

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ. Т.2

Монография известного американского ученого посвящена теории катастроф и ее приложениям в различных областях науки и техники. В русском переводе монография выходит в двух книгах. В книге 2 рассматриваются математические основы теории катастроф и применение ее методов в квантовой механике, климатологии и других областях, а также вопросы, связанные с возможностью более широкого практического применения теории катастроф.

Для специалистов, занимающихся моделированием сложных систем управления, физиков, механиков, математиков, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Содержание

Глава 15. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА	5
1. Операторы	6
2. Классический предельный случай	8
3. Многочастичные модельные гамильтонианы	12
4. Алгоритм для фазовых переходов, сопровождающихся изменением энергии основного состояния	17
5. Приложения	17
6. Алгоритм для термодинамических фазовых переходов	27
7. Приложения	30
8. Теорема о "скачке"	41
9. Структурная устойчивость и канонические ядра	44
10. Динамические уравнения движения	48
11. Стационарные состояния, далекие от равновесных	51
12. Кратная устойчивость	57
13. Выводы	63
Литература	65
Глава 16. КЛИМАТОЛОГИЯ	67
1. Некоторые теории ритма ледниковых периодов	67
2. Теория Миланковича	72
3. Практические рекомендации	85
4. Выводы	86
Литература	86
Часть III. За пределами элементарной катастроф	
Глава 17. ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ	88
1. $k > 5$.	88
2. $n \rightarrow \infty$	93
3. $m > 1$	94
4. Симметризованные катастрофы	95
5. Катастрофы с ограничениями	100
6. Выводы	103

Литература	104
Глава 18. ГРАДИЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	105
1. Неканоническая форма градиентных систем	105
2. Фазовые портреты	106
3. Дерево ветвлений	115
4. Прогонка	123
5. Связь между теорией катастроф и теорией бифуркаций	128
6. Выводы	133
Литература	133
Глава 19. АВТОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	134
1. Приведение к градиентной форме	134
2. Фазовые портреты	136
3. Геометрия матрицы устойчивости	140
4. Возмущения седло-узла	151
5. Бифуркация Хопфа [1]	156
6. Выводы	161
Литература	162
Глава 20. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К КАТАСТРОФАМ	163
1. Принцип построения. 1	163
2. Принцип построения. 2	174
3. Странные, строительные блоки	181
4. Гидродинамика. Неустойчивость слоя жидкости подогреваемого снизу	194
5. Электродинамика. Неустойчивость лазерного разряда	197
6. Принцип построения. 3	200
7. Теорема о центральном многообразии	204
8. Картина турбулентности по Рюэлю и Тейкенсу	207
9. Выводы	213
Литература	215
Часть IV. Математические теории катастроф	
Глава 21. ТЕОРЕМА ТОМА	216
1. Топология	216
2. Устойчивые функции	219
3. Наследственные свойства	222
4. Особенности отображений	224
5. Теорема Тома	226
6. Выводы	227
Литература	227
Глава 22. ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ	228
1. Трансверсальность	229
2. Приложения	236
3. Выводы	244
Литература	244
Глава 23. ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДЕФОРМАЦИЯ	246

1. Замена переменных	247
2. Определенность ("усечение" рядов Тейлора)	247
3. Деформация (универсальные возмущения)	251
4. Правила нахождения определенности функций	253
5. Правила вычисления деформации	256
6. Правила нахождения ростков	259
7. Приложения	263
8. Некоторые простые ростки	269
9. Выводы	271
Литература	272
Послесловие	273
Предметный указатель	277

Предметный указатель

Автономия 133—162	Диаграмма Кокстера—Дынкина
Активная интерпретация 24	- смежности 91
Анализ бифуркации 6	Диаграммный метод 147
Аттрактор 119, 169, 177, 183	Задача Бекара 187
- Лоренца 185—194	- определенности 246
- странный 185, 192, 194	Замена переменных 247
Бифуркация Хопфа 156, 163, 165, 170, 189, 202	- - гладкая 106
- - докритическая 170	Инвариантная поверхность 163, 164, 179, 200
- - субкритическая 159, 160	Интеграл действия 48, 168
- - суперкритическая 159, 160	Каноническое ядро гамильтониана 6, 44—48
Вариационные принципы 6	Картина турбулентности по Рюэлю- Тейкенсу 163, 207—213
Ветвь 117	Катастрофы 117
- вторичная 119, 120	- внешние (граничные) 102
- нулевая (магистраль, ствол) 117	- внутренние 102
- первичная 119, 120	- симметризованные 95—99
Возмущение $Pert(l,k)$ 216	- с ограничением 100—103
- линейное 167	- типа A_{-1} , 100, 101
- универсальное 239, 251	- - A_{-2} , 44, 57
Возмущения 143—156, 167, 168, 179	- - $A_{\pm 3}$, 57
Вырожденность 106, 339—341	- - A_{-k} 225
Гидродинамика 194—197	Квантовая механика 5—104
Дерево ветвлений (дерево равновесии) 115—123	Климат 70, 83
Деривация 7	Климатология 57—87
Деформация 246—272	- предельного цикла 169
- нереальная 251	Кооперативность поведения 5
- конечная 246	- точка 115
- неверсальная 251	- - вырожденная 115, 134, 183
- общая 134, 153	- - неморсовская 220
- универсальная 97, 251	

Критические точки (центры) 157, 163
- - отталкивающие 163
- - притягивающие 163
- удаление 50
Лазер 53—57, 60—62, 197
Лемма Морса 263, 264
Метод "зашнуровывания" 166
- стягивания 146
- фазовых портретов 169
- элементарной теории катастроф 5,
104, 105
- критическое 216
- центральное 205
Множество бифуркационное 141,
151, 168, 220
- открытое 40, 147, 148, 287
- плотное 94
Модели типа Дикке 15—17, 20—22,
30—33
- - МГЛ 13—15, 17, 30—33
- Дикке (D) 12, 15, 20—22, 30—33,
43, 58
- - расширенная 16, 26, 27, 33, 41
- Лоренца 189
МГЛ (MGL) 12, 15, 17, 20, 30, 33, 43
- - расширенная 16, 33—44
Наследственность 216, 222—224, 228
Неравновесные системы 51
Неустойчивость по Рэлею—Бенару
210
Оператор коммутирующий 5
- многочастичный 9
- одночастичный 9
- рождения бозона 7
- - фермиона 7
- сдвига 8
- уничтожения бозона 7
- - фермиона 7
Операторы 6—8
- бозонные 7
- фермионные 7
Определенность 246—272
- конечная 246

Оптическая бистабильность 6, 224,
227
Особенности отображений 224
Осциллятор Ван-дер-Поля 165, 167—
174
- гармонический 137, 167, 168
Отображения 225, 227
- порядка 15, 53, 173, 175
Переменные состояния "плохие" 88,
90
Потоки двумерные 163
- динамические 163
- инвариантные 163
- морсовские 163
- недиссипативные 186
- неприводимые 163
Правила вычисления деформации
256—259
- нахождения определенности 253—
256
- - ростков 259—263
Предел классический 5, 10, 29, 47
Предельный цикл 178, 216, 299
- - устойчивый 165
- инфинитезимальное однородное
нелинейное 254
- - осесохраняющее 254
Приближение Буссинеска 212
- среднего поля 5, 13
- "лома" 57, 134
- Максвелла 44, 62
- максимального промедления 44
Принципы построения 163—181
Равновесное состояние 134
Радиус предельного цикла 166
Релаксационные колебания 171—174
Росток 134
- вырожденный 88
- неморсовский 88
- одномодульный 90
- нуль-модульный 90
Ростки 241—244
- пограничные 89
- простые 269

Сборка 116, 125
- двойная 268, 269
- кратная 267—269
Седло 119, 139
- морсовское 169
Система градиентная 105, 136
- - динамическая (D) 105—133, 134, 163
- динамическая 134, 154, 163
- - автономная 134—162
- - диссипативная 51
- - консервативная 51
- неравновесная 51
- - странная 163
Складка 116, 125, 160, 225
Строительные блоки 134
- - странные 181—194
Теорема Лиувилля 186
- о неявной функции 263, 264, 269
- - "скачке" 41—44
- - центральном многообразии 163, 204—207
- Тома 216—227
Теория бифуркаций 128—133
- катастроф 105, 128—133
- Миланковича 72—86
- ритма ледниковых периодов 67—72
Термодинамика 6
Топология 123
Трансверсальность 228—245
Турбулентность 183
Узел 139
- неустойчивый 139
- устойчивый 139
Управляющие параметры
(управления) 35, 57, 83, 88, 123, 168
- Гейзенберга 53
Уравнения Блоха—Максвелла 198
- Лоренца 189
- Навье—Стокса 212
- приводящие к катастрофам 163—215
- прогонки 124

- состояния 228
- Фоккера—Планка (FP) 83
Устойчивость 44—48, 57—62, 108, 165, 206
- динамическая 165
- структурная 165, 220
Фазовые переходы (превращения) 6, 15, 17—27
- - сопровождающиеся изменением энергии основного состояния (в тексте для краткости используется термин "фазовый переход основного состояния") 5, 6, 17—27
Фазовый портрет 61, 106—115, 134—140, 153, 154, 236
- - второго рода 18, 21, 45
- - первого рода 17, 18, 21, 45
- - термодинамические 15, 27—41, 53
Флаги катастроф 153—172
Фокус 139, 163
- глобально устойчивый 220
- неустойчивый 169, 182, 193, 220
- структурно устойчивый 220
- устойчивый 139, 169
- - квадратичная 1, 15
- - устойчивые 219—222
- Ляпунова 5, 51
Хаос 181, 192
- метастабильный 192
- спирально-винтовой 183
- спиральный 181—184
Цикл 158
- предельный 178, 216, 299
- - неустойчивый 159, 166
- - устойчивый 158, 165, 166, 169
Циклы 163
- предельные 163, 178
- трехмерные 163
Число Милнора 88
- Рейнольдса 212
- Рэля 196
с-числа 2, 45, 47
q-числа 5, 45, 47

Шум в переменных состояниях 84, 85
- - управляющих параметрах 84, 85

Эквивалентная интерпретация 8
Электродинамика 197—200

До сих пор мы рассматривали применение методов теории катастроф в классической физике и технике, т. е. анализировалось состояние таких систем, которые обычно могут быть описаны с помощью разложения потенциальной функции в окрестности точки фазового пространства или пространства конфигураций. Координаты и моменты, определяющие фазовое пространство, фактически являются коммутирующими операторами. Действительное состояние системы может быть определено в точке фазового пространства минимумом некоторой потенциальной функции или функции Ляпунова от этих коммутирующих операторов. Использование условия минимума позволяет просто и эффективно применять методы теории катастроф в областях классической физики.

Следуя указанной процедуре, можно было бы попытаться использовать результаты теории катастроф для описания квантовомеханических систем. Однако в этом случае координаты точки в фазовом пространстве и моменты, описывающие квантовомеханическую систему, уже не коммутируют, и функции этих операторов обычно являются операторами (q -числами), а не скалярами (c -числами).

В настоящей главе рассматриваются квантовомеханические системы, проявляющие некоторые классические признаки в своем поведении и состоящие из большого числа одинаковых взаимодействующих подсистем. Предполагается, что взаимодействия этих подсистем происходят в приближении среднего поля. В результате операторы, входящие в квантовомеханический гамильтониан, могут быть заменены их средними значениями. Как следствие, c -функция¹⁾ может играть роль потенциальной функции, минимальное значение которой и характеризует состояние системы. В такой ситуации методы и представления теории катастроф уже вполне применимы.

Системы, изучаемые в этой главе, состоят из большого числа (N) одинаковых подсистем (атомов, молекул, нуклонов), каждая из которых обладает r внутренними степенями свободы (или энергетическими уровнями). Для описания подсистем и самой системы в целом вводятся операторы. Из коммутативности усредненных коллективных операторов вытекает, что все эти операторы одновременно диагонализуются при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что может быть вычислен «классический предел». Приводится явное описание структуры гамильтонианов и их свойств.

В первую очередь внимание уделяется фазовым переходам, сопровождающимся изменением энергии основного состояния. В том случае, когда нет взаимодействия подсистем или им можно пренебречь, они ведут себя независимо друг от друга. Однако, если это явление достаточно сильное, начинает проявляться «кооперативность» поведения, и тогда основное состояние системы в целом существенно отличается от основного состояния отдельной изолированной подсистемы. Переход от индивидуального поведения к кооперативному можно легко проанализировать с помощью алгоритма, предусматривающего замену гамильтониана его средним в «классическом» случае (при

¹⁾ В оригинале дано « c -number function», т. е. «функция, значением которой является число». Здесь и ниже для краткости используются термины « c -функция» и « q -функция» (для случая операторов). — *Прим. перев.*

$N \rightarrow \infty$). В результате получают функцию соответствующего числа переменных состояния и управляющих параметров. Переменные состояния являются классическими предельными значениями операторов, а управляющие параметры — константами, характеризующими полярные взаимодействия и входящими в гамильтониан. Для анализа фазовых переходов, сопровождающихся изменением энергии основного состояния, можно воспользоваться стандартным методом теории катастроф.

Идентичный по своей сути и схожий в деталях метод может быть использован для анализа термодинамических фазовых переходов. Для замены гамильтонианов потенциальной функцией, минимум которой точно совпадает со свободной энергией частицы, можно воспользоваться другим алгоритмом. Кроме классического предела гамильтониана в эту функцию входит еще аддитивный член, связанный с энтропией системы. Переменные состояния системы остаются теми же, а ее температура теперь становится единственным управляющим параметром.

На практике эти два алгоритма сводятся к анализу бифуркаций. Теория катастроф при этом оказывается полезной для выявления членов гамильтониана, «ответственных» за появление фазовых переходов, и членов, не имеющих к этому отношения. В гамильтонианах могут быть оставлены только главные члены точно так же, как это делается при разложении функций в ряд Тейлора в окрестности вырожденной критической точки до членов первых порядков малости. Члены, ответственные за фазовые переходы второго рода, называют *каноническим ядром гамильтониана*.

Теория катастроф оказывается полезной при анализе равновесных и неравновесных систем. В связи с этим приводится вывод динамических уравнений движения для одного частного случая гамильтониана. Эти уравнения консервативные, поэтому нельзя ожидать, что их решения будут вести себя, как решения диссипативных градиентных систем. Вместе с тем при наличии потенциала и вырожденных критических точек можно ожидать явлений, подобных, например, критическому удлинению.

Рассматриваются неравновесные устойчивые состояния, в основном фазовые переходы, которые могут иметь место, когда система далека от состояния термодинамического равновесия. Один из введенных гамильтонианов описывает поведение обычного лазера. Фазовые переходы в лазере относятся к сборке типа A_{+3} . Обсуждаются возмущения лазерных фазовых переходов; возмущения, нарушающие симметрию, могут привести к новым физическим процессам, один из которых называется *оптической бистабильностью*.

1. ОПЕРАТОРЫ

В классической механике центральная роль отводится потенциальным функциям. В квантовой же механике эта роль принадлежит функциям, значениями которых являются операторы. Тот факт, что теория катастроф оказывается полезным инструментом в классической физике, не вызывает особого удивления, но то, что она столь же полезна в квантовой механике, может показаться неожиданным. Чтобы несколько ослабить впечатление, заметим, что многие результаты в квантовой механике могут быть получены путем непосредственного применения вариационных принципов (Рэлея — Ритца, Хартри, Хартри — Фока) к классическим функциям. Этими функциями часто являются значения операторов, усредненные по пробным волновым функ-

циям. Именно на этом пути мы и попробуем найти связь между квантовой и классической механикой.

Операторы, с которыми мы имеем дело, можно построить из бозонных и фермионных операторов. Они подчиняются отношениям коммутативности и антикоммутативности:

$$\begin{aligned} [b_i, b_j^\dagger] &= \delta_{ij}, & \{f_i, f_j^\dagger\} &= \delta_{ij}, \\ [b_i, b_j] &= 0, & \{f_i, f_j\} &= 0, \\ [b_i^\dagger, b_j^\dagger] &= 0, & \{f_i^\dagger, f_j^\dagger\} &= 0, \end{aligned} \quad (15.1)$$

где

$$[A, B] = AB - BA \quad \text{и} \quad \{A, B\} = AB + BA. \quad (15.2)$$

Здесь b_i^\dagger, b_i — операторы «рождения» и «уничтожения» бозона для i -го состояния, а f_j^\dagger, f_j — операторы рождения и уничтожения фермиона для j -го состояния. Все до сих пор открытые элементарные частицы с целыми (полуцелыми) спинами являются бозонами (фермионами).

Фермионные операторы для единичного состояния действуют в двумерном гильбертовом пространстве с базисными векторами $|0\rangle, |1\rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f^\dagger |0\rangle &= |1\rangle, & f^\dagger |1\rangle &= 0, \\ f |0\rangle &= 0, & f |1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Бозонные операторы для единичного состояния действуют в бесконечномерном гильбертовом пространстве с базисными векторами $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots$ (представление Фока), следующим образом:

$$\begin{aligned} b^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ b |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Билинейные комбинации $b_i^\dagger b_j, f_i^\dagger f_j$ бозонных и фермионных операторов замкнуты относительно коммутативности. Например,

$$[a_i^\dagger a_j, a_r^\dagger a_s] = a_i^\dagger a_s \delta_{jr} - a_r^\dagger a_j \delta_{si}, \quad (15.5)$$

где $a = b$ или $a = f$. Это можно показать, исходя из следующего общего свойства коммутирующих операторов:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \quad (15.6)$$

Данное свойство часто называют *дериацией*, поскольку оно обобщает обычную операцию дифференцирования на класс операторов.

◇◇◇ Множество операторов, замкнутых по отношению к коммутативности, порождает алгебру Ли. Множество операторов $a_i^\dagger a_j$ ($1 \leq i, j \leq r$) порождает алгебру Ли $\mathfrak{u}(r)$ для $a = b$ или

$a = f$. Ниже эта алгебраическая структура будет явно использована для замены q -чисел (операторов) c -числами (функциями), которая является центральным моментом в настоящей серии приложений теории катастроф к квантовой механике.

◇◇◇ Пусть A, B, C — $(r \times r)$ -матрицы, причем $[A, B] = C$. Определим операторы $\mathcal{A} = a_i^\dagger A_{ij} a_j$ и \mathcal{B}, \mathcal{C} аналогичным образом. Тогда

$$[A, B] = C \Leftrightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{C}. \quad (15.7)$$

Короче говоря, существует изоморфизм между матричными алгебрами Ли и операторными алгебрами Ли, основанными на билинейных комбинациях $a_i^\dagger a_j$ бозонных или фермионных операторов.

◇◇◇ Операторы $a_i^\dagger a_j$ сохраняют численность. Если в k -м состоянии имеется n_k частиц и $N = \sum_{k=1}^r n_k$, то в результате применения оператора $a_i^\dagger a_j$ в i -м состоянии появится еще одна частица, в j -м состоянии станет одной частицей меньше, а число частиц в остальных состояниях не изменится. Короче говоря, операторы $a_i^\dagger a_j$ ($i \neq j$) перемещают частицы. Такие операторы часто называют *операторами сдвига*. Все операторы сдвига коммутируют с оператором полной численности

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^r n_i, \quad n_i = a_i^\dagger a_i. \quad (15.8)$$

◇◇◇ Если имеется только одна частица, то операторы $a_i^\dagger a_j$ можно заменить *операторами проектирования*

$$a_i^\dagger a_j \Leftrightarrow |i\rangle\langle j|. \quad (15.9)$$

Здесь $|i\rangle$ — состояние, в котором одна частица пребывает в i -м состоянии (или на i -м уровне) и нет частиц в других состояниях. Иная эквивалентная интерпретация, иногда оказывающаяся полезной, состоит в том, что частица имеет r возможных состояний $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |r\rangle$ и оператор $a_i^\dagger a_j$ перемещает частицу из j -го состояния в i -е состояние.

2. КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Число состояний в типичной квантовой системе (отдельный атом, молекула или нуклон) может быть очень велико. Однако довольно часто лишь немногие из них оказываются важными, и если это так, то их можно пронумеровать как $|i\rangle, i = 1, 2, \dots, r$. Наиболее общим оператором в конечномерном простран-

стве \mathcal{C} , описывающим такую «усеченную» систему, является следующий:

$$\mathcal{C} = \sum_{i,j=1}^r |i\rangle A_{ij} \langle j| = \sum_{i,j=1}^r A_{ij} e_{ij}. \quad (15.10)$$

Каждый оператор в этом пространстве может быть представлен линейной суперпозицией *одночастичных операторов* e_{ij} , порождающих алгебру Ли $\mathfrak{u}(r)$ группы Ли $U(r)$:

$$[e_{ij}, e_{rs}] = e_{is} \delta_{jr} - e_{rj} \delta_{si}. \quad (15.11)$$

Во многих случаях квантовомеханическая система содержит много (N) одинаковых подсистем, каждая из которых имеет r внутренних состояний. Одночастичные операторы $e_{ij}^{(\alpha)}$, описывающие α -ю частицу, коммутируют с операторами, описывающими β -ю частицу:

$$\begin{aligned} [e_{ij}^{(\alpha)}, e_{rs}^{(\beta)}] &= 0, & \alpha \neq \beta, \\ &= (15.11), & \alpha = \beta. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Многочастичный оператор удобно определить следующим образом:

$$E_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N e_{ij}^{(\alpha)}. \quad (15.13)$$

Многочастичные операторы удовлетворяют тем же отношениям коммутативности, что и одночастичные операторы, поскольку соотношения

$$\begin{aligned} [E_{ij}, E_{rs}] &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [e_{ij}^{(\alpha)}, e_{rs}^{(\beta)}] = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [e_{ij}^{(\alpha)}, e_{rs}^{(\alpha)}] \delta^{\alpha\beta} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N (e_{is}^{(\alpha)} \delta_{jr} - e_{rj}^{(\alpha)} \delta_{si}) = E_{is} \delta_{jr} - E_{rj} \delta_{si} \end{aligned} \quad (15.14)$$

изоморфны (15.11). Поэтому если внутренняя динамическая группа отдельной частицы есть $U(r)$, то внутренняя динамическая группа N одинаковых взаимодействующих частиц также будет $U(r)$.

Если число N одинаковых частиц велико, удобно определить усредненные многочастичные операторы, поделив E_{ij} на N :

$$\frac{E_{ij}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N e_{ij}^{(\alpha)}. \quad (15.15)$$

В предельном случае (при больших N) соотношения коммутативности усредненных многочастичных операторов принимают

очень простой вид:

$$\left[\frac{E_{ij}}{N}, \frac{E_{rs}}{N} \right] = \frac{1}{N} \left(\frac{E_{is}}{N} \delta_{jr} - \frac{E_{rj}}{N} \delta_{st} \right). \quad (15.16)$$

Из (15.13) следует, что матричные элементы усредненных многочастичных операторов E_{ij}/N того же порядка (порядка 1), что и элементы одночастичных операторов. Матричные элементы коммутатора двух усредненных многочастичных операторов имеют порядок $1/N$. В пределе при $N \rightarrow \infty$ усредненные многочастичные операторы коммутируют. Это означает, что они одновременно диагонализуются, т. е. в некотором смысле классические.

Строгое вычисление такого классического предела выходит за рамки настоящей книги. Вместо этого приведем некоторые эвристические рассуждения. Если волновая функция отдельной частицы есть

$$|\psi\rangle \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_r), \quad (15.17)$$

то из условия нормировки $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ следует

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{j=1}^r z_j^* z_j = 1. \quad (15.18)$$

Легко вычислить матричный элемент одночастичного оператора сдвига e_{ij} :

$$\langle \psi | e_{ij} | \psi \rangle = z_i^* z_j. \quad (15.19)$$

Поскольку $E_{ij}/N \sim e_{ij}$, то для предельного классического случая усредненных многочастичных операторов получаем

$$\frac{E_{ij}}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{Классический предел}} z_i^* z_j. \quad (15.20)$$

Этот переход к предельному классическому случаю можно продолжить и для случая бозонных операторов $a_i^\dagger a_j / N$, a_i^\dagger / \sqrt{N} , a_j / \sqrt{N} . В пределе при $N \rightarrow \infty$ эти усредненные операторы коммутируют, поскольку

$$\begin{aligned} \left[\frac{a_i^\dagger a_j}{N}, \frac{a_k^\dagger}{\sqrt{N}} \right] &= \frac{1}{N} \left(\frac{a_i^\dagger}{\sqrt{N}} \right) \delta_{jk}, \\ \left[\frac{a_i^\dagger}{\sqrt{N}}, \frac{a_j}{\sqrt{N}} \right] &= \frac{1}{N} (-I \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Поэтому вполне естественно ожидать, что классические пределы существуют. Непосредственной проверкой из соотношений

$$\begin{array}{ccc} E_{ij}/N \sim a_i^\dagger a_j/N & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ z_i^* z_j & (a_i^\dagger/\sqrt{N})(a_j/\sqrt{N}) & \end{array} \quad (15.22)$$

получаем классический предел $a_j/\sqrt{N} = z_j$ и т. д.

◇◇◇ Классический предел усредненного многочастичного оператора E_{ij}/N есть математическое ожидание этого оператора для состояния $|\Psi\rangle = \prod_{\alpha=1}^N |\psi_\alpha\rangle$, являющегося прямым произведением состояний $|\psi_\alpha\rangle$, каждое из которых имеет вид (15.17). Классический предел усредненного бозонного оператора a/\sqrt{N} есть его среднее для состояния

$$|\Psi_b\rangle = e^{-N|\mu|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu\sqrt{N})^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle, \quad (15.23)$$

где множитель $e^{-N|\mu|^2/2}$ включен из соображений нормировки. В результате имеем

$$\frac{E_{ij}}{N} \rightarrow \langle\Psi| \frac{E_{ij}}{N} |\Psi\rangle = z_i^* z_j, \quad (15.24a)$$

$$\frac{a}{\sqrt{N}} \rightarrow \langle\Psi_b| \frac{a}{\sqrt{N}} |\Psi_b\rangle = \mu. \quad (15.24б)$$

Из условия нормировки $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ вытекает, что z_j должно удовлетворять равенству (15.18). На комплексный параметр μ подобного условия не налагается.

◇◇◇ Поскольку средние операторов E_{ij}/N , a_k/\sqrt{N} и т. д. описывают состояние системы, комплексные переменные z_i , μ_k будем называть *переменными состояниями*.

◇◇◇ Именно такая замена усредненных многочастичных операторов E_{ij}/N и усредненных бозонных операторов a/\sqrt{N} с-числами и является ключевым шагом, позволяющим использовать мощный аппарат теории катастроф для решения сложных задач квантовой механики.

◇◇◇ Следует иметь в виду, что классический предел (15.24a) для усредненных многочастичных операторов справедлив для полностью симметричных представлений унитарных групп, и для таких представлений это можно показать строго. Справедливость предельного перехода (15.24б) для бозонных операторов строго доказать нельзя, однако он остается справедливым для всех случаев, изучаемых в данной главе.

3. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

Мешков, Глик и Липкин (МГЛ) (см. [3]) предложили и исследовали модель ядерных взаимодействий в виде гамильтониана, построенного из псевдоспиновых операторов \mathbf{J} , обладающих свойствами, аналогичными свойствам обычных операторов углового момента. Предложенная ими модель имеет вид

$$\mathcal{H}_{MGL} = \epsilon J_3 + \frac{V}{2N} (J_+^2 + J_-^2) + \frac{W}{2N} (J_+ J_- + J_- J_+). \quad (15.25)$$

При построении этой модели предполагалось, что каждый из N одинаковых нуклонов в ядре может пребывать в одном из двух возможных состояний, разность энергий которых составляет ϵ . Параметры V и W описывают силы квадрупольного взаимодействия. Множитель $1/N$ включен в члены, описывающие взаимодействие, по термодинамическим соображениям [4, 5]. Предполагается, что все нуклоны участвуют в одинаковых взаимодействиях. Операторы J_3 , J_{\pm} являются $(2J + 1) \times (2J + 1)$ -матрицами угловых моментов.

Модельный гамильтониан

$$\mathcal{H}_D = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_{\alpha=1}^N \epsilon \frac{1}{2} \sigma_{(\alpha)}^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=1}^N a^\dagger \sigma_{(\alpha)}^- + a \sigma_{(\alpha)}^+, \quad (15.26)$$

описывающий взаимодействие между одномодальным радиационным полем с энергией $\hbar\omega$ и системой N одинаковых двухуровневых атомов, был предложен и исследован Дикке [6]. Разность энергий основного и возбужденного энергетических уровней составляет ϵ , а сила взаимодействия, описываемая параметром λ , по существу, представляет собой дипольный матричный элемент. Множитель $N^{-1/2}$ включен из термодинамических соображений. Предполагается, что все атомы испытывают одинаковые взаимодействия. Операторы σ^z , σ^\pm являются (2×2) -спинными матрицами Паули.

Между этими двумя гамильтонианами больше общего, чем кажется на первый взгляд. Прежде всего, каждый из них является прототипом очень широкого класса многочастичных гамильтонианов. Кроме того, оба обладают очень похожими критическими свойствами, причем эта аналогия отнюдь не искусственная. На самом деле существует глубокая физическая причина, лежащая в основе этой связи [см. (15.47)].

Дадим общее описание двух обширных классов многочастичных модельных гамильтонианов, прототипами для которых послужили модели МГЛ и Дикке.

3.1. Модели типа МГЛ

Предположим, что каждый из N одинаковых нуклонов может находиться в любом из r возможных состояний с энергией $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_r$. При отсутствии взаимодействий гамильтониан можно выразить через многочастичные операторы

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_i e_{ii}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^r \epsilon_i E_{ii} = N \sum_{i=1}^r \epsilon_i \left(\frac{E_{ii}}{N} \right). \quad (15.27i)$$

Типичный член гамильтониана, описывающий взаимодействие, включает произведение одночастичных операторов рассеяния для двух различных нуклонов. Общий вклад таких членов можно записать в виде

$$V^{(2)} = N^{-1} \sum_{\alpha \neq \beta} V'_{\alpha (ij), \beta (rs)} e_{ij}^{(\alpha)} e_{rs}^{(\beta)}. \quad (15.28)$$

Множитель N^{-1} включен по следующим соображениям. В любом N -нуклонном состоянии $|\Psi\rangle$ — среднее значение оператора $e_{ij}^{(\alpha)}$ любой отдельной частицы по величине порядка единицы. Если элементы матрицы рассеяния V' имеют порядок единицы, то величина суммы в (15.28) порядка N^2 . В результате (15.27i) и (15.28) не будут совпадать по порядку величины, если (15.28) не разделить на N .

На данном этапе целесообразно пояснить, что имеется в виду под «приближением среднего поля». При таком приближении элементы V' матрицы рассеяния в (15.28) не зависят от α и β . Иными словами, для каждой частицы «наблюдаемая картина» взаимодействий такая же, как и для любой другой частицы. Таким образом, взаимодействие типа «частица — частица» можно заменить неким средним взаимодействием

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{(ij)(rs)} V'_{\alpha (ij) \beta (rs)} e_{ij}^{(\alpha)} e_{rs}^{(\beta)} &= \frac{1}{N} \sum_{(ij)(rs)} V_{(ij)(rs)} \sum_{\alpha} e_{ij}^{(\alpha)} \sum_{\beta} e_{rs}^{(\beta)} = \\ &= N \sum_{(ij)(rs)} V_{(ij)(rs)} \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) \left(\frac{E_{rs}}{N} \right). \end{aligned} \quad (15.27ii)$$

В результате замены матричных элементов $(N-1)V' = NV$ сумма включает и «самовзаимодействия» ($\alpha = \beta$).

В приближении среднего поля не принимаются во внимание соображения, учитывающие внутриядерные расстояния, и другие тонкие детали, которые находят отражение в более реалистических моделях ядерных взаимодействий. Тем не менее при таком подходе существенно упрощается расчетная сторона дела и, по существу, «неподъемная» задача заменяется вполне обзорной. Более того, для систем с большим числом нуклонов

такая модель дает достаточно хорошее приближение. При численных расчетах систем с небольшим числом нуклонов на каком-то этапе всегда применяется приближение среднего поля. Исключения составляют лишь необычайно сложные программы для решения специальных задач на ЭВМ.

По причинам феноменологического характера может возникнуть необходимость в рассмотрении членов гамильтониана, описывающих одновременное рассеяние трех или более нуклонов. В приближении среднего поля и с учетом нормировки взаимодействия трех частиц описывается членом вида

$$V^{(3)} = N \sum V_{(ij)(i'j')i''j''} \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) \left(\frac{E_{i'j'}}{N} \right) \left(\frac{E_{i''j''}}{N} \right). \quad (15.27iii)$$

Аналогичный вид имеют члены, описывающие взаимодействие четырех и более нуклонов. Из физических соображений можно ожидать, что 2-нуклонные взаимодействия (15.27ii) более существенны, чем 3-нуклонные (15.27iii); $V^{(3)}$ более важно, чем $V^{(4)}$, и т. д.; N -нуклонный гамильтониан есть сумма членов вида (15.27i), (15.27ii), (15.27iii), ... с убывающей степенью значимости. Его можно записать в виде

$$\frac{\mathcal{H}}{N} = h_Q \left(\frac{E}{N} \right). \quad (15.29)$$

(По техническим причинам будем предполагать, что h_Q является полиномом конечной степени от усредненных многочастичных операторов E/N .)

Гамильтониан МГЛ (15.25) является прототипом гамильтониана вида (15.29). Для получения первого как частного случая (15.29) заметим, что при $r = 2$

$$E_{21} = J_+, \quad E_{12} = J_-, \quad \frac{1}{2}(E_{22} - E_{11}) = J_3, \quad (15.30)$$

и положим

$$\begin{aligned} V_{22} &= \frac{\epsilon}{2}, & V_{(12)(12)} &= V_{(21)(21)} = \frac{V}{2}, \\ V_{11} &= -\frac{\epsilon}{2}, & V_{(12)(21)} &= V_{(21)(12)} = \frac{W}{2}; \end{aligned}$$

при этом все остальные элементы рассеивания равны нулю.

При $r = 2$ гамильтониан (15.29) имеет вид $\mathcal{H} = Nh_Q(\mathbf{J}/N)$. Если h_Q не представим в специальном виде (15.29) как сумма линейного энергетического члена (ϵJ_3) и квадратичного члена взаимодействий ($J_+^2 + J_-^2, \{J_+, J_-\}$), то говорят, что \mathcal{H} является гамильтонианом типа МГЛ.

При $r > 2$ гамильтониан \mathcal{H} является расширенной моделью МГЛ, если он представляет собой сумму линейных энергетических членов ($\epsilon_i E_{ii}$) и квадратичных членов взаимодействия

$(E_{ij}^2 + E_{ji}^2, \{E_{ij}E_{ji}\})$. В противном случае говорят, что он относится к расширенному типу МГЛ (табл. 15.1).

Таблица 15.1. Модели МГЛ и Дикке как прототипы более широких классов модельных гамильтонианов

	Одна подсистема		Две взаимодействующие подсистемы	
	линейные и квадратичные части с симметрией	полином без симметрии	линейные и билинейные части с симметрией	полином без симметрии
$r = 2$ $SU(2)$	МГЛ	Типа МГЛ	Дикке	Типа Дикке
$r > 2$ $SU(r)$	Расширенная МГЛ	Расширенного типа МГЛ	Расширенная Дикке	Расширенного типа Дикке

3.2. Модели типа Дикке

Предположим, что каждый (или каждая) из N одинаковых атомов (или молекул) может находиться в одном из r возможных состояний с энергией $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_r$. Подсистема, состоящая из N одинаковых атомов, может взаимодействовать с другой подсистемой, представляющей собой электромагнитное поле. Предположим для простоты, что с каждой парой уровней взаимодействует одно из возможных состояний поля и что это взаимодействие близко к резонансному, т. е. $\hbar\omega_{ij} \simeq \epsilon_j - \epsilon_i$. Если взаимодействия слабые, то главный член гамильтониана может быть записан через бозонные операторы, действующие на число заполнения уровней, и одночастичные или многочастичные атомные операторы:

$$\mathcal{H} = \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar\omega_{ji} a_{ji}^+ a_{ji} + \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_i e_{ii}^{(\alpha)} + V_{\text{Int}}. \quad (15.31)$$

Для моделирования взаимодействия предположим, что переход из j -го состояния в i -е ($j > i$) связан с испусканием (рождением) фотона в квазирезонансном состоянии. Если λ_{ji} есть дипольный матричный элемент этого перехода, то член взаимодействия имеет вид

$$V_{\text{Int}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j}^r \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{ji} a_{ji}^+ e_{ij}^{(\alpha)} + \lambda_{ji}^* a_{ji} e_{ji}^{(\alpha)}. \quad (15.32)$$

(Множитель $N^{-1/2}$ включен по термодинамическим соображениям.)

Полный гамильтониан (15.31) + (15.32), описывающий взаимодействие между двумя подсистемами [поле с $\binom{r}{2}$ состояниями и N одинаковых r -уровневых атомов], можно записать в виде

$$\frac{\mathcal{H}}{N} = h_Q \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{N}}, \frac{a}{\sqrt{N}}; \frac{E}{N} \right). \quad (15.33)$$

(По техническим соображениям будем предполагать, что h_Q — полином конечной степени от усредненных бозонных операторов a^\dagger/\sqrt{N} , a/\sqrt{N} и усредненных многочастичных операторов E/N .)

Гамильтониан в случае модели Дикке (15.26) является прототипом гамильтонианов вида (15.33). Для вывода гамильтониана Дикке из (15.33) положим

$$\begin{aligned} a_{21}^\dagger &= a^\dagger, & e_{21}^{(\alpha)} &= \sigma_\alpha^+, \\ a_{21} &= a, & e_{12}^{(\alpha)} &= \sigma_\alpha^-, \\ e_{22}^{(\alpha)} - e_{11}^{(\alpha)} &= \sigma_\alpha^z \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= +\frac{\varepsilon}{2}, \\ \hbar\omega_{21} &= \omega, & \lambda_{21} &= \lambda. \\ \varepsilon_1 &= -\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (15.34)$$

Гамильтонианы вида (15.33) называют *моделями Дикке* или *расширенными моделями Дикке* в зависимости от того, $r = 2$ или $r > 2$. Гамильтонианы вида (15.33), включающие дополнительные члены (например, E_{ij}^2 , E_{ij} , $E_{jk}a_{ik}$), кроме билинейных членов взаимодействия вида $a_{ji}^\dagger E_{ij}$, называют *моделями типа Дикке* ($r = 2$) или *моделями расширенного типа Дикке* ($r > 2$) (см. табл. 15.1).

Различие между моделями, для которых прототипами являются модели МГЛ и Дикке, состоит в следующем. В первом случае имеется только одна система (нуклоны), а во втором — две взаимодействующие подсистемы (атом и поле). Для получения моделей расширенного типа Дикке можно воспользоваться приближением среднего поля, как это было сделано для получения моделей расширенного типа МГЛ. В этом приближении поле ведет себя классическим образом по отношению к атомам, а атомы в свою очередь проявляют свойства классического тока по отношению к полю [8]. В таком приближении гамильтониан h_Q заменяется полуклассическим гамильтонианом, описывающим одну систему с квантовомеханических позиций, а дру-

гую — с классических:

$$h_Q \left(\frac{a^\#}{\sqrt{N}}, \frac{E}{N} \right) \rightarrow h_A \left(\left\langle \frac{a^\#}{\sqrt{N}} \right\rangle, \frac{E}{N} \right), \quad (15.35A)$$

$$h_Q \left(\frac{a^\#}{\sqrt{N}}, \frac{E}{N} \right) \rightarrow h_F \left(\frac{a^\#}{\sqrt{N}}, \left\langle \frac{E}{N} \right\rangle \right). \quad (15.35F)$$

Здесь $a^\# = a, a^\dagger$, а средние значения даются (15.24). Полу-классические гамильтонианы для атома h_A и поля h_F коммутарны.

4. АЛГОРИТМ ДЛЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХСЯ ИЗМЕНЕНИЕМ ЭНЕРГИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ

Качественное поведение квантовой системы, находящейся в основном энергетическом состоянии, весьма чувствительно к изменению величины параметров, описывающих в гамильтониане силы взаимодействия. Эти параметры можно трактовать как управляющие параметры системы. В такой ситуации при изменении параметров управления система может претерпевать качественные изменения (фазовые переходы).

Существует простой трехшаговый алгоритм для изучения фазовых переходов в случае моделей, описанных в разд. 3. Этот алгоритм основан на предельных классических результатах, изложенных в разд. 2, и включает следующие шаги:

1. $\mathcal{H}/N = h_Q(a^\#/\sqrt{N}, E/N)$.
2. $h_Q \rightarrow h_C = \langle h_Q \rangle = h_Q(\langle a^\#/\sqrt{N} \rangle, \langle E/N \rangle)$.
3. $E_g/N = \min h_C$.

Качественное изменение основного состояния квантовомеханического гамильтониана $\mathcal{H} = Nh_Q$ происходит, когда качественно меняется минимум классической функции h_C .

5. ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Модель МГЛ

Для данной модели (15.25) первые два шага этого простого алгоритма могут быть представлены как

$$\frac{\mathcal{H}}{N} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{(E_{22} - E_{11})}{N} + \frac{1}{2} V \left\{ \left(\frac{E_{12}}{N} \right)^2 + \left(\frac{E_{21}}{N} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} W \left\{ \frac{E_{12}}{N}, \frac{E_{21}}{N} \right\}, \quad (15.36i)$$

$$h_C = -\frac{1}{2} \varepsilon (z_1^* z_1 - z_2^* z_2) + \frac{1}{2} V \left\{ (z_1^* z_2)^2 + (z_2^* z_1)^2 \right\} + \frac{1}{2} W \left\{ (z_1^* z_2)(z_2^* z_1) + (z_2^* z_1)(z_1^* z_2) \right\}.$$

Классическую функцию h_c следует минимизировать по z_1 и z_2 , где $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Фаза полной волновой функции $|\Psi\rangle = \text{col}(z_1, z_2)$ произвольна. Эту фазу можно выбрать так, чтобы z_1 было действительным и неотрицательным. Тогда $z_1 = \sqrt{1 - z_2^* z_2}$. Удобно определить z_2 как

$$z_2 = e^{-i\phi} \sin \frac{1}{2} \theta. \quad (15.37)$$

В этом случае имеем $z_1 = \cos \frac{1}{2} \theta$.

Используя элементарные тригонометрические тождества $|z_1|^2 - |z_2|^2 = \cos^2 \frac{1}{2} \theta - \sin^2 \frac{1}{2} \theta = \cos \theta$, $z_1^* z_2 = e^{-i\phi} \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} e^{-i\phi} \sin \theta$, функцию h_c можно привести к виду

$$h_c = -\frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta + \frac{1}{2} V \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^2 (e^{-2i\phi} + e^{+2i\phi}) + W \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^2. \quad (15.38)$$

Эта функция зависит от азимутального угла ϕ , если $V \neq 0$. Вначале ее можно минимизировать по ϕ :

$$h'_c = -\frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta + (W - |V|) \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^2. \quad (15.38')$$

Минимум достигается в $\theta = 0$, если параметры квадрупольного взаимодействия V , W малы или равны нулю. Критические точки h'_c можно определить обычными методами:

$$\frac{\partial h'_c}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \sin \theta \{ \varepsilon + (W - |V|) \cos \theta \} = 0. \quad (15.39)$$

Решениями этого уравнения являются

$$\sin \theta = 0, \quad \cos \theta = \frac{\varepsilon}{|V| - W} \quad \text{при } |V| - W > \varepsilon. \quad (15.40)$$

Фазовый переход второго рода имеет место при $|V| - W = \varepsilon$. Энергия одного нуклона в основном состоянии равна

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_g}{N} &= -\frac{1}{2} \varepsilon, & \varepsilon > |V| - W, \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon}{|V| - W} + \frac{|V| - W}{\varepsilon} \right\}, & \varepsilon < |V| - W. \end{aligned} \quad (15.41)$$

На рис. 15.1 это асимптотическое значение величины E_g/N сравнивается с величиной E_g/N при конечных N . Эти конечные значения были подсчитаны путем численной диагонализации гамильтониана (15.25), который является $(2J + 1) \times (2J + 1)$ -матрицей, где $J = N/2$ [10]. Такую диагонализацию матрицы

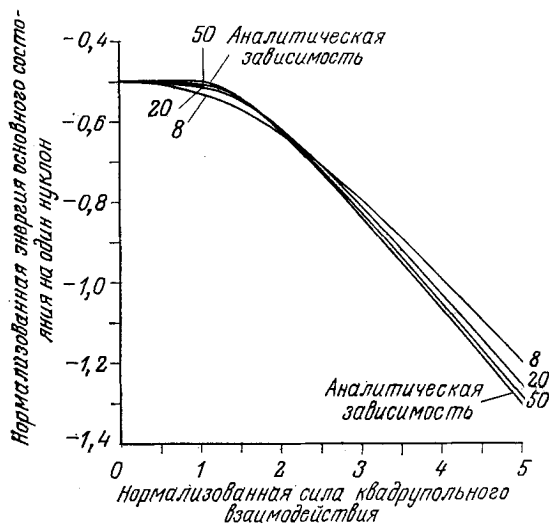


Рис. 15.1. Сравнение энергии основного состояния E_g/N для модели МГЛ (15.36) с $W = 0$, вычисленной путем диагонализации матрицы при $N = 8, 20, 50$, с аналитической зависимостью (15.41) для случая $0 \leq |V|/\epsilon \leq 5$.

необходимо проводить каждый раз, когда изменяются параметры (V, W) . Из рис. 15.1 видно, что численные значения E_g/N сходятся к аналитически полученному асимптотическому значению (15.41) с ростом N .

Гамильтониан (15.25) фактически описывает два процесса. Член ϵJ_3 достигает минимума, когда все нуклоны находятся в основном состоянии. Второй член (V) минимален, когда состояние каждого нуклона есть линейная комбинация основного и возбужденных состояний. Третий член (W) достигает минимума, когда все нуклоны находятся в основном состоянии ($W > 0$) или если состояние каждого нуклона есть линейная комбинация основного и возбужденных состояний ($W < 0$). Сумма этих трех членов минимальна, когда

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \text{col}(1, 0), & \epsilon > |V| - W, \\
 &= \text{col}\left(\left[\frac{|V| - W + \epsilon}{2(|V| - W)}\right]^{1/2}, -\frac{V}{|V|} \left[\frac{|V| - W - \epsilon}{2(|V| - W)}\right]^{1/2}\right), & (15.42) \\
 & & \epsilon < |V| - W.
 \end{aligned}$$

Если сила взаимодействия достаточно велика ($|V| - W > \epsilon$), то она возбуждает каждый нуклон, переводя его в состояние, являющееся линейной комбинацией основного и возбужденных состояний. Это возбуждение, уменьшая собственную энергию отдельных нуклонов (ϵJ_3), еще больше увеличивает энергию

взаимодействия. Именно по этой причине при сильных взаимодействиях нуклоны «предпочитают» находиться в упорядоченном состоянии с $\sin \theta \neq 0$, а не в основном состоянии $\theta = 0$.

◇◇◇ Если $V = 0$, то минимальное значение $\hbar c$ не зависит от азимутального угла ϕ . Эта инвариантность называется *калибровочной инвариантностью*; она исчезает при $V \neq 0$.

5.2. Модель Дикке

Для модели Дикке (15.26) первый шаг алгоритма, описанного в разд. 4, приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}}{N} = \hbar\omega \frac{a^\dagger a}{N} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{(E_{22} - E_{11})}{N} + \lambda \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{N}} \right) \left(\frac{E_{12}}{N} \right) + \\ + \lambda^* \left(\frac{a}{\sqrt{N}} \right) \left(\frac{E_{21}}{N} \right). \end{aligned} \quad (15.43i)$$

Классический предел $\hbar c$ этого оператора получается подстановкой $a^\dagger/\sqrt{N} = \mu^*$ и т. д. В результате $\hbar c$ можно записать через угловые переменные (θ, ϕ) , как это было описано в предыдущем разделе, т. е. в виде

$$\hbar c = \hbar\omega \mu^* \mu - \frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta + \lambda \mu^* \left(\frac{1}{2} e^{-i\phi} \sin \theta \right) + \lambda^* \mu \left(\frac{1}{2} e^{i\phi} \sin \theta \right). \quad (15.43ii)$$

Эта функция инвариантна относительно следующих преобразований:

$$e^{-i\phi} \rightarrow e^{-i(\phi+\psi)}, \quad \mu \rightarrow \mu e^{-i\psi}. \quad (15.44)$$

В модели Дикке также имеется калибровочная инвариантность, как и в модели МГЛ при $V = 0$.

Функцию $\hbar c$ проще всего минимизировать, исключив μ , μ^* и воспользовавшись условием равенства нулю градиента:

$$\frac{\partial \hbar c}{\partial \mu} = \hbar\omega \mu^* + \lambda^* \left(\frac{1}{2} e^{i\phi} \sin \theta \right) = 0. \quad (15.45)$$

В результате получаем функцию от (θ, ϕ)

$$\hbar c = -\frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta - \frac{\lambda^* \lambda}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^2, \quad (15.45')$$

совпадающую с (15.38'), если положить

$$\frac{|\lambda|^2}{\hbar\omega} = |V| - W. \quad (15.46)$$

Модель Дикке (15.26) всегда обладает калибровочной инвариантностью, в то время как для модели МГЛ (15.25) это так,

только если $V = 0$. Отсюда вытекает, что обе модели очень тесно связаны, когда $V = 0$ и $W = -|\lambda|^2/\hbar\omega$.

В моделях МГЛ и Дикке происходят те же самые фазовые переходы второго рода на основном энергетическом уровне, поскольку их потенциалы $\hbar\mathcal{C}$, определяемые формулами (15.38') и (15.45'), по существу, идентичны. Однако, поскольку исходные гамильтонианы не изоморфны, физические детали фазовых переходов различны. Если $|\lambda|^2 > \epsilon\hbar\omega$, затраты энергии на перевод каждого атома в состояние линейной комбинации основного и возбужденных состояний и на то, чтобы в данном состоянии поля число фотонов было отлично от нуля, превосходят энергию, высвобождающуюся в результате поляризационного взаимодействия. Атомная $|\Psi_A\rangle$ и полевая $|\Psi_F\rangle$ суперпозиции состояний, минимизирующие энергию основного состояния (как полную, так и приходящуюся на одну частицу), приведены в табл. 15.2.

Таблица 15.2. Свойства модели Дикке при $N \rightarrow \infty$

Нормализованная константа связи	$ \Psi_A\rangle = \text{col}(z_1, z_2)$	$ \Psi_F\rangle$	E_g/N
$\frac{\lambda^2}{\epsilon\hbar\omega} < 1$	(1, 0)	$ 0\rangle$	$-e/2$
$\frac{\lambda^2}{\epsilon\hbar\omega} > 1$	$\left(\cos \frac{1}{2} \theta, \right.$ $\left. e^{-i\phi} \sin \frac{1}{2} \theta \right)$	$e^{-N \mu ^{1/2}} e^{i\mu\sqrt{N}a^\dagger} 0\rangle$	$-\frac{e}{2} \times$ $\times \frac{1}{2} \left \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right $
$\cos \theta = \epsilon\hbar\omega/\lambda^2$			
$\mu =$			
$= \frac{-\lambda e^{-i\phi} \sin \frac{1}{2} \theta}{2\hbar\omega}$			

◇◇◇ Тесная связь между критическими свойствами моделей МГЛ и Дикке может показаться неожиданной. Однако такое сходство можно пояснить, если трактовать операторы, входящие в модель МГЛ, как c -числа. Тогда «условие равновесия»

$$\frac{\partial \hbar Q}{\partial (a^\dagger/\sqrt{N})} = \hbar\omega \frac{a}{\sqrt{N}} + \lambda \left(\frac{E_{12}}{N} \right) = \left[\frac{a}{\sqrt{N}}, N\hbar Q \right] \simeq 0 \quad (15.47)$$

дает связь между атомными и полевыми операторами, т. е. оператор a/\sqrt{N} «пропорционален» E_{12}/N . Исключив фотонные операторы из гамильтониана (15.43i) и используя (15.47), получим

следующий эффективный гамильтониан:

$$h_Q = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{(E_{22} - E_{11})}{N} - \frac{\lambda^* \lambda}{\hbar \omega} \left(\frac{E_{12}}{N} \right) \left(\frac{E_{21}}{N} \right). \quad (15.48)$$

Естественно поэтому ожидать, что имеется очень сильное сходство между критическими свойствами гамильтонианов МГЛ и Дикке и, даже более того, между расширенными моделями МГЛ и расширенными моделями Дикке. Это, конечно же, не есть строгое доказательство, однако оно полезно как «мостик», соединяющий два класса моделей.

5.3. Расширенные модели МГЛ

Гамильтониан расширенной модели МГЛ можно записать как сумму трех членов:

$$\mathcal{H}_{MGL} = D + V + W, \quad (15.49)$$

$$\frac{D}{N} = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \frac{E_{ii}}{N}, \quad (15.50a)$$

$$\frac{V}{N} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j}^r V_{ij} \left(\frac{E_{ij}}{N} \right)^2 + V_{ji} \left(\frac{E_{ji}}{N} \right)^2, \quad (15.50б)$$

$$\frac{W}{N} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j}^r W_{ij} \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) \left(\frac{E_{ji}}{N} \right) + W_{ji} \left(\frac{E_{ji}}{N} \right) \left(\frac{E_{ij}}{N} \right). \quad (15.50в)$$

Здесь E_{ii} — эрмитов оператор, и $E_{ij} = E_{ji}^\dagger$. Энергии ε_i действительны, и $V_{ij} = V_{ji}^*$, $W_{ij} = W_{ji}^*$. Классический предел функции $h_Q = \mathcal{H}/N$ легко строится по правилам, приведенным в разд. 2:

$$h_C = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i z_i^* z_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j}^r V_{ij} (z_i^* z_j)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j}^r W_{ij} z_i^* z_j^* z_j z_i + \text{Комплексно сопряженные члены.} \quad (15.51)$$

Члены, относящиеся к D и W , инвариантны относительно преобразования $z_j \rightarrow z_j e^{-i\phi_j}$, а член, относящийся к V , не инвариантен. Это соответствует калибровочной инвариантности операторов D и W при замене $E_{ij} \rightarrow e^{i(\phi_i - \phi_j)} E_{ij}$. Расширенная модель МГЛ при $V = 0$ обладает максимальной калибровочной инвариантностью. Чем большее число членов V_{ij} отлично от нуля, тем в большей степени нарушается эта инвариантность.

Фазу констант V_{ij} , описывающих попарное взаимодействие, можно изменить, изменяя фазы амплитуд z_j волновой функции. Эти r степеней свободы можно использовать для того, чтобы r величин V_{ij} из общего числа $\binom{r}{2} = r(r-1)/2$ сделать положительными или равными нулю. При $r=2$ или $r=3$ все постоянные V_{ij} можно сделать действительными, однако при $r>3$ это уже невозможно. Предположим для простоты, что все константы V_{ij} , W_{ij} действительны. Если все V_{ij} действительны, классический предел оператора V имеет стационарное значение только тогда, когда все z_j действительны. Поэтому достаточно минимизировать h_c на сфере

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 = 1, \quad (15.52)$$

где $z_j = x_j$ — действительное число.

Для простоты мы рассматриваем расширенные модели МГЛ, в которых только два уровня — i и j (с $\epsilon_i < \epsilon_j$) — связаны ненулевым квадрупольным взаимодействием. Обозначив $z_j = x_j e^{-i\phi_j}$, получим

$$h_c = \sum_{k=1}^r \epsilon_k x_k^2 + \frac{1}{2} V_{ij} x_i^2 x_j^2 (e^{2i(\phi_j - \phi_i)} + e^{-2i(\phi_j - \phi_i)}) + W_{ij} x_i^2 x_j^2. \quad (15.53)$$

Минимизируя эту величину по азимутальным углам, находим

$$h_c = \sum_{k=1}^r \epsilon_k x_k^2 + (W_{ij} - |V_{ij}|) x_i^2 x_j^2. \quad (15.54)$$

Не теряя общности, для удобства можно положить $W_{ij} = 0$.

Природа фазового перехода главным образом зависит от того, связывает ли квадрупольное взаимодействие два возбужденных состояния или основное и возбужденное [2, 11].

1. $V_{j1} \neq 0$. В этом случае все параметры порядка, кроме $x_1 = \cos \frac{1}{2} \theta$ и $x_j = \sin \frac{1}{2} \theta$, равны нулю в точке минимума h_c , что дает

$$h_c = \frac{1}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_j) + \frac{1}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_j) \cos \theta - |V_{j1}| \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^2. \quad (15.55)$$

Эта функция идентична по виду функции (15.38'); поэтому в системе происходит фазовый переход второго рода основного состояния, когда $|V_{j1}|$ становится больше, чем $\epsilon_j - \epsilon_1$.

2. $V_{ji} \neq 0$, $j > i > 1$. В таком случае все параметры порядка, кроме x_1 , x_i и x_j , равны нулю в точке минимума h_c . Поэтому,

подставив $x_i^2 + x_j^2 = \sin^2 \frac{1}{2} \theta \leq 1$, $x_i^2 / (x_i^2 + x_j^2) = y$, получим

$$h_C - \varepsilon_1 = \Delta_i (1 - y) \sin^2 \frac{1}{2} \theta + \Delta_j y \sin^2 \frac{1}{2} \theta - \\ - |V_{ji}| y (1 - y) \sin^4 \frac{1}{2} \theta, \quad (15.56)$$

где $\Delta_j = \varepsilon_j - \varepsilon_1$. Равновесные состояния определяются обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial y} (h_C - \varepsilon_1) = \{ \}_1 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 0, \quad (15.57a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h_C - \varepsilon_1) = \{ \}_2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right) = 0. \quad (15.57b)$$

Эти уравнения всегда имеют решение $\theta = 0$, соответствующее тому, что все нуклоны находятся в основном состоянии ($z_1 = 1$, $z_k = 0$, $k > 0$). Такое состояние всегда является локальным минимумом, и в этом минимуме $h_C = \varepsilon_1$.

Если (15.57a) выполняется, то может существовать другое решение при $\theta = \pi$. Для этого требуется, чтобы

$$\{ \}_1 = \Delta_j - \Delta_i - |V_{ji}| (1 - 2y) \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 0, \quad (15.58a)$$

откуда $y = \frac{1}{2} - [(\varepsilon_j - \varepsilon_i) / 2 |V_{ji}|]$. Поскольку $0 \leq y \leq 1$, эта критическая точка может существовать только тогда, когда $|V_{ji}| > \Delta_j - \Delta_i = \varepsilon_j - \varepsilon_i$. Она также является локальным минимумом, в котором

$$h_C - \varepsilon_1 = \frac{1}{2} (\Delta_j + \Delta_i) - \frac{1}{4} |V_{ji}| - \frac{1}{4 |V_{ji}|} (\Delta_j - \Delta_i)^2. \quad (15.59a)$$

Этот локальный минимум имеет критическое значение ε_1 , когда $\sqrt{|V_{ji}|} = \sqrt{\Delta_j} + \sqrt{\Delta_i}$. Фазовый переход первого рода основного состояния происходит, когда $|V_{ji}|$, возрастая, переходит через $(\sqrt{\Delta_j} + \sqrt{\Delta_i})^2$. При таком фазовом переходе параметр порядка x_1 перескакивает с $+1$ в 0 , а остальные параметры изменяются следующим образом:

$$x_i^2: 0 \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta_i}}{\sqrt{\Delta_j} + \sqrt{\Delta_i}}, \quad x_j^2: 0 \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta_j}}{\sqrt{\Delta_j} + \sqrt{\Delta_i}}. \quad (15.60)$$

Третье решение существует при $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$, если можно одновременно удовлетворить равенствам (15.57a) и (15.57b). Кроме (15.58a), для этого требуется

$$\{ \}_2 = \Delta_j y + \Delta_i (1 - y) - 2 |V_{ji}| y (1 - y) \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 0. \quad (15.58b)$$

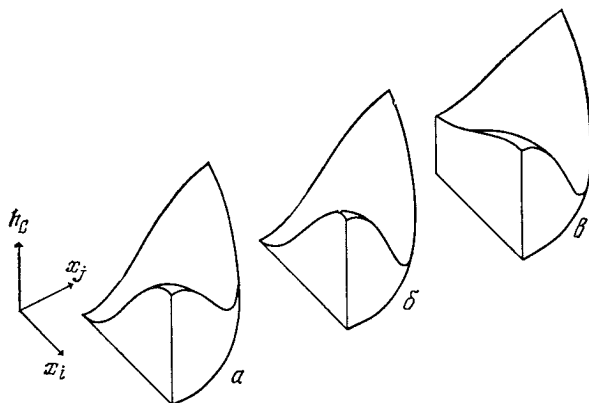


Рис. 15.2. Форма h_c (15.56) при $T = 0$ для многоуровневого гамильтониана МГЛ.

Здесь x_i, x_j — соответствующие параметры порядка, $r = (\epsilon_i - \epsilon_1) / (\epsilon_j - \epsilon_1) = 0,8$, и в квадрупольном взаимодействии V_{ij} участвуют два возбужденных уровня. Показан лишь квадрант $0 \leq \theta \leq \pi$. Фазовый переход первого рода происходит при $V_{ij} = 3,59$. $a - V_{ij} = -2,5$; $b - V_{ij} = 3,59$; $c - V_{ij} = 6$.

Уравнения (15.58a) и (15.58б) одновременно удовлетворяются следующим образом:

$$y = \frac{\Delta_i}{\Delta_j + \Delta_i}, \quad \sin^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{\Delta_j - \Delta_i}{|V_{ji}|} \leq 1. \quad (15.59c)$$

Это решение является седлом, разделяющим локальные минимумы в $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. В этой критической точке $h_c - \epsilon_1 = \Delta_j \Delta_i / |V_{ji}|$.

Основное энергетическое состояние системы с ростом константы $|V_{ji}|$ ведет себя следующим образом. При $|V_{ji}| < \epsilon_j - \epsilon_i$ имеется только один минимум в $\theta = 0$. Когда $|V_{ji}| = \epsilon_j - \epsilon_i$, в точке $\theta = \pi$ возникает вырожденная критическая точка катастрофы складки. С ростом $|V_{ji}|$ эта вырожденная критическая точка расщепляется в седло при $\theta \neq \pi$ и локальный минимум при $\theta = \pi$. Этот локальный минимум остается метастабильным до тех пор, пока $|V_{ji}| = (\sqrt{\Delta_j} + \sqrt{\Delta_i})^2$. При дальнейшем возрастании $|V_{ji}|$ происходит фазовый переход первого рода. Логарифм времени туннелирования от метастабильного к устойчивому минимуму пропорционален высоте $\Delta_j \Delta_i / |V_{ji}|$ разделяющего их седлового барьера.

На рис. 15.2 показана функция h_c для трех значений константы V_{ji} при фиксированных значениях энергетических уровней ϵ_k .

5.4. Расширенные модели Дикке

Гамильтониан h_Q для расширенных моделей Дикке и его классический предел h_C имеют вид

$$h_Q = \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar \omega_{ji} \frac{a_{ji}^\dagger a_{ji}}{N} + \sum_{1 \leq i}^r \epsilon_i \frac{E_{ii}}{N} + \\ + \sum_{1 \leq i < j}^r \lambda_{ji} \left(\frac{a_{ji}^\dagger}{\sqrt{N}} \right) \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) + \text{Эрмитово сопряженный член,} \quad (15.61a)$$

$$h_C = \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar \omega_{ji} \mu_{ji}^* \mu_{ji} + \sum_{1 \leq i}^r \epsilon_i z_i^* z_i + \sum_{1 \leq i < j}^r \lambda_{ji} \mu_{ji}^* z_i^* z_j + \\ + \text{Комплексно сопряженный член.} \quad (15.61b)$$

Критические точки функции h_C легче всего найти, исключив из (15.61) параметры порядка для фотона μ , μ^* , воспользовавшись соотношением

$$\frac{\partial h_C}{\partial \mu_{ji}^*} = \hbar \omega_{ji} \mu_{ji} + \lambda_{ji} z_i^* z_j = 0. \quad (15.62)$$

В результате получаем функцию

$$h'_C = \sum_{i=1}^r \epsilon_i z_i^* z_i - \sum_{1 \leq i < j}^r \frac{|\lambda_{ji}|^2}{\hbar \omega_{ji}} z_i^* z_i z_j^* z_j. \quad (15.63)$$

Эта редуцированная функция идентична классической функции (15.51) (которая описывает критические свойства основного состояния для расширения гамильтонианов МГЛ), если положить

$$V_{ji} = 0, \quad + W_{ji} = - \frac{|\lambda_{ji}|^2}{\hbar \omega_{ji}}. \quad (15.64)$$

В результате туннельные инвариантности и критические свойства этих моделей изоморфны. Имеет место взаимно-однозначное соответствие между состояниями поляризации N -нуклонной системы и атомарной подсистемы системы атом — поле. Квантовое состояние поля можно построить в соответствии с табл. 15.2.

То, что должна существовать какая-то связь между этими двумя моделями, уже не удивляет, если вспомнить рассуждения на стр. 22. В расширенной модели Дикке атомы взаимодействуют между собой только через поле. Поляризация атома действует как классический источник, воздействующий на поле, которое в свою очередь переносит эту информацию другим атомарным подсистемам посредством взаимодействия атом — поле. Поле как промежуточное звено с успехом можно заменить

атомными операторами в предельном случае больших N . Следующие нестрогие рассуждения делают это утверждение по крайней мере правдоподобным. Прежде всего,

$$\frac{\partial h_Q}{\partial (a_{ii}^+/\sqrt{N})} = \hbar\omega_{ji} \frac{a_{ji}}{\sqrt{N}} + \lambda_{ji} \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) \simeq 0. \quad (15.65)$$

Знак \simeq означает, что этот оператор, действуя на прямое произведение состояний $|\psi_a\rangle \otimes |\psi_f\rangle$, становится сколь угодно малым по мере приближения данного прямого произведения к основному энергетическому уровню ($N \rightarrow \infty$). Можно воспользоваться этим соотношением между атомными и полевыми операторами для исключения операторов поля из h_Q в (15.61a). Это приводит к равенству

$$h'_Q = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \frac{E_{ii}}{N} - \sum_{1 \leq i < j}^r \frac{|\lambda_{ji}|^2}{\hbar\omega_{ji}} \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) \left(\frac{E_{ji}}{N} \right). \quad (15.66)$$

Поскольку усредненные многочастичные операторы коммутируют [см. (15.16)], их порядок в (15.66) не существен. Сравнивая (15.66) и (15.50), уже можно почувствовать причины существования связи между критическими свойствами расширенных моделей МГЛ и Дикке.

6. АЛГОРИТМ ДЛЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

До сих пор мы рассматривали лишь фазовые переходы основного энергетического состояния. Они могут происходить при нулевой температуре при изменении констант связи, характеризующих данную систему. Обычно в конкретной системе эти константы фиксированы, и для изучения таких фазовых переходов нужно найти более тонкие методы. В случае твердых тел этого можно добиться, изменяя изотопное давление, в ядрах — исследуя изотопные или изотонные последовательности. Этими методами определялись фазовые переходы основного состояния.

В лабораторных условиях обычно проще исследовать термодинамические фазовые переходы, а не фазовые переходы основного состояния, поскольку в данном случае меняется лишь один параметр управления — температура T . В этом разделе будет описан простой алгоритм для изучения термодинамических фазовых переходов модельных гамильтонианов в приближении среднего поля, рассмотренных в разд. 3.

При конечной температуре состояние квантовомеханической системы, пребывающей в термодинамическом равновесии, не является чистым квантовым состоянием $|\psi_i\rangle$, а скорее представляет собой статистическую смесь чистых состояний. Состояние

$|\psi_i\rangle$ имеет вероятность $P_i \simeq e^{-\beta E_i}$, где E_i — энергетическое собственное значение $|\psi_i\rangle$, а $\beta = 1/kT$. Среднее любого оператора \mathcal{O} есть

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum P_i \langle \psi_i | \mathcal{O} | \psi_i \rangle = \text{tr} (|\psi_i\rangle P_i \langle \psi_i|) \mathcal{O} = \text{tr} \rho \mathcal{O}. \quad (15.67)$$

Оператор ρ называют *оператором плотности*. В пределе при температуре, стремящейся к нулю, в этой сумме остается лишь член с минимальной энергией $|\psi_g\rangle$, т. е.

$$\langle \mathcal{O} \rangle \xrightarrow{T \rightarrow 0} \langle \psi_g | \mathcal{O} | \psi_g \rangle. \quad (15.68)$$

Среднее значение оператора может быть определено по одному чистому состоянию только в этом предельном случае. При $T \neq 0$ состояние квантовомеханической системы уже определяется не из условия минимума энергии, а из условия минимума свободной энергии. Свободная энергия F определяется по функции разбиения Z из уравнения

$$e^{-\beta F} = Z = \text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (15.69)$$

Нас интересует предельное (при $N \rightarrow \infty$) значение величины свободной энергии, приходящейся на одну частицу (нуклон, атом, молекула):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} = - \frac{1}{\beta N} \ln \text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (15.70)$$

Эту величину можно подсчитать для гамильтонианов рассматриваемого класса, причем используются описанные ниже теоретико-групповые приемы. Полученная оценка приводит к алгоритму, описанному ниже вслед за обсуждением некоторых технических деталей. Читатели, не интересующиеся этими подробностями, могут опустить их и перейти непосредственно к алгоритму.

Обсуждение [9]. Вычисление F/N производится по следующим простым этапам:

1. Гильбертово пространство, в котором действует оператор \mathcal{H} , разбивается на ряд меньших подпространств. Каждое подпространство неприводимо относительно действия динамической группы $U(\tau)$ [8, 12].

2. При помощи неравенств Боголюбова и Либа [13] в каждом неприводимом подпространстве устанавливаются нижние и верхние границы величины $\text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$.

3. Эти границы суммируются по всем неприводимым подпространствам с учетом кратности; в результате получаются нижние и верхние границы для функции разбиения Z .

4. Для построения границ для свободной энергии вычисляются логарифмы полученных границ.

5. Логарифм (мультипликативного) множителя кратности становится описывающим беспорядок аддитивным членом, в конечном счете интерпретируемым как энтропия.

6. Разность верхней и нижней границ интенсивной свободной энергии F/N стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, эта процедура дает оценку величины F/N , которая становится точной при $N \rightarrow \infty$. Эта оценка определяется простым четырехшаговым алгоритмом:

1. $\mathcal{H}/N = h_Q(a^\#/\sqrt{N}, E/N)$.
2. $h_Q \rightarrow h_C = \langle h_Q \rangle_T = h_Q(\langle a^\#/\sqrt{N} \rangle_T, \langle E/N \rangle_T)$.
3. $\Phi = h_C - kT_\delta(\delta)$.
4. $E/N = \min \Phi$.

Данный алгоритм очень похож на алгоритм определения усредненной энергии основного состояния E_g/N , за исключением двух существенных моментов:

1. $\langle h_Q \rangle_T$ есть среднее, вычисляемое из (15.67) при конечной температуре. Классические пределы $\langle \cdot \rangle_T$ являются классическими пределами при конечной температуре (т. е. взятыми в пространствах, отличных от пространства, содержащего основное энергетическое состояние). Для фотонных операторов

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{a^\dagger}{\sqrt{N}} \right\rangle_T &= \left\langle \frac{a^\dagger}{\sqrt{N}} \right\rangle_{T=0} = \mu^*, \\ \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_T &= \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{T=0} = \mu. \end{aligned} \quad (15.71)$$

Для операторов углового момента

$$\langle J_z \rangle_T = r \cos \theta, \quad \langle J_\pm \rangle_T = r \sin \theta e^{\pm i\phi}, \quad (15.72)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leftarrow \beta \rightarrow \infty. \quad (15.73)$$

Классические пределы $\langle E_{ij}/N \rangle_{T \neq 0}$ для групп $U(r)$ известны, но не настолько просты, чтобы их можно было включить в эту книгу.

2. Логарифмы множителя, учитывающего кратность, есть

$$s(\delta) = - \sum_{i=1}^r \delta_i \ln \delta_i, \quad \text{где} \quad (15.74a)$$

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_r \geq 0,$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_r = 1. \quad (15.74b)$$

(Множители δ_i — отношения длин разбиения Юнга λ_i к числу частиц N : $\delta_i = \lambda_i/N$.) Для $SU(2)$ имеем $\lambda_1 + \lambda_2 = N$, $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = 2J$,

$$r = J/N, \quad \delta_1 = \frac{1}{2} + r, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} - r \quad \text{и}$$

$$s(r) = - \left\{ \left(\frac{1}{2} + r \right) \ln \left(\frac{1}{2} + r \right) + \left(\frac{1}{2} - r \right) \ln \left(\frac{1}{2} - r \right) \right\}, \quad (15.75)$$

где $0 \leq r = J/N \leq \frac{1}{2}$ входит в классический предел операторов углового момента.

Пример. В случае N одинаковых двухуровневых систем алгоритм выглядит следующим образом:

1. $\mathcal{H}/N = h_Q(a/\sqrt{N}, a^\dagger/\sqrt{N}, J_3/N, J_+/N, J_-/N)$.
2. $h_C(\mu, \mu^*, r, \theta, \phi) = h_Q(\mu, \mu^*, r \cos \theta, r \sin \theta e^{i\phi}, r \sin \theta e^{-i\phi})$.
3. $\Phi(\beta) = h_C(\mu, \mu^*, r, \theta, \phi) - kT s(r)$.
4. $F(\beta)/N = \min_{\mu, \mu^*, r, \theta, \phi} \Phi(\beta)$.

◇◇◇ В пределе при $T \rightarrow 0$ $F \rightarrow E_g$ и этот алгоритм сводится к алгоритму определения E_g/N , описанному в разд. 4.

7. ПРИЛОЖЕНИЯ

7.1. Модели МГЛ и Дикке

Гамильтониан МГЛ h_Q и потенциал, полученный из него по указанному алгоритму, имеют вид

$$h_Q = \varepsilon \frac{J_3}{N} + \frac{1}{2} V \left[\left(\frac{J_+}{N} \right)^2 + \left(\frac{J_-}{N} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} W \frac{[J_+ J_- + J_- J_+] }{N^2}, \quad (15.76a)$$

$$\Phi_{MGL} = -\varepsilon r \cos \theta + \frac{1}{2} V (r \sin \theta)^2 (e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) + W (r \sin \theta)^2 - kT s(r), \quad (15.76b)$$

где $s(r)$ определяется выражением (15.75). Прежде чем обсуждать термодинамические свойства этой модели, построим потенциал для модели Дикке:

$$h_Q = \hbar\omega \frac{a^\dagger a}{N} + \varepsilon \frac{J_3}{N} + \lambda \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{N}} \right) \left(\frac{J_-}{N} \right) + \lambda^* \left(\frac{a}{\sqrt{N}} \right) \left(\frac{J_+}{N} \right), \quad (15.77a)$$

$$\Phi_D = \hbar\omega \mu^* \mu - \varepsilon r \cos \theta + \lambda \mu^* r \sin \theta e^{-i\phi} + \lambda^* \mu r \sin \theta e^{+i\phi} - kT s(r). \quad (15.77b)$$

Этот потенциал можно исследовать, исключив из него μ, μ^* с помощью соотношения $\partial \Phi_D / \partial \mu^* = 0$. Поскольку энтропия не зависит от параметров порядка поля, дальнейшая процедура ана-

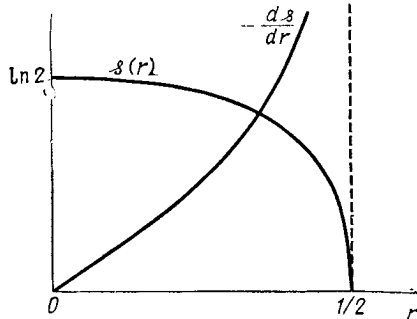


Рис. 15.3. Зависимость логарифма кратности $s(r)$ группы $SU(2)$ и его производной $s'(r)$ от $r = J/N$.

$$s(r) = -\{(1/2+r) \ln(1/2+r) + (1/2-r) \ln(1/2-r)\}, \quad \frac{ds(r)}{dr} = \ln \frac{1-2r}{1+2r}.$$

логична указанной в разд. 6, и редуцированный термодинамический потенциал для модели Дикке принимает вид

$$\Phi_D = -\epsilon r \cos \theta - \frac{\lambda^* \lambda}{\hbar \omega} (r \sin \theta)^2 - kT s(r). \quad (15.78)$$

Критические свойства модели Дикке изоморфны критическим свойствам модели МГЛ как в термодинамическом [ср. (15.78) с (15.766)] случае, так и в случае основного энергетического состояния. Причины остаются теми же.

Прежде чем перейти к подробному анализу функции Φ_{MGL} , рассмотрим свойства энтропийного члена $-kT s(r)$. Свойства $s(r)$ иллюстрируются на рис. 15.3. Заметим, что хотя функция $s(r)$ ограничена на $[0, \frac{1}{2}]$, ее производная $s'(r)$ этим свойством не обладает. Отметим, кроме того, что функция h_c конечна для всех значений (r, θ, ϕ) , $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. В пределе при $T \rightarrow 0$ наиболее важный вклад в потенциал Φ вносит энергетический член:

$$\Phi \xrightarrow{T \rightarrow 0} h_c = \langle h_Q \rangle_{T=0}. \quad (15.79)$$

При $T \rightarrow \infty$ наиболее важную роль начинает играть энтропийный член:

$$\Phi \xrightarrow{T \rightarrow \infty} kT \ln 2 + \text{Небольшая поправка}. \quad (15.80)$$

Теперь можно перейти к обсуждению термодинамических критических свойств модели МГЛ. Не теряя общности, положим $W = 0$. Минимизация по ϕ приводит к редуцированному потенциалу

$$\Phi'(\beta) = -\epsilon r \cos \theta - |V|(r \sin \theta)^2 - kT s(r). \quad (15.81)$$

При $T \rightarrow 0$ остается только энергетический член, и его экстремальное значение находится выбором наибольшего возможного r : $r = J/N = 1/2$. При таком выборе h_c сводится к (15.38'). Минимум Φ' достигается при $\theta = 0$, если $\varepsilon > |V|$, и при $\cos \theta = \pm \varepsilon/|V|$, если $\varepsilon < |V|$.

При $T \rightarrow \infty$ энтропийный член доминирует над энергетическим. Значение r , минимизирующее Φ' , определяется из уравнения

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial r} = -\varepsilon \cos \theta - 2r|V| \sin^2 \theta - kT \ln \frac{1-2r}{1+2r} = 0. \quad (15.82)$$

Член $\partial h_c / \partial r$ ограничен, поэтому член $-kT \ln [(1-2r)/(1+2r)]$ должен быть конечным. Последнее означает, что $r \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. При таком предельном переходе мы можем пренебречь членом $-2r|V| \sin^2 \theta$ по сравнению с членом $\varepsilon \cos \theta$. Если пренебречь членами, описывающими взаимодействия в Φ' , то минимум по θ достигается при $\theta = 0$. При этом условии r определяется приближенно как

$$r(\beta) \simeq \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta \varepsilon. \quad (15.83)$$

◇◇◇ С ростом температуры члены, описывающие взаимодействия, становятся не существенными по сравнению с диагональным членом εJ^3 , поскольку они зависят от r^2 , а диагональный член — от r^1 . При $T \rightarrow \infty$ можно пренебречь членами, описывающими взаимодействия, при вычислении параметров (θ, ϕ) , минимизирующих Φ . Термодинамическое поведение при высоких температурах такое же, как при слабых взаимодействиях на основном энергетическом уровне. Повышение температуры приводит к тому, что константы связи стремятся к нулю.

Будем исследовать термодинамический фазовый переход, разлагая Φ' в окрестности нуля и рассматривая коэффициент при квадратичном члене как функцию возрастающего r или убывающей температуры:

$$\begin{aligned} \Phi' = & (-\varepsilon r - kT_s(r)) + \left(\frac{1}{2}\varepsilon r - |V|r^2\right)\theta^2 + \\ & + \left(-\frac{\varepsilon r}{4!} + \frac{1}{3}|V|r^2\right)\theta^4 + \dots \end{aligned} \quad (15.84)$$

Первый член достигает минимума при

$$2r = \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta \varepsilon \quad (15.85)$$

в силу (15.83). Коэффициент при квадратичном члене обращается в нуль при

$$2r = \frac{\varepsilon}{|V|}. \quad (15.86)$$

Если квадратичный член исчезает, коэффициент при члене четвертой степени положителен; поэтому Φ' имеет вырожденную критическую точку типа A_{+3} , если $\varepsilon/|V| < 1$ и

$$r_c = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{|V|}, \quad \theta = 0. \quad (15.87)$$

Термодинамический фазовый переход второго рода происходит при критической температуре, определяемой из уравнения

$$\frac{\varepsilon}{|V|} = \text{th} \frac{1}{2} \beta_c \varepsilon. \quad (15.88)$$

7.2. Расширенные модели МГЛ и Дикке

Критические свойства термодинамических величин, входящих в расширенные модели МГЛ, эквивалентны аналогичным параметрам модели Дикке. Эта эквивалентность может быть установлена с помощью тех же рассуждений, что использовались при доказательстве эквивалентности критических параметров (показателей) основного энергетического состояния систем, описываемых моделями Дикке и двух- и r -уровневыми моделями МГЛ.

Раньше мы пользовались этой аналогией при изучении более простых моделей МГЛ, чем модели Дикке. В данном же случае удобной оказывается обратная процедура, поскольку классические предельные значения операторов E_{ij}/N ($1 \leq i, j \leq r$, $r > 2$) при конечной температуре имеют довольно сложный вид. Поэтому целесообразно перейти к полуклассическому пределу (15.35), заменив все фотонные операторы их средними. Тогда полуклассический гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar \omega_{ji} a_{ji}^\dagger a_{ji} + \sum_{1 \leq i < j}^r \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_i e_{ii}^{(\alpha)} + \\ & + \sum_{1 \leq i < j}^r \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{ji} \frac{a_{ji}^\dagger}{\sqrt{N}} e_{ij}^{(\alpha)} + \lambda_{ji}^* \frac{a_{ji}}{\sqrt{N}} e_{ji}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (15.89i)$$

$$\mathcal{H}_{SC} = N \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar \omega_{ji} \mu_{ji}^* \mu_{ji} + \sum_{\alpha=1}^N M^{(\alpha)}, \quad (15.89ii)$$

$$M^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i e_{ii}^{(\alpha)} + \sum_{1 \leq i < j}^r \lambda_{ji} \mu_{ji}^* e_{ij}^{(\alpha)} + \lambda_{ji}^* \mu_{ji} e_{ji}^{(\alpha)}. \quad (15.89iii)$$

Каждый оператор $M^{(\alpha)}$ является $(r \times r)$ -матрицей, описывающей взаимодействие α -го атома с классическим внешним полем. В предположении среднего поля каждый атом, находящийся в энергетическом состоянии r , испытывает воздействие того же

самого внешнего поля, поэтому $M^{(\alpha)} = M$ для всех α . Поскольку свободная энергия равна

$$e^{-\beta F} = \text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{-\beta N} \sum \hbar \omega_{ji} \mu_{ji}^* \mu_{ji} \text{tr} \exp \left[-\beta \sum_{\alpha=1}^N M \right],$$

$$\text{tr} \exp \left[-\beta \sum_{\alpha=1}^N M \right] = \text{tr} \prod_{\alpha=1}^N e^{-\beta M} = \prod_{\alpha=1}^N \text{tr} e^{-\beta M} = (\text{tr} e^{-\beta M})^N \quad (15.90)$$

Свободная энергия одного нуклона составляет

$$\frac{F}{N} = \min \Phi,$$

$$\Phi = \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar \omega_{ji} \mu_{ji}^* \mu_{ji} - kT \ln \text{tr} (e^{-\beta M}). \quad (15.91)$$

Изучение критических свойств функции Φ не вызывает особых трудностей при условии, что из всех констант связи λ_{ji} лишь одна отлична от нуля.

Отличны от нуля только два недиагональных элемента матрицы M . Это позволяет легко вычислить ее собственные значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \hat{\varepsilon}_i, \dots, \hat{\varepsilon}_j, \dots, \varepsilon_r$ и

$$\varepsilon_{\pm} = \left(\frac{\varepsilon_j + \varepsilon_i}{2} \right) \pm \left[\left(\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{2} \right)^2 + |\lambda_{ji}^* \mu_{ji}|^2 \right]^{1/2}. \quad (15.92)$$

Как и в случае фазовых переходов, критические значения термодинамических величин зависят от следующих условий: (1) находятся ли оба взаимодействующих атома в возбужденном состоянии или (2) один из них находится в возбужденном состоянии, а другой — в основном.

1. $\lambda_{j1} \neq 0$. В этом случае результатом взаимодействия будет уменьшение энергии основного состояния. Это означает, что следует ожидать фазового перехода второго рода. Последний можно определить, разложив потенциальную функцию Φ по степеням $|\mu_{j1}|^2$. В результате получаем

$$\Phi = \hbar \omega_{j1} |\mu_{j1}|^2 - kT \ln \left[z(\beta) + (e^{-\beta \varepsilon_1} - e^{-\beta \varepsilon_j}) \frac{|\lambda_{j1}^* \mu_{j1}|^2}{kT(\varepsilon_j - \varepsilon_1)} \right] =$$

$$= -kT \ln z(\beta) + \left\{ \hbar \omega_{j1} + \frac{e^{-\beta \varepsilon_j} - e^{-\beta \varepsilon_1}}{z(\beta)} \frac{|\lambda_{j1}|^2}{\varepsilon_j - \varepsilon_1} \right\} |\mu_{j1}|^2 + \mathcal{O}(4), \quad (15.93)$$

где
$$z(\beta) = \sum_{i=1}^r e^{-\beta \varepsilon_i}. \quad (15.94)$$

Критическая температура, при которой исчезает коэффициент при квадратичном члене, определяется равенством

$$\frac{\hbar\omega_{j1}(\varepsilon_j - \varepsilon_1)}{|\lambda_{j1}|^2} = - \frac{e^{-\beta\varepsilon_j} - e^{-\beta\varepsilon_1}}{z(\beta)}. \quad (15.95)$$

При такой критической температуре коэффициент при члене в четвертой степени положителен. Следовательно, при критической температуре T_c многоуровневая система претерпевает термодинамический фазовый переход второго рода [катастрофа типа (A_{+3})], если $(\varepsilon_j - \varepsilon_1)\hbar\omega_{j1}/|\lambda_{j1}|^2 < 1$. Заметим, что это условие совпадает с условием фазового перехода первого рода с изменением энергии основного состояния.

2. $\lambda_{ji} \neq 0$, $j > i > 1$. В этом случае имеем

$$\Phi(\beta) = \hbar\omega_{ji}|\mu_{ji}|^2 - kT \ln \left[\sum' e^{-\beta\varepsilon_k} + e^{-\beta(\varepsilon_j + \varepsilon_i)/2} (e^{\beta\theta} + e^{-\beta\theta}) \right],$$

$$\theta^2 = \left(\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{2} \right)^2 + |\lambda_{ji}^* \mu_{ji}|^2. \quad (15.96)$$

(Штрих у знака суммирования означает, что сумма не содержит членов, относящихся к i -му и j -му уровням; кроме того, следует иметь в виду, что λ_{ij} — действительное, а μ_{ji} — неотрицательное числа.)

Критическое поведение функции $\Phi(\beta)$ можно исследовать, перейдя к пределу при $T \rightarrow 0$ и рассматривая бифуркации упорядоченных решений в окрестности критической точки, которая существует при $\mu_{ji} = 0$ для всех температур (в силу симметрии относительно замены $\mu_{ji} \rightarrow -\mu_{ji}$). Эти частные случаи показывают, что параметр порядка имеет четыре конкретных значения, характеризующих критические значения термодинамических величин, входящих в рассматриваемые модели [14].

При $T \rightarrow 0$ в член из (15.91), содержащий логарифм, входит только минимальное (наименьшее) собственное значение матрицы M (15.92), которое равно либо ε_1 , либо $1/2(\varepsilon_j + \varepsilon_i) - \theta$ в зависимости от значения μ_{j1} . Легко убедиться, что $\Phi(\beta)$ имеет две стационарные точки с $\mu_{ji} > 0$, когда $\Lambda^2 > \Lambda_1^2 = 1 + 2(\Delta_{i1}/\Delta_{j1})$, где $\Lambda_{ji}^2 = \lambda_{ji}^2/(\varepsilon_j - \varepsilon_i)\hbar\omega_{ji}$; $\Delta_{ji} = \varepsilon_j - \varepsilon_i$. Меньшее из ненулевых решений уравнения $\partial\Phi/\partial\mu_{ji} = 0$ всегда неустойчиво; большее метастабильно относительно локального равновесия при $\mu_{ji} = 0$ для $\Lambda^2 < \Lambda_2^2$ и глобально устойчиво для $\Lambda^2 > \Lambda_2^2$ [где $\Lambda_2 - \Lambda_2^{-1} = 2(\Delta_{i1}/\Delta_{j1})^{1/2}$].

