И.И.Гихман, А.В. Скороход

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Книга предназначена для первоначального изучения теории случайных процессов на строгой математической основе. Предполагается, что читатель знаком с общим курсом теории вероятностей. Необходимые сведения из теории меры приведены без доказательств. В книге рассмотрены общие положения теории, включая аксиоматику теории вероятностей и основные классы случайных процессов. Первая глава посвящена более элементарному изложению теории. Книга рассчитана на студентов и аспирантов университетов, а также на специалистов-нематема'и-ков, желающих ознакомиться с основными математическими методами теории случайных процессов.

Второе издание книги существенно переработано.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга рассчитана на лиц, усвоивших общий курс теории вероятностей и приступивших к изучению теории случайных процессов. Авторы надеются, что она будет полезной для студентов и аспирантов университетов, а также для специалистов-нематематиков, желающих ознакомиться с основными методами и результатами теории в строгом, но не самом общем и исчерпывающем изложении.

Авторы не ставили своей целью осветить все разделы теории, и некоторые вопросы и методы, хорошо освещенные в имеющейся на русском языке литературе, не затрагивались в настоящей книге (полугрупповая теория процессов Маркова, эргодические свойства процессов Маркова, обобщенные случайные процессы).

Теория случайных процессов выделилась из теории вероятностей сравнительно недавно. Она еще настолько тесно связана с другими разделами теории вероятностей, что границу, отделяющую теорию случайных процессов от этих разделов, часто трудно точно определить. Так, например, с теорией суммирования независимых случайных величин теория случайных процессов связана разделом, изучающим процессы с независимыми приращениями, а с математической статистикой — через статистические задачи теории случайных процессов.

Охарактеризуем основные (с нашей точки зрения) задачи в теории случайных процессов.

1. Первой задачей теории случайных процессов является построение математической модели, допускающей строгое (формальное) определение случайного процесса, а также исследование общих свойств этой модели.

2. Другой задачей является классификация случайных процессов. Очевидно, что всякая классификация носит отчасти

произвольный характер; поэтому нужно исходить из определенных принципов, указывающих хотя бы «направление», в котором ведется классификация. Существующая классификация в теории случайных процессов заключается в выделении из всей совокупности случайных процессов некоторых классов, допускающих более или менее конструктивное описание. Каждый класс характеризуется тем свойством, что достаточно дополнительно задать лишь конечное число функциональных характеристик, чтобы выделить из всего класса отдельный случайный процесс.

Иногда рассматривают классы процессов, допускающих единообразное решение определенного набора задач. При рассмотрении таких классов, как правило, не интересуются различием между случайными процессами, если только у них совпадают характеристики, нужные для решения этих задач.

Можно отметить следующие широкие классы процессов:

1) процессы с независимыми приращениями,

2) марковские процессы,

3) гауссовы процессы,

4) стационарные в узком смысле,

5) стационарные в широком смысле процессы (к последним можно отнести и процессы со стационарными приращениями).

3. Следующая задача тесно связана с предыдущей. Она заключается в отыскании для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, дающего возможность вычислять вероятностные характеристики случайных процессов. Для простейших вероятностных характеристик такой аппарат создан и использует, как правило, или теорию дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), а также интегро-дифференциальные уравнения (в случае марковских процессов и процессов с независимыми приращениями), или теорию интегральных уравнений с симметрическими ядрами (в случае гауссовых процессов), или преобразования Фурье и теорию функций комплексного переменного (для процессов с независимыми приращениями и стационарных процессов).

4. Следует выделить задачу, сыгравшую важную роль в формировании некоторых разделов теории случайных процессов и имеющую важное практическое значение.

В общем виде задача заключается в наилучшем определении значения некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого же процесса. Примером может служить частная задача предсказания: наблюдая процесс в течение определенного промежутка времени, определить значение процесса в некоторый момент времени, не принадлежащий этому промежутку.

5. Важный класс задач теории случайных процессов — изучение различных преобразований случайных процессов. Эти преобразования используются для того, чтобы с их помощью изучать сложные процессы сведением к более простым. К изучению преобразований случайных процессов можно также отнести теорию дифференциальных и интегральных уравнений, в которые входят случайные процессы. Этот класс задач включает в себя и предельные теоремы для случайных процессов, так как операция предельного перехода является некоторым преобразованием.

Основными областями применения теории случайных процессов в настоящее время являются радио- и электротехника, где применяются главным образом стационарные в широком смысле и гауссовы процессы, кибернетика (в частности, теория информации), использующая стационарные в узком смысле и марковские процессы.

В математической экономике, математической биологии применяются различного рода марковские процессы, в молекулярной теории газов используется процесс броуновского движения, в теории каскадов космических частиц находят себе применения марковские процессы и процессы с независимыми приращениями.

Вообще в последнее время методы теории случайных процессов находят все новые области применения, и сейчас, пожалуй, ни одна из естественных наук не избежала хотя бы в малой степени влияния этой теории.

Охарактеризуем кратко особенности содержания настоящей книги. В книге выделена глава (первая), посвященная случайным процессам в широком смысле. Так мы назвали ту часть теории случайных процессов, которая имеет дело лишь с распределениями конечных наборов значений случайного процесса.

Эта часть очень близка к элементарной теории вероятностей, не требует для изложения сложных математических понятий и часто бывает достаточна для приложений.

Далее рассматриваются общие вопросы теории случайных функций и затем конкретные классы случайных процессов и частные вопросы теории. Из случайных процессов широко освещены процессы с независимыми приращениями (им посвящена одна глава) и процессы Маркова (им посвящены две главы). Стационарные процессы рассматриваются частично в первой главе, частично в пятой главе, посвященной линейным преобразованиям случайных процессов. В этой же главе рассмотрена задача линейного прогнозирования. Целая глава уделена предельным теоремам для случайных процессов, причем в этой главе основное внимание уделяется процессам с независимыми приращениями и марковским процессам.

Большинство построений проводится для того случая, когда случайный процесс принимает значения из конечномерного евклидова пространства, в некоторых случаях рассматриваются комплекснозначные одномерные и многомерные процессы, а также процессы со значениями из полного метрического пространства.

Поэтому предполагается, что читатель владеет основными понятиями линейной алгебры (это особо важно при изучении гауссовых процессов) и теории гильбертовых пространств, используемых при рассмотрении линейных преобразований случайных процессов, а также некоторыми сведениями из функционального анализа (полное метрическое пространство, компакты).

Мы не ставили своей целью давать полную библиографию работ по теории случайных процессов, а в списке литературы, кроме книг, на которые имеются ссылки в тексте, привели лишь основные книги по теории случайных процессов и теории вероятностей, имеющиеся на русском языке, а также статьи, в которых впервые появлялись фундаментальные результаты в данной области.

Книга делится на главы, главы — на параграфы. Основные формулы, а также теоремы, леммы имеют нумерацию внутри каждого параграфа. При ссылках внутри одного параграфа указывается лишь номер теоремы или формулы, при ссылках внутри одной главы к этому номеру добавляется еще номер параграфа, при ссылках на результаты других глав добавляется еще и номер главы.

Авторы выражают свою признательность сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры теории вероятностей и математической статистики Киевского государственного университета за помощь в работе над книгой.

Киев, 21 октября 1963 г. *Авторы*

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании общий план и целевая установка книги сохранились. Все же книга подверглась значительной переработке. Исключена глава, посвященная теории меры, и некоторые параграфы других глав. В § 1 второй главы без доказательств сформулированы на языке теории вероятностей те результаты теории меры и интеграла, которые в дальнейшем считаются известными и постоянно используются без дополнительных ссылок. Введена новая глава — «Случайные последовательности», куда вошел новый материал: мартингалы, теория восстановления, цепи Маркова. Расширена первая глава, посвященная процессам в широком смысле. Добавлены новые параграфы, в которых рассматриваются случайные блуждания, обобщенный процесс Пуассона, вопросы абсолютной непрерывности мер, порождаемых диффузионными процессами. Внесены и другие изменения.

Киев—Донецк,
февраль 1976 г.

*И. И. Гихман,*
*А. В. Скороход*

## ГЛАВА I

# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

### § 1. Определения

Течение случайного процесса, так же как и детерминированного, описывается некоторой функцией $\xi(\theta)$ (принимающей действительные, комплексные или векторные значения), где $\theta$ — аргумент функции со значениями из множества $\Theta$. Функцию $\xi(\theta)$, наблюдаемую в некотором опыте, осуществляя определенный комплекс условий $У$, называют *выборочной функцией* или *реализацией* случайного процесса.

Если $\theta$ фиксировано, то значение $\xi(\theta)$ является случайным. Для того чтобы иметь возможность применять математические методы к исследуемому кругу вопросов, естественно предположить, что $\xi(\theta)$ является случайной величиной (или случайным вектором) в теоретико-вероятностном смысле.

Следовательно, случайный процесс является семейством случайных величин $\xi(\theta)$, зависящих от параметра $\theta$, пробегающего некоторое множество значений $\Theta$.

Если множество $\Theta$ произвольно, то вместо термина «случайный процесс» удобнее пользоваться термином «случайная функция», оставляя название «случайный процесс» для тех случаев, когда параметр $\theta$ интерпретируется как время. Когда аргумент случайной функции является пространственной переменной, эту функцию называют еще *случайным полем*.

Данное определение случайной функции нуждается в уточнении. Ради простоты будем говорить о случайной функции, принимающей действительные значения. Прежде всего надо выяснить, какой смысл вкладывается в термин «семейство случайных величин, зависящих от параметра $\theta$». Напомним, что в соответствии с принципами теории вероятностей конечная последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ полностью характеризуется их совместной функцией распределения

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

При переходе к теоретико-вероятностному описанию случайной функции возникает вопрос: как описать взаимные связи бесконечного числа случайных величин — значений случайной функции?

Проще всего считать случайную функцию $\xi(\theta)$ заданной, если определены всевозможные теоретико-вероятностные соотношения между любым конечным набором значений случайных величин

$$\xi(\theta_1),\ \xi(\theta_2),\ \ldots,\ \xi(\theta_n), \qquad \theta_i \in \Theta, \qquad i=1,2,\ \ldots,\ n; \quad n=1,2,\ \ldots, \tag{1}$$

т. е. если даны соответствующие функции распределения. С этой точки зрения случайная функция $\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, определяется семейством распределений

$$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \theta_i \in \Theta, \qquad i=1,2,\ \ldots,\ n; \quad n=1,2,\ \ldots, \tag{2}$$

и каждая функция $F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интерпретируется как совместная функция распределения последовательности случайных величин (1).

Разумеется, для того чтобы такая интерпретация была возможной, семейство распределений (2) не может быть совершенно произвольным. Оно должно удовлетворять следующим очевидным условиям, которые называют *условиями согласованности* семейства распределений (2):

$$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \ldots, \theta_{n+p}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, +\infty, \ldots, +\infty) = F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

$$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}), \tag{4}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — любая перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$.

Необходимость этих условий обосновывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \ldots, \theta_{n+p}}&(x_1, x_2, \ldots, x_n, +\infty, \ldots, +\infty) = \\ &= \mathsf{P}\{\xi(\theta_1) < x_1, \xi(\theta_2) < x_2, \ldots, \xi(\theta_n) < x_n, \\ &\qquad \xi(\theta_{n+1}) < \infty, \ldots, \xi(\theta_{n+p}) < \infty\} = \\ &= \mathsf{P}\{\xi(\theta_1) < x_1, \xi(\theta_2) < x_2, \ldots, \xi(\theta_n) < x_n\} = \\ &= F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}&(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= \mathsf{P}\{\xi(\theta_1) < x_1, \xi(\theta_2) < x_2, \ldots, \xi(\theta_n) < x_n\} = \\ &= \mathsf{P}\{\xi(\theta_{i_1}) < x_{i_1}, \xi(\theta_{i_2}) < x_{i_2}, \ldots, \xi(\theta_{i_n}) < x_{i_n}\} = \\ &= F_{\theta_{i_1}, \theta_{i_2} \ldots, \theta_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}). \end{aligned}$$

Вышесказанное приводит к следующему определению.

Определение. *Случайной функцией* $\xi(\theta)$, *заданной на множестве* $\Theta$ $(\theta \in \Theta)$ *и принимающей действительные значения, называют семейство распределений* (2), *удовлетворяющее условиям согласованности* (3), (4).

Набор функций $F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *конечномерными распределениями* случайной функции.

Приведенное выше определение случайной функции привлекает своей элементарностью и достаточно в тех случаях, когда нас интересуют значения случайных величин $\xi(\theta)$ на конечном множестве значений аргумента $\theta$. С другой стороны, существенный недостаток этого определения состоит в том, что оно не дает возможности рассматривать случайную функцию в целом, т. е. рассматривать одновременно совокупность всех ее значений. Между тем во многих экспериментах наблюдаемая выборочная функция записывается с помощью надлежащего прибора в виде графика некоторой кривой. Приведенное же определение случайной функции не только не дает возможности строить график этой функции, но даже не дает возможности ставить вопросы о таких функциональных свойствах функций $\xi(\theta)$, как их непрерывность, дифференцируемость и т. п. Непосредственно нельзя ставить также вопрос о вероятности события, состоящего в том, что для всех $\theta \in \Theta$ выполняется неравенство $a < \xi(\theta) < b$, $a < b$.

Другие, более гибкие определения случайной функции возникают, если использовать аксиоматический подход к теории вероятностей. Каждая теоретико-вероятностная схема описывает результаты некоторого эксперимента со случайными исходами. Если результат эксперимента описывается одним числом или конечной последовательностью чисел, то говорят, что наблюдается случайная величина или случайный вектор. Если же результат эксперимента описывается некоторой функцией, то мы имеем случайную функцию. Таким образом, случайная функция задается произвольной теоретико-вероятностной схемой, описывающей эксперименты, результатами которых служат случайные функции. Более точный разбор этого определения будет дан в четвертой главе. Определение случайной функции, принятое в настоящем параграфе, условимся называть определением случайной функции в широком смысле.

До сих пор речь шла об одной случайной функции. При решении многих задач приходится иметь дело с несколькими различными случайными функциями. Для того чтобы над ними можно было производить математические операции, недостаточно, чтобы каждая из этих функций была задана в отдельности. Вместо того чтобы говорить о последовательности функций

$\xi_1(\theta)$, $\xi_2(\theta)$, ..., $\xi_m(\theta)$, проще говорить об одной векторной функции $\zeta(\theta)$, компонентами которой служат случайные функции $\xi_1(\theta)$, $\xi_2(\theta)$, ..., $\xi_m(\theta)$. Тогда предыдущее определение почти не нуждается в изменениях. Роль распределения последовательности случайных величин (1) играет совместная функция распределения последовательности векторов $\zeta(\theta_1)$, $\zeta(\theta_2)$, ... ..., $\zeta(\theta_n)$, т. е. функция $nm$ переменных

$$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nm}) = \\ = \mathsf{P}\{\xi_1(\theta_1) < x_{11}, \xi_2(\theta_1) < x_{12}, \ldots, \xi_n(\theta_m) < x_{mn}\}.$$

В дальнейшем множество $\Theta$ будет главным образом множеством действительных чисел и переменная $\theta$ интерпретируется как время $t$. В этом случае множество $\Theta$ будем обозначать буквой $\mathscr{T}$ и понимать под этим конечный или бесконечный промежуток (замкнутый, открытый или полуоткрытый). Рассматривают также случаи, когда $\mathscr{T}$ состоит из всех неотрицательных или из всех действительных целых чисел. Тогда мы имеем последовательность случайных величин (векторов) $\zeta(k)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$ или $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и называем такой процесс *случайным процессом с дискретным временем* или *случайной последовательностью*. Процессы с дискретным временем играют важную роль в общей теории случайных процессов. Во-первых, имеется много теоретико-вероятностных задач, в которых время, по существу, входит дискретно. Во-вторых, изучение процессов с дискретным временем в некоторых отношениях требует более простых средств и в то же время в ряде случаев такими процессами можно аппроксимировать процессы с непрерывным временем.

В настоящем параграфе мы ограничимся преимущественно случайными функциями, принимающими действительные значения. Переход к векторному случаю вызывает только некоторые технические усложнения.

Конечномерные функции распределения однозначно определяют семейство мер $q_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}(B)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\theta_k \in \Theta$, где $B$ — борелевское множество в $\mathscr{R}^n$. При этом значение $q_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(B)$ дает вероятность того, что измерение в некотором эксперименте величин $\xi(\theta_1), \xi(\theta_2), \ldots, \xi(\theta_n)$ даст последовательность, попадающую во множество $B$:

$$q_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(B) = \mathsf{P}\{(\xi(\theta_1), \ldots, \xi(\theta_n)) \in B\}.$$

Меру $q_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(B)$ называют *распределением последовательности* $\xi(\theta_1), \ldots, \xi(\theta_n)$.

Явные выражения для конечномерных функций распределения случайного процесса часто бывают сложными и неудобными для применений. Поэтому, в ряде случаев предпочитают задавать конечномерные распределения их плотностями или характеристическими функциями.

Если $f_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность распределения функции распределения $F_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$F_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Отсюда, в частности, вытекает формула

$$f_{\theta_1, \ldots \theta_n}(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \ldots, \theta_{n+p}}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)\, dy_1 \ldots, dy_p, \tag{5}$$

которую можно рассматривать как эквивалент условия согласованности (4) конечномерных распределений. Меры $q_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(B)$ связаны с плотностями соотношением

$$q_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(B) = \int \underset{B}{\ldots} \int f_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1, \ldots, dy_n.$$

Характеристическая функция конечномерного распределения последовательности (1) определяется формулой

$$\varphi_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mathsf{M} \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \xi(\theta_k)\, u_k \right\},$$

где $\mathsf{M}$ — символ математического ожидания, $u_1, \ldots, u_n$ — вещественные числа. Если существуют плотности конечномерных распределений, то

$$\varphi_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(u_1, \ldots, u_n) = \\ = \int \underset{\mathcal{R}^n}{\ldots} \int e^{i \sum_1^n x_k u_k} f_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{6}$$

т. е. характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности распределения.

Возможность задания конечномерных распределений с помощью их характеристических функций связана с тем, что последние однозначно определяют функции распределения. Например, если существуют плотности конечномерных распределений и они удовлетворяют некоторым аналитическим условиям, подробно рассматриваемым в теории интеграла Фурье, то плотность $f_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(x_1, \ldots, x_n)$ можно восстановить по характеристическим функциям с помощью формулы Фурье:

$$f_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathfrak{R}^n} \ldots \int e^{-\sum_{k=1}^{n} x_k u_k} \varphi_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(u_1, \ldots, u_n)\, du_1, \ldots, du_n. \qquad (7)$$

Подробнее о характеристических функциях см., например, В. Феллер [2] или П. Л. Хеннекен и А. Тортра [1].

**Корреляционные функции.** Исчерпывающую характеристику случайной функции в широком смысле дает семейство совместных распределений (2). Однако во многих случаях представляет интерес более сжатая характеристика распределений, отражающая некоторые важные свойства случайной функции. Кроме того, решение многих теоретико-вероятностных задач зависит только от небольшого числа параметров, характеризующих входящие в задачу распределения. Наиболее важными числовыми характеристиками распределений являются их моменты. В теории случайных функций роль моментов распределений играют моментные функции.

Определение. *Моментными функциями случайной функции* $\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *называются функции*

$$m_{j_1, j_2, \ldots, j_s}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \mathsf{M}\,[\xi(\theta_1)]^{j_1}\,[\xi(\theta_2)]^{j_2} \ldots [\xi(\theta_s)]^{j_s}$$

$$j_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

*если математическое ожидание в правой части равенства имеет смысл при всех* $\theta_i \in \Theta$, $i = 1, 2, \ldots, s$. *Величина* $q = j_1 + j_2 + \ldots + j_s$ *называется порядком моментной функции.*

Определение. *Случайная функция* $\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *принадлежит классу* $\mathcal{L}_p(\Theta)$ $(\xi(\theta) \in \mathcal{L}_p(\Theta))$, *если* $\mathsf{M}|\xi(\theta)|^p < \infty$ *для любого* $\theta \in \Theta$.

Легко заметить, что если $\xi(\theta) \in \mathcal{L}_p(\Theta)$, то моментные функции порядка $q$ конечны для всех $q \leqslant p$.

Действительно, из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\prod_{k=1}^{s} a_a^{p_k} \leqslant \sum_{k=1}^{s} p_k a_k, \qquad a_k \geqslant 0, \qquad p_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{s} p_k = 1,$$

следует

$$\prod_{k=1}^{s} |\xi(\theta_k)|^{j_k} = \prod_{k=1}^{s} |\xi(\theta_k)|^{q\frac{j_k}{q}} \leqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{j_k}{q} |\xi(\theta_k)|^q, \qquad q = \sum_{k=1}^{s} j_k.$$

Воспользовавшись неравенством Иенсена $\mathsf{M}f(\xi) \leqslant f(\mathsf{M}\xi)$, имеющим место для любой непрерывной выпуклой функции, получим

$$\mathsf{M}\prod_{k=1}^{s} |\xi(\theta_k)|^{j_k} \leqslant \mathsf{M}\sum_{k=1}^{s} \frac{j_k}{q} |\xi(\theta_k)|^q \leqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{j_k}{q} \left(\mathsf{M}|\xi(\theta_k)|^p\right)^{\frac{q}{p}},$$

откуда следует доказываемое.

Если известны характеристические функции конечномерных распределений, то моментные функции с целочисленными индексами могут быть найдены с помощью дифференцирования. Действительно, если $\xi(\theta) \in \mathscr{L}_p(\Theta)$, то

$$m_{j_1, \ldots, j_s}(\theta_1, \ldots, \theta_s) = (-i)^q \left. \frac{\partial^q \varphi_{\theta_1, \ldots, \theta_s}(u_1, \ldots, u_s)}{\partial u_1^{j_1}, \ldots, \partial u_s^{j_s}} \right|_{u_1 = \ldots u_s = 0}$$

при $q \leqslant p$ $(q = j_1 + j_2 + \ldots + j_s)$. Доказательство этой формулы вытекает из возможности дифференцирования по $u_1, \ldots$ $\ldots, u_s$ соотношения $\varphi_{\theta_1, \ldots, \theta_s}(u_1, \ldots, u_s) = \mathsf{M}e^{i\sum_{1}^{s} u_k \xi(\theta_k)}$ под знаком математического ожидания. В ряде случаев приходится пользоваться обратным утверждением, но последнее имеет место не во всех случаях. Но оно справедливо для моментов с четными индексами.

Кроме моментных функций, часто рассматривают центральные моментные функции

$$\bar{m}_{j_1, \ldots, j_s}(\theta_1, \ldots, \theta_s) =$$
$$= \mathsf{M}\left([\xi(\theta_1) - m_1(\theta_1)]^{j_1} [\xi(\theta_2) - m_1(\theta_2)]^{j_2} \ldots [\xi(\theta_s) - m_1(\theta_s)]^{j_s}\right), \tag{8}$$

которые являются моментными функциями центрированной случайной функции $\xi_1(\theta) = \xi(\theta) - m_1(\theta)$, имеющей при любом $\theta \in \Theta$ математическое ожидание, равное 0.

Среди моментных функций особое значение имеют функции первых двух порядков:

$$m(\theta) = m_1(\theta) = \mathsf{M}\xi(\theta), \tag{9}$$

$$R(\theta_1, \theta_2) = m_{11}(\theta_1, \theta_2) = \mathsf{M}[\xi(\theta_1) - m(\theta_1)][\xi(\theta_2) - m(\theta_2)]. \tag{10}$$

Функция $m(\theta)$ называется *средним значением*, а $R(\theta_1, \theta_2)$ — *корреляционной функцией.* При $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ корреляционная функция дает дисперсию $\sigma^2(\theta)$ величины $\xi(\theta)$, $R(\theta, \theta) = \sigma^2(\theta)$.

Величину

$$r(\theta_1, \theta_2) = \frac{R(\theta_1, \theta_2)}{\sigma(\theta_1)\,\sigma(\theta_2)} = \frac{R(\theta_1\ \theta_2)}{\sqrt{R(\theta_1, \theta_1)\,R(\theta_2, \theta_2)}}$$

называют *коэффициентом корреляции* случайных величин $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$.

Если $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$ независимы, то коэффициент корреляции равен 0. Обратное, вообще говоря, неверно. Все же в важном частном случае, когда случайные величины $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$ имеют совместное нормальное распределение, из равенства 0 коэффициента корреляции или, что то же самое, корреляционной функции $R(\theta_1, \theta_2)$ следует, что величины $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$ независимы. Две случайные величины $\xi$, $\eta$ с конечными моментами второго порядка, удовлетворяющие условию

$$R_{\xi,\eta} = \mathsf{M}\,[(\xi - \mathsf{M}\xi)(\eta - \mathsf{M}\eta)] = 0,$$

называются *некоррелированными.*

В общем случае коэффициент корреляции пары случайных величин является мерой линейной связи между ними, т. е. коэффициент корреляции показывает, с какой точностью одна из случайных величин может быть линейно выражена через вторую.

Часто рассматривают комплекснозначные случайные функции $\zeta(\theta)$. Их можно представить в виде $\zeta(\theta) = \xi(\theta) + i\eta(\theta)$ и рассматривать как двумерные векторные случайные функции.

Для комплекснозначной функции соотношение $\zeta(\theta) \in \mathscr{L}_2(\Theta)$ означает, что $\mathsf{M}|\zeta(\theta)|^2 < \infty$, $\theta \in \Theta$, т. е. что $\xi(\theta) \in \mathscr{L}_2(\Theta)$ и $\eta(\theta) \in \mathscr{L}_2(\Theta)$.

Корреляционная функция комплексной случайной функции определяется равенством

$$R(\theta_1, \theta_2) = \mathsf{M}\left([\zeta(\theta_1) - \mathsf{M}\zeta(\theta_1)]\,\overline{[\zeta(\theta_2) - \mathsf{M}\zeta(\theta_2)]}\right),$$

где черта над скобкой обозначает переход к комплексно сопряженной величине.

Отметим некоторые свойства корреляционных функций:

1) $R(\theta, \theta) \geqslant 0$, причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $\zeta(\theta)$ с вероятностью 1 постоянна;

2) $$R(\theta_1, \theta_2) = \overline{R(\theta_2, \theta_1)}; \tag{11}$$

3) $$|R(\theta_1, \theta_2)|^2 \leqslant R(\theta_1, \theta_1)\,R(\theta_2, \theta_2); \tag{12}$$

4) каковы бы ни были $n$, $\theta_1$, $\theta_2$, ..., $\theta_n$ и комплексные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$,

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} R(\theta_j, \theta_k)\lambda_j\bar{\lambda}_k \geqslant 0. \tag{13}$$

Первые два утверждения очевидны; 3) получается как следствие неравенства Коши — Буняковского $(\mathsf{M}|\xi\eta|)^2 \leqslant \mathsf{M}|\xi|^2\mathsf{M}|\eta|^2$. Для доказательства 4) достаточно заметить, что

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} R(\theta_j, \theta_k)\lambda_j\bar{\lambda}_k = \mathsf{M}\sum_{j,\,k=1}^{n} \zeta(\theta_j)\overline{\zeta(\theta_k)}\lambda_j\bar{\lambda}_k = \mathsf{M}\left|\sum_{j=1}^{n}\zeta(\theta_j)\lambda_j\right|^2 \geqslant 0.$$

Отметим, что свойства 1), 2) и 3) являются следствием свойства 4).

Функция $R(\theta_1, \theta_2)$, заданная на $\Theta$ и удовлетворяющая свойству 4), называется *положительно определенным ядром* на $\Theta$.

Если даны две случайные функции $\zeta_1(\theta)$ и $\zeta_2(\theta)$, принадлежащие $\mathscr{L}_2(\Theta)$, то для характеристики степени линейной связи между ними вводят взаимную корреляционную функцию.

Определение. *Взаимной корреляционной функцией случайных функций* $\zeta_1(\theta)$ и $\zeta_2(\theta)$ $(\in \mathscr{L}_2(\Theta))$ *называется функция*

$$R_{\zeta_1\zeta_2}(\theta_1, \theta_2) = \mathsf{M}\,[\zeta_1(\theta_1) - \mathsf{M}\zeta_1(\theta_1)]\,\overline{[\zeta_2(\theta_2) - \mathsf{M}\zeta_2(\theta_2)]}.$$

Пусть задана последовательность комплекснозначных случайных функций

$$\zeta_1(\theta),\ \zeta_2(\theta),\ \dots,\ \zeta_r(\theta) \quad \zeta_i(\theta) \in \mathscr{L}_2(\Theta), \qquad i = 1, 2, \dots, r.$$

Условимся рассматривать ее как одну $r$-мерную комплексную случайную функцию

$$\zeta(\theta) = \{\zeta_1(\theta), \zeta_2(\theta), \dots, \zeta_r(\theta)\}, \qquad \theta \in \Theta.$$

Если $\xi$ и $\eta$ — два вектора

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r),$$
$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r),$$

то будем обозначать через $\xi\eta^*$ матрицу

$$\xi\eta^* = \begin{pmatrix} \xi_1\bar{\eta}_1 & \xi_1\bar{\eta}_2 & \dots & \xi_1\bar{\eta}_r \\ \xi_2\bar{\eta}_1 & \xi_2\bar{\eta}_2 & \dots & \xi_2\bar{\eta}_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_r\bar{\eta}_1 & \xi_r\bar{\eta}_2 & \dots & \xi_r\bar{\eta}_r \end{pmatrix} = (\xi_i\bar{\eta}_j)_{i,\,j=1,\,\dots,\,r}.$$

Положим

$$m(\theta) = \mathsf{M}\zeta(\theta) = \{\mathsf{M}\zeta_1(\theta), \mathsf{M}\zeta_2(\theta), \dots, \mathsf{M}\zeta_r(\theta)\},$$

$$\begin{aligned} R(\theta_1, \theta_2) &= (R_{ij}(\theta_1, \theta_2))_{i,\,j=1,\,\dots,\,r} = \\ &= \mathsf{M}\,([\zeta(\theta_1) - m(\theta_1)]\,[\zeta(\theta_2) - m(\theta_2)]^*) = \\ &= (\mathsf{M}\,\{[\zeta_i(\theta_1) - m_i(\theta_1)]\,\overline{[\zeta_j(\theta_2) - m_j(\theta_2)]}\})_{i,\,j=1,\,\dots,\,r}. \end{aligned}$$

Функция $m(\theta)$ является $r$-мерной комплекснозначной векторной функцией. Она носит название *среднего значения* векторной случайной функции $\zeta(\theta)$. Матрица $R(\theta_1, \theta_2)$ называется *корреляционной матрицей* $\zeta(\theta)$.

Свойствам 1) — 4) корреляционных функций соответствуют следующие свойства корреляционной матрицы случайной функции:

1) $R(\theta, \theta)$ является неотрицательно определенной матрицей

$$\sum_{j,k=1}^{r} R_{jk}(\theta, \theta)\lambda_j\bar{\lambda}_k = \mathsf{M}\left|\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\zeta_j(\theta)\right|^2 \geqslant 0; \tag{14}$$

2) $$R(\theta_1, \theta_2)^* = R(\theta_2, \theta_1), \tag{15}$$

где знак * обозначает переход к комплексно сопряженной матрице;

3) $$|R_{jk}(\theta_1, \theta_2)|^2 \leqslant R_{jj}(\theta_1, \theta_1) R_{kk}(\theta_2, \theta_2), \quad j, k = 1, \ldots, r; \tag{16}$$

4) для любых $n$, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и последовательности комплексных векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\sum_{j,k=1}^{n} (R(\theta_j, \theta_k) A_k, A_j) \geqslant 0. \tag{17}$$

Последнее условие эквивалентно следующему:

4′) для произвольной последовательности матриц $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ матрица

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Lambda_j R(\theta_j, \theta_k)\Lambda_k^*$$

неотрицательно определенная.

Свойства 1) и 2) очевидны. Для доказательства свойства 3) воспользуемся неравенством Коши — Буняковского для математического ожидания:

$$|R_{jk}(\theta_1, \theta_2)|^2 = |\mathsf{M}[(\zeta_j(\theta_1) - m_j(\theta_1))\overline{(\zeta_k(\theta_2) - m_k(\theta_2))}]|^2 \leqslant \leqslant R_{jj}(\theta_1, \theta_1) R_{kk}(\theta_2, \theta_2).$$

Чтобы доказать свойство 4), положим $A_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kr})$. Тогда

$$\sum_{j,k=1}^{n} (R(\theta_j, \theta_k) A_k, A_j) = \sum_{j,k=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{r} R_{pq}(\theta_j, \theta_k) a_{kq}\bar{a}_{jp} = \mathsf{M}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{r}(\zeta_p(\theta_j) - m_p(\theta_j))\bar{a}_{jp}\right|^2 \geqslant 0.$$

Понятия непрерывности, измеримости и другие понятия анализа непосредственно к случайным функциям в широком смысле неприменимы. В принципе возможно для этих понятий найти эквиваленты, выражаемые через конечномерные распределения случайной функции. В настоящее время более распространен иной подход к построению анализа случайных функций, принятый и в настоящей книге (гл. IV). Упомянем здесь об одном понятии, выражаемом через распределения пар $\xi(\theta_1)$, $\xi(\theta_2)$.

Пусть $\xi(\theta)$ — векторная функция со значениями в $\mathscr{R}^d$, $\Theta$ — метрическое пространство с метрикой $r(\theta_1, \theta_2)$.

Определение. *Случайная функция* $\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *называется стохастически непрерывной в точке* $\theta_0$, *если* $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|\xi(\theta_0) - \xi(\theta)| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при } r(\theta_0, \theta) \to 0.$$

Если $\xi(\theta)$ стохастически непрерывна в каждой точке некоторого множества $B \subset \Theta$, то ее называют *стохастически непрерывной на $B$*.

Если случайная функция стохастически непрерывна на некотором множестве, то это вовсе не означает, что ее реализации непрерывны на $B$. В этом легко убедиться на простых примерах (см. § 3).

Определение. *Если при* $N \to \infty$

$$\sup_{\theta \in B} \mathsf{P}(|\xi(\theta)| > N\} \to 0,$$

*то случайную функцию* $\xi(\theta)$ *называют стохастически ограниченной на $B$*.

Теорема 1. *Если $\Theta$ — компакт, случайная функция $\xi(\theta)$ стохастически непрерывна на $\Theta$, то $\xi(\theta)$ стохастически ограничена на $\Theta$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon$ — произвольно малое положительное число. Для каждой точки $\theta \in \Theta$ построим сферу $S_\theta$ с центром в точке $\theta$ такую, что

$$\mathsf{P}\{|\xi(\theta) - \xi(\theta')| > 1\} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \theta' \in S_\theta.$$

Из множества всех сфер $S_\theta$ выберем конечное покрытие $S_{\theta_1}, \ldots$ $\ldots, S_{\theta_n}$ множества $\Theta$. Пусть $a$ — наибольший радиус сфер $S_{\theta_1}, \ldots, S_{\theta_n}$. Тогда

$$|\xi(\theta)| \leqslant |\xi(\theta) - \xi(\theta_j)| + \max |\xi(\theta_j)|,$$

где $\theta_j$ — центр сферы $S_{\theta_j}$, в которую попадает точка $\theta$. Таким образом, при $N > 2$

$$\mathsf{P}\{|\xi(\theta)| > N\} \leqslant \mathsf{P}\left\{|\xi(\theta) - \xi(\theta_j)| > \frac{N}{2}\right\} + \mathsf{P}\left\{\max |\xi(\theta_j)| > \frac{N}{2}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\xi(\theta_j)| > \frac{N}{2}\right\}.$$

Величина $\max_l |\xi(\theta_l)|$ с вероятностью 1 конечна. Поэтому при $N$ достаточно большом, $N \geqslant N_0(\varepsilon)$, имеем $\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant l\leqslant n} |\xi(\theta_l)| > \frac{N}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\mathsf{P}\{|\xi(\theta)| > N\} < \varepsilon$. ■

Определение. *Случайную функцию $\xi(\theta)$ называют равномерно стохастически непрерывной на $\Theta$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что*

$$\mathsf{P}\{|\xi(\theta) - \xi(\theta')| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

*для всех $\theta$ и $\theta'$, для которых $r(\theta, \theta') < \delta$.*

Теорема 2. *Если $\Theta$ — компакт, случайная функция $\xi(\theta)$ стохастически непрерывна на $\Theta$, то $\xi(\theta)$ равномерно стохастически непрерывна на $\Theta$.*

Действительно, если бы это было не так, то нашлось бы такое $\varepsilon > 0$ и для любого $n$ пара точек $\theta_n$, $\theta'_n$, для которых $r(\theta_n, \theta'_n) < \frac{1}{n}$ и $\mathsf{P}\{|\xi(\theta_n) - \xi(\theta'_n)| > \varepsilon\} \geqslant \varepsilon$. Из компактности $\Theta$ следует, что можно выбрать подпоследовательность индексов $n_k$ так, чтобы $\theta_{n_k}$ и $\theta'_{n_k}$ сходились к некоторому пределу $\theta_0$. Тогда

$$\varepsilon \leqslant \mathsf{P}\left\{\left|\xi(\theta_{n_k}) - \xi(\theta'_{n_k})\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\left|\xi(\theta_{n_k}) - \xi(\theta_0)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \\ + \mathsf{P}\left\{\left|\xi(\theta_0) - \xi(\theta'_{n_k})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

В силу стохастической непрерывности $\xi(\theta)$ правая часть последнего неравенства $\to 0$ при $k \to 0$. Мы пришли к противоречию, и тем самым теорема доказана.

## § 2. Гауссовы случайные функции

Важную роль во многих прикладных вопросах играют случайные функции, конечномерные распределения которых являются гауссовыми (нормальными). Приведем прежде всего определение и основные свойства многомерного гауссова распределения.

Определение. *Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ имеет гауссово (нормальное) распределение, если характеристическая функция распределения представима в виде*

$$\varphi(u) = \mathsf{M}e^{i(u,\xi)} = e^{i(m,u) - \frac{1}{2}(Ru,u)}, \tag{1}$$

*где $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — векторы, $R$ — неотрицательно определенная вещественная симметрическая матрица, $R = (r_{ik})$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $(\alpha, \beta)$ обозначает* *скалярное произведение векторов* $\alpha$ *и* $\beta$, *так что*

$$(m, u) = \sum_{k=1}^{n} m_k u_k, \qquad (Ru, u) = \sum_{j,\, k=1}^{n} r_{jk} u_j u_k.$$

Следующая теорема служит формальным оправданием данного определения.

Теорема 1. *Для того чтобы функция*

$$\psi(u) = \exp\left\{i(m, u) - \frac{1}{2}(Ru, u)\right\}$$

*была характеристической функцией распределения некоторого n-мерного случайного вектора* $\xi$, *необходимо и достаточно, чтобы вещественная матрица R была неотрицательно определенной и симметрической. Ранг матрицы R равен размерности подпространства, в котором можно сосредоточить распределение вектора* $\xi$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть характеристическая функция $\varphi(u)$ некоторого случайного вектора задается формулой (1). Дифференцируя ее по $u_j$ и затем по $u_k$ и полагая $u = 0$, видим, что распределение обладает конечными моментами и

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}\right|_{u=0} = i\mathsf{M}\xi_j = im_j, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j\, \partial u_k}\right|_{u=0} = -\mathsf{M}\xi_j\xi_k = -m_j m_k - r_{jk}. \tag{3}$$

Из этих формул следует, что матрица $R$ вещественна, симметрична и неотрицательно определена:

$$(Ru, u) = \mathsf{M}\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - m_j)u_j\right)^2 = \mathsf{D}(\xi, u) \geqslant 0. \tag{4}$$

Если ранг матрицы $R$ равен $r(\leqslant n)$, то с помощью надлежащей замены переменных $u_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} v_k$ ее можно привести к главным осям:

$$(Ru, u) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k^2 = \mathsf{M}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - m_j)\alpha_{jk} v_k\right]^2.$$

Таким образом, $\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - m_j)\alpha_{jk} = 0$ при $k = r + 1, \ldots, n$ с вероятностью 1. Эти соотношения показывают, что с вероятностью 1 между компонентами вектора $\xi$ существуют $n - r$ линейно независимых соотношений и, следовательно, его распределение сосредоточено в $r$-мерной гиперплоскости, задаваемой уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - m_j)\,\alpha_{jk} = 0, \qquad k = r+1, \ldots, n.$$

б) Достаточность. Предположим сначала, что $R$ — положительно определенная симметрическая матрица. Функция $\psi(u) = \exp\left\{i(m, u) - \frac{1}{2}(Ru, u)\right\}$ абсолютно интегрируема и дифференцируема. Следовательно, к ней применима интегральная формула Фурье:

$$\begin{gathered}\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i(x, u)}\, dx_1 \ldots dx_n, \\ f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)\, e^{-i(u, x)}\, du_1 \ldots du_n.\end{gathered} \tag{5}$$

Интегралы в правых частях написанных формул являются $n$-мерными.

Пусть $C$ — ортогональная матрица, приводящая $R$ к диагональному виду, так что $C^*RC = D$, где $D = (\lambda_i \delta_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, n$; $\lambda_i > 0$, $C^*$ — матрица, сопряженная с $C$. Так как $C$ вещественна и ортогональна, $C^*$ совпадает с транспонированной и с матрицей, обратной к $C$, $C^* = C' = C^{-1}$. Перейдем от переменных интегрирования $u_k$ к переменным $v_k$ с помощью соотношений $u = Cv$ или $v = C^*u$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Так как при ортогональном преобразовании элемент объема не меняется, то

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i(x - m, Cv) - \frac{1}{2}(RCv, Cv)\right\} dv_1 \ldots dv_n.$$

Имеем

$$(RCv, Cv) = (C^*RCv, v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k^2,$$

$$(x - m, Cv) = (C^*(x - m), v) = \sum_{k=1}^{n} x_k^* v_k,$$

где $x_k^*$ — $k$-я компонента вектора $x^* = C^*(x - m)$. Таким образом,

$$f(x)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\sum_{k=1}^{n}x_k^*v_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_k^2\right\}dv_1\ldots dv_n=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-ix_k^*v_k-\frac{1}{2}\lambda_k v_k^2\right\}dv_k=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}e^{-x_k^{*2}/2\lambda_k}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}x^*,\,x^*)}.$$

Далее, $\prod_{k=1}^{n}\lambda_k=\Delta$, где $\Delta$ — определитель матрицы $R$,

$$\left(D^{-1}x^*,\,x^*\right)=\left(D^{-1}C^*(x-m),\ C^*(x-m)\right)=$$
$$=\left(CD^{-1}C^*(x-m),\,(x-m)\right)=\left((CDC^*)^{-1}(x-m),\,(x-m)\right)=$$
$$=\left(R^{-1}(x-m),\,(x-m)\right),$$

где $R^{-1}$ — матрица, обратная к $R$. Окончательно получаем

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(R^{-1}(x-m),\,(x-m)\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n}\frac{\Delta_{kj}(x_j-m_j)(x_k-m_k)}{\Delta}\right\},\qquad(6)$$

где $\Delta_{kj}$ — алгебраические дополнения элементов матрицы $R$. Из (6) следует $f(x)>0$, а из (5) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\psi(0)=1$. Таким образом, функцию $f(x)$ можно рассматривать как $n$-мерную плотность распределения, а $\psi(u)$ является ее характеристической функцией.

Переходя к общему случаю, предположим, что матрица $R$ имеет ранг $r$ $(r<n)$ и $C$ — ортогональное преобразование, приводящее ее к диагональному виду, $C^*RC=D_r$, где $D_r$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой $\lambda_k=0$ при $k=r+1,\ldots,n$ и $\lambda_k>0$ при $k=1,2,\ldots,r$. Пусть $\lambda_j^\varepsilon=\lambda_j$ при $j=1,2,\ldots,r$; $\lambda_j^\varepsilon=\varepsilon$ при $j=r+1,\ldots,n$. Тогда $R_\varepsilon=CD_\varepsilon C^*$ — положительно определенная матрица ($D_\varepsilon$ — матрица с элементами $\lambda_j^\varepsilon\delta_{jk}$) и

$$\varphi_\varepsilon(u)=\exp\left\{i(m,\,u)-\frac{1}{2}(R_\varepsilon u,\,u)\right\}$$

является характеристической функцией некоторого распределения. При $\varepsilon \to 0$ функция $\varphi_\varepsilon(u)$ равномерно стремится к $\varphi(u)$, и поэтому $\varphi(u)$ также будет характеристической функцией некоторого распределения. Как было выяснено ранее, это распределение сосредоточено в $r$-мерной гиперплоскости и поэтому не имеет плотности. Такое распределение называют несобственным гауссовым распределением. ∎

Следствие 1. *В выражении* (1) *для характеристической функции гауссова распределения* $m=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *есть вектор математического ожидания, а* $R$ — *корреляционная матрица:*

$$m=\mathsf{M}\xi, \qquad r_{jk}=\mathsf{M}\left[(\xi_j-m_j)(\xi_k-m_k)\right].$$

Это следствие непосредственно вытекает из формул (2) и (3).

Следствие 2. *Если корреляционная матрица* $R$ *гауссова случайного вектора* $\xi$ *невырождена, то существует* $n$*-мерная плотность распределения* $f(x)$, *определяемая формулой* (6).

Следствие 3. *Совместное распределение любой группы компонент гауссова случайного вектора является гауссовым.*

Теорема 2. *Если случайный вектор* $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *имеет гауссово распределение, случайные векторы* $\xi'=(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $\xi''=(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ $(r<n)$ *некоррелированы, то векторы* $\xi'$ *и* $\xi''$ *независимы.*

*Доказательство.* Из некоррелированности $\xi'$ и $\xi''$ вытекает, что

$$\mathsf{M}\xi_i\xi_j-\mathsf{M}\xi_i\mathsf{M}\xi_j=0, \qquad i=1, \ldots, r, \; j=r+1, \ldots, n.$$

Поэтому

$$\varphi(u)=\exp\left\{i(m', u')+i(m'', u'')-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} r_{jk}u_ju_k-\frac{1}{2}\sum_{j,k=r+1}^{n} r_{jk}u_ju_k\right\},$$

где

$$m'=(m_1, m_2, \ldots, m_r), \qquad m''=(m_{r+1}, \ldots, m_n),$$
$$u'=(u_1, u_2, \ldots, u_r), \qquad u''=(u_{r+1}, \ldots, u_n).$$

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\varphi(u)=\mathsf{M}e^{i(u',\xi')+i(u'',\xi'')}=\mathsf{M}e^{i(u',\xi')}\mathsf{M}e^{i(u'',\xi'')}=\varphi'(u')\varphi''(u''),$$

где $\varphi'(u')$ и $\varphi''(u'')$ являются характеристическими функциями векторов $\xi'$, $\xi''$. Это соотношение доказывает независимость $\xi'$ и $\xi''$.

Пусть $A = \| a_{jk} \|$ $(j = 1, \ldots, h,\ k = 1, \ldots, n)$ — произвольная прямоугольная матрица и $\eta = A\xi$, т. е.

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_h), \qquad \eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k, \qquad j = 1, \ldots, h.$$

Вектор $\eta$ является линейным преобразованием вектора $\xi$.

Теорема 3. *При линейном преобразовании случайных векторов гауссовы распределения переходят в гауссовы.*

*Доказательство.* Пусть $\varphi_\eta(t_1, \ldots, t_n)$ обозначает характеристическую функцию вектора $\eta$. Тогда

$$\varphi_\eta(u_1, \ldots, u_h) = \mathsf{M}\exp\left\{ i\sum_{j=1}^{h} u_j\eta_j \right\} = \mathsf{M}\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{h} u_j a_{jk}\right)\xi_k \right\} =$$
$$= \exp\left\{ i(u, Am) - \frac{1}{2}(ARA'u, u) \right\}, \qquad (7)$$

т. е. $\eta$ имеет гауссово распределение с математическим ожиданием $Am$ и с дисперсионной матрицей $R_\eta = ARA'$. ■

Приведем еще некоторые часто используемые формулы для гауссовых распределений.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — два случайных вектора, имеющих совместное гауссово распределение. Найдем условное распределение вектора $\xi$ при заданном векторе $\eta$. Не умаляя общности, можно считать, что корреляционная матрица $R_{22}$ вектора $\eta$ невырождена. Действительно, если бы матрица $R_{22}$ вырождалась, то это бы означало, что некоторые компоненты вектора $\eta$ являются линейными комбинациями других, и их можно было бы исключить, понизив размерность вектора $\eta$.

Пусть $m_1 = \mathsf{M}\xi$, $m_2 = \mathsf{M}\eta$, $R_{11}$ — корреляционная матрица вектора $\xi$, $R_{12}$ — взаимная корреляционная матрица векторов $\xi$ и $\eta$:

$$R_{12} = \mathsf{M}(\xi - m_1)(\eta - m_2)^*.$$

Заметим, что для любой неслучайной матрицы $A$ и векторов $\xi$ и $\eta$

$$\mathsf{M}(A\xi, \eta) = \operatorname{Sp} AK,$$

где $K$ — матрица с элементами $k_{ij} = \mathsf{M}\xi_i\eta_j$, $\operatorname{Sp} B$ — след матрицы $B$, $\operatorname{Sp} B = \sum_j b_{jj}$. При этом, $\operatorname{Sp} AB = \operatorname{Sp} BA$ для любых матриц $A$ и $B$. Возвращаясь к поставленной задаче, положим

$$\check{\xi} = m_1 + R_{12}R_{22}^{-1}(\eta - m_2). \qquad (8)$$

Легко проверить, что для любой матрицы $A$

$$\mathsf{M}(A(\xi - \check{\xi}), \eta - m_2) = 0. \qquad (9)$$

Действительно,

$$\mathsf{M}(A(\xi-\check{\xi}),\ \eta-m_2)=\operatorname{Sp} AR_{12}-\operatorname{Sp} AR_{12}R_{22}^{-1}R_{22}=0.$$

Равенство (9) означает, что любая компонента вектора $\xi-\check{\xi}$ некоррелирована с любой компонентой вектора $\eta-m_2$ и, следовательно, эти векторы независимы. Таким образом,

$$\xi=\zeta+\check{\xi}=\zeta+m_1+R_{12}R_{22}^{-1}(\eta-m_2), \tag{10}$$

где $\zeta$ и $\check{\xi}$ — гауссовы случайные векторы, $\zeta$ не зависит от $\eta$. При этом

$$\mathsf{M}\zeta=m_1-m_1=0,$$

$$\mathsf{M}\zeta\zeta^*=\mathsf{M}(\xi-\check{\xi})(\xi-\check{\xi})^*=$$
$$=\mathsf{M}\{(\xi-m_1)(\xi-m_1)^*-(\xi-m_1)(\eta-m_2)^*R_{22}^{-1}R_{12}^*-$$
$$-R_{12}R_{22}^{-1}(\eta-m_2)(\xi-m_1)^*+R_{12}R_{22}^{-1}(\eta-m_2)(\eta-m_2)^*R_{22}^{-1}R_{12}^*\},$$

или, так как $R_{12}^*=R_{21}=\mathsf{M}(\eta-m_2)(\xi-m_1)^*$ и матрица $R_{22}$ симметрична,

$$\mathsf{M}\zeta\zeta^*=R_{11}-R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}.$$

Из формулы (10) вытекает, что условное распределение вектора $\xi$ при заданном векторе $\eta$ является гауссовым с условным средним

$$\mathsf{M}\{\xi\mid\eta\}=\check{\xi}=m_1+R_{12}R_{22}^{-1}(\eta-m_2) \tag{11}$$

и условной корреляционной матрицей

$$\mathsf{M}\{(\xi-\check{\xi})(\xi-\check{\xi})^*\mid\eta\}=R_{11}-R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}. \tag{12}$$

Отметим следующее важное обстоятельство: матрица условных корреляций вектора $\xi$ при заданном $\eta$ неслучайна и, в частности, не зависит от значения вектора $\eta$.

Следующее утверждение очевидно, но его полезно иметь в виду.

Теорема 4. *Пусть $\xi^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ \ldots)$ — последовательность $n$-мерных векторов, имеющих гауссовы распределения с параметрами $(m^{(\alpha)},\ R^{(\alpha)})$. Последовательность распределений векторов $\xi^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ слабо сходится (сходится в основном) к некоторому предельному распределению тогда и только тогда, когда*

$$m^{(\alpha)}\to m,\qquad R^{(\alpha)}\to R. \tag{13}$$

*В этом случае предельное распределение также является гауссовым с параметрами $(m,\ R)$.*

Перейдем теперь к случайным функциям. Векторная $s$-мерная случайная функция $\xi(\theta) = \{\xi_1(\theta), \ldots, \xi_r(\theta)\}$ называется *гауссовой*, если совместное распределение всех компонент случайных векторов

$$\xi(\theta_1), \xi(\theta_2), \ldots, \xi(\theta_n) \tag{14}$$

является гауссовым.

Корреляционная матрица $R$ совместного распределения последовательности случайных векторов (14) имеет размер $sn \times sn$ и может быть разбита на квадратные блоки размера $s \times s$ следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} R(\theta_1, \theta_1) & R(\theta_1, \theta_2) & \ldots & R(\theta_1, \theta_n) \\ R(\theta_2, \theta_1) & R(\theta_2, \theta_2) & \ldots & R(\theta_2, \theta_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R(\theta_n, \theta_1) & R(\theta_n, \theta_2) & \ldots & R(\theta_n, \theta_n) \end{pmatrix},$$

где $R(\theta_1, \theta_2)$ — корреляционная матрица функции $\xi(\theta)$. Матрица $R$ вещественная и неотрицательно определенная.

Очевидно и обратное предложение. А именно, каковы бы ни были вещественные вектор-функция $m(\theta)$ и неотрицательно определенная матричная функция $R(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_i \in \Theta$ $(i = 1, 2)$, существует $r$-мерная гауссова случайная функция (в широком смысле), для которой $m(\theta)$ есть вектор математического ожидания, а $R(\theta_1, \theta_2)$ — корреляционная матрица.

Моменты гауссовой случайной функции могут быть получены из разложения характеристической функции. Ограничиваясь случаем центральных моментов, положим $m(\theta) = 0$. Тогда

$$\varphi_{\theta_1, \ldots, \theta_s}(u_1, \ldots, u_s) = e^{-\frac{1}{2}(Ru, u)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(Ru, u) + \frac{1}{2!2^2}(Ru, u)^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n n!}(Ru, u)^n + \ldots$$

Отсюда для произвольной моментной функции нечетного порядка получим

$$m_{j_1, \ldots, j_s}(\theta_1, \ldots, \theta_s) = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{s} j_k = 2n + 1.$$

Для центральных моментных функций четного порядка

$$m_{j_1, \ldots, j_s}(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \frac{\partial^{2n}}{\partial t_1^{j_1} \ldots \partial t_s^{j_s}} \cdot \frac{1}{2^n n!}(Ru, u)^n, \quad \sum_{k=1}^{s} j_k = 2n. \tag{15}$$

Например, для моментных функций четвертого порядка имеем следующие формулы:

$$m_4(\theta) = 3R^2(\theta, \theta), \qquad m_{31}(\theta_1, \theta_2) = 3R(\theta_1, \theta_1)R(\theta_1, \theta_2),$$
$$m_{211}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R(\theta_1, \theta_1)R(\theta_2, \theta_3) + 2R(\theta_1, \theta_2)R(\theta_1, \theta_3),$$
$$m_{1111}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) =$$
$$= R(\theta_1, \theta_2)R(\theta_3, \theta_4) + R(\theta_1, \theta_3)R(\theta_2, \theta_4) + R(\theta_1, \theta_4)R(\theta_2, \theta_3).$$

В общем случае имеет место соотношение

$$m_{j_1, \ldots, j_s}(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \sum \prod R(\theta_p, \theta_q), \tag{16}$$

структура которого может быть описана следующим образом. Записываем точки $\theta_1, \ldots, \theta_s$ в последовательность, причем $\theta_k$ пишем подряд $j_k$ раз. Написанную последовательность разбиваем на произвольные пары. Тогда произведение в правой части формулы (16) берется по всем парам этого разбиения, а сумма берется по всем разбиениям (пары, отличающиеся перестановкой элементов, считаются за одну). Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (15).

То обстоятельство, что гауссовы случайные функции играют важную роль в практических задачах, часто можно объяснить следующим образом. При широких условиях сумма большого числа независимых и малых по величине случайных функций приближенно является гауссовой случайной функцией, независимо от теоретико-вероятностной природы отдельных слагаемых. Это так называемая теорема о нормальной корреляции, являющаяся многомерным обобщением центральной предельной теоремы.

Определение. *Последовательность случайных функций (в широком смысле) $\xi_n(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $n = 1, 2, \ldots$, называют слабо сходящейся к $\xi_0(\theta)$, $\theta \in \Theta$, если для любых $s$, $\theta_i$ ($\theta_i \in \Theta$, $s = 1, 2, \ldots$) совместное распределение серии случайных величин $(\xi_n(\theta_1), \ldots, \xi_n(\theta_s))$ при $n \to \infty$ слабо сходится к распределению величин $(\xi_0(\theta_1), \ldots, \xi_0(\theta_s))$.*

Теорема 5. *Пусть дана последовательность сумм случайных функций*

$$\eta_n(\theta) = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{nk}(\theta), \qquad \theta \in \Theta, \ n = 1, 2, \ldots,$$

*и выполнены следующие условия:*

1) *при фиксированном $n$ случайные величины $\alpha_{n1}(\theta_1)$, $\alpha_{n2}(\theta_2)$, $\ldots$, $\alpha_{nm_n}(\theta_{m_n})$ взаимно независимы при любых $\theta_1$, $\theta_2$, $\ldots$, $\theta_{m_n}$ и обладают моментами второго порядка, причем*

$$\mathsf{M}\alpha_{nk}(\theta) = 0, \qquad \mathsf{M}\alpha_{nk}^2(\theta) = b_{nk}^2(\theta);$$

2) *при* $n \to \infty$ *корреляционная функция* $R_n(\theta_1, \theta_2) = \mathsf{M}[\eta_n(\theta_1), \eta_n(\theta_2)]$ *сходится к некоторому пределу*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_1, \theta_2);$$

3) *суммы* $\eta_n(\theta) = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{nk}(\theta)$ *при каждом* $\theta$ *удовлетворяют условию Линдеберга: при любом* $\tau > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{m_n} \int\limits_{|x|>\tau B_n} x^2 \, d\Pi_{nk}(\theta, x) \to 0,$$

*где* $\Pi_{nk}(\theta, x)$ — *функция распределения случайной величины* $\alpha_{nk}(\theta)$,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{m_n} b_{nk}^2(\theta) = R_n(\theta, \theta).$$

*Тогда случайная функция* $\eta_n(\theta)$ *при* $n \to \infty$ *слабо сходится к гауссовой случайной функции с математическим ожиданием* 0 *и корреляционной функцией* $R(\theta_1, \theta_2)$.

Приведенная теорема непосредственно вытекает из центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных векторов. При этом ее условия могут быть ослаблены.

## § 3. Процессы с независимыми приращениями

Собственно говоря, именно с изучения процессов с независимыми приращениями возникла теория случайных процессов. Сначала изучался винеровский процесс (или процесс броуновского движения), а затем и более общие процессы с независимыми приращениями. Задача состояла в полном описании этого класса процессов и в изучении его свойств.

В настоящем параграфе будут приведены примеры процессов с независимыми приращениями и найдено общее выражение для характеристических функций конечномерных распределений стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями.

Пусть $T$ — конечный отрезок $T = [0, a]$ или $T = [0, \infty)$.

Определение. *Случайный процесс* $\{\xi(t), t \in T\}$ *со значениями в* $\mathscr{R}^d$ *называется процессом с независимыми приращениями, если для любых* $n$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, *случайные векторы* $\xi(0), \xi(t_1) - \xi(0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ *взаимно независимы.*

Вектор $\xi(0)$ называется *начальным состоянием* (*значением*) процесса, а его распределение — *начальным распределением* процесса. Чтобы задать процесс с независимыми приращениями в широком смысле, достаточно задать начальное распределение $\mathsf{P}_0(B) = \mathsf{P}\{\xi(0) \in B\}$ и набор распределений $\mathsf{P}(t, h, B)$ ($t \geqslant 0$, $h > 0$, $B \in \mathfrak{B}^d$), где $\mathfrak{B}^d$ — σ-алгебра борелевских множеств $\mathcal{R}^d$ и $\mathsf{P}(t, h, B)$ — распределение вектора $\xi(t+h) - \xi(t)$, $\mathsf{P}(t, h, B) = \mathsf{P}\{\xi(t+h) - \xi(t) \in B\}$. Действительно, если эти распределения даны, то любые совместные распределения векторов $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$ однозначно определяются формулой

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{\xi(t_k) \in B_k\}\right) =$$
$$= \int_{B_0} \mathsf{P}_0(dy_0) \int_{B_1 - y_0} \mathsf{P}(0, t_1, dy_1) \int_{B_2 - (y_0+y_1)} \mathsf{P}(t_1, t_2 - t_1, dy_2) \ldots$$
$$\ldots \int_{B_n - (y_0 + \ldots + y_n)} \mathsf{P}(t_{n-1}, t_n - t_{n-1}, dy_n). \quad (1)$$

Здесь $B - z$ обозначает множество $\{x\colon x = y - z,\ y \in B\}$. Что касается начального распределения $\mathsf{P}_0(B)$, то оно может быть произвольным. С другой стороны, нельзя гарантировать, что произвольно заданному семейству распределений $\mathsf{P}(t, h, B)$ соответствует некоторый процесс с независимыми приращениями.

Чтобы последнее имело место, необходимо и достаточно, чтобы $\mathsf{P}(t, h, B)$ обладало следующим свойством: при любом $n$ и любых $(t_1, \ldots, t_n)$, $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t + h$, $\mathsf{P}(t, h, B)$ является распределением суммы независимых случайных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, где $\xi_k$ имеет распределение $\mathsf{P}(t_{k-1}, t_k - t_{k-1}, B)$.

Действительно, если это условие выполнено, то семейство распределений (1) удовлетворяет условиям согласованности.

Процесс с независимыми приращениями называют *однородным*, если распределение вектора $\xi(t+h) - \xi(t)$ не зависит от $t$, т. е. $\mathsf{P}(t, h, B) = \mathsf{P}(h, B)$. Для однородных процессов приводимые ниже соотношения и формулы имеют более простой вид. Во многих вопросах, не умаляя общности, можно считать, что $\xi(0) \equiv 0$. В дальнейшем мы часто будем считать это предположение выполненным.

Приведем сначала несколько примеров процессов с независимыми приращениями.

**Процесс броуновского движения.** Так называется процесс с независимыми приращениями, для которого распределение $\mathsf{P}(t, h, B)$ является гауссовым.

Как известно, если наблюдать в микроскоп с очень сильным увеличением маленькую крупинку коллоидного размера, погруженную в жидкость, то оказывается, что такая частица находится в постоянном движении и ее путь представляет собой очень сложную ломаную линию с хаотически направленными звеньями. Это явление объясняется столкновениями молекул жидкости с коллоидной частицей. Коллоидная частица имеет относительно большие размеры ио сравнению с молекулами жидкости и испытывает в одну секунду огромное число соударений с ними. Результат каждого столкновения частицы с молекулами проследить невозможно. Видимое движение частицы называется броуновским движением. В первом приближении можно считать, что смещения частицы под влиянием столкновения с молекулами среды независимы между собою, и рассматривать броуновское движение как процесс с независимыми приращениями. Так как отдельное смещение мало, то можно предположить, что к их сумме применима центральная предельная теорема теории вероятностей, и считать броуновское движение гауссовым процессом.

Сделаем несколько замечаний о корреляционной функции процесса с независимыми приращениями, обладающего конечными моментами второго порядка.

Пусть $\xi(0)=0$. Положим

$$a(t)=\mathsf{M}\xi(t), \qquad B(t)=\mathsf{M}[\xi(t)-a(t)][\xi(t)-a(t)]^*.$$

$B(t)$ является симметрической неотрицательно определенной матрицей. Если $s<t$, то ($\Delta\xi(s)=\xi(t)-\xi(s)$, $\Delta a(s)=a(t)-a(s)$)

$$R(t, s)=\mathsf{M}[\xi(t)-a(t)][\xi(s)-a(s)]^* = \\ = B(s)+\mathsf{M}\,\Delta\xi(s)(\xi(s)-a(s))^*=B(s),$$

или

$$R(t, s)=B(\min(t, s)). \tag{2}$$

Отметим еще, что

$$\mathsf{M}(\Delta\xi(s)-\Delta a(s))(\Delta\xi(s)-\Delta a(s))^* = \\ =B(t)-R(t, s)-R(s, t)+B(s)=B(t)-B(s). \tag{3}$$

В частности, отсюда следует, что матрица $B(t)-B(s)$ симметрична и неотрицательно определена.

Для однородных процессов функции $a(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют следующим функциональным уравнениям:

$$a(t_1+t_2)=a(t_1)+a(t_2), \tag{4}$$

$$B(t_1+t_2)=B(t_1)+B(t_2). \tag{5}$$

Соотношение (5) является непосредственным следствием (3) и однородности процесса, а равенство (4) легко проверяется:

$$a(t_1+t_2)=\mathsf{M}(\xi(t_1+t_2)-\xi(t_1))+\mathsf{M}\xi(t_2)=a(t_1)+a(t_2).$$

Если предположить, что функция $a(t)$ ограничена, то, как известно, решения функционального уравнения (4) имеют вид $a(t) = at$, где $a$ — некоторый постоянный вектор. Из неотрицательной определенности матрицы $B(t)$ в свою очередь вытекает, что решения уравнения (5) имеют вид $B(t) = Bt$. Итак, для однородного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями и конечными моментами второго порядка ($\xi(0) = 0$)

$$\mathsf{M}\xi(t) = at, \qquad R(t, s) = B\min(t, s). \tag{6}$$

В частности, одномерный однородный процесс броуновского движения определяется двумя параметрами $m$ и $\sigma$. При этом $\mathsf{M}\xi(t) = mt$, $\mathsf{D}\xi(t) = \sigma^2 t$. При $m = 0$, $\sigma = 1$ процесс броуновского движения называют *винеровским процессом*. В многомерном случае винеровским процессом называют однородный гауссов процесс с независимыми приращениями, для которого

$$\xi(0) = 0, \qquad \mathsf{M}\xi(t) = 0, \qquad \mathsf{M}\xi(t)\xi^*(t) = It,$$

где $I$ — единичная матрица.

**Процесс Пуассона.** Стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями называют *процессом Пуассона*, если для любых $s$, $t > 0$ $(s < t)$ распределение величины $\xi(t) - \xi(s)$ является пуассоновским. Пусть $\xi(0) = 0$. Тогда величина $\xi(t)$ принимает целочисленные значения и $\mathsf{P}\{\xi(t) = m\} = \frac{[a(t)]^m}{m!}e^{-at}$, причем $\mathsf{M}\xi(t) = a(t)$. Но тогда

$$\mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(s) = m\} = \frac{[a(t) - a(s)]^m}{m!}e^{-[a(t) - a(s)]}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Если процесс $\xi(t)$ однороден, то в силу монотонности функции $a(t)$

$$a(t) = at$$

и

$$\mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(s) = m\} = \frac{a^m(t-s)^m}{m!}e^{-a(t-s)}, \quad s < t, \quad m = 0, 1, \ldots$$

В общем случае из стохастической непрерывности процесса $\xi(t)$ следует непрерывность функции $a(t)$. Действительно, так как $\xi(t) \to \xi(s)$ по вероятности при $t \downarrow s$, то $\mathsf{M}e^{iu\xi(t)} \to \mathsf{M}e^{iu\xi(s)}$ и характеристическая функция $\varphi_t(u)$ величины $\xi(t)$ непрерывна по $t$.

С другой стороны, $\varphi_t(u) = \exp\{a(t)(e^{iu} - 1)\}$ и $\varphi_t(u)$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна функция $a(t)$.

**Безгранично делимые распределения.** Распределение $\mathsf{Q}$ в $\mathscr{R}^d$ называют *безгранично делимым*, если для любого целого $n$ $\mathsf{Q}$ является $n$-кратной сверткой некоторого распределения $\mathsf{Q}_n$: $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_n^{*n}$.

Таким образом, если для любого целого $n$ случайный вектор $\xi$ допускает представление $\xi = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nn}$, где $\{\xi_{nk},\ k = 1, \ldots, n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, то распределение вектора $\xi$ безгранично делимо.

Безгранично делимые распределения играют важную роль в предельных теоремах теории вероятностей и в теории случайных процессов. С одной стороны, только безгранично делимые распределения могут быть предельными распределениями сумм бесконечно малых независимых слагаемых. С другой стороны, конечномерные распределения стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями являются безгранично делимыми.

Найдем общий вид характеристической функции $\varphi(u)$ безгранично делимого распределения. Ее также называют *безгранично делимой характеристической функцией.*

Из определения следует, что для любого $n$ найдется характеристическая функция $\varphi_n(u)$ такая, что

$$\varphi(u) = [\varphi_n(u)]^n. \tag{7}$$

Условимся считать, что функция $\arg\varphi(u)$ определена однозначно с помощью условий: 1) $\arg\varphi(0) = 0$; 2) $\arg\varphi(u)$ является непрерывной функцией от $u$ $(-\infty < u < \infty)$. В этом случае можно однозначно определить $\ln\varphi(u)$ и $[\varphi(u)]^{\frac{1}{n}}$, положив $[\varphi(u)]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\varphi(u)}$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} n(\varphi_n(u) - 1) = \lim_{n\to\infty} n\left([\varphi(u)]^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln\varphi(u). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi(h, u)$, $h \in H$, — семейство характеристических функций, $H$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, сходящихся к 0, и предел*

$$g(u) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\varphi(h, u) - 1}{h} \tag{9}$$

*существует равномерно в произвольной сфере $|u| \leqslant N$, $N > 0$. Тогда в $\{\mathcal{R}^d, \mathfrak{B}^d\}$ существуют конечная мера $\Pi(B)$, $\Pi\{0\} = 0$, неотрицательно определенный оператор $b$, отображающий $\mathcal{R}^d$ в $\mathcal{R}^d$, и вектор $a$ такие, что*

$$g(u) = i(a, u) - \frac{1}{2}(bu, u) + \int_{\mathcal{R}^d} \left[e^{i(u,z)} - 1 - \frac{i(u, z)}{1 + |z|^2}\right] \frac{1 + |z|^2}{|z|^2} \Pi(dz). \tag{10}$$

*Доказательство.* Пусть $Q_h(\cdot)$ — распределение, соответствующее характеристической функции $\varphi(h, u)$. Положим

$$\Pi_h(B) = \frac{1}{h}\int_B \frac{|z|^2}{1+|z|^2} Q_h(dz), \qquad B \in \mathfrak{B}^d.$$

Ниже будет показано, что семейство мер $\{\Pi_h(\cdot),\ h \in H\}$ слабо компактно. Выберем последовательность $h_n \downarrow 0$ такую, что $\Pi_{h_n}$ слабо сходятся к некоторой мере $\Pi'$ на $\mathfrak{B}^d$. Далее,

$$\frac{\varphi(h, u)-1}{h} = \int_{\mathcal{R}^d} (e^{i(u,z)} - 1)\frac{1+|z|^2}{|z|^2}\Pi_h(dz) =$$

$$= iA_h(u) - \frac{1}{2}B_h(u) + \int_{\mathcal{R}^d} f(u, z)\Pi_h(dz), \tag{11}$$

где

$$A_h(u) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{(u, z)}{|z|^2}\Pi_h(dz), \qquad B_h(u) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{(u, z)^2}{|z|^2}\Pi_h(dz),$$

$$f(u, z) = \left(e^{i(u,z)} - 1 - \frac{i(u, z)}{1+|z|^2} + \frac{1}{2}\frac{(u, z)^2}{1+|z|^2}\right)\frac{1+|z|^2}{|z|^2}.$$

Если считать, что $f(u, 0) = 0$, то $f(u, z)$ будет непрерывной и ограниченной функцией. Поэтому

$$\lim \int_{\mathcal{R}^d} f(u, z)\Pi_{h_n}(dz) = \int_{\mathcal{R}^d} f(u, z)\Pi'(dz).$$

Так как существует предел левой части равенства (11) при $h = h_n$, $n \to \infty$, то существуют пределы

$$\lim A_{h_n}(u) = a(u), \quad \lim B_{h_n}(u) = B(u),$$

причем $a(u)$ является линейной функций, а $B(u)$ — положительно определенной квадратической формой, т. е. $a(u) = (a, u)$ и $B(u) = (b'u, u)$, где $b'$ — неотрицательно определенный симметрический оператор. Переходя в соотношении (11) к пределу по последовательности $h_n$, получим

$$g(u) = i(a, u) - \frac{1}{2}(b'u, u) + \int_{\mathcal{R}^d} f(u, z)\Pi'(dz). \tag{12}$$

Пусть $\Pi(A) = \Pi'(A - \{0\})$ ($\{0\}$ — множество, состоящее из одной точки 0). В интеграле в правой части равенства (12) меру $\Pi'(\cdot)$ можно заменить мерой $\Pi(\cdot)$. С другой стороны, интеграл

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}^d} \frac{(u, z)^2}{|z|^2}\Pi(dz)$$

существует и представляет собой некоторую квадратическую неотрицательно определенную форму $(b''u, u)$. Нетрудно заметить, что $(b'u, u) \geqslant (b''u, u)$. Поэтому $b = b' - b''$ неотрицательно определенный симметрический оператор. Таким образом,

$$g(u) = i(a, u) - \frac{1}{2}(bu, u) + \int\limits_{\mathcal{R}^d} \left( f(u, z) - \frac{1}{2} \frac{(u, z)^2}{|z|^2} \right) \Pi(dz). \blacksquare$$

Перейдем к доказательству слабой компактности семейства $\{\Pi_h, h \in H\}$. Нужно показать, что

$$\text{а) } \Pi_h(\mathcal{R}^d) \leqslant L; \quad \text{б) } \lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{h \downarrow 0}} \Pi_h(\bar{K}_N) = 0,$$

где $K_N$ обозначает замкнутый куб

$$K_N = \left\{ z = (z^1, \ldots, z^d): \max_j |z^j| \leqslant N \right\},$$

а $\bar{K}_N = \mathcal{R}^d \setminus K_N$.

Пусть $|u| \leqslant N_1$, $N_1$ произвольно. Из условий теоремы и (11) следует, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $h_0 = h_0(N_1, \delta)$, что для любого $c > 0$

$$-\operatorname{Re} g(u) + \delta \geqslant \int\limits_{K_c} \frac{1 - \cos(u, z)}{|z|^2} \Pi_h(dz), \qquad h \leqslant h_0,$$

и при $c > 1$

$$-\operatorname{Re} g(u) + \delta \geqslant \int\limits_{\bar{K}_c} (1 - \cos(u, z)) \Pi_h(dz).$$

Проинтегрируем эти неравенства по $u \in K_\rho$ и разделим на объем $K_\rho$. Получим

$$-(2\rho)^{-d} \int\limits_{K_\rho} \operatorname{Re} g(u)\, du + \delta \geqslant \int\limits_{K_c} \frac{1}{|z|^2} \left( 1 - \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin \rho z^k}{\rho z^k} \right) \Pi_h(dz) \tag{13}$$

и

$$-(2\rho)^{-d} \int\limits_{K_\rho} \operatorname{Re} g(u)\, du + \delta \geqslant \int\limits_{\bar{K}_c} \left( 1 - \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin \rho z^k}{\rho z^k} \right) \Pi_h(dz). \tag{14}$$

Воспользуемся тем, что $\frac{\sin x}{x} \geqslant 1 - \frac{x^2}{6}$ для всех $x \geqslant 0$ и $1 - \prod_{k=1}^{m} (1 - \alpha_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k - \sum_{k \neq j} \alpha_k \alpha_j$ для всех $\alpha_k \in [0, 1]$. Получим

$$\frac{1}{|z|^2} \left( 1 - \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin \rho z^k}{\rho z^k} \right) \geqslant \frac{\rho^2}{6} \left( 1 - \frac{\rho^2 |z|^2}{6} \right) \geqslant \frac{\rho^2}{6} \left( 1 - \frac{\rho^2 dc^2}{6} \right).$$

Полагая $\rho^2 = \dfrac{3}{dc^2}$, из (13) будем иметь

$$\Pi_h(K_c) \leqslant 4dc^2 \left[\delta - (2\rho)^{-d} \int_{K_c} \operatorname{Re} g(u)\, du\right] \qquad \forall h \in (0,\ h_0]. \tag{15}$$

Замечая далее, что $\left|\prod_{k=1}^{d} \dfrac{\sin \rho z^k}{\rho z^k}\right| \leqslant \dfrac{1}{\rho c}$ при $z \in \bar{K}_c$, из неравенства (14) получим при $\rho c > 1$

$$\Pi_h(\bar{K}_c) \leqslant \frac{\rho c}{\rho c - 1} \left[\delta - (2\rho)^{-d} \int_{K_\rho} \operatorname{Re} g(u)\, du\right] \qquad \forall h \in (0,\ h_0]. \tag{16}$$

Таким образом, $\Pi_h(\mathscr{R}^d) = \Pi_h(K_c) + \Pi_h(\bar{K}_c) \leqslant L$, где константа $L$ не зависит от $h$, $h \in (0,\ h_0]$. Заметим теперь, что в силу условий теоремы функция $g(u)$ непрерывна и $g(0) = 0$. Поэтому для любого $\delta > 0$ можно найти такое достаточно малое $\rho_1$, чтобы

$$\left|(2\rho_1)^{-d} \int_{K_{\rho_1}} \operatorname{Re} g(u)\, du\right| < \delta.$$

В силу неравенства (16) при достаточно большом $c$ $\Pi_h(\bar{K}_c) < 2\delta$ для всех $h \in (0,\ h_0]$. Компактность семейства мер $\{\Pi_h,\ h \in H\}$ доказана. ■

Из доказанной теоремы и формулы (10) непосредственно вытекает

Теорема 2. *Характеристическая функция $\varphi(u)$ безгранично делимого распределения в $\mathscr{R}^d$ имеет следующий вид:*

$$\varphi(u) = \exp\{g(u)\},$$

*где $g(u)$ дается формулой* (10).

Приведем другой вариант формулы (10). Пусть $c > 0$. Так как интегралы ($S_c$ — сфера радиуса $c > 0$ с центром в начале координат)

$$\int_{S_c} (u,\ z)\, \Pi(dz), \qquad \int_{\bar{S}_c} \frac{(u,\ z)}{|z|^2}\, \Pi(dz)$$

конечны, то

$$\int_{\mathscr{R}^d} \left(e^{i(u,\ z)} - 1 - \frac{i(u,\ z)}{1 + |z|^2}\right) \Pi(dz) =$$

$$= \int_{S_c} (e^{i(u,\ z)} - 1 - i(u,\ z))\, \bar{\Pi}(dz) + \int_{\bar{S}_c} (e^{i(u,\ z)} - 1)\, \bar{\Pi}(dz) + i(u,\ a'),$$

где

$$a' = \int_{S_c} z\Pi(dz) - \int_{\bar{S}_c} \frac{z}{|z|^2}\Pi(dz), \qquad \bar{\Pi}(A) = \int_A \frac{1+|z|^2}{|z|^2}\Pi(dz).$$

Если положить $a_c = a + a'$, то для $g(u)$ получаем представление

$$g(u) = i(a_c, u) - \frac{1}{2}(bu, u) + \\ + \int_{S_c} (e^{i(u,z)} - 1 - i(u, z))\bar{\Pi}(dz) + \int_{\bar{S}_c} (e^{i(u,z)} - 1)\bar{\Pi}(dz). \qquad (17)$$

Мера $\bar{\Pi}(A)$, в отличие от меры $\Pi(A)$, вообще говоря, уже не является конечной, но $\bar{\Pi}(\bar{S}_c) < \infty$ для любого $c > 0$ и $\bar{\Pi}\{0\} = 0$. С другой стороны, как это будет показано в дальнейшем, мера $\bar{\Pi}(A)$ имеет более непосредственный теоретико-вероятностный смысл, чем мера $\Pi(A)$.

Предположим, что распределения $Q_h(\cdot)$, соответствующие характеристическим функциям $\varphi(h, u)$, обладают конечными моментами второго порядка. Вместо мер $\Pi_h(B)$ введем конечные меры

$$G_h(B) = \frac{1}{h}\int_B |z|^2 Q_h(dz).$$

В силу условий теоремы для любых $N_1 > 0$, $\delta > 0$ можно указать такое $h_0 = h_0(N_1, \delta)$, чтобы при $h \in (0, h_0)$

$$-\operatorname{Re} g(u) + \delta \geqslant \int_{\mathcal{R}^d} \frac{1-\cos(u, z)}{|z|^2} G_h(dz)$$

для всех $u$, $|u| \leqslant N_1$. Поэтому можно повторить все рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, и получить слабую компактность семейства мер $G_h(\cdot)$. Из соотношения

$$\frac{\varphi(h, u) - 1}{h} = i\tilde{A}_h(u) - \frac{1}{2}\tilde{B}_h(u) + \int_{\mathcal{R}^d} \tilde{f}(u, z) G_h(dz),$$

где

$$\tilde{f}(u, z) = \left(e^{i(u,z)} - 1 - i(u, z) + \frac{1}{2}(u, z)^2\right)\frac{1}{|z|^2},$$

$$\tilde{A}_h(u) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{(u, z)}{|z|^2} G_h(dz), \qquad \tilde{B}_h(u) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{(u, z)^2}{|z|^2} G_h(dz),$$

так же как при доказательстве теоремы 1, получим, что

$$g(u)=i(\tilde{a},\ u)-\frac{1}{2}(\tilde{b}u,\ u)+\int_{\mathscr{R}^d}[e^{i(u,\ z)}-1-i(u,z)]\frac{1}{|z|^2}G(dz), \tag{18}$$

где $G(\cdot)$ — конечная в $\mathscr{R}^d$ мера и $G\{0\}=0$.

Мы получили следующее дополнение к теореме 1.

Теорема 3. *Если дополнительно к условиям теоремы* 1 *распределения* $Q_h(\cdot)$ *обладают конечными моментами второго порядка, то для функции* $g(u)$ *имеет место представление* (18).

Применим теоремы 1 и 3 к однородным стохастически непрерывным процессам с независимыми приращениями.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(t,\ u)$ — *характеристическая функция вектора* $\xi(s+t)-\xi(s)$, $s\geqslant 0$, $t>0$, *где* $\xi(t)$ — *однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями со значениями в* $\mathscr{R}^d$. *Тогда*

$$\varphi(t,\ u)=\exp\{tg(u)\}, \tag{19}$$

*где* $g(u)$ *дается формулой* (10) (*или* (17)). *Если процесс* $\xi(t)$ *обладает конечными моментами второго порядка, то функция* $g(u)$ *представима по формуле* (18).

*Доказательство.* Так как

$$|\varphi(t,\ u)-\varphi(s,\ u)|\leqslant \mathsf{M}|e^{i(u,\ \xi(t)-\xi(s))}-1|,$$

то из стохастической непрерывности процесса $\xi(t)$ вытекает непрерывность функции $\varphi(t,u)$ по $t$. С другой стороны, в силу однородности процесса $\xi(t)$ и независимости его приращений

$$\begin{aligned}\varphi(t_1+t_2,\ u)&=\mathsf{M}\exp\{i(u,\ \xi(t_1+t_2)-\xi(t_1))+i(u,\ \xi(t_1)-\xi(0))\}=\\&=\mathsf{M}\exp\{i(u,\ \xi(t_2)-\xi(0))\}\,\mathsf{M}\exp\{i(u,\ \xi(t_1)-\xi(0))\}=\\&=\varphi(t_1,\ u)\cdot\varphi(t_2,\ u).\end{aligned}$$

Но единственное непрерывное решение уравнения $f(t+s)=f(t)f(s)$ $(t\geqslant 0,\ s\geqslant 0)$ имеет вид $f(t)=e^{at}$. Таким образом, $\varphi(t,u)=e^{tg(u)}$. При этом $g(u)=\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(t,\ u)-1}{t}$. Отсюда, в силу теорем 1 и 3, вытекает утверждение теоремы. ∎

Укажем некоторые частные случаи формулы (19), принимая для $g(u)$ выражение (17).

а) $b=0$, $\overline{\Pi}(\cdot)\equiv 0$.

В этом случае $\varphi(t,\ u)=e^{it(a,\ u)}$, что соответствует характеристической функции вырожденного распределения, сосредоточенного в точке $ta$. Таким образом, $\xi(t)=\xi(0)+at$ и точка $\xi(t)$ находится в равномерном движении со скоростью $a$.

б) $\overline{\Pi}(\cdot)\equiv 0$.

В этом случае приращение $\xi(t+s)-\xi(s)$ имеет нормальное распределение со средним $at$ и корреляционной матрицей $bt$. При $\xi(0)=0$ процесс $\xi(t)$ является гауссовым, т. е. процессом броуновского движения.

в) $a=0$, $b=0$, мера $\overline{\Pi}$ сосредоточена в точке $z_0$, $|z_0|<c$ и $\overline{\Pi}\{z_0\}=q$.

В этом случае

$$\varphi(t, u)=\exp\{qt(e^{i(u, z_0)}-1-i(u, z_0))\}.$$

Легко проверить, что приращение $\xi(t)$ можно записать в виде ($\xi(0)=0$)

$$\xi(t)=z_0(\nu(t)-qt),$$

где $\nu(t)$ — однородный пуассонов процесс с параметром $q$, $\mathsf{M}\nu(t)=qt$.

г) Пусть $b=0$, а мера $\overline{\Pi}$ такова, что $\overline{\Pi}(S_c)<\infty$. Формулу (17) можно в этом случае записать в виде

$$g(u)=i(\bar{a}, u)+q\int\limits_{\mathscr{R}^d}(e^{i(u, z)}-1)\,\Pi_0(du),$$

где $\Pi_0$ — вероятностная мера на $\mathfrak{B}^d$ $(q=\overline{\Pi}(\mathscr{R}^d))$. Нетрудно истолковать формулу для $\varphi(t, u)$ в этом случае. Имеем

$$\varphi(t, u)=e^{i(\bar{a}t, u)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-qt}\frac{(qt)^n}{n!}\left[\int\limits_{\mathscr{R}^d}e^{i(u, z)}\Pi_0(dz)\right]^n.$$

Это выражение представляет собою характеристическую функцию суммы $\bar{a}t+\xi_1+\ldots+\xi_{\nu(t)}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные векторы в $\mathscr{R}^d$ с распределением $\Pi_0(\cdot)$, $\nu(t)$ — не зависящий от $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ пуассонов процесс с параметром $q$. Построенный таким образом процесс $\xi(t)$ называют *обобщенным пуассоновым процессом.*

д) Характеристическую функцию одномерного однородного процесса с независимыми приращениями можно записать по формуле Хинчина

$$\mathsf{M}e^{iu\xi(t)}=\exp\left\{t\left(i\gamma u+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right)\right\},$$

где $\gamma$ — вещественное число, $G$ — неубывающая ограниченная на $(-\infty, \infty)$ функция, выражение $\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}$ при $x=0$ определено по непрерывности и равно $-\frac{1}{2}u^2$.

Для того чтобы получить представление характеристической функции произвольного стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями, воспользуемся следующей известной теоремой А. Я. Хинчина [2].

Теорема 5. *Предположим, что распределения последовательности случайных векторов* $\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nm_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, *где* $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm_n}$ — *независимые (при данном* $n$*) случайные векторы, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\} = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

*слабо сходятся к некоторому пределу. Тогда предельное распределение безгранично делимо.*

Доказательство в одномерном случае можно найти, например, в монографиях Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1] и В. В. Петрова [1]. Переход к многомерному случаю не вызывает затруднений.

Из теоремы 5 вытекает следующая формула для характеристической функции $\varphi(t, u)$ стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ $(\xi(0) = 0)$:

$$\varphi(t, u) = \exp\Bigg\{ i(a(t), u) - \frac{1}{2}(b(t)u, u) + \\ + \int_{\mathcal{R}^d} \left[ e^{i(u, z)} - 1 - \frac{i(u, z)}{1+|z|^2} \right] \frac{1+|z|^2}{|z|^2} \Pi(t, dz) \Bigg\}, \tag{20}$$

а характеристическая функция приращения $\xi(t) - \xi(s)$, $0 \leqslant s < t$, может быть записана в виде

$$\varphi(s, t; u) = \exp\{g(t, u) - g(s, u)\}. \tag{21}$$

## § 4. Марковские процессы в широком смысле

В основе понятия марковского процесса лежит идея о процессах «без последействия». Представим себе систему (частицу), которая может находиться в разных состояниях. Возможные состояния системы образуют некоторое множество $X$, называемое фазовым пространством. Примем, что система эволюционирует во времени. Ее состояние в момент времени $t$ обозначим через $x_t$. Если $x_t \in B$, где $B \subset X$, то будем говорить, что система в момент времени $t$ находится во множестве $B$. Предположим, что эволюция системы имеет стохастический характер, т. е. состояние системы в момент времени $t$, вообще говоря, не определяется однозначно через состояния системы в моменты времени, предшествующие $s$, где $s < t$, а является случайным и описывается определенными теоретико-вероятностными законами. Обозначим через $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ вероятность события $x_t \in B (s < t)$ при условии, что $x_s = x$.

Функцию $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ называют *вероятностью перехода* рассматриваемой системы. Под системой без последействия понимают систему, для которой вероятность попадания в момент времени $t$ во множество $B$ при полностью известном движении системы до момента времени $s (s < t)$ по-прежнему равна $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ и, таким образом, зависит только от состояния системы в последний известный момент времени. Полная формализация этого определения будет дана в гл. VII, сейчас же будет приведено простое, но достаточное для ряда задач определение этого понятия.

Обозначим через $\mathsf{P}(s, x, u, y, t, B)$ условную вероятность события $x_t \in B$ при гипотезах $x_s = x$, $x_u = y$ $(s < u < t)$. В соответствии с общими свойствами условных вероятностей имеет место равенство

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \int_X \mathsf{P}(s, x, u, y, t, B)\, \mathsf{P}(s, x, u, dy). \tag{1}$$

Для системы без последействия естественно предположить, что $\mathsf{P}(s, x, u, y, t, B) = \mathsf{P}(u, y, t, B)$. В этом случае равенство (1) принимает вид

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \int_X \mathsf{P}(u, y, t, B)\, \mathsf{P}(s, x, u, dy). \tag{2}$$

Соотношение (2) называют *уравнением Колмогорова — Чепмена*. Его можно положить в основу определения процесса без последействия или, как говорят чаще, марковского процесса.

Пусть $\{X, \mathfrak{B}\}$ — некоторое измеримое пространство. Функцию $\mathsf{P}(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющую условиям:

а) $\mathsf{P}(x, B)$ при фиксированном $x$ является мерой на $\mathfrak{B}$ и $\mathsf{P}(x, X) = 1$,

б) при фиксированном $B$ $\mathsf{P}(x, B)$ является $\mathfrak{B}$-измеримой функцией от $x$,

будем называть *стохастическим ядром*.

Эта же терминология будет применяться и в несколько более общем случае, когда аргумент $x$ функции $\mathsf{P}(x, B)$ принимает значения из некоторого измеримого пространства $\{X_0, \mathfrak{B}_0\}$, отличного от $\{X, \mathfrak{B}\}$.

Пусть $I$ — некоторый конечный или бесконечный полуинтервал (отрезок). Семейство стохастических ядер $\{\mathsf{P}_{st}(x, B) = \mathsf{P}(s, x, t, B),\ s < t,\ (s, t) \in I \times I\}$, удовлетворяющих уравнению Колмогорова — Чепмена (2), будем называть *марковским семейством стохастических ядер.*

Определение. *Марковским процессом в широком смысле называется совокупность следующих объектов*:

а) *измеримого пространства* $\{X, \mathfrak{B}\}$,

б) *полуинтервала* $I$ (*отрезка*) *действительной оси,*

в) *марковского семейства стохастических ядер*

$$\{\mathsf{P}_{st}(x, B),\ s < t,\ (s, t) \in I \times I\}.$$

Семейство ядер $\mathsf{P}_{st}(x, B) = \mathsf{P}(s, x, t, B)$ называют *вероятностью перехода* марковского процесса, пространство $\{X, \mathfrak{B}\}$ — *фазовым пространством* системы, точки множества $I$ интерпретируются как моменты времени, а величина $\mathsf{P}_{st}(x, B) = \mathsf{P}(s, x, t, B)$ — как условная вероятность того, что система в момент времени $t$ окажется во множестве $B$, если в момент времени $s$ она находилась в точке $x$ фазового пространства $(s < t)$.

В дальнейшем будем считать, что ядро $\mathsf{P}_{st}(x, B)$ определено и при $s = t$. А именно естественно положить, что

$$\mathsf{P}_{tt}(x, B) = \chi(B, x),$$

где $\chi(B, x)$ обозначает индикатор множества $B$: $\chi(B, x) = 1$, если $x \in B$ и $\chi(B, x) = 0$ при $x \overline{\in} B$.

Очевидно, что при таком определении ядра $\mathsf{P}_{tt}(x, B)$ уравнение (2), в котором положено $u = s$ или $u = t$, выполняется.

**Операторы, порождаемые вероятностями перехода.** С вероятностями перехода можно связать два семейства операторов.

Обозначим через $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathfrak{B})$ множество всех конечных мер на $\mathfrak{B}$ и положим $m_{ts} = \overset{*}{T}_{ts} m$, где

$$m_{ts}(B) = \int \mathsf{P}(s, y, t, B)\, m(dy), \qquad s \leqslant t, \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{3}$$

Если мера $m(\cdot)$ — распределение системы в момент времени $s$, $m(B) = \mathsf{P}\{x_s \in B\}$, то формула (3) является «формулой полной вероятности», а $m_{ts}(\cdot)$ — распределение системы в момент времени $t$, $m_{ts}(B) = \mathsf{P}\{x_t \in B\}$. Таким образом, оператор $T^*_{ts}$ выражает распределение рассматриваемой системы в ее фазовом пространстве в момент времени $t$ через распределение в момент времени $s$, $s < t$.

Очевидно, что $T^*_{ts}$ является оператором, отображающим $\mathscr{M}$ в $\mathscr{M}$. Из формулы Колмогорова — Чепмена вытекает простой закон композиции операторов $T^*_{ts}$.

Пусть $s < u < t$. Воспользовавшись уравнением (2) и возможностью изменения порядка интегрирования в кратных интегралах, получим равенства

$$m_{ts}(B)=\int\limits_X m(dx)\int\limits_X \mathsf{P}(u,\ y,\ t,\ B)\,\mathsf{P}(s,\ x,\ u,\ dy)=$$

$$=\int\limits_X\left(\int\limits_X \mathsf{P}(s,\ x,\ u,\ dy)\,m(dx)\right)\mathsf{P}(u,\ y,\ t,\ B)=\int\limits_X m_{us}(dy)\,\mathsf{P}(u,\ y,\ t,\ B).$$

Таким образом,

$$T^*_{ts}=T^*_{tu}T^*_{us}\qquad (s<u<t). \tag{4}$$

Следовательно, семейство операторов $T^*_{ts}$ как функция от интервала $[s,\ t]$, является определенным образом направленной мультипликативной функцией интервала. При этом под направленностью мультипликативной функции интервала следует понимать один из двух возможных порядков расположения сомножителей, отвечающих данному разбиению интервала на части.

Второе семейство операторов, которое сейчас будет введено, действует в пространстве всех ограниченных $\mathfrak{B}$-измеримых функций. Обозначим его через $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$, а совокупность всех неотрицательных функций этого пространства — через $\mathscr{B}(\mathfrak{B})_+$. Положим $f_{st}=T_{st}f$, если

$$f_{st}(x)=\int f(y)\,\mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ dy).$$

Функция $f_{st}(x)$ имеет, очевидно, следующий теоретико-вероятностный смысл. Она равна математическому ожиданию случайной величины $f(x_t)$ при гипотезе, что в момент времени $s$ $(s<t)$ система была в состоянии $x$ $(x_s=x)$. Из $\mathfrak{B}$-измеримости вероятности перехода по $x$ вытекает $\mathfrak{B}$-измеримость функции $f_{st}(x)$. Далее, введем в $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$ норму $\|f\|=\sup|f(x)|$. Очевидно, $\|f_{st}\|\leqslant\|f\|$.

Таким образом, операторы $T_{st}$ преобразуют $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$ и $\mathscr{B}(\mathfrak{B})_+$ в себя. Воспользовавшись формулой Колмогорова — Чепмена и перестановкой порядка интегрирования, получим при $s<$ $<u<t$

$$f_{st}(x)=\int f(y)\,\mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ y)=\int f(y)\int \mathsf{P}(s,\ x,\ u,\ dz)\,\mathsf{P}(u,\ z,\ t,\ dy)=$$

$$=\int f_{ut}(z)\,\mathsf{P}(s,\ x,\ u,\ dz),$$

или

$$T_{st}=T_{su}T_{ut}\qquad (s<u<t). \tag{5}$$

Таким образом, операторы $T_{st}$ также образуют операторную мультипликативную (некоммутативную) функцию интервала, но уже направленную иным образом, чем $T^*_{st}$. Очевидно, $T_{st}1 = 1$ и $T_{ss}f = f$ или $T_{ss} = I$, где $I$ — единичный оператор.

Определение. *Марковский процесс называется однородным, если* $I = [0, \infty)$ *и ядра* $\mathsf{P}_{st}(x, B)$, *как функции аргументов* $(s, t)$, *зависят только от разности* $t - s$:

$$\mathsf{P}_{st}(x, B) = \mathsf{P}_{t-s}(x, B) \qquad (t > s).$$

Для однородных марковских процессов уравнение Колмогорова — Чепмена принимает вид

$$\mathsf{P}_{u+v}(x, B) = \int \mathsf{P}_u(x, dy)\,\mathsf{P}_v(y, B), \qquad u > 0, \quad v > 0. \tag{6}$$

Семейство ядер $\{\mathsf{P}_t(x, B),\ t \geqslant 0\}$ также называют вероятностью перехода однородного марковского процесса.

В однородном случае операторы $T^*_{t+s,\,s}$, $T_{s,\,s+t}$ не зависят от $s$ и вместо двупараметрических семейств операторов $\{T^*_{ts},\ t > s > 0\}$, $\{T_{st},\ 0 < s < t\}$ целесообразно рассматривать однопараметрические семейства $\{T^*_t,\ t \geqslant 0\}$, $\{T_t,\ t > 0\}$, определяемые с помощью формул

$$T^*_t m(B) = \int \mathsf{P}_t(x, B)\, m(dx),$$

$$T_t f(x) = \int f(y)\,\mathsf{P}_t(x, dy).$$

Формулы композиции (4) и (5) принимают следующий вид:

$$T^*_{u+v} = T^*_u T^*_v, \qquad T_{u+v} = T_u T_v.$$

Они означают, что семейства операторов $\{T^*_t,\ t > 0\}$, $\{T_t,\ t > 0\}$ образуют в соответствующих пространствах полугруппу операторов.

**Уравнения Колмогорова.** Среди наиболее важных задач теории марковских процессов в широком смысле можно назвать следующие:

а) выделение наиболее важных классов (моделей) марковских процессов, обладающих специфическими свойствами, и их описание в терминах свойств вероятностей перехода;

б) конструктивное описание вероятностей перехода, соответствующих данному классу марковских процессов;

в) исследование асимптотических (предельных) свойств вероятностей перехода тех или иных классов марковских процессов.

Разумеется, приведенные формулировки являются весьма общими и неопределенными, а намеченная программа исследований — очень широкой. В настоящем параграфе приводится лишь ряд предварительных результатов.

Первым шагом на пути классификации марковских процессов является их классификация по фазовому пространству.

С этой точки зрения простейшими марковскими процессами являются процессы с конечным или счетным числом состояний. В последнем случае, налагая на вероятности перехода некоторые аналитические ограничения, можно линеаризировать уравнения Колмогорова — Чепмена, получив из них системы обыкновенных дифференциальных уравнений (прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова), в ряде случаев и в определенном смысле полностью определяющих вероятности перехода.

В более общих фазовых пространствах можно определять классы марковских процессов в широком смысле, наделяя их вероятности перехода свойствами, отражающими интуитивные представления о характере движения системы в фазовом пространстве. В соответствии с этой точкой зрения вводятся, например, следующие классы процессов:

а) Скачкообразные процессы. Они соответствуют представлениям о системе, которая, попадая в некоторую точку фазового пространства, проводит в ней случайный положительный отрезок времени, после чего скачком случайно попадает в другую точку пространства, в котором она снова проводит случайное время, и т. д.

б) Процессы с дискретным вмешательством случая. Эти процессы представляют собою динамическую систему, траектории которой в случайные моменты времени терпят разрывы первого рода со случайными скачками.

в) Диффузионные процессы. Так называют процессы в конечномерных линейных пространствах, которые на малых промежутках времени ведут себя аналогично процессу броуновского движения.

г) Марковские процессы в конечномерном пространстве, аппроксимируемые на малых промежутках времени произвольным процессом с независимыми приращениями.

При определении различных классов марковских процессов в широком смысле обычно исходят из уже упоминавшейся идеи линеаризации уравнения Колмогорова — Чепмена. Она состоит в том, что на вероятности перехода накладываются условия, позволяющие перейти от нелинейных уравнений (2) для вероятностей перехода к линейным уравнениям. Последние оказываются интегро-дифференциальными уравнениями, либо уравнениями в частных производных параболического типа, либо уравнениями, содержащими как частные производные первого и второго порядка, так и интегральные члены. Приведем общие соображения о способе получения этих уравнений.

Пусть $I=[0, t^*)$. Зафиксируем некоторое $t \in I$ и рассмотрим класс $\mathscr{D}$ функций из $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$, для которых при каждом

$s \in (0, t)$, $x \in X$ существует предел

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{s-h,\, s} f(x) - f(x)}{h} = A_s f(x)$$

и

$$\lim_{h \downarrow 0} T_{t-h,\, t} f(x) = f(x).$$

В этом соотношении $A_s$ есть оператор, зависящий от $s \in \in (0, t)$ как от параметра, определенный на $\mathscr{D}$. Очевидно, что $\mathscr{D}$ является линейным пространством, а $A_s$ — линейным оператором.

Положим

$$f(s, x) = T_{st} \hat{f}(x), \qquad s \in [0, t].$$

Допустим, что $T_{st} f(x) \in \mathscr{D}$. Тогда для левой производной по $s$ функции $f(s, x)$ имеем следующее соотношение:

$$\frac{\partial f(s, x)}{\partial s} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(s-h, x) - f(s, x)}{-h} =$$

$$= -\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{s-h\, s} f(s, x) - f(s, x)}{h} = -A_s f(s, x).$$

Во многих случаях отсюда вытекает существование производной $\frac{\partial f(s, x)}{\partial s}$, которая, таким образом, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(s, x)}{\partial s} = -A_s f(s, x), \qquad s \in (0, t). \tag{7}$$

К этому уравнению, в соответствии с определением множества $\mathscr{D}$, следует еще присоединить граничное условие

$$\lim_{s \uparrow t} f(s, x) = f(x). \tag{8}$$

Если $\chi(B, x) \in \mathscr{D}$, то, положив $f(x) = \chi(B, x)$, получим, что $f(s, x) = \mathsf{P}(s, x, t, B)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \mathsf{P}(s, x, t, B)}{\partial s} = -A_s [\mathsf{P}(s, x, t, B)], \qquad s \in [0, t],$$

$$\lim_{s \uparrow t} \mathsf{P}(s, x, t, B) = \chi(B, x).$$

Даже в том случае, когда $\chi(B, x) \overline{\in} \mathscr{D}$, класс функций $\mathscr{D}$ все же может оказаться настолько широким, чтобы значения $T_{st} f(x)$ ($f \in \mathscr{D}$) однозначно определяли вероятности перехода $\mathsf{P}(s, x, t, B)$. Это будет тогда, когда класс $\mathscr{D}$ всюду плотен в $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$ относительно ограниченной точечной сходимости функций. При этом, если для уравнений (7), (8) имеется теорема существования и единственности решения для любой функции $f \in \mathscr{D}$, то они определяют вероятности перехода однозначно (на интервале $(0, t)$) и могут быть использованы для фактического определения функции $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ или для изучения ее свойств.

Уравнение (7) называют *первым* (*обратным*) *уравнением Колмогорова.*

Аналогичные рассуждения применимы и к семейству операторов $\{T^*_{ts},\ t \geqslant s \geqslant 0\}$.

Обозначим через $\mathscr{W} = \mathscr{W}(\mathfrak{B})$ пространство всех конечных зарядов на $\mathfrak{B}$, т. е. множество всех конечных счетно-аддитивных функций множеств на $\mathfrak{B}$, а через $\mathscr{D}^*$ — подмножество $\mathscr{W}$, состоящее из тех зарядов $q(B)$, для которых существуют пределы

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{t+h\,t}q(B) - q(B)}{h} = A_t^* q(B),$$

$$\lim_{h \downarrow 0} T_{s+h\,s} q(B) = q(B)$$

для любых $(t,\ B) \in [s,\ t^*) \times \mathfrak{B}_0$, где $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, $s$ фиксировано.

Положим $q(t,\ B) = T^*_{ts} q(B)$. Если заряд $q(B)$ таков, что $q(t, B) \in \mathscr{D}^*$, то существует первая производная $\frac{\partial q(t,\ B)}{\partial t}$, причем

$$\frac{\partial q(t,\ B)}{\partial t} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{q(t+h,\ B) - q(t,\ B)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{t+h\,t} q(t,\ B) - q(t,\ B)}{h},$$

так что $q(t,\ B)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial q(t,\ B)}{\partial t} = A_t^* q(t,\ B), \tag{9}$$

$$\lim_{t \downarrow s} q(t,\ B) = q(B). \tag{10}$$

Если $\chi(B,\ x) \in \mathscr{D}^*$, то уравнения (9), (10) при $q(B) = \chi(B,\ x)$ принимают вид

$$\frac{\partial \mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ B)}{\partial t} = A_t^* [\mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ B)], \qquad \lim_{t \downarrow s} \mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ B) = \chi(B,\ x).$$

Уравнение (9) носит название *второго* (*прямого*) *уравнения Колмогорова.* О нем можно высказать соображения, аналогичные тем, которые были приведены в связи с обратными уравнениями Колмогорова.

В дальнейшем вид операторов $A_s$ и $A_t^*$ будет найден для частных классов марковских процессов.

**Процессы с конечным или счетным числом состояний.** Пусть $X$ — пространство, состоящее из конечного или счетного числа точек, $\mathfrak{B}$ — класс всех подмножеств $X$. Точки пространства $X$ в этом случае будем обозначать буквами $i$, $j$, $k$, ... Рассмотрим марковский процесс в широком смысле со значениями в $X$. Положим

$$p_{ij}(s, t) = \mathsf{P}(s, i, t, \{j\}).$$

Вероятности $p_{ij}(s, t)$, очевидно, определяют вероятность перехода для любого множества $B \subset X$,

$$\mathsf{P}(s, i, t, B) = \sum_{j \in B} p_{ij}(s, t).$$

Очевидны следующие соотношения:

$$p_{ij}(s, t) \geqslant 0, \quad \sum_{j \in X} p_{ij}(s, t) = 1, \quad p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}.$$

Пусть $f(j)$ — произвольная функция на $X$. Оператор $T_{st}$ в рассматриваемом случае действует по формуле

$$f_{st}(i) = T_{st}f(i) = \sum_{j \in X} p_{ij}(s, t) f(j).$$

Если $m$ — произвольная мера на $\mathfrak{B}$ и $m(j) = m(\{j\})$, то оператор $T^*_{ts}$ определяется соотношениями

$$m_{ts}(j) = T^*_{ts}m(\{j\}) = \sum_{i \in X} m(i) p_{ij}(s, t).$$

Уравнение Колмогорова — Чепмена записывается в данном случае следующим образом:

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in X} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t) \qquad (s \leqslant u \leqslant t).$$

Предыдущие соотношения можно записать короче. Предположим, что элементы пространства $X$ каким-либо способом расположены в определенной последовательности. Пусть $P(s, t)$ обозначает матрицу с элементами $p_{ij}(s, t)$, $f$ — вектор-столбец с элементами $f(i)$ и, аналогично, $m$ — вектор с компонентами $m(i)$, $P^*(s, t)$ — матрица, транспонированная к $P(s, t)$, $m^*$ — вектор-строка (однострочная матрица, транспонированная к матрице $m$, состоящей из одного столбца). Тогда

$$T_{st}f = P(s, t) f,$$
$$T^*_{st}m = m^* P^*(s, t),$$
$$P(s, t) = P(s, u) P(u, t) \qquad (s \leqslant u \leqslant t).$$

Множество $\mathscr{D}$ состоит из всех последовательностей $\{f(j), j \in X\}$, для которых предел

$$(A_s f)(i) = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{j \in X} \frac{p_{ij}(s-h, s) - \delta_{ij}}{h} f(j)$$

существует при любом $i \in X$, $s \in (0, t)$ и

$$\lim_{h \downarrow 0} \sum_{j \in X} p_{ij}(t-h, t) f(j) = f(i).$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Например, если для каждой пары $(i, j) \in X \times X$ и $s \in (0, t]$ существует конечный предел

$$a_{ij}(s) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(s-h, s) - \delta_{ij}}{h}, \tag{11}$$

то $\mathscr{D}$ содержит все те последовательности $f(j)$, для которых $\sum_{j \in X} |f(j)| < \infty$ и при этом

$$(A_s f)(i) = \sum_{j \in X} a_{ij}(s) f(j). \tag{12}$$

Последнее замечание во многих случаях оказывается недостаточным и нуждается в усилении.

В связи с этим отметим, что если пределы (11) существуют, то

$$-a_i(s) = a_{ii}(s) \leqslant 0, \qquad a_{ij}(s) \geqslant 0 \qquad (i \neq j).$$

Из неравенства

$$\frac{1 - p_{ii}(s-h, s)}{h} \geqslant \sum_{j \in J} \frac{p_{ij}(s-h, s)}{h},$$

где $J$ — конечное множество индексов и $i \bar{\in} J$, вытекает, что

$$\sum_j{}^{(i)} a_{ij}(s) \leqslant a_i(s), \tag{13}$$

где $\sum_j^{(i)}$ означает сумму по всем $j \in X \setminus \{i\}$. В достаточно регулярных случаях, например, если ряд

$$\sum_j{}^{(i)} \frac{p_{ij}(s-h, s)}{h}$$

сходится равномерно по $h > 0$ при любом $s \geqslant 0$, неравенство (13) можно заменить равенством

$$\sum_j{}^{(i)} a_{ij}(s) = a_i(s). \tag{14}$$

Лемма 1. *Если при любых $(i, j) \in X \times X$ и $s > 0$ пределы (11) существуют и выполняется равенство (14), то $\mathscr{D}$ содержит все ограниченные последовательности $\{f(j),\ j \in X\}$.*

*Доказательство.* Заметим, что в условиях леммы ряд (12) сходится абсолютно. Не уменьшая общности, можно считать, что $\sup|f(j)|\leqslant 1$. Рассмотрим разность

$$\Delta=\sum_{j\in X}\frac{p_{ij}(s-h,\,s)-\delta_{ij}}{h}f(j)-\sum_{j\in X}a_{ij}(s)\,f(j).$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем такое конечное множество $J\subset X$, что $i\in J$ и

$$\sum_{j\in X\setminus J}a_{ij}(s)=-\sum_{j\in J}a_{ij}(s)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Имеем теперь неравенство

$$|\Delta|\leqslant\left|\sum_{j\in J}\left[\frac{p_{ij}(s-h,\,s)-\delta_{ij}}{h}-a_{ij}\right]\right|+\sum_{j\in X\setminus J}\frac{p_{ij}(s-h,\,s)}{h}+\frac{\varepsilon}{4}.$$

Найдем такое $h_0>0$, чтобы первое слагаемое в правой части последнего неравенства было $<\frac{\varepsilon}{4}$ для всех $h\in(0,\,h_0)$. При этом окажется, что

$$\sum_{j\in X\setminus J}\frac{p_{ij}(s-h,\,s)}{h}=$$
$$=\sum_{j\in J}\left(\frac{\delta_{ij}-p_{ij}(s-h,\,s)}{h}+a_{ij}(s)\right)-\sum_{j\in J}a_{ij}(s)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $h\in(0,\,h_0)$ $|\Delta|<\varepsilon$. ■

Чтобы получить обратные уравнения Колмогорова для рассматриваемых процессов, усилим требования существования пределов (11) несколько более сильным условием существования пределов

$$\lim_{s_1\uparrow s,\,s_2\downarrow s}\frac{p_{ij}(s_1,\,s_2)-\delta_{ij}}{s_2-s_1}=a_{ij}(s). \tag{15}$$

Заметим, что так же, как лемма 1, доказывается следующее утверждение: если в точке $s$ для всех $j$ пределы (15) существуют и выполнено равенство (14), то ряд

$$\sum_{j\in X}\frac{p_{ij}(s_1,\,s_2)-\delta_{ij}}{s_2-s_1} \tag{16}$$

сходится равномерно по $s_1$ и $s_2$, $s_1<s<s_2$, $s_2-s_1<h_0$.

Теорема 1. *Если для любых* $(i,\,j,\,s)\in X\times X\times(0,\,t)$ *пределы* (15) *существуют и удовлетворяют равенствам* (14), *то вероятности* $p_{ij}(s,\,t)$ *дифференцируемы по* $s$, $0<s<t$, *и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений* (первая

система уравнений Колмогорова)

$$-\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = \sum_{x \in X} a_{ik}(s)\, p_{kj}(s, t). \tag{17}$$

*Доказательство.* Так как

$$-\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = \lim_{s_1 \uparrow s,\ s_2 \downarrow s} \frac{p_{ij}(s_1, t) