = 2\mu_B \int \langle \psi, (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) \psi \rangle dx,$$

где  $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ , плюс член, связанный с электрическим полем (этому члену отвечают матрицы  $\sigma_{4j}$  с нулевыми элементами на диагонали). Последнее выражение есть в точности взаимодействие с магнитным моментом, для которого  $g = 2$ .

#### 15.4 Аномальный магнитный момент

Тщательное экспериментальное измерение, проведенное Кушем (Kusch) в 1947 г., показало, что в действительности  $g$  отличается, хотя и очень мало, от 2, а именно  $\kappa \equiv (g - 2)/2 = 0,001$ . Величина  $\kappa = \kappa_{эл}$ , характеризующая разность между истинным значением  $g$  и значением, предсказываемым теорией Дирака, называется аномалией магнитного момента. В настоящее время величина этой аномалии, полученная в результате вычислений, совпадает с измеренной величиной вплоть до 8-го десятичного знака у  $\kappa$  и 11-го у  $g$ . Такое блестящее совпадение заслуживает специального обсуждения. В экспериментах Демелта и его сотрудников [van Dyke



et al., 1979] изучался изолированный электрон в «магнитной бутылке» и было измерено значение аномалии:

$$\kappa_{\text{экср}} = 0,001159652200(40). \quad (15.4.1)$$

Число в скобках указывает возможную неточность в последних разрядах.

В действительности каждая элементарная диракова частица (т. е. частица с волновой функцией, удовлетворяющей уравнению Дирака), у которой удастся достаточно точно измерить величину  $g$ , обнаруживает собственную аномалию. Аномалия для мюонов согласуется с вычислениями почти так же хорошо, как и электронная аномалия  $\kappa_{\text{эл}}$ . Протон имеет намного большую аномалию, примерно 1,8, и нет надежного теоретического подсчета для этого значения. Даже нейтрон имеет магнитный момент (примерно равный аномальному магнитному моменту протона, взятому с обратным знаком)<sup>1)</sup>. Аномальные моменты отражают сложную внутреннюю структуру этих элементарных частиц.

При построении теории, объясняющей аномалию  $\kappa_{\text{эл}}$ , необходимо вместо теории Дирака, описывающей отдельный свободный электрон, рассматривать квантовое поле. В § 15.3 мы нашли значение  $g$ , изучая решения (линейного) уравнения Дирака для волновой функции  $\psi$  и отвечающего ей тока  $J_\mu$  в случае электрона, помещенного во внешнее электромагнитное поле с потенциалом  $A_\mu$ . Можно считать, что аномалия  $\kappa$  связана с тем, что выражение для тока  $J_\mu$  изменяется вследствие взаимодействия с электромагнитным полем. Таким образом, нужно рассматривать нелинейную систему уравнений Максвелла — Дирака, в которой  $A_\mu$  и  $\psi$  считаются неизвестными.

Так как предыдущие вычисления с фиксированным  $A_\mu$  дают значение  $g$  с точностью до 0,1 %, имеет смысл вычислять  $g$  в предположении, что

$$A_\mu = A_\mu^{\text{внеш}} + \delta A_\mu, \quad (15.4.2)$$

где  $A_\mu^{\text{внеш}}$  фиксировано, как и ранее, а  $\delta A_\mu$  — поправка. При этом поправка  $\kappa$  к  $g = 2$  разлагается в ряд по степеням  $\delta A_\mu$ . Поскольку нелинейность системы уравнений Максвелла — Дирака связана со взаимодействием  $J_\mu A_\mu = O(e)$ , ряды теории возмущений для  $\kappa$  являются рядами по степеням электрического заряда  $e$ . Фактически в разложение входят только степени  $e^2$ , поэтому обычно эти ряды выражают через постоянную тонкой структуры  $\alpha$ . Хотя ожидается, что ряды расходятся, первые члены принимают малые значения и дают для  $\kappa$  значение, близкое к (15.4.1).

На самом деле в настоящее время нет полной ясности даже в вопросе о том, являются ли эти ряды теории возмущений асимп-

<sup>1)</sup> Имеется в виду величина магнитного момента, выраженная в ядерных магнетонах  $\mu_i = eh/(2m_p c)$ , где  $m_p$  — масса протона. — Прим. перев.

тотическими рядами точной теории (как это было в ч. II для рядов  $\lambda P(\varphi)$ -моделей, которые являются асимптотическими, но не сходятся вблизи  $\lambda = 0$ ). Таким образом, остается пока загадкой, существует или нет электродинамика как математическая теория, например в том же смысле, что для моделей теории поля в размерности  $d < 4$ , построенных в гл. 7—12, или, другими словами, является ли электродинамика сама по себе (без учета сильных, а возможно, и слабых взаимодействий) самосогласованной теорией. Подобные трудности не возникают в неабелевых калибровочных теориях, поэтому теория электронов и протонов, рассматриваемых вместе с кварками и глюонами, стоит на более прочном фундаменте, чем теория электронов и протонов, изолированных от остальной материи.

Возвращаясь к аномалии, отметим, что Швингер вычислил  $\kappa$  в первом порядке по  $\alpha$  в 1947 г. и нашел значение  $\kappa = \frac{1}{2} (\alpha/\pi) = 0,001\,159$ . Сейчас лучшее теоретическое значение  $\kappa$  найдено в третьем порядке по  $\alpha$  ([Levine, Roskies, 1976], [Kinoshita, 1979]):

$$\kappa_{\text{теор}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) + 0,328\,478\,966 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1,1835(61) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3. \quad (15.4.3)$$

Здесь неопределенность в последних знаках связана с неточностью численного интегрирования. Использование  $\alpha^{-1} = 137,035\,963(15)$  [Williams, Olsen, 1979] дает

$$\kappa_{\text{теор}} = 0,001\,159\,652\,566.$$

Различие между  $\kappa_{\text{теор}}$  и  $\kappa_{\text{эксп}}$  может быть связано с (еще не найденными) поправками порядка  $O(\alpha^4)$ . (Это различие не снимается рассмотрением эффектов сильного взаимодействия.)

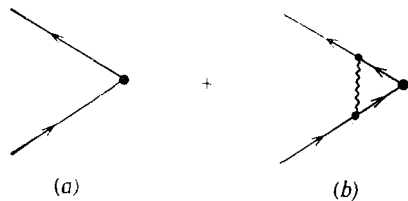


Рис. 15.3. Диаграммы, отвечающие вычислению  $g = 2(1 + O(\alpha))$ .

нулевом импульсе, определяет изучаемую величину  $ge\hbar/2mc = g\mu_B$ . Таким образом,  $g$  выражается в виде ряда по степеням  $e$ , полученного из  $\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \rangle$  с помощью последовательного интегрирования по частям, т. е. с помощью теории возмущений, аналогичной той, которая рассмотрена в гл. 8 для бозонных моделей.

Вычисления сводятся к суммированию фейнмановых диаграмм. При этом необходимо различать фермионные линии (обозначае-

Выражение для  $g$  содержит среднее от плотности энергии взаимодействия  $J_\mu(x)A^\mu(x)$  по одноэлектронному состоянию, разложенное в ряд по степеням электрического заряда  $e$ . Как и в (15.3.4—6), мы можем выделить член, пропорциональный магнитному моменту и имеющий вид  $\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \rangle$ . Значение соответствующего коэффициента, взятое при

мые сплошными линиями со стрелками) и фотонные (волнистые) линии. При вычислении  $g$  вплоть до первого порядка по  $\alpha$  ненулевой вклад вносят лишь две диаграммы, изображенные на рис. 15.3.

Диаграмма (а) дает значение  $g = 2$ ; см. § 15.3. Диаграмма (б) вносит вклад  $g = \alpha/\pi$ , и обе диаграммы вместе приводят к указанной ранее величине  $\kappa = \frac{1}{2}(\alpha/\pi)$ . См. [Scadron, 1979].

## 15.5 Сверхтонкая структура и лэмбов сдвиг в атоме водорода

Протон в атоме водорода также имеет спин  $1/2$  и магнитный момент, который приводит к возмущению гамильтониана спин-орбитальным членом. С этим возмущением связано дальнейшее рас-

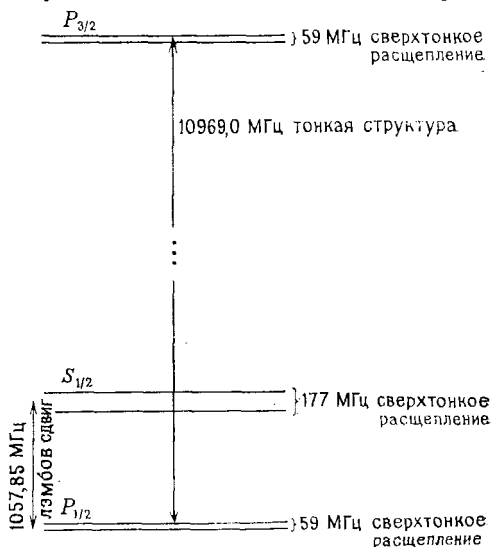


Рис. 15.4 Уровни  $n = 2$  атома водорода. Состояниям  $S$  соответствуют значения  $l = 0$ ,  $j = 1/2$ . Состояниям  $P$  соответствуют  $l = 1$ ,  $j = 3/2$  или  $j = 1/2$ . Уровни  $n = 2$  расположены приблизительно на  $2,5 \times 10^9$  МГц выше уровней  $n = 1$ . Сверхтонкое расщепление уровней  $n = 1$  равняется  $21 \text{ см} = 1420 \text{ МГц}$ . В нерелятивистской теории, рассмотренной в гл. 1, все уровни, отвечающие данному  $n$ , вырождены. В приближении уравнения Дирака уровни  $S_{j=1/2}$  и  $R_{j=1/2}$  в точности совпадают, но тонкая структура отделяет уровни  $P_{j=3/2}$ .

щепление вырожденных уровней энергии атома. При этом имеется в виду вырождение, отвечающее спиновым состояниям протона и не расщепляемое магнитным моментом электрона. Величина этого дополнительного расщепления («сверхтонкая структура») не превосходит  $1/10$  тонкой структуры.

В основном состоянии ( $n = 1$ ) сверхтонкому расщеплению соответствует длина волны  $21 \text{ см}$ . Эта величина определяет основную частоту, наблюдаемую в радиоастрономии.

Уровни  $n = 2$  описываются полным угловым моментом  $j$  и орбитальным угловым моментом  $l$ ,  $0 \leq l \leq 1$ . Принято обозначать уровни энергии с  $l = 0$  (сферически-симметричные) буквой  $S$ , а с  $l = 1$  — буквой  $P$ . С учетом разложения (15.2.2) уровни энергии  $n = 2$  содержат состояния  $S_{j=1/2} = S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$  и  $P_{3/2}$ . Тонкая структура отщепляет уровень  $P_{3/2}$  от уровней  $S_{1/2}$  и  $P_{1/2}$ . Сверхтон-

кая структура расщепляет каждый из этих уровней на два, но расщепленные уровни  $S_{1/2}$  и  $P_{1/2}$  продолжают совпадать.

Лэмбов сдвиг, являющийся чисто квантовополевым эффектом, вносит основной вклад в отделение уровней  $S_{1/2}$  и  $P_{1/2}$  друг от друга (рис. 15.4). Наиболее точное экспериментальное измерение дает величину лэмбова сдвига  $1057,845(9)$  МГц [Lundeen, Pipkin, 1981].

#### Литературные ссылки

[Scadron, 1979].

## Глава 16

### Фазовые переходы

#### 16.1 Введение

Мы обсудим основные понятия, рассматриваемые в этой главе, на примере квантового поля, определяемого мерой  $d\mu$  в функциональном пространстве  $\mathcal{F}'$ . В предположении, что для меры  $d\mu$  выполнены аксиомы OS 0—3 § 6.1, ее можно представить в виде выпуклой комбинации неразложимых мер, удовлетворяющих уже аксиомам OS 0—4. Эти неразложимые компоненты называются *чистыми фазами*. Они характеризуются свойством единственности вакуума, которое выражается аксиомой OS 4. При этом мера  $d\mu$  является чистой фазой тогда и только тогда, когда ее вакуумное состояние единственно.

Пусть, как и в гл. 11,  $d\mu$  определяется евклидовым лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который в случае  $P(\varphi)_2$ -меры имеет вид

$$\mathcal{L}(\varphi(x)) = : \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2(x) + \frac{1}{2} m^2\varphi^2(x) + \lambda P(\varphi(x)) :. \quad (16.1.1)$$

Лагранжиан нужен как исходная основа для конструкции меры  $d\mu$ , изложенной в гл. 11. С другой стороны, используя формулу интегрирования по частям (12.1.1), можно восстановить  $\mathcal{L}$  по мере  $d\mu$ . Заметим, что это утверждение справедливо несмотря на перенормировки, в том смысле, что перенормированный ток  $P'$  является корректно определенной билинейной формой. Во всех известных суперперенормируемых моделях и (формально) в случае модели  $\varphi_4^1$  ток  $P'$  явно определяется после снятия ультрафиолетового обрезания. Коэффициенты  $P'$ , возможно расходящиеся, алгебраически определяют коэффициенты  $P$ , а следовательно, определяют лагранжиан  $\mathcal{L}$ .

Любую меру  $d\mu$ , удовлетворяющую уравнению (12.1.1), называют *фазой*, отвечающей лагранжиану  $\lambda P(\varphi)_2$ .

При построении  $d\mu$  мы использовали не только лагранжиан  $\mathcal{L}$ , но и явную форму граничных условий (в гл. 11 использовались граничные условия Дирихле; методы гл. 18 применимы к широкому классу граничных условий). Любая мера  $d\tilde{\mu}$ , построенная по тому же лагранжиану  $\mathcal{L}$  с помощью другой предельной процедуры, определяет другую фазу или смесь разных чистых фаз. Говорят, что для лагранжиана  $\mathcal{L}$  имеется *фазовый переход первого рода*, если  $\mathcal{L}$  отвечают по крайней мере две различные фазы.

Фазовые переходы первого рода можно рассматривать и с иной точки зрения. Вместо того чтобы изменять граничные условия, рассмотрим вариацию самого лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}.$$

Если мера  $d\mu_{\varphi} = d\mu_{\varphi_0 + \delta\varphi}$ , как функция  $\mathcal{L}$ , разрывна при  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ , то различные фазы для лагранжиана  $\mathcal{L}_0$

$$d\mu_{\varphi_0} = \lim_{j \rightarrow \infty} d\mu_{\varphi_0 + \delta\varphi_j}$$

можно строить, выбирая различные последовательности  $\delta\mathcal{L}_j \rightarrow 0$ . Слово «переход» отражает тот факт, что непрерывное изменение параметров (т. е.  $\mathcal{L}$ ) приводит к скачкообразному изменению модели. В большинстве случаев для доказательства существования фазовых переходов первого рода, т. е. существования нескольких фаз, используется один из двух описанных выше методов: изменение граничных условий на бесконечности или бесконечно малая вариация  $\mathcal{L}$ . В квантовой теории поля фазовые переходы проявляются в том, что свойства поля на больших расстояниях (т. е. состояния частиц и процессы рассеяния) качественно отличаются от тех свойств, которые можно было бы ожидать исходя из параметров  $\mathcal{L}$ . В качестве примеров можно указать так называемый механизм Хиггса и солитоны.

В этом параграфе установлен критерий единственности чистой фазы, т. е. единственности вакуума, основанный на исследовании двухточечной функции для квантового поля  $P(\varphi)_2$ . Более того, в случае единственности вакуума показано, что двухточечная функция позволяет найти физическую массу, которая определяется как минимальный показатель экспоненциального убывания корреляций. В заключение параграфа обсуждается связь между фазовыми переходами и особенностями термодинамических функций.

**Теорема 16.1.1.** Пусть мера  $d\mu$  на  $\mathcal{F}'$  удовлетворяет аксиомам OS 0—3 и неравенству ФКЖ (§ 4.4, 10.2). Тогда аксиома OS 4 (единственность вакуума) выполняется в том и только в том случае, когда усеченная двухточечная функция Швингера  $S_2(x-y)$  стремится к нулю при  $|x-y| \rightarrow \infty$ . В этом случае показатель

экспоненциального убывания функции  $S_2$  при  $|x - y| \rightarrow \infty$  совпадает со щелью в спектре гамильтониана  $H$  между уровнем энергии вакуума (нулем) и остальной частью спектра.

*Доказательство.* Неравенство ФКЖ применимо к монотонным функциям от поля. Пусть

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x & \text{при } |x| \geq 1, \end{cases} \quad \rho(x) = (1 + \sigma(x))/2.$$

Для неотрицательной функции  $f$  из  $\mathcal{F}$  положим

$$\sigma(f) = \sigma(\varphi(f)), \quad \rho(f) = \rho(\varphi(f)).$$

Заметим, что

$$\langle \rho(f) \rho(g) \rangle - \langle \rho(f) \rangle \langle \rho(g) \rangle = \frac{1}{4} [\langle \sigma(f) \sigma(g) \rangle - \langle \sigma(f) \rangle \langle \sigma(g) \rangle].$$

Из равенства  $\varphi(f) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sigma(\lambda^{-1} f)$  следует, что произведения различных  $\sigma$  или  $\rho$  порождают  $\mathcal{E}$ . В случае, когда функции  $f$  имеют носители в  $R_+$ , эти произведения порождают  $\mathcal{E}_+$ , а при отображении  $\hat{\cdot}: \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+ / \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$  они порождают  $\mathcal{H}$ . Пусть  $\psi \in \mathcal{H}$  есть образ некоторого произведения  $\sigma$  и  $\rho$ . Мы утверждаем, что существует такая функция  $f \in \mathcal{F}$ ,  $\operatorname{supp} f \subset R_+$ , для которой

$$\langle \psi, e^{-tH} \psi \rangle - \langle \psi, \Omega \rangle^2 \leq \langle \widehat{\varphi(f)} \Omega, e^{-tH} \widehat{\varphi(f)} \Omega \rangle - \langle \widehat{\varphi(f)} \Omega, \Omega \rangle^2. \quad (16.1.2)$$

Пусть теперь  $P_\Omega$  есть ортогональная проекция на  $\Omega \in \mathcal{H}$ . Тогда (16.1.2) можно переписать в виде

$$\langle \psi, e^{-tH} (1 - P_\Omega) \psi \rangle \leq \langle \widehat{\varphi(f)} \Omega, e^{-tH} (1 - P_\Omega) \widehat{\varphi(f)} \Omega \rangle. \quad (16.1.3)$$

Если правая часть неравенства стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то  $(1 - P_\Omega)\mathcal{H}$  не может содержать собственные векторы  $\mathcal{H}$  с нулевым собственным значением, или, другими словами, вакуум  $\Omega$  единствен. В этом случае, в силу (16.1.3), нижней части спектра оператора  $H|_{(1 - P_\Omega)\mathcal{H}}$  отвечают векторы, лежащие в про-

странстве, порожденном векторами  $(1 - P_\Omega)\widehat{\varphi(f)}\Omega$ . Таким образом, достаточность условий теоремы вытекает из сделанного утверждения (16.1.2).

Докажем теперь это утверждение. Пусть  $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ , где  $f_i \in \mathcal{F}$ ,  $f_i \geq 0$ . Положим

$$\Pi_A = \prod_{f \in A} \rho(f), \quad \Sigma_A = \sum_{f \in A} \rho(f).$$

Заметим, что следующие функции являются монотонными функциями от  $\varphi$ :

$$\varphi(f_i), \sigma(f_i), \varphi(f_i) - \sigma(f_i), \Sigma_A, \Pi_A, \Sigma_A - \Pi_A. \quad (16.1.4)$$

Для проверки монотонности последней функции по каждой переменной  $\rho(f_i)$  используется тот факт, что  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Применяя неравенство ФКЖ, получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 (\varphi_2 - \sigma_2) \rangle - \langle \sigma_1 \rangle \langle \varphi_2 - \sigma_2 \rangle &\geq 0, \\ \langle (\varphi_1 - \sigma_1) \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_1 - \sigma_1 \rangle \langle \varphi_2 \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, находим, что

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \leq \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_1 \rangle \langle \varphi_2 \rangle. \quad (16.1.5)$$

Те же соображения, примененные к монотонным функциям  $\Pi, \Sigma, \Sigma - \Pi$ , дают

$$\langle \Pi_A \Pi_B \rangle - \langle \Pi_A \rangle \langle \Pi_B \rangle \leq \langle \Sigma_A \Sigma_B \rangle - \langle \Sigma_A \rangle \langle \Sigma_B \rangle. \quad (16.1.6)$$

Левая часть неравенства (16.1.6) совпадает с левой частью (16.1.2), если рассмотреть  $f_i$ , сдвинутые вдоль оси времени на  $t/2$ . Разложив правую часть (16.1.6) и оценив ее сверху с помощью (16.1.5), получаем правую часть неравенства (16.1.2). Таким образом, сделанное утверждение доказано, а вместе с ним доказана достаточность условий теоремы. Их необходимость вытекает из следующих элементарных предположений.

**Предложение 16.1.2.** Пусть  $H$  — положительный самосопряженный оператор. Тогда  $s. \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tH}$  есть проекция на собственное подпространство оператора  $H$ , отвечающее нулевому собственному значению.

**Предложение 16.1.3.** Пусть мера  $d\mu$  на  $\mathcal{F}'$  удовлетворяет аксиомам OS 0 — 4. Тогда для любых векторов  $\psi, \chi \in \mathcal{H}$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi, e^{-tH} \chi \rangle - \langle \psi, \Omega \rangle \langle \Omega, \chi \rangle.$$

*Доказательство.* В силу предложения 16.1.2 и аксиомы OS 4,

$$P_\Omega = |\Omega\rangle\langle\Omega| = s. \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tH}. \blacksquare$$

Продолжим обсуждение фазовых переходов на формальном уровне. Пусть имеется мера  $d\mu_\Lambda$  в конечном объеме  $\Lambda$ . Тогда свободная энергия на единицу объема определяется выражением

$$a_\Lambda(h) = |\Lambda|^{-1} \ln \left( \int e^{\int_\Lambda \varphi(x) dx} d\mu_\Lambda \right) \quad (16.1.7)$$

и, в силу монотонной сходимости (в случае взаимодействий, рассматриваемых в гл. 11, т. е. взаимодействий вида: четный полином + линейный член, с граничными условиями Дирихле),  $a_\Lambda(h) \rightarrow a(h)$  при  $\Lambda \uparrow R^2$ . Вычислим теперь  $da/dh$ . Меняя формально местами дифференцирование и два предельных перехода  $\Lambda \uparrow R^2$  (один в экспоненте, а другой в  $d\mu_\Lambda$ ), получаем, что

$$da/dh = \langle \varphi(x) \rangle_h, \quad (16.1.8)$$

где  $\langle \cdot \rangle_h$  есть усреднение по мере, определяемой внешним полем  $h$ . Аналогично,  $n$ -я производная выражается через усеченную  $n$ -точечную функцию Швингера:

$$\frac{d^2 a}{dh^2} = \int (\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle) dy, \quad (16.1.9)$$

$$\frac{d^n a}{dh^n} = \int \langle \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) \rangle^T dx_2 \dots dx_n. \quad (16.1.10)$$

Заметим, что  $da/dh$  есть намагниченность, а  $d^2 a/dh^2$  — магнитная восприимчивость. На языке гл. 5 функция  $a(h)$  определяет уравнение состояния, а производные  $d^n a/dh^n$  являются термодинамическими функциями.

Из неравенства ФКЖ или неравенств Гриффитса следует, что  $d^2 a/dh^2 \geq 0$ . Поэтому  $a$  является выпуклой функцией от  $h$ . Кроме

того, намагниченность  $da/dh$  монотонно возрастает и, следовательно, непрерывна всюду, за исключением, быть может, счетного множества значений  $h$ . Точка  $h_0$ , в которой функция  $da/dh$  имеет разрыв, является точкой фазового перехода первого рода. В этой точке имеется по крайней мере две фазы (возникающие как односторонние пределы  $da/dh$  и  $\langle \cdot \rangle_h$ ), а именно  $\langle \cdot \rangle_{h \pm 0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \cdot \rangle_{h \pm \varepsilon}$ .

Справедливо и обратное утверждение. Предположим, что функция  $da/dh$  непрерывно дифференцируема в точке  $h = h_0$ . Тогда, в силу (16.1.9), усеченная двухточечная функция интегрируема. Так как  $0 \leq \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle^T = \langle \varphi(0)\Omega, e^{-1|x-y|H}(I - P_\Omega)\varphi(0)\Omega \rangle$  монотонно убывает с ростом  $|x-y|$ , то  $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle^T \rightarrow 0$  при  $|x-y| \rightarrow \infty$ . Поэтому, в силу теоремы 16.1.1, в теории с  $h = h_0$  любая мера является чистой фазой. Таким образом, при  $h = h_0$  не происходит фазового перехода.

Термодинамические функции могут иметь не только скачки, но и другие особенности. В этом случае данному лагранжиану отвечает единственная фаза и фазовый переход называется переходом *второго* или *более высокого рода*. Обычно критические точки являются точками фазового перехода второго рода; по определению, критическими точками называются граничные точки (в пространстве лагранжианов  $\mathcal{L}$ ) многообразия фазовых переходов первого рода.

## 16.2 Двухфазная область

Рассмотрим простейший случай, для которого удастся доказать существование по крайней мере двух фаз и фазового перехода первого рода, а именно случай полиномиального взаимодействия вида

$$V(\varphi) = \lambda: (\varphi^2 - \lambda^{-1})^2:_{\lambda^{1/2}}, \quad 0 < \lambda \ll 1, \quad (16.2.1)$$

в размерности  $d = 2$ . Здесь индекс  $\lambda^{1/2}$  обозначает виково упорядочение по отношению к ковариационному оператору  $(-\Delta + \lambda)^{-1}$ . Аналогичные методы применимы в случае, когда  $\varphi^4$  заменяется четным положительным полиномом. С помощью соответствующего виково упорядочения любой четный полином четвертой степени, приводящий к двум фазам, можно представить в виде (16.2.1), см. [Glimm, Jaffe, Spencer, 1976b]. Обобщение изложенных здесь методов позволяет доказать существование двух фаз для некоторых взаимодействий  $V$ , не являющихся ни четными, ни симметричными относительно какого-нибудь  $\varphi$ ; см. гл. 20.

**Теорема 16.2.1.** Пусть  $d\mu$  — мера на  $\mathcal{S}'(R^2)$ , построенная, как в гл. 11, с помощью полиномиального взаимодействия  $V$  вида (16.2.1) с массой  $m = \lambda^{1/2}$ . Тогда для достаточно малых  $\lambda > 0$



мере  $d\mu$  соответствуют по крайней мере два вакуумных состояния, т. е. в системе имеется несколько фаз.

Доказательство этой теоремы строится по образцу доказательства аналогичного результата для модели Изинга в § 5.4. Для того чтобы исключить флуктуации поля на малых расстояниях, не имеющие отношения к проблеме фазовых переходов, мы усредним поле  $\varphi$  по небольшим областям. Точнее, мы покроем  $R^2$  решеткой единичных квадратов  $\Delta_i$  и будем рассматривать

$$\varphi(\Delta) = \int_{\Delta} \varphi(x) dx. \quad (16.2.2)$$

Тогда выражение

$$\sigma(\Delta) = \text{sign } \varphi(\Delta) \quad (16.2.3)$$

определяет изинговы переменные, так как  $\sigma$  принимают значения  $\pm 1$  и определены в узлах целочисленной решетки (центрах квадратов  $\Delta_i$ ). В силу симметрии меры  $d\mu$  относительно преобразования  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,

$$\langle \sigma(\Delta) \rangle = \int \sigma(\Delta) d\mu = 0. \quad (16.2.4)$$

Для доказательства теоремы необходимо исследовать распределение вероятностей для границ фаз. Почти каждой конфигурации классического поля  $\varphi \in \mathcal{S}'(R^2)$  отвечает конфигурация модели Изинга  $\sigma(\Delta)$ . Здесь  $\sigma \in \{\pm 1\}^{Z^2}$ , т. е.  $\sigma$  есть функция на решетке  $Z^2$  (рассматриваемой как множество центров квадратов  $\Delta_i$ ) со значениями  $\pm 1$ . Граница фаз для конфигураций  $\varphi$  или  $\sigma$  есть граница множества  $\sigma^{-1}(1)$ , или, другими словами, множество таких отрезков, которые разделяют два квадрата с разными знаками  $\sigma$ . Поскольку мы имеем дело с трансляционно-инвариантной теорией в бесконечном объеме, множество конфигураций, соответствующих определенной границе фаз:

$$\partial\sigma^{-1}(1) = \text{граница фаз } \sigma = \text{граница фаз } \varphi, \quad (16.2.5)$$

имеет меру нуль. Поэтому в качестве элементарных событий мы рассматриваем множество

$$\{\varphi: \Gamma \subset \text{граница фаз } \varphi\}, \quad (16.2.6)$$

где  $\Gamma$  — некоторое *конечное* множество отрезков на решетке. Допуская некоторую вольность, мы будем использовать обозначение  $\Gamma$  и для множества конфигураций (16.2.6) в  $\mathcal{S}'(R^2)$ .

**Теорема 16.2.2.** Для достаточно малых  $\lambda$

$$\text{Pr}(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\mu \leq e^{-\text{const } \lambda^{-1/2} |\Gamma|},$$

где  $|\Gamma|$  — длина  $\Gamma$  в  $R^2$  и константа не зависит от  $\Gamma$  и  $\lambda$ .

Доказательство теоремы 16.2.1 в предположении, что доказана теорема 16.2.2. Мы покажем, что  $\langle \sigma(\Delta)\sigma(\Delta') \rangle$  не стремится к нулю при  $\text{dist}(\Delta, \Delta') \rightarrow \infty$ . Согласно (16.2.4),  $\langle \sigma(\Delta) \rangle = 0$ , поэтому из предложения 16.1.3 будет следовать, что вакуумное состояние не единственно.

Пусть  $\rho_{\pm}(\Delta) = \frac{1}{2} \{1 \pm \sigma(\Delta)\}$  обозначает характеристические функции для положительных и отрицательных значений  $\varphi(\Delta)$ . Поскольку  $\langle \varphi \rangle = \langle \sigma(\Delta) \rangle = 0$ , имеем  $\langle \sigma(\Delta)\sigma(\Delta') \rangle = 1 - 4\langle \rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \rangle$ , и для завершения доказательства достаточно показать, что  $\langle \rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \rangle \leq e^{-O(\lambda^{-1/2})}$  при малых  $\lambda$ .

Важное наблюдение состоит в том, что  $\rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \neq 0$  только для таких конфигураций поля  $\varphi$ , для которых граница фаз содержит контур  $\Gamma$ , разделяющий  $\Delta$  и  $\Delta'$ . Поэтому

$$\langle \rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \rangle \leq \sum_{\{\Gamma: \Delta \subset \text{Int } \Gamma \text{ или } \Delta' \subset \text{Int } \Gamma\}} \text{Pr}(\Gamma).$$

Очевидно, контур  $\Gamma$  имеет длину  $|\Gamma| \geq 4$ . Кроме того, число различных контуров  $\Gamma$  длины  $n$  не превосходит  $n^2 3^n$ . Это утверждение доказывается по индукции. Начальную точку  $\Gamma$  можно выбрать не более чем  $n^2$  способами. Если на решетке имеется кривая длины  $j$ , то ее можно продолжить до кривой длины  $(j+1)$  без изменения начальной точки только тремя способами, а именно добавляя одно из ребер, примыкающих к последней точке. Таким образом, по теореме 16.2.2

$$\langle \rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \rangle \leq \sum_{n=4}^{\infty} n^2 3^n e^{-nO(\lambda^{-1/2})} \leq e^{-O(\lambda^{-1/2})}. \blacksquare$$

Для того чтобы доказать теорему 16.2.2, изучим возмущения евклидовой меры  $d\mu$ , определяемые полиномами вида

$$Q(\xi, X) = \sum_{\nu=1}^3 Q_{\nu}(\xi^{\nu}, X),$$

где  $X$  — некоторое объединение квадратов решетки  $\Delta$  и

$$Q_1(\xi^{(1)}, X) = \lambda^{1/2} \sum_{\Delta_j \subset X} \xi_j^{(1)} \int_{\Delta_j} (\varphi(x)^2;_{\lambda^{1/2}} - \lambda^{-1}) dx,$$

$$Q_2(\xi^{(2)}, X) = |\ln \lambda|^{-1} \sum_{\Delta_j \subset X} \xi_j^{(2)} \int_{\Delta_j} \varphi(x)^2 - \varphi(\Delta_j)^2;_{\lambda^{1/2}} dx,$$

$$Q_3(\xi^{(3)}, X) = \sum_{\substack{\Delta_i, \Delta_j \subset X \\ |i-j|=1}} \xi_{ij}^{(3)} (\varphi(\Delta_i) - \varphi(\Delta_j)).$$

**Теорема 16.2.3.** Существует такая константа  $K < \infty$ , что для всех  $|\xi^{(\nu)}| \leq 1$  и для достаточно малых  $\lambda$

$$\langle e^{Q(\xi, X)} \rangle \leq e^{K |\ln \lambda|^2 |X|}.$$

Идея доказательства этой теоремы состоит в использовании многократных отражений для сведения локальных оценок в бесконечном объеме к глобальным оценкам в конечном объеме. В силу предложения 10.6.1 и теоремы 12.4.2, достаточно оценить величину  $\langle e^{Q_{\nu}(\xi^{(\nu)}, X)} \rangle_{\Lambda}$  в случае, когда все  $\xi_j^{(\nu)}$  равны между собой,

а  $X$  есть прямоугольник, площадь которого не меньше некоторой фиксированной доли площади  $\Lambda$ .

*Доказательство теоремы 16.2.2 в предположении, что доказана теорема 16.2.3.* Начнем со следующего тождества:

$$\left\langle \prod_{(\Delta, \Delta') \in \mathcal{R}} [\rho_+(\Delta) \rho_-(\Delta') + \rho_-(\Delta) \rho_+(\Delta')] \right\rangle = \text{Pr}(\Gamma), \quad (16.2.7)$$

где  $\mathcal{R}$  — множество пар соседних квадратов, таких, что ребра  $\Delta \cap \Delta'$  образуют  $\Gamma$ . Запишем  $\rho_+$  и  $\rho_-$  в виде

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \chi_{(0, (1/2)\lambda^{-1/2}, \infty)} + \chi_{((1/2)\lambda^{-1/2}, \infty)} = \rho_{+,s} + \rho_{+,l}, \\ \rho_- &= \chi_{(-\infty, -(1/2)\lambda^{-1/2})} + \chi_{(-(1/2)\lambda^{-1/2}, 0)} = \rho_{-,l} + \rho_{-,s}, \end{aligned} \quad (16.2.8)$$

где  $\chi_{(a,b)}(\xi)$  — характеристическая функция интервала  $a < \xi < b$  и  $\xi = \varphi(\Delta)$  или  $\varphi(\Delta')$ . Функции  $\rho_{\pm}$  с индексами  $s, l$  отвечают соответственно «малым» и «большим» значениям  $\varphi$ . Подставим (16.2.8) в (16.2.7); раскрыв скобки, получим  $8^{|\mathcal{R}|} = 8^{|\Gamma|}$  членов. Так как все они положительны, достаточно рассмотреть отдельный член и затем выбрать наибольший из них. Таким образом, для каждой пары  $(\Delta_i, \Delta_j) \in \mathcal{R}$  мы имеем произведение  $\rho_{+,l}$  или  $s$  и  $\rho_{-,l}$  или  $s$ .

Если в этом произведении оба  $\rho$  имеют индекс  $l$ , мы воспользуемся оценкой

$$\rho_{+,l}(\Delta_i) \rho_{-,l}(\Delta_j) \leq [\lambda^{1/2} (\varphi(\Delta_i) - \varphi(\Delta_j))]^M = \lambda^{M/2} (d/d\xi_{i,j}^{(3)})^M e^{Q_3} \Big|_{\xi=0},$$

где  $M$  — произвольное четное число. Остальные три типа произведений содержат  $\rho_{+,s}$  или  $\rho_{-,s}$ . Эти члены мы оцениваем с помощью неравенства  $1 \leq (4/3)(1 - \lambda\varphi(\Delta)^2)$ , справедливого при  $2\lambda^{1/2}|\varphi(\Delta)| \leq 1$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} - \varphi(\Delta)^2 &= \left( \lambda^{-1} - \int_{\Delta} \varphi(x)^2 dx \right) + \\ &+ \left( \int_{\Delta} \varphi(x)^2 dx - \int_{\Delta} \varphi(\Delta)^2 dx \right) + \int_{\Delta \times \Delta} (-\Delta + \lambda)^{-1}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Последний член имеет порядок  $O(|\ln \lambda|)$ , поэтому, умножив его на  $\lambda$ , мы получим величину, меньшую  $1/3$  при достаточно малых  $\lambda$ . Таким образом, находим оценку

$$1 \leq 2\lambda \left( \lambda^{-1} - \int_{\Delta} \varphi(x)^2 dx \right) + 2\lambda \left( \int_{\Delta} \varphi(x)^2 dx - \int_{\Delta} \varphi(\Delta)^2 dx \right).$$

Отсюда следует, что при четном  $M$

$$\rho_s(\Delta) \leq \left[ 4\lambda \int_{\Delta} (\varphi(x)^2 - \lambda^{-1}) dx \right]^M + \left[ 4\lambda \int_{\Delta} \varphi(x)^2 - \varphi(\Delta)^2 dx \right]^M.$$

Следовательно,

$$\rho_s(\Delta_j) \leq (4\lambda^{1/2})^M \left[ \left( \frac{d}{d\xi_j^{(1)}} \right)^M e^{Q_1} + \left( \frac{d}{d\xi_j^{(2)}} \right)^M \lambda^{M/2} (\ln \lambda)^M e^{Q_2} \right] \Big|_{\xi=0}.$$

Заметим, что  $\lambda(\ln \lambda)^2 \leq 1$  при  $\lambda \leq 1/2$ , поэтому множителем  $\lambda^{M/2}(\ln \lambda)^M$  можно пренебречь. Опять раскроем скобки и из полученных таким образом слагаемых (их число не превосходит  $5^{|\Gamma|}$ ) выберем наибольшее. Максимальному члену соответствует некоторый выбор полиномов  $Q_v$ , отвечающих каждому квадрату  $\Delta$ , примыкающему к  $\Gamma$ . Пусть  $\mathcal{R}_v$  обозначает множество квадратов (или пар квад-

ратов при  $\nu = 3$ ), соответствующих члену  $Q_\nu$ , и пусть  $X_\nu$  — объединение квадратов, входящих в состав  $\mathcal{B}_\nu$ . Положим  $\mathcal{B} = \bigcup_\nu \mathcal{B}_\nu$  и  $X = \bigcup_\nu X_\nu$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Pr}(\Gamma) \leq (40)^{|\Gamma|} \prod_{\Delta_j \in X_1} (4\lambda^{1/2} d/d\xi_j^{(1)})^M \prod_{\Delta_j \in X_2} (4\lambda^{1/2} d/d\xi_j^{(2)})^M \times \\ \times \prod_{(\Delta_i, \Delta_j) \in \mathcal{B}_3} (\lambda^{1/2} d/d\xi_{ij}^{(3)})^M \langle e^{Q(\xi, X)} \rangle_{\xi=0} \end{aligned}$$

Производные в точке  $\xi = 0$  вычислим с помощью интегральной формулы Коши. Для этого продолжим функцию  $\langle \exp Q(\xi, X) \rangle$  в комплексную область по переменным  $\xi_j^{(\nu)}$ ,  $\xi_{ij}^{(3)}$  и проинтегрируем по произведению окружностей  $|\xi_j^{(\nu)}| = |\xi_{ij}^{(3)}| = 1$ . Так как полином  $Q$  линеен по  $\xi$ , имеем  $|\exp(Q(\xi))| \leq \exp(Q(\text{Re } \xi))$ , и по теореме Коши получаем:

$$\begin{aligned} \text{Pr}(\Gamma) \leq (40)^{|\Gamma|} (4\lambda^{1/2})^M (|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_3|) (M!)^{|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_3|} \times \\ \times \sup_{|\xi_j^{(1)}| = |\xi_j^{(2)}| = |\xi_{ij}^{(3)}| = 1} \langle e^{Q(\text{Re } \xi, X)} \rangle. \end{aligned}$$

Положим  $\mathcal{N} \equiv |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_3|$ . Заметим, что  $|\Gamma| \leq \mathcal{N} \leq 2|\Gamma|$  и  $|X| \leq \leq 2|\Gamma|$ . По теореме 16.2.3

$$\text{Pr}(\Gamma) \leq (40)^{|\Gamma|} [\lambda^{1/2} 4M^{(1/M)}]^{M\mathcal{N}} \exp[2K(\ln \lambda)^2 |\Gamma|].$$

Воспользуемся формулой Стирлинга  $M^{(1/M)} \sim M/e$  и перепишем эту оценку в виде

$$\text{Pr}(\Gamma) \leq [(5\lambda^{1/2} M/e)^M \exp\{2K(\ln \lambda)^2 + \ln(40)\}]^{|\Gamma|}.$$

Выберем в качестве  $M$  наибольшее четное число, удовлетворяющее неравенству  $5\lambda^{1/2} M \leq 1$ . Тогда существует такая константа  $K_1$ , не зависящая от  $\lambda$  и  $\Gamma$ , что при достаточно малых  $\lambda$

$$\text{Pr}(\Gamma) \leq \exp\{-2K_1 \lambda^{-1/2} + 2K(\ln \lambda)^2 + \ln(40)\} |\Gamma| \leq \exp[-K_1 \lambda^{-1/2} |\Gamma|].$$

Таким образом, теорема 16.2.2 доказана и существование фазовых переходов сводится к доказательству теоремы 16.2.3.

Доказательство теоремы 16.2.3 основано на двух предварительных связанных между собой оценках.

**Предложение 16.2.4.** Пусть  $0 < \lambda \leq 1/2$ , и пусть  $\Lambda$  — прямоугольник  $L \times T$ . Предположим, что  $L \leq T$  и  $\lambda^{-3/2} \leq L$ . Для вещественной функции  $\xi(X) \in L_\infty(\Lambda)$  определим

$$\mathcal{W} = \int_\Lambda V dx + Q_1 = \int_\Lambda : \lambda (\varphi^2 - \lambda^{-1})^2 + \lambda^{1/2} \xi(x) (\varphi^2 - \lambda^{-1}) :_{\lambda^{1/2}} dx.$$

Пусть  $S = (-\Delta_{\partial\Lambda} + \lambda)^{-1}$  обозначает ковариационный оператор с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ . Тогда

$$\exp[-K|\Lambda|] \leq \int \exp[-\mathcal{W}] d\varphi_C \leq \exp[K(\ln \lambda)^2 |\Lambda|], \quad (16.2.9)$$

где  $K$  — константа, зависящая только от  $\|\xi\|_{L_\infty}$ .

**Замечание.** Множитель  $(\ln \lambda)^2$  из оценки сверху можно исключить [Glimm, Jaffe, Spencer, 1976a].

**Предложение 16.2.5.** Существует такая константа  $K < \infty$ , что для любых  $0 < \lambda \leq 1/2$  и  $|\xi_i^{(2)}|, |\xi_{ij}^{(3)}| \leq 24$ , а также для любого прямоугольника  $X$

$$\int \exp [Q_2(\xi^{(2)}, X) + Q_3(\xi^{(3)}, X)] d\varphi_C \leq \exp [K |X|]. \quad (16.2.10)$$

*Доказательство теоремы 16.2.3 в предположении, что доказаны предложения 16.2.4—5.* В силу неравенства Гёльдера,

$$\langle \exp Q(\xi, X) \rangle \leq \sup_{1 \leq \nu \leq 3} \langle \exp Q_\nu(3\xi^{(\nu)}, X) \rangle, \quad (16.2.11)$$

поэтому достаточно оценить члены, соответствующие отдельным  $Q_\nu$ , при условии что  $\|\xi\|_{L_\infty} \leq 3$ . При  $\nu = 1, 2$  оценку можно свести к случаю, когда  $X$  — прямоугольник, если воспользоваться оценкой по методу многократных отражений, доказанной в следствии 10.5.8, положив  $k^{(i)} = \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, \Delta_j)$ . После отражений функций  $k^{(i)}$  получим функции вида  $\exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, Y)$ , где  $Y$  — прямоугольник. Тогда необходимая оценка для (16.2.11) при  $\nu = 1, 2$  получится из оценки

$$\langle \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, Y) \rangle \leq \exp [K (\ln \lambda)^2 |Y|] \quad (16.2.12)$$

для прямоугольников  $Y$ , которую мы докажем ниже. Соответствующая редукция в случае  $\nu = 3$  проводится следующим образом. Вначале, пользуясь неравенством Гёльдера, мы сводим задачу к случаю, когда  $Q_3$  есть сумма по непересекающимся парам. (В результате условие  $|\xi| \leq 1$  заменяется условием  $|\xi| \leq 4$ .) Далее применяем следствие 10.5.8, заменив квадрат  $\Delta_j$  прямоугольником  $\Delta \cup \Delta'$ , где  $(\Delta, \Delta') \in \mathcal{F}_3$ . Таким образом, необходимо оценить среднее с  $\nu = 3$  величиной (16.2.12) в случае, когда  $Y$  есть прямоугольник  $2L_1 \times L_2$ , а  $\xi_{ij}^{(3)} \neq 0$  только для  $(\Delta_i, \Delta_j)$ , для которых объединение  $\Delta_i \cup \Delta_j$  принадлежит множеству  $\mathcal{F}$ , состоящему из  $L_1 L_2$  непересекающихся прямоугольников  $2 \times 1$ , покрывающих  $Y$ .

Среднее в конечном объеме  $\langle \cdot \rangle_\Lambda$ , определяемое мерой  $d\mu_\Lambda$  вида (11.2.1), сходится к среднему  $\langle \cdot \rangle$  при  $\Lambda \uparrow R^2$ . Поэтому

$$\langle \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, Y) \rangle \leq 2 \langle \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, Y) \rangle_\Lambda, \quad (16.2.13)$$

если  $\Lambda$  содержит достаточно большое множество, зависящее от  $\xi, Y, \lambda$  и  $\nu$ . Допустим, что  $\Lambda \supset \Lambda(\xi, Y, \lambda, \nu)$ . Мы будем оценивать (16.2.13) при фиксированных  $(\xi, Y, \lambda, \nu)$ , но получим оценку  $\exp [K (\ln \lambda)^2 |Y|]$ , в которой  $K$  не зависит от  $(\xi, Y, \lambda, \nu)$ . Не теряя общности, можно выбрать в качестве  $\Lambda$  прямоугольник  $L \times T$ , удовлетворяющий условиям  $\lambda^{-3/2} \leq L \ll T$ .

Следующий шаг оценки величины (16.2.13) состоит в том, что  $Y$  увеличивается по сравнению с  $\Lambda$  до тех пор, пока не будет выполнено условие  $|A| \leq \leq 4|Y|$ . Применим несимметричную оценку по методу многократных отражений, доказанную в теореме 12.4.2, положив  $B = \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, Y)$  и  $K = Y$ . Тогда  $|A^{(n)}| \leq 4|K^{(n)}|$  и  $B^{(n)} = \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, K^{(n)})$ . Условие (12.4.9), налагаемое на  $Z(\Lambda)$ , вытекает из оценки (16.2.9) предложения 16.2.4 в случае  $\xi \equiv 0$ . Таким образом, осталось оценить

$$\langle B^{(n)} \rangle_\Lambda = \langle \exp Q_\nu(\xi^{(\nu)}, K^{(n)}) \rangle_\Lambda = Z(\Lambda)^{-1} \int \exp [Q_\nu(\xi^{(\nu)}, K^{(n)}) - V(\Lambda)] d\varphi_C,$$

где  $\Lambda = \Lambda^{(n)}$ . Для доказательства (16.2.12) достаточно получить оценку

$$\langle B^{(n)} \rangle_{\Lambda^{(n)}} \leq \exp [K (\ln \lambda)^2 |\Lambda^{(n)}|]. \quad (16.2.14)$$

Из предложения 16.2.4 в случае  $\xi = 0$  вытекает, что  $Z(\Lambda^{(n)})$  оценивается снизу величиной  $\exp[-K|\Lambda^{(n)}|]$ . Оценка сверху для  $\int \exp[Q_1 - V] d\varphi_C$  также следует из предложения 16.2.4. При  $\nu = 2, 3$  применяем неравенство Шварца:

$$\int \exp[Q_\nu - V] d\varphi_C \leq \left\{ \int \exp[2Q_\nu] d\varphi_C \cdot \int \exp[-2V] d\varphi_C \right\}^{1/2}.$$

Два множителя в правой части оцениваются сверху с помощью предложений 16.2.5 и 16.2.4 соответственно. ■

*Доказательство предложения 16.2.4.* Применяя масштабное тождество (8.6.26) с  $\alpha = \Lambda^{1/2}$ , получаем (в обозначениях § 8.6)

$$\int \exp[-W] d\varphi_C = \int \exp[-:P(\varphi, f):_{C_\emptyset}] d\varphi_{C_B}. \quad (16.2.15)$$

Здесь  $C_\emptyset = (-\Delta + I)^{-1}$  и  $C_B = (-\Delta_{\partial(\lambda^{1/2}\Lambda)} + I)^{-1}$ . Пусть  $\chi_X(x)$  обозначает характеристическую функцию множества  $X$ . Тогда

$$f_4 = \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda}, \quad f_2 = \{-2\lambda^{-1} + \lambda^{-1/2}\xi(x/\sqrt{\lambda})\} \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda},$$

$$f_0 = \{\lambda^{-2} - \lambda^{-3/2}\xi(x/\sqrt{\lambda})\} \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda}.$$

В качестве следующего шага произведем виково переупорядочение полинома  $P$ . Для этого воспользуемся преобразованием (8.6.1) и найдем пару функций  $g = (g_0, g_2)$ , удовлетворяющую уравнению

$$:P(\varphi, f):_{C_\emptyset} = :P(\varphi, f + g):_{C_B}.$$

Тогда

$$g_2 = -6\delta c(x) \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda},$$

$$g_0 = \{3(\delta c(x))^2 + 2\lambda^{-1}\delta c(x) - \lambda^{-1/2}\xi(x/\sqrt{\lambda})\delta c(x)\} \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda}.$$

Предварительно заметим, что

$$|\delta c(x)| \leq O(1)e^{-d}(1 + |\ln d|), \quad (16.2.16)$$

где  $d = \text{dist}(x, \partial(\lambda^{1/2}\Lambda))$ . Следовательно,

$$\left| \int g_0(x) dx \right| \leq K|\Lambda|, \quad (16.2.17)$$

где константа  $K$  зависит только от  $\|\xi\|_{L_\infty}$ . Здесь мы воспользовались тем фактом, что  $|\lambda^{1/2}\Lambda| = \lambda|\Lambda|$ . В силу неравенства (16.2.17), вклад, отвечающий  $g_0$ , при доказательстве (16.2.9) можно не учитывать.

(i) *Оценка снизу.* Пусть  $\psi(x) = \varphi(x) + h(x)$  обозначает сдвинутую переменную поля. Функция  $h \in C_0^\infty(\lambda^{1/2}\Lambda)$  выбирается ниже. Применяем формулу для сдвига поля (9.1.27')

$$\int \exp[-:P(\varphi, f + g_2):_{C_B}] d\varphi_{C_B} = \int \exp[-:P(\psi, l):_{C_B}] d\psi_{C_B}, \quad (16.2.18)$$

где  $l = \{l_j\}$  — множество констант связи, определяемое самим этим равенством. Согласно замечанию 1 к следствию 10.3.2,

$$\exp\left[-\int l_0(x) dx\right] \leq \int \exp[-:P(\psi, l):_{C_B}] d\psi_{C_B},$$

и можно выбрать  $h$  так, чтобы оптимизировать эту оценку. В частности, выбирая  $h$  специальным образом, получим верхнюю оценку

$$\int l_0(x) dx \leq K |\Lambda|. \quad (16.2.19)$$

Из нее следует нижняя оценка (16.2.9). Заметим, что

$$\begin{aligned} \int l_0(x) dx &= P(h, f + g_2) + \frac{1}{2} \langle h, C_B^{-1} h \rangle = \\ &= \int_{\lambda^{1/2}\Lambda} [(h(x)^2 - \lambda^{-1})^2 + \lambda^{-1/2} (h(x)^2 - \lambda^{-1}) \xi(x/\sqrt{\lambda}) - \\ &\quad - 6 \delta c(x) h(x)^2] dx + \frac{1}{2} \langle h, (-\Delta + I) h \rangle. \end{aligned} \quad (16.2.20)$$

Пусть  $h(x) = \lambda^{-1/2} \chi_s(x)$ , где  $\chi_s$  — сглаженная характеристическая функция множества  $\lambda^{1/2}\Lambda$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \chi_s(x) \leq 1, \quad \chi_s \in C_0^\infty(\lambda^{1/2}\Lambda), \\ \chi_s(x) = 1, \quad \text{если } \text{dist}(x, \partial(\lambda^{1/2}\Lambda)) \geq 1. \end{aligned}$$

Кроме того, мы выбираем  $\chi_s$  так, что

$$|\nabla \chi_s(x)| \leq \text{const}, \quad (16.2.21)$$

где константа не зависит от  $\lambda$ ,  $\Lambda$ . Заметим, что

$$\nabla \chi_s(x) = 0, \quad \text{если } \text{dist}(x, \partial(\lambda^{1/2}\Lambda)) \geq 1. \quad (16.2.22)$$

Используя (16.2.21—22) и предположение  $\lambda^{-3/2} \leq L$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle h, (-\Delta + I) h \rangle &= (2\lambda)^{-1} (\|\nabla \chi_s\|^2 + \|\chi_s\|^2) \leq \\ &\leq (2\lambda)^{-1} \{ \text{const } \lambda^{1/2} (L + T) + \lambda |\Lambda| \} \leq \\ &\leq \text{const} \{ \lambda^{-1/2} (L + T) + |\Lambda| \} \leq \text{const } |\Lambda|. \end{aligned}$$

Таким образом, второй член в (16.2.20) удовлетворяет оценке (16.2.19).

Оценим теперь первый член. Для этого заметим, что  $h(x)^2 - \lambda^{-1} \equiv 0$  при  $\text{dist}(x, \partial(\lambda^{1/2}\Lambda)) \leq 1$ . Кроме того,  $0 \leq \lambda^{-1} - h(x)^2 \leq 2\lambda^{-1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int [(h(x)^2 - \lambda^{-1})^2 + \lambda^{-1/2} (h(x)^2 - \lambda^{-1}) \xi(x/\sqrt{\lambda})] dx &\leq \\ &\leq 2(4\lambda^{-2}) \lambda^{1/2} (L + T) + 4\lambda^{-3/2} \|\xi\|_{L_\infty} \lambda^{1/2} (L + T) \leq \\ &\leq \text{const } \lambda^{-3/2} (L + T) \leq \text{const } |\Lambda|, \end{aligned}$$

где константа зависит только от  $\|\xi\|_{L_\infty}$ . Наконец, учитывая (16.2.16), имеем

$$\left| \int \delta c(x) h(x)^2 dx \right| \leq \lambda^{-1} \int_{\lambda^{1/2}\Lambda} |\delta c(x)| dx \leq \text{const } \lambda^{-1} \lambda |\Lambda| \leq \text{const } |\Lambda|.$$

Суммируя эти оценки, получаем (16.2.19).

(ii) *Оценка сверху.* Мы получим искомую оценку сверху в (16.2.9) из оценок для единичных квадратов, покрывающих  $\lambda^{1/2}\Lambda$ . Воспользуемся неравенством об-

условленности (10.3.7) и оценим (16.2.15) сверху. Учитывая (16.2.17), получаем, что

$$\int \exp [-W] d\varphi_C = \int \exp [-:P(\varphi, f+g):_{C_B}] d\varphi_{C_B} = Z_B(f+g) \leq \leq \prod_{\Delta} Z_N((f+g)\chi_{\Delta}) \leq \exp [K|\Lambda|] \prod_{\Delta} Z_N((f+g_2)\chi_{\Delta}).$$

Здесь  $Z_N$  обозначает статистическую сумму, отвечающую ковариационному оператору  $C_N = (-\Delta_N + I)^{-1}$  с граничными условиями Неймана. При этом оператор  $C_N$  задает и виково упорядочение, и ковариацию гауссовой меры. Оценим сверху  $Z_N((f+g_2)\chi_{\Delta})$ . Для этого мы получим оценку снизу для  $:P(\varphi_{\kappa}, (f+g_2)\chi_{\Delta}):_{C_N}$ . Используя затем эту оценку и неравенство (8.6.23), получим, что

$$Z_N((f+g_2)\chi_{\Delta}) \leq \exp [K\lambda^{-1}(\ln \lambda)^2], \quad (16.2.23)$$

откуда вытекает требуемое неравенство

$$\int \exp [-W] d\varphi_C \leq \exp [K\lambda^{-1}\{1 + (\ln \lambda)^2\} \lambda |\Lambda|] \leq \exp [\text{const} (\ln \lambda)^2 |\Lambda|].$$

(Заметим, что  $Z_N((f+g_2)\chi_{\Delta})$  можно было бы оценить с помощью предложения 8.6.2, однако в этой оценке имеется сильная расходимость при  $\lambda \rightarrow 0$ .)

Для того чтобы оценить снизу  $:P(\varphi_{\kappa}, (f+g_2)\chi_{\Delta}):_{C_N}$ , воспользуемся формулой викова упорядочения (8.5.5) и запишем

$$-\int_{\Delta} B(x) dx \leq \int_{\Delta} [A(x)^2 - B(x)] dx = :P(\varphi_{\kappa}, (f+g_2)\chi_{\Delta}):_{C_N}.$$

Здесь  $A$  определяется с помощью приведения к полному квадрату, а  $B$  состоит из остальных членов, причем в  $B$  расходимости старшего порядка сокращаются

$$A(x) = \left\{ \varphi_{\kappa}(x)^2 + \frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2} g_2(x) - 3c_{\kappa}(x) \right\} \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda}(x),$$

$$B(x) = \left\{ \frac{1}{4} (f_2(x) + g_2(x) - 6c_{\kappa}(x))^2 - f_0(x) + c_{\kappa}(x) (f_2(x) + g_2(x)) - 3c_{\kappa}(x)^2 \right\} \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda}(x) = \left\{ 6\lambda^{-1} \delta c(x) - 3\lambda^{-1/2} \xi \delta c + 9(\delta c(x))^2 - 2c_{\kappa}(x) (f_2(x) + g_2(x)) + (4\lambda)^{-1} \xi^2 + 6c_{\kappa}(x)^2 \right\} \chi_{\lambda^{1/2}\Lambda}(x),$$

где  $c_{\kappa}(x) = \delta_{\kappa} * C_N * \delta_{\kappa} = O(\ln \kappa)$ , а функция  $\delta c(x)$  определена выше. Таким образом,

$$\int_{\Delta} B(x) dx \leq \text{const} [\lambda^{-1} + (\ln \kappa)^2 + \lambda^{-1} \ln \kappa]$$

и константа зависит только от  $\|\xi\|_{L_{\infty}}$ . Заметим, что норма  $M((f+g_2)\chi_{\Delta})$ , определяемая выражением (8.6.6), удовлетворяет неравенствам  $\text{const} \lambda^{-1} \leq M((f+g_2)\chi_{\Delta}) \leq \text{const} \lambda^{-1}$ , где константы зависят только от  $\|\xi\|_{L_{\infty}}$ . Следовательно,

$$-\{1 + M((f+g_2)\chi_{\Delta})\} (\ln \kappa)^2 \leq :P(\varphi_{\kappa}, (f+g_2)\chi_{\Delta}):_{C_N}. \quad (16.2.24)$$



Применим оценку (8.6.23), положив  $m = M = 1$ ,  $\Lambda = \Delta$ ,  $n = 4$ ,  $L = 0$ . В результате получим требуемое неравенство

$$Z_N((f + g_2) \chi_\Delta) \leq \exp [K \lambda^{-1} (\ln \lambda)^2]. \blacksquare$$

*Доказательство предложения 16.2.5.* С учетом неравенства Шварца случаи  $Q_2$  и  $Q_3$  можно оценивать по отдельности. При этом область значений увеличивается в два раза. Рассмотрим вначале  $Q_3$ . Как и при доказательстве теоремы 16.2.3, применяя неравенство Гёльдера, мы можем считать, что  $Q_3$  есть сумма по непересекающимся парам квадратов  $(\Delta, \Delta')$ . Пусть  $\mathcal{B}$  обозначает множество таких пар.