Ветвления в критической точке $\mu_{ji} = 0$ определяются из разложения $\Phi(\beta, \mu_{ji})$ в ряд Тейлора по степеням $|\mu_{ji}|^2$:

$$\Phi(\beta, \mu_{ji}) = -\beta^{-1} \ln z(\beta) + C_2(\beta) |\mu_{ji}|^2 + C_4(\beta) |\mu_{ji}|^4 + \dots,$$

$$z(\beta) = \sum_{i=1}^r e^{-\beta \varepsilon_i},$$

$$C_2(\beta) = \hbar \omega_{ji} - \frac{\lambda_{ji}^2}{\varepsilon_j - \varepsilon_i} \frac{e^{-\beta \varepsilon_i} - e^{-\beta \varepsilon_j}}{z(\beta)}. \quad (15.97)$$

Ненулевые решения в результате бифуркации ответвляются от $\mu_{ji} = 0$ при $C_2(\beta) = 0$. Наименьшее значение λ_{ji} , при котором может произойти такая бифуркация, определяется из условия

$$\max_{T \in [0, \infty)} \Lambda_3^2 \frac{e^{-\beta \varepsilon_i} - e^{-\beta \varepsilon_j}}{z(\beta)} = 1. \quad (15.98)$$

Функция $(e^{-\beta \varepsilon_j} - e^{-\beta \varepsilon_i})/z(\beta)$ асимптотически стремится к нулю при $T \rightarrow 0$ или $T \rightarrow \infty$ и имеет в этой области единственный максимум. При $\Lambda > \Lambda_3^2$ существуют два ненулевых решения, ответвляющихся от ветви $\mu_{ji} = 0$. Решение, ответвляющееся при более низкой температуре, всегда неустойчиво. Устойчивость решения, ответвляющегося при более высокой температуре, зависит от знака $C_4(\beta)$, который отрицателен при $\Lambda^2 = \Lambda_3^2$ и становится положительным при возрастании T (когда Λ^2 возрастает).

Критические значения термодинамических величин, входящих в расширенные модели МГЛ и Дикке с одним ненулевым взаимодействием между двумя возбужденными атомами, определяются величиной константы связи λ_{ji} или безразмерной константы $\Lambda_{ji} = \lambda_{ji}/(\varepsilon_j - \varepsilon_i)$. Константа связи имеет четыре критических значения:

$$(\Lambda_{ji})_1^2 = \frac{1 + \gamma_{ji}}{1 - \gamma_{ji}}, \quad \gamma_{ji} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_1}{\varepsilon_j - \varepsilon_1} < 1,$$

$$(\Lambda_{ji})_2^2 = \frac{1 + (\gamma_{ji})^{1/2}}{1 - (\gamma_{ji})^{1/2}}, \quad (15.99)$$

$$(\Lambda_{ji})_3^2 = \min_{\beta > 0} \frac{z(\beta)}{e^{-\beta \varepsilon_i} - e^{-\beta \varepsilon_j}}.$$

Значение $(\Lambda_{ji})_4^2$ определяется из равенств $C_2(\beta) = 0$ и $C_4(\beta) = 0$:

$$\begin{aligned}
 C_2(\beta) &\simeq 1 - (\Lambda_{ji})_4^2 \frac{e^{-\beta\varepsilon_i} - e^{-\beta\varepsilon_j}}{z(\beta)}, \\
 C_4(\beta) &\simeq \frac{e^{-\beta\varepsilon_i} - e^{-\beta\varepsilon_j}}{z(\beta)} + \frac{\beta(\varepsilon_j - \varepsilon_i)}{2} \left(\frac{e^{-\beta\varepsilon_i} - e^{-\beta\varepsilon_j}}{z(\beta)} \right)^2 - \\
 &\quad - \beta(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \frac{e^{-\beta\varepsilon_i} - e^{-\beta\varepsilon_j}}{z(\beta)}. \tag{15.100}
 \end{aligned}$$

Из этих двух условий одновременно однозначно определяются критическая температура β_t и константа $(\Lambda_{ji})_4^2$.

Критические значения термодинамических величин для данной модели в зависимости от Λ_{ji} иллюстрируются на рис. 15.4. При $\mu_{ji} > 0$ функция $\Phi(\beta, \mu_{ji})$ имеет не более двух критических точек. Ветвь $\mu_{ji}^{>}(\beta)$ описывает локально устойчивые критические точки функции, а $\mu_{ji}^{<}(\beta)$ — локально неустойчивые. Эти точки могут соединяться (кривые *A, B, C, D* и одна из двух кривых *E*) или быть изолированными. Тип устойчивости точек, лежащих на сплошных участках ветвей $\mu_{ji}(\beta)$, меняется в точках с вертикальной касательной. Рассмотрим более подробно критическое поведение функции Φ в зависимости от Λ_{ji} :

1. $\Lambda < \Lambda_1$. $\mu_{ji} = 0$ при любой температуре.

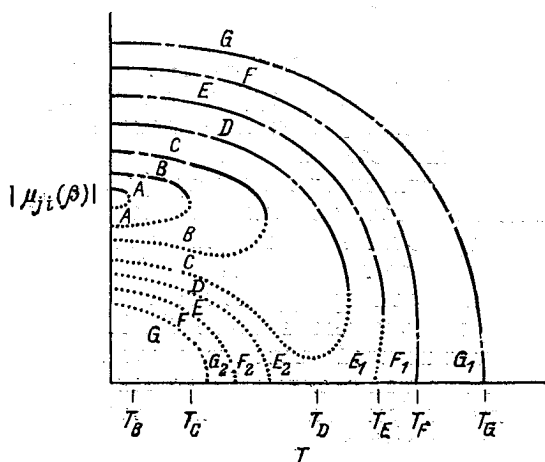


Рис. 15.4. Значения параметров порядка $\mu_{ji}(\beta)$, при которых потенциальная функция $\Phi(\mu; \beta)$ имеет стационарное значение, для семи значений безразмерной масштабированной константы связи Λ .

2. $\Lambda_1 < \Lambda < \Lambda_2$ (кривая A , $\Lambda = \Lambda_A$). При достаточно низкой температуре существует метастабильное упорядоченное состояние; никаких термодинамических фазовых переходов не происходит.

3. $\Lambda_2 < \Lambda < \Lambda_3$ (кривые B, C, D , $\Lambda_B < \Lambda_C < \Lambda_D$). При $T = 0$ наблюдается устойчивое упорядоченное состояние, которое в случае $\Lambda = \Lambda_B$ остается устойчивым вплоть до температуры $T = T_B$. Выше этой температуры состояние становится метастабильным ($\mu_{ji} = 0$), причем если принят принцип Максвелла, то происходит фазовый переход первого рода, если же принят принцип максимального промедления, то — фазовый переход нулевого рода в складку на кривой B . Выше температуры T_B имеется только одна критическая точка — минимум при $\mu_{ji} = 0$. При охлаждении от очень высоких температур при $T = T_B$ имеет место фазовый переход первого рода, если принят принцип Максвелла, и никаких фазовых переходов не происходит, если принят принцип максимального промедления. Если при очень низких температурах на систему оказать резкое воздействие, то произойдет фазовый переход нулевого рода из метастабильного в устойчивое состояние. Дальнейшее увеличение константы связи ($\Lambda \rightarrow \Lambda_C, \Lambda_D$) качественно не влияет на критические значения термодинамических параметров системы. Значения T_C, T_D , при которых происходят фазовые переходы первого рода, возрастают, как и температура, при которой возможен спинодальный распад. С дальнейшим увеличением Λ расстояние между последней и температурой фазового перехода первого рода убывает.

4. $\Lambda_3 < \Lambda < \Lambda_4$ (кривая E , $\Lambda = \Lambda_E$). От ветви $\mu_{ji} = 0$ отходят две ветви. Низкотемпературная ветвь, бифуркация которой происходит в точке E_2 , описывает локальные максимумы и не представляет интереса. Бифуркация высокотемпературной ветви (в точке E_1) относится к катастрофе A_{-3} . Эта ветвь вначале направлена в сторону высоких температур, затем она поворачивается и приходит в нуль. Между точками с вертикальной касательной эта ветвь неустойчива. Эти две точки определяют высоко- и низкотемпературные границы фазового перехода первого рода, происходящего в точке T_E . Неупорядоченное состояние становится неустойчивым ниже точки бифуркации E_1 и остается таковым (с понижением T) до тех пор, пока не будет достигнута точка бифуркации E_2 . Ниже этой температуры неупорядоченная ветвь метастабильна.

5. $\Lambda = \Lambda_4$ (кривая F , $\Lambda = \Lambda_F = \Lambda_{ji_4}$). Точка $\mu_{ji} = 0$, $T = T_F = T_t$, $\Lambda_{ji} = (\Lambda_{ji})_4$ является трикритической. Это легко вытекает из следующих рассуждений. Функция Φ четная, и для одновременного обращения в нуль двух главных коэффициентов

$C_2(\beta)$ и $C_4(\beta)$ достаточно выбрать специальными лишь два управляющих параметра β , Λ_{ji} . В этой точке росток функции $\Phi(\beta)$ суть $\pm|\mu_{ji}|^6$. Из глобальной устойчивости следует, что коэффициент при этом члене должен быть положительным. При фиксированном $\Lambda = (\Lambda_{ji})_4$ при переходе T через T_F имеет место фазовый переход второго рода.

6. $\Lambda_4 = \Lambda$ (кривая G , $\Lambda = \Lambda_G$). Ветвь, ответвляющаяся в G_1 , глобально устойчива. Неупорядоченная ветвь метастабильна при $0 \leq T \leq G_2$, неустойчива при $G_2 \leq T \leq G_1$ и устойчива при $G_1 = T_G \leq T < \infty$. При переходе T через T_G в любом направлении происходит термодинамический фазовый переход второго рода.

◇◇◇ Фазовый переход первого рода с изменением энергии основного состояния происходит ($T = 0$) при $\Lambda = \Lambda_2$.

◇◇◇ Теперь легко можно определить влияние возмущений классического гамильтониана (15.89), обусловленное классическим внешним полем, взаимодействующим с атомарной подсистемой, или классическим током, взаимодействующим с квантовомеханическим полем. Возмущения, нарушающие симметрию, исказят бифуркационную картину, однако существенно не изменят число и типы критических точек, возникающих при любой комбинации параметров управления (Λ_{ji}, T) . Исследование этих возмущений не вызывает принципиальных трудностей, поскольку универсальные возмущения катастроф $A_2, A_{\pm 3}, A_5$, возникающих в этой модели, хорошо известны.

Описанное выше достаточно сложное поведение системы наблюдается только тогда, когда всего одна из констант связи λ_{ji} не равна нулю. Рассмотрим ситуацию, когда несколько констант связи отличны от нуля.

В этом случае мы вынуждены ограничиться общим описанием возможных явлений. Предположим, что все $r(r-1)/2$ постоянных связи λ_{ji} действительны. Тогда каждая точка $(\lambda_{21}, \lambda_{31}, \dots, \lambda_{r, r-1}) \in R^{r(r-1)/2}$ представляет r -уровневую модель МГЛ или Дикке. При достаточно высокой температуре T такие модели дают устойчивое термодинамическое состояние, в котором все параметры порядка $\mu_{ji} = 0$. Открытое множество точек из $R^{r(r-1)/2}$ описывает модели, для которых характерно следующее качественное поведение. При понижении температуры от ∞ в точке T_1 происходит фазовый переход второго рода. При дальнейшем понижении температуры имеется единственный ненулевой параметр порядка вплоть до точки $T = T_2$, где происходит второй фазовый переход второго рода. Ниже точки T_2 имеются уже три ненулевых параметра порядка. Этот каскад переходов продолжается при понижении температуры T до $T = T_{r-1}$, ниже

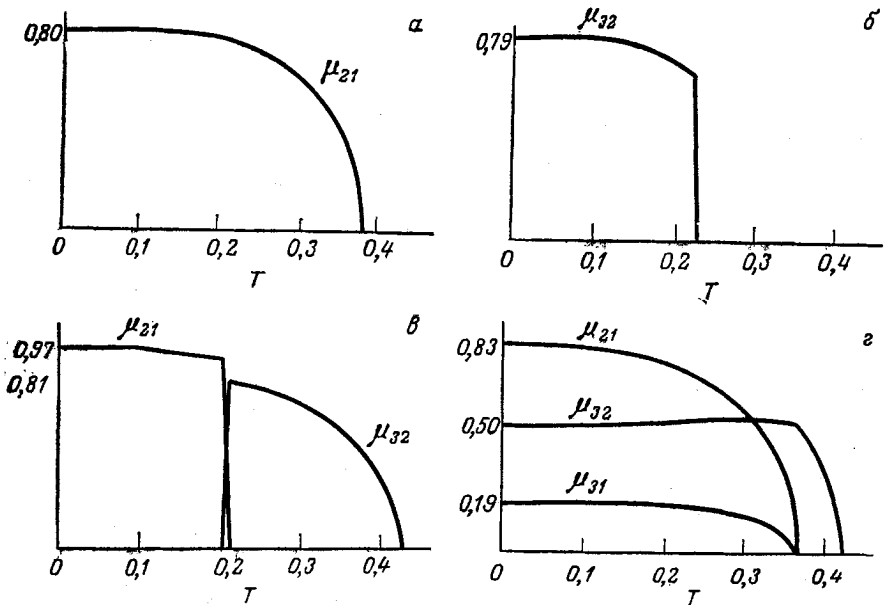


Рис. 15.5. Зависимость критических значений термодинамических величин, входящих в трехуровневую модель Дикке с резонансным взаимодействием $\hbar\omega_{ji} = \epsilon_j - \epsilon_i$, от безразмерной константы связи $\Lambda_{ji} = \Lambda_{ji}/(\epsilon_j - \epsilon_i)$. Здесь $\gamma_{32} = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_3 - \epsilon_1) = 0.2$ и $\mu_{21} = \langle E_{21}/N \rangle$, $\mu_{32} = \langle E_{32}/N \rangle$, $\mu_{31} = \langle E_{31}/N \rangle$. Использовались следующие значения $(\Lambda_{12}, \Lambda_{23}, \Lambda_{13})$: а — (2; 1,7; 0,8); б — (0; 1,7; 0); в — (2; 1,8; 0,7); г — (2; 1,8; 0,8).

которой все параметры μ_{ji} порядка $r(r-1)/2$ отличны от нуля. Последовательность переходов выглядит следующим образом:

Температура	0	T_{r-1}	...	T_4	T_3	T_2	T_1
Число параметров, отличных от нуля	$\frac{r(r-1)}{2}$	$\frac{(r-1)(r-2)}{2}$...	3+2+1	2+1	1	0

Открытое множество, мера которого в $\mathbb{R}^{r(r-1)/2}$ несущественна, содержит сепаратрисы, на которых две или более критические температуры становятся равными (например, $T_2 = T_3$). При пересечении этих сепаратрис изменяется порядок бифуркации. Кроме того, в $\mathbb{R}^{r(r-2)/2}$ имеются открытые области, описывающие модели, в которых происходит менее $r-1$ фазовых переходов второго рода. Качественный характер соединения та-

ких открытых областей между собой очевиден. Любой из этих фазовых переходов второго рода можно заменить фазовым переходом первого рода; между фазовыми переходами второго рода могут происходить фазовые переходы первого рода.

Простейшими из расширенных моделей МГЛ и Дикке, проявляющими такое многообразие в поведении, являются трехуровневые модели. Критические значения термодинамических величин, входящих в эти модели, изучались [15] в предположении резонансного взаимодействия $\epsilon_j - \epsilon_i = \hbar\omega_{ji}$. Параметры порядка $\mu_{ji}(\beta)$, минимизирующие функцию $\Phi(\beta)$ при разных значениях безразмерных постоянных связи Λ_{ji} , показаны на рис. 15.5.

8. ТЕОРЕМА О «СКАЧКЕ»

Обобщая результаты, представленные в разд. 5 и 6 можно утверждать, что если система, состояние которой описывается моделью МГЛ или Дикке, претерпевает фазовый переход ($T=0$) при увеличении параметров взаимодействия, то она также претерпевает термодинамический фазовый переход при возрастании температуры при фиксированных параметрах взаимодействия. Эта связь описывается уравнением

$$\frac{|V|}{e} \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta_c e = 1, \quad (15.101)$$

которое графически изображено в виде сепаратрисы в плоскости $|V/e| - T$ (рис. 15.6).

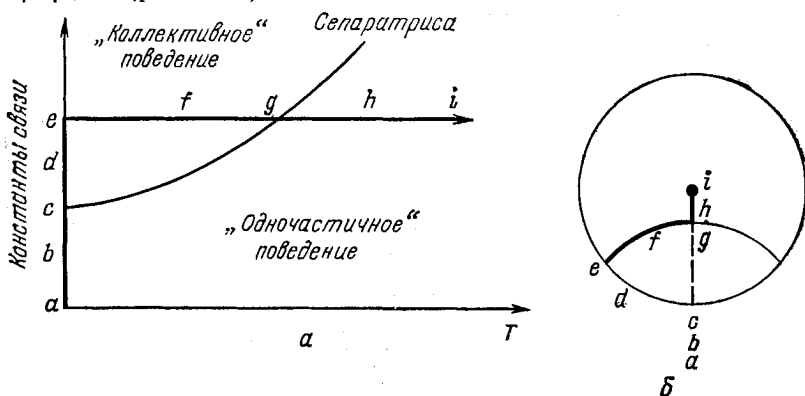


Рис. 15.6.

a — сепаратриса отделяет ядерные системы с ненулевым параметром порядка (квадрольный момент), проявляющие кооперативное поведение, от систем с независимым поведением частиц; b — состояние ядерной системы можно представить точкой сферы радиусом $1/2$. В предельном случае (при $T \rightarrow 0$) точка лежит на поверхности сферы. В отсутствие внутриядерных взаимодействий эта точка лежит «на южном полюсе», откуда отсчитывается параметр порядка θ . С ростом константы связи (при $T=0$) точка движется по пути $a \rightarrow e$, при этом в точке c система претерпевает фазовый переход второго рода. С ростом температуры точка проходит путь $e \rightarrow i$, при этом в точке g происходит термодинамический фазовый переход второго рода.

При $T = 0$ по мере возрастания параметра порядка $|V|$ состояние системы вначале не претерпевает никаких изменений (a, b). Фазовый переход второго рода происходит в точке c , выше которой состояние системы упорядочено (d, e). Если сила взаимодействия $|V|$ фиксирована, а температура возрастает, термодинамически состояние системы остается упорядоченным, однако с ростом T параметр порядка уменьшается (e, f). Наконец, в точке g происходит термодинамический фазовый переход второго рода, и при более высоких температурах (h, i) система остается в неупорядоченном состоянии. Значения параметров порядка на переходе $a \rightarrow i$ показаны на рис. 15.6, б.

Для модели МГЛ такое поведение легко объяснимо. В пределе при $T \rightarrow 0$ в основном состоянии функции $h_c \theta = 0$ при малых значениях V . Функция

$$h_c = -\epsilon r \cos \theta - |V| (r \sin \theta)^2 \frac{1}{2} (e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) \quad (15.102)$$

является аналитической функцией параметров порядка r, θ, ϕ и управляющих параметров ϵ, V . Однако функция

$$\frac{E_g}{N} = \min_{r=1/2, \theta, \phi} h_c \quad (15.103)$$

уже не является аналитической функцией ϵ, V ; она аналитическая в открытых интервалах $|V|/\epsilon > 1$ и $|V|/\epsilon < 1$. Сепаратриса $|V|/\epsilon = 1$ определяет момент скачка минимума функции h_c с одной ветви уравнения $\forall h_c = 0$ на другую при нулевой температуре.

В случае конечной температуры необходимо минимизировать функцию Φ по параметрам порядка (r, θ, ϕ) при постоянной температуре. Вместо нее можно минимизировать функцию $\beta\Phi$:

$$\beta\Phi = -s(r) + \beta h_c. \quad (15.104)$$

Это аналитическая функция параметров порядка (r, θ, ϕ) и управляющих параметров (ϵ, V, β), однако функция

$$\frac{\beta F}{N} = \min_{r, \theta, \phi} \beta\Phi \quad (15.105)$$

уже не является таковой в пространстве $\mathbb{R}^2 = (|V|/\epsilon, \beta)$. Минимум является аналитической функцией порознь в каждой из двух открытых областей выше и ниже сепаратрисы, определяемой уравнением (15.101). Высокие температуры служат для перенормировки взаимодействия ($V \rightarrow V' = 2rV$). Вследствие этого, если $|V|/\epsilon > 1$, то разложение $\min h_c$ по степеням $|V|/\epsilon$ в окрестности точки $T = 0$, $|V|/\epsilon = 0$ или разложение $\min \Phi$ по степеням β в окрестности точки $|V|/\epsilon > 1$, $\beta = 0$ не сходятся к E_g/N и F/N соответственно.

Связь между фазовыми переходами, сопровождающимися изменением энергии основного состояния, и термодинамическими фазовыми переходами может быть сформулирована в виде так называемой *теоремы о скачке* [16, 17]. Эта теорема справедлива не только для гамильтонианов моделей МГЛ и Дикке, но и для гораздо более широкого класса моделей. Приведем лишь основные моменты ее доказательства.

Предположим, что система описывается гамильтонианом вида

$$\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1. \quad (15.106)$$

Предположим далее, что \mathcal{H}_0 описывает спектр энергетических уровней невзаимодействующей системы, а \mathcal{H}_1 описывает взаимодействие. Для расширенных моделей типа МГЛ можно взять $\mathcal{H}_0 = \varepsilon_i E_{ii}/N$, а \mathcal{H}_1 задать в виде полинома от E_{ij}/N . Кроме того, будем считать, что \mathcal{H}_1 не содержит членов, линейных по E_{ij}/N , и что $\langle \mathcal{H}_1 \rangle$ инвариантен относительно замены $z_i \rightarrow -z_i$. В этом случае состояние $z_i = 0$ ($i = 2, \dots, r$) является глобальным минимумом для $\langle \mathcal{H}_0 \rangle$ и остается таковым для $\langle \mathcal{H}(\lambda) \rangle$ при малых λ в силу симметрии. Если при достаточно больших λ функция E_g/N зависит от λ явным образом, то $E_g(\lambda)/N$ не может быть аналитической функцией на всей прямой \mathbb{R}^1 , поскольку $E_g(\lambda)/N$ не зависит от λ в малом открытом интервале в окрестности нуля.

Из аналогичных рассуждений об аналитичности с очевидностью следует вывод о существовании термодинамического фазового перехода. Для этого необходимо минимизировать Φ и достаточно минимизировать

$$\beta \Phi = -s(\delta) + \beta [\langle \mathcal{H}_0 \rangle + \lambda \langle \mathcal{H}_1 \rangle]. \quad (15.107)$$

При $T \rightarrow \infty$ имеем $\beta \rightarrow 0$, поэтому необходимо минимизировать $-s(\delta)$ (см. (15.74а)). Минимум для r -уровневой системы достигается при $\delta_i = 1/r$. При малых β в случае высоких температур можно разложить члены $s(\delta)$, $\langle \mathcal{H}_0 \rangle$ и $\langle \mathcal{H}_1 \rangle$ по степеням малых параметров ($\delta_i - 1/r$). Три члена, входящие в (15.107), имеют следующие порядки величины:

$$\begin{aligned} -s(\delta) &\simeq -\ln r + \mathcal{O}\left[\left(\delta_i - \frac{1}{r}\right)^2\right], \\ \langle \mathcal{H}_0 \rangle &\simeq \mathcal{O}\left[\left(\delta_i - \frac{1}{r}\right)^1\right], \\ \langle \mathcal{H}_1 \rangle &\simeq \mathcal{O}\left[\left(\delta_i - \frac{1}{r}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (15.108)$$

Оценка для $\langle \mathcal{H}_1 \rangle$ вытекает из предположения о том, что \mathcal{H}_1 не содержит членов, линейных по E_{ij}/N . Короче говоря, при высоких температурах необходима перенормировка члена $\langle \mathcal{H}_1 \rangle$, описывающего взаимодействие, по отношению к невозмущенному

члену $\langle \mathcal{H}_0 \rangle$ так, что $\lambda \rightarrow \lambda' \sim \lambda \mathcal{O}[(\delta_i - 1/r)]$. С точностью до членов высшего порядка получаем

$$\min \beta \Phi = -\ln r + \min \langle \mathcal{H}_0 \rangle. \quad (15.109)$$

Итак, параметры порядка (отличные от δ_i), определяющие поведение функции Φ при высокой температуре, идентичны параметрам, определяющим поведение $\langle \mathcal{H}(\lambda) \rangle$ при малых λ (слабые взаимодействия). Наличие термодинамического фазового перехода теперь следует из разложения Φ в ряд Лорана по степеням β в окрестности нуля. Если $E_g(\lambda_0)/N < E_g(0)/N$, то при стремлении λ к нулю при фиксированном $T = 0$ возникает фазовый переход основного состояния, а при увеличении T от нуля при фиксированном $\lambda = \lambda_0$ возникает термодинамический фазовый переход.

9. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И КАНОНИЧЕСКИЕ ЯДРА

Исследуя связь между фазовыми переходами, сопровождающимися изменением энергии основного состояния, и термодинамическими фазовыми переходами, мы не затрагивали ряд вопросов, связанных как с родом фазового перехода (первого рода, второго рода) и его устойчивостью к возмущениям (структурная устойчивость), а также с членами, «ответственными» за появление фазовых переходов (канонические ядра), так и с величиной сил взаимодействия и температурой перехода.

Следует заметить, что мы уделяем особое внимание термодинамическим фазовым переходам, поскольку этот общий класс моделей может содержать самые различные параметры, описывающие взаимодействие. Для изучения фазовых переходов прежде всего было бы необходимо очертить очень узкий класс моделей и имеющихся в них параметров взаимодействия (управлений). В случае же термодинамических фазовых переходов имеется лишь один управляющий параметр — температура, поэтому наши рассуждения остаются справедливыми для очень широкого класса гамильтонианов.

Прежде чем перейти к описанию моделей этого класса, сделаем некоторые замечания общего характера. Катастрофа складки A_2 типична для однопараметрического семейства функций. Такая катастрофа ассоциируется с фазовым переходом нулевого (в случае принципа максимального промедления) или первого (в случае принципа Максвелла) рода. Катастрофа сборки A_{+3} типична для однопараметрического семейства функций при условии, что на это семейство наложены некоторые ограничения симметрии. Возмущения, нарушающие симметрию, обычно искажают бифуркацию, связанную с катастрофой A_{+3} ; последняя, как правило, заменяется катастрофой A_2 . Таким образом,

можно сделать следующие выводы о структурной устойчивости термодинамических фазовых переходов в системах, состояния которых могут быть описаны моделями Дикке:

1. Фазовые переходы нулевого и первого рода структурно устойчивы при всех возмущениях;

2. Фазовые переходы второго рода структурно устойчивы к возмущениям, сохраняющим симметрию; в противном случае фазовый переход или вообще исчезает, или проявляется в некоторой отдаленной точке как фазовый переход нулевого или первого рода.

Структурную устойчивость модели можно исследовать, не зная ее детального устройства. Для этого достаточно проанализировать симметрию модели. Если же необходимо выявить более существенные моменты, то требуются более конкретные сведения о модели. В этом случае проще всего ввести пару трехкомпонентных объектов $u = (u_3, u_+, u_-)$ и $v = (v_3, v_+, v_-)$ и три функции h, h_Q, h_C . Функция $h = h(u, v)$ зависит от шести аргументов u, v . Квантовомеханический оператор $\mathcal{H}/N = h_Q$ получается из h посредством подстановок операторов, приведенных в табл. 15.3, и последующей симметризации (если это необходимо). Классический предел $\langle \mathcal{H}/N \rangle = h_C$ получается из h подстановками c -чисел, указанных в той же таблице.

Таблица 15.3. Подстановки операторов и c -чисел, преобразующих $h(u, v)$ в оператор h_Q и c -функцию h_C [9]

Аргументы	$h \rightarrow h_Q = \frac{H(a, a^\dagger; J)}{N}$	$h \rightarrow h_C = \frac{E(\mu, \mu^*; r, \theta, \phi)}{N}$	Диапазон изменения параметров
u_3	$\frac{n}{N} = \frac{a^\dagger a}{N}$	$\mu^* \mu = \frac{\alpha^* \alpha}{N}$	$\alpha \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}$
u_+	$\frac{a^\dagger}{\sqrt{N}}$	$\mu^* = \frac{\alpha^*}{\sqrt{N}}$	$\alpha = \mu \sqrt{N}$
u_-	$\frac{a}{\sqrt{N}}$	$\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$	$r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
v_3	$\frac{J_3}{N} = \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \sigma_j^3 \right) / N$	$r \cos \theta$	$\theta \in [0, \pi]$
v_+	$\frac{J_+}{N} = \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^+ \right) / N$	$v^* = r \sin \theta e^{+i\phi}$	$\phi \in [0, 2\pi]$
v_-	$\frac{J_-}{N} = \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^- \right) / N$	$v = r \sin \theta e^{-i\phi}$	$(\theta, \phi) \in S^2$

На функции h , h_Q , h_C налагаются следующие условия [9]:

1. h — полином конечной степени по всем аргументам. Это условие необходимо для строгого доказательства классического предельного соотношения

$$\left\langle h_Q \left(\frac{E_{ij}}{N} \right) \right\rangle = h_Q \left(\left\langle \frac{E_{ij}}{N} \right\rangle \right).$$

2. Оператор h_Q эрмитов (квантовомеханическое требование);

3. h_C имеет конечную нижнюю грань как функция $\mu \in \mathbb{C}$ для (r, θ, ϕ) , принадлежащих сфере радиусом $1/2$ (гарантия существования предела $E_g/N = \min h_C$);

4. $h(u_3, u_+, u_-; v_3, v_+, v_-) = h(u_3, -u_+, -u_-, -v_3, -v_+, -v_-)$ (такая симметрия подавляет катастрофу складки и позволяет «прорасти» катастрофе сборки A_{+3} , которую можно локализовать методами дифференциального анализа);

5. h_C принимает минимальное значение при $\mu = 0$, когда $v = 0$. (В предельном случае высоких температур как атомная подсистема, так и поле неупорядочены.)

6. $\partial h / \partial V_3 < 0$ при $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = 0$. (В высокотемпературном состоянии $\theta = 0$.)

Пример. Подставляя в функцию

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\hbar\omega u_3 + \epsilon v_3 + \lambda(u_+ v_- + u_- v_+) \quad (15.110)$$

операторы из табл. 15.3, можно получить модель Дикке.

Поведение моделей этого класса при высоких температурах определяется минимизацией Φ или $\beta\Phi$ при постоянной температуре:

$$\frac{F}{N} = \min h_C - \beta^{-1} \mathcal{J}(r). \quad (15.111)$$

В силу условий 4–6 последнее выражение принимает минимальное значение при $\mu = \mathbf{v} = 0$ ($\theta = 0$) в области достаточно высоких температур. Эту функцию остается минимизировать по r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [h(0, 0, 0; r \cos \theta, 0, 0)_{\theta=0} - \beta^{-1} \mathcal{J}(r)] = \\ = \cos \theta \Big|_{\theta=0} \frac{\partial h}{\partial v_3} \Big|_{v_3=r} + \beta^{-1} \ln \left(\frac{1+2r}{1-2r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15.112)$$

Откуда следует соотношение между r и T .

Ветвь $\mu = 0$, $\mathbf{v} = 0$ всегда является критической точкой функции $\Phi(\beta)$. Бифуркации от этого множества решений («тепловая ветвь») определяются вырожденными критическими точками на этой ветви. Эти точки находятся путем выделения членов второй степени в малых членах μ , μ^* , \mathbf{v} , \mathbf{v}^* разложения h_C в ряд Тейлора вблизи тепловой ветви. Такие члены возникают только из членов h , которые линейны по u_3 ; имеют вторую степень по u_{\pm} , v_{\pm} ; имеют произвольную степень по v_3 . По этой причине достаточно рассмотреть росток h вблизи $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = (v_3, 0, 0)$

второй степени по u_{\pm} , v_{\pm} и первой степени по u_3 . Этот росток имеет вид

$$h_{CK} = h + u_3 \frac{\partial h}{\partial u_3} + \frac{1}{2} M^{\dagger} A M + r M^{\dagger} B D + \frac{1}{2} r^2 D^{\dagger} C D, \quad (15.113)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} v_- \\ v_+ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial u_+ \partial u_-} & \frac{\partial^2 h}{\partial u_+ \partial u_+} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u_- \partial u_-} & \frac{\partial^2 h}{\partial u_- \partial u_+} \end{bmatrix} \quad (15.114)$$

Все производные вычисляются при $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$ и $\mathbf{v} = (v_3, 0, 0)$. Подстановкой операторов из табл. 15.3 из этой функции можно получить оператор $(h_{CK})_Q$. Его можно с полным основанием назвать *каноническим ядром исходного оператора Гамильтона* h_Q , поскольку он определяет ветвление упорядоченных состояний от тепловой ветви оператора h_Q .

Классический предел этого канонического ядра получается подстановкой c -чисел из табл. 15.3. Росток классического предела легко получается после подстановки c -чисел, при этом следует учитывать, что

$$h_c = \left(0, 0, 0; r - \frac{1}{2} \frac{v^* v}{r}, 0, 0\right) = h_c - \frac{1}{2} \left(\frac{v^* v}{r}\right) \frac{\partial h_c}{\partial v_3}, \quad (15.115)$$

где опять же все производные вычисляются при $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (r, 0, 0)$. До членов второй степени функцию h_c можно представить в виде ($N = rD$):

$$h_c = h + \frac{1}{2} M^{\dagger} \left(\frac{\partial h}{\partial u_3} I_2 + A \right) M + M^{\dagger} B N + \frac{1}{2} N^{\dagger} \times \\ \times \left(-\frac{1}{2r} \frac{\partial h}{\partial v_3} I_2 + C \right) N. \quad (15.116)$$

Стандартными преобразованиями эту запись можно выразить через одну пару параметров порядка μ , μ^* или ν , ν^* :

$$h_c - h = \frac{1}{2} M^{\dagger} \left\{ \frac{\partial h}{\partial u_3} I_2 + A - B^{\dagger} \left(-\frac{1}{2r} \frac{\partial h}{\partial v_3} I_2 + C \right)^{-1} B \right\} M, \quad (15.117a)$$

$$= \frac{1}{2} N^{\dagger} \left\{ -\frac{1}{2r} \frac{\partial h}{\partial v_3} I_2 + C - B^{\dagger} \left(\frac{\partial h}{\partial u_3} I_2 + A \right)^{-1} B \right\} N. \quad (15.117b)$$

Условие бифуркации состоит в том, что одно из собственных значений любой из этих матриц обращается в нуль. Это условие определяет критическое значение r_c , при котором происходит бифуркация от тепловой ветви. Соответствующая критическая температура определяется из условия минимума (15.112):

$$-\left. \frac{\partial h}{\partial v_3} \right|_{r_c} = kT_c \ln \frac{1 + 2r_c}{1 - 2r_c}. \quad (15.118)$$

Пример. Функция h и ее каноническое ядро

$$h = -\hbar\omega u_3 + \lambda(u_+v_- + u_-v_+) + \kappa v_+v_- + \gamma v_+^2v_-^2, \quad (15.119)$$

$$h_{CK} = -\hbar\omega u_3 + \lambda(u_+v_- + u_-v_+) + \kappa v_+v_- \quad (15.120)$$

определяют фазовый переход второго рода из (15.117) при

$$\frac{\partial h}{\partial u_3} = \hbar\omega, \quad \frac{\partial h}{\partial v_3} = -\epsilon, \quad (15.121)$$

$$A = 0I_2, \quad B = \lambda I_2, \quad C = \kappa I_2.$$

Критическая температура определяется из (15.118), где

$$r_c = \frac{\epsilon\hbar\omega}{\lambda^2 - \kappa\hbar\omega}. \quad (15.122)$$

10. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

До сих пор все наши усилия были направлены на изучение статических свойств класса гамильтонианов, введенных в разд. 3. При изучении статических свойств $(E_g/N, F(\beta)/N)$ мы воспользовались некоторым вариационным принципом. Динамические уравнения движения также можно получить, исходя из некоторого вариационного принципа, предусматривающего «минимизацию» интеграла действия

$$\mathcal{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \quad (15.123)$$

Из этого вариационного принципа выводятся уравнения движения Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (15.124)$$

Для получения системы квантоводинамических уравнений движения можно использовать следующий лагранжиан [18]:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \langle \Psi | i \frac{\partial}{\partial t} - H | \Psi \rangle. \quad (15.125)$$

Обобщенные координаты, входящие в \mathcal{L} , являются координатами, параметризующими класс пробных состояний $|\Psi\rangle$, используемых в этой вариационной формулировке.

Для рассматриваемых гамильтонианов (модель МГЛ) средние значения $\langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle$ уже были получены. Остается вычислить среднее для $i\partial/\partial t$. Проще всего это можно сделать, заметив, что состояние системы из N частиц описывается произведением индивидуальных волновых функций

$$|\Psi\rangle = \prod_{\alpha=1}^N |\psi_{\alpha}\rangle. \quad (15.126)$$

Среднее от $i\partial/\partial t$ для отдельной частицы с волновой функцией

$$|\psi_\alpha\rangle = \text{col}[z_1, z_2, \dots, z_r] \quad (15.127)$$

определяется как

$$\langle \psi_\alpha | i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_\alpha \rangle = i \sum_{j=1}^r z_j^* \dot{z}_j = \frac{i}{2} \sum_{j=2}^r z_j^* \dot{z}_j - z_j \dot{z}_j^*. \quad (15.128)$$

Последнее равенство было получено с учетом условия нормировки:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_r|^2 = 1. \quad (15.129)$$

Если все индивидуальные волновые функции одинаковы, среднее $i\partial/\partial t$ для системы из N частиц просто в N раз больше индивидуального среднего значения. Тогда усредненный лагранжиан принимает вид

$$l(z, \dot{z}, t) = \frac{\mathcal{L}}{N} = \frac{i}{2} \sum_{j=2}^r z_j^* \dot{z}_j - z_j \dot{z}_j^* - h_C(z^*, z). \quad (15.130)$$

Уравнения движения определяются из соотношений

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_j} = \frac{i}{2} z_j^*, \quad \frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} = -\frac{i}{2} \dot{z}_j^* - \frac{\partial h_C}{\partial z_j} \quad (15.131)$$

и имеют вид

$$i\dot{z}_j^* = -\frac{\partial h_C}{\partial z_j}, \quad -i\dot{z}_j = -\frac{\partial h_C}{\partial z_j^*}. \quad (15.132)$$

Чтобы выяснить, что означают эти уравнения и как их следует интерпретировать, перейдем к декартовой системе координат $z_j = (p_j - iq_j)/\sqrt{2}$. В этой системе координат уравнения движения Эйлера — Лагранжа принимают каноническую гамильтонову форму с h_C , выступающей в роли классического гамильтониана:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial h_C}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = +\frac{\partial h_C}{\partial p_j}, \quad 2 \leq j \leq r. \quad (15.133)$$

Итак, удалось идентифицировать квантоводинамические уравнения движения с каноническими уравнениями движения для классической системы. Следовательно, для описания и интерпретации этих квантомеханических уравнений движения можно воспользоваться всем аппаратом классической механики. В частности, гамильтоново движение консервативно. Это значит, что уравнения движения определяют траектории, лежащие на поверхности $h_C = E$. Для r -уровневых систем h_C есть функция от $2(r-1)$ переменных, поэтому h_C является $2(r-1)$ -мерной поверхностью в $\mathbb{R}^{2(r-1)+1}$. Гиперплоскость $E = \text{const}$ в \mathbb{R}^{2r-1} имеет размерность $2(r-1)$. Пересечение (если оно есть) этих двух

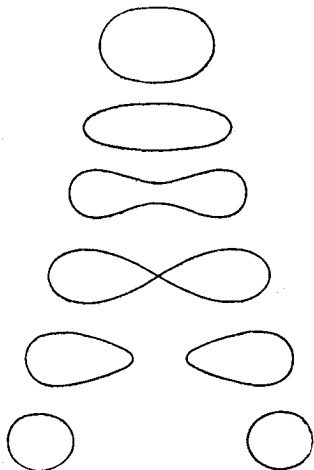


Рис. 15.7. Траектории нестационарных орбит Хартри—Фока (в пространстве параметров порядка) с энергией возбуждения, превышающей на величину δ энергию основного состояния.

Траектории проходят стадию критического удлинения, за которой при определенном увеличении силы взаимодействия следует деление, т. е. имеет место фазовый переход второго рода.

в основном состоянии значение E_g/N изменится от нуля до $E_g/N = -(|V| - 5)^2/4|V|$. Кривые, определяемые уравнением

$$\langle h_Q \rangle = -\frac{(|V| - \varepsilon)^2}{4|V|} + \delta, \quad (15.135)$$

все сильнее поджимаются к началу координат по мере возрастания $|V|$. В конце концов разность между значениями энергии в седловой точке и в двух точках глобального минимума становится равной δ . В этот момент траектория принимает форму восьмерки. При дальнейшем увеличении сил взаимодействия орбиты разрываются, и в результате вокруг каждого из двух минимумов остается замкнутая, почти круговая орбита. Подобное качественное изменение траектории при фазовом переходе второго рода показано на рис. 15.7.

Такое вытягивание орбиты, ее сжатие и наконец распад на две при фазовых переходах второго рода в случае консервативной динамической системы называют *критическим удлинением*. Для консервативных динамических систем это один из симптомов наличия катастрофы, который можно рассматривать как

многообразий в \mathbb{R}^{2r-1} имеет размерность $2r - 3$. Для двухуровневой системы такое пересечение одномерно и поэтому полностью определяет топологические свойства орбит.

Поскольку гамильтоновы системы консервативны, возникает вопрос о том, а не появляются ли признаки катастроф (гл. 9) при фазовых переходах. Ответ на этот вопрос утвердительный, и мы это продемонстрируем на примере модели МГЛ. Будем рассматривать траектории с фиксированной энергией, превосходящей на δ основной энергетический уровень. Классический предел \hbar_Q есть

$$\begin{aligned} \langle h_Q \rangle = & \frac{1}{2}(\varepsilon + V)p^2 - \frac{1}{4}Vp^4 + \\ & + \frac{1}{2}(\varepsilon - V)q^2 + \frac{1}{4}Vq^4. \end{aligned} \quad (15.134)$$

Если $|V| < \varepsilon$, то глобальный минимум находится в точке $(p, q) = (0, 0)$. Кривые $\langle h_Q \rangle = \delta$ имеют форму эллипсов, которые становятся все более вытянутыми по мере приближения $|V|$ к ε . Как только $|V|$ превзойдет ε , в

признак катастрофы в диссипативных градиентных динамических системах.

В заключение отметим, что консервативные и диссипативные динамические системы различаются «поворотом на 90° ». Если $\mathcal{L} = \langle i(\partial/\partial t) - \mathcal{H} \rangle$ — лагранжиан консервативной системы, то можно ожидать, что $\mathcal{L}_y = \langle \pm(\partial/\partial t) - \mathcal{H} \rangle$ будет функцией Ляпунова для соответствующей диссипативной системы. Выбирая отрицательный знак ($i(\partial/\partial t) \rightarrow e^{i\pi/2}i(\partial/\partial t)$), получаем динамическую систему уравнений движения

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial h_C}{\partial p_j}, \quad \dot{q}_j = -\frac{\partial h_C}{\partial q_j}. \quad (15.136)$$

Интегрируя градиентную систему уравнений, выведенную из функции Ляпунова, можно построить классическую функцию $h_Q(\langle E_{ij}/N \rangle)$ для сложных гамильтонианов $h_Q(E_{ij}/N)$ и найти ее локальные минимумы. После определения точек локального минимума можно установить форму траекторий в окрестности этих минимумов, проинтегрировав гамильтоновы уравнения движения. Для диссипативных траекторий, определяемых из функции Ляпунова, остаются в силе все обычные признаки катастрофы. Кроме того, эти траектории ортогональны траекториям движения диссипативных систем, получаемым из функции Лагранжа. Из ортогональности следует пошаговый спуск, а также тот факт, что для каждого признака катастрофы, появляющегося на траектории градиентной динамической системы, существует соответствующий (двойственный) признак катастрофы для консервативных систем.

11. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ, ДАЛЕКИЕ ОТ РАВНОВЕСНЫХ

В качестве первого примера неравновесных систем были рассмотрены консервативные динамические системы. Вторым примером являются диссипативные статические системы. Система может находиться в стационарном состоянии, далеком от состояния термодинамического равновесия, если в нее поступает некоторый внешний поток энергии, которую система расходует. Такой процесс сопровождается возникновением и «исчезновением» энтропии.

Для вычисления энергии основного состояния и свободной энергии, приходящихся на одну частицу, и при выводе динамических уравнений движения для гамильтонианов, описанных в разд. 3, оказались полезными различные вариационные принципы. Однако общего вариационного принципа [19] для отыскания стационарных состояний системы, далеких от состояния термо-

динамического равновесия, пока что нет (несмотря на постоянные уверения в обратном [20—22]).

Описанный в предыдущем разделе подход с использованием лагранжиана неприменим к рассматриваемым здесь диссипативным системам. Для определения стационарного состояния системы можно воспользоваться методом Ляпунова, если в наши рассуждения «подтасовать» некоторые феноменологические предположения. Ниже мы поясним, что и как для этого надо сделать. Пока же займемся изучением динамических свойств системы, анализируя уравнение движения Гейзенберга для средних значений операторов.

Если \mathcal{O} — некоторый оператор и $\langle \mathcal{O} \rangle$ — его среднее значение, то зависимость $\langle \mathcal{O} \rangle$ от времени описывается уравнением движения Гейзенберга

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle = \langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}] \rangle + \left\langle i\hbar \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \right\rangle. \quad (15.137)$$

Если оператор \mathcal{O} явно не зависит от времени, то последний член в (15.137) исчезает. В этом разделе предполагается, что все операторы явно от времени не зависят, поэтому $\partial \mathcal{O} / \partial t = 0$.

В условиях термодинамического равновесия $\partial \langle \mathcal{O} \rangle / \partial t = 0$, поэтому среднее $[\mathcal{O}, \mathcal{H}]$ равно нулю. Если операторы включают все операторы сдвига, входящие в расширенные модели Дикке (a_{ji} , E_{ji} $j \neq i$), то полученное таким образом множество средних значений $\langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}] \rangle$ совпадает с системой уравнений, полученной из вариаций

$$\delta e^{-\beta F} = \delta \text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}} = 0 \quad (15.138)$$

по всем параметрам порядка (μ_{ji} , $\langle E_{ji} / N \rangle$, $j \neq i$).

Для вывода феноменологического уравнения движения для среднего $\langle \mathcal{O} \rangle$ в диссипативном случае будем предполагать, что:

а) внешние ограничения «сжимают» среднее значение $\langle \mathcal{O} \rangle$ до некоторого значения \mathcal{O} , которое экспериментатор может контролировать;

б) если система подверглась воздействию возмущения, то среднее значение оператора \mathcal{O} постепенно вернется к своему невозмущенному значению с постоянной времени $\tau_{\mathcal{O}}$, т. е. возмущение всегда затухает как $\delta \langle \mathcal{O} \rangle e^{-\nu_{\mathcal{O}} t}$.

Эти феноменологические предположения можно непосредственно ввести в уравнение Гейзенберга для $\langle \mathcal{O} \rangle$, справедливое лишь для консервативных систем:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle \rightarrow i\hbar \left(\frac{d}{dt} + \nu_{\mathcal{O}} \right) (\langle \mathcal{O} \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_e) \quad (15.139)$$

Если оператор \mathcal{O} не эрмитов, то $\langle \mathcal{O} \rangle$ может и не быть действительным числом. В этом случае $\langle \mathcal{O} \rangle$ может зависеть от вре-

мени, оставаясь постоянной по абсолютной величине. Целесообразно выделить из $\langle \mathcal{O} \rangle$ все быстро меняющиеся множители, записав их в виде явного фазового множителя:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \tilde{\mathcal{O}} \rangle e^{-i\omega t}. \quad (15.140)$$

Анализируя уравнение движения Гейзенберга, можно найти значение угловой скорости ω . Если

$$\langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}] \rangle = \hbar\omega \langle \mathcal{O} \rangle + \text{другие члены}, \quad (15.141)$$

то коэффициент $\hbar\omega$ при $\langle \mathcal{O} \rangle$ в правой части (15.141) можно рассматривать как аналог угловой скорости $\hbar\omega/\hbar$.

Стационарное состояние системы можно получить, положив все производные по времени равными нулю. Однако так можно поступить только после того, как все «высокочастотные» временные зависимости выделены из средних значений неэрмитовых операторов. Тогда феноменологическое уравнение для среднего значения оператора $\langle \mathcal{O} \rangle$ (знак тильды для краткости опущен) принимает вид

$$-i\hbar\gamma_{\mathcal{O}} \langle \mathcal{O} \rangle_c = -i\hbar\gamma_{\mathcal{O}} \langle \mathcal{O} \rangle + \text{другие члены}. \quad (15.142)$$

Это уравнение можно непосредственно получить из уравнения движения Гейзенберга для $\langle \mathcal{O} \rangle$ с помощью очень простого алгоритма:

$$\begin{array}{l} 1. \quad i\hbar (d/dt) \langle \mathcal{O} \rangle = \hbar\omega \langle \mathcal{O} \rangle \quad + \text{Другие члены} \\ \quad \downarrow \text{Феноменологически} \quad \downarrow \text{Феноменологически} \quad \downarrow \text{Тождественно} \\ 2. \quad -i\hbar\gamma_{\mathcal{O}} \langle \mathcal{O} \rangle_c = -i\hbar\gamma_{\mathcal{O}} \langle \mathcal{O} \rangle + \text{Другие члены} \end{array} \quad (15.143)$$

◇◇◇ Для многих систем состоянии, далекое от равновесного, можно охарактеризовать параметрами порядка, являющимися средними значениями неэрмитовых операторов. В равновесных условиях эти значения равны нулю и остаются таковыми при медленных отклонениях от положения равновесия. Ненулевые значения средних этих операторов сдвига имеют непосредственное отношение к фазовым переходам. Такие переходы переводят систему с «ветви термодинамического равновесия» на другую упорядоченную ветвь.

◇◇◇ Уравнения состояния системы в термодинамическом равновесии однородны, в то время как уравнения для системы с внешним воздействием неоднородны. Эти неоднородности возникают исключительно из-за феноменологического члена вида $\gamma_{\mathcal{O}} \langle \mathcal{O} \rangle_c$.

Особый интерес для нас представляет описание стационарного состояния лазера. Лазер весьма интересен в связи с тем, что он является системой, далекой от равновесного состояния и претерпевающей фазовые переходы, когда накачка энергии

в лазер происходит быстрее, чем эта энергия может рассеиваться только за счет релаксации. Мы уже видели, что модели Дикке представляют собой удобный инструмент для изучения лазеров, поэтому перейдем к исследованию свойств описываемых расширенными моделями Дикке существенно неравновесных систем.

Для таких моделей

$$\mathcal{H} = \sum_{1 \leq i < j}^r \hbar \omega_{ji} a_{ji}^* a_{ji} + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i E_{ii} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j}^r \lambda_{ji} a_{ji}^* E_{ij} + \lambda_{ji}^* a_{ji} E_{ji}. \quad (15.144)$$

Коммутатор \mathcal{H} с многочастичным, усредненным многочастичным или одночастичным оператором является оператором того же типа. Если в качестве переменных состояния выбрать средние значения одночастичных операторов и усредненные операторы $\mu_{ji} = \langle a_{ji} / \sqrt{N} \rangle$, $\nu_{ij} = \langle E_{ij} / N \rangle = \langle e_{ij}^{(\alpha)} \rangle$, то уравнения движения Гейзенберга для этих операторов имеют вид

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\mu}_{ji} &= -\hbar \omega_{ji} \mu_{ji} + \lambda_{ji} \nu_{ij}, \\ i\hbar \dot{\nu}_{ij} &= (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \nu_{ij} + \lambda_{ji}^* \mu_{ji} (\nu_{ii} - \nu_{jj}), \\ i\hbar \dot{\nu}_{ii} &= \lambda_{ji} \mu_{ji}^* \nu_{ij} - \lambda_{ji}^* \mu_{ji} \nu_{ij}^*. \end{aligned} \quad (15.145)$$

Феноменологические уравнения движения непосредственно строятся с помощью описанного выше алгоритма. При этом делаются следующие предположения:

постоянные времени для μ_{ji} , ν_{ij} , ν_{ii} равны $\tilde{\gamma}_{ji}$, γ_{ij} , γ_{ii} ;

механизм накачки изменяет вероятности заполнения энергетических уровней атома, но не сохраняет фазовой информации. Тогда сжатые средние значения операторов сдвига равны нулю. В случае сильного рассеяния энергии или слабых взаимодействий величина $\nu_{ii} \simeq (\nu_{ii})_c$ является вероятностью заполнения i -го индивидуального уровня.

С учетом этих предположений феноменологические уравнения могут быть записаны как

$$0 = -i\hbar \tilde{\gamma}_{ji} \mu_{ji} + \lambda_{ji} \nu_{ij}, \quad (15.146i)$$

$$0 = -i\hbar \gamma_{ij} \nu_{ij} + \lambda_{ji}^* \mu_{ji} (\nu_{ii} - \nu_{jj}), \quad (15.146ii)$$

$$\begin{aligned} -i\hbar \gamma_{ii} (\nu_{ii})_c &= -i\hbar \gamma_{ii} \nu_{ii} + \left\{ \sum_{k>i} \lambda_{ki} \mu_{ki}^* \nu_{ik} - \sum_{k<i} \lambda_{ik} \mu_{ik}^* \nu_{ki} \right\} - \\ &\quad - \left\{ \sum_{k>i} \lambda_{ik}^* \mu_{ik} \nu_{ik} - \sum_{k<i} \lambda_{ki}^* \mu_{ki} \nu_{ki} \right\}. \end{aligned} \quad (15.146iii)$$

Эту систему уравнений можно редуцировать следующим образом:

1) выразить μ_{ji} из (15.146i) через ν_{ij} ;

2) подставить полученное выражение в (15.146ii) и (15.146iii) и исключить из этих выражений μ_{ji} ;

3) выразить $(v_{ii} - v_{jj})$ (15.146iii) через параметры порядка v_{ij} и параметры накачки $(v_{ii})_c - (v_{jj})_c$.

В результате получаем следующую систему уравнений состояния:

$$v_{ij} \{ \hbar^2 v_{ij} \tilde{v}_{ji} + |\lambda_{ji}|^2 (v_{ii} - v_{jj}) \} = 0, \quad i < j, \quad (15.147i)$$

$$v_{ii} - v_{jj} = (v_{ii})_c - (v_{jj})_c + 2 \sum_k \theta(k, i) \frac{|\lambda_{ik} v_{ki}|^2}{\hbar^2 \tilde{v}_{ki} v_{ii}} - \\ - 2 \sum_k \theta(k, j) \frac{|\lambda_{jk} v_{kj}|^2}{\hbar^2 \tilde{v}_{kj} v_{jj}}. \quad (15.147ii)$$

Здесь нет суммирования по немым индексам, все суммы показаны явно. Функция θ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \theta(k, i) &= -1, & k < i, \\ &= 0, & k = i, \\ &= +1, & k > i. \end{aligned} \quad (15.148)$$

Предполагается, что в условиях термодинамического равновесия средние значения всех операторов перемещения равны нулю. Если в отсутствие накачки состояние системы упорядочено, то предположение 2 (см. стр. 54) следует изменить. Тогда средние значения — это вероятности заполнения, определяемые соотношениями

$$v_{ii} = \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{z(\beta)}, \quad z(\beta) = \sum_{i=1}^r e^{-\beta \epsilon_i}. \quad (15.149)$$

В этом случае функция $v_{ii} - v_{jj}$ положительна. Когда включается накачка, возбужденные уровни становятся более заселенными за счет нижних уровней. Однако все параметры порядка v_{ij} остаются нулевыми до тех пор, пока между какими-либо уровнями не установится инверсная заселенность. В частности, бифуркация упорядоченного состояния $v_{ij} \neq 0$ возникает при силе накачки, равной

$$(v_{jj})_c - (v_{ii})_c = \frac{\hbar^2 v_{ij} \tilde{v}_{ji}}{|\lambda_{ji}|^2} = \left(\frac{\hbar v_{ij}}{\lambda_{ij}} \right) \left(\frac{\hbar \tilde{v}_{ji}}{\lambda_{ji}} \right). \quad (15.150)$$

Положив $r = 2$, получим феноменологическую теорию лазера, основанную на модели Дикке и развитую Хейкеном и другими.

Из r -уровневой модели Дикке следует, что стационарное поведение может быть весьма разнообразным. Если только одна из констант λ_{ji} отлична от нуля, то может произойти фазовый переход второго рода при условии, что инверсная заселенность

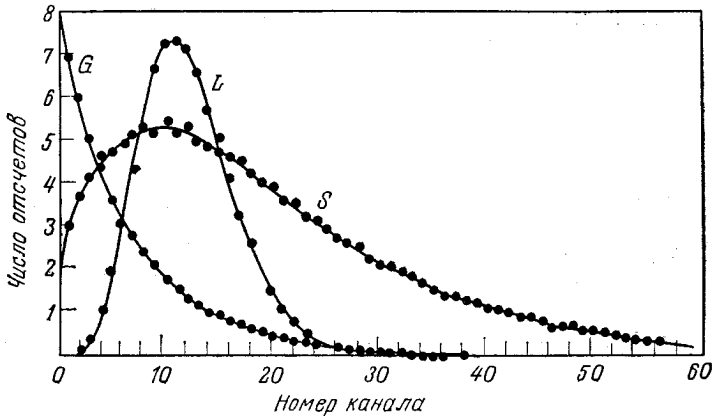


Рис. 15.8. Функция распределения фотосчетчика для лазера в предпороговом (G) и дальнем послепороговом (L) режимах [24]. (S — статистическая смесь излучения лазера в этих двух режимах.)

достаточно большая. Часто этого удается добиться селективной накачкой одного уровня при «холодных» других. Описание такого фазового перехода несколько не отличается от описания двухуровневой модели Дикке [23]. В том случае, когда более одной константы связи отличны от нуля, возможны фазовые переходы первого рода. В случае принципа максимального промедления эти переходы определяются ответвлением ненулевых решений от множества решений $[\mu_{ji}(c), v_{ij}(c)] = 0$ уравнений (15.146), где управляющими параметрами являются инверсные заселенности $(v_{ii})_c$. Такие фазовые переходы в действительности происходят в спиноподобных точках и имеют нулевой род. Фазовые переходы первого рода обычно происходят на максвелловском множестве \mathcal{P}_M . Оно хорошо определено, только если уравнения (15.147), определяющие стационарное состояние, можно вывести из потенциала. В противном случае (если повезет) можно будет найти фазовый переход первого рода по правилу Максвелла.

Как только найдено множество устойчивых решений (15.146), средние значения всех одночастичных операторов тем самым определены, как и средние для всех фотонных операторов a^+a , aa^+ для каждой моды. Эти средние можно использовать для вычисления редуцированных операторов плотности ρ_A , ρ_F атомов и поля. Оператором плотности для r -уровневой системы является $(r \times r)$ -матрица, т. е.

$$v_{ij} = \langle e_{ij} \rangle = \text{tr } \rho_A e_{ij}, \quad \rho_A = \sum_{i,j} v_{ij} e_{ji}. \quad (15.151)$$

Для одной моды поля возможно бесконечное число состояний. Тем не менее редуцированный оператор плотности поля можно следующим образом записать как функцию средних значений операторов:

$$\rho_F \simeq e^M [a^\dagger a - \langle a^\dagger \rangle a - \langle a \rangle a^\dagger], \quad (15.152)$$

где

$$\mathcal{N} = \frac{1}{e^{-M} - 1} = \langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle$$

определяет параметр M и шум \mathcal{N} через корреляционную функцию $\langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle$.

Оператор плотности использовался при построении функции распределения фотосчетчика для лазера с произвольным отношением сигнал/шум \mathcal{P}/\mathcal{N} , где $\mathcal{P} = \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle$. Эта функция сравнивалась с экспериментальной, полученной для лазера, работающего в предпороговом и дальнем послепороговом режимах (рис. 15.8).

12. КРАТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Покажем, как можно добиться более ясного понимания физических явлений, используя теорию универсальных возмущений.

На протяжении всей этой главы мы постоянно пользовались «принципом лома». Большинство критических свойств, которые мы рассматривали, зависят от одного управляющего параметра. Типичные однопараметрические семейства потенциальных функций в худшем случае обладают вырожденными критическими точками типа A_2 и представляют ограниченный интерес. Повсюду предполагалась симметрия гамильтонианов. Этого было достаточно, чтобы подавить катастрофу складки и допустить возможность появления катастрофы сборки $A_{\pm 3}$ в соответствующих однопараметрических потенциальных функциях. Тогда возникающие бифуркации можно рассматривать как сечения этих катастроф, а остальные области критического многообразия можно исследовать, только если ввести члены, нарушающие симметрию.

Использование «принципа лома» для сведения нелинейной задачи к бифуркационной дает ряд преимуществ вычислительного характера. Во-первых, точки бифуркаций легко локализовать. Если имеется некоторая потенциальная функция, то эти точки находятся из условия $\det V_{ij} = 0$. Если же нет такой функции, но есть система уравнений движения $\dot{x}_i = F_i$, то бифуркации от стационарной ветви можно найти из уравнения $\det F_{ij} = 0$. Симметрия, имеющаяся в исходной задаче, упрощает построение всех равновесных или стационарных ветвей, поскольку решения уравнений $\partial V / \partial x_i = 0$ или $F_i = 0$ имеют вид

симметричных пар. Устойчивость вдоль этих ветвей можно проанализировать, вычисляя собственные значения V_{ij} или F_{ij} . Однако некоторые элементарные теоремы позволяют обойтись и без этого: устойчивость вдоль бифуркационной ветви ($A_{\pm 3}$) полностью определяется устойчивостью исходной ветви и типом возникающей катастрофы.

Произвольное возмущение, нарушающее симметрию, часто сильно усложняет решение уравнений $\nabla V = 0$ или $F = 0$. Тем не менее качественно возмущенная система отличается лишь адиабатически от исходной системы. Свойства устойчивости возмущенной ветви в морсовской критической точке идентичны свойствам устойчивости невозмущенной ветви. При возмущениях не изменяется кратность критических точек, ни равновесных, ни стационарных¹⁾. По этим причинам исходная симметризованная задача дает достаточно хорошее начальное приближение, на основании которого достаточно просто качественно оценить влияние возмущений. Фазовые переходы второго рода, имеющие место в симметризованных моделях, под воздействием возмущений исчезают, однако фазовые переходы нулевого и первого рода оказываются структурно устойчивыми.

Проиллюстрируем теперь, каким образом теория катастроф может углубить наше понимание физических процессов, свойства которых были получены и исследованы методами анализа бифуркаций. Это можно сделать на примере динамических стационарных свойств системы, описываемой моделью Дикке и находящейся в состоянии, далеком от равновесного. Если в уравнениях состояния (15.146) появляются только изолированные сборки, то можно получить универсальное возмущение исходной квантовомеханической модели (15.144), вводя по одному члену, нарушающему симметрию, для каждого направления ветвления. Поскольку всего имеется $\binom{r}{2} = r(r-1)/2$ независимых параметров порядка, то соответствующее возмущение такой размерности будет универсальным. Можно, например, ввести одно классическое внешнее поле с амплитудой $\alpha_{ji} \sqrt{N}$ для каждого атомного резонанса. Или же можно ввести один классический ток $j_{ji} = J_{ji}/N$ для каждой моды электромагнитного поля. Введение этих возмущений следующим образом изменяет стационарные уравнения движения, выведенные для расширенной модели Дикке:

$$(15.146i): \quad v_{ij} \rightarrow v_{ij} + j_{ij}, \quad (15.153i)$$

$$(15.146ii): \quad \mu_{ji} \rightarrow \mu_{ji} + \alpha_{ji}, \quad (15.153ii)$$

$$(15.146iii): \quad \mu_{ji} \rightarrow \mu_{ji} + \alpha_{ji}. \quad (15.153iii)$$

¹⁾ В отсутствие непрерывной калибровочной инвариантности.

Совершенно не важно, как нарушается симметрия: введением только классических полей, или только классических токов, или любой независимой комбинацией $r(r-1)/2$ классических полей и токов. В абстрактном математическом смысле эти возмущения эквивалентны, и при соответствующей интерпретации $\alpha_{ji} = \alpha_{ji}(j_{ji})$ приводят к эквивалентным физическим последствиям.

Осуществляя повторный переход для (15.153) от (15.146) к (15.147), можно получить упрощенную систему уравнений состояния. Проведем это для следующих возмущений: $\alpha_{ji} = \alpha_{ji}^*$ (произвольное), $j_{ji} = j_{ji}^* = 0$. Чтобы избежать расходимости и в силу ряда более глубоких причин (см. ниже), исключим параметры v_{ij} . Тогда уравнения состояния принимают вид

$$\hbar^2 \gamma_{ij} \tilde{\gamma}_{ji} \mu_{ji} + |\lambda_{ji}|^2 (\mu_{ji} + \alpha_{ji}) (v_{ii} - v_{jj}) = 0, \quad (15.154i)$$

$$v_{ii} - v_{jj} = (v_{ii})_c - (v_{jj})_c + 2 \sum_k \theta(k, i) (\mu_{ki} + \alpha_{ki})^* \frac{\mu_{ki} \tilde{\gamma}_{ki}}{\gamma_{ii}} - \\ - 2 \sum_k \theta(k, j) (\mu_{kj} + \alpha_{kj})^* \frac{\mu_{kj}}{\gamma_{jj}}. \quad (15.154ii)$$

Полезный частный случай этих уравнений для r -уровневых систем получается при $r = 2$, т. е. когда имеется одна резонансная мода, и описанную здесь общую модель можно сравнить с изученной ранее [25, 26]. Для такого сравнения удобно ввести следующие обозначения:

$$\mu_{21} = \mu, \quad \alpha_{21} = \alpha, \quad v_{11} - v_{22} = \sigma^z, \\ \lambda_{21} = \lambda, \quad \gamma_{21} = \gamma_\sigma, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_z, \quad \tilde{\gamma}_{21} = \gamma_a. \quad (15.155)$$

Без потери общности можно считать все эти параметры действительными. Тогда уравнения (15.154) сводятся к

$$\hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_a \mu + \lambda^2 (\mu + \alpha) \left\{ \langle \sigma^z \rangle_c + 4\mu (\mu + \alpha) \frac{\gamma_a}{\gamma_z} \right\} = 0. \quad (15.156)$$

Это уравнение третьей степени по параметру порядка μ , что не удивительно, поскольку исходная симметризованная система описывается кубическим уравнением состояния. Уравнение (15.156) можно привести к каноническому виду катастрофы сборки:

$$(15.157): \quad x^3 + Ax + B = 0, \quad (15.157i)$$

$$x = \mu + \frac{2}{3} \alpha,$$

$$A = -\frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{\gamma_z}{4\gamma_a} \left\{ \langle \sigma^z \rangle_c + \frac{\hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_a}{\lambda^2} \right\}, \quad (15.157ii)$$

$$B = -\frac{2}{27} \alpha^3 - \frac{\alpha \gamma_z}{12\gamma_a} \left\{ \langle \sigma^z \rangle_c + \frac{\hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_a}{\lambda^2} \right\} + \frac{\hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_a}{4\lambda^3} \alpha.$$

Уравнение (15.157) дает универсальное возмущение уравнения состояния для симметризованного двухуровневого лазера. Физическими управляющими параметрами являются инверсная заселенность $\langle \sigma^z \rangle_c$ и внешнее поле α . Механизм накачки, описываемый членом $\langle \sigma^z \rangle$, не сохраняет фазовой информации, а внешнее поле, описываемое членом α , сохраняет ее. Следовательно, физические управляющие параметры можно интерпретировать как скорость некогерентной и когерентной накачки соответственно.

Уравнение состояния (15.156) можно изучать в терминах его канонического представления (15.157). Преобразование, связывающее физические ($\langle \sigma^z \rangle_c, \alpha$) и математические (A, B) управляющие параметры, обратимо (по меньшей мере локально). Поскольку единственное состояние в однозначном режиме устойчиво, то верхние и нижние листы в многозначном режиме также устойчивы, а центральный лист неустойчив. Любая точка на устойчивой части критического многообразия может быть достигнута путем соответствующего выбора управляющих параметров A, B или $\langle \sigma^z \rangle_c, \alpha$ (и процесса, по крайней мере математически). Физически доступная область ограничена неравенствами $-1 \leq \langle \sigma^z \rangle_c \leq 1$.

В типичном физическом процессе в каждый момент времени меняется только один физический управляющий параметр. Например, может отсутствовать внешнее поле ($\alpha = 0$). Если скорость некогерентной накачки растет, стационарное состояние системы остается неупорядоченным ($x = \mu = 0$) до тех пор, пока инверсная заселенность не достигнет величины

$$\langle \sigma^z \rangle_c = \langle e_{11} \rangle_c - \langle e_{22} \rangle_c = - \frac{\hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_\alpha}{\lambda^2}. \quad (15.158)$$

При этих условиях вероятность заселения для возбужденного уровня $|2\rangle$ выше, чем для основного уровня $|1\rangle$ ($\epsilon_2 > \epsilon_1$) на $\hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_\alpha / \lambda^2$, поэтому для перехода к упорядоченному стационарному состоянию (лазерное излучение) необходима инверсная заселенность. Поскольку разность вероятностей заселенности не превосходит единицы, условие возникновения фазового перехода порядок — беспорядок имеет вид $\lambda^2 > \hbar^2 \gamma_\sigma \gamma_\alpha$. Никаких фазовых переходов не будет, если связь λ слишком слаба или диссипация ($\lambda_\sigma, \gamma_\alpha$) слишком велика.

Если инверсная заселенность $\langle \sigma^z \rangle_c$ остается постоянной, а внешнее поле возрастает от нуля, траектория $A(\langle \sigma^z \rangle_c, \alpha)$, $B(\langle \sigma^z \rangle_c, \alpha)$ в пространстве управляющих параметров представляет собой линию, изображенную на рис. 15.9.

Если скорость некогерентной накачки сохраняется ниже пороговой, то траектория может уйти влево или вправо от точки сборки в зависимости от величины отношения $Q =$

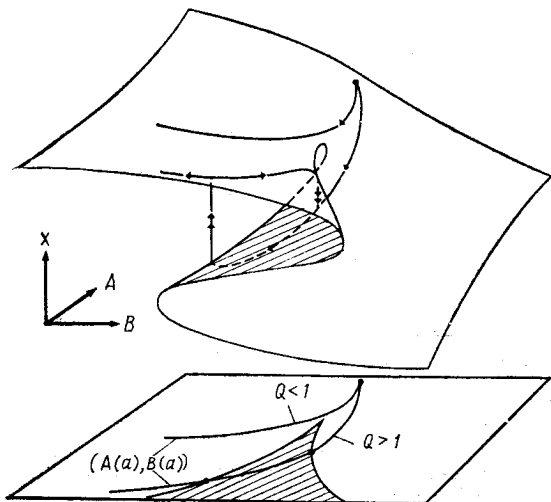


Рис. 15.9. Траектория управляющих параметров, представляющая собой криволинейный путь, если инверсная заселенность остается ниже пороговой, а классическое поле α возрастает.

Состояние лазера можно определить, перенеся этот путь на многообразии катастрофы сборки. Фазовый переход первого рода в случае $Q > 1$ происходит, когда траектория управляющих параметров пересекает соответствующую кривую складки.

$= \lambda^2 \langle \sigma^z \rangle_c / 8 \hbar^2 \gamma_0 \gamma_a$. Если $Q < 1$, траектория уходит влево от точки сборки и не происходит никаких фазовых переходов. Если $Q > 1$, то траектория поворачивает вправо вокруг точки сборки и в конце концов пересекает левую линию складки. Эти два качественно различных типа траекторий разделяются сепаратрисой, определяемой равенством $Q = 1$. Такая траектория проходит сквозь точку сборки.

В случае $Q > 1$ фазовый переход происходит, когда скорость некогерентной накачки $\langle \sigma^z \rangle_c$ постоянна (в частности, отсутствует), а скорость когерентной накачки α возрастает. Когда α возрастает и точка (A, B) пересекает левую линию складки, происходит фазовый переход нулевого рода, при котором система перескакивает с нижнего листа на верхний. Если затем α начинает убывать, состояние системы должно вернуться на нижний лист при пересечении правой линии складки. Если применим принцип максимального промедления, в поведении системы проявляется гистерезис.

Эксперименты такого рода проводились Гиббсом, Мак-Коллом и Венкатесаном [27]. Пары натрия в полости Фабри—Перо, настроенной на одну из D -линий, облучались настраиваемым лазером, немного отстроенным от резонансной частоты. Мощность излучения полости сравнивалась с мощностью па-

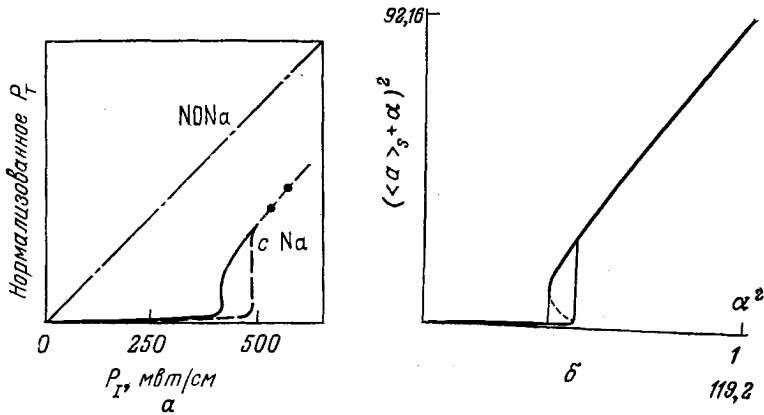


Рис. 15.10.

a — экспериментальные данные, полученные авторами работы [27] (свидетельствуют о наличии гистерезисного цикла); b — зависимость выходной мощности лазера от мощности внешнего классического поля для модели (15.158) при $Q = 1,6$.

дающего излучения, т. е. $(\mu + \alpha)^2 = \left(x + \frac{1}{3} \alpha\right)^2 c \alpha^2$. На рис. 15.10 приведены результаты сравнения экспериментальных кривых с расчетами по данной модели для случая $Q = 1,6$.

Стационарное состояние лазера описывается точкой на критическом многообразии катастрофы сборки при любой комбинации когерентного и некогерентного излучения. Каждая точка на этом многообразии определяет средние значения полевых и атомных операторов. Эти значения можно использовать для построения редуцированных операторов плотности для атомарной и полевой подсистем. Таким образом, каждая точка на многообразии катастрофы сборки определяет оператор плотности для системы. Эти операторы плотности можно использовать для определения флуктуаций, таких, как $\langle (\sigma^z - \langle \sigma^z \rangle)^2 \rangle$. Вблизи фазовых переходов эти величины аномально велики (гл. 9, разд. 8).

Скорость считывания экспериментальных данных превосходила время затухания системы. Таким образом удалось избавиться от спиновидных линий (пределы устойчивости), окружающих фазовый переход первого рода, происходящий при $V = 0$. Такое явление имеет место, если поведение системы подчиняется принципу Максвелла. Это в свою очередь возможно, когда время одного цикла эксперимента превосходит постоянную затухания. Эти временные константы можно определить из потенциала V , связанного с уравнением состояния (15.157), и величины флуктуаций относительно локально устойчивых равновесных состояний. Постоянная затухания выражается через эти величины формулой (8.31),

13. ВЫВОДЫ

В данной главе методы и результаты теории катастроф были использованы для описания квантовомеханических систем. При этом мы не рассматривали квантовомеханические системы общего вида, а ограничились некоторыми частными случаями систем, содержащих большое число одинаковых подсистем (например, молекул, атомов, нуклонов). Хотя описание таких систем должно быть по своей сути квантовомеханическим, наличие большого количества отдельных подсистем означает, что соответствующие усредненные операторы почти коммутируют. Чем выше степень коммутативности этих операторов, тем лучшего начального приближения можно добиться при анализе таких систем классическими методами.

Были рассмотрены два широких класса модельных систем: модели МГЛ, которые описывают системы только одного типа (нуклоны), и модели Дикке, которые описывают системы, состоящие из двух взаимодействующих подсистем (атомы и поле). Исходные модели МГЛ и Дикке служат прототипами двух общих классов рассмотренных моделей. Эти обобщенные модели могут включать как многоуровневые системы, так и сложные полиномиальные взаимодействия.

При довольно слабых предположениях энергия основного состояния для моделей из этих классов может быть определена по простому рецепту. Процедура начинается с замены оператора Гамильтона его средним или ожидаемым значением. Далее энергию основного состояния можно изучать как функцию констант связи, входящих в гамильтониан. Таким путем легко можно исследовать фазовые переходы.

Очень похожий прием годится для изучения термодинамических фазовых переходов, только здесь вместо энергии основного состояния фигурирует свободная энергия. Методика определения термодинамического равновесия системы использовалась как для моделей типа МГЛ, так и для моделей типа Дикке при обсуждении термодинамических фазовых переходов. Системы, в которых происходят фазовые переходы с изменением энергии основного состояния, претерпевают и термодинамические фазовые переходы. Были получены условия, при которых можно ожидать фазовых переходов второго рода в любой из систем, описываемых моделями указанных классов.

Средства и методы теории катастроф применимы как к равновесным, так и к неравновесным системам. Были исследованы топологические свойства «орбит» квантовомеханических систем. Орбиты, определяемые нестационарными уравнениями движения Хартри—Фока, проявляют свойство критического удлинения в окрестности вырожденной критической точки. Это явление

ние, характерное для динамических систем, является аналогом критического замедления в диссипативных системах.

Что касается диссипативных систем, то изучались стационарные свойства моделей Дикке в состоянии, далеко от термодинамического равновесия. Раньше эти модели часто использовались для описания лазерных систем. Когда критическая точка сборки разворачивается соответствующим образом, можно ожидать новых физических явлений, одним из которых является оптическая бистабильность.

Примечания

Модель Дикке использовалась Хакеном и другими [28] для подробного теоретического изучения лазерных фазовых переходов. В их работах не вводились внешние возмущения, нарушающие симметрию, такие, как классический внешний ток или поле. Поэтому явление оптической бистабильности не было известно теоретикам вплоть до 1976 г. Такой длительной задержки можно было бы избежать, если бы физики были знакомы с идеями и методами элементарной теории катастроф.

Термодинамические фазовые переходы в модели Дикке впервые строго исследовались Хеппом и Либом [30]. Ванг и Хью [31] существенно упростили их выкладки, предложив алгоритмы, использующие когерентные состояния поля. Их результаты, хотя и оказались верными, не были, однако, строго обоснованы. Затем Хепп и Либ [32] предложили другой алгоритм, использующий атомные когерентные состояния. Этот алгоритм уже был строго обоснован. Атомные и полевые когерентные состояния рассматривались с единых позиций в алгоритме, предложенном Гилмором [9]. В это же время было введено понятие канонического ядра. Как только оказалось возможным исследовать фазовые переходы с помощью алгоритма, включающего потенциальную функцию, изучение влияния внешних возмущений, нарушающих симметрию, стало сравнительно простым делом [33, 34]. Эти различные этапы в развитии модели Дикке отражены в следующей таблице:

Граничные условия	Внешние возмущения, нарушающие симметрию	
	отсутствуют	присутствуют
Равновесные	1972 г. [30]	1976 г. [33, 34]
Неравновесные, стационарные	1959 г. [28]	1976 г. [29]

Явное сходство в поведении модели Дикке при равновесных и неравновесных стационарных граничных условиях наводит на мысль о возможности существования между ними формальной математической связи («аналитического соответствия»), которая и была установлена Гилмором и Нардуччи [25, 26].

Это аналитическое соответствие открывает следующую интригующую возможность. При равновесных граничных условиях оба редуцированных оператора плотности ρ_A и ρ_B имеют структуру

$$\rho = [\rho(\text{геометрия})]M(\text{физика}).$$

Здесь ρ (геометрия) есть оператор, определенный на многообразии катастрофы сборки. Этот оператор имеет вид

$$\rho_A \text{ или } F \text{ (геометрия)} \simeq \exp(-N h_A \text{ или } F),$$

где полуклассические гамильтонианы h_A и h_F определяются выражением (15.35). Число M (физика) зависит от системного шума и фактически связано с температурой системы ($M = \beta$). Аналогичная факторизация Вигнера — Экарта существует для оператора плотности, описывающего неравновесное стационарное состояние модели Дикке.

На следующие вопросы пока нет ответа:

1. Что в таком случае представляют собой аналоги полуклассических гамильтонианов h_A и h_F ?
2. Какова физическая интерпретация числа M (физика)?
3. Можно ли определить неравновесный оператор плотности, исходя из некоторого вариационного принципа, как это имеет место при равновесных граничных условиях?

Литература

1. Gilmore R., Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, New York: Wiley, 1974.
2. Gilmore R. The Classical Limit of Quantum Non-Spin Systems, *J. Math. Phys.*, **20**, 891—893 (1979).
3. Lipkin H. J., Meshkov N., Glick A. J. Validity of Many-Body Approximation Methods for a Solvable Model: (1). Exact Solutions and Perturbation Theory, *Nucl. Phys.*, **62**, 188—198 (1965).
4. Ruelle D. Statistical Mechanics, New York: Benjamin, 1969.
5. Gilmore R. Two Nonlinear Dicke Models, *Physica*, **86A**, 137—146 (1977).
6. Dicke R. H. Coherence in Spontaneous Radiation Processes, *Phys. Rev.*, **93**, 99—110 (1954).
7. Von Weisäcker C. F. Zur Theorie der Kernmassen, *Z. Physik*, **96**, 431—458 (1935).
8. Arecchi F. T., Courtens E., Gilmore R., Thomas H. Atomic Coherent States in Quantum Optics, *Phys. Rev.*, **A6**, 2211—2237 (1972).
9. Gilmore R. Structural Stability of the Phase Transition in Dicke-like Models, *J. Math. Phys.*, **18**, 17—22 (1977).
10. Gilmore R., Feng D. H. Studies of the Ground State Properties of the Lipkin — Meshkov — Glick Model via Atomic Coherent States, *Phys. Lett.*, **76B**, 26—28 (1978).
11. Gilmore R., Feng D. H. Ground State Phase Transitions in Multilevel Extensions of the Lipkin — Meshkov — Glick Model, *Phys. Lett.*, **85B**, 155—158 (1979).
12. Gilmore R. Geometry of Symmetrized States, *Ann. Phys.*, (NY) **74**, 391—463 (1972).
13. Lieb E. H. The Classical Limit of Quantum Spin Systems, *Commun. Math. Phys.*, **31**, 327—340 (1973).
14. Gilmore R. Thermodynamic Phase Transition in the Dicke Model for Multilevel Systems, *J. Phys.*, **A10**, L131—134 (1977).
15. Gilmore R., Deans S. R., Feng D. H. Phase Transitions and Geometric Properties of the Interacting Boson Model, *Phys. Rev.*, **C** (March 1981).
16. Gilmore R., Bowden C. M. Classical and Semi-classical Treatment of the Dicke Hamiltonian, in: Cooperative Effects in Matter and Radiation (C. M. Bowden, D. W. Howgate, H. R. Robl, Eds.), New York: Plenum, 1977, pp. 335—355.
17. Gilmore R., Feng D. H. Ground State and Thermodynamic Phase Transitions of Nuclear Systems, in: Proceedings of the International Meeting on Frontiers of Physics, Republic of Singapore, New York: Plenum, 1980.

18. Dirac P. A. Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **26**, 376—385 (1930).
19. Klein M. J., Meijer H. E. Principle of Minimum Entropy Production, *Phys. Rev.*, **96**, 250—255 (1954).
20. Prigogine I. *Etude Thermodynamique des Phénomènes Irreversibles*, Liege: Editions Desoer, 1947.
21. Glansdorff P., Prigogine I. *Thermodynamics of Structure, Stability, and Fluctuations*, New York: Wiley, 1971.
22. Nicolis G., Prigogine I. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*, New York: Wiley, 1977.
23. Poston T., Stewart I. N. *Catastrophe Theory and Its Applications*, London: Pitman, 1978. [Имеется перевод: Посток Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*. — М.: Мир, 1980.]
24. Arecchi F. T. Photocount Distributions and Field Statistics in Quantum Optics, Proceedings of the International Summer School of Physics «Enrico Fermi», *Rendiconti* 42 (R. J. Glauber, Ed.), New York: Academic Press, 1969, pp. 57—110.
25. Gilmore R., Narducci L. M. Relation Between the Equilibrium and Nonequilibrium Critical Point Properties of the Dicke Model, *Phys. Rev.*, **A17**, 1747—1760 (1978).
26. Gilmore R., Narducci L. M. Laser as Catastrophe, in: *Coherence and Quantum Optics* (L. Mandel and E. Wolf, Eds.), New York: Plenum, 1977, pp. 81—91.
27. Gibbs H. M., McCall S. L., Venkatesan T. N. C. Differential Gain and Bistability Using a Sodium Filled Interferometer, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 1135—1138 (1976).
28. Haken H. *Laser Theory*, in: *Handbuch der Physik*, v. XXV/2c, Berlin: Springer-Verlag, 1970.
29. Bonifacio R., Lugiato L. A. Cooperative Effects and Bistability for Resonance Fluorescence, *Optics Commun.*, **19**, 1972—1976 (1976).
30. Hepp K., Lieb E. H. On the Superradiant Phase Transition for Molecules in a Quantized Radiating Field: The Dicke Maser Model, *Ann. Phys.*, (NY) **76**, 360—404 (1973).
31. Wang Y. K., Hioe F. T. Phase Transitions in the Dicke Model of Superradiance, *Phys. Rev.*, **A7**, 831—836 (1973).
32. Hepp K., Lieb E. H. Equilibrium Statistical Mechanics of Matter Interacting with the Quantized Radiation Field, *Phys. Rev.*, **A8**, 2517—2525 (1973).
33. Provost J. P., Rocca F., Vallee G., Siruge M. Lack of Phase Transition in the Dicke Model with External Fields, *Physica*, **85A**, 202—206 (1976).
34. Gilmore R. Persistence of the Phase Transition in the Dicke Model with External Fields and Counter-Rotating Terms. *Phys. Lett.*, **55A**, 459—460 (1976).

Согласно геологическим данным [1], поверхность Земли хранит следы многих оледенений. В течение этих периодов огромные пространства Северного полушария круглый год были покрыты льдами. За последний миллион лет оледенения наступали примерно каждые 100 тыс. лет, причем их продолжительность значительно превышала длительность (10—12,5 тыс. лет) межледниковых периодов. Продвижение и отступление ледников сопровождалось сменой климатических условий, что в свою очередь приводило к миграции в широких масштабах как растительных, так и животных видов. Установлено, что изменения климата в более поздние времена (развитие растительного покрова Исландии, оледенение Гренландии) приводили также к миграции людей. Довольно часто климатические изменения порождали экономические трудности. Так, внезапное похолодание, наступившее в конце «малого ледникового периода», явилось причиной катастрофического неурожая картофеля в Ирландии. Следствием изменения климатических условий, происшедшего в более отдаленные времена, были проблемы социального характера, связанные с расцветом и упадком государств, изменением значимости геополитических районов (см. труды Плутарха и Ветхий Завет). В связи с этим, естественно, важно знать, произойдут ли и когда именно колебания или изменения климата в будущем. Климатические изменения, подобные тем, которые имели место в библейские времена или в «малый ледниковый период», в наше время вызвали бы огромные экономические трудности. Резкое снижение мирового производства продуктов питания, связанное с охлаждением земного шара, серьезно повлияло бы на демографический баланс, не говоря уже о том, что увеличение плотности народонаселения, обусловленное новым продвижением края северных полярных льдов до 40° с.ш., имело бы крайне отрицательные последствия. Подобные размышления не являются пустой болтовней [2]. Межледниковый период, в который мы живем, начался около 10 тыс. лет назад. Есть все основания полагать, что смена межледникового периода ледниковым может произойти очень быстро, в течение каких-нибудь 100 лет, а возможно, и быстрее.

1. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРИИ РИТМА ЛЕДНИКОВЫХ ПЕРИОДОВ

1.1. Изменения интенсивности солнечного излучения

Солнце является неравновесной системой, которая, по-видимому, находится в устойчивом состоянии. Однако эта система совершает колебания с периодами 5 мин, 27 сут, 22 года (вероятно, возможны и более длительные периоды колебаний [3, 4]). Допустим, что один из них соизмерим примерно со

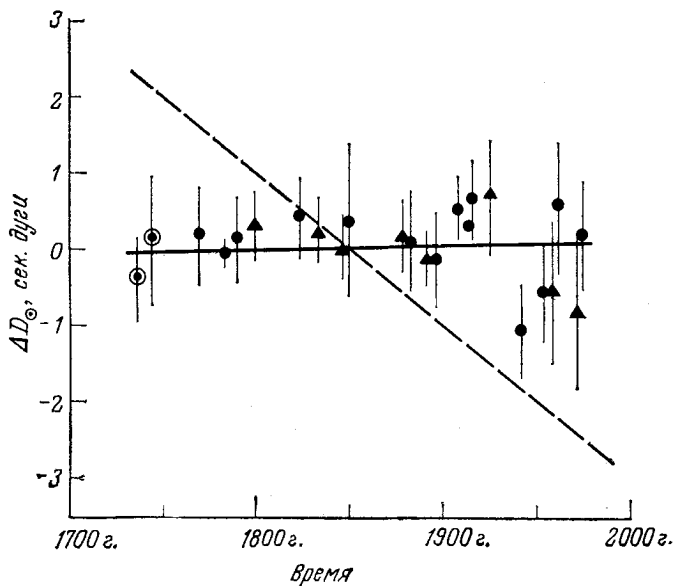


Рис. 16.1. Отклонения данных наблюдений прохождения Меркурия перед солнечным диском в связи с возможными изменениями диаметра Солнца [6]. Значение $\Delta D_{\odot} = 0$ соответствует $D_{\odot} = 1918,66''$ ($1'' \approx 700$ км); ▲ майское прохождение; ● ноябрьское прохождение; ⊙ анализ Ньюкомба; вертикальные линии соответствуют ± 1 стандартному отклонению; — линия, аппроксимирующая данные о прохождении Меркурия; --- линия соответствует данным Эдди, полученным на основании наблюдений Солнца.

100 000-летним периодом смены ледниковых эпох. Тогда изменения интенсивности солнечного излучения могли бы влиять на ритм ледниковых периодов при условии, что амплитуда колебания солнечного излучения окажется «достаточно большой».

Солнце таит в себе много загадок и удивительных явлений [4]. Одним из «сюрпризов» Солнца является его предполагаемое сжатие [5]. Анализ наблюдений, проведенных за последние 140 лет, и других, более ранних данных указывает на то, что Солнце сжимается примерно на 0,1 % в столетие и что такое сжатие происходило по крайней мере в течение последних 400 лет. Сжатие Солнца свидетельствует о том, что часть солнечного излучения обусловлена гравитационным уплотнением¹⁾.

Анализ прохождения планеты Меркурий перед солнечным диском в период 1736—1973 гг. показал [6а], что скорость

¹⁾ Не ясно, как подобное уплотнение можно связать с неудачной попыткой наблюдения [7] потока солнечных нейтрино, предсказанного стандартной моделью Солнца. Кроме того, не ясна возможность обратимости сжатия и наличия 100 000-летних периодов соответствующих флуктуаций.

сжатия составляла менее $0,3''$ в столетие с доверительным интервалом 90 % (рис. 16.1). Предварительные результаты обработки данных о прохождении солнечного диска [6b] дают скорость сжатия менее чем $0,6''$ в столетие. Изучение более полных данных [6c] свидетельствует об изменении на $-0,14 \pm \pm 0,08''$ в столетие. До сих пор нет единого мнения [6d] относительно того, сжимается Солнце или нет, и если да, то какова скорость этого сжатия.

«Солнце нам настойчиво напоминает, что, если мы и сможем иметь в распоряжении основные дифференциальные уравнения в частных производных классической и квантовой физики, богатое разнообразие решений... простирается далеко за пределы современных знаний и представлений. Таким образом, Солнце — это наш неведомый гид, который ведет нас от одного круга взаимосвязанных явлений к другому по мере того, как мы все более пристально всматриваемся в ад» [4]. О Солнце известно сравнительно мало, поэтому пока невозможно определить, существуют ли такие колебания солнечного излучения соответствующих частоты, фазы и амплитуды, которые могли бы влиять на наступление ледниковых периодов.

1.2. Космическая пыль

Солнечная система, двигаясь по своей орбите в нашей Галактике, может проходить через области космической пыли, в результате чего может уменьшиться солнечная радиация, достигающая Земли [9—11]. Если в будущем удастся составить карту плотности космической пыли в Галактике вблизи нашей планеты, то, по-видимому, появится возможность исследования связи между чередованием ледниковых периодов и изменениями плотности облака пыли, через которое прошла солнечная система. Однако в настоящее время подобная задача не может быть решена из-за отсутствия необходимой информации.

1.3. Вулканическая деятельность

При крупных извержениях вулканов (например, Кракатау в 1883 г.) в атмосферу выбрасывается огромное количество пепла. С увеличением содержания пыли в атмосфере уменьшается количество солнечного света, достигающего земной поверхности, что в свою очередь приводит к похолоданию, увеличению облачности и отражения солнечного света и выпадению большого количества осадков [12]. Наши сведения о механизмах, которые могут влиять на периодичность вулканической активности Земли, в настоящее время очень скудны; их недостаточно даже для выявления какой-либо связи между вулканической деятельностью и периодическим наступлением ледниковых эпох.

1.4. Смена направления магнитного поля

За время существования Земли ее магнитное поле меняло свое направление несколько раз (рис. 16.2) [13]. Можно полагать, что исчезновение магнитного поля Земли даже на короткий период существенным образом сказывается на химическом составе верхних слоев атмосферы, а также на частоте мутаций и скорости вымирания живых организмов на поверхности Земли. Хотя данные о смене направления магнитного поля хорошо документированы, тем не менее не существует теории, способной адекватно объяснить ориентацию магнитного поля Земли в прошлом или предсказать ее в будущем. Это означает, что пока все попытки найти связь между наступлением ледниковых периодов и сменой направления магнитного поля не увенчались успехом [14].

1.5. Резкие изменения климата

Вопрос о возможности записать систему уравнений, адекватно отражающих изменение климата Земли, остается открытым. Ясно, однако, что эти уравнения должны быть сложными (т. е. нелинейными). Известно, что поведение решений даже простых нелинейных уравнений может носить сложный и неожиданный характер. Основываясь на анализе уравнений, нелинейных по времени, Лоренц [15] выдвинул гипотезу, согласно которой колебательный режим изменения климата Земли есть проявление природы системы нелинейных уравнений, определяющих климат, даже когда они не содержат зависящих от времени функций вынуждающих колебаний. Однако эта теория оказалась неприемлемой для «объяснения» предшествовавших ледниковых периодов по двум причинам. Во-первых, нам неизвестна система уравнений (если она вообще существует), которые описывают наш климат. Во-вторых, даже если бы такая система была известна, ее решение оказалось бы весьма чувствительным (вплоть до расходимости) как к начальным условиям, так и к значениям входящих в нее параметров. Таким образом, сколь угодно высокая точность наблюдений была бы недостаточной для определения последующей эволюции системы.

1.6. Изменения геометрии орбиты Земли

Гипотеза о возможном влиянии изменения геометрии земной орбиты на колебания климата Земли не является чем-то новым [3]. В той или иной форме она выдвигалась Адгемером (1824 г.), Кроллом (1876 г.), Коппенюм и Вегенером (1924 г.).

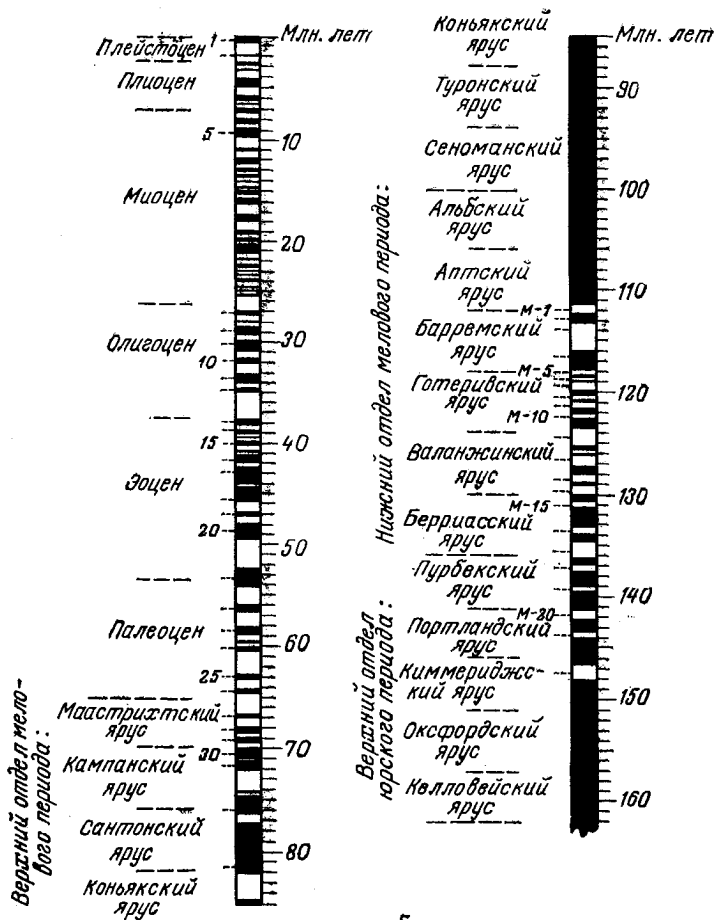
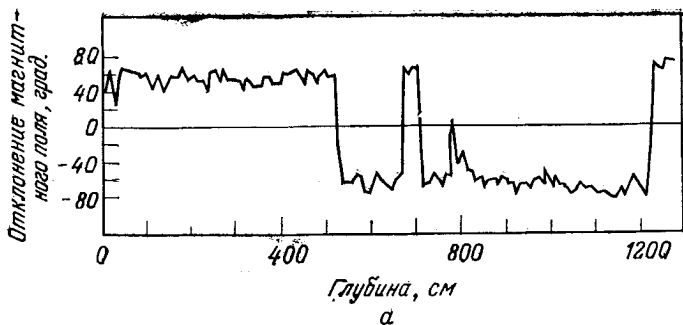


Рис. 16.2.

a — магнитное поле Земли в течение последних 1,9 млн. лет по данным изучения кернa со дна северной части Тихого океана; *б* — магнитное поле Земли многократно меняло свое направление в течение последних 160 млн. лет [13].

[16]. Однако на математической основе эта гипотеза впервые была разработана Миланковичем [17, 18]. Предложенная им теория позволяет экстраполировать корреляцию между историей развития земного климата и изменением орбиты Земли. Если такая корреляция оказывается приемлемой для прошлого, теория может давать прогнозы на будущее.

В пяти из шести рассмотренных выше типов теорий имеющих знаний недостаточно для получения сколько-нибудь осмысленных корреляций между изменениями климата и другими явлениями. Эта ситуация может измениться по мере расширения наших знаний о Солнце, об окружении нашей Галактики, о внутреннем строении Земли и изменении ее магнитного поля, а также по мере развития возможностей решения нелинейных дифференциальных уравнений. Поскольку на данный момент сведений о свойстве земной орбиты оказывается вполне достаточно для проверки теории Миланковича, мы вынуждены ограничиться изучением именно этой теории и возможностей ее практического применения.

2. ТЕОРИЯ МИЛАНКОВИЧА

Миланкович убедительно показал, что изменения параметров орбиты Земли приводят к изменению количества солнечного света, поступающего в верхние слои атмосферы (изменению падающей радиации) [17—20]. Колебания климата могут быть обусловлены изменениями трех параметров орбиты — эксцентриситета, наклона эклиптики и прецессии.

Эксцентриситет. В поле центральных сил с потенциалом $1/r$ планета движется по эллипсу. Плоскость эллиптической орбиты называется *эклиптикой*. Форма орбиты характеризуется эксцентриситетом e . Как эклиптика, так и эксцентриситет являются инвариантами движения.

Движение Земли по орбите вокруг Солнца возмущается другими планетами и зависит от ряда факторов. Подобные нецентральные возмущения за счет влияния других планет оставляют плоскость эллиптической орбиты, по существу, неизменной. Однако за прошедший миллион лет эксцентриситет изменялся от 0,00 примерно до 0,06 (рис. 16.3, а). Это изменение не описывается гармоническими (с одной частотой) колебаниями; имеется спектр частот, причем преобладают частоты, которым соответствуют периоды колебаний от 90 до 105 тыс. лет, в среднем около 93 тыс. лет (рис. 16.3, б). В данное время эксцентриситет орбиты мал. Количество энергии, поступающей в верхние слои атмосферы при почти круговой орбите и при максимальном эксцентриситете, различается на 0,1%. Этого вполне достаточно для изменения средней температуры земной

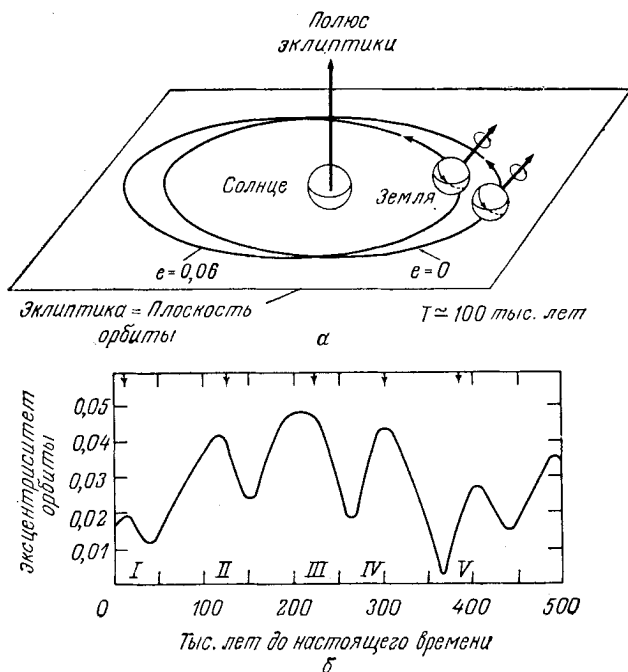


Рис. 16.3.

a — изменения орбиты Земли вызваны влиянием других планет. При этом плоскость орбиты остается неизменной, так как первичные возмущения вызваны планетами, орбиты которых лежат в одной плоскости. Эксцентриситет изменяется от 0,00 до 0,06; b — изменение эксцентриситета земной орбиты на протяжении последних 500 тыс. лет [22].

поверхности на несколько кельвинов, что в свою очередь достаточно для возникновения экстремальных климатических условий [3].

В тех случаях, когда зима (например, в Северном полушарии) приходится на время прохождения перигелия (самого близкого расстояния до Солнца), Земля в среднем ближе к Солнцу, и это время года будет короче. В нашу эпоху перигелий приходится на зимний период в Северном полушарии. Таким образом, северные зимы короче и теплее, чем южные. В периоды очень малого эксцентриситета продолжительность зимы в Северном и Южном полушариях была бы примерно одинакова.

Угловой момент вращения Земли не остается неизменным из-за взаимодействия Солнца и Луны с квадрупольным моментом вращения Земли. В результате этого ориентация земной оси меняется относительно системы «неподвижных звезд». Подобное изменение ориентации оси удобно рассматривать с точки зрения двух процессов — изменения наклона эклиптики и прецессии.

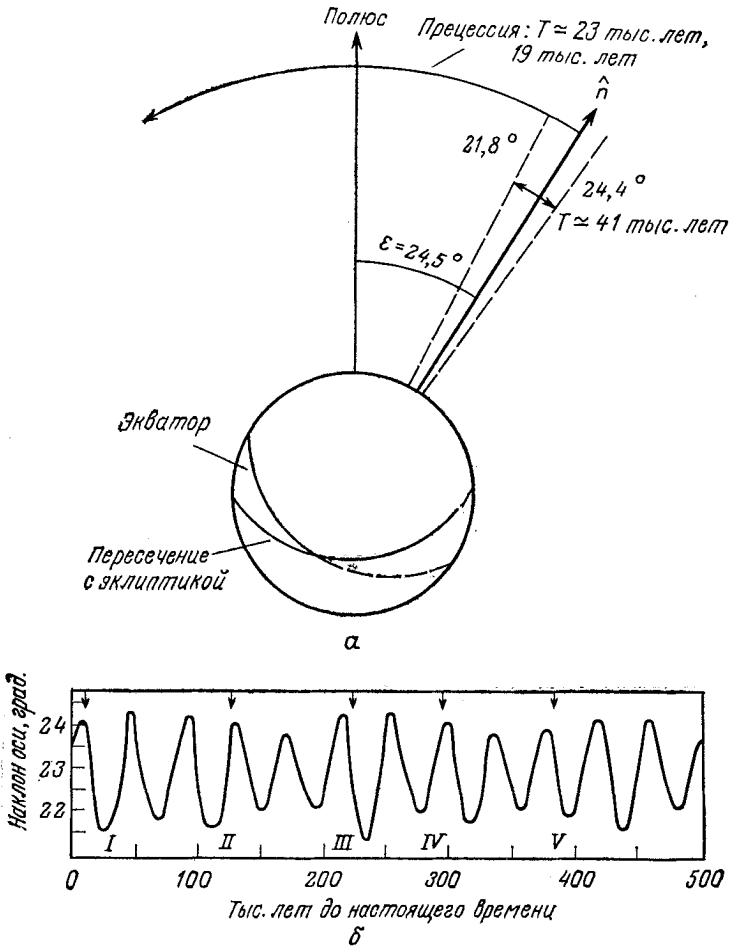


Рис. 16.4.

а — прецессия земной оси относительно полюса эклиптики происходит с периодом от 19 до 23 тыс. лет. Угол между полюсом и осью изменяется от $21,8$ до $24,4^\circ$ с периодом около 41 тыс. лет; *б* — изменение наклона эклиптики Земли за последние 500 тыс. лет [22].

Наклонение эклиптики — угол между плоскостью земного экватора и эклиптической, или между земной осью и полюсом (перпендикуляром) эклиптики. Наклонение эклиптики изменяется от $21,8$ до $24,4^\circ$ с периодом, приблизительно равным 41 тыс. лет (рис. 16.4). Наклон земной оси не влияет на общую годовую инсоляцию. Он определяет лишь сезонную разницу температур, которая возрастает по мере увеличения наклона эклиптики,

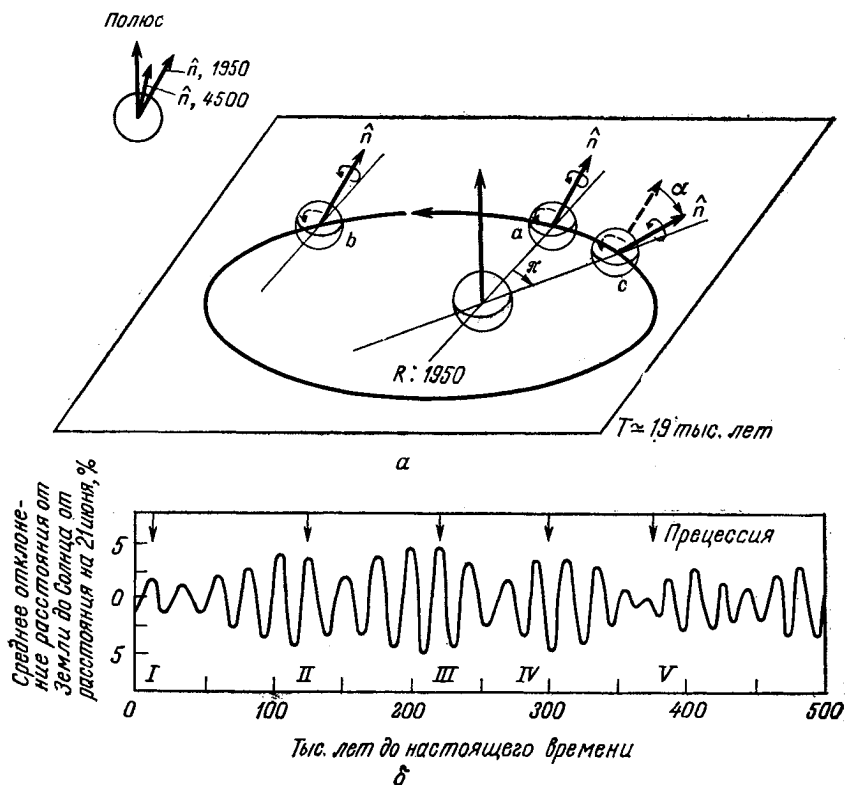


Рис. 16.5.

a — весеннее равноденствие наступает в тот момент, когда линия пересечения эклиптики (плоскости земной орбиты) с плоскостью экватора Земли проходит через центр Солнца. Эта линия вращается вокруг эклиптики, так как земная ось прецессирует по часовой стрелке (вверху слева), при этом характерные периоды прецессии составляют $T \approx 23$ тыс. и $T \approx 19$ тыс. лет. a — весеннее равноденствие 1950 г. определяет линию начала отсчета, т. е. линию, от которой измеряется угол α ; b — весенний день, последний в 1950 г.; c — весеннее равноденствие, когда ось \hat{n} повернулась на угол α . Если $\alpha \approx 45^\circ$, то данная ориентация произойдет приблизительно в 4500 г. (1950 лет + 20 тыс. лет); b — прецессия не оказывает непосредственного влияния на расстояние от Земли до Солнца. Однако она должна влиять на это расстояние в определенное время в годичном или сезонном цикле Земли [22].

Этот эффект проявляется синхронно в обоих полушариях и увеличивается с географической широтой.

В периоды низкой сезонной разницы температур ледяные глыбы могут образовываться в течение зимы, а их таяние будет происходить в течение теплого времени года, причем процесс будет идти медленно, и возможно оледенение. Вместе с тем в периоды максимальной сезонной разницы температур ледяной покров, нарастающий за зиму, тает летом. Таким образом, можно установить грубую корреляцию между периодами низкого и

высокого контраста инсоляции, с одной стороны, и чередованием ледниковых и межледниковых периодов — с другой.

Прецессия — колебания земной оси вокруг полюса эклиптики. Эта прецессия носит весьма сложный характер и в отличие от изменений двух других параметров орбиты даже в грубом приближении не подчиняется гармоническому закону. Спектр ее частот распадается на две области — с периодами приблизительно 23 и 19 тыс. лет.

Прецессия обуславливает сдвиг наступления равноденствий. Плоскость эклиптики и экваториальная плоскость Земли пересекаются по линии, проходящей через центр земного шара. Эта линия перемещается вместе с Землей при ее движении по орбите вокруг Солнца. Весенние и осенние равноденствия наступают в моменты, когда эта линия проходит через центр Солнца. Ориентация этой линии изменяется по мере того, как земная ось прецессирует вокруг полюса эклиптики (рис. 16.5). Поскольку сама линия проходит по эклиптике, ее ориентация определяется углом α между ней и линией, соответствующей определенному году и выбранной за начало отсчета (в качестве эталонной принята линия, отвечающая 1950 г). Вследствие прецессии оси λ сезонный год оказывается примерно на 20 мин короче солнечного.

Прецессия не вызывает каких-либо сдвигов инсоляции в течение года; она не влияет и на сезонную разницу температур, когда Земля находится на круговой орбите. Однако такое влияние имеется в случае эллиптической орбиты, причем оно возрастает с увеличением эксцентриситета.

Изменения сезонной температуры в Северном и Южном полушариях, обусловленные изменениями наклона эклиптики, находятся в фазе и не зависят от эксцентриситета орбиты. Аналогичные изменения за счет прецессии, напротив, не совпадают по фазе и увеличиваются по мере возрастания эксцентриситета орбиты. Например, в настоящее время Северное полушарие отклоняется от Солнца при прохождении перигелия. Таким образом, в Северном полушарии наблюдаются короткая теплая зима и долгое холодное лето, а в Южном полушарии — короткое жаркое лето и долгая холодная зима. Через 8—10 тыс. лет Северное полушарие при прохождении перигелия будет обращено к Солнцу. Тогда в Северном полушарии будет короткое жаркое лето и длинная холодная зима, а в Южном полушарии — короткая теплая зима и длинное холодное лето.

Очевидно, что среднегодовая инсоляция верхних слоев атмосферы зависит от всех трех параметров орбиты. Изменения летней инсоляции в течение последних 500 тыс. лет относительно средней многолетней представлены на рис. 16.6 для трех различных северных широт. Пики на этих кривых соответствуют максимумам в сезонной разнице температур. По-видимому, на-

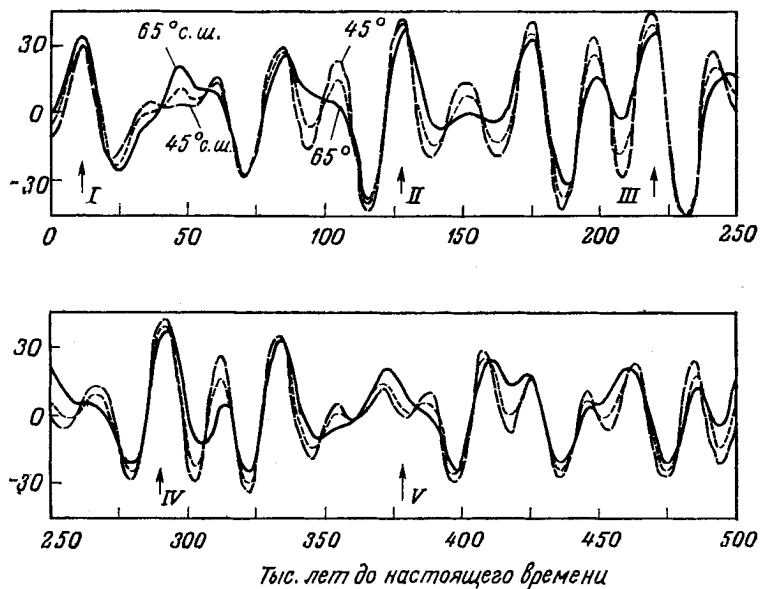


Рис. 16.6.

Три орбитальных параметра, по-видимому, могли оказывать совместное влияние на изменения инсоляции на различных географических широтах в течение последних 500 тыс. лет. По вертикали показано отклонение от средней тепловой солнечной радиации для каждой географической широты (900 для 45° с. ш., 775 для 65° с. ш.). Максимальные отклонения от среднего составляют около $\pm 5\%$. Четко видны периоды, когда наклоны эклиптики и прецессия действуют асинхронно [21, 22].

чала последних четырех межледниковых периодов (указаны стрелками) хорошо соответствуют пикам сезонной разницы температур (а возможно, являются их следствием) [22].

2.1. Проверка теории Миланковича

Из всех разновидностей теорий, предложенных для объяснения оледенений в плейстоцене и рассмотренных выше, только теорию Миланковича можно в настоящее время подвергнуть проверке путем сравнения ее выводов относительно изменений климата в прошлом с геологическими данными о ледниковых периодах. Именно такое сравнение провели авторы работы [23]. Для этого необходимо было, во-первых, найти подходящие геологические образцы, относящиеся к последнему 500 000-летию, с погрешностью, намного меньшей самого короткого периода изменения орбиты, т. е. 19 тыс. лет, и, во-вторых, ввести подходящую систему измерений для этих образцов. Подобные измерения требовались для точной оценки температуры в одной или нескольких точках на земной поверхности.

Исследования проводились на двух ядрах глубоководных отложений, взятых из определенной точки южной части Тихого океана, расположенной примерно на одинаковом расстоянии от Африки, Антарктиды и Австралии, что позволяло свести к минимуму любые возможные искажения за счет эрозии суши. По скорости отложения осадочных пород определяли их возраст: чем глубже уровень отбора ядра, тем старше осадочная порода. В качестве маркеров дат по оси отложения были использованы некоторые глобальные изменения, подтвержденные достаточно надежными данными, такими, как изменения магнитного поля и изотопные аномалии. По маркерам определялась скорость отложения осадочных пород. В выбранных точках она превышала 3 см/1000 лет. Пробы брались через каждые 10 см по глубине, так что временной интервал между последовательными пробами был менее 3 тыс. лет. Подобным образом были с достаточной точностью получены временные отметки на протяжении 450 тыс. лет.

Были выполнены анализы трех типов каждого из образцов, взятых через каждые 10 см. Исследовались скелеты (а точнее то, что от них осталось) определенных видов мелких животных. Когда эти животные погибали, их скелеты оседали на дно и становились частью осадочных пород. На основании относительного изобилия этих видов и содержания в них изотопов можно получить информацию об изменении температуры в зависимости от времени, отсчитываемого назад, что соответствовало продвижению в глубину отложений.

Были проведены анализы на содержание (1) изотопа ^{18}O , (2) Ts и (3) *C. davisiana*.

1. Содержание изотопа ^{18}O в останках животных отражает содержание этого изотопа в Мировом океане. Скорость испарения воды, в состав молекул которой входит более тяжелый изотоп кислорода, несколько меньше, чем скорость испарения обычной воды H_2^{16}O . В периоды роста ледников запасы воды в Мировом океане будут истощаться. Испарение в первую очередь обычной воды приведет к увеличению отношения $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ в отложениях скелетов животных. Изменения этого отношения свидетельствуют об изменениях климата в Северном полушарии.

2. Проводился статистический анализ скелетных останков радиолярий различных видов. Относительное обилие последних является мерой повышения температуры воды в поверхностном слое над местом взятия ядер.

3. Относительное обилие одного из видов радиолярий (*C. davisiana*), используемых при анализе содержания Ts, позволяет оценить температуру и градиент солености в поверхностных водах Антарктики.

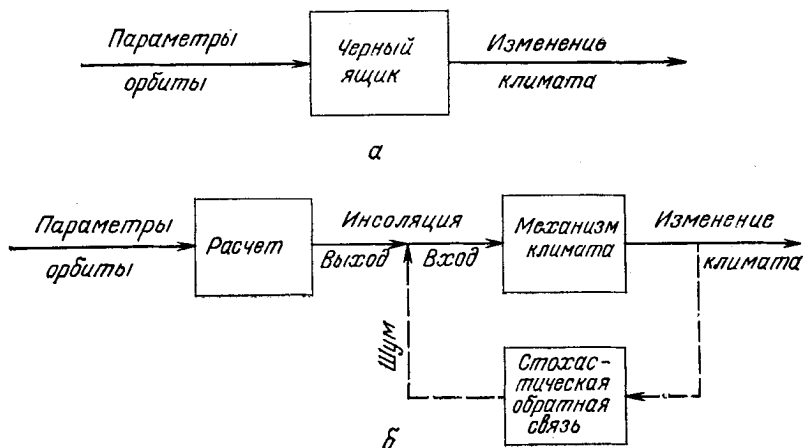


Рис. 16.7.

а — Землю можно рассматривать как «черный ящик», преобразующий изменения параметров орбиты в изменения климата. Если этот «черный ящик» может быть описан системой линейных уравнений, не зависящих от времени, то частотным компонентам возмущений на входе должны соответствовать аналогичные компоненты на выходе; б — колебания инсоляции верхних слоев атмосферы могут быть рассчитаны по известным данным об изменениях параметров орбиты Земли. Инсоляция является входной переменной в системе, определяющей механизм климата Земли. Изменения климата приводят к изменению облачного покрова Земли и альбедо; аналогичное влияние оказывают другие факторы (например, вулканическая активность), не связанные непосредственно с климатом. Для описания этих процессов добавлен контур обратной связи с шумом.

Данные анализов, проведенных на двух кернах из субантарктической области, свидетельствуют о колебании температуры в Северном полушарии, в поверхностных водах субантарктических областей и Антарктики за последние 450 тыс. лет с интервалом 3 тыс. лет.

Точный механизм влияния изменения параметров орбиты на климат не известен. Тем не менее теорию Миланковича можно проверить, вводя простейшее из возможных допущений, а именно связь между такими изменениями подчиняется линейному закону (рис. 16.7,а). Тогда колебания определенной частоты на входе системы (изменения параметров орбиты) должны соответствовать таким же колебаниям на ее выходе (изменения климата). Периоды изменения параметров орбиты составляли: 100 тыс. лет (эксцентриситет), 41 тыс. лет (наклонение эклиптики), 23 и 19 тыс. лет (прецессия).

Периоды изменения климата определялись на основании гармонического анализа (по Фурье) результатов описанных выше анализов керновых образцов. Амплитуды гармоник по Фурье были представлены графически в виде зависимости от частоты (величины, обратной периоду). В результате такой обработки данных удалось выявить периодические компоненты в диапазо-

нах 87—119, 37—47 и 21—24 тыс. лет. Отношение площадей под этими пиками было 7:2:1. Для данных анализа ^{18}O колебания, соответствующие периоду 20 тыс. лет, можно было разложить на две гармонические составляющие с периодами 24 и 19,5 тыс. лет. Полученные результаты свидетельствуют также о том, что ледниковые периоды были связаны с периодами малого эксцентриситета орбиты.

Приведенное выше сравнение астрономических данных об изменении параметров орбиты с геологическими данными об изменении температур в арктических, субантарктических и антарктических областях подтверждает гипотезу Миланковича, согласно которой эволюция орбиты является главным фактором, определяющим климатические сдвиги [22, 23].

В теории Миланковича подразумевается, что временные масштабы изменения климата те же, что и изменения орбиты, т. е. велики по сравнению с продолжительностью человеческой жизни. Очевидно, что переходы от ледниковых к межледниковым периодам происходят в течение времени порядка сотен лет. Наличие множественных временных масштабов, а также смена состояний (ледниковых и межледниковых) является ярким свидетельством в пользу возможности катастрофы в изменении климата.

2.2. Связь с теорией катастроф

Теория Миланковича не дает возможности вскрыть механизм влияния изменений орбиты на климатические сдвиги. Поэтому целесообразно эту проблему решать в два этапа, а изучаемую систему (рис. 16.7, *а*) представить в виде двух линейных систем, функционирующих последовательно (рис. 16.7, *б*). На первом этапе орбитальные данные переводятся в поток энергии, поступающей в верхние слои атмосферы, в зависимости от времени и географической широты (данные по инсоляции). Этот этап может быть осуществлен с большой точностью путем введения некоторых разумных астрофизических допущений (постоянной интенсивности солнечного излучения в течение последнего миллиона лет, отсутствия крупных перемещающихся облаков пыли, отсутствия межгалактических скоплений и др.).

Трудности появляются на втором этапе — при определении климата на выходе системы при заданной инсоляции на входе. Преимущество разделения проблемы на два этапа (рис. 16.7, *б*) состоит в том, что в этом случае оно сводится только к анализу земной динамики и термодинамики, который, правда, оказывается сложным. Для проведения такого анализа необходимы модели, описывающие перенос массы и энергии в Мировом океане

и атмосфере. Это приведет к системе связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых могут даже не быть дифференцируемыми функциями переменных состояния. (Так, альbedo резко изменяется вблизи точки конденсации водяного пара.)

В связи с отсутствием общей теории бифуркаций для подобных сложных уравнений более плодотворным может оказаться упрощенный подход. Вначале выделяют наиболее важные компоненты механизма изменения климата Земли. Они могут включать основные океанические течения, пассаты, струйные потоки, а также температурные поля, распределение водяного пара и плотности углекислого газа в каждом из этих потоков. Затем для каждого потока может быть построена система динамических уравнений, описывающих перенос массы и энергии. Определяющие члены в этих уравнениях будут отражать периодическое (с периодом в 1 год) изменение инсоляции верхних слоев атмосферы. Множественность локально устойчивых решений может быть определена в зависимости от суммарной годовой инсоляции.

◇◇◇ Некоторые геологи и климатологи не теряют надежды, что анализ более поздних геологических данных (начиная с 10 000 г. до н. э.) позволит выявить по крайней мере некоторые из локально устойчивых океанических течений и атмосферных потоков на протяжении текущего (и предшествовавших) межледникового периода, а анализ геологических данных, относящихся к ледниковым периодам, даст возможность установить локально устойчивые частотные характеристики на протяжении этих периодов океанических течений и атмосферных потоков.

Для того чтобы представить эти рассуждения в более конкретной форме, можно ввести единственную переменную, характеризующую состояние климата на Земле. Такой переменной могли бы служить, например, среднегодовая температура в Нью-Йорке, число туманных дней в Лондоне или плотность тумана в Ирландии. Все три показателя, по-видимому, имеют низкие значения в ледниковые периоды и высокие значения в межледниковые периоды. В таком случае можно предположить, что вероятность определенного общего состояния климата на Земле будет пропорциональна $\exp[-V(x)]$ (рис. 16.8). Из вида этой функции следует возможность скачкообразного перехода от одной разновидности устойчивого теплого климата к другой (например, $W2 \rightarrow W3$), приводящего лишь к «слабому» изменению климатических условий на земном шаре. Можно с уверенностью полагать, что такого типа переходы имели место в течение текущего межледникового периода,

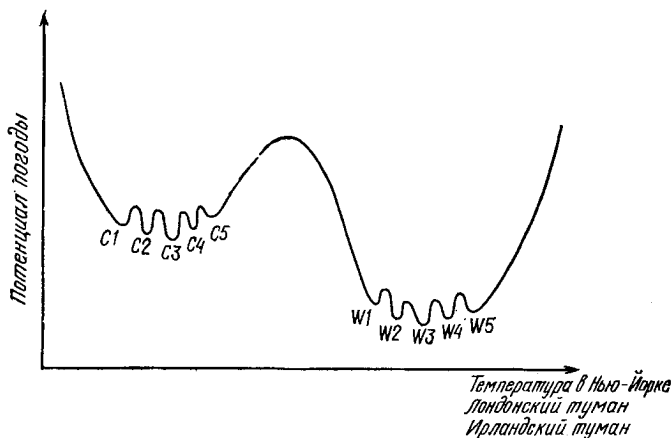


Рис. 16.8.

Если окажется, что состояние климата Земли можно описать некоторой потенциальной функцией, то такая функция может иметь два пологих локальных минимума. Один из них (при высокой температуре) соответствует межледниковым периодам, другой (при низкой температуре) — ледниковым периодам. Каждый из пологих минимумов может обладать дополнительной тонкой структурой в виде многочисленных локальных минимумов (C1—C5 и W1—W5).

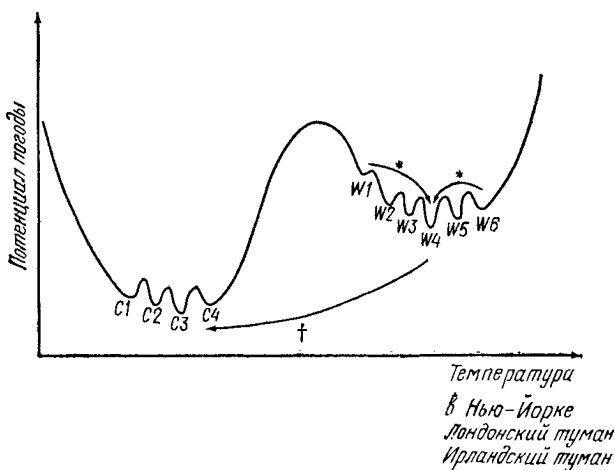


Рис. 16.9.

При медленном изменении параметров орбиты Земли относительная высота обоих пологих минимумов также может медленно меняться. Если высокотемпературный минимум, который соответствует текущему межледниковому периоду, окажется метастабильным по отношению к низкотемпературному минимуму, соответствующему ледниковому периоду, быстрые по сравнению с геологическим временным масштабом переходы могут служить предвестником начала оледенения. Переходы $W_i \rightarrow W_j$ имеют менее пагубные последствия, чем переходы $W_i \rightarrow C_j$. * — очень существенные; † — пагубные.

Общий вид функции $V(x)$ будет меняться с изменением параметров орбиты, и ледниковому периоду $V(x)$ будет соответствовать функция, изображенная на рис. 16.9. В теплом периоде переход от одной разновидности теплого климата к другой ($W_i \rightarrow W_j$) был бы намного менее существен, чем любой переход от теплого климата к холодному ($W_i \rightarrow C_j$).

◇◇◇ Описанный выше переход от детерминированной системы связанных дифференциальных уравнений в частных производных к системе связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений стохастического типа аналогичен сведению уравнения Фоккера — Плана для распределения вероятности к системе уравнений Ланжевена для основных ожидаемых величин.

◇◇◇ Если намеченную в данном разделе программу вообще удастся реализовать, то будет интересно применить такой подход к анализу климата Земли, экстраполируя состояние ее поверхности как в далекое прошлое, так и в будущее. При подобной экстраполяции необходимо принимать во внимание дрейф континентов. Изменение формы Мирового океана неизбежно будет влиять на изменение локально устойчивых океанических течений и связанных с ними атмосферных потоков (или на относительную вероятность той или иной их структуры).

Сведение к катастрофе сборки

Если нас интересует всего лишь переход от ледникового периода к межледниковому, то детали изменения структуры климата, представленные на рис. 16.8 и 16.9, оказываются менее важными, чем изменения в целом, и, следовательно, их можно не принимать во внимание. Тогда, оставляя в стороне всю сложную систему уравнений, заключаем, что модальность и быстрые переходы свидетельствуют о возможности катастрофы. В связи с существованием двух основных состояний системы — холодного и теплого климата — можно сделать вывод, что это будет катастрофа типа сборки.

Тот факт, что в данном случае мы имеем дело с катастрофой типа сборки, позволяет сделать вывод о наличии лишь одной существенной переменной x , характеризующей состояние системы. Эта переменная представляет собой неизвестную и, по-видимому, сложную функцию также неизвестных параметров, определяющих климат. Указанные параметры, а также зависимость «критической» переменной от этих параметров определяют путь построения моделей.

Управляющие параметры a , b в случае катастрофы типа сборки зависят от инсоляции, и, следовательно (согласно теории Миланковича), от времени. Таким образом, если бы гипотеза запаздывания оказалась приближенно справедливой, то это оз-

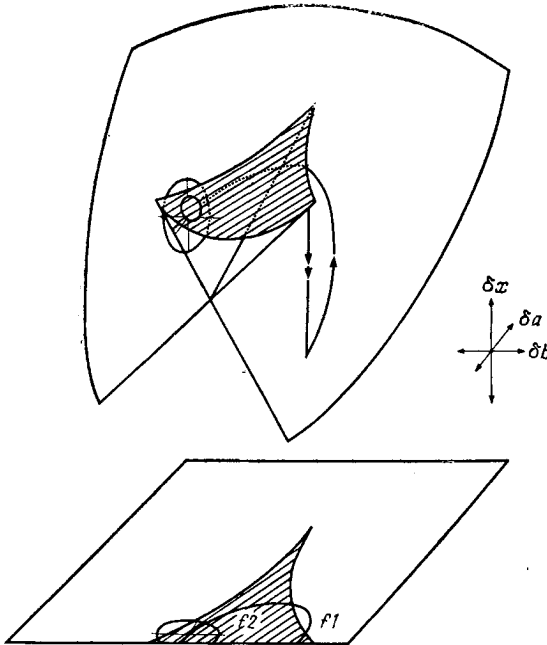


Рис. 16.10.

Если управляющие параметры $a(t)$, $b(t)$ пересекают линию сгиба $f1$, то предотвратить внезапный скачок (двойная стрелка) невозможно. Если они приближаются к линии сгиба так, что «эллипс шума» пересекает верхнюю поверхность (верхняя часть рисунка) или выходит за пределы линии сгиба (нижняя часть рисунка), то флуктуации, вызывающие переход от метастабильного (средний лист) к устойчивому минимуму (нижний лист), можно подавить. При этом система будет иметь более теплый метастабильный климат. Справа показаны уровни шума по направлениям изменения переменной состояния системы и управляющих параметров.

начало бы. что медленные изменения орбиты могли привести к быстрым переходам от одних климатических условий к другим.

Любая реальная модель должна учитывать влияние шума. В рассматриваемых случаях шум возникает как в управляющих параметрах, так и в переменных состояния среды.

1. *Шум в управляющих параметрах.* Несмотря на то что может быть точно известна инсоляция на выходе системы «черный ящик» (рис. 16.7,б), лишь часть энергии, поступающей на Землю, действительно оказывает влияние на ее климат. Остальная часть отражается облачным покровом и земной поверхностью. Наблюдаемые, четко выраженные кратковременные (суточные и недельные) изменения облачного покрова, по-видимому, несущественны.

Более длительные изменения облачного покрова обусловлены изменениями океанических течений и атмосферных потоков.

Доля поступающей энергии излучения, оказывающей влияние на систему, зависит также от активности вулканических процессов. Указанные отклонения наряду с другими отклонениями случайного характера необходимо рассматривать в качестве шума, сопровождающего «сигналы» $a(t)$, $b(t)$.

2. *Шум в переменных состояниях системы.* Каждая из переменных состояний системы представляет собой величину, которую получают путем усреднения по всему годовому циклу или его части. В связи с тем что переменные состояния системы являются усредненными величинами, их среднегодовые значения подвержены флуктуациям. Такие флуктуации необходимо рассматривать как шум по отношению к основной переменной состояния x (рис. 16.9).

Шум в управляющих параметрах $a(t)$, $b(t)$ может вызвать переход от одних климатических условий к другим (рис. 16.10). Флуктуации достаточной продолжительности могут также перевести систему из состояния метастабильного равновесия в устойчивое состояние. Таким образом, представляется вполне возможным, что внезапные переходы между различными климатическими условиями могут быть «спровоцированы» шумом либо в переменных состояниях системы, либо в управляющих параметрах. Указанные обстоятельства могут оказаться причиной наличия двух четко различных временных масштабов, характерных для переходов от ледниковых к межледниковым периодам.

◇◇◇ Переходы между различными конфигурациями арктического течения были имитированы в обычных лабораторных условиях. Результаты подобных экспериментов, свидетельствующие о наличии модальности, внезапных скачкообразных переходов и гистерезиса, были интерпретированы с точки зрения возникновения множественных катастроф типа сборки.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Изучение изменений климата в плейстоцене в рамках теории катастроф дает возможность предложить некоторые конкретные меры борьбы с внезапным наступлением оледенения в будущем, разработка которых должна включать следующие этапы:

— определение достаточно общей системы переменных состояний, с тем чтобы их значения полностью определяли состояние климата на Земле;

— построение динамических уравнений, описывающих изменения переменных состояний в зависимости от падающей солнечной радиации;

— определение потенциальной функции (псевдопотенциальной функции Ляпунова), описывающей конфигурацию равновесия квазистатической системы;

— выделение соответствующей функции переменных состояния, такой, что ее поведение, не подчиняющееся закону Морса, обеспечивает фазовые переходы;

— определение траектории управляющих параметров $a(t)$, $b(t)$ в пространстве управляющих параметров типа сборки и средние уровни шума, характерные для $a(t)$, $b(t)$, $x(t)$. Если эта траектория пересекает линии сгиба так, что метастабильное равновесие исчезает, то для предотвращения оледенения ничего нельзя сделать. Если же эта траектория приближается к линиям сгиба, но не пересекает их, т. е. шумовой фон вызывает переход от состояния метастабильного равновесия к устойчивому, то для предотвращения оледенения могут быть приняты некоторые меры.

При возникновении опасных флуктуаций параметров $a(t)$, $b(t)$ на них можно воздействовать таким образом, чтобы подавить флуктуации и увести систему от близкой к ней кромки сборки. Механизм подавления флуктуаций может заключаться в изменении поступающей за счет инсоляции энергии путем изменения облачного покрова или альбедо Земли на определенных широтах. Он может быть также обусловлен отклонением температуры, расхода или направления одного или нескольких океанических течений или атмосферных потоков. Аналогично можно подавить любую флуктуацию переменной x , в результате которой система могла бы перейти через барьер, разделяющий метастабильное и устойчивое состояния (рис. 16.10).

4. ВЫВОДЫ

Описанный выше подход к изучению изменений климата может привести к точной постановке ряда важных вопросов. Несмотря на то что смена климата, по всей видимости, вызывается изменениями параметров орбиты Земли, осуществить воздействие на величину этих параметров с целью избежать смены климата не представляется возможным. Даже если бы такое воздействие было осуществимо, оно оказалось бы неразумным. Описанные выше меры могут явиться основой для разработки методов, позволяющих «фиксировать» климат Земли в течение межледникового периода путем приложения достаточных по интенсивности воздействий лишь на те части системы уравнений, которые определяют климат в зависимости от поступающей солнечной энергии.

Литература

1. Flint R. F. *Glacial Geology and The Pleistocene Epoch*, New York: Wiley 1947; *Glacial and Quaternary Geology*, New York: Wiley, 1971.
2. Laur T. M. *The World Food Problem and Role of Climate*, *EOS*, 57(4), 189—195 (1976).

3. Herman J. R., Goldberg R. A. Sun, Weather, Climate, Washington, D. C.: NASA, 1978.
4. Parker E. N. Gearing up to Answer Questions Posed by the Sun, *Physics Today*, **32**(9), 9—10 (1979).
5. Eddy J. A., Boornazian A. A. Secular Decreases in the Solar Diameter, 1863—1953. *Bull. Am. Astr. Soc.*, **11**, 437 (1979), (01.19.03).
- 6a. Shapiro I. I. Is the Sun Shrinking?, *Science*, **208**(4), 51—53 (1980).
- 6b. Sofia S., O'Keefe J. R., Lesh J. R., Endol A. S. Solar Constant: Constraints on Possible Variations Derived from Solar Diameter Measurements, *Science*, **204**, 1306—1308 (1979).
- 6c. *Physics Today*, **33**(5), 21—22 (1980).
- 6d. New York Times, July 6, 1980, p. 21.
7. Davis R., Solar Neutrinos. II. Experimental, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 303—305 (1964).
8. Bahcall L. N. Solar Neutrinos. I. Theoretical, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 300—302 (1964).
9. Hoyle F., Lyttleton R. A. The Effect of Interstellar Matter on Climate Variation, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **35**, 405—415 (1939).
10. Talbot R. J., Butler D. M., Newman M. J. Climatic Effects During Passage of the Solar System Through Interstellar Clouds, *Nature*, **262**, 561—563 (1976).
11. Dennison B., Mansfield V. N. Glaciations and Dense Interstellar Clouds, *Nature*, **261**, 32—34 (1976).
12. Kennett J. P., Thunell R. C. Global Increase in Quaternary Explosive Volcanism, *Science*, **187**, 497—503 (1975).
13. Larson R. L., Pitman W. C. World-wide Correlation of Mesozoic Magnetic Anomalies and Its Implications, *Bull. Geol. Soc. Amer.*, **83**, 3645—3662 (1972); Ninkovich D., Opdyke N., Heezen B. C., Foster J. H. Paleomagnetic Stratigraphy, Ratios of Deposition and Tephrochronology in North Pacific Deep-Sea Sediments, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **1**, 476—492 (1966).
14. Wollin G., Ericson D. B., Ryan W. B. Variations in Magnetic Intensity and Climatic Changes, *Nature*, **232**, 549—551 (1971).
15. Lorenz E. N. Climate Determinism, in: Causes of Climatic Change (J. M. Mitchell, Ed.), *Meteorological Monogr.*, **8**, Boston, Mass.: Am. Meteorological Soc., 1968, pp. 1—3.
16. Koppen M., Wegner A. Die Klimate der geologischen Vorzeit, Berlin, 1924.
17. Milankovitch M. Mathematische Klimatehre und astronomische Theorie der Klimaschwankungen, in: Handbuch der Klimatologie (W. Koppen and R. Geiger, Eds.), v. 1, pt. A. Berlin: Gebr. Borntraeger, 1930, pp. 1—76.
18. Milankovich M. Die Chronologie des Pleistocens., *Bull. Acad. Sci. Math. Nat Belgrade*, **4**, 49 (1968).
19. Brouwer, van Woerkom, in: Climate Change (H. Shapley, Ed.), Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1953.
20. Vernekar A. D. Long Period Global Variations of Incoming Solar Variation, in: Research on the Theory of Climate, v. 2, Rep. of the Travelers Research Center, Inc., Hartford, Conn., May 1968.
21. Vernekar A. D. Long Period Global Variations of Incoming Solar Radiation, *Meteorological Monogr.*, **12**, Boston, Mass.: Am. Meteorological Soc., 1972, p. 34.
22. Broecker W. S., van Donk J. Insolation Changes, Ice Volumes, and the O¹⁸ Record in Deep Sea Cores, *Revs. Geophys. Space Sci.*, **8**, 169—198 (1970).
23. Hays J. D., Imbrie J., Shackleton N. J. Variations in the earth's orbit: Pacemaker of the Ice-Ages, *Science*, **194**, 1121—1132 (1976).
24. Lacher R. C., McArthur R., Buzyna G. Catastrophic Changes in Circulation Flow Pattern, *Am. Scientist*, **65**, 614—621 (1977).

ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Элементарная теория катастроф изучает вырожденность в семействах отображений F неограниченной области из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m :

$$F: \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

где $k \leq 5$, $n < \infty$, $m = 1$. Чтобы раздвинуть границы элементарной теории катастроф, следует ослабить эти ограничения. Возможные обобщения элементарной теории катастроф являются предметом рассмотрения настоящей главы.

1. $k > 5$

Если число управляющих параметров больше пяти, неморсовский росток может зависеть от так называемых модулей (гл. 3). Модули впервые появляются в семействах функций, зависящих от шести ($k = 6$) управляющих параметров, когда последние используются для обращения в нуль всех шести коэффициентов при квадратичном члене в критической точке неморсовской функции трех ($l = 3$) «плохих» переменных состояния. Тогда путем неособенной замены переменных можно получить канонические значения (1 или 0) для девяти из десяти коэффициентов при членах третьей степени от трех переменных состояния. В результате остается один непрерывно изменяющийся параметр, который и называется *модулем*. Именно это обстоятельство явилось причиной того, что перечень катастроф Тома ограничивается числом $k = 5$.

Если число управляющих параметров больше шести, то число модулей может увеличиваться. Существует простая связь между числом управляющих параметров k , вырожденностью μ (числом Милнора) вырожденного ростка катастрофы и числом остающихся модулей [1]:

$$\mu = k + m + 1. \quad (17.1)$$

Мы уже сталкивались с подобным соотношением в случае простых ($m = 0$) ростков, когда между размерностью k пространства управляющих параметров и вырожденностью μ существует связь вида $k = \mu - 1$,

Согласно Арнольду [1—5], все неморсовские ростки могут быть классифицированы следующим образом:

$$1) \mu \leq 16; 2) k \leq 10; 3) m \leq 2.$$

Удивительно, что наиболее естественная классификация неморсовских ростков включает малые значения m , а не μ или k .

1. $m = 0$. Имеются три типа простых ростков (табл. 17.1). Есть одна бесконечная последовательность A_μ ($\mu \geq 2$), зависящая от одной переменной состояния, и другая бесконечная последовательность D_μ ($\mu \geq 4$), зависящая от двух переменных состояния. Кроме того, имеется одна конечная последовательность E_μ ($\mu = 6, 7, 8$), зависящая от двух переменных состояния и содержащая три члена.

Таблица 17.1. 0-модальные ростки

Бесконечные последовательности		Конечные последовательности
$l = 1$	$A_\mu \quad x^{\mu+1} \quad \mu \geq 2$	
$l = 2$	$D_\mu \quad x^2y + y^{\mu-1} \quad \mu \geq 4$	$E_6 \quad x^3 + y^4;$
		$E_7 \quad x^3 + xy^3$
		$E_8 \quad x^3 + y^5$

Для данной катастрофы существует $k = (\mu - 1)$ -мерная универсальная деформация, «отсеивающая» одномерные кривые ростков катастрофы с числом управляющих параметров, меньшим на единицу (рис. 7.6).

2. $m = 1$ [4]. Имеется одна бесконечная последовательность унимодулярных ростков

$$T_{p,q,r} = x^p + y^q + z^r + axyz, \quad a \neq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \quad (17.2)$$

зависящих от трех переменных состояния и одного модуля a . Каждая функция $T_{p,q,r}$ в этой последовательности фактически является одномодальным семейством ростков. Для функции $T_{p,q,r}$ имеют место соотношения $\mu = p + q + r - 1$, $m = 1$, $k = p + q + r - 3$. Полезно рассмотреть также и «пограничные ростки», для которых $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$:

$$T_{3,3,3} = x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad \left(\frac{a}{3}\right)^3 \neq -1,$$

$$T_{2,4,4} = x^2 + y^4 + z^4 + ay^2z^2, \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 \neq +1, \quad (17.3)$$

$$T_{2,3,6} = x^2 + y^3 + z^6 + ay^2z^2, \quad \left(\frac{a}{3}\right)^3 \neq -\left(-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Первый из этих ростков содержит три переменные состояния, а остальные два — только две «плохие» переменные состояния.

Кроме единственной бесконечной последовательности (17.2) имеются 14 особых одномодальных семейств (табл. 17.2), входящих в шесть конечных последовательностей, содержащих один член (U), два члена (S, W) или три члена (Q, S, U). Три унимодулярных семейства (E, Z, W) включают две переменные состояния, а остальные три (Q, S, U) — три переменные состояния.

Таблица 17.2. Шесть особых последовательностей, содержащих 14 особых семейств функций

	$m=1$	$m=2, a=a_0+a_1y$
$l=2$	$Z_{11} \quad x^3y + y^5 + axy^4$ $Z_{12} \quad x^3y + xy^4 + ax^2y^3$ $Z_{13} \quad x^3y + y^5 + axy^5$ $W_{12} \quad x^4 + y^5 + ax^2y^3$ $W_{13} \quad x^4 + xy^4 + ay^6$ $E_{12} \quad x^3 + y^7 + axy^5$ $E_{13} \quad x^3 + xy^5 + ay^8$ $E_{14} \quad x^3 + y^8 + axy^6$	$Z_{17} \quad x^3y + y^8 + axy^6$ $Z_{18} \quad x^3y + xy^6 + ay^9$ $Z_{19} \quad x^3y + y^9 + axy^7$ $W_{17} \quad x^4 + xy^5 + ay^7$ $W_{18} \quad x^4 + y^7 + ax^2y^4$ $E_{18} \quad x^3 + y^{10} + axy^7$ $E_{19} \quad x^3 + xy^7 + ay^8$ $E_{20} \quad x^3 + y^8 + axy^8$
$l=3$	$Q_{10} \quad x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$ $Q_{11} \quad x^3 + y^2z + xz^3 + az^5$ $Q_{12} \quad x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$ $S_{11} \quad x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$ $S_{12} \quad x^2y + y^2z + xz^3 + az^5$ $U_{12} \quad x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$	$Q_{16} \quad x^3 + yz^2 + y^7 + axy^5$ $Q_{17} \quad x^3 + yz^2 + xy^5 + ay^8$ $Q_{18} \quad x^3 + yz^2 + y^8 + axy^6$ $S_{16} \quad x^2z + yz^2 + xy^4 + ay^9$ $S_{17} \quad x^2z + yz^2 + y^6 + azy^4$ $U_{16} \quad x^3 + xz^2 + y^5 + ax^2y^2$

Как и в случае нуль-модальных катастроф, одномодальные катастрофы отбрасывают одномерные кривые катастроф с числом управляющих параметров, уменьшенным на единицу. Для бесконечной последовательности получаем простую диаграмму:

$$\begin{array}{c}
 T_{p,q,r} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 T_{p-1,q,r} \quad T_{p,q-1,r} \quad T_{p,q,r-1}
 \end{array} \quad (17.4)$$

которую, если необходимо, можно достроить до трехмерной диаграммы. Конечными точками диаграмм такого типа являются «пограничные ростки» (17.3). На рис. 17.1 изображены диа-

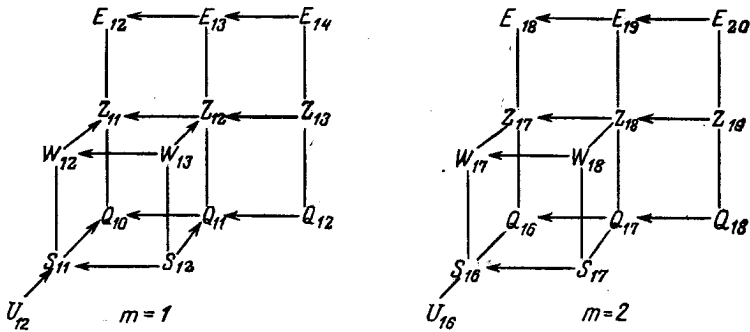


Рис. 17.1. Четырнадцать одномодальных и двухмодальных особых ростков соединяются в пирамиды.

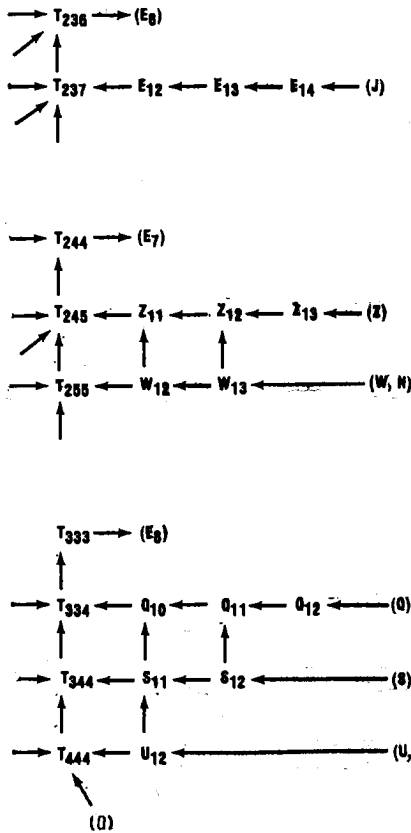


Рис. 17.2. Диаграммы смежности для некоторых унимодальных особых ростков.

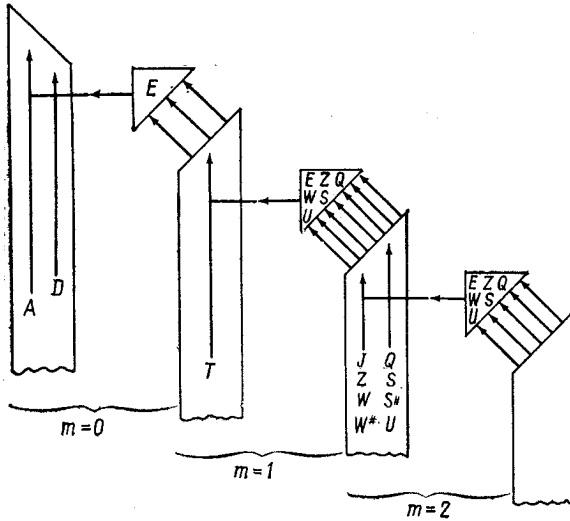


Рис. 17.3. Особенные ростки модальности m служат «буферами» между бесконечными семействами m -модальных и $(m+1)$ -модальных ростков [3].

граммы для шести особенных последовательностей, содержащих 14 особенных одномодальных семейств.

Первый элемент каждой последовательности особенных одномодальных катастроф соединяется с некоторым членом бесконечной последовательности $T_{p,q,r}$ (рис. 17.2). Из рис. 17.2 ясно, что особенные ростки близки к пограничным росткам (17.3). Далее одномодальные пограничные ростки соединяются с нуль-модальными особенными ростками (рис. 7.7). Последний член каждой последовательности особенных одномодальных катастроф получается из ростка катастрофы, который еще не встречался. Ростки, приходящие справа (J, Z, W, Q, S, U), двухмодальны, ростки N, V трехмодальны, а росток 0 пяти-модальный.

3. $m=2$ [5]. В двухмодальном случае есть восемь бесконечных последовательностей и шесть особенных конечных последовательностей, содержащих в совокупности 14 семейств ростков. Ростки особенных семейств приведены в табл. 17.2, а диаграмма соединений для них дана на рис. 17.1. Четыре из восьми бесконечных последовательностей ($J, Z, W, W^\#$) включают две переменные состояния, а остальные четыре ($Q, S, S^\#, U$) — три переменные состояния.

Эти восемь бесконечных последовательностей определяются уравнениями, аналогичными (17.1), с заменой $a \rightarrow a(a_0 + a_1 y)$ и $a_0 \neq 0$. Каждый член последовательности соединяется с ближайшим «левым» членом этой последовательности и с членами

некоторых других семейств (как, например, $D_{\mu+1} \rightarrow A_{\mu}$). В каждой из восьми бесконечных последовательностей имеется пограничный росток. Пограничные ростки для W и $W^{\#}$ совпадают, как и для S и $S^{\#}$. Шесть двухмодальных пограничных ростков соединяются с шестью крайними правыми семействами шести конечных особенных одномодальных последовательностей (рис. 17.2).

◇◇◇ Похоже, что конечные особенные последовательности m -модальных ростков играют роль «буферов» между бесконечными последовательностями m -модальных ростков и $(m + 1)$ -модальной последовательностью. Пограничные ростки бесконечных $(m + 1)$ -модальных последовательностей присоединяются к последним членам конечных (особенных) m -модальных семейств, а нижний элемент конечной особенной последовательности к члену, лежащему рядом с границей (но не на границе) бесконечной последовательности той же модальности. Схематически это изображено на рис. 17.3.

◇◇◇ Тот факт, что катастрофы с $k > 5$ можно классифицировать и приводить к каноническому виду (modulo moduli), открывает широкие перспективы исследования этих последовательностей и семейств катастроф более высокого порядка. Однако подобные исследования представляют интерес скорее с теоретической, чем с практической точки зрения.

2. $n \rightarrow \infty$

Результаты, описанные в гл. 2, справедливы для типичных семейств функций, определенных в конечномерных пространствах состояний ($n < \infty$). Естественно возникает вопрос: можно ли распространить эти результаты на случай $n \rightarrow \infty$?

Чтобы ответить на этот вопрос, прежде всего необходимо дать определение матрицы устойчивости в терминах симметрических операторов в гильбертовых или банаховых пространствах. Направления, соответствующие нулевым собственным значениям $n \times n$ -матрицы устойчивости, порождают ядро (нуль-пространство) матрицы устойчивости в конечномерном пространстве. «Плохие» направления принадлежат ядру симметрического оператора. Если ядро конечномерно и нулевые собственные значения симметрического оператора отделены от нуля, то задача, по существу, становится конечномерной, и поэтому не возникает никаких неожиданностей.

В случае, когда ядро бесконечномерно, размерность пространства управляющих параметров также должна быть бесконечной. Пока еще неизвестно, каков вид канонической формы отображения, производная которого является симметричным оператором устойчивости (если такая форма вообще существует).

В случае конечномерного пространства состояний ненулевые собственные значения оператора устойчивости обязательно отделены от нуля, поскольку число собственных значений конечно. В беконечномерном случае это уже не обязательно так, поэтому можно ожидать возникновения новых явлений, сопровождающихся потерей устойчивости. Физический смысл всех возможных явлений такого рода пока еще не ясен.

3. $m > 1$

Перенос идей и методов теории катастроф, развитых для функций ($m = 1$), на случай отображений ($m > 1$), по-видимому, потребует совершенно нового подхода, в корне отличающегося от описанного в частях I и IV.

В гл. 5 было показано, что структурно устойчивые функции образуют плотное множество в пространстве всех отображений типа $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$. В результате любую функцию можно сколь угодно близко аппроксимировать структурно устойчивыми функциями. К сожалению, в случае отображений $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое утверждение неверно. В самом деле, если F — отображение многообразия X в многообразии Y , т. е. $X \xrightarrow{F} Y$, то множество структурно устойчивых отображений $F: X \rightarrow Y$ не плотно в множестве всех таких отображений, если размерности n, m много-

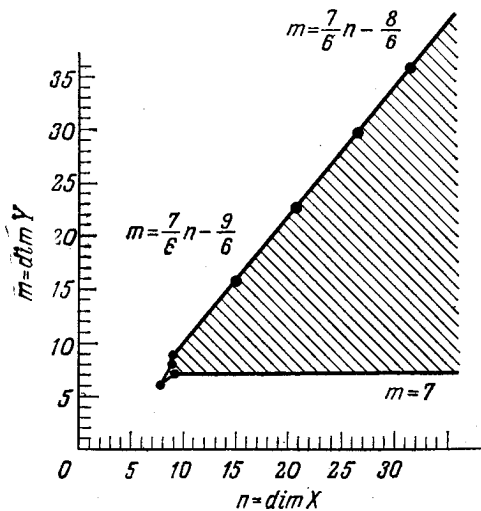


Рис. 17.4. Устойчивые отображения $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ не образуют плотного множества, если размерности (n, m) принадлежат заштрихованной области с границей [6].

образий X, Y лежат внутри области или на ее границе (заштрихованная область на рис. 17.4).

В случае $m = n$ k -параметрическое семейство отображений можно идентифицировать с автономными динамическими системами (гл. 19).

◇◇◇ Обобщения теории катастроф в трех указанных направлениях могли бы привести к выработке каких-то разумных концепций, на основе которых можно было бы не только задавать вопросы, связанные, скажем, со «стягиванием волновой функции» в квантовой механике, но и отвечать на них. Таким образом, подобное обобщение теории катастроф могло бы помочь заняться проблемами, которые пока приходится считать чисто философскими.

4. СИММЕТРИЗОВАННЫЕ КАТАСТРОФЫ

До сих пор рассматривались только «типичные» функции или семейства функций, т. е. «находящиеся в общем положении». Это означает, что члены ряда Тейлора при разложении функции в окрестности любой точки независимы и что на них не накладывается никаких ограничений. Если на систему наложены какие-либо ограничения симметрии, то они проявятся в виде ограничений на члены ряда Тейлора при разложении потенциальной функции в ряд в окрестности некоторой точки.

Попытаемся распространить теорию катастроф на класс симметричных функций. Для этого рассмотрим функцию $F(x, y; c)$ двух переменных состояния (x, y) и k управляющих параметров $c \in \mathbb{R}^k$; будем предполагать, что F имеет критическую точку в начале системы координат, и рассмотрим отдельно влияние четырех различных ограничений симметрии на разложение в ряд Тейлора.

Пример 1. $F(x, y; c)$ не меняется при замене $x \rightarrow \pm x$. Ряд Тейлора может содержать только четные степени x :

$$F(x, y; c) = F_{00} + F_{20}x^2 + F_{02}y^2 + F_{40}x^4 + \dots \quad (17.51)$$

Поскольку $\partial^{p+q}F/\partial x^p\partial y^q = F_{pq} = (-1)^p F_{pq}$, все коэффициенты F_{pq} с нечетным p должны быть равны нулю; F_{01} также равно нулю, поскольку начало системы координат является критической точкой.

Пример 2. $F(x, y; c)$ не меняется при замене $x \rightarrow \pm x$ и $y \rightarrow \pm y$. При наложении таких ограничений симметрии $F_{pq} = (-1)^p F_{pq} = (-1)^q F_{pq} = (-1)^{p+q} F_{pq}$, поэтому все коэффициенты с нечетными p или q должны быть равны нулю, и

$$F(x, y; c) = F_{00} + F_{01}y + F_{20}x^2 + F_{02}y^2 + F_{21}x^2y + \dots \quad (17.51i)$$

Пример 3. $F(x, y; c)$ инвариантна относительно восьмизначной группы S_{40} , состоящей из отражений относительно прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = -y$ и вращений на $\pi/2$, π , $3\pi/2$, $2\pi = 0$ рад. (Вращения порождаются парой отражений.) Из инвариантности относительно отражений от прямых $x = 0$, $y = 0$ вытекают ограничения, обсуждавшиеся выше (разд. 2). Инва-

риантность относительно отражений от прямой $x = y$ налагает дополнительное ограничение $F_{pq} = F_{qp}$, поэтому разложение $F(x, y; c)$ в ряд Тейлора теперь имеет вид

$$F(x, y; c) = F_{00} + F_{20}(x^2 + y^2) + F_{40}(x^4 + y^4) + F_{22}x^2y^2 + \dots \quad (17.5iii)$$

Пример 4. $F(x, y; c)$ инвариантна относительно группы вращений:

$$(F(x', y'; c) = F(x, y; c).$$

где

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда F является функцией только одного инварианта ($r^2 = x^2 + y^2$) группы вращений и

$$F(x, y; c) = F_0 + F_2r^2 + F_4r^4. \quad (17.5iv)$$

В каждом из приведенных рядов коэффициенты ряда Тейлора являются функциями k управляющих параметров c , хотя это явно не указывалось. Теперь с помощью методов, описанных в гл. 3 и 4, для всех типов ограничений симметрии можно изучать канонические формы и универсальные деформации функций $F(x, y; c)$.

1. Влияние управляющих параметров. Вообще говоря, k управляющих параметров c можно выбрать таким образом, чтобы главные члены ряда Тейлора стали равны нулю. Если $k = 3$, главные члены разложения $F(x, y; c)$ в ряд Тейлора (константы опущены) в соответствии с (17.5i) — (17.5iv) имеют вид

$$\begin{aligned} F(x, y; c) &\xrightarrow{i} (0) + F_{03}y^3 + F_{40}x^4 + \dots, & (17.6) \\ &\xrightarrow{ii} (0) + F_{40}x^4 + F_{22}x^2y^2 + F_{04}y^4 + \dots, \\ &\xrightarrow{iii} (0) + F_{60}(x^6 + y^6) + F_{42}x^2y^2(x^2 + y^2) + \dots, \\ &\xrightarrow{iv} (0) + F_8r^8 + \dots \end{aligned}$$

В случае (17.5ii) один из трех квадратичных коэффициентов также может быть сделан равным нулю. Результаты, описанные ниже, зависят от того, равен ли нулю член F_{40} или F_{22} . В (17.6) члены, заключенные в скобки и помеченные индексом 0, могут быть сделаны равными нулю соответствующим выбором трех управляющих параметров.

2. Влияние плавного изменения переменных. Определим, от каких членов высшего порядка можно избавиться с помощью нелинейного преобразования, сохраняющего симметрию, и от каких нельзя. Члены, от которых нельзя избавиться, образуют росток k -параметрического семейства $F(x, y; c)$. Эти симметризованные ростки могут зависеть от модулей. Для четырех случаев, рассмотренных выше, можно построить гладкое преобразование, сохраняющее симметрию и приводящее функции из

(17.6) к следующим каноническим формам:

$$F(x, y; c) = F(x', y'; c) = y'^3 \pm x'^4 = \quad (17.7i)$$

$$= \begin{cases} \pm x'^6 + ax'^2y'^2 \pm y'^4, & F_{40} = 0, \\ \pm x'^4 & \pm y'^4, & F_{22} = 0, \end{cases} \quad (17.7ii)$$

$$= \pm (x'^6 + y'^6) + ax'^2y'^2(x'^2 + y'^2) = \quad (17.7iii)$$

$$= \pm r'^8. \quad (17.7iv)$$

3. *Универсальные деформации.* После того как с помощью гладкого преобразования переменных функции (17.6) приведены к каноническому виду, желательно найти наиболее общую деформацию получившегося ростка. Если введенная группа симметрий достаточно велика, то универсальная деформация состоит точно из тех членов в (17.6), которые были сделаны равными нулю соответствующим выбором управляющих параметров. Если группа симметрий настолько мала, что при изменении начала системы координат симметрия сохраняется, то в деформацию могут входить линейные члены. Таким образом, в четырех случаях [(17.5) и (17.6)] универсальные деформации имеют вид

$$p(x, y) \rightarrow p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{21}x^2y, \quad (17.8i)$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_{20}x^2 + p_{02}y^2 + p_{22}x^2y^2 + p_{40}x^4, & F_{40} = 0, \\ p_{20}x^2 + p_{02}y^2 + p_{22}x^2y^2, & F_{22} = 0, \end{cases} \quad (17.8ii)$$

$$\rightarrow p_{20}(x^2 + y^2) + p_{40}(x^4 + y^4) + p_{22}x^2y^2 + p_{42}x^2y^2(x^2 + y^2), \quad (17.8iii)$$

$$\rightarrow p_2r^2 + p_4r^4 + p_6r^6. \quad (17.8iv)$$

Аналогичная процедура используется и в общем случае. Предположим, что F есть k -параметрическое семейство функций n переменных состояния и что F должно быть инвариантно относительно некоторой группы симметрий G , действующей в \mathbb{R}^n . Пусть $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ..., $\phi_i(x)$, ... — однородные неприводимые инвариантные многочлены на \mathbb{R}^n относительно G , и пусть $\phi_i(x)$ имеет степень d_i . Полное множество однородных инвариантных многочленов $\phi_i(x)$ можно найти, анализируя характеры, как это было сделано в гл. II. Тогда разложение $F(x; c)$ имеет вид

$$F(x; c) = \sum F_{p_1} \dots p_i \dots \phi_1^{p_1}(x) \dots \phi_i^{p_i}(x) \dots, \quad (17.9)$$

где коэффициент $F_{p_1} \dots p_i \dots$ ряда Тейлора есть коэффициент при члене степени $p_1d_1 + \dots + p_id_i + \dots$, инвариантном относительно G . Будем считать, что G не имеет линейных инвариантов, т. е. $0 \in \mathbb{R}^n$ является критической точкой. Тогда элементарная теория

катастроф применительно к симметризованной функции (17.9) позволяет (1) расположить коэффициенты $F_{p_1} \dots p_i \dots$ в убывающем порядке и выбрать k управляющих параметров так, чтобы первые k ненулевых коэффициентов ряда Тейлора обратились в нуль; (2) найти гладкое преобразование переменных, сохраняющее симметрию и удаляющее «наибольшее число» членов высших порядков. Полученная функция будет ростком функции $F(x; c)$, инвариантным относительно группы симметрий G . При этом универсальная деформация будет содержать члены, первоначально обращенные в нуль соответствующим выбором управлений, и любые члены ростка, умноженные на модуль (такие члены в (17.8 ii) и (17.8 iii) подчеркнуты).

◇◇◇ Если предполагается, что $F(x; c)$ инвариантна относительно группы симметрий G (действующей в начале) и что $F(x; c)$ имеет минимумы (но $x = 0$ минимумом не является), то существует несколько значений $x^0 \in \mathbb{R}^n$, в которых $F(x; c)$ достигает минимума. Более того, группа инвариантности $F(x; c)$ около x^0 является подгруппой группы G . В x^0 матрица устойчивости F может быть вырожденной, а может и не быть. Для иллюстрации этих соображений рассмотрим функцию $F(x; c)$ n действительных переменных состояния x_1, \dots, x_n , инвариантную относительно действительной ортогональной группы $SO(n)$. Тогда разложение $F(x; c)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$F(x; c) = \text{const} + F_2 r^2 + F_4 r^4 + F_6 r^6 + \dots,$$

где $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

При $F_2 = 0$ система претерпевает фазовый переход второго рода, если $F_4 > 0$, и переход нулевого рода, если $F_4 < 0$, а $F_6 > 0$. Если $F_4 > 0$ и $F_6 = F_8 = \dots = 0$, то F имеет минимум при

$$r^2 = -\frac{F_2}{2F_4} > 0 \text{ для } F_2 < 0,$$

$$F\left(r^2 = -\frac{F_2}{2F_4}; c\right) = -\frac{F_2^2}{4F_4} < 0,$$

который не является единственным, поскольку F принимает одинаковые значения во всех точках, находящихся на расстоянии $(-F_2/2F_4)^{1/2}$ от начала координат. Если зафиксировать точку $x^0 = (0, \dots, 0, r)$, то $F(x; c)$ будет инвариантна относительно группы вращений $SO(n-1)$, действующей на первые $(n-1)$ координат x_1, \dots, x_{n-1} . Матрица устойчивости функции F , вычисленная в x^0 (или в любой эквивалентной точке), имеет единичный ранг: одно собственное значение положительно, $\lambda = -4F_2 > 0$, а остальные $n-1$ равны нулю. Такое понижение симметрии при переходе от единственного минимума в $0 \in \mathbb{R}^n$

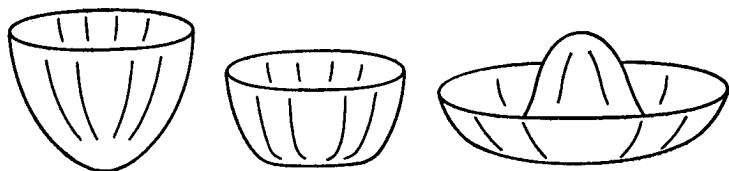


Рис. 17.5. Потенциальная функция $V = x^2 + y^2$ обладает симметрией $O(2)$ относительно точки минимума $(x, y) = (0, 0)$. Потенциальная функция $V = -(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2$ также обладает симметрией $O(2)$ относительно начала. Однако относительно любого другого минимума (например, $(x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, 0)$) она обладает только симметрией отражения $O(1)$: $(1/\sqrt{2} + \delta x, \delta y) \rightarrow (1/\sqrt{2} + \delta x, -\delta y)$.

к неединственному минимуму в $r \neq 0$ иногда называют *спонтанным нарушением симметрии*. Для случая $n = 2$ это понятие иллюстрируется на рис. 17.5, где парой группа — подгруппа являются $O(2)$ и $O(1)$ (включая отражения).

◆◆◆ Большинство физиков (за исключением специалистов по физике твердого тела), к сожалению, в течение длительного времени (1929—1959 гг.) избегали такого мощного математического аппарата, как теория групп. Когда важность этой теории, наконец, стала очевидной, за нее ухватились с такой страстью, как будто пытались наверстать упущенное. Теперь многие физики, в особенности занимающиеся элементарными частицами, используют теорию групп как основной инструмент аналитического исследования. Именно последнее обстоятельство послужило поводом для столь бурного обсуждения «спонтанного нарушения симметрии». Однако в нарушении симметрии нет ничего спонтанного: оно лишь следствие неведомых пока динамических свойств или действия какого-то вариационного принципа. За словом «спонтанный», как за дымовой завесой, скрывают полное незнание математического аппарата для исследования нелинейных эффектов, который в конце концов и дает описание наблюдаемых физических процессов. Именно этот аппарат является центральным элементом в анализе данных явлений. Наличие симметрии обуславливает возможность появления катастроф высших порядков за счет уменьшения числа управляющих параметров. Аналогичное значение могут иметь различные симметрии для данной нелинейной динамической системы. Можно сказать, что нелинейному математическому аппарату принадлежит центральная роль, а симметрии — второстепенная. Симметрия и существует только для того, чтобы ее нарушать. Представление о «спонтанном нарушении симметрии» как о движущей силе некоторого физического процесса означает полное непонимание сущности последнего.

5. КАТАСТРОФЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

До сих пор мы пытались найти состояние физической системы, минимизируя некоторую потенциальную функцию. При этом неявно предполагалось, что эта функция определена на всем пространстве \mathbb{R}^n . Если это так, то $\nabla V = 0$ является необходимым условием существования минимума. Однако это уже не так, если потенциальная функция V определена лишь на замкнутом подмножестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Равенство $\nabla V = 0$ является необходимым и достаточным условием локального максимума, минимума или другой стационарной точки лишь во *внутренности* $S - \partial S$, где ∂S — граница S [$\partial S = \bar{S} \cap (\mathbb{R}^n - S)$]. Вместе с тем условие $\nabla V = 0$ не является ни необходимым, ни достаточным условием локального максимума или минимума на границе ∂S . На самом деле условие $\nabla V = 0$ в некоторой точке на ∂S даже не является структурно устойчивым и при деформации нарушается.

Проиллюстрируем вышеизложенные замечания для случая $n = 1$ на примере функции $f(x) = x^2$, $-\infty < x < +\infty$. При деформации

$$F(x; \epsilon) = f(x) + \epsilon x = (x + 1/2 \epsilon)^2 - (1/2 \epsilon)^2, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (17.10)$$

поэтому минимум перемещается из $x = 0$ в $x = -\epsilon/2$. Таким образом, деформация не вносит качественных изменений в критические свойства функции $f(x) = x^2$ — факт, уже отмечавшийся в гл. 4.

Если рассмотреть ту же функцию $f(x) = x^2$ на луче $0 \leq x < \infty$, то деформация ϵx имеет явные качественные последствия. При $\epsilon > 0$ имеется глобальный минимум в $x = 0$, где $dF/dx > 0$. При $\epsilon < 0$ наблюдается глобальный минимум во внутренней области $[0, \infty]$ при $x = -\epsilon/2 > 0$, где $dF/dx = 0$, и локальный максимум при $x = 0$, в котором $dF/dx = 0$. Локальный минимум в $x = 0$ при $\epsilon > 0$ и локальный максимум в $x = 0$ при $\epsilon < 0$ возникают только из-за наличия ограничения $x \geq 0$ в области определения $F(x)$. Функция $F(x; \epsilon = 0) = x^2$ является сепаратрисой, разделяющей функции двух качественно различных типов: функций с одним глобальным минимумом и функций с локальным максимумом и глобальным минимумом. Это означает также, что функция $F(x; \epsilon = 0)$ является единственным элементом семейства функций $F(x; \epsilon)$, для которых $dF/dx = 0$ на границе ($\partial S: x = 0$) (рис. 17.6).

Аналогичным образом можно исследовать одномерный росток катастрофы $A_k: x^{k+1}$ при ограничении $x \geq 0$. Поскольку универсальная деформация для $A_1 = x^2$ с ограничениями одно-

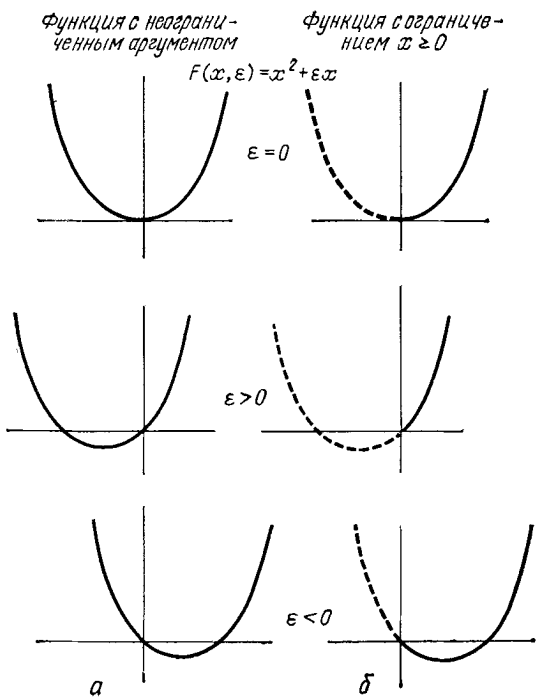


Рис. 17.6.

a — деформация функции при отсутствии ограничений на переменные не вносит качественных изменений в свойства последней; *б* — деформация структурно неустойчивой функции при наличии ограничений на переменные может качественно изменить свойства последней.

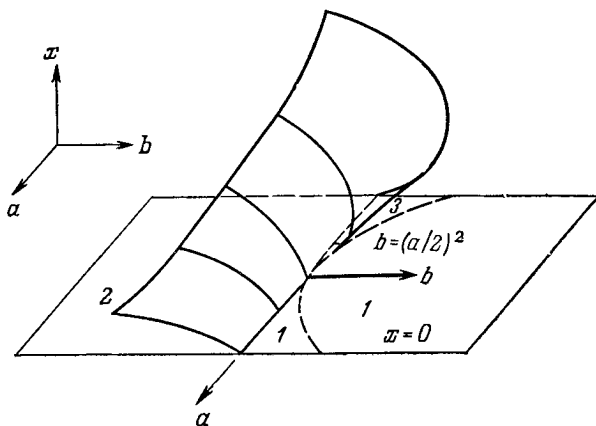


Рис. 17.7. Локальные экстремумы и стационарные точки катастрофы

$F(x; a, b) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} ax^2 + bx$ при наличии ограничений на x в пространстве $\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^2 (x - a - b)$.

Плоскость $x = 0$ дает локальные экстремумы при всех значениях управляющих параметров a, b . Числа на плоскости управляющих параметров показывают число критических точек, в том числе локальных условных максимумов и минимумов функций.

мерна, можно ожидать, что для универсальных деформаций число управляющих параметров в задаче с ограничением ($x \geq 0$) будет на единицу больше, чем в задаче без ограничений. Нетрудно понять, почему это так. В случае без ограничений от члена x^k в деформации функции $A_k = x^{k+1}$ можно легко избавиться простым сдвигом начала координат. При наличии ограничений луч, определяющий допустимую область, «неоднороден» (при сдвиге начала, например, он «выглядит иначе»), поэтому положение начала координат — это еще один необходимый управляющий параметр. Семейство катастроф A_k с ограничениями имеет вид

$$A_k: x^{k+1} + \sum_{j=1}^k a_j x^j, \quad (17.11)$$

бифуркационное множество катастрофы A_2 с ограничениями показано на рис. 17.7.

Рассуждения аналогичны и в случае многих ($n > 1$) переменных состояния. Предположим для удобства, что S — замыкание некоторого «хорошего» простого связного открытого множества и что ∂S — гладкое $(n-1)$ -мерное многообразие. Необходимое и достаточное условие минимума, максимума или стационарной точки F внутри S есть $\nabla F = 0$. Внутри S не происходит ничего нового, и катастрофы, которые мы изучали до сих пор, можно считать *внутренними катастрофами*. Новые явления возникают именно на границе множества S . Такие катастрофы в противоположность внутренним можно назвать *внешними* или *граничными катастрофами*. Эти структурно неустойчивые функции обладают тем свойством, что $\nabla F = 0$ в некоторой точке ∂S . Поскольку ∂S по предположению является гладким $(n-1)$ -мерным многообразием, x_2, \dots, x_n можно выбрать в качестве координат на ∂S и рассматривать x_1 как ограниченную координату, наложив на нее ограничение $x_1 \geq 0$. Иными словами, $x_1 < 0$ лежит вне S , $x_1 = 0$ — на ∂S и $x_1 > 0$ — в $S - \partial S$. Ка-

Таблица 17.3. Катастрофы с ограничениями [7, 8]

l	k	Росток	Возмущение
1	1	$\pm x^2$	ax
1	2	$\pm x^3$	$ax^2 + bx$
2	2	$xy \pm y^3$	$ax + by$
1	3	$\pm x^4$	$ax^3 + bx^2 + cx$
2	3	$\pm (xy + y^4)$	$ax + by + cy^2$
2	3	$\pm (x^2 + y^3)$	$ax + by + cxy$

тастрофы с ограничениями, обладающие универсальными деформациями небольшой размерности, проанализировали авторы работы [7]. Некоторые из их результатов приведены в табл. 17.3 [8].

◇◇◇ Часто переменные состояния некоторой системы должны быть неотрицательными. Примерами являются растяжение (физика и техника), химическая концентрация (химия), плотность популяции (экология) и т. д. Когда вводятся такие ограничения, то для анализа качественного поведения системы необходимо изучение как внутренних (табл. 2.2), так и граничных (табл. 17.3) катастроф.

6. ВЫВОДЫ

Результаты, представленные в табл. 2.2, являются ответом на четко поставленный вопрос: что представляют собой простые неморсовские функции, типичные для k -параметрических семейств функций $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$?

Если необходимо расширить табл. 2.2, то прежде всего следует обобщить постановку данного вопроса, причем обобщение может быть осуществлено разными способами. Мы рассмотрели всего лишь пять вариантов обобщения.

Мы опустили слово «простые» и изучали последовательности и семейства ростков катастрофы, зависящих от 0, 1 или 2 модулей. Эти результаты (в основном принадлежащие Арнольду), вероятно, имеют ограниченную область практических приложений, но представляют большой теоретический интерес.

Сняв ограничение $n < \infty$, мы таким образом расширили область определения функции от конечномерного пространства до бесконечномерных пространств. При определенных ограничениях на отображение F_{ij} (конечность ядра, отделенность всех ненулевых собственных значений от нуля) задача классификации неморсовских критических точек сводится к конечномерной (размерности ядра F_{ij}) задаче, и в этом случае применимы обычные методы теории катастроф. Однако при переходе к бесконечномерным пространствам возникают новые причины потери устойчивости, механизм которых еще не до конца ясен.

Сняв ограничение $m = 1$, мы исследовали отображения $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Хотя для некоторых особенностей таких отображений известны канонические формы, здесь все еще остается нерешенной серьезная проблема, связанная с тем, что устойчивые отображения не всегда образуют плотное множество в пространстве всех отображений указанного вида. Поэтому вполне вероятно, что в таких случаях окажется необходимым создание некоторого нового математического аппарата.

Очень важной с практической точки зрения задачей является определение типа качественных изменений, которые могут происходить в семействах функций, инвариантных относительно некоторой группы симметрий G . (Мы опустили слово «типичные» в исходной формулировке основного вопроса.) Эта задача может быть решена известными методами анализа элементарных катастроф.

Методы элементарной теории катастроф оказались применимыми и в случае катастроф с ограничениями. Было показано, что сепаратрисы в семействах функций появляются в тот момент, когда точка p , в которой $\nabla F = 0$, оказывается на границе ∂S области определения функции F .

Литература

1. Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы. *УМН*, 1975, 30 : 5, 3—65.
2. Арнольд В. И. Нормальные формы функций в окрестностях вырожденных критических точек. *УМН*, 1974, 29 : 2, 11—49.
3. Arnol'd V. I. Local Normal Forms of Functions, *Invent. Math.*, 35, 87—109 (1976).
4. Арнольд В. И. Классификация унимодальных критических точек функций. *Функциональный анализ и его приложение*, 1972, 7 : 3, 75.
5. Арнольд В. И. Классификация бимодальных критических точек функций. *Функциональный анализ и его приложение*, 1975, 9 : 1, 49.
6. Golubitsky M., Guillemin V. Stable Mappings and their Singularities, New York: Springer, 1973. [Имеется перевод: Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.]
7. Pitt D. H., Poston T. Determinancy and Unfoldings in the Presence of a Boundary (будет опубликовано).
8. Poston T., Stewart I. N. Catastrophe Theory and Its Applications, London: Pitman, 1978. [Имеется перевод: Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]

В элементарной теории катастроф изучаются равновесия потенциалов и семейств потенциалов, а также изменения этих равновесий при вариациях внешних управляющих параметров. Многие интересные физические системы находятся в равновесии, однако имеются еще более интересные физические системы, которые неравновесны. По этой причине хотелось бы распространить результаты и методы элементарной теории катастроф на динамические (а не статические) системы. Совершенно ясно, что для описания не непрерывных явлений (внезапных скачков), связанных с элементарными катастрофами, необходимо переступить границы элементарной теории. Дело в том, что элементарная теория катастроф, по-видимому, не годится для описания динамических процессов, происходящих при переходе от одного статического равновесия к другому, как это с очевидностью следует из табл. 1.1. В этой главе рассматривается простейшее возможное обобщение элементарной теории катастроф — на класс градиентных систем. Анализируются трудности, возникающие при таком обобщении, а также трудности, связанные с тем, что для градиентных динамических систем не существует канонических форм, близких к элементарным катастрофам; описываются методы, связанные с фазовым портретом системы, в приложении к градиентным динамическим системам; обсуждается вопрос о том, каким образом следует использовать результаты элементарной теории катастроф для анализа задач, которые при обычных подходах требуют для своего решения слишком больших затрат времени и усилий; показывается, как можно «шагать» вдоль критических точек потенциала при изменении значений управляющих параметров; устанавливается связь между теорией катастроф и теорией бифуркаций.

1. НЕКАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ

Системы, уравнения движения которых могут быть получены из потенциала $V(x)$ как

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (18.1)$$

называются *градиентными*. Уравнения $dx_i/dt = 0$ определяют положения равновесия $\nabla V = 0$ системы. Изучение состояния равновесия градиентных систем, смещение этих равновесий и изменения их характера при изменении управляющих параметров составляют предмет изучения элементарной теории катастроф.

Элементарные катастрофы являются каноническими формами потенциальной функции $V(x; c)$ в окрестности неморсовских

критических точек. В случае $k \leq 5$ любую типичную потенциальную функцию $V(x; c)$ можно привести к каноническому виду одной из элементарных катастроф путем гладкой замены переменных. Такие преобразования облегчают перечисление и классификацию элементарных катастроф.

Казалось бы, что градиентную динамическую систему (18.1) также можно привести к некоторой канонической форме с помощью гладкой замены переменных в окрестности «плохих» точек. Однако это не так, поскольку левая часть уравнения (18.1) уже записана в каноническом виде. Поэтому любая гладкая замена переменных, которая могла бы привести правую часть к канонической форме одной из элементарных катастроф, немедленно «испортит» канонический вид левой части. Эту трудность можно исключить, если воспользоваться элементарной теорией катастроф, так как в этом случае левая часть (18.1) будет равна нулю и, следовательно, будет иметь канонический вид в любой системе координат.

2. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

Для изучения свойств градиентной системы (18.1) в окрестности некоторой точки x^0 воспользуемся методом фазового портрета¹.

2.1. $\nabla V \neq 0$

Если $\nabla V \neq 0$, то

$$\frac{dx_i}{dt} = -V_i + \mathcal{O}(1), \quad V_i = \left. \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|_{x^0}. \quad (18.2)$$

Пренебрегая членами порядка единицы, получим следующее решение для (18.2):

$$(x(t) - x^0)_i = -V_i t.$$

Отсюда следует, что локальное поведение системы (функции) линейно, как этого и следовало ожидать для точки, в которой движущая (вынуждающая) сила равна $F = -\nabla V \neq 0$.

Если значения управляющих параметров слегка изменить от c^0 до $c^0 + \delta c^0$, то значения первых производных V_i также несколько изменятся.

По причинам, указанным в гл. 2, в этом приближении всегда можно выбрать такую систему координат, в которой $dx_1/dt = -1$, $dx_j/dt = 0$, $j = 2, \dots, n$. Это означает, что в достаточно малой окрестности точки x^0 система будет двигаться прямолинейно в направлении x_1 с постоянной скоростью, равной -1 .

¹) Этот метод был кратко описан в гл. 5.

2.2. $\nabla V = 0$, $\det V_{ij} \neq 0$ (равновесие)

Если $\nabla V = 0$, а $\det V_{ij} \neq 0$ в точке x^0 , то точка x^0 соответствует невырожденному состоянию равновесия. В окрестности x^0 градиентные уравнения движения (18.1) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = -V_{ij} \delta x_j + \mathcal{O}(2), \quad (18.3)$$

где $\delta x_i = x_i - x_i^0$. С точностью до членов второго порядка это система локально линейных уравнений. Проинтегрировав ее, получим

$$\delta x_i(t) = (e^{-Vt})_{ij} \delta x_j(0), \quad (18.4)$$

где V — действительная симметрическая ($n \times n$)-матрица, как и $\exp(-Vt)$. Однако информативней будет сначала применить к (18.3) не зависящее от времени линейное преобразование, приводящее ее к диагональному виду

$$\frac{d}{dt} y_j = -\lambda_j y_j, \quad \lambda_i \neq 0. \quad (18.5)$$

Решения (18.5) могут быть получены элементарно:

$$(y(t) - y^0)_i = \delta y_i(0) e^{-\lambda_i t}. \quad (18.6)$$

Если $\lambda_i > 0$, то $y_i(t)$ стремится к y_i^0 при $t \rightarrow +\infty$; если же $\lambda_i < 0$, то $y_i(t)$ удаляется от y_i^0 . Свойства устойчивости градиентной динамической системы в морсовском равновесии характеризуются морсовским i -седловым типом равновесия.

Если значения управляющих параметров изменить от c^0 до $c^0 + \delta c^0$, то положение x^0 равновесия изменится, но не намного (ср. (5.2)), и значения матричных элементов V_{ij} в точке равновесия также изменятся не существенно. При этом тип равновесия остается прежним, поскольку ни одно из собственных значений матрицы не изменило знака. В результате получаем, что морсовская критическая точка структурно устойчива к возмущениям.

Если, однако, $\det V_{ij} = 0$, то динамические свойства вблизи равновесия вовсе не обязательно структурно устойчивы к возмущениям. Динамически структурно неустойчивые решения возникают в том случае, когда два или более ненулевых собственных значения λ_i матрицы V_{ij} равны (динамическая вырожденность). Причину такой неустойчивости проще всего понять, если рассмотреть двумерную динамическую систему ($n = 2$). Если невырожденной критической точкой является $(x, y) = (0, 0)$, а оси x и y — главные оси, то движение системы от начального положения $(\delta x, \delta y)$, $(\delta x \neq 0, \delta y = 0)$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x(t) &= \delta x e^{-\lambda_1 t}, \\ y(t) &= \delta y e^{-\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (18.7)$$

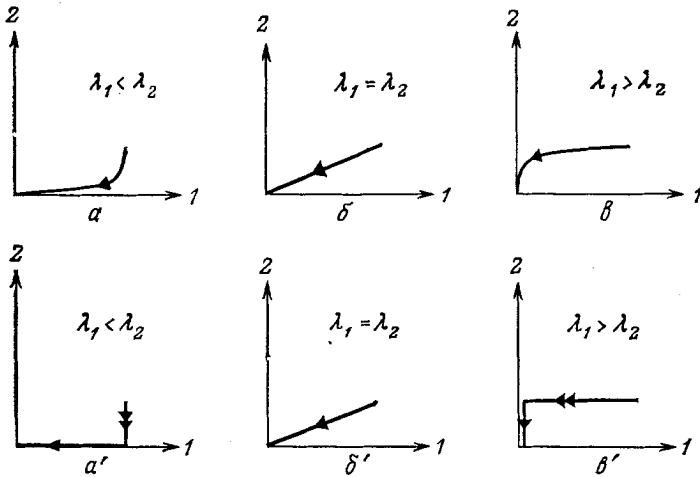


Рис. 18.1. Траектория движения системы к состоянию устойчивого равновесия определяется относительной величиной положительных собственных значений матрицы устойчивости.

Двойная стрелка на траектории указывает на большую скорость движения ($a'-a'$).

Если оба собственных значения матрицы положительны, система (динамически) устойчива. Для того чтобы уточнить динамику движения системы к положению равновесия, вычислим предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}.$$

При $\lambda_2 > \lambda_1$ этот предел равен нулю, а при $\lambda_1 > \lambda_2$ он равен $\pm\infty$. Следовательно, система стремится к равновесию вдоль оси x , если $\lambda_1 < \lambda_2$, и вдоль оси y , если $\lambda_2 < \lambda_1$ (рис. 18.1). В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ система (динамически) структурно неустойчива, поскольку она стремится к равновесию по прямолинейной траектории. Возмущение такой системы (рис. 18.1, б) приводит к одному из двух динамически структурно устойчивых состояний, показанных на рис. 18.1, а, в.

Описанный метод может быть обобщен для изучения динамической структурной устойчивости n -мерных градиентных систем. Если точка x^0 является положением устойчивого невырожденного равновесия, а главные оси x_1, x_2, \dots, x_n выбраны так, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n (> 0)$, то динамика движения системы к положению равновесия выглядит следующим образом. Координата δx_1 движется к нулю быстрее всех, за ней следует δx_2 и т. д. Равенство двух или более собственных значений матрицы соответствует динамически структурно неустойчивому состоянию системы, когда сколь угодно малое возмущение может радикально

изменить траекторию, по которой она движется к локально устойчивому равновесию.

◇◇◇ Такой тип структурной неустойчивости систем в чем-то сродни максвелловской (равные минимумы) структурной неустойчивости статических градиентных систем.

2.3. $\nabla V = 0, \det V_{ij} = 0$ (вырождение)

Если $\nabla V = 0$ и $\det V_{ij} = 0$ в точке x^0 , то фазовый портрет системы в окрестности x^0 также можно построить описанным выше методом. Однако довольно часто более удобным оказывается метод, предусматривающий такие операции, как (1) введение возмущения в потенциальную функцию, (2) исследование фазового портрета системы в окрестности каждой изолированной критической точки, и (3) анализ поведения при «очень удаленном» источнике возмущения. Проиллюстрируем этот метод на ряде примеров.

Пример 1. Построим фазовый портрет системы, состояние которой описывается потенциальной функцией вида $V(x, y) = x^3/3 + y^2/2$. Наиболее общее возмущение этой потенциальной функции имеет вид

$$V'(x, y; a) = \frac{x^3}{3} + ax + \frac{y^2}{2}. \quad (18.8)$$

Соответствующие уравнения движения могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial V'}{\partial x} = -x^2 - a, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial V'}{\partial y} = -y. \end{aligned} \quad (18.9)$$

При $a < 0$ имеются две изолированные критические точки: $(x, y) = (+\sqrt{-a}, 0)$ и $(-\sqrt{-a}, 0)$. Матрица устойчивости имеет вид

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (18.10)$$

поэтому оси x и y являются главными. Фазовые портреты в окрестностях изолированных критических точек схематично изображены на рис. 18.2, а.

Пример 2. Совершенно аналогичным образом можно построить фазовый портрет системы, состояние которой описывается потенциальной функцией вида $V(x, y) = x^4/4 + y^2/2$. Для простоты рассмотрим возмущение $V(x, y)$, сохраняющее симметрию:

$$V'(x, y; a) = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2}. \quad (18.11)$$

Нет необходимости рассматривать возмущения наиболее общего вида, поскольку мы стремимся лишь «морсифицировать» вырожденную критическую точку и в конце концов определить предельное влияние исчезающего воз-

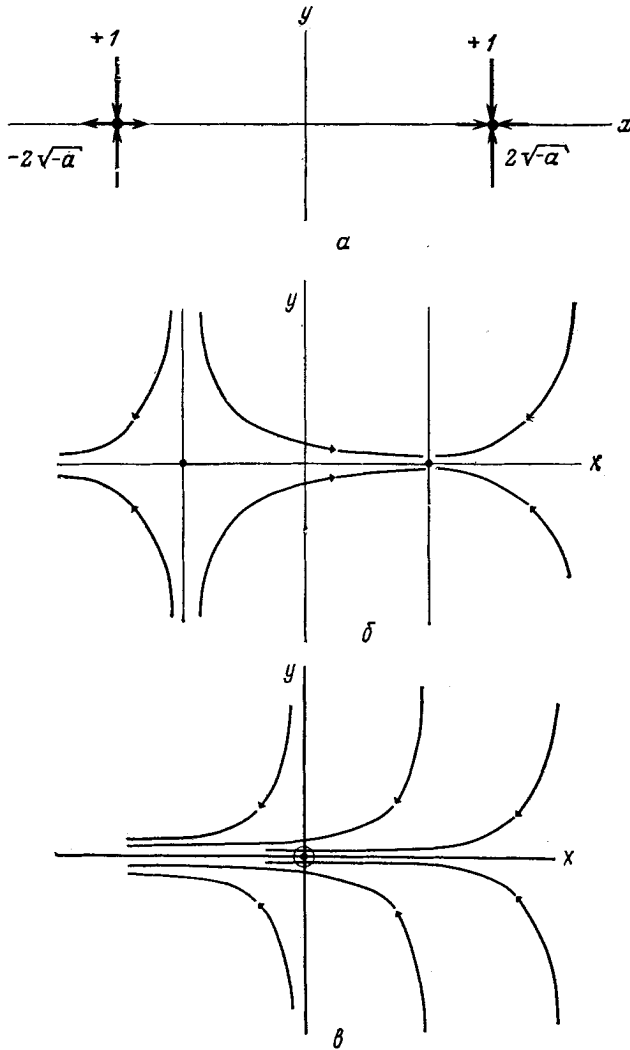


Рис. 18.2.

a — свойства критических точек, полученных из неморсовской критической точки катастрофы A_2 морсификацией; *b* — соответствующие потоки; *в* — потоки вблизи вырожденной критической точки, полученной в результате «деморсификации» (*б*). Свойства изолированных критических точек могут быть описаны стрелками: стрелки направлены вдоль главных осей и указывают в сторону критической точки, если собственное значение матрицы V_{ij} положительно (устойчиво), и в обратную сторону, если оно отрицательно. Длина стрелки показывает величину соответствующего собственного значения.

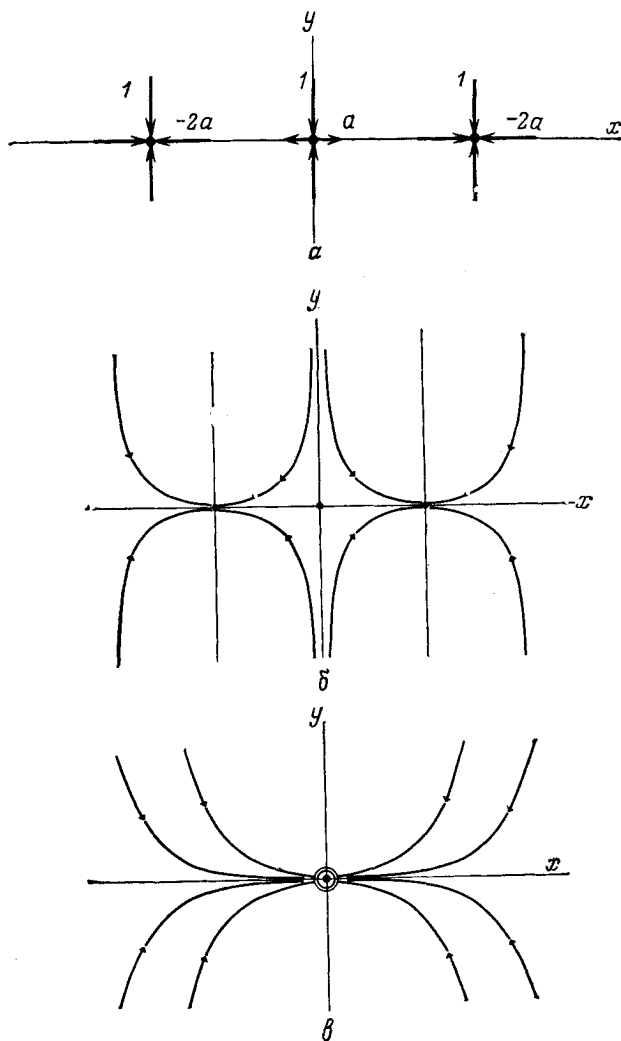


Рис. 18.3.

a — морсификация критической точки катастрофы A_{+3} ; *б* — соответствующие потоки; *в* — потоки вблизи вырожденной критической точки катастрофы A_{+3} : результат деморсификации (*б*).

мущения. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial V'}{\partial x} = -x^3 - ax \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial V'}{\partial y} = -y. \end{aligned} \tag{18.12}$$

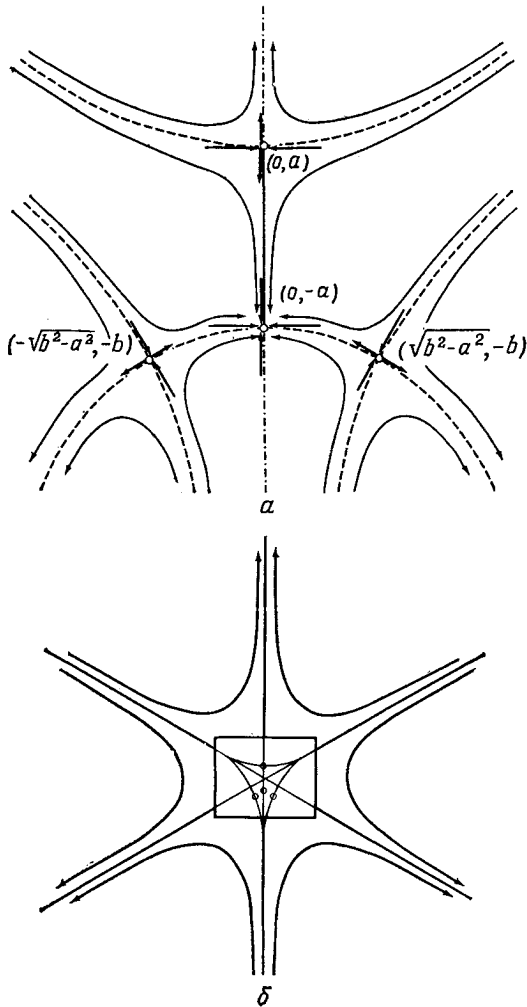


Рис. 18.4.

a — морсификация ростка $D_{-4} = x^2y - y^3/3$ и потоки в его окрестности; b — предельный случай «слабого поля» портрета (a) дает картину потоков для вырожденной критической точки D_{-4} .

Фазовые портреты системы в окрестности невырожденных критических точек показаны на рис. 18.3.

Пример 3. Точно так же можно получить фазовый портрет для потенциальной функции вида $V(x, y) = x^2y - y^3/3$. Схематически этот фазовый портрет был изображен на рис. 5.19. По этому рисунку можно легко восстановить весь портрет для $V(x, y)$ (рис. 18.4).

Фазовый портрет для этой потенциальной функции может быть получен непосредственно, не прибегая к методу возмущения. Уравнения движения

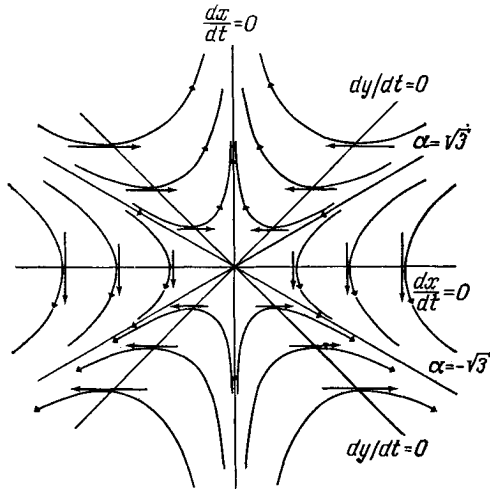


Рис. 18.5. Потоки в окрестности вырожденной критической точки можно найти путем элементарных рассуждений.

Здесь $\dot{x} = 0$. Тогда $xy = 0$ и $\dot{y} = 0$, когда $x = \pm y$. Уравнение сепаратрис: $x = \alpha y$, $\alpha = 0, \pm \sqrt{3}$.

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -2xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Горизонтальная компонента скорости (вдоль оси x) обращается в нуль на прямых $x = 0$ и $y = 0$, а вертикальная (вдоль оси y) — на прямых $x = y$ и $x = -y$ (рис. 18.5). Структурно неустойчивые траектории, вдоль которых горизонтальная и вертикальная компоненты скорости пропорциональны, можно найти, положив в (18.3) $x = \alpha y$ и разрешив систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha \frac{dy}{dt} &= -2\alpha y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - \alpha^2) y^2 \end{aligned} \quad (18.14)$$

относительно α . Тогда $\alpha(1 - \alpha^2)y^2 = -2\alpha y^2$. При любом y решения имеют вид

$$\alpha = 0 \text{ (ось } y), \quad \alpha = \pm \sqrt{3}. \quad (18.15)$$

Эти сепаратрисы и направления движения по ним показаны на рис. 18.5. Используя полученную информацию (две прямые, на которых $dx/dt = 0$, две прямые, на которых $dy/dt = 0$, и три сепаратрисы), нетрудно построить весь фазовый портрет.

Как видно из рис. 18.5, существует определенная симметрия, которая становится совершенно явной, если произвести некоторое преобразование координат и проследить, как меняется поведение потенциальной функции. При

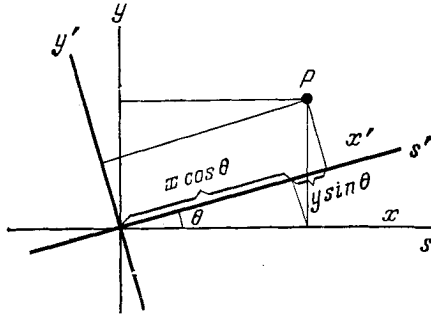


Рис. 18.6. Простое вращение осей координат. Здесь $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$, $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$.

повороте координатной системы x, y на угол θ посредством преобразования

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (18.16)$$

получим систему координат x', y' , показанную на рис. 18.6. Такое преобразование имеет следующий геометрический смысл. Если $x(p), y(p)$ — координаты некоторой точки p в старой системе координат S , а $x'(p), y'(p)$ — координаты той же точки в новой системе S' , то x, y и x', y' связаны соотношением (18.16) (рис. 18.6). Положив $\theta = 2\pi/6$ (рис. 18.5), выразим x, y через x', y' :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (18.17)$$

Функция $V(x, y)$ легко выражается через новые координаты

$$\begin{aligned} V(x, y) &= y \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ V(x', y') &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x' + \frac{y'}{\sqrt{3}} \right) \right\} \left\{ x' - \frac{y'}{\sqrt{3}} \right\} \left\{ \frac{-2}{\sqrt{3}} y' \right\} = \\ &= -y' \left(x' + \frac{y'}{\sqrt{3}} \right) \left(x' - \frac{y'}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (18.18)$$

При повороте на 60° потенциальная функция меняет знак. При отражении от оси y : $(x, y) \rightarrow (-x, +y)$ потенциал не меняется и изменяет знак при отражении от оси x : $(x, y) \rightarrow (x, -y)$. Эти свойства симметрии потенциала находят свое отражение в симметрии фазового портрета, очевидной из рис. 18.5.

◇◇◇ В случае градиентных систем, описываемых потенциальной функцией $V(x, c)$, зависящей от k управляющих параметров, важно знать, образует ли множество точек в $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k$,

$(x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^k)$, являющихся вырожденными критическими точками $V(x; c)$, замкнутое множество меры нуль. Если это так, то дополнительное множество, состоящее из точек, в которых V имеет ненулевой градиент или находится в состоянии невырожденного равновесия, является открытым и плотным в $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k$. В этом случае описанные выше методы анализа могут оказаться полезными, поскольку фазовый портрет в окрестности вырожденной критической точки может быть аппроксимирован сколь угодно близко фазовыми портретами возмущенных потенциалов, обладающих только изолированными критическими точками.

3. ДЕРЕВО ВЕТВЛЕНИЙ

Итак, как только найдены положения равновесия, главные оси и собственные значения, построение фазового портрета становится сравнительно простым делом. Если потенциальная функция зависит от одного или более управляющих параметров, то положения точек равновесия, направления главных осей и собственные значения становятся функциями этих параметров. При этом, естественно, могут возникать вырожденные критические точки. Тогда, пользуясь методами, описанными в предыдущем разделе, можно построить фазовые портреты в окрестности таких катастроф.

В том случае, когда интерес представляют только одна или две переменные состояния x, y и имеется лишь один управляющий параметр c , положения критических точек $(x(c), y(c))$ можно изобразить как функцию этого параметра. Число изолированных критических точек, вообще говоря, зависит от значения c , однако это число изменяется только при возникновении катастрофы.

Покажем, как следует изучать фазовые портреты для семейства потенциальных функций $V(x, y; c)$. Выберем некоторый специальный вид потенциальной функции, достаточно простой для анализа и вместе с тем достаточно представительный для широкого класса потенциальных функций, важных для физических приложений. Для этого достаточно наложить ограничения симметрии, т. е. потребовать, чтобы функция не менялась при заменах

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \pm x, \\ y &\rightarrow \pm y. \end{aligned} \tag{18.19}$$

Это означает, что $V(x, y; c)$ является четной функцией x и y , например функцией от x^2 и y^2 :

$$V(x, y; c) = f(x^2, y^2; c). \tag{18.20}$$

Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{d(x^2)}{dx} = -2x \frac{\partial f}{\partial x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y^2} \frac{d(y^2)}{dy} = -2y \frac{\partial f}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (18.21)$$

Критические точки функции V определяются обычным образом из условий $dx/dt = dy/dt = 0$. Ясно, что начало координат $(x, y) = (0, 0)$ является критической точкой при всех c . Если $\partial f/\partial x^2 = 0$ при $(x, y) = (0, 0)$ для некоторого значения c , то начало координат является вырожденной критической точкой с «плохой» переменной x . Матрица устойчивости для функции V имеет вид

$$V_{ij} = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} & xy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} \\ xy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (y^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (18.22)$$

Для критической точки в начале главными осями являются оси x и y . Для всех критических точек, лежащих в плоскости $[x - c, (y = 0)]$, и всех критических точек, лежащих в плоскости $[y - c, (x = 0)]$, оси x и y являются главными. В общем случае оси x и y не являются главными осями для критических точек, не лежащих на какой-либо из двух плоскостей симметрии.

Как следует из гл. 5, при одном управляющем параметре в общем случае только одно собственное значение обращается в нуль в неморсовской критической точке. Это остается справедливым и в данном симметрическом случае. Для семейства функций общего вида, зависящих от одного управляющего параметра, как правило, встречается только катастрофа складки A_2 . Однако семейство $V(x, y; c)$ отнюдь не относится к общему виду; наоборот, оно относится к достаточно узкому классу из-за наличия ограничений симметрии (18.20). Как мы уже видели (гл. 17), в этом случае типично появление катастрофы сборки.

Для выяснения условий, при которых появляются складки и сборки, предположим, что (x_c, y_c) — критическая точка, и проанализируем симметрии (если они есть) функции $V(x, y; c)$ в окрестности этой критической точки. Это можно сделать, анализируя соотношение

$$V(x_c \pm \delta x, y_c \pm \delta y; c) \stackrel{?}{=} V(x_c + \delta x, y_c + \delta y; c). \quad (18.23)$$

Вообще говоря, функция $V(x, y; c)$ не инвариантна относительно замены $\delta x \rightarrow -\delta x$, если $x_c \neq 0$, однако обязательно инвариантна, если $x_c = 0$. Поэтому, если «плохой» переменной яв-

ляется x и $x_c \neq 0$, то происходит катастрофа складки, однако если $x_c = 0$, то вместо нее происходит катастрофа сборки. Аналогичные рассуждения остаются справедливыми и для направления y . Возможные ситуации представлены в табл. 18.1.

Теперь можно исследовать качественное поведение симметричной потенциальной функции $V(x, y; c)$ при вариациях параметра c . Вдоль совершенно симметричного решения $x(c) = 0, y(c) = 0$ собственные значения, связанные с направлениями x

Таблица 18.1. Типы катастроф, происходящих в однопараметрическом семействе функций с симметрией типа $F(\pm x, \pm y; c) = F(x, y; c)$

«Плохая» переменная состояния	Положение вырожденной критической точки			
	$x=0, y=0$	$x \neq 0, y=0$	$x=0, y \neq 0$	$x \neq 0, y \neq 0$
x	Сборка	Складка	Сборка	Складка
y	»	Сборка	Складка	»

Примечание. Катастрофы, происходящие в однопараметрическом семействе функций с симметрией типа $F(\pm x, \pm y; c) = F(x, y; c)$, как правило, являются складками или сборками в зависимости от типа симметрии в вырожденной критической точке.

и y , являются функциями c . Если собственное значение (по x) проходит через нуль, то происходит катастрофа сборки, и в направлении x ответвляются два новых решения. Вдоль этих новых направлений можно вычислить матрицу устойчивости. Поскольку на новых решениях $x(c) \neq 0, y(c) = 0$, то матрица устойчивости имеет диагональный вид, и собственные значения отвечают направлениям x и y . Если где-либо на этой новой ветви обращается в нуль собственное значение матрицы, связанное с x , происходит катастрофа складки. Если же обращается в нуль собственное значение, связанное с y , то появляется катастрофа сборки, и в направлении y ответвляются два дополнительных решения. На этих новых множествах решений $x(c) \neq 0, y(c) \neq 0$, и любые возникающие катастрофы должны быть складками. От критических ветвей с $x(c) \neq 0, y(c) \neq 0$ не ответвляется никаких новых решений.

Бифуркационная диаграмма (рис. 18.7) имеет вид дерева, поэтому множества решений $x(c), y(c)$ уравнения $\nabla V(x, y; c) = 0$ называют *ветвями*. Универсальное решение $x(c) = 0, y(c) = 0$, требуемое по условиям симметрии, называется *магистралью* или *нулевой ветвью*. Первичные ветви ответвляются от нулевой ветви, вторичные от первичных и т. д. В данном примере нет третичных ветвей, поскольку вдоль вторичных ветвей нет симметрии.

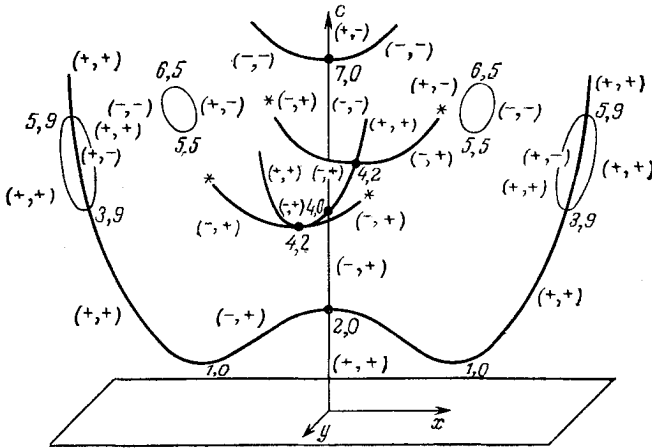


Рис. 18.7. Дерево ветвлений.

Для большей ясности предположим, что $0 \leq c < \infty$ и что при $c = 0$ потенциальная функция $V(x, y; c)$ имеет единственную критическую точку в начале координат пространства управляющих параметров. Кроме того, будем предполагать, что вдоль этой нулевой ветви собственное значение, связанное с направлением x , обращается в нуль при $c = 2$ и $c = 7$, а собственное значение, связанное с y , обращается в нуль при $c = 4$. Удобно помечать ветви (помимо указаний «нулевая», «первичная» и т. д.) их инерцией, или суммой знаков собственных значений матрицы устойчивости. Эта величина остается постоянной на участках между бифуркациями и точками разворота (описанными ниже) и меняется всякий раз, когда какое-либо собственное значение на данной ветви обращается в нуль и меняет знак. Инерция вдоль нулевой ветви определяется элементарно. При $c = 0$ функция $V(x, y; c)$ имеет минимум, поэтому инерция имеет вид $(+, +)$; при $c = 2$ собственное значение, связанное с x , обращается в нуль, поэтому при $0 \leq c < 2$ инерция $(+, +)$, а при $2 < c < 4$ инерция $(-, +)$. Первый и второй знаки в скобках относятся к направлениям x и y соответственно. При $c = 4$ собственное значение, связанное с y , обращается в нуль, поэтому при $4 < c < 7$ инерция имеет вид $(-, -)$. Наконец, при $c = 7$ собственное значение, связанное с x , снова обращается в нуль, поэтому при $c > 7$ инерция $(+, -)$. Из этих элементарных рассуждений следует, что решение $x(c) = 0, y(c) = 0$ неустойчиво при $c > 2$.

Рассмотрим первую из первичных ветвей. Предположим, что при $x = y = 0$ $c = 2$ и имеется катастрофа типа A_{-3} . Посколь-

ку ветвление происходит в направлении x , то в окрестности точки бифуркации (ветвления)

$$V(x, y; c) \simeq \text{const} + (2 - c)x^2 - ax^4 + by^2, \quad (18.24)$$

где $a > 0$, $b > 0$ (члены более высокой степени и несущественные положительные множители опущены). В окрестности неморсовской критической точки первичные ветви имеют вид $x(c) \simeq \pm [(2 - c)/2]^{1/2}$, $y(c) = 0$. Они «загибаются» в сторону меньших значений c по каноническому закону квадратного корня. На первичной ветви направление y неустойчиво, однако направление x по-прежнему должно оставаться устойчивым в силу непрерывности собственных значений матрицы $V_{ij}(x, y; c)$ в окрестности точки $(x, y; c) = (0, 0; 2)$. Поэтому в окрестности точки бифуркации на первичной ветви инерция имеет вид $(-, +)$.

Эта первичная ветвь не может бесконечно продолжаться в сторону меньших значений c , так как по предположению $V(x, y; c)$ имеет только одну критическую точку $c = 0$, а именно $(x, y) = (0, 0)$. Точно так же первичная ветвь не может просто оборваться. Кроме того, в однопараметрическом семействе, как правило, бывает либо складка (несимметричный случай), либо сборка (симметричный случай). Поэтому «судьба» первичной ветви однозначно определена. При $0 < c < 2$ (скажем, при $c = 1$) вдоль ветви $x(c) \neq 0$, $y = 0$ собственное значение, связанное с x , вторично обращается в нуль в канонической катастрофе складки. Можно сказать, что первичная ветвь «разворачивается» в сторону возрастающих значений c . Инерция на этом «подъеме» $(+, +)$, поскольку собственное значение, связанное с x , снова перешло через нуль.

◇◇◇ Выражаясь более образно, можно сказать, что аттрактор и седло «сталкиваются и уничтожают друг друга», когда s , уменьшаясь, проходит через единицу. Или же можно сказать, что с ростом c при $c = 1$ внезапно рождаются аттрактор и седло, которое затем поглощается нулевой ветвью.

Вдоль первичной ветви $x(c) \neq 0$, $y(c) = 0$ вид функции $V(x(c) + \delta x, \delta y; c)$ не меняется при замене $\delta y \rightarrow -\delta y$ и меняется при $\delta x \rightarrow -\delta x$. Поэтому обращающиеся в нуль собственные значения, связанные с x , ассоциируются с дополнительными «разворотами», в то время как обращающиеся в нуль собственные значения, связанные с направлением y , ассоциируются с ответвлениями от первичной ветви, при которых $y(c) \neq 0$. В этих вторичных бифуркационных точках касательная к вторичной ветви перпендикулярна плоскости (x, c) . Будем предполагать, что две вторичные ветви ответвляются от этой первичной ветви при $c = 3,9$ и $c = 5,9$ и что обе бифуркации относятся

к катастрофам типа A_{+3} . Потенциальная функция в окрестности точки $x(c) \neq 0$, $y = 0$, $c = 3,9$ имеет вид

$$V(x(c) + \delta x, y; c) \simeq a(\delta x)^2 + (3,9 - c)y^2 + by^4, \quad (18.25)$$

где, как обычно, оставлены только главные члены и $a > 0$, $b > 0$. Для $c > 3,9$ имеются два локальных решения $y(c) \neq 0$, а для $c < 3,9$ ни одного. Следовательно, вторичная ветвь поворачивает вверх. Инерция этой ветви имеет вид $(+, +)$, а первичной ветви $(+, -)$ при $3,9 < c < 5,9$. При $c = 5,9$ собственное значение, связанное с y , вновь обращается в нуль. Катастрофа A_{+3} при $x(c) \neq 0$, $y = 0$, $c = 5,9$ имеет вид

$$V(x(c) + \delta x, y; c) \simeq a(\delta x)^2 + (c - 5,9)y^2 + by^4, \quad (18.26)$$

где $a > 0$, $b > 0$. При $c < 5,9$ имеются два локальных решения $y(c) \neq 0$, а при $c > 5,9$ ни одного. Поэтому вторичная ветвь, ответвившаяся в катастрофе A_{+3} , вначале поворачивает вниз. Инерция этой вторичной ветви также имеет вид $(+, +)$. Рассматриваемая ветвь может быть (а может и не быть) такой же, как и вторичная ветвь, ответвляющаяся при $c = 3,9$. Если это так, то потенциальную функцию в окрестности первичной ветви приближенно можно записать как

$$V(x(c) + \delta x, y; c) \simeq a(\delta x)^2 + \frac{1}{2}(c - 3,9)(c - 5,9)y^2 + by^4. \quad (18.27)$$

Тогда можно сказать, что при $c = 3,9$ первичная ветвь «сбрасывает» устойчивые вторичные ветви, которые затем снова к ней присоединяются при $c = 5,9$. Другая возможность состоит в том, что вторичная ветвь, ответвляющаяся при $c = 5,9$, вначале поворачивает вниз и затем, при некотором $c > 0$, — снова вверх в катастрофе складки. Причины такого поведения уже обсуждались выше. На подъеме по этой ветви инерция имеет вид $(+, -)$. Первая из указанных двух возможностей иллюстрируется на рис. 18.7.

Займемся теперь второй первичной ветвью, ответвляющейся от магистрали при $c = 4$. Будем предполагать наличие катастрофы A_{+3} в направлении y . Первичная ветвь поворачивает вверх с инерцией $(-, +)$. Для этой ветви $x = 0$, $y(c) \neq 0$. Вторичное ветвление в направлении x все еще остается возможным. Предположим, что оно происходит при $c = 4,2$ и относится к типу A_{-3} , так что,

$$V(x, y(c) + \delta y; c) \simeq (c - 4,2)x^2 - ax^4 + b(\delta y)^2, \quad (18.28)$$

где $a > 0$, $b > 0$. При $c > 4,2$ имеются два локальных решения $x(c) \neq 0$ и ни одного при $c < 4,2$, поэтому вторичная ветвь, ответвляющаяся в катастрофе A_{-3} , поворачивает вверх. Вдоль первичной ветви при $c > 4,2$ инерция имеет вид $(+, +)$, по-

скольку изменится знак собственного значения, связанного с x . Инерция вторичной ветви должна быть $(-, +)$, так как вторичная ветвь $x(c) \neq 0$, $y(c) \neq 0$ неустойчива в направлении x .

Рассмотрим третью первичную ветвь, ответвляющуюся от магистрали при $c = 7$ в направлении x . Когда c , возрастая, принимает значение $c = 7$, собственное значение, связанное с x , из отрицательного становится положительным. Если предположить, что $(x, y; c) = (0, 0; 7)$ есть точка катастрофы A_{-3} , то первичная ветвь должна повернуть вверх с инерцией $(-, -)$.

◇◇◇ Если при $c = c^0$ происходит ответвление от n -ветви¹ к $(n + 1)$ -ветви, то инерция $(n + 1)$ -ветви, существующая локально только по одну сторону от c^0 , совпадает с инерцией n -ветви по другую сторону от c^0 . Другими словами, если при возрастании c происходит катастрофа $A_{\pm 3}$ и при этом знаки собственных значений матрицы устойчивости изменяются от \pm к \mp , то ответвляющиеся решения поворачивают вверх или вниз в соответствии с таблицей

Тип катастрофы	Изменение знака собственного значения при увеличении c	
	$+ \rightarrow -$	$- \rightarrow +$
A_{+3}	Вверх	Вниз
A_{-3}	Вниз	Вверх

◇◇◇ Касательная к $(n + 1)$ -ветви, ответвляющейся при $c = c^0$ от n -ветви, параллельна собственному вектору матрицы устойчивости, соответствующему собственному значению, обращаемому в нуль на n -ветви при $c = c^0$.

◇◇◇ Множество решений $x(c)$, $y(c)$ уравнения $\nabla V(x, y; c) = 0$ не обязательно должно быть связным. При возрастании c могут «внезапно возникнуть» одновременно седло и локальный экстремум. Если ни одно из них не будет «затянуто» ветвью, ответвляющейся от магистрали, то полное множество решений не связно. Эти новые решения могут иметь собственные точки бифуркаций и разворота; они могут бесконечно продолжаться в направлении роста c или могут столкнуться и уничтожить друг друга, образовав изолированные «пузыри» в пространстве переменных состояния. Инерцию для таких пузырей часто трудно угадать (рис. 18.7).

◇◇◇ Мы полностью определили качественные свойства градиентной системы, исходя лишь из знания положений неморсовских критических точек в $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^1$. Качественные свойства

¹ В этой терминологии «1-ветвь» — первичная ветвь, «2-ветвь» — вторичная ветвь и т. д. — Прим. ред.

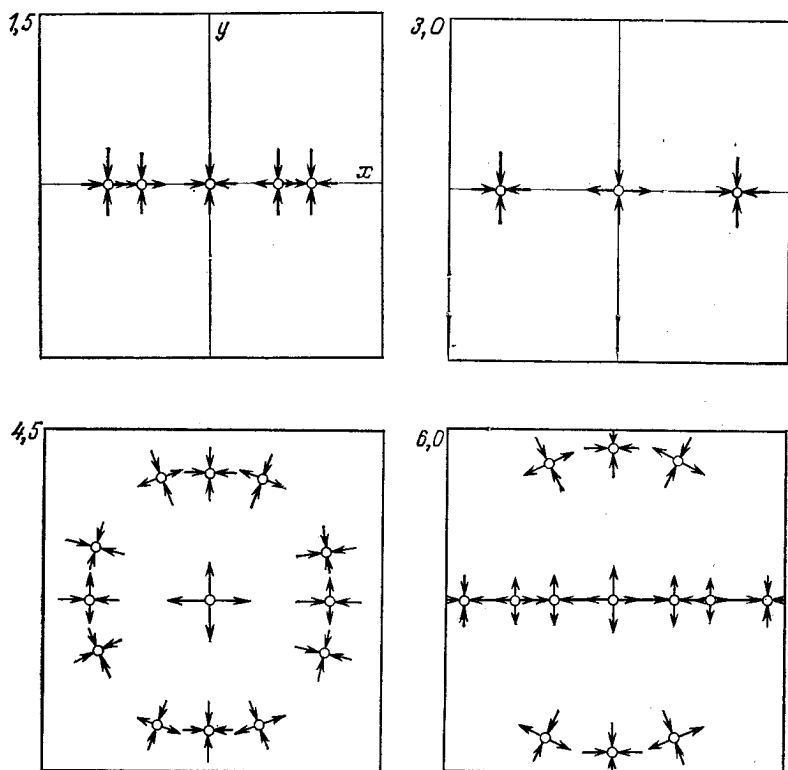


Рис. 18.8. Сечения дерева ветвлений различными плоскостями $c = \text{const}$.

Критические точки в одной плоскости явным образом связаны с критическими точками в близлежащих плоскостях. Расположение критических точек на плоскости можно использовать для построения картины потоков в этой плоскости.

«дерева равновесий (ветвлений)» определяются положением и типом катастроф, которые возможны ($A_2, A_{\pm 3}$) в этом однопараметрическом примере. Кроме того, инерция матрицы устойчивости на каждой ветви полностью определяется (без каких бы то ни было вычислений!) инерцией в одной точке $(x, y; c) = (0, 0; 0)$. В табл. 18.2 дана сводка положений, типов и свойств каждой неморсовской критической точки для этого примера.

◇◇◇ Множество решений $x(c)$, $y(c)$ уравнения $\nabla V(x, y; c) = 0$, связанных с магистралью, имеет простое происхождение. От магистрали может ответвиться много первичных ветвей, помечаемых порядком их возникновения. Точно так же от первичной ветви может ответвиться много вторичных ветвей, помечаемых аналогичным образом. В этом примере нет третичных ветвей.

Таблица 18.2. Положение и тип критических точек на дереве ветвления

Положение	Тип катастрофы	Направление ветвления	m -арная \rightarrow n -арная
2.0	A_{-3}	x	$0 \rightarrow 1$
4.0	A_{+3}	y	$0 \rightarrow 1$
7.0	A_{-3}	x	$0 \rightarrow 1$
1.0 $x \neq 0$	A_2	x	$1 \rightarrow 1$
3.9 $x \neq 0$	A_{+3}	y	$1 \rightarrow 2$
5.9 $x \neq 0$	A_{+3}	y	$1 \leftrightarrow 2$
4.2 $y \neq 0$	A_{-3}	x	$1 \rightarrow 2$
5.5 $x \neq 0$	A_2	x	Несвязная первичная ветвь
6.5 $x \neq 0$	A_2	x	

Все равновесия, возможные при $c = 1,5; 3; 4,5; 6$, показаны на рис. 18.8. Эти точки получаются в результате сечения дерева равновесий четырьмя горизонтальными плоскостями $c = \text{const}$. В каждой такой плоскости легко построить фазовый портрет градиентной системы, воспользовавшись ранее описанными методами. Однако мы просто указываем тип устойчивости каждого положения равновесия.

4. ПРОГОНКА

Рассмотренные качественные (топологические) методы дают большой объем полезной информации о градиентной (и динамической) системе ценой сравнительно небольших усилий. Этим обстоятельством объясняется столь интенсивное развитие топологии (у истоков которой стоял Пуанкаре) как нового раздела математики.

Ниже описываются основные этапы процесса исследования градиентной системы, зависящей от внешних управляющих параметров.

1. Для фиксированных значений управляющих параметров c вначале определяют все равновесные состояния (из условия $\nabla V = 0$), а затем типы устойчивости и главные оси для каждого равновесного состояния. Полученная информация может быть использована в качестве каркаса для построения фазового портрета системы во всем фазовом пространстве (пространстве состояний). Пользуясь методикой, описанной в гл. 5, можно также найти сепаратрисы и области притяжения.

2. При изменении управляющих параметров изменяются положения равновесных состояний так же, как и точки и области притяжения и сепаратрисы. Если, однако, $\det V_{ij} = 0$ вдоль каждого равновесия, то качественно этот фазовый портрет остается неизменным. Появление вырожденной критической точки

вносит качественные изменения в фазовый портрет системы, и наоборот. Если на некоторой критической ветви $x^i(c)$ в точке $c^0 \det V_{ij} \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $(x^0; c^0) \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^*$ должны быть дополнительные критические точки.

Для градиентной динамической системы с одним управляющим параметром s описанный выше алгоритм можно реализовать в виде процедуры, называемой *прогонкой*. Связь между изменением δs управляющего параметра и смещением критической точки дается соотношением (5.2):

$$V_{ij}\delta x^j + V_{is}\delta s = 0. \quad (18.29)$$

Если матрица устойчивости V_{ij} не вырождена, то смещения δx^j определяются выражением

$$\delta x^j = -(V^{-1})^j{}_i V_{is} \delta s. \quad (18.30)$$

Уравнение (18.30) очень удобно для машинных вычислений. Выбирая шаг δs прогонки достаточно малым, можно очень просто «прогнать» систему вдоль критической ветви между вырожденными критическими точками.

Естественно, наиболее интересные явления наблюдаются тогда, когда V_{ij} вырождается и уравнение (18.30) теряет смысл. Тогда в вырожденной критической точке становятся возможными разворот и появление новых ветвей.

Если (x^0, s^0) — вырожденная критическая точка, то «плохие» направления в фазовом пространстве легко найти из уравнения

$$V_{ij}\delta x^j = 0.$$

А именно собственный вектор $(\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^n)$ матрицы V_{ij} , соответствующий нулевому собственному значению, касателен к исходной ветви в точке возврата или к ответвляющейся новой ветви.

Довольно легко определить, что именно происходит в вырожденной критической точке: разворот (A_2) или бифуркация (A_3). Пусть $(\delta x)^0$ — собственный вектор V_{ij} в точке (x^0, s^0) , соответствующий нулевому собственному значению, и $(\delta x)^{-1}$ — изменение координат критической точки при прогонке от s^0 — δs до s . Тогда,

- если вектор $(\delta x)^{-1}$ приблизительно параллелен $(\delta x)^0$, то в (x^0, s^0) имеет место катастрофа A_2 ;
- если вектор $(\delta x)^{-1}$ приблизительно перпендикулярен $(\delta x)^0$, то в (x^0, s^0) имеет место катастрофа A_3 .

Появление вырожденной критической точки мешает интегрированию «уравнения прогонки» (18.30). Однако поскольку элементарные катастрофы обладают каноническими свойствами (если известен тип катастрофы, происходящей в вырожденной

критической точке), то эти свойства можно использовать для продолжения интегрирования «сквозь особенность». Проиллюстрируем, как это можно сделать, на примере катастроф складки и сборки.

Складка. Предположим, что $V(x, s)$ имеет вырожденную критическую точку в (x^0, s^0) . Эту точку можно найти экстраполяцией, как показано на рис. 18.9. Кривизна складки в окрестности критической точки каноническим образом (по закону квадратного корня) зависит от s (рис. 18.9, а), поэтому из зависимости $(V''')^2$ от s в окрестности вырожденной критической точки с помощью простой линейной экстраполяции можно получить достаточно хорошую оценку для s^0 . Если s^0 известно, то через критические точки $x(s^0 - n\delta s)$ ($n = 1, 2, \dots$) можно провести параболу, касательную к вертикальной гиперплоскости. Положение ветви после возврата в s^0 можно найти отражением (рис. 18.9, б). Как только мы «переступим» через критическую точку, можно снова «запустить» уравнение прогонки вдоль критической ветви, не забыв при этом изменить знак шага прогонки δs .

Сборка. В этом случае собственное значение, обращаемое в нуль, стремится к нулю по линейному закону; поэтому место точки сборки можно найти экстраполяцией, как на рис. 18.10, а. Если точка сборки есть $(x^0 = x(s^0), s^0)$, то координаты точек на начальной ветви вдали от s^0 приближенно равны

$$x(s^0 + i\delta s) \simeq x^0 + (x^0 - x(s^0 - i\delta s)) \quad (18.31)$$

(рис. 18.10, б). Точки на разветвляющейся ветви можно найти следующим образом: отступить назад к $s - \Delta s$ (где Δs составляет не менее десяти шагов прогонки) и добавить к потенциальной функции небольшую добавку, исчезающую вне интервала $(s_0 - \Delta s, s_0 + \Delta s)$. Деформация общего вида «испортит» бифуркацию сборки. В результате уравнение прогонки можно проинтегрировать на участке за катастрофой без всяких затруднений и получить разветвляющуюся ветвь на дальнем конце от $s^0 + \Delta s$.

Итак, симметрично расположенную разветвляющуюся ветвь можно получить:

1. Интегрируя от $s_0 + \Delta s$ вдоль невозмущенной ветви в направлении отрицательных s и «переступая» через точку сборки;
2. Возвращаясь к $s_0 - \Delta s$, используя исходное возмущение, взятое с обратным знаком, и прогоняя систему, как ранее;
3. Интегрируя исходное возмущение в направлении отрицательных s , начиная с точки $s_0 + \Delta s$ на центральной ветви;
4. Используя симметрию.

Поведение множества ветвящихся решений становится более интересным, если размерность ядра матрицы устойчивости равна

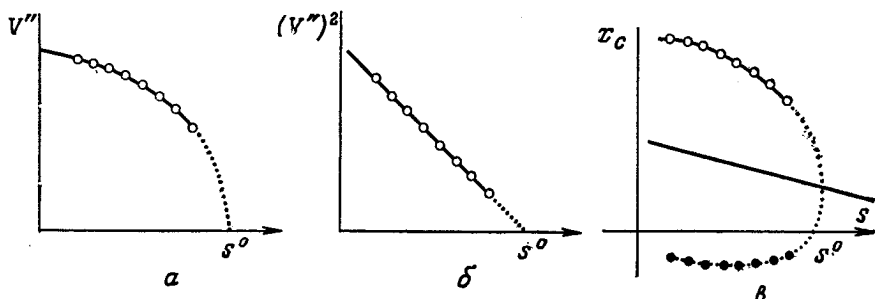


Рис. 18.9. Прогонка вдоль критической ветви возможна вне роста катастрофы. Когда определитель матрицы устойчивости становится малым (а), то положение ростка можно найти экстраполяцией, используя известный вид канонической формы соответствующей катастрофы (б). Для «перешагивания» через росток катастрофы можно воспользоваться сечением канонической катастрофы (в).

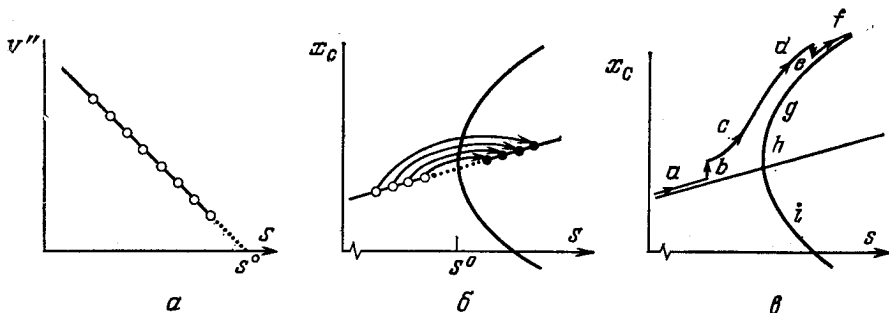


Рис. 18.10.

а — для выявления типа катастрофы и ее положения можно воспользоваться связью между собственным значением матрицы и управляющим параметром; б — начальная ветвь сборки может быть продолжена простой экстраполяцией за критическую точку, при этом экстраполяция может быть и нелинейной; в — ответвляющиеся ветви можно найти с помощью «теории возмущений» (деформаций). Здесь мы «шагаем» после точки а до точки б (прогонка), где добавляем к потенциалу универсальную деформацию, по-прежнему оставаясь в критической точке, правда несколько смещенной. После этой вырожденной критической точки прогонка возобновляется (с, d). В точке е деформация снимается, и система возвращается на ответвляющуюся ветвь. Далее можно возобновить прогонку либо в том же направлении (f, ...), либо в обратном (g, h, i, ...), для того чтобы построить новую ветвь. Для обхода точки h можно использовать обычную процедуру «перешагивания».

двум. Это может иметь место в случае потенциальной функции вида

$$V(x, y; s) = k_1 (s_1 - s) x^2 + k_2 (s_2 - s) y^2 + x^4 + y^4, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0. \quad (18.32)$$

Как показано на рис. 18.11, а, при $s_1 \neq s_2$ одиночные бифуркации происходят в четырех точках. При $s_1 \rightarrow s_0, s_2 \rightarrow s_0$ множество ветвящихся решений в s_0 становится двумерным с че-

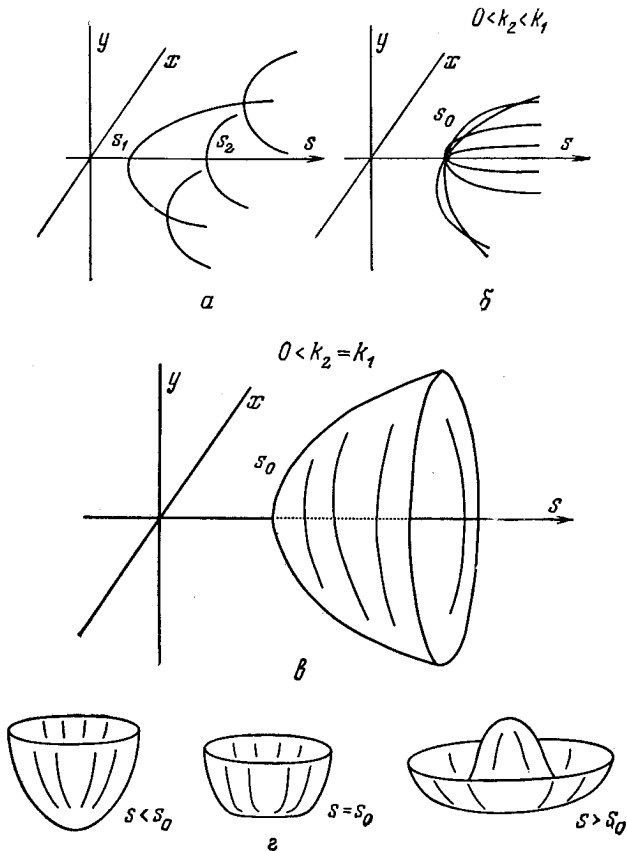


Рис. 18.11.

a — критическое множество потенциальной функции (18.32) содержит четыре катастрофы типа A_+ ; *б* — когда ответвления от магистрали совпадают, все четыре ветви ответвляются из одной точки; *в* — в случае симметрии (18.33) бифуркационное множество представляет собой параболоид вращения; *г* — соответствующая потенциальная функция инвариантна относительно группы $O(2)$.

тырьмя отдельными ветвями, ответвляющимися от «магистрали» при $s = s_0$ (рис. 18.11, б). В том случае, когда повышение размерности ядра происходит из-за симметрии, как в случае $k_1 = k_2 = k$,

$$V(x, y; s) = k(s_0 - s)(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2, \quad (18.33)$$

множество ветвящихся решений двумерно и представляет собой параболоид вращения (рис. 18.11, в). На этом множестве решений у матрицы устойчивости есть одно нулевое и одно ненулевое собственные значения. В первом случае стационарная

точка (в данном случае минимум), соответствующая этой «ветви», нелокальна по своей природе. На рис. 18.11,2 показаны формы потенциальной функции при различных значениях s . Вообще говоря, если на функцию наложено условие инвариантности относительно некоторой непрерывной группы, то бифуркационные критические множества по своей природе не совпадают с одним или более нулевыми собственными значениями матрицы устойчивости.

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ КАТАСТРОФ И ТЕОРИЕЙ БИФУРКАЦИИ

По существу, теория бифуркаций изучает вопрос о том, каким образом новые решения уравнения или системы уравнений «ответвляются» от некоторого известного решения при изменении параметра. Важный класс бифуркационных задач возникает при поиске стационарных значений функции. По этой причине можно ожидать, что между такими задачами и элементарной теорией катастроф существует тесная связь. Более того, можно сказать, что теория бифуркаций, изучающая новые, качественно отличающиеся решения систем уравнений, целиком укладывается в рамки теории катастроф.

Для большей конкретности рассмотрим потенциальную функцию $V(x; s)$ n фазовых координат $x \in \mathbb{R}^n$ и одного управляющего параметра $s \in \mathbb{R}^1$. Будем предполагать, что $V(x; s)$ имеет критическую точку в $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ при всех s . Тогда разложение $V(x; s)$ в ряд Тейлора в окрестности этой критической точки имеет вид

$$V(x; s) = V(s) + x^i V_i(s) + \frac{1}{2!} x^i x^j V_{ij}(s) + \dots \quad (18.34)$$

(Как и ранее, все производные вычисляются в критической точке, постоянный член не играет роли и $V_i(s) = 0$.) Критические точки остаются изолированными до тех пор, пока $\det V_{ij}(s) \neq 0$. Когда матрица устойчивости вырождается, к первоначальной ветви добавляется новая ветвь решений уравнения $\nabla V = 0$. Эта ветвь может ответвляться от начальной ветви, ибо начальная ветвь может «развернуться» (в последнем случае $x(s) = 0$ не может быть критической точкой при всех s). Обе эти возможности уже обсуждались в предыдущем разделе.

Направление ответвления, новое решение, легко определяется из (18.34): это будет направление, в котором возмущение не изменяет значение потенциала во втором порядке: $\delta x^i \delta x^j V_{ij} = \delta x^i (V_{ij} \delta x^j) = 0$.

Таким образом, начальное направление нового ответвляющегося решения определяется собственными векторами матрицы

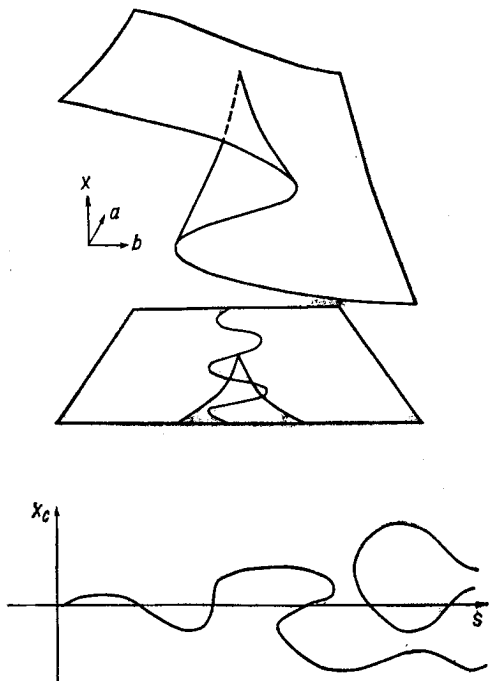


Рис. 18.12. Простые кривые в плоскости управляющих параметров катастрофы сборки, будучи перенесены на критическое многообразие, порождают довольно странные решения.

Здесь s параметризует расстояние вдоль кривой в плоскости управляющих параметров.

устойчивости, соответствующими нулевым собственным значениям. На практике наиболее часто встречаются бифуркации, соответствующие «трезубцу» (симметричному поперечному сечению катастрофы сборки, рис. 10.2). На самом деле пример, обсуждавшийся в разд. 5, соответствует ряду изолированных бифуркаций этого типа (плюс «развороты»).

При изменении параметра s число решений уравнения $\nabla V(x; s) = 0$ может измениться. Если к ветви $x(s) = 0$ присоединяются новые решения, их можно исследовать с помощью алгоритма прогонки, описанного в предыдущем разделе. Если, однако, множество всех решений состоит из двух или более не связанных между собой компонентов, то алгоритм прогонки, начинающийся с магистрали $x(s) = 0$, уже не годится для построения несвязного множества всех решений.

Однако известно, что число решений уравнения $\nabla V(x; s) = 0$ изменяется из-за наличия катастрофы. По этой причине целесообразно рассматривать общую бифуркационную задачу

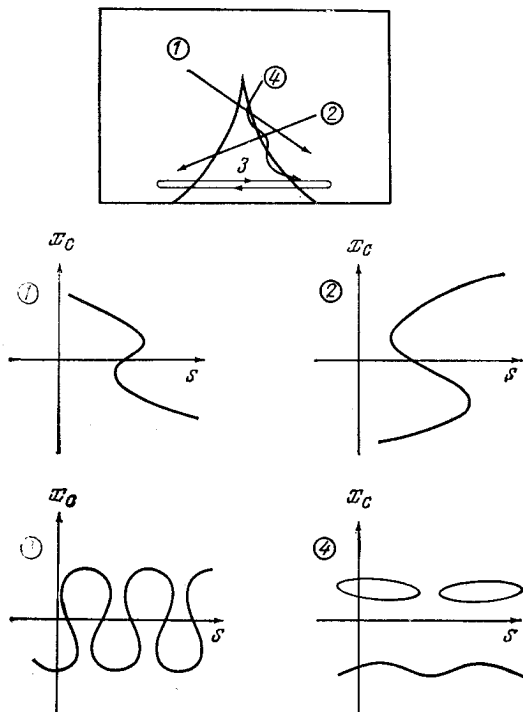


Рис. 18.13. Разные кривые в плоскости управляющих параметров приводят к совершенно различным множествам решений.

Из различных кривых в плоскости управляющих параметров катастрофы сборки можно получить не более 53 различных неприводимых множеств решений [1].



Рис. 18.14.

а — это множество решений можно получить для катастрофы сборки; *б* — это множество решений получить нельзя, поскольку в данном случае необходимо, чтобы катастрофа обладала по меньшей мере пятью критическими точками, т. е. в этом случае катастрофа A_5 является простейшей.

как задачу построения множества решений уравнения

$$\nabla V(x; c) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}^k, \quad (18.35)$$

для некоторой одномерной кривой

$$c(s) = (c_1(s), c_2(s), \dots, c_k(s)) \in \mathbb{R}^k. \quad (18.36)$$

Хотя в пространстве управляющих параметров может быть много различных кривых, поведение $V(x; c)$ в любой точке $c \in \mathbb{R}^k$ является каноническим и известным для элементарных катастроф. Если, например, потенциальная функция имеет критическую точку сборки, то в окрестности этой точки

$$V \doteq \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + bx. \quad (18.37)$$

Таким образом, общая бифуркационная задача сводится к задаче отыскания множества решений уравнения $\nabla V = 0$ для любого пути $a(s)$, $b(s)$ в пространстве управляющих параметров, зависящего от единственного управляющего параметра (длина дуги). Множество решений есть просто пересечение многообразия катастрофы сборки $\nabla V = 0$ с двумерной линейчатой поверхностью $(x, a(s), b(s))$, точки которой параметризуются координатами x , s . В результате получаем одномерное множество решений (рис. 18.12). Другие пути дают другие множества решений (рис. 18.13).

◇◇◇ Неодносвязное множество решений, изображенное на рис. 18.14, а, можно связать с катастрофой A_{+3} , а множество, показанное на рис. 18.14, б, не может быть связано ни с одной катастрофой порядка, меньшего, чем A_5 .

В случае, когда множество решений несвязное, несвязные области можно найти с помощью алгоритма прогонки по следующей схеме:

- добавить к функции некоторое возмущение или изменить значения управляющих параметров, входящих в функцию. Это следует делать «адиабатически», стараясь сохранить состояние равновесия во время действия возмущения;

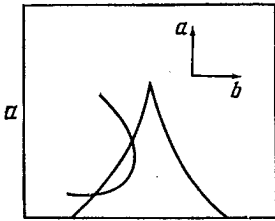
- при заданном возмущении «прогнать» систему вдоль множества решений, изменяя параметр s . Если топология нового множества решений отличается от топологии исходного множества решений, то посредством введения возмущения несвязные решения можно «присоединить» к исходному решению;

- найти значение параметра s , при котором число решений возмущенной и невозмущенной систем уравнения $\nabla V = 0$ различно;

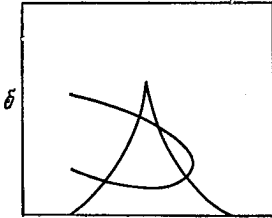
- «адиабатически» удалить возмущение, отслеживая изменения всех равновесий (при фиксированном s) при удалении возмущений;

- определить прогонкой некоторые компоненты несвязного множества решений.

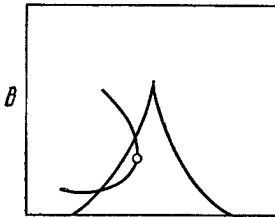
Практическая реализация рассмотренной схемы иллюстрируется для простого примера на рис. 18.15.



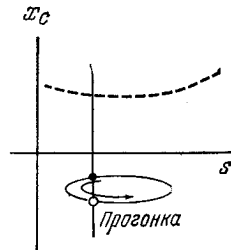
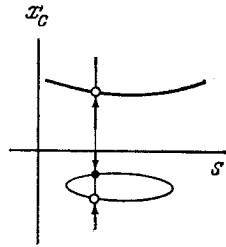
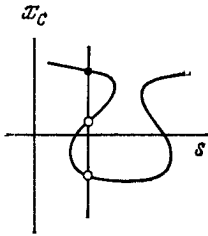
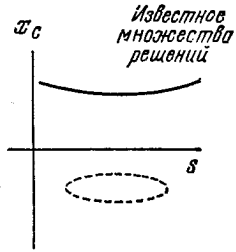
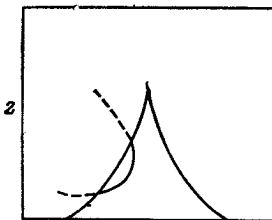
Введение
возмущения



Удаление
возмущения



Прогонка



6. ВЫВОДЫ

В этой главе рассматривались статические и динамические свойства градиентных динамических систем. Хотя эти динамические системы невозможно привести к каноническому виду нигде, кроме положения равновесия, методы и результаты элементарной теории катастроф оказываются полезными при изучении их динамических свойств. В часто встречающемся случае $n = 2$ динамические свойства становятся совершенно наглядными благодаря применению методов построения фазовых портретов. Фазовый портрет в окрестности вырожденной критической точки можно построить как предельный случай фазового портрета ростка деформированной катастрофы (при бесконечно малом возмущении).

Был рассмотрен типичный пример из широкого класса интересных физических приложений теории катастроф и теории бифуркаций. Просто удивительно, что для получения столь подробной информации о приблизительном расположении и типах устойчивости критических ветвей некоторых симметрических функций, зависящих от одного управления, потребовались столь незначительные усилия. На практике же задачи такого рода, встречающиеся в научно-технических приложениях, имеют еще более простую структуру.

Было показано, как можно найти стационарные значения потенциальной функции при помощи метода прогонки. Хотя катастрофы мешают непосредственной реализации данного метода, тем не менее это препятствие можно обойти, поскольку известны канонические формы катастроф. Обсуждалась связь между теорией бифуркаций и теорией катастроф; показано, каким образом методы теории катастроф (т. е. изменение управлений) могут привести к обнаружению несвязных множеств решений и их дальнейшему анализу методом прогонки.

Литература

1. Golubitsky M., Schaeffer D. A. Theory for Imperfect Bifurcation via Singularity Theory, *Commun. Pure Appl. Math.*, 32, 21—98 (1979).

Рис. 18.15. Несвязное множество решений можно обнаружить с помощью комбинации прогонки и методов теории катастроф.

a — связанное множество решений находится прогонкой; b — при фиксированной длине дуги s адиабатически вводится деформация до тех пор, пока все множество решений не станет связным. При этом отслеживается положение единственной известной критической точки при фиксированном s (светлый кружок). Прогонкой определяется наличие петли в множестве решений. Здесь используются стандартные методы перешагивания и определяется новая критическая точка при том же значении s ; v — отслеживается положение новой точки (светлый кружок) при адиабатическом снятии деформации; g — с помощью прогонки строится несвязное множество решений для исходного невозмущенного потенциала.

АВТОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Для анализа свойств автономных динамических систем могут быть использованы терминология и методы теории градиентных динамических систем. В частности, такие термины, как «равновесие», «критическая точка», «вырожденная критическая точка», «структурная устойчивость», «структурная неустойчивость», «морсификация», «общая деформация», «фазовый портрет», можно непосредственно перенести на автономные динамические системы.

В настоящей главе изучаются геометрические свойства линеаризованной матрицы устойчивости. Такие матрицы представимы точками пространства \mathbb{R}^n . Это пространство разбивается на открытые области, характеризующие качественно различные структурно устойчивые динамические системы, сепаратрисой, описывающей структурно неустойчивые системы, компоненты которой определяются собственными значениями линеаризованной матрицы устойчивости. Сепаратриса содержит компоненты, на которых происходит изменение динамической устойчивости, и компоненты, на которых такое изменение не происходит. Компоненты первой группы являются аналогами множеств, определяемых условием $\det V_{ij} = 0$ для градиентных систем. Такие компоненты описывают системы (динамические и градиентные) с вырожденными критическими точками, и с этими компонентами связаны бифуркации. Компоненты второй группы аналогичны тем множествам в пространстве управлений градиентных систем, для которых два или более критических значения равны (максвелловское множество). Как правило, бифуркации не имеют отношения к этому множеству ни в градиентных, ни в динамических системах.

«Принцип лома» предполагает тщательный анализ различных компонент сепаратрисы в \mathbb{R}^n . В связи с этим такой анализ проводится для случая $n = 2$ и рассматриваются деформации неветвящейся части сепаратрисы.

Изучаются компоненты бифуркационного множества, на котором одно или два собственных значения проходят через нуль. Соответствующая «дважды вырожденная» критическая точка называется *седло-узлом*. Одномерная морсификация седло-узла является аналогом катастрофы складки; двумерная морсификация может привести к «обмену устойчивостью».

Исследуются компоненты бифуркационного множества, на которых действительные части комплексно сопряженных собственных значений равны нулю. Соответствующие вырожденные критические точки называются *вихрями* или *центрами*. Одномерная морсификация центра приводит к бифуркации Хопфа. Бифуркации Хопфа, зависящие от k управляющих параметров, тесно связаны с симметризованными катастрофами типа $A_{\pm(2k+1)}$.

1. ПРИВЕДЕНИЕ К ГРАДИЕНТНОЙ ФОРМЕ

Многие автономные (т. е. не зависящие от времени) системы нелинейных дифференциальных уравнений можно записать как градиентные системы. Однако для расширенного класса динамических систем так поступить нельзя, так как уравнения дви-

жения должны явно включать компоненты действующей силы $F_i(x; c)$, которые в общем случае вовсе не связаны ни с каким потенциалом:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x; c). \quad (19.1)$$

Поскольку эта система уравнений имеет более общий вид, чем соответствующая градиентная система (где $F = -\nabla V$), поведение такой системы может быть гораздо более разнообразным.

Градиентные системы по своей сути гораздо легче поддаются анализу, чем динамические системы, поэтому имеет смысл ввести некий критерий, согласно которому некоторая динамическая система действительно является градиентной. Для градиентной системы

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (19.2)$$

и, следовательно,

$$F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = F_{ji}.$$

Таким образом, для градиентных систем обобщенный вихрь поля F , определяемый как $-\nabla V$, равен нулю:

$$(\text{rot } F)_{ij} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0. \quad (19.3)$$

И наоборот, если все $n(n-1)/2$ независимых компонент $\text{rot } F$ динамической системы обращаются в нуль, то эта система является градиентной.

Пример 1. Динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = 2xy, \quad \frac{dy}{dt} = \mu x^2 - y^2 \quad (19.4)$$

является градиентной тогда и только тогда, когда $\mu = 1$, поскольку

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial y} (2xy) & \stackrel{?}{=} & \frac{\partial}{\partial x} (\mu x^2 - y^2) \\ \parallel & & \parallel \\ 2x & \stackrel{?}{=} & 2\mu x \end{array} \quad (19.5)$$

При $\mu = 1$ соответствующая потенциальная функция является ростком катастрофы D_4 : $-V(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3$.

2. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

2.1. $F \neq 0$

Качественное описание автономных динамических систем можно получить практически точно так же, как и градиентных систем. В основном все сводится к построению фазовых портретов. Поскольку получение последних не вызывает никаких трудностей в случае двумерных ($n = 2$) динамических систем, ограничимся в основном рассмотрением систем второго порядка. Анализ таких систем включает описание фазовых портретов, классификацию типов равновесия, исследование вырожденных точек равновесия и изучение деформации системы в окрестности вырожденной точки равновесия.

Описание фазового портрета, по существу, сводится к определению для каждой точки плоскости (x, y) направления действующей силы $F(x, y)$, а следовательно, и направления потока $(dx/dt, dy/dt)$. Полная картина получается соединением стрелок, указывающих направления линии в отдельных точках, в непрерывно направленные линии.

Особенно информативными являются фазовые портреты структурно устойчивых динамических систем. Система считается структурно устойчивой, если возмущение системы (19.1) не вносит качественных изменений в число, положение и характер точек пересечения кривых $F_i = 0$ (рис. 19.1). Для структурно устойчивой динамической системы кривые $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ делят плоскость на области с чередующимися знаками производных dx/dt и dy/dt . Такое разбиение служит удобным каркасом, на котором можно построить глобальную картину поведения всей динамической системы. Эта идея иллюстрируется на рис. 19.2, где показана часть плоскости \mathbb{R}^2 . Предполагается, что в этой области уравнение $F_1(x, y) = 0$ имеет два решения и что $F_2(x, y) = 0$ также имеет два решения. Эти четыре «гиперплоскости» делят указанную часть плоскости на девять открытых областей. Если хотя бы в одной из этих областей известны знаки (F_1, F_2) , то их можно определить и для всех остальных открытых областей. Если знаки (F_1, F_2) такие же, как показано в верхней левой области, то можно установить направления потоков в остальных восьми областях и на четырех кривых $F_i = 0$. После того как это сделано, глобальное поведение динамической системы легко определяется «следованием по стрелкам». В динамической системе, фазовый портрет которой изображен на рис. 19.2, имеются один источник, один сток и две точки равновесия, в окрестностях которых наблюдается «спиральное поведение».

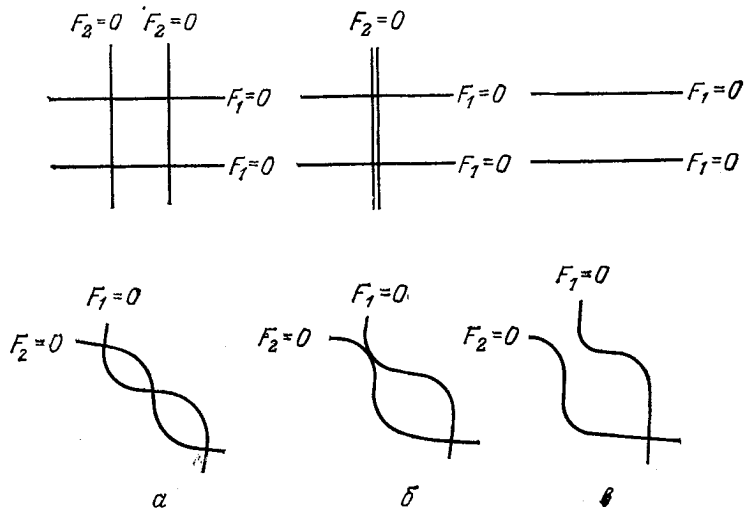


Рис. 19.1. Структурно неустойчивая динамическая система (б) располагается между двумя структурно устойчивыми динамическими системами (а и в).

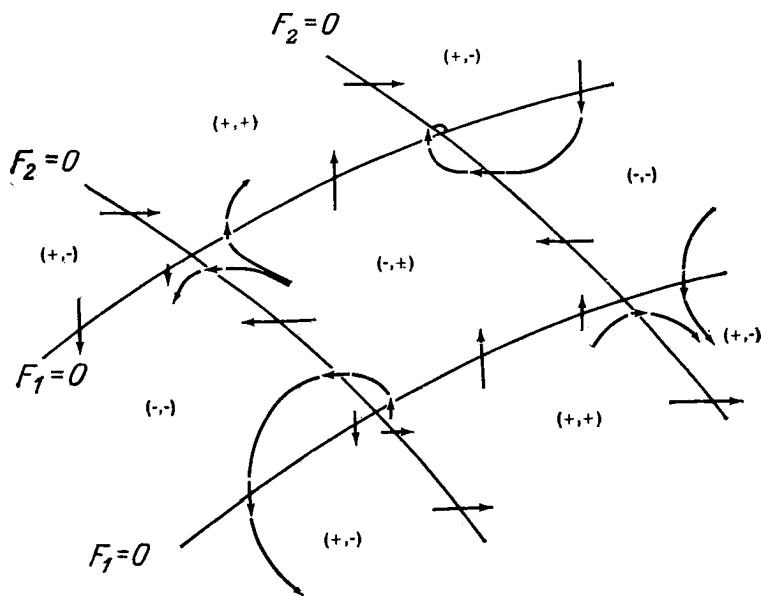


Рис. 19.2. Кривые $F_i = 0$ и их пересечения определяют качественное поведение и фазовый портрет двумерной динамической системы.

2.2. $F = 0$

В качестве следующего шага глобального анализа динамических систем имеет смысл найти точки равновесия, в которых $F_1(x, y) = 0$, $F_2(x, y) = 0$. Эти точки будут располагаться в точках пересечения кривых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$. Свойства устойчивости динамической системы в положении равновесия можно определить, линеаризуя эту систему в окрестности точки равновесия. Если x^0 — точка равновесия, то, положив $\delta x = x - x^0$, получим

$$\frac{d}{dt}(x^0 + \delta x)_i = F_i(x^0 + \delta x) = F_i(x^0) + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + \mathcal{O}(2), \quad (19.6)$$

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = F_{ij} \delta x_j + \mathcal{O}(2).$$

Локальные динамические и структурные свойства устойчивости определяются собственными значениями матрицы устойчивости $F_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, вычисленной в критической точке x^0 .

Будем считать, что в двумерной динамической системе состоянием равновесия является начало координат. Тогда линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (19.7)$$

Действительную (2×2) -матрицу F очень удобно представить в виде спиновой матрицы Паули следующим образом:

$$F \begin{bmatrix} \lambda + r & s + \omega \\ s - \omega & \lambda - r \end{bmatrix}. \quad (19.8)$$

Собственные значения F равны

$$\lambda_{\pm} = \lambda \pm \sqrt{r^2 + s^2 - \omega^2}. \quad (19.9)$$

Для двумерных динамических систем имеет место однозначное соответствие между точками $(\lambda, \omega, r, s) \in \mathbb{R}^4$ и устойчивостью матриц F (19.8). Удобно ввести следующую запись: $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $(\omega, r, s) \in \mathbb{R}^3$.

Конус $r^2 + s^2 - \omega^2 = 0$ в \mathbb{R}^3 является сепаратрисой, разделяющей матрицы устойчивости F с действительными ($r^2 + s^2 - \omega^2 > 0$) и комплексными ($r^2 + s^2 - \omega^2 < 0$) собственными значениями.

Если собственные значения действительны и различны, данная динамическая система локально эквивалентна некоторой градиентной системе. В этом случае динамическая устойчивость изменяется только тогда, когда $\det F = \lambda^2 + \omega^2 - r^2 - s^2 = 0$. Поэтому для любой точки $(\omega, r, s) \in \mathbb{R}^3$, лежащей вне конуса $r^2 + s^2 - \omega^2 = 0$, прямая \mathbb{R}^1 разбивается на три открытые обла-

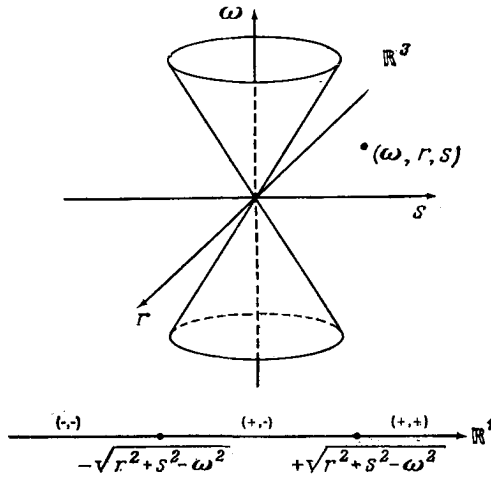


Рис. 19.3. Когда точка (ω, r, s) лежит вне конуса, оба собственных значения матрицы устойчивости действительны и динамическая система локально эквивалентна градиентной. Инерция этой системы зависит от λ и $(r^2 + s^2 - \omega^2)^{1/2}$.

сти, характеризующие системы градиентного типа с собственными значениями $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, -)$ (рис. 19.3) и с критическими точками — *неустойчивым узлом*, *седлом* и *устойчивым узлом* соответственно.

Точки, лежащие внутри конуса $r^2 + s^2 - \omega^2 = 0$, характеризуют динамические системы, локально не эквивалентные градиентным. Качественное поведение таких систем определяется знаками действительных и мнимых частей собственных значений

$$\lambda_{\pm} = \lambda \pm i\omega', \tag{19.10}$$

$$\omega' = \text{sign}(\omega) \sqrt{\omega^2 - r^2 - s^2}.$$

Применяя к системе уравнений (19.7) преобразование подобия, можно привести ее к виду

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega' \\ -\omega' & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{19.11}$$

Данная система уравнений динамически устойчива, если $\lambda < 0$, и неустойчива, если $\lambda > 0$. Движение происходит по часовой стрелке, если $\omega' > 0$ (т. е. $\omega > 0$), и против часовой стрелки, если $\omega < 0$. Эти четыре качественно различных типа поведения системы показаны на рис. 19.4. Критическая точка называется *устойчивым фокусом*, если $\lambda < 0$, и *неустойчивым фокусом*, если $\lambda > 0$.

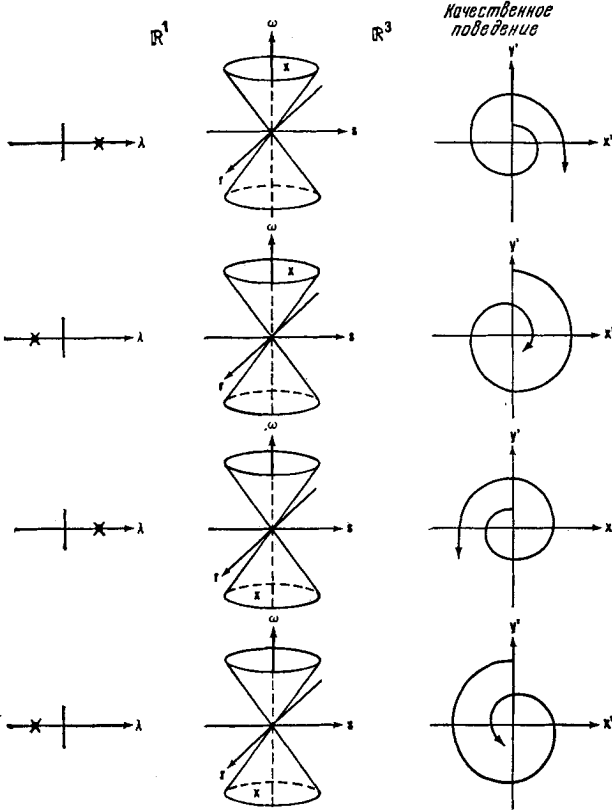


Рис. 19.4. Фокус в изолированной критической точке может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, $\lambda < 0$ или $\lambda > 0$.

Направление движения зависит от знака ω .

Пространство \mathbb{R}^4 , представляющее (2×2) -матрицы устойчивости F , разбивается на семь открытых областей, описывающих семь качественно различных типов динамического поведения системы. Эти открытые области структурно устойчивы и разделяются сепаратрисой, содержащей компоненты размерности 3, 2, 1, 0 и потому имеющей меру нуль. Три из них описывают динамически устойчивые системы.

3. ГЕОМЕТРИЯ МАТРИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. $n = 2$

В критической точке n -мерной динамической системы матрица устойчивости F_{ij} может быть представлена точкой прост-

ранства \mathbb{R}^n . Это пространство разделяется на ряд открытых областей, параметризующих системы с качественно различным изменением динамической устойчивости. Открытые области отделяются одна от другой сепаратрисой в \mathbb{R}^n с компонентами размерности $n^2 - 1, n^2 - 2, \dots, 1, 0$ и, следовательно, имеющей меру нуль. Сепаратриса параметризует структурно неустойчивые матрицы устойчивости. Структурная неустойчивость может возникать по двум причинам:

1. Два собственных значения или более $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ могут быть равными. Эту часть \mathcal{P}_a сепаратрисы можно найти аналитически из выражения

$$S_a \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j>i=1}^n (\lambda_j - \lambda_i) = 0. \quad (19.12a)$$

2. Действительная часть одного (или нескольких) собственного значения может быть равна нулю. Эту часть сепаратрисы \mathcal{P}_b можно найти аналитически из выражения

$$S_b \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_i) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda_i + \lambda_i^*)}{2} = 0. \quad (19.12b)$$

Структурно устойчивые открытые области в \mathbb{R}^n характеризуются условиями $S_a \neq 0, S_b \neq 0$. Для открытых областей, описывающих динамически устойчивые системы, имеют место неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19.13)$$

В точках на компонентах сепаратрисы \mathcal{P}_a , в которых $S_a = 0, S_b \neq 0$, не происходит никаких изменений динамической устойчивости. Эти точки из \mathbb{R}^n определяют структурно неустойчивые, но невырожденные динамические системы. В окрестности любой точки этой компоненты сепаратрисы имеются точки, описывающие изолированные критические точки качественно различных типов, но с одинаковой инерцией (рис. 18.1).

Изменения динамической устойчивости связаны с компонентами сепаратрисы \mathcal{P}_b , для которых $S_b = 0, S_a \neq 0$. Эти точки определяют в \mathbb{R}^n структурно неустойчивые вырожденные динамические системы. Вырожденность критических точек связана с ответвлением новых решений от старых, поэтому компоненты сепаратрисы, определяемые равенством $S_b = 0$ (19.12), называют *бифуркационным множеством* матрицы F_{ij} .

Свойства точек пространства \mathbb{R}^n , определенные алгебраическими условиями (19.12), перечислены в следующей таблице:

	$S_b \neq 0$	$S_b = 0$
$S_a \neq 0$	$\mathbb{R}^n - (\mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b)$: структурная устойчивость	\mathcal{P}_b : вырожденные критические точки, бифуркационное множество
$S_a = 0$	\mathcal{P}_a : изолированные критические точки; равные собственные значения; отсутствие бифуркаций	$\mathcal{P}_a \cap \mathcal{P}_b$: вырожденные критические точки с равными собственными значениями; наличие бифуркаций

◇◇◇ Компоненты \mathcal{P}_b бифуркационного множества динамических систем аналогичны компонентам градиентных систем. В обоих случаях точки бифуркационного множества описывают системы с вырожденными критическими точками. Компоненты \mathcal{P}_a для динамических систем — аналоги максвелловского множества, т. е. множества точек в пространстве управляющих параметров градиентных систем, описывающих структурно неустойчивые потенциальные функции, для которых критические значения в двух или более критических точках совпадают.

Эти общие замечания можно использовать для упрощения описания сепаратрисы в пространстве \mathbb{R}^4 матрицы устойчивости двумерных динамических систем. Множество \mathcal{P}_a , описывающее изолированные, структурно неустойчивые критические точки, определяется соотношениями

$$\begin{aligned} S_a = (\lambda_+ - \lambda_-) = 0 &\Rightarrow \omega^2 - r^2 - s^2 = 0, \\ S_b \neq 0 &\Rightarrow \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Точки из \mathcal{P}_a отвечают динамическим системам с двумя равными ненулевыми собственными значениями. Деформация таких систем приводит к динамической системе с различными действительными собственными значениями.

Бифуркационное множество \mathcal{P}_b определяется из (19.12). В случае действительных собственных значений ($r^2 + s^2 - \omega^2 > 0$) выражение (19.12б) сводится к

$$\lambda_+ \lambda_- = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = r^2 + s^2, \quad (19.15)$$

в случае комплексных собственных значений ($r^2 + s^2 - \omega^2 < 0$) выражение (19.12б) принимает вид

$$(\operatorname{Re} \lambda_+) (\operatorname{Re} \lambda_-) = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0. \quad (19.16)$$

Каждое из соотношений (19.14) — (19.16) содержит уравнение, связывающее четыре действительных параметра (λ, ω, r, s) . В результате в 1-параметрическом семействе двумерной динамической системы $F_{ij}(c)$ можно столкнуться с трехмерными компонентами сепаратрисы, определяемыми соотношениями (19.14)—(19.16) при структурно устойчивых вариациях управляющего параметра. Однако невозможно встретиться с двумерной компонентой $\mathcal{P}_a \cap \mathcal{P}_b$, определяемой равенством

$$\begin{aligned}\omega^2 &= r^2 + s^2, & \omega &\neq 0, \\ \lambda &= 0,\end{aligned}\tag{19.17}$$

изменяя параметр структурно устойчивым образом, если только $F_{ij}(c)$ не зависит от двух или более управляющих параметров.

В соответствии с «принципом лома» целесообразно исследовать деформации таких динамических систем, которые параметризуются точками на сепаратрисе, определяемой соотношениями (19.12). Перейдем к рассмотрению этой задачи.

Возмущения при равных ненулевых собственных значениях

Динамическая система с двумя равными ненулевыми собственными значениями структурно неустойчива по отношению к возмущениям. Двумерной динамической системе, обладающей этим свойством, отвечает точка конуса $\omega^2 - r^2 - s^2 = 0$, $\lambda \neq 0$. Наиболее общая деформация такой динамической системы, оставляющая на месте изолированные критические точки, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x) + \delta F_i(x) = F_{ij}x_j + \delta F_{ij}x_j + \mathcal{O}(2).\tag{19.18}$$

Собственные значения матрицы F_{ij} имеют ненулевые действительные части, поэтому при достаточно малых возмущениях δF аналогичным свойством будут обладать и собственные значения возмущенной матрицы устойчивости $(F + \delta F)_{ij}$. В результате локальные свойства возмущенной системы можно определить, изучая линеаризованную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = (F + \delta F)_{ij} x_j.\tag{19.19}$$

Для двумерной динамической системы, описываемой функцией вида (19.8), положим

$$\delta F = \begin{bmatrix} \delta\lambda + \delta r & \delta s + \delta\omega \\ \delta s - \delta\omega & \delta\lambda - \delta r \end{bmatrix}.\tag{19.20}$$

Разность «возмущенных» собственных значений равна

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = 2\sqrt{r'^2 + s'^2 - \omega'^2},\tag{19.21}$$

где $r' = r + \delta r$ и т. д. Эта разность есть действительная величина, если точка (ω', r', s') лежит вне конуса, и чисто мнимая, если точка лежит внутри конуса.

Предположим, что система уравнений (19.19) зависит от k управляющих параметров c . Тогда координаты (λ, ω, r, s) зависят от c . В случае $k=1$ кривая $(\lambda(c), \omega(c), r(c), s(c)) \in \mathbb{R}^4$ может пересечь конус $r^2 + s^2 - \omega^2 = 0$, $\omega \neq 0$, $\lambda \neq 0$ при структурно устойчивом изменении c . Эта кривая может проходить как снаружи конуса внутрь, так и наоборот, при этом собственные значения F в «процессе рассеяния» изменяются от пары различных действительных чисел к комплексно сопряженной паре (рис. 19.5).

Если $k \leq 3$, то путь в \mathbb{R}^4 не может проходить через вершину конуса и $\omega = 0$, $\lambda \neq 0$; если $k \geq 3$, то кривую, проходящую через вершину конуса, можно аппроксимировать отрезком прямой. Этот отрезок может либо проходить из конуса наружу, либо целиком лежать вне конуса, за исключением единственной точки пересечения в его вершине. В этом случае получаем «лобовые столкновения» собственных значений (рис. 19.6).

Когда мы имеем дело с градиентной, а не с динамической системой, $\omega = \delta\omega = 0$ и путь в подпространстве $\omega = 0$ пространства \mathbb{R}^4 может пройти через вершину конуса $r = s = 0$, $\lambda \neq 0$ при структурно устойчивой деформации, если $k \geq 2$. Тогда «лобовые столкновения» собственных значений происходят так, как показано на рис. 19.6, б.

Вместо «управляемых» путей в \mathbb{R}^4 рассмотрим возмущения (или деформации) δF , которые являются «изотропными» в том смысле, что функция распределения вероятностей для δF имеет вид

$$P(\delta\lambda, \delta\omega, \delta r, \delta s) = f(\delta\lambda, (\delta\omega)^2 + (\delta r)^2 + (\delta s)^2). \quad (19.22)$$

1. Для 1-параметрического семейства двумерной динамической системы возможно существование изолированных элементов с дважды вырожденными собственными значениями. Деформация такой системы, представимой точкой конуса $r^2 + s^2 - \omega^2 = 0$, $\omega \neq 0$, $\lambda \neq 0$, вызванная случайным возмущением δF с функцией распределения (19.22), приведет к динамической системе с различными действительными собственными значениями (с вероятностью $1/2$) и комплексно сопряженными собственными значениями (также с вероятностью $1/2$). Возмущения, оставляющие собственные значения равными, имеют меру нуль.

2. Два равных ненулевых собственных значения с $\omega = 0$ впервые встречаются в 3-параметрических семействах двумерных динамических систем. В этом случае деформация с функцией распределения вероятностей вида (19.22) приводит к динамической системе с комплексными собственными значениями

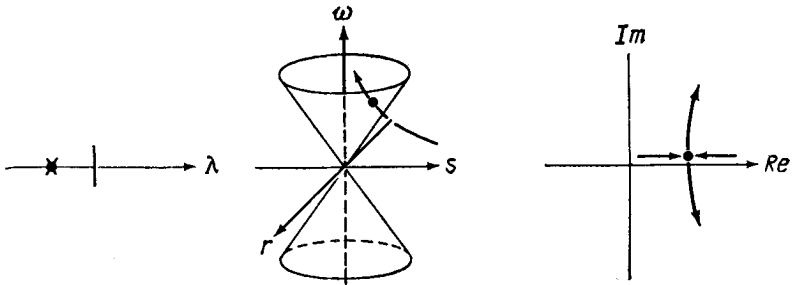


Рис. 19.5. Одномерная кривая пространства \mathbb{R}^4 может структурно устойчивым образом пересекать трехмерную поверхность $\omega^2 = r^2 + s^2$ в изолированных точках. При пересечении этой поверхности два собственных значения «отталкивают друг друга» под прямым углом.

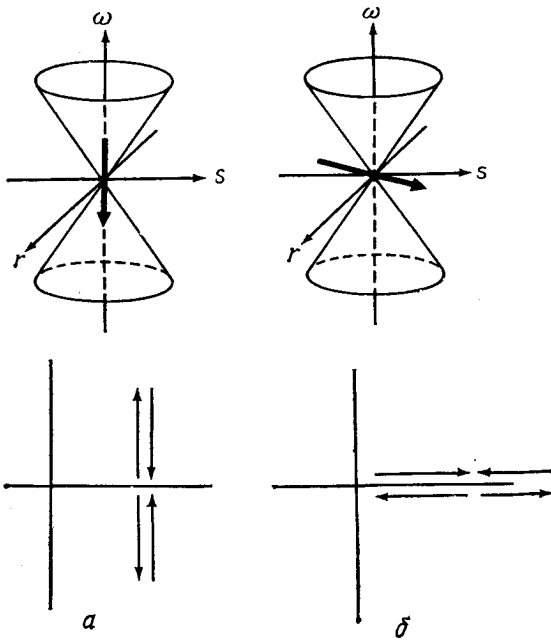


Рис. 19.6. При прохождении кривой управляющих параметров в пространстве через вершину конуса два собственных значения «отталкивают друг друга» как при «лобовом столкновении».

с вероятностью $(1 - \cos \pi/4) = 1 - 1/\sqrt{2}$ и различными действительными собственными значениями с вероятностью $1/\sqrt{2}$.

3. В случае градиентных систем вырожденность типа равенства собственных значений впервые встречается в 2-параметри-

ческих семействах. Деформации таких систем приводят к динамическим системам с различными действительными собственными значениями с вероятностью 1.

3.2. $n > 2$

В случае $n > 2$ для четкого визуального, геометрического представления свойств линейризованной матрицы устойчивости F_{ij} и для выяснения, каким образом различные подмножества из \mathbb{R}^{n^2} , параметризующие матрицу F_{ij} с различными типами вырожденности, соединяются друг с другом, требуются иные методы, чем в случае $n > 1$. Один из таких методов, родственньй «диаграммному» методу (гл. 7), излагается ниже. Этот метод может быть применен для определения числа существующих открытых связных подмножеств из \mathbb{R}^{n^2} , параметризующих структурно устойчивые линейризованные матрицы устойчивости. Кроме того, его можно использовать совместно с «методом стягивания» для определения спектра «присоединений» или «смежностей» открытых множеств, т. е. для выявления «близких» между собой открытых множеств («близкие» означает «имеющие общее пограничное множество»). Комбинация этих методов с методами, изложенными в гл. 14, оказывается полезной при определении структуры сепаратрисы в пространстве \mathbb{R}^{n^2} .

Отметим прежде всего, что, сколь бы ни было велико n , все n собственных значений действительной линейризованной $(n \times n)$ -матрицы устойчивости F можно расположить в комплексной плоскости $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$. Каждая точка пространства \mathbb{R}^{n^2} единственным образом определяет F_{ij} (и наоборот), и каждая F_{ij} единственным образом определяет распределение собственных значений на этой плоскости (но не наоборот). Предположим, что некоторая точка $p \in \mathbb{R}^{n^2}$ определяет $(n \times n)$ -матрицу $F_{ij}(p)$ и что $F_{ij}(p)$ имеет различные собственные значения, причем все с ненулевыми действительными частями. Тогда все точки, достаточно близкие к p , определяют $(n \times n)$ -матрицы $F_{ij}(p) + \delta F_{ij}$; все собственные значения этих матриц различны и имеют ненулевые действительные части (т. е. при такой деформации ни одно из собственных значений не пересекает ось мнимых чисел). По этой причине множество точек пространства \mathbb{R}^{n^2} , параметризующих матрицы F_{ij} , для которых (см. (19.12)) $S_a \neq 0$, $S_b \neq 0$, открыто и плотно в \mathbb{R}^{n^2} , а соответствующие матрицы структурно устойчивы и образуют плотное подмножество в множестве действительных $(n \times n)$ -матриц. Это открытое множество в \mathbb{R}^{n^2} есть $\mathbb{R}^{n^2} - (\mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b)$.

Между этими связными открытыми множествами в \mathbb{R}^{n^2} — $(\mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b)$ и качественно различными распределениями собственных значений $(n \times n)$ -матрицы в комплексной области имеется взаимно-однозначное соответствие при условии, что определенным образом учитываются направления движения вокруг каждого фокуса. Диаграммный метод определения геометрии системы в \mathbb{R}^{n^2} предусматривает перечисление всех возможных качественно различных распределений собственных значений действительной $(n \times n)$ -матрицы в комплексной области. Все собственные значения должны быть различными и иметь ненулевые действительные части; кроме того, предполагается, что каждому распределению соответствует одно связное открытое множество в \mathbb{R}^{n^2} и что объединение открытых множеств есть $\mathbb{R}^{n^2} - (\mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b)$; это множество плотно в \mathbb{R}^{n^2} .

Для иллюстрации диаграммного метода вернемся еще раз к случаю $n=2$ (пример 1) и проанализируем случай $n=3$ (пример 2).

Пример 1. Выяснить геометрические свойства (2×2) -матрицы устойчивости F_{ij} .

Решение. Под геометрией \mathbb{R}^{n^2} и геометрией матриц устойчивости мы понимаем одно и то же. Действительная (2×2) -матрица имеет два собственных значения, которые могут быть действительными или комплексно сопряженными. В первом случае собственные значения могут быть расположены следующим образом: оба слева от нуля, по разные стороны от нуля, оба справа от нуля. Во втором случае пара собственных значений может лежать либо в левой, либо в правой полуплоскости. Далее вращение вокруг фокуса может быть либо в положительном, либо в отрицательном направлении. Пять различных распределений собственных значений, дополненных информацией о направлении вращения, показаны на рис. 19.7. Каждой диаграмме соответствует некоторое открытое связное множество в \mathbb{R}^4 : всего имеется семь открытых связных множеств в \mathbb{R}^4 , и каждое из них параметризует линеаризованную динамическую систему с качественно отличным от других характером поведения.

Пример 2. Выяснить геометрические свойства матриц устойчивости размером 3×3 .

Решение. Все три собственных значения могут быть действительными, или одно из них действительное и пара комплексно сопряженных. Все качественно различные распределения собственных значений показаны на рис. 19.8, при этом для фокусов показана возможность существования двух различных направлений потока. Всего имеется $16 (= 4 + 2 \cdot 6)$ открытых связных множеств, из которых только пять параметризуют динамически устойчивые системы.

В комбинации с методом стягивания диаграммный метод может быть использован для определения того, какие множества являются соприкасающимися, а какие нет. Другими словами, два открытых множества соприкасаются, если они имеют общее распределение вырожденных собственных значений.

Пример 3. Определить, какие открытые множества в \mathbb{R}^9 , описывающие устойчивые системы, соприкасаются с открытым множеством, имеющим три действительных отрицательных собственных значения.

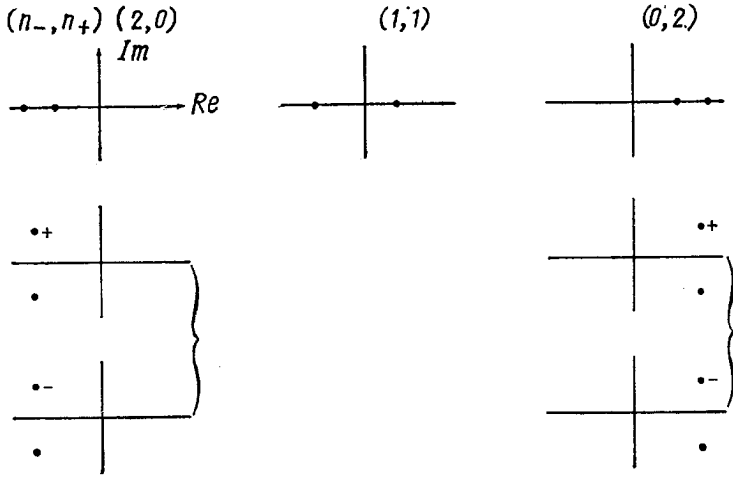


Рис. 19.7. Два действительных корня могут располагаться в двух полуплоскостях тремя разными способами.

Комплексно сопряженная пара может располагаться в одной из полуплоскостей. Такая пара описывает фокус с положительным или отрицательным направлением движения.

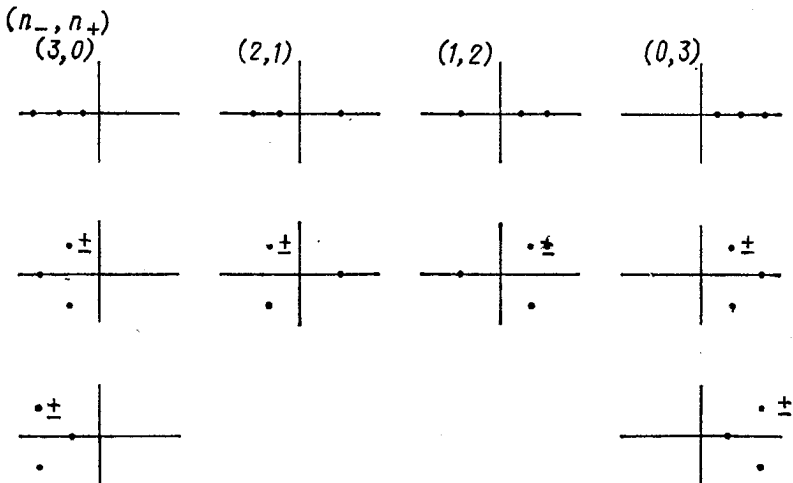


Рис. 19.8. Десять различных возможных расположений собственных значений действительной (3×3) -матрицы.

С учетом направлений движения вокруг фокусов для линеаризованной трехмерной динамической системы возможны 16 качественно различных типов поведения.

Решение. Граница открытого множества (рис. 19.9) определяется равенством $S_0 = 0$ (19.12а). Три различных собственных значения стягиваются к вырожденному случаю всеми возможными способами. Все другие открытые

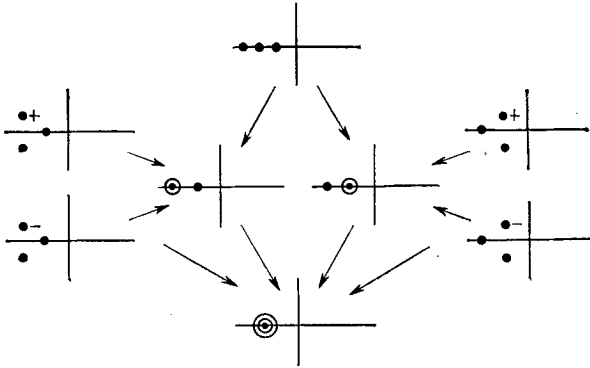


Рис. 19.9. Диаграммы, которые можно «ужать» до одной и той же вырожденной диаграммы, представляют смежные открытые области в пространстве \mathbb{R}^{n^2} . Все пять указанных устойчивых и качественно различных трехмерных систем смежные.

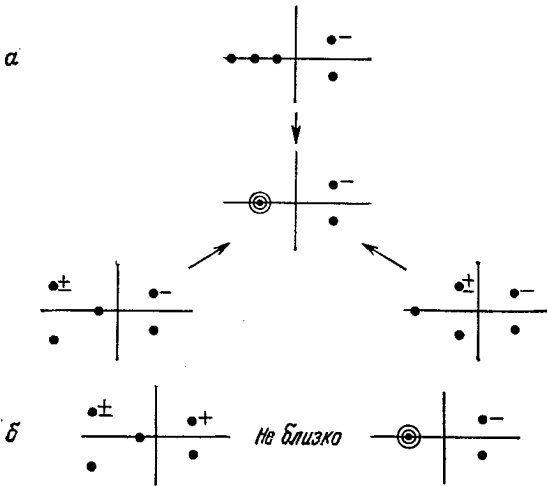


Рис. 19.10.

a — три структурно устойчивые системы соприкасаются между собой через общую компоненту сепаратрисы, параметризующую систему с трехкратно вырожденным отрицательным собственным значением; *b* — многие открытые множества не являются смежными с вырожденной диаграммой (показано одно из них).

множества с одинаковыми стягиваниями соприкасаются и имеют общую указанную компоненту сепаратрисы.

Пример 4. Для (5×5) -матрицы устойчивости указать открытые множества, соприкасающиеся по компоненте сепаратрисы, параметризующей матрицы с тремя вырожденными отрицательными собственными значениями и парой комплексно сопряженных собственных значений, лежащей в правой полу-плоскости.

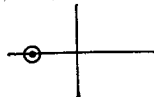

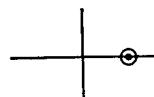
Вырожденная диаграмма	Жорданова форма	Размерность жордановой формы	Размерность компоненты сепаратрисы
	λ^2	1	3
	$\lambda\lambda$	3	1
	λ^2	1	3
	$\lambda\lambda$	3	1

Рис. 19.11. Размерности компонент сепаратрисы в пространстве \mathbb{R}^4 для (2×2) -матрицы устойчивости.

Компоненты с размерностями 0, 1, 2, 3 параметризуют системы с вырождением.

Решение. Требуемые пять открытых множеств изображены на рис. 19.10, где также показано открытое множество, не «близкое» к этой компоненте сепаратрисы.

Ясно, что диаграммы распределений собственных значений, соответствующих вырождению, описывают точки на сепаратрисе \mathcal{C}_a в \mathbb{R}^{n^2} , однако они характеризуют компоненты этой сепаратрисы не однозначно. Размерности различных компонент сепаратрисы определяются из жордановой канонической формы, связанной с вырожденной диаграммой, при этом используются методы, изложенные в гл. 14. Эта процедура иллюстрируется на следующих примерах.

Пример 5. Определить структуру сепаратрисы \mathcal{P}_a в пространстве, описываемом (2×2) -матрицы устойчивости.

Решение. Три открытых множества (рис. 19.11) с двумя корнями в отрицательной полуплоскости имеют единственную общую компоненту. Эта компонента параметризует (2×2) -матрицы с дважды вырожденным отрицательным собственным значением. Матрица устойчивости может иметь вид $\lambda\lambda$ (диагональная) или λ^2 (жорданова верхняя треугольная). Диагональная матрица может встретиться только в 3-параметрических семействах (табл. 14.1), поэтому соответствующая компонента сепаратрисы имеет размерность $1 (= 4 - 3)$. Верхняя треугольная матрица λ^2 может встретиться в однопараметрических семействах; она параметризуется $3 (= 4 - 1)$ -мерной компонентой сепаратрисы. В терминах параметризации (19.8) два собственных значения могут быть равны, только если $\omega^2 = r^2 + s^2$, т. е. соответствующая точка лежит на поверхности конуса в пространстве \mathbb{R}^3 . Если эта точка находится в вершине $\omega = 0 (\Rightarrow r = s = 0)$, то λ может быть любым, соответствующая матрица диагональна и данная компонента сепаратрисы имеет размерность 1. Если $\omega \neq 0$, то F_{ij} неприводима к диагональ-

ному виду. Четыре параметра (λ, ω, r, s) удовлетворяют одному ограничению, поэтому соответствующая компонента сепаратрисы трехмерна.

Аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, когда вырожденные собственные значения лежат в правой полуплоскости. Если вырождено начало, то появляется дополнительное ограничение вида $\lambda = 0$. В результате размерности компонент понижаются следующим образом:

$$\lambda^2: 3 \rightarrow 0^2: 2,$$

$$\lambda\lambda: 1 \rightarrow 00: 0.$$

Пример 6. Определить размерности компонент сепаратрисы \mathcal{P}_a , описывающих (3×3) -матрицы с тремя вырожденными отрицательными собственными значениями.

Решение. Соответствующими жордановыми формами могут быть λ^3 , $\lambda^2\lambda$, $\lambda\lambda\lambda$. Связанные с ними канонические формы Жордана — Арнольда имеют размерности 2, 4, 8 (табл. 14.1). Поэтому три компоненты сепаратрисы, параметризующие эту вырожденную диаграмму, имеют размерности: $9 - 2$, $9 - 4$ и $9 - 8$, т. е. 7, 5 и 1.

Пример 7. Определить размерности компонент сепаратрисы, параметризующих вырожденное распределение, показанное на рис. 19.10.

Решение. Соответствующая структура корней есть $(\lambda)^3 a \bar{a}$. Трижды вырожденный корень может иметь такую же каноническую жорданову форму, как в примере 6, поэтому размерности компонент сепаратрисы \mathcal{P}_a , параметризующих эту вырожденную диаграмму, равны $25 - 2 = 23$, $25 - 4 = 21$ и $25 - 8 = 17$.

4. ВОЗМУЩЕНИЯ СЕДЛО-УЗЛА

Бифуркационное множество (19.126) для двумерной динамической системы содержит компоненты, определяемые соотношениями (19.16) и (19.17). В первом случае оба собственных значения действительны и хотя бы одно из них равно нулю. Ограничимся случаем, когда только одно из них равно нулю. Поскольку собственные значения F различны, можно найти систему координат, в которой матрица устойчивости диагональна. Тогда с точностью до главных членов уравнения динамической системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 x + \mathcal{O}(2), \quad \lambda_1 \neq 0, \\ \frac{dy}{dt} &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \mathcal{O}(3). \end{aligned} \quad (19.23)$$

Пусть для определенности $\lambda_1 < 0$.

Эту систему можно исследовать методом фазового портрета. Прежде всего оставим только главные члены разложений в правых частях на том основании, что нас интересуют лишь локальные свойства. Вводя новый масштаб по оси y ($y \rightarrow y/C$, если $C \neq 0$), приведем (19.23) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 x, \\ \frac{dy}{dt} &= (y - m_1 x)(y - m_2 x), \end{aligned} \quad (19.24)$$

где коэффициенты m_i удовлетворяют уравнению

$$AC + 2Bm + m^2 = 0. \quad (19.25)$$

Если m_1 и m_2 действительны и не равны или образуют комплексно сопряженную пару, то состояние системы структурно устойчиво; если $m_1 = m_2$, то состояние системы структурно неустойчиво.

В каждом случае легко определить кривые $dx_i/dt = 0$ и соответствующие фазовые портреты. Когда m_1 и m_2 действительны и различны (рис. 19.12, а), получающийся фазовый портрет напоминает фазовые портреты седла и устойчивого узла (рис. 19.13) при исчезающе малом возмущении. Аналогичная ситуация имеет место при $m_1 = m_2$ (рис. 19.12, б). В случае комплексных собственных значений фазовый портрет по-прежнему напоминает портрет пары седло — узел при исчезающе малом возмущении, отличаясь лишь тем, что в данном случае отсутствует равновесие в начале координат.

Основываясь на материале, изложенном в гл. 4, можно ожидать, что деформация наиболее общего вида для каждого уравнения для dx_i/dt будет включать члены, порядок которых не превосходит порядка членов минимальной степени, удерживаемых в структурно неустойчивой системе. Таким образом, систему (19.23) можно было бы деформировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a + (\lambda_1 + \delta F_{11})x + \delta F_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= b + \delta F_{21}x + \delta F_{22}y + (A + \delta A)x^2 + \\ &+ 2(B + \delta B)xy + (C + \delta C)y^2, \end{aligned} \quad (19.26)$$

где a , b , δF_{ij} , δA , δB и δC достаточно малы. Ясно, что эта деформация слишком сложна и работать с ней неудобно, поэтому попытаемся ее несколько упростить.

1. Поскольку исходная (2×2) -матрица F_{ij} имела два различных собственных значения $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = 0$, собственные значения возмущенной матрицы $F_{ij} + \delta F_{ij}$ будут действительны и различны: $\lambda'_1 \simeq \lambda_1$ и λ'_2 — величина первого порядка малости.

2. Поскольку матрица $F_{ij} + \delta F_{ij}$ имеет различные собственные значения, то ее можно привести к диагональному виду с помощью линейного преобразования.

3. Это преобразование лишь незначительно изменяет коэффициенты $A + \delta A$, ... при квадратичных членах. Поэтому параметры m_1 и m_2 также мало меняются: $m_1 \rightarrow m'_1$, $m_2 \rightarrow m'_2$. В двух структурно устойчивых случаях ($m_1 \neq m_2$) это изменение несущественно.

4. При сдвиге начала координат можно избавиться от a , но не от b .

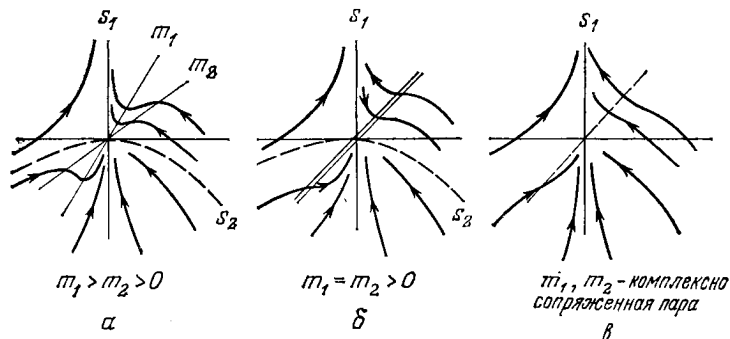
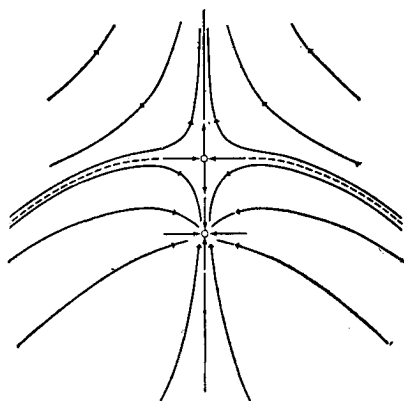


Рис. 19.12. Фазовый портрет динамической системы (19.25).

а — $m_1 > m_2 > 0$; б — $m_1 = m_2 > 0$; в — m_1, m_2 — комплексные числа, $\text{Re } m_1 > 0$. Во всех этих ситуациях предельный случай бесконечно удаленного поля напоминает фазовый портрет седло-узла; s_1, s_2 — сепаратрисы.

Рис. 19.13. Фазовый портрет седло-узла легко строится по известным фазовым портретам седла и узла.



В результате наиболее общая деформация для динамической системы (19.24) при $m_1 \neq m_2$ может быть представлена как

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 x, \\ \frac{dy}{dt} &= b + 2cy + (y - m_1 x)(y - m_2 x), \end{aligned} \tag{19.27}$$

где числа b и c малы и могут рассматриваться как управления для данной динамической системы. Критическими точками для деформированной системы являются

$$(x, y)_c: \quad \begin{aligned} &(0, y_1), \\ &(0, y_2), \end{aligned} \tag{19.28}$$

где ординаты критических точек удовлетворяют уравнению

$$y^2 + 2cy + b = 0. \tag{19.29}$$

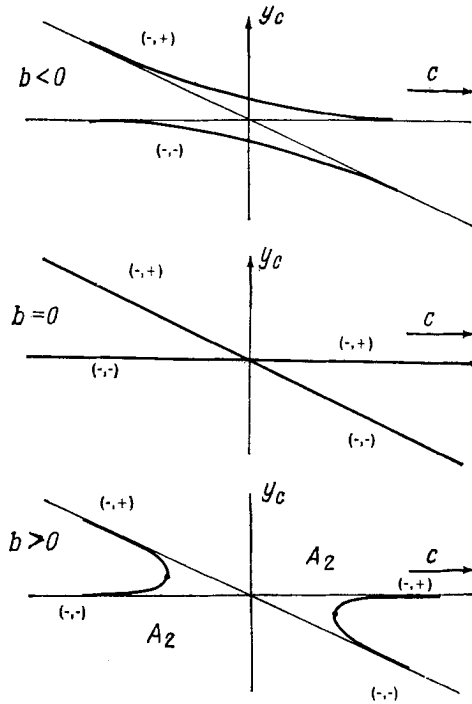


Рис. 19.14. Зависимость равновесных значений ординаты y от параметра c при трех значениях параметра b .

Эти параметры входят в универсальную деформацию (19.28) вырожденной динамической системы (19.25). Свойства устойчивости вдоль каждой ветви можно определить либо локальным линейным анализом устойчивости (например, (19.32)), либо анализом соответствующей равновесной поверхности, показанной на рис. 19.15.

На рис. 19.14 показаны траектории $y_c(c)$ для трех значений b ($b = 1, 0, -1$). С помощью стандартного анализа устойчивости можно выяснить свойства динамической устойчивости в каждой из изолированных критических точек. Проведем это для $b = 0$. В этом случае две критические точки имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} 1. & (x_1 = 0, \quad y_1 = 0), \\ 2. & (x_2 = 0, \quad y_2 = -2c). \end{aligned} \quad (19.30)$$

Линеаризованное уравнение движения в критической точке (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad \text{для } (x, y)_c = (0, 0). \quad (19.31)$$

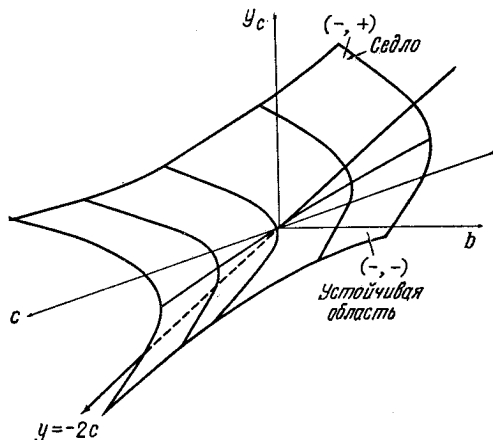


Рис. 19.15. Равновесные значения y для системы (19.28) описывают двумерную поверхность в пространстве $\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^2 = (y; b, c)$.

b, c — два управляющих параметра, входящих в универсальную деформацию (19.25). Точки над кривой складки соответствуют седлам, а под этой кривой — устойчивым узлам.

Эта критическая точка имеет сигнатуру $(-, -)$ при $c < 0$ и $(-, +)$ при $c > 0$, и, следовательно, она является устойчивым узлом при $c < 0$ и седлом при $c > 0$. Линеаризованные уравнения движения для другой критической точки имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2c(m_1 + m_2) & -2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \text{ для } (x, y)_c = (0, -2c). \quad (19.32)$$

Эта изолированная критическая точка является устойчивым узлом $(-, -)$ при $c > 0$ и седлом $(-, +)$ при $c < 0$. Ее сигнатуры показаны на рис. 19.14 ($b = 0$). Из рис. 19.14 следует, что если $b = 0$, то при прохождении c через нуль имеет место обмен устойчивостью между этими двумя критическими точками в тот момент, когда они «проходят одно сквозь другое».

Аналогично можно определить свойства динамической устойчивости изолированных критических точек в случаях $b < 0$ и $b > 0$. Однако в этом нет необходимости, поскольку достаточно понять, что указанные три множества кривых, показанные на рис. 19.14, представляют собой сечения ($b = \text{const}$) двумерной поверхности (19.29), изображенной на рис. 19.15. В точках с вертикальной касательной на этой поверхности происходит обмен устойчивостью между критическими точками. Поэтому достаточно определить тип устойчивости хотя бы одной точки на верхнем или нижнем листах этой сложной поверхности. Последнее уже было выполнено в (19.31) и (19.32). Следовательно, все критические точки $(x_c, y_c) = (0, y_c)$ при y_c , лежащем на нижнем

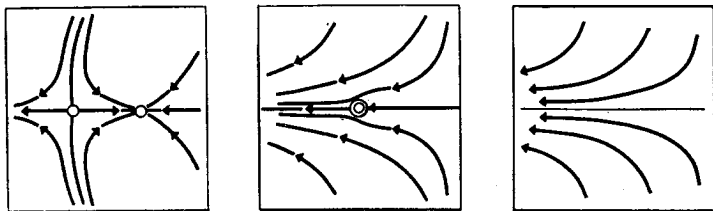


Рис 19.16. Морсификация дважды вырожденной критической точки динамической системы (в центре) может привести либо к двум изолированным критическим точкам (слева), либо к исчезновению всех критических точек (справа).

Эта система аналогична катастрофе складки для градиентных систем.

листе, являются устойчивыми узлами, а при u_c , лежащем на верхнем листе, — седлами.

◇◇◇ Рис. 19.14 можно «интерпретировать» в терминах фейнмановской диаграммы рассеяния частиц:

— при $b < 0$ происходит «мягкое» соударение двух «частиц» во «времени» c . Частицами являются критические точки, а соударение мягкое, поскольку происходит под малым углом;

— при $b = 0$ имеет место «обмен зарядами», соответствующий обмену устойчивостью;

— при $b > 0$ происходит жесткое рассеяние, которое можно рассматривать как взаимное уничтожение пары частиц с последующим рождением новой пары.

В k -параметрическом семействе двумерной динамической системы вырожденная критическая точка типа седло — узел может встретиться при структурно устойчивом режиме, если $k \geq 1$. Морсификация такой дважды (т. е. кратности 2) вырожденной критической точки приводит к динамической системе, в которой либо нет критических точек, либо есть две изолированные критические точки вблизи начала координат (рис. 19.16). Такая морсификация аналогична катастрофе складки для градиентных систем. При $k \geq 2$ эту вырожденную критическую точку можно морсифицировать по пути в пространстве управляющих параметров $b - c$ при $b = 0$. Такой путь, приводящий к обмену устойчивостью, невозможно построить структурно устойчивым образом для динамических систем с $k < 2$.

5. БИФУРКАЦИЯ ХОПФА [1]

В окрестности бифуркационного множества в пространстве \mathbb{R}^4 , определяемого соотношением (19.17), уравнения движения в соответствующей системе координат можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\omega' \\ \omega' & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (19.33)$$

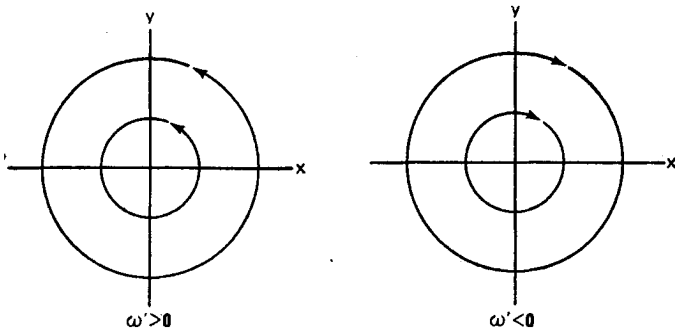


Рис. 19.17. Структурно неустойчивые портреты динамической системы с двумя чисто мнимыми собственными значениями.

На самом бифуркационном множестве $\lambda = 0$ и $\omega' \neq 0$, если число управляющих параметров не превышает единицу. Фазовый портрет для случая $\lambda = 0$ показан на рис. 19.17. Фазовые портреты таких структурно и динамически неустойчивых систем называются *центрами* или *вихрями*.

Деформации центров удобно рассматривать в полярной системе координат. Тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega'. \quad (19.34)$$

На бифуркационном множестве $\lambda = 0$, и при прохождении λ через нуль происходит изменение динамической устойчивости. Как и в предыдущем случае, можно ожидать, что изменение динамической устойчивости сопровождается появлением качественно новых типов решений. (И в этих ожиданиях мы не обманываемся.)

Как обычно, появление новых решений можно определить, анализируя деформацию вырожденной динамической системы. Для этого запишем:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= f_r(r, \theta) = \lambda r + \text{Члены более высокой степени,} \\ \frac{d\theta}{dt} &= f_\theta(r, \theta) = \omega' + \text{Члены более высокой степени.} \end{aligned} \quad (19.35)$$

На бифуркационном множестве первые члены разложения $f_\theta(r, \theta)$ в ряд Тейлора отличны от нуля; поэтому можно ожидать, что члены более высокой степени несущественны, и ими можно пренебречь.

В первом приближении можно ограничиться только деформациями, инвариантными относительно вращения:

$$f_r(r, \theta) = \tilde{f}_r(r). \quad (19.36)$$

Отметим, что в действительности вблизи начала координат всегда можно выбрать такую координатную систему (r, θ) , в которой любая гладкая деформация будет иметь такой вид. Далее, радиальная функция $f_r(r)$ может включать только члены с нечетными степенями r , поскольку из инвариантности относительно вращения следует, что замена $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$ дает $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$, $\dot{y} \rightarrow -\dot{y}$. Эта симметрия нарушается, если $f_r(r)$ содержит члены с четными степенями r .

Таким образом, достаточно общая деформация динамической системы (19.34) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \lambda r + Ar^3 + Br^5 + \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega'. \end{aligned} \quad (19.37)$$

Рассмотрим сначала 1-параметрические семейства динамических систем, в которых действительная часть собственного значения проходит через нуль с ненулевой скоростью: $\partial \lambda(c) / \partial c \neq 0$ при $\lambda(c) = 0$. В этом случае в силу теоремы о неявной функции λ можно выбрать в качестве управляющего параметра. При $\lambda = 0$ A , вообще говоря, отлично от нуля (для 1-параметрического семейства), поэтому в ряде Тейлора (19.37) можно опустить члены после r^3 . Далее, вводя новый радиальный масштаб ($r \rightarrow |A|^{-1/2} r'$), получим следующий канонический вид деформированной системы:

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r \pm r^3, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega'. \quad (19.38)$$

В такой системе зависимость $\theta(t)$ тривиальна: $\theta(t) = \theta_0 + \omega' t$, и именно радиальное уравнение ответственно за появление качественно новых решений.

Рассмотрим теперь стационарные значения r для данной динамической системы в случае

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r - r^3. \quad (19.39 \text{ —})$$

Очевидно, что $r = 0$ всегда является стационарным значением. Это есть точка притяжения (устойчивая) при $\lambda < 0$ и точка отталкивания (неустойчивая) при $\lambda > 0$. При $\lambda < 0$ других стационарных точек нет. При $\lambda > 0$ имеется *устойчивый предельный цикл* с радиусом $r = \sqrt{\lambda}$. В тот момент, когда действительная часть собственных значений λ_{\pm} , возрастая, проходит через нуль, устойчивый фокус вначале теряет устойчивость и становится неустойчивым, выпуская устойчивую круговую притягивающую орбиту, радиус которой возрастает по каноническому закону $\sqrt{\lambda}$. Это явление называют *суперкритической би-*

бифуркацией Хопфа. Фазовый портрет такой бифуркации показан на рис. 19.18.

Для динамической системы в случае

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r + r^3 \quad (19.39 +)$$

точка $r = 0$ всегда является равновесной. Опять-таки она устойчива при $\lambda < 0$ и неустойчива при $\lambda > 0$. При $\lambda < 0$ имеется неустойчивый предельный цикл с радиусом $r = \sqrt{-\lambda}$. Если λ подходит к нулю снизу, отталкивающее множество наползает вниз на устойчивый фокус в начале координат и, наконец, полностью «вытесняет» его при $\lambda = 0$. Это явление называется *субкритической бифуркацией Хопфа*. Фазовый портрет этой бифуркации показан на рис. 19.19.

◇◇◇ Динамическую систему (19.35) невозможно получить из вариационного принципа для какого-либо функционала, поскольку $F \neq 0$. Если, однако, пренебречь тривиальной постоянной зависимостью $\theta(t)$, то одномерное радиальное уравнение можно записать в виде градиентного уравнения

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dr} V(r; \lambda),$$

$$V(r; \lambda) = -\frac{1}{2} \lambda r^2 \mp \frac{1}{4} r^4 \left(\begin{array}{l} \text{суб} \\ \text{супер} \end{array} \right) \text{ критическая.} \quad (19.40)$$

В этом смысле бифуркации Хопфа эквивалентны симметризованным ($A_{\pm 3}$) фазовым переходам Гинзбурга — Ландау «в направлении r ».

Если двумерная динамическая система зависит от $k > 1$ управляющих параметров, то наиболее общая деформация в окрестности бифуркационного множества $\lambda = 0$, $\omega' \neq 0$ имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = \sum_{j=1}^k a_j r^{2j-1} \pm r^{2k+1},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega'. \quad (19.41)$$

Очевидно, что радиальное уравнение связано с симметрической катастрофой $A_{\pm(2k+1)}$.

◇◇◇ Часть $\mathcal{P}_a \in \mathbb{R}^{n^2}$ сепаратрисы F_{ij} имеет компоненты размерности $n^2 - 1$ и ниже. Поэтому изолированные элементы 1-параметрических семейств n -мерных динамических систем могут обладать двумя равными ненулевыми собственными значениями структурно устойчивым образом. Аналогично бифуркационное множество $\mathcal{P}_b \in \mathbb{R}^{n^2}$ имеет компоненты размерности $n^2 - 1$ и ниже. Поэтому изолированные элементы 1-параметрических

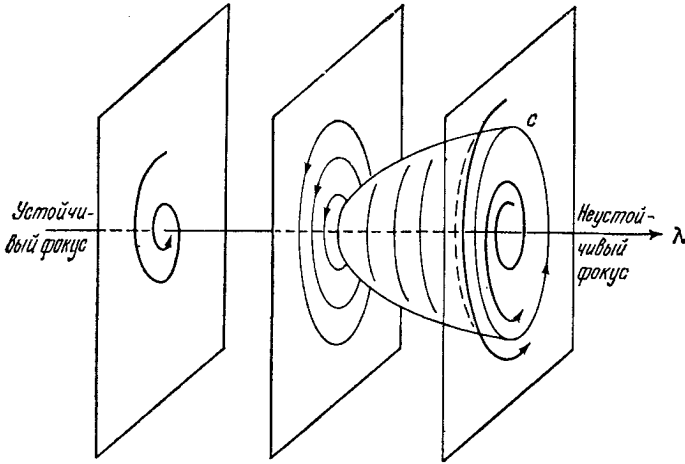


Рис. 19.18. Суперкритическая бифуркация Хопфа.

При $\lambda < 0$ начало координат есть устойчивый фокус, и спираль закручивается. С ростом λ спираль становится все ближе и ближе к окружности. При $\lambda = 0$ точка становится структурно неустойчивым центром. При дальнейшем увеличении λ начало координат становится неустойчивым фокусом, и спираль раскручивается. Однако в предельном случае бесконечно удаленного поля спираль по-прежнему закручивается к началу координат. Сепаратрисой устойчивых и неустойчивых фокусов является предельный цикл, который структурно и динамически устойчив.

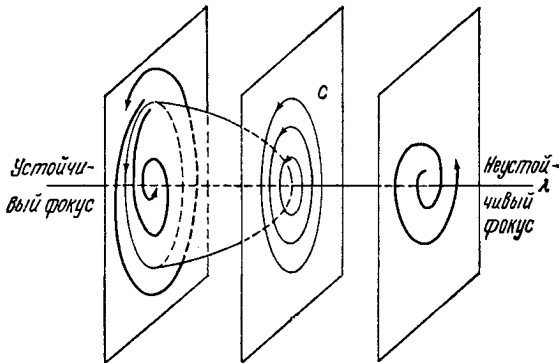


Рис. 19.19. Субкритическая бифуркация Хопфа.

При $\lambda < 0$ начало координат является устойчивым фокусом. В предельном случае бесконечно удаленного поля поведение динамической системы неустойчиво, и спираль раскручивается в бесконечность. Устойчивая область вокруг начала координат и неустойчивая область, содержащая «бесконечно удаленную точку», разделяются сепаратрисой — структурно устойчивым и динамически неустойчивым предельным циклом. При возрастании λ предельный цикл «оседает» на точку притяжения в начале координат и, наконец, уничтожает ее при $\lambda = 0$. Начало координат при этом переходит в структурно неустойчивый центр, а при $\lambda > 0$ — в точку отталкивания (неустойчивый фокус).

семейств n -мерных динамических систем могут обладать вырожденными критическими точками типа «седло — узел» или типа «центр» структурно устойчивым образом. Далее в n -мерной системе можно выбрать координатную систему $x_1 = x$, $x_2 = y$, x_3, \dots, x_n , такую, что в окрестности критической точки все интересные явления происходят в направлении $x - y$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{x}{y} \right] = (\text{см. разд. 4-6}),$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

6. ВЫВОДЫ

Автономные динамические системы сложнее градиентных динамических систем и потому имеют более сложную структуру. Они сводятся к градиентным в том случае, когда $(\text{rot } F)_{ij} = \partial F_j / \partial x_i - \partial F_i / \partial x_j = F_{ji} - F_{ij} = 0$. В критической точке динамическая система локально эквивалентна градиентной, если она имеет различные действительные собственные значения.

Для изучения автономных динамических систем пригодны многие положения и методы, разработанные для анализа градиентных систем. Критическими точками автономных динамических систем являются точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, в которых вынуждающая сила F равна нулю. В критических точках возможно вырождение. Вырождение связано с бифуркациями, и от него можно избавиться морсификацией. Для глобального описания двумерных динамических систем особенно удобным оказывается метод фазового портрета.

Динамические и структурные свойства устойчивости динамической системы определяются собственными значениями матрицы устойчивости F_{ij} в критической точке. Матрицы F_{ij} параметризуются точками пространства \mathbb{R}^{n^2} . Сепаратриса точек пространств \mathbb{R}^{n^2} , описывающих структурно неустойчивые системы, определяется из условия $S_a S_b = 0$, где S_a и S_b выражаются через собственные значения λ_i матрицы F_{ij} (19.12). Компоненты сепаратрисы, определяемые из условий $S_a = 0$, $S_b \neq 0$, описывают структурно неустойчивые системы с изолированными критическими точками, а компоненты сепаратрисы, определяемые условием $S_b = 0$, описывают вырожденные критические точки и определяют бифуркационное множество. Были рассмотрены трехмерные компоненты сепаратрисы в \mathbb{R}^4 для двумерных динамических систем, а также n -мерный случай.

Был проведен анализ возмущения вокруг компонент сепаратрисы, определяемых условиями $S_a = 0$, $S_b \neq 0$. Такие воз-

мушения качественно влияют на свойства критической точки, но при этом число критических точек остается прежним.

Трехмерные компоненты бифуркационного множества в \mathbb{R}^4 описывают вырожденные критические точки двух различных типов; изучались дважды вырожденная критическая точка типа «седло — узел» и ее деформации.

Мы встретились с новым типом динамически неустойчивого поведения — вихрем, или центром. Возмущения центров приводят к описаниям суб- и суперкритических бифуркаций Хопфа. Бифуркации Хопфа в двумерных динамических системах с одним или более управляющими параметрами тесно связаны с симметрическими катастрофами типа $A_{\pm(2k+1)}$.

В 1-параметрических семействах двумерных динамических систем структурно устойчивым образом могут встретиться только седло-узлы и точки бифуркации Хопфа.

Общую программу исследования свойств автономных динамических систем в духе представлений и методов элементарной теории катастроф можно сформулировать следующим образом:

— определить бифуркационное множество в \mathbb{R}^n , связанное с матрицей устойчивости F_{ij} (19.126);

— построить наиболее общую деформацию для динамических систем, описываемых точками каждой компоненты определенного бифуркационного множества;

— определить геометрические свойства каждой построенной деформации.

Эта программа выходит за рамки настоящей книги.

◇◇◇ Английский перевод статьи [1] можно найти в работе [2]. Качественная топологическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений изложена в работе [3].

Литература

1. Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären eines Differentialsystems, *Ber. Math.-Phys. Kl. der Säch. Akad. der Wiss. zu Leipzig*, **94** (19 Januar 1942).
2. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications, New York: Springer, 1976. [Имеется перевод: Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К КАТАСТРОФАМ

В настоящей главе проводится более глубокое изучение автономных динамических систем с целью выявления набора «неприводимых потоков», которые могут возникнуть в n -мерной динамической системе. Если все такие потоки установлены, то, помещая их в разные области пространства фазовых координат, можно моделировать поведение n -мерной динамической системы. Такой прием аналогичен размещению морсовских седел M_i^n в разных точках в пространстве \mathbb{R}^n для описания произвольной n -мерной морсовской функции.

Приводятся методы описания и построения динамических потоков и инвариантных поверхностей и анализируется построение двумерных потоков и предельных циклов из одномерных потоков, а также двумерных потоков — предельных циклов и трехмерных потоков и инвариантных поверхностей из двумерных структур. Простые комбинации некоторых из строительных блоков подобного типа позволяют составить описание поведения странных динамических систем. Так, поток, впервые подробно изученный Лоренцем, может быть применен для анализа нелинейных систем в гидродинамике и электродинамике.

Вводится теорема о центральном многообразии, представляющая собой аналог леммы Тома о расщеплении (2.3) для динамической системы. В теории динамических систем она позволяет ввести существенные упрощения; в частности, благодаря этой теореме перечисление неприводимых потоков превращается просто в полезное упражнение.

В заключение анализируется картина Рюэля — Тейкенса возникновения турбулентности в нелинейных системах общего типа. Эта картина основана на теореме о центральном многообразии, наборе инвариантных потоков, бифуркации Хопфа, а также на идеях, связанных с наличием или потерей динамической и структурной устойчивости.

1. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ. 1

Одномерная динамическая система $\dot{x} = f(x)$, не зависящая от параметров управления, как правило, имеет только изолированные критические точки, в которых $f(x) = 0$. Кроме того, в этих точках обычно $f'(x) \neq 0$. Таким образом, одномерная динамическая система содержит критические точки (центры) двух видов — притягивающие и отталкивающие:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k \neq 0. \quad (20.1)$$

Для притягивающего центра $k < 0$, для отталкивающего $k > 0$ (рис. 20.1).



Рис. 20.1. В одномерной динамической системе изолированная критическая точка может быть либо притягивающей (M_0^1), либо отталкивающей (M_1^1).

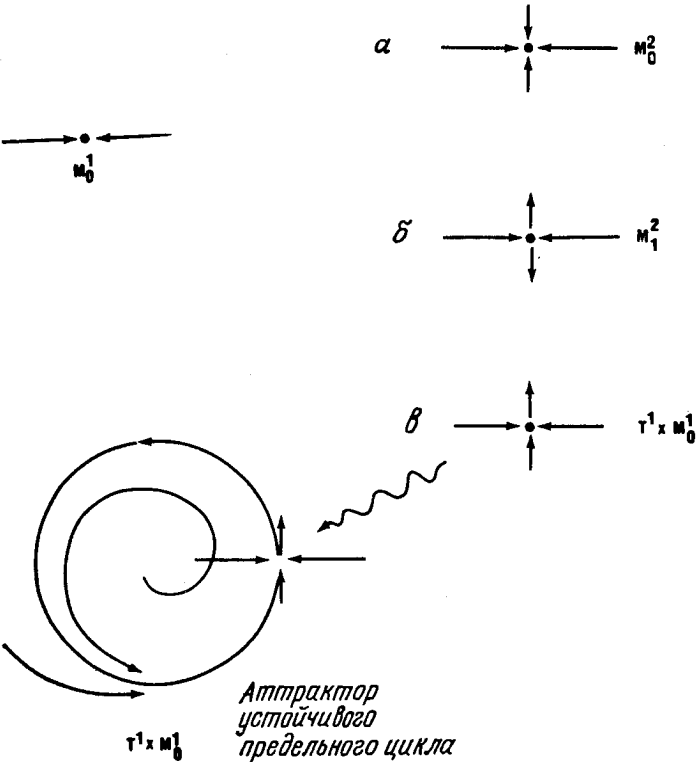


Рис. 20.2.

В случае устойчивого одномерного аттрактора ($V \approx +x^2$) добавление составляющей потока в направлении y в форме $(+y^2, -y^2, y)$ приводит к возникновению критических точек типа M_0^2 и M_1^2 , а также критического потока типа $T^1 \times M_0^1$ после того, как поток замкнется на себя.

В связи с этим возникает вопрос: какого типа критические точки можно ожидать в двумерных динамических системах и каково будет их критическое поведение? Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем за основу критические точки для одномерной динамической системы. Для этого (рис. 20.2) выберем морсовское нулевое седло $+x^2$ в \mathbb{R}^1 ($f = -\nabla V$) (рис. 20.2) и «сложим» его либо с морсовским нулевым седлом $+y^2$, либо с морсовским 1-седлом $-y^2$. Получающаяся в результате изолированная кри-

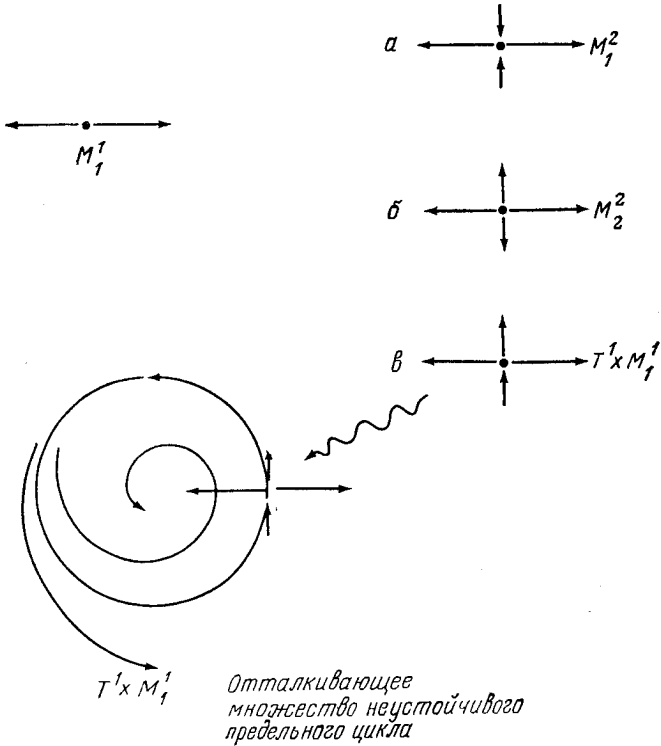


Рис. 20.3.

В случае неустойчивой одномерной критической точки ($V \approx -x^2$) добавление составляющей потока в направлении y в форме $(+y^2, -y^2, y)$ приводит к возникновению критических точек типа M_1^2 и M_2^2 , а также критического потока типа $T^1 \times M_1^1$ после того, как поток замкнется на себя.

Критическая точка представляет собой морсовское нулевое седло M_0^2 или морсовское 1-седло M_1^2 (рис. 20.2, а, б). Вместе с тем поток можно наложить так, как показано на рис. 20.2, в. В этом случае критическая точка уже не будет изолированной. Однако если замкнуть поток на себя (рис. 20.2, в), то соответствующее критическое поведение будет отвечать случаю устойчивого «кругового» движения. Такая критическая траектория (уже не точка!) называется *устойчивым предельным циклом* и обозначается как $T^1 \times M_0^1$.

Следуя вышеописанному пути, можно построить двумерные критические точки и потоки, исходя из неустойчивой критической точки M_1^1 . Складывая устойчивый член $(+y^2)$, неустойчивый член $(-y^2)$ и ненулевой поток $(\sim y)$, получаем морсовское

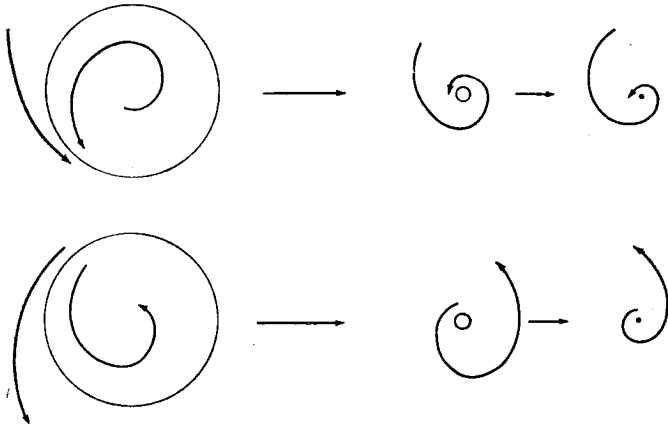


Рис. 20.4.

При стягивании радиуса устойчивого или неустойчивого предельного цикла расположенный внутри фокус (неустойчивый или устойчивый) прекращает свое существование. Поток при $r \rightarrow 0$ соответствует устойчивому или неустойчивому фокусу.

1-седло M_1^2 (рис. 20.3,а), морсовское 2-седло M_2^2 (рис. 20.3,б) и неустойчивый предельный цикл $T^1 \times M_1^1$ (рис. 20.3, в).

Однако данный метод «зашнуровывания» не позволяет проследить все структурно устойчивые типы критического поведения, которые могут существовать в случае двумерной динамической системы, поскольку были пропущены фокусы. Один из возможных методов, позволяющих установить присутствие фокусов среди структурно устойчивых типов критических точек, состоит в том, чтобы устремить радиус предельного цикла к нулю (рис. 20.4). В пределе при $r \rightarrow 0$ поток вокруг устойчивого предельного цикла $T^1 \times M_0^1$ напоминает поток в случае устойчивого фокуса F_-^2 ; вокруг неустойчивого предельного цикла $T^1 \times M_1^1$ он напоминает поток в случае неустойчивого фокуса F_+^2 . Такой метод сжимания цикла эквивалентен бифуркации Хопфа.

Изолированные морсовские седла M_0^2, M_1^2, M_2^2 , фокусы F_-^2, F_+^2 и предельные циклы $T^1 \times M_0^1, T^1 \times M_1^1$ являются единственно возможными типами структурно устойчивого критического поведения двумерных динамических систем.

◆◆◆ Фокусы F_\pm^2 первоначально были пропущены по следующей причине. Мы начали с критических точек в одном измерении при ненулевом собственном значении. Налагая поток во втором измерении, мы ввели форму $\dot{y} = \text{const}$ или $\dot{y} = ky$, где k — ненулевая постоянная. Для определения комплексно сопряженных собственных значений необходимо было бы увеличить размерность новых потоков на два, а не на единицу.

1.1. Осциллятор Ван-дер-Поля

Бифуркация Хопфа

Некоторые из описанных типовых особенностей критического поведения автономных динамических систем присущи простому гармоническому осциллятору. Такой осциллятор

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (20.2)$$

и его возмущения можно рассматривать как своеобразную «проблему атома водорода» в теории динамических задач (т. е. проблему, достаточно простую для решения и вместе с тем достаточно сложную, чтобы использовать результат). Уравнение гармонического осциллятора (20.2) можно записать в стандартной, характерной для динамической системы форме в виде двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p & (m = 1), \\ \frac{dp}{dt} &= -x & (k = 1). \end{aligned} \quad (20.3)$$

Решения системы (20.3) имеют вид $x = R \sin(\omega t + \phi)$, $p = R \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \sqrt{k/m}$. Поскольку эти траектории соответствуют вихрю (рис. 19.17), система (20.3) структурно неустойчива.

◇◇◇ Уравнения гармонического осциллятора (20.3) можно получить из гамильтониана. Любой не зависящий от времени гамильтониан консервативен и структурно неустойчив по отношению к возмущениям диссипативного типа. Поэтому в классической механике использование соображений о структурной устойчивости возможно лишь после весьма осторожного отбора класса систем и типа возмущений, подлежащих анализу.

Структурно устойчивое линейное возмущение гармонического осциллятора (20.2) есть не что иное, как гармонический осциллятор с затуханием:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = 0. \quad (20.4a)$$

Это уравнение может быть записано в стандартной, характерной для динамической системы форме ($p \rightarrow y$):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - \gamma x, \\ \frac{dy}{dt} &= -x. \end{aligned} \quad (20.4b)$$

Уравнение (20.4) имеет решения вида $x \sim e^{\lambda t}$, причем собственное значение λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + 1 = 0. \quad (20.5)$$

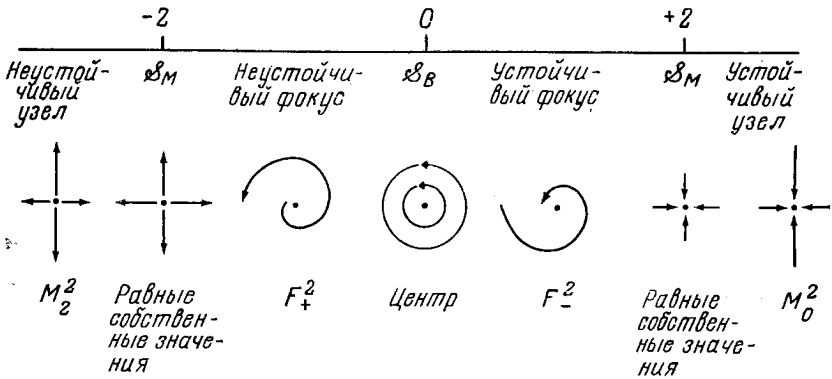


Рис. 20.5.

Пространство управляющих параметров в случае гармонического осциллятора с затуханием (20.4) делится на четыре открытые области тремя точками, две из которых ($\gamma = \pm 2$) принадлежат максвелловскому \mathcal{S}_M и одна — бифуркационному \mathcal{S}_B множеству. Эти четыре открытые области параметризуют структурно устойчивые гармонические осцилляторы.

Если рассматривать γ как управляющий параметр, то одномерное пространство \mathbb{R}^1 управляющих параметров будет разделено на четыре непересекающиеся открытые области, в которых структурно устойчивое поведение системы представлено двумя точками $\gamma = \pm 2$ в максвелловском множестве \mathcal{S}_M и точкой $\gamma = 0$ в множестве бифуркаций \mathcal{S}_B . Такое разделение наряду с примерами структурно устойчивого и структурно неустойчивого динамического поведения показано на рис. 20.5.

Гармонический осциллятор (20.2) обладает также рядом физически интересных нелинейных возмущений, которые структурно устойчивы. Один класс таких возмущений имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma f(x)\dot{x} + x = 0 \quad (20.6a)$$

или

$$\dot{x} = y - \gamma F(x), \quad \dot{y} = -x. \quad (20.6b)$$

Введем следующие допущения:

1. $(d/dt)F(x) = f(x)\dot{x}$;
2. $f(-x) = +f(x)$ и $F(-x) = -F(x)$;
3. Функции $f(x)$ и $F(x)$ гладкие и дифференцируемые;
4. Функция $f(x)$ конечна на конечном интервале оси x ;
5. $\gamma \geq 0$.

Постоянная γ определяет интенсивность демпфирования. Осциллятор Ван-дер-Поля можно получить, полагая $F(x) = x^3 + ax$; $f(x) = 3x^2 + a$ (20.6). Это структурно устойчивое возмущение гармонического осциллятора можно исследовать методами теории катастроф, при условии что величина γ либо очень мала, либо очень велика.

Заметим, что $F(0) = 0$ в силу допущений 2 и 3. Следовательно, $(x, y) = (0, 0)$ является решением системы (20.6б) при всех значениях γ . Свойства устойчивости этого решения определяются величиной $\gamma f(0)$, как показано на рис. 20.5. Если f зависит от одного или нескольких управляющих параметров, то при $\gamma f(0; a_1, \dots) = \pm 2$ соответствующая система описывается точкой множества Максвелла \mathcal{P}_M , а при $\gamma f(0; a_1, \dots) = 0$ локальное равновесие при $(x, y) = (0, 0)$ является центром. Таким образом, следует ожидать наличия бифуркации Хопфа, связанной с этим структурно неустойчивым поведением. Определим в явной форме поведение, соответствующее предельному циклу при малых γ , и бифуркацию Хопфа в случае $\dot{f}(x) = 3x^2 + a$.

Свойства динамической системы (20.6б) можно установить при помощи метода фазовых портретов (гл. 19). Нас особенно будет интересовать определение аттракторов (20.6), роль которых могут выполнять изолированные точки или замкнутые устойчивые периодические траектории $T^1 \times M_0^1$. Уравнение (20.6) имеет лишь одну изолированную критическую точку, а именно $(x, y) = (0, 0)$. Если эта точка представляет собой устойчивый фокус, окруженный предельным циклом, то последний должен быть неустойчивым. Аналогично, если имеется устойчивый предельный цикл, то заключенный в нем фокус неустойчив (рис. 20.4). Форма устойчивого предельного цикла может быть определена интегрированием уравнений динамической системы (20.6) по возрастающему времени с использованием начальных условий $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Форма неустойчивого предельного цикла может быть найдена интегрированием по убывающему времени, начиная от критической точки. Как только будет установлен контур предельного цикла, можно при помощи контурных интегралов определить период движения

$$T = \oint dt = \oint - \frac{dy}{x} = \oint \frac{dx}{y - \gamma F(x)}. \quad (20.7)$$

Исключая dt из (20.6б), получаем

$$x dx + y dy - \gamma F(x) dy = 0. \quad (20.8)$$

Поскольку $x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$, интеграл по замкнутому контуру от выражения (20.8) приводит к условию

$$\oint F(x) dy = 0. \quad (20.9)$$

(Это условие будем использовать для определения канонической зависимости радиуса предельного цикла по бифуркации Хопфа.)

Рассмотрим случай $|\gamma f(0; a)| \ll 1$. Фокус в точке $(x, y) = (0, 0)$ устойчив, если $\gamma f(0; a) > 0$, и неустойчив, если $\gamma f(0; a) < 0$. В связи с тем что траектории вокруг фокуса мед-

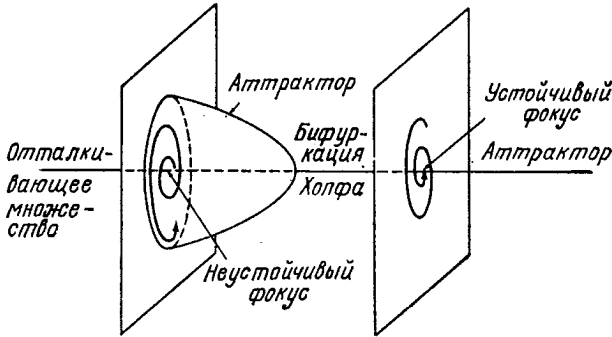


Рис. 20.6. Субкритическая бифуркация Хопфа приводит к устойчивому фокусу.

Период предельного цикла фиксирован, а его радиус зависит от параметрического расстояния от точки бифуркации Хопфа по каноническому закону квадратного корня.

ленно закручиваются или раскручиваются, если величина $\gamma f(0, a)$ мала, значения $x(t)$, $y(t)$ в течение времени одного оборота приближенно определяются зависимостями $x \simeq R \sin \omega t$, $y \simeq R \cos \omega t$ ($\omega = 1$). Чтобы найти радиус R предельного цикла, по форме близкого к окружности (когда этот предельный цикл существует), используем усеченное соотношение $f(x; a) = a + 3x^2 + \mathcal{O}(4)$. Тогда

$$x \simeq R \sin \theta,$$

$$y \simeq R \cos \theta,$$

$$F(x; a) = x^3 + ax,$$

$$\oint [R^3 \sin^3 \theta + aR \sin \theta] (-R \sin \theta) d\theta = -\pi R^2 \left(\frac{3}{4} R^2 + a \right) = 0. \quad (20.10)$$

При $a \neq 0$ имеется изолированная критическая точка, соответствующая значению $R = 0$, которая устойчива, если $a > 0$, и неустойчива, если $a < 0$. В случае $a > 0$ другие близкие решения отсутствуют, а при $a < 0$ имеется устойчивый предельный цикл радиуса

$$R = \sqrt{\frac{-4a}{3}}. \quad (20.11)$$

Эта докритическая бифуркация Хопфа показана на рис. 20.6 [1]. Период данного предельного цикла определяется соотношением (20.7) и равен

$$T = \oint - \frac{d(R \cos \theta)}{R \sin \theta} = + 2\pi; \quad (20.12)$$

положительный знак указывает на закручивание против часовой стрелки; период связан с выбором $\omega = \sqrt{k/m} = 1$.

Релаксационные колебания

Большим значениям γ (20.6) обычно соответствуют большие значения y . Чтобы избежать неудобств, связанных с проведением операций над большими величинами, введем новую переменную фазового пространства согласно соотношениям

$$y = \gamma z, \quad \gamma^{-1} \ll 1. \quad (20.13)$$

Тогда уравнения динамической системы принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = \gamma(z - F(x)), \quad (20.14a)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma^{-1}x. \quad (20.14b)$$

Исключая t , можно записать уравнение интегральных кривых системы (20.14) в следующей форме:

$$(z - F(x)) \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{\gamma^2} (\simeq 0). \quad (20.15)$$

При больших значениях γ имеем либо

$$\frac{dz}{dx} \simeq 0, \quad \text{либо} \\ z - F(x) \simeq 0. \quad (20.16)$$

Движение динамической системы в плоскости (x, z) показано на рис. 20.7 при $F(x) = x^3 + ax$ и $a < 0$. Два внешних отрезка S-образной кривой — аттракторы, в чем можно убедиться путем анализа устойчивости в линейном приближении. Средний участок этой кривой, заключенный между двумя вертикальными касательными, представляет собой отталкивающее множество. При $x > 0$ имеем $\dot{z} < 0$, а при $x < 0$ будет $\dot{z} > 0$. Если эволюция динамической системы начинается из точки A , система быстро приблизится к кривой $z = F(x)$ согласно уравнению (20.14a), поскольку значение γ велико. Состояние динамической системы будет представлено точкой на этой кривой в фазовом пространстве. Указанная точка медленно перемещается влево, потому что $\dot{z} = -\gamma^{-1}x$. Когда эта точка достигнет точки B , лежащей на пересечении с вертикальной касательной, произойдет быстрый скачок в точку C на нижней ветви, затем последует медленное движение вдоль кривой $z = F(x)$ до точки D и внезапный скачок в точку E [1].

При движении из других начальных точек A' и A'' система достигает притягивающей части поперечного сечения сборки $z = F(x)$ в результате быстрого перемещения (рис. 20.7). Как только система достигнет этой кривой, она будет совершать циклические движения по замкнутому контуру $BCDEB$ по чередующимся быстрым — медленным — быстрым — медленным пе-

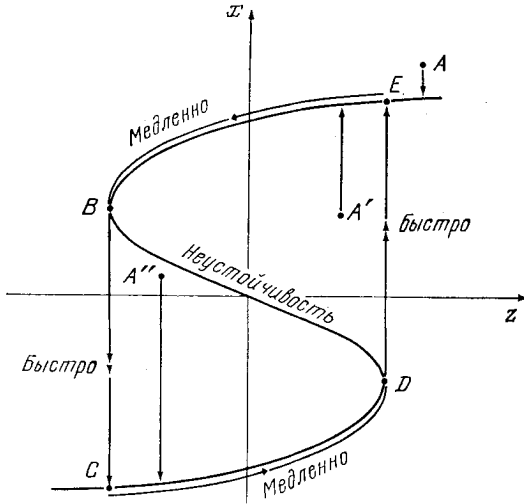


Рис. 20.7. Кривая $z = F(x) = 0$ как поперечное сечение сборки.

Две внешние ветви устойчивы, одна внутренняя неустойчива. К этому аттрактору приближаются все потоки, в какой бы точке A, A', A'', \dots они ни начались, которые затем совершают циклические движения по траектории $EBCDE$, представляя релаксационные колебания в режиме быстро — медленно — быстро — медленно.

риодическим траекториям. Такая замкнутая траектория называется *релаксационным колебанием*. Соответствующие масштабы времени имеют порядок $1/\gamma$ для быстрых скачков и порядок γ для медленных перемещений. В результате период колебания определяется следующим приближенным выражением:

$$T \simeq 2 \int_E^B -\frac{\gamma dz}{x} = -2\gamma \int_E^B \frac{f(x)}{x} dx = 2\gamma \int_E^B \left(3x + \frac{a}{x}\right) dx = \gamma \left\{ 3(x_E^2 - x_B^2) + 2a \ln \frac{x_E}{x_B} \right\}. \quad (20.17)$$

В случае осциллятора Ван-дер-Поля релаксационные колебания возникают в режиме множественных состояний, т. е. при $a < 0$.

При $a < 0$, $x_B = \sqrt{-a/3}$, $x_E = 2\sqrt{-a/3}$,

$$T \simeq |\gamma a| (3 - 2 \ln 2) \simeq 1,6 |\gamma a|, \quad a < 0. \quad (20.18)$$

◇◇◇ В качестве структурно устойчивого возмущения гармонического осциллятора был (осциллятор Ван-дер-Поля) — $F(x; a) = x^3 + ax$. Смена устойчивости происходит в критической точке $(x, y) = (0, 0)$ при уменьшении параметра a с прохождением через нулевое значение. Со сменой устойчивости связана бифуркация Хопфа. От решения $(x, y) = (0, 0)$ ответвляется новый круговой (при малых a) аттрактор. При дальнейшем уменьше-

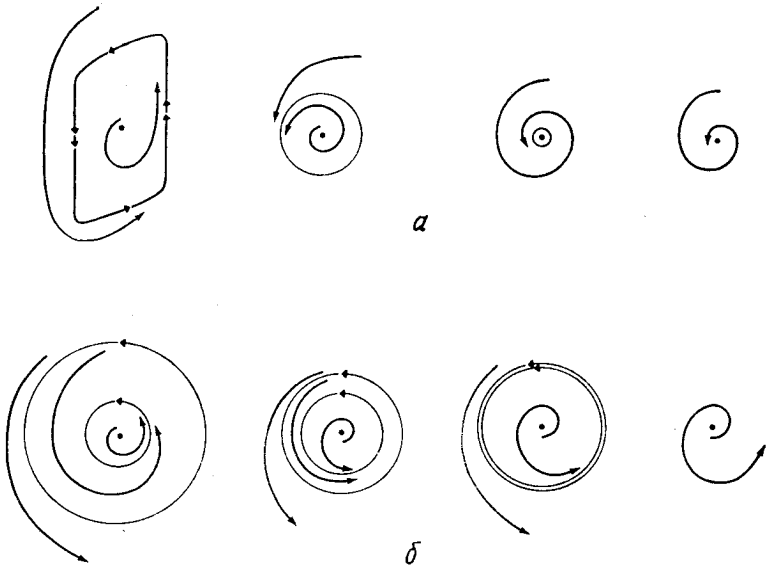


Рис. 20.8.

Структурно устойчивые предельные циклы могут быть разрушены двумя способами. *a* — радиус предельного цикла может быть стянут к нулю, в результате чего он исчезает при бифуркации Хопфа; *b* — он может столкнуться и взаимно уничтожиться с другим предельным циклом, обладающим противоположным типом устойчивости и тем же направлением потока; оба предельных цикла затем исчезают в процессе, который по существу, является возникновением катастрофы складки.

нии параметра a предельный цикл сдавливается и его форма искажается. В предельном случае ($|\gamma| \gg 1$) этот предельный цикл принимает форму релаксационных колебаний.

◇◇◇ По отношению к возмущениям предельные циклы структурно устойчивы. При возмущении системы с изолированным предельным циклом новая система будет иметь изолированный предельный цикл вблизи исходного изолированного предельного цикла. Разрушить предельный цикл в 1-параметрическом семействе двумерных динамических систем можно, либо «сжимая» его и «превращая» во внутренний фокус (рис. 20.8, *a*), либо заставив его столкнуться и аннигилировать с другим предельным циклом (рис. 20.8, *b*). Последний случай легко отождествить с катастрофой складки A_2 , если рассмотреть поперечное сечение потока, огибающего предельные циклы. Предельные циклы в \mathbb{R}^n , $n > 2$ не являются структурно устойчивыми, если они возникают на торах T^k , $k > 1$.

◇◇◇ Бифуркацию Хопфа и релаксационные колебания осциллятора Ван-дер-Поля мы отождествили с ограниченной по симметрии катастрофой сборки. Функции $F(x)$, связанные с ограниченными по симметрии катастрофами A_k (20.6) более высокого

порядка, можно использовать для построения динамических систем, в которых наблюдаются более интересные явления. Для таких более сложных систем справедливы рассуждения, приведенные в последних двух разделах.

◇◇◇ Сложные динамические системы поддаются анализу, когда их структуре присущи ощутимо различные временные масштабы.

2. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ. 2

Рассмотренный принцип построения оказался полезным при конструировании двумерных критических точек и потоков по данным о более простых одномерных критических точках и может быть развит для решения задач построения картины трехмерного критического поведения на основании перечня двумерных критических структур. Такое развитие метода можно осуществить при помощи процедуры, показанной на рис. 20.2. На рис. 20.9 к устойчивой изолированной морсовской критической

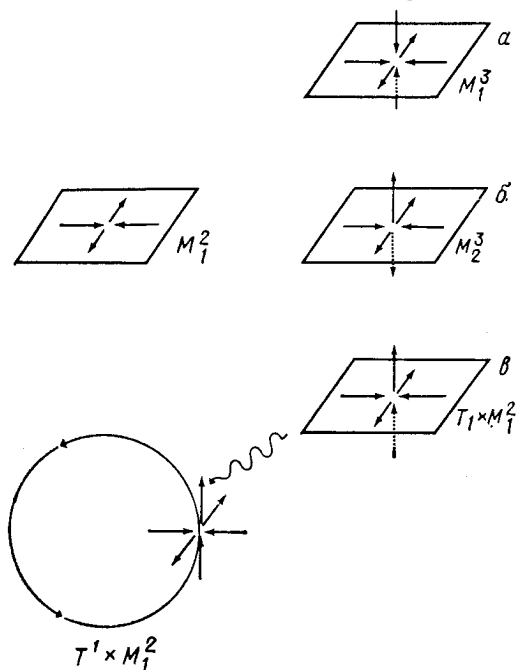


Рис. 20.9.

Путем добавления члена вида $+z^3, -z^3, z$ к устойчивой морсовской критической точке M_0^3 получаются изолированные критические точки M_0^3 (а), M_1^3 (б) и устойчивый предельный цикл $T^1 \times M_0^2$ (в).

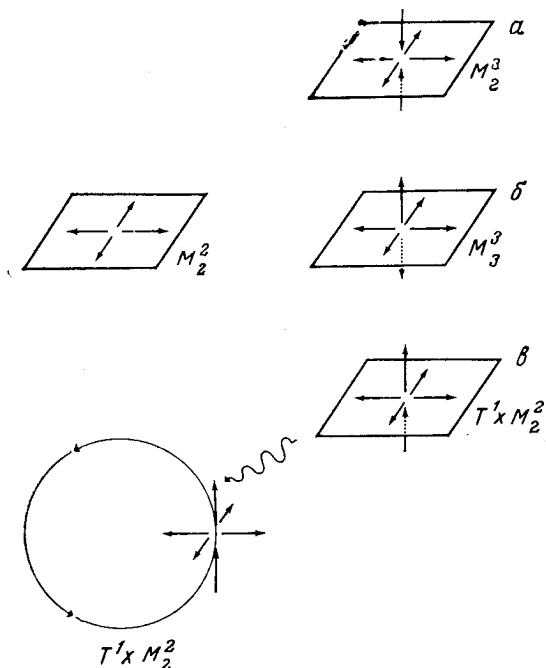


Рис. 20.10.

Исходя из морсовского седла M_1^2 и поступая обычным образом (см. рис. 20.9), получаем изолированные критические точки M_1^3 (а), M_2^3 (б) и неустойчивый предельный цикл $T^1 \times M_1^2$ (в).

в точке M_0^2 добавлены члены вида $+z^2, -z^2, z$. Полученная в результате картина критического поведения включает изолированный морсовский минимум M_0^3 , изолированное морсовское 1-седло M_1^3 и замыкающий поток на себя устойчивый предельный цикл $T^1 \times M_0^2$. Это построение повторено на рис. 20.10 и 20.11.

Картина структурно устойчивого двумерного потока может быть вновь расширена путем добавления членов $+z^2, -z^2, z$ (рис. 20.12 и 20.13). В построении, показанном на рис. 20.12, мы начинаем с устойчивого двумерного фокуса F_-^2 и строим соответственно устойчивый фокус $F_-^2 \times M_0^1$, неустойчивый фокус $F_-^2 \times M_1^1$ и, замыкая поток на себя через фокус, устойчивую предельную спираль $Sc_- = F_-^2 \times T^1$. В построении, показанном на рис. 20.13, мы начинаем с неустойчивого двумерного фокуса F_+^2 и строим $F_+^2 \times M_0^1, F_+^2 \times M_1^1, F_+^2 \times T^1$.

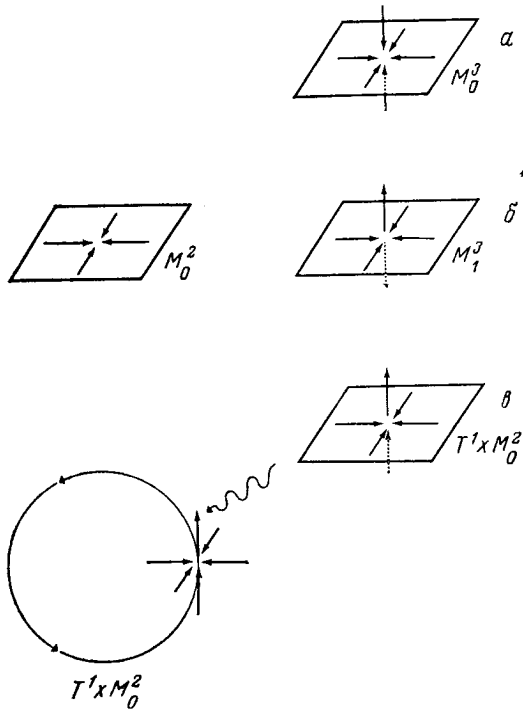


Рис. 20.11.

Исходя из неустойчивости критической точки M_2^2 и поступая обычным образом, получаем изолированные критические точки M_2^2 (а), M_3^3 (б) и неустойчивый предельный цикл $T^1 \times M_2^2$ (в).

Аналогичным образом можно рассмотреть устойчивые и неустойчивые предельные циклы. Спектр структур, получающихся из неустойчивого предельного цикла $T^1 \times M_0^1$, показан на рис. 20.14, а из цикла $T^1 \times M_1^1$ — на рис. 20.15. Предельные циклы $T^1 \times M_i^1 \in \mathbb{R}^3$, $i=0, 1, 2$, были получены ранее. Новыми структурами являются устойчивый $(T^2 \times M_0^1)$ и неустойчивый $(T^2 \times M_1^1)$ торы.

Описание динамических систем, идеализированные потоки для которых представлены на рис. 20.9—20.15, можно легко получить в случае трех существенно различных временных масштабов. Рассмотрим, например, поток $F^2 \times M_0^1$, для которого скорость вращения ω вокруг оси z намного превышает радиальную составляющую релаксационной скорости γ_r или ее составляющую γ_z по оси z . Если $\gamma_r \gg \gamma_z$, то поток напоминает смерч

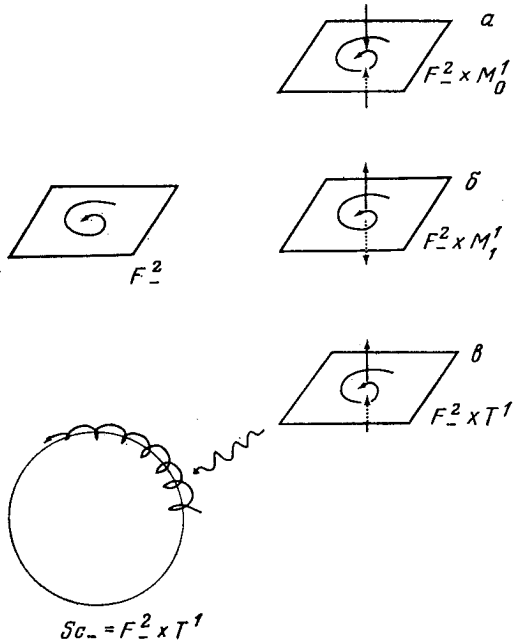


Рис. 20.12.

Исходя из устойчивого фокуса F_-^2 и поступая обычным образом, получаем устойчивые и неустойчивые потоки типа $F_-^2 \times M_0^1$ (а), $F_-^2 \times M_1^1$ (б) вблизи изолированных критических точек и устойчивую предельную спираль $F_-^2 \times T^1 = S c_-$ (в).

(рис. 20.16,а); если же $\gamma_r \gg \gamma_z$, то поток как бы располагается на поверхности параболоида (рис. 20.16,б). Предположим, что для потока типа $F_-^2 \times M_1^1$ временной масштаб вращательного движения намного больше, чем радиального, который в свою очередь значительно превышает временной масштаб движения по оси z . Тогда состояние системы будет изменяться почти по круговой траектории вокруг фокуса, причем радиус орбиты будет уменьшаться, а движение будет происходить все время вблизи плоскости $z = 0$. Когда радиус траектории станет очень малым, то в результате отталкивания состояние системы будет изменяться вдоль оси z в положительном или отрицательном направлении в зависимости от того, где происходило движение — выше или ниже плоскости $z = 0$, причем положение системы в плоскости $z = 0$ является неустойчивым (рис. 20.16,в). Предельное винтовое движение также может быть легко описано в случае трех различных временных масштабов.

Аттрактор, представленный устойчивым тором, несколько отличается от других притягивающих множеств. Множество предель-

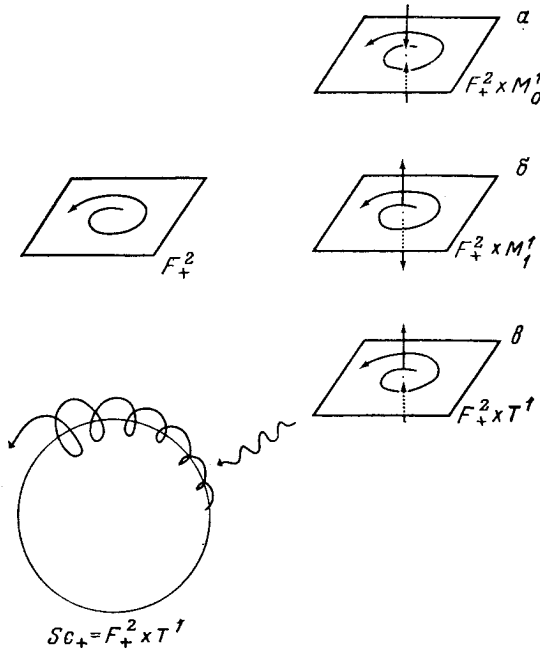


Рис. 20.13.

Исходя из неустойчивого фокуса F_+^2 и поступая обычным образом, получаем неустойчивые потоки $F_+^2 \times M_0^1$ (а), $F_+^2 \times M_1^1$ (б) вблизи изолированной критической точки и неустойчивую предельную спираль $F_+^2 \times T^1 = S C_+$ (в).

ных точек, связанных со всеми остальными устойчивыми потоками, образует нульмерные или одномерные множества. Система, первоначально находившаяся в изолированной критической точке, останется в этой точке; система, первоначально находившаяся в одномерном предельном множестве, будет блуждать вокруг этого предельного множества, проходя через каждую его точку. Однако все это перестает быть справедливым для предельных торов. Эти множества двумерны. Динамическая система, первоначально находившаяся в точке, принадлежащей устойчивому или неустойчивому тору, будет оставаться на двумерном торе, однако не будет проходить через все точки тора. Грубо говоря, динамическая система будет пересекать принадлежащее тору множество меры нуль или единица в зависимости от того, рациональным или иррациональным числом выражается отношение скоростей вращения в обоих направлениях.

Теперь выясним, почему предельный цикл в пространстве \mathbb{R}^3 неустойчив к возмущениям. Предположим, что предельный цикл

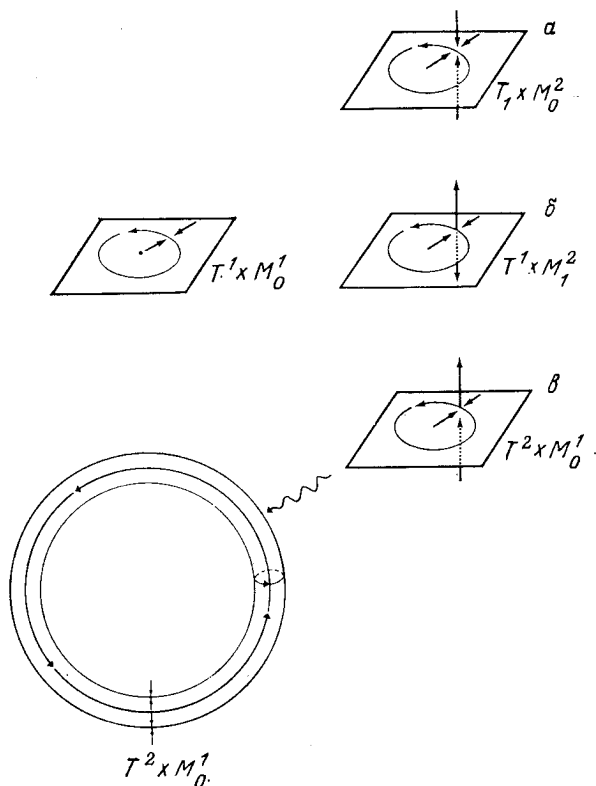


Рис. 20.14.

Исходя из устойчивого предельного цикла $T^1 \times M_0^1$ и поступая обычным образом, получаем потоки: $T^1 \times M_0^2$ — устойчивый (а), $T^1 \times M_1^2$ — неустойчивый (б) и $T^2 \times M_0^1$ — устойчивый (б'). Ни одно из соответствующих критических множеств не является критической точкой.

«наматывается» на устойчивый тор $T^2 \times M_0^1$ с рациональными частотами ω_1, ω_2 (пусть для определенности $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1$). При действии возмущения $\omega_1 = 1, \omega_2 \rightarrow \omega_2' = \pi/3$ возмущенная траектория никогда не замкнется на себя. Следовательно, предельные циклы структурно устойчивы к возмущениям в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, возникающим на инвариантном торе T^k при $k = 1$, и структурно неустойчивы к возмущениям, возникающим на инвариантном торе T^k при $1 < k \leq n - 1$.

◇◇◇ Возникает вопрос: является ли сама инвариантная поверхность T^2 структурно устойчивой? Эта поверхность называется *инвариантной* потому, что любая ее точка будет отображаться в другую точку этой же поверхности в силу уравнений движения

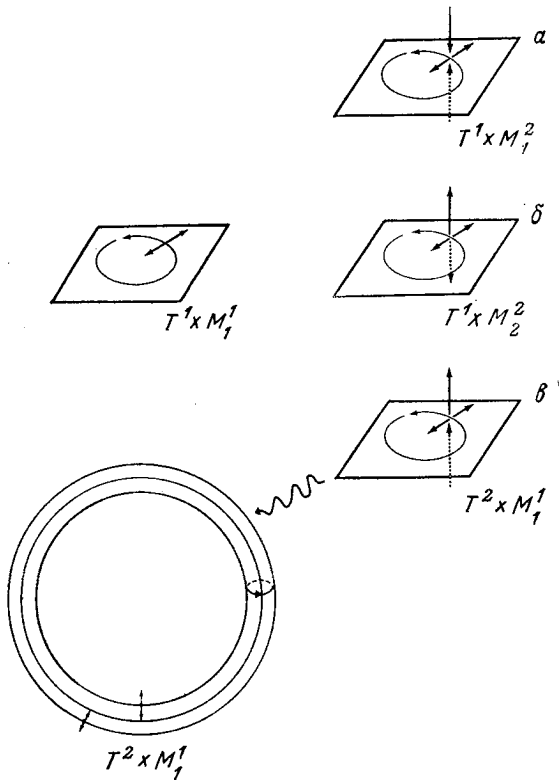


Рис. 20.15.

Исходя из неустойчивого предельного цикла $T^1 \times M_1^1$ и поступая обычным образом, получаем нелокальные предельные множества типа $T^1 \times M_1^2$ (а), $T^1 \times M_2^2$ (б) и $T^2 \times M_1^1$ (а'), ни одно из которых не является устойчивым.

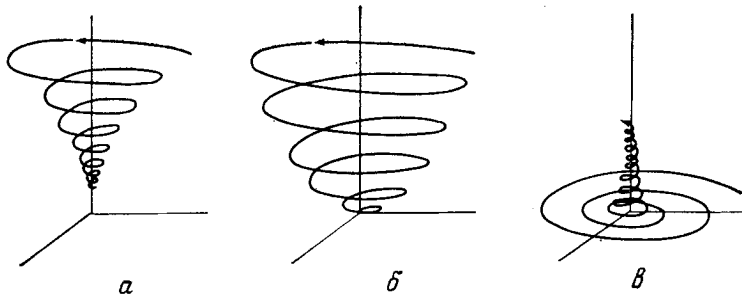


Рис. 20.16. Качественный характер потока в окрестности критической точки типа $F_-^2 \times M_0^1$ в зависимости от постоянных демпфирования.

а — $\gamma_r \gg \gamma_z$; б — $\gamma_r \ll \gamma_z$ в — характер потока в случае неустойчивой критической точки типа $F_-^2 \times M_1^1$ при $\omega \gg \gamma_r \gg \gamma_z$.

динамической системы. В результате получаем, что поверхность $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ структурно устойчива. Разумеется, торы более высокой размерности становятся менее «жесткими», поэтому возможно достижение некоторой размерности n , при которой инвариантный тор $T^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ уже не будет структурно устойчивым. Такая возможность возникает при $n - 1 = 4$.

Итак, мы встретились с новым свойством, присущим некоторым аттракторам динамических систем размерности $n \geq 3$. Причину этого понять нетрудно. Предельные множества аттракторов являются множествами размерности $0, 1, 2, \dots, n - 1$ и мерой ноль в \mathbb{R}^n . Траектории динамической системы одномерны. Только в случае $\max(0, 1, \dots, n - 1)$ траектория динамической системы может пройти через каждую точку инвариантной поверхности. С увеличением размерности инвариантные поверхности становятся все более «пористыми» по отношению к действительным траекториям.

В семействах трехмерных динамических систем, зависящих от параметров, могут естественным образом возникать определенные бифуркации и изменения. Подобного рода бифуркации для трехмерных динамических систем часто удается получить из соответствующих бифуркаций в основной двумерной динамической системе. Если, например, два собственных значения, связанных с изолированной точкой типа M_i^3 или одномерным потоком типа $T^1 \times M_i^2$, становятся равными, произойдет соответствующее изменение поведения от «радиального» к «спиральному». В этом смысле критическое множество M_i^3 «расположено вблизи» потока $F_-^2 \times M_i^1$ ($i = 0, 1$), M_i^3 — вблизи $F_+^2 \times M_{i-2}^1$ ($i = 2, 3$) и $T^1 \times M_0^2$ — вблизи $Sc_- = T^1 \times F_-^2$. Бифуркация изолированных критических точек происходит так же, как в случае градиентных систем. Устойчивая спираль Sc_- в результате бифуркации Хопфа дает неустойчивую спираль и устойчивый инвариантный тор

$$Sc_- \xrightarrow{\text{Бифуркация Хопфа}} Sc_+ + T^2 \times M_0^1. \quad (20.19)$$

Нетрудно получить также остальные бифуркации и соответствующие потоки

$$M_1^3 \xrightarrow{A_3} M_2^3 + 2M_1^3. \quad (20.20)$$

3. СТРАННЫЕ СТРОИТЕЛЬНЫЕ БЛОКИ

3.1. «Спиральный хаос»

Для выяснения типов качественных изменений поведения трехмерной динамической системы рассмотрим динамическую

систему ¹⁾ типа $F_+^2 \times M_0^1$ (рис. 20.13,а). Если предположить, что неустойчивый фокус лежит в притягивающей плоскости (x, y) , то вблизи критической точки динамические уравнения, описывающие состояние динамической системы в цилиндрических координатах, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \gamma_1 r, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega, \quad \gamma_1 \gamma_2 > 0 \\ \frac{dz}{dt} &= -\gamma_2 z. \end{aligned} \quad (20.21)$$

Для того чтобы поведение этой системы характеризовалось некоторыми интересными особенностями, добавим в правые части уравнений (20.21) слагаемые, влияние которых будет заключаться в том, чтобы вернуть поток из окрестности больших значений r и малых, но отличных от нуля $|z|$ в окрестность малых r и больших $|z|$. Сечение такого возвратного потока плоскостью (r, z) показано на рис. 20.17,а. Можно, в частности, выбрать замкнутый поток в плоскости (r, z) , $\theta = \text{const}$ таким образом, чтобы он был типа релаксационных колебаний (рис. 20.17,б). Тогда соответствующие уравнения динамической системы принимают форму

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \gamma(r - F(z)), \\ \dot{r} &= -\gamma^{-1}(z - z_0), \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Описание такого потока оказывается достаточно простым при $\gamma \gg 1$, $\omega \gg \gamma^{-1}$. Из произвольного начального положения A состояние системы быстро приближается к поверхности вращения $r = F(z)$, затем приводится в быстрое вращение вокруг оси z и одновременно медленно по спирали приближается к точке срыва C . Далее состояние системы скачком переходит на нижний лист указанной поверхности вращения в точку D и медленно по спирали приближается к ее краю E , откуда скачком переходит на верхний лист в точку B , после чего процесс повторяется. Качественная природа скачкообразных переходов $C \rightarrow D$ и $E \rightarrow B$ зависит от отношения γ/ω : если оно велико, состояние системы скачком переходит с одного из листов в точку, расположенную почти под ним или над ним, без существенного вращения вокруг оси z (линейный спуск или подъем); если $\gamma/\omega \ll 1$, то состояние системы часто оказывается вовлеченным

¹⁾ Модельные динамические системы могут не иметь никакой непосредственной связи с реальной действительностью, тем не менее их изучение является первой отважной попыткой приоткрыть ящик Пандоры, содержащий странное поведение динамических систем более чем двух измерений.

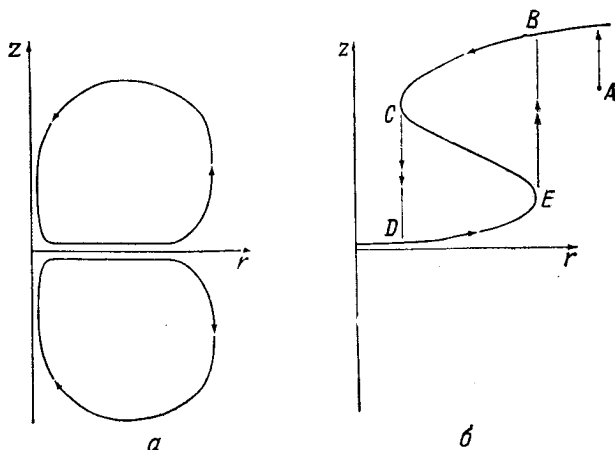


Рис. 20.17. Трехмерные пстоки, для которых справедливо соотношение $\dot{\theta} = \omega = \text{const}$.

a — предельный цикл гладкий; *б* — предельный цикл соответствует релаксационным колебаниям. Эти потоки представляют собой предельные циклы в плоскости (r, z) и существуют на устойчивом предельном торе, причем возможно их замыкание на себя.

во вращательное движение вокруг оси z во время скачка с одного листа на другой (винтовой подъем или спуск).

Динамическая система, представленная уравнениями (20.22), может быть названа *спиральным хаотическим аттрактором*. Очевидно, спиральное движение возникает на поверхностях вращения BC и DE . Угол θ (по модулю 2π), при котором происходят внезапные изменения координаты z ($\gamma/\omega \gg 1$), может оказаться случайной величиной. В предельном случае $\gamma/\omega \ll 1$ поведение можно назвать *спирально-винтовым хаосом*. Такое поведение не является хаотическим. Увеличение угловой координаты во время спирального движения и линейного либо винтового подъема или спуска инвариантно относительно процесса вращения, поэтому «хаос» связан с последовательностью $n\Delta\theta \bmod 2\pi$, $n = 1, 2, \dots$, где величина $\Delta\theta$ очень велика. Можно получить лучшее приближение к хаосу путем деформирования поверхности $0 = r - F(z) \rightarrow f(x, y, z) = 0$ таким образом, что она уже не будет поверхностью вращения.

Рёсслером была изучена простая динамическая система $\dot{x} = F(x; c)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}^3$, в которой проявляется спиральный хаос [2]. Уравнения этой динамической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz. \end{aligned} \quad (20.23)$$

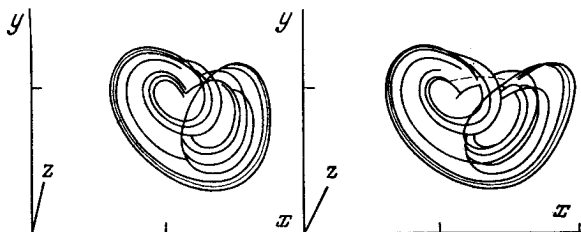


Рис. 20.18.

Поток, соответствующий динамической системе (20.23), был рассчитан Рёсслером для разных значений управляющих параметров (a, b, c) . Один из таких потоков представлен здесь в стереоскопическом изображении [2]. (Сводя глаза, добейтесь, чтобы обе части рисунка расположились одна над другой, затем примите аспирин.)

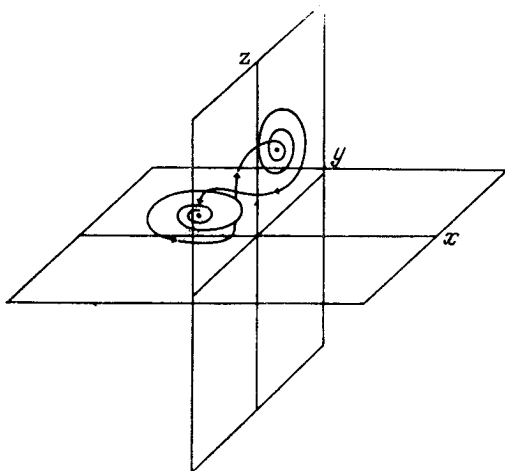


Рис. 20.19.

Если динамическая система имеет только две изолированные критические точки типа $F_+^2 \times M_0^1$, поток может переводить систему из одного состояния в другое между окрестностями двух критических точек «хаотическим» образом.

По-видимому, это будет простейшая из динамических систем, обладающих таким типом поведения, который не встречался у двумерных динамических систем, поскольку $n = 3$ и в связи с тем, что она содержит лишь один нелинейный член второй степени. Указанная система дает несколько бифуркаций при изменении управляющих параметров $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Стереоскопическое изображение траектории этой динамической системы в фазовом пространстве (x, y, z) воспроизведено на рис. 20.18. Видны раскручивающаяся спираль на нижнем листе и закручивающаяся спираль на верхнем листе. (Четко виден также линейный спуск, а о том, как выглядит линейный подъем, можно догадаться.)

3.2. Аттрактор Лоренца

Проанализируем поведение системы в случае двух потоков локального типа $F_+^2 + M_0^1$ в \mathbb{R}^3 и попытаемся установить, насколько причудливым оно может оказаться. Для этого воспользуемся рис. 20.19: здесь один поток типа $F_+^2 \times M_0^1$ помещен в точку $(x, y, z) = (x_0, y_0, 0)$, плоскость $(x, y, z = 0)$ является притягивающей, а спиральное движение в этой плоскости — отталкивающим. Другой поток помещен в точку $(0, y_0, -x_0)$ плоскости $(y, z, x = 0)$ и является локально притягивающим в окрестности этой точки, а спиральное движение в указанной плоскости является раскручивающимся. Относительно нелокального поведения таких потоков вдали от упомянутых двух критических точек ничего сказать нельзя.

Состояние системы, первоначально соответствующее точке (x_0, y_0, ε) , будет изменяться по раскручивающейся спирали, оставаясь вблизи плоскости $z = 0$ до тех пор, пока оно не окажется на достаточно большом расстоянии от первой критической точки. Тогда становится ощутимым влияние плоскости $x = 0$, которая является притягивающей вблизи второй критической точки. Когда состояние системы окажется достаточно близким к этой плоскости, оно начнет раскручиваться по спирали, пока не уйдет достаточно далеко от второй критической точки, после чего начнет притягиваться к локально притягивающей плоскости $z = 0$, содержащей первый неустойчивый фокус. Затем процесс повторяется. Поведение системы можно сравнить с поведением мячика для настольного тенниса — она «мечется» между окрестностями двух критических точек типа $F_+^2 \times M_0^1$, причем такое движение может оказаться хаотическим.

Странный аттрактор подобного типа был подробно исследован Лоренцем [3], которого, в частности, интересовало поведение динамических систем

$$\dot{x}_i = F_i(x), \quad (20.24a)$$

совершающих вынужденное диссипативное движение. Для исследования таких систем может быть использовано разложение в ряд Тейлора действующей силы $F_i(x)$ вблизи точки

$$F_i(x) = c_i - b_{ij}x_j + a_{ijk}x_jx_k + \mathcal{O}(3). \quad (20.24b)$$

Если ограничиться членами второй степени, то можно не выявить сути анализа вынужденных диссипативных систем, однако при этом действительно выявляется нелинейность, достаточно сложная, чтобы занять работой математиков на многие годы. Полезно также предположить, что величина $a_{ijk}x_jx_k$ тождественно обращается в нуль, а форма $b_{ij}x_i x_j$ является положительно определенной.

Можно ввести простой критерий, позволяющий определить, когда динамическая система (20.24) имеет аттрактор. Предположим, что при $t = t_0$ мы вырезаем из пространства состояний объем V . В течение времени $t - t_0$ каждая точка этого объема сместится в новую точку. Можно попытаться выяснить, как будет при этом меняться объем. Для больших интервалов времени такая задача может оказаться не вполне корректной в связи с тем, что новый «объем» окажется очень пористым (канторовским множеством), однако для малых промежутков времени поставленная задача корректна. В соответствии со сказанным положим $t - t_0 \rightarrow dt$. За это время каждая точка V пройдет лишь небольшое расстояние. Следовательно, каждая точка, лежащая внутри V , перейдет в некоторую точку, также лежащую внутри V , за бесконечно малый отрезок времени dt . Изменение формы, а значит, и объема V в течение времени dt обусловлено лишь точками поверхности V . Поэтому изменение объема определяется поверхностным интегралом

$$V(t_0 + dt) - V(t_0) = \oint_{\partial V} dx_i \wedge dS_i, \quad (20.25)$$

где dS_i — ориентированный элемент поверхности. Таким образом, скорость изменения объема дается выражением

$$\frac{dV}{dt} = \oint_{\partial V} \frac{dx_i}{dt} \wedge dS_i = \oint_{\partial V} F_i \wedge dS_i.$$

(Здесь было использовано динамическое уравнение $\dot{x}_i = F_i$.) Этот поверхностный интеграл связан с дивергенцией векторного поля F

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial V} F_i \wedge dS_i}{V} \stackrel{\text{def}}{=} \text{div } F. \quad (20.26)$$

В локально декартовой системе координат $F = \sum \partial F_i / \partial x_i$. Этот результат можно рассматривать как обобщение теоремы Лиувилля. Недиссипативные потоки в классическом фазовом пространстве бездивергентны, вследствие чего элементы объема фазового пространства в случае гамильтоновых потоков

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

сохраняются (теорема Лиувилля).

Для ограниченного класса нелинейных систем, определяемых формулами (20.24), имеем $\text{div } c_i = 0$ и $a_{ijk} x_j x_k = 0$; поэтому

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x_i} (-b_{ij} x_j) = -b_{ii} = -\text{tr } b < 0. \quad (20.27)$$

Поскольку b_{ij} — постоянные, мера любого объема растет с течением времени как $V(t) = V(0)e^{-ttrb}$. Потoki, связанные с (20.24б), стягивают объемы к нулю, вследствие чего (20.24б) должны иметь притягивающее множество меры нуль.

Уравнения, подробно изучавшиеся Лоренцем, возникают в связи с задачей Бенара и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, & \sigma > 0, \\ \dot{y} &= rx - y & -xz, \quad r > 0, \\ \dot{z} &= & -bz + xy, \quad b > 0. \end{aligned} \quad (20.28)$$

Два нелинейных слагаемых, очевидно, удовлетворяют условию $a_{ijk}x_i x_j x_k = 0$, а линейные слагаемые — условию положительной определенности (b_{ij} можно сделать симметричными путем подстановки $z \rightarrow z' = z - r + \sigma$). Поскольку величина $\operatorname{tg} b = -(\sigma + 1 + b)$ отрицательна, мера любого малого объема асимптотически приближается к нулю при $t \rightarrow \infty$, даже если объем окажется сильно искаженным.

Динамическая система (20.28) имеет критическую точку $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ при всех значениях r . В случае $r > 1$ она имеет две дополнительные критические точки C, C' с координатами

$$\begin{aligned} C: & (x_0, x_0, z_0), \\ C': & (-x_0, -x_0, z_0), \quad z_0 = r - 1, \quad x_0 = \sqrt{bz_0}. \end{aligned} \quad (20.29)$$

Других критических точек у этой системы нет.

Свойства устойчивости указанных критических точек могут быть установлены стандартными методами теории линейной устойчивости. Уравнения (20.28), линеаризованные вблизи любой из критических точек, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma x \\ \sigma y \\ \sigma z \end{bmatrix}. \quad (20.30)$$

Для критической точки $(0, 0, 0)$ характеристическое уравнение записывается следующим образом:

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \quad (20.31)$$

Собственные значения, определяемые этим уравнением, таковы:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\left(\frac{\sigma + 1}{2}\right) + \left[\left(\frac{\sigma + 1}{2}\right)^2 - \sigma(1 - r)\right]^{1/2}, \\ \lambda &= -\left(\frac{\sigma + 1}{2}\right) - \left[\left(\frac{\sigma + 1}{2}\right)^2 - \sigma(1 - r)\right]^{1/2}, \\ \lambda &= -b. \end{aligned} \quad (20.32)$$

Рассматриваемая критическая точка будет типа $F_-^2 \times M_0^1$ при $r < r_{-1} = 1 - \sigma^{-1}(\sigma + 1)^2/4$, типа M_0^3 при $r_{-1} \leq r < 1$ и типа M_1^3 при $r > 1$.

Характеристическое уравнение, соответствующее критическим точкам C, C' , имеет вид

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (20.33)$$

При $r \downarrow 1+$ три собственных значения, определяемые (20.33), имеют следующие пределы:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow 0^-, \\ \lambda &\rightarrow -(\sigma + 1), \\ \lambda &\rightarrow -b. \end{aligned} \quad (20.34)$$

Таким образом, когда r возрастает до $+1$, первое из трех собственных значений (20.32) для критической точки $(0, 0, 0)$ увеличивается до нуля. В этой точке происходит бифуркация типа A_{+3} , причем две критические точки типа M_0^3 покидают начало координат и их каноническое поведение подчиняется закону квадратного корня (ср. с (20.29)). Указанная бифуркация может быть записана в виде

$$M_0^3 \xrightarrow{r \rightarrow r_1=1} M_1^3 + 2M_0^3. \quad (20.35)$$

◇◇◇ В 1-параметрическом семействе уравнений, в которых присутствуют бифуркации, связанные с элементарными катастрофами, можно было бы ожидать «бифуркацию» складки типа A_2 . Однако вместо нее мы обнаруживаем бифуркацию сборки. Это объясняется тем, что вследствие симметрии, присущей уравнениям Лоренца (20.28) (их инвариантность при замене $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow +z$), катастрофа A_2 подавляется, т. е. остается единственная катастрофа, которая может возникнуть при обычных условиях, — катастрофа A_3 .

При дальнейшем возрастании величины r и переходе ею значения $+1$ новых качественных изменений в критической точке, расположенной в начале координат, не происходит. Два изменения качественного характера возникают для критических точек, соответствующих C, C' . При некотором промежуточном значении r_f два действительных отрицательных собственных значения (20.33) становятся равными. При возрастании r с переходом через значение r_f качественная природа точек C, C' меняется с устойчивого морского седла на устойчивый фокус:

$$M_0^3 \xrightarrow{r \rightarrow r_f=1} M_1^3 \times 2M_0^3. \quad (20.36)$$

Тогда, если $\sigma > b + 1$, то при

$$r^4 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (20.37)$$

действительная часть пары комплексно сопряженных собственных значений проходит через нуль. Критические точки, соответствующие C, C' , качественно меняют свой тип с F_-^2 на F_+^2 . Изменение свойства динамической устойчивости в фокусе связано с бифуркацией Хопфа. При $r \rightarrow r_4$ имеем инверсию бифуркации Хопфа. Неустойчивые предельные циклы, окружающие точки C, C' в плоскости, содержащей спиральное движение, стягиваются при $r \rightarrow r_4$ в устойчивые фокусы по стандартному степенному закону $(r_4 - r)^{1/2}$ и в конце концов пропадают. В краткой форме бифуркацию в r_4 можно записать следующим образом:

$$F_-^2 \times M_0^1 + T^1 \times M_1^2 \xrightarrow{r \rightarrow r_4} F_+^2 \times M_0^1. \quad (20.38)$$

При $r > r_4$ остаются только три критические точки и все они неустойчивые.

Изучение свойств уравнений Лоренца в зависимости от возрастающего параметра r привело нас на «ничейную территорию» при $r > r_4$. Для исследования проблем, связанных с ничейной территорией, существует проверенный метод, заключающийся в том, чтобы приближаться к той же области «с другой стороны». В соответствии с этим целесообразно исследовать свойства уравнений Лоренца в зависимости от убывающего параметра r . Подобное исследование было выполнено Роббинсом [4]. Результаты этой работы можно сформулировать следующим образом:

— при $1/r = 0$ существует устойчивое симметричное периодическое решение;

— это устойчивое симметричное периодическое решение продолжает существовать при малых $1/r$, т. е. при достаточно больших r ;

— при $r = r_a$ симметричное периодическое решение теряет свою устойчивость и от него ответвляются два устойчивых асимметричных периодических решения;

— при $r = r_b < r_a$ каждое асимметричное периодическое решение теряет свою устойчивость, и в результате бифуркации рождается пара двухконтурных решений удвоенного периода;

— при $r = r_c < r_b$ эти решения теряют свою устойчивость и от каждого двухконтурного решения ответвляется пара четырехконтурных решений, период которых равен учетверенному начальному периоду;

— возникает каскад бифуркаций описанного типа. 2^n -контурные решения теряют свою устойчивость при $r = r_n$ и от

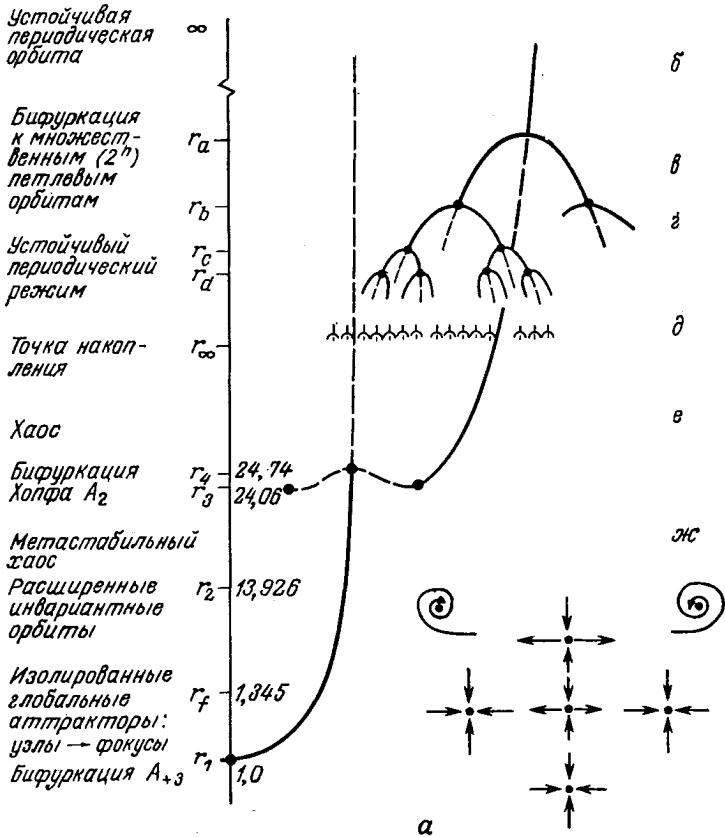


Рис. 20.20. Качественные свойства устойчивого аттрактора для уравнения Лоренца (20.28) существенно зависят от величины управляющего параметра r [4].

каждого из них ответвляются два устойчивых 2^{n+1} -контурных решения. Дочерние решения имеют периоды, равные удвоенным периодам порождающих решений;

— точки бифуркации сходятся к точке сгущения r_∞ , причем величина r_∞ больше, чем r_4 ;

— ничейная территория «хаоса» отсутствует при $r_4 < r < r_\infty$.

Уравнения (20.28) подвергались всестороннему изучению многими авторами, начиная с Лоренца, который проинтегрировал их численно, используя фиксированные значения управ-

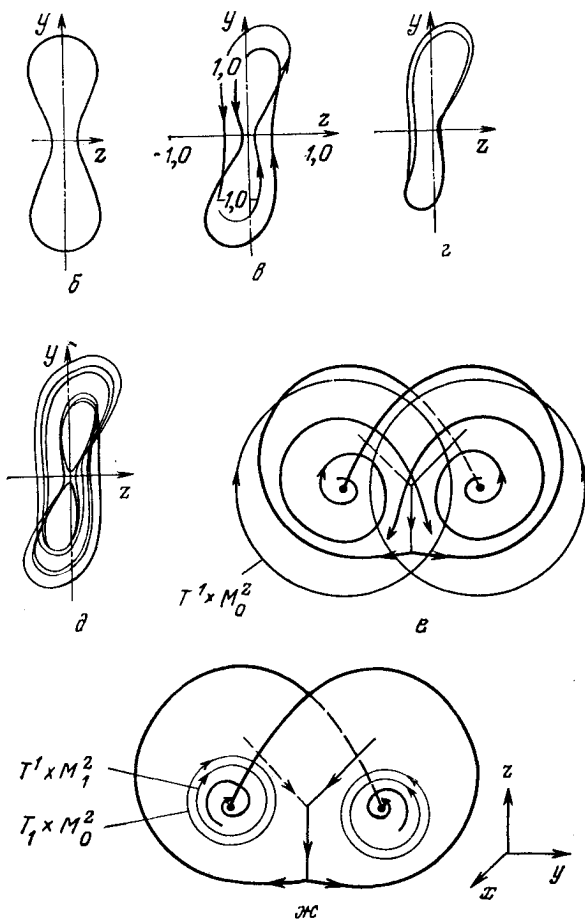


Рис. 20.20 (Продолжение.)

ляющих параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и единственный переменный управляющий параметр r . Сводка обсуждавшихся выше бифуркационных свойств модели Лоренца представлена на рис. 20.20.

Проанализируем теперь поведение этих уравнений при увеличении r от нулевого значения. При $0 < r < r_1 = 1$ имеем только одну критическую точку. Она является одновременно локальным и глобальным аттрактором. Другими словами, любое начальное состояние будет приближаться к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Когда r становится близким к единице, возникает критическое замедление, а при достижении величиной

r значения $+1$ начало координат теряет устойчивость и от него ответвляются два морсовских аттрактора M_0^3 , причем оба глобально и локально устойчивы. За исключением одномерного множества точек, каждая точка в пространстве состояний \mathbb{R}^3 будет приближаться к C или C' при $t \rightarrow \infty$. С увеличением r до величины $r_i = 1,345$ происходит качественное изменение $M_0^3 \rightarrow F_-^2 \times M_0^1$, однако оно не влияет ни на локальную, ни на глобальную устойчивость аттракторов C, C' .

При увеличении r до значений $r_2 \approx 13,926$ две неустойчивые траектории, исходящие из начала координат, возвращаются в начало координат при $t \rightarrow \infty$ [5], при этом аттракторы C, C' перестают быть глобальными аттракторами. Напротив они окружены окрестностями N, N' , в которых являются локальными. Точка, исходящая из области, лежащей вне этих окрестностей, может совершать колебательные движения из окрестности N в окрестность N' и обратно (не в саму точку N или N' !), по существу, случайным или беспорядочным образом, пока траектория не войдет в точку N или N' . Затем эта траектория будет завиваться по спирали к C или C' с одной фурьекомпонентой частоты. Такое поведение называют *метастабильным хаосом*. Помимо указанных двух типов поведения существует бесконечно много периодически замкнутых траекторий и бесконечно много неустойчивых турбулентных замкнутых траекторий. Такие траектории имеют меру нуль.

Когда r возрастает, приближаясь к значению $r_3 \approx 24,06$, мера N, N' уменьшается, мера множества точек, из которых может начаться метастабильный хаос, возрастает и возникает некоторое критическое замедление. Время пребывания точки в состоянии метастабильного хаоса до захвата ее окрестностями N или N' и вырождения хаоса — увеличивается при $r \rightarrow r_3$. В случае $r = r_3$ две неустойчивые траектории, исходящие из начала координат, приближаются к неустойчивой замкнутой траектории при $t \rightarrow \infty$. Когда r , возрастая, достигает значения r_3 , множество хаотических отталкивающих центров становится множеством аттракторов. Это множество будет иметь меру нуль, а его область притяжения — положительную меру.

Когда r возрастает, приближаясь к значению $r_4 \approx 24,74$, неустойчивые предельные циклы $T^1 \times M_1^2$ стягиваются к фокусам $F_-^2 \times M_0^1$, так что окрестности N, N' уменьшаются по размерам и мере. Область притяжения хаотического устойчивого аттрактора увеличивается за счет N, N' . При $r = r_4$ возникает инверсия бифуркации Хопфа, при $r > r_4$ остается «странный аттрактор».

Проанализируем случай $r > r_4$, т. е. критические точки C, C' будут типа $F_+^2 \times M_0^1$. Плоскости, содержащие спиральное

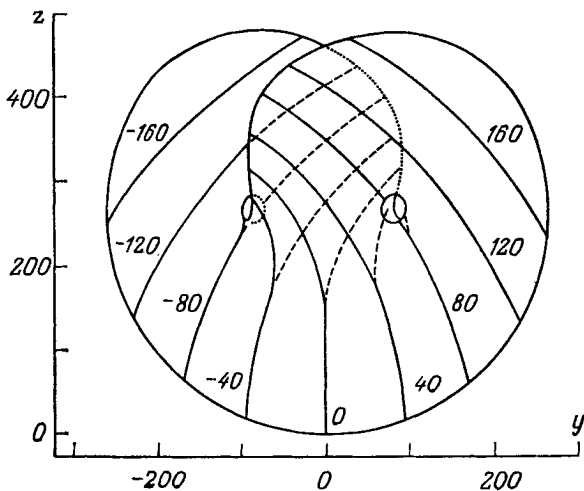


Рис. 20.21.

Лоренц предложил полезную эвристическую модель странного аттрактора, содержащую поверхность, распадающуюся при достаточно больших z на два листа, как показано на рисунке. Движение динамической системы характеризуется чередованием потоков типа $F_+^1 \times M_0^1$ на верхнем и нижнем листах. В действительности такая поверхность имеет весьма своеобразную топологическую структуру. Для этой системы управляющий параметр $r = 28$, а три переменных состояния пересчитаны в масштабе 10:1 [3].

движение этих фокусов, устойчивы, несмотря на то что само движение по раскручивающейся спирали неустойчиво. Точка в \mathbb{R}^3 будет притянута по направлению к этим двум плоскостям. Оказавшись вблизи притягивающей плоскости, эта точка будет захвачена «смерчем» и начнет удаляться по спирали от фокуса. Когда в процессе своего движения точка пересечет плоскость $y = 0$, она начнет притягиваться по направлению к другой плоскости, где находится неустойчивый фокус. Точка системы начинает падать по направлению к этому другому фокусу. Когда она приближается к притягивающей плоскости, то начинает по спирали уходить от фокуса. В результате расстояние от второго фокуса должно стать достаточно большим, так что точка должна снова пересечь плоскость $y = 0$. Затем точка состояния системы будет притягиваться обратно к центру первого неустойчивого фокуса, и описанное движение повторяется.

Лоренц предложил удобное представление хаотических траекторий, возникающих при $r > r_4$ (рис. 20.21). Траектории динамической системы лежат вблизи тонкой (меры ноль) притягивающей двумерной поверхности. При $z < \sim 17$ движение происходит на одном листе, а при $z > \sim 17$ имеем два листа, каждый из которых содержит неустойчивый фокус. Спираль

раскручивается (например, против часовой стрелки из точки C) на верхнем листе, пока не пересечет плоскость $y = 0$, откуда она начинает раскручиваться из другого фокуса (C') в противоположном направлении (по часовой стрелке). Раскручивание спирали из этого фокуса продолжается на нижнем листе, пока она не пересечет плоскость $y = 0$, и с этого момента она переносит свою привязанность обратно к точке C .

Этот *странный аттрактор* не является ни двумерной поверхностью, ни спаянным двумерным многообразием. По существу, он представляет собой топологический объект патологической природы. Вместо двух листов, связанных неустойчивыми кривыми, выходящими из начала координат, мы имеем бесконечно много таких листов. Дуга, проходящая через «обложки этой книги» с бесконечным числом листов, пересекает листы по канторовскому множеству.

4. ГИДРОДИНАМИКА.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОГО СНИЗУ

При слабом подогревании слоя жидкости снизу (рис. 20.22, *а*) тепло переносится от нижней поверхности к верхней в результате теплопроводности, причем перенос тепла не сопровождается движением жидкости. При увеличении градиента температуры тепло уже не может достаточно быстро переноситься за счет одной лишь теплопроводности и «на помощь приходит» сама жидкость, т. е. более нагретые слои жидкости начинают перемещаться по направлению к верхней поверхности, а более холодные слои — с верхней поверхности по направлению к нижней. В результате устанавливается упорядоченное циркуляционное движение жидкости (рис. 20.22, *б*). При дальнейшем увеличении градиента температуры возникает хаос (рис. 20.22, *в*).

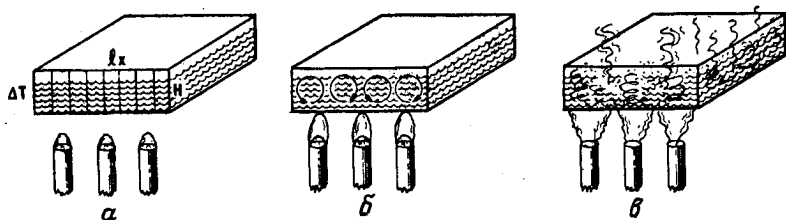


Рис. 20.22.

а — при слабом подогреве перенос тепла осуществляется теплопроводностью; *б* — при умеренном подогреве тепло переносится в результате упорядоченного конвективного циркуляционного движения; *в* — при интенсивном подогреве движение жидкости носит хаотический характер.

Уравнения, описывающие движение нагреваемой жидкости (рис. 20.22), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= g \epsilon \Delta T \delta_{iz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \kappa \nabla^2 T, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \quad (20.39)$$

где x_i есть i -я пространственная координата, u_i — i -я составляющая поля скоростей, g — ускорение силы тяжести, ϵ — коэффициент теплового расширения жидкости, $\Delta T/H$ — градиент внешнего температурного поля, ρ — плотность жидкости, T — поле температуры в жидкости, P — поле давления в жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, t — время.

Исследование этих сложных уравнений может быть выполнено при помощи стандартного метода. Сначала делаются соответствующие физические предположения и проводится аппроксимация с целью максимального упрощения указанных уравнений. В частности, определяются характерные масштабы и осуществляется переход к безразмерным переменным. Затем поле температуры и поле скоростей представляются в виде рядов Фурье с учетом необходимых граничных условий (например, в случае, когда жидкость заключена внутри прямоугольного параллелепипеда). Следующий шаг предусматривает замену произведения тригонометрических функций их суммой при помощи обычных тригонометрических тождеств. Наконец, на основе линейной независимости тригонометрических коэффициентов устанавливается связь между производными по времени от коэффициентов Фурье с нелинейными функциями этих коэффициентов. Короче говоря, весьма трудная задача заменяется другой, не менее трудной задачей.

Возможен и иной подход, который заключается в том, что сначала вводят граничные условия и на основании интуитивных физических соображений предполагают, что движение жидкости происходит в плоскости. Это позволяет существенно упростить систему (20.39):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= - \frac{\partial (\psi \nabla^2 \psi)}{\partial (x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \theta &= - \frac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta, \end{aligned} \quad (20.40)$$

где ψ — функция тока ($u = \nabla \psi$) и $\theta = T(x, z, t) - T_{cp}$, причем между нижней и верхней поверхностями происходит уменьше-

ние $T_{\text{ср}}$ на величину ΔT по линейному закону. Предполагается, что все движение осуществляется в плоскости xz , $y = \text{const}$.

Упрощенные уравнения (20.40) можно исследовать описанным выше методом. Как и прежде, в результате приходим к тому, что весьма трудная задача исследования системы дифференциальных уравнений заменяется не менее трудной алгебраической задачей. Численное исследование системы связанных нелинейных уравнений, которые получаются при таком подходе из (20.40), показывает [6], что независимо от начальных условий все коэффициенты Фурье, связанные с разложениями θ и ψ , кроме трех из них, быстро стремятся к нулю. Стремление или нестремление к нулю трех ключевых коэффициентов Фурье зависит от величины безразмерного параметра

$$R_a = g\varepsilon H^4 \frac{\Delta T/H}{\kappa\nu}, \quad (20.41)$$

называемого *числом Рэлея*¹⁾. Эта бифуркация возникает при критическом значении

$$R_c = \pi^4 (1 + a^2)^3 a^{-2},$$

где $a = H/l_x$ и l_x — ширина контейнера, содержащего жидкость.

Математические операции, связанные с алгебраическими преобразованиями и усечением, обычно некоммутативны. Однако в случае системы (20.40) численные расчеты свидетельствуют о том, что эти операции оказываются коммутативными, по крайней мере в рассмотренном диапазоне изменения параметров. Такие результаты навели Лоренца на мысль, что, по-видимому, более удобно ввести упрощающие предположения до проведения алгебраических преобразований. Поэтому он сделал предположение, согласно которому структура функции тока и разности температур имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\kappa(1+a^2)} \psi &= \sqrt{2} X \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi z}{H}, \\ \pi \frac{R_a}{R_c} \frac{\theta}{\Delta T} &= \sqrt{2} Y \cos \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi z}{H} - Z \sin \frac{2\pi z}{H}. \end{aligned} \quad (20.42)$$

Теперь для определения нелинейных уравнений, связывающих три коэффициента Фурье, достаточно провести алгебраические выкладки. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{d}{d\tau} Y &= rX - Y - XZ, \\ \frac{d}{d\tau} Z &= -bZ + XY, \end{aligned} \quad (20.43)$$

¹⁾ Рэлей первым изучал бифуркацию зависящих от времени решений от не зависящих от времени решений (20.39).

где (σ — число Прандтля)

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 (1 + a^2) \kappa t, \\ \sigma &= \frac{\nu}{\kappa}, \\ r &= \frac{Ra}{Rc}, \quad b = \frac{4}{(1 + a^2)} \leq 4.\end{aligned}\tag{20.44}$$

Уравнения (20.43) представляют собой не что иное, как уравнения Лоренца, а из сказанного выше ясно, почему они привлекли внимание исследователей и каким образом они были первоначально получены.

Может возникнуть серьезное опасение, что грубое предположение, которым является (20.42), приведет лишь к «искажению» нелинейного уравнения (20.40). Численные расчеты показали, однако, что это не так. Причина того, что это не так, пока остается неясной, хотя теорема о центральном многообразии (разд. 7) проливает свет на этот вопрос.

5. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛАЗЕРНОГО РАЗРЯДА

Если к газу, заключенному в трубке, приложить слабый электрический потенциал, то через трубку потечет очень слабый ток (рис. 20.23). Когда разность потенциалов ($V/D \simeq \mathcal{E}$, где \mathcal{E} — напряженность электрического поля) станет достаточно большой, произойдет пробой газа вследствие ионизации и ток может стать ощутимым. Вольтамперная характеристика газовой трубки обладает высокой степенью нелинейности, и наблюдается явление гистерезиса. Процесс прохождения тока сопровождается испусканием света. (Кстати, именно по такому принципу работает неоновая лампа.)

Если проводящую трубку поместить внутрь соответствующим образом настроенной полости Фабри—Перо, уровень обратной связи может стать достаточно высоким, для того чтобы возник лазерный эффект. Ниже определенного порогового значения уровня накачки (электрического тока) лазерное излучение отсутствует; при уровне накачки, превышающем пороговый, лазер «включен». Процесс перехода от включения к выключению соответствует явлению бифуркации. При умеренных интенсивностях накачки на выходе из полости получаем устойчивое с течением времени излучение, описываемое плавной непрерывной функцией интенсивности накачки. Однако при превышении второго критического порогового значения лазер начинает сильно пульсировать, причем хаотическим образом [7].

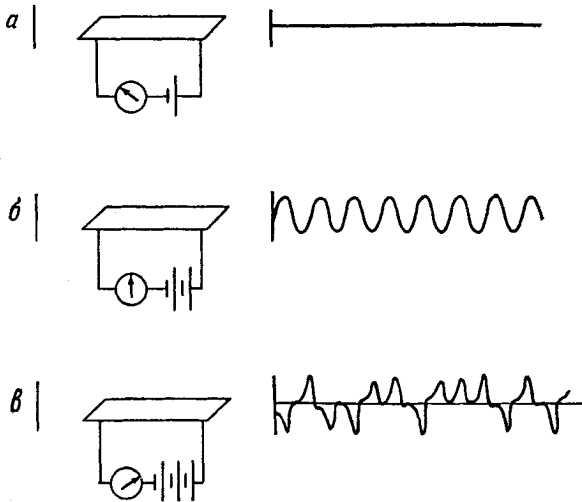


Рис. 20.23. Ток через газовую трубку в полости Фабри — Перо обуславливает характер излучения.

a — при слабом токе излучение отсутствует; *б* — при токе умеренной интенсивности излучение когерентно; *в* — при сильном токе излучение носит хаотический характер.

Устойчивые аттракторы, заключенные между первым и вторым порогами, будут типа M_0^3 или $F^2 \times M_0^1$. Устойчивый аттрактор, расположенный выше второго порога, является странным хаотическим аттрактором типа изученного Лоренцем [8].

Бифуркационные свойства лазера можно исследовать, анализируя совокупности уравнений Максвелла для электромагнитного поля и уравнений движения, описывающих поведение вещества внутри полости. В классической механике такая совокупность уравнений называется *системой уравнений Ньютона — Максвелла*. Лазер является квантово-механической системой, и для нее соответствующие уравнения носят название *уравнения Блоха — Максвелла*. При описании лазера важными характеристиками являются напряженность электрического поля $\mathcal{E}(x, t)$, поляризации $\mathcal{P}(x, t)$, обусловленная ненулевым моментом электрического диполя между разными атомными или молекулярными уровнями, и инверсия заселенности, представляющая собой разность между числом атомов в возбужденном и базовом состояниях, определяющих лазерный переход.

Уравнения Блоха — Максвелла можно получить из уравнений Максвелла ($\partial_\mu F_{\mu\nu} = 4\pi j_\nu$; $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$), выражая источники зарядов и токи через микроскопические величины, такие, как элементы матрицы $E1$. Эти уравнения можно упростить, представляя напряженность электрического поля и поляриза-

цию в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= E(x, t) e^{i(\omega_0 t - kx)} + \text{Комплексно-сопряженные члены}, \\ \mathcal{P} &= P(x, t) e^{i(\omega_0 t - kx)} + \text{Комплексно-сопряженные члены}, \end{aligned} \quad (20.45)$$

где ω_0, k — периоды по времени и по пространственной координате, $e^{i(\omega_0 t - kx)}$ содержит всю быстро меняющуюся информацию, а $E(x, t), P(x, t)$ — медленно меняющиеся функции. Система уравнений Блоха — Максвелла имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} + \kappa \right) E &= -2\pi i \omega_0 P, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) P &= \frac{i}{3\hbar} |M_{ge}|^2 ED, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\parallel} \right) (D - D_0) &= \frac{2i}{\hbar} (E^* P - EP^*), \end{aligned} \quad (20.46)$$

где c — скорость света; \hbar — постоянная Планка, отнесенная к 2π ; M_{ge} — элемент матрицы $E1$ для лазерного перехода; D_0 — инверсия заселенности, вызванная внешним источником энергии; $\kappa, \gamma, \gamma_{\parallel}$ — скорости релаксации полей E, P, D соответственно.

Найдем не зависящие от пространственной координаты и времени решения системы (20.46). Для этого положим все производные по пространственной координате и времени равными нулю и будем строить решение получающихся нелинейных уравнений. В результате находим, что

$$E = 0, \quad P = 0, \quad D - D_0 = 0 \quad (20.47)$$

является решением при всех значениях D_0 . При $D_0 \geq D_{0,1} = 3\hbar\kappa\gamma / (2\pi\omega_0 |M_{ge}|^2)$ существуют ненулевые решения, для которых

$$\begin{aligned} D_{\text{непр. волн}} &= D_{0,1}, \\ |E|_{\text{непр. волн}} &= \frac{\omega_0 \hbar \gamma_{\parallel}}{4\kappa} |D_0 - D_{0,1}|^{1/2}, \\ |P|_{\text{непр. волн}} &= \frac{2\pi\omega_0}{\kappa} |E|_{\text{непр. волн}}. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Решения (20.47), соответствующие «включению» лазера, устойчивы при условии, что они находятся ниже порогового значения (M_0^3), и неустойчивы, если выше порогового значения (M_1^3).

При превышении порогового значения решения (20.48) первоначально устойчивы.

Все величины E, P, D можно выбрать в действительности. Исследование устойчивых решений (20.46) целесообразно проводить путем введения безразмерных величин, относя характе-

ристики поля к соответствующим непрерывным волновым решениям, т. е. $E' = E/|E|_{\text{непр. волн}}$ и т. д. Тогда система уравнений Блоха — Максвелла принимает более простой вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left[c \frac{\partial}{\partial x}\right] + \kappa\right) E' &= \kappa P', \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right) P' &= \gamma E' D', \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\parallel}\right) D' &= \gamma_{\parallel} \left(\frac{D_0}{D_{0,1}}\right) - \gamma_{\parallel} \left(\frac{D_0}{D_{0,1}} - 1\right) E' P'. \end{aligned} \quad (20.49)$$

При помощи преобразования системы координат можно устранить член, содержащий производную по пространственной координате и заключенный в квадратные скобки. Замена переменных

$$\begin{aligned} E' &= ax, & r &= \frac{D_0}{D_{0,1}}, & a &= \sqrt{b(r-1)}, \\ P' &= ay, & \sigma &= \frac{\kappa}{\gamma}, & t \rightarrow t' &= t \frac{\sigma}{\kappa}, \\ D' &= z, & b &= \frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma} \end{aligned} \quad (20.50)$$

приводит уравнения (20.49) к форме, изученной Лоренцем [8].

6. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ. 3

Из предыдущего следует, что сведения о типе и свойствах критических точек и потоков, обычно встречающихся при исследовании n -мерных динамических систем, имеют большое значение для понимания качественных изменений в поведении таких систем. Принцип построения, использованный в разд. 1 и 4, оказался удобным для получения сведений о критических свойствах n -мерной системы на основании результатов, полученных для системы размерности $n - 1$, когда мы совершали переход от одномерного случая к двумерному и от двумерного к трехмерному. Очевидно, что если необходимо распространить этот принцип построения на случай более высоких размерностей, то для этого потребуется разработка нового подхода к решению задачи.

Согласно новому подходу (рис. 7.2, разд. 19.6) [9], описание потоков стрелками в пространстве \mathbb{R}^n заменяется изучением распределения корней матрицы устойчивости (в комплексной плоскости), соответствующих критической точке или критическому потоку (инвариантная поверхность):

— при $n = 1$ имеем только один корень для критической точки, причем последняя будет типа M_0^1 или M_1^1 (рис. 20.24);



Рис. 20.24. Изолированная критическая точка в пространстве R^1 может быть либо M_0^1 , либо M_1^1 типа.

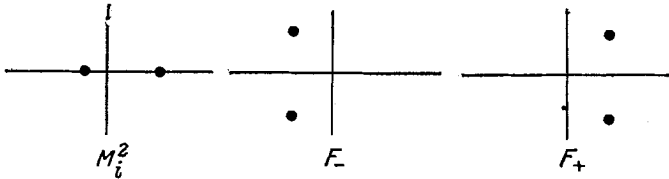


Рис. 20.25. Изолированная критическая точка в пространстве R^2 характеризуется двумя собственными значениями матрицы устойчивости. Эти значения могут либо быть оба действительными, либо составлять комплексно-сопряженную пару.

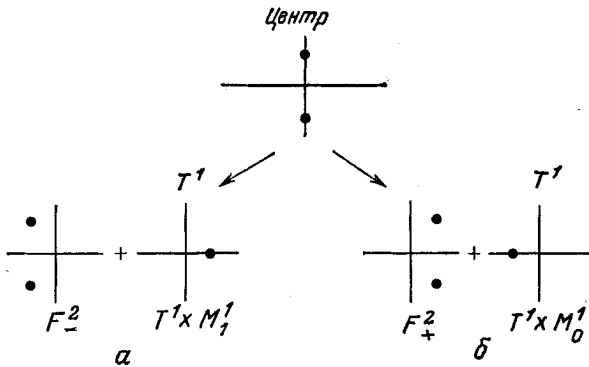
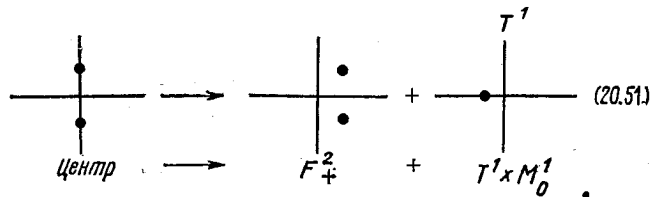


Рис. 20.26.

Если два собственных значения для изолированной критической точки являются мнимыми, соответствующие потоки определяются центром. Такой поток структурно неустойчив. Под действием возмущения эти два собственных значения могут смещаться в отрицательную полуплоскость (устойчивый фокус). В таком случае в результате бифуркации Хопфа возникает неустойчивый предельный цикл $T^1 \times M_1^1$. Если возмущение смещает комплексные собственные значения в правую полуплоскость, рождается устойчивый предельный цикл.

— при $n = 2$ имеем два корня в критической точке. Они могут быть оба действительными, тогда критическая точка будет типа M_i^2 ($i = 0, 1, 2$), или образовывать комплексно-сопряженную пару, тогда критическая точка будет типа F_{\pm}^2 (рис. 20.25). Предельные циклы связаны с комплексно-сопряженной парой собственных значений, переходящих через мнимую ось. На рис. 20.26 показаны возмущения в случае струк-

турной неустойчивости, когда на мнимой оси возникают два ненулевых корня. На рис. 20.26,а показано, как возмущение смещает оба корня в левую полуплоскость, создавая устойчивый фокус. Одновременно может быть создан неустойчивый предельный цикл (или разрушен устойчивый предельный цикл). Это явление представлено единственной точкой в правой полуплоскости. Одно из двух собственных значений снято, поскольку критическое множество уже будет не точкой, а одномерным потоком ($\dot{\theta} = \text{const}$). Другое, малое по величине собственное значение связано с радиальной координатой в полярной системе. На рис. 20.26,б показано, каким образом возмущение, отличное от описанного выше, может привести к возникновению неустойчивого фокуса F_+^2 и устойчивого предельного цикла $T^1 \times M_0^1$. Эта бифуркация может быть представлена следующей схемой:



В трехмерном случае можно изучить критические множества размерности 0 (критические точки), 1 (предельные циклы), 2 (инвариантные торы). В критической точке все собственные значения могут быть действительными или образовывать комплексно-сопряженную пару. Спектр изолированных критических точек содержит точки типа M_i^3 и $F_{\pm}^2 \times M_i^1$ (рис. 20.27). В случае одномерного критического множества необходимо рассмотреть два собственных значения. Спектр критических потоков содержит потоки типа $T^1 \times M_i^2$ и $T^1 \times F_{\pm}^2$. Потоки последнего типа представляют собой неустойчивое и устойчивое винтовые поля Sc_{\pm} , показанные на рис. 20.13 и 20.12. Если мы имеем дело с двумерным критическим множеством T^2 , остается одно собственное значение, так что соответствующие потоки будут типа $T^2 \times M_i^1$. Рис. 20.27 содержит всю информацию, представленную на рис. 20.9—20.15. Более того, теперь нетрудно заметить, какие критические потоки располагаются вблизи других критических потоков в смысле бифуркаций. Например,

$$T^1 \times F_{\pm}^2 \xrightarrow{\text{Бифуркация Хопфа}} T^1 \times (F_{\pm}^2 + T^1 \times M_0^1) = Sc_{\pm} + T^2 \times M_0^1 \quad (20.52)$$

как уже ранее отмечалось.

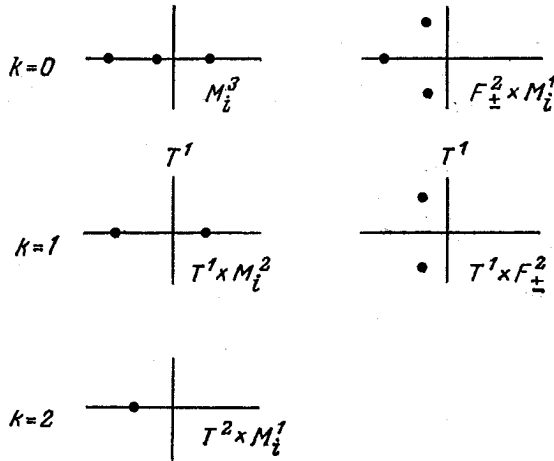


Рис. 20.27. Критическое множество в пространстве \mathbb{R}^3 может иметь размерность $k = 0, 1, 2$.

Число собственных значений усеченной матрицы устойчивости во взаимно ортогональных направлениях равно $3 - k$. Эти собственные значения могут быть расположены в комплексной плоскости. Соответствующие потоки будут типа $T^k \times M_i^{3-k}$ или $T^k \times F_{\pm}^2 \times M_i^{3-(2+k)}$.

Несмотря на то что по сравнению с результатами, изложенными в разд. 1 и 4, мы не получили пока никаких преимуществ при использовании рассматриваемого метода, он существенным образом упрощает анализ критических поверхностей в случае динамических систем размерности $n \geq 4$ (рис. 20.28). В случае k -мерной инвариантной поверхности ($k < n$) необходимо рассмотреть $n - k \geq 1$ собственных значений. При $k = 0$ (предельная точка) устойчивость будет соответствовать типу M_i^4 , $F_{\pm}^2 \times M_i^2$ или $F_{\pm}^2 \times F_{\pm}^2$. При $k = 1$ предельным потоком служит предельный цикл, причем остается рассмотреть три собственных значения (рис. 20.27); при $k = 2$ существует предельный поток на торе T^2 , причем могут появиться два остальных собственных значения (рис. 20.25); при $k = 3$ следует обратиться к рис. 20.24 (сводка критических потоков в \mathbb{R}^4 представлена на рис. 20.28):

$$\begin{aligned}
 k=0, & \quad M_i^4, & \quad F_{\pm}^2 \times M_i^2, & \quad F_{\pm}^2 \times F_{\pm}^2; \\
 k=1, & \quad T^1 \times M_i^3, & \quad T^1 \times F_{\pm}^2 \times M_i^1; \\
 k=2, & \quad T^2 \times M_i^2, & \quad T^2 \times F_{\pm}^2; \\
 k=3, & \quad T^3 \times M_i^1.
 \end{aligned}$$

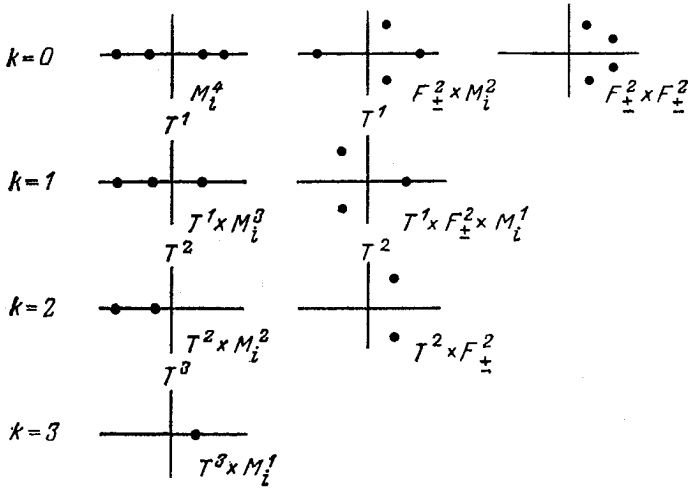


Рис. 20.28. Критическое множество в пространстве R^4 может иметь размерность $k = 0, 1, 2, 3$.

Число собственных значений усеченной матрицы устойчивости во взаимно ортогональных направлениях равно $4 - k$. Эти собственные значения могут быть расположены в комплексной плоскости.

Легко установить бифуркационные свойства этих критических потоков. Например, поскольку

$$T^1 \times F_-^2 \times M_0^1 \xrightarrow{\text{Бифуркация Хопфа}} T^1 \times (F_+^2 + T^1 \times M_0^1) \times M_0^1 = T^1 \times F_+^2 \times M_0^1 + T^2 \times M_0^2,$$

можно видеть, что $T^1 \times F_-^2 \times M_0^1$ располагается вблизи $T^2 \times M_0^2$, но не вблизи $T^3 \times M_i^1$.

Аналогичным образом можно рассматривать критические потоки и при более высокой размерности пространства управляющих параметров. Остается открытым вопрос о том, можно ли таким методом получить все критические потоки, или, точнее, будут ли критические потоки, полученные в результате указанного процесса построения, структурно устойчивыми к возмущениям. По-видимому, при $n > 4$ это не так [10].

7. ТЕОРЕМА О ЦЕНТРАЛЬНОМ МНОГООБРАЗИИ

До сих пор рассматривались только некоторые из потоков, которые могут встречаться в динамических системах, причем наше внимание было сосредоточено исключительно на системах малого числа измерений. Такой подход мог бы считаться оправ-

данным, если бы существовал некоторый аналог расщепления (2.4), справедливый для динамических систем.

Оказывается, что такой аналог есть, и им является так называемая теорема о центральном многообразии [11].

Предположим, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x; c), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}^k, \\ F(x; c) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (20.53)$$

является k -параметрическим семейством динамических систем. Смена устойчивости происходит в критической точке или потоке, как только одно или несколько собственных значений соответствующей матрицы устойчивости имеют не равную нулю действительную часть. Если критическая точка возникает в x^0 при $c = c^0$, то линеаризация вблизи критической точки дает соотношение

$$\dot{x}_i = F_{ij}(x^0; c^0) \delta x_j + \text{Члены более высокого порядка.} \quad (20.54)$$

Можно разбить линейное векторное пространство перемещений δx из x^0 на три линейных векторных пространства:

$$V = V_s + V_c + V_u. \quad (20.55)$$

Здесь V_s образовано такими собственными векторами F_{ij} , собственные значения которых имеют отрицательные действительные части; неустойчивое пространство V_u образовано собственными векторами F с положительными действительными частями; центральное подпространство V_c образовано собственными векторами F , действительные части которых обращаются в нуль. Именно это подпространство является критическим, потому что оно связано с бифуркациями системы (20.53), и его можно локально расширить до многообразия, называемого *центральным многообразием*.

Если δx — произвольное перемещение из x^0 , то в окрестности $(x^0; c^0)$ уравнения, описывающие динамическую систему, можно представить в более простом виде:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta v_s + \delta v_c + \delta v_u; \quad \delta v_{\#} \in V_{\#}, \\ \delta \dot{v}_s &= G_s \delta v_s, \\ \delta \dot{v}_c &= G_c(\delta v_c; c), \\ \delta \dot{v}_u &= G_u \delta v_u, \end{aligned} \quad (20.54')$$

где G_s — матрица размером $s \times s$ ($s = \dim V_s$), а G_u — матрица размером $u \times u$ ($u = \dim V_u$), оператор $G(\delta v_c; c)$ нелинейный. Уравнение (20.54') представляет собой аналог леммы расщепления (2.3) для динамической системы. Вдали от центрального многообразия уравнения динамической системы можно линеари-

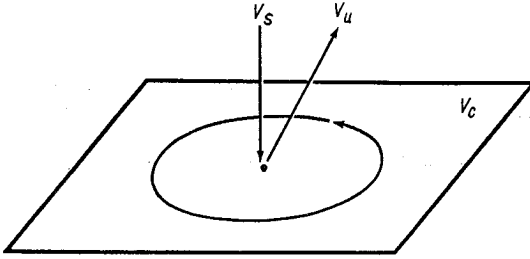


Рис. 20.29.

В критической точке в пространстве \mathbb{R}^4 с двумя чисто мнимыми собственными значениями и двумя действительными собственными значениями (положительным и отрицательным) разложение центрального многообразия будет включать двумерное центральное многообразие V_c и два одномерных многообразия V_s, V_u .

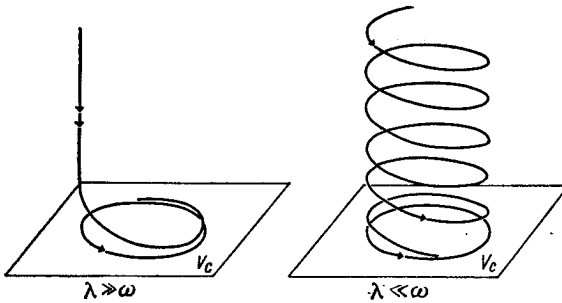


Рис. 20.30.

Критическая точка в \mathbb{R}^3 с двумя чисто мнимыми собственными значениями $\pm i\omega$ и одним отрицательным собственным значением $-\lambda$ имеет разложение центрального устойчивого многообразия. Если собственные значения сильно различаются по модулю, движение динамической системы содержит либо линейный спуск ($\lambda \gg \omega$), либо спуск по винтовой линии ($\omega \gg \lambda$).

зовать. Лишь на центральном многообразии размерности $c \leq n$ должны удерживаться какие-либо члены более высокой степени. Все бифуркации динамической системы в окрестности c^0 определяются по оператору $G_c(\delta v_c; c)$. Указанное снижение размерности существенно упрощает исследование бифуркаций, связанных с динамическими системами (20.53).

Попытка показать составные части центрального многообразия для динамической системы в \mathbb{R}^4 , обладающей в критической точке двумя действительными собственными (положительным и отрицательным) и двумя комплексно-сопряженными собственными значениями, нашла отражение на рис. 20.29. Любое перемещение δx при условии $\delta v_u \neq 0$ приведет в конечном итоге к выходу из окрестности критической точки. В связи с тем что в приложениях основной интерес представляют устойчивые критические точки, на рис. 20.30 показано разложение центрального

устойчивого многообразия для динамической системы в \mathbb{R}^3 , обладающей в критической точке одним отрицательным собственным значением ($-\lambda$) и двумя чисто мнимыми собственными значениями ($\pm i\omega$). Если $\lambda \gg \omega$, то состояние системы будет осуществлять «линейный спуск» на центральное многообразие; если $\lambda \ll \omega$, то этот спуск будет проходить по винтовой линии. С указанным центральным многообразием связана бифуркация Хопфа.

Типы бифуркаций, которые могут возникнуть в k -параметрическом семействе n -мерных динамических систем, можно определить следующим образом:

— найти компоненты бифуркационного множества $F_{ij}(x^0; c^0)$ и их различные размерности;

— применить теорему о центральном многообразии в некоторой типичной точке каждой компоненты бифуркационного множества;

— применить вышеописанный метод для определения, какие динамические потоки располагаются вблизи особого структурно неустойчивого потока, параметризуемого точкой $c \in \mathcal{C}_B$ в бифуркационном множестве.

Было бы желательно разработать перечень канонических отображений $G(\delta v_c; c)$ для динамических систем по аналогии с уже имеющимся списком функций, соответствующих каноническим катастрофам, для вырожденных критических точек.

8. КАРТИНА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО РЮЭЛЮ И ТЕЙКЕНСУ

Поведение многих физических систем носит турбулентный характер в результате действия достаточно жесткого толчка. Возникает вопрос, как возбуждается такое поведение и каким образом можно его математически описать.

Один из возможных механизмов возникновения турбулентности, изящный по своей простоте, был предложен Рюэлем и Тейкенсом. Этот механизм применим в случае нелинейных динамических систем, зависящих лишь от одного управляющего параметра c .

Идея Рюэля и Тейкенса заключается в следующем. Предположим, что в окрестности $c = 0$ n -мерная динамическая система имеет единственное устойчивое состояние $x = 0$. При увеличении c решение остается единственным до тех пор, пока не будет достигнуто значение $c = c_1$, при котором возникает бифуркация Хопфа. При $c > c_1$ решение в точке $x = 0$ неустойчиво, но вблизи нее располагается предельный цикл T_1 (представляющий собой деформированную окружность), который устойчив. Движение вокруг этого инвариантного множества является периоди-

ческим с угловой частотой ω_1 . При дальнейшем возрастании c указанный предельный цикл остается устойчивым до тех пор, пока не будет достигнуто значение $c = c_2$, при котором усеченная $(n-1) \times (n-1)$ -матрица устойчивости (одно из направлений устраняется за счет потока T^1) имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений с нулевыми действительными частями. Возникает вторая бифуркация Хопфа, и при $c > c_2$ исходный предельный цикл неустойчив, но окружен предельным тором T^2 . Поток на этом торе является квазипериодическим с компонентами частоты (ω_1, ω_2) . В общем случае ω_i — функции управляющего параметра c . При увеличении c отношение компонент частоты может быстро изменяться между иррациональным (непериодическое движение) и рациональным (периодическое движение) значениями.

Проанализируем $(n-2) \times (n-2)$ -матрицу устойчивости на двумерной инвариантной поверхности при дальнейшем увеличении c . При $c = c_3$ третья пара комплексно-сопряженных собственных значений может иметь действительные части, проходящие через нуль. Тогда тор T^2 становится неустойчивым при $c > c_3$ и будет окружен устойчивым инвариантным тором T^3 . Этот случай также может описывать квазипериодическое движение с угловыми частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

При $c = c_4$ получаем следующую бифуркацию Хопфа, о чем свидетельствует появление у усеченной $(n-3) \times (n-3)$ -матрицы устойчивости ($n \geq 5$) двух чисто мнимых собственных значений. При $c > c_4$ тор T^3 неустойчив, но он окружен устойчивым потоком на $T^4 \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 5$). Рюэль и Тейкенс [10] показали, что этот поток не будет общим для всех систем. Произвольные возмущения, образующие открытое множество в пространстве возмущений $F(x; c)$, ($c > c_4$) квазипериодического потока с частотами $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ на T^4 обладают странными аттракторами. Ньюхаус, Рюэль и Тейкенс [12] показали, что турбулентное поведение может возникнуть в случае, когда три собственных значения переходят в правую полуплоскость.

Эта общая картина перехода к турбулентности не зависит от выбора модели, причем нет необходимости в том, чтобы возникновение турбулентности осуществлялось прохождением через каскад трех или четырех локальных бифуркаций Хопфа. Меньшее их число будет достаточным для нелокальных переходов. $\diamond \diamond \diamond$ По сравнению с картиной перехода к турбулентности, предложенной Ландау, описанная картина «более экономно расходует» бифуркации. Механизм перехода к турбулентности по Ландау связан с бесконечным каскадом бифуркаций (рис. 20.20) в области изменения управляющего параметра $r_a \geq r \geq r_\infty$. Согласно этому механизму, система будет вести себя хаотически

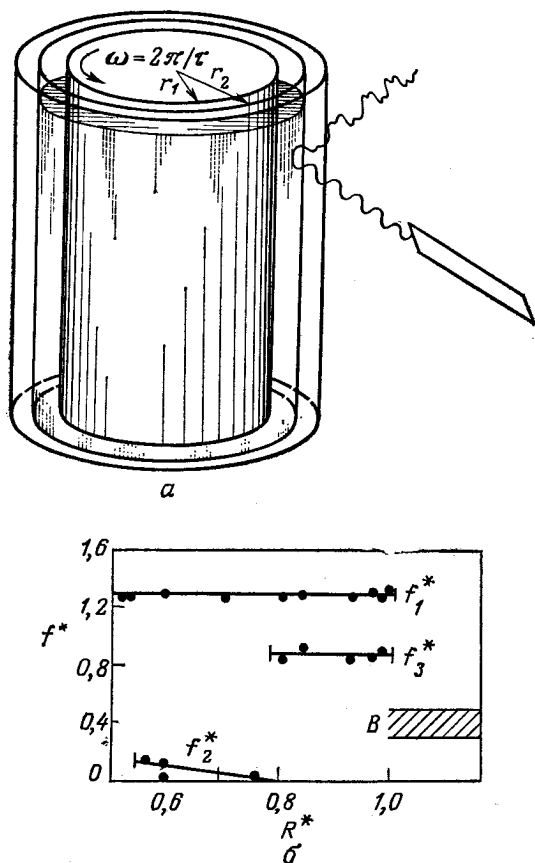


Рис. 20.31.

a — схема эксперимента для изучения тейлоровской неустойчивости методом светового рассеяния; *б* — экспериментальные данные, демонстрирующие наличие одного периодического режима, двух квазипериодических режимов и турбулентного режима. (Перепечатано из работы [13].)

только благодаря большому числу ненулевых параметров порядка.

Результаты экспериментальных и теоретических исследований, по-видимому, свидетельствуют о том, что предложенная Рюэлем и Тейкенсом картина перехода к турбулентности дает по меньшей мере правильное направление в решении задачи. Авторы работы [13] изучали тейлоровскую неустойчивость (рис. 20.31) методом светового рассеяния. Вода была заключена в кольцевом зазоре между вращающимся стальным цилиндром радиусом r_1 и коаксиальной с ним стеклянной трубой внутрен-

ним радиусом r_2 . Период вращения τ связан с числом Рейнольдса R соотношением $R = 2\pi r_1 d / \nu \tau$, где ν — кинематическая вязкость. Свет, рассеянный небольшим объемом жидкости, несет информацию о частотных фурье-компонентах радиальных составляющих скорости жидкости. Эта информация, записанная с помощью физических приборов, показана на рис. 20.31 в виде зависимости приведенной частоты $f^* = f\tau$ от числа Рейнольдса $R^* = R/R_T$, нормированного таким образом, что возникновению турбулентности соответствует значение $R^* = 1,0$. Появление различных режимов происходит при следующих значениях R^* : $R_1^* = 0,064$, $R_2^* = 0,54 \pm 0,01$, $R_3^* = 0,78 \pm 0,03$, $R_4^* = 1,0$. Бифуркация к хаосу при $R_4^* = 1,0$ оказалась воспроизводимой без гистерезиса. Мода, связанная с f_2^* , затухает при $R^* = 0,78 \pm 0,04$. По-видимому, исчезновение моды, связанной с частотой f_2^* , непосредственно сопровождается появлением новой моды с частотой f_3^* . Кроме того, по всей видимости, бифуркация Хопфа при $R^* = 1,0$ приводит к квазипериодическому движению с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, которое структурно неустойчиво и под влиянием естественно возникающих возмущений начинает затем вести себя хаотически. Такое хаотическое поведение характеризуется широким энергетическим спектром. В рассматриваемой системе переход к турбулентности связан с четырьмя последовательными бифуркациями, одна из которых (при $R^* = 0,54$) может и не потребоваться для возникновения хаотического поведения.

Для изучения неустойчивости по Рэлею — Бенару авторы работы [14] применили метод светового рассеяния. Сводка полученных ими результатов представлена на рис. 20.32. Здесь R_c — число Рейнольдса, при котором возникает бифуркация к конвективному движению. При $1 < R^* = R/R_c < 20$ движение имеет конвективный характер, причем поле скоростей не зависит от времени. В области $20 < R^* \leq 50$ могут существовать четыре различных, зависящих от времени поля скоростей в перекрывающихся диапазонах изменения числа Рейнольдса. При $20 < R^* \leq 29$ существует единственный периодический режим. В этом режиме энергетический спектр имеет фурье-компоненты, соответствующие основной частоте и ее гармоникам. При $29 \leq R^* < 39,8$ периодическое движение вырабатывает сильную субгармонику в энергетическом спектре с частотой, равной половине основной частоты. Это явление аналогично бифуркации к замкнутым периодическим траекториям с двойными петлями при значении r_b (рис. 20.20) с той лишь разницей, что такой переход окружен спинодалами. В области $31,3 < R^* < 41,9$ наблюдается квазипериодический режим с несоизмеримыми частотами ω_1, ω_2 . Хаотический режим с широким частотным диапа-

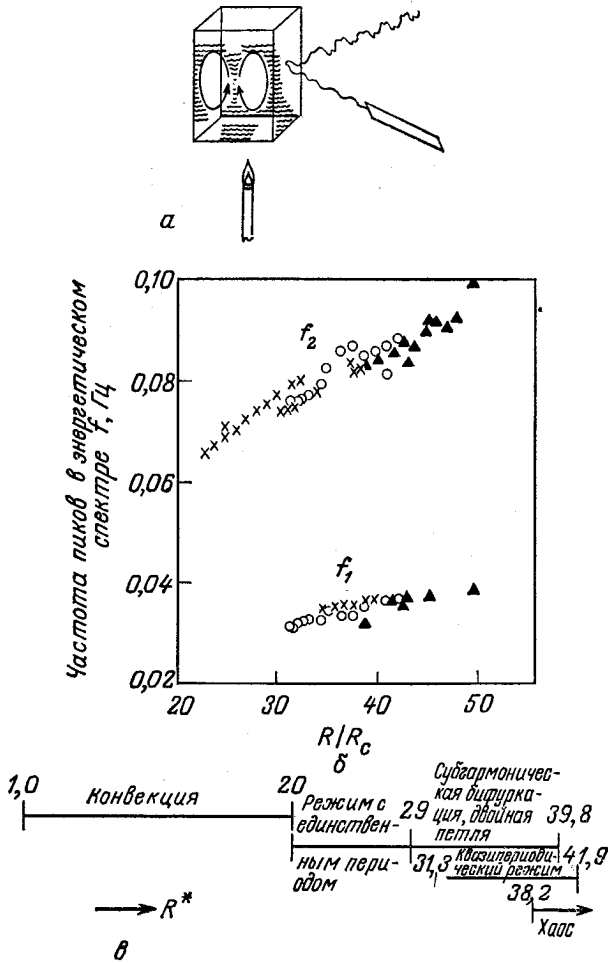


Рис. 20.32.

a — схема эксперимента для изучения неустойчивости по Рэлею — Бенару методом светового рассеяния; *б* — экспериментальные данные, демонстрирующие наличие периодического, квазипериодического и хаотического режимов; *в* — сочетание различных режимов [14]. \times — периодический; \circ — квазипериодический; \blacktriangle — хаотический.

зоном в энергетическом спектре возникает при $38,2 < R^*$. Ветвь, соответствующая единственной частоте и субгармонике, теряет устойчивость при $R^* = 39,8$, а ветвь квазипериодического движения теряет устойчивость при $R^* = 41,9$. В области $41,9 < R^* < 50$ наблюдается только хаотический режим.

Экспериментальные наблюдения были качественно воспроизведены на модели динамической системы с 14 переменными со-

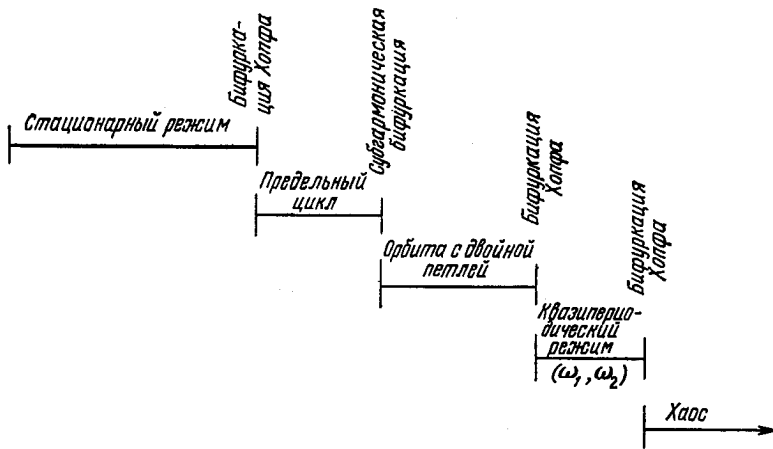


Рис. 20.33.

Критическое поведение модели с 14 переменными состояния для уравнения Навье — Стокса в приближении Буссинеска соответствует только одному типу устойчивости при каждом значении R . Последовательность типов периодических замкнутых орбит хорошо аппроксимирует картину, наблюдаемую в экспериментах для изучения неустойчивости по Тейлору и по Рэлею — Бенару методом светового рассеяния [15].

стояния [15]. Такая система уравнений получается из уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска. Метод, которому следовал автор работы [15], в точности совпадает с методом, использованным Зальцманом [6] и Лоренцем [3], с той лишь разницей, что пространство переменных состояния было расширено до 14 измерений за счет удержания 14 первых четных коэффициентов ряда Фурье. Качественное соответствие поведения этой модели экспериментальным наблюдениям Голуба и Бенсона говорит о том, что модель может быть, по существу, верной, а ошибки возникают за счет усечения пространства переменных состояния.

Рассматриваемая теоретическая модель изучалась при фиксированном числе Прандтля, равном 2,5, и переменном числе Рэлея. В рамках этой модели существует, по-видимому, лишь один устойчивый орбитальный тип при каждом значении приведенного числа Рейнольдса R^* . Последовательность бифуркаций показана на рис. 20.33. Такая картина, определяемая выбранной моделью, находится в согласии с картиной Рюэля — Тейкенса перехода к турбулентности, видоизмененной Ньюхаузом. Экспериментальные результаты, полученные Голубом и Суинни, а также Голубом и Бенсоном, дают основания полагать, что картина Рюэля — Тейкенса, по-видимому, правильна в своей основе, однако Природа нашла такие способы в изобретении и комбинировании последовательности из трех бифуркаций Хопфа,

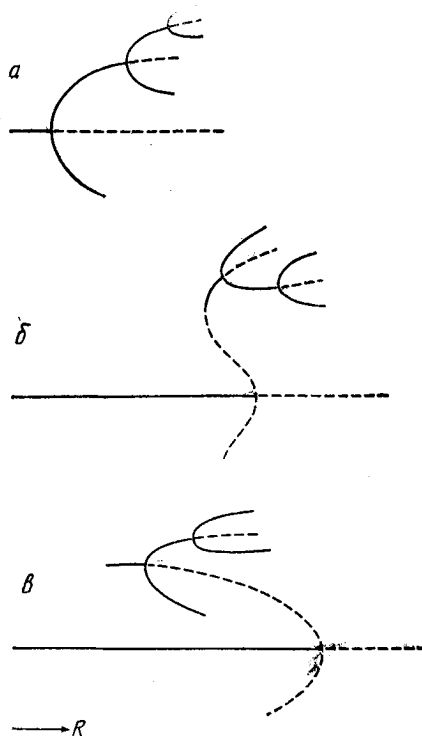


Рис. 20.34.

Картина перехода к турбулентному режиму по Рюэлю — Тейкенсу содержит последовательность из трех бифуркаций Хопфа к периодической орбите (ω_1) , квазипериодической орбите (ω_1, ω_2) и другой квазипериодической орбите $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, которая под действием возмущения может перейти в хаотическую орбиту. (Могут также возникать и другие типы бифуркаций.) Взаимное расположение трех бифуркаций Хопфа может привести к системам, в которых наблюдаются все три стадии (а), две стадии (б) или только одна стадия (в). Каждая из показанных бифуркаций является бифуркацией Хопфа. — — — устойчивость; - - - - неустойчивость.

что действительное поведение реальных физических систем оказывается даже более интересным, чем поведение при трех последовательных бифуркациях, предложенных Рюэлем и Тейкенсом. На рис. 20.34 схематически показано, каким образом три, две или даже одна бифуркация Хопфа могут инициировать переход к турбулентности.

9. ВЫВОДЫ

Нелинейные системы, по существу, являются более трудными для изучения, чем их линейные аналоги. Для описания n -мерных нелинейных динамических систем мы не располагаем таким ши-

роким комплексом теорем, который существует для описания линейных динамических систем. Поэтому лучший выход состоит в том, чтобы найти интересные точки и поверхности в пространстве \mathbb{R}^n и вблизи таких инвариантных множеств выполнить линейный анализ устойчивости.

Цель этой главы заключалась в том, чтобы показать, каким более или менее упорядоченным образом можно подойти к проблеме построения таких интересных инвариантных множеств. Здесь был представлен подобный подход преимущественно графического характера. Размерность такого графического метода зависит от размерности n пространства состояний. Этот метод в упрощенном виде был использован для двумерного графического построения в комплексной плоскости корней усеченной матрицы устойчивости. Подобные методы дают возможность без особых затруднений строить динамические потоки и изолированные нелокальные инвариантные поверхности, а также помогают понять характер возникающих бифуркаций.

Было проведено изучение некоторых интересных нелинейных динамических систем, и среди них структурно устойчивого потока. Рождение такого потока происходит в результате бифуркации Хопфа, что является предельным циклом, топологически эквивалентным окружности T_1 . По мере увеличения степени нелинейности структурно устойчивого возмущения гармонического осциллятора этот поток становится все более сплюснутым и деформированным. В пределе получим релаксационные колебания.

Кроме того, были изучены потоки в \mathbb{R}^3 и построен один интересный поток, замыкающийся на себя. В качестве исходного материала послужило одно из базовых нульмерных критических множеств в \mathbb{R}^3 ($F_+^2 \times M_0^1$), а также механизм «обратной связи». Этот поток моделирует поведение простейшей нелинейности динамической системы в \mathbb{R}^3 . Была рассмотрена пара таких нульмерных критических множеств в \mathbb{R}^3 . Их можно было расположить таким образом, чтобы переменная состояния прыгала хаотическим образом от одного фокуса к другому. Этот результат дает весьма полезную наглядную демонстрацию поведения нелинейных уравнений Лоренца. Несколько подробнее были рассмотрены локальные критические свойства (r_1, r_f, r_4) , однако относительно нелокальных бифуркаций (r_2, r_3) мы располагаем довольно скудными сведениями. Подобная система нелинейных уравнений была использована для описания неустойчивости слоя жидкости, подогреваемого снизу, и неустойчивого лазерного излучения.

Показана важность теоремы о центральном многообразии, представляющая собой для динамических систем аналог леммы Тома о расщеплении, предложенный для описания положения равновесия градиентных систем. Использование этой теоремы позво-

ляет уменьшить размерность сложной нелинейной задачи с $n = \dim \mathbb{R}^n$ до $\dim V_c$. Последнее как раз является числом собственных значений матрицы устойчивости F_{ij} с нулевыми действительными частями. Таким образом, исследование бифуркаций исходной динамической системы сводится к исследованию лишь таких бифуркаций, которые могут возникнуть на центральном многообразии. Это обстоятельство служит обоснованием описанных методов определения «неприводимых потоков» для n -мерных динамических систем.

В заключение было дано описание картины Рюэля — Тейкенса перехода к турбулентности в результате каскада из четырех, трех или меньшего числа последовательных бифуркаций Хопфа. Приведено обсуждение двух гидродинамических экспериментов, результаты которых согласуются с описанной картиной. По-видимому, с ней согласуются также и наблюдения перехода к турбулентности в оптически бистабильной системе [16].

Литература

1. Zeeman E. C. Catastrophe Theory, Selected Papers 1972—1977, Reading: Addison-Wesley, 1977.
2. Rössler O. E. Different Types of Chaos in Two Simple Differential Equations, *Z. Naturforsch.*, **31a**, 1664—1680 (1976).
3. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atoms. Sci.*, **20**, 130—141 (1963).
4. Robbins K. A. Periodic Solutions and Bifurcation Structure at High r in the Lorenz Model, *SIAM J. Appl. Math.*, **36**, 457—472 (1979).
5. Treve Y. M. Theory of Chaotic Motion with Application to Controlled Fusion Research, in: Topics in Nonlinear Dynamics, A Tribute to Sir Edward Bullard (S. Jorna, Ed.), New York: American Institute of Physics, 1978, pp. 147—220.
6. Saltzman B. Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem — I. *J. Atoms Sci.*, **19**, 329—341 (1962).
7. Risren H., Nummedal K. Self-Pulsing in Lasers, *J. Appl. Phys.*, **39**, 4662—4672 (1968).
8. Haken H. Analogy Between Higher Instabilities in Fluids and Lasers, *Phys. Lett.*, **53A**, 77—78 (1975).
9. Arnold V. I. Ordinary Differential Equations, Cambridge: M. I. T. Press, 1973.
10. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence, *Commun. Math. Phys.*, **20**, 167—192 (1971).
11. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications, New York: Springer, 1976.
12. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. Occurrence of Strange Attractors Near Quasi-Periodic Flows on T^m , $m \geq 3$, *Commun. Math. Phys.*, **64**, 35—40 (1978).
13. Gollub J. P., Swinney H. L. Onset of Turbulence in a Rotating Fluid, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 927—930 (1975).
14. Gollub J. P., Benson S. V. Chaotic Response to Periodic Perturbation of a Convecting Fluid, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 948—951 (1978).
15. Curry J. H. Chaotic Response to Periodic Modulation of a Convecting Fluid, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1013—1016 (1979).
16. Gibbs H. M., Hopf F. A., Kaplan D. L., Schoemaker R. L. Observation of Chaos in Optical Bistability, *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 474—477 (1981).

До сих пор, говоря о теореме Тома, обсуждая ее важность для теории катастроф и практическую значимость, мы избегали точной формулировки теоремы. Объясняется это тем, что формулировка теоремы невозможна без использования таких понятий, как возмущение, наследственность, устойчивость и особенности функций. Кроме того, теорема Тома по своей природе является «качественной» теоремой. Это означает, что мы должны иметь в своем распоряжении метод, позволяющий определить, когда две функции качественно одинаковы, а когда нет.

Теорема Тома имеет дело с многообразиями и с особенностями отображений из одного многообразия (критического многообразия) в другое (пространство управляющих параметров). Особенности легко могут быть рассмотрены в терминах теоремы об обратной функции; особенности встречаются в тех случаях, когда теорема не имеет места.

1. ТОПОЛОГИЯ

До сих пор мы довольно свободно обращались с понятием «возмущение», или понятием «близость» одной функции другой. Чтобы формализовать это понятие, необходимо сначала найти способ наглядного представления «расстояния» между двумя функциями, или, что в данном случае эквивалентно, расстояния между любой и нулевой функциями. Здесь нам на помощь приходит топология. Существует один очевидный способ ввести топологию в множество функций, определенных на \mathbb{R}^n , — это так называемая *топология рядов Тейлора*.

Построим ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = f(x^0) + (x - x^0)_i f_i + \frac{1}{2!} (x - x^0)_i (x - x^0)_j f_{ij} + \dots \quad (21.1)$$

Поскольку все производные берутся в точке x^0 , функция $f(x)$ представляется точкой в некотором евклидовом пространстве. Например, если ограничиться лишь членами разложения (21.1) k -й степени (включая k), то можно считать, что коэффициенты $f, f_i, f_{ij}, \dots, f_{i_1 \dots i_k}$ принадлежат пространству \mathbb{R}^D , где

$$\begin{aligned} D &= \underbrace{1}_{\text{постоянный член}} + \underbrace{n}_{\text{линейные члены}} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2!}}_{\text{квадратичные члены}} + \dots + \underbrace{\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}}_{\text{члены } k\text{-й степени}} = \\ &= \frac{(n+k)!}{n!k!}, \end{aligned} \quad (21.2)$$

Усеченный до членов k -й степени ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x^0 называется k -струей функции f в точке x^0 и обозначается символом $j^k f(x^0)$ или просто $j^k f$. Для любой гладкой функции $f(x)$ $j^k f(x^0) \in \mathbb{R}^D$.

Топологии в пространстве \mathbb{R}^D общеизвестны, и с ними легко работать. Если f, g — две функции, то расстояние между ними может быть определено следующим образом:

$$\|f - g\|_{x^0} = |f(x^0) - g(x^0)| + \sum_i |f_i - g_i| + \sum_{ij} |f_{ij} - g_{ij}| + \dots \\ \dots + \sum_{ij \dots k} |f_{ij \dots k} - g_{ij \dots k}|. \quad (21.3i)$$

Если D конечно, то расстояние можно определить с помощью формулы

$$\|f - g\|_{x^0}^\rho = |f(x^0) - g(x^0)|^\rho + \sum_i |f_i - g_i|^\rho + \sum_{ij} |f_{ij} - g_{ij}|^\rho + \dots \\ \dots + \sum_{ij \dots k} |f_{ij \dots k} - g_{ij \dots k}|^\rho, \quad (21.3ii)$$

где

$$\rho \geq 1. \quad (21.3p)$$

Открытые множества, а следовательно, и топология могут быть определены различным образом в зависимости от используемого способа определения расстояния между функциями (21.3 i), (21.3 ii), (21.3 p), т. е. ε -окрестность функции f содержит все функции g , отстоящие от f на расстоянии меньшем ε . Если k конечно (следовательно, D также конечно), определения (21.3 i), (21.3 ii), (21.3 p) порождают эквивалентные топологии; если $k \rightarrow \infty$, $D \rightarrow \infty$, то топологии различны. Наиболее полезна для нас топология, порождаемая определением (21.3 i).

Если $k \rightarrow \infty$, то соответствующая топология называется топологией C^∞ в точке x^0 . Эти топологии мы будем обозначать также $C^k(x^0; \mathbb{R}^1)$, $C^\infty(x^0; \mathbb{R}^1)$.

Введение топологий позволяет формально определить понятие «возмущение» в точке: $g(x)$ является возмущением функции $f(x)$ в точке x^0 , если расстояние между $g(x)$ и $f(x)$ мало в C^k -топологии (или C^∞ -топологии) в точке x^0 . Если расстояние между $g(x)$ и $f(x)$ в C^k -топологии (или C^∞ -топологии) в точке x^0 меньше, чем ε для всех $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что $g(x)$ принадлежит ε -окрестности функции $f(x)$ в C^k (C^∞)-топологии. Две функции, близкие друг другу в топологии C^k , имеют свойство «быть равными почти всюду на \mathbb{R}^n », а их соответствующие производные до k -й степени также равны почти всюду на \mathbb{R}^n . Соответствующие топологии имеют следующее обозначение: $C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$ и $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$.

◇◇◇ Понятия, введенные для функций, могут быть распространены и на отображения ($y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$). Для этого необходимо только заменить разложение в ряд Тейлора (2.11) на m разложений в ряд Тейлора ($f \rightarrow y_r, r = 1, 2, \dots, m$). В этом случае необходимо лишь ввести дополнительную сумму по r в каждой из членов в правой части формулы (21.3 i). Соответствующие топологии обозначаются $C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ и $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

◇◇◇ Все утверждения о возмущениях (ч. I), сформулированные в терминах топологии C^∞ (открытость, плотность и др.), как правило, справедливы и для топологий $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$ или $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

◇◇◇ Чтобы построить топологию, определяемую коэффициентами членов ряда Тейлора вплоть до k -й степени, функция f должна быть по крайней мере k раз дифференцируема. Подобная проблема, как правило, не возникает, когда речь идет о применении топологии в тех областях науки и техники, где используются потенциальные функции, которые обычно являются гладкими, т. е. имеют производные всех порядков. Но при этом предполагается, что существует однозначное соответствие между функциями и их рядами Тейлора.

Однако подобное предположение справедливо только в том случае, когда функция $f(x)$ является аналитической в точке x^0 , т. е. ее ряд Тейлора в этой точке сходится к $f(x)$ в окрестности точки x^0 .

Чтобы показать разницу между аналитическими и гладкими функциями, математики любят демонстрировать следующий математический «ужас»:

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ &= 0, & x = 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Все коэффициенты ряда Тейлора этой функции в нуле обращаются в нуль, так что ряд Тейлора гладкой функции $h(x)$ сходится в точке $x = 0$ к нулевой функции. Для любых двух аналитических функций $f_1(x)$ и $g(x)$ определим функцию $f_2(x)$ следующим образом:

$$f_2(x) = f_1(x) + g(x)h(x),$$

или

$$f_2(x) = f_1(x)[1 - h(x)]^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x)[1 - e^{-g(x)/x^2}], & x \neq 0, \\ f_1(0), & x = 0, \end{cases} \quad g(0) > 0. \quad (21.5)$$

Функция $f_2(x)$ гладкая и имеет ряд Тейлора, в точности совпадающий в нуле с рядом Тейлора функции $f_1(x)$. Однако $f_2(x) \neq$

$\neq f_1(x)$; следовательно, функция $f_2(x)$ не аналитична в нуле. Короче говоря, для любой аналитической функции $f_1(x)$ существует большое семейство гладких, но не аналитических функций, имеющих то же разложение в ряд Тейлора.

И все-таки идея отображения функции в евклидово пространство \mathbb{R}^p с целью получения топологии является полезной и привлекательной. Мы используем этот подход в качестве некоторого эвристического средства. Результаты, которые приводятся ниже, верны как для аналитических, так и для гладких функций.

2. УСТОЙЧИВЫЕ ФУНКЦИИ

В общем случае функция является устойчивой или структурно устойчивой, если ее свойства качественно не изменяются под действием возмущения. В гл. 4 было показано, что в интуитивном смысле потенциальная функция устойчива в точках, где $\nabla V \neq 0$, и в морсовских критических точках. Однако этого нельзя сказать о вырожденных критических точках. Пусть $V(x_1, \dots, x_n)$ — потенциальная функция, а $\varepsilon f(x_1, \dots, x_n)$ — ее возмущение. Тогда функция V устойчива в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если существует такая гладкая замена координат $x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n)$, что новая (возмущенная) функция $V' = V + \varepsilon f$ в новой системе координат имеет ту же самую структуру, что и старая функция в старой системе координат:

$$V'(x') \doteq V(x). \quad (21.6)$$

Пример 1. Предположим, что в морсовской критической точке

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (21.7)$$

$$\varepsilon f(x) = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n.$$

Тогда

$$V(x) + \varepsilon f(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1\right)^2 + \dots + \left(x_n + \frac{1}{2} \varepsilon_n\right)^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2).$$

Таким образом, если взять

$$x'_i = x_i + \frac{1}{2} \varepsilon_i, \quad (21.8)$$

$$V'(x') = x_1'^2 + \dots + x_n'^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2),$$

то будем иметь

$$V'(x') = V(x). \quad (21.9)$$

Следовательно, в окрестности морсовских седел функции локально устойчивы.

Пример 2. Функция $f(x) = x^3$ не является устойчивой в вырожденной критической точке $x = 0$, так как возмущение либо удаляет критическую точку вообще (рис. 6.1, $a_1 > 0$), либо расщепляет ее в невырожденные критические точки (рис. 6.1, $a_1 < 0$).

◆◆◆ Функции, локально устойчивые во всех точках, в которых они определены, называются *устойчивыми, глобально устойчи-*

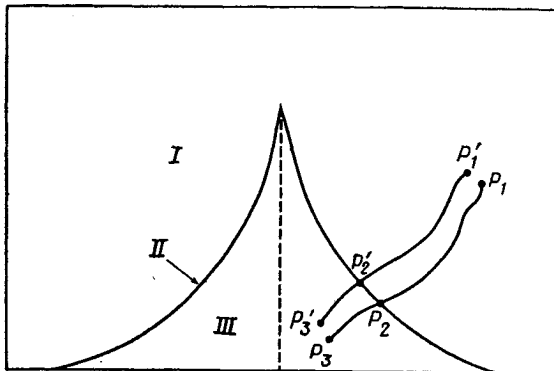


Рис. 21.1.

Кривая, соединяющая точку p_3 области III с точкой p_1 области I, пересекает кривую складки в некоторой ее точке p_2 . При возмущении кривая, соединяющая точку p_3' с p_1' , пересекает кривую складки в некоторой точке p_2' , расположенной вблизи p_2 . Таким образом, вырожденные критические точки могут быть устойчиво встречаемы в семействах функции, даже если они были структурно неустойчивы, когда встречались в изолированных функциях.

выми или структурно устойчивыми. Функция $f(x) = x^3$ не является глобально устойчивой, так как она не устойчива в точке $x = 0$. Функции $F(x; a_1) = x^3 + a_1x$ — это морсовские функции, если $a_1 \neq 0$; поэтому эти функции глобально устойчивы.

Пример 3. Если рассмотреть семейство функций A_3 , то члены этого семейства, параметризуемые точками открытых областей I или III (рис. 21.1), являются морсовскими функциями. Возмущение $\epsilon f = (\delta a/2)x^2 + (\delta b)x$ такой функции дает «близкую функцию» со свойствами, качественно тождественными свойствам исходной функции. Единственными неустойчивыми функциями в этом семействе являются функции, параметризуемые полукубической параболой (область II) или началом координат, так как возмущение $(\delta a, \delta b)$ перемещает эти точки либо в область I, либо в область III.

◇◇◇ Иногда выдвигаются иные условия, которым должна удовлетворять функция, чтобы быть глобально устойчивой. Одно из них состоит в том, что функция должна иметь различные значения в разных критических точках. Относительно такого условия семейство A_3 уже не было бы устойчивым на луче $a < 0$, $b = 0$ (штриховой луч на рис. 21.1), так как два минимума в точках $x = \pm \sqrt{-a}$ имеют одинаковые значения (в силу симметрии). Это и есть то существенное различие, которое имеется между локальным бифуркационным множеством и нелокальным бифуркационным множеством (множество Максвелла).

До сих пор мы обсуждали устойчивость функции и устойчивости отдельных функций в семействах функций, но при этом не затрагивали вопроса об устойчивости самого семейства функций.

Предположим, что мы имеем 1-параметрическое семейство функций, обладающих следующим свойством: некоторые члены этого семейства имеют два локальных минимума и локальный максимум, в то время как другие члены этого семейства имеют лишь один минимум. Для того чтобы сделать рассмотрение более конкретным, предположим, что семейство имеет вид

$$V(x; s) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}a(s)x^2 + b(s)x, \quad s \in \mathbb{R}^1, \quad (21.10)$$

и что функция $V(x; s_3)$ соответствует точке p_3 (рис. 21.1), а функция $V(x; s_1)$ — точке p_1 . Любое гладкое 1-параметрическое семейство, содержащее обе функции $V(x; s_3)$ и $V(x; s_1)$, должно содержать также все функции $V(x; s)$ некоторой кривой ($a(s)$, $b(s)$), связывающей точки p_3 и p_1 . Это означает, что функция $V(x; s_2)$, имеющая дважды вырожденную критическую точку, обязательно *должна* входить в это семейство.

Теперь предположим, что семейство функций (21.10) подвергается действию возмущения $\varepsilon f = \frac{1}{2}\delta a(s)x^2 + \delta b(s)x$. Тогда возмущенное семейство функций будет соответствовать кривой, связывающей точку p'_3 с точкой p'_1 . Ясно, что и в этом случае кривая должна пересекать полукубическую параболу, которая играет роль сепаратрисы между открытыми областями I и III. Следовательно, возмущенное семейство функций также содержит функцию $V'(x; s'_2)$, имеющую дважды вырожденную критическую точку. В действительности любая кривая, связывающая точку вблизи p_3 с точкой вблизи p_1 , должна пересекать сепаратрису. Таким образом, несмотря на то что функции с вырожденными критическими точками не являются устойчивыми, они могут устойчиво встречаться в семействах функций.

Концепция устойчивости может быть применена к функциям ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$), семействам функций ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$), отображениям ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$) и семействам отображений ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$). В последнем случае понятие устойчивости работает следующим образом:

1. Два семейства $f_1(x; a), \dots, f_m(x; a)$ и $g_1(x; a), \dots, g_m(x; a)$ эквивалентны, если существует гладкая замена координат:

$$x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_k), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (21.11a)$$

$$a'_j = a'_j(a_1, \dots, a_k), \quad 1 \leq j \leq k, \quad (21.11б)$$

$$y'_l = y'_l(y_1, \dots, y_m), \quad 1 \leq l \leq m, \quad (21.11в)$$

такая, что

$$y'_l [f_1(x; a), \dots, f_m(x; a)] = g_l [x'_1(x; a), \dots, x'_n(x; a); a'_1(a), \dots, a'_k(a)]. \quad (21.12)$$

В обозначениях современной математики выражение (21.12) является утверждением о «коммутативности» следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\
 (x; a) & & (y) \\
 (21.11a, 6) & \downarrow & \downarrow (21.11b) \\
 \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \\
 (x'; a') & & (y')
 \end{array} \quad (21.13)$$

2. Семейство отображений $f_1(x; a), \dots, f_m(x; a)$ устойчиво, если любое его возмущение $g_1(x; a), \dots, g_m(x; a)$ ему эквивалентно.

◇◇◇ Для элементарных катастроф, перечисленных в табл. 2.2, пространство \mathbb{R}^k управляющих параметров разбивается сепаратрисой (ее вид обсуждался в гл. 5) на открытые области. Любая функция, параметризуемая точкой одной из этих открытых областей, является морсовской функцией и поэтому структурно устойчива. Функция же, параметризуемая точками сепаратрисы, является структурно неустойчивой.

◇◇◇ Семейства функций (включая их неморсовские функции), перечисленные в табл. 2.2, только тогда встречаются структурно устойчивым образом в типическом k -параметрическом семействе потенциальных функций, когда они приводятся вблизи вырожденной критической точки к канонической форме (2.4).

◇◇◇ Концепция структурной устойчивости впервые была изучена А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1] в контексте теории динамических систем. Динамическая система называется *структурно устойчивой*, если малые возмущения динамической системы качественно не изменяют решений уравнений движения. Частным случаем общей динамической системы является градиентная система, которая может быть описана отдельной функцией (ее потенциалом). Следовательно, понятие структурной устойчивости может быть применено к градиентным системам, и в частности к функциям, характеризующим такие системы.

3. НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА

Как только математическая система, зависящая от управляющих параметров, определена, возникает необходимость в изучении ее свойств. Свойства, присущие открытому всюду плотному подмножеству управляющих параметров этой системы, будем называть *наследственными свойствами*. Дополнение же к этому подмножеству элементов системы имеет меру нуль.

Пример 1 [2]. Рассмотрим математическую систему, состоящую из двух совместных линейных уравнений от двух неизвестных x и y :

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= a_{13}, \\ a_{21}x + a_{22}y &= a_{23} \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad (21.14)$$

где все шесть коэффициентов a_{ij} вещественны. Система уравнений (21.14) параметризуется точкой в пространстве \mathbb{R}^6 . Попытаемся выяснить, при каких условиях система уравнений (21.14) имеет единственное решение. Ясно, что единственное решение система уравнений имеет тогда и только тогда, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Поэтому (2×2) -матрица (21.14) может стать вырожденной при условии, что (1) одно ее собственное значение равно нулю или два ее собственных значения равны нулю и (2) матрица приводится к диагональному виду или (3) матрица приводится к жордановой форме.

Легко проверить, что множество точек $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющих этим всем условиям, имеет следующие размерности:

1. Одно собственное значение равно 0 3-поверхность в \mathbb{R}^4

Два собственных значения равны 0

2. Матрица диагонализуема Начало координат в \mathbb{R}^4

3. Матрица недиагонализуема 2-поверхность в \mathbb{R}^4

Следовательно, множество точек в \mathbb{R}^6 , на котором система уравнений (21.14) не имеет единственного решения, разбивается на подмножества размерностей $5 (= 3 + 2)$, 2 и 4 . Так как поверхности размерности меньше n в \mathbb{R}^n имеют меру нуль, то свойство системы уравнений (21.14) иметь единственное решение является наследственным. Если рассматривать систему в ненаследственной точке $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) \in \mathbb{R}^6$, то малое возмущение $(\delta a_{11}, \delta a_{12}, \delta a_{13}, \delta a_{21}, \delta a_{22}, \delta a_{23}) \in \mathbb{R}^6$ (вблизи начала координат) уже дает систему уравнений с отличным от нуля определителем и единственным решением. Таким образом, возмущение в точке, где имеет место наследственное свойство (устойчивая точка), качественно на это свойство не влияет. Возмущения же в неустойчивой точке будут приводить к значительным изменениям (в этом случае число решений меняется от бесконечности до одного).

Пример 2. В семействе функций A_3 свойство иметь изолированные критические точки является наследственным (т. е. морсовские функции обладают свойством наследственности).

Пример 3. В 2-параметрическом семействе функций присутствие катастрофы сборки является наследственным. Точка сборки ассоциируется с вырожденной критической точкой функции $(1/4)x^4$. Если ef — произвольное возмущение, взятое из табл. 2.2, то

$$\frac{1}{4}x^4 + ef \doteq V(x; a, b). \quad (21.15a)$$

Тогда для этого семейства найдем, что

$$V(x; -a, -b) + ef = \frac{1}{4}x^4. \quad (21.15b)$$

Таким образом, для данного 2-параметрического семейства $V(x; a, b)$ всегда можно найти возмущение, которое дает функцию с трижды вырожденной критической точкой. Короче говоря, (21.15б) может быть использовано как «уничтожение сделанного» формулой (21.15а).

«Наследственность» — это полезное обобщение математического понятия «плотность»¹⁾. Если некоторая математическая система обладает наследственным свойством, то любой элемент

¹⁾ Вместо термина «наследственная» часто используют такие термины, как «типичная» или «в общем положении» [3].

этой системы может быть с любой точностью аппроксимирован элементами, обладающими этим свойством. Например, неморсовская функция x^3 может быть с любой точностью приближена морсовскими функциями $x^3 + a_1x$ (положим $a_1 \rightarrow 0$).

◇◇◇ В гл. 5 было показано, каким образом ненаследственные точки (в которых $\nabla V = 0$) могут быть использованы для получения информации о наследственных точках ($\nabla V \neq 0$) данной функции, а также каким образом ненаследственные функции (с вырожденными критическими точками) могут быть использованы для получения информации о наследственных (морсовских) функциях.

◇◇◇ Свойство функции «быть морсовской» является наследственным в любом из семейств катастроф, перечисленных в табл. 2.2.

4. ОСОБЕННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ

Многообразие размерности n , или n -многообразие,— это гладкая поверхность, которая в любой своей точке локально устроена как евклидово пространство фиксированной размерности n . Сферическая поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ является 2-мерным многообразием. Отображение f одного n -многообразия \mathcal{P} в другое n -многообразие \mathcal{Q} является невырожденным в $p \in \mathcal{P}$, если оно локально обратимо. Формальная проверка локальной обратимости проводится при помощи теоремы о неявной функции: если x_1, \dots, x_n — система координат в окрестности точки $p \in \mathcal{P}$, а f_1, \dots, f_n — система координат в окрестности точки $f(p) \in \mathcal{Q}$, то отображение f локально обратимо тогда и только тогда, когда якобиан преобразования отличен от нуля:

$$\det \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_p \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (21.16)$$

Грубо, но правильно говоря, поскольку \mathcal{P} является n -многообразием, то оно локально выглядит в точке p подобно \mathbb{R}^n . То же имеем и для многообразия \mathcal{Q} в точке $f(p)$. Поэтому $(n \times n)$ -матрица $\partial f_i / \partial x_j$ задает линейное отображение (касательного пространства) \mathbb{R}^n в точке p в (касательное пространство) \mathbb{R}^n в точке $f(p)$.

В качестве примера рассмотрим множество критических точек семейства функций (21.15):

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx \right) &= 0, \\ x^3 + ax + b &= 0. \end{aligned} \quad (21.17)$$

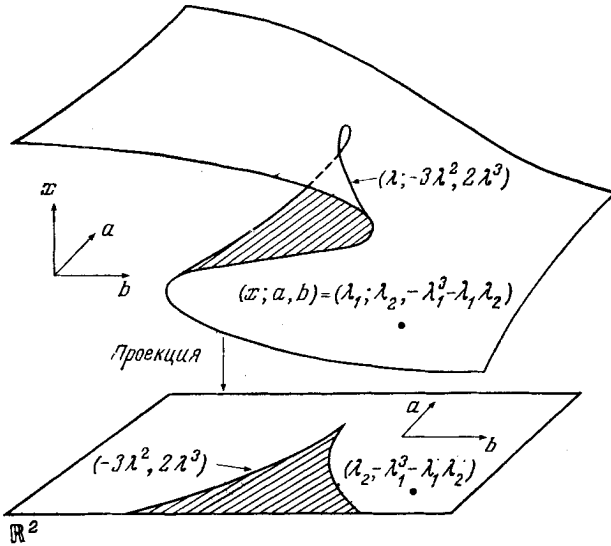


Рис. 21.2. Уравнение $\nabla V(x; a, b) = 0$ представляет собой гладкое двумерное многообразие.

Полукубическая парабола $(x; a, b) = (\lambda; -3\lambda^2, 2\lambda^3)$, описывающая точки многообразия, в которых касательная плоскость вертикальна, также является гладкой. Особенности присутствуют лишь в отображении проектированно вниз на плоскость управляющих параметров.

Мы получили двумерное многообразие со складкой, общий вид которого изображен на рис. 21.2. Координаты любой точки этого многообразия, вложенного в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , могут быть записаны следующим образом:

$$(x; a, b) = (\lambda_1; \lambda_2, -\lambda_1^3 - \lambda_1 \lambda_2). \tag{21.18}$$

Теперь рассмотрим отображение проектирования 2-многообразия (21.17) на двумерную плоскость управляющих параметров \mathbb{R}^2 , определяемое формулами

$$\begin{aligned} (x; a, b) &\xrightarrow{\text{Проекция}} (a, b), \\ a &= \lambda_2, \\ b &= -\lambda_1^3 - \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned} \tag{21.19}$$

Якобиан этого отображения равен

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial a}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial b}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial b}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3\lambda_1^2 & -\lambda_2 - \lambda_1 \end{vmatrix} = 3\lambda_1^2 + \lambda_2. \tag{21.20}$$

За исключением случая, когда $\lambda_2 = -3\lambda_1^2$, этот якобиан отличен от нуля, и, следовательно, отображение обратимо. Множество исключительных точек определяет кривую

$$(x; a, b) = (\lambda_1; -3\lambda_1^2, 2\lambda_1^3) \quad (21.21)$$

в пространстве \mathbb{R}^3 . Она представляет собой гладкую кривую в \mathbb{R}^3 , состоящую из множества точек многообразия, в которых касательная к нему плоскость «вертикальна». Проекция этой кривой на плоскость управления имеет каспоидный изгиб:

$$(\lambda_1; -3\lambda_1^2, 2\lambda_1^3) \rightarrow (a = -3\lambda_1^2, b = 2\lambda_1^3). \quad (21.22)$$

Уравнение этой каспоидной кривой может быть записано как

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^{1/2} = \lambda_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^{1/3}$$

или

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2. \quad (21.23)$$

Кривая (21.23) является «тенью», которую отбрасывает складка на поверхности (21.17) при освещении ее лучами, параллельными оси x .

Подчеркнем еще раз, что многообразии (21.17) гладкое, т. е. не имеет острых углов или особенностей. То же можно сказать и о кривой (21.21). Эта кривая дает местонахождение всех вырожденных критических точек в семействе функций $V(x; a, b)$. Только отображение проектирования (21.19) содержит особенности. Проекция многообразия (21.17) на \mathbb{R}^2 разбивает плоскость управляющих параметров на открытые области; область I (V имеет одну критическую точку) и область III (V имеет три морсовские критические точки). Линии складки (область II) соответствуют потенциальным функциям, имеющим одну невырожденную и одну дважды вырожденную критические точки, а изгиб соответствует потенциальной функции $x^4/4$. Произвольное возмущение (21.15а) может изменить местонахождение и ориентацию сепаратрисы, однако оно не может изменить ее вида. Короче говоря, особенность в отображении проектирования устойчива относительно возмущений. Эта особенность является наследственным свойством проекций критических многообразий 2-параметрических функций на плоскость управляющих параметров.

5. ТЕОРЕМА ТОМА

Теперь сформулируем теорему Тома. Если $f(x; c)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^k$, — гладкая функция, отображающая $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$, то определим множество критических точек $\mathcal{M}_f \subset \mathbb{R}^{n+k}$ как множество

точек, в которых градиент $\nabla_x f = 0$. Отображение проектирования $\chi_f: \mathcal{M}_f \rightarrow \mathbb{R}^k$ определим так, как это было сделано в разд. 4. Обозначим через F множество всех гладких функций, отображающих $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Теорема Тома. Если $k \leq 5$, то существует открытое всюду плотное множество функций $F^* \subset F$ со следующими наследственными свойствами (для $f \in F^*$): \mathcal{M}_f — многообразие размерности k , любая особенность отображения проектирования χ_f эквивалентна одной из элементарных катастроф и χ_f локально устойчиво относительно малых возмущений функции f .

Теорема Тома, сформулированная в более удобной для прикладных целей форме, утверждает, что в типичном k -параметрическом семействе функций ($k \leq 5$) n переменных — единственно неморсовские критические точки, которые могут быть встречены устойчиво, — имеют канонические формы, перечисленные в табл. 2.2.

6. ВЫВОДЫ

Для нематематика вся сущность элементарной теории катастроф заключена в табл. 2.2. Тем не менее, по-видимому, не совсем корректно обсуждать практическую значимость этой теории, не приводя формулировки теоремы Тома. Именно этот пробел и был ликвидирован.

В настоящей главе были введены такие понятия, как возмущение, устойчивость, наследственность и особенность. Это позволило, наконец, сформулировать теорему Тома.

◇◇◇ Математические понятия устойчивость, наследственность особенности более подробно представлены в работах [3—7].

Литература

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы ДАН СССР, 14, 247—251 (1937).
2. Sussman H. J. Catastrophe Theory, *Synthese*, 31, 229—270 (1975).
3. Арнольд В. И. Особенности гладких отображений. УМН, 1968, 23 : 1, 3—44.
4. Golubitsky M., Guillemin V. Stable Mappings and Their Singularities, New York: Springer, 1973. [Имеется перевод: Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.]
5. Poston T., Stewart I. N. Taylor Expansions and Catastrophes, London: Pitman, 1976.
6. Zeeman E. C. Catastrophe Theory, Selected Papers 1972—1977, Reading: Addison-Wesley, 1977.
7. Poston T., Stewart I. N. Catastrophe Theory and Its Application, London: Pitman, 1978. [Имеется перевод: Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]

Трансверсальность — чрезвычайно важное понятие, позволяющее ответить на вопросы об устойчивости и наследственности свойств функций и семейств функций. Два многообразия, вложенные в пространство \mathbb{R}^N , пересекаются трансверсально, если прямая сумма их касательных пространств в точке пересечения имеет размерность N . Два многообразия трансверсальны (или пересекаются трансверсально), если их пересечение пусто или они пересекаются трансверсально в любой точке своего пересечения. Аналогичные определения имеют силу и для пересечения одного многообразия Q , вложенного в \mathbb{R}^N , с образом другого многообразия \mathcal{P} , отображаемого в \mathbb{R}^N при помощи отображения \mathcal{F} . Важными следствиями трансверсальности являются (1) устойчивость и (2) наследственность:

1. Если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ пересекает Q трансверсально в пространстве \mathbb{R}^N , то это верно для любого возмущения отображения \mathcal{F} ;
2. Множество отображений \mathcal{F} многообразия \mathcal{P} в пространстве \mathbb{R}^N , трансверсальных Q , всюду плотно в множестве всех отображений многообразия \mathcal{P} в \mathbb{R}^N .

Следствия трансверсальности становятся значительно ощутимее, если пространство \mathbb{R}^N отождествить с конечномерным линейным пространством p -струй функций $j^p f$.

В настоящей главе будет показано, что если в качестве многообразия Q зафиксировать линейное векторное подпространство \mathbb{R}^N , в котором коэффициенты линейных членов струи $j^p f$ обращаются в нуль, и положить $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ (пространство переменных состояния), то $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ будет n -мерным подмногообразием \mathbb{R}^N с координатами, параметризуемыми посредством точек $x^0 \in \mathbb{R}^n$, в которых производится разложение функции в ряд Тейлора. Из теоремы о трансверсальности следует, что свойства функций иметь только изолированные критические точки является наследственным и функции, обладающие этим свойством, устойчивы к возмущениям.

Можно зафиксировать $\mathcal{P} = \mathbb{R}^k$ (пространство управляющих параметров) и $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ (k -мерное многообразие, точки которого имеют координаты, являющиеся коэффициентами ряда Тейлора струй $j^p f$, рассматриваемых в критической точке); можно зафиксировать $Q = V_l$ (где V_l — множество точек пространств \mathbb{R}^N , в которых ровно l собственных значений матрицы $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_i$, обращаются в нуль). В этом случае $\dim V_l = N - l(l+1)/2$ и $\dim \mathcal{F}(\mathcal{P}) = k$, так что неморсовские критические точки для функций l «плохих» переменных состояния и k управляющих параметров могут устойчиво встречаться только тогда, когда $k \geq l(l+1)/2$.

Кроме того, будет показано, что эти же методы могут быть использованы для выявления членов начальной части разложения функций l «плохих» переменных состояния и k управляющих параметров в ряд Тейлора, которые могут устойчиво исчезать в неморсовской критической точке.

1. ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Понятие трансверсальности может быть обоснованно применено как к кривым, так и к многообразиям или к отображениям. Рассмотрим подробно наиболее часто встречаемые случаи трансверсальности.

1.1. Многообразия трансверсально другому многообразию

Предположим, что \mathcal{P} — многообразие размерности p в пространстве \mathbb{R}^N , а \mathcal{Q} — многообразие размерности q , вложенное в \mathbb{R}^N . Эти многообразия могут пересекаться или нет. Если множества пересекаются в точке $x^0 \in \mathbb{R}^N$, то скажем, что они пересекаются *трансверсально* в x^0 , или *трансверсальны* в x^0 , если касательные к ним в точке x^0 порождают пространство \mathbb{R}^N .

Пример 1 (рис. 22.1). Две кривые \mathcal{P} и \mathcal{Q} в пространстве \mathbb{R}^2 , каждая из которых является одномерным многообразием, пересекаются трансверсально в точках a и b , но не в точке c (рис. 22.1, а). Если одно из этих двух многообразий \mathcal{P} или \mathcal{Q} слегка пошевелить, то точка двойной особенности c либо расщепится в две изолированные точки трансверсального контакта c_1 и c_2 (рис. 21.1, б), либо контакт исчезнет совсем (рис. 22.1, в).

Пример 2 (рис. 22.2). Кривая \mathcal{P} пересекает сферу \mathcal{Q} в \mathbb{R}^3 трансверсально в точках a и b , но не в точке c .

Пример 3 (рис. 22.3). В пространстве \mathbb{R}^3 сферы \mathcal{P} и \mathcal{Q} пересекаются по окружности, которая является одномерным многообразием. Эти две сферы пересекаются трансверсально в любой точке данной окружности. Если же радиусы и центры этих двух сфер слегка изменить, то последние все еще трансверсально пересекаются по окружности, и новая окружность, лежащая в их пересечении, будет расположена вблизи исходной окружности.

Пример 4 (рис. 22.4). Одномерные многообразия \mathcal{P} и \mathcal{Q} пересекаются в точке $x^0 \in \mathbb{R}^3$. Поскольку касательное пространство к \mathcal{P} в точке x^0 одномерно, так же как и касательное пространство к \mathcal{Q} в x^0 , то невозможно сделать так, чтобы \mathcal{P} и \mathcal{Q} могли пересекаться трансверсально в \mathbb{R}^3 . Если или \mathcal{P} , или \mathcal{Q} подвергнуть небольшому возмущению, то эти многообразия не будут пересекаться вообще.

Пример 5. Точка \mathcal{P} является нульмерным многообразием, в то время как \mathcal{Q} является двумерным многообразием, вложенным в \mathbb{R}^3 . \mathcal{P} и \mathcal{Q} не могут пересекаться трансверсально, так как их касательные пространства имеют соответственно размерности 0 и 2. Таким образом, касательные пространства не могут породить пространство \mathbb{R}^3 , имеющее размерность 3. Если \mathcal{Q} пересекает \mathcal{P} , то возмущение любого из этих многообразий имеет результатом ситуацию, в которой \mathcal{P} и \mathcal{Q} уже больше не пересекаются.

Определение. Два многообразия \mathcal{P} и \mathcal{Q} , вложенные в пространство \mathbb{R}^N , пересекаются трансверсально (или трансверсальны), если:

они пересекаются трансверсально во всех точках своего пересечения;

они вообще не пересекаются.

Если $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} = p + q < N$, то касательные пространства многообразий \mathcal{P} и \mathcal{Q} в любой точке их пересечения $x^0 \in$

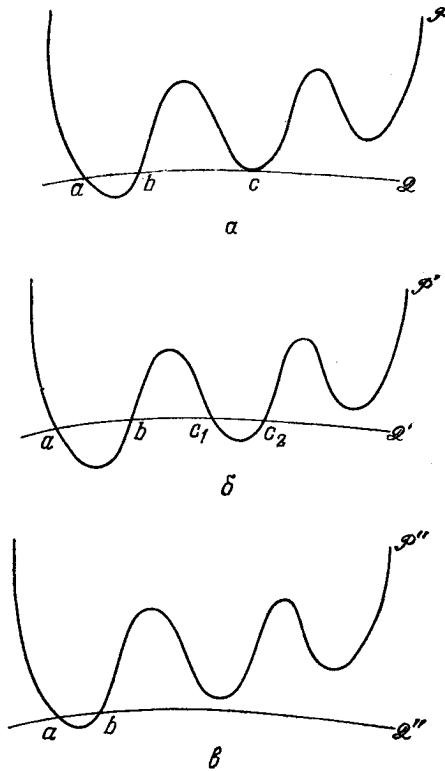


Рис. 22.1.

a — две кривые \mathcal{P} и \mathcal{Q} в пространстве \mathbb{R}^2 пересекаются трансверсально в точках a и b , но не в c ; $b, в$ — при произвольном возмущении кривые \mathcal{P}' и \mathcal{Q}' будут пересекаться трансверсально во всех точках контакта с вероятностью 1.

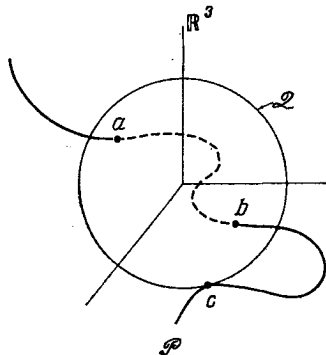


Рис. 22.2. Точки контакта (a, b) в которых кривая \mathcal{P} пересекает поверхность сферы \mathcal{Q} в пространстве \mathbb{R}^3 , являются точками трансверсального пересечения. Эти два многообразия не трансверсальны в точке c .

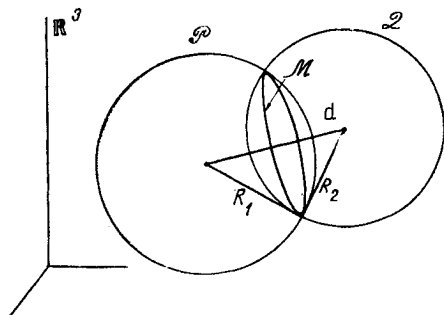


Рис. 22.3. Две сферы \mathcal{P} и \mathcal{Q} в пространстве \mathbb{R}^3 пересекаются трансверсально по окружности \mathcal{M} при условии, что $R_1 + R_2 > d > |R_1 - R_2|$. Точка контакта становится не трансверсальной, если одно из неравенств заменить на равенство. Пересечения совсем не будет, если любое из неравенств обратить.

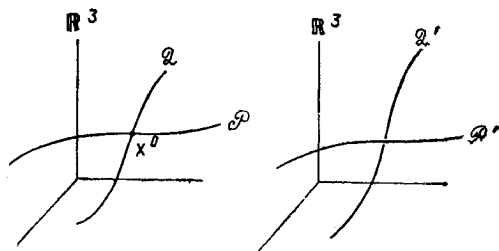


Рис. 22.4. Две кривые в пространстве \mathbb{R}^3 не могут пересекаться трансверсально.

$\in \mathbb{R}^N$ не могут порождать \mathbb{R}^N . Следовательно, они могут быть трансверсальны лишь тогда, когда они вообще не пересекаются.

Наиболее важные моменты в понятии «трансверсальность многообразий» следующие:

1. Если \mathcal{P} трансверсально \mathcal{Q} в пространстве \mathbb{R}^N , то:
 - а. если $p + q < N$, то \mathcal{P} и \mathcal{Q} не должны пересекаться вообще;
 - б. если $p + q \geq N$, то \mathcal{P} и \mathcal{Q} должны либо не пересекаться вообще, либо пересекаться по многообразию размерности $p + q - N \geq 0$.

2. Предположим, что \mathcal{P} и \mathcal{Q} подвергаются небольшому возмущению, в результате чего получим многообразия \mathcal{P}' и \mathcal{Q}' . Тогда, если \mathcal{P} трансверсально \mathcal{Q} , то и \mathcal{P}' трансверсально \mathcal{Q}' . Если \mathcal{P} и \mathcal{Q} не пересекаются, то и \mathcal{P}' и \mathcal{Q}' также не пересекаются. Если \mathcal{P} и \mathcal{Q} пересекаются трансверсально на многообразии \mathcal{M} , то \mathcal{P}' и \mathcal{Q}' пересекаются трансверсально на многообразии \mathcal{M}' , которое является возмущением \mathcal{M} .

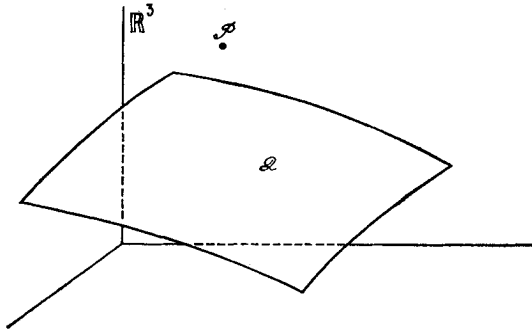


Рис 22.5. Точка в пространстве \mathbb{R}^n не может быть трансверсальна многообразию в этом пространстве размерности, меньшей, чем n .

3. Предположим, что \mathcal{P} и Q подвергаются небольшому возмущению, в результате чего получим многообразия \mathcal{P}' и Q' . Если \mathcal{P} не было трансверсально Q , то \mathcal{P}' будет трансверсально Q' .

Таким образом, трансверсальность является наследственным свойством многообразий (рис. 22.1—22.5).

1.2. Отображение трансверсально многообразию

Предположим, что Q — многообразие размерности q в пространстве \mathbb{R}^N , а \mathcal{P} — многообразие размерности p , не лежащее в \mathbb{R}^N . Кроме того, предположим, что \mathcal{F} отображает \mathcal{P} в \mathbb{R}^N . Если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q пересекаются в точке $x^0 \in \mathbb{R}^N$, то пересечение в этой точке трансверсально, если касательные пространства к $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q в их общей точке x^0 порождают \mathbb{R}^N .

Определение. Отображение \mathcal{F} трансверсально многообразию Q в пространстве \mathbb{R}^N [1], если:

$\mathcal{F}(\mathcal{P})$ трансверсально Q во всех точках их пересечения;
 $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ вообще не пересекает Q .

Пример 6 (рис. 22.6). Пусть Q — это одномерное многообразие $(1, 2, z)$, вложенное в \mathbb{R}^3 , а \mathcal{P} — двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 . Отобразим многообра-

ние \mathcal{P} в \mathbb{R}^3 , используя следующее отображение: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} (2x, 3y, e^{-(x^2+y^2)}) \in \mathbb{R}^3$. Тогда $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q пересекаются в точке $x^0 = (1, 2, e^{-0,694})$ в \mathbb{R}^3 . В касательном пространстве к Q в точке x^0 можно взять базисный вектор $v_3 = (0, 0, 1)$. В касательном пространстве к $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ в точке x^0 можно взять базисные векторы

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x} (2x, 3y, e^{-(x^2+y^2)})|_{x^0} = (2, 0, -e^{-0,694}),$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial y} (2x, 3y, e^{-(x^2+y^2)})|_{x^0} = \left(0, 3, -\frac{4}{3}e^{-0,694}\right).$$

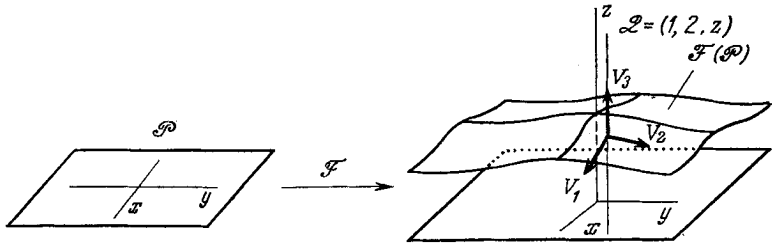


Рис. 22.6. Вертикальная прямая Q трансверсально пересекает поверхность $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ в точке.

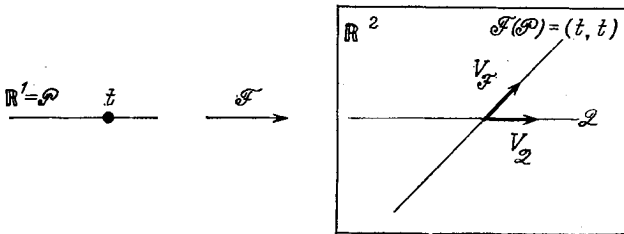


Рис. 22.7. Кривая $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = (t, t)$ пересекает трансверсально ось x в начале координат.

Так как

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -e^{-0,694} \\ 0 & 3 & -\frac{4}{3}e^{-0,694} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6 \neq 0,$$

то векторы v_1, v_2, v_3 порождают пространство \mathbb{R}^3 . Следовательно, $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ трансверсально Q в любой точке их пересечения. Пересечение остается трансверсальным и при возмущениях.

Пример 7 (рис. 22.7). Пусть Q — многообразие, совпадающее с осью x пространства \mathbb{R}^2 , а отображение \mathcal{F} многообразия $\mathcal{P} = \mathbb{R}^1$ в \mathbb{R}^2 задается формулой

$$t \in \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} (t, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Касательный вектор к Q направлен вдоль оси x . В касательном пространстве к $\mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$ в точке пересечения $(0, 0)$ можно взять базисный вектор $(1, 1)$. Эти два вектора порождают \mathbb{R}^2 , так что отображение \mathcal{F} трансверсально оси x .

Пример 8 (рис. 22.8). Пусть Q — ось x в пространстве \mathbb{R}^2 , а $\mathcal{P} = \mathbb{R}^1$. Определим отображение посредством выражения

$$t \in \mathbb{R}^1 \rightarrow (\mathcal{F}_1(t), \mathcal{F}_2(t)) = (t + 1, (t - 1)^4) \in \mathbb{R}^2,$$

В этом случае имеется лишь одна точка контакта, а именно $x^0 = (2, 0)$. В касательном пространстве Q в точке $(2, 0)$ можно взять базисный

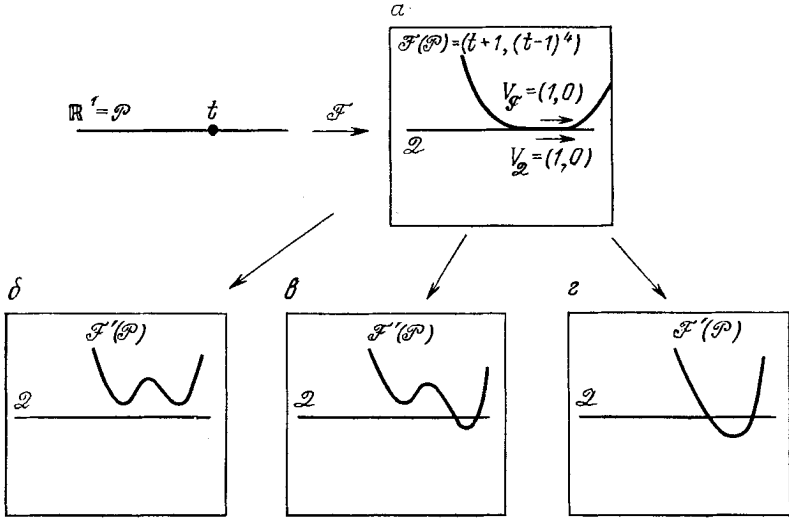


Рис. 22.8. Кривая $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ (а) не трансверсальна оси x . Имеется точка двойного касания. Возмущенная кривая может пересекать ось x трансверсально в четырех точках, в двух точках (в, з) или совсем не пересекать (б).

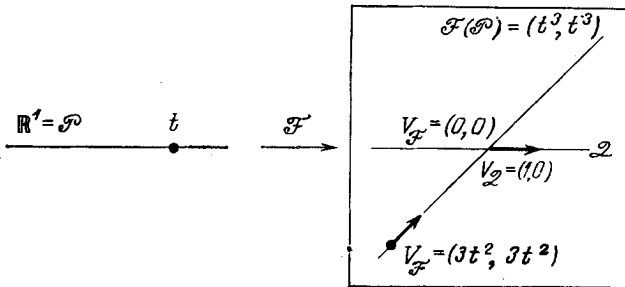


Рис. 22.9. Кривая $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = (t^3, t^3)$ пересекает ось x в начале координат, но это пересечение не трансверсальное, так как касательный вектор (вектор скорости) $(3t^2, 3t^2)$ становится нулевым.

вектор $(1, 0)$. Касательное пространство к $\mathcal{F}\mathbb{R}^1$ в точке x^0 имеет касательный вектор

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{F}_1(t), \mathcal{F}_2(t)) \Big|_{t=1} = (1, 4(t-1)^3) \Big|_{t=1} = (1, 0).$$

Эти два вектора параллельны, следовательно, они не могут породить пространство \mathbb{R}^2 в рассматриваемой точке $(2, 0)$. На рис. 22.8, б–з показано, какие последствия при трансверсальном пересечении может иметь небольшое возмущение отображения \mathcal{F} .

Пример 9 (рис. 22.9). Пусть Q есть ось x в пространстве \mathbb{R}^2 , $\mathcal{P} = \mathbb{R}^1$, а отображение \mathcal{F} задается следующим образом:

$$t \in \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{F}_1(t), \mathcal{F}_2(t)) = (t^3, t^3) \in \mathbb{R}^2.$$

Касательный вектор к многообразию $\mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$ в единственной точке его пересечения с многообразием Q равен

$$\frac{d}{dt}(t^3, t^3)|_{t=0} = (3t^2, 3t^2)|_{t=0} = (0, 0).$$

Следовательно, отображение \mathcal{F} не трансверсально Q .

Пример 10. Пусть Q есть q -мерное многообразие, вложенное в \mathbb{R}^N , а \mathcal{P} — p -мерное многообразие. Тогда отображение \mathcal{F} задается посредством

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}^N: (\mathcal{F}_1(y_1, \dots, y_p), \mathcal{F}_2(y_1, \dots, y_p), \dots, \mathcal{F}_N(y_1, \dots, y_p)).$$

Если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q пересекаются в точке $x^0 \in \mathbb{R}^N$ [$\mathcal{F}(y^0) = x^0$], то касательное пространство к $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ в точке x^0 порождается p векторами

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{F}_N}{\partial y_1} \right), \\ &\vdots \\ v_p &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial y_p}, \dots, \frac{\partial \mathcal{F}_N}{\partial y_p} \right). \end{aligned} \tag{22.1v}$$

q -мерное касательное пространство к Q в точке x^0 порождается при помощи набора из q векторов u_1, \dots, u_q :

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1N}), \\ u_q &= (u_{q1}, u_{q2}, \dots, u_{qN}). \end{aligned} \tag{22.1u}$$

Векторы $v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q$ порождают пространство \mathbb{R}^N в точке x^0 , если $(p+q) \times N$ — матрица, первые p строк которой задаются (22.1v), а q последних строк (22.1u) содержат невырожденную квадратную подматрицу порядка N . Очевидно, если $p+q < N$, это невозможно.

Перечислим основные следствия понятия «отображение трансверсально многообразию»:

— если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ трансверсально Q в \mathbb{R}^N , то:

а. если $p+q < N$, то $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q вообще не должны пересекаться.

б. если $p+q \geq N$, то $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q должны либо вообще не пересекаться либо пересекаться по некоторому многообразию размерности $p+q-N \geq 0$;

— если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ трансверсально Q и отображение \mathcal{F} подвергается возмущению, в результате которого получается отображение \mathcal{F}' , то $\mathcal{F}'(\mathcal{P})$ трансверсально Q . Если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q не пересекаются, то $\mathcal{F}'(\mathcal{P})$ и Q также не пересекаются. Если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q пересекаются трансверсально в многообразии \mathcal{M} , то $\mathcal{F}'(\mathcal{P})$ и Q' пересекаются трансверсально в многообразии \mathcal{M}' , которое является возмущением \mathcal{M} ;

— множество отображений $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^N$, которые трансверсальны многообразию \mathcal{Q} , всюду плотно в множестве всех отображений многообразия \mathcal{P} в \mathbb{R}^N . Это означает, что любое отображение $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^N$ (трансверсальное \mathcal{Q} или нет) может быть с произвольной точностью аппроксимировано трансверсальными отображениями.

1.3. Отображение трансверсально другому отображению

Если \mathcal{F} отображает p -многообразие \mathcal{P} в \mathbb{R}^N , а \mathcal{G} отображает q -многообразие \mathcal{Q} в \mathbb{R}^N , то возникает вопрос, является ли нет отображение \mathcal{F} трансверсальным отображению \mathcal{G} . Это обсуждение в основном следует направлениям, указанным в разд. 1.2., приводя к аналогичным заключениям. Поэтому мы не будем его здесь приводить.

◆◆◆ *Использование понятия трансверсальности, особенно трансверсальности отображения и многообразия (разд. 1.2), приводит к наиболее важным результатам, когда в качестве евклидова пространства \mathbb{R}^N берется пространство k -струй $j^k f \simeq \mathbb{R}^D$.*

2. ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Линейные члены

Рассмотрим критические точки гладкой функции f от n переменных и покажем, что эти точки изолированы.

Если вычислить p -струю функции f в соответствии с формулой (21.2), то $D = (n + p)!/n!$ ее координат $f(x^0)$, $f_i(x^0)$, $f_{ij}(x^0)$, ..., $f_{ij \dots p}(x^0)$ являются функциями точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, в которой проведено разложение в ряд Тейлора. Таким образом, D координат, зависящих от n переменных, дают параметрическое представление n -мерного многообразия в \mathbb{R}^D . Другой, но эквивалентный путь — это задать отображение $j^p f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^D$ посредством $x^0 \in \mathbb{R}^n \rightarrow j^p f(x^0)$ аналогично отображению $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Критические точки функции f встречаются, где $\nabla f = 0$, т. е. $f_1(x^0) = \dots = f_n(x^0) = 0$. Поэтому критические точки f встречаются лишь в подпространстве пространства \mathbb{R}^D , в котором все первые производные обращаются в нуль. Это линейное векторное подпространство имеет размерность $D - n$ и соответствует подмногообразию \mathcal{Q} . Так как

$$\begin{array}{rcccl} \dim(\mathcal{P} = \mathbb{R}^n) & + & \dim(\mathcal{Q} = \mathbb{R}^{D-n}) & \geq & \dim(j^p f = \mathbb{R}^D), \\ n & + & D - n & \geq & D, \end{array}$$

то многообразие $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = j^p f(x^0)$ пересекает многообразие \mathcal{Q} в \mathbb{R}^D трансверсально по многообразию размерности $n + (D -$

— n) — $D = 0$, т. е. по изолированным точкам. Это значит, что типичные критические точки функции $f(x)$ должны быть изолированными. Кроме того, в силу свойств трансверсальных отображений, если $f(x)$ подвергается небольшому возмущению, то критические точки смещаются лишь слегка, но пересечение становится уже трансверсальным. Следовательно, возмущение морсовской функции снова приводит к морсовской функции. И наконец, так как трансверсальные отображения всюду плотны, то любая функция $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$ может быть аппроксимирована с любой точностью функцией, имеющей лишь изолированные критические точки.

2.2. Квадратичные члены

Рассмотрим встречаемость неморсовских критических точек в семействах функций n переменных состояния и k управляющих параметров. Покажем, что число собственных значений матрицы устойчивости, которые могут в общем случае вырождаться в рассматриваемой точке, критически зависит от k .

Координаты $f(x^0; c^0)$, $f_i(x^0; c^0)$, $f_{ij}(x^0; c^0)$, ..., которые присутствуют в формуле (21.1), являются в этом случае функциями $n + k$ переменных $(x^0; c^0) \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^k$. Используем n степеней свободы в местонахождении критических точек так же, как это делалось в разд. 2.1. Это значит, что в критической точке ненулевые координаты (21.1) являются функциями k управляющих параметров c_α , $\alpha = 1, 2, \dots, k$. В частности, в любой критической точке x^0 элементы матрицы устойчивости $f_{ij}(c^0)$ являются функциями k управляющих параметров. Поскольку лишь $n(n + 1)/2$ элементов матрицы независимы [так как $f_{ij} = f_{ji}$], то множество

$$\mathcal{F}(k) = \{f_{11}(c^0), f_{12}(c^0), \dots, f_{nn}(c^0)\} \quad (22.2)$$

является параметрическим представлением k -мерного многообразия в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Иначе говоря, квадратичные члены (21.2) в разложении (21.1) задают отображение \mathcal{F} из пространства управляющих параметров $\mathcal{P} = \mathbb{R}^k$ в пространство $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

Теперь рассмотрим подмножество точек $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, в которых $\det f_{ij} = 0$. Так как f_{ij} — вещественная симметрическая матрица, то $\det f_{ij} = 0$ только тогда, когда по крайней мере одно собственное значение равно нулю. Если обозначить через V_l множество точек из $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, в которых точно l собственных значений матрицы устойчивости равны нулю, то V_l будет определять некоторое многообразие размерности

$$\dim V_l = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{2}. \quad (22.3)$$

Чтобы сделать последнее утверждение о размерности более прозрачным, напомним, что вещественная симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду посредством вещественного ортогонального преобразования, так что

$$O^{-1}f_{ij}O = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \\ \hline 0 & \lambda_{l+1} \\ & \ddots \\ & \lambda_n \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Delta \end{array} \right] \quad (22.4)$$

Здесь предполагается, что в точности l собственных значений f_{ij} равны нулю. Диагональная $(n-l) \times (n-l)$ -подматрица Δ определяется $n-l$ параметрами. Это уравнение можно обратить, используя следующие соотношения:

$$O = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ f_{ij} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\Delta B^t & B\Delta D^t \\ D\Delta B^t & D\Delta D^t \end{bmatrix}. \quad (22.5)$$

Любая вещественная ортогональная квадратная матрица порядка n определяется $n(n-1)/2$ вещественными числами [группа ортогональных преобразований $O(n)$ имеет размерность $n(n-1)/2$]. Независимые параметры, характеризующие матрицу O , могут быть взяты такими же, как и элементы матрицы, лежащие выше главной диагонали. В этом случае подматрица B имеет размерность $l(n-l)$, а подматрицы A и D размерности $l(l-1)/2$ и $(n-l)(n-l-1)/2$ соответственно; подматрица C становится постоянной, как только заданы матрицы A , B и D . Квадратная матрица f_{ij} порядка n в (22.5) определяется подматрицами B , D , Δ ; поэтому

$$\begin{aligned} \dim f_{ij} &= \dim B + \dim D + \dim \Delta = \\ &= l(n-l) + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2} + (n-l) = \\ &= \frac{n(n+1) - l(l+1)}{2}. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Теперь можно определить типичные (наследственные) условия для k -параметрического семейства функций, при которых обращаются в нуль l собственных значений матрицы устойчивости. Для этого используем результаты трансверсальности

отображений (разд. 1), предполагая, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbb{R}^k, & \text{[пространство управляющих параметров]} \\ \mathcal{F}(\mathcal{P}), & & \text{задано формулой (22.2).} \\ Q &= V_l, \\ \mathbb{R}^N &= \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \end{aligned}$$

Тогда l собственных значений матрицы $f_{ij}(c)$ обращаются в нуль, если $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ хоть где-нибудь пересекает V_l . Это свойство является наследственным, если пересечение трансверсально. Но $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и Q пересекаются трансверсально в \mathbb{R}^N только в случае, если

$$\begin{aligned} k + \frac{n(n+1) - l(l+1)}{2} &\geq \frac{n(n+1)}{2}, \\ k &\geq \frac{l(l+1)}{2}. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

$k = 0$ (нет управляющих параметров). В этом случае место-нахождение критической точки задает все элементы матрицы f_{ij} . Поэтому матрица устойчивости представляется точкой (нульмерным многообразием) в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Как было показано (пример 5 и рис. 22.5), точка не может пересечь трансверсально многообразие размерности меньше, чем $n(n+1)/2$ в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Из свойств трансверсальных отображений следует, что функции с морсовскими критическими точками в x^0 всюду плотны в множестве всех функций с критической точкой в x^0 . Кроме того, если функция f случайно имеет неморсовскую критическую точку в x^0 , то небольшое ее возмущение удаляет эту особенность.

$k = 1$ (один управляющий параметр). В этом случае $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ является одномерным многообразием в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Такое многообразие может пересекать V_1 трансверсально лишь по многообразиям размерности

$$k - \frac{l(l+1)}{2} = 1 - 1 = 0, \quad (22.8)$$

т. е. в изолированных точках (рис. 22.10 при $n = 2$). Однако $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ уже не может пересекать V_2, V_3, \dots трансверсально. Если отображение f возмущается, то кривая $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ также деформируется, но пересечение остается трансверсальным вблизи исходных точек пересечения. Как было показано в 1-параметрическом семействе функций, обращение в нуль одного собственного значения в изолированной точке является наследственным свойством (\mathcal{F} всюду плотно).

$k = 2$ (два управляющих параметра). В этом случае $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ является двумерным многообразием в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Это многообразие может пересекать трансверсально V_1 по одномерному

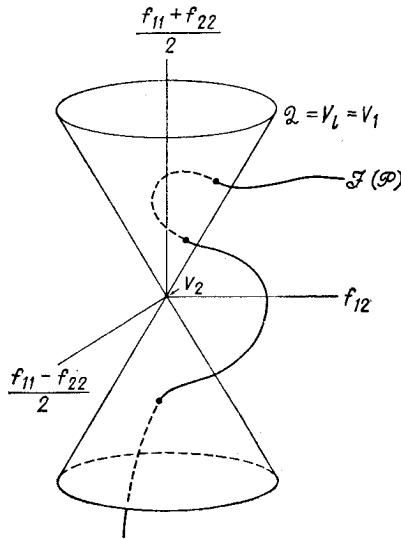


Рис. 22.10. При наличии всего лишь одного управляющего параметра $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ представляет собой одномерную кривую.

При $n = 2$ подмножество точек, в которых матрица устойчивости f_{ij} особенна, имеет две компоненты. Это V_1 (в ней лишь одно собственное значение равно нулю) и вершина конуса V_2 (в ней обращаются в нуль оба собственных значения). $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ может пересекать трансверсально V_1 лишь в изолированных точках, поскольку $1 + 2 - 3 = 0$, но $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ не может пересекать трансверсально V_2 , так как $1 + 0 - 3 < 0$.

подмногообразию, однако по размерностным соображениям оно не может пересекать V_2 :

$$\begin{aligned} & \dim V_1 + \dim \mathcal{F}(\mathcal{P}) - \dim \mathbb{R}^{n(n+1)/2}, \\ l = 1: & \frac{n(n+1)}{2} - 1 + 2 - \frac{n(n+1)}{2} = 1, \quad (22.9) \\ l = 2: & \frac{n(n+1)}{2} - 3 + 2 - \frac{n(n+1)}{2} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в 2-параметрическом семействе функций лишь одно собственное значение может обращаться в нуль устойчиво, но не два.

$k = 3$ (три управляющих параметра). В этом случае $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ является трехмерным многообразием, которое может пересекать V_1 трансверсально в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ по двумерному подмногообразию, V_2 трансверсально по изолированным точкам и не может пересекать трансверсально V_3 . Следовательно, в 3-параметрическом семействе функций два собственных значения обращаются в нуль устойчивым образом лишь в изолированных точках.

k управляющих параметров. В этом случае $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ имеет размерность k в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ и возможность трансверсального пересе-

чения с V_i определяется разностью

$$k - \frac{l(l+1)}{2}. \quad (22.10)$$

Если эта разность больше или равна нулю, то $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ и V_i могут пересекаться трансверсально по многообразию этой размерности; если же эта разность меньше нуля, то эти два многообразия не могут пересекаться трансверсально. Как следствие, получаем, что три собственных значения не могут устойчивым образом обращаться в нуль до тех пор, пока мы не дойдем до 6-параметрического семейства функций, а четыре собственных значения — пока не достигнем 10-параметрического семейства функций, и т. д.

2.3. Ростки с $l=1$

Рассмотрим качественные изменения свойств функций в неморсовских критических точках и покажем, что число членов разложения в ряд Тейлора, которые необходимо оставить помимо квадратичных членов, зависит как от размерности k пространства управляющих параметров, так и от числа l собственных значений, которые могут обращаться в нуль в неморсовской критической точке.

Предположим, что функция $f(x; c)$, зависящая от n переменных состояния и k управляющих параметров, имеет критическую точку x^0 при $c = c^0$, в которой точно l собственных значений матрицы устойчивости обращаются в нуль. Тогда, используя лемму расщепления, можем сделать гладкую замену координат и рассмотреть лишь интересующую нас неморсовскую функцию f_{NM} от l переменных состояния y_1, \dots, y_l и k управляющих параметров. Эта функция f_{NM} может быть разложена в ряд Тейлора по степеням $(y - y^0)$ (22.1). Так как y^0 — критическая точка, то все ее первые производные равны нулю. Когда $c = c^0$, то все ее вторые производные также обращаются в нуль. Поскольку критическое значение f_{NM} в точке $(y^0; c^0)$ для нас не важно, то мы будем считать, что оно также равно нулю.

Следовательно, качественное изменение в поведении функции $f_{NM}(y; c)$ в окрестности точки $(y^0; c^0) \in \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^k$ определяется разложением типа (21.1), начинающимся с квадратичных членов. Определим теперь, сколько первых коэффициентов разложения в ряд Тейлора могут устойчиво обращаться в нуль в рассматриваемом k -параметрическом семействе функций. Это можно сделать посредством построения p -струи функции f , имеющей размерность $D = (l+p)!/l!p! - l - 1$, так как в критической точке $f_i(y^0) = 0$ (l ограничений) и критическое значение $f(y^0) = 0$ (1 ограничение). Следовательно, оставшиеся коэффициенты

$f_{ij}(c), f_{ijk}(c), \dots, f_{ijk\dots p}(c)$ дают параметрическое представление некоторого k -мерного многообразия в \mathbb{R}^D .

В случае $l = 1$ только одно собственное значение обращается в нуль, так что имеется лишь одна «плохая» переменная y_1 , которую для удобства обозначим через x , и для удобства положим $x^0 = 0$. Аналогом формулы (21.1) является

$$j^p f_{NM}(x; c) = \frac{1}{2!} f_2(c) x^2 + \frac{1}{3!} f_3(c) x^3 + \dots + \frac{1}{p!} f_p(c) x^p. \quad (22.11)$$

Множество из $p - 1$ коэффициентов

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \{f_2(c), f_3(c), \dots, f_p(c)\} \quad (22.12)$$

дает параметрическое представление некоторого k -мерного многообразия в $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{p-1}$. Определим линейные векторные подпространства T_j в \mathbb{R}^{p-1} следующим образом:

$$\begin{aligned} T_2 &= \{0, f_3, f_4, \dots, f_p\}, \\ T_3 &= \{0, 0, f_4, \dots, f_p\}, \\ &\vdots \\ T_j &= \{0, 0, \dots, 0, f_{j+1}, \dots, f_p\}. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Тогда $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ может пересекать $Q = T_j$ трансверсально в пространстве $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{p-1}$, если

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{F}(\mathcal{P}) + \dim T_j &\geq \dim \mathbb{R}^{p-1}, \\ k + (p - j) &\geq p - 1. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Короче говоря, в 1-параметрическом семействе коэффициенты ряда Тейлора ($f_0, f_1, f_2, \dots, f_{j=k+1}$) могут все обращаться в нуль устойчивым образом, а коэффициенты $f_2, \dots, f_{j=k+2}$ уже не могут все обращаться в нуль устойчивым образом. В таком семействе наихудшее, что может случиться, — это то, что f (если не принимать во внимание факториальные множители) будет иметь следующее представление в неморсовской критической точке:

$$f(x) = f_{k+2} x^{k+2} + f_{k+3} x^{k+3} + \dots \quad (22.15)$$

В 1-параметрическом семействе функций ведущих, отличный от нуля член разложения в ряд Тейлора имеет степень, меньшую или равную 3; в 2-параметрическом — x^4 (или x^3 , или x^2 , или x) и т. д.

2.4. Ростки с $l = 2$

В этом случае ровно два собственных значения обращаются в нуль. Если «плохие» переменные y_1 и y_2 обозначить соответственно через x и y [$y_1 = x$ и $y_2 = y$] и для удобства считать,

что критическая точка находится в начале координат, то без учета факториальных коэффициентов в качестве аналога формулы (21.1) получим

$$f(x, y; c) = f_{20}(c)x^2 + f_{11}(c)xy + f_{02}(c)y^2 + f_{30}(c)x^3 + \dots \quad (22.16)$$

Произведя усечение ряда до членов p -й степени, имеем, начиная с квадратичных членов, $D = (p + 2)(p + 1)/2 - 3$ коэффициентов. Следовательно, множество

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \{f_{20}, f_{11}, f_{02}, f_{30}, f_{21}, \dots\} \quad (22.17)$$

является многообразием размерности k в \mathbb{R}^D . Если $k \geq 3$, то все три квадратичных коэффициента могут обращаться в нуль устойчиво, так что ведущими членами будут кубические. В гл. 3 было показано, каким образом члены третьей степени и выше могут быть приведены к канонической форме, при условии что коэффициенты кубических членов не могут обратиться в нуль одновременно.

2.5. Ростки с $l = 2, k \geq 7$

В этом случае устойчиво может случиться следующее: коэффициенты трех квадратичных и четырех кубических членов разложения (22.16) одновременно обращаются в нуль. Тогда ведущими членами разложения в ряд Тейлора функции $f(x, y; c)$ в окрестности критической точки становятся члены четвертой степени, и наилучшее, что можно сделать, — это рассмотреть следующую каноническую форму, получаемую при помощи гладкой замены координат:

$$f(x, y; c) \doteq \pm x'^4 + ax'^2y'^2 \pm y'^4, \quad a^2 - 4 \neq 0, \quad (22.18)$$

где a не может быть задан равным $\pm 1, 0$. Как уже было показано (гл. 3), ростки с $l = 2, k > 6$ зависят от модулей.

2.6. Ростки с $l = 3, k \geq 6$

При $l = 3$ разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y, z; c)$ в окрестности критической точки имеет шесть квадратичных членов, десять кубических членов и т. д. Используя теперь уже стандартные рассуждения, мы получим, что все шесть квадратичных коэффициентов могут обращаться в нуль устойчиво в семействах с $k \geq 6$. При $k = 6$ десять оставшихся кубических членов могут быть приведены к канонической форме, которая зависит от одного модуля [ср. (3.49)].

3. ВЫВОДЫ

Применяя понятие трансверсальности к пространству усеченных разложений функций в ряд Тейлора, можно получить важнейшую информацию как о функциях, так и о семействах функций. Следствия трансверсальности многообразий и отображений — плотность, устойчивость и возмущения — могут быть использованы для формального обоснования большинства интуитивных соображений, изложенных в гл. 3, и особенно тех, что касались формулы (3.28).

Применяя понятие трансверсальности к членам первой степени разложения в ряд Тейлора, мы установили, что свойство функции иметь изолированную критическую точку является наследственным и устойчивым. При обсуждении поведения второй степени разложения в ряд Тейлора функции в критической точке было показано, что неморсовские функции с l «плохими» переменными могут устойчиво встречаться в k -параметрических семействах функций в том случае, если $k \geq l(l+1)/2$.

Соображения трансверсальности дают также информацию о структуре ростков неморсовской функции в вырожденной критической точке. Например, при $l=1$ в k -параметрическом семействе функций имеется возможность устойчиво встречать ростки вида x^j ($j \leq k+2$), однако росток x^{k+3} не может уже встречаться наследственно. Случай $l=2$ не может встречаться устойчивым образом в k -параметрическом семействе, если только не $k \geq 3$. В этом случае росток зависит от членов третьей степени и выше. Кроме того, с помощью замены переменных эти члены можно привести к некоторой канонической форме. Достаточно сказать, что в k -параметрическом семействе все квадратичные и кубические члены могут обращаться в нуль устойчиво. Оставшийся росток тогда должен зависеть по крайней мере от одного модуля. Случай $l=3$ может устойчиво встречаться лишь в k -параметрическом семействе функций, где $k \geq 6$, при этом росток также будет зависеть по крайней мере от одного модуля.

◇◇◇ Трансверсальность оказывается чрезвычайно полезным и важным понятием при изучении устойчивости и всюду плотности отображений и функций. В дополнение к ссылкам, использованным в данной главе, трансверсальность рассматривается в работах [3—6].

Литература

1. Thom R. Les singularites des applications differentiables, *Ann. Inst. Fourier*, 6, 43—87 (1955—1956).
2. Golubitsky M., Guillemin V. Stable Mappings and Their Singularities, New York: Springer, 1973. [Имеется перевод: Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.]

3. Abraham R., Robbin J. *Transversal Mappings and Flows*, New York: Benjamin, 1967.
4. Zeeman E. C. *Catastrophe Theory, Selected Papers 1972—1977*, Reading: Addison-Wesley, 1967.
5. Poston T., Stewart I. N. *Catastrophe Theory and Its Applications*, London: Pitman, 1978. [Имеется перевод: Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*. — М.: Мир, 1980.]
6. Lu Y-C. *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*, New York: Springer, 1976.

ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДЕФОРМАЦИЯ

Качественное описание поведения функции в окрестности некоторой точки пространства \mathbb{R}^n переменных состояния часто может быть получено путем изучения начального отрезка ее разложения в ряд Тейлора в этой точке¹⁾:

$$f(x) = f(0) + x_i f_{i_1}(0) + \frac{1}{2!} x_i x_j f_{i_1 j_1}(0) + \dots \quad (23.1)$$

Чтобы определить локальные свойства функции $f(x)$, нет необходимости рассматривать постоянный член разложения (23.1). Более того,

— если $\nabla f \neq 0$, то качественное поведение функции полностью определяется линейными членами разложения (23.1), т. е. мы не теряем нужной информации ряда при исключении нелинейных членов ряда (23.1);

— если $\nabla f = 0$, но $\det f_{ij} \neq 0$, то качественное поведение функции полностью определяется квадратичными членами разложения (23.1), т. е. мы не теряем необходимой информации при усечении ряда до квадратичных членов;

— если $\nabla f = 0$ и $\det f_{ij} = 0$, то важное значение приобретают члены более высокой степени, и, по-видимому, качественное поведение функции $f(x)$ будет полностью определяться рядом (23.1), усеченным до членов p -й степени (где p — некоторое конечное число).

Изучение возможностей усечения разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора и определение значения p называется *задачей определенности*.

В настоящей главе удаление «хвоста» ряда Тейлора осуществляется при помощи гладкой замены переменных. Подобная процедура уже была рассмотрена в гл. 3, однако здесь она значительно упрощается за счет применения лишь инфинитезимальных нелинейных преобразований.

В случае, когда функция принадлежит некоторому семейству функций, начальные члены разложения в ряд Тейлора рассматриваемой функции, естественно, могут обращаться в нуль. Задача определения наиболее общего семейства функций наименьшей размерности, содержащего исходную функцию, называется *задачей деформации*.

При рассмотрении примеров, иллюстрирующих понятия *конечной определенности* и *деформации*, совершенно естественно возникают алгоритмы, позволяющие вычислить определенность и деформацию произвольной функции. Эти два алгоритма, по существу, являются сторонами одного угла; сам же угол — канонический росток катастрофы — представляется членами, которые не порождаются ни в алгоритме определенности, ни в алгоритме деформации. Оба эти алгоритма, а также алгоритмы нахождения ростка функции используются здесь как для решения старых задач новым методом, так и для решения новых задач, а также для получения полного списка простых ростков и их универсальных деформаций. Кроме того, изучаются кратные ката-

¹⁾ Для удобства будем считать точку, в которой берется разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, началом координат пространства \mathbb{R}^n .

строфы сборки, которые особенно важны при исследовании причин неудач, имеющих место в оптимизации структур. Показана конечная определенность и найдены универсальные деформации этих ростков.

1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Использование такого важного средства, как общая нелинейная замена переменных (3.1), позволило нам дать точные определения эквивалентности (качественной подобности) двух функций, предложить конструктивные доказательства теоремы о неявной функции, леммы Морса и леммы расщепления и определить как ростки, так и возмущения некоторых неморсовских функций. Однако выполняемые при этом вычисления оказались слишком громоздкими.

Можно значительно упростить типы вычисления, проводимые при общей нелинейной замене переменных, применяя инфинитезимальное, а не конечное нелинейное преобразование. Инфинитезимальный вариант (3.1) может быть получен заменой всех находящихся в нашем распоряжении конечных параметров A в разложении (3.2) на соответствующие инфинитезимальные эквиваленты:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + \delta x_i, \\ \delta x_i &= \delta A_i + \delta A_{ij} x_j + \delta A_{ijk} x_j x_k + \dots \end{aligned} \quad (23.2)$$

Инфинитезимальный аналог преобразований (3.3) может быть получен с помощью очевидных модификаций.

Общее конечное нелинейное координатное преобразование (3.2) может быть получено с помощью достаточно большого числа итераций инфинитезимального преобразования (23.2). Поэтому для решения вопросов, рассмотренных в гл. 3 и 4, могут быть использованы как конечные, так и инфинитезимальные преобразования. Последние позволяют легко и непосредственно получить алгоритмы для вычисления определенности произвольной функции и ее деформации.

◇◇◇ Соотношение между конечным (3.2) и инфинитезимальным (23.2) преобразованиями точно такое же, как соотношение между группой Ли и алгеброй Ли [1].

2. ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ («УСЕЧЕНИЕ» РЯДОВ ТЕЙЛОРА)

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $f'(x)$, если существует гладкая замена переменных $x' = x'(x)$, такая, что

$$f'(x') = f(x). \quad (23.3)$$

Если f эквивалентна f' и качественное описание поведения f' известно, то функция f должна иметь то же самое качественное описание. Поэтому часто бывает полезно найти (если, конечно, это возможно) полином конечной и достаточно небольшой степени, эквивалентный f .

Определение. Функцию $f(x)$ назовем p -определенной в нуле, если для любой другой функции f' с той же самой p -струей существует гладкая замена переменных, такая, что

$$f(x) = f'[x'(x)]. \quad (23.4)$$

Пример 1. Если $f(x) = x$, а $f'(x) = \sin x$, то $j^1 f = x$, $j^1 f' = x$ и $j^1 f = j^1 f'$. Осуществляя замену $x' = \arcsin x$ ($|x| < 1$, $|x'| < \pi/2$), найдем, что

$$f'[x'(x)] = \sin x' = \sin(\arcsin x) = x = f(x). \quad (23.5)$$

◇◇◇ Предположим, что $f(x)$, $f'(x)$ — две функции, имеющие $f(0) = f'(0) = 0$ и $j^1 f \neq 0$, $j^1 f' \neq 0$. Тогда теорема о неявной функции гарантирует, что $f(x) = f'[x'(x)]$, поскольку f и f' могут быть преобразованы к одной и той же канонической форме. В действительности всегда может быть найдена такая гладкая и даже линейная замена координат $x' = x'(x)$, что

$$j^1 f'[x'(x)] = j^1 f(x). \quad (23.6)$$

◇◇◇ Предположим, что $f(x)$, $f'(x)$ — две функции, имеющие $f(0) = f'(0) = 0$ и $j^1 f = j^1 f' = 0$, но $j^2 f$ и $j^2 f'$ отличны от нуля и неособенны. Тогда, если $j^2 f$ и $j^2 f'$ имеют одинаковый индекс или сигнатуру (их квадратичные формы имеют одинаковое количество положительных и отрицательных собственных значений), то лемма Морса гарантирует, что f и f' могут быть преобразованы друг в друга путем гладкой замены координат, поскольку они эквивалентны одной и той же канонической форме. В действительности всегда можно найти такую линейную замену координат $x' = x'(x)$, что

$$j^2 f'[x'(x)] = j^2 f(x). \quad (23.7)$$

◇◇◇ Предположим, что функция $f(x)$ является p -определенной. Если

$$j^p f(x) = j^p f'(x), \quad (23.8a)$$

то

$$f(x) = f'[x'(x)]. \quad (23.8b)$$

В частности, одной из функций $f'(x)$, p -струя которых равна $j^p f$, является полином $j^p f$ степени p . Поэтому, если $f' = j^p f$, то, согласно формуле (23.8b), $f(x)$ эквивалентна полиному степени p . Именно по этой причине утверждение «усечение разложения в ряд Тейлора» эквивалентно утверждению «преобразование удаляет хвост ряда Тейлора».

◇◇◇ В терминах определенности проблема нахождения канонических форм (гл. 2) сводится к проблеме определения классов функций, которые являются конечно определенными при

1. $p = 1$ (2.1);
2. $p = 2$ (2.2);
3. $p \geq 3$ (2.3) и (2.4).

◇◇◇ Не всякая функция является p -определенной для некоторого конечного p . Очевидно, что функция e^{-1/x^2} (21.4) не может быть конечно определенной в нуле, так как все коэффициенты ее ряда Тейлора равны нулю. Простые аналитические функции также не обязательно являются конечно определенными. Например, функция $f(x, y) = x^2y$ не является конечно определенной. Это наиболее легко увидеть, рассматривая изменение x^2y , вызываемое возмущением вида (y в достаточно большой степени):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y, \\ g(x, y) &= x^2y + y^{10^6}, \\ h(x, y) &= x^2y + y^{10^6+1}. \end{aligned} \tag{23.9}$$

Эти три функции имеют одинаковые p -струи ($p < 10^6$), однако структура их корней совершенно различна (рис. 23.1). Следовательно, эти три функции качественно различны.

Мы уже отмечали, что ответ на вопрос: «Является ли функция $f(x)$ эквивалентной некоторому полиному $f'(x)$ степени p ?» — есть не что иное, как ответ на вопрос: «Какой класс функций эквивалентен полиному $f'(x) = j^p f(x)$?» Оба эти вопроса

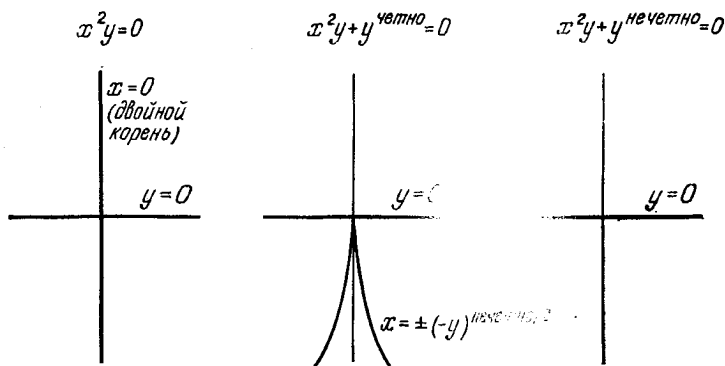


Рис. 23.1. Функция x^2y не является конечно определенной. Структура корней ($x^2y + \text{возмущение}$), где возмущение имеет вид y в достаточно большой степени, существенно зависит от того, является ли степень четной или нечетной.

являются эквивалентными, так как любое гладкое невырожденное нелинейное преобразование $x' = x'(x)$ может быть обращено $x = x(x')$ в соответствии с теоремой о неявной функции. Поэтому математически эти два вопроса можно записать так:

$$f'(x') \stackrel{?}{=} f[x(x')], \quad (23.10a)$$

$$f(x) \stackrel{?}{=} f'[x'(x)]. \quad (23.10b)$$

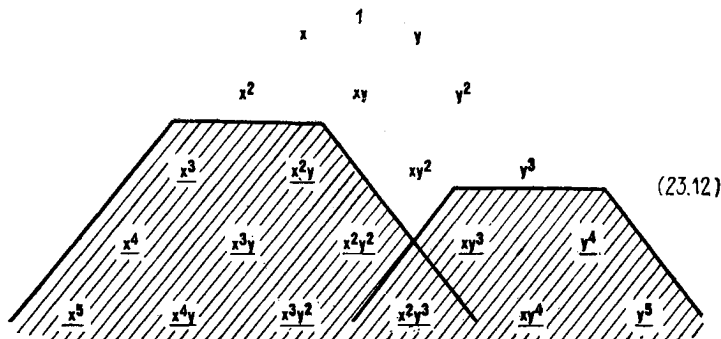
Покажем на конкретном примере, что с формулой (23.10b) работать значительно легче, особенно если использовать инфинитезимальное нелинейное преобразование (23.2).

Пример 2. Определить, какой класс функций двух переменных $f(x, y)$ эквивалентен росту E_6 : $f'(x, y) = x^3 + y^4$, приведенному в последней строке табл. 2.2.

Решение. Работая с формулой (23.10b), используем инфинитезимальные выражения $x' = x + \delta x$, $y' = y + \delta y$, приведенные в (23.2), и функцию f' , заданную выше:

$$f'[x', y'] = (x + \delta x)^3 + (y + \delta y)^4 = (x^3 + y^4) + 3x^2\delta x + 4y^3\delta y + O(2). \quad (23.11)$$

Функция $f(x, y)$ отличается от ростка $(x^3 + y^4)$ лишь дополнительными членами, которые появились в (23.11). Члены второй степени и выше от инфинитезимальных величин δx , δy могут быть отброшены. Так как нас интересует только качественный характер поведения функции $f(x, y)$ в точке, то можно использовать лишь однородные нелинейные инфинитезимальные преобразования, имеющие $\delta A_i = 0$ в (23.2). Инфинитезимальные члены первой степени, которые появляются при коррекции ростка $(x^3 + y^4)$ в формуле (23.11), — это в точности те члены, которые расположены в тени на диаграмме



Члены в тени, отбрасываемой элементом x^2 , происходят от члена $3x^2\delta x$ из формулы (23.11) в предположении $\delta A_1 = 0$. Члены же в тени, отбрасываемой элементом y^3 , происходят от члена $4y^3\delta y = (\partial f / \partial y) \delta y$ в предположении $\delta A_2 = 0$.

Коэффициенты всех лежащих в тени одночленов (23.12) являются инфинитезимальными величинами первого порядка. Довольно часто эти коэффициенты могут быть сделаны конечными и произвольными [1, 3] посредством

итераций однородными нелинейными преобразованиями (23.2). Следовательно, класс функций $f(x, y)$, эквивалентных росту катастрофы E_6 : $f'(x, y) = x^3 + y^4$, имеет вид

$$f(x, y) = A_{30}x^3 + A_{31}x^2y + \sum_{p+q \geq 4} A_{pq}x^p y^q, \quad (23.13)$$

причем $A_{30} \neq 0$, $A_{04} \neq 0$.

3. ДЕФОРМАЦИЯ (УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

Функции с неморсовскими критическими точками могут устойчиво встречаться лишь в семействах функций, зависящих от одного или более управляющих параметров. Поэтому можно изучать воздействие возмущения на данную функцию с вырожденной критической точкой, вложив эту неморсовскую функцию $f(x)$ в семейство функций $F(x; a)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_l), \\ F &= F(x; a), \quad a = (a_1, \dots, a_r), \\ \tilde{f}(x) &= F(x; a)|_{a=0}. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Определение. Семейство функций $F(x; a)$ называется r -мерной деформацией функции $f(x)$ [3, 4].

Чем больше семейство функций, тем более общие возмущения могут быть описаны. Есть надежда найти семейство, которое с одной стороны, достаточно велико, чтобы с помощью его можно было описать все возможные качественно различные возмущения $f(x)$, а с другой стороны, достаточно мало, чтобы с ним было легко работать.

Определение. Заданная r -мерная деформация $F(x; a)$ называется версальной, если любая другая деформация $F'(x'; a')$ функции $f(x)$ может быть получена из нее путем гладкой замены переменных:

$$\begin{aligned} x'_i &= x'_i(x; a), \\ a'_\alpha &= a'_\alpha(a), \quad \alpha = 1, 2, \dots, r', \end{aligned} \quad (23.15)$$

где r' не обязательно равно r .

Определение. Деформация $F(x; a)$ называется универсальной деформацией $f(x)$, если она является версальной и имеет минимальную размерность.

Пример 1. Для роста $f(x) = x^3$ имеем следующие деформации:

$$\begin{aligned} F_1(x; a_1, a_2) &= x^3 + a_1x + a_2x^2 && \text{версальная,} \\ F_2(x; b) &= x^3 + bx^2 && \text{неверсальная,} \\ F_3(x; c) &= x^3 + cx && \text{универсальная.} \end{aligned}$$

Так как росток x^3 является 3-определенным, то наиболее общее возмущение имеет вид

$$p(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 x^3, \quad (23.16)$$

где все ε_i малы, $\varepsilon \in \mathbb{R}^D$, $D = (3+1)!/3!1! = 4$. Постоянный член всегда может быть исключен путем переноса начала координат. Поскольку он не играет существенной роли при обсуждении локальных свойств функции, то можно не принимать его во внимание. Если коэффициент $\varepsilon_3 \neq 0$, то его можно удалить введением нового масштаба для переменной состояния x :

$$x \rightarrow x' = (1 + \varepsilon_3)^{1/3} x. \quad (23.17)$$

Следовательно, ε_3 можно также считать равным нулю. Отсюда следует, что $F_1(x; a_1, a_2)$ — действительно версальная деформация x^3 , а деформации $F_2(x; b) = F_1(x; 0, b)$ и $F_3(x; c) = F_1(x; c, 0)$ легко могут быть получены из F_1 . Отображения между F_2 и F_3 поясняют, почему F_2 не является версальной:

$$\begin{aligned} F_2\left(x - \frac{1}{3}b; b\right) &= x^3 - \frac{1}{3}b^2x = F_3\left(x; -\frac{1}{3}b^2\right), \\ F_3\left(x \pm \sqrt{-\frac{1}{3}c}; c\right) &= x^3 \pm \sqrt{-3c}x^2 = F_2\left(x; \pm\sqrt{-3c}\right). \end{aligned} \quad (23.18)$$

Гладкая замена переменных

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - \frac{1}{3}b, \\ b &\rightarrow b \end{aligned} \quad (23.19)$$

отображает F_2 в те функции F_3 , у которых обязательно $c = -b^2/3 \leq 0$. Вместе с тем деформация F_3 является версальной, так как при гладкой замене координат

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \frac{1}{3}a_1, \\ c &= a_2 - \frac{1}{3}(a_1)^2, \end{aligned} \quad (23.20)$$

$$F_3(x; c) = F_1(x; a_1, a_2).$$

Коэффициенты ε_3 , ε_2 , ε_0 могут быть удалены из возмущения (23.16) путем введения нового масштаба, переноса начала координат по оси x , переноса начала координат по оси y соответственно. Следовательно, размерность наименьшей деформации функции $f(x) = x^3$, которая может породить семейство функций $x^3 + (23.16)$, равна 1, и $F_3(x; c)$ — это универсальная деформация $f(x) = x^3$.

Пример 2. Найти универсальную деформацию неморсовского ростка $E_6: f(x, y) = x^3 + y^4$.

Решение. Наиболее общее возмущение функции двух переменных имеет вид

$$p(x, y) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} p_{ij} x^i y^j, \quad (23.21)$$

где коэффициенты p_{ij} будем считать инфинитезимальными величинами порядка 1. Тогда

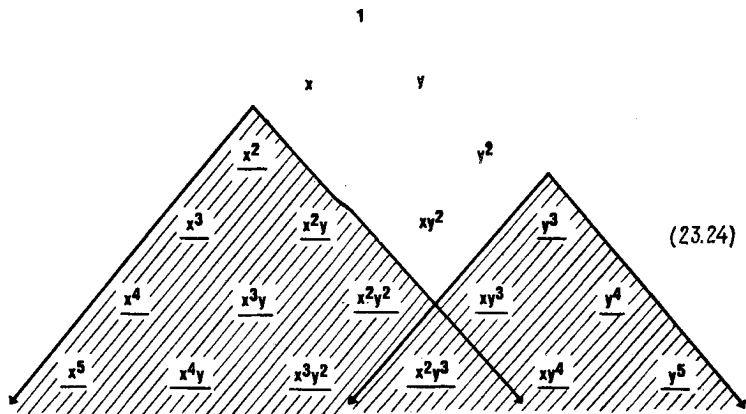
$$F(x, y; p) = x^3 + y^4 + \sum p_{ij} x^i y^j. \quad (23.22)$$

Большая часть возмущенных членов может быть удалена путем гладкой замены переменных. Чтобы определить, какие из возмущенных членов могут

быть удалены, а какие нет, сделаем инфинитезимальную нелинейную замену координат и повторим ход рассуждений:

$$F(x', y'; p) = (x^3 + y^4) + (3x^2\rho x + 4y^3\delta y + \sum_{ij} p_{ij}x^i y^j) + O(2). \quad (23.23)$$

В настоящий момент нас интересует вложение ростка $f(x, y)$ в большое семейство $F(x, y; p)$, а не качественное изменение поведения $f(x, y)$ в заданной точке. Вследствие этого инфинитезимальное преобразование в формуле (23.23) может быть неоднородным. Члены, которые могут возникнуть из выражений $3x^2\delta x$ и $4y^3\delta y$, лежат в тени на диаграмме вида



Следовательно, нелинейное преобразование может быть выбрано так, чтобы удалить все члены $p_{ij}x^i y^j$ в возмущении (23.23), которые соответствуют этим членам. Исключая постоянный член, получаем, что универсальная деформация ростка $f(x, y) = x^3 + y^4$ имеет размерность 5 и имеет вид

$$F(x, y; p) = x^3 + y^4 + p_{10}x + p_{01}y + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{12}xy^2. \quad (23.25)$$

Теперь это выражение можно сопоставлять с каноническим возмущением для E_6 , приведенным в табл. 2.2.

4. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ФУНКЦИИ

Автор работ [5—10] предложил простой алгоритм определения, является ли функция $f(x)$ конечно определенной, и если является, то насколько разложение этой функции в ряд Тейлора может отражать качественные изменения в ее поведении. Этот алгоритм требует вычислить множество полиномов $R_{ij}(x)$ согласно формуле

$$R_{ij}(x) = j^{p+1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} m_j(x) \right\} \quad (23.26)$$

в предположении, что $f(x)$ является ρ -определенной, а $m(x)$ — последовательность полиномов от переменных x_1, x_2, \dots, x_l степеней 1, 2, ...:

$$m_j(x) = x_1, \dots, x_l; x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_l^2, x_1^3, \dots \quad (23.27)$$

В связи с использованием данного алгоритма возникает вопрос: могут ли все одночлены степени $\rho + 1$ быть записаны в виде линейных суперпозиций $R_{ij}(x)$ с постоянными коэффициентами?

Ответ на этот вопрос оказывается положительным не только в том случае, когда $f(x)$ является ρ -определенной, но и в случае, когда $f(x)$ не является таковой. Объясняется это тем, что теорема, лежащая в основе данного алгоритма, не является теоремой типа «тогда и только тогда».

Алгоритм типа «тогда и только тогда» может быть получен, если заменить инфинитезимальные однородные нелинейные преобразования на инфинитезимальные однородные осесохраняющие нелинейные преобразования. Тогда одночлены $m_j(x)$ будут иметь степени, начиная со второй, и положительный ответ на ранее поставленный вопрос будет означать, что функция $f(x)$ является ρ -определенной и, может быть, даже $(\rho - 1)$ -определенной.

Пример 1. Вычислить определенность функции

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{3}y^3. \quad (23.28)$$

Решение. Предположим, что $\rho = 3$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x + y) + y^2, \quad (23.29)$$

$$m_1, m_2, m_3, \dots = x, y, x^2, xy, y^2, x^3, \text{ и т. д.}$$

Полиномы $R_{ij}(x)$ приведены в табл. 23.1. Все множество одночленов степени $3 + 1 = 4$ может быть выражено через $R_{ij}(x, y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} y^4 &= R_{25} - R_{15}, \\ xy^3 &= R_{24} - R_{14}, \\ x^2y^2 &= R_{23} - R_{13}, \\ x^3y &= R_{27} - (R_{23} - R_{13}), \\ x_4 &= R_{26} - \{R_{27} - (R_{23} - R_{13})\}. \end{aligned} \quad (23.30)$$

Так как ни один из членов R_{ij} , появляющихся в (23.30), не содержит одночленов первой степени $m_1 = x$, $m_2 = y$, то алгоритм типа «тогда и только тогда», связанный с осесохраняющим преобразованием, применим полностью. Следовательно, функция является 3-определенной либо даже 2-определенной. Так как матрица устойчивости $f(x, y)$ в нуле имеет обращаемый в нуль определитель, то функция $f(x, y)$ не может быть 2-определенной.

Таблица 23.1. Применение алгоритма вычисления определенности к функции

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{3}y^3$$

m_j		$i^r \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} m_j \right]$	$i^r \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} m_j \right]$
m_1	x	$x(x + y)$	$x(x + y) + xy^2$
m_2	y	$y(x + y)$	$y(x + y) + y^3$
m_3	x^2	$x^2(x + y)$	$x^2(x + y) + x^2y^2$
m_4	xy	$xy(x + y)$	$xy(x + y) + xy^3$
m_5	y^2	$y^2(x + y)$	$y^2(x + y) + y^4$
m_6	x^3	$x^3(x + y)$	$x^3(x + y)$
m_7	x^2y	$x^2y(x + y)$	$x^2y(x + y)$
m_8	xy^2	$xy^2(x + y)$	$xy^2(x + y)$
m_9	y^3	$y^3(x + y)$	$y^3(x + y)$
m_{10}	x^4	0	0
	⋮	↓	↓
	⋮		

Пример 2. Найти определенность $f(x) = x^p$.

Решение. Предположим, что функция x^p/p является p -определенной. Тогда $\partial f/\partial x = x^{p-1}$ и $m_2, \dots = x, x^2, \dots$. Вследствие этого имеем

$$i^{p+1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} m_j \right\} = i^{p+1} \{ x^{p-1} m_j \} = x^p, x^{p+1}, 0, \dots \quad (23.31)$$

А так как $x^{p+1} = R_{12}$, то функция x^p является p -определенной.

Пример 3. Вычислить определенность $f(x, y) = x^2y + y^p/p$.

Решение. Предположим, что функция $f(x, y)$ является p -определенной. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^{p-1}. \quad (23.32)$$

Используя функции $m_j(x, y)$, приведенные в примере 1, легко видеть, что

$$x^{p+1} = i^{p+1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} x^{p-1} \right\}, \quad p - 1 > 2,$$

$$x^r y^s = i^{p+1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} x^{r-1} y^{s-1} \right\}, \quad r + s = p + 1 \geq 3, \quad r \geq 1, \quad s \geq 1, \quad (23.33)$$

$$y^{p+1} = i^{p+1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} y^2 \right\} - i^{p+1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} xy \right\}.$$

Следовательно, функция $f(x, y)$ является p -определенной.

Для случая, когда рассматриваются только функции $f(x, y)$ двух переменных, а $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ являются одночленами, этот алгоритм может быть представлен в следующем систематизи-

рованном диаграммном виде [11]. Одночлены $1; x, y; x^2, xy$ и т. д. упорядочиваем в треугольный массив á la Pascal. Тогда $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ соответствуют некоторым точкам в этом треугольнике. Умножение на одночлены $m_j(x, y)$ соответствует созданию точки в «тени» частных производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$. Эти тени начинаются одной или двумя строками, расположенными ниже этих производных, в зависимости от того, имеются ли члены первой степени от x и y среди $m_j(x, y)$ или нет. Взятие $(p+1)$ -струи соответствует игнорированию всех строк ниже $(p+1)$ -й строки.

Этот метод уже был использован при вычислении определенности ростка

$$E_6: f(x, y) = x^3 + y^4$$

в разд. 2 [см. (23.12)].

5. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Автор работ [5–10] предложил также алгоритм определения универсальной деформации функции. Правила для вычисления деформации являются в буквальном смысле дополнением правил нахождения определенности.

Алгоритм требует найти число p — определенность функции $f(x)$ (т. е. скорее можно работать лишь с полиномом $\bar{f}(x) = j^p f(x)$). При этом предполагается, что $(I)n_j(x)$ — последовательность одночленов от переменных x_1, x_2, \dots, x_l степеней $0, 1, 2, \dots$:

$$n_j(x) : 1; x_1, x_2, \dots, x_l; x_1^2, x_1x_2, \dots \quad (23.34)$$

и (2) $F(x; a)$ является r -мерной деформацией полинома $\bar{f}(x)$. Определим многочлены

$$T_j(x) = \frac{\partial}{\partial a_j} j^{p+1} F(x; a) |_{a=0}. \quad (23.35)$$

Кроме того, должны быть перечислены все многочлены вида

$$S_{ij}(x) = j^p \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} n_j(x) \right\}. \quad (23.36)$$

Тогда, если все одночлены степени не больше p могут быть выражены в виде

$$\text{Любые одночлены степени } \leq p = \sum s_{ij} S_{ij}(x) + \sum t_j T_j(x) \quad (23.37)$$

(где s_{ij}, t_j — вещественные числа), то это означает, что $F(x; a)$ является версальной деформацией $\bar{f}(x)$; если $T_j(x)$ минимально, то $F(x; a)$ — универсальная деформация полинома $\bar{f}(x)$.

◇◇◇ Полиномы $T_j(x)$ образуют минимальное множество только тогда, когда они линейно независимы.

◇◇◇ При нахождении канонической *линейной* (по $T_j(x)$) формы универсальной деформации полинома $\bar{f}(x)$:

$$F(x; a) = \bar{f}(x) + \sum_{j=1}^r a_j T_j(x) \quad (23.38)$$

для определения параметров деформации a_j может быть применена теорема о неявной функции.

◇◇◇ Универсальная деформация функции $\bar{f}(x)$ не обязательно единственная (см. примеры 2 и 3 ниже), хотя она и однозначна с точностью до гладкой замены переменных. Списки элементарных катастроф, приводимых различными авторами, могут казаться на первый взгляд совершенно различными, однако все они эквивалентны относительно гладкой замены переменных.

Пример 1. Вычислить универсальную деформацию функции $f(x) = x^p \cos x$ в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Функция $x^p(1 - x^2/2! + \dots)$ является p -определенной, так что достаточно исследовать $\bar{f}(x) = x^p$. Одночлены $n_j(x)$ будут следующие:

$$n_0, n_1, n_2, \dots = 1, x, x^2, \dots \quad (23.39)$$

Тогда

$$j^p \left\{ \frac{\partial^j \bar{f}}{\partial x^j} n_j \right\} = j^p \{ x^{p-1} n_j \} = x^{p-1}, x^p, 0, \dots \quad (23.40)$$

Каждый одночлен степени не больше p может быть выражен в форме (23.38) при условии, что мы выбрали

$$T_0, T_1, \dots, T_{p-2} = x^0, x^1, \dots, x^{p-2}. \quad (23.41)$$

Так как постоянный член несуществен, то универсальная деформация $\bar{f}(x) = x^p$ равна

$$F(x; a_1, a_2, \dots, a_{p-2}) = x^p + \sum_{j=1}^{p-2} a_j x^j. \quad (23.42)$$

Пример 2. Вычислить универсальную деформацию функции $f(x, y) = x^2 y \pm y^3/3$.

Решение. Эта функция является 3-определенной. Частные производные $\partial f/\partial x = 2xy$ и $\partial f/\partial y = x^2 \pm y^2$, а также одночлены $n_j(x)$ и 3-струи их произведений S_{ij} перечислены ниже:

$n_j(x, y)$	$S_{1j} = j^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} n_j \right)$	$S_{2j} = j^3 \left(\frac{\partial f}{\partial y} n_j \right)$	
$n_0 = 1$	xy	$x^2 \pm y^2$	
$n_1 = x$	$x^2 y$	$x(x^2 \pm y^2)$	(23.43)
$n_2 = y$	xy^2	$y(x^2 \pm y^2)$	
$n_3 = x^2$	0	0	
⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	

Ни один из одночленов x , y первой степени не может быть выражен в виде линейной комбинации S_{ij} , поэтому полагаем, что $T_1(x, y) = x$ и $T_2(x, y) = y$. Множество полиномов второй степени является линейным векторным пространством размерности 3. Функции $S_{11} = xy$ и $S_{21} = x^2 \pm y^2$ могут быть взяты как два базисных вектора в этом пространстве. В качестве $T_3(x, y)$ можно взять любой вектор этого пространства, линейно независимый с S_{11} и S_{21} . Например, можно взять x^2 , y^2 или $x^2 \mp y^2$. При построении табл. 2.2 мы выбрали $T = y^2$, однако для вычислительных целей (гл. 5) более удобно выбрать $T_3(x, y) = x^2 \mp y^2$. Все одночлены x^3 , x^2y , xy^2 , y^3 третьей степени могут быть выражены с помощью многочленов S_{ij} , так что универсальной деформацией $f(x, y)$ является

$$F(x, y; a_1, a_2, a_3) = x^2y \pm \frac{1}{3}y^3 + a_1x + a_2y + a_3(x^2 \mp y^2). \quad (28.44)$$

Пример 3. Вычислить деформацию $f(x, y) = x^2y + y^p/p$.

Решение. Эта функция является p -определенной, у которой $\partial f/\partial x = 2xy$, а $\partial f/\partial y = x^2 + y^{p-1}$. Одночлены $n_j(x, y)$ и p -струи $S_{ij}(x, y)$ перечислены ниже:

$$\begin{array}{lll} n_j(x, y) & S_{1j} = j^p \left(\frac{\partial f}{\partial x} n_j \right) & S_{2j} = j^p \left(\frac{\partial f}{\partial y} n_j \right) \\ n_0 = 1 & xy & x^2 + y^{p-1} \\ n_2 = x & x^2y & x^3 + xy^{p-1} \\ n_2 = y & xy^2 & x^2y + y^p \\ n_3 = x^2 & x^3y & x^4 \\ n_4 = xy & x^2y^2 & x^3y \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad (23.45)$$

Все одночлены $x^r y^s$, $r \geq 1$, $s \geq 1$, $r + s \leq p$, встречаются в списке многочленов S_{1j} , а одночлены x^r , $4 \leq r \leq p$, и y^p встречаются в списке многочленов S_{2j} . Одночлен x^3 может быть выражен в виде $x^3 = (x^3 + xy^{p-1}) - xy^{p-1}$, так что минимальное множество $T_j(x, y)$ должно включать x , y , y^s , $1 < s < p-1$, и либо x^2 , либо y^{p-1} . Одной из универсальных деформаций функции $x^2y + y^p/p$ является

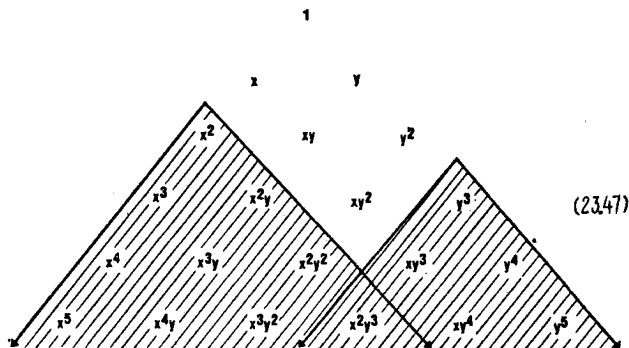
$$F(x, y; a_1, \dots, a_p) = x^2y + \frac{y^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2} a_j y^j + \sum_{j=p-1}^p a_j x^{j-(p-2)}. \quad (23.46)$$

◇◇◇ Вычисление универсальной деформации функции двух переменных может быть значительно упрощено применением диаграммного метода в случае, когда $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ являются одночленами [2, 11]. Фактически диаграммный метод уже невяно был использован в (23.24) при пояснении алгоритма Мезера для вычисления определенности.

Пример 4. Вычислить деформацию $E_6: x^3 + y^4$.

Решение. Это как раз тот случай, когда диаграммный метод позволяет значительно упростить проводимые вычисления. Одночлены $x^p y^q$ упорядочим в треугольник Паскаля. Тогда «тени», отбрасываемые $\partial f/\partial x = x^2$ и

$\partial f/\partial y = y^3$, умноженными на одночлены n_j : $1; x, y, x^2, \dots$, могут быть представлены в виде диаграммы

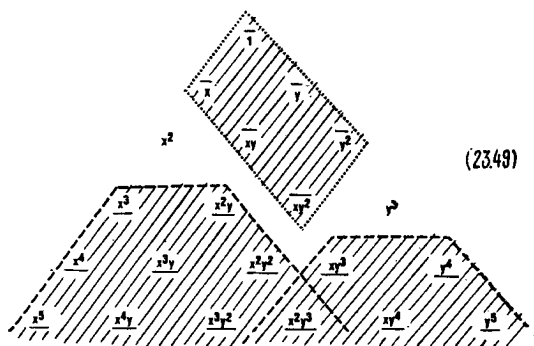


Остающиеся члены дают универсальную деформацию $E_6 = x^3 + y^4$. Без учета постоянного члена эта универсальная деформация является функцией размерности 5:

$$p(x, y) = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2. \quad (23.48)$$

6. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ РОСТКОВ

Правила нахождения определенности и деформации взаимно дополняют друг друга. В диаграмме, приведенной ниже, одночлены $R_{ij}(x, y)$, порождаемые в алгоритме нахождения определенности для функции $f(x, y) = x^3 + y^4$, лежат внизу, а члены деформации $T_j(x, y)$, порождаемые в алгоритме вычисления деформации, лежат вверху [ср. (23.12) и (23.47)]:



Множества одночленов, окруженных штриховой линией, являются «теньями» x^2 и y^3 . Лишь одночлены $x^2 = \partial f/\partial x$ и $y^3 = \partial f/\partial y$ не лежат ни внизу, ни вверху. Все лежащие внизу члены могут быть удалены путем гладкой замены переменных; все лежащие вверху члены обязательно входят в универсальную деформацию,

а остающиеся члены являются частными производными роста $f(x, y)$.

Эта «двойственность» незамедлительно подсказывает нам следующий алгоритм определения наиболее простого возможного роста, связанного с p -определенной функцией $f(x_1, \dots, x_l)$. Алгоритм требует найти число p — определенность функции f . (Далее будем работать только с полиномом $\tilde{f}(x) = j^p f(x)$.) При этом предполагается, что V_p — линейное векторное пространство, порождаемое всеми одночленами от x_1, \dots, x_l степени не больше p . (Тогда $\dim V_p = (p+1)!/p!$.) Кроме того, V_D есть линейное векторное подпространство V_p , порождаемое всеми многочленами R_{ij} , получаемыми в алгоритме нахождения определенности, а V_U — линейное векторное подпространство V_p , порождаемое минимальным множеством полиномов T_j , получаемых в алгоритме деформации. Тогда $V_p - (V_D \oplus V_U) = V_p / (V_D \oplus V_U)$ является линейным векторным пространством, порожденным первыми частными производными роста \tilde{f} .

Этот алгоритм «лежит» на стыке двух конкурирующих математических процессов (гл. 3 и 4): с одной стороны, использование управляющих параметров в семействе функций для исключения некоторых начальных членов разложения в ряд Тейлора в критической точке, а с другой стороны, замена переменных для исключения последних членов («хвоста» разложения). Эти два конкурирующих процесса «встречаются посередине» в ростке катастрофы. Вышеприведенный алгоритм как раз и описывает механизм построения роста.

Пример 1. Найти канонический (простейший) росток f_{CG} , связанный с функцией $f(x, y) = x^2y + y^3/3 + y^2/2$.

Решение. Интересующая нас функция (с точностью до изменения шкалы) уже встречалась в (5.36).

Шаг 1. Определенность $f(x, y)$ вычисляется при помощи перечисления всех одночленов $1; x, y; x^2, \dots$ и всех $(p+1)$ -струй R_{ij} (табл. 23.2). В таблице перечислены все члены степени не выше пятой, которые возникают в алгоритме вычисления определенности; одночлены пятой степени очерчены штриховым прямоугольником. Заманчиво предположить, что функция $f(x, y)$ является 3-определенной. Действительно, все одночлены четвертой степени $(x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4)$ встречаются в таблице или могут быть представлены как линейные комбинации функций, представленных в таблице:

$$x^4 = R_{23} - R_{14} - R_{11}.$$

Однако напомним, что алгоритм определенности не является алгоритмом типа «тогда и только тогда». Если бы $f(x, y)$ являлась 3-определенной, то все одночлены четвертой степени можно было бы выразить как линейные комбинации R_{ij} , однако факт, что это возможно сделать, не гарантирует нам, что функция f является 3-определенной, поскольку один из этих одночленов (x^4) требует одночлена m_1 степени 1. Утверждение «тогда и только тогда» может быть использовано для доказательства, что $f(x, y)$ является 4-определенной, так как все члены пятой степени либо непосредственно входят в таблицу $(x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5)$, либо могут быть выражены с помощью одночленов $m_j(x, y)$ выше второй степени:

$$x^5 = R_{26} - R_{17} - R_{13}.$$

Таблица 23.2. Алгоритм нахождения роста функции

$$f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}.$$

			$j^s \left[\frac{\partial f}{\partial x} n_j \right]$		$j \left[\frac{\partial f}{\partial y} n_j \right]$	
	n_0	1	S_{10}	xy	S_{20}	$x^2 + y^2 + y$
m_1	n_1	x	$R_{11} = S_{11}$	x^2y	$R_{21} = S_{21}$	$x^3 + xy^2 + xy$
m_2	n_2	y	$R_{12} = S_{12}$	xy^2	$R_{22} = S_{22}$	$x^2y + y^3 + y^2$
m_3	n_3	x^2	$R_{13} = S_{13}$	x^3y	$R_{23} = S_{23}$	$x^4 + x^2y^2 + x^2y$
m_4	n_4	xy	$R_{14} = S_{14}$	x^2y^2	$R_{24} = S_{24}$	$x^3y + xy^3 + xy^2$
m_5	n_5	y^2	$R_{15} = S_{15}$	xy^3	$R_{25} = S_{25}$	$x^2y^2 + y^4 + y^3$
m_6	n_6	x^3	$R_{16} = S_{16}$	x^4y	$R_{26} = S_{26}$	$x^5 + x^3y^2 + x^3y$
m_7	n_7	x^2y	$R_{17} = S_{17}$	x^3y^2	$R_{27} = S_{27}$	$x^4y + x^2y^3 + x^2y^2$
m_8	n_8	xy^2	$R_{18} = S_{18}$	x^2y^3	$R_{28} = S_{28}$	$x^3y^2 + xy^4 + xy^3$
m_9	n_9	y^3	$R_{19} = S_{19}$	xy^4	$R_{29} = S_{29}$	$x^2y^3 + y^5 + y^4$
m_{10}	n_{10}	x^4	$R_{1,10} = S_{1,10}$	0	$R_{2,10} = S_{2,10}$	x^4y
m_{11}	n_{11}	x^3y		↓	$R_{2,11} = S_{2,11}$	x^3y^2
m_{12}	n_{12}	x^2y^2			$R_{2,12} = S_{2,12}$	x^2y^3
m_{13}	n_{13}	xy^3			$R_{2,13} = S_{2,13}$	xy^4
m_{14}	n_{14}	y^4			$R_{2,14} = S_{2,14}$	y^5
m_{15}	n_{15}	x^5			$R_{2,15} = S_{2,15}$	0

◇◇◇ Достаточно, но не необходимо работать с полиномом $j^p f(x)$. По существу, достаточно работать с любым полиномиальным усечением $j^{p'} f(x)$ функции $f(x)$, $p' \geq p$, где p — определенность функции $f(x)$. Это происходит из-за того, что алгоритм определенности порождает все одночлены степени не меньше p , так что $V_p / (V_D \cap V_p) = V_{p'} / (V_D \cap V_{p'})$. Самое лучшее для нас — работать с линейным векторным пространством $V_{p'}$ наименьшей подходящей размерности. Это случается, когда $p' = p$, где p — определенность функции $f(x)$.

Поскольку мы до сих пор не знаем, является ли $f(x, y) = x^2y + y^3/3 + y^2/2$ 3-определенной или 4-определенной, то мы должны еще поработать с пространством $V_{p'} = V_4$, порожденным одночленами $x^r y^s$, $r + s \leq 4$. Это пространство имеет размерность 15. Поэтому, если окажется, что $f(x, y)$ является 3-определенной, то потребуются лишь небольшой объем дополнительной работы при проведении вычислений. Вместе с тем, если $f(x, y)$ 4-определенная, а мы будем работать в V_3 , то полученный результат будет неправильным.

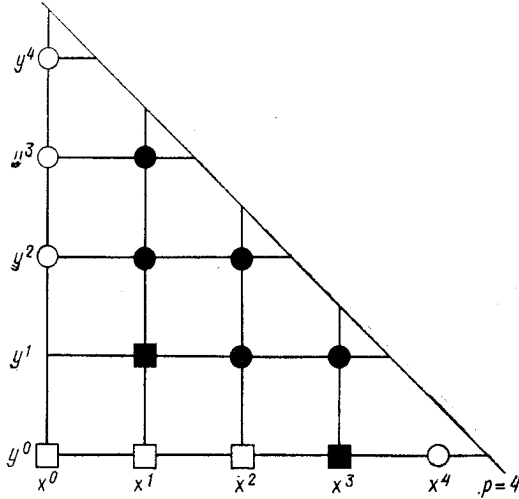


Рис. 23.2. Пространство V_p , используемое в алгоритме вычисления роста функции $f(x, y)$, порождается $(p+1)(p+2)/2$ одночленами $x^i y^j$, $i+j \leq p$. На рисунке введены следующие обозначения для различных базисных векторов, используемых в различных частях этого алгоритма, на примере исследования функции $f(x, y) = x^2 y + y^3/3 + y^2/2$:

● — члены, непосредственно используемые в алгоритме нахождения определенности; ○ — члены, не прямо используемые в алгоритме нахождения определенности; ■ — члены, не представленные в алгоритме нахождения определенности, но порождаемые в алгоритме нахождения деформации; □ — базисные векторы пространства.

Шаг 2. Линейное векторное пространство V_p , порожденное всеми одночленами не выше второй степени, имеет размерность $(2+4)!/2!4! = 15$. Базисные векторные одночлены изображены на рис. 23.2 точками.

Шаг 3. Линейное векторное пространство V_D , порождаемое полиномами R_{ij} , представлено в табл. 23.2. Одночлены, которые появляются непосредственно в таблице, заключены в прямоугольники; одночлены же, которые могут быть выражены с помощью линейных комбинаций элементов R_{ij} , изображены в открытом пространстве. Линейное векторное пространство V_D , порожденное этими многочленами, изображено на рис. 23.2 белыми и черными кружками, необходимо лишь добавить к ним полином $R_{21} = x^3 + xy^2 + xy$. $\text{Dim } V_D = 10$.

Шаг 4. Линейное векторное пространство, порождаемое многочленами S_{ij} , включает все базисные векторы, описанные выше, а также два дополнительных базисных вектора: $S_{10} = xy$ и $S_{20} = x^2 + y^2 + y$. Это пространство порождается одночленами, изображенными черными и белыми кружками на рис. 23.2, двумя новыми одночленами $xy = S_{10}$ и $x^3 = S_{21} - S_{12} - S_{10}$, изображенными на этом рисунке черными квадратами, и полиномом $S_{20} = x^2 + y^2 + y$. Размерность этого пространства равна 12.

Шаг 5. Дополнение к этому пространству в V_p имеет размерность $15 - 12 = 3$ и порождается многочленами $T_i(x, y)$. В качестве базисных векторов этого пространства V_U удобно выбрать три одночлена $1, x, x^2$ (белые квадраты). Тогда пространство $V_D + V_U$ порождается одночленами, изображенными на рис. 23.2 кружками и белыми квадратами, вместе с многочленом $S_{21} = x^3 + xy^2 + xy$. Пространство $V_p - (V_D \oplus V_U)$ имеет размерность $15 - (10 + 3) = 2$ и порождается двумя линейно независимыми комбинация-

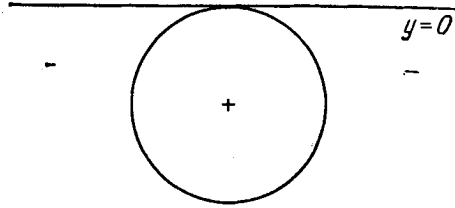


Рис. 23.3. Корни уравнения $f(x, y) = x^2y + y^3/3 + y^2/2 = 0$.

Соответствующий росток не является положительно определенным, так что $f \doteq -x^4 + y^4$.

ми из трех одночленов y, xy, x^3 , которые также линейно независимы от S_{21} . В качестве базисных векторов удобно выбрать пару одночленов y, x^3 .

Шаг 6. Первые производные ростка $f(x, y)$ порождают двумерное пространство (шаг 5):

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{cg} \sim x^3, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_{cg} \sim y.$$

Следовательно, $f(x, y) \doteq f_{cg} = \alpha x^4 + \beta y^2, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$, и f является 4-определенной. Как только определим знаки α и β , то с помощью обычного преобразования масштаба получим канонический росток вида $\pm x^4 \pm y^2$. Матрица устойчивости имеет вид

$$f_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

так что коэффициент β члена y^2 должен быть положительным. Коэффициент α члена x^4 должен быть отрицательным. Это может быть определено путем решения уравнения $f(x, y) = 0$. Линии корней и знаки функций в трех открытых областях, на которые эти линии корней разбивают \mathbb{R}^2 , изображены на рис. 23.3. Если коэффициент α положителен, то f_{cg} и, следовательно, $f(x, y)$ будут положительно определенными. Тогда коэффициент α должен быть отрицательным, и

$$f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \doteq -x^4 + y^2 = f_{cg}.$$

7. ПРИЛОЖЕНИЯ

7.1. Теорема о неявной функции

Используем правила нахождения определенности, деформации и канонических ростков для описания некритических точек, морсовских критических точек и неморсовских критических точек различных типов. На всем протяжении этого раздела мы будем изучать функции l переменных состояния, значения которых в начале координат равны нулю.

Предположим, что $\nabla f \neq 0$. Тогда можно считать, что f является 1-определенной, и написать

$$j^1 f = \sum_{i=1}^l a_i x_i, \quad (23.50)$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_i отличен от нуля. Для такого коэффициента (пусть это будет a_1) $\partial \bar{f} / \partial x_1 = a_1 \neq 0$ и любой линейный одночлен x_j может быть записан в виде

$$x_j = \frac{1}{a_1} j^1 \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} x_j \right). \quad (23.51)$$

Аналогичным образом могут быть записаны все одночлены степени выше первой степени. Следовательно, f является 1-определенной. Кроме того, все одночлены не выше первой степени могут быть представлены в виде произведения $\partial \bar{f} / \partial x_1$ и одночлена $n_j(x)$ не выше первой степени. Таким образом, нет необходимости вводить деформирующие члены для f . Наконец, одномерное пространство V_p / V_D имеет базисный вектор 1, и поэтому простейший канонический росток, частные производные которого порождают это пространство, имеет вид $\bar{f}_{cg} = x_1$, так что

$$\nabla \bar{f} \neq 0 \Rightarrow \bar{f} \neq x_1. \quad (23.52)$$

7.2. Лемма Морса

Предположим, что $\nabla f = 0$, но $\det \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j = \det f_{ij} \neq 0$. Далее предположим, что функция f является p -определенной, причем $p = 2$. Тогда

$$\bar{f} = j^2 f = \frac{1}{2} x_i x_j \bar{f}_{ij}. \quad (23.53)$$

Отсюда находим, что $\partial \bar{f} / \partial x_i = \bar{f}_{ij} x_j$, а так как \bar{f}_{ij} — невырожденная матрица, то каждый одночлен x_j может быть представлен в виде линейной комбинации $\partial \bar{f} / \partial x_i$:

$$x_j = (f^{-1})_{ji} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}. \quad (23.54)$$

Общий одночлен второй степени также может быть записан в виде линейной комбинации произведений формы $\partial \bar{f} / \partial x_i$ и x_j :

$$x_i x_j = j^2 \left(f_{ik}^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} x_j \right) = f_{ik}^{-1} j^2 \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} x_j \right). \quad (23.55)$$

Здесь f^{-1} обозначает матрицу, обратную матрице f_{ij} . Так как все одночлены второй степени могут быть представлены в виде произведений частных производных $\partial \bar{f} / \partial x_i$ на $n_0(x) = 1$ или $n_j(x) = x_j$, $1 \leq j \leq l$, то для функции $f(x)$ нет нужды в деформи-

рующих членах. И наконец, пространство V_p/V_D порождается одночленами x_1, \dots, x_l , так что простейшая функция, l частных производных которой порождают это пространство, является просто суммой l квадратичных членов:

$$f \doteq \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^2, \quad \lambda_i \neq 0. \quad (23.56)$$

7.3. A_k

Рассмотрим функции

$$f(x) = x^{k+1}g(x), \quad (23.57)$$

где $g(x)$ — гладкая функция, у которой $g(0) = 1$. Как было показано (пример 2 разд. 4), эта функция является $(k+1)$ -определенной. Деформация $\bar{f}(x) = j^{k+1}f(x) = x^{k+1}$ также была уже найдена (пример 1 разд. 5). Пространство $V_p = (V_D \oplus V_U)$ порождается x^k . Канонический росток представляется простейшей функцией f_{cg} , первая производная которой пропорциональна $\partial \bar{f} / \partial x = x^k$. Следовательно,

$$f \doteq f_{cg} = x^{k+1}, \quad (23.58)$$

а все наиболее общие возмущения такие же, как в табл. 2.2.

7.4. D_k

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = x^2y + y^{k-1}. \quad (23.59)$$

Эта функция является $(k-1)$ -определенной (пример 3 разд. 4), а ее универсальная деформация была построена в примере 3 (разд. 5). Все результаты, касающиеся этой функции, суммированы в табл. 4.1.

7.5. E_6, E_7, E_8

Ростками E_6, E_7, E_8 являются

$$\begin{aligned} E_6: f(x, y) &= x^3 + y^4, \\ E_7: f(x, y) &= x^3 + xy^3, \\ E_8: f(x, y) &= x^3 + y^5. \end{aligned} \quad (23.60)$$

Правила нахождения определенности и деформации имеют особенно простой вид для E_6 и E_8 , так как $\partial f / \partial x$ и $\partial f / \partial y$ — одночлены. Эти вычисления суммированы в диаграммах на рис. 23.4.

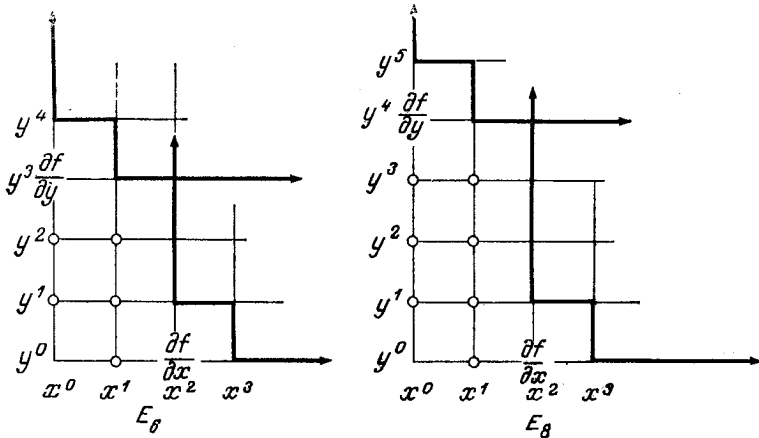


Рис. 23.4. Для E_6 и E_8 все одночлены четвертой и пятой степени могут быть представлены в виде $(\partial f/\partial x_i)n_i$. Члены деформации изображены светлыми кружочками; исключен лишь постоянный член.

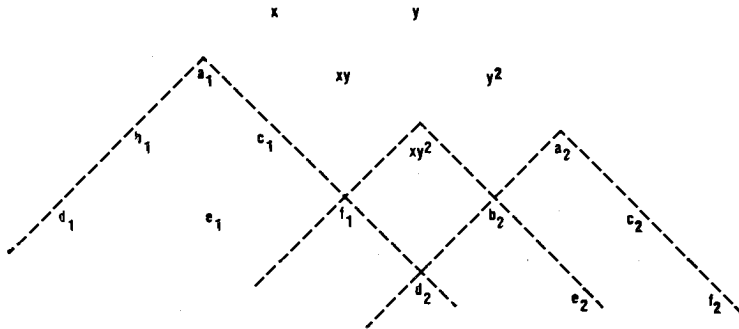


Рис. 23.5. Диаграммное представление многочлена $E_7 = x^3 + xy^3$, у которого $\partial f/\partial y$ — одночлен, а $\partial f/\partial x$ — нет. Диаграммный метод может быть использован, даже если $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ не являются одночленами. Пары одночленов, возникающих из $(\partial f/\partial x)n_i - (x^2 + y^3)n_j$ в алгоритме вычисления деформации, отмечены одинаковыми буквами.

Проведение этих правил нахождения определенности и деформации для E_7 не является столь простым, так как $\partial f/\partial x = x^3 + y^3$ не одночлен. Несмотря на это, они и не столь сложны и даже могут быть представлены в виде диаграмм, изображенных на рис. 23.5. Так как одночлены b_2, d_2, e_2, \dots встречаются в тени $\partial f/\partial y = xy^2$, то одночлены b_1, d_1, e_1, \dots могут быть представлены в виде линейных комбинаций $S_{ij}(x)$. Аналогично, так как f_1, \dots встречаются в этой же тени, f_2, \dots могут быть также представлены в виде линейных комбинаций $S_{ij}(x)$. Все

одночлены в тени b_1 (включая и сам b_1), в тени f_2 (включая f_2) и в тени xy^2 (исключая xy^2) могут быть представлены в виде линейных комбинаций $R_{ij}(x)$. Все многочлены пятой степени могут быть представлены аналогично, так что росток E_7 является 4-определенным.

Деформация E_7 должна включать как одночлены x, y, xy, y^2 , так и линейные комбинации a_1 и a_2 , линейно независимые от $a_1 + a_2$, и линейные комбинации c_1 и c_2 , линейно независимые от $c_1 + c_2$. Универсальная деформация E_7 (не единственная) приведена в табл. 4.1.

7.6. Кратные сборки

Наиболее общий вид нарушений, встречаемых в одноэлементных структурных инженерных проблемах, принадлежит к катастрофам типа сборки. Сложная система может быть композицией нескольких структурных элементов, каждый из которых может отказать при некоторой нагрузке по катастрофе сборки. В современной инженерной практике стало привычным делом проектирование систем таким образом, чтобы все виды нарушений наступали при одном и том же нагружении. Если существуют l видов нарушений, то соответствующим ростком катастрофы при этом значении нагрузки является

$$f(x_1, \dots, x_l) = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^4, \quad \lambda_i \neq 0. \quad (23.61)$$

Особенно важно поэтому знать чувствительность к несовершенству кратных ростков катастроф сборки. Это значит, что важно знать наиболее общие возмущения роста катастрофы (23.61). Такое возмущение легко построить с помощью следующих правил нахождения определенности и деформации.

Частные производные $\partial f / \partial x_i = x_i^3$ приводят при использовании алгоритма нахождения определенности к одночленам R_{ij} вида

$$x_i^3 (x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_l^{p_l}), \quad p_1 + p_2 + \dots + p_l \geq 1, \quad (23.62)$$

т. е. все одночлены вида

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_l^{q_l} \quad (23.63)$$

могут быть выражены в виде одночленов $(\partial f / \partial x_i) m_j(x)$ при условии, что по крайней мере одна из степеней q_i превышает 2, а сумма всех степеней q_i превышает 3. Одночлен вида (23.63) более высокой степени, не выражаемый в виде R_{ij} , имеет все степени q_i , равные 2. Следовательно, кратные сборки имеют конечную определенность, равную $2l$, где $l > 1$.

◇◇◇ Двойная сборка является 4-определенной. Это означает, что функция

$$f(x, y) = ax^4 + bx^3 + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 + \text{члены более высокой степени} \quad (23.64)$$

является 4-определенной, когда $ae \neq 0$. В этом случае члены более высокой степени могут быть «усечены». Теперь можно выполнить линейное преобразование, которое приведет $f(x, y)$ к канонической форме

$$f'(x', y') = \pm x'^4 + c'x'^2 \pm y'^4. \quad (23.65)$$

Это *не* является формулой стандартной двойной сборки, если $c' = 0$. Таким образом, даже простейшая двойная сборка не является простым ростком катастрофы. В случае $l = 3$ тройная сборка является 6-определенной, так что все члены седьмой степени и выше могут быть «усечены». Однако определенные члены четвертой, пятой и шестой степеней не могут быть удалены каким-либо гладким преобразованием. Таким образом, для того чтобы $f(x, y, z)$ была тройной сборкой, недостаточно потребовать

$$j^4 f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4, \quad (23.66)$$

но уже достаточно

$$j^6 f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4. \quad (23.66')$$

Членами деформации для кратныхборок являются в точности те одночлены, которые дополнительны к S_{ij} , возникающим в алгоритме деформации. Одночлены S_{ij} имеют вид (23.63), где опять же требуется, чтобы $q_1 + q_2 + \dots + q_l \geq 0$. Таким образом, $T_j(x)$ состоят из всех одночленов вида (23.63), в которых все члены не выше второй степени (т. е. $q_i = 0, 1, 2$ для каждого $i = 1, 2, \dots$). Всего существует точно 3^l одночленов, или $3^l - 1$, если исключить константу.

Итак:

— если при $l > 1$

$$j^{2l} f(x_1, \dots, x_l) = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^4, \quad \lambda_i \neq 0, \quad (23.67)$$

то f эквивалентна кратной сборке и

$$f(x_1, \dots, x_l) \doteq \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^4; \quad (23.67d)$$

— универсальной деформацией f является

$$F(x; a) = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^4 + \sum_{0 \leq q_i \leq 2} a_1^{q_1} \dots a_l^{q_l} x_1^{q_1} \dots x_l^{q_l}. \quad (23.67u)$$

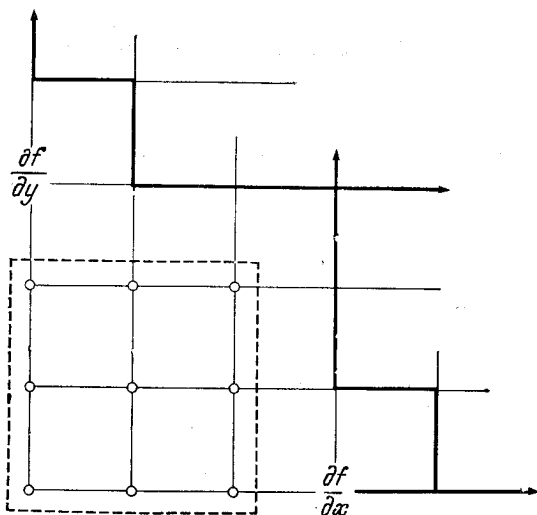


Рис. 23.6. Деформация двойной сборки $f(x, y) = x^4 + y^4$.

○ — члены, содержащиеся в деформации двойной сборки, встречаются в квадрате, ограниченном осями x и y и горизонтальной и вертикальной прямыми, исходящими из одночленов $x^3 = \partial f/\partial x$ и $y^3 = \partial f/\partial y$.

Деформация двойной сборки, получаемая посредством диаграммного метода, изображена на рис. 23.6. Члены деформации имеют вид $(x^0, x^1, x^2) \times (y^0, y^1, y^2)$ и заключены в квадрат, очерченный штриховой линией. Для тройной сборки члены деформации — это в точности те одночлены, которые встречаются в кубе $(x^0, x^1, x^2) \times (y^0, y^1, y^2) \times (z^0, z^1, z^2)$. Для l -мерной сборки члены деформации встречаются в гиперкубе $(x_1^0, x_1^1, x_1^2) \times \dots \times (x_l^0, x_l^1, x_l^2)$ с длиной ребра, равной 2.

8. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ РОСТКИ

В заключение попытаемся ответить на вопрос: при каких общих условиях в общем семействе потенциальных функций $V(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_k)$, зависящих от переменных состояния и k управляющих параметров, будут встречаться только простые неморсовские ростки и каковы они?

Рассмотрение 1 (l «плохих» переменных состояния). Росток функции V может зависеть от 1, 2, ... «плохих» переменных состояния. В общем случае l «плохих» переменных состояния не могут быть встречены в семействах, зависящих от менее чем $k = l(l + 1)/2$ управляющих параметров. Однако, как было показано, в 6-параметрическом семействе могут устойчиво обращаться в нуль все шесть квадратичных коэффициентов,

а каноническая форма для кубических членов зависит от модулей. Отсюда следует, что простые ростки могут встречаться только в семействах функций, зависящих менее чем от шести управляющих параметров, и в этом случае могут быть лишь одна или две «плохие» переменные.

Рассмотрение 2 (всего одна «плохая» переменная состояния). Если $f(x)$ есть k -определенная функция, то

$$f(x) \doteq \pm x^k, \quad (23.68d)$$

и универсальная деформация имеет вид

$$F(x; a_1, \dots, a_{k-2}) = \pm x^k + \sum_{j=1}^{k-2} a_j x^j \rightarrow A_{k-1}. \quad (23.68u)$$

Следовательно, неморсовские ростки, которые могут устойчиво встречаться при $k = 1, 2, 3, 4, 5$, равны x^3, x^4, x^5, x^6, x^7 .

Рассмотрение 3 (две «плохие» переменные состояния x и y и $k = 3, 4, 5$). На основе алгоритма вычисления деформации получаем, что одночлены x и y всегда могут встретиться среди членов деформации. В рассматриваемый росток необходимо включить дополнительные члены деформации, от которых он зависит:

$$\begin{array}{cccc} k=3: & x & y & x^3 + y^3 & D_4 \\ & & xy & & \\ & x & y & x^2y + y^3 & D_4 \\ & & & y^2 & \end{array}$$

Первый росток может быть получен из последнего (гл. 3).

$$\begin{array}{cccc} k=4: & x & y & x^2y + y^4 & D_5 \\ & & & y^2 & \\ & & & & y^3 \end{array}$$

Члены деформации

$$\begin{array}{cccc} & x & y & \\ & & xy & y^2 \\ \text{и} & x & y & \\ & & xy & \\ & & & xy^2 \end{array}$$

не связаны ни с каким ростком. Это становится очевидным при доказательстве некоторых теорем, касающихся формы возму-

щенных членов в треугольнике Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccc}
 k = 5: & & x & & y & & x^2y + y^5 \quad D_6 \\
 & & x^2 & & & & y^2 \\
 & & & & & & y^3 \\
 & & x & & y & & x^3 + y^4 \quad E_6 \\
 & & & & xy & & y^2 \\
 & & & & & & xy^2
 \end{array}$$

Это дает перечень всех простых ростков, которые устойчиво и естественно возникают в семействах функций, зависящих от k (< 6) управляющих параметров, вместе с универсальными деформациями таких ростков. Другие возможные представления деформирующих членов, о которых говорилось выше, могут быть использованы при поиске дополнительных устойчивых ростков катастроф, однако эти представления ведут к росткам, эквивалентным перечисленным в данном списке.

9. ВЫВОДЫ

«Линеаризация», проводимая при заменах переменных вычислений с целью упрощения последних, может быть осуществлена путем итераций инфинитезимальных преобразований. Однако подобная техника линеаризации представляет собой интерес, но не столько с точки зрения возможности упростить вычисления, сколько с точки зрения более простого доказательства теорем, которые ранее были доказаны с помощью общего метода преобразований, рассмотренного в части I.

Инфинитезимальные преобразования позволяют легко и непосредственно определить, какие члены разложения функции в ряд Тейлора могут быть исключены, а какие нет. Это распознавание было проиллюстрировано на ряде примеров, и были сформулированы правила вычисления определенности. Члены, которые в некотором смысле дополнительные к членам, используемым в алгоритме вычисления определенности, — это именно те члены, которые не могут быть удалены возмущением роста. Следовательно, именно они и требуются, чтобы получить наиболее общую форму возмущения данного ростка. В связи с этим были сформулированы правила вычисления деформации (ростка).

Росток представляет собой «результат» двух «конкурирующих» математических процессов: использование управляющих параметров для удаления начальных членов разложения функции в ряд Тейлора и использование гладкой замены переменных для удаления крайних членов разложения. В действительности росток лежит между двумя линейными векторными пространствами,

конструируемыми в алгоритмах вычисления определенности и деформации. Более точно, фактор-пространство $V_p/(V_D \oplus V_U)$ порождено первыми частными производными канонического ростка.

Указанные три алгоритма были использованы для изучения поведения функций в не критических и изолированных критических точках, а также для вычисления определенности и деформации простых ростков семейств катастроф типа A_k , D_k , E_k . Было показано, что если конечная определенность равна 1 или 2, то не требуется никаких деформирующих членов и канонический росток может быть взят соответственно в виде (2.1) и (2.2).

Литература

1. Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, New York: Wiley, 1974.
2. Poston T., Stewart I. N. Taylor Series and Catastrophes, London: Pitman, 1976.
3. Poston T., Stewart I. N. Catastrophe Theory and Its Applications, London: Pitman, 1978. [Имеется перевод: Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]
4. Ascher E., Poston T. Catastrophe Theory in Scientific Research, *Research Futures*, 2, 15—18 (1976); Battelle Memorial Institute, Ohio.
5. Mather J. Stability of C^∞ Mappings I. The Devision Theorem, *Ann. Math.*, 87, 89—104 (1968). [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Мир, 1968.]
6. Mather J. Stability of C^∞ Mappings II. Infinitesimal Stability Implies Stability, *Ann. Math.*, 89, 254—291 (1969). [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Мир, 1969.]
7. Mather J. Stability of C^∞ Mappings III. Finitely Determined Map Germs, *Publ. Math. IHÉS*, 35, 127—156 (1968). [Имеется перевод: *Математика*, 1970, 14 : 1, 145—175.]
8. Mather J. Stability of C^∞ Mappings IV. Classification of Stable Germs by R-Algebras, *Publ. Math. IHÉS*, 37, 223—248 (1969). [Имеется перевод: *УМН*, 1973, 28 : 6, 169—190.]
9. Mather J. Stability of C^∞ Mappings V. Transversality, *Adv. Math.*, 4, 301—336 (1970). [Имеется перевод: *УМН*, 1974, 29 : 1, 99—128.]
10. Mather J. Stability of C^∞ Mappings VI. The Nice Dimensions, in: Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium, Lecture Notes in Mathematics, 192 (С. Т. С. Wall, Ed.), Berlin: Springer, 1971, pp. 207—253 [Имеется перевод: *УМН*, 1974, 29 : 1, 129—158.]
11. Siersma D. Singularities of C^∞ Functions of Right-Codimension Smaller or Equal than Eight, *Indag. Math.*, 25, 31—37 (1973).

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Первое изложение теории катастроф было дано в книге Тома «Stabilité Structurelle et Morphogénese» (1972 г.). В этой книге теория катастроф представляется как некая общая теория построения моделей посредством аналогий. Однако изложение теории сопровождается большим количеством отступлений философского характера, что в значительной степени затрудняет понимание вопросов, связанных с происхождением теории. В частности, в книге Тома теряется тот важный факт, что теория катастроф продолжает направление исследований, берущих свое начало от Пуанкаре (качественная или топологическая динамика). Кроме того, книга Тома предназначена скорее для биологов, чем для математиков, физиков, химиков или инженеров. Другими словами, как по форме, так и по содержанию первая книга по теории катастроф оказалась труднодоступной для тех, кто ожидал от нее непосредственной практической отдачи.

Тем не менее важные идеи Тома получили развитие в нескольких направлениях, три из которых необходимо выделить особо. Они связаны в основном с именами Мезера и Мальгранжа, Арнольда и Зимана.

Мезер и Мальгранж (а также ряд других ученых) занялись строгим математическим доказательством теорем Тома. Это направление привело к математическому обоснованию теории катастроф.

Арнольд значительно расширил классификацию особенностей функций и указал, насколько важным наличие таких особенностей может оказаться для прикладных дисциплин. Собрав массу разрозненных фактов и результатов вместе и написав серию обзорных статей, замечательных по своей красоте, ясности и конкретности изложения, Арнольд первым сделал теорию катастроф доступной для широкой аудитории.

Наконец, Зиман показал, что теория моделей Тома может быть весьма полезной для тех дисциплин, в которых нет высоко развитой математической инфраструктуры. Он, в частности, предложил широкий и захватывающий спектр приложений теории катастроф в социальных и биологических науках.

Развитие теории катастроф сопровождалось рядом критических выступлений. Так, критика, которая велась Суссманом и Цалером, была направлена против исследований Зимана. Эта критика, к сожалению, была не более чем бурей в стакане воды и привела лишь к тому, что отсрочила на несколько лет широкое использование теории катастроф как полезного рабочего инструмента ученых и инженеров.

Основные возражения против полезности теории катастроф обычно бывают двух типов и сводятся к следующим суждениям:

— теория катастроф является топологической, и ее результаты имеют качественный, а не количественный характер. Поэтому она совершенно бесполезна;

— элементарные катастрофы Тома имеют непосредственное отношение лишь к изучению бифуркации состояний равновесия градиентных динамических систем. Следовательно, они неадекватны при описании реальных систем, которые обычно зависят от времени.

Я попытаюсь представить свое понимание серьезности обоих возражений.

Первоначальной целью исследовательской программы Пуанкаре была разработка качественной теории динамических систем. То, что теория является качественной (или топологической), совсем не мешает делать количественные предсказания для тех моделей, которые могут быть описаны на основе теории. Пуанкаре никто не порицал за развитие теории, которая являлась качественной. То же относится к Андронову и Хайкину (теория колебаний). Аналогичные соображения применимы и к элементарным катастрофам. Многообразие катастрофы сборки может быть описано качественно, но я надеюсь, что машинные графики, представленные в этой книге, оставили неизгладимое впечатление именно своей количественной природой. Соответствие экспериментальных данных кривым, построенным на основе представлений об элементарных катастрофах (рис. 5.18), также свидетельствует о возможности количественных предсказаний теории катастроф.

Второе возражение против полезности элементарных катастроф, приписываемое их статической природе, само по себе верно и поэтому более серьезно, чем первое, но выводы, которые обычно из него извлекают, неправильны. Полезность теории катастроф состоит не столько в канонических формах, которые она дает, сколько в методах, которые она применяет. Я считаю, что для нематематиков, стремящихся конструктивно использовать теорию катастроф, можно выделить шесть различных уровней полезности, на которых может быть использована теория катастроф:

1. Организация данных. Необходимо имеющиеся данные собрать в согласованную структуру и показать, как они связаны друг с другом. Канонические свойства катастроф в этом случае могут подсказать новые направления исследований.

2. Потенциальная функция, описывающая градиентную систему, известна, но очень сложна. Локальная структура этой функции в вырожденной критической точке может быть однозначным образом определена посредством элементарных рассуждений.

3. Потенциальная функция, описывающая градиентную систему, не известна. Знание модальности, местонахождения фазовых переходов и тензоров восприимчивости может оказаться вполне достаточным для определения вырожденных критических точек. Качественные изменения в поведении рассматриваемой системы описываются встречаемыми вырожденными критическими точками.

4. Система не является градиентной системой. Такая система тем не менее может иметь состояние равновесия или устойчивые состояния, тесно связанные с элементарными катастрофами. Это имеет место, если нелинейные уравнения, описывающие состояние равновесия (уравнения состояния), содержат множители, не являющиеся градиентами элементарных катастроф.

5. Уравнения, описывающие систему, не известны. Если пространственные вариации или эволюция во времени являются медленными, то существование кратных локально устойчивых мод может означать, что поведение системы можно качественно или даже полуколичественно описать с помощью одной из функций теории катастроф. Это значительно расширяет возможности исследователя вплоть до получения им обоснования догадки об уравнениях, описывающих систему.

6. Относительная важность переменных не известна. В этом случае не известны и уравнения, описывающие систему. Если существует предельная модальность, то всего лишь небольшое число (одна, две или три) функций переменных состояния, описывающих систему, фактически приводят к изменению состояния системы. Эти функции могут быть получены из их линеаризованной формы в вырожденной критической точке. Когда это сделано, можно считать, что качественно поведение системы в окрестности таких точек достаточно хорошо определено.

В ч. II настоящей книги были проиллюстрированы возможности применения теории катастроф на разных уровнях полезности: термодинамика (уровни 1 и 5), теория упругости (уровни 1—3), аэродинамика (уровень 4), волновая механика (уровни 1 и 4), квантовая механика (уровни 1 и 4) и климатология (уровни 4—6).

Нам представляется, что из всех уровней полезности уровень 6 имеет наибольшее отношение к наблюдениям Г. Хилла и программе Пуанкаре. Топологическая динамика и ее побег — теория катастроф — кажутся очень подходящим инструментом для исследования проблем такой сложности, при которой даже трудно определить, с какой стороны к этим проблемам подступиться.

Как уже отмечалось, теория катастроф стимулировала развитие нескольких новых направлений в области математики, которые в ближайшее время, по-видимому, будут продолжать развиваться. Применение теории катастроф может дать наиболее ощутимые результаты в физике и инженерной механике, где методы или результаты теории, вероятно, будут широко внедряться в течение ближайших пяти лет. Проникновение в химию и инженерные дисциплины может потребовать несколько большего времени. Еще больше времени (около 15—20 лет) потребуется для внедрения теории катастроф в биологические и социальные науки. В каждой области теория катастроф может дать новые важные результаты, но особенно полезной она должна быть в области социальных наук.

Принимая во внимание все вышеизложенное, я могу с уверенностью утверждать, что теория катастроф является важной и полезной. На этой уверенности и основана предлагаемая читателю книга. Может быть, некоторые читатели придут к выводу, что теория катастроф заслуживает их внимания, а некоторые сочтут возможным использовать ее в качестве эффективного средства в своих творческих поисках. Я оставляю за читателем право составить собственное мнение по этому вопросу.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автономия 2 133—162
Активная интерпретация 2 24
Анализ бифуркаций 2 6
— размерностей 1 112
Аномальные изменения 1 187
Антиградиент 1 64, 65; 2 169, 177, 183
Аттрактор 1 64, 65; 2 119, 169, 177, 183
— *Лоренца* 2 185—194
— странный 2 185, 192, 194
Аэродинамика 1 281—305
- Базисные векторы 1 182
— — естественные 1 183
Бассейн 1 61
— притяжения 1 65
Бифуркация *Хопфа* 2 156, 163, 165—170, 189, 202
— — докритическая 2 170
— — субкритическая 2 159, 160
— — суперкритическая 2 159, 160
- Вариационные принципы 1 216, 234, 306; 2 6
Ветвь 2 117
— вторичная 1 264; 2 119, 120
— критическая 1 174
— неустойчивая 1 245
— нулевая (магистраль, ствол) 1 264, 265; 2 117
— первичная 1 64; 2 119, 120
Возмущение *Pert* (l, k) 1 19, 167, 176, 189, 330—336; 2 216
— каноническое 1 53, 58
— линейное 2 167
— медленное 1 234
— универсальное 2 239, 251
Возмущения 1 42—59; 2 143—156, 167, 168, 179
Второе начало термодинамики 1 215
Вырожденность 2 106, 339—341
Вырожденные собственные значения 1 33—40
Выпучивание эйлера стержня 1 243—249
- Геометрическая интерпретация 1 173
Геометрия сборки 1 103—110
— складки 1 102—110
Гидродинамика 2 194—197
Гистерезис 1 137, 186
- Дерево ветвлений (дерево равновесий) 2 115—123
Деривация 2 7
Деформация 2 246—272
— версальная 2 251
— конечная 2 246
— неверсальная 2 251
— общая 2 134, 153
— универсальная 2 97, 251
Диаграмма *Кокстера* — *Дынкина* 1 135
— смежности 2 91
Диаграммный метод 1 132; 2 147
Дисперсия 1 163, 164, 167, 168
Диссипативная сила трения 1 160
Дифракционные картины 1 306—326
Диффузия 1 145, 146
Дрейф 1 145, 146
- Задача *Бенара* 2 187
— определенности 2 246
Закон линейных диаметров 1 194
— соответственных состояний 1 194
Замена переменных 1 17, 21—59; 2 247
— — гладкая 1 17, 29, 33, 35, 40, 46; 2 106
— — нелинейная 1 30
— — непрерывная 1 58
- Изгиб (искривление) 1 234, 249
— максимальный безопасный 1 249
Изгибная жесткость 1 244
Инвариантная поверхность 2 163, 164, 179, 200
Инвариантность 1 269

- Интеграл действия 1 326; 2 48, 168
— *Френеля* 1 306, 320
- Каноническая форма 1 15, 17, 19, 33, 40
— — в окрестности критической точки 1 17, 18, 21—41, 95
— — жарданова 1 286
— — морсовская 1 15, 27, 29
Канонические формы 1 40, 328
— — *Жордана — Арнольда* 1 327—347
- Каноническое ядро гамильтониана 2 6, 44—48
- Картина турбулентности по *Рюэлю* — *Тейкенсу* 2 163, 207—213
- Катастрофа 1 18, 295—299
- Катастрофы 1 17; 2 117
— внешние (граничные) 2 102
— внутренние 2 102
— высшие 1 111
— низшие 1 111
— симметризованные 2 95—99
— с ограничением 2 100—103
— типа A_1 1 134, 135; 2 100, 101
— — A_2 1 17, 67, 99, 104—110, 124, 134, 135, 197, 198, 280, 325, 336—338, 343; 2 44, 57
— — $A_{\pm 3}$ 1 17, 104—111, 124, 197, 249, 252, 257, 263, 264, 267, 278, 280, 297; 2 57
— — $A_{\pm 4}$ 1 17—19, 39, 71, 105, 111, 117, 120, 134, 135, 236, 317, 318, 323, 329, 343
— — $A_{\pm 5}$ 1 17, 236
— — $A_{\pm 6}$ 1 17, 134, 135
— — $A_{\pm 7}$ 1 133—135
— — A_8 1 134, 135
— — A_9 1 134
— — A_k 1 40, 53, 54, 59, 115, 121, 122, 131, 283, 284, 316, 321, 399; 2 225
— — A_{2k} 1 129
— — A_{2k+1} 1 130
— — $D_{\pm 4}$ 1 17, 19, 36, 75—96, 126
— — $D_{\pm 5}$ 1 17, 134, 135, 196, 292, 293, 305
— — $D_{\pm 6}$ 1 17, 36, 59
— — $D_{\pm k}$ 1 40, 59, 113—116, 121, 122
— — $D_{\pm 2k}$ 1 121, 122, 126, 129, 130
— — D_{k+1} 1 113
— — $E_{\pm 6}$ 1 17, 37, 40, 59, 128
— — E_{17} 1 40, 59, 128
— — E_8 1 40, 59, 126, 138
— элементарные 1 131, 135, 153
- Каустики 1 306—326
- Качественное подобие 1 24, 40
- Квадратичная форма вырожденная 1 21
— — невырожденная 1 21
- Квантовая механика 2 5—104
- Классификация *Эренфеста* 1 174
- Климат 2 70, 83
- Климатология 2 57—87
- Константа диффузии 1 142, 146, 163
— нормализации 1 163
- Контурная карта 1 64
- Контур нулевого уровня 1 129
— предельного цикла 2 169
- Кооперативность поведения 2 5
- Координаты «плохие» 1 16
— «хорошие» 1 16
- Коэффициент возмущения 1 44
— инфинитезимальный 1 57
— приведенный наклона 1 190, 191
— факториальный 1 22
- Кривая равновесия 1 189, 194
- Критическая кривизна 1 102, 103, 108, 109
— опалесценция 1 171, 186, 187
— точка 1 16, 20, 40, 71; 2 115
— — вырожденная 1 16, 20, 33; 2 115, 134, 183
— — — дважды 1 53, 67, 71, 76
— — — трижды 1 68, 71
— — — четырежды 1 71, 75, 76, 88
— — жидкости 1 183, 185—188
— — изолированная 1 16, 20, 21, 42, 44
— — морсовская 1 16, 20, 21, 42, 44
— — невырожденная 1 16, 20
— — неизолированная 1 16
— — неморсовская 1 16, 21, 33, 34, 40, 135; 2 220
- Критические точки (центры) 2 157, 163
— — отталкивающие 2 163
— — притягивающие 2 163
- Критическое замедление 1 149, 157, 163, 187
— удаление 2 50
- «Крылья» фазового перехода 1 201
- Лазер 2 53—57, 60—62, 197
- Лемма *Морса* 1 13, 16, 19, 20, 21, 26—29, 61, 64; 2 263, 264
— расщепления 1 3, 17, 21, 29—33, 49—51
- Линейный анализ устойчивости 1 286, 287
- Линии потока 1 116
— самопересечения 1 73
— складки 1 59
— уровня 1 63

- Масштаб 1 36, 48, 67, 72, 76
 — быстрой шкалы времени 1 144, 148
 — медленной шкалы времени 1 144, 148
 Мера ортогональности 1 183
 Метод «зашнуровывания» 2 166
 — стационарной фазы 1 310—312
 — стягивания 1 119; 2 146
 — фазовых портретов 2 169
 Методы теории бифуркаций 1 239
 — — групп 1 280
 — элементарной теории катастроф 1 13—136; 2 5, 104, 105
 Механика конструкций 1 239—280
 Многообразия двумерное 1 103, 104, 258
 — критическое 1 106, 173, 179, 192, 196, 211, 215; 2 216
 — лагранжево 1 319
 — спаянное 1 175, 181
 — урезанное 1 181, 184
 — центральное 2 205
 Многообразия стационарных состояний 1 291, 292
 Множество бифуркационное 1 60, 96—101, 141, 152, 160, 168, 177, 179, 184, 196, 197, 203, 276, 293—295, 342—347; 2 141, 151, 168, 220
 — — локальное 1 142
 — — нелокальное 1 142
 — Максвелла (максвелловское) 1 60, 96, 101, 174, 196, 199, 203, 214, 220
 — открытое 1 121, 123; 2 40, 147, 148, 287
 — плотное 2 94
 — «плохое» 1 80, 87, 89, 91
 — размытое 1 142
 Модели типа Дикке 2 15—17, 20—22, 30—33
 — — МГЛ 2 13—15, 17, 30—33
 Модальность 1 154, 186
 Модель Гинзбурга — Ландау 1 175, 196
 — Дикке (D) 2 12, 15, 20—22, 30—33, 43, 58
 — — расширенная 2 15, 26, 27, 33—41
 — Лоренца 2 189
 МГЛ (MGL) 2 12, 15, 17—20, 30—33, 43
 — — расширенная 2 16, 33—44
 Направление «плохое» 1 84, 93
 — «хорошее» 1 84, 93
 Наследственность 2 216, 222—224, 228
 Недостижимость 1 154, 186
 Неравновесные системы 1 173; 2 51
 Неустойчивость по Рэлею — Бенару 2 210
 Оператор коммутирующий 2 5
 — многочастичный 2 9
 — одночастичный 2 9
 — рождения бозона 2 7
 — — фермиона 2 7
 — сдвига 2 8
 — уничтожения бозона 2 7
 — — фермиона 2 7
 Операторы 2 6—8
 — бозонные 2 7
 — фермионные 2 7
 Определенность 2 246—272
 — конечная 2 246
 Оптическая бистабильность 2 6, 224—227
 Организация катастроф 1 111—136
 Особенности отбражений 2 224
 Осциллятор Ван-дер-Поля 2 165, 167—174
 — гармонический 1 137; 2 137, 167, 168
 Отклик 1 300
 — динамический 1 160
 — квадратичный 1 66
 — линейный 1 66, 157, 158, 182, 192, 216, 284
 — неравновесный 1 234
 — равновесный 1 210, 234
 Отображения 1 13; 2 225, 227
 Параметр несовершенства 1 241, 260
 — порядка 1 13, 175, 239, 256; 2 15, 53, 173, 175
 «Пассивная интерпретация» 1 24
 Первое начало термодинамики 1 215, 237
 Переменная состояния 1 144
 Переменные состояния «плохие» 1 30, 49, 50, 84, 164; 2 88, 90
 — — «хорошие» 1 32, 84
 — термодинамические 1 173, 209
 — — интенсивные 1 173
 — — сопряженные 1 209
 — — экстенсивные 1 173
 Поверхность критических значений 1 104, 109
 — критической кривизны 1 105
 Потенциальная функция обобщенная 1 286
 Потoki двумерные 2 163
 — динамические 2 163

- инвариантные 2 163
- морсовские 2 163
- недиссипативные 2 186
- неприводимые 2 163
- Правила вычисления деформации 2 256—259
- нахождения определенности 2 253—256
- ростков 2 259—263
- Предел классический 2 5, 10, 29, 47
- консервативный 1 161
- Предельный цикл 2 178, 216, 299
- устойчивый 2 165
- Представление вариационное 1 225—231
- геометрическое 1 106; 2 146
- графическое 1 106
- диаграммное 1 111, 115, 126, 129
- контурное 1 64, 111, 126—133
- матричное 1 269
- параметрическое 1 89, 112
- схематическое 1 335
- топографическое 1 63
- функциональное 1 23
- Преобразование аффинное 1 193, 194
- вещественное ортогональное 1 164
- гладкое 1 19, 26, 28
- инфинитезимальное однородное нелинейное 2 254
- — — осесохраняющее 2 254
- Лежандра 1 212, 221, 229
- линейное 1 22, 23, 27, 28, 35, 37, 38, 49, 190
- — неоднородное 1 22, 58
- нелинейное осесохраняющее 1 22, 27, 38, 50
- необратимое 1 26
- непрерывное 1 50
- обратное 1 22, 44, 45
- общее нелинейное 1 22
- с изменением масштаба 1 101
- Френеля 1 317, 325
- Приближение Буссинеска 2 212
- среднего поля 2 5, 13
- Примыкания 1 131—136
- Принцип Гюйгенса 1 154, 232
- Ле Шателье 1 233, 234, 237
- «лома» 1 60—101, 206; 2 57, 134
- Максвелла 1 101, 137—152, 161, 170, 174, 177, 181, 213, 237; 2 44, 62
- максимального промедления 1 101, 137—152, 161, 174; 2 44
- Принцип подобия 1 203
- симметрии 1 175, 200, 256
- Ферма 1 303
- Принципы построения 2 163—181
- Прошелкивание пологой арки 1 250—256
- Равновесное состояние 1 11, 13, 15, 44, 174, 239; 2 134
- — неустойчивое 1 15, 154
- — устойчивое 1 15
- Равновесные системы 1 173, 212
- Радиус предельного цикла 2 166
- Распределение Гаусса 1 149, 157, 158
- Расходимость 1 155, 156, 158, 186, 187
- Релаксационные колебания 2 171—174
- Релаксация 1 143, 148
- Росток 1 17, 18, 21, 59, 100, 102, 154, 206, 313, 316—319; 2 134
- вырожденный 2 88
- канонический 1 331
- неморсовский 2 88
- одномодульный 1 38; 2 90
- нуль-модульный 1 38, 40; 2 90
- Ростки 2 241—244
- непростые 1 40, 58
- пограничные 2 89
- простые 1 40, 58; 2 269
- Сборка 1 94, 99, 100—109, 117, 145, 154, 156, 157, 165, 166, 175, 184, 189, 232, 255, 256, 268; 2 116, 125
- двойная 1 252, 255, 256; 2 268, 269
- кратная 2 267—269
- Свободная энергия 1 211
- Седло 1 16, 23—25, 93, 129; 2 119, 139
- локально устойчивое 1 10
- морсовское 1 16; 2 169
- смежное 1 64
- Сепаратриса 1 60, 69, 76, 100, 135, 174, 282; 2 40, 41, 113, 141, 150, 151
- локальная 1 106
- нелокальная 1 106
- Система градиентная 1 11, 12; 2 105, 136
- — динамическая (D) 1 154, 159; 2 105—133, 134, 163
- — ньютоновская (N) 1 159—163
- динамическая 2 134, 154, 163
- автономная 1 10, 11; 2 134—162
- — диссипативная 2 51
- — консервативная 2 51
- — неравновесная 2 51
- — странная 2 163
- — усеченная 1 284—286
- Складка 1 81, 93, 94, 100, 102, 103, 117, 160, 168, 176; 2 116, 125, 160, 225
- Смягчение моды 1 158—163, 277—279
- Спинодаль 1 200, 297

- Строительные блоки 2 134
 — — странные 2 181—194
- Тензор** восприимчивости 1 157, 173, 182, 183, 192, 216, 221, 229, 283
 — инерции 1 288
- Теорема Лиувилля** 2 186
 — о неявной функции 1 13—15, 18, 20—24, 43, 60, 61; 2 263, 264, 269
 — — «скачке» 2 41—44
 — — центральном многообразии 2 163, 204—207
 — Тома 1 13, 17, 20, 60; 2 216—227
- Теория бифуркаций** 2 128—133
 — катастроф 1 11; 2 105, 128—133
 — Миланковича 2 72—86
 — ритма ледниковых периодов 2 67—72
- Термодинамика** 1 173—238; 2 6
Топология 1 13, 65, 98, 208—214, 216—219; 2 123
- Трансверсальность** 2 228—245
Трикритическая точка 1 200—203, 236
Тройная точка 1 185, 203—208
Турбулентность 2 183
- Узел** 2 139
 — неустойчивый 2 139
 — устойчивый 2 139
- Управляющие параметры** (управления) 1 9, 11, 16, 19, 21, 40, 65, 69, 100, 129, 135, 153; 2 35, 57, 83, 88, 123, 168
- Уравнение Блоха** 1 233
 — Ван-дер-Ваальса 1 191—196, 207, 236
 — Гейзенберга 1 138, 233, 308; 2 53
 — Шрёдингера 1 138, 233, 308
- Уравнения Блоха — Максвелла** 2 198
 — диффузии 1 149
 — Клаузиуса — Клапейрона 1 60, 96—99, 141, 185, 202, 214, 223
 — Лоренца 2 189
 — Максвелла 1 232
 — Навье — Стокса 2 212
 — приводящие к катастрофам 2 163—215
 — прогонки 2 124
 — состояния 1 189—191, 210, 229, 236, 256—263; 2 228
 — типа Фоккера — Планка (FPE) 1 144
 — Фоккера — Планка (FP) 1 141—144, 152; 2 83
- Уровень шума** 1 138, 140, 149
Устойчивость 2 44—48, 57—62, 108, 165, 206
 — динамическая 2 165
 — локальная 1 173, 233
 — структурная 2 165, 220
- Фазовая диаграмма** 1 175, 189, 319
 — — бифуркационная 1 175, 265
- Фазовые переходы** (превращения) 1 141, 173, 175; 2 6, 15, 17—27
 — — сопровождающиеся изменением энергии основного состояния (в тексте для краткости используется термин «фазовый переход основного состояния») 2 5, 6, 17—27
- Фазовый переход** 1 173
Фазовый портрет 2 61, 106—115, 134—140, 153, 154, 236
 — — второго рода 1 175—179, 200, 236; 2 18, 21, 45
 — — — локальный (мягкий) 1 175
 — — — нелокальный (жесткий) 1 175
 — — нулевого рода 1 176, 177; 2 45
 — — первого рода 1 141, 196—200, 236; 2 17, 18, 21, 45
 — — термодинамические 2 15, 27—41, 53
- Флаги катастроф** 2 153—172
Флуктуации 1 231, 232
- Фокус** 2 139, 163
 — глобально устойчивый 2 220
 — неустойчивый 2 169, 182, 193, 220
 — структурно устойчивый 2 220
 — устойчивый 2 139, 169
- Формы представления потенциальной функции** 1 15
 — — — каноническая 1 15, 16, 20—41
 — — — — квадратичная 1 15
 — — — — морсовская 1 15, 22, 44—49
 — — — — Тома 1 16, 17
- Функции катастроф** 1 18, 20, 59
 — — устойчивые 2 219—222
- Функция катастрофы** (Cat (l, k)) 1 18
 — Лагранжа 1 216
 — Ляпунова 1 283, 291, 297; 2 5, 51
 — морсовская (M) 1 50, 60, 61, 64
 — неморсовская (NM) 1 43, 50, 52, 53, 65
- Хаос** 2 181, 192
 — метастабильный 2 192
 — спирально-винтовой 2 183
 — спиральный 2 181—184

- Цикл** 2 158
 — предельный 2 178, 216, 299
 — — неустойчивый 2 159, 166
 — — устойчивый 2 158, 165, 166, 169
Циклы 2 163
 — предельные 2 163, 178
 — трехмерные 2 163
- Число Милнора** 2 88
 — *Рейнольдса* 1 9; 2 212
 — *Рэля* 2 196
- Чувствительность к несовершенству** 1
 267
 — — — жесткая 1 267
- s*-числа 2 2, 45, 47
q-числа 2 5, 45, 47
- Шум в переменных состояниях** 2 84, 85
 — — управляющих параметрах 2 84, 85
- Эквивалентная интерпретация 2 8
 Электродинамика 2 197—200
 Элементарные катастрофы *Тома* 1 17

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 15. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА	5
1. Операторы	6
2. Классический предельный случай	8
3. Многочастичные модельные гамильтонианы	12
4. Алгоритм для фазовых переходов, сопровождающихся изменением энергии основного состояния	17
5. Приложения	17
6. Алгоритм для термодинамических фазовых переходов	27
7. Приложения	30
8. Теорема о «скачке»	41
9. Структурная устойчивость и канонические ядра	44
10. Динамические уравнения движения	48
11. Стационарные состояния, далекие от равновесных	51
12. Кратная устойчивость	57
13. Выводы	63
Литература	65
Глава 16. КЛИМАТОЛОГИЯ	67
1. Некоторые теории ритма ледниковых периодов	67
2. Теория Миланковича	72
3. Практические рекомендации	85
4. Выводы	86
Литература	86
Часть III. За пределами элементарной теории катастроф	
Глава 17. ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ	88
1. $k > 5$	88
2. $n \rightarrow \infty$	93
3. $m > 1$	94
4. Симметризованные катастрофы	95
5. Катастрофы с ограничениями	100
6. Выводы	103
Литература	104

Глава 18. ГРАДИЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	105
1. Неканоническая форма градиентных систем	105
2. Фазовые портреты	106
3. Дерево ветвлений	115
4. Прогонка	123
5. Связь между теорией катастроф и теорией бифуркаций	128
6. Выводы	133
Литература	133
Глава 19. АВТОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	134
1. Приведение к градиентной форме	134
2. Фазовые портреты	136
3. Геометрия матрицы устойчивости	140
4. Возмущения седло-узла	151
5. Бифуркация Хопфа [1]	156
6. Выводы	161
Литература	162
Глава 20. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К КАТАСТРОФАМ	163
1. Принцип построения. 1	163
2. Принцип построения. 2	174
3. Странные строительные блоки	181
4. Гидродинамика. Неустойчивость слоя жидкости, подогреваемого снизу	194
5. Электродинамика. Неустойчивость лазерного разряда	197
6. Принцип построения. 3	200
7. Теорема о центральном многообразии	204
8. Картина турбулентности по Рюэлю и Тейкенсу	207
9. Выводы	213
Литература	215
Часть IV. Математические теории катастроф	
Глава 21. ТЕОРЕМА ТОМА	216
1. Топология	216
2. Устойчивые функции	219
3. Наследственные свойства	222
4. Особенности отображений	224
5. Теорема Тома	226
6. Выводы	227
Литература	227
Глава 22. ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ	228
1. Трансверсальность	229
2. Приложения	236
3. Выводы	244
Литература	244

Глава 23. ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДЕФОРМАЦИЯ	246
1. Замена переменных	247
2. Определенность («усечение» рядов Тейлора)	247
3. Деформация (универсальные возмущения)	251
4. Правила нахождения определенности функций	253
5. Правила вычисления деформации	256
6. Правила нахождения ростков	259
7. Приложения	263
8. Некоторые простые ростки	269
9. Выводы	271
Литература	272
Послесловие	273
Предметный указатель	277