Положим  $C_N = (-\Delta_N + \lambda)^{-1}$ , где оператор  $\Delta_N$  определяется граничными условиями Неймана на  $\partial(\Delta \cup \Delta')$  для всех пар  $(\Delta, \Delta') \in \mathcal{B}$ . По неравенству обусловленности предложения 10.3.1

$$\int \exp [Q_3(\xi^{(3)}, X)] d\varphi_C \leq \int \exp [Q_3(\xi^{(3)}, X)] d\varphi_{C_N}. \quad (16.2.25)$$

Пусть  $(\Delta, \Delta') \in \mathcal{B}$ ; положим  $h \equiv \chi_\Delta - \chi_{\Delta'}$ . Так как правая часть неравенства (16.2.24) факторизуется, мы получаем

$$\int \exp [Q_3(\xi^{(3)}, X)] d\varphi_{C_N} \leq \exp \left[ \frac{1}{2} \langle h, C_N h \rangle \| \xi^{(3)} \|_{L_\infty}^2 | \mathcal{B} | \right].$$

Функция  $h$  ортогональна функциям, постоянным на  $\Delta \cup \Delta'$ . Поэтому  $h$  ортогональна основному состоянию оператора  $-\Delta_N$  в  $L_2(\Delta \cup \Delta')$ . В этом гильбертовом пространстве  $C_N$  — компактный оператор. Пусть  $E_1$  — наименьшее ненулевое собственное значение оператора  $-\Delta_N$ . Тогда справедлива оценка, не зависящая от  $\lambda$ :

$$\langle h, C_N h \rangle \leq (E_1 + \lambda)^{-1} \| h \|_{L_2}^2 \leq 2E_1^{-1}.$$

Так как  $|\mathcal{B}| \leq |X|$ , мы получаем требуемое неравенство

$$\int \exp [Q_3(\xi^{(3)}, X)] d\varphi_C \leq \exp [K |X|],$$

в котором константа  $K$  не зависит от  $\lambda, X, \Lambda$ .

Рассмотрим теперь случай, отвечающий  $Q_2$ . Вначале произведем виково перепорядочение полинома  $Q_2$  по отношению к ковариации  $C = (-\Delta_{\partial\Lambda} + \lambda)^{-1}$  с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Lambda$ . Тогда

$$:Q_2(\xi^{(2)}, X):_{\lambda^{1/2}} = :Q_2(\xi^{(2)}, X):_C + \alpha,$$

где  $\alpha$  — константа, удовлетворяющая равномерной по  $\lambda$  оценке  $|\alpha| \leq O(|X|)$ . Таким образом,  $\alpha$  можно в дальнейшем не учитывать.

Пусть  $C_N = (-\Delta_N + \lambda)^{-1}$  обозначает теперь ковариационный оператор с граничными условиями Неймана на границе всех квадратов решетки  $\Delta$ . Согласно неравенству обусловленности предложения 10.3.1,

$$\int \exp [Q_2(\xi^{(2)}, X)] d\varphi_C \leq \prod_i \int \exp [ :Q_2(\xi_i^{(2)}, \Delta_i):_{C_N} ] d\varphi_{C_N}.$$

Достаточно показать, что каждый член в этом произведении не превосходит некоторой константы, не зависящей от  $\lambda$ .

Пусть  $\chi_\Delta$  обозначает оператор умножения на  $\chi_\Delta$ , а  $P_\Delta$  — оператор ортогонального проектирования на подпространство констант в  $L_2(\Delta)$ . Тогда

$$|\ln \lambda|^{-1} \xi^{(2)} : \varphi^2(\Delta) - \varphi(\Delta)^2 :_{C_N} = \int : \varphi(x) \varphi(y) :_{C_N} v(x, y) dx dy,$$

где  $v(x, y)$  — ядро оператора  $v = |\ln \lambda|^{-1} \xi^{(2)} (\chi_\Delta - P_\Delta)$ . Из (9.1.26b) следует, что

$$\begin{aligned} \int \exp [ : Q_2(\xi^{(2)}, \Delta) :_{C_N} ] d\varphi_{C_N} &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \ln(I - A) + A \} \right] \leq \\ &\leq \exp \left[ \text{const} \|A\|_{\text{HS}}^2 \right], \end{aligned}$$

где  $A = C_N^{1/2} v C_N^{1/2}$ , а  $\|A\|_{\text{HS}}$  обозначает норму Гильберта — Шмидта оператора  $A$ . Последнее неравенство выполняется, если  $\|A\|_{\text{HS}} < 1$ .

Подпространство констант принадлежит ядру оператора  $\chi_\Delta - P_\Delta$  в  $L_2(\Delta)$  и  $0 \leq \chi_\Delta - P_\Delta \leq I$ . Кроме того,  $(-\Delta_N + \lambda)^{-1}$  — компактный оператор в  $L_2(\Delta)$ . Следовательно,

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 \leq |\ln \lambda|^{-2} \xi^{(2)2} \text{Tr} (C_N (\chi_\Delta - P_\Delta) C_N) = |\ln \lambda|^{-2} \xi^{(2)2} \sum_{j \neq 0} (E_j + \lambda)^{-2},$$

где  $E_j = \text{const} |j|^2 (j \in \mathbb{Z}^2)$  — ненулевые собственные значения оператора  $-\Delta_N$  в  $L_2(\Delta)$ . Сумма  $\sum_{j \neq 0} E_j^{-2}$  сходится, поэтому  $\|A\|_{\text{HS}} < 1$  при достаточно малых  $\lambda$ . ■

### 16.3 Сохранение симметрии (случай $d = 2$ )

Рассмотрим векторнозначные поля  $\varphi$ , принимающие значения  $\varphi(x) \in \mathcal{X}$ , где  $\mathcal{X}$  есть  $R^n$  или  $S^{n-1}$ . Можно рассматривать также поля, для которых  $\mathcal{X}$  — алгебра Ли или группа Ли. Функционал действия  $\mathcal{A}$  определяется на пространстве  $\mathcal{X}$  или на полях, принимающих значения в  $\mathcal{X}$ . Обычно функционал  $\mathcal{A}$  инвариантен относительно группы симметрий  $G$  пространства  $\mathcal{X}$ . Например, в § 5.5 рассмотрена модель со взаимодействием изингова типа, в которой спиновые переменные  $\sigma(x)$  принимают значения в  $S^1$  и при этом взаимодействие инвариантно относительно группы  $U(1)$  вращений  $S^1$ . Эта модель, называемая моделью ротаторов или XY-моделью, была предложена для описания поверхностных явлений и плавления. Аналогичная модель изингова типа со спинами, принимающими значения в  $S^2$ , называется моделью Гейзенберга или XYZ-моделью и используется для качественного описания ферромагнетизма. Наконец, векторные  $\varphi^4$ -модели применяются в физике элементарных частиц, где их называют полями Хигса.

В случае векторнозначных моделей качественная теория фазовых переходов более сложна. Пусть  $\mathcal{M}_{\text{кл}}$  есть пространство конфигураций  $\varphi$ , минимизирующих  $\mathcal{A}$ . Обычно такие конфигурации являются постоянными конфигурациями, т. е.  $\varphi(x) = \text{const}$ , поэтому множество  $\mathcal{M}_{\text{кл}}$  отождествляется с некоторым подмножеством пространства  $\mathcal{X}$ . Картина, основанная на приближении среднего поля, предсказывает существование фазовых переходов, нарушающих симметрию, и появление при низких температурах не-

скольких фаз, соответствующих точкам  $\Phi_{\text{кл}} \in \mathcal{M}_{\text{кл}}$ . Например, в случае модели Изинга со спиновым пространством  $S^1$  имеется однопараметрическое семейство конфигураций  $\varphi = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta = \theta(x) = \text{const} \in [0, 2\pi)$ , минимизирующих взаимодействие, т. е.  $\mathcal{M}_{\text{кл}} = S^1$ . (Для сравнения: в обычной модели Изинга со спиновым пространством  $S^0$  множество  $\mathcal{M}_{\text{кл}} = \{\pm 1\} = S^0$  дискретно.)

Для полей, определенных в пространствах малой размерности, т. е. для полей  $\varphi(x)$ ,  $x \in R^d$ , где  $d$  мало, фазы, предсказываемые приближением среднего поля, не существуют ни при каких сколь угодно низких положительных температурах, а появляются только при нулевой температуре. Определим для данного взаимодействия наибольшую размерность  $d_{\text{кр}}$ , при которой фазы, отвечающие приближению среднего поля, существуют только при нулевой температуре. Для однокомпонентной ( $n = 1$ ) модели  $P(\varphi)_d$  и для моделей Изинга картина среднего поля применима, когда размерность  $d > 1$ . Кроме того, методами § 3.3 было показано, что модели  $P(\varphi)_1$  эквивалентны квантовой механике с одной степенью свободы и имеют единственное основное состояние. Следовательно, скалярные (с числом компонент  $n = 1$ ) модели имеют критическую размерность  $d_{\text{кр}} = 1$ . В случае  $d > d_{\text{кр}}$  существуют фазовые переходы первого рода при достаточно низких температурах.

Из результатов, доказанных в этом параграфе и в § 16.4, следует, что в случае модели Изинга со спиновым пространством  $S^{n-1}$ , где число компонент  $n \geq 2$ , критическая размерность  $d_{\text{кр}} = 2$ . При  $d = 2$  равновесное состояние для модели ротаторов ( $S^1$ ) единственно, т. е. при данной температуре существует только одно равновесное состояние. Этот факт выводится из того, что в этом случае давление, рассматриваемое как функционал в некотором банаховом пространстве потенциалов, дифференцируемо [Bricmont, Fontaine, Landau, 1977]). По построению равновесное состояние инвариантно относительно действия группы вращений  $G$  в пространстве  $R^n \supset S^{n-1}$ . В силу единственности, это состояние является чистой фазой. Таким образом, говоря физическим языком, в этом случае нет нарушения симметрии. Единственность равновесного состояния (в указанном выше смысле) гарантирует отсутствие скачков у любой термодинамической функции и, следовательно, отсутствие фазовых переходов первого рода. Тем не менее, как объяснялось в § 5.5, не исключено существование фазовых переходов более высокого рода и вырождение состояний, близких к равновесному.

В настоящее время не существует математически строгой теории, позволяющей определять  $d_{\text{кр}}$ . Примеры, которые удается исследовать, указывают на важную роль двойственных переменных (т. е. переменных, отвечающих преобразованию Фурье) для описания элементарных возбуждений основного состояния. В скалярных  $P(\varphi)$ -моделях и в модели Изинга такие переменные определяются границами фаз. Поскольку действие, соответствующее от-

дельной связной компоненте границы фаз (контуру), растет пропорционально  $\beta$  и размеру этого контура, большие контуры подавляются из-за их экспоненциально малой активности  $O(\exp(-\beta \cdot \text{размер}))$ . Поэтому при больших  $\beta$  они образуют разреженный газ, характеризующий неупорядоченную фазу для  $P(\varphi)$ -систем и модели Изинга. В случае модели ротаторов двойственными переменными являются вихри и диполи вихрь-антивихрь, см. § 5.5.

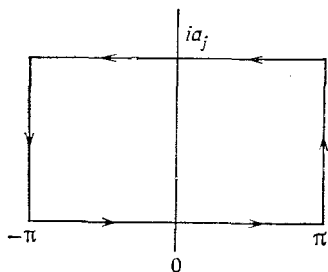
Ниже мы докажем теорему Хоенберга — Мермина — Вагнера в той форме, в какой она приведена в работе [McVeyan, Spencer, 1977]. Из этой теоремы следует, что для  $S^{n-1}$ -модели Изинга с числом компонент  $n \geq 2$  размерность  $d_{кр}$  не меньше 2. Для простоты мы ограничимся рассмотрением модели ротаторов. Положим

$$H = - \sum_{б.с} \sigma_i \sigma_j, \quad (16.3.1)$$

где  $\sigma_i \in S^1$ , а суммирование распространено на все пары ближайших соседей  $(i, j)$ . Мы можем записать спин в виде  $\sigma = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Тогда  $H$  примет вид

$$H = - \sum_{б.с} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (16.3.2)$$

Рис. 16.1. Интегрирование по  $\theta_j$  в (16.3.4).



**Теорема 16.3.1.** Пусть  $\epsilon > 0$ . Тогда существует такое  $\beta(\epsilon) < \infty$ , что для всех  $\beta > \beta(\epsilon)$  выполняются неравенства

$$0 \leq \langle \sigma_k \cdot \sigma_l \rangle \leq |k - l|^{-(1-\epsilon)/(2\beta)}. \quad (16.3.3)$$

**Замечание.** В силу теоремы 16.1.1, убывание корреляций (16.3.3) наводит на мысль о единственности основного состояния и отсутствии фазового перехода первого рода. Тем не менее доказать эти утверждения, используя лишь (16.3.3), не удастся. Доказательство единственности можно найти в работе [Bricmont, Fontaine, Landau, 1977]. Там же рассматриваются непрерывные  $P(\varphi)$ -модели. Случай произвольной группы Ли  $G$  изучается в работе [Dobrushin, Shlosman, 1975], где доказана инвариантность равновесного состояния относительно группы  $G$  для случая, когда значения спина ограничены, или при некоторых других предположениях технического характера<sup>1)</sup>. Квантовая модель Гейзенберга рассмотрена в книге [Ruelle, 1969].

<sup>1)</sup> В работе Добрушина и Шлосмана рассмотрена система с произвольным короткодействующим дважды дифференцируемым потенциалом взаимодействия, инвариантным относительно действия компактной связной группы Ли  $G$ . Доказано, что всякое равновесное состояние инвариантно относительно группы  $G$ . Условия гладкости потенциала, по-видимому, существенны. Оценки убывания кор-

**Доказательство.** Положительность корреляций вытекает из следствия 4.7.2. Для доказательства оценки сверху мы используем следующее представление:

$$\langle \sigma_k, \sigma_l \rangle = Z^{-1} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \beta \sum_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right\} \exp \{i(\theta_k - \theta_l)\} \prod_i d\theta_i. \quad (16.3.4)$$

Предполагается, что система рассматривается в конечном множестве  $\Lambda$  на решетке, и доказывается, что оценка убывания корреляций (16.3.3) равномерна по  $\Lambda$ . Вопросы сходимости при предельном переходе к бесконечному объему здесь не обсуждаются.

Используя периодичность и аналитичность подынтегрального выражения в (16.3.4) как функции от  $\theta_1, \theta_2, \dots$ , мы делаем замену переменных  $\theta_j \rightarrow \theta_j + ia_j$ , где  $a_j$  — вещественные константы, выбираемые ниже. Другими словами, мы пользуемся теоремой Коши: интеграл по любому замкнутому контуру на комплексной плоскости  $\theta_j$  равен нулю (рис. 16.1). Интегралы по боковым отрезкам взаимно сокращаются в силу периодичности. Поэтому интеграл по нижнему отрезку равен интегралу по верхнему отрезку с обратным знаком. Экспонента  $e^{-\beta H}$  преобразуется следующим образом:

$$\cos(\theta_i - \theta_j) \rightarrow \cos(\theta_i - \theta_j) \operatorname{ch}(a_i - a_j) - i \sin(\theta_i - \theta_j) \operatorname{sh}(a_i - a_j). \quad (16.3.5)$$

Так как  $|e^{ix}| = 1$  при вещественных  $x$ , мы получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \sigma_k \cdot \sigma_l \rangle &\leq \exp[-(a_k - a_l)] Z^{-1} \int \exp \left[ \beta \sum \cos(\theta_i - \theta_j) \operatorname{ch}(a_i - a_j) \right] \prod_i d\theta_i = \\ &= \exp[-(a_k - a_l)] Z^{-1} \int \exp \left[ \beta \sum \cos(\theta_i - \theta_j) (1 + \operatorname{ch}(a_i - a_j) - 1) \right] \prod_i d\theta_i \leq \\ &\leq \exp[-(a_k - a_l)] \exp \left[ \beta \sum_{i,j} (\operatorname{ch}(a_i - a_j) - 1) \right]. \end{aligned} \quad (16.3.6)$$

Положим теперь

$$a_j = \beta^{-1} [C(j, k) - C(j, l)] = \beta^{-1} \langle \delta_j, (-\Delta)^{-1} (\delta_k - \delta_l) \rangle, \quad (16.3.7)$$

где  $C(i, j) = C(i - j)$  — ядро функции Грина  $(-\Delta)^{-1}$ , а  $\Delta$  — оператор Лапласа на решетке. Из (16.3.7) следует, что  $a_j$  ограничены равномерно по  $j$  и фактически

$$|a_i| \leq \operatorname{const} \beta^{-1}. \quad (16.3.8)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \beta \sum (\operatorname{ch}(a_i - a_j) - 1) &\leq \frac{\beta}{2} (1 + O(\beta^{-2})) \sum_{i,j} (a_i - a_j)^2 = \\ &= \left( \frac{\beta}{2} + O(\beta^{-1}) \right) \langle a, -\Delta a \rangle = \left( \frac{\beta}{2} + O(\beta^{-1}) \right) \beta^{-1} (a_k - a_l) = \\ &= \frac{1}{2} (a_k - a_l) + O(\beta^{-2}) (a_k - a_l). \end{aligned}$$

Используя (16.3.6), получаем, что при достаточно больших  $\beta > \beta(\varepsilon)$

$$\langle \sigma_k \cdot \sigma_l \rangle \leq \exp \left[ -\frac{1}{2} (a_k - a_l)(1 + \varepsilon) \right]. \quad (16.3.9)$$

Заметим, что, в силу (16.3.7),

$$0 \leq a_k - a_l = 2\beta^{-1}(C(0) - C(k - l)). \quad (16.3.10)$$

Положительность следует из того, что  $C(k)$  как положительно определенная функция принимает максимальное значение в начале координат. Асимптотическое поведение решеточной функции Грина при  $d = 2$  имеет вид

$$C(0) - C(k) \sim \frac{1}{2\pi} \ln |k|, \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (16.3.11)$$

Подставляя (16.3.10—11) в (16.3.9), приходим к утверждению теоремы. ■

Из корреляционных неравенств, приведенных в следствии 4.7.2, вытекает, что  $\langle \sigma_k \cdot \sigma_l \rangle - \langle \sigma_k \rangle \langle \sigma_l \rangle \geq 0$ . Поскольку среднее  $\langle \cdot \rangle$  трансляционно-инвариантно, имеем

$$0 \leq \langle \sigma_k \rangle^2 \leq \lim_{|k-l| \rightarrow \infty} \langle \sigma_k \cdot \sigma_l \rangle = 0.$$

Таким образом, доказано

**Следствие 16.3.2.** При достаточно больших  $\beta$

$$\langle \sigma_k \rangle = 0. \quad (16.3.12)$$

**Замечание.** В доказанной теореме можно отказаться от предположения о том, что  $\beta$  велико, и получить оценку с меньшей скоростью убывания корреляций. При этом мы докажем, в частности, равенство (16.3.12) для всех  $\beta$ . Доказательство проводится тем же способом, что и выше, но вместо (16.3.7) мы полагаем

$$a_j = \varepsilon(1 + \beta)^{-1}[C(j, k) - C(j, l)]. \quad (16.3.13)$$

Выберем далее  $0 < \varepsilon < 1$  так, чтобы оптимизировать оценку. В результате будет получена

**Теорема 16.3.3.** Существует такая константа  $0 < c < 1$ , что при всех  $\beta$

$$0 \leq \langle \sigma_k \cdot \sigma_l \rangle \leq |k - l|^{-c/(1+\beta)} \quad (16.3.14)$$

$$\text{и } \langle \sigma_k \rangle = 0. \quad (16.3.15)$$

## 16.4 Нарушение симметрии (случай $d \geq 3$ )

В этом параграфе мы покажем, что для векторных моделей в размерности  $d \geq 3$  имеет место нарушение симметрии и существуют фазовые переходы первого рода. Это утверждение дополняет результат предыдущего параграфа о сохранении симметрии в таких системах при  $d = 2$ . Методы, рассматриваемые ниже, применимы также к случаю непрерывного поля  $(\varphi^2)^2$  в размерности  $d = 3$ .

Для того чтобы избежать некоторых технических трудностей, мы будем изучать решеточную модель с периодическими граничными условиями. Мы предполагаем существование предельной меры при переходе к бесконечному объему и не доказываем, что периодические граничные условия в пределе эквивалентны условиям Дирихле, используемым в других местах книги.

Рассмотрим гамильтониан (на периодической решетке)

$$H(\Lambda) = - \sum_{\substack{|i-j|=1 \\ i, j \in \Lambda}} \varphi_i \cdot \varphi_j - \sum_{j \in \Lambda} \mathbf{h} \cdot \varphi_j \quad (16.4.1)$$

и распределение отдельного спина  $d\mu_i(\varphi)$ , убывающее на бесконечности быстрее любого гауссова распределения. Таким образом, предполагается, что для любого  $a < \infty$

$$\int e^{a|\varphi|^2} d\mu_i(\varphi) < \infty, \quad (16.4.2)$$

где  $d\mu_i(\varphi)$  — положительная  $SO(n)$ -инвариантная мера в  $R^n$ . Мы предполагаем, что шаг решетки равен 1, так что при преобразовании Фурье компоненты импульса  $p_\alpha \in [-\pi, \pi]$ . Распределение отдельного спина можно, например, выбрать в виде

$$d\mu_i(\varphi) = \exp[-P(|\varphi|)] d\varphi \quad (16.4.3)$$

или

$$d\mu_i(\varphi) = \delta(|\varphi|^2 - 1) d\varphi. \quad (16.4.4)$$

Мера  $d\mu_\Lambda$  в объеме  $\Lambda$  определяется выражением

$$d\mu_\Lambda = Z^{-1} \exp[-\beta H(\Lambda)] \prod_{i \in \Lambda} d\mu_i(\varphi_i). \quad (16.4.5)$$

Так как гамильтониан  $H(\Lambda)$  вида (16.4.1) с периодическими граничными условиями инвариантен относительно группы симметрий  $SO(n)$ , то в изучаемых моделях

$$\langle \varphi_i \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{h} = 0. \quad (16.4.6)$$

Рассмотрим двухточечную функцию  $\langle \varphi_0 \cdot \varphi_l \rangle$ . Ее преобразование Фурье в предельном переходе к бесконечному объему равно

$$\tilde{S}(p) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{l \in Z^d} e^{-ip \cdot l} \langle \varphi_0 \cdot \varphi_l \rangle.$$

Доказательство существования фазовых переходов, предложенное в работе [Fröhlich, Simon, Spencer, 1976], основано на инфракрасной (или градиентной) оценке; см. также [Glimm, Jaffe, 1970a].

**Теорема 16.4.1.** *Существует такая константа  $c > 0$ , что*

$$0 \leq \tilde{S}(p) - (2\pi)^{d/2} c \delta(p) \leq \frac{n}{4\beta \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2)}. \quad (16.4.7)$$

**Замечание 1.** Если шаг решетки равен  $\epsilon$ , то мы получаем в знаменателе  $\epsilon^{-2} \sin^2(\epsilon p_\alpha/2)$  вместо  $\sin^2(p_\alpha/2)$ , и  $4\epsilon^{-2} \sum \sin^2(\epsilon p_\alpha/2) \rightarrow p^2$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Замечание 2.** Собственные значения решеточного оператора Лапласа  $\Delta_p$  с периодическими граничными условиями равны

$$-4 \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2), \quad p_\alpha \in \{\pm 2\pi n_\alpha/L: 0 \leq n_\alpha \leq [L/2]\}, \quad (16.4.8)$$

где  $L = |\Lambda|^{1/d}$  — целое число, равное длине ребра куба  $\Lambda$ , и  $n_\alpha = 0, 1, 2, \dots, [L/2]$ . Соответствующие собственные функции имеют вид  $|\Lambda|^{-1/2} \exp(i(p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_d l_d))$ . Таким образом, правая часть (16.4.7) интегрируема и ее интеграл ограничен равномерно по  $L \geq 1, d \geq 3$ .

**Следствие 16.4.2.** Усеченная двухточечная функция

$$\langle \psi_0 \cdot \psi_l \rangle^T \equiv \langle \psi_0 \cdot \psi_l \rangle - \langle \psi_0 \rangle \cdot \langle \psi_l \rangle$$

стремится к нулю при  $|l| \rightarrow \infty$  в том и только в том случае, если

$$\langle \psi_l \rangle^2 = c. \quad (16.4.9)$$

*Доказательство.* Поскольку выражение (16.4.7) интегрируемо, обратное преобразование Фурье по лемме Римана — Лебега стремится на бесконечности к нулю. Поэтому

$$\langle \psi_0 \cdot \psi_l \rangle = (2\pi)^{-d/2} \int_{|p_\alpha| \leq \pi} \tilde{S}(p) e^{il \cdot p} dp \rightarrow c.$$

Прежде чем доказывать теорему 16.4.1, мы докажем с ее помощью существование фазового перехода для  $n$ -компонентной модели Изинга при  $d \geq 3$ .

**Теорема 16.4.3.** Пусть  $d \geq 3$  и  $\beta$  достаточно велико, так что

$$(2\pi)^{-d/2} n \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \left[ 4 \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2) \right]^{-1} dp < \beta. \quad (16.4.10)$$

В предположении, что распределение отдельного спина имеет вид (16.4.4) и  $\mathbf{h} \equiv 0$ ,

$$\lim_{|l| \rightarrow \infty} \langle \psi_0 \cdot \psi_l \rangle^T \neq 0.$$

При этом равновесное состояние в бесконечном объеме не является чистой фазой.



**Доказательство.** Поскольку  $d \geq 3$ , интеграл в (16.4.10) конечен. По теореме 16.4.1 и в силу условия (16.4.10),

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0^2 \rangle - c &= (2\pi)^{-d/2} \int \tilde{S}(p) dp - c \leq \\ &\leq (2\pi)^{-d/2} (n/\beta) \int \left[ 4 \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2) \right]^{-1} dp < 1. \end{aligned} \quad (16.4.11)$$

Однако в случае ротатора (16.4.4)  $\varphi_0^2 = 1$ . Поэтому  $c > 0$ . Так как  $\langle \varphi \rangle = 0$  в силу (16.4.6), то из (16.4.9) следует, что  $\langle \varphi_0 \cdot \varphi_l \rangle^T$  не стремится к нулю при  $|l| \rightarrow \infty$ . Последнее утверждение теоремы вытекает из доказательства предложения 16.1.3, в котором показано, что равновесное состояние не является чистой фазой. ■

**Замечание.** Теорема применима и к обычной модели Изинга ( $n = 1$ ). В этом случае из теоремы Ли — Янга (теорема 4.5.1) следует, что  $\lim_{|l| \rightarrow \infty} \langle \varphi_0 \varphi_l \rangle^T = 0$  при  $h > 0$ . В силу следствия 16.4.2,  $\langle \varphi \rangle^2 = c$ . Пусть

$$1 - \bar{c} = (2\pi)^{-d/2} (n/\beta) \int \left[ 4 \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2) \right]^{-1} dp,$$

так что неравенство (16.4.11) можно переписать в виде  $1 - c \leq \leq 1 - \bar{c}$ , или  $\bar{c} \leq c$ . Следовательно, константа  $c$  отделена от нуля равномерно по  $h > 0$  и  $\lim_{h \rightarrow 0} \langle \varphi_l \rangle_h \neq 0$ . Таким образом, в модели

Изинга (как было ранее показано в § 5.4) имеется *спонтанная намагниченность* при низких температурах. Теорема Ли — Янга доказана также для моделей ротаторов с числом компонент  $n = 2, 3$  [Dunlop, Newman, 1975], [Dunlop, 1979a, b], поэтому приведенные выше рассуждения дают такое

**Следствие 16.4.4.** В модели ротаторов с числом компонент  $n = 1, 2, 3$  в размерности  $d \geq 3$  при достаточно больших  $\beta$  имеется спонтанная намагниченность:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \varphi_l \rangle_h \neq 0. \quad (16.4.12)$$

Докажем теперь неравенство (16.4.7). Мы будем пользоваться обозначениями § 9.5 для градиента функции на решетке. Введем также следующее обозначение. Пусть функции  $\varphi(l)$  и  $\mathbf{f}(l)$  определены на решетке  $Z^d$  и принимают значения в  $R^n$ . Тогда  $\varphi(\mathbf{f}) = = \sum_{l \in Z^d} \varphi(l) \cdot \mathbf{f}(l)$ . Приводимое ниже доказательство следует работе [Fröhlich, Spencer, 1977].

**Лемма 16.4.5.** Пусть  $\partial$  обозначает прямой решеточный градиент. Пусть функции  $\mathbf{f}_\alpha \in l_2(Z^d)$ ,  $\alpha = 1, \dots, d$ , и принимают зна-

чения в  $R^n$ ,  $f = \{f_\alpha\} \in (l_2(Z^d))^d$ . Тогда

$$\left\langle \exp \left( \sum_{\alpha=1}^d \Phi(\partial_\alpha f_\alpha) \right) \right\rangle \leq \exp \left( (2\beta)^{-1} \|f\|_{l_2}^2 \right), \quad (16.4.13)$$

где  $\|f\|_{l_2}^2 = \sum_{l, \alpha} f_\alpha(l)^2$ .

Доказательство теоремы 16.4.1 в предположении, что доказана лемма 16.4.5. Вычтем 1 из обеих частей неравенства (16.4.13). Подставим  $\epsilon f$  вместо  $f$ , умножим на  $\epsilon^{-2}$  и перейдем к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В силу трансляционной инвариантности среднего  $\langle \cdot \rangle$ , имеем  $\langle \Phi(\partial_\alpha f_\alpha) \rangle = 0$ . В результате получаем, что

$$\left\langle \left( \Phi \left( \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_\alpha \right) \right)^2 \right\rangle \leq \beta^{-1} \|f\|_{l_2}^2. \quad (16.4.14)$$

Возьмем  $f_\alpha = (|\Lambda|^{-1/2} \partial_\alpha^* (-\Delta_p)^{-1/2} e^{ip \cdot l}) \mathbf{v}_r$ , где  $\partial^*$  — обратный решеточный градиент, а  $\mathbf{v}_r$  — единичный базисный вектор в спиновом пространстве  $R^n$ . Используя (16.4.8) и суммируя по  $n$  различным базисным векторам  $\mathbf{v}_r$ , получаем оценку

$$4 \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2) \tilde{S}(p) \leq n/\beta. \quad (16.4.15)$$

Так как  $\langle \Phi_0 \cdot \Phi_l \rangle$  — положительно определенная функция, то ее преобразование Фурье  $\tilde{S}(p)$  определяет положительную меру. Отсюда и из неравенства (16.4.15) следует, что при  $p = 0$  имеется особенность вида  $(2\pi)^{d/2} c \delta(p)$ , где  $c$  — неотрицательная константа. Разделив (16.4.15) на  $4 \sum_{\alpha=1}^d \sin^2(p_\alpha/2)$ , получаем (16.4.7). ■

Доказательство леммы 16.4.5. Мы доказываем лемму для случая конечной периодической решетки (тора)  $\Lambda$ . Поскольку мы предполагаем, что в предельном переходе к бесконечному объему имеется сходимость, лемма справедлива и для всей решетки  $Z^d$ . При доказательстве используется оценка по методу многократных отражений. Перепишем  $\Phi(\partial_\alpha f_\alpha)$  в виде

$$\Phi(\partial_\alpha f_\alpha) = (\partial_\alpha^* \Phi)(f_\alpha) = \sum_{l \in \Lambda} f_\alpha(l) (-\Phi_l + \Phi_{l-e_\alpha}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \left\langle \exp \left( \sum_{\alpha=1}^d \Phi(\partial_\alpha f_\alpha) \right) \exp \left( -\frac{1}{2\beta} \|f\|_{l_2}^2 \right) \right\rangle = \\ &= \frac{\int \exp \left( -\sum_{l, \alpha} \frac{1}{2} \beta (\Phi_l - \Phi_{l-e_\alpha} + \beta^{-1} f_\alpha(l))^2 \right) \prod d\mu_l}{\int \exp \left( -\sum_{l, \alpha} \frac{1}{2} \beta (\Phi_l - \Phi_{l-e_\alpha})^2 \right) \prod d\mu_l}. \end{aligned} \quad (16.4.16)$$

Здесь линейный (пространственно-однородный) член в гамильтониане (16.4.1) (отвечающий внешнему магнитному полю) включен в меру  $d\mu_l$ <sup>1)</sup>. Итак, нужно доказать неравенство  $I \leq 1$ .

<sup>1)</sup> В меры  $d\mu_l$  включаются также лишние множители  $e^{\beta \Phi_l^2}$ . — Прим. перев.

Среднее  $\langle \cdot \rangle$  в (16.4.16) определяется мерой (16.4.5). Из теорем 7.10.3 и 10.4.3 следует, что эта мера положительна при отражениях. Для того чтобы это свойство представить более наглядно, мы, как и в § 7.10, вложим  $\Lambda$  в  $R^{d+1}$ . Возьмем гиперплоскость  $\Pi$ , пересекающую тор  $\Lambda$ , как на рис. 16.2. Спины  $\varphi_i$  разбиваются на четыре подмножества:  $\varphi^\pm$  и  $\sigma^\pm$ . Спины  $\sigma^+$  взаимодействуют со спинами  $\sigma^-$  по ребрам, пересекаемым гиперплоскостью  $\Pi$ . Кроме того, спины  $\sigma^+$  взаимодействуют со спинами  $\varphi^+$ . Спины  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  не взаимодействуют между собой. Спины  $\{\varphi^+, \sigma^+\}$  исчерпываются все спины, лежащие в  $\Lambda_+ = \Lambda \cap \Pi_+$ , и т. д.

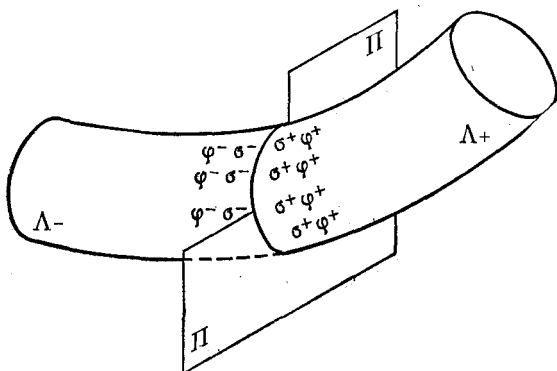


Рис. 16.2. Тор  $\Lambda$ , пересеченный гиперплоскостью  $\Pi$ . Здесь изображено одно пересечение  $\Pi$  с  $\Lambda$ . Ребра, связывающие спины  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ , разрезаются гиперплоскостью  $\Pi$ . В силу трансляционной инвариантности,  $\Pi$  можно поворачивать на угол, соответствующий симметрии решетки.

Пусть  $A$  — функция от спинов в  $\Lambda_-$ , а  $B$  — функция от спинов в  $\Lambda_+$ . Тогда условное среднее  $\langle \cdot \rangle$  по переменным  $\varphi^\pm$  (при фиксированных  $\sigma^\pm$ ) представляется интегралом от выражения вида

$$\exp \left( \beta \sum \sigma_l^+ \cdot \sigma_{l'}^- \right) F(\sigma^+) G(\sigma^-) \prod_{l, l'} d\sigma_l^+ d\sigma_{l'}^-,$$

причем меры, соответствующие распределениям отдельных спинов, включаются в  $F, G$ , так что интеграл берется в точности по мере Лебега  $d\sigma^\pm$ .

Если  $A = \overline{\theta B}$ , то  $F = \overline{G}$  и, в силу положительности при отражениях,

$$0 \leq \langle \overline{\theta B B} \rangle = \int \exp \left( \beta \sum \sigma_l^+ \cdot \sigma_{l'}^- \right) G(\sigma^+) G(\sigma^-) \prod_{l, l'} d\sigma_l^+ d\sigma_{l'}^-. \quad (16.4.17)$$

С помощью преобразования Фурье определим переменные  $p$ , двойственные к  $(\sigma_l^+ - \sigma_{l'}^-)$ . Пусть  $b$  обозначает ребро  $(l, l')$ . Тогда в общем случае, когда  $A \neq \overline{\theta B}$  (16.4.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle &= \text{const} \int \exp \left( -\frac{\beta}{2} \sum (\sigma_l^+ - \sigma_{l'}^-)^2 \right) F(\sigma^+) G(\sigma^-) d\sigma^+ d\sigma^- = \\ &= \text{const} \int \exp \left( -\frac{1}{2\beta} \sum p_b^2 \right) \tilde{F}(-p) \tilde{G}(p) \prod_b dp_b. \end{aligned} \quad (16.4.18)$$

Заметим, что сдвиг  $\sigma_l^+ - \sigma_{l'}^- \rightarrow \sigma_l^+ - \sigma_{l'}^- + g(l, l')$  в показателе экспоненты в (16.4.18) переходит после преобразования Фурье в умножение на  $e^{i\rho g(l, l')}$ . Поэтому свойство положительности при отражениях скалярного произведения (16.4.18) приводит к неравенству

$$|\langle AB \rangle| \leq (\langle \overline{\theta A A} \rangle \langle \overline{\theta B B} \rangle)^{1/2}. \quad (16.4.19)$$

Применяя оценку (16.4.19) к (16.4.16), мы исключаем множители  $f_\alpha(l)$ , относящиеся к тем ребрам  $b = (l, l - e_\alpha)$ , которые пересекаются с гиперплоскостью  $\Pi$ . Кроме того, полученные в результате функции  $f_\alpha$  будут симметричными относительно отражения  $\theta$ .

Действуя подобным образом, т. е. выбирая всеми возможными способами гиперплоскость  $\Pi$ , мы исключим из (16.4.16) все множители, содержащие  $f_\alpha(l)$ . Таким образом,  $l \leq 1$ , что и требовалось<sup>1)</sup>. ■

## Глава 17

### Критическая точка в модели $\varphi^4$

#### 17.1 Элементарные соображения

Прежде всего установим обозначения: под  $\varphi^4$  мы будем понимать взаимодействие

$$V(\varphi) = \lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^2 - \mu\varphi \quad (17.1.1)$$

с вещественными  $\lambda > 0$ ,  $\sigma$  и  $\mu$ . По теореме Ли — Янга в этой модели при  $\mu \neq 0$  нет фазовых переходов. Высокотемпературные разложения (гл. 18) показывают, что фазовых переходов нет также при  $\mu = 0$  и достаточно больших положительных  $\sigma$ . Согласно § 16.2, при  $\mu = 0$  и достаточно больших по модулю отрицательных  $\sigma$  наблюдается фазовый переход. В этой области значений параметров предположительно имеются ровно две фазы и существует единственное значение  $\sigma = \sigma_c$ , разделяющее однофазную и двухфазную области. На протяжении этой главы мы определяем  $\sigma_c$  как точную нижнюю грань тех значений  $\sigma$ , для которых в модели (17.1.1) имеется единственная фаза и экспоненциально убывающие корреляции. (Таким образом, оператор  $H$  имеет щель в спектре, отделяющую точку 0 — собственное значение, отвечающее вакууму  $\Omega$ , от остального спектра. Величину этой щели мы называем массой  $m > 0$ .)

Для анализа критической точки здесь используются корреляционные неравенства. В числе других полезных подходов к изуче-

<sup>1)</sup> Приведенное выше доказательство довольно схематично. В настоящее время известно более простое доказательство неравенства  $l \leq 1$ . Это доказательство также основано на методе многократных отражений; см. [Fröhlich, Is-gael, Lieb, Simon, 1978]. — *Прим. перев.*

нию критических явлений можно назвать инфракрасные оценки (§ 16.5) и точно решаемые модели [McCoу, Wu, 1973], [Wu, McCoу, Trасу, Вагоч, 1976]. Хотя разложения в ряды и применяются для численного исследования критических явлений, использовать их для качественного анализа трудно: критическая точка представляет собой особенность на границе области сходимости, где эти разложения сходятся медленно. На более формальном уровне для описания критических явлений используется ренорм-группа.

**Теорема 17.1.1.** *Для поля, построенного по взаимодействию (17.1.1) с граничными условиями Дирихле и  $\mu \geq 0$ , функции Швингера*

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \quad (17.1.2)$$

*монотонно возрастают по параметрам  $\mu$  и  $-\sigma$ .*

*Доказательство.* Поскольку поле во всем пространстве является пределом полей в конечных объемах, достаточно провести доказательство для среднего  $\langle \cdot \rangle_\Lambda$  по полю в конечном объеме  $\Lambda$ . Полагая, как обычно, для простоты

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \langle 1, \dots, n \rangle,$$

имеем

$$-\frac{d}{d\sigma} \langle 1, \dots, n \rangle_\Lambda = \int_\Lambda [\langle 1, \dots, n, : \varphi^2(x) : \rangle_\Lambda - \langle 1, \dots, n \rangle_\Lambda \langle : \varphi^2(x) : \rangle_\Lambda] dx. \quad (17.1.3)$$

Подынтегральное выражение здесь положительно в силу второго неравенства Гриффитса. Заметим, что (бесконечная) константа, содержащаяся в  $: \varphi^2 :$ , не входит уже (в 17.1.3), как и в (10.2.4). То же рассуждение применимо и в случае параметра  $\mu$ , но лишь для взаимодействий, задаваемых полиномом не выше четвертой степени. ■

При  $\mu \neq 0$  намагниченность  $M = M(\sigma, \mu)$  корректно определена как  $M(\sigma, \mu) = \langle \varphi \rangle$ , поскольку при  $\mu \neq 0$  предельное поле является чистой фазой. При  $\mu = 0$  это определение некорректно, по крайней мере в двухфазной области. Действительно, поскольку мы использовали граничные условия, симметричные по отношению к преобразованию  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , то  $\langle \varphi \rangle = 0$  при  $\mu = 0$  и любых  $\sigma$ . Если допустить, что в теории с  $\mu = 0$  имеется не более двух фаз, то правильное определение намагниченности выглядит следующим образом:

$$M(\sigma) = \pm \left( \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \right)^{1/2}; \quad (17.1.4)$$

см. § 16.1. При том же предположении о числе фаз определим массу  $t(\sigma)$  как показатель экспоненциального убывания величины

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - M(\sigma)^2 \sim e^{-t(\sigma)|x-y|}. \quad (17.1.5)$$

**Следствие 17.1.2.** *При  $\mu > 0$  намагниченность  $M(\sigma)$  монотонно убывает по  $\sigma$ ; если  $\sigma > \sigma_c$ , то  $M(\sigma) = 0$ . Функция  $t(\sigma)$  монотонно возрастает при  $\sigma \geq \sigma_c$ .*

*Доказательство.* Это утверждение непосредственно следует из теоремы и определенных величин  $M$ ,  $m(\sigma)$  и  $\sigma_c$ .

## 17.2 Отсутствие четных связанных состояний

Мы покажем, что спектр гамильтониана четной модели  $\varphi^4$  в однофазной области, т. е. при  $\sigma > \sigma_c$ , ограниченного на подпространство  $\mathcal{H}_{\text{чет}}$ , не пересекается с интервалом  $(0, 2m)$ . Здесь  $\mathcal{H}_{\text{чет}}$  есть подпространство в  $\mathcal{H}$ , инвариантное относительно преобразования  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Таким образом, двухчастичных связанных состояний, которые мы предполагаем четными, не существует. Отметим, что  $\mathcal{H}_{\text{чет}}$  порождено проекциями  $\hat{\cdot}$  в  $\mathcal{H}$  евклидовых векторов  $\Omega$ ,  $\varphi(f_1) \dots \varphi(f_n)\Omega$ ,  $n = 2, 4, \dots$ , у которых  $\text{supp } f_i$  содержится в области  $t > 0$ . Для  $A = \{x_1, \dots, x_r\}$  положим  $\varphi_A \equiv \varphi(x_1) \dots \varphi(x_r)$ .

**Теорема 17.2.1.** *Рассмотрим поле  $\varphi^4$  или модель Изинга с ненулевым внешним полем и  $\sigma > \sigma_c$ , и пусть  $A$  и  $B$  содержат четное число элементов. Тогда*

$$\langle \varphi_A \varphi_B \rangle - \langle \varphi_A \rangle \langle \varphi_B \rangle \leq \sum_{\substack{A_1 \subset A, A_1 \text{ нечетно} \\ B_1 \subset B, B_1 \text{ нечетно}}} \langle \varphi_{A_1} \varphi_{B_1} \rangle \langle \varphi_{A \setminus A_1} \varphi_{B \setminus B_1} \rangle.$$

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством из следствия 4.3.3. Оно сохраняется при снятии решеточного обрезания и при предельном переходе к бесконечному объему. Поскольку  $A, B$  четны, а  $A_1, B_1$  нечетны,  $A \setminus A_1, B \setminus B_1$  нечетны. ■

**Следствие 17.2.2.** *В предположениях теоремы 17.2.1 не существует четных связанных состояний с энергией ниже двухчастичного порога.*

*Доказательство.* Пусть  $\Omega$  — вакуум в  $\mathcal{H}$ , единственный в силу предположения  $\sigma > \sigma_c$ . Запишем  $x = (x_1, \dots, x_d)$  как  $x = (x, t)$ , где  $x \in R^{d-1}$ . Если  $\theta(x, t) = (x, -t)$  и

$$A + s = \{(x, t + s) : (x, t) \in A\},$$

то в случае, когда множество  $A$  по времени предшествует  $B$ , имеем

$$\langle \hat{\varphi}_{\theta A} e^{-sH} \hat{\varphi}_B \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi_A \varphi_{B+s} \rangle.$$

В частности, если мы выберем  $A$  так, что все его точки имеют отрицательные временные координаты,  $t \leq 0$ , то  $B$ , выбранное в виде  $B = \{(x_1 - t) : (x, t) \in A\}$  лежит в области положительного времени. Пусть  $A$  и  $B$  выбраны указанным способом, а  $P_\Omega$  — проектор на вакуумное состояние в  $\mathcal{H}$ . Тогда очевидно, что

$$\langle \varphi_{A-s} \varphi_{B+s} \rangle - \langle \varphi_{A-s} \rangle \langle \varphi_{B+s} \rangle = \| e^{-sH} (I - P_\Omega) \hat{\varphi}_A \Omega \|^2,$$

так что теорема 17.2.1 дает оценку скорости убывания  $e^{-sH}$  на подпространстве  $(I - P_\Omega)\mathcal{H}$  (при  $s \rightarrow \infty$ ). Для нечетных  $A_1$  вектор  $\hat{\varphi}_{A_1}\Omega$  ортогонален вакууму ( $\langle \Omega, \hat{\varphi}_{A_1}\Omega \rangle = \langle \varphi_{A_1} \rangle = 0$ ), и поэтому по определению массы показатель экспоненциального убывания  $\langle \varphi_{A_1-s} \varphi_{B_1+s} \rangle$  не меньше  $m$ . Таким образом,

$$\langle \varphi_{A_1-s} \varphi_{B_1+s} \rangle \leq C_{A_1, B_1} e^{-2ms}$$

для некоторой константы  $C_{A_1, B_1}$ , зависящей от  $A_1$  и  $B_1$ . Такая же оценка имеет место для  $\langle \Phi_{(A \setminus A_1) - s} \Phi_{(B \setminus B_1) + s} \rangle$ , и, следовательно, по теореме 17.2.1

$$\| e^{-sH} (I - P_\Omega) \hat{\Phi}_{A\Omega} \|^2 \leq \text{const } e^{-4ms}.$$

Итак, не существует четных состояний, кроме  $\Omega$ , с энергией  $< 2m$ ; в частности, не существует четных связанных состояний в этой энергетической области. ■

### 17.3 Оценка константы связи

Определим безразмерную константу связи модели  $\Phi^4$ :

$$\lambda_{\text{физ}} = -m^{d-4} \chi^{-4} \int \langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_4) \rangle^T dx_1 dx_2 dx_3,$$

где

$$\chi = \int \langle \Phi(x_1) \Phi(x_2) \rangle^T dx_1 = \int_0^\infty d\rho(a)/a,$$

$a$  — квадрат массы, а  $d\rho(a)$  — спектральная мера Лемана. По теореме 4.1.1  $\chi \geq 0$ . Для массивного четного  $\Phi^4$ -взаимодействия в однофазной области  $\lambda_{\text{физ}} \geq 0$  в силу следствия 4.3.3. Сейчас мы предположим дополнительно, что собственная перенормировка величины поля уже выполнена; в случае изолированной частицы массы  $m$  это означает, что  $d\rho(a) = \delta(a - m^2) da$  в окрестности  $m^2 = a$ . Докажем теперь, что  $\lambda_{\text{физ}}$  ограничена сверху.

**Теорема 17.3.1** [Glimm, Jaffe, 1975a]. *При сделанных выше предположениях*

$$0 \leq \lambda_{\text{физ}} \leq \text{const},$$

где безразмерная константа в правой части не зависит от параметров взаимодействия  $\lambda$  и  $\sigma$ .

*Набросок доказательства.* Подробности можно найти в оригинальной работе. Применяя основное неравенство Гриффитса (4.1.1), получаем (вместо  $\Phi(x_1)$  пишем 1 и т. д.)

$$0 \leq \langle 1234 \rangle - \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle = \langle 1234 \rangle^T + \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle.$$

Согласно следствию 4.3.3,  $\langle 1234 \rangle^T \leq 0$ , поэтому

$$0 \leq -\langle 1234 \rangle^T \leq \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle. \quad (17.3.1)$$

После симметризации по всем переменным имеем

$$\begin{aligned} -\langle 1234 \rangle^T &\leq (\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle)^{1/3} \times \\ &\times (\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle + \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle)^{1/3} (\langle 14 \rangle \langle 23 \rangle + \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle)^{1/3}. \end{aligned} \quad (17.3.2)$$

Из элементарных свойств функции Грина  $(-\Delta + a)^{-1}(x, y)$  находим, что

$$\langle xy \rangle = \int_0^\infty (-\Delta + a)^{-1}(x, y) d\rho(a) \leq \text{const } \chi |x - y|^{-d} \exp(-m|x - y|/2).$$

Подстановка этого выражения в нашу оценку (17.3.2) величины  $-\langle 1234 \rangle^T$  дает  $\lambda_{\text{физ}} \leq \text{const } m^{-4} \chi^{-2}$ . Используя сделанное выше допущение о перенормировке величины поля, получаем оценку

$$\chi = \int_{m^2}^{\infty} d\rho (a)/a \geq m^{-2},$$

из которой и следует утверждение теоремы:  $\lambda_{\text{физ}} \leq \text{const}$ . ■

Отметим, что окончательная оценка не зависит от  $m$  и, следовательно, остается справедливой в пределе  $m \rightarrow 0$ . Поэтому критическая точка (которая при  $d < 4$  должна быть устойчивой неподвижной точкой ренормгруппы в инфракрасной области) существует при конечных значениях  $\lambda_{\text{физ}}$ .

Определим теперь немного более общую константу связи  $\lambda_l$  в модели  $\varphi^4$ ; мы покажем, что изложенный выше анализ дает и оценку константы  $\lambda_l$ . Обрезание по частицам определяется как умножение каждой (внешней) переменной четырехточечной функции на величину  $m^2 - p^2|_{p=0} = m^2$ . Обрезание пропагатора выражается, как и раньше, в умножении на  $\chi^{-1}$ . Определим  $\lambda_l$  соотношением

$$0 \leq \lambda_l = -m^{d+4} \int \langle 1234 \rangle^T dx_1 dx_2 dx_3 (m^{-2} \chi^{-1})^l.$$

В  $\lambda_l$  к  $l$  внешним отросткам применено обрезание пропагатора, а к  $4 - l$  отросткам — обрезание по частицам. Как показано выше,  $(m^2 \chi)^{-1} \leq 1$ , так что  $\lambda^4 \leq \dots \leq \lambda_1 \leq \lambda_0$ .

Выше мы показали также, что

$$\lambda_{\text{физ}} \equiv \lambda_4 \leq \lambda_2 = m^4 \chi^2 g = -m^d \int G^{(4)}/\chi^2 \leq \text{const}.$$

Теперь мы видим, что  $\lambda_l/\lambda_{l+1} = m^2 \chi$  ограничено, если применимы обычные соображения подобия. В частности, имеет место

**Теорема 17.3.2** [Glimm, Jaffe, 1980]. *Допустим, что для однофазной модели  $\varphi^4$  выполнены условия*

$$F(x) \equiv m^{-d+2} \langle \varphi(0) \varphi(x/m) \rangle \leq \begin{cases} O(1) |x|^{-(d-1)/2} e^{-|x|} & \text{при } |x| \geq 1, \\ O(1) |x|^{-d+2-\eta} & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases}$$

где  $\eta \leq 1$  (см. § 17.4), а  $O(1)$  — универсальные константы. Тогда

$$m^2 \chi \leq \text{const} \quad \text{и} \quad 0 \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_0 \leq \text{const},$$

где  $\text{const}$  в этих неравенствах также обозначают универсальные константы.

**Замечание.** Все  $\lambda_l$  одновременно отличны от нуля либо одновременно равны нулю. В последнем случае, и только в нем, теория



описывает обобщенное свободное поле. Заключительное утверждение следует из работы [Newman, 1975b].

В качестве следующего шага мы установим непрерывность  $\lambda_{\text{физ}}$  как функции параметров взаимодействия и константы обрезания. Мы предполагаем, что  $m$  остается отделенным от нуля при изменении остальных параметров. Это позволяет сделать скейлинговый предельный переход в критической точке и снять ультрафиолетовое обрезание при некритических значениях константы связи. С помощью преобразования масштаба можно все привести к случаю, когда  $m$  фиксировано и равно 1.

Чтобы проиллюстрировать идею доказательства, заметим, что  $\lambda_l/\lambda_{l+1}$  сходится по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Поэтому достаточно рассмотреть  $\lambda_0$ . В условиях теоремы 17.3.2 каждая величина  $\lambda_l$  непрерывно изменяется в предельном переходе, при котором масса  $m$  фиксирована и отлична от нуля, а двухточечные и четырехточечные функции  $S^{(2)}(x, 0)$  и  $S_T^{(4)}(x_1, \dots, x_4)$  сходятся поточечно почти всюду.

Для того чтобы установить этот факт, воспользуемся, как и ранее, неравенством (17.3.2) для любой перестановки  $\{i_1, \dots, i_4\}$  набора индексов  $\{1, \dots, 4\}$ . После перестановки и сдвига переменных можно считать, что  $i_v = v$ ,  $x_1 = 0$  и  $|x_2 - x_3| \leq |x_3 - x_4|$ . Можно также выбрать  $m = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int F(x_1 - x_2) F(x_3 - x_4) dx_2 dx_3 dx_4 &\leq \\ &\leq \int_{|x_2 - x_3| \leq |x_3 - x_4|} F(x_3 - x_4) F(x_2) d(x_2 - x_3) d(x_3 - x_4) dx_2 \leq \\ &\leq \int x^d F(x) dx \int F(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

Непрерывность  $\lambda_0$  следует из теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

## 17.4 Существование частиц и оценка производной $dm^2/d\sigma$

Здесь мы рассматриваем каноническую однофазную модель  $\varphi^4$  (слово «каноническая» означает, что величина поля не перенормирована). Мы установим оценку

$$dm^2(\sigma)/d\sigma \leq Z(\sigma) \quad (17.4.1)$$

для  $\sigma > \sigma_c$ . Здесь  $Z(\sigma)$  есть константа перенормировки величины поля, определяемая из формулы (17.4.2) (см. также (14.3.2)). Из (17.4.1) при помощи аппроксимаций мы получим следующий результат.

**Теорема 17.4.1** [Glimm, Jaffe, 1977a]. Для почти всех значений  $m$  существуют частицы, т. е.  $Z \neq 0$ .

*Доказательство оценки (17.4.1).* Рассмотрим  $\Gamma(p) = -S(p)^{-1}$ , где  $S(p)$  — преобразование Фурье функции  $\langle \Phi(x)\Phi(0) \rangle$ , а  $p$  — евклидов импульс. Заметим, что

$$S(p) = \int \langle \Phi(x)\Phi(0) \rangle e^{-ipx} dx = \frac{Z}{p^2 + m^2} + \int_{m^2+0}^{\infty} \frac{d\rho(a)}{p^2 + a}. \quad (17.4.2)$$

Условие каноничности состоит в том, что  $Z + \int_{m^2+0}^{\infty} d\rho(a) = 1$  и

$$Z^{-1} = - (d\Gamma/d\rho^2)_{p^2 = -m^2}. \quad (17.4.3)$$

Поскольку  $\Gamma = 0$  на одночастичной кривой  $p^2 = -m^2(\sigma)$ , вектор  $\nabla\Gamma$  должен быть ортогонален вектору  $(dm^2/d\sigma, 1)$  в  $(-p^2, \sigma)$ -плоскости. Таким образом, при  $p^2 = -m^2$

$$0 = - \frac{\partial\Gamma}{\partial p^2} \frac{dm^2}{d\sigma} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\sigma} = Z^{-1} \frac{dm^2}{d\sigma} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\sigma}.$$

Неравенство (17.4.1) вытекает теперь из следующего утверждения.

**Теорема 17.4.2.** *При сделанных выше предположениях*

$$-1 \leq (\partial\Gamma/\partial\sigma)_{p^2 = -m^2} \leq 0. \quad (17.4.4)$$

*Доказательство.*

$$-dS(-ip)/d\sigma = (1/2) \iint [\langle x_0 z z \rangle - \langle x_0 \rangle \langle z z \rangle] dz e^{-px} dx,$$

и для вещественных  $p$

$$0 \leq \iint \langle x z \rangle \langle y z \rangle e^{-p(x-z)} e^{-pz} dx dz = S(-p)^2.$$

Поэтому, согласно следствию 4.3.3 и (17.3.1),  $0 \leq dS(ip)^{-1}/d\sigma \leq 1$ . Однако при  $p = 0$  имеем  $S(-ip)^{-1}|_{p^2=m^2} = -\Gamma(p)|_{p^2=-m^2}$  для вещественных  $p$ , и, значит, (17.4.4) доказано. ■

## 17.5 Существование критической точки у модели $\Phi^4$

Мы покажем, что корреляционный радиус обращается в бесконечность при  $\sigma \downarrow \sigma_c$ ; мы следуем здесь работе [Baker, 1975]; см. также [J. Rosen, 1980] и [McBryan, J. Rosen, 1976]. Для простоты рассмотрен лишь случай решеточного поля, а величина  $m(\sigma)$  (только для нужд этого параграфа) вводится как

$$m(\sigma) = \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} - \frac{\ln \langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle}{|x-y|}. \quad (17.5.1)$$

При  $\sigma > \sigma_c$  величина  $m(\sigma)$  есть масса (наименьшая энергия невакуумного состояния), а при  $\sigma \leq \sigma_c$  она равна нулю.

**Теорема 17.5.1.** *Масса  $m(\sigma)$  вида (17.5.1) непрерывна как функция от  $\sigma$ . В частности, масса, определенная формулой (17.5.1), стремится к нулю при  $\sigma \downarrow \sigma_c$ .*

Определим сначала псевдомассу  $\tilde{m} = \tilde{m}(\sigma)$  для параметра  $\sigma$ , меняющегося в ограниченном интервале,  $a \leq \sigma \leq b$ . Пусть  $\langle \cdot \rangle_{\sigma, \Lambda}$  обозначает среднее по полю в области  $\Lambda \subset R^d$ . Положим

$$A = 2 \left( \sup_{\sigma \in [a, b], \Lambda \subset R^d, x, y \in \Lambda} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} \right). \quad (17.5.2)$$

Верхняя грань конечна и достигается при  $\Lambda = R^d$ ,  $\sigma = a$ ,  $x = y$ . Пусть  $\tilde{m} = \tilde{m}(x, y, \sigma, \Lambda)$  есть единственное решение уравнения

$$A \frac{e^{-\tilde{m}|x-y|}}{1 + (\tilde{m}|x-y|)^\alpha} = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda}. \quad (17.5.3)$$

Здесь  $\alpha$  — константа, выбранная так, что

$$d - 1 \leq \alpha, \quad d/2 < \alpha. \quad (17.5.4)$$

Заметим, что  $(d/dx)(e^{-x}/(1+|x|)^\alpha) < 0$  при  $x > 0$ , откуда следует, что при  $x \neq y$  существует единственное значение  $\tilde{m}$ . Пусть теперь

$$\begin{aligned} \tilde{m}(\sigma, \Lambda) &= \inf_{x \neq y \in \Lambda} \tilde{m}(x, y, \sigma, \Lambda), \\ \tilde{m}(\sigma) &= \inf_{\Lambda} \tilde{m}(\sigma, \Lambda) = \lim_{\Lambda \uparrow R^d} \tilde{m}(\sigma, \Lambda). \end{aligned}$$

**Лемма 17.5.2.** Величина  $\tilde{m}(\sigma, \Lambda)$  непрерывна по  $\sigma$  и строго положительна для ограниченной связной области  $\Lambda$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{m}(\sigma) \leq m(\sigma) \leq \text{const } \tilde{m}(\sigma), \\ 0 = \tilde{m}(\sigma) \quad \text{при } \sigma < \sigma_c. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Величина  $\tilde{m}(\sigma, \Lambda)$  строго положительна, поскольку этим свойством обладает  $\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda}$ . Для того чтобы установить последнее утверждение, разложим в ряд все множители вида  $\exp[\varphi(x_i) \varphi(x_j)]$  в ненормированном среднем  $\langle \cdot \rangle_{\sigma, \Lambda}$  (подобное разложение градиентных членов используется также и при кластерных разложениях и при доказательстве неравенств Гриффитса; см. гл. 18). Все члены такого типа неотрицательны, а для связной области  $\Lambda$  по крайней мере один из них отличен от нуля.

Оценка  $\tilde{m}(\sigma) \leq m(\sigma) + \varepsilon$  для произвольного  $\varepsilon > 0$  вытекает из неравенств

$$\begin{aligned} e^{-(m+\varepsilon)|x-y|} &\leq (2A)^{-1} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_{\sigma} \leq A^{-1} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} \leq \\ &\leq e^{-\tilde{m}|x-y|} / [1 + (\tilde{m}|x-y|)^\alpha] \leq e^{-\tilde{m}|x-y|}. \end{aligned}$$

Здесь  $x$  и  $y$  выбраны так, чтобы выполнялось первое неравенство; когда  $x$  и  $y$  заданы,  $\Lambda$  выбирается с таким расчетом, чтобы удовлетворялось второе неравенство. Следовательно,  $\tilde{m} \leq m$ . Противоположное неравенство вытекает из того факта, что константа (17.5.1), как следует из вычислений с помощью трансфер-матрицы, дает экспоненциальную оценку убывания корреляций  $\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$  вида  $e^{-m \text{ dist}}$ , где  $\text{dist}$  — наибольшее из расстояний между параллельными гиперплоскостями решетки, разделяющими точки  $x$  и  $y$  (см. также § 17.1). Итак,

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_{\Lambda} \leq \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \leq A e^{-m \text{ dist}},$$

где  $\text{dist} \geq |x - y|/\sqrt{d}$ .

**Доказательство теоремы 17.5.1.** Покажем, что функция  $\tilde{m}(\sigma, \Lambda)^{2\alpha+1}$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $\sigma$ , изменяющейся в конечном интервале  $[a, b]$ , с константой Липшица, равномерно ограниченной по  $\Lambda$ . Из этого утверждения следует доказываемая теорема в силу леммы 17.5.2. Поскольку  $\tilde{m}(\sigma, \Lambda)^{2\alpha+1}$  представляет собой нижнюю грань конечного семейства функций, мы докажем условие Липшица для каждой функции этого семейства в интервале, где она совпадает с  $\tilde{m}^{2\alpha+1}$ . Итак, выберем точки  $x_0 \neq y_0$ , для которых  $\tilde{m}(x_0, y_0, \sigma, \Lambda) = \tilde{m}(\sigma, \Lambda)$ . Из определения  $\tilde{m}$  вытекает тождество

$$\tilde{m} |x_0 - y_0| - \ln A + \ln(1 + (\tilde{m} |x_0 - y_0|)^\alpha) = -\ln \langle \Phi(x_0) \Phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda}.$$

Дифференцируя по  $\sigma$ , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} |x_0 - y_0| \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} &\leq |x_0 - y_0| \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} \left( 1 + \frac{\alpha (\tilde{m} |x_0 - y_0|)^{\alpha-1}}{1 + (\tilde{m} |x_0 - y_0|)^\alpha} \right) = \\ &= \sum_{z \in \Lambda} \frac{\langle \Phi(x_0) \Phi(y_0) \Phi^2(z) \rangle - \langle \Phi(x_0) \Phi(y_0) \rangle \langle \Phi^2(z) \rangle}{\langle \Phi(x_0) \Phi(y_0) \rangle} \leq \\ &\leq 2A + 2 \sum_{\substack{z \in \Lambda \\ z \neq x_0, y_0}} \frac{\langle \Phi(x_0) \Phi(z) \rangle \langle \Phi(y_0) \Phi(z) \rangle}{\langle \Phi(x_0) \Phi(y_0) \rangle}. \end{aligned}$$

В конце мы воспользовались неравенством Лебовица (следствие 4.3.3) для оценки четырехточечных функций через произведение двухточечных функций и определим величины  $A$  для оценки двух членов:  $z = x_0$  и  $z = y_0$ . Заменяя двухточечные функции выражением, включающим  $\tilde{m}$  (что не уменьшает каждый из сомножителей в числителе и не изменяет знаменатель), и пользуясь неравенством  $e^{-a} \leq 1$  для  $a \geq 0$ , получаем, что

$$\begin{aligned} |x_0 - y_0| \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} &\leq 2A + 2 \sum_{\substack{z \in \Lambda \\ z \neq x_0, y_0}} \frac{1 + (\tilde{m} |x_0 - y_0|)^\alpha}{(1 + (\tilde{m} |x_0 - z|)^\alpha)(1 + (\tilde{m} |y_0 - z|)^\alpha)} \leq \\ &\leq 2A + 2\tilde{m}^{-2\alpha} \text{const} |x_0 - y_0|^\alpha \sum_{\substack{z \in \Lambda \\ z \neq x_0, y_0}} \frac{1}{|x_0 - z|^\alpha |y_0 - z|^\alpha} \leq \\ &\leq 2A + 2\tilde{m}^{-2\alpha} \text{const} |x_0 - y_0|^{d-\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку  $d - \alpha - 1 \leq 0$ , мы заключаем, что  $\tilde{m}^{2\alpha} d\tilde{m}/d\sigma \leq \text{const}$ . ■

## 17.6 Непрерывность $d_\mu$ в критической точке

Для модели  $\lambda\Phi^4 + \sigma\Phi^2$  мы покажем, что функции Швингера непрерывны по  $\sigma$  на замкнутом луче  $\sigma_c \leq \sigma < \infty$ . В частности, они имеют предел при  $\sigma \downarrow \sigma_c$ . Из того что функции  $S_\Lambda^{(n)}$  монотонны относительно  $\Lambda$  и  $\sigma$  (это было установлено при доказательстве теоремы 17.5.1 для случая  $S_\Lambda^{(2)}$ ), следует, что функции Швингера  $S^{(n)}$  в бесконечном объеме непрерывны относительно  $\sigma$  справа и монотонно возрастают по  $\sigma$  и  $-\mu$ ,  $\mu \geq 0$ . Поскольку возможны фазовые переходы, это общее соображение устанавливает только одностороннюю непрерывность. Двусторонняя же непрерывность для

$\sigma > \sigma_c$  следует из приводимой ниже теоремы 17.6.1 о существовании производной.

При достаточно больших  $\sigma$  (или  $\mu$ ) мы попадаем в область сходящихся кластерных разложений (ср. гл. 18). Можно определить функцию  $S^{(n)}$ , исходя из ее значений в этой области и монотонно уменьшая  $\sigma$  и  $-\mu$ . Такое продолжение  $S^{(n)}$  известно как определение с помощью *граничных условий в области малого взаимодействия* [Glimm, Jaffe, 1975b].

**Теорема 17.6.1.** При  $\sigma > \sigma_c$  (где  $\sigma_c$  определено в § 17.1) существуют производные

$$\partial S^{(n)}(x)/\partial \sigma. \quad (17.6.1)$$

*Доказательство.* Следует применить неравенства Лебовица из следствия 4.3.3, как и в § 17.5 или в работе [Glimm, Jaffe, 1975b]. Производные (17.6.1) ограничены сверху суммами произведений двухточечных функций  $S^{(2)}$ . ■

**Замечание.** Этот результат обобщается на усеченные функции Швингера, определенные в § 14.1, а также и на вершинные функции  $\Gamma$ ; см. [Glimm, Jaffe, 1975b]. Производные, как правило, стремятся к  $\infty$  в точке  $\sigma = \sigma_c$  со скоростью, определяемой некоторым критическим индексом. Производные  $\partial S^{(n)}/\partial \sigma$  сами являются (частично) усеченными функциями Швингера с одной  $\varphi^2$ -вершиной. В силу монотонности (теорема 17.1.1), производная  $\partial S^{(n)}/\partial \sigma$  абсолютно непрерывна по  $\sigma$ . Значит,

$$S^{(n)}|_{\sigma=\sigma_0} = S^{(n)}|_{\sigma=\sigma_1} - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \sigma} d\sigma,$$

и поэтому производная  $\partial S^{(n)}/\partial \sigma$  может быть использована для изучения асимптотического поведения  $S^{(n)}$  при  $\sigma \downarrow \sigma_c$ . В случае когда производная допускает оценку с помощью корреляционных неравенств, можно получить дифференциальное неравенство для функций  $S^{(n)}$ . Решение этого дифференциального неравенства дает строгую оценку сверху некоторого критического индекса. Дальнейшее развитие этой точки зрения приводит к уравнению Каллана — Симанзика [Domb, Green, 1972, v. 6] и методам, связанным с ренормгруппой.

## 17.7 Критические индексы

Изучение термодинамических величин и корреляционных функций вблизи критических точек представляет наибольшую трудность. Главный член асимптотики обычно является степенным и, таким образом, определяется небольшим числом параметров — показателями степени (индексами) и коэффициентами. Обычно считается, что индексы *универсальны* в том смысле, что они совпадают для широкого класса близких взаимодействий (например, для модели

$\phi^4$  и модели Изинга, определенных на решетке произвольного вида, или для всех непрерывных  $\phi^4$ -теорий). Однако индексы зависят от размерности  $d$  пространства или пространства-времени, так же как и от числа компонент вектора  $\phi$ . Поскольку находить индексы как с помощью вычислений, так и экспериментально, довольно трудно, большие значения приобретают точные теоретические соотношения (неравенства и предполагаемые тождества). Систематическое обсуждение критических индексов содержится в работе [Stanley, 1971]. Здесь же мы лишь проиллюстрируем основные идеи на примере вывода нескольких стандартных, а также менее известных неравенств между индексами из неравенств Гриффитса и Лебовица. Поскольку мы применяем неравенства Лебовица, придется ограничиться случаем  $n = 1$ .

Примем каноническую нормировку и определение (17.4.2) для величины  $S(p)$  и положим

$$\chi = S^{(2)}(0), \quad \varepsilon = \sigma - \sigma_c. \quad (17.7.1)$$

Тогда критические индексы  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\xi$  определяются из соотношений

$$m \sim \varepsilon^\nu, \quad \chi \sim \varepsilon^{-\gamma},$$

$$\langle \phi(x) \phi(0) \rangle |_{\sigma=\sigma_c} \sim x^{-d+2-\eta}, \quad Z \sim \varepsilon^\xi.$$

**Теорема 17.7.1.** Гауссовы (полученные с помощью приближения среднего поля) значения  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\xi$  равны соответственно

$$\nu_{\text{кл}} = 1/2, \quad \gamma_{\text{кл}} = 1, \quad \eta_{\text{кл}} = 0, \quad \xi_{\text{кл}} = 0.$$

**Таблица 17.1.** Значения критического индекса  $\nu$ , основанные на точных или машинных вычислениях, теоретических оценках и экспериментах

$d \backslash n$	$n=1$ Модель Изинга	$n=2$ Модель ХУ	$n=\infty$ Гауссова модель
$d=1$	$\infty$ (точное значение)		$1/2$ (точное значение)
$d=2$	$1$ (точное значение)	$\infty$ (теоретическое и экспериментальное значение)	$1/2$ (точное значение)
$d=3$	$0,63$ (численные методы)	$0,67$ (численные методы)	$1/2$ (точное значение)
$d=4$	$1/2$ (теоретическое значение)	$1/2$ (теоретическое значение)	$1/2$ (точное значение)

Для  $\varphi^4$ -теории однокомпонентного поля каждый из индексов  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  не меньше своего классического значения.

*Доказательство.* Вычисление гауссовых значений элементарно. Например, в гауссовом случае  $\sigma_c = 0$ ,  $\varepsilon = \sigma = (1/2)m^2$ ,  $Z = 1$ ,  $\rho(a)da = 0$ ,  $S(p) = 1/(p^2 + m^2)$ . По определению,  $0 \leq Z \leq 1$ , так что  $0 = \zeta_{\text{кл}} \leq \zeta$ . Аналогично,  $0 = \eta_{\text{кл}} \leq \eta$ , что следует из спектральной формулы Лемана (6.2.9).

Оценка  $dm^2/d\sigma \leq Z$  из § 17.4 влечет за собой следующие соотношения для критических индексов:

$$1 \leq (2 - \zeta/\nu)\nu \leq (2 - \eta)\nu, \quad (17.7.2)$$

и, как частный случай,  $1/2 \leq \nu$ . Каноническая оценка  $\gamma$  вытекает из неравенств  $0 \leq d\chi^{-1}/d\sigma \leq 1$ , установленных в § 17.4.

Вернемся к оценке  $\lambda_2 \leq \text{const}$  в теореме 17.3.2. Как следствие,  $\lambda_2(\varepsilon)$  обязана иметь неотрицательный показатель степенной асимптотики по  $\varepsilon$ . При  $d = 3$

$$\lambda_2 \sim \varepsilon^{3\nu+2\gamma-(2\Delta+\gamma)} = \varepsilon^{3\nu+\gamma-2\Delta},$$

где  $\gamma$  — индекс значения восприимчивости, а  $\Delta$  — индекс массовой шели, связывающий четырехточечную и двухточечную функции. Отсюда мы заключаем, что  $0 \leq 3\nu + \gamma - 2\Delta$ . С другой стороны, если  $\lambda_2 \neq 0$  при  $\sigma = \sigma_c$ , то с необходимостью имеет место «гипермасштабное» соотношение  $3\nu + \gamma - 2\Delta = 0$ .

Существуют два подхода, в рамках которых могут быть получены индекс  $\nu$  и гипермасштабное соотношение: высокотемпературные разложения и суммирование по Борелю. Высокотемпературные разложения использовались Вортисом и другими в случае модели Изинга. Эти методы применяли также Бейкер и Кинкейд [Baker, Kincaid, 1980] в области сильной связи (модель Изинга: [J. Rosen, 1977], [Constantinescu, 1980], [Caginalp, 1980a, b], [Constantinescu, Stortor, 1980]) для модели  $\lambda\varphi_3^4$ . Суммирование по Борелю рядов теории возмущений для непрерывной модели  $\lambda\varphi_3^4$ , упомянутой в § 9.4, было использовано Легийу и Цинн-Жюстеном [LeGuillou, Zinn-Justin, 1977]. Ни один из этих методов не дает математически строгой оценки ошибок. Для  $3\nu + \gamma - 2\Delta$  (или других подобных величин) получены следующие результаты:

ВТ:	$0,038_{-0,03}^{+0,02}$	Вортис и др.
ВТ:	$0,028 \pm 0,03$	Бейкер, Кинкейд
Борель:	$0,000 \pm 0,003$	Легийу, Цинн-Жюстен

Таким образом, высокотемпературные (ВТ) ряды, вероятно, свидетельствуют о нарушении гипермасштабности. По-видимому, разница в этих вычислениях возникает из-за различия в определении индекса  $\nu$ . В частности, имеем

ВТ:	$\nu = 0,638_{-0,001}^{+0,002}$
Борель:	$\nu = 0,6300 \pm 0,0008$ ,

Значит,

$$3(v_{VT} - v_{\text{Борель}}) = 0,024_{-0,004}^{+0,006},$$

чем и объясняется расхождение в величине  $3v + \gamma - 2\Delta$ .

Эти результаты свидетельствуют о наличии ошибки по крайней мере в одном из следующих пунктов: (1) гипотеза универсальности: Изинг  $\approx \varphi^4$ ; (2) гипермасштабное соотношение:  $0 = 3v + \gamma - 2\Delta$ ; (3) оценки ошибок высокотемпературных разложений; (4) оценки ошибок при суммировании по Борелю. Вычисление дальнейших членов высокотемпературных разложений как для модели Изинга со спином  $1/2$ , так и для моделей Изинга с более высоким спином [Nickel, 1980] дает основание думать, что приведенные выше оценки ошибок в высокотемпературных разложениях, быть может, слишком оптимистичны. См. также [Bender, Cooper, Guralnik, Roskies, Sharp, 1981]. Этот анализ, по-видимому, свидетельствует о том, что в вычислениях очень важно учесть не только саму масштабную асимптотику, но и поправки к ней. Действительно, имеющиеся расхождения между универсальностью и гипермасштабностью могут исчезнуть при таком усовершенствовании вычислений.

### 17.8 $\eta \leq 1$

В этом параграфе мы изучаем более подробно индекс  $\eta$ . Именно, мы покажем, что достаточно быстрое степенное убывание  $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$  влечет за собой экспоненциальное убывание, а это означает, что  $\sigma > \sigma_c$ . Для сравнения заметим, что

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{при } d=1 \text{ (точные вычисления),} \\ 0,25 & \text{при } d=2 \text{ (точные вычисления),} \\ 0,041 & \text{при } d=3 \text{ (численное исследование высокотемпературных разложений или суммирование по Борелю),} \\ 0 & \text{при } d \geq 4 \text{ (ренормгруппа).} \end{cases}$$

**Теорема 17.8.1.** Рассмотрим решеточную модель  $\varphi^4$  или модель Изинга и предположим, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle |x|^{d-1} = 0. \quad (17.8.1)$$

Тогда существует такое  $m > 0$ , что

$$\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle \leq O(1)e^{-m|x|} \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Таким образом,  $\eta \leq 1$ . Для непрерывной  $\varphi^4$ -модели  $\eta \leq 2$ .

**Замечание 1.** Согласно второму неравенству Гриффитса (4.1.11),

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle \geq 0,$$



поэтому из предположения (17.8.1) вытекает, что  $\langle \varphi(x) \rangle = 0$ . По теореме 16.1.1 среднее  $\langle \cdot \rangle$  определяет чистую фазу.

**Замечание 2.** В случае  $d = 1$  теорема показывает, что стремление  $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$  к нулю при  $|x - y| \rightarrow \infty$  гарантирует экспоненциальное убывание. В одномерной модели Изинга при  $T \neq 0$  функция  $\langle \varphi(i)\varphi(j) \rangle \rightarrow 0$  при  $i - j \rightarrow \infty$ . При  $T = 0$  имеем  $\langle \varphi(i)\varphi(j) \rangle \equiv 1$ .

**Замечание 3.** Оценка  $\eta \leq 2$  была установлена Глиммом и Джаффе [1977a]. Оценка  $\eta \leq 1$  принадлежит Добрушину [1979]. Мы следуем работе [Simon, 1980]; см. также [Aizenman, Simon, 1980], [Lieb, 1980], [Rivasseau, 1980].

*Доказательство теоремы 17.8.1 для решеточных полей и модели Изинга.* Поскольку  $\langle \varphi \rangle = 0$ , мы можем воспользоваться  $\varphi^4$ -неравенством из следствия 4.3.3. Оно принимает здесь вид

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \varphi(i)\varphi(j)\varphi(k)\varphi(l) \rangle - \langle \varphi(i)\varphi(j) \rangle \langle \varphi(k)\varphi(l) \rangle \leq \\ &\leq \langle \varphi(i)\varphi(k) \rangle \langle \varphi(j)\varphi(l) \rangle + \langle \varphi(i)\varphi(l) \rangle \langle \varphi(j)\varphi(k) \rangle. \end{aligned} \quad (17.8.2)$$

Далее, рассмотрим интерполяцию среднего  $\langle \cdot \rangle_s$ , определяемую мерой

$$d\mu_s = Z_s^{-1} \exp \left[ -s\beta \sum_{\Gamma} \varphi(k)\varphi(l) \right] d\mu. \quad (17.8.3)$$

Для простоты мы выбираем решетку с ребрами единичной длины. Здесь  $d\mu$  — мера, отвечающая  $\langle \cdot \rangle$ ;  $0 \leq s \leq 1$ ;  $Z_s$  — нормирующий множитель;  $\Gamma$  — конечный набор ребер  $(k, l)$ , связывающих пары соседних точек, который определяется так. Пусть  $B_r$  обозначает шар радиуса  $r$  с центром в нуле, и пусть  $\Gamma = \Gamma_r$  — множество ребер, пересекающих его границу  $\partial B_r$ . Тогда  $d\mu = d\mu_{s=0}$ , а  $d\mu_{s=1}$  есть мера, допускающая факторизацию  $d\mu_1 = d\mu^{\text{int}} \otimes d\mu^{\text{ext}}$ , где  $d\mu^{\text{int}}$  зависит только от  $\varphi(i)$ ,  $i \in \text{Int } B_r$  (внутренность  $B_r$ ), а  $d\mu^{\text{ext}}$  зависит лишь от  $\varphi(i)$ ,  $i \in \text{Ext } B_r$  (внешность  $B_r$ ). Все меры  $d\mu_s$  ферромагнитны, четны и удовлетворяют  $\varphi^4$ -неравенству (17.8.2). Далее, если  $r < |i|$ , то

$$\langle \varphi(0)\varphi(i) \rangle_s = \langle \varphi(0) \rangle_s \langle \varphi(i) \rangle_s = 0.$$

Поэтому мы можем написать

$$\begin{aligned} \langle \varphi(0)\varphi(i) \rangle &= - \int_0^1 \left( \frac{d}{ds} \langle \varphi(0)\varphi(i) \rangle_s \right) ds = \\ &= \int_0^1 \beta \sum_{\Gamma} (\langle \varphi(0)\varphi(i)\varphi(k)\varphi(l) \rangle_s - \langle \varphi(0)\varphi(i) \rangle_s \langle \varphi(k)\varphi(l) \rangle_s) ds \leq \\ &\leq \int_0^1 \beta \sum_{(k, l \in \Gamma \text{ или } (l, k) \in \Gamma)} \langle \varphi(0)\varphi(k) \rangle_s \langle \varphi(l)\varphi(i) \rangle_s ds. \end{aligned} \quad (17.8.4)$$

В последнем неравенстве мы использовали (17.8.2). Снова обращаясь к (17.8.2), заключаем, что  $\langle \varphi(0)\varphi(k) \rangle_s$  монотонно убывает с ростом  $s$ . Следовательно,

$$\langle \varphi(0)\varphi(i) \rangle \leq \beta \sum_{\Gamma} \langle \varphi(0)\varphi(k) \rangle \langle \varphi(l)\varphi(i) \rangle \leq \beta \left( \sum_{\Gamma} \langle \varphi(0)\varphi(k) \rangle \right) \sup_{\Gamma} \langle \varphi(l)\varphi(i) \rangle. \quad (17.8.5)$$

Применяя оценку (17.8.1) и пользуясь тем, что  $|\Gamma| \leq \text{const } r^{\alpha-1}$ , мы получаем для достаточно больших  $r$  неравенство

$$\alpha^{-1} \equiv \beta \sum_{\Gamma} \langle \varphi(0) \varphi(k) \rangle < 1.$$

При таком выборе  $\alpha$  и  $r$  из (17.8.5) вытекает, что

$$\sup \{ \langle \varphi(0) \varphi(i) \rangle : D \leq |i| \leq \alpha \sup \{ \langle \varphi(0) \varphi(i) \rangle : D - r \leq |i| \} \}.$$

Далее рассуждаем по индукции; после  $|i|/(r+1)$  шагов мы получим, что

$$\langle \varphi(0) \varphi(i) \rangle \leq \alpha^{-1 |i|/(r+1)} \sup_{k \neq l} \langle \varphi(k) \varphi(l) \rangle \leq c \alpha^{-1 |i|/(r+1)}.$$

Итак, полагая  $m = (r+1)^{-1} \ln \alpha$ , приходим к утверждению теоремы. ■

## 17.9 Скейлинговый предел

Термодинамические функции — это не единственный класс величин, имеющих простую степенную асимптотику вблизи критической точки. Считается, что сама модель теории поля допускает некоторую асимптотику в критической точке. Эта асимптотика, называемая скейлинговым предельным переходом, связана с масштабными преобразованиями, описанными в § 6.6. Соответствующая асимптотика, если она существует, также задает модель евклидовой теории поля. Существование скейлингового предела (сходимость по некоторой подпоследовательности масштабных преобразований) сводится к равномерной оценке

$$S^{(2)}(f \times g) \leq |f|_{\mathcal{F}} |g|_{\mathcal{F}} \quad (17.9.1)$$

двухточечной функции [Glimm, Jaffe, 1974d].

**Теорема 17.9.1.** Пусть  $\langle \cdot \rangle_j$  обозначает последовательность однофазных решеточных или непрерывных  $\Phi^4$ -моделей теории поля, удовлетворяющих оценке вида (17.9.1), где  $|\cdot|_{\mathcal{F}}$  — какая-нибудь из норм в пространстве Шварца, не зависящая от  $j$ . Тогда некоторая подпоследовательность этих теорий поля сходится при  $j \rightarrow \infty$ . Если размер ячейки решетки стремится к нулю, то предельная теория удовлетворяет аксиомам Остервальдера — Шрадера, за исключением, быть может, аксиом единственности вакуума и (в случае когда аппроксимирующие теории решеточные) аксиомы евклидовой ковариантности.

## 17.10 Гипотеза $\Gamma^{(6)} \leq 0$

Необрезанная шеститочечная вершинная функция определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(6)}(xxyy) &= \langle xxyy \rangle^T + \int \langle xhxz \rangle^T \Gamma(zz') \langle z'yuy \rangle^T dz dz' + \\ &+ 9 \int \langle xxyz \rangle^T \Gamma(zz') \langle z'xyy \rangle^T dz dz'. \quad (17.10.1) \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma = -S_2^{-1}$ , где  $S_2^{-1}$  — ядро интегрального оператора, обратного к оператору с ядром  $S_2(x, y)$ . Из гипотезы о том, что

$$\Gamma^{(6)}(xxxxyy) \leq 0, \quad (17.10.2)$$

удаётся получить большое число интересных следствий, например: отсутствие трехчастичных связанных состояний для пропагатора, существование скейлингового предела и некоторые оценки критических индексов (см. [Glimm, Jaffe, 1975c, 1976b]).

Некоторые факты позволяют думать, что для однофазных четных  $\phi^4$ -моделей неравенство (17.10.2) действительно имеет место. В частности, оно получено по теории возмущений (например, при  $\sigma \gg 0$  или при высоких температурах); имеются также эвристические соображения, свидетельствующие о его справедливости вблизи  $\sigma_c$ . Однако для доказательства этого неравенства требуются свежие идеи.

В этом параграфе мы приведем некоторые примеры применения неравенства (17.10.2). Например, имеет место

**Теорема 17.10.1.** Если выполнено (17.10.2), то

$$0 \leq \Gamma(x) \leq e^{-3m|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (17.10.3)$$

**Замечание.** Из оценки (17.10.3) следует, что у  $\Gamma(x)$  нет спектра в интервале  $(0, 3m)$ , а следовательно, носитель  $d\sigma(a)$  не пересекается с интервалом  $(m, 3m)$ . По этой причине в пропагаторе, т. е. среди состояний, порожденных векторами  $\phi(x)\Omega$ , отсутствуют трехчастичные связанные состояния.

*Набросок доказательства.* Воспользуемся формулой интегрирования по частям [Glimm, Jaffe, 1975c]:

$$\int \phi(x) A(\phi) d\mu(\phi) = \langle \phi(x) A \rangle = \int dy S(x-y) \left[ \left\langle \frac{\delta A}{\delta \phi(y)} \right\rangle - \langle V'(y) (I - P_1) A \rangle \right]. \quad (17.10.4)$$

Здесь  $V = \lambda \int : \phi^4 : dx$  — взаимодействие и

$$P_1 A = \int \phi(z) \Gamma(z-z') \langle \phi(z') A \rangle dz dz'.$$

Из (17.10.4) следует, что при  $x \neq y$

$$\Gamma(x-y) = \langle V'(x) (I - P_1) V'(y) \rangle = 16\lambda^2 \langle \phi^3(x) (I - P_1) \phi^3(y) \rangle. \quad (17.10.5)$$

Раскрывая скобки в (17.10.5) и применяя неравенство (17.10.1), получаем

$$\begin{aligned} (16)^{-1} \lambda^{-2} \Gamma(x-y) &= 6 \langle xy \rangle^3 + 9 \langle xxyy \rangle^T \langle xy \rangle - \\ &- 9 \int \langle xxyz \rangle^T \Gamma(zz') \langle z'xyy \rangle^T dz dz' + \Gamma^{(6)}(xxxxyy). \end{aligned} \quad (17.10.6)$$

Первый член в (17.10.6) есть  $O(e^{-m|x-y|})^3$  при  $|x-y| \rightarrow \infty$ . Второй член отрицателен. Убывание в третьем члене определяется трехчастичным спектром, что вытекает из отсутствия двухчастичных связанных состояний у  $\langle xxyz \rangle^T$ ; см. [Glimm, Jaffe, 1975c]. Таким образом, (17.10.6) означает, что

$$\Gamma(x-y) \leq e^{-3m|x-y|}, \quad |x-y| \rightarrow \infty.$$

Положительность функции  $\Gamma(x-y)$  следует из того факта, что она является преобразованием Фурье функции Герглотца. ■

В заключение приведем еще одно следствие неравенства (17.10.2).

**Теорема 17.10.2** [Glimm, Jaffe, 1976b]. Пусть  $d \geq 6$ ,  $g_0(\delta) = \lambda \delta^{4-d} \leq \text{const}$  (конечная перенормировка заряда), и пусть, кроме того, выполнено (17.10.2). Если предел при  $\delta \rightarrow 0$  решеточной  $\lambda \phi_d^4$ -теории поля евклидово-инвариантен, то он представляет собой свободное поле.

**Замечание.** Этот результат выражает в слабой форме идею о том, что перенормировки необходимы (т. е. что неперенормированные теории некорректны). Однако он не проясняет вопроса о том, являются ли перенормированные модели  $\phi^4$ , Юкавы и КЭД корректными (нетривиальными) в размерности  $d = 4$ .

## Глава 18

### Кластерные разложения

#### 18.1 Введение

Кластерные разложения [Glimm, Jaffe, Spencer, 1973, 1974] позволяют детально изучить свойства квантовых полей. С их помощью, кроме доказательства существования предела при предельном переходе к бесконечному объему, можно получить подробную информацию о свойствах спектра: кратность основного состояния; существование изолированных точек спектра, отвечающих частицам; наличие или отсутствие связанных состояний; полнота состояний рассеяния в низкоэнергетической области; аналитичность относительно констант связи; суммируемость по Борелю и т. д. В гл. 14 были указаны применения кластерных разложений к изучению частиц, а в гл. 5 и 16 — к теории фазовых переходов.

Кластерные разложения сходятся в том случае, когда значения параметров, задающих квантовое поле, достаточно удалены от критических значений, т. е. поле близко к гауссовому. Можно построить кластерные разложения (более сложные, чем те, которые приводятся здесь) и для многофазных теорий, у которых каждая чистая фаза является почти гауссовой. Кластерные разложения являются основным средством анализа картины, возникающей в приближении среднего поля, как это описано в гл. 5 (для области значений параметров, удаленной от критических точек).

Разложения, о которых идет речь, тесно связаны с вириальными и кластерными разложениями в статистической механике; см. гл. 2. Соответствующая формула из статистической механики дает следующее разложение плотности вероятности в ансамбле Гиббса:

$$\prod_{i < j} e^{-\beta V(x_i - x_j)} = \prod_{i < j} [1 + (e^{-\beta V(x_i - x_j)} - 1)] = \\ = \sum_{\Gamma} \prod_{(i, j) \in \Gamma} (e^{-\beta V(x_i - x_j)} - 1). \quad (18.1.1)$$

Здесь  $\Gamma$  — множество неупорядоченных пар  $(i, j)$ ,  $i \neq j$ , т. е. граф Майера, а суммирование распространяется на все такие графы. Эта формула выражает взаимодействие  $e^{-\beta V(x_i - x_j)}$  частиц с номерами  $i$  и  $j$  ( $i \neq j$ ) в виде суммы двух членов: первый, 1, отвечает нулевому взаимодействию, а второй представляет собой возмущение  $e^{-\beta V(x_i - x_j)} - 1$ , которое мало при высоких температурах  $kT = \beta^{-1}$ . Оставаясь на эвристическом уровне, можно сказать, что роль гиббсовской плотности в  $P(\varphi)_2$ -теории поля играет мера

$$e^{-\int [\mathcal{A}_0(x) + \lambda P(\varphi(x))] dx} \prod_{x \in R^2} d\varphi(x). \quad (18.1.2)$$

Здесь

$$\mathcal{A}_0(x) = \frac{1}{2} [(\nabla\varphi(x))^2 + m_0^2\varphi(x)^2], \quad (18.1.3)$$

а формальное выражение

$$e^{-\int \mathcal{A}_0(x) dx} \prod_{x \in R^2} d\varphi(x) \quad (18.1.4)$$

обозначает гауссову меру  $d\varphi_{C_\emptyset}$  на  $\mathcal{S}'(R^2)$  с нулевым средним и ковариацией  $C_\emptyset$ .

В формуле (18.1.2) взаимодействие между отдельными точками входит лишь в член  $(\nabla\varphi)^2$  в  $\mathcal{A}_0(x)$ , так что  $e^{-(1/2)\int(\nabla\varphi)^2}$  играет здесь роль величины  $e^{-\beta V}$  в (18.1.1). Наше кластерное разложение строится в духе формулы (18.1.1). Непосредственный аналог полностью невзаимодействующей теории получается, если отбросить лапласиан в выражении

$$\int \mathcal{A}_0(x) dx = \frac{1}{2} \int \varphi(x) (-\Delta + m_0^2) \varphi(x) dx.$$

Соответствующая ультралокальная теория весьма сингулярна по сравнению с теорией, определенной с помощью (18.1.2). Мы будем уменьшать и оценивать сингулярность для разности взаимодействующей и невзаимодействующей теорий в два этапа. На первом этапе мы модифицируем указанную выше ультралокальную стратегию, введя решетку в плоскости  $R^2$  и используя эту решеточную

структуру в разложении, обобщающем (18.1.1). В этом разложении взаимодействие выключается лишь на ребрах решетки. Таким способом мы уменьшаем сингулярность свободной (невзаимодействующей) меры по отношению к мере со взаимодействием. В формулировках теорем 18.1.1—2 отсутствуют указания на использование решетки, и в результате получается разложение для непрерывной теории  $P(\varphi)_2$  в бесконечном объеме, а не для ее решеточной аппроксимации. Пусть  $\Gamma$  — множество ребер решетки, соединяющих соседние узлы, и пусть  $\Delta_\Gamma$  — оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле на  $\Gamma$ . Положим

$$C_\Gamma = (-\Delta_\Gamma + m_0^2)^{-1}. \quad (18.1.5)$$

Тогда  $d\varphi_{C_\Gamma}$  играет роль свободной меры, для которой взаимодействие вдоль кривой  $\Gamma$  отсутствует. В итоге структура решетки дает возможность ввести дискретный набор переменных в сумме и произведении  $\sum_\Gamma \prod_{(i,j) \in \Gamma}$  в (18.1.1), даже если эта формула применяется к непрерывной модели  $P(\varphi)_2$ .

На втором этапе регуляризуются разности, аналогичные  $e^{-\beta V(x_i - x_j)} - 1$  в (18.1.1). Разность двух гауссовых мер можно записать в виде

$$d\varphi_{C_1} - d\varphi_{C_2} = \int_0^1 (d/ds) d\varphi_{C(s)},$$

где  $C(s) = sC_1 + (1-s)C_2$ . Тогда  $(d/ds)d\varphi_{C(s)}$  можно вычислить с помощью формулы (9.1.33), т. е. интегрированием по частям.

Для малых значений  $\lambda/m_0^2$  мы докажем экспоненциальное кластерное свойство функций Швингера. Это свойство устанавливается вначале в конечном объеме, причем оценки не зависят от объема. Далее легко выводится, что функции Швингера сходятся при неограниченном расширении объема и предельные функции Швингера (не зависящие от граничных условий) обладают экспоненциальным кластерным свойством в бесконечном объеме. Применяя теорему реконструкции Остервальдера — Шрадера, мы строим теорию поля  $P(\varphi)_2$  в бесконечном объеме по функциям Швингера. Для этой теории выполнены аксиомы Вайтмана и физическая масса строго положительна. Мы покажем также, что функции Швингера аналитичны по  $\lambda$  в ограниченном секторе

$$0 < |\lambda| < \epsilon, \quad -\pi/2 < \arg \lambda < \pi/2. \quad (18.1.6)$$

Функции Швингера в конечном объеме, по определению, представляют собой моменты меры  $d\mu_\Lambda$  вида (11.2.1):

$$S_\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \int \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) d\mu_\Lambda. \quad (18.1.7)$$

Однако для удобства мы заменяем ковариацию  $C_{\lambda}$  в (11.2.1), отвечающую условиям Дирихле, свободной ковариацией  $C_{\emptyset}$ , так что объемное обрезание появляется только во взаимодействии  $V = V(\Lambda)$ . В этом случае  $S_{\lambda}$  определяется как обобщенная функция из пространства  $\mathcal{F}'(R^{2n})$ . В дополнение к мономам в (18.1.7) полезно ввести интегралы от произведения виковых полиномов, а именно

$$A = \int : \varphi(x_1)^{n_1} : \dots : \varphi(x_j)^{n_j} : \omega(x_1, \dots, x_j) dx. \quad (18.1.8)$$

Мы предполагаем, что  $\omega \in \mathcal{F}(R^{2j})$ , хотя можно ограничиться и более слабыми предположениями. Определим  $\text{supp } A$  как пересечение всех замкнутых множеств  $C \subset R^2$ , удовлетворяющих условию  $\text{supp } \omega \subset C \times \dots \times C$  ( $j$  сомножителей). (18.1.9)

**Теорема 18.1.1.** Пусть  $\lambda$  принадлежит замыканию проколотого полукруга (18.1.6), а  $\epsilon/m_0^2$  достаточно мало. Пусть, кроме того,  $A$  и  $B$  — функции на  $\mathcal{F}'$  вида (18.1.1), а  $d$  — ширина полосы в  $R^2$ , разделяющей  $\text{supp } A$  и  $\text{supp } B$ . Тогда существует константа  $M = M_{A, B}$  и строго положительная константа  $t$ , не зависящая от  $A$  и  $B$ , для которых

$$\left| \int AB d\mu_{\lambda} - \int A d\mu_{\lambda} \int B d\mu_{\lambda} \right| \leq M_{A, B} e^{-td} \quad (18.1.10)$$

равномерно по  $\Lambda$  при  $|\Lambda| \rightarrow \infty$ . Константа  $M$  не меняется при независимых сдвигах  $A$  и  $B$ .

**Теорема 18.1.2.** Пусть  $\lambda$  принадлежит замыканию проколотого полукруга (18.1.6), а  $\epsilon/m_0^2$  достаточно мало. Для функций  $A$  вида (18.1.8) величина  $\left| \int A d\mu_{\lambda} \right|$  ограничена равномерно по  $\lambda$  и  $\Lambda$  при  $|\Lambda| \rightarrow \infty$ .

**Следствие 18.1.3.** В предположениях теоремы 18.1.1 предел при неограниченном расширении  $\Lambda$

$$\int A d\mu = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \int A d\mu_{\Lambda} \quad (18.1.11)$$

существует и удовлетворяет оценке

$$\left| \int AB d\mu - \int A d\mu \int B d\mu \right| \leq M_{A, B} e^{-md}. \quad (18.1.12)$$

**Доказательство.** Применим теорему 18.1.1 ко взаимодействию

$$V_{\alpha} = V(\Lambda) + \alpha V(\Delta), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

добавляя к области  $\Lambda$  единичный квадрат  $\Delta \subset R^2 \setminus \Lambda$ . Тогда

$$\left| \frac{d}{d\alpha} \int A d\mu_{\alpha} \right| = \left| \int AV(\Delta) d\mu_{\alpha} - \int A d\mu_{\alpha} \int V(\Delta) d\mu_{\alpha} \right| \leq M_{A, B} e^{-md}, \quad B = V(\Delta),$$

где  $d = \text{dist}(\text{supp } \Lambda, \Lambda)$ . Пользуясь экспоненциальным убыванием, просуммируем по семейству квадратов, покрывающих  $\Lambda' \setminus \Lambda$ , и тем самым установим, что  $\int A d\mu_\Lambda$  — фундаментальная последовательность при  $\Lambda \uparrow R^2$ . Равномерная оценка (18.1.10) верна и для среднего (18.1.11) в бесконечном объеме.

Из аналитичности по  $\lambda$  функций Швингера в конечном объеме теоремы Витали и сходимости при  $\Lambda \rightarrow \infty$  для малых вещественных  $\lambda$  получаем

**Следствие 18.1.4.** *Функции Швингера аналитичны по  $\lambda$  в области (18.1.6) при малых  $\varepsilon/m_0^2$ .*

## 18.2 Кластерное разложение

Доказательства теорем 18.1.1 и 18.1.2 основаны на разложении, которое мы сейчас построим. Пусть  $\mathcal{B}$  — некоторое множество отрезков в  $R^2$ . Нас будут интересовать два основных примера: либо  $\mathcal{B} = (Z^2)^*$  — множество ребер решетки, соединяющих соседние узлы в  $Z^2$ , либо  $\mathcal{B} = (Z^2)^* \setminus \Gamma$ , где  $\Gamma$  — конечное подмножество в  $(Z^2)^*$ . отождествим  $\Gamma \subset \mathcal{B}$  с подмножеством  $\Gamma = \bigcup_{b \in \Gamma} b \subset R^2$ . Мы будем помечать члены нашего разложения подмножествами  $\Gamma \subset \mathcal{B}$ . В слагаемом, отвечающем  $\Gamma$ , выключено взаимодействие ребер

$$\Gamma^c = \mathcal{B} \setminus \Gamma, \quad (18.2.1)$$

что соответствует выбору гауссовой меры с ковариацией Дирихле на  $\Gamma^c$ . В связи с этим ребра  $b \in \Gamma^c$  называют ребрами Дирихле. Каждому ребру  $b \in \Gamma$  мы сопоставим величину, определяющую разность между свободной мерой и мерой со взаимодействием, аналогичную разностям в формуле (18.1.1). Эти величины выражаются с помощью производных согласно основной теореме анализа, поэтому ребра  $b \in \Gamma$  называют ребрами дифференцирования.

Рассматриваемые нами ковариационные операторы являются выпуклыми линейными комбинациями операторов  $C_\Gamma$ . Для каждого ребра  $b \in \mathcal{B}$  введем параметр  $s_b \in [0, 1]$ , измеряющий величину взаимодействия через  $b$ . Значению  $s_b = 0$  отвечает условие Дирихле на  $b$ , т. е. взаимодействие через  $b$  отсутствует, а значению  $s_b = 1$  отвечает полное взаимодействие через  $b$ . Совокупность величин

$$s = (s_b)_{b \in \mathcal{B}} \quad (18.2.2)$$

определяет многопараметрическое семейство ковариационных операторов

$$C(s) = \sum_{\Gamma \subset \mathcal{B}} \prod_{b \in \Gamma} s_b \prod_{b \in \Gamma^c} (1 - s_b) C_{\Gamma^c}. \quad (18.2.3)$$



Поскольку коэффициентами в (18.2.3) являются члены разложения

$$1 = \prod_{b \in \mathcal{B}} 1 = \prod_{b \in \mathcal{B}} [s_b + (1 - s_b)],$$

то (18.2.3) действительно представляет собой выпуклую линейную комбинацию операторов  $C_\Gamma$ , как и утверждалось выше. Свободная ковариация есть не что иное, как

$$C_\emptyset = C(1, 1, \dots) = (-\Delta + m_0^2)^{-1},$$

а полностью выключенному взаимодействию отвечает ковариация

$$C_{\mathcal{B}} = C(0, 0, \dots) = (-\Delta_{\mathcal{B}} + m_0^2)^{-1}.$$

Функция Швингера и статистическая сумма являются, естественно, функциями от  $s$ . Мы используем при этом обозначения

$$Z(s) S_s(x) = Z(\Lambda, s) S_{\Lambda, s}(x) = \int \prod_i \varphi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_s, \quad (18.2.4)$$

$$Z(s) = Z(\Lambda, s) = \int e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_s,$$

$$\text{где } d\varphi_s = d\varphi_{C(s)}, \quad V(\Lambda) = \int_{\Lambda} \lambda :P(\varphi(x)) : dx.$$

Цель кластерных разложений состоит в том, чтобы выразить величины, относящиеся к полностью взаимодействующей теории ( $s_b \equiv 1$ ), с помощью свободных величин, т. е. определяемых не взаимодействующей мерой (и, следовательно, локализованных в конечном объеме). Свободным величинам отвечают значения параметров  $s_b = 0$  для большинства  $b \in \mathcal{B}$ , и для их записи удобно определить набор  $s(\Gamma) = \{s(\Gamma)_b\}_{b \in \mathcal{B}}$  следующим образом:

$$s(\Gamma)_b = \begin{cases} s_b & \text{при } b \in \Gamma, \\ 0 & \text{при } b \notin \Gamma. \end{cases} \quad (18.2.5)$$

Для конечных  $\Gamma$  набор  $s(\Gamma)$  определяет граничное условие Дирихле на далеких расстояниях (на  $\Gamma^c$ ), в то время как  $s$  можно представлять себе в виде общих граничных условий на  $\Gamma^c$ , совпадающих с  $s(\Gamma)$  на  $\Gamma$ . Следующее определение выражает свойство независимости функции  $F$  от граничных условий на бесконечности.

**Определение 18.2.1.** Функция  $F(s)$  называется регулярной на бесконечности, если для любого  $s$

$$F(s) = \lim_{\{\Gamma \uparrow \mathcal{B} : \Gamma \text{ конечно}\}} F(s(\Gamma)). \quad (18.2.6)$$

**Предложение 18.2.1.** Функции (18.2.4) регулярны на бесконечности. Здесь  $\mathcal{B} \subset (Z^2)^*$ , а сходимость  $S$  понимается как сходимость в  $\mathcal{P}'$ .

Поскольку  $\Lambda$  фиксировано и ограничено, существование предела (18.2.6) устанавливается элементарно. Предложение следует из (9.1.33), леммы 8.5.2 и теоремы 8.6.2.

Первый этап построения кластерного разложения состоит в применении основной теоремы анализа к конечному набору отличных от нуля параметров в  $F(s(\Gamma))$ . Пусть

$$\partial^\Gamma = \prod_{b \in \Gamma} d/ds_b. \quad (18.2.7)$$

Определим частичный порядок на множестве наборов  $s$  следующим образом:

$$\sigma \leq s \iff \sigma_b \leq s_b \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

**Предложение 18.2.2.** Пусть  $F(s)$  — гладкая функция, регулярная на бесконечности. Тогда

$$F(s) = \sum_{\Gamma \subset \mathcal{B}: \Gamma \text{ конечно}} \int_{0 \leq \sigma \leq s(\Gamma)} \partial^\Gamma F(\sigma(\Gamma)) d\sigma. \quad (18.2.8)$$

*Доказательство.* Обозначим  $G(s)$  правую часть (18.2.8). Мы утверждаем, что  $F(s(B)) = G(s(B))$  для любого конечного множества  $B \subset \mathcal{B}$ . Далее,  $G(s(B))$  есть просто сумма (18.2.8), взятая по подмножествам  $\Gamma \subset B \subset \mathcal{B}$ . Поскольку  $F(s)$  регулярна на бесконечности, сходимость суммы в (18.2.8) следует из сделанного утверждения. Сама формула (18.2.8) получается в результате перехода к пределу при  $B \uparrow \mathcal{B}$ .

Для функции  $f(s_b)$  одного переменного положим

$$(\delta^b f)(s_b) = f(s_b) - f(0) = \int_0^{s_b} \partial^b f(\sigma_b) d\sigma_b, \quad (E_0^b f)(s_b) = f(0).$$

Тогда  $I = E_0^b + \delta^b$  (по основной теореме анализа), так что

$$I = \prod_{b \in B} (E_0^b + \delta^b) = \sum_{\Gamma \subset B} E_0^{B \setminus \Gamma} \delta^\Gamma, \quad (18.2.9)$$

где  $\delta^\Gamma = \prod_{b \in \Gamma} \delta^b$ ,  $E_0^{B \setminus \Gamma} = \prod_{b \in B \setminus \Gamma} E_0^b$ . Легко видеть, что из (18.2.9) вытекает требуемое тождество  $F(s(B)) = G(s(B))$ .

Следующий этап построения кластерного разложения — это факторизация и частичное пересуммирование в (18.2.8). Напишем

$$R^2 \setminus \Gamma^c = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r, \quad (18.2.10)$$

где каждое множество  $X_i$  есть объединение связанных компонент и  $X_i \cap X_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

**Определение 18.2.2.** Функция  $F(\Lambda, s)$  называется свободной при  $s = 0$ , если она представляется в виде

$$F(\Lambda, s(\Gamma)) = \prod_{i=1}^r F(\Lambda \cap X_i, s(\Gamma \cap X_i)) \quad (18.2.11)$$

для любого  $\Gamma$  и некоторого разбиения (18.2.10),

**Предложение 18.2.3.** Для заданного разбиения вида (18.2.10) меры  $d\varphi_{s(\Gamma)}$  и  $e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_{s(\Gamma)}$  могут быть представлены в виде прямого произведения  $r$  мер, где  $i$ -й сомножитель является мерой на  $\mathcal{P}'(X_i)$ .

*Доказательство.* Поскольку оператор  $C(s(\Gamma))$  отвечает условиям Дирихле на  $\Gamma^c$ , то он является прямой суммой операторов  $C(s(\Gamma))|_{L_2(X_i)}$ . Факторизация  $d\varphi_{s(\Gamma)}$  следует из этого факта и, кроме того, может быть выведена из (9.1.16).

Поскольку  $P(\varphi(x))$  есть локальная функция,  $e^{-\lambda V(\Lambda)}$  также факторизуется, что влечет за собой факторизацию меры  $e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_{s(\Gamma)}$ . ■

**Следствие 18.2.4.** Функции  $ZS$  и  $Z$  в (18.2.4) свободны при  $s = 0$ .

С помощью кластерного разложения мы представляем величину  $F$  в виде суммы произведений вкладов отдельных связных графов. Мы фиксируем некоторое множество точек (например,  $X_0 = x = (x_1, \dots, x_n)$  — переменные в формуле (18.2.4)). По графам, в которых  $X_0$  не встречается, проводится суммирование, что дает один множитель в выражении для  $F$ , отвечающий внешней области.

Проследим подробнее за этим суммированием. Сделаем подстановку (18.2.11) в разложение (18.2.8). Тогда

$$F(\Lambda, s) = \sum_{\Gamma} \prod_{i=1}^r \int_0^{s(\Gamma_i)} \partial^{\Gamma_i} F(\Lambda \cap X_i, \sigma(\Gamma_i)) d\sigma, \quad (18.2.12)$$

где  $\Gamma_i = \Gamma \cap X_i$ . Если  $X_i$  связны, это выражение представляет собой сумму по произведениям связных графов. Выберем теперь в качестве  $X_1$  в (18.2.10) объединение всех компонент, в которых встречаются точки из  $X_0$ , и пусть  $X_2$  есть объединение остальных компонент. Фиксируем  $X_1$  и  $\Gamma_1$  и просуммируем по всевозможным выборам  $\Gamma_2$ :

$$F(\Lambda, s) = \sum_{X_1, \Gamma_1} \int_0^{s(\Gamma_1)} \partial^{\Gamma_1} F(\Lambda \cap X_1, \sigma(\Gamma_1)) d\sigma \sum_{\Gamma_2} \int_0^{s(\Gamma_2)} \partial^{\Gamma_2} F(\Lambda \cap X_2, \sigma(\Gamma_2)) d\sigma.$$

Во второй сумме  $\Gamma_2$  пробегает все конечные множества ребер в  $\mathcal{B} \setminus X_1$ . Поэтому сумма по  $\Gamma_2$  может быть вычислена с помощью (18.2.8) как функция вида  $F(\Lambda \cap X_2, s(\mathcal{B} \setminus X_1))$ . Полагая  $X = X_1$  и обозначая  $\Gamma_1$  просто  $\Gamma$ , приходим к разложению

$$F(\Lambda, s) = \sum_X K(X_0, X) F(\Lambda \setminus X, s(\mathcal{B} \setminus X)), \quad (18.2.13)$$

$$K(X_0, X) = \sum_{\Gamma} \int_0^{s(\Gamma)} \partial^{\Gamma} F(\Lambda \cap X, \sigma(\Gamma)) d\sigma.$$

В этих суммах  $X$  пробегает все конечные объединения замкнутых квадратов решетки, содержащие  $X_0$ , а в качестве  $\Gamma$  может быть выбрано любое подмножество  $\mathcal{B}$ , такое, что

- (i) в каждой компоненте  $X \setminus \Gamma^c$  встречается точка из  $X_0$ ;  
 (ii)  $\Gamma \subset \text{Int } X$ .

Если для заданного  $X$  таких  $\Gamma$  не существует, то  $K(X_0, X) \equiv 0$ .

**Теорема 18.2.5.** Пусть множество  $X_0$  ограничено, а функция  $F$  является гладкой, регулярной на бесконечности и свободной при  $s = 0$ . Тогда имеет место кластерное разложение (18.2.13).

**ПРИМЕР 1.** Пусть  $\mathcal{B} = (Z^2)^*$  — множество всех ребер решетки и  $X_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Положим  $F = ZS$  (см. (18.2.4)). Тогда при  $s = 1$

$$\begin{aligned} F(\Lambda \setminus X, s(\mathcal{B} \setminus X)) &= \int e^{-\lambda V(\Lambda \setminus X)} d\varphi_{s(\mathcal{B} \setminus X)} = \\ &= Z(\Lambda \setminus X, s(\mathcal{B} \setminus X)) \equiv Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X), \end{aligned} \quad (18.2.14)$$

поскольку изменение граничных условий внутри  $X$  не изменяет интеграла. Разделив на  $Z$ , мы получим, в силу (18.2.13),

$$S_\Lambda(x) = \sum_{X, \Gamma} \int \partial^\Gamma \int \prod_i \varphi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda \cap X)} d\varphi_{s(\Gamma)} ds(\Gamma) \frac{Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X)}{Z(\Lambda)}. \quad (18.2.15)$$

Представив  $X \setminus \Gamma^c$  как объединение связных компонент, мы можем факторизовать интеграл в (18.2.15) так же, как в формуле (18.2.12).

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $\Gamma_1 \subset (Z^2)^*$  и  $\Gamma_2 = \Gamma_1 \setminus b_1$  — конечные множества ребер решетки, а  $b_1$  — первый элемент  $\Gamma_1$  по отношению к некоторому лексикографическому порядку на  $(Z^2)^*$ . Применим кластерное разложение (по всем наборам ребер  $b \neq b_1$ ) для изучения разности  $Z_{\Gamma_1} - Z_{\Gamma_2}$ , где  $Z_\Gamma = \int e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_{C_\Gamma}$ . Для этого в качестве  $\mathcal{B}$  выберем множество  $(Z^2)^* \setminus b_1$ ;  $X_0 = b_1$ . Теперь  $Z$  является функцией пары  $(s, s_{b_1})$ . Определим функцию

$$F(\Lambda, s) = \begin{cases} Z(\Lambda, s(\Gamma_2^c), 0) - Z(\Lambda, s(\Gamma_2^c), 1), & b_1 \subset \Lambda, \\ Z(\Lambda, s(\Gamma_2^c), 0), & b_1 \cap \Lambda = \emptyset. \end{cases}$$

Функция  $F$  обладает тем свойством, что

$$F(\Lambda, s = 1) = Z_{\Gamma_1} - Z_{\Gamma_2}, \quad \text{при } b_1 \subset \Lambda.$$

Кроме того,  $F$  является гладкой, регулярной на бесконечности и свободной при  $s = 0$  (последнее свойство выполнено в силу того, что  $b_1 \notin \mathcal{B}$ ). Заметим, что  $F$  не зависит от переменных  $s_b$ , отвечающих ребрам  $b \in \Gamma_2$ , поэтому  $\partial^b F = 0$  при  $b \in \Gamma_2$ . Следовательно, для любого ненулевого члена разложения граф  $\Gamma_2$  состоит из ребер Дирихле, и в (18.2.13) можно ввести еще одно ограничение на множества  $\Gamma$ , по которым проводится суммирование  $\sum_\Gamma$ :

- (iii)  $\Gamma \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Согласно (18.2.13), имеем

$$\begin{aligned} F(\Lambda, s = 1) &= Z_{\Gamma_1}(\Lambda) - Z_{\Gamma_2}(\Lambda) = \sum_X K(b_1, \Gamma_1, X) F(\Lambda \setminus X, s(\mathcal{B} \setminus X)) = \\ &= \sum_X K(b_1, \Gamma_1, X) Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda \setminus X). \end{aligned}$$

Здесь  $X^*$  — множество ребер, входящих в  $X$ . Последнее равенство вытекает из того, что  $F(\Lambda \setminus X, s(\mathcal{B} \setminus X))$  не зависит от переменных  $s_b$ ,  $b \in \text{Int } X$ . Умножим

и разделим почленно на  $Z_{\partial\Delta}(\Delta)^{|\Lambda \cap X|}$ , где  $\Delta$  — один из квадратов решетки. Поскольку

$$Z_{\partial\Delta}(\Delta)^{|\Lambda \cap X|} Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda \setminus X) = Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda),$$

то мы получаем (при новом  $K$ )

$$Z_{\Gamma_1} = Z_{\Gamma_1 \setminus b_1} + \sum_X K(b_1, \Gamma_1, X) Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda), \quad (18.2.16)$$

где новое  $K$  равно

$$K(b_1, \Gamma_1, X) = Z_{\partial\Delta}(\Delta)^{-|\Lambda \cap X|} \int \sum_{\Gamma} \partial^{\Gamma \cup b_1} Z(\Lambda \cap X, s(\Gamma \cup b_1)) ds(\Gamma \cup b_1). \quad (18.2.17)$$

Эти уравнения по своей структуре занимают промежуточное положение между уравнениями Кирквуда — Зальцбурга и уравнениями Майера — Монтролла. Они будут изучены в § 18.5 с целью получения оценок для  $Z_{\Gamma}/Z$ , т. е. второго сомножителя в (18.2.15).

### 18.3 Кластерное свойство и аналитичность

В этом параграфе мы выведем кластерное свойство и аналитичность — основные результаты настоящей главы — из предположения о сходимости кластерного разложения (18.2.15). Пусть  $T(x, \Lambda, X, \Gamma)$  обозначает слагаемое в (18.2.15), отвечающее  $X, \Gamma$ , так что

$$S_{\Lambda}(x) = \sum_{X, \Gamma} T(x, \Lambda, X, \Gamma). \quad (18.3.1)$$

Для любой основной функции  $w \in \mathcal{P}(R^{2n})$  ряд

$$\int S_{\Lambda}(x) w(x) dx = \sum_{X, \Gamma} \langle w, T \rangle \quad (18.3.2)$$

абсолютно сходится. Скорость сходимости определяется площадью  $|X|$  множества  $X$ . Докажем, что при  $K > 0$

$$\sum_{\{X, \Gamma: |X| \geq D\}} |\langle w, T \rangle| \leq |w| e^{-K(D-n)}, \quad (18.3.3)$$

где  $|w|$  — некоторая (зависящая от  $n$ ) норма  $w$  в  $\mathcal{P}$ .

**Теорема 18.3.1.** *Фиксируем произвольное  $K > 0$ . Пусть  $t_0$  велико,  $\varepsilon$  мало (эти величины выбираются в зависимости от  $K$ ), а  $\lambda$  принадлежит замыканию множества (18.1.6). Существует такая норма  $|w|$  в пространстве  $\mathcal{P}$ , что неравенство (18.3.3) выполнено равномерно по  $\lambda$ ,  $t_0$  и  $D \geq 1$ , причем норма  $|w|$  инвариантна относительно сдвигов любого из аргументов функции  $w$ .*

Как видно из доказательства этой теоремы, она верна и в случае, когда в (18.2.15) в качестве подынтегральной функции рассматривается выражение  $A$  вида (18.1.8). Таким образом, тео-

рема 18.1.2 и следствие 18.1.3 вытекают из (18.3.3) при  $K = 1$ ,  $D = 1$ .

Теорема 18.1.1 также следует из сходимости кластерного разложения. Ее доказательство для случая двухточечной функции при четном взаимодействии хотя и не использует всех идей, хорошо иллюстрирует основную из них, поэтому мы рассмотрим этот случай первым.

*Доказательство теоремы 18.1.1 для  $n = 2$  и четного  $P$  в предположении, что верна теорема 18.3.1.* Поскольку полином  $P$ , определяющий взаимодействие в (18.1.2), четный, теория обладает симметрией  $\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$ . Для гауссовых интегралов, определенных с помощью факторизирующей меры  $e^{-\lambda V} d\varphi_{C(s(\Gamma))}$  (ср. предложение 18.2.3), верно даже большее: преобразование

$$\varphi(x) \rightarrow \sigma(x)\varphi(x) \quad (18.3.4)$$

также является симметрией, если  $\sigma(x) = \pm 1$  и  $\sigma(x) = \text{const}$  на каждом  $X_i$ . Ввиду симметрии  $\varphi \rightarrow -\varphi$  имеем  $S_\Lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$  для нечетных  $n$ . Аналогично,

$$\int \prod \varphi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda \cap X)} d\varphi_{C(s(\Gamma))} = 0,$$

кроме тех случаев, когда каждая связная компонента  $X_1, \dots, X_r$  содержит четное число точек  $x_i$ . Поскольку  $\partial\Gamma^0 = 0$ , верно также равенство  $T(x, \Lambda, X, \Gamma) = 0$ , если хотя бы одно из множеств  $X_j$  содержит нечетное число точек  $x_i$ . Ввиду условия (i) § 18.2 каждое множество  $X_j$  должно содержать по крайней мере одну, а значит, по крайней мере две точки  $x_i$ . Следовательно, при  $n = 2$  есть лишь одно множество  $X_j$ . Другими словами,  $X \setminus \Gamma^c$  связно. Пусть  $d$  определено как в теореме 18.1.1 и  $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2$ . Поскольку  $X$  связно и  $\text{supp } \omega_1 \cap X \neq \emptyset$ , то  $d \leq |X| + 1$ . Значит, согласно (18.3.3),

$$\left| \int S_\Lambda(x_1, x_2) \omega_1(x_1) \omega_2(x_2) dx \right| \leq |\omega| e^{-K(D-2)} \leq M_\omega e^{-Kd}.$$

Эта оценка завершает доказательство теоремы 18.1.1 при  $n = 2$ , поскольку одноточечная функция  $S_\Lambda(x_1)$  обращается в нуль для четных  $P$ . ■

*Доказательство теоремы 18.1.1 (общий случай) в предположении, что верна теорема 18.3.1.* Как и прежде, идея состоит в том, чтобы свести кластерное разложение к сумме членов, содержащих лишь одну связную компоненту  $X_1 = X$ . Слагаемые, отвечающие двум и более связным компонентам, должны обратиться в нуль в силу некоторой симметрии. Поскольку в общем случае (когда  $P$  не обязательно четный) такая симметрия отсутствует, мы, следуя работе [Ginibre, 1971], вводим новую теорию, обладающую искусственно созданной симметрией.

Пусть  $d\varphi_{C^*}$  есть копия меры  $d\varphi_C (C^* \cong C)$ , определенная на пространстве  $\mathcal{S}'^*$ , изоморфном  $\mathcal{S}'$ . Новая теория определяется свободной мерой  $d\varphi_C \times d\varphi_{C^*}$  ковариацией  $C \otimes I + I \otimes C^* = \mathcal{C}$ , нормированной физической мерой

$$\tilde{Z}^{-1} e^{-V(\Lambda)} e^{-V(\Lambda)^*} d\varphi_C \times d\varphi_{C^*} = d\tilde{\mu}$$

и полем  $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes I + I \otimes \varphi^*$ . Эта теория инвариантна (четна) относительно симметрии  $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$ , которая меняет местами сомножители.

Применим кластерное разложение к выражению  $\tilde{Z} \int (A - A^*) (B - B^*) d\tilde{\mu}$ . Ковариационные операторы, появляющиеся в этом разложении, имеют вид  $\tilde{C}(s) = C(s) \otimes I + I \otimes C(s)^*$ , поэтому симметрия  $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$  сохраняет гауссову

меру на каждом из сомножителей. (Однако само разложение изменяется: в качестве  $\mathcal{B}$  выступает  $(Z^2)^* \setminus \Gamma$ , где  $\Gamma$  — набор ребер решетки, объединяющий ребра двух связанных множеств, одно из которых содержит  $\text{supp } A = \text{supp } (A - A^*)$ , а другое  $\text{supp } B$ . Таким образом, для каждой компоненты  $X_i$  либо  $X_i \supset \supset \text{supp } A$ , либо  $X_i \cap \text{supp } A = \emptyset$ , и то же самое верно для  $\text{supp } B$ . Вследствие этого ограничения имеется не более двух компонент. Поскольку  $n$  в (18.3.3) ограничивает сверху число компонент, то, как легко проверить,  $n = 2$  в (18.3.5). Рассмотрим теперь слагаемое в (18.2.15), содержащее компоненты  $X_1, X_2, \dots$ , удовлетворяющие условиям

$$\text{supp } A \subset X_i, \quad \text{supp } B \subset X_j, \quad i \neq j. \quad (18.3.5)$$

В таком слагаемом симметрия  $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$  может быть применена отдельно к каждой компоненте  $X_i$ . Однако  $A - A^*$  нечетно по отношению к симметрии на  $X_i$ , поэтому члены, удовлетворяющие (18.3.5), должны обратиться в нуль. Ненулевые члены, для которых условие (18.3.5) нарушается, содержат компоненту  $X_1 = X$ , причем  $d \leq O(|X|)$ , так что при  $d \geq 4$

$$\left| \int (A - A^*)(B - B^*) d\bar{\mu} \right| \leq M_A, B e^{-md}.$$

Раскрывая скобки в левой части, мы получим сумму четырех интегралов, каждый из которых допускает факторизацию. В итоге левая часть неравенства принимает вид

$$2 \left| \int AB d\mu_{\Lambda, c} - \int A d\mu_{\Lambda, c} \int B d\mu_{\Lambda, c} \right|,$$

откуда следует теорема 18.1.1. ■

## 18.4 Сходимость: основные идеи

В этой главе используются две основные идеи. Первую из них выражает формула (18.2.15), дающая кластерное разложение функций Швингера. Вторая состоит в применении оценок, устанавливающих равномерную по  $\Lambda \rightarrow \infty$  сходимость такого разложения. В настоящем параграфе мы сформулируем эти оценки в виде трех предложений и с их помощью докажем теорему 18.3.1. Затем мы докажем самые простые из этих оценок, а доказательство более сложных отложим до следующих параграфов. Самая трудная из оценок содержится в предложении 18.4.3. В известном смысле это центральное место всей главы, поэтому мы обсудим в конце параграфа идеи, которые привлекаются для его доказательства.

Сходимость разложения устанавливается при помощи оценок следующих типов:

- (а) Комбинаторные оценки для подсчета числа слагаемых в разложении, в особенности для подсчета или оценки числа слагаемых некоторого специального вида.
- (б) Одночастичные оценки ядер ковариационных операторов и их производных  $\partial^{\Gamma C}(s)$ .
- (в) Оценки функциональных интегралов. Обычно такие оценки включают в себя оценки первых двух типов.

Разложение (18.3.3) или (18.2.15) представляет собой сумму, каждый член которой есть произведение двух сомножителей — отношения статистических сумм и функционального интеграла. Первое предложение является чисто комбинаторным — типа (а) — и позволяет вычислить количество членов, отвечающих множествам  $X$  фиксированной площади  $|X|$ . Во втором и третьем предложении оцениваются оба сомножителя, входящие в каждый член суммы (18.2.15). Эти предложения являются «гибридами», поскольку в них используются оценки всех трех типов.

**Предложение 18.4.1.** *Существует такая константа  $K_1$ , определяемая чисто геометрически, что число слагаемых в (18.2.15—16), отвечающих множествам  $X$  фиксированной площади  $|X|$ , мажорируется величиной  $e^{K_1 |X|}$ .*

**Предложение 18.4.2.** *Существует такая константа  $K_2$ , не зависящая от  $\lambda$  из замыкания множества (18.1.6), от  $\Lambda$  и от  $t_0$ , что при малых  $\varepsilon$  и больших  $t_0$*

$$|Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X)/Z(\Lambda)| \leq e^{K_2 |X|}.$$

**Предложение 18.4.3.** *Существуют такая константа  $K_3$  и такая норма  $|\omega|$  на пространстве основных функций, что для любых  $K > 0$ ,  $\Lambda$  и  $\lambda$  из замыкания множества (18.1.6) при достаточно больших  $t_0$*

$$\left| \left\langle \int \partial^\Gamma \int \prod_{i=1}^n \varphi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_{C(s(\Gamma))} ds(\Gamma), \omega \right\rangle \right| \leq e^{-K(|\Gamma| + K_3 |\Lambda|)} |\omega|.$$

(Оценка  $t_0$  зависит от  $K$ , а  $|\omega|$  не изменяется при сдвигах аргументов функции  $\omega$ .)

**Замечание.** В приведенном выше выражении в качестве подинтегральной функции может выступать и виков полином, как в (18.1.8).

**Доказательство теоремы 18.3.1.** Заменяем в предложении 18.4.3  $\Lambda$  на  $\Lambda \cap X$ . Для множества  $X$  в (18.2.15) имеем  $X = \bigcup_{i=1}^r \bar{X}_i$ , где  $r \leq n$ , а  $X_i$  связны. Более того,

$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^r \text{Int } \bar{X}_i$ , и поэтому «многие» ребра в  $X_i$  принадлежат  $\Gamma$ . Действительно, поскольку  $\bar{X}_i \setminus \Gamma^c = X_i$  связно, то

$$|X_i| - 1 \leq 2|\Gamma \cap \text{Int } X_i| \quad \text{и} \quad |X| - n \leq 2|\Gamma|. \quad (18.4.1)$$

Следовательно, можно заменить правую часть неравенства в предложении 18.4.3 на  $e^{-K(|X| - n)} |\omega|$  при некотором выборе  $K$  и  $|\omega|$ . Теорема 18.3.1 непосредственно следует из этой оценки и предложений 18.4.1, 18.4.2. ■

**Доказательство предложения 18.4.1.** Рассмотрим разложение (18.2.15). Оценим сначала число способов выбора компоненты  $X_i$ , содержащей фиксированную



точку  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . отождествим каждый элементарный квадрат решетки с его центром, а каждое ребро  $b$ , лежащее на границе двух квадратов  $\Delta$ ,  $\Delta'$ , с отрезком, соединяющим центр  $\Delta$  с центром  $\Delta'$ . Итак, мы должны вычислить, сколькими способами можно нарисовать связный граф, ребра которого соединяют соседние узлы решетки. Покажем, что каждый такой граф можно построить, исходя из начальной точки  $x_j$  и двигаясь вдоль некоторого ориентированного пути, образованного единичными отрезками, причем каждый отрезок проходится не более двух раз. В самом деле, если мы будем рассматривать узлы решетки как острова, а соединяющие их отрезки как мосты, то это утверждение довольно просто следует из решения знаменитой задачи о семи кенигсбергских мостах<sup>1)</sup>. Число связных путей длины  $l$ , составленных из ребер решетки и начинающихся в точке  $x_j$ , не превосходит  $4^l$ . Поскольку  $l \leq 8|X_i|$ , то  $X_i$  может быть выбрано не более чем  $O(1)2^{16|X_i|}$  способами. Число способов выбора  $\Gamma$  не превосходит  $4^{X_i}$ , поэтому пара  $X, \Gamma$  может быть выбрана не более чем

$$O(1)2^{16|X_i|}4^{X_i} \prod_i 2^{16|X_i|} = O(1)2^{19|X|}$$

способами, так как число способов выбрать величины  $|X_i|$  при заданном  $|X|$  не превосходит  $2^{|X|}$ . Эта оценка завершает доказательство. Случай (18.2.16) аналогичен рассмотренному. ■

Предложение 18.4.2 будет доказано в § 18.5 с помощью уравнений типа Кирквуда — Зальцбурга. Заметим лишь, что при изменении статистической суммы изменяется и область взаимодействия, и ковариация ( $\Lambda \setminus X \rightarrow \Lambda$  и  $C_{\partial x} \rightarrow C$ ).

**Обсуждение предложения 18.4.3.** Каждый дифференциальный оператор  $d/ds_b$  в  $\partial^\Gamma$  действует либо на меру, либо на подынтегральную функцию. Производные меры могут быть вычислены согласно (9.1.34), в результате чего в подынтегральной функции появляются зависящие от  $s$  ядра  $C'(s)$ . Многократное дифференцирование приводит к появлению новых слагаемых, отвечающих:

- (а) многократному применению функциональных производных  $\partial^2/\partial\varphi^2$  в (9.1.34),
- (б) многократному применению операторов  $\partial^{\Gamma_i}$  к каждому из ядер  $C'(s)$  в (9.1.34).

Каждое дифференцирование  $d/ds_b$  улучшает сходимость одним из двух способов. При дифференцировании меры возникает ядро  $C'$ , причем

- (с)  $C'$  и  $C$  малы в том смысле, что

$$(c_1) \|C'(x, y)\|_{L_p} \leq O(m_0^{-\varepsilon}),$$

$$(c_2) 0 \leq C'(x, y) = \partial^b C(x, y) \leq e^{-m_0(\text{dist}(x, b) + \text{dist}(y, b))},$$

$$(c_3) 0 \leq C(x, y) \leq e^{-m_0|x-y|}, |x-y| \geq 1.$$

<sup>1)</sup> См., например, Оре О. Графы и их применение. Пер. с англ. — М.: Мир, 1965. — Прим. ред.

Повторное дифференцирование ядра  $C(s)$  также улучшает сходимость, поскольку

(d)  $\partial^\Gamma C$  мало в том смысле, что

$$(d_1) \|\partial^\Gamma C(x, y)\|_{L_p} \leq O(m_0^{-\varepsilon|\Gamma|}),$$

$$(d_2) 0 \leq \partial^\Gamma C(x, y) \leq e^{-m_0 d},$$

где  $d$  — длина кратчайшего пути, соединяющего  $x, y$  и проходящего через каждое ребро  $b \in \Gamma$ . Действительно, из представления ядра  $(-\Delta + m_0^2)^{-1}$  в виде винерова интеграла вытекает, что  $\partial^\Gamma C(s)$  есть винеров интеграл по всем путям из  $x$  в  $y$ , проходящим через каждое ребро  $b \in \Gamma$ ; см. § 18.6.

Неравенство  $(c_2)$  используется для оценок членов типа (a). В самом деле, оно показывает, что в лапласиан  $C'(s)\Delta_\varphi$  в (9.1.34) существенный вклад вносят лишь точки  $x$  и  $y$ , близкие к  $b$ . Структура разложения такова, что каждому ребру  $b \in \mathcal{B}$  соответствует не более одного лапласиана  $\Delta_\varphi$ , и, следовательно, ограниченному множеству ребер отвечает конечное произведение операторов  $\Delta_\varphi$ . Вычисление  $\Delta^n$  приводит к появлению  $K(n) < \infty$  слагаемых, а повторение этой процедуры для непересекающихся малых областей, покрывающих в совокупности весь объем, приводит к появлению  $e^{O(\text{vol})}$  слагаемых. Для оценок суммы членов типа (b) применяется оценка  $(d_2)$ . Из  $(d_1)$  вытекает основная оценка  $m_0^{-\varepsilon|\Gamma|}$ , с помощью которой устанавливается сходимость.

Когда эти этапы доказательства пройдены, остается получить оценку функционального интеграла вида  $\int Re^{-\lambda V} d\varphi$ . Именно,

$$\left| \int Re^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi \right| \leq \left( \int R^2 d\varphi \right)^{1/2} \left( \int e^{-2 \text{Re } \lambda V(\Lambda)} d\varphi \right)^{1/2},$$

и каждый сомножитель в правой части представляет собой величину порядка  $e^{O(\text{vol})}$ . Теперь с помощью  $(c_3)$  мы оцениваем убывание зависимости между далекими невзаимодействующими областями в  $R^2$ .

## 18.5 Уравнение типа Кирквуда — Зальцбурга

Уравнения (18.2.16—17) можно переписать как векторное уравнение в банаховом пространстве

$$\rho = Z(\Lambda)1 + \mathcal{K}\rho, \quad (18.5.1)$$

имеющее единственное решение  $\rho = (I - \mathcal{K})^{-1}Z(\Lambda)1$ , удовлетворяющее неравенствам

$$|\rho| \leq |(I - \mathcal{K})^{-1}| |Z(\Lambda)| \leq 4|Z(\Lambda)|. \quad (18.5.2)$$

Мы увидим в дальнейшем, что эта оценка, по сути, есть не что иное, как предложение 18.4.2.

Пусть  $\mathcal{X}$  — банахово пространство функций  $f$ , определенных на конечных подмножествах  $\Gamma \subset (Z^2)^*$ . Для  $f \in \mathcal{X}$  обозначим через  $(f_n)_{n \geq 0}$  ограничение  $f$  на подмножества из  $n$  элементов. Норму в  $\mathcal{X}$  определим, полагая

$$\|f\| = \sup_{\{(n, \Gamma): |\Gamma|=n\}} 2^{-n} |f_n(\Gamma)|. \quad (18.5.3)$$

Пусть  $\rho_\Lambda \equiv (\rho_{\Lambda, n})_{n \geq 0} \in \mathcal{X}$  обозначает функцию  $\Gamma \rightarrow Z_\Gamma(\Lambda)$ .

**Теорема 18.5.1.** Пусть  $|\lambda| \leq \varepsilon$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , где  $\varepsilon$  мало, и пусть  $m_0$  достаточно велико. Тогда  $Z(\Lambda) \neq 0$ , а  $\rho_\Lambda$ , определенное выше, является единственным решением в  $\mathcal{X}$  уравнения (18.5.1). При этом  $\rho_\Lambda$  удовлетворяет оценкам (18.5.2).

По теореме о мажорированной сходимости,  $Z_{\partial\Delta}(\Delta) \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Значит, при малых  $\varepsilon$

$$1/2 \leq |Z_{\partial\Delta}(\Delta)| \leq 2.$$

Из этого условия вытекают ограничения на  $\varepsilon$ , при которых верна теорема 18.5.1; фактически это единственное в этой главе ограничение на параметр  $\varepsilon$ .

*Доказательство предложения 18.4.2 в предположении, что верна теорема 18.5.1:*

$$\begin{aligned} \left| \frac{Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X)}{Z(\Lambda)} \right| &\leq \left| \frac{Z_{X^*}(\Lambda)}{Z(\Lambda)} \right| |Z_{\partial\Delta}(\Delta)|^{-1} \wedge |X| \leq \\ &\leq 2^{|X^*|} \|(1 - \mathcal{X})^{-1}\| |Z_{\partial\Delta}(\Delta)|^{-1} \wedge |X| \leq e^{K_2 |X|}. \end{aligned}$$

*Доказательство теоремы 18.5.1.* Пусть  $1 = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{X}$ . Определим оператор  $\mathcal{X}$  равенствами

$$(\mathcal{X}f)_n(\Gamma) = f_{n-1}(\Gamma \setminus b_1) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{X: |X|=m\}} K(b_1, \Gamma, X) f_{|X^* \cup \Gamma|}(X^* \cup \Gamma), \quad (18.5.4)$$

где  $n \geq 2$ , а суммирование проводится по всем  $X$  (как в (18.2.16) и (18.2.17)), являющимся связными объединениями квадратов решетки и содержащим ребро  $b_1$ . При  $n = 1$  мы опускаем первый член в правой части, а при  $n = 0$  полагаем  $(\mathcal{X}f)_0 \equiv 0$ .

Покажем, что определенный выше оператор  $\mathcal{X}$  является сжимающим:  $\|\mathcal{X}\| \leq 3/4$ . Отсюда вытекает (18.5.2). Достаточно показать, что

$$(1/2) + \sup_{\Gamma \subset \mathcal{X}} 2^{-|\Gamma|} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{X: |X|=m\}} |K(b_1, \Gamma, X)| 2^{|\Gamma \cup X^*|} \leq 3/4. \quad (18.5.5)$$

Доказательство неравенства (18.5.5) аналогично доказательству теоремы 18.3.1, приведенному в § 18.4. В частности, в нем используются предложения 18.4.1 и 18.4.3. Согласно первому из них, каждому фиксированному значению  $|X|$  отвечает не более  $e^{K_1 |X|}$  членов. Как следует из (18.2.17), каждый член содержит по меньшей мере одно дифференцирование  $\partial^{b_1}$ . Используя этот факт и соотношения (18.4.1), мы получаем из предложений 18.4.1 и 18.4.3 следующую

оценку:

$$|K(b_1, \Gamma, X)| \leq e^{-K(|X|+1)} e^{K_3|X|}.$$

При достаточно больших  $K$  отсюда вытекает (18.5.5). В заключение покажем, что  $Z(\Lambda) \neq 0$ . По теореме о мажорированной сходимости  $Z_{\partial\Lambda}(\Delta) \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Если  $\varepsilon$  достаточно мало, то  $|Z_{\Lambda^*}| = |Z_{\partial\Lambda}(\Delta)|^{|\Lambda|} \neq 0$ . Следовательно,  $\rho_\Lambda \neq 0$  и, в силу (18.5.2),  $Z(\Lambda) \neq 0$ .

## 18.6 Ковариационные операторы

Основные результаты о свойствах ядер  $C_\emptyset(x, y)$  и  $C_\Gamma(x, y)$  были получены в гл. 7. Здесь мы покажем, что производные ковариационного оператора  $\partial^y C$  удовлетворяют более сильным оценкам, включая экспоненциальное убывание  $e^{-O(d)}$  (§ 18.4, (d<sub>2</sub>)). Пусть  $dW_{xy}^T(\omega)$  — условная мера Винера на траекториях  $\omega(\tau)$  с началом в точке  $x$  при  $\tau = 0$  и концом в точке  $y$  при  $\tau = T$ . Пусть  $\chi_\Gamma^T(\omega)$  — характеристическая функция множества траекторий, не пересекающих  $\Gamma$  при  $0 \leq \tau \leq T$ ; см. § 7.8. Тогда с помощью  $\chi_\Gamma^T$  можно выразить  $C_\Gamma$  в виде интеграла Винера (см. (7.8.3)) и аналогично

$$C(s)(x, y) = \int_0^\infty dT e^{-m_0^2 T} \int \prod_{b \in \mathcal{B}} (s_b + (1 - s_b) \chi_b^T) dW_{xy}^T.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\partial^y C(s))(x, y) &= \int_0^\infty dT e^{-m_0^2 T} \times \\ &\times \int \prod_{b \in \mathcal{B}} (1 - \chi_b^T) \prod_{b \in \mathcal{B} \setminus \gamma} [s_b + (1 - s_b) \chi_b^T] dW_{xy}^T. \end{aligned} \quad (18.6.1)$$

Нам необходимо было улучшить оценку производной  $\partial^y C$  по двум причинам. Во-первых, для данного контура  $\gamma$  нужно локализовать  $x$  и  $y$ . С этой целью обозначим через  $j = (j_1, j_2)$  пару узлов решетки, являющихся ближайшими соседями точек  $x$  и  $y$  соответственно. Тогда

$$d(j, \gamma) = \sup_{b \in \gamma} \{ \text{dist}(\Delta_{j_1}, b) + \text{dist}(\Delta_{j_2}, b) \} \quad (18.6.2)$$

дает грубую нижнюю оценку для  $d$ .

Объясним теперь, каково еще одно применение оценки производных  $\partial^y C$ . Пусть  $\mathcal{P}(\Gamma)$  — семейство всех разбиений  $\pi$  множества ребер, принадлежащих  $\Gamma$ . В предложении 18.4.3 требуется оценить производную  $\partial^\Gamma \int F d\varphi_s$ , которая, согласно правилу Лейбница и (9.1.33), есть не что иное, как

$$\partial^\Gamma \int F d\varphi_s = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)} \int \left( \prod_{\gamma \in \pi} \frac{1}{2} \partial^y C \cdot \Delta_\varphi \right) F d\varphi_s. \quad (18.6.3)$$

Оценки величин  $\partial^\gamma C$  позволяют оценить сумму  $\sum_{\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)}$ . Как и в гл. 7, мы установим, что в оценку входит множитель  $m_0^{-O(|\gamma|)}$ , обеспечивающий сходимость кластерного разложения.

**Предложение 18.6.1.** Пусть  $1 \leq q \leq \infty$ , а  $m_0$  достаточно велико. Существуют такие константы  $K_4(q, \gamma)$  и  $K_5(q)$ , не зависящие от  $m_0$ , что

$$\|\partial^\gamma C\|_{L_q(\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2})} \leq K_4(q, \gamma) m_0^{-|\gamma|/2q} \exp\left(-\frac{m_0 d(j, \gamma)}{2}\right), \quad (18.6.4)$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in \pi} K_4(q, \gamma) \leq e^{K_5(q)|\Gamma|}. \quad (18.6.5)$$

*Доказательство.* Воспользуемся представлением (18.6.1) величины  $\partial^\gamma C$  в виде интеграла Винера. Доказательство состоит, во-первых, из оценки меры Винера множества траекторий  $\omega(\tau)$ , пересекающих ребра  $b \in \gamma$  в некотором фиксированном порядке, и, во-вторых, комбинаторного подсчета числа способов, которыми можно ввести указанный порядок.

Пусть  $L(\gamma)$  — семейство всевозможных линейных упорядочений на множестве ребер  $b \in \gamma$ . Для каждого  $l \in L(\gamma)$  обозначим  $\mathcal{W}(l)$  множество винеровых траекторий, пересекающих все ребра  $b \in \gamma$ , причем порядок, в котором ребра пересекаются в первый раз, совпадает с  $l$ . Тогда

$$0 \leq \partial^\gamma C(s) \leq \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int \prod_{b \in \gamma} (1 - \chi_b^T(\omega)) dW_{xy}^T dT = \partial^\gamma G_\emptyset, \quad (18.6.6)$$

$$\partial^\gamma C_\emptyset(x, y) = \sum_{l \in L(\gamma)} \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int_{\mathcal{W}(l)} dW_{xy}^T dT. \quad (18.6.7)$$

Пусть  $b_1, \dots, b_2, \dots$  — элементы  $\gamma$ , упорядоченные согласно  $l$ . Пусть  $b'_2$  — первое из ребер, не имеющее общего конца с  $b_1 = b'_1$ ,  $b'_2, b'_3$  — первое из ребер после  $b'_2$ , также не касающихся  $b'_2$ , и т. д. Положим

$$a_j = \text{dist}(b'_{j+1}, b'_j), \quad 1 \leq j \leq J,$$

и определим величину

$$|l| = \sum_{j=1}^J a_j.$$

Условимся считать, что если ребра  $b'_2$  с указанными свойствами не существует, то  $|l| = 0$ .

Пользуясь введенными обозначениями, оценим член в (18.6.7), отвечающий  $l \in L(\gamma)$ , т. е.

$$K(l, x, y) = \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int_{\mathcal{W}(l)} dW_{xy}^T dT.$$

Применим индукцию по  $J$ , т. е. по числу ребер  $b'_j$ , и воспользуемся строго марковским свойством. Строго марковское свойство винерова процесса (см. [МакКеан,

1969, p. 10]) означает, что момент первого достижения

$$\tau_1 = \inf \{t \geq 0: \omega(t) \in b_1\}$$

есть измеримая функция на траекториях  $\omega$ , а процесс  $s \rightarrow \omega(s - \tau_1)$  есть условный винеров процесс с началом на  $b_1$ .

Пусть  $l'$  — линейное упорядочение множества  $\{b'_1, \dots, b'_J\}$ , отвечающее  $l$ , а  $l'_1$  — упорядочение ребер  $\{b'_2, \dots, b'_J\}$ , также определяемое порядком  $l$ . Тогда

$$K(l, x, y) \leq K(l', x, y) \equiv \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int_{\mathscr{W}(l')} dW_{xy}^T dT. \quad (18.6.8a)$$

Положим

$$\mathscr{W}(l', t_1) = \{\omega \in \mathscr{W}(l'): \tau_1(\omega) \leq t_1\},$$

$$\nu(l', t_1) = \int_{\mathscr{W}(l', t_1)} dW_{xy}^T.$$

Тогда  $\nu(l', t_1)$  — монотонно возрастающая функция  $t_1$ , причем

$$\int_{\mathscr{W}(l', t_1)} dW_{xy}^T = \nu(l', \infty) = \nu(l', \infty) - \nu(l', 0) = \int_0^\infty d\nu(l', t_1).$$

Подставляя это в (18.6.8a), получаем, что

$$K(l, x, y) \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-m_0^2 T) \nu(l', t_1) dT. \quad (18.6.8b)$$

В силу строго марковского свойства, интеграл по траекториям при  $t \geq \tau_1$  может быть переписан как интеграл по условной мере Винера при условии, что траектория начинается в  $b_1$ . Чтобы записать это явно, введем обозначения

$$\mathscr{W}(t_1) = \{\omega \in \mathscr{W}: \tau_1(\omega) \leq t_1\}, \quad \nu(t_1, x) = \int_{\mathscr{W}(t_1)} dW_x.$$

Здесь  $\mathscr{W}$  — множество винеровых траекторий  $\omega(\cdot)$ , удовлетворяющих условию  $\omega(0) = x$ , а  $dW_x$  — мера Винера на  $\mathscr{W}$ . Обозначим  $\xi = \xi(\omega) = \omega(\tau_1(\omega)) \in b_1$  точку первого пересечения с ребром  $b_1$ . Это измеримая функция от  $\omega$  в силу измеримости  $\tau_1$ . Тогда из строго марковского свойства следует тождество

$$d\nu(l', t_1) = \int_{\mathscr{W}(l')} dW_{\xi(\omega), y}^{T-t_1} d\nu(t_1, x).$$

Из этого тождества получаем, что

$$d\nu(l', t_1) \leq d\nu(t_1, x) \sup_{\xi \in b_1} \int_{\mathscr{W}(l')} dW_{\xi, y}^{T-t_1}.$$

Подставляя в (18.6.8b) это неравенство, а также тождества  $T = T - \tau_1 + \tau_1$  и  $dT = d(T - \tau_1)$ , получим, что

$$K(l, x, y) \leq \int_0^\infty \exp(-m_0^2 t_1) d\nu(t_1, x) \sup_{\xi \in b_1} \int_0^\infty \exp(-m_0^2 s) \int_{\mathscr{W}(l')} dW_{\xi, y}^s ds. \quad (18.6.8c)$$

Первый сомножитель  $\int \exp(-m_0^2 \tau_1(\omega)) dW_x$  убывает экспоненциально с ростом расстояния  $d(x, b_1)$ , поскольку он не превосходит  $\int \exp(-m_0^2 \sigma) dW_x$ , где  $\sigma$  — время первого пересечения бесконечной полосы (шириной  $d(x, b_1)$ ), отделяющей  $x$  от  $b_1$ . Интеграл  $\int \exp(-m_0^2 \sigma) dW_x$  приводится к одномерному интегралу Винера, вычисленному в работе [McKean, 1969, p. 27], и равен  $e^{-m_0^2 d}$ . Это показывает, что при  $J = 0, 1$  ядро  $K(l, x, y)$  обладает требуемым свойством экспоненциального убывания.

Проведем теперь индукцию по  $J$ . Второй сомножитель в (18.6.8с) экспоненциально убывает с ростом  $|l'_1|$ . Сочетая эти две оценки, получим, что  $K(l, x, y) \leq K_6^J e^{-m_0 |l|}$  при  $|l| \geq 1$ . При  $|l| = 0$  воспользуемся тем обстоятельством, что

$$0 \leq \frac{d}{ds_b} (s_b + (1 - s_b) \chi_b^T) = 1 - \chi_b^T \leq 1.$$

Отсюда вытекает, что  $0 \leq \partial^\nu C \leq C_\emptyset$ , и поэтому достаточно воспользоваться оценками § 7.2. Можно получить аналогичную оценку, основанную на использовании метрики  $d(j, \gamma)$ , определенной в (18.6.2). Взяв среднее геометрическое этих двух оценок, получим, что при  $2\delta < 1$

$$\|\partial^\nu C\|_{L_q(\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2})} \leq \sum_{l \in L(\gamma)} K_7^{|\gamma|} e^{-m_0 |l|/(2+2\delta)} e^{-m_0 d(j, \gamma)/(2-\delta)}, \quad (18.6.9)$$

если  $m_0$  достаточно велико. В случае, когда  $|l| \geq 1$  для всех  $l \in L(\gamma)$ , мы можем добавить в правую часть (18.6.9) множитель  $m_0^{-1|\gamma|}$  (увеличивая при необходимости  $\delta$ ). Если  $|l| < 1$  для некоторого  $l$ , то  $|l| = 0$ , и в этом случае  $|\gamma| \leq 4$ . При  $|\gamma| \leq 4$  и  $d(j, \gamma) \geq 1$  мы снова можем считать, что в правой части (18.6.9) присутствует множитель  $m_0^{-1|\gamma|}$ , увеличивая, если нужно,  $\delta$ . Наконец, при  $|\gamma| \leq 4$  и  $d(j, \gamma) = 0$  множитель  $m_0^{-1|\gamma|/2q} \geq m_0^{-2/q}$  появляется в (18.6.4) из соображений подобия, как и в предложении 7.9.1.

Положим по определению

$$K_4(q, \gamma) = \text{const} \sum_{l \in L(\gamma)} K_7^{|\gamma|} e^{-m_0 |l|/(2+2\delta)}. \quad (18.6.10)$$

При таком выборе  $K_4$  выполнено неравенство (18.6.4); в случае, если  $d(j, \gamma) = 0$  и  $|l| = 0$  для некоторого  $l$ , мы можем для вывода неравенства (18.6.4) применить оценку из предложения 7.9.4.

Итак, осталось установить неравенство (18.6.5). Мы докажем его как самостоятельное утверждение.

**Предложение 18.6.2.** При достаточно больших  $m_0$  имеет место оценка

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in \pi} \sum_{l \in L(\gamma)} e^{-m_0 |l|/3} \leq e^{K_5 |\Gamma|}. \quad (18.6.11)$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{L}(\Gamma)$  — семейство всех линейных упорядочений, определенных на подмножествах в  $\Gamma$ . Тогда  $L(\Gamma) \stackrel{\text{с}}{\subset} \mathcal{L}(\Gamma)$ . Так же, как и ранее, опре-

делим величину  $|l|$  для  $l \in \mathcal{L}(\Gamma)$ . Покажем, что число таких упорядочений  $l \in \mathcal{L}(\Gamma)$ , для которых  $|l| \leq r$ , не превосходит

$$|\Gamma| e^{K_0(r+1)}. \quad (18.6.12)$$

Применяя теперь (18.6.12), завершим доказательство предложения 18.6.1. Пусть  $A_l = \exp(-m_0|l|/3)$ . Выражение  $\sum \prod \sum A_l$  в (18.6.11) представляет собой сумму членов вида  $A_{l_1} A_{l_2} \dots A_{l_j}$ , где  $l_i$  — попарно различные элементы  $\mathcal{L}(\Gamma)$ . Группируя слагаемые, мы оценим (18.6.11) сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum \prod \sum A_l &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}(\Gamma)} A_{l_1} \dots A_{l_j} = \prod_{l \in \mathcal{L}(\Gamma)} (1 + A_l) \leq \\ &\leq \prod_{l \in \mathcal{L}(\Gamma)} \exp A_l = \exp \sum_{l \in \mathcal{L}(\Gamma)} A_l \leq \exp(O(1) |\Gamma|). \end{aligned}$$

В последнем выражении мы воспользовались оценкой (18.6.12) для того, чтобы оценить  $\sum_{l \in \mathcal{L}(\Gamma)} A_l$ , выбирая при этом  $m_0$  достаточно большим.

Установим теперь неравенство (18.6.12). Предположим, что заданы расстояния  $a_i$  с фиксированной целой частью  $[a_i]$ . Ребро  $b_1 = b'_1$  можно выбрать  $|\Gamma|$  способами. Число способов, которыми можно выбрать ребра  $b_i$  между  $b'_1$  и  $b'_2$  ограничено некоторой константой  $O(1)$ , поскольку все эти ребра должны пересекаться с  $b_1$ . Далее, ребро  $b'_2$  можно выбрать  $O(1)[a_1]$  способами среди множества ребер  $b$ , удовлетворяющих условиям

$$[a_1] \leq \text{dist}(b, b'_1) < [a_1] + 1.$$

Действуя таким образом, мы находим, что общее число способов выбрать все ребра  $b_i$  допускает оценку

$$|\Gamma| \prod_i O(1)[a_i] \leq |\Gamma| e^{O(1)\sum [a_i]} \leq |\Gamma| e^{O(1)r}.$$

Наконец, подсчитаем, сколькими способами можно выбрать величины  $[a_i]$ . Это есть не что иное, как количество наборов натуральных чисел  $r_i \geq 1$ , сумма которых не превосходит  $r$ , т. е.  $2^r$ . Действительно, предположим, что  $\sum r_i = r$ ,

и представим сумму  $r$  единиц в виде  $\sum r_i$  следующим образом. Первая единица входит в  $a_1$  (выбора нет). Вторая единица входит либо в  $a_1$ , либо в  $a_2$  (двузначный выбор). Если  $j$ -я единица входит в  $a_i$ , то  $(j+1)$ -я входит либо в  $a_i$ , либо  $a_{i+1}$  (двузначный выбор). Таким образом, имеется  $r-1$  двузначных выборов, т. е.  $2^{r-1}$  различных наборов чисел  $r_i$ . Суммируя по  $i = \sum r_i$ , мы полу-

чим величину  $\sum_{j=1}^r 2^{j-1} = 2^r - 1$ . Наконец, мы должны учесть еще одну возможность:  $|l| = 0$  ( $a_i$  отсутствуют).

## 18.7 Сходимость: завершение доказательства

*Доказательство предложения 18.4.3.* Не ограничивая общности, можно считать, что ядро  $\omega$  локализовано, т. е. его носитель заключен в произведении нескольких квадратов решетки, и в этом случае мы положим  $|\omega| = |\omega|_{L_2}$ . Мы хотим оценить выражение

$$\left\langle \int \partial^\Gamma \int \prod_{i=1}^n \varphi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda)} d\varphi_{S(\Gamma)} ds(\Gamma), \omega \right\rangle. \quad (18.7.1)$$



Пусть  $\mathcal{P}(\Gamma)$  — семейство всех разбиений  $\pi$  множества  $\Gamma$ . Согласно (9.1.34) и правилу Лейбница, (18.7.1) равно

$$\left\langle \int \sum_{\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)} \int \left( \prod_{\gamma \in \pi} \frac{1}{2} \partial^\nu C \cdot \Delta_\gamma \right) \prod_i \varphi(x_i) e^{-\lambda V(\Gamma)} d\varphi_{s(\Gamma)} ds(\Gamma), \omega \right\rangle, \quad (18.7.2)$$

где  $C = C(s(\Gamma))$ ,  $\partial^\nu C \cdot \Delta_\gamma \equiv \Delta_{\partial^\nu C}$ ; см. (9.1.10).

Пусть  $j \in Z^2$ . Будем обозначать символом  $\Delta_j$  три объекта: (1) квадрат решетки, содержащий  $j$ , (2) характеристическую функцию этого квадрата, (3) оператор умножения на эту функцию  $\Delta_j$ . Имея в виду последнее значение символа  $\Delta_j$ , положим

$$\partial^\nu C(j_\gamma) = \Delta_{j_1, \gamma} \partial^\nu C \Delta_{j_2, \gamma},$$

где  $j_\gamma = (j_1, \gamma, j_2, \gamma) \in Z^4$ , так что два дифференцирования в  $\partial^\nu C(j_\gamma)$  локализованы в  $\Delta_{j_1}$  и  $\Delta_{j_2}$  соответственно. Пусть

$$\partial^\nu C = \sum_{j_\gamma} \partial^\nu C(j_\gamma).$$

Подставим это тождество в (18.7.2). В результате мы получим сумму, члены которой помечены квадратами локализации  $\{j_\gamma\}$  и разбиениями  $\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)$ . Для каждого фиксированного члена обозначим  $M = M(\pi, \{j_\gamma\})$  число слагаемых, возникающих в результате применения дифференциальных операторов  $\Delta_\gamma$  в подынтегральном выражении в (18.7.2). Согласно теореме 8.5.5, предложению 10.3.1 и следствию 10.3.2, каждое из полученных таким образом слагаемых допускает оценку

$$\begin{aligned} \|\omega'\|_{L_p} &< \|\omega\|_{L_2} \left\| \prod_{\gamma \in \pi} \partial^\nu C(j) \right\|_{L_q} \leq \\ &\leq \|\omega\|_{L_2} m_0^{-|\Gamma|/2q} \prod_{\gamma \in \pi} K_4(q, \gamma) e^{-m_0 d(j_\gamma, \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Применяя теперь (18.6.5) для оценки суммы по всем разбиениям  $\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)$ , мы получаем, что (18.7.2) не превосходит

$$\|\omega\|_{L_2} e^{K_5 |\Gamma|} m_0^{-|\Gamma|/2q} \sum_{\{j_\gamma\}} \max_{\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)} M \prod_{\gamma \in \pi} e^{-m_0 d(j_\gamma, \gamma)^2} \prod_{\Delta} n(\Delta),$$

где числа  $n(\Delta)$  определены в § 12.5.

Предложение 18.4.3 вытекает из двух лемм, в которых оцениваются величина  $M$  и сумма по парам  $\{j_\gamma\}$ . Пусть  $M(\Delta)$  — число элементов множества

$$\{j_i, \gamma: \Delta_{j_i, \gamma} = \Delta, i = 1 \text{ или } 2, \gamma \in \pi\}.$$

**Лемма 18.7.1.** Существует такая константа  $K_{10}$ , не зависящая от  $m_0$ , что

$$M \leq e^{K_{10} |\Gamma|} \prod_{\Delta} (M(\Delta))^p$$

и

$$\prod_{\Delta} n(\Delta)! \leq e^{K_{10} |\Gamma|} \prod_{\Delta} (M(\Delta))^p.$$

**Лемма 18.7.2.** Пусть заданы разбиение  $\pi \in \mathcal{P}(\Gamma)$  и  $r > 0$ . Тогда существует такая константа  $K_{11}$ , не зависящая от  $m_0$ , что

$$\sum_{\{j_\gamma\}} \prod_{\gamma \in \pi} e^{-m_0 d(j_\gamma, \gamma)^2} \prod_{\Delta} (M(\Delta))^r \leq e^{K_{11} |\Gamma|}. \quad (18.7.3)$$

**Доказательство леммы 18.7.1.** Пусть  $N_0(\Delta)$  — число точек  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , расположенных в  $\Delta$ . Количество слагаемых, возникающих в результате  $M(\Delta)$  дифференцирований в  $\Delta$ , не превосходит

$$(N_0(\Delta) + 1)(N_0(\Delta) + p + 1) \dots (N_0(\Delta) + p(M(\Delta) - 1) + 1).$$

Поскольку  $N_0(\Delta) \leq \sum_{\Delta} N_0(\Delta) = n$ , то, применяя неравенства  $(a + b)! \leq (a + b)^a (b!)$  и  $(ab)! \leq a^{ab} (b!)^a$ , мы получаем для полного числа членов, возникающих в результате дифференцирований  $\partial/\partial\varphi(y)$ , следующую оценку:

$$M \leq \prod_{\Delta} p^{pM(\Delta)} (N_0(\Delta) + 1 + pM(\Delta))^{N_0(\Delta)+1} (M(\Delta))!^p.$$

Далее, если  $n(\Delta)$  — число отростков, выходящих из  $\Delta$  после дифференцирования (как это определялось в § 12.5), то

$$n(\Delta) \leq N_0(\Delta) + (p - 1)M(\Delta),$$

откуда и получаем оценку для  $n(\Delta)!$ .

**Доказательство леммы 18.7.2.** Сумма  $\sum_{\{j_{\gamma}\}}$  экспоненциально убывает с ростом расстояния, поэтому достаточно убедиться, что

$$\prod_{\Delta} (M(\Delta))!^r \leq \prod_{\Delta} e^{\text{const} |\gamma|} e^{\text{const} \sum_{\gamma} d(j, \gamma)},$$

где константы не зависят от  $m_0$ ,  $\gamma$ ,  $\{j_{\gamma}\}$  и  $\pi$ .

Напомним, что величина  $d(j, \gamma)$ , определенная в (18.6.2), представляет собой сумму расстояний от некоторого ребра  $b \in \gamma$  до квадратов с номерами  $j_1, \gamma$  и  $2, \gamma$ . Следовательно, существует не более  $O(1)r^2$  значений  $\gamma$  (при фиксированном разбиении  $\pi$ ), таких, что

$$\Delta_{j_{\nu}, \gamma} = \Delta, \quad \nu = 1 \text{ или } 2, \quad (18.7.4)$$

и  $d(j, \gamma) \leq r$ . По определению существует  $M(\Delta)$  контуров  $\gamma$ , удовлетворяющих (18.7.4). По крайней мере для половины из них (для наиболее протяженных контуров) выполнена также оценка

$$M(\Delta)^{1/2} \leq \text{const} d(j, \gamma) + \text{const},$$

поскольку они не перекрываются. Следовательно,

$$M(\Delta)^{3/2} \leq \text{const} \sum_{\gamma} (\{d(j, \gamma): \Delta_{j_{\nu}, \gamma} = \Delta\} + \text{const}),$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться неравенствами

$$\begin{aligned} \prod_{\Delta} (M(\Delta))!^r &\leq \exp \left\{ r \sum_{\gamma} M(\Delta) \ln M(\Delta) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left( O \left( \sum_{\gamma} \{M(\Delta)^{1+\delta}: M(\Delta) > 0\} \right) \right) \leq \exp \left\{ O \left( \sum_{\gamma} d(j, \gamma) \right) \right\} \exp(O(|\Gamma|)). \blacksquare \end{aligned}$$

Методы этой главы были в дальнейшем усовершенствованы так, что их можно применять к исследованию других взаимодействий и других функций Швингера (связных, неприводимых, и т. п.), а также в теории фазовых переходов.

#### Литературные ссылки

[Glimm, Jaffe, Spencer, 1973, 1974], [Spencer, 1974b], [Glimm, Jaffe, Spencer, 1976a], [Spencer, 1975]. См. также гл. 14 и 20.

## Глава 19

## От функциональных интегралов к квантовой механике

## 19.1 Реконструкция квантовых полей

Основной целью этой главы является проверка аксиом Вайтмана и Хаага — Кастлера, а также доказательство теорем 6.1.5—6. Предполагается, что задана мера  $d\mu$  на пространстве  $\mathcal{D}'(R^d)$ , которая удовлетворяет аксиомам OS 0—3 гл. 6. В гл. 6 мы построили евклидово поле  $\phi$ , где операторы действуют в пространстве  $\mathcal{E} = L_2(\mathcal{D}', d\mu)$ , и гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  квантовомеханических состояний как пополнение пространства  $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ .

Обозначим  $Y$  банахово пространство, полученное пополнением  $C_0^\infty(R^d)$  по норме

$$\|f\| = \|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}. \quad (19.1.1)$$

Так как характеристический функционал  $S\{f\}$  меры  $d\mu$  предполагается непрерывным в нормах пространств  $L_1$  и  $L_p$  (см. (6.1.5)), то получаем

**Предложение 19.1.1.** *Если справедливы аксиомы OS 0—1, то функционал  $S\{f\}$  продолжается по непрерывности до целой аналитической функции на  $Y$ , а моментные функции  $S_n$  меры  $d\mu$  продолжаются до непрерывных полилинейных функционалов на пространстве  $Y \times \dots \times Y$ .*

*Доказательство.* Для доказательства аналитичности функционала  $S\{f\}$  при  $f \in Y$  воспользуемся теоремой Витали: последовательность аналитических функций, равномерно ограниченных и поточечно сходящихся на компактном множестве  $K \subset C^n$ , сходится к аналитической функции на этом множестве. Непрерывность моментов  $S_n$  на пространстве  $Y \times \dots \times Y$  следует, как и в доказательстве предложения 6.1.4, из интегральной теоремы Коши. ■

**Замечание.** Как видно из предложения 19.1.1, мера  $d\mu$  сосредоточена на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$ . Поэтому на протяжении этой главы мы будем рассматривать интегрирование по пространству  $\mathcal{P}'$ .

Пусть  $Y(0, t) \subset Y$  обозначает подмножество тех функций, носители которых принадлежат интервалу  $(0, t)$ . Определим  $M(f) \equiv \|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p$ . Напомним, что  $\mathcal{P}(0, t)$  — подмножество функций в пространстве  $\mathcal{P}$ , носители которых принадлежат интервалу  $(0, t)$ . Кроме того,  $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}(0, +\infty)$ . В гл. 6 мы определили каноническую проекцию  $\hat{\cdot}$  пространства  $\mathcal{E}_+$  на  $\mathcal{H}$ , а именно  $\hat{\cdot} : \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+/\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ , при которой операторы  $S$  на  $\mathcal{E}_+$  превращаются в операторы  $\hat{S}$  на пространстве  $\mathcal{H}$  в соответствии с формулой (6.1.12).

**Предложение 19.1.2.** Предположим, что справедливы аксиомы OS 0—3 и функция  $f \in Y(0, t)$  вещ. Тогда проекция  $\hat{\phantom{f}}$  переводит функции  $\varphi(f)^r$  и  $e^{\Phi(f)}$  в операторы, действующие в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , областью определения которых является множество  $e^{-tH}(\mathcal{E}_+ \cap L_\infty)^\wedge$ . Более того,

$$\|(e^{\Phi(f)})^\wedge e^{-tH}\| \leq e^{M(2f)^{1/2}}, \quad (19.1.2)$$

$$\|(\varphi(f)^r)^\wedge e^{-tH}\| \leq (c \|f\|)^r r!^q, \quad (19.1.3)$$

где  $c < \infty$  и  $q = (p-1)/p$ .

**Замечание.** Важный частный случай оценки (19.1.3) имеет вид

$$\left| \int \varphi(f)^r d\mu \right| = |\langle \Omega, (\varphi(f)^r)^\wedge \Omega \rangle| \leq (c \|f\|)^r (r!)^q.$$

*Доказательство.* Согласно предложениям 10.5.4 и 6.1.4, операторы  $(\varphi^r)^\wedge$  и  $(e^\Phi)^\wedge$  определены на плотном множестве. Для доказательства (19.1.2) положим  $k = e^{\Phi(f)}$  и подсчитаем величину  $M_n$ , определенную формулой (10.5.4). Так как все носители функций  $f_{(2j-1)t}$  и  $(\theta f)_{(2j-1)t}$ , произвольно сдвинутых по времени, не пересекаются (при фиксированном  $t$  и  $j = 1, 2, \dots$ ), то из оценки (6.1.5) следует, что  $M_n \leq e^{M(2f)^{1/2}}$ . Поэтому неравенство (19.1.2) есть следствие теоремы 10.5.5.

Чтобы доказать неравенство (19.1.3), определим для  $w_j, z_j \in \mathbb{C}$

$$g = -i \sum_{j=1}^n (w_j f_{(2j-1)t} + z_j (\theta f)_{(2j-1)t}).$$

Тогда:

$$M_n^{ln} = \left( \prod_{j=1}^n \frac{d^{2r}}{dw_j^{2r}} \frac{d^{2r}}{dz_j^{2r}} \right) S\{g\} \Big|_{g=0}. \quad (19.1.4)$$

Выражение (19.1.4) оценим при помощи интегральной формулы Коши

$$M_n^{4n} = \left( \frac{(2r)!}{2\pi i} \right)^{2n} \oint S\{g\} \left( \prod_{j=1}^n \frac{dw_j}{w_j^{2r+1}} \frac{dz_j}{z_j^{2r+1}} \right),$$

где все интегралы берутся по окружности радиуса  $4\varepsilon^{-1}$  с центром в начале координат. Верхней оценкой для  $M(g)$  на этой окружности будет  $2nM(4\varepsilon^{-1}f)$ , так как слагаемые, входящие в выражение для функции  $g$  и отвечающие разным значениям  $j$ , имеют непересекающиеся носители. Поэтому

$$M_n \leq \exp \left( \frac{M(4\varepsilon^{-1}f)}{2} \right) \left( \frac{\varepsilon}{4} \right)^r (2r)!^{1/2} \leq \exp \left( \frac{M(4\varepsilon^{-1}f)}{2} \right) \varepsilon^r r!.$$

Для того чтобы получить нужную оценку, сначала заменим  $\varepsilon$  на  $\varepsilon|j|$ . Тогда  $M_n \leq \exp(c\varepsilon^{-1}) (\varepsilon|f|)^r \cdot r!$ . Выбрав  $\varepsilon = (cp/r)^{1/p}$ , получим неравенство (19.1.3). ■

Напомним, что пространство  $\mathcal{H}_\delta$  определялось как  $\mathcal{H}_\delta = e^{-\delta H} \mathcal{H}$  (см. (10.5.13)).

**Предложение 19.1.3.** Существует единственная билинейная форма  $\Phi(h)$ , заданная в области  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$  (для некоторого  $\delta > 0$ ) и удовлетворяющая там (для  $f = h \otimes \alpha$ ) соотношению

$$\varphi(h \otimes \alpha)^\wedge e^{-tH} = \int e^{-sH} \Phi(h) e^{-(t-s)H} \alpha(s) ds. \quad (19.1.5)$$

Более того, для нормы  $\|h\| = \|h\|_{L_1(\mathbb{R}^{d-1})} + \|h\|_{L_p(\mathbb{R}^{d-1})}$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|e^{-\delta H} \Phi(h) e^{-\delta H}\| &\leq K_\delta \|h\|, \\ \|e^{-\delta H} \widehat{\Phi(f)} e^{-(t+\delta)H}\| &\leq K_\delta \|h\| \|\alpha\|_{L_1}. \end{aligned} \quad (19.1.6)$$

*Доказательство.* Согласно следствию 10.5.6,  $\varphi(h \otimes \alpha)^\wedge$  является билинейной формой на произведении  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$ . Она бесконечно дифференцируема как функция  $\tau$  при  $0 \leq \tau < \delta/4$ ,  $\delta' \geq t + \delta/2$ . Из оценок (10.5.14) и (19.1.3) получаем неравенство

$$\left\| e^{-\delta H} \varphi\left(h \otimes \frac{d^n}{d\tau^n} \alpha_\tau\right)^\wedge e^{-\delta' H} \right\| \leq K_{n,\delta} \|h\| (\|\alpha\|_{L_1} + \|\alpha\|_{L_p}). \quad (19.1.7)$$

Воспользуемся тем фактом, что обобщенная функция от переменной  $s$ , все производные которой имеют фиксированный порядок роста, должна быть  $C^\infty$ -функцией от  $s$ . Поэтому на  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$  существует билинейная форма  $\Phi(h)$ , удовлетворяющая соотношению

$$\varphi(h \otimes \alpha)^\wedge = \int_0^t e^{-sH} \Phi(h) e^{sH} \alpha(s) ds$$

и такая, что для всех векторов  $\psi \in \mathcal{H}_\delta$ ,  $\psi' \in \mathcal{H}_\delta$  функция  $F(s) = \langle e^{-sH} \psi, \Phi(h) e^{sH} \psi' \rangle$  принадлежит классу  $C^\infty$ .

Улучшим теперь оценку (19.1.7), избавившись от члена  $\|\alpha\|_{L_p}$ . Взяв в качестве  $\alpha$  характеристическую функцию  $\chi_{(t_1, t_2)}$  интервала  $(t_1, t_2) \subset (0, t)$ ,  $t \ll 1$  и  $n = 1$ , мы сможем записать неравенство

$$\|e^{-\delta H} \varphi(h \otimes (\delta_{t_1} - \delta_{t_2}))^\wedge e^{-\delta' H}\| \leq 2K_{1,\delta} \|h\|.$$

Принтегрируем эту оценку по  $t_2$  от  $s_1$  до  $s_2 = s_1 + o(\delta)$ . В силу равенства

$$(s_2 - s_1) \delta_{t_1} = \chi_{(s_1, s_2)} + \int_{s_1}^{s_2} (\delta_{t_1} - \delta_{t_2}) dt_2$$

получаем, что

$$\|e^{-\delta H} \varphi(h \otimes \delta_{t_1})^\wedge e^{-\delta' H}\| \leq (K_{0,\delta}(\delta^{-1}) + 2K_{1,\delta}) \|h\|.$$

Интегрирование по  $t_1$  приводит теперь к оценке

$$\|e^{-\delta H} \varphi(h \otimes \alpha)^\wedge e^{-\delta' H}\| \leq K_\delta \|h\| \|\alpha\|_{L_1}.$$

**Предложение 19.1.4.** Пусть справедливы аксиомы OS0—3 и задана функция  $f = h \otimes \chi_{0,t}$ , где  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$  — вещественная функция, а

$\chi_{0,t}$  — характеристическая функция интервала  $(0, t)$ . Тогда

$$\int \varphi(f)^2 d\mu = o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (19.1.8)$$

*Доказательство.* Согласно предложению 19.1.2,

$$\int \varphi(f)^2 d\mu \leq \text{const} (\|f\|_{L_1}^2 + \|f\|_{L_p}^2).$$

Для функции  $f$  вида  $f = h \otimes \chi_{0,t}$  получаем, что  $\|f\|_{L_p}^2 = O(t^{2/p})$ , и поэтому при  $p < 2$  предложение доказано. Однако, как утверждается в аксиоме OS1 (см. § 6.1),  $p \leq 2$ , причем при  $p = 2$  аксиома OS1 включает дополнительное условие регулярности: двухточечная функция  $S_2(x-y) \in L_1^{\text{loc}}(R^d)$ . Тогда

$$\int \varphi(f)^2 d\mu = \int S_2(x-y) f(x) f(y) dx dy.$$

Переходя к новым переменным  $\xi = (x+y)/2$ ,  $\eta = (x-y)/2$ , получим, что

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi(f)^2 d\mu \right| &\leq \text{const } t \int_{R^{d-1} \times R^{d-1} \times [-t, t]} |S_2(2\eta) h(\xi + \eta) h(\xi - \eta)| d\xi d\eta \leq \\ &\leq o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 19.2 Формула Фейнмана — Каца

В этом параграфе мы выведем формулу Фейнмана — Каца в пространстве  $\mathcal{H}$ , пригодную для изучения возмущений оператора  $H$  посредством билинейной формы  $\Phi(h)$ , где  $h \in \mathcal{P}(R^{d-1})_{\text{вещ}}$ . Мы покажем, что

$$(e^{-\Phi(h \otimes \chi_{0,t})})^\wedge e^{-tH} = e^{-tH(h)}. \quad (19.2.1)$$

В этой формуле  $H(h)$  обозначает самосопряженный ограниченный снизу оператор

$$H(h) = H + \Phi(h), \quad (19.2.2)$$

где равенство понимается в смысле билинейных форм. Кроме того, мы покажем, что для вещественной функции  $h$

$$\pm \Phi(h) \leq \text{const} \|h\| (H + I).$$

Формально можно написать  $\Phi(h) = \varphi(h \otimes \delta)^\wedge$ .

**Теорема 19.2.1.** Пусть функционал  $S\{f\}$  удовлетворяет аксиомам OS0—3. Тогда левая часть равенства (19.2.1) определяет подгруппу  $S(t)$  с инфинитезимальным оператором  $H(h)$ , который удовлетворяет неравенству

$$-c(\|h\| + 2^{p-1}\|h\|^p) \leq H(h). \quad (19.2.3)$$

Кроме того, при любом  $\delta > 0$  соотношение (19.2.2) справедливо на пространстве  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$ .

**Доказательство.** Пусть  $S(t)$  обозначает левую часть равенства (19.2.1). В силу предложения 19.1.2,  $S(t)$  — ограниченный оператор, причем  $\|S(t)\| \leq \exp(tc(\|h\| + 2^{p-1}\|h\|^p))$ . Кроме того, из определения (19.2.1) следует групповое свойство  $S(t+s) = S(t)S(s)$  и равенство  $S(t) = S(t)^*$ . Установим теперь слабую дифференцируемость  $S(t)$  при  $t \rightarrow 0$  на плотном множестве в  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{H} = e^{-\delta H}(\mathcal{E}_+ \cap L_\infty)$ . Из нее будет вытекать слабая (и сильная) непрерывность и, следовательно, существование самосопряженного инфинитезимального оператора  $H(g)$ , удовлетворяющего оценке (19.2.3). Возьмем  $f = -h \oplus \chi_{0,t}$ ; тогда на пространстве  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$

$$t^{-1}(S(t) - I) = t^{-1}(e^{-tH} - I) + t^{-1}\widehat{\Phi(f)}e^{-tH} + t^{-1}(e^{\Phi(f)} - I - \Phi(f))e^{-tH}. \quad (19.2.4)$$

Первое слагаемое в правой части при  $t \rightarrow 0$  стремится к  $-H$ . Согласно предложению 19.1.3, второе слагаемое стремится к  $-\Phi(h)$ . Предел третьего слагаемого равен нулю, в чем можно убедиться следующим образом. Пусть  $A \in \mathcal{E}_+ \cap L_\infty$ . Используя элементарное неравенство

$$e^x - 1 - x \leq \text{const}(x^2 + x^N) + \sum_{i > N/2}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!},$$

получим, что для любого  $N \geq 2$

$$\begin{aligned} & |t^{-1} \langle e^{-\delta H} \widehat{A}, (e^{\Phi(f)} - I - \Phi(f))e^{-(\delta+t)H} \widehat{A} \rangle| \leq \\ & \leq t^{-1} \|A\|_{L_\infty}^2 \int |e^{\Phi(f)} - 1 - \Phi(f)| d\mu \leq \text{const} t^{-1} \|A\|_{L_\infty}^2 \left[ \int \Phi(f)^2 d\mu + \right. \\ & \left. + \int \Phi(f)^N d\mu + \sum_{i > N/2}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \int \Phi(f)^{2i} d\mu \right]. \quad (19.2.5) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части при  $t \rightarrow 0$  стремится к нулю в силу предложения 19.1.4. Выбрав  $N > p$ , получим, что и остальные слагаемые в (19.2.5) при  $t \rightarrow 0$  стремятся к нулю в силу неравенства (19.1.3) и оценки  $\|f\| = \|h\|(t + t^{1/p}) \leq O(t^{1/p})$ . Этим заканчивается доказательство слабой дифференцируемости и справедливости тождества (19.2.2) на пространстве  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ . Согласно предложению 19.1.3, оператор  $e^{-\delta H} \Phi(h) e^{-\delta H}$  ограничен. Поэтому оператор (19.2.2) по непрерывности продолжается на пространство  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$ .

**Следствие 19.2.2.** *Билинейные формы  $\Phi(h)$  и  $H(h)$  можно продолжить по непрерывности на область  $\mathcal{D}(H^{1/2}) \times \mathcal{D}(H^{1/2})$ , причем так, что их продолжения удовлетворяют соотношениям (19.2.2—3). Кроме того,*

$$\|(H + I)^{-1/2} \Phi(h) (H + I)^{-1/2}\| \leq \text{const} \|h\|. \quad (19.2.6)$$

**Доказательство.** Из формул (19.2.2—3) при  $1 \leq c(\|h\| + 2^{p-1}\|h\|^p)$  вытекает, что на пространстве  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$  справедливо соотношение

$$\pm \Phi(h) \leq c(\|h\| + 2^{p-1}\|h\|^p) (H + I),$$

или

$$\pm \Phi(h) = \pm 2\|h\| \Phi(h/2\|h\|) \leq 2c\|h\| (H + I),$$

и эта оценка продолжается по непрерывности. ■

### 19.3 Самосопряженные поля

Мы определим полевые операторы  $\Phi(f)$  для вещественных значений времени и установим их свойства как операторов на пространстве  $\mathcal{H}$ . На множестве  $\mathcal{D}(H^{1/2})$  билинейная форма

$$\Phi(h, t) = e^{itH}\Phi(h)e^{-itH} \quad (19.3.1)$$

непрерывна по  $t$ , поэтому можно определить так называемое поле Минковского

$$\varphi_M(f) = \int \Phi(f^{(t)}, t) dt, \quad (19.3.2)$$

где  $f^{(t)}(x) \equiv f(x, t) \in \mathcal{S}(R^{d-1})$  для функции  $f \in \mathcal{S}(R^d)$ .

**Теорема 19.3.1.** *Предположим, что функционал  $S\{f\}$  удовлетворяет аксиомам OS0—3. Тогда для произвольной функции  $f \in \mathcal{S}(R^d)$  вещ билинейная форма (19.3.2) однозначно определяет самосопряженный оператор  $\varphi_M(f)$  на пространстве  $\mathcal{H}$ , который, кроме того, существенно-самосопряжен на любой существенной области оператора  $H$ . Более того,*

$$\|(H + I)^{-1/2} \varphi_M(f) (H + I)^{-1/2}\| \leq \text{const} \int \|f^{(t)}\| dt, \quad (19.3.3)$$

$$\varphi_M(f): \mathcal{D}(H^n) \rightarrow \mathcal{D}(H^{n-1}), \quad (19.3.4)$$

$$[iH, \varphi_M(f)] = \varphi_M(\partial f / \partial t) \quad \text{на } \mathcal{D}(H^2). \quad (19.3.5)$$

*Доказательство.* Оценка (19.3.3) для  $\varphi_M(f)$  как билинейной формы вытекает из следствия 19.2.3, соотношение (19.3.5) — из неравенства (19.3.3). Остальные утверждения вытекают из приведенных ниже теорем 19.4.1—3.

**Следствие 19.3.2.** *Функции Вайтмана*

$$W_n(f_1, \dots, f_n) \equiv \langle \Omega, \varphi_M(f_1) \dots \varphi_M(f_n) \Omega \rangle \quad (19.3.6)$$

*существуют и являются обобщенными функциями умеренного роста (т. е. принадлежат пространству  $\mathcal{S}'(R^{nd})$ ).*

*Доказательство.* Так как  $H\Omega = 0$ , то  $\Omega \in \bigcap_n \mathcal{D}(H^n)$ , т. е.  $\Omega$  является  $C^\infty$ -вектором для оператора  $H$ . В силу соотношения (19.3.4) и индукции по  $j$ , моном  $\varphi_M(f_1) \dots \varphi_M(f_j)\Omega$  тоже является  $C^\infty$ -вектором для  $H$ . В частности, выражение (19.3.6) определено и ограничено произведением норм, как это следует из оценки (19.3.3). ■

Пусть  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  обозначает линейную оболочку векторов вида  $\varphi_M(f_1) \dots \varphi_M(f_n)\Omega$ , где  $f_j \in \mathcal{S}(R^d)$  вещ.

**Теорема 19.3.3.** *Множество  $\mathcal{D}$  плотно в пространстве  $\mathcal{H}$ .*

*Доказательство.* Напомним, что пространство  $\mathcal{H}$  порождено векторами вида  $\widehat{(e^{i\Phi(f)})} = (e^{i\Phi(f)})\widehat{\Omega}$ , где  $f \in \mathcal{S}_+$ . Используя предложение 19.1.2, можно без

ограничения общности рассматривать только функции вида  $f = \sum_{j=1}^n h_j \otimes \alpha_j$ , где  $f_j = h_j \otimes \alpha_j \in \mathcal{S}(0, t)$ . Сначала выберем функции  $\alpha_j$  так, что  $t_j \in \text{supp } \alpha_j$ ,



где  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ . Для вещественного числа  $s$  определим вектор

$$\theta(s) = \int e^{ist_1 H} \varphi_M(f_1) e^{-is(t_1-t_2)H} \varphi_M(f_2) \dots e^{-is(t_{n-1}-t_n)H} \times \\ \times \varphi_M(f_n) \Omega dt_1 \dots dt_n \in \mathcal{D}. \quad (19.3.7)$$

В силу следствия 10.5.6 и теоремы 19.3.1,  $\theta(s)$  совпадает с граничными значениями аналитической функции от  $s$ , определенной в подпространстве  $\text{Im } s > 0$ . Если функция  $\chi$  ортогональна множеству  $\mathcal{D}$ , то для вещественного  $s$  справедливо равенство  $\langle \chi, \theta(s) \rangle = 0$  и, значит,  $\langle \chi, \theta(s=i) \rangle = 0$ , т. е.

$$0 = \int \langle \chi, e^{-t_1 H} \varphi(h_1, 0) \wedge e^{-t_1-t_2 H} \varphi(h, 0) \wedge \dots \rangle \prod_{j=1}^n \alpha_j(t_j) dt_j. \quad (19.3.8)$$

Как следует из предложения 19.1.2, выражение (19.3.8) непрерывно зависит от  $\alpha_j$ , и, таким образом, равенство (19.3.8) останется справедливым, если мы сдвинем носители функций  $\alpha_j$  так, что они будут пересекаться. Поэтому  $0 = \langle \chi, (\varphi(f)^n) \wedge \Omega \rangle$ .

Снова воспользовавшись оценкой (19.1.3), можно просуммировать степенной ряд и получить равенство  $\langle \chi, (e^{i\varphi(f)}) \wedge \Omega \rangle = 0$ . Следовательно,  $\chi = 0$  и множество  $\mathcal{D}$  всюду плотно. ■

**Следствие 19.3.4.** *Оператор  $\varphi_M$ , рассматриваемый на области  $\mathcal{D}$ , существенно-самосопряжен.*

*Доказательство.* Теорема утверждает, что  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathcal{H}$ . Заметим, что  $e^{itH}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  и, в силу соотношения (19.3.4),  $\mathcal{D} \subset \left( \bigcap_n \mathcal{D}(H^n) \right)$ . Значит,  $\mathcal{D}$  — существенная область определения для оператора  $H$ , а по теореме 19.3.1 и для оператора  $\varphi_M(f)$ . ■

## 19.4 Коммутаторы

В этом параграфе мы докажем четыре технических утверждения, относящихся к коммутаторам и самосопряженности операторов. Пусть  $0 \leq H = H^*$  — положительный самосопряженный оператор, а  $\mathcal{D} \subset \bigcap_n \mathcal{D}(H^n)$  — его существенная область, состоящая из  $C^\infty$ -векторов. Обозначим  $R(\lambda) = (H + (\lambda + 1)I)^{-1}$ , так что  $R \equiv R(0) = (H + I)^{-1}$ . Пусть  $A$  — билинейная форма, определенная на области  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ , а  $\delta(A) = [iH, A]$  будем тоже рассматривать как билинейную форму на той же области определения.

**Теорема 19.4.1.** *Пусть форма  $R^{1/2}\delta(A)R^{1/2}$  ограничена. Тогда для любого положительного целого  $n$  билинейная форма  $R^{n/2}AR^{n/2}$  ограничена в том и только в том случае, когда ограничена  $AR^n$ . Кроме того,*

$$\|R^{n/2}AR^{n/2} - AR^n\| \leq n\|R^{1/2}\delta(A)R^{1/2}\|.$$

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть разность

$$AR^n - R^{n/2}AR^{n/2} = [A, R^{n/2}]R^{n/2} = \sum_{j=0}^{n-1} R^{j/2}[A, R^{1/2}]R^{(2n-j-1)/2}.$$

Сомножители  $R^{1/2}$  и  $R^{(2n-1)/2}$  ограничены сверху тождественным оператором  $I$ , а коммутатор можно оценить с помощью интегральной формулы Коши (см.

[Kato, 1966, p. 282])  $R^{1/2} = \pi^{-1} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} R(\lambda) d\lambda$ . Поэтому

$$[A, R^{1/2}] = -i\pi^{-1} \int_0^\infty R(\lambda) \delta(A) R(\lambda) \lambda^{-1/2} d\lambda,$$

что, в силу тождества  $\pi^{-1} \int_0^\infty (\lambda + 1)^{-1} \lambda^{-1/2} d\lambda = 1$ , ограничено по норме величиной  $\|R^{1/2}\delta(A)R^{1/2}\|$ .

**Теорема 19.4.2.** Если формы  $R^{1/2}\delta(A)R^{1/2}$  и  $R^{n/2}AR^{n/2}$  ограничены, то билинейная форма  $A$  однозначно определяет оператор (также обозначаемый  $A$ ) на области  $\mathcal{D}$ . При этом, если форма  $A$  вещественна, то оператор  $A$  симметричен.

*Доказательство.* Этот результат следует из теоремы 19.4.1 и теоремы Рисса о представлении. ■

**Теорема 19.4.3.** Пусть  $A$  — симметрический оператор, заданный на области  $\mathcal{D}$ . Если при этом  $R^{1/2}\delta(A)R^{1/2}$  и  $AR^n$  ограничены при некотором  $n \geq 1$ , то оператор  $A$  существенно-самосопряжен на любой существенной области оператора  $H^n$ .

*Доказательство.* Так как оператор  $AR^n$  ограничен, то  $\mathcal{D}(\bar{A}) \supset \mathcal{D}(H^n)$ , и существенную самосопряженность достаточно доказать на области  $\mathcal{D}(H^n)$ . Пусть  $\theta \in \mathcal{D}(A^*)$ ,  $\chi \in \mathcal{D}(H^n)$ ; тогда  $R(\lambda)^n\theta \in \mathcal{D}(H^n) \subset \mathcal{D}(A)$  и справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \langle \chi, A\lambda^n R(\lambda)^n\theta \rangle &= \lambda^n \langle R(\lambda)^n A\chi, \theta \rangle = \\ &= \langle A\lambda^n R(\lambda)^n\chi, \theta \rangle + \langle [\lambda^n R(\lambda)^n, A]\chi, \theta \rangle = \\ &= \langle \chi, \lambda^n R(\lambda)^n A^*\theta \rangle + \langle [\lambda^n R(\lambda)^n, A]\chi, \theta \rangle. \end{aligned} \quad (19.4.1)$$

В последнем выражении перейдем к пределу при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\lambda^n R(\lambda)^n \rightarrow I$  в сильном смысле, можно вычислить предел первого слагаемого, воспользовавшись тем, что  $\lambda^n R(\lambda)^n A^*\theta \rightarrow A^*\theta$ . Коммутатор во втором слагаемом равномерно ограничен при  $\lambda \rightarrow \infty$ , поскольку

$$\begin{aligned} \| [A, \lambda^n R(\lambda)^n] \| &\leq \sum_{r=0}^{n-1} \lambda^n \| R(\lambda)^r [A, R(\lambda)] R(\lambda)^{n-r-1} \| \leq \\ &\leq \sum_{r=0}^{n-1} \lambda^n \| R(\lambda)^{r+1} \delta(A) R(\lambda)^{n-r} \| \leq O(1). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу соотношений (19.4.1),

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A\lambda^n R(\lambda)^n \theta = A^*\theta + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda^n R(\lambda)^n, A]^*\theta. \quad (19.4.2)$$

Доказательство будет завершено, если мы покажем, что второе слагаемое в сумме (19.4.2) равно нулю. Отсюда будет следовать, что  $\theta \in \mathcal{D}(\bar{A})$ , а также самосопряженность оператора  $\bar{A}$ .

В силу приведенной выше равномерной оценки для нормы, достаточно по-

казать, что коммутатор  $[A, \lambda^n R(\lambda)^n]$  сходится к нулю на плотном множестве  $\mathcal{D}(H^n)$ . Пусть  $\psi \in \mathcal{D}(H^n)$ . Тогда

$$[\lambda^n R(\lambda)^n, A]^* \psi = A \lambda^n R(\lambda)^n \psi - \lambda^n R(\lambda)^n A \psi.$$

Второй член в правой части сходится к  $-A\psi$ , а первое слагаемое, если его записать в виде  $AR^n \lambda^n R(\lambda)^n (H+I)^n \psi$ , к  $A\psi$ . ■

**Теорема 19.4.4.** Пусть операторы  $A, B, \delta(A)$  и  $\delta(B)$  подчиняются условиям теоремы 19.4.3 при  $n=1$ , а операторы  $AB$  и  $BA$  определены на области  $\mathcal{D}$  и  $[A, B]\mathcal{D} = 0$ . Тогда  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  коммутируют.

*Доказательство.* Дополнительно мы предположим, что операторы  $R^{1/2} \delta(X) R^{1/2}$  и  $XR$  ограничены при  $X = A, B, \delta(A)$  и  $\delta(B)$ . В качестве аппроксимации оператора  $A$  возьмем  $A_\lambda = \lambda R(\lambda)^{1/2} A R(\lambda)^{1/2}$ . Утверждается, что в сильном смысле  $A_\lambda \rightarrow A$  на области  $\mathcal{D}$ . Так как  $\mathcal{D} \subset \bigcap_n \mathcal{D}(H^n)$ , то любой вектор  $\theta \in \mathcal{D}$  имеет вид  $\theta = R\psi$ . Поэтому

$$A_\lambda \theta = A_\lambda R\psi = AR\lambda R(\lambda)\psi + \lambda [R(\lambda)^{1/2}, A] R R(\lambda)\psi.$$

Поскольку оператор  $AR$  ограничен, а  $\lambda R(\lambda) \rightarrow I$  в сильном смысле, то первый член сходится к  $AR\psi = A\theta$ . Второй исследуется так же, как в доказательстве теоремы 19.4.1, а именно

$$\lambda^{1/2} [R(\lambda)^{1/2}, A] = \lambda^{1/2} i\pi^{-1} \int_0^\infty R(\mu) \delta(A) R(\mu) \mu^{-1/2} d\mu.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \|\lambda^{1/2} [R(\lambda)^{1/2}, A] R^{1/2}\| &\leq \lambda^{1/2} \pi^{-1} \int_0^\infty \mu^{-1/2} (\lambda + \mu + 1)^{-1/2} d\mu \\ &\rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Согласно теореме 19.4.3,  $\mathcal{D}$  является существенной областью определения оператора  $A$ , поэтому  $e^{iA_\lambda} \rightarrow e^{i\bar{A}}$  в сильном смысле. Теперь покажем, что  $[e^{iA_\lambda}, e^{iB_\lambda}] \rightarrow 0$ . Для этого сначала установим тождество

$$[A_\lambda, B_\lambda] = -i\lambda^2 R(\lambda)^{3/2} [\delta(A) R(\lambda) B - \delta(B) R(\lambda) A] R(\lambda)^{1/2}. \quad (19.4.3)$$

Все выкладки, которые необходимо провести для доказательства этого тождества, справедливы для векторов, принадлежащих множеству  $R(\lambda)^{-1/2} \mathcal{D}$ . Это множество плотно, потому что  $\mathcal{D}$  является существенной областью оператора  $R(\lambda)^{-1/2}$  (например, в силу теоремы 19.4.3 с  $A = R(\lambda)^{-1/2}$  и  $n=1$ ). В этой области верно тождество  $R(\lambda)^{3/2} [A, B] R(\lambda)^{1/2} = 0$ , которое получается с помощью тех же выкладок, что и соотношение (19.4.3). Из (19.4.3) и ограниченности операторов  $R^{1/2} \delta(A) R^{1/2}$ ,  $AR$  и т. д. вытекает, что

$$\|R[A_\lambda, B_\lambda] R\| \leq O(\lambda^{-1/2}). \quad (19.4.4)$$

Далее, мы утверждаем, что верна оценка

$$\|(H+I) e^{itA_\lambda} R\| \leq e^{K|t|}, \quad (19.4.5)$$

где  $K$  — постоянная, не зависящая от  $\lambda$ . Для того чтобы доказать (19.4.5), проинтегрируем неравенство

$$dF(t, \mu)/dt \leq KF(t, \mu). \quad (19.4.6)$$

Здесь  $F(t, \mu) \equiv \mu^2 R e^{-itA_\lambda} R(\mu) (H + I)^2 R(\mu) e^{itA_\lambda} R$ . Для доказательства неравенства (19.4.6) рассмотрим производную

$$\frac{dF(t, \mu)}{dt} = \mu^2 R e^{-itA_\lambda} [R(\mu) (H + I)^2 R(\mu), iA_\lambda] e^{itA_\lambda} R.$$

При этом

$$\begin{aligned} [R(\mu) (H + I)^2 R(\mu), iA_\lambda] &= R(\mu)^2 (H + I) \delta(A_\lambda) R + \\ &+ R(\mu)^2 (H + I) (-i\delta(A_\lambda)) R(\mu) + \text{эрмитово-сопряженное выражение} = \\ &= R(\mu)^2 (H + I) \delta(A_\lambda) R (H + \mu + I) (H + I) R(\mu) + \\ &+ R(\mu) (H + I) \{R(\mu) (-i\delta(A_\lambda)) R\} (H + I) R(\mu) + \\ &+ \text{эрмитово-сопряженное выражение.} \end{aligned}$$

Далее, прокоммутируем  $\delta(A_\lambda)$  с множителем  $(H + \mu + I)$ ; получится второй коммутатор. Для первого из написанных выше членов это приведет к выражению

$$R(\mu) (H + I) \{\delta(A_\lambda) R + R(\mu) i\delta^2(A_\lambda) R R(\mu)\} (H + I) R(\mu).$$

Поскольку, в силу условий доказываемой теоремы,

$$\|\delta(A_\lambda) R\| + \|R^{1/2} \delta^2(A_\lambda) R^{1/2}\| \leq \text{const},$$

то неравенство (19.4.6) можно считать доказанным. Заметим, что постоянная  $K$  не зависит от  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $t$ . Теперь, интегрируя (19.4.6), получим, что

$$F(t, \mu) \leq e^{K|t|} \mu^2 R(\mu)^2 \leq e^{K|t|}. \quad (19.4.7)$$

Так как  $\mu R(\mu)$  монотонно возрастает, функция  $F(t, \mu)$  тоже монотонно возрастает по переменной  $\mu$ , и существует предел  $F(t, \mu) \uparrow F(t)$  (см. [Kato, 1966, p. 459]). Поэтому образ оператора  $e^{itA_\lambda} R$  принадлежит области определения оператора  $H + I$ , откуда и вытекает неравенство (19.4.5). Все приведенные оценки останутся справедливыми, если  $A$  заменить на  $B$ .

Наконец, рассмотрим тождество для ограниченных операторов

$$-R[e^{iA_\lambda}, e^{iB_\lambda}]R = \int_0^1 ds \int_0^1 dt RQ(-s, -t)^* [A_\lambda, B_\lambda] Q(1-s, 1-t)R, \quad (19.4.8)$$

где  $Q(s, t) \equiv e^{itA_\lambda} e^{isB_\lambda}$  — унитарный оператор. Из оценок (19.4.4—5) следует, что  $\|R[e^{iA_\lambda}, e^{iB_\lambda}]R\| \leq O(\lambda^{-1/2})$ . Левая часть тождества (19.4.8) сходится в сильном смысле при  $\lambda \rightarrow \infty$  к  $R[e^{i\bar{A}}, e^{i\bar{B}}]R$ , в то время как его норма стремится к нулю. Значит, операторы  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  коммутируют. ■

Заметим, что тождество (19.4.8) вытекает из следующего тождества для ограниченных операторов  $C$  и  $D$ :

$$[e^C, e^D] = \int_0^1 ds \left( \frac{d}{ds} e^{sC} e^{D} e^{(1-s)C} \right) = \int_0^1 ds e^{sC} [C, e^D] e^{(1-s)C},$$

откуда

$$[e^C, e^D] = \int_0^1 ds \int_0^1 dt e^{sC} e^{tD} [C, D] e^{(1-t)D} e^{(1-s)C}.$$

## 19.5 Лоренц-ковариантность

Основной результат этого параграфа — лоренц-ковариантность поля  $\varphi_M$  и лоренц-инвариантность вектора  $\Omega$ . Кроме того, мы докажем аналитичность функций Швингера для несовпадающих значений переменных.

**Теорема 19.5.1.** Пусть мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS 0—3. Тогда существует сильно непрерывное унитарное представление  $U(g)$  неоднородной группы Лоренца  $\mathcal{L}$  на пространстве  $\mathcal{H}$ , такое, что для любого элемента  $g \in \mathcal{L}$  справедливы соотношения

$$U(g)\Omega = \Omega,$$

$$U(g)\varphi_M(f)U(g)^{-1} = \varphi_M(g^{-1}f). \quad (19.5.1)$$

В терминах поля  $\varphi_M(x)$  последнее условие принимает вид

$$U(g)\varphi_M(x)U(g)^{-1} = \varphi_M(gx). \quad (19.5.2)$$

**Предложение 19.5.2.** Пусть мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS 0—3, а  $g \rightarrow V(g)$  — сильно непрерывное унитарное представление некоторой группы  $\mathcal{G}$  в пространстве  $\mathcal{E}$ , такое, что

$$\begin{aligned} V(g)1 &= 1, & V(g)\mathcal{E}_+ &\subset \mathcal{E}_+, \\ \theta V(g) &= V(g)\theta, & T(t)V(g) &= V(g)T(t). \end{aligned} \quad (19.5.3)$$

Тогда операторы  $U(g)$ , определенные равенством

$$U(g)\hat{A} = (V(g)A)^\wedge, \quad g \in \mathcal{G},$$

задают непрерывное унитарное представление  $\mathcal{G}$  в пространстве  $\mathcal{H}$ , такое, что

$$U(g)\Omega = \Omega, \quad e^{itH}U(g) = U(g)e^{itH}. \quad (19.5.4)$$

*Доказательство.* Как и в доказательстве теоремы 6.1.3, оператор  $V(g)$  отображает  $\mathcal{E}_+$  и  $\mathcal{N}$  в себя, следовательно,  $U(g)$  определен на множестве  $\mathcal{E}_+$ . Более того,  $U(g)$  унитарен, так как  $V(g)$  коммутирует с  $\theta$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \langle U(g)\hat{A}, \hat{B} \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \theta V(g)A, B \rangle_{\mathcal{E}} = \langle V(g)\theta A, B \rangle_{\mathcal{E}} = \langle A, V(g)^{-1}B \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle \hat{A}, (V(g^{-1}))^\wedge B \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{A}, U(g^{-1})\hat{B} \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

поэтому  $U(g)^* = U(g)^{-1} = U(g^{-1})$ . Это означает, что отображение  $U(g)$  продолжается до представления  $\mathcal{G}$  на всем  $\mathcal{H}$ . Поскольку  $V(g)$  коммутирует с  $T(t)$ , то  $U(g)$  коммутирует с  $e^{-itH}$  и, значит, с  $e^{itH}$ . Сильная непрерывность семейства операторов  $U(g)$  следует из сильной непрерывности семейства  $V(g)$ , а равенство  $U(g)\Omega = \Omega$  вытекает из  $V(g)1 = 1$ . ■

Теперь перейдем к рассмотрению обобщенных функций

$$\begin{aligned} W_n(x_1, \dots, x_n) &= \langle \Omega, \varphi_M(x_1) \dots \varphi_M(x_n)\Omega \rangle, \\ W_n(\underline{h}, \underline{t}) &= \langle \Omega, \varphi_M(h_1, t_1) \dots \varphi_M(h_n, t_n)\Omega \rangle, \end{aligned} \quad (19.5.5)$$

которые представляют собой плотности функций Вайтмана (19.3.6). Для сокращения записи мы используем обозначения  $\underline{h} = \{h_1, \dots, h_n\}$ ,  $\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ .

**Предложение 19.5.3.** Функция  $W_n(\underline{h}, \underline{t})$  совпадает с граничными значениями в пространстве  $\mathcal{P}'(R^n)$  некоторой аналитической функции  $W_n(\underline{h}, \underline{z})$ . Здесь  $z_j = t_j + is_j$ , а функция  $W_n(\underline{h}, \underline{z})$  аналитична в области  $s_{j+1} - s_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Более того, для  $t_j = 0$  и  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$

$$W_n(\underline{h}, \underline{is}) = S_n(\underline{h}, \underline{s}) = \int \varphi(h_1, s_1) \dots \varphi(h_n, s_n) d\mu. \quad (19.5.6)$$

*Доказательство.* Оценка теоремы 19.3.1 показывает, что функция  $W^n(\underline{h}, \underline{z})$  аналитична при  $s_{j+1} - s_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Оценка из следствия 19.2.2 показывает, что в пространстве  $\mathcal{P}'(R^n)$  при  $s_{j+1} - s_j \downarrow 0$  имеет место сходимость  $W_n(\underline{h}, \underline{z}) \rightarrow W^n(\underline{h}, \underline{t})$ . Если  $t_j = 0$ , а  $s_{j+1} - s_j > 0$ , то определение  $W_n(\underline{h}, \underline{z})$  согласуется с определением функций Швингера (из § 19.3). Заметим также, что аналитичность функций Швингера по переменным  $s_{j+1} - s_j$  может быть выведена из следствия 10.5.6. ■

*Доказательство теоремы 19.5.1.* Ковариантность квантового поля относительно действия сдвигов в пространстве-времени и пространственных вращений вытекает из предложения 19.5.2, а также ковариантности случайного поля  $\varphi$  (по определению). Для завершения доказательства изучим действие лоренцевых преобразований на функции Вайтмана. В плоскости  $(t, x_1) \equiv (t, x)$  рассмотрим чистое лоренцево вращение  $\Lambda_\alpha$  (гиперболический поворот на угол  $\alpha$ ). Инфинитезимальный оператор соответствующих преобразований функций Вайтмана имеет вид

$$L_n = \sum_{j=1}^n \left( t_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial t_j} \right).$$

Покажем, что  $W_n(L_n F) = 0$  для всех функций  $F \in \mathcal{P}(R^{nd})$ . В частности,

$$\frac{d}{d\alpha} W_n(\Lambda_\alpha F) = W_n(L_n \Lambda_\alpha F) = 0,$$

т. е. каждая функция  $W_n$  лоренц-инвариантна. Отсюда следует, что существует также унитарная группа  $U(\Lambda_\alpha)$ , которая задает представление группы Лоренца  $\Lambda_\alpha$  в пространстве  $\mathcal{H}$ . Закон умножения операторов  $U(\Lambda_\alpha)$  следует из соответствующего правила для преобразований  $\Lambda_\alpha$ .

Свойство евклидовой инвариантности функций Швингера  $S_n$  в инфинитезимальной форме утверждает, что

$$0 = \sum_{j=1}^n \left( s_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial s_j} \right) S_n(\underline{x}, \underline{s}). \quad (19.5.7)$$

Продолжим аналитически равенство (19.5.7) в область комплексных значений  $s_j = \varepsilon_j - it_j$ , где  $\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j > 0$ , т. е. в область аналитичности функций  $S_n$ . Для комплексных  $s$  соотношение (19.5.7) можно переписать в виде

$$0 = \sum_{j=1}^n (\varepsilon_j - it_j) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial (-it_j)} \right] S_n(\underline{x}, \underline{\varepsilon} - i\underline{t}). \quad (19.5.8)$$

Перейдем теперь к пределу при  $\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \rightarrow 0$  в основной функции  $F$  и получим, что  $L_n W^n = 0$ . Это означает, что для любой основной функции  $W_n(L_n, F) = 0$ . ■

**Следствие 19.5.4.** Спектр энергии-импульса лежит в переднем световом конусе  $|\mathbf{P}| \leq H$ . Здесь  $\mathbf{P}$  — оператор импульса, т. е. генератор группы пространственных сдвигов, действующей в  $\mathcal{H}$ .

**Теорема 19.5.5.** *Предположим, что аксиомы OS 0—3 выполнены и  $\delta > 0$ . Тогда на  $\mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta$  существует такая билинейная форма  $\varphi_M(x)$ , что*

$$e^{-\delta H} \varphi_M(x) e^{-\delta H} \quad (19.5.9)$$

*есть ограниченный оператор, аналитически зависящий от  $x$  в области  $|\operatorname{Im} x| < \delta$ , такой, что*

$$\varphi_M(f) = \int \varphi_M(x) f(x) dx. \quad (19.5.10)$$

*Доказательство.* Так как операторы  $P$  и  $H$  коммутируют, то из следствия 19.5.4 можно вывести, что ряд

$$e^{itH - ix \cdot P - \delta H} = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(itH)^n}{n!} \frac{(-ix \cdot P)^m}{m!} e^{-\delta H}$$

сходится по норме в области  $|t| + |x| < \delta$ . Из этого факта и оценки (19.3.3) вытекает, что при  $|t| + |x| < \delta$  функция

$$e^{-\delta H} \varphi_M(f_t, x) e^{-\delta H} = F(x)$$

вещественно аналитична по  $x$ , причем для  $\varepsilon < \delta$  и произвольных вещественных  $x$  и  $t$  справедливо неравенство

$$\|\partial_x^n F(x)\| \leq K(\varepsilon) \varepsilon^{-1} |n| n! \int \|f^{(t)}\| dt. \quad (19.5.11)$$

Далее, как и в оценке (19.1.7),  $F(0)$  — это интеграл от ограниченной  $C^\infty$ -функции:  $F(0) = \int G(x) f(x) dx$ , где функция  $G(x) = e^{-\delta H} \varphi_M(x) e^{-\delta H}$  определяет  $\varphi_M(x)$ . Повторяя рассуждения, приводящие к неравенству (19.5.11), получаем, что

$$\|\partial_x^n e^{-\delta H} \varphi_M e^{-\delta H}\| \leq K(\varepsilon, \delta) \varepsilon^{-1} |n| n!, \quad (19.5.12)$$

где

$$K(\varepsilon, \delta) = \|e^{-(\delta-\varepsilon)H} \varphi_M(x) e^{-(\delta-\varepsilon)H}\|.$$

Поскольку  $K(\varepsilon, \delta)$  не зависит от  $x$  (для вещественных  $x$ ), утверждение об аналитичности следует из оценки (19.5.12). ■

**Следствие 19.5.6.** *Функции Швингера  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  вещественно аналитичны по  $x_1, \dots, x_n$  при несовпадающих значениях аргументов (т. е. при  $x_i \neq x_j$  для всех  $i \neq j$ ).*

*Доказательство.* Так как функции  $S_n$  инвариантны при перестановке переменных  $x_1, \dots, x_n$ , можно считать, что  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ . Если некоторые моменты времени совпадают, а соответствующие точки различны, то с помощью малого евклидова вращения можно достичь того, что и все моменты времени станут различными. Тогда утверждение вытекает из аналитичности оператора (19.5.9).

**Предложение 19.5.7.** *Пусть заданы такие точки  $x$  и  $y$ , что  $x - y \neq 0$ . Обозначим  $B$  подмножество пространства  $R^d$ , состоящее из таких точек  $(z_0, z)$ , что при проектировании  $z$  на прямую  $x - y$  проекция лежит вне интервала  $(x, y)$ . Пусть  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{P}$  — функции с носителями в множестве  $B$ . Тогда функция  $S_{n+2}(f_1, \dots, f_n, x, y)$  аналитична по переменной  $x - y$  для вещественных значений  $x - y$  при условии, что  $|x_0 - y_0| < |x - y|$ .*

**Доказательство.** Выполним евклидово вращение, так чтобы  $x - y$  стала новой осью времени. По построению множество  $B$  не содержит точек во временном интервале между  $x$  и  $y$ . Далее рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 19.5.5. ■

Заметим, что, как следует из доказанного предложения, правая и левая полуплоскости  $\operatorname{Re} \xi > 0$  и  $\operatorname{Re} \xi < 0$  комплексной плоскости  $\xi = x_0 - y_0$ , на которых функции Швингера аналитичны, соединяются по разрезу  $|\operatorname{Im} \xi| < |x - y|$  на мнимой оси.

## 19.6 Локальность

**Теорема 19.6.1.** *Предположим, что выполнены аксиомы OS 0—3, а функции  $f, g \in \mathcal{P}_{\text{вещ}}$  имеют пространственно-подобные носители. Тогда имеет место свойство локальности, которое может быть выражено следующими тремя способами:*

- (i)  $[e^{i\varphi_M(f)}, e^{i\varphi_M(g)}] = 0$ ;
- (ii)  $[\varphi_M(f), \varphi_M(g)] \mathcal{D} = 0$ ;
- (iii)  $W_{n+2}(f_1, \dots, f, g, \dots, f_n) = W_{n+2}(f_1, \dots, g, f, \dots, f_n)$  для всех  $n$  и всех  $f_j \in \mathcal{P}$ .

Рассмотрим  $T > 0$  и  $z \neq 0$ ,  $z \in R^{d-1}$ . Обозначим  $B = B(T, z)$  подмножество  $R^d$ , для точек  $(t, x)$  которого  $t \geq T$ ,  $x \cdot z \geq z^2$ . Геометрически  $B$  представляет собой бесконечный «брус», сечением которого является положительный квадрант в плоскости  $t, z$  и который неограниченно продолжен по двум другим координатам, ортогональным к  $z$ . Положим

$$\mathcal{D}_B = \text{линейная оболочка } \{(\varphi(f)^n)^\wedge : f \in \mathcal{P}(B)\}.$$

**Предложение 19.6.2.** *Множество  $\mathcal{D}_B$  является существенной областью для оператора  $H$ , состоящей из  $C^\infty$ -векторов.*

**Доказательство.** Любой вектор из области  $\mathcal{D}_B$  принадлежит образу оператора  $e^{-tH}$  и, кроме того,  $e^{-tH} \mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_B$ . Поэтому достаточно показать, что множество  $\mathcal{D}_B$  всюду плотно. Возьмем  $\chi \perp \mathcal{D}_B$  и определим

$$F(t, x) = \langle \chi, e^{-tH + ix \cdot P} \varphi(g)^n \rangle = \langle \chi, \psi \rangle,$$

где  $g \in \mathcal{P}_+ \cap C_0^\infty$ . Для достаточно больших  $t$  и  $x \cdot z$  функция  $\psi$  лежит в  $\mathcal{D}_B$  и  $F(t, x) = 0$ . Очевидно, что  $F$  вещественно аналитична по  $t$  при  $t > 0$ , а из следствия 19.5.4 вытекает, что  $F$  к тому же вещественно аналитична по  $x$ . Поэтому  $F \equiv 0$  и, в частности,  $F(0, 0) = 0$ . В силу оценки (19.1.1), можно просуммировать ряд для экспоненты  $(e^{\varphi(g)})^\wedge$ , а это значит, что  $\chi \perp (e^{\varphi(g)})^\wedge$ .

Так как эти векторы порождают пространство  $\mathcal{H}$ , то  $\chi = 0$  и, следовательно,  $\mathcal{D}_B$  всюду плотно.

**Предложение 19.6.3.** *Пусть функции  $f, g \in C_0^\infty$  имеют пространственно-подобные носители. Тогда для определенного выше множества  $B$  верно равенство  $[\varphi_M(f), \varphi_M(g)] \mathcal{D}_B = 0$ .*



**Доказательство.** Рассмотрим функции Швингера

$$S_{n+2}(\theta f_1, \dots, \theta f_r, x, y, f_{r+1}, \dots, f_n) = S_{n+2}(\theta f_1, \dots, \theta f_r, y, x, f_{r+1}, \dots, f_n), \quad (19.6.1)$$

где носители функций  $f_j$  лежат в множестве  $B(T, z)$ . Выберем  $z$  достаточно большим и таким, что ни одна точка множества  $B \cup \theta B$  не лежит в полосе, ограниченной двумя гиперплоскостями, перпендикулярными к разности  $x - y$  и проходящими соответственно через точки  $x$  и  $y$ . Тогда применимо предложение 19.5.7 и, значит, функция Швингера (19.6.1) аналитична по  $x - y$  для вещественных  $x - y$  и  $|x_0 - y_0| < |x - y|$ . Рассмотрим (19.6.1) при чисто мнимых значениях  $x_0 = it$ ,  $y_0 = is$ . (Заметим, что можно выбрать одно и то же множество  $B$  для всех  $x \in \text{supp } f$ ,  $y \in \text{supp } g$ .) Умножим это равенство на  $f(x)g(y)$  и проинтегрируем по  $x$  и  $y$ . После этого, аналитически продолжив равенство (19.6.1), получим, что для любых векторов  $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D}_B$  справедливо соотношение

$$\langle \theta_1, [\Phi_M(f), \Phi_M(g)] \theta_2 \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Заметим, что ограничение  $|t - s| < |x - y|$  и есть условие того, что носители функций  $f$  и  $g$  пространственно-подобны.

**Доказательство теоремы 19.6.1.** Согласно предложению 19.6.2 и теоремам 19.4.1, 19.4.3,  $\mathcal{D}_B$  является существенной областью операторов  $\Phi_M(f)$ ,  $\Phi_M(g)$  и принадлежит области определения их произведения. Возьмем  $f, g \in C_0^\infty$  вещ и применим предложение 19.6.3. По теореме 19.4.4 (в которой  $\mathcal{D}_B$  рассматривается в качестве области определения) верно утверждение (i) теоремы 19.6.1. Так как элементы  $\mathcal{D}$  — это  $C^\infty$ -векторы для любых произведений полевых операторов, то утверждения (ii) и (iii), верные для функций  $f, g \in C_0^\infty$ , продолжают по непрерывности на случай функций  $f, g \in \mathcal{P}$ . Еще раз применяя теорему 19.4.4, получим свойство (i). ■

Заметим теперь, что к этому моменту мы доказали теоремы 6.1.5—6, за исключением утверждений о единственности вакуума (аксиомы Вайтмана) и неприводимости (аксиомы Хаага — Кастера). Эти свойства анализируются ниже.

## 19.7 Единственность вакуума

Напомним следующее условие относительно меры  $d\mu(\varphi)$ , введенное в § 6.1.

**OS 4 (Эргодичность).** Подгруппа  $T(t) \subset \mathcal{L}$  временных сдвигов эргодически действует на пространстве с мерой  $\{\mathcal{D}'(R^d)_{\text{вещ}}, d\mu\}$ .

**Теорема 19.7.1.** Пусть функционал  $S\{f\}$  удовлетворяет аксиомам OS 0—3. Тогда аксиома OS 4 справедлива в том и только в том случае, когда  $\Omega$  является единственным (с точностью до числового множителя) вектором в пространстве  $\mathcal{H}$ , инвариантным относительно временных сдвигов  $e^{itH}$ .

**Замечание.** Эргодичность меры  $d\mu$  эквивалентна тому, что  $1$  — единственный инвариантный вектор унитарной группы  $T(t)$ , действующей в гильбертовом пространстве  $\mathcal{S} = L_2(\mathcal{P}', d\mu)$ . Это в свою

очередь эквивалентно кластерному свойству: для любых  $A$  и  $B$  из плотного подмножества  $\mathcal{E}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t [\langle AT(s)B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle] ds = 0. \quad (19.7.1)$$

Здесь  $\langle \cdot \rangle$  обозначает  $\int \cdot d\mu$ . В частности, экспоненциальное кластерное свойство функций Швингера влечет за собой эргодичность меры  $d\mu$ .

*Доказательство.* Для самосопряженной сжимающей полугруппы  $e^{-tH}$ , действующей на гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , предел

$$s. \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t e^{-sH} ds = P_{\text{inv}}$$

есть оператор проектирования на подпространство инвариантных векторов. (Для унитарной группы  $T(t)$  аналогично  $P_{\text{inv}} = s. \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t T(s) ds$ .) Поэтому

(19.7.1) эквивалентно тому, что 1 порождает инвариантное подпространство группы  $T(t)$  в пространстве  $\mathcal{E}$ . Пусть  $A$  и  $B$  в (19.7.1) обозначают конечные линейные комбинации функций  $e^{i\varphi(\hat{f})}$ , где  $\hat{f} \in C_0^\infty$ , вещ.

Так как соотношение (19.7.1) содержит оператор временных сдвигов  $T(s)$ , то без ограничения общности можно считать, что  $A \in \mathcal{E}_-$ ,  $B \in \mathcal{E}_+$ . При этом (19.7.1) эквивалентно кластерному свойству

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t [\langle \widehat{\theta A}, e^{-tH} \widehat{B} \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \widehat{\theta A}, \Omega \rangle_{\mathcal{H}} \langle \Omega, \widehat{B} \rangle_{\mathcal{H}}] ds = 0, \quad (19.7.2)$$

а значит, единственности основного состояния  $\Omega$  оператора  $H$ .

Отметим, что теперь доказательство теоремы 6.1.5 полностью завершено. Более того, предположив справедливость аксиомы OS 4, мы сейчас докажем, что глобальная алгебра фон Неймана, порожденная алгеброй  $\bigcup_B \mathfrak{A}(B)$ , неприводима, и тем самым закончим доказательство теоремы 6.1.6. Предположим, что  $A$  коммутирует со всеми переменными. Так как алгебра  $\mathfrak{A}(B)$  замкнута относительно сопряжений, то  $A^*$  тоже коммутирует со всеми переменными. Следовательно, и операторы  $\text{Re } A = (A^* + A)/2$  и  $\text{Im } A = (A^* - A)/2i$  обладают этими свойствами. Без ограничения общности можно считать, что оператор  $A$  самосопряжен. Поэтому для  $C = C^* \in \mathfrak{A}(B)$  получаем, что  $C(t) = U(t)CU(t)^* \in \mathfrak{A}(B_t)$  и

$$\begin{aligned} \langle A\Omega, U(t)C\Omega \rangle &= \langle \Omega, AC(t)\Omega \rangle = \langle C(t)\Omega, A\Omega \rangle = \\ &= \langle U(t)C\Omega, A\Omega \rangle = \langle A\Omega, U(t)C\Omega \rangle^-. \end{aligned}$$

Из этого равенства видно, что функция  $\langle A\Omega, U(t)C\Omega \rangle$  вещественна и, значит, ее преобразование Фурье по переменной  $t$  будет четной функцией по двойственной переменной  $\omega$ . Однако ввиду положительности энергии преобразование Фурье сосредоточено на полуоси  $\omega = \text{энергия} \geq 0$ . Таким образом,  $A\Omega$  ортогонально состояниям вида  $C\Omega$  со строго положительной энергией. Последние плотны в пространстве  $\mathcal{H}$ , как следует из теоремы 19.3.3 и того обстоятельства, что векторы пространства  $\mathcal{D}$  могут быть получены с помощью дифференцирования экспоненты  $\exp(\varphi_M(f_1)) \dots \exp(\varphi_M(f_n))\Omega$  в  $C\Omega$ . Следовательно,  $A\Omega$  — это состояние с нулевой энергией. Однако, в силу аксиомы OS 4,  $\Omega$  — единственное с точностью до множителя состояние с нулевой энергией. Это означает, что  $A\Omega = \lambda\Omega$ , и, далее, для любых  $\chi, \psi \in \mathfrak{A}(B)\Omega$  верно равенство  $\langle \chi, A\psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle \lambda$ . Отсюда, наконец, можно сделать вывод, что  $A = \lambda I$ .

Стандартные методы построения квантовых полей естественным образом приводят к мере  $d\mu$ , которая удовлетворяет аксиомам OS 0—3, но не обязательно аксиоме OS 4. Чтобы включить в рассмотрение и этот общий случай и развить аппарат, необходимый для изучения смешанных состояний, остановимся подробнее на эргодических свойствах меры  $d\mu$ .

**Определение 19.7.2.** Пусть  $\mathcal{E}_1$  обозначает подпространство  $\mathcal{E}$ , инвариантное относительно группы временных сдвигов  $T(t)$ ,  $t \in R^1$ . Аналогично, пусть  $\mathcal{E}_E \subset \mathcal{E}$  обозначает подпространство, инвариантное относительно полной евклидовой группы, а  $\mathcal{E}_\infty$  — подпространство функций, измеримых относительно  $\sigma$ -алгебры «на бесконечности». Последнее означает, что  $\mathcal{E}_\infty = \bigcap \{\mathcal{E}(B') : B \text{ ограничено}\}$ . Как и в § 6.1, обозначим  $\mathcal{E}_\pm$  подпространства  $\mathcal{E}$ , отвечающие будущему и прошлому.

**Предложение 19.7.3.** Пусть мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиоме OS 2. Тогда  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_\infty \cap \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_-$ .

*Доказательство.* Пусть  $A \in \mathcal{E}_1$ ; тогда  $A = \lim A_n$ , где  $A_n$  — функция от значений поля  $\varphi(x)$  при  $|x| \leq n$  и  $\|A_n\| \leq \|A\|$ . Такую последовательность  $A_n$  можно построить при помощи ортогонального проектирования на пространство  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(|x| \leq n)$ , т. е. при помощи условных средних. При этом сходимость  $A_n \rightarrow A$  будет следовать из того, что  $E_n \uparrow I$ ,  $n \rightarrow \infty$ , где  $E_n$  — проекция на подпространство  $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}$ , состоящее из всех  $L_2$ -функций от значений поля  $\varphi(x)$  при  $|x| \leq n$ . Сильная сходимость последовательности  $T(t)A_n$  при  $n \rightarrow \infty$  вытекает тогда из следующего соотношения, верного для любого  $t \in R^1$ :

$$\|T(t)A_n - A\| = \|A_n - T(-t)A\| = \|A_n - A\| \rightarrow 0.$$

Положив соответственно  $t = 2n$ ,  $n$ ,  $-n$ , мы получим, что  $A \in \mathcal{E}_\infty$ ,  $\mathcal{E}_+$  и  $\mathcal{E}_-$ .

**Предложение 19.7.4.** Если мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS 2—3, то элементы подпространства  $\mathcal{E}_1$  инвариантны при отражениях  $\theta$  относительно гиперплоскости  $t = 0$ .

**Доказательство.** Будем считать, что  $A \geq 0$ . Пусть  $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$  и  $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  обозначают соответственно скалярные произведения в пространствах  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ . Согласно предложению 19.7.3,  $A, \theta A \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_-$ . Поэтому с помощью неравенства Шварца, примененного к пространству  $\mathcal{E}$ , получим, что

$$\langle \theta A, A \rangle_{\mathcal{E}} \leq \langle \theta A, A \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2} \langle A, A \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2} = \langle \hat{A}, \hat{\theta A} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} \langle \hat{A}, \hat{A} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2}.$$

Это неравенство можно продолжить с помощью неравенства Шварца в пространстве  $\mathcal{H}$ . Найдем, что

$$|\langle \hat{A}, \hat{\theta A} \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \langle \hat{A}, \hat{A} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} \langle \hat{\theta A}, \hat{\theta A} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} = |\langle \theta A, A \rangle_{\mathcal{E}}| = \langle \theta A, A \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Отсюда следует, что все эти неравенства на самом деле равенства, а первое из них дает  $\theta A = A$ . ■

**Теорема 19.7.5.** Если мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS 2 и OS 3, то  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_E$ .

**Следствие 19.7.6.** Мера  $d\mu$  эргодична относительно действия полной евклидовой группы в том и только в том случае, если она  $R^1$ -эргодична.

**Доказательство теоремы 19.7.5.** Обозначим  $T(e^{i\theta})$  поворот на угол  $\theta$  в плоскости  $t, x_1$ , где  $x = (x, t)$ ,  $x = x_1$ . Тогда

$$T(x_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(-t) T(e^{-ix_1/t}) T(t).$$

Взяв  $A \in \mathcal{E}_1$ , определим  $A_t = A - T(e^{-ix_1/t}) A$ . Тогда  $\|A_t\| \rightarrow 0$ , потому что семейство  $T(e^{i\theta})$  сильно непрерывно по  $\theta$ . Далее,  $T(-t)A_t \rightarrow 0$  и, следовательно,

$$T(x_1)A = \lim_{t \rightarrow \infty} T(-t) T(e^{-ix_1/t}) A = \lim_{t \rightarrow \infty} T(-t) A - T(-t) A_t = A.$$

Итак,  $A$  инвариантно при сдвигах вдоль оси  $x_1$ . Аналогично можно показать, что  $A$  инвариантно при любых сдвигах в  $R^d$ . К тому же, согласно предложению 19.7.4,  $A$  инвариантно при отражениях относительно любой гиперплоскости. Поскольку сдвиги и отражения порождают всю евклидову группу,  $A \in \mathcal{E}_E$ . ■

Алгебра ограниченных функций  $\mathcal{E}_E \cap L_\infty$  непосредственно определяет интегральное разложение меры  $d\mu$ . Пусть  $\mathcal{Z}$  обозначает спектр алгебры  $\mathcal{E}_E \cap L_\infty$ . Тогда на  $\mathcal{Z}$  существует нормированная положительная мера  $d\xi$  и для почти всех  $\xi \in \mathcal{Z}$  существуют такие меры  $d\mu_\xi$  на пространстве  $\mathcal{P}'(R^d)$ , что

$$d\mu = \int_{\xi \in \mathcal{Z}} d\mu_\xi,$$

причем  $S\{f\} = \int_{\xi \in \mathcal{Z}} S_\xi\{f\} d\xi$ , где  $S_\xi\{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu_\xi$ .

**Теорема 19.7.7.** Пусть мера  $d\mu$  удовлетворяет аксиомам OS 0—3. Тогда для п. в.  $\xi$  мера  $d\mu_\xi$  удовлетворяет аксиомам OS 0—4.

**Доказательство.** отождествим функции из  $\mathcal{E}_+ \cap L_\infty$  с множеством функций от  $\xi$ , принадлежащих пространству  $L_\infty(\mathcal{Z}, d\xi)$ . По определению

$$\int AZ d\mu_\xi = \left( \int AZ d\mu \right) (\xi),$$

где  $Z \in \mathcal{E}_E \cap L_\infty$ , а интеграл  $\int AZ \, d\mu$  рассматривается как функция от  $\xi$ . Тогда инвариантность меры  $d\mu_\xi$  следует из инвариантности  $d\mu$  и  $Z$ . Аналогично, положительность при отражениях вытекает из положительности  $d\xi$  и положительности при отражениях скалярного произведения:

$$\mathcal{E}_+ \ni A, B \Rightarrow \int \overline{\theta ABZ} \, d\mu = \int \theta (Z^{1/2}A)^- (Z^{1/2}B) \, d\mu.$$

Здесь  $Z \in \mathcal{E}_E \cap L_\infty$ ,  $Z \geq 0$ . При этом мы воспользовались тем фактом, что, согласно предложениям 19.7.3—4, функции  $Z^{1/2}$  и  $\theta Z^{1/2}$  принадлежат  $\mathcal{E}_+ \cap L_\infty$ . Эргодичность меры  $d\mu_\xi$  для п. в.  $\xi$  вытекает из общей теории интегральных разложений. Подробности читатель может найти в книге [Dixmier, 1957].

Теперь, используя метод многократных отражений, мы покажем, что аксиома регулярности OS1 справедлива для п. в. чистых фаз  $\xi$ . Для этого достаточно для любой проекции  $Z \in \mathcal{E}_E$  установить оценку

$$\left| \int Z e^{i \langle f, \Phi \rangle} \, d\mu \right| \leq \left( \int Z \, d\mu \right) \exp (\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p). \quad (19.7.3)$$

При этом можно взять функции  $f$  с носителем в некоторой временной полосе, скажем  $0 \leq t \leq T$ . Согласно неравенству Шварца в пространстве  $\mathcal{H}$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int Z e^{i \langle f, \Phi \rangle} \, d\mu \right| &= | \langle \widehat{Z}^{1/2}, (Z^{1/2} e^{i \langle f, \Phi \rangle})^\wedge \rangle | \leq \\ &\leq \left( \int Z \, d\mu \right)^{1/2} \left( \int Z e^{i \langle f, \Phi \rangle} (e^{i \langle \theta f, \Phi \rangle})^- \, d\mu \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь можно считать, что функции  $f$  и  $\theta f$  представляют собой одну и ту же основную функцию, и поэтому после сдвига по времени во втором сомножителе процедуру можно повторить. После  $n$  шагов мы получим основную функцию вида  $g = \sum_{j=1}^{2n} f_j$ , где носители  $f_j$  лежат в непересекающихся временных интервалах. Для таких  $f_j$

$$\|g\|_{L_p}^p = \left\| \sum f_j \right\|_{L_p}^p = \sum \|f_j\|_{L_p}^p = 2^n \|f\|_{L_p}^p.$$

Чтобы закончить доказательство, осталось воспользоваться аксиомой OS1 и устремить  $n$  к бесконечности. ■

## Глава 20

### Дальнейшие направления

Чтобы дополнить изложение основного материала и дать читателю библиографическое руководство, мы предлагаем здесь краткий обзор важнейших достижений конструктивной теории поля, не вошедших в предыдущие главы.

20.1 Модель  $\varphi_3^4$ 

В программу конструктивной теории поля входит изучение  $\varphi^4$ -модели в размерности  $d = 3$ . Здесь уже требуется бесконечная перенормировка массы. Сформулируем основную теорему существования. Пусть  $d\varphi$  обозначает гауссову меру на пространстве  $\mathcal{D}'(R^3)$  с ковариацией  $(-\Delta + 1)^{-1}$  и нулевым средним, а  $\varphi_\kappa$  — обрезанное поле, полученное либо переходом к решетке с шагом  $\kappa^{-1}$ , либо сверткой  $\varphi_\kappa \equiv \varphi * \delta_\kappa$  с размазанной  $\delta$ -функцией  $\delta_\kappa$ , как в § 8.1. Положим

$$V(\Lambda, \kappa) = \int_{\Lambda} [\lambda \varphi^4 + a(\kappa, \lambda) \varphi^2] d^3x,$$

$$S_{\Lambda, \kappa}(f) = \int e^{\varphi(f)} d\mu_{\Lambda, \kappa},$$

где  $d\mu_{\Lambda, \kappa} = Z(\Lambda, \kappa)^{-1} \exp[-V(\Lambda, \kappa)] d\varphi$ ,  $Z(\Lambda, \kappa) = \int \exp[-V(\Lambda, \kappa)] d\varphi$ .

**Теорема 20.1.1.** *Существуют такие постоянные  $\alpha, \beta \geq 0$ , что если  $a(\kappa) = -\alpha\lambda\kappa + \beta\lambda^2 \ln \kappa + \sigma$ , то для всех  $\lambda > 0$  и  $\sigma \in R$  существует предельный функционал*

$$S\{f\} = \lim_{\Lambda \uparrow R^3} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} S_{\Lambda, \kappa}(f),$$

удовлетворяющий аксиомам OS 0—3.

**Теорема 20.1.2.** *Существуют два конечных значения  $\sigma_{\pm}(\lambda)$ , такие, что функционал  $S\{f\}$  удовлетворяет аксиоме OS 4 при  $\sigma > \sigma_+(\lambda)$  (и, значит, у гамильтониана  $H$  имеется единственный вакуумный вектор) и не удовлетворяет ей при  $\sigma < \sigma_-(\lambda)$  (существуют по крайней мере два вакуумных вектора).*

Основной шаг в доказательстве существования, а именно построение меры  $d\mu(\Lambda, \kappa = \infty)$ , был сделан в работе [Glimm, Jaffe, 1972b]. Существование предела при  $\Lambda \uparrow R^3$  в случае  $\sigma > \sigma_+$  показано с помощью техники кластерных разложений в статьях [Feldman, Osterwalder, 1976] и [Magnen, Sénéor, 1976a]. Сходимость решеточных аппроксимаций, когда шаг решетки стремится к нулю, а  $\Lambda$  фиксировано, доказана в работе [Park, 1977]; тем самым установлены корреляционные неравенства. Предел при переходе к бесконечному объему для всех значений  $\sigma$  построен в статье [Seiler, Simon, 1976]. Доказательство существования нескольких вакуумов (т. е. фазовых переходов) получено распространением на непрерывный случай методов, описанных в § 16.4 [Fröhlich, Simon, Spencer, 1976]. Спектр частиц в модели при  $\sigma \gg 1$  изучался в работе [Вигнар, 1977], где доказано существование изолированного одночастичного состояния. Несколько иное построение модели  $\varphi_3^4$  в ко-

нечном объеме дано в работе [Benfatto et al., 1980]. Оно основано на идеях, связанных с ренормгруппой (см. [Wilson, Kogut, 1974], [Ma, 1976]).

## 20.2 Суммируемость по Борелю

Функции Швингера  $\lambda P(\varphi)_2$ -моделей неаналитичны по  $\lambda$  в точке  $\lambda = 0$ , поскольку при  $\lambda < 0$  нарушается устойчивость. Однако все характеристики этой модели аналитичны в секторе, по форме напоминающем пирог с вырезанным куском. Этот сектор с углом  $\theta > \pi$  изображен на рис. 20.1. Кроме того, функции Швингера обладают в нуле (со стороны положительных  $\lambda$ ) односторонними правыми производными любого порядка, и, как показано в работах [Dimock, 1974, 6], эти производные можно вычислить по теории возмущений в бесконечном объеме. Элементы  $S$ -матрицы также допускают разложения в асимптотические ряды теории возмущений [Osterwalder, S en eog, 1976], [Eckmann, Epstein, Fr ohlich, 1976].

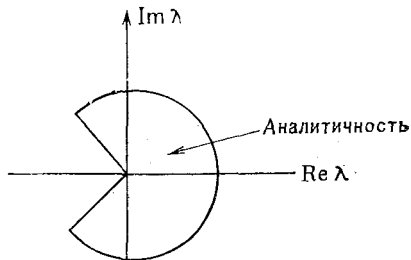


Рис. 20.1. Известная область аналитичности по комплексному параметру  $\lambda$  в  $\lambda P(\varphi)_2$ -теории.

На самом деле функции Швингера  $\varphi^4$ -модели могут быть восстановлены по коэффициентам разложения, вычисленным по теории возмущений, с помощью суммирования по Борелю [Eckmann, Magnen, S en eog, 1975]. Это означает, что, хотя  $r$ -точечная функция Швингера в  $\varphi^4_2$ -модели имеет расходящееся разложение:

$$S_r(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (20.2.1)$$

(поскольку  $|a_n| > O(n!)$ ), тем не менее преобразование Бореля

$$h(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} t^n \quad (20.2.2)$$

сходится вблизи точки  $t = 0$ . Более того, функция  $h(t)$  имеет аналитическое продолжение на все значения  $t > 0$ , так что существует интеграл

$$S_n(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} h(\lambda t) dt. \quad (20.2.3)$$

Из недавних работ, относящихся к преобразованию Бореля, см. [Sokal, 1980]. Можно показать, что  $S_n(\lambda)$  совпадает с  $\varphi^4_2$ -функ-

цией Швингера, построенной в гл. 11. Разложение в степенной ряд для массы  $m(\lambda)$  также суммируемо по Борелю [Eckmann, Epstein, 1979b].

Результаты, относящиеся к суммируемости по Борелю функций Швингера модели  $\varphi_2^4$ , обобщены и на случай размерности  $d = 3$  [Magnen, Sénéor, 1977]. Элементы  $S$ -матрицы для этого случая также имеют асимптотическое разложение по степеням  $\lambda$  [Constanţinescu, 1977]. Открытой остается проблема, применима или нет техника пересуммирования к квантовым полям  $(\lambda\varphi^4 - \varphi^2)_2$ .

### 20.3 Евклидовы ферми-поля

Множество конфигураций скалярного евклидова поля  $\varphi$ , рассматриваемого в этой книге, совпадает с пространством «траекторий», по которым происходит интегрирование в формуле Фейнмана — Каца. Используя обозначения § 6.1, имеем

$$\langle \hat{A}, e^{-t(H+V)} \hat{A} \rangle = \int \overline{\theta A}(\varphi) A(\varphi) e^{-\int_0^t V(\varphi(s)) ds} d\mu(\varphi),$$

$$\text{или } e^{-t(H+V)} = \left( e^{-\int_0^t V(\varphi(s)) ds} T(t) \right)^{\wedge}.$$

Обобщение этой формулы на ферми-поля содержится в работах [Osterwalder, Schrader, 1972a, 1973a, b]. Оказалось, что это обобщение, даже на формальном уровне, содержит в себе нечто новое. Поясним некоторые существенные моменты этого обобщения.

Во-первых, поле  $\psi$ , зависящее от вещественного времени, и его сопряженное  $\bar{\psi}$  заменены независимыми антикоммутирующими евклидовыми полями  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . В результате евклидово поле, отвечающее нулевому моменту времени, строится не в  $\mathcal{H}$ , а в другом пространстве.

Во-вторых, так как введенные евклидовы поля антикоммутируют и принимают значения из грассмановой алгебры, скалярное произведение в евклидовом пространстве не задается уже интегрированием по положительной мере  $d\mu$ . Вместо этого оно определяется как положительное состояние (среднее)  $\rho$  на алгебре полевых операторов, порожденной элементами  $\psi_1(f)$ ,  $\psi_2(g)$ . Для полиномов  $P(\psi_1, \psi_2)$  выполнено  $\rho(P^*P) \geq 0$ . Это состояние и определяет интеграл.

И в-третьих, наконец, типичные взаимодействия, входящие в выражение для плотности оператора энергии, такие, как  $\bar{\psi}\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ ,  $\sum_n \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ , для обычных ферми-полей принимают вещественные значения. В евклидовом пространстве они представ-



ляются выражениями  $\psi_2\psi_1$ ,  $\psi_2\gamma^5\psi_1$ ,  $\sum_n \psi_2\gamma^\mu\psi_1 A_\mu$  и т. п., и, следовательно, евклидово действие не вещественная функция, а принимает значения из грассмановой алгебры.

Тем не менее на этот случай можно обобщить аксиомы OS 0—4 и доказать формулу Фейнмана — Каца

$$\exp[-t(H + V(\psi, \bar{\psi}, \varphi))] = \left( \exp \left[ - \int_0^t V(\psi_1(s), \psi_2(s), \varphi(s)) ds \right] T(t) \right)^\wedge. \quad (20.3.1)$$

Гамильтониан  $H + V$ , определенный формулой (20.3.1), действует в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , описывающем квантовую систему. В случае когда взаимодействие  $V(\psi, \bar{\psi}, \varphi)$  формально вещественно, определение (20.3.1) приводит к симметрическому оператору  $H + V$ , что согласуется со стандартной канонической конструкцией.

## 20.4 Потенциал Юкавы

Предметом изучения в квантовой теории поля были также и взаимодействия между фермионами и бозонами, в частности взаимодействия Юкавы

$$\lambda \bar{\psi}\psi\varphi \quad \text{и} \quad \lambda \bar{\psi}\gamma^5\psi\varphi$$

соответственно скалярное и псевдоскалярное. В размерности  $d = 2$  эти модели приводят к логарифмически расходящейся перенормировке массы. Подробности из оригинальных работ по конструкции этих моделей и соответствующую библиографию можно найти в обзоре [Glimm, Jaffe, 1971b]. Для этих моделей также были развиты евклидовы методы, и это привело к более совершенной трактовке полей Юкавы в размерности  $d = 2$ . Оценки для случая конечного объема содержатся в работе [Seiler, 1975], а построение предела при переходе к бесконечному объему (с использованием равномерных оценок и некоторых сходящихся подпоследовательностей конечных объемов) — в работах [McBryan 1975a, b, c] и [Seiler, Simon, 1975a, b, 1976]. Доказана также сходимість высокотемпературных кластерных разложений ([Magnen, Sénéor, 1976b], [Cooper, Rosen, 1977] и суммируемость по Борелю [Rouquier, 1977, 1979]). Для случая размерности  $d = 3$  существование поля и суммируемость по Борелю доказаны в работе [Magnen, Sénéor, 1980].

В низкотемпературной области (сильные взаимодействия) псевдоскалярная теория имеет фазовый переход. Доказательство этого факта основано на низкотемпературных кластерных разложениях [Bałaban, Gawedzki, 1980]. В модели Юкавы можно вы-

числить среднее по фермионам при фиксированных значениях бозонных полей. Это приводит к эффективному четному взаимодействию  $V(\varphi)$ . При  $\lambda \gg 0$  потенциал  $V$  имеет два минимума и происходит нарушение симметрии  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Возможно, что скалярная модель Юкавы при низких температурах тоже имеет фазовый переход. В области сходимости кластерных разложений были проверены аксиомы Вайтмана. При произвольном значении константы связи установлены лишь аксиомы Хаага — Каствлера; см. [Schgader, 1972] и [McVeyan, Park, 1975].

## 20.5 Низкотемпературные разложения и фазовые переходы

Кластерное разложение гл. 18 аналогично высокотемпературному разложению в статистической физике, которое справедливо в однофазной области вдали от критической точки. Это разложение сводит изучение теории в бесконечном объеме к конечному объему и сходится, когда модель близка к гауссовой, например в случае  $\lambda\varphi^4 + \varphi^2$ -моделей при малых  $\lambda$ .

Такие разложения можно делать и для многофазных моделей квантовых полей, например для двумерной  $\lambda\varphi^4 - \varphi^2$ -модели,  $\lambda \approx 0$ . Это низкотемпературные разложения, справедливые в области фазовых переходов. В этих разложениях нужно внимательно следить за вероятностью флуктуаций около одного основного состояния, с тем чтобы не произошел переход к конфигурации, отвечающей другому основному состоянию. Иными словами, надо улучшить соответствующие оценки вроде тех, которые приведены в § 16.2, чтобы показать, что мала вероятность границы раздела фаз:  $\text{Pr}(\Gamma) < \exp(-\lambda^{-1/2}|\Gamma|)$ . Цель состоит в том, чтобы получить асимптотическое разложение функций Швингера при  $\lambda \ll 1$ . Для  $\lambda\varphi^4 - \varphi^2$ -моделей эта программа реализована в работе [Glimm, Jaffe, Spencer, 1976a]. Тем самым доказано экспоненциальное убывание усеченных функций Швингера для чистой фазы. Эти методы применимы также и для низкотемпературных разложений в статистической механике [Schor, 1978b].

Анализ в многофазной области перенесен в квантовую теорию поля в работе [Gawedzki, 1978a], где доказано сосуществование трех фаз в равновесии (при некоторых  $\lambda$  и  $\sigma$ ) в  $\lambda\varphi^6 + \sigma\varphi^4$ -модели. Эта ситуация соответствует тройной точке на рис. 4.1.

Низкотемпературные разложения использовались также и при изучении спектра  $\varphi^4$ -модели в случае нескольких фаз [Imbrie, 1980], [Koch, 1981].

Основную идею низкотемпературного разложения можно проиллюстрировать на примере полиномиального взаимодействия  $V(\varphi) = \lambda\varphi^4 - 2\varphi^2$ . Можно ввести удобную перепараметризацию, разложив полином около каждого из двух его минимумов  $\varphi =$

$= \pm \lambda^{-1/2}$ . Имеем

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= V_+(\psi_+) = \lambda \psi_+^4 + 4\lambda^{1/2} \psi_+^3 + 2\psi_+^2 - \lambda^{-1} = \\ &= V_-(\psi_-) = \lambda \psi_-^4 - 4\lambda^{1/2} \psi_-^3 + 2\psi_-^2 - \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Введя граничные условия  $\psi_+ = 0$  или  $\psi_- = 0$  при  $|x| = \infty$ , произведем асимптотическое разложение по степеням  $\lambda^{1/2}$ , начиная с  $V_+(\psi_+)$  или  $V_-(\psi_-)$  и считая  $\psi_+$  или  $\psi_-$  новыми переменными вместо  $\varphi$ . Такое разложение, подобно разложению (8.4.3), порождается интегрированием по частям. Затем производится еще одно разложение с тем, чтобы показать, что вероятность попасть в область  $\psi_- \approx 0$  из области  $\psi_+ \approx 0$  равна  $O(\exp(\lambda^{-1}))$ . Это верно по крайней мере для малых  $\lambda$ , как и при доказательстве фазового перехода для этих моделей в § 16.2. Здесь, однако, надо выбрать точные граничные условия, которые приводят к двум различным теориям поля — двум «фазам» модели. Эти разложения определяются в работе [Glimm, Jaffe, Spencer, 1976a], где установлена также и их сходимости. Они обобщены на случай произвольной  $P(\varphi)_2$ -модели, благодаря чему получено полное описание фазовой диаграммы для этих моделей в области, где действует приближение среднего поля [Imbrie, 1980b, 1981].

## 20.6 Дебаевское экранирование и преобразование sin-Gordon

Статистическая физика классического кулонова газа приводит к изучению определенной ниже большой статистической суммы  $\Xi_{\text{Кулон}}$ . Рассмотрим  $d$ -мерную решетку  $Z^d(\delta, \Lambda)$  в конечном объеме  $\Lambda$  с фиксированным шагом  $\delta$ . Мы используем решетку для того, чтобы избежать особенностей кулонова потенциала в нуле. Мы выбираем этот потенциал равным  $C(i, j) = -\Delta^{-1}(i, j)$ , где  $\Delta$  обозначает решеточный лапласиан на решетке  $Z^d(\delta, \Lambda)$ . Зададим  $n$ -частичное каноническое распределение конфигураций зарядов  $q_k = \pm e$ , находящихся в вершинах  $i_k$ , формулой

$$\mu_{\text{кан}, n} \equiv (n!)^{-1} \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{k \neq l \\ 1 \leq k, l \leq n}} q_k C(i_k, i_l) q_l \right]. \quad (20.6.1)$$

Теперь определим

$$\Xi_{\text{Кулон}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \delta^{nd} \sum_{\substack{i_k \in \Lambda \\ q_k = \pm e \\ k=1, 2, \dots, n}} \mu_{\text{кан}, n}, \quad (20.6.2)$$

где для удобства будем считать, что  $i \in \Lambda$  обозначает  $i \in Z^d(\delta, \Lambda) \cap \Lambda$ . В случае размерности  $d = 3$  имеем  $C(i, j) \sim (4\pi|i-j|)^{-1}$  при  $|i-j| \rightarrow \infty$ , что соответствует обычному кулонову потенциалу. Предположим, что на границе  $\partial\Lambda$  заданы четные граничные условия (например, условия Дирихле).

Задача состоит в том, чтобы выяснить поведение корреляции между двумя пробными зарядами, расположенными в узлах  $i$  и  $j$ , при  $|i - j| \rightarrow \infty$ . Эта корреляция определяется как

$$\langle q_i q_j \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow z^d} \Xi^{-1} \sum_{n, i_k, q_k} \delta^{nd} q_i q_j z^n \mu_{\text{кан}, n}. \quad (20.6.3a)$$

В силу симметрии  $q_k \rightarrow -q_k$ , среднее  $\langle q_i \rangle$  равно 0. Казалось бы, корреляция  $\langle q_i q_j \rangle$  асимптотически убывает как потенциал  $C(i, j) = O(|i - j|^{-d+2})$ . В случае  $|z| \ll 1$ ,  $\beta e^2 \ll 1$  (т. е. для «высокотемпературной разреженной плазмы») известно, что эта корреляция ведет себя по-другому. А именно,

$$|\langle q_i q_j \rangle| \leq O(\exp(-|i - j|/\xi)), \quad |i - j| \rightarrow \infty, \quad (20.6.3b)$$

где  $\xi$  конечно. Нижняя грань  $\xi_D$  всех допустимых значений  $\xi$  в экспоненциальной оценке (20.6.3b) называется дебаевской длиной.

Механизм дебаевского экранирования состоит в том, что пробный заряд  $q_i$  в равновесном распределении окружен облаком зарядов с противоположным знаком. Это приводит к нейтрализации заряда  $q_i$  и препятствует его взаимодействию с другим пробным зарядом  $q_j$ . Эффект экранирования сводится к тому, что действующий кулонов потенциал  $C(i, j)$  как бы заменяется экспоненциально убывающим (т. е. короткодействующим) потенциалом вида  $\exp(-|i - j|/\xi_D)$ . Первоначальное объяснение этой картины было связано с приближением среднего поля, формально примененным к корреляции  $\langle q_i, q_j \rangle$ .

Недавно Бриджес и Федербуш, используя аппарат конструктивной квантовой теории поля, в частности кластерные разложения гл. 18, а также низкотемпературные разложения, доказали корректность соответствующих рассуждений для среднего (20.6.3). Их исследования основаны на преобразовании  $\sin$ -Gordon, к которому мы сейчас перейдем.

Рассмотрим каноническую статистическую сумму евклидовой теории поля со взаимодействием  $V(\varphi) = \gamma \cos \alpha \varphi$ . Классическое уравнение движения (в модели с непрерывным вещественным временем) имеет вид

$$-\square \varphi = \alpha \gamma \sin \alpha \varphi \quad (20.6.4)$$

и называется поэтому уравнением  $\sin$ -Gordon. Пусть  $d\varphi$  — гауссова мера на решетке  $Z^d(\delta, \Lambda)$  с нулевым средним и ковариацией  $C = -\Delta^{-1}$ . При подходящем выборе постоянных  $\alpha, \gamma$  каноническая статистическая сумма модели  $\sin$ -Gordon определена формулой

$$Z_{\sin\text{-Gordon}} = \int \exp \left[ 2z \sum_{j \in \Lambda} \delta^d : \cos \beta^{1/2} e \varphi_j : \right] d\varphi. \quad (20.6.5)$$

Это статистическая сумма решеточной теории поля.

**Предложение 20.6.1** [Стратонович, 1957], [Edwards, 1959], [Edwards, Lenard, 1962]. Статистические суммы  $\Xi$  и  $Z$ , определенные соответственно формулами (20.6.1) и (20.6.5), равны:

$$\Xi_{\text{Кулон}} = Z_{\text{sin-Gordon}}. \quad (20.6.6)$$

*Доказательство.* Обозначим  $q_k, j_k, k = 1, \dots, n$ , заряды и координаты  $n$  частиц. Пусть

$$\varphi(f) = \delta^d \sum_i \varphi_i f_i, \quad f_i^{(n)} = \beta^{1/2} \sum_{k=1}^n q_k \delta_{i, j_k}.$$

По определению гауссовой меры

$$\begin{aligned} \int e^{i\varphi(f^{(n)})} d\varphi &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i, j} \delta^{2d} f_i^{(n)} C(i, j) f_j^{(n)} \right] = \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} n \beta e^2 \delta^{2d} C(0, 0) \right] \mu_{\text{кан}, n} \end{aligned} \quad (20.6.7)$$

(см. (9.1.16)). Далее воспользуемся тождеством

$$\sum_{\substack{q_k = \pm e \\ k=1, \dots, n}} \sum_{\substack{j_k \in \Lambda \\ k=1, \dots, n}} \delta^{nd} e^{i\varphi(f^{(n)})} = \left[ \delta^d \sum_{j \in \Lambda} 2 \cos(\beta^{1/2} e \varphi_j) \right]^n. \quad (20.6.8)$$

В силу соотношений (20.6.7—8), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_k \in \Lambda \\ q_k = \pm e \\ k=1, 2, \dots, n}} \mu_{\text{кан}, n} &= \exp \left( \frac{1}{2} n \beta e^2 \delta^{2d} \right) \left[ \delta^d \sum_j 2 \cos(\beta^{1/2} e \varphi_j) \right]^n = \\ &= \left[ \delta^d \sum_j 2 \cos(\beta^{1/2} e \varphi_j) \right]^n. \end{aligned} \quad (20.6.9)$$

При выходе последнего равенства мы воспользовались тождеством для виковой экспоненты

$$e^{\pm i \alpha \varphi_j} = e^{-(1/2) \alpha^2 n C(0, 0)} : e^{\pm i \alpha \varphi_j} :$$

из которого следует, что

$$[\cos(\alpha \varphi_j)]^n = e^{-(1/2) \alpha^2 n C(0, 0)} : [\cos(\alpha \varphi_j)]^n :$$

Подставляя равенство (20.6.9) в определение (20.6.2), получаем наше утверждение. ■

Теперь мы пришли к трудной задаче изучения решеточной модели sin-Gordon. С формальной точки зрения тождество  $\Xi_C = Z_{\text{sg}}$  и показывает, каким образом возникает дебаевская длина. Предполагая, что косинус в формуле (20.6.5) допускает разложение в ряд по малому параметру  $\beta^{1/2} e$ , главный член этого разложения, а именно квадратичную форму от  $\varphi$ :

$$-2ze^2 \beta \left( \frac{1}{2} \delta^d \sum_j \varphi_j^2 \right), \quad (20.6.10)$$

можно рассматривать в соответствии с соотношением (9.1.25) как введение массового члена в меру  $d\varphi$ . Остальные члены разложения косинуса дают поправки к этой массе. Поэтому можно предполагать, что величина  $\xi_D^{-1}$ , обратная к дебаевской длине, имеет асимптотическое разложение

$$m_D = \xi_D^{-1} \sim (2z\beta e^2)^{1/2} \left[ 1 + \sum_{n+m>1} a_{nm} z^n (\beta e^2)^m \right], \quad (20.6.11)$$

коэффициенты которого  $a_{mn}$  вычисляются по теории возмущений. Главный член  $m_{\text{ср. п}}^{-1} = \xi_{\text{ср. п}} = (2z\beta e^2)^{-1/2}$  — это дебаевская длина в модели среднего поля. Основной результат работ [Brydges, 1978], [Brydges, Federbush, 1980, 1981] можно сформулировать с помощью наблюдаемых вида  $q(f) = \int q(x)f(x)dx$ , где  $f \in C_0^\infty$ , и их произведений  $A = \prod_{i=1}^N q(f_i)$  (как для решеточного, так и непрерывного поля).

**Теорема 20.6.2.** При достаточно малых значениях  $\beta$  и  $z$  состояние для системы в бесконечном объеме  $\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \langle A \rangle$  существует и обладает экспоненциальным кластерным свойством. Для любого  $\varepsilon > 0$  при достаточно малых значениях  $\beta$  и  $z$  (зависящих от  $\varepsilon$ ) имеет место оценка

$$|\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle| \leq C_A C_B e^{-md},$$

где  $d$  — расстояние между носителями  $A$  и  $B$ . Здесь  $m = (1 - \varepsilon) m_{\text{ср. п}} = (1 - \varepsilon) (2z\beta e^2)^{1/2}$ .

## 20.7 В газе диполей нет экранирования

Рассмотрим газ диполей с кулоновым взаимодействием. Как и в предыдущем параграфе, для того чтобы избежать особенностей потенциала в нуле, будем изучать  $d$ -мерный решеточный газ. Решеточный диполь  $\mathbf{D}$  — это пара зарядов  $(q_i, q_j)$ , одинаковых по величине, но противоположных по знаку и расположенных в соседних узлах решетки  $(i, j)$ . Пусть  $\mathbf{D}$  обозначает вектор длины  $2\delta e$ , направленный от отрицательного к положительному заряду. Этот вектор есть не что иное, как дипольный момент. Будем помечать  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_b$  ребром решетки  $b$ , соединяющим вершины  $(i, j)$ .

Энергия взаимодействия пары диполей  $\mathbf{D}_b, \mathbf{D}_{b'}$ , отвечающих ребрам  $b, b'$ , имеет вид

$$\langle \mathbf{D}_b, V \mathbf{D}_{b'} \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^d D_{b, \alpha} V_{\alpha\beta}(b, b') D_{b', \beta}. \quad (20.7.1)$$

Здесь  $V_{\alpha\beta}(b, b')$  есть  $d \times d$ -матрица, определяемая парным кулоновым взаимодействием между зарядами, входящими в диполи,

исключая взаимодействия внутри диполя. Асимптотически при удаленных друг от друга на вектор  $\mathbf{r}_{bb'} = \mathbf{r}$  большой длины  $r$  ребрах  $b, b'$  это взаимодействие имеет вид

$$V_{\alpha\beta}(b, b') \sim \begin{cases} (d-2)\Omega(d-1)^{-1}r^{-d} \left( \delta_{\alpha\beta} - (d-1)\frac{r_{\alpha}r_{\beta}}{r^2} \right) & \text{при } d > 2, \\ (2\pi)^{-1}r^{-2} \left( 2\frac{r_{\alpha}r_{\beta}}{r^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) & \text{при } d = 2. \end{cases} \quad (20.7.2)$$

Этот потенциал взаимодействия диполей не является абсолютно интегрируемым, но его среднее по сфере равно нулю.

Большая статистическая сумма определяется формулой

$$\Xi_{\text{дип}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \delta^{nd} \sum_{\substack{b_k \in \Lambda \\ D_k = \pm \\ k=1, 2, \dots, n}} \mu_{\text{кан}, n}, \quad (20.7.3)$$

где  $D_k = \pm$  обозначает сумму по двум направлениям в диполе, отвечающем ребру  $b_k$ , и

$$\mu_{\text{кан}, n} = (n!)^{-1} \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{k \neq l \\ 1 \leq k, l \leq n}} \langle \mathbf{D}_{b_k}, V \mathbf{D}_{b_l} \rangle \right]. \quad (20.7.4)$$

Парная корреляционная функция диполей определяется формулой

$$\langle \mathbf{D}_b \mathbf{D}_{b'} \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow z^d} \Xi_{\text{дип}}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \delta^{nd} \sum_{\substack{b_k \in \Lambda \\ D_k = \pm \\ k=1, 2, \dots, n}} \mathbf{D}_b \mathbf{D}_{b'} \mu_{\text{кан}, n}. \quad (20.7.5)$$

В противоположность случаю кулонова газа мы не ожидаем, что в разреженном газе диполей возникнет экранирование. Повторив рассуждения § 20.6, можно показать, что

$$\Xi_{\text{дип}} = Z_{V=2z \cos(\beta^{1/2}e | \nabla \varphi |)} = \int \exp \left[ 2z \sum_{j \in \Lambda} \delta^d : \cos(\beta^{1/2}e | \nabla \varphi |_j) : \right] d\varphi. \quad (20.7.6)$$

Здесь по сравнению с формулой (20.6.5)  $\varphi^2$  заменено на  $(\nabla \varphi)^2$ . Представление (20.7.6) показывает, что при  $|z| \ll 1$  разложение косинуса приводит к квадратичному члену

$$-2ze^2 \beta \left( \frac{1}{2} \delta^d \sum_j (\nabla \varphi)_j^2 \right). \quad (20.7.7)$$

Но теперь этот член дает уже не массу, а вклад в коэффициент  $(1 + 2ze^2\beta)$  при кинетической энергии. Приближение среднего поля

по формуле (20.7.7) предсказывает, что корреляционная функция (20.7.5) при малых  $z$ ,  $e^2\beta$  ведет себя следующим образом:

$$\langle \mathbf{D}_b \mathbf{D}_{b'} \rangle \sim \varepsilon(z, e^2\beta)^{-1} \langle \mathbf{D}_b, V \mathbf{D}_{b'} \rangle + O(r^{-6}). \quad (20.7.8)$$

Здесь диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  имеет вид

$$\varepsilon = 1 + ze^2\beta + \sum_{n+m>1} a_{nm} z^n (\beta e^2)^m.$$

На языке перенормировок теории поля  $\varepsilon = Z^{-1}$ , где  $Z$  — константа перенормировки величины поля. Ввиду того, что дипольные силы приводят к эффективному дальнему действию, применение здесь кластерной техники значительно затруднено по сравнению со случаем разреженного кулонова газа. Для изучения свободной энергии в дипольном газе с успехом применялись методы группировки спинов в блоки [Glimm, Jaffe, 1977b]. Отсутствие экранирования в этой модели установлено в работе [Park, 1979], [Fröhlich, Spencer, 1981a]. К соответствующему  $(\nabla\varphi)^4$ -взаимодействию применялись методы, связанные с ренормгруппой [Gawędzki, Kupiainen, 1980]; см. также [Bricmont, Fontaine, Lebowitz, Spencer, 1980, 1981], [Bricmont, Fontaine, Lebowitz, Lieb, Spencer, 1981].

Несмотря на отсутствие экранирования можно ожидать, что в газе диполей при  $d \geq 2$  происходит фазовый переход из неупорядоченной фазы в конденсированную (рис. 20.2). Наиболее тру-

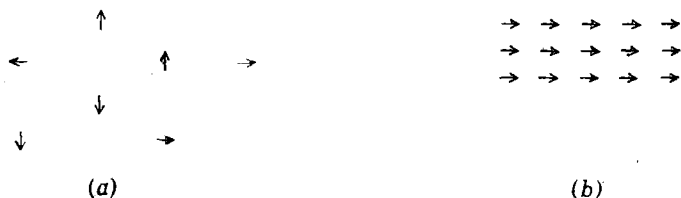


Рис. 20.2. (а) Неупорядоченные диполи. (б) Конденсированная фаза диполей.

ден для изучения случай  $d = 2$ , так как с математической точки зрения эти переходы относятся к так называемым переходам с разрыванием (см. § 20.8) и переходам типа модели ротаторов (§ 5.5). Очень интересно было бы установить их существование (см. [Fröhlich, Spencer, 1981b]).

## 20.8 Солитоны

Излагая и анализируя в этой книге приближение среднего поля, мы в основном рассматривали разложения в окрестности конфигураций  $\varphi = \text{const}$ , которые являются абсолютными минимумами действия  $a$ . Классические уравнения поля могут иметь и другие стационарные решения. Простой пример имеется в размерности  $d = 2$  у  $\varphi^4$ -модели со взаимодействием  $\lambda(\varphi^2 - a)^2$ . При этом ста-



ционарное решение

$$\varphi = \pm \sqrt{a} \operatorname{th}((2\lambda a)^{1/2} x_1) \quad (20.8.1)$$

есть либо солитон, либо антисолитон. Это решение вещественно только при  $a \geq 0$ . В этом случае считается, что солитон может повлиять на спектр частиц. Хотя и предполагается, что в пространстве  $\mathcal{H}$  солитонные состояния невозможны (так как они связывают два разных вакуумных состояния в различных представлениях), считается все же, что солитонные пары (близкие к классическим решениям) могут породить частицу в двухфазной области. Классическое состояние (рис. 20.3(b)) наводит на мысль о существовании солитон-антисолитонных связанных состояний в квантовой теории.

Далее, можно представить себе построение сектора суперотбора, содержащего солитонный сектор, но без вакуумных состояний. Такое построение сделано для некоторых моделей  $\varphi_2^4$ ,  $(\varphi^2)_2^2$  и  $\sin\text{-Gordon}_2$  ([Fröhlich, 1976b], [Bellisard, Fröhlich, Gidas, 1978] и [Gidas, 1979a]). Упомянем, что в размерности  $d=2$  построено поле  $\sin\text{-Gordon}$  в непрерывном пространстве [Fröhlich, Seiler, 1976].

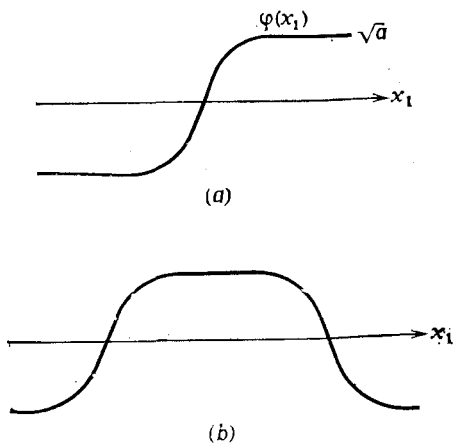


Рис. 20.3. (а) Солитонное классическое решение. (б) Двухсолитонное приближенное решение для  $\varphi^4$ -модели.

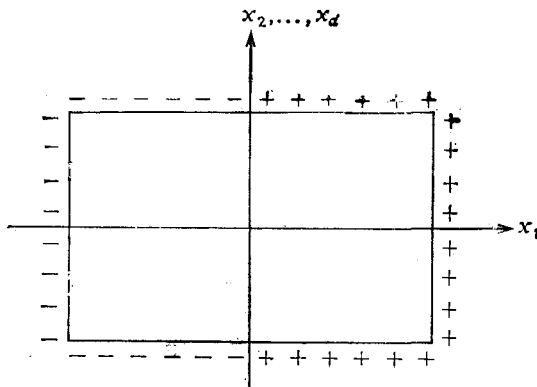


Рис. 20.4. Граничные условия, которые приводят к разделению фаз в трехмерной модели Изинга при  $T < (T_{\text{кр}})_{\text{Изинг}}$ .

Очень интересная задача, родственная проблемам, рассмотренным выше, — так называемые переходы с размыванием. Рассмотрим трехмерную модель Изинга в бесконечном объеме с граничными условиями  $+$  для  $x_1 > 0$  и  $-$  для  $x_1 < 0$ , как показано на рис. 20.4. Известно, что при  $T < (T_{кр})_{Изинг_2} < (T_{кр})_{Изинг_3}$  существует отчетливая поверхность фаз. В случае же  $T > (T_{кр})_{Изинг_3}$  в пределе получается трансляционно-инвариантное состояние (без раздела фаз). Интересно понять, происходит ли размывание (т. е. исчезновение) поверхности раздела фаз при  $T < (T_{кр})_{Изинг_3}$ . Такой переход мы и назвали переходом с размыванием (в оригинале: roughening phase transition).

## 20.9 Калибровочные теории

Единственная калибровочная теория, которая рассматривалась в этой книге, — это электродинамика. В калибровочных теориях имеются три вопроса, изучаемых обычно с математической точки зрения: классическое и квазиклассическое приближение, формулировка аксиом и построение простейших непрерывных моделей в пределе, когда шаг решетки  $\delta$  стремится к нулю.

В качестве действия в чистой калибровочной теории берется  $\mathcal{A} = \|F\|^2/4$ , где величина

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$$

принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы  $G$ . Классические евклидовы уравнения Янга — Миллса

$$\sum D_\mu F_{\mu\nu} = 0 = \sum (\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}])$$

имеют решения, для которых действие конечно, — так называемые инстантоны [Белавин, Поляков, Шварц, Тьюкин, 1976]:

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \lambda} g \partial_\mu g^{-1}, \quad (20.9.1)$$

где  $g(x) = x_0 I + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы Паули. Инстантон обладает свойством  $F = *F$ . Фактически построены все классические решения, удовлетворяющие условию  $F = \pm *F$  и обладающие конечным действием ([Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin, 1978]). Инстантоны оказались полезны и для формального понимания квазиклассического приближения в квантовых калибровочных теориях; см. [Coleman, 1977, 1979]. Аксиомы для калибровочных полей сформулированы в работе [Strocchi, 1978].

Строгое математическое построение квантовых калибровочных полей только начинается. При этом полезна решеточная модель с обрезанием [Wilson, 1974]. Компонента связности  $A_i$  в направлении координаты  $i$ , принимающая значения в алгебре Ли, заменяется в решеточной теории элементом группы  $\exp(\delta A_i) = \gamma_b$ , сопоставленным каждому ребру  $b$ . Остервальдер и Зайлер [1978] сформулировали и доказали аксиому о положительности при от-

ражениях для этой модели с действием вида

$$\mathcal{A} = \sum_p \text{tr} (\gamma_{b_1} \dots \gamma_{b_4}), \quad (20.9.2)$$

где  $b_1, \dots, b_4$  — ребра, ограничивающие элементарную ячейку решетки  $p$ . Для анализа предельного перехода к бесконечному объему использовались кластерные разложения. Для калибровочных теорий с группой  $G = Z_2$  справедлива теорема Ли — Янга [Dunlop, 1981]. Фазовые переходы в калибровочной  $Z_2$ -теории исследовались в работе [Balian, Drouffe, Itzykson, 1975]. По поводу калибровочных теорий с группой  $Z_n$  см. [Greutz, Jacobs, Rebbi, 1979], [Drouffe, 1980] и [Greutz, 1980a]. Неабелевы модели рассмотрены в работах [Мигдал, 1976], [Kadanoff, 1977], [’t Hooft, 1978, 1980, 1981], [Glimm, Jaffe, 1979], [Greutz, 1980b], [Fröhlich, 1980—1981], [Itzykson, 1980], [Mack, 1980], [Wilson, 1980], [Seiler, 1981].

Предел решеточной модели при переходе к непрерывному пространству изучался только в размерности  $d = 2$ . Соответствующая чистая калибровочная теория тривиальна, а модель Хиггса с калибровочной группой  $U(1)$  и действием

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \|F\|^2 + \frac{1}{2} \|D\varphi\|^2 + \frac{\lambda}{8} (\|\varphi\|^2 - 1)^2 \quad (20.9.3)$$

построена в работах [Brydges, Fröhlich, Seiler, 1979, 1980a, b]. В них проверены аксиомы Остервальдера — Шрадера для калибровочно-инвариантных величин, но никакой подробной информации о соответствующих спектрах до сих пор нет.

Поскольку ультрафиолетовое поведение калибровочных моделей (особенно их перенормируемость при  $d \leq 4$ ) существенно зависит от калибровочной инвариантности действия, то очень важно, чтобы ультрафиолетовое обрезание ее сохраняло. В качестве альтернативы к ковариантному решеточному обрезанию калибровочных моделей по Вильсону в работе [Singer, 1977] предложена математическая конструкция, в которой использована обычная калибровочная ковариантность в непрерывном пространстве и введена калибровочно-ковариантная функция регуляризации  $\zeta$ . Такой подход использовался при анализе грибовской неопределенности [Singer, 1978], состоящей в том, что, вообще говоря, определение калибровочной меры  $d\mu$  вида 6.6.5 по теории возмущений может формально оказаться неполным. В работе [Asorey, Mitter, 1981] положено начало определению меры  $d\mu$ , не использующему теории возмущений: доказано существование соответствующей регуляризованной меры; при регуляризации используются степени ковариантного пространственного лапласиана. См. также [Narasimhan, Ramadas, 1979].

## 20.10 Модель Хиггса и сверхпроводимость

В 50-е годы В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау для объяснения явления сверхпроводимости в размерности  $d = 3$  предложили рассмот-

реть действие вида (20.9.3). В частности, введенное ими комплексное скалярное поле  $\Phi$  в современной терминологии интерпретируется как шредингерова волновая функция электронной (куперовой) пары, движущейся в магнитном поле  $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Это поле известно также под названием «параметра порядка» теории Гинзбурга — Ландау. Константа связи  $\lambda < 1$  соответствует сверхпроводникам первого рода, а  $\lambda > 1$  — сверхпроводникам второго рода. В первых магнитное поле выталкивается (эффект Мейсснера). Во вторых оно частично проникает в сверхпроводник, причем его величина кратна основному (минимальному) потоку. Фактически существуют классические стационарные решения уравнений движения, которые не зависят от какой-нибудь одной пространственной координаты. Эти решения описывают туннели магнитных потоков, причем в единицах, которые использованы в (20.9.3), для них при целом  $N$  верно соотношение  $\int \mathbf{F} dx = 2\pi N$ . С микроскопической точки зрения обоснованием теории Гинзбурга — Ландау служит теория Бардина — Купера — Шриффера (БКШ); см. [Huebener, 1979], [Fetter, Walecka, 1971].

В окрестности туннеля поведение параметра порядка  $\Phi$  оказывается вихревым (с центром вихря на оси туннеля), в связи с чем туннельные потоки называют еще «вихрями». Следовательно,  $\Phi \approx 0$  соответствует обычной области (ненулевой магнитный поток), а  $|\Phi| \approx 1$  — области сверхпроводимости (выталкивание потока — эффект Мейсснера). На самом деле треугольная решетка туннелей в сверхпроводниках второго рода была предсказана Абрикосовым и наблюдалась также экспериментально. Решения уравнений, имеющие вихревой характер, возможны потому, что в действии (20.9.2) требуется, чтобы  $|\Phi| \rightarrow 1$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Это приводит к интерпретации вихревого числа как степени отображения  $\Phi/|\Phi|$  (со значениями в  $S^1$ ) вне нулей функции  $\Phi$ . На самом деле гладкие вихревые решения уравнений существуют и в классическом случае характеризуются двумя масштабами длин: глубиной проникновения магнитного поля (величиной, обратной массе фотона) и корреляционной длиной вихря (величиной, обратной массе Хиггса), см. [Jaffe, Taubes, 1980].

Изучалась также статистическая механика этих моделей в решеточном приближении; см. [Israel, Nappi, 1979a, b], [Guth, 1980] и [Fröhlich, Spencer, 1981b]. Считается, что в случае размерности  $d = 2$  (или при  $d = 3$  в случае решения, не зависящего от одной координаты) для действия (20.9.2) в квантовой теории поля  $\langle \Phi \rangle = 0$  (т. е. нет нарушения симметрии), но проявляются оба классических масштаба длины (применительно к квантовым поправкам); см. [Callen, Dashen, Gross, 1977] и [Coleman, 1977]. «Механизм Хиггса» не понят пока на математическом уровне. В размерности  $d \geq 3$  в теории поля ожидается, что образование массы должно сопровождаться нарушением симметрии,  $\langle \Phi \rangle \neq 0$ .

- <sup>1</sup>Abers, E. and Lee, B. W. (1973). Gauge theories, *Phys. Rept.* **9C**, 1-141.
- Abraham, D. (1978).  $n$ -point functions for the rectangular Ising ferromagnet, *Comm. Math. Phys.* **60**, 205-213.
- Agmon, S. (1965). *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Princeton: Van Nostrand.
- Aguilar, J. and Combes, J. M. (1971). A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians, *Comm. Math. Phys.* **22**, 269-279.
- Aizenman, M., Goldstein, S. and Lebowitz, J. L. (1978). Conditional equilibrium and the equivalence of microcanonical and grandcanonical ensembles in the thermodynamic limit, *Comm. Math. Phys.* **62**, 279-302.
- Aizenman, M. and Simon, B. (1980). Local Ward identities and the decay of correlations in ferromagnets, *Comm. Math. Phys.* **77**, 137-144.
- Albeverio, S., Gallavotti, G. and Høegh-Krohn, R. (1979a). Some results for exponential interaction in two or more dimensions, *Comm. Math. Phys.* **70**, 187-192.
- Albeverio, S. and Høegh-Krohn, R. (1973). Uniqueness of the physical vacuum and the Wightman functions in the infinite volume limit for some nonpolynomial interactions, *Comm. Math. Phys.* **30**, 171-200.
- Albeverio, S. and Høegh-Krohn, R. (1979). Uniqueness and the global Markov property for Euclidean fields. The case of trigonometric interactions, *Comm. Math. Phys.* **68**, 95-128.
- de Alfaro, V., Fubini, S. and Furlan, G. (1976). A new classical solution of the Yang-Mills field equations, *Phys. Lett. B* **65**, 163-166.
- Araki, H. (1960). Hamiltonian formalism and the canonical commutation relations in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **1**, 492-504.

---

<sup>1)</sup> Цифровыми индексами отмечены работы, вышедшие на русском языке или в русском переводе, которые входят под соответствующим номером в отдельный список, приведенный далее.

- Araki, H. (1963). A lattice of Von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field, *J. Math. Phys.* **4**, 1343–1362.
- Araki, H. (1964a). On the algebra of all local observables, *Prog. Theor. Phys.* **32**, 844–854.
- Araki, H. (1964b). The type of Von Neumann algebra associated with the free field, *Prog. Theor. Phys.* **32**, 956–965.
- Araki, H. (1964c). Von Neumann algebras of local observables for free scalar field, *J. Math. Phys.* **5**, 1–13.
- Araki, H. ed. (1975). *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, (Kyoto, 1975), New York: Springer-Verlag.
- Asano, T. (1970a). Lee-Yang theorem and the Griffiths inequality for the anisotropic Heisenberg ferromagnet, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 1409–1411.
- Asano, T. (1970b). Theorems on the partition functions of the Heisenberg ferromagnets, *J. Phys. Soc. Jap.* **29**, 350–359.
- Ashcroft, N. and Mermin, D. (1976). *Solid State Physics*, New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Asorey, M. and Mitter, P. K. (1981). Regularized, continuum Yang-Mills process and Feynman-Kac functional integral, *Comm. Math. Phys.*, to appear.
- Atiyah, M. F., Drinfeld, V. G., Hitchin, N. J. and Manin, Yu. I. (1978). Construction of instantons, *Phys. Lett.* **65A**, 185–187.
- Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M. (1978). Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London Series A* **362**, 421–457.
- Baker, G. (1975). Self-interacting boson quantum field theory and the thermodynamic limit in  $d$  dimensions, *J. Math. Phys.* **16**, 1324–1346.
- Baker, G. (1977). Analysis of hyperscaling in the Ising model by the high-temperature series method, *Phys. Rev.* **B15**, 1553–1559.
- Baker, G. and Kincaid, J. M. (1981). The continuous-spin Ising model,  $g_0: \phi^4_a$  field theory, and the renormalization group, *J. Stat. Phys.* **24**, 469–528.
- Balaban, T. and Gawedzki, K. (1981). A low temperature expansion for the pseudoscalar Yukawa model of quantum fields in two space-time dimensions, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, to appear.
- Balian, R., Drouffe, J. and Itzykson, C. (1975). Gauge fields on a lattice I, II, III. *Phys. Rev. D* **10**, 3376–3395; *D* **11**, 2008–2013; *D* **11**, 2104–2119.
- Balslev, E. and Combes, J. M. (1971). Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation analytic interactions, *Comm. Math. Phys.* **22**, 280–294.
- Battle, G. A. and Rosen, L. (1980). The FKG inequality for the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *J. Stat. Phys.* **22**, 123–192.
- Baumel, R. T. (1979). On spontaneously broken symmetry in the  $P(\phi)_2$  model quantum field theory, *Princeton University Thesis*.
- Baym, G. (1969). *Lectures on Quantum Mechanics*, New York: Benjamin.
- Becchi, C., Rouet, A. and Stora, R. (1975). Renormalization of the abelian Higgs-Kibble model, *Comm. Math. Phys.* **42**, 127–162.

- Becchi, C., Rouet, A. and Stora, R. (1976). Renormalization of gauge theories, *Ann. Phys.* **98**, 287-321.
- Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Schwartz, A. S. and Tyupkin, Yu. S. (1975). Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, *Phys. Lett.* **B59**, 85-87.
- Béllisard, J., Fröhlich, J. and Gidas, B. (1978). Soliton mass and surface tension in the  $(\lambda\phi^4)_2$  quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **60**, 37-72.
- Bender, C., Cooper, F., Guralnik, G., Roskies, R. and Sharp, D. (1981). Numerical computation of the renormalized effective potential in the strong coupling limit. *Phys. Rev. D*, to appear.
- Bender, C. M. and Wu, T. T. (1969). Anharmonic oscillator, *Phys. Rev.* **184**, 1231-1260.
- Benfatto, G., Cassandro, M., Gallavotti, G., Nicolò, F., Oliveri, E., Presutti, E. and Scacciatelli, E. (1978). Some probabilistic techniques in field theory, *Comm. Math. Phys.* **59**, 143-166.
- Benfatto, G., Cassandro, M., Gallavotti, G., Nicolò, F., Olivieri, E., Presutti, E. and Scacciatelli, E. (1980). On the ultraviolet stability in the Euclidean scalar field theories, *Comm. Math. Phys.* **71**, 95-130.
- Benfatto, G., Gallavotti, G. and Nicolò, F. (1980). Elliptic equations and Gaussian processes, *J. Funct. Anal.* **36**, 343-400.
- <sup>3</sup>Berezin, F. A. (1966). *The Method of Second Quantization*, New York: Academic Press.
- <sup>4</sup>Berezinskii, V. L. (1971). Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. I. Classical systems, *Soviet Phys. JETP* **32**, 493-500.
- <sup>5</sup>Bers, L., John, F. and Schechter, M. (1964). *Partial Differential Equations*, New York: Interscience Publishers.
- Bisognano, J. and Wichmann, E. (1975). On the duality condition for a Hermitean scalar field, *J. Math. Phys.* **16**, 985-1007.
- <sup>6</sup>Bjorken, J. and Drell, S. (1964). *Relativistic quantum mechanics*, New York: McGraw-Hill.
- <sup>9</sup>Bjorken, J. and Drell, S. (1965). *Relativistic quantum fields*, New York: McGraw-Hill.
- Bleher, P. M. and Sinai, Ya. G. (1973). Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's hierarchical models, *Comm. Math. Phys.* **33**, 23-42.
- Bleher, P. M. and Sinai, Ya. G. (1975). Critical indices for Dyson's asymptotically hierarchical models, *Comm. Math. Phys.* **45**, 247-278.
- <sup>6</sup>Bogoliubov, N. N., Logunov, A. A. and Todorov, R. T. (1975). *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, Reading: Benjamin, Translation and revision of original publication in 1969.
- Bogoliubov, N. N. and Parasiuk, O. S. (1957). Über die Multiplikation der Kausal-funktionen in der Quantentheorie der Felder, *Acta Math.* **97**, 227-266.
- <sup>7</sup>Bogoliubov, N. N. and Shirkov, D. V. (1959). *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, New York: Interscience.

- Borchers, H. J. (1962). On structure of the algebra of field operators, *Nuovo Cimento* **24**, 214-236.
- Borchers, H. J. (1966). Energy and momentum as observables in quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **2**, 49-54.
- Borchers, H. J. and Yngvason, J. (1976). Necessary and sufficient conditions for integral representations of Wightman functionals at Schwinger points, *Comm. Math. Phys.* **47**, 197-213.
- Bratteli, O. (1972). Conservation of estimates in quantum field theory, *Comm. Pure and Appl. Math.* **25**, 759-779.
- Bratteli, O. and Robinson, D. W. (1981). *Operator algebras and quantum statistical mechanics II. Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*, New York: Springer Verlag.
- Bricmont, J. (1976). Correlation inequalities for two-component fields, *Ann. Soc. Sr. Brussels* **90**, 245-252.
- Bricmont, J., Fontaine, J. R. and Landau, L. J. (1977). On the uniqueness of the equilibrium state for plane rotators, *Comm. Math. Phys.* **56**, 281-296.
- Bricmont, J., Fontaine, J. R. and Landau, L. J. (1979). Absence of symmetry breakdown and uniqueness of the vacuum for multicomponent field theories, *Comm. Math. Phys.* **64**, 49-72.
- Bricmont, J., Fontaine, J. R., Lebowitz, J. L. and Spencer, T. (1980-1). Lattice systems with a continuous symmetry. I, II, *Comm. Math. Phys.* **78**, 281-302; 363-372.
- Bricmont, J., Fontaine, J. R., Lebowitz, J. L., Lieb, E. and Spencer, T. (1981). Lattice systems with a continuous symmetry III. *Comm. Math. Phys.* **78**, 545-566.
- Bricmont, J., Lebowitz, J. L. and Pfister, C. (1979). On the equivalence of boundary conditions, *J. Stat. Phys.* **21**, 573-582.
- Bricmont, J., Lebowitz, J. L. and Pfister, C. E. (1980). Low temperature expansion for continuous spin-Ising models, *Comm. Math. Phys.* **78**, 117-136.
- Bros, J. (1970). Some analyticity properties implied by the two particle structure of Green's functions in general quantum field theory In: *Analytic Methods in Mathematical Physics*, R. Gilbert and R. Newton, eds., New York: Gordon and Breach.
- Bros, J., Epstein, H. and Glaser, V. (1967). On the connection between analyticity and Lorentz covariance of Wightman functions, *Comm. Math. Phys.* **6**, 77-100.
- Bros, J. and Iagolnitzer, D. (1973). Causality and local analyticity: mathematical study, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **18**, 147-184.
- Bros, J. and LaSalle, M. (1977). Analyticity properties and many body structure in general quantum field theory. III, *Comm. Math. Phys.* **54**, 33-62.
- Brydges, D. (1975). Boundedness below for fermion model theories. I, *J. Math. Phys.* **16**, 1649-1661.
- Brydges, D. (1976a). Cluster expansions for fermion fields by the time-dependent Hamiltonian approach, *J. Math. Phys.* **17**, 1118-1124.
- Brydges, D. C. (1976b). Boundedness below for fermion model theories. Part II. The linear lower bound, *Comm. Math. Phys.* **47**, 1-24.
- Brydges, D. (1978). A rigorous approach to Debye screening in dilute classical Coulomb systems, *Comm. Math. Phys.* **58**, 313-350.



- Brydges, D. and Federbush, P. (1974). A semi-Euclidean approach to boson-fermion model theories, *J. Math. Phys.* **15**, 730-732.
- Brydges, D. and Federbush, P. (1976). The cluster expansion in statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.* **49**, 233-246.
- Brydges, D. and Federbush, P. (1977). The cluster expansion for potentials with exponential fall-off, *Comm. Math. Phys.* **53**, 19-30.
- Brydges, D. and Federbush, P. (1978a). A lower bound for the mass of a random Gaussian lattice. *Comm. Math. Phys.* **62**, 79-82.
- Brydges, D. and Federbush, P. (1978b). A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics, *J. Math. Phys.* **19**, 2064-2067.
- Brydges, D. and Federbush, P. (1980). Debye screening, *Comm. Math. Phys.* **73**, 197-246.
- Brydges, D. and Federbush, P. (1981). Debye screening in classical Coulomb systems, In: *1980 Erice summer school lectures*, G. Velo and A. Wightman, eds. To appear.
- Brydges, D., Fröhlich, J. and Seiler, E. (1979). On the construction of quantized gauge fields, I. General results, *Ann. Phys.* **121**, 227-284.
- Brydges, D., Fröhlich, J. and Seiler, E. (1980). Construction of quantized gauge fields. II. Convergence of the lattice approximation, *Comm. Math. Phys.* **71**, 159-205.
- Brydges, D., Fröhlich, J. and Seiler, E. (1981). On the construction of quantized gauge theories III, *Comm. Math. Phys.*, **79**, 353-399.
- Buchholz, D. and Fredenhagen, K. (1980). Clustering, charge-screening and the mass-spectrum in local quantum field theory In: *Mathematical Problems in Theoretical Physics* K. Osterwalder, ed., Berlin: Springer-Verlag.
- Buchvostov, A. P. and Lipatov, L. N. (1977). High orders of the perturbation theory in scalar electrodynamics, *Phys. Lett. B* **70**, 48-50.
- Burnap, C. (1976). *The particle structure of Boson quantum field theory models*, Harvard University Thesis.
- Burnap, C. (1977). Isolated one particle states in boson quantum field theory models, *Ann. Phys.* **104**, 184-196.
- Cagnalp, G. (1980a). The  $\phi^4$  lattice field theory as an asymptotic expansion about the Ising limit, *Ann. Phys.* **124**, 189-207.
- Cagnalp, G. (1980b). Thermodynamic properties of the  $\phi^4$  lattice field theory near the Ising limit, *Ann. Phys.*, **126**, 500-511.
- Callen, C., Dashen, R. and Gross, D. (1977). A mechanism for quark confinement, *Phys. Lett.*, **B 66**, 375-381.
- Camp, W. J., Saul, D. M., Van Dyke, J. P. and Wortis, M. (1976). Series analysis of corrections to scaling for the spin-pair correlations of the spin- $s$  Ising model: Confluent singularities, universality, and hyperscaling, *Phys. Rev.* **B14**, 3990-4001.
- Cannon, J. (1974). Continuous sample paths in quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **35**, 215-234.
- Cannon, J. and Jaffe, A. (1970). Lorentz covariance of the  $\lambda(\phi^4)_2$  quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **17**, 261-321.

- Cartier, P. (1974). Unpublished.
- Chiu, S. T. and Weeks, J. D. (1978). Dynamics of the roughening transition, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 733-736.
- Chretien, M. and Deser, S., eds. (1966). *Particle Symmetries and Axiomatic Field Theory*, (Brandeis, 1965), New York: Gordon and Breach.
- Coleman, S. (1972). Scaling anomalies In: *Developments in High Energy Physics R. Gatto, ed.*, New York: Academic Press.
- Coleman, S. (1973a). There are no Goldstone bosons in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* **31**, 259-264.
- Coleman, S. (1973b). Dilations In: *Properties of the Fundamental Interactions A. Zichichi, ed.*, Bologna: Bologna Press.
- Coleman, S. (1975a). Quantum Sine-Gordon equation as the massive Thirring model, *Phys. Rev. D* **11**, 2088-2097.
- <sup>37</sup> Coleman, S. (1975b). Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields In: *Laws of Hadronic Matter A. Zichichi, ed.*, New York: Academic Press.
- Coleman, S. (1977). Classical lumps and their quantum descendants In: *New Phenomena in Subnuclear Physics*, A. Zichichi, ed., New York: Plenum Press.
- Coleman, S. (1979). The uses of instantons In: *The Whys of Subnuclear Physics A. Zichichi, ed.*, New York: Plenum Press.
- Collett, P. and Eckmann, J.-P. (1978). *A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics*, New York: Springer-Verlag.
- Combes, J. M., Schrader, R. and Seiler, R. (1978). Classical bounds and limits for energy distributions of Hamiltonian operators in electromagnetic fields, *Ann. Phys.* **111**, 1-18.
- Combes, M. and Dunlop, F. (1979). N-particle-irreducible functions in Euclidean quantum field theory, *Ann. Phys.* **122**, 102-150.
- Constantinescu, F. (1977). Nontriviality of the scattering matrix for weakly coupled  $\phi_3^4$  models, *Ann. Phys.* **108**, 37-48.
- Constantinescu, F. (1980). *Expansion of the double-well model near the Ising model*, Institut für angewandte Mathematik Johann Wolfgang Goethe Universität Preprint.
- Constantinescu, F. and Stroter, B. (1980). The Ising limit of the double-well model, *J. Math. Phys.* **21**, 881-890.
- Cooper, A. and Rosen, L. (1977). The weakly coupled Yukawa<sub>2</sub> field theory: Cluster expansion and Wightman axioms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **234**, 1-88.
- Creutz, M. (1980a). Phase diagram for coupled spin gauge theories, *Phys. Rev.* **D21**, 1006-1012.
- Creutz, M. (1980b). Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory, *Phys. Rev. D* **21**, 2308-2315.
- Creutz, M., Jacobs, L. and Rebbi, C. (1979). Monte Carlo study of abelian lattice gauge theories, *Phys. Rev. D* **20**, 1915-1922.
- Dashen, R., Hasslacher, B. and Neveu, A. (1974). Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory, I, II, III, *Phys. Rev.* **D10**, 4114-4141.

- Dashen, R., Hasslacher, B. and Neveu, A. (1975). Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques, *Phys. Rev.* **D11**, 3424–3450.
- De Angelis, G. F. and de Falco, D. (1977). Correlation inequalities for lattice gauge fields, *Lett. Nuovo Cimento* **18**, 536–538.
- De Angelis, G. E., de Falco, D. and Guerra, F. (1977a). Scalar quantum electrodynamics on the lattice as classical statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.* **57**, 201–212.
- De Angelis, G. E., de Falco, D. and Guerra, F. (1977b). Lattice gauge models in the strong coupling regime, *Lett. Nuovo Cimento* **19**, 55–58.
- DeDominicis, C. and Martin, P. (1964). Stationary entropy principle and renormalization in normal and superfluid systems I, II. *J. Math. Phys.* **5**, 14–30, 31–59.
- Dell'Antonio, G., Doplicher, S. and Jona-Lasinio, G. (1978). *Mathematical problems in theoretical physics*, (Rome, 1977), New York: Springer-Verlag.
- DeWitt, C. and Stora, R., eds. (1971). *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, (Les Houches, 1970), New York: Gordon and Breach.
- Dimock, J. (1972a). Estimates, renormalized currents and field equations for the Yukawa field theory, *Ann. Phys.* **72**, 177–242.
- Dimock, J. (1972b). Spectrum of local Hamiltonians in the Yukawa field theory, *J. Math. Phys.* **13**, 477–481.
- Dimock, J. (1974). Asymptotic perturbation expansion in the  $P(\phi)_2$  quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **35**, 347–356.
- Dimock, J. (1976). The  $P(\phi)_2$  Green's functions: asymptotic perturbation expansion, *Helv. Phys. Acta* **49**, 199–216.
- Dimock, J. (1977). The non-relativistic limit of  $P(\phi)_2$  quantum field theories: Two particle phenomena, *Comm. Math. Phys.* **57**, 51–66.
- Dimock, J. (1980). Algebras of local observables on a manifold, *Comm. Math. Phys.* **77**, 219–228.
- Dimock, J. and Eckmann, J.-P. (1976). On the bound state in weakly coupled  $\lambda(\phi^6 - \phi^4)_2$ , *Comm. Math. Phys.* **51**, 41–54.
- Dimock, J. and Eckmann, J.-P. (1977). Spectral properties and bound state scattering for weakly coupled  $P(\phi)_2$  models, *Ann. Phys.* **103**, 289–314.
- Dimock, J. and Glimm, J. (1974). Measures on Schwarz distribution space and applications to  $P(\phi)_2$  field theories, *Adv. Math.* **12**, 58–83.
- Dixmier, J. (1957). *Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann)*, Paris: Gauthiers-Villars.
- <sup>29</sup>Dobrushin, R. L. (1965). Existence of a phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models, *Soviet Phys. Doklady* **10**, 111–113.
- Dobrushin, R. L. (1979). Talk presented at the Conference on Random Fields, Esztergom, Hungary.
- <sup>30</sup>Dobrushin, R. L. and Minlos, R. (1973). Construction of one dimensional quantum field via a continuous Markov field, *Funct. Anal. Appl.* **7**, 324–325.
- Dobrushin, R. L. and Shlosman, S. B. (1975). Absence of breakdown of continuous symmetry in two dimensional models of statistical physics, *Comm. Math. Phys.* **42**, 31–40.

- Domb, C. and Green, M. (1972- ). *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 1-6, New York: Academic Press.
- Donald, M. (1981). The classical field limit of  $P(\phi)_2$  quantum field theory, *Comm. Math. Phys.*, to appear.
- Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J. (1969). Fields, observables, and gauge transformations. I, II, *Comm. Math. Phys.* **13**, 1-23; **15**, 173-200.
- Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J. (1971). Local observables and particle statistics. I, *Comm. Math. Phys.* **23**, 199-230.
- Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J. (1974). Local observables and particle statistics. II, *Comm. Math. Phys.* **35**, 49-85.
- Doplicher, S., Kadison, R. V., Kastler, D. and Robinson, D. W. (1967). Asymptotically abelian systems, *Comm. Math. Phys.* **6**, 101-120.
- Drechsler, W. and Mayer, M. E. (1977). *Fibre Bundle Techniques in Gauge Theories: Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin*, New York: Springer-Verlag.
- Driessler, W. (1977). On the type of local algebras in quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **53**, 295-297.
- Driessler, W. (1979). Duality and absence of locally generated superselection sectors for CCR-type algebras, *Comm. Math. Phys.* **70**, 213-220.
- Driessler, W. and Fröhlich, J. (1977). The reconstruction of local observable algebras from the Euclidean Green's functions of relativistic quantum field theory, *Ann. l'Inst. Henri Poincaré* **27**, 221-236.
- Drinfeld, V. G. and Manin, Yu. I. (1978). A description of instantons, *Comm. Math. Phys.* **63**, 177-192.
- Drouffe, J. M. (1980). Series analysis in four-dimensional  $Z_n$  lattice gauge systems; *Nucl. Phys. B* **170**[FS1], 91-97.
- Duneau, M., Iagolnitzer, D. and Souillard, B. (1973). Properties of truncated correlation functions and analyticity properties for classical lattices and continuous systems, *Comm. Math. Phys.* **31**, 191-208.
- Duneau, M., Iagolnitzer, D. and Souillard, B. (1974). Strong cluster properties for classical systems with finite range interaction, *Comm. Math. Phys.* **35**, 307-320.
- <sup>31</sup> Duneau, M., Iagolnitzer, D. and Souillard, B. (1975). Decay of correlations for infinite-range interactions, *J. Math. Phys.* **16**, 1662-1666.
- Dunlop, F. (1976). Correlation inequalities for multicomponent rotators, *Comm. Math. Phys.* **49**, 247-256.
- Dunlop, F. (1977). Zeros of partition functions via correlation inequalities, *J. Stat. Phys.* **17**, 215-228.
- Dunlop, F. (1979a). Analyticity of the pressure for Heisenberg and plane rotator models, *Comm. Math. Phys.* **69**, 81-88.
- Dunlop, F. (1979b). Zeros of the partition function and Gaussian inequalities for the plane rotator model, *J. Stat. Phys.* **21**, 561-572.
- Dunlop, F. (1981). Zeros of the partition function for some generalized Ising models, *To be published in: Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. J. Fritz and D. Szasz, eds.

- <sup>28</sup> Dunlop, F. and Newman, C. (1975). Multicomponent field theories and classical rotators, *Comm. Math. Phys.* **44**, 223-235.
- Durhuus, B. and Fröhlich, J. (1980). A connection between  $v$ -dimensional Yang-Mills theory and  $(v-1)$ -dimensional, non-linear  $\sigma$ -models, *Comm. Math. Phys.* **75**, 103-153.
- <sup>24</sup> Dyson, F. (1969a). Existence of a phase transition in a one-dimensional Ising ferromagnet, *Comm. Math. Phys.* **12**, 91-107.
- <sup>25</sup> Dyson, F. J. (1969b). Nonexistence of spontaneous magnetization in a one-dimensional Ising ferromagnet, *Comm. Math. Phys.* **12**, 212-215.
- <sup>26</sup> Dyson, F. J. (1971). An Ising ferromagnet with discontinuous long-range order, *Comm. Math. Phys.* **21**, 269-283.
- Dyson, F. and Lenard, A. (1967-8). Stability of matter I, II, *J. Math. Phys.* **8**, 423-434; **9**, 698-711.
- Dyson, F., Lieb, E. H. and Simon, B. (1978). Phase transitions in quantum spin systems with isotropic and nonisotropic interactions, *J. Stat. Phys.* **18**, 335-383.
- Eckmann, J.-P. (1970). A model with persistent vacuum, *Comm. Math. Phys.* **18**, 247-264.
- Eckmann, J.-P. (1972). Representation of the CCR in the  $(\phi^4)_3$  model: independence of space cut-off, *Comm. Math. Phys.* **25**, 1-61.
- Eckmann, J.-P. (1977). Remarks on the classical limit of quantum field theories, *Lett. Math. Phys.* **1**, 387-394.
- Eckmann, J.-P. and Epstein, H. (1979a). Time-ordered products and Schwinger functions, *Comm. Math. Phys.* **64**, 95-130.
- Eckmann, J.-P. and Epstein, H. (1979b). Borel summability of the mass and the S-matrix in  $\phi^4$  models, *Comm. Math. Phys.* **68**, 245-258.
- Eckmann, J.-P., Epstein, H. and Fröhlich, J. (1976). Asymptotic perturbation expansion for the S-matrix and the definition of time ordered functions in relativistic quantum field models, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **25**, 1-34.
- Eckmann, J.-P., Magnen, J. and Sénéor, R. (1975). Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in  $P(\phi)_2$  theories, *Comm. Math. Phys.* **39**, 251-271.
- Eckmann, J.-P. and Osterwalder, K. (1971). On the uniqueness of the Hamiltonian and of the representation of the CCR for the quartic boson interaction in three dimensions, *Helv. Phys. Acta* **44**, 884-909.
- Eckmann, J.-P. and Osterwalder, K. (1973). On application of Tomita's theory of modular Hilbert algebras: Duality for free bose fields, *J. Funct. Anal.* **13**, 1-12.
- Edwards, S. F. (1959). The statistical thermodynamics of a gas with long and short-range forces, *Phil. Mag.* **4**, 1171-1182.
- Edwards, S. F. and Lenard, A. (1962). Exact statistical mechanics of a one-dimensional system with Coulomb forces. II. The method of functional integration, *J. Math. Phys.* **3**, 778-792.
- Ellis, R. S., Monroe, J. L. and Newman, C. (1976). The GHS and other correlation inequalities for a class of even ferromagnets, *Comm. Math. Phys.* **46**, 167-182.
- Ellis, R. S. and Newman, C. (1976). Quantum mechanical soft springs and reverse correlation inequalities, *J. Math. Phys.* **17**, 1682-1683.

- Ellis, R. S. and Newman, C. (1978). Necessary and sufficient conditions for the GHS inequality with applications to analysis and probability, *Trans. Amer. Math. Soc.* **237**, 83–99.
- Enns, V. (1978). Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, *Comm. Math. Phys.* **61**, 258–291.
- <sup>82</sup> Epstein, H. (1966). Some analytic properties of scattering amplitudes *In: Axiomatic Field Theory* M. Chretien and S. Deser, eds., New York: Gordon and Breach.
- Epstein, H. and Glaser, V. (1972). Renormalization of non polynomial Lagrangians in Jaffe's class, *Comm. Math. Phys.* **27**, 181–194.
- Epstein, H. and Glaser, V. (1973). The role of locality in perturbation theory, *Ann. l'Inst. Henri Poincaré* **19**, 211–295.
- Epstein, H. and Glaser, V. (1976). Adiabatic limit in perturbation theory *In: Renormalization Theory* G. Velo, A. S. Wightman, eds., Dordrecht: D. Reidel.
- Epstein, H., Glaser, V. and Jaffe, A. (1965). Nonpositivity of the energy density in quantized field theories, *Nuovo Cimento*, **36**, 1016–1022.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, II, III, New York: McGraw-Hill.
- Ezawa, H. and Swieca, J. A. (1967). Spontaneous breakdown of symmetries and Zero-mass states, *Comm. Math. Phys.* **5**, 330–336.
- Fabrey, J. (1970). Exponential representations of the canonical commutation relations, *Comm. Math. Phys.* **19**, 1–30.
- <sup>87</sup> Faddeev, L. D. and Slavnov, A. A. (1980). *Gauge fields: introduction to quantum Scattering Theory*, Moscow: Works of the Steklov Mathematical Institute, vol. 69.
- Faddeev, L. D. and Slavnov, A. A. (1980). *Gauge fields: introduction to quantum theory*, Reading, Mass.: Benjamin/Cummings Publishing Co.
- Faris, W. and Lavine, R. (1974). Commutators and self-adjointness of Hamiltonian operators, *Comm. Math. Phys.* **35**, 39–48.
- Federbush, P. (1969). A partially alternative derivation of a result of Nelson, *J. Math. Phys.* **10**, 50–52.
- Federbush, P. (1971a). Renormalization of some one-space dimensional quantum field theories by unitary transformation, *Ann. Phys.* **68**, 94–97.
- Federbush, P. (1971b). Unitary renormalization of  $[\phi^4]_{2+1}$ , *Comm. Math. Phys.* **21**, 261–268.
- Federbush, P. (1973). Positivity for some generalized Yukawa models in one space dimension, *J. Math. Phys.* **14**, 1532–1542.
- Federbush, P. (1975). A new approach to the stability of matter problem. I, II, *J. Math. Phys.* **16**, 347–351; **16**, 706–709.
- Federbush, P. (1976). The semi-Euclidean approach in statistical mechanics. I, II, *J. Math. Phys.* **17**, 200–203; 204–207.
- Federbush, P. (1981). A zero mass cluster expansion, *Comm. Math. Phys.*, to appear.
- Federbush, P. and Gidas, B. (1971). Renormalization of the one-space dimensional Yukawa<sub>2</sub> model by unitary transformation, *Ann. Phys.* **68**, 98–101.

- Feldman, J. (1973). A relativistic Feynman-Kac formula, *Nuclear Physics B* **52**, 608-614.
- Feldman, J. (1974a). On the absence of bound states in the  $\lambda\phi_2^4$  quantum field model without symmetry breaking, *Canad. Jour. Phys.* **52**, 1583-1587.
- Feldman, J. (1974b). The  $\lambda\phi_3^4$  field theory in a finite volume, *Comm. Math. Phys.* **37**, 93-120.
- Feldman, J. and Osterwalder, K. (1976). The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled  $(\phi^4)_3$  quantum field theories, *Ann. of Phys.* **97**, 80-135.
- Feldman, J. and Raczka, R. (1977). The relativistic field equations of the  $\lambda\phi_3^4$  quantum field theory, *Ann. Phys.* **10**, 212-229.
- Fetter, A. and Walecka, J. (1971). *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, New York: McGraw-Hill.
- 74 Feynman, R. P. and Hibbs, A. P. (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York: McGraw-Hill.
- Fisher, M. (1969). Rigorous inequalities for critical point correlation exponents, *Phys. Rev.* **180**, 594-600.
- Fortuin, C., Kastelyn, P. and Ginibre, J. (1971). Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Comm. Math. Phys.* **22**, 89-103.
- Fredenhagen, K. (1981). On the existence of antiparticles. *Comm. Math. Phys.* **79**, 141-151.
- Friedman, H. (1962). *Ionic Solution Theory Based on Cluster Expansion Methods*, New York: Interscience.
- 77 Friedrichs, K. (1965). *Perturbation of Spectra in Hilbert Space*, Providence: American Mathematical Society.
- Fröhlich, J. (1973). On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **A19**, 100-103.
- Fröhlich, J. (1974a). Verification of axioms for Euclidean and relativistic fields and Haag's theorem in a class of  $P(\phi)_2$  models, *Ann. Inst. H. Poincaré* **21**, 271-317.
- Fröhlich, J. (1974b). Schwinger functions and their generating functionals, I. *Helv. Phys. Acta* **47**, 265-306.
- Fröhlich, J. (1975a). The quantized "Sine-Gordon" equation with a non-vanishing mass term in two space-time dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 833-836.
- Fröhlich, J. (1975b). The reconstruction of quantum fields from Euclidean Green's functions at arbitrary temperatures in models of a self-interacting Bose field in two space-time dimension, *Helv. Phys. Acta* **48**, 355-363.
- 75 Fröhlich, J. (1976a). Classical and quantum statistical mechanics in one and two dimensions: Two component Yukawa and Coulomb systems, *Comm. Math. Phys.* **47**, 233-268.
- Fröhlich, J. (1976b). New super selection sectors (soliton-states) in two dimensional Bose quantum field models, *Comm. Math. Phys.* **47**, 269-310.
- Fröhlich, J. (1976c). Phase transitions, Goldstone Boson, and topological super-selection rules, *Acta. Phys. Austriaca, Suppl.* **XV**, 133-269.

- Fröhlich, J. (1976d). The pure phases, the irreducible quantum fields, and dynamical symmetry breaking in Symanzik-Nelson quantum field theories, *Ann. Phys.* **97**, 1-54.
- Fröhlich, J. (1977a). Application of commutator theorems to the integration of representations of Lie algebras and commutation relations, *Comm. Math. Phys.* **54**, 135-150.
- Fröhlich, J. (1977b). Schwinger functions and their generating functionals. II. Markovian and generalized path space measures on  $L^1$ , *Adv. Math.* **23**, 119-180.
- Fröhlich, J. (1979). The charged sectors of quantum electrodynamics in a framework of local observables, *Comm. Math. Phys.* **66**, 223-265.
- Fröhlich, J. (1980). Some results and comments on quantized gauge fields In: *Recent Developments in Gauge Theories* (Cargèse, 1979). G. 'tHooft et al eds., New York: Plenum Press.
- Fröhlich, J. (1981). Some comments on the crossover between strong and weak coupling in SU(2) pure Yang-Mills theory. In: *Proceedings of Les Houches workshop "Common Trends in Particle and Condensed Matter Physics"* Feb. 18-29, 1980. To appear.
- Fröhlich, J., Israel, R., Lieb, E. and Simon, B. (1978). Phase transitions and reflection positivity, I. General theory and long-range lattice models, *Comm. Math. Phys.* **62**, 1-34.
- Fröhlich, J., Israel, R. B., Lieb, E. H. and Simon, B. (1980). Phase transitions and reflection positivity, II. Lattice systems with short-range and Coulomb interactions, *J. Stat. Phys.* **22**, 297-347.
- Fröhlich, J. and Lieb, E. (1978). Phase transitions in anisotropic spin systems, *Comm. Math. Phys.* **60**, 233-267.
- Fröhlich, J., Morchio, G. and Strocchi, F. (1979a). Charged sectors and scattering states in quantum electrodynamics, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **119**, 241-284.
- Fröhlich, J., Morchio, G. and Strocchi, F. (1979b). Infrared problem and spontaneous breaking of the Lorentz group in QED, *Phys. Lett.* **89B**, 61-64.
- Fröhlich, J. and Osterwalder, K. (1974). Is there a Euclidean field theory for fermions? *Helv. Phys. Acta* **47**, 781-805.
- Fröhlich, J. and Park, Y. M. (1977). Remarks on exponential interactions and the quantum sine-Gordon equation in two space-time dimensions, *Helv. Phys. Acta.* **50**, 315-329.
- Fröhlich, J. and Park, Y. M. (1978). Correlation inequalities and thermodynamic limit for classical and quantum continuous systems, *Comm. Math. Phys.* **59**, 235-266.
- Fröhlich, J. and Park, Y. M. (1980). Correlation inequalities and the thermodynamic limit for classical and quantum continuous systems, II. Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics, *J. Stat. Phys.* **23**, 701-753.
- Fröhlich, J. and Seiler, E. (1976). The massive Thirring-Schwinger model ( $QED_2$ ) convergence of perturbation theory and particle structure, *Helv. Phys. Acta* **49**, 889-924.
- Fröhlich, J. and Simon, B. (1977). Pure states for general  $P(\phi)_2$  theories: Construction, regularity and variational equality, *Ann. Math.* **105**, 493-526.



- 76 Fröhlich, J., Simon, B. and Spencer, T. (1976). Infrared bounds, phase transitions, and continuous symmetry breaking, *Comm. Math. Phys.* **50**, 79-85.
- Fröhlich, J. and Spencer, T. (1977). Phase transitions in statistical mechanics and quantum field theory In: *New Developments in Quantum Field Theory*, M. Levy and P. Mitter, eds., New York: Plenum Press.
- Fröhlich, J. and Spencer, T. (1981a). On the statistical mechanics of classical Coulomb and dipole gases, *J. Stat. Phys.* **24**, 617-701.
- Fröhlich, J. and Spencer, T. (1981b). The Kosterlitz-Thouless transition in two-dimensional abelian spin systems and the Coulomb gas, *Comm. Math. Phys.*, to appear.
- Fröhlich, J. and Spencer, T. (1981c). Phase diagrams and critical properties of (classical) Coulomb systems. In: *Proceedings of the Erice 1980 Summer School*, A. Wightman and G. Velo, eds. (To appear.)
- Galindo, A. (1962). On a class of perturbations in quantum field theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **48**, 1128-1134.
- Gallavotti, G. and Knops, H. (1975). The hierarchical model and the renormalization group, *Rivista Nuovo Cimento* **5**, 341-368.
- Gallavotti, G. and Martin-Löf, A. (1972). Surface tension in the Ising model, *Comm. Math. Phys.* **25**, 87-126.
- Gallavotti, G. and Miracle-Sole, S. (1972). Equilibrium states of the Ising model in the two phase region, *Phys. Rev.* **5B**, 2555-2559.
- Garber, W., Ruijsenaars, S., Seiler, E. and Burns, D. (1979). On the finite action solutions of the nonlinear  $\sigma$ -model, *Ann. Phys.* **119**, 305-325.
- Gawedzki, K. (1978a). Existence of three phases for a  $P(\phi)_2$  model of quantum field, *Comm. Math. Phys.* **59**, 117-142.
- Gawedzki, K. (1978b). On confinement of fermions in strongly coupled lattice gauge theory, *Comm. Math. Phys.* **63**, 31-47.
- Gawedzki, K. and Kupiainen, A. (1980). A rigorous block spin approach to massless lattice theories, *Comm. Math. Phys.* **77**, 31-64.
- 15-17 Gelfand, I. and Shilov, G. E. (1964-8). *Generalized Functions* Vols. I-III (English Translation), New York: Academic Press.
- 18 Gelfand, I. and Vilenkin, N. (1964). *Generalized Functions*, Vol. 4 (English Translation), New York: Academic Press.
- Gidas, B. (1974a). Properties of the  $(\phi^4)_{1+1}$  interaction Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **15**, 861-866.
- Gidas, B. (1974b). On the self adjointness of the Lorentz generator for  $(\phi^4)_{1+1}$ , *J. Math. Phys.* **15**, 867-869.
- Gidas, B. (1979). The Glimm-Jaffe-Spencer expansion for the classical boundary conditions and coexistence of phases in the  $\lambda\phi^4_2$  Euclidean (quantum) field theory, *Ann. Phys.* **118**, 18-83.
- Ginibre, J. (1969). Existence of phase transitions for quantum lattice systems, *Comm. Math. Phys.* **14**, 205-234.
- Ginibre, J. (1970). General formulation of Griffiths' inequalities, *Comm. Math. Phys.* **16**, 310-328.

- Ginibre, J. (1971). Some applications of functional integration in statistical mechanics In: *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, C. DeWitt and R. Stora, eds., New York: Gordon and Breach.
- Ginibre, J. and Velo, G. (1979). The classical field limit of scattering theory for non-relativistic many-Boson systems I, II, *Comm. Math. Phys.* **66**, 37-76; **68**, 45-68.
- Glaser, V. (1974). On the equivalence of the Euclidean and Wightman formulation of field theory, *Comm. Math. Phys.* **37**, 257-272.
- Glimm, J. (1967). The Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions. I, II, *Comm. Math. Phys.* **5**, 343-386; **6**, 61-76.
- Glimm, J. (1968a). Boson fields with non-linear self-interaction in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* **8**, 12-25.
- Glimm, J. (1968b). Boson fields with the  $\phi^4$  interaction in three dimensions, *Comm. Math. Phys.* **10**, 1-47.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1968a). A  $\lambda(\phi^4)_2$  quantum field theory without cutoffs. I, *Phys. Rev.* **176**, 1945-1951.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1968b). A Yukawa interaction in infinite volume, *Comm. Math. Phys.* **11**, 9-18.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1969a). An infinite renormalization of the Hamiltonian is necessary, *J. Math. Phys.* **10**, 2213-2214.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1969b). Singular perturbations of self-adjoint operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **22**, 401-414.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1970a). Energy-momentum spectrum and vacuum expectation values in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **11**, 3335-3338.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1970b). The  $\lambda(\phi^4)_2$  quantum field theory without cutoffs. II. The field operators and the approximate vacuum, *Ann. Math.* **91**, 362-401.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1970c). The  $\lambda(\phi^4)_2$  quantum field theory without cutoffs. III. The physical vacuum, *Acta Math.* **125**, 204-267.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1970d). Self adjointness of the Yukawa<sub>2</sub> Hamiltonian, *Ann. Phys.* **60**, 321-383.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1971a). The energy-momentum spectrum and vacuum expectation values in quantum field theory. II, *Comm. Math. Phys.* **22**, 1-22.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1971b). Field theory models In: *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. C. DeWitt and R. Stora, eds., New York: Gordon and Breach.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1971c). Positivity and self adjointness of the  $P(\phi)_2$  Hamiltonian, *Comm. Math. Phys.* **22**, 253-258.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1971d). The Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory without cutoffs, *J. Funct. Anal.* **7**, 323-357.
- 19** Glimm, J. and Jaffe, A. (1972a). Boson quantum field models In: *Mathematics of Contemporary Physics* R. Streater, ed., New York: Academic Press.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1972b). The  $(\lambda\phi^4)_2$  quantum field theory without cutoffs. IV. Perturbations of the Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **13**, 1568-1584

- 20** Glimm, J. and Jaffe, A. (1973). Positivity of the  $\phi_3^4$  Hamiltonian, *Fort. Phys.* **21**, 327-376.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1974a). Critical point dominance in quantum field models, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **21**, 27-51.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1974b). Entropy principle for vertex functions in quantum field models, *Ann. Inst. H. Poincaré* **21**, 1-26.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1974c).  $\phi_4^4$  quantum field model in the single phase region: Differentiability of the mass and bounds on critical exponents, *Phys. Rev.* **10**, 536-539.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1974d). A remark on the existence of  $\phi_4^4$ , *Phys. Rev. Lett.* **33**, 440-442.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1975a). Absolute bounds on vertices and couplings, *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **22**, 97-107.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1975b). On the approach to the critical point, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **22**, 13-26.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1975c). Three particle structure of  $\phi^4$  interactions and the scaling limit, *Phys. Rev. D* **11**, 2816-2827.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1975d). Particles and bound states and progress toward unitarity and scaling In: *Mathematical Problems in Theoretical Physics H*. Araki, ed., New York: Springer-Verlag.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1975e). Two and three body equations in quantum field models, *Comm. Math. Phys.* **44**, 293-320.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1975f).  $\phi^j$  bounds in  $P(\phi)_2$  quantum field models In: *Mathematical Methods of Quantum Field Theory*, Paris: Centre National de la Recherche Scientifique.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1976a). Critical exponents and renormalization in the  $\phi^4$  scaling limit In: *Quantum Dynamics: Models and Mathematics* L. Streit, ed., New York: Springer-Verlag.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1976b). Particles and scaling for lattice fields and Ising models, *Comm. Math. Phys.* **51**, 1-14.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1977a). Critical exponents and elementary particles, *Comm. Math. Phys.* **52**, 203-209.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1977b). Instantons in a U(1) lattice gauge theory: A Coulomb dipole gas, *Comm. Math. Phys.* **56**, 195-212.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1977c). Quark trapping for U(1) lattice gauge fields, *Phys. Lett. B* **66**, 67-69.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1978a). Droplet model for quark confinement, *Phys. Rev. D* **18**, 463-467.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1978b). Meron pairs and quark confinement, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 277-282.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1978c). Multiple meron solutions of the classical Yang-Mills equation, *Phys. Lett. B* **73**, 167-170.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1979a). Changes, vortices and confinement, *Nucl. Phys. B* **149**, 49-60.

- Glimm, J. and Jaffe, A. (1979b). A note on reflection positivity, *Lett. Math. Phys.* **3**, 377-378.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1979c). The resummation of one particle lines, *Comm. Math. Phys.* **67**, 267-293.
- Glimm, J. and Jaffe, A. (1980). The coupling constant in a  $\phi^4$  field theory In: *Recent Developments in Gauge Theories* (Cargèse, 1979). G. 't Hooft et al, eds., New York: Plenum Press.
- <sup>21</sup> Glimm, J., Jaffe, A. and Spencer, T. (1973). The particle structure of the weakly coupled  $P(\phi)_2$  model and other applications of high temperature expansions In: *Constructive Quantum Field Theory* G. Velo and A. S. Wightman, eds., New York: Springer-Verlag.
- Glimm, J., Jaffe, A. and Spencer, T. (1974). The Wightman axioms and particle structure in the  $P(\phi)_2$  quantum field model, *Ann. Math.* **100**, 585-632.
- <sup>22</sup> Glimm, J., Jaffe, A. and Spencer, T. (1975). Phase transitions for  $\phi^4_2$  quantum fields, *Comm. Math. Phys.* **45**, 203-216.
- <sup>23</sup> Glimm, J., Jaffe, A. and Spencer, T. (1976a). A convergent expansion about mean field theory. Parts I, II, *Ann. Phys.* **101**, 610-630; 631-669.
- Glimm, J., Jaffe, A. and Spencer, T. (1976b). Existence of phase transitions for quantum fields In: *Mathematical Methods of Quantum Field Theory*, Paris: Editions du Centre National de la Recherche Scientifique.
- Goldstone, J. (1961). Field theories with "superconductor" solutions, *Nuovo Cimento*, **19**, 154-164.
- Goldstone, J., Salam, A. and Weinberg, S. (1962). Broken symmetries, *Phys. Rev.* **127**, 965-970.
- Goodman, R. and Segal, I. eds. (1966). *Proceedings of the Conference on the Mathematical Theory of Elementary Particles* (Dedham, 1965), Cambridge: MIT Press.
- Graffi, S., Grecchi, V. and Simon, B. (1970). Borel summability: Application to the harmonic oscillator, *Phys. Lett. B* **32**, 631-634.
- Griffiths, R. B. (1964). Peierls proof of spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising ferromagnet, *Phys. Rev. A* **136**, 437-439.
- Griffiths, R. B. (1967). Correlation in Ising ferromagnets I, II, III, *J. Math. Phys.* **8**, 478-484; 484-489; *Comm. Math. Phys.* **6**, 121-127.
- Griffiths, R. B. (1969). Rigorous results for Ising ferromagnets of arbitrary spin, *J. Math. Phys.* **10**, 1559-1565.
- Griffiths, R. B. (1970). Phase transitions In: *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, C. DeWitt and R. Stora, eds., New York: Gordon and Breach.
- Griffiths, R. B., Hurst, C. A. and Sherman, S. (1970). Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field, *J. Math. Phys.* **11**, 790-795.
- Gross, L. (1972). Existence and uniqueness of physical ground states, *J. Funct. Anal.* **10**, 52-109.
- Gross, L. (1974). Analytic vectors for representations of the canonical commutation relations and nondegeneracy of ground states, *J. Funct. Anal.* **17**, 104-111.
- Gross, L. (1975). Hypercontractivity and logarithmic Sobolev inequalities for the Clifford-Dirichlet form, *Duke Math. J.* **42**, 383-396.

- Gruber, C. and Kunz, H. (1971). General properties of polymer systems, *Comm. Math. Phys.* **22**, 133-161.
- Gruber, C., Merlini, D. and Greenberg, W. (1973). Spin- $\frac{1}{2}$  lattice system: Duality transformation and correlation functions, *Physica*, **65**, 28-40.
- Guerra, F. (1972). Uniqueness of the vacuum energy density and van Hove phenomenon in the infinite volume limit for two-dimensional self-coupled Bose fields, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1213-1215.
- Guerra, F., Robinson, D. and Stora, R., eds. (1976). *Les Méthodes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs*, (Marseille, 1976), Paris: Editions du Centre National de la Recherche Scientifique.
- Guerra, F., Rosen, L. and Simon, B. (1973a). Nelson's symmetry and the infinite volume behavior of the vacuum in  $P(\phi)_2$ , *Comm. Math. Phys.* **27**, 10-22.
- Guerra, F., Rosen, L. and Simon, B. (1973b). The vacuum energy for  $P(\phi)_2$ : Infinite volume limit and coupling constant dependence, *Comm. Math. Phys.* **29**, 233-247.
- Guerra, F., Rosen, L. and Simon, B. (1975a). Correlation inequalities and the mass gap in  $P(\phi)_2$  III. Mass gap for a class of strongly coupled theories with non-zero external field, *Comm. Math. Phys.* **41**, 19-32.
- Guerra, F., Rosen, L. and Simon, B. (1975b). The  $P(\phi)_2$  Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, *Ann. Math.* **101**, 111-259.
- Guerra, F., Rosen, L. and Simon, B. (1976). Boundary conditions in the  $P(\phi)_2$  Euclidean field theory, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **15**, 231-334.
- Guth, A. (1980). Existence proof of a nonconfining phase in four-dimensional U(1) lattice gauge theory, *Phys. Rev. D* **21**, 2291-2307.
- Haag, R. (1955). On quantum field theories, *Mat.-Fys. Medd. Kong. Danske Vidensk. Selskab* **29**, No. 12.
- Haag, R. (1958). Quantum fields with composite particles and asymptotic conditions, *Phys. Rev.* **112**, 669-673.
- Haag, R. (1970). Observables and fields In: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* S. Deser et al, eds., Cambridge: MIT Press.
- Haag, R. and Kastler, D. (1964). An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.* **5**, 848-861.
- Haag, R. and Schroer, B. (1962). Postulates of quantum field theory, *J. Math. Phys.* **3**, 248-256.
- Hagedorn, G. (1980). Asymptotic completeness for classes of 2, 3 and 4 particle Schrödinger operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **258**, 1-75.
- Hawking, S. W. (1977). Zeta function regularization of path integrals in curved space, *Comm. Math. Phys.* **55**, 133-148.
- Healy, J. (1973). New rigorous bounds on coupling constants in field theory, *Phys. Rev. D* **8**, 1904-1914.
- Hegerfeldt, G. (1974). From Euclidean to relativistic fields and on the notion of Markoff fields, *Comm. Math. Phys.* **35**, 155-171.
- Hegerfeldt, G. (1975). Probability measures on distribution spaces and quantum field theoretical models, *Rep. Math. Phys.* **7**, 403-409.

- Heifets, E. P. and Osipov, E. P. (1977a). The energy-momentum spectrum in the  $P(\phi)_2$  quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **56**, 161–172.
- Heifets, E. P. and Osipov, E. P. (1977b). The energy-momentum spectrum in the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **57**, 31–50.
- Hepp, K. (1964a). Lorentz invariant analytic  $S$ -matrix amplitudes, *Helv. Phys. Acta* **37**, 55–73.
- Hepp, K. (1964b). On the analyticity properties of the scattering amplitude in relativistic quantum field theory, *Helv. Phys. Acta* **37**, 639–658.
- Hepp, K. (1964c). Spatial cluster decomposition properties of the  $S$ -matrix, *Helv. Phys. Acta* **37**, 659–662.
- Hepp, K. (1965a). One particle singularities of the  $S$ -matrix in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **6**, 1762–1767.
- <sup>78</sup> Hepp, K. (1965b). On the connection between the LSZ and Wightman quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **1**, 95–111.
- Hepp, K. (1966a). On the connection between Wightman and LSZ quantum field theory In: *Axiomatic Field Theory* M. Chretien and S. Deser, eds., New York: Gordon and Breach.
- Hepp, K. (1969b). Proof of the Bogoliubov–Parasiuk theorem on renormalization, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301–326.
- Hepp, K. (1969a). On the quantum mechanical  $N$ -body problem, *Helv. Phys. Acta* **42**, 425–458.
- Hepp, K. (1969b). Renormalized Hamiltonians for a class of quantum fields with infinite mass and charge renormalization In: *Problems of Theoretical Physics: Essays dedicated to N. N. Bogoliubov*, Moscow: Nauka.
- <sup>79</sup> Hepp, K. (1970). *Théorie de la Renormalisation*, New York: Springer-Verlag.
- Hepp, K. (1971). Renormalization theory In: *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory* C. DeWitt and R. Stora, eds., New York: Gordon and Breach.
- Hepp, K. (1974). The classical limit for quantum mechanical correlation functions, *Comm. Math. Phys.* **35**, 265–277.
- Hepp, K. and Lieb, E. H. (1973). On the superradiant phase transition for  $r$  molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model, *Ann. Phys.* **76**, 360–404.
- Herbst, I. (1976). On canonical quantum field theories, *J. Math. Phys.* **17**, 1210–1221.
- Hess, H., Schrader, R. and Uhlenbrock, D. A. (1977). Domination of semigroups and generalization of Kato's inequality, *Duke Math. J.* **44**, 893–904.
- Hida, T. (1970). *Stationary Stochastic Processes*, Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Higgs, P. W. (1966). Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons, *Phys. Rev.* **145**, 1156–1163.
- Høegh-Krohn, R. (1971a). A general class of quantum fields without cutoffs in two space-time dimensions, *Comm. Math. Phys.* **21**, 244–255.
- Høegh-Krohn, R. (1971b). On the spectrum of the space cutoff:  $P(\phi)$ : Hamiltonian in two space-time dimensions, *Comm. Math. Phys.* **21**, 256–260.

Høegh-Krohn, R. (1974). Relativistic quantum statistical mechanics in two-dimensional space-time, *Comm. Math. Phys.* **38**, 195–224.

Høegh-Krohn, R. and Simon, B. (1972). Hypercontractive semigroups and two dimensional self-coupled Bose fields, *J. Funct. Anal.* **9**, 121–180.

Hohenberg, P. (1967). Existence of long-range order in one and two dimensions, *Phys. Rev.* **158**, 383–386.

Holley, R. (1974). Remarks on the FKG inequalities, *Comm. Math. Phys.* **36**, 227–231.

Holsztynski, W. and Slawny, J. (1978). Peierls condition and number of ground states, *Comm. Math. Phys.* **61**, 177–190.

't Hooft, G. (1971a). Renormalization of massless Yang-Mills fields, *Nucl. Phys. B* **33**, 173–199.

't Hooft, G. (1971b). Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields, *Nucl. Phys. B* **35**, 167–188.

't Hooft, G. (1974). Magnetic monopoles in unified gauge theories, *Nucl. Phys. B* **79**, 276–284.

't Hooft, G. (1978). On the phase transition towards permanent quark confinement, *Nucl. Phys. B* **138**, 1–25.

't Hooft, G. (1980). Which topological features of a gauge theory can be responsible for permanent confinement. In: *Recent Developments in Gauge Theories* (Cargèse, 1979) G. 't Hooft et al, eds., New York, Plenum Press.

't Hooft, G. (1981). Topology of the gauge condition and new confinement phases in nonabelian gauge theories. (To appear.)

<sup>80</sup> Huang, K. (1963). *Statistical Mechanics*, New York: Wiley and Sons.

Huebener, R. P. (1979). *Magnetic Flux in Superconductors*, New York: Springer-Verlag.

Iagolnitzer, D. (1978). *The S Matrix*, New York: North-Holland.

Imbrie, J. (1980a). Mass spectrum of the two dimensional  $\lambda\phi^4 - \frac{1}{2}\phi^2 - \mu\phi$  quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **78**, 169–200.

Imbrie, J. (1980b). *Cluster expansions and mass spectra for  $P(\phi)_2$  models possessing many phases*, Harvard University Thesis.

Imbrie, J. (1981). Phase diagrams and cluster expansions for low temperature  $P(\phi)_2$  models. I, II. *Comm. Math. Phys.*, to appear.

Isaacson, D. (1977). The critical behavior of  $\phi_1^4$ , *Comm. Math. Phys.* **53**, 257–275.

Isaacson, D. (1981). The continuum limit of a classical 3 component one-dimensional Heisenberg model is Brownian motion on the sphere. *J. Math. Phys.* (To appear.)

Isaacson, D. and Marchesin, D. (1978). The eigenvalues and eigenfunctions of a spherically symmetric anharmonic oscillator, *Comm. Pure Appl. Math.* **31**, 659–676.

Isaacson, D., Marchesin, D. and Paes-Leme, P. J. (1980). Numerical methods for studying anharmonic oscillator approximations to the  $\phi_1^4$  quantum field theory, *Int. J. Eng. Soc.* **18**, 341–349.

- Israel, R. (1978). *Convexity and the Theory of Lattice Gases*, Princeton: Princeton University Press.
- Israel, R. B. and Nappi, C. R. (1979a). Quark confinement in the two-dimensional lattice Higgs-Villain model, *Comm. Math. Phys.* **64**, 177–189.
- Israel, R. B. and Nappi, C. R. (1979b). Exponential clustering for long-range integer-spin systems, *Comm. Math. Phys.* **68**, 29–38.
- Ito, K. R. (1980). Construction of Euclidean  $(\text{QED})_2$  via lattice gauge theory. I, to appear.
- Itzykson, C. (1980). Introduction to lattice gauge theories In: *Recent Developments in Gauge Theories* (Cargèse, 1979) G. 't Hooft et al., eds., New York: Plenum Press.
- Itzykson, C. and Zuber, J.-B. (1980). *Quantum Field Theory*, New York: McGraw-Hill.
- Jaffe, A. (1965a). Divergence of perturbation theory for Bosons, *Comm. Math. Phys.* **1**, 127–149.
- Jaffe, A. (1965b). *Dynamics of a cut-off  $\lambda\phi^4$  field theory*, Princeton University Thesis.
- Jaffe, A. (1976). Problèmes ergodiques dans la théorie quantique des champs, *Soc. Math. Fr.* **40**, 105–112.
- Jaffe, A., Lanford, O. and Wightman, A. (1969). A general class of cutoff model field theories, *Comm. Math. Phys.* **15**, 47–68.
- Jaffe, A. and McBryan, O. (1974). What constructive field theory says about currents In: *Local Currents and their Applications* D. H. Sharp and A. S. Wightman, eds., Amsterdam: North-Holland.
- Jaffe, A. and Powers, R. (1968). Infinite volume limit of a  $\lambda\phi^4$  field theory, *Comm. Math. Phys.* **7**, 218–221.
- Jaffe, A. and Taubes, C. (1980). *Vortices and Monopoles: Structure of Static Gauge Theories*, Boston: Birkhäuser.
- Jauch, J. M. and Rohrlich, F. (1976). *The Theory of Photons and Electrons*, New York: Springer-Verlag.
- Jevicki, A. (1980). Statistical mechanics of instantons in quantum chromodynamics, *Phys. Rev. D* **21**, 992–1005.
- Jona-Lasinio, G. (1964). Relativistic field theories with symmetry breaking solutions, *Nuovo Cimento (L)* **34**, 1790–1795.
- Jona-Lasinio, G. (1975). The renormalization group: A probabilistic view, *Nuovo Cimento B* **26**, 99–119.
- Jonsson, T., McBryan, O., Zirilli, F. and Hubbard, J. (1979). An existence theorem for multimeron solutions to classical Yang-Mills field equations, *Comm. Math. Phys.* **68**, 259–273.
- José, J., Kadanoff, L., Kirkpatrick, S. and Nelson, D. (1977). Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model, *Phys. Rev. B* **16**, 1217–1241.
- <sup>33</sup> Jost, R. (1965). *The General Theory of Quantized Fields*, Providence: American Mathematical Society.
- Jost, R. ed. (1969). *Local Quantum Theory*, (Varenna, 1968), New York: Academic Press.



- <sup>35</sup> Kac, M. (1951). On some connections between probability theory and differential and integral equations In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Probability and Statistics* J. Neyman, ed., Berkeley: University of California Press.
- <sup>36</sup> Kac, M. (1959). *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, New York: Interscience Publishers.
- Kadanoff, L. (1977). The application of renormalization group techniques to quarks and strings, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 267-296.
- Kadanoff, L. (1979). Multicritical behavior at the Kosterlitz-Thouless critical point, *Ann. Phys.* **120**, 39-71.
- Kadison, R. V. (1965). Transformation of states in operator theory and dynamics, *Topology* **3**, 177-198.
- Kashiwara, M. and Kawai, T. (1977). Holonomic systems of linear differential equations and Feynman integrals, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **12 Supp.**, 131-140.
- Kashiwara, M., Kawai, T. and Stapp, H. P. (1979). Micro-analyticity of the S-matrix and related functions, *Comm. Math. Phys.* **66**, 95-130.
- Kastler, D. (1961). *Introduction à l'Electrodynamique Quantique*, Paris: Dunod.
- Kastler, D., Robinson, D. W. and Swieca, A. (1966). Conserved currents and associated symmetries; Goldstone's theorem, *Comm. Math. Phys.* **2**, 108-120.
- Kato, T. (1951a). Fundamental properties of Hamiltonian operator of Schrödinger type, *Trans. Am. Math. Soc.* **70**, 195-211.
- Kato, T. (1951b). On the existence of solutions of the helium wave equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **70**, 212-218.
- <sup>34</sup> Kato, T. (1966). *Perturbation Theory for Linear Operators*, New York/Berlin: Springer-Verlag.
- Kato, Y. and Mugibayashi, N. (1963). Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, *Prog. in Theor. Phys.* **30**, 103-133.
- Kawai, T. and Stapp, H. (1977). Discontinuity formula and Sato's conjecture, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **12 Suppl.**, 155-232.
- Kelley, D. G. and Sherman, S. (1969). General Griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets, *J. Math. Phys.* **9**, 466-484.
- Khuri, N. N. (1981). Coupling constant analyticity and the renormalization group. *Phys. Rev. D*, to appear.
- Klauder, J. (1973). Field structure through model studies: Aspects of non-renormalizable theories, *Acta Physica Austriaca Suppl.* **11**, 341-387.
- Klein, A. (1978). The semigroup characterization of Osterwalder-Schröder path spaces and the construction of Euclidean fields, *J. Funct. Anal.* **27**, 277-291.
- Klein, A. and Landau, L. J. (1975a). The  $\phi_3^2$  field in the  $P(\phi)_2$  model, *Comm. Math. Phys.* **43**, 143-154.
- Klein, A. and Landau, L. J. (1975b). Singular perturbations of positivity preserving semigroups via path space techniques, *J. Funct. Anal.* **20**, 44-82.
- Koch, H. (1979). Irreducible kernels and bound states in  $\lambda P(\phi)_2$  models, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **31**, 173-234.

- Koch, H. (1981). Particles exist in the low temperature  $\phi_2^4$  model, *Helv. Phys. Acta.* (To appear.)
- Kogut, J. (1980).  $1/N$  expansions and the phase diagram of discrete lattice gauge theories with matter fields, *Phys. Rev. D* **21**, 2316–2326.
- Kogut, J. and Susskind, L. (1975). Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories, *Phys. Rev. D* **11**, 395–408.
- Kinoshita, T. (1979). Anomalous magnetic moment of an electron and high precision test of quantum electrodynamics *In: Luminy CNRS colloquium.*
- Kosterlitz, J. M. (1974). The critical properties of the two dimensional  $xy$  model, *J. Phys. C* **7**, 1046–1060.
- Kosterlitz, J. M. (1977). The  $d$ -dimensional Coulomb gas and the roughening transition, *J. Phys.* **C10**, 3753–3760.
- Kosterlitz, J. M. and Thouless, D. V. (1973). Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems, *J. Phys. C* **6**, 1181–1203.
- Kristensen, P., Mejlbø, L. and Poulsen, E. (1965). Tempered distributions in infinitely many dimensions I, *Comm. Math. Phys.* **1**, 175–214.
- <sup>38</sup> Kunz, H. and Pfister, C. E. (1976). First order phase transitions in the plane rotor ferromagnetic model in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* **46**, 245–251.
- Kunz, H., Pfister, C. and Vuillermot, P. (1975). Inequalities for some classical spin vector models, *J. Phys.* **A9**, 1673–1683.
- Kunz, H., Pfister, C. and Vuillermot, P. (1976). Correlation inequalities for some classical spin vector models, *Phys. Lett. A* **54**, 428–430.
- Kupiainen, A. J. (1980a). On the  $1/N$  expansion, *Comm. Math. Phys.* **73**, 273–294.
- Kupiainen, A. J. (1980b).  $1/N$  expansion for a quantum field model, *Comm. Math. Phys.* **74**, 199–222.
- <sup>40-41</sup> Landau, L. and Lifshitz, E. (1969). *Statistical Physics*, Reading: Addison-Wesley.
- Lanford, O. (1966). *Construction of quantum fields interacting by a cutoff Yukawa coupling*, Princeton University Thesis.
- Lanford, O. (1973). Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics *In: Statistical Mechanics and Mathematical Problems* A. Lenard, ed., New York: Springer-Verlag.
- Lanford, O. E. and Ruelle, D. (1969). Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.* **13**, 194–215.
- Lassalle, M. (1974). Analyticity properties implied by the many-particle structure of  $N$ -point functions in general quantum field theory, I. Convolution of  $N$ -point functions associated with a graph, *Comm. Math. Phys.* **36**, 185–226.
- <sup>39</sup> Lax, P. and Phillips, R. S. (1967). *Scattering Theory*, New York: Academic Press.
- Lebowitz, J. L. (1972a). Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems, *Comm. Math. Phys.* **28**, 313–321.
- Lebowitz, J. L. (1972b). More inequalities for Ising ferromagnets, *Phys. Rev. B* **5**, 2538–2541.
- Lebowitz, J. L. (1974). GHS and other inequalities, *Commun. Math. Phys.* **35**, 87–92.
- Lebowitz, J. L. (1977). Coexistence of phases in Ising ferromagnets, *J. Stat. Phys.* **16**, 463–476.

- Lebowitz, J. L. and Martin-Löf, A. (1972). On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems, *Comm. Math. Phys.* **25**, 276-282.
- Lebowitz, J. L. and Monroe, J. L. (1972a). Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems, *Comm. Math. Phys.* **28**, 313-321.
- Lebowitz, J. L. and Monroe, J. C. (1972b). Inequalities for higher order Ising spins and for continuum fluids, *Comm. Math. Phys.* **28**, 301-311.
- Lebowitz, J. and Penrose, O. (1968). Analytic and clustering properties of thermodynamic functions and distribution functions for classical lattice and continuum systems, *Comm. Math. Phys.* **11**, 99-124.
- Lebowitz, J. and Penrose, O. (1973). Decay of correlations, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 749-752.
- Lee, T. D. and Yang, C. N. (1952). Statistical theory of equations of state and phase transitions II. Lattice gas and Ising model, *Phys. Rev.* **87**, 410-419.
- Le Guillou, J. and Zinn-Justin, J. (1977). Critical exponents for the  $n$ -vector model in three dimensions from field theory, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 95-98.
- Lehmann, H., Symanzik, K. and Zimmermann, W. (1955). On the formulation of quantized field theories, *Nuovo Cimento (ser. 10)* **1**, 205-225.
- Lenard, A. (1973). *Statistical Mechanics and Mathematical Problems*, (Battelle 1971), New York: Springer-Verlag.
- Lenard, A. and Newman, C. M. (1974). Infinite volume asymptotics in  $P(\phi)_2$  field theory, *Comm. Math. Phys.* **39**, 243-250.
- Levine, M. J. and Roskies, R. (1976). Analytic contribution to the  $g$  factor of the electron in sixth order, *Phys. Rev. D.* **14**, 2191-2192.
- Lévy, M., ed. (1967). *High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory*, (Cargèse, 1964), New York: Gordon and Breach.
- Lévy, M. and Mitter, P., eds. (1977). *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, (Cargèse, 1976), New York: Plenum Press.
- Lieb, E. (1973). The classical limit of quantum spin systems, *Comm. Math. Phys.* **31**, 327-340.
- Lieb, E. (1976). The stability of matter, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 553-569.
- Lieb, E. (1980). A refinement of Simon's correlation inequality, *Comm. Math. Phys.* **77**, 127-136.
- Lieb, E. and Lebowitz, J. L. (1972). The constitution of matter: Existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei, *Adv. Math.* **9**, 316-398.
- Lieb, E. and Mattis, D. (1965). Exact solution of a many-fermion system and its associated boson field, *J. Math. Phys.* **6**, 304-312.
- Lieb, E. and Mattis, D. (1967). *Mathematical Physics in One-Dimension*, New York: Academic Press.
- Lieb, E., Mattis, D. and Schultz, T. (1964). Two dimensional Ising model as a soluble problem of many fermions, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 856-871.
- Lieb, E. and Simon, B. (1974). On solutions to the Hartree Fock problem for atoms and molecules, *J. Chem. Phys.* **61**, 735-736.

- Lieb, E. and Simon, B. (1977a). The Hartree-Fock theory for Coulomb systems, *Comm. Math. Phys.* **53**, 185-194.
- Lieb, E. and Simon, B. (1977b). The Thomas-Fermi theory of atoms, molecules, and solids, *Adv. in Math.* **23**, 22-116.
- Lieb, E. and Sokal, A. (1981). A general Lee-Yang theorem for one-component and multicomponent ferromagnets, *Comm. Math. Phys.* (To appear.)
- Lieb, E. and Thirring, W. (1975). Bound for the kinetic energy of fermions which proves the stability of matter, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 687-689.
- <sup>42</sup> Lipatov, L. N. (1976). Calculation of the Gell-Mann-Low function in scalar theories with strong nonlinearity, *JETP Lett.* **24**, 157-160.
- <sup>43</sup> Lipatov, L. N. (1977a). Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory, *Soviet Physics JETP* **45**, 216-223.
- <sup>44</sup> Lipatov, L. N. (1977b). Divergence of the perturbation-theory series and pseudo-particles, *JETP Lett.* **25**, 104-107.
- Lukaszuk, L. and Martin, A. (1967). Absolute upper bounds for  $\pi\pi$  scattering, *Nuovo Cimento A* **52**, 122-145.
- Lundeen, S. R. and Pipkin, F. (1981). Measurement of the Lamb shift in hydrogen,  $n = 2$ , *Phys. Rev. Lett.* **46**, 232-235.
- Lüscher, M. (1977a). Absence of spontaneous gauge symmetry breaking in Hamiltonian lattice gauge theories, *Desy Preprint* 77/16.
- Lüscher, M. (1977b). Construction of a self-adjoint, strictly positive transfer matrix for Euclidean lattice gauge theories, *Comm. Math. Phys.* **54**, 283-292.
- Lüscher, M. (1977c). Dynamical charges in the quantized renormalized massive Thirring model, *Nucl. Phys. B* **117**, 475-492.
- <sup>45</sup> Ma, S. (1976). *Modern Theory of Critical Phenomena*, Reading: Benjamin.
- MacDermot, A. (1976). *A lattice approximation to the Yukawa<sub>2</sub> Euclidean quantum field theory and a correlation inequality*, Cornell University Thesis.
- Mack, G. (1980). Properties of lattice gauge models at low temperatures *In: Recent Developments in Gauge Theories* (Cargèse, 1979) G. 't Hooft et al., eds., New York: Plenum Press.
- Mack, G. and Symanzik, K. (1972). Currents, stress tensor and generalized unitarity in conformal invariant quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **27**, 247-281.
- Magnen, J. and Sénéor, R. (1976a). The infinite volume limit of the  $\phi_3^4$  model, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **24**, 95-159.
- Magnen, J. and Sénéor, R. (1976b). The Wightman axioms for the weakly coupled Yukawa model in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* **51**, 297-313.
- Magnen, J. and Sénéor, R. (1977). Phase space cell expansion and Borel summability for the Euclidean  $\phi_3^4$  theory, *Comm. Math. Phys.* **56**, 237-276.
- Magnen, J. and Sénéor, R. (1980). Yukawa quantum field theory in three dimensions ( $Y_3$ ) *In: Third International Conference on Collective Phenomena* J. Lebowitz, J. Langer, and W. Glaberson, eds., New York: The New York Academy of Sciences.
- Martin, W. T. and Segal, I. eds. (1966). *Mathematical Theory of Elementary Particles*, (Dedham, 1963), Cambridge: MIT Press.

- Masson, D. and McClary, W. (1971). On the self adjointness of the  $(g(x)\phi^4)_2$  Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.* **21**, 71-74.
- Matthews, P. T. and Salam, A. (1954). The Green's functions of quantised fields, *Nuovo Cimento Series 9*, **12**, 563-565.
- Matthews, P. and Salam, A. (1955). Propagators of quantized field, *Nuovo Cimento Series 10*, **2**, 120-134.
- McBryan, O. (1973). Local generators for the Lorentz group in the  $P(\phi)_2$  model, *Nuovo Cimento A* **18**, 654-662.
- McBryan, O. (1975a). Finite mass renormalizations in the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **44**, 237-243.
- McBryan, O. (1975b). Higher order estimates for the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **42**, 1-7.
- McBryan, O. (1975c). Volume dependence of Schwinger functions in the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **45**, 279-294.
- McBryan, O. (1975d). Self-adjointness of relatively bounded quadratic forms and operators, *J. Funct. Anal.* **19**, 97-103.
- McBryan, O. (1975e). Convergence of the vacuum energy density  $\phi$ -bounds and existence of Wightman functions for the Yukawa model *In: Mathematical Methods of Quantum Field Theory*, Paris: Centre National de la Recherche Scientifique.
- McBryan, O. (1978). The  $\phi^4_2$  quantum field as a limit of Sine-Gordon fields, *Comm. Math. Phys.* **61**, 275-284.
- McBryan, O. and Park, Y. (1975). Lorentz covariance of the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *J. Math. Phys.* **16**, 105-110.
- McBryan, O. and Rosen, J. (1976). Existence of the critical point in  $\phi^4$  field theory, *Comm. Math. Phys.* **51**, 97-105.
- McBryan, O. and Spencer, T. (1977). On the decay of correlations in SO( $n$ )-symmetric ferromagnets, *Comm. Math. Phys.* **53**, 299-302.
- McCoy, B., Tracy, C. and Wu, T. T. (1977). Two dimensional Ising model as an explicitly solvable relativistic field Theory: Explicit formulas for  $n$ -point functions, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 793-796.
- McCoy, B. and Wu, T. T. (1973). *The Two-Dimensional Ising Model*, Cambridge: Harvard University Press.
- McCoy, B. M. and Wu, T. T. (1978). Two-dimensional Ising field theory for  $T < T_c$ : Green's-functions strings in  $n$ -point functions, *Phys. Rev. D* **18**, 1253-1258.
- <sup>48</sup> McKean, H. P. (1964). Kramers-Wannier duality for the two-dimensional Ising model as an instance of Poisson's summation formula, *J. Math. Phys.* **5**, 775-776.
- McKean, H. P. (1969). *Stochastic Integrals*, New York: Academic Press.
- Mermin, N. (1967). Absence of ordering in certain classical systems, *J. Math. Phys.* **8**, 1061-1064.
- Mermin, N. and Wagner, H. (1966). Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models, *Phys. Rev. Letters* **17**, 1133-1136.

- Messenger, A. and Miracle-Sole, S. (1977). Correlation functions and boundary conditions in the Ising Ferromagnet, *J. Stat. Phys.* **17**, 245-262.
- 47 Migdal, A. A. (1975a). Recursion equations in gauge field theories, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 810-822. Engl. trans.: *Soviet Physics JETP* **42**, 413-418 (1976).
- 48 Migdal, A. A. (1975b). Phase transitions in gauge and spin lattice systems, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 1457-1465. Engl. trans.: *Soviet Physics JETP* **42**, 743-746 (1976).
- Miller, W. (1972). *Symmetry Groups and their Applications*, New York: Academic Press.
- 49 Minlos, R. A. and Sinai, Ya. G. (1970). Investigation of the spectra of stochastic operators arising in lattice models of a gas, *Theor. Math. Phys.* **2**(2), 167-176.
- Monroe, J. L. (1975). Correlation inequalities for two-dimensional vector spin systems, *J. Math. Phys.* **16**, 1809-1812.
- Moore, M. A., Jasnow, D. and Wortis, M. (1969). Spin-spin correlation function of the three-dimensional Ising ferromagnet above the Curie temperature, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 940-943.
- Morchio, G. and Strocchi, F. (1980). Infrared singularities, vacuum structure and pure phases in local quantum field theory, *Ann l'Inst. Henri Poincaré* **33**, 251-282.
- Nambu, Y. and Jona-Lasino, G. (1961). Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I, II, *Phys. Rev.* **122**, 345-358; **124**, 246-254.
- Nappi, C. P. (1978). On the scaling limit of the Ising model, *Nuovo Cimento A* **44**, 392-400.
- Narasimhan, M. S. and Ramades, T. R. (1979). Geometry of SU(2) gauge fields, *Comm. Math. Phys.* **67**, 121-136.
- Nelson, E. (1966). A quartic interaction in two dimensions In: *Mathematics Theory of Elementary Particles* R. Goodman and I. Segal, eds., Cambridge: MIT Press.
- Nelson, E. (1972). Time ordered operator products of sharp time quadratic forms, *J. Funct. Anal.* **11**, 211-219.
- Nelson, E. (1973a). The construction of quantum fields from Markov fields, *J. Funct. Anal.* **12**, 97-112.
- Nelson, E. (1973b). The free Markov field, *J. Funct. Anal.* **12**, 211-217.
- 50 Nelson, E. (1973c). Probability theory and Euclidean field theory In: *Constructive Quantum Field Theory* G. Velo and A. Wightman, eds., New York: Springer-Verlag.
- Nelson, E. (1973d). Quantum fields and Markoff fields In: *Partial Differential Equations* D. C. Spencer, ed., Providence: American Math. Soc.
- Neves di Silva, R. (1981). Three particle bound states in even  $\lambda P(\phi)_2$  models. To appear.
- Newman, C. (1973). The construction of stationary two dimensional Markoff fields with an application to quantum field theory, *J. Func. Anal.* **14**, 44-61.
- Newman, C. (1974). Zeros of the partition function for generalized Ising systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **27**, 143-159.
- 51 Newman, C. (1975a). Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee-Yang theorem, *Comm. Math. Phys.* **41**, 1-9.

- Newman, C. (1975b). Gaussian correlation inequalities for ferromagnets, *Z. für. Wahrscheinlichkeitstheorie* **33**, 75–93.
- Newman, C. (1975c). Moment inequalities for ferromagnetic Gibbs distributions, *J. Math. Phys.* **16**, 1956–1959.
- Newman, C. (1976a). Classifying general Ising models *In: Mathematics Methods of Quantum Field Theory*, Paris: Editions du Centre National de la Recherche Scientifique.
- Newman, C. (1976b). Rigorous results for general Ising ferromagnets, *J. Stat. Phys.* **15**, 399–406.
- Newman, C. (1979a). Critical point inequalities and scaling limits, *Comm. Math. Phys.* **66**, 181–196.
- Newman, C. (1979b). Short distance scaling and the maximal degree of a field theory, *Phys. Lett. B* **83**, 63–66.
- Newman, C. (1980). Normal fluctuations and the FKG inequalities, *Comm. Math. Phys.* **74**, 119–128.
- Newman, C. (1981). Critical point dominance in one dimension, *Comm. Math. Phys.*, **79**, 133–140.
- Nickel, B. (1980). Hyperscaling and universality in three dimensions. (To appear.)
- Nickel, B. (1981). The problem of confluent singularities, *In: Proceedings of the 1980 Cargèse Summer School on Phase Transitions*, London: Plenum Press.
- Nicolai, H. (1978). An inequality for Fermion systems, *Comm. Math. Phys.* **59**, 71–78.
- Osipov, E. P. (1977). Connection between the spectrum condition and the Lorentz invariance of the Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **57**, 111–116.
- Osipov, E. P. (1979a). The Yukawa<sub>2</sub> field theory: linear  $N_f$  bound, locally Fock property. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **30**, 159–192.
- Osipov, E. P. (1979b). The Yukawa<sub>2</sub> field theory: the Matthews-Salam formula. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **30**, 193–206.
- Osipov, E. P. (1980). The Yukawa<sub>2</sub> quantum field theory: Lorentz invariance, *Ann. Phys.* **125**, 53–66.
- Osterwalder, K. (1971). On the Hamiltonian of the cubic boson self-interaction in four dimensional space time, *Fort. Phys.* **19**, 43–113.
- Osterwalder, K. (1973a). Duality for free bose fields, *Comm. Math. Phys.* **29**, 1–14.
- <sup>52</sup> Osterwalder, K. (1973b). Euclidean Green's functions and Wightman distributions *In: Constructive Quantum Field Theory* G. Velo and A. S. Wightman, eds., New York: Springer-Verlag.
- Osterwalder, K. (1980). *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, (Lausanne, 1979), New York: Springer.
- Osterwalder, K. and Schrader, R. (1972a). Feynman-Kac formula for Euclidean fermi and bose fields, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1423–1425.
- Osterwalder, K. and Schrader, R. (1972b). On the uniqueness of the energy density in the infinite volume limit for quantum field models, *Helv. Phys. Acta* **45**, 746–754.

- 53 Osterwalder, K. and Schrader, R. (1973a). Euclidean fermi fields and a Feynman-Kac formula for boson-fermion models, *Helv. Phys. Acta* **46**, 277-302.
- Osterwalder, K. and Schrader, R. (1973b). Axioms for Euclidean Green's functions. I, *Comm. Math. Phys.* **31**, 83-112.
- Osterwalder, K. and Schrader, R. (1975). Axioms for Euclidean Green's functions. II, *Comm. Math. Phys.* **42**, 281-305.
- Osterwalder, K. and Seiler, E. (1978). Gauge field theories on the lattice, *Ann. Phys.* **110**, 440-471.
- Osterwalder, K. and Sénéor, R. (1976). A nontrivial scattering matrix for weakly coupled  $P(\phi)_2$  models, *Helv. Phys. Acta* **49**, 525-535.
- Ozkaynak, H. (1974). *Euclidean fields for arbitrary spin particles*, Harvard University Thesis.
- Paes-Leme, P. (1978). Ornstein-Zernike and analyticity properties for classical lattice spin systems. *Ann. Phys.* **115**, 367-387.
- Park, Y. M. (1977). Convergence of lattice approximations and infinite volume limit in the  $(\lambda\phi^4 - \sigma\phi^2 - \mu\phi)_3$  field theory, *J. Math. Phys.* **18**, 354-366.
- Park, Y. M. (1979). Lack of screening in the continuous dipole systems, *Comm. Math. Phys.* **70**, 161-167.
- Peierls, R. (1936). Ising's model of ferromagnetism, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 477-481.
- Percus, J. (1975). Correlation inequalities for Ising spin lattices, *Comm. Math. Phys.* **40**, 283-308.
- Percus, J. (1977). One-dimensional Ising model in arbitrary external field, *J. Stat. Phys.* 299-309.
- 54 Pirogov, S. A. and Sinai, Ya. G. (1974). Phase transitions of the first kind for small perturbations of the Ising model, *Funct. Anal. Appl.* **8**, 21-25.
- 55 Pirogov, S. A. and Sinai, Ya. G. (1975). Phase diagrams of classical lattice systems, *Theor. Mat. Fiz.* **25**, 358-369, (Eng. translation: *Theor. Math. Phys.* **25**; 1185-1192).
- 56 Pirogov, S. A. and Sinai, Ya. G. (1976). Phase diagrams of classical lattice systems. Continuation, *Theor. Mat. Fiz.* **26**, 61-76 (Eng. translation: *Theor. Math. Phys.* **26**, 39-49).
- Polyakov, A. M. (1975). Compact gauge fields and the infrared catastrophe, *Phys. Lett. B* **59**, 82-84.
- Polyakov, A. M. (1977). Quark confinement and topology of gauge theories, *Nucl. Phys. B* **120**, 429-458.
- Powers, R. and Stormer, E. (1970). Free states of the canonical anticommutation relations, *Comm. Math. Phys.* **16**, 1-33.
- Preston, C. (1974). A generalization of the FKG inequalities, *Comm. Math. Phys.* **36**, 233-241.
- Reed, M. and Rosen, L. (1974). Support properties of the free measure for boson fields, *Comm. Math. Phys.* **36**, 123-132.
- 57-60 Reed, M. and Simon, B. (1972-1979). *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vols. I, II, III, IV, New York: Academic Press.



- Renouard, P. (1977). Analyticité et sommabilité "de Borel" des fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension  $d = 2$ . I. Approximation "à volume fini," *Ann. l'Inst. Henri Poincaré* **27**, 237-277.
- Renouard, P. (1979). Analyticité et sommabilité "de Borel" des fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension  $d = 2$  II. La "Limite adiabatique," *Ann. l'Inst. Henri Poincaré*, **31**, 235-318.
- Riedel, E. and Wegner, F. (1972). Tricritical exponents and scaling fields, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 349-352.
- Rivasseau, V. (1980). Lieb's correlation inequality for plane rotators, *Comm. Math. Phys.* **77**, 145-148.
- Roberts, J. (1976). Local cohomology and superselection structure, *Comm. Math. Phys.* **51**, 107-119.
- Robinson, D. (1969). A proof of the existence of phase transitions in the anisotropic Heisenberg model, *Comm. Math. Phys.* **14**, 195-204.
- Robinson, G. de B. (1961). *Representation of Symmetric Groups*, Toronto: University of Toronto Press.
- Rosen, J. (1977). The Ising model limit of  $\phi^4$  lattice fields, *Proc. AMS* **66**, 114-118.
- Rosen, J. (1980). Mass renormalization for the  $\lambda\phi^4$  Euclidean lattice field, *Adv. Appl. Math.* **1**, 37-49.
- Rosen, L. (1970). A  $\lambda\phi^{2n}$  field theory without cutoffs, *Comm. Math. Phys.* **16**, 157-183.
- Rosen, L. (1971). The  $(\phi^{2n})$  quantum field theory: higher order estimates, *Comm. Pure Appl. Math.* **24**, 417-457.
- Rösen, L. (1977). Construction of the Yukawa<sub>2</sub> field theory with a large external field, *J. Math. Phys.* **18**, 894-897.
- Rosen, L. and Simon, B. (1972). The  $(\phi^{2n})_2$  field Hamiltonian for complex coupling constant, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165**, 365-379.
- Ruelle, D. (1962). On the asymptotic condition in quantum field theory, *Helv. Phys. Acta* **35**, 147-163.
- Ruelle, D. (1969). *Statistical Mechanics*, New York: Benjamin.
- Ruelle, D. (1971). Analyticity of Green's functions of dilute quantum gases, *J. Math. Phys.* **12**, 901-903.
- Ruelle, D. (1972a). On the use of "small extremal fields" in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics, *Ann. Phys.* **69**, 364-374.
- Ruelle, D. (1972b). Definition of Green's functions for dilute Fermi gases, *Helv. Phys. Acta* **45**, 215-219.
- <sup>63</sup> Sato, M., Miwa, T. and Jimbo, M. (1978-80). Holonomic quantum fields, I. V, *Publ. RIMS, Kyoto University* **14**, 223-267; **15**, 201-278; **15**, 577-629; RIMS preprint.
- Scadron, M. (1979). *Advanced Quantum Theory*, New York: Springer.
- Schor, R. (1978a). The instanton gas for the anharmonic oscillator, *Rockefeller University preprint*.
- Schor, R. (1978b). The particle structure in  $\nu$ -dimensional Ising models at low temperature, *Comm. Math. Phys.* **59**, 219-233.

- Schrader, R. (1971). A remark on Yukawa plus boson self interaction in two space time dimensions, *Comm. Math. Phys.* **21**, 164-170.
- Schrader, R. (1972). A Yukawa quantum field theory in two spacetime dimensions without cutoffs, *Ann. Phys.* **70**, 412-457.
- Schrader, R. (1974a). On the Euclidean version of Haag's theorem in  $P(\phi)_2$  theories, *Comm. Math. Phys.* **36**, 133-136; **38**, 81-82.
- Schrader, R. (1974b). Local operator products and field equations in  $P(\phi)_2$  theories, *Fort. Physik.* **22**, 611-631.
- Schrader, R. (1976-7). A possible constructive approach to  $\phi_4^4$ . I, II, III. *Comm. Math. Phys.* **49**, 131-153; **50**, 97-102; *Ann. Inst. Henri Poincaré* **26**, 295-301.
- Schrader, R. (1977). New correlation inequalities for the Ising model and  $P(\phi)$  theories, *Phys. Rev. B* **15**, 2798-2803.
- Schrader, R. (1978). Towards a constructive approach of a gauge invariant, massive  $P(\phi)_2$  theory, *Comm. Math. Phys.* **58**, 299-312.
- Schrader, R. and Seiler, R. (1978). A uniform lower bound on the renormalized scalar Euclidean functional determinant, *Comm. Math. Phys.* **61**, 169-175.
- Schwartz, L. (1950-1). *Theory of Distributions* I, II. Paris: Hermann.
- <sup>61</sup> Schweber, S. (1961). *Relativistic Quantum Field Theory*, New York: Harper and Row.
- Schwinger, J. (1958). On the Euclidean structure of relativistic field theory, *Proc. N.A.S.* **44**, 956-965.
- Schwinger, J. (1959). Euclidean quantum electrodynamics, *Phys. Rev.* **115**, 721-731.
- <sup>64</sup> Segal, I. (1963). *Mathematical Problems of Relativistic Physics*, Providence: American Mathematical Society.
- Segal, I. (1967). Notes toward the construction of nonlinear relativistic quantum fields, I: The Hamiltonian in two space-time dimensions as the generator of a  $C^*$ -automorphism group, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **57**, 1178-1183.
- Segal, I. (1969). Nonlinear functions of weak processes I, *J. Funct. Anal.* **4**, 404-456.
- Segal, I. (1970). Construction of nonlinear local quantum processes: I, *Ann. Math.* **92**, 462-481.
- Seiler, E. (1975). Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space-time cutoff, *Comm. Math. Phys.* **42**, 163-182.
- Seiler, E. (1981). *Gauge theories as a problem of constructive field theory and statistical mechanics*, University of Geneva lecture notes.
- Seiler, E. and Simon, B. (1975a). Bounds in the Yukawa<sub>2</sub> quantum fields theory: Upper bound on the pressure, Hamiltonian bound and linear lower bound, *Comm. Math. Phys.* **45**, 99-114.
- Seiler, E. and Simon, B. (1975b). On finite mass renormalizations in the two dimensional Yukawa model, *J. Math. Phys.* **16**, 2289-2293.
- Seiler, E. and Simon, B. (1976). Nelson's symmetry and all that in the Yukawa<sub>2</sub> and  $\phi_3^4$  field theories, *Ann. Phys.* **97**, 470-518.
- Shlosman, S. B. (1980). Phase transitions for two-dimensional models with isotropic short-range interaction and continuous symmetries, *Comm. Math. Phys.* **71**, 207-212.

- Siebert, A. J. F. (1960). Partition functions as averages of functionals of Gaussian random functions, *Physica* **26**, S30-S35.
- Sigal, I. (1978). Mathematical foundations of quantum scattering theory for multi-particle systems, *Memoirs of the AMS*, **209**, 1-145.
- Simon, B. (1973a). Correlation inequalities and the mass gap in  $P(\phi)_2$ . I. Domination by the two point function, *Comm. Math. Phys.* **31**, 127-136.
- Simon, B. (1973b). Positivity of the Hamiltonian semigroup and the construction of Euclidean region fields, *Helv. Phys. Acta* **46**, 686-696.
- <sup>62</sup> Simon, B. (1974). *The  $P(\phi)_2$  Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton: Princeton University Press.
- Simon, B. (1975). Correlation inequalities and the mass gap in  $P(\phi)_2$  II. Uniqueness of the vacuum in a class of strongly coupled theories, *Ann. Math.* **101**, 260-267.
- Simon, B. (1979). *Functional Integration and Quantum Physics*, New York: Academic Press.
- Simon, B. (1980). Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets, *Comm. Math. Phys.* **77**, 111-126.
- Simon, B. and Griffiths, R. (1973). The  $(\phi^+)_2$  field theory as a classical Ising model, *Comm. Math. Phys.* **33**, 145-164.
- Simon, B. and Hoegh-Krohn, R. (1972). Hypercontractive semigroups and two-dimensional self-coupled bose fields, *J. Func. Anal.* **9**, 121-180.
- <sup>66</sup> Sinai, Ya. G. (1981). *The theory of phase transitions: rigorous results*, London: Pergamon.
- Singer, I. M. (1977). Unpublished.
- Singer, I. M. (1978). Some remarks on the Gribov ambiguity, *Comm. Math. Phys.* **60**, 7-12.
- Slawny, J. (1973). Analyticity and uniqueness for spin  $\frac{1}{2}$  classical ferromagnetic lattice systems at low temperatures, *Comm. Math. Phys.* **34**, 271-296.
- Sokal, A. (1980). An improvement of Watson's theorem on Borel summability, *J. Math. Phys.* **21**, 261-263.
- Sokal, A. (1981a). Rigorous proof of the high-temperature Josephson inequality for critical exponents. *J. Stat. Phys.* **25**, 51-56.
- Sokal, A. (1981b). More inequalities for critical exponents, *J. Stat. Phys.* **25**, 25-50.
- Spencer, T. (1973). Perturbation of the  $P(\phi)_2$  quantum field Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **14**, 823-828.
- Spencer, T. (1974a). The absence of even bound states for  $\lambda(\phi^+)_2$ , *Comm. Math. Phys.* **39**, 77-79.
- Spencer, T. (1974b). The mass gap for the  $P(\phi)_2$  quantum field model with a strong external field, *Comm. Math. Phys.* **39**, 63-76.
- Spencer, T. (1975). The decay of the Bethe-Salpeter kernel in  $P(\phi)_2$  quantum field models, *Comm. Math. Phys.* **44**, 143-164.
- Spencer, T. (1980). The Lipatov argument, *Comm. Math. Phys.* **74**, 273-280.
- Spencer, T. and Zirilli, F. (1976). Scattering states and bound states in  $\lambda P(\phi)_2$ , *Comm. Math. Phys.* **49**, 1-16.

- 68 Stanley, H. (1971). *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, New York: Oxford University Press.
- 69 Stratonovich, R. L. (1957). On a method of calculating quantum distribution functions, *Soviet Physics Doklady* **2**, 416-419.
- Streater, R. (1972a). Connection between the spectrum condition and the Lorentz invariance of  $P(\phi)_2$ , *Comm. Math. Phys.* **26**, 109-120.
- Streater, R. ed. (1972b). *Mathematics of Contemporary Physics* (London, 1971), New York: Academic Press.
- Streater, R. F. (1975). Outline of axiomatic relativistic quantum field theory, *Reports on Progress in Physics* **38**, 771-846.
- 70 Streater, R. and Wightman, A. (1964). *PCT, Spin and Statistics, and All That*, New York: Benjamin.
- Streater, R. F. and Wilde, I. F. (1970). Fermion states of a boson field, *Nucl. Phys.* **B24**, 561-575.
- Streit, L. ed. (1976). *Quantum Dynamics: Models and Mathematics* (Bielefeld, 1975), New York: Springer-Verlag.
- Strocchi, F. (1977). Spontaneous symmetry breaking in the local gauge quantum field theory; the Higgs mechanism, *Comm. Math. Phys.* **56**, 57-78.
- Strocchi, F. (1978). Local and covariant gauge quantum field theories. Cluster property, superselection rules, and the infrared problem, *Phys. Rev. D* **17**, 20210-2021.
- Strocchi, F. and Wightman, A. S. (1974). Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory, *J. Math. Phys.* **15**, 2198-2224.
- Summers, S. (1979). *The phase diagram for a two dimensional bose quantum field model*, Harvard University Thesis.
- Summers, S. J. (1980). A new proof of the asymptotic nature of perturbation theory in  $P(\phi)_2$  models, *Helv. Phys. Acta* **53**, 1-30.
- Summers, S. (1981). On the phase diagram of a  $P(\phi)_2$  quantum field model, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **34**, 173-229.
- Suzuki, M. and Fisher, M. (1971). Zeros of the partition function for the Heisenberg, ferroelectric, and general Ising models, *J. Math. Phys.* **12**, 235-246.
- 65 Sylvester, G. (1975). Representations and inequalities for Ising model Ursell functions, *Comm. Math. Phys.* **42**, 209-220.
- Sylvester, G. (1976a). *Continuous spin Ising ferromagnets*, MIT Thesis.
- Sylvester, G. (1976b). Inequalities for continuous-spin Ising ferromagnets, *J. Stat. Phys.* **15**, 327-341.
- Sylvester, G. (1981). Weakly coupled Gibbs measure, *Zeit. für Wahr. Theorie*, to appear.
- Symanzik, K. (1960). On the many-particle structure of Green's functions in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **1**, 249-273.
- Symanzik, K. (1964). A modified model of Euclidean quantum field theory, *New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, IMM-NYU* 327.
- Symanzik, K. (1966). Euclidean quantum field theory, I. Equations for a scalar model, *J. Math. Phys.* **7**, 510-525.

- Symanzik, K. (1969). Euclidean quantum field theory In: *Local Quantum Theory* R. Jost, ed., New York: Academic Press.
- Symanzik, K. (1970a). Renormalizable models with simple symmetry breaking. I. Symmetry breaking by a source term, *Comm. Math. Phys.* **16**, 48–80.
- Symanzik, K. (1970b). Small distance behavior in field theory and power counting, *Comm. Math. Phys.* **18**, 227–246.
- Symanzik, K. (1971). Small distance behaviour analysis and Wilson expansions, *Comm. Math. Phys.* **23**, 49–86.
- Symanzik, K. (1973). Infrared singularities and small distance behaviour analysis, *Comm. Math. Phys.* **34**, 7–36.
- Symanzik, K. (1975). Renormalization problem in nonrenormalizable massless  $\phi^4$  theory, *Comm. Math. Phys.* **45**, 79–98.
- Taylor, J. C. (1976). *Gauge Theories of Weak Interactions*, New York: Cambridge University Press.
- 71 Thirring, W. (1958). *Principles of Quantum Electrodynamics*, New York: Academic Press.
- Thompson, C. (1980). *Mathematical Statistical Mechanics*, Princeton: Princeton University Press.
- Tracy, C. and McCoy, B. (1973). Neutron scattering and the correlation functions of the Ising model near  $T_c$ , *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1500–1504.
- Tucciarone, A. (1966). A relativistic treatment of the three body problem, *Nuovo Cimento* **41A**, 204–221.
- 72 Uhlenbeck, G. and Ford, W. (1963). *Lectures in Statistical Mechanics*, Providence: American Mathematical Society.
- Ukawa, A., Windey, P., and Guth, A. (1980). Dual variables for lattice gauge theories and phase structure of  $Z(N)$  systems. *Phys. Rev. D* **21**, 1013–1036.
- 12 van Beijeren, H. (1975). Interface sharpness in the Ising model, *Comm. Math. Phys.* **40**, 1–6.
- van Beijeren, H., Gallavotti, G. and Knops, H. (1974). Conservation laws in the hierarchical model, *Physica* **78**, 541–548.
- van Beijeren, H. and Sylvester, G. (1978). Phase transitions for continuous spin Ising ferromagnets, *J. Funct. Anal.* **28**, 145–167.
- van Dyke, Jr., R. S., Schwinger, P. B. and Dehmelt, H. G. (1979). Progress of the electron spin anomaly experiment, *Bull. Am. Phys. Soc.*, **24**, 758.
- 11 Vasilev, A. N. and Kazanskii, A. K. (1972). Legendre transforms of the generating functionals in quantum field theory, *Teoret. i Mat. Fizika* **12**, 352–369.
- Velo, G. and Wightman, A. S. (1973). *Constructive Quantum Field Theory*, (Erice, 1973), Berlin/New York: Springer-Verlag.
- Weinberg, S. (1950). High energy behavior in quantum field theory, *Phys. Rev.* **80**, 268–272.
- Wightman, A. (1956). Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.* **101**, 860–866.

- <sup>10</sup> Wightman, A. (1967). Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields In: *High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory* M. Levy, ed., New York: Gordon and Breach.
- Wightman, A. and Gårding, L. (1965). Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory, *Arkiv för Fysik* **28**, 129-184.
- <sup>13</sup> Wigner, E. P. (1959). *Group Theory and Quantum Mechanics*, New York: Academic Press.
- Wilde, I. (1974). The free fermion field as a Markov field, *J. Funct. Anal.* **15**, 12-21.
- Williams, E. R. and Olsen, P. T. (1979). New measurement of the proton gyromagnetic ratio and a derived value of the fine-structure constant accurate to a part in  $10^7$ , *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1575-1579.
- Wilson, K. G. (1974). Confinement of quarks, *Phys. Rev.* **D10**, 2445-2459.
- Wilson, K. G. (1980). Monte-Carlo calculations for the lattice gauge theory In: *Recent Developments in Gauge Theories* (Cargèse, 1979) G. 't Hooft et al., eds., New York: Plenum Press.
- <sup>14</sup> Wilson, K. G. and Kogut, J. (1974). The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion, *Phys. Rep.* **12C**, 75-200.
- Witten, E. (1977). Some exact multi pseudo particle solutions of classical Yang-Mills theory, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 121-124.
- Wu, T. T., McCoy, B., Tracy, C. and Barouch, E. (1976). Spin-spin correlation functions for the two dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region, *Phys. Rev.* **B13**, 316-374.
- Yang, C. N. and Lee, T. D. (1952). Statistical theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation, *Phys. Rev.* **87**, 404-409.
- Yang, C. N. and Mills, R. L. (1954). Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.* **96**, 191-195.
- Yeh, J. (1973). *Stochastic Processes and the Wiener Integral*, New York: Marcel Dekker.
- <sup>32</sup> Zygmund, A. (1959). *Trigonometric Series*, Cambridge: Cambridge University Press.

## Работы, вышедшие на русском языке или в русском переводе

1. Аберс Е. С., Ли Б. В. Калибровочные теории. В сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977, с. 241—433.
2. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1979.
3. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
4. Березинский В. Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. — ЖЭТФ, 1970, т. 59, № 3, 907—920.
5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
6. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
7. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
8. Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория, т. 1. Релятивистская квантовая механика. — М.: Наука, 1978.
9. Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 2. Релятивистские квантовые поля. — М.: Наука, 1978.
10. Вайтман А. С. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. — М.: Наука, 1968.
11. Васильев А. Н., Казанский А. К. Преобразования Лежандра порождающих функционалов в квантовой теории поля. — ТМФ, 1972, т. 12, № 3, 352—359.
12. ван Бейерен Х. Макроскопическая устойчивость поверхности раздела фаз в модели Изинга. — В сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 61—68.
13. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.
14. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение. — М.: Мир, 1975.
15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.
16. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958.
17. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
18. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
19. Глим Дж., Джаффе А. Бозонные квантовополевые модели. В сб.: Конструктивная теория поля. — М.: Мир, 1977, с. 99—168.
20. Глим Дж., Джаффе А. Положительность гамильтониана поля  $\phi_4^3$ . В сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 132—197.
21. Глим Дж., Джаффе А., Спенсер Т. Корпускулярная структура  $P(\phi)_2$ -модели со слабым взаимодействием и другие применения высокотемпературных разложений, части I и II. В сб.: Конструктивная теория поля. — М.: Мир, 1977, с. 169—267.
22. Глим Дж., Джаффе А., Спенсер Т. Фазовые переходы в моделях  $\phi_2^4$  квантовой теории поля. В сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 46—64.
23. Глим Дж., Джаффе А., Спенсер Т. Разложение в ряд, связанное с приближением среднего поля. I. Описание разложения, II. Сходимость разложения. В сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 65—13.
24. Дайсон Ф. Дж. Существование фазового перехода в одномерной модели Изинга. — Математика, 1972, т. 16 : 2, 137—153.

25. Дайсон Ф. Дж. Отсутствие спонтанной намагниченности в некоторых моделях Изинга. — Математика, 1972, т. 16 : 3, 113—116.
26. Дайсон Ф. Дж. Модель Изинга с разрывом дальнего порядка. — Математика, 1972, т. 16 : 3, 117—129.
27. Дайсон Ф. Устойчивость вещества. В сб.: Устойчивость и фазовые переходы (Ф. Дайсон, Э. Монролл, М. Кац, М. Фишер). — М.: Мир, 1973, с. 17—91.
28. Данлоп Ф., Ньюман Ч. Многокомпонентные поля и классические ротаторы. В сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 255—274.
29. Добрушин Р. Л. Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной модели Изинга. — ДАН СССР, 1965, т. 160, № 5, 1046—1048.
30. Добрушин Р. Л., Минлос Р. А. Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля. — Функци. анализ и его прилож., 1973, т. 7, № 4, 89—90.
31. Дюно М., Суйяр Б., Яголницер Д. Убывание корреляций в системах с бесконечным радиусом взаимодействия. В сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 107—121.
32. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1965.
33. Йост Р. Общая теория квантованных полей. — М.: Мир, 1967.
34. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
35. Кац М. О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями. — Математика, 1957, т. 1 : 2, 95—124.
36. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.
37. Коулмен С. Тайная симметрия: введение в теорию спонтанного нарушения симметрии и калибровочных полей. В сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977, с. 23—119.
38. Кунц Х., Пфистер Ш.-Э. Фазовый переход первого рода в двумерной модели плоских ротаторов с ферромагнитным взаимодействием. В сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 52—60.
39. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1971.
40. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ч. 1. — М.: Наука, 1976. — (Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. V).
41. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика, ч. 2. — М.: Наука, 1978. — (Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. IX).
42. Липатов Л. Н. Вычисление функции Гелл-Манна — Лоу в скалярных теориях с сильной нелинейностью. — Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, № 3, 179—183.
43. Липатов Л. Н. Расходимость ряда теории возмущений и квазиклассика. — ЖЭТФ, 1977, т. 72, № 2, 411—427.
44. Липатов Л. Н. Расходимость ряда теории возмущений и псевдочастицы. — Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, № 2, 116—119.
45. Ма Ш. Современная теория критических явлений. — М.: Мир, 1980.
46. Маккин Г. Стохастические интегралы. — М.: Мир, 1972.
47. Мигдал А. А. Рекурсионные уравнения в калибровочных теориях поля. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, № 3, 810—822.
48. Мигдал А. А. Фазовые переходы в калибровочных и спиновых решетчатых системах. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, № 4, 1457—1465.
49. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Исследования спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. — ТМФ, 1970, т. 2, № 2, 230—242.
50. Нельсон Э. Теория вероятностей и евклидова теория поля. В сб.: Конструктивная теория поля. — М.: Мир, 1977, с. 74—98.
51. Ньюман Ч. Неравенства для моделей Изинга и полевых теорий, для которых верна теорема Ли и Янга. В сб.: Евклидова теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 275—287.
52. Остервальдер К. Евклидовы функции Грина и обобщенные функции Вайтмана. В сб.: Конструктивная теория поля. — М.: Мир, 1977, с. 48—73.
53. Остервальдер К., Шрадер Р. Аксиомы для евклидовых функций Грина, II. В сб.: Евклидова теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 9—45.
54. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые переходы первого рода для малых воз-



мущений модели Изинга. — Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 1, 25—30.

55. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. — ТМФ, 1975, т. 25, № 3, 358—369.
56. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем (продолжение). — ТМФ, 1976, т. 26, № 1, 61—76.
57. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
58. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978.
59. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 3. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1982.
60. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.
61. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. — М.: Мир, 1971.
62. Саймон Б. Модель  $P(\varphi)_2$  евклидовой квантовой теории поля. — М.: Мир, 1976.
63. Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля. — М.: Мир, 1983.
64. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики. — М.: Мир, 1968.
65. Сильвестр Г. Представления и неравенства для функций Урселла в модели Изинга. В сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 69—88.
66. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.
67. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
68. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. — М.: Мир, 1973.
69. Стратонович Р. Л. Об одном методе вычисления квантовых функций распределения. — ДАН СССР, 1957, т. 115, № 6, 1093—1100.
70. Стритер Р., Вайтман А. С. PCT, спин и статистика и все такое. — М.: Наука, 1966.
71. Тирринг В. Принципы квантовой электродинамики. — М.: Высш. школа, 1964.
72. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. — М.: Мир, 1965.
73. Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. (Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 69). — М. — Л., Изд-во АН СССР (Ленинградское отделение), 1963.
74. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
75. Фрелих Ф. Классическая и квантовая статистическая механика в размерностях один и два: двухкомпонентные системы Юкавы и Кулона. В сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 198—243.
76. Фрелих Ю., Саймон Б., Спенсер Т. Оценки в инфракрасной области, фазовые переходы и нарушение непрерывной симметрии. В сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 9—34.
77. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1969.
78. Хепп К. Связь между квантовой теорией поля Лемана — Симанзика — Циммермана и Вайтмана. В кн.: Хепп К., Эпштейн А. Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1971.
79. Хепп К. Теория перенормировок. — М.: Наука, 1974.
80. Хуанг К. Статистическая механика. — М.: Мир, 1966.
81. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.
82. Эпштейн А. Амплитуда рассеяния в квантовой теории поля. В кн.: Хепп К., Эпштейн А. Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1971.

## Предметный указатель

- Аксиомы** 106—117  
— *Бете — Солпитера* 288—289  
— *Вайтмана* 114, 115, 243, 260, 268, 269, 365  
— евклидовы 106—107, 282  
— *Минковского* 115  
— *Остервальдера — Шрадера* 107, 243, 252, 379  
— *Хаага — Кастлера* 114, 116—117, 365  
**Активность** 57, 83  
**Анализ в функциональном пространстве** 188—215  
**Аналитичность** 86—88, 107, 227, 289, 351—353, 377, 378  
**Ангармонический осциллятор** 28, 33, 129—133, 138, 139  
**Аномальная размерность** 95  
**Аномальный магнитный момент** 43, 294, 298—301  
**Ансамбль** 47—53  
— большой канонический 53, 389  
— канонический 49, 282—283  
— микроканонический 47  
  *См. также* Гиббса ансамбль  
**Асимптотики** 258, 261  
**Асимптотическая полнота** 38—39, 259, 260  
**Асимптотический предел** 117  
— режим 258  
**Атом водорода** 22, 35, 38, 40—42, 301—302  
— гелия 38
- Бардина — Купера — Шиффера** теория (БКШ) 398  
**Бальмера** серия 41  
**Бете — Солпитера** аксиомы *см.* Аксиомы  
— — ядро 173, 260, 287  
**Боголюбова** преобразование 136  
**Бозе — Эйнштейна** статистика 133  
**Бозоны** 26, 48, 109, 133, 135, 143, 201, 387, 388  
**Больцмана** постоянная 49
- Вайтмана** аксиомы *см.* Аксиомы  
— функции 115, 116, 260, 272  
— — хронологически упорядоченные 260  
**Вакуум, единственность** 92, 109, 115, 116, 302, 303, 379—383  
— неединственность 307, 342, 384  
**Вакуумное состояние** 302  
**Вакуумные средние** 272, 277  
**Вакуумный вектор** 115, 133  
**Вероятностная мера** 72  
  *См. также* Функциональные интегралы  
**Вигнера** теорема 24  
**Вика** мономы 31, 127, 171, 172, 174, 243  
— полиномы 31, 173, 191, 243, 246, 345, 391  
— произведения 168—171, 188  
**Виково** двоеточие 127  
— переупорядочение 150, 179, 189, 315  
— упорядочение 31, 165, 189, 195—197, 217, 237, 246, 306  
— — константа 174, 191, 210, 246, 391  
**Винера** интеграл, мера 60—64, 153, 212, 356  
**Вихрь** 55, 105, 318, 398  
**Волновой оператор** 263, 265
- Гамильтона** уравнения 19  
**Гамильтониан** 19, 26, 74, 128, 233  
**Гармонический осциллятор** 27, 124, 129, 130, 138, 174, 233  
**Гауссова критическая точка** 138  
**Гауссов процесс** 138, 212  
— функционал 118, 190, 192  
**Гауссово поле** 123, 213  
**Гауссовы функциональные интегралы** 67, 107, 118, 124, 129, 164, 166, 167, 171, 173—179, 191—195, 212, 222, 230, 241, 343, 346, 352, 386, 390

- Гейзенберга динамика 21  
 — картина 24  
 — модель 222, 316, 318  
 — ферромагнетизм 54  
 Гиббса ансамбль 47, 343  
 — постулат 47, 49  
 Гинзбурга — Ландау теория 398  
 Граница фаз 100, 101, 307, 317, 388  
 Граничные условия 144, 150, 152—157,  
 162, 174, 180, 185, 205—207,  
 222, 229, 389  
 — — Дирихле 54, 149, 162, 205, 217,  
 218, 237, 251, 310, 389  
 — — Неймана 148, 162, 217, 218, 241  
 — — периодические 147, 164  
 — — со слабой связью 241, 335  
 Грина функция 142, 145, 319, 329  
 Гриффитса неравенства 74—76, 82, 90,  
 216, 305  
 Группа отражений 223
- Давление 44, 53, 55, 83, 94, 95, 317  
 Дайсона уравнение 283, 284, 287  
 Диаграммы 166  
 — вершинные 204  
 — массовые 203, 204  
 — скелетные 203, 204  
 С. также Майера графы, Фазовые  
 диаграммы, Фейнмана диа-  
 граммы  
 Диполь 104, 105, 318, 392—394  
 Дирака море 137  
 — поле 134, 136  
 — размазанная дельта-функция 143,  
 174  
 — теория 296—298  
 — уравнение 37, 43, 134, 294  
 — частица 299  
 Дирихле граничные условия см. Грани-  
 чные условия  
 — ковариация 235, 346  
 — предел 194  
 — ребра 346  
 Дифференцирование функционалов 188
- Евклидов пропагатор 142  
 Евклидово поле 106—107  
 Евклидовы аксиомы см. Аксиомы
- Заряд 35  
 — перенормировка 139, 286, 342  
 — плотность 294
- Идеальный газ 44, 53, 55, 94  
 Иерархическая модель 96  
 Изинга модель 54, 77, 83, 90, 96, 100,  
 101, 138, 222, 307, 328, 336—  
 338, 396  
 Импульсное обрезание 174, 176, 246,  
 384  
 Инвариантность при отражениях 143,  
 162, 223, 240  
 Инстантон 55, 396  
 Интегрирование по частям 124, 193, 242
- Казимира оператор 42  
 Калибровочные поля 140, 396  
 — теории 106, 396—397  
 Канал 263, 288  
 Каноническая модель 331  
 Канонические значения показателей  
 142, 336, 337  
 — коммутационные соотношения 25,  
 42, 125, 126, 129—131, 134  
 — координаты 21, 36  
 Канонический ансамбль см. Ансамбль  
 Каноническое квантование 129—133  
 Квадратичные возмущения 192, 196—  
 200  
 Квазиклассическое приближение 93, 94  
 Квантовая теория 18, 106  
 Квантовое поле 106  
 С. также Дирака поле, Евклидово  
 поле, Свободное поле, Ферми-  
 поле, Существование кванто-  
 вых полей  
 — число 41  
 Кирквуда — альцбурга уравнения 351,  
 356  
 Классическая картина 94  
 — критическая точка 95  
 — система 21  
 — статистическая механика 18, 19, 37,  
 38  
 — траектория 47—48  
 Классические ансамбли 46—53  
 — дифференциальные уравнения 136  
 — законы взаимодействия 44, 297  
 — индексы 336, 337  
 Классический предел 18  
 Классическое поле 123, 132  
 — приближение 60, 93  
 — решение 104, 295  
 Кластер 39, 258, 261  
 Кластерное разбиение 261, 262  
 — разложение 55, 98, 104, 152, 241,  
 335, 342—364, 384, 387, 388,  
 390  
 Клебша — Гордина формулы 295

- Клейна* — *Гордона* поле 133  
 — — уравнение 270  
 Ковариационные операторы 142—164  
 — — инфинитезимальное изменение 193  
 — — периодические 147  
 — — решеточные 205—212  
 — — свободные 145—147  
 Константа связи 60, 139, 201, 202, 205, 284, 329, 398  
 Конфигурации 100—104  
 — классического поля 132, 307  
 Конфигурационное пространство 132  
 Кооперативные явления 54, 90, 99  
 Корреляционные неравенства 73—90, 95, 98, 139, 186, 207, 212, 216, 326, 384  
*Костерлица* — *Таулесса* фазовый переход 106  
 Критическая поверхность 46  
 — размерность 317  
 — температура 95, 104  
 — точка 46, 74, 90, 95, 96, 138, 139, 143, 306, 326, 330, 332—335, 340, 342  
 Критические индексы 96, 106, 139, 335—338, 341  
 Кулонов газ 105, 389, 392, 393  
 — потенциал 22, 26, 35—39, 390  
 Кулоново взаимодействие 44, 105, 392
- Лагранжиан** 60, 201  
*Лаймана* серия 41  
*Лебовица* неравенства 79, 216  
*Лежандра* преобразование 51, 53, 60, 173  
*Лемана* — *Симанзика* — *Циммермана* формализм 260, 281  
 — спектральная мера 329  
 — — формула 119—120, 284, 337  
*Леннард-Джонса* потенциал 38, 44, 260  
*Ли* — *Янга* теорема 74, 83—88, 98, 216, 323, 326, 397  
*Лиувилля* мера 47  
 — теорема 20  
 Локальность 115, 117, 378—379  
*Лоренца* группа 115, 117, 133, 134, 265, 266, 296  
 Лоренц-инвариантность 109  
 Лоренц-ковариантность 115, 117, 375—378  
**Лэмбов** сдвиг 43, 301—302
- Магнитное диполь-дипольное взаимодействие** 44  
 — поле 83, 98, 297, 398
- Магнитный момент 292, 293  
*Майера* графы 58, 343  
 — *Монтролла* уравнения 351  
 — разложения 5, 59, 94  
 Масса 35, 332  
 — приведенная 36  
 — *См. также* Спектр масс, Центр масс  
 Массовая щель 273  
 Массовый оператор 265  
 Масштабные преобразования 137, 145, 159, 185, 192, 312  
 — *См. также* Скейлинговый предел  
 S-матрица 266, 269, 278, 281—282, 385, 386  
*Мёбиуса* теорема 272  
*Мейсснера* эффект 398  
*Мелера* формула 34, 66, 233  
*Мермина* — *Вагнера* теорема 104, 105, 318  
 Метод изображений 148, 149  
*Минковского* аксиомы *см.* Аксиомы  
 — поле 114, 115  
*Минлоса* теорема 72  
 Многочастичное рассеяние 261  
 Модель капли 100—104  
 — ротаторов 89, 104, 316
- Наблюдаемые 19, 23, 48, 115, 380  
 Намагниченность 98, 293, 305, 323, 327  
 Нарушение симметрии 96, 320—326  
 Негауссовы меры 70, 179—186, 236  
*Неймана* граничные условия *см.* Граничные условия  
 — ковариации 148, 314  
 — предел 195
- Обобщенные функции** 71, 92, 107, 267, 268, 272  
 Обусловленность 86, 193, 218  
 Одночастичная задача 266, 267  
 Одночастично-неразложимые диаграммы (1ЧН) 203, 285  
 Оператор рождения 28, 135, 165  
 — уничтожения 28, 135, 165  
*Орштейна* — *Уленбека* мера 69  
 — — процесс скоростей 66  
 Основное состояние 27, 29, 35, 96, 103, 317  
 — *См. также* Вакуум  
*Остервальдера* — *Шрадера* аксиомы *см.* Аксиомы

- Отражения 73, 148, 149, 221, 381  
 — многократные 78, 222—228, 239, 241, 248, 252, 253, 308, 311, 324, 383  
 — несимметричные 229—236, 248, 252  
*См. также* Группа отражений, Инвариантность при отражениях, Положительность при отражениях
- Пайерлса** оценка 100, 309  
 Параметр порядка 98  
**Паули** матрицы 298, 396  
 — принцип запрета 26, 39, 44, 135  
 Перенормировка 34, 94, 141, 165, 188, 197, 201—205, 282—287, 302, 342, 384, 387  
 — вакуума 141, 282, 283, 286  
 — величины поля 202, 268, 283, 286, 329, 331, 394  
 — заряда 139, 286, 342  
 — массы 283—285, 387  
 Перенормируемая теория поля 204—205  
**Перрона** — **Фробениуса** теорема 68  
 Плотность 44, 49, 52, 55  
 Положительность при отражениях 73, 108, 119, 121, 143, 145, 161—164, 220—224, 226, 237, 249, 397  
 Поляризаационное тождество 190, 245  
 Постоянная тонкой структуры 40, 205, 299  
 Предел бесконечного объема 73—74, 77—78, 216, 236, 242, 324, 388  
 Преобразование  $\sin$ -Gordon 389  
 Приближение среднего поля 88, 92—96, 103—105, 317, 336, 342, 389, 390  
 Пространство состояний 45, 47  
 — траекторий (функциональное пространство) 61, 110, 141, 167, 225, 386, *см. также* Функциональные интегралы  
**Пуассона** процесс 138, 139  
 — скобки 21, 262
- Равновесное распределение 47  
 — состояние 317  
 Равновесные конфигурации 55  
 Рассеяние 38, 39, 258—292, 342, 385, 386  
 — многочастичное 261—265  
**Резервуар** частиц 52
- Реконструкция квантовой механики 111  
 — квантовых полей 365  
 Ренормгруппа 96, 327, 330, 335, 385, 394  
 Решеточная аппроксимация 137, 194, 205, 209, 212, 384, 396  
 Решеточные поля 53, 78, 86, 97, 137, 221  
 Решеточный оператор Лапласа 54, 205  
**Ритца** принцип 27
- Сверхперенормируемые модели 141, 205, 242, 267, 269, 282, 302  
 Сверхтонкая структура 301  
 Свободная ковариация 145—147  
 — энергия 51, 86—88, 218, 241, 258, 394  
 Свободное поле 117—124, 128, 142, 258, 266, 269, 331, 342  
 Связанные состояния 26, 38, 39, 133, 201, 258, 262, 287, 289, 290, 328—331, 342  
 Скейлинговый предел 138, 331, 340  
 Случайное блуждание 138, 212  
 Солитон 103, 104, 260, 303, 395  
 Состояние 21  
 — многочастичное 104, 259, 260  
 — рассеяния 39, 260, 387  
 — смешанное 92, 381  
 — чистое 21  
*См. также* Вакуумное состояние, Основное состояние, Пространство состояний, Связанные состояния, Уравнение состояния  
 Сохранение симметрии 104, 316  
 Спектр масс 287, 342, 384  
 Спин 25, 26, 43, 74, 87, 100, 105, 133, 141, 143, 294, 295, 317, 321  
 — двухкомпонентный 89—90, 105, 317  
 Спиновая волна 105  
 Статистическая сумма 49, 74, 83, 86, 87, 99, 198, 218, 230, 250, 284, 390—391, 393  
 Суммируемость по Борелю 139, 337, 385—386  
 Существование квантовых полей 140, 237, 257, 345  
 Сходимость графиков операторов 154
- Температура 49  
 Теория возмущений 60, 171—173, 242, 282, 283, 299, 385  
*См. также* Квадратичные возмущения

- Термодинамический предел 37, 48, 51  
 Термостат 49  
 Тонкая структура 294, 301  
*См. также* Постоянная тонкой структуры  
 Траектории 62, 64, 110, 152  
*См. также* Классическая траектория. Пространство траекторий  
 Трансфер-матрица 91, 106, 113, 221, 257  
 Туннельный переход 104
- Угловой момент 23, 25, 42, 47, 295, 296, 301  
 Уравнение движения 242  
 — состояния 44, 53  
 — теплопроводности 61, *см. также* Фейнмана — Каца формула  
*Урселла* функции 81  
 Усеченные функции 81, 272
- Фаза 91, 97, 99—101, 105, 303, 327  
 — конденсированная 394  
 — неупорядоченная 105, 318, 394  
 — смешанная 91  
 — чистая 91, 98, 100, 116, 302, 317, 342, 388  
 Фазовое пространство 19, 47  
 Фазовые диаграммы 88, 389  
 Фазовый переход 56, 74, 83, 88, 91, 97, 101, 104, 106, 116, 139, 185, 302—326, 334, 342, 364, 388, 389, 394—397  
 — — без нарушения симметрии 97, 389  
 — — второго и более высокого рода 306  
 — — доказательство существования 100, 307, 320, 322  
 — — первого рода 99, 303, 320  
 — — с нарушением симметрии 97, 316—317, 320—326  
 — — — размыванием 394, 396  
*Фейнмана* диаграммы (графы) 165—168, 172—173, 175, 199—200, 203, 285—287, 300  
 — *Каца* мера 107, 110  
 — — формула 28, 60, 64—68, 70—73, 130, 133, 227, 368, 369, 386, 387  
 — формула 60—61  
*Ферми — Дирака* статистика 133, 135  
 Ферми-поле 143, 386—387  
 Фермионы 26, 48, 133, 135, 387, 388  
 Ферромагнетизм 316  
 Ферромагнитное взаимодействие 83, 86, 207  
 Ферромагнитный гамильтониан 74, 75, 77, 186  
 ФКЖ (*Фортуна — Каstelена — Жинибра*) неравенство 82, 216, 303—305  
 Фока пространство 124, 129, 134, 258—260  
 Фоков вакуум 266  
 Фоково представление 126  
*Фон Неймана* алгебры 117, 380  
 Функционалы 108, 188  
 Функциональные интегралы 65, 70, 107  
*См. также* Гауссовы функциональные интегралы  
 Функциональный определитель 192, 197
- 
- Хаага — Каstлера* аксиомы *см.* Аксиомы  
 — *Рюэля* теория рассеяния 259, 260, 272—278  
 Характеристический функционал 71, 107, 118, 122, 221  
*Хиггса* механизм 303  
 — модель 397, 398  
 — поля 316  
*Хоенберга — Мермина — Вагнера* теорема 318
- Центр масс 35, 37, 261, 262  
 Цилиндрические подмножества 63  
 — функции 109, 194, 235
- Частица 258, 266, 267
- Швингера* функции 72, 116, 217, 243, 305, 327, 346, 375—378  
*Шредингера* гамильтониан 40, 111, 129  
 — картина 24, 25  
 — представление 25, 28—30, 34, 35, 38, 40, 110, 233  
 — уравнение 22, 24

- Электромагнитное взаимодействие 27, — рекуррентное соотношение  
35, 292—302 170
- Энтропия 48, 51, 94, 102, 308
- Эргодичность 47, 91, 104, 109, 113,  
379
- Эрмита полиномы 27, 30, 32, 124, 127,  
165, 190, 191
- разложение 126
- Фока представление 124
- Юкавы* потенциал 38, 139, 141, 201, 204,  
342, 387—388
- Янга — Миллса* теория 140, 204, 396

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Введение . . . . .	9
Принятые соглашения и формулы . . . . .	12
Список обозначений . . . . .	14

## ЧАСТЬ I. Введение в современную физику

<b>Глава 1. Квантовая теория . . . . .</b>	<b>18</b>
1.1 Общее представление о квантовой теории . . . . .	18
1.2 Классическая механика . . . . .	19
1.3 Квантовая механика . . . . .	22
1.4 Интерпретация . . . . .	26
1.5 Простой гармонический осциллятор . . . . .	27
1.6 Кулонов потенциал . . . . .	35
1.7 Атом водорода . . . . .	40
1.8 Зачем нужна квантовая теория поля . . . . .	42
<b>Глава 2. Классическая статистическая механика . . . . .</b>	<b>44</b>
2.1 Введение . . . . .	44
2.2 Классические ансамбли . . . . .	46
2.3 Модель Изинга и решеточные поля . . . . .	53
2.4 Методы разложений в ряд . . . . .	55
<b>Глава 3. Формула Фейнмана — Каца . . . . .</b>	<b>60</b>
3.1 Мера Винера . . . . .	60
3.2 Формула Фейнмана — Каца . . . . .	64
3.3 Единственность основного состояния . . . . .	68
3.4 Перенормированная формула Фейнмана — Каца . . . . .	70
<b>Глава 4. Корреляционные неравенства и теорема Ли — Янга . . . . .</b>	<b>73</b>
4.1 Неравенства Гриффитса . . . . .	74
4.2 Переход к бесконечному объему . . . . .	77
4.3 $\xi^4$ -неравенства . . . . .	78
4.4 Неравенство ФКЖ . . . . .	82
4.5 Теорема Ли — Янга . . . . .	83
4.6 Аналитичность свободной энергии . . . . .	86
4.7 Двухкомпонентные спины . . . . .	89
<b>Глава 5. Фазовые переходы и критические точки . . . . .</b>	<b>90</b>
5.1 Чистые и смешанные фазы . . . . .	90
5.2 Приближение среднего поля . . . . .	92
5.3 Нарушение симметрии . . . . .	96



5.4 Модель капли и оценка Пайерлса . . . . .	100
5.5 Пример . . . . .	104
<b>Глава 6. Теория поля . . . . .</b>	<b>106</b>
6.1 Аксиомы . . . . .	106
6.2 Свободное поле . . . . .	117
6.3 Пространство Фока и виково упорядочение . . . . .	124
6.4 Каноническое квантование . . . . .	129
6.5 Фермионы . . . . .	133
6.6 Взаимодействующие поля . . . . .	137

## ЧАСТЬ II. Функциональное интегрирование

<b>Глава 7. Ковариационный оператор . . . . .</b>	<b>142</b>
7.1 Введение . . . . .	142
7.2 Свободная ковариация . . . . .	145
7.3 Периодические граничные условия . . . . .	147
7.4 Граничные условия Неймана . . . . .	148
7.5 Граничные условия Дирихле . . . . .	149
7.6 Изменение граничных условий . . . . .	150
7.7 Ковариационные неравенства . . . . .	150
7.8 Общие граничные условия Дирихле . . . . .	152
7.9 Регулярность оператора $S_V$ . . . . .	158
7.10 Положительность при отражениях . . . . .	161
<b>Глава 8. Квантование = интегрирование по функциональному пространству</b>	<b>164</b>
8.1 Введение . . . . .	164
8.2 Диаграммы Фейнмана . . . . .	165
8.3 Виковы произведения . . . . .	168
8.4 Формальная теория возмущений . . . . .	171
8.5 Оценки гауссовых интегралов . . . . .	173
8.6 Негауссовы интегралы для случая $d = 2$ . . . . .	179
8.7 Конечномерная аппроксимация . . . . .	186
<b>Глава 9. Анализ и перенормировки в функциональном пространстве . . . . .</b>	<b>188</b>
9.1 Список полезных формул . . . . .	188
9.2 Инфинитезимальное изменение ковариации . . . . .	195
9.3 Квадратичные возмущения . . . . .	196
9.4 Перенормировка по теории возмущений . . . . .	201
9.5 Решеточные операторы Лапласа и ковариационные операторы . . . . .	205
9.6 Решеточные аппроксимации мер $P(\Phi)_2$ . . . . .	212
<b>Глава 10. Оценки, не зависящие от размерности . . . . .</b>	<b>216</b>
10.1 Введение . . . . .	216
10.2 Корреляционные неравенства для полей $P(\Phi)_2$ . . . . .	216
10.3 Монотонность и расщепление при условиях Дирихле или Неймана . . . . .	218
10.4 Положительность при отражениях . . . . .	220
10.5 Многократные отражения . . . . .	222
10.6 Несимметричные отражения . . . . .	229
<b>Глава 11. Поля без обрезания . . . . .</b>	<b>236</b>
11.1 Введение . . . . .	236
11.2 Монотонная сходимость . . . . .	236
11.3 Оценка сверху . . . . .	238
<b>Глава 12. Регулярность поля и проверка аксиом . . . . .</b>	<b>241</b>
12.1 Введение . . . . .	241
12.2 Интегрирование по частям . . . . .	243

12.3 Нелокальные $\varphi^4$ -оценки . . . . .	246
12.4 Равномерность относительно объема . . . . .	248
12.5 Регулярность поля $P(\varphi)_2$ . . . . .	252

## ЧАСТЬ III. Физические свойства квантовых полей

<b>Глава 13. Теория рассеяния: нестационарные методы</b> . . . . .	258
13.1 Введение . . . . .	258
13.2 Многочастичное рассеяние . . . . .	261
13.3 Волновой оператор для квантовых полей . . . . .	265
13.4 Волновые пакеты для свободных частиц . . . . .	269
13.5 Теория Хаага — Рюэля . . . . .	272
<b>Глава 14. Теория рассеяния: стационарные методы</b> . . . . .	278
14.1 Хронологически упорядоченные корреляционные функции . . . . .	278
14.2 $S$ -матрица . . . . .	281
14.3 Перенормировки . . . . .	282
14.4 Ядро Бете — Солпитера . . . . .	287
<b>Глава 15. Магнитный момент электрона</b> . . . . .	292
15.1 Классический магнитный момент . . . . .	292
15.2 Тонкая структура атома водорода и уравнение Дирака . . . . .	294
15.3 Теория Дирака . . . . .	296
15.4 Аномальный магнитный момент . . . . .	298
15.5 Сверхтонкая структура и лэмбов сдвиг в атоме водорода . . . . .	301
<b>Глава 16. Фазовые переходы</b> . . . . .	302
16.1 Введение . . . . .	302
16.2 Двухфазная область . . . . .	306
16.3 Сохранение симметрии (случай $d = 2$ ) . . . . .	316
16.4 Нарушение симметрии (случай $d \geq 3$ ) . . . . .	320
<b>Глава 17. Критическая точка в модели <math>\varphi^4</math></b> . . . . .	326
17.1 Элементарные соображения . . . . .	326
17.2 Отсутствие четных связанных состояний . . . . .	328
17.3 Оценка константы связи . . . . .	329
17.4 Существование частиц и оценка производной $dm^2/dg$ . . . . .	331
17.5 Существование критической точки у модели $\varphi^4$ . . . . .	332
17.6 Непрерывность $d\mu$ в критической точке . . . . .	334
17.7 Критические индексы . . . . .	335
17.8 $\eta \leq 1$ . . . . .	338
17.9 Скейлинговый предел . . . . .	340
17.10 Гипотеза $\Gamma^{(6)} \leq 0$ . . . . .	340
<b>Глава 18. Кластерные разложения</b> . . . . .	342
18.1 Введение . . . . .	342
18.2 Кластерное разложение . . . . .	346
18.3 Кластерное свойство и аналитичность . . . . .	351
18.4 Сходимость: основные идеи . . . . .	353
18.5 Уравнение типа Кирквуда — Зальцбурга . . . . .	356
18.6 Ковариационные операторы . . . . .	358
18.7 Сходимость: завершение доказательства . . . . .	362
<b>Глава 19. От функциональных интегралов к квантовой механике</b> . . . . .	365
19.1 Реконструкция квантовых полей . . . . .	365
19.2 Формула Фейнмана — Каца . . . . .	368

19.3	Самосопряженные поля . . . . .	370
19.4	Коммутаторы . . . . .	371
19.5	Лоренц-ковариантность . . . . .	375
19.6	Локальность . . . . .	378
19.7	Единственность вакуума . . . . .	379

<b>Глава 20.</b>	<b>Дальнейшие направления . . . . .</b>	<b>383</b>
20.1	Модель $\varphi_3^4$ . . . . .	384
20.2	Суммируемость по Борелю . . . . .	385
20.3	Евклидовы ферми-поля . . . . .	386
20.4	Потенциал Юкавы . . . . .	387
20.5	Низкотемпературные разложения и фазовые переходы . . . . .	388
20.6	Дебаевское экранирование и преобразование sin-Gordon . . . . .	389
20.7	В газе диполей нет экранирования . . . . .	392
20.8	Солитоны . . . . .	394
20.9	Калибровочные теории . . . . .	396
20.10	Модель Хиггса и сверхпроводимость . . . . .	397
<b>Литература . . . . .</b>	<b>. . . . .</b>	<b>399</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>. . . . .</b>	<b>436</b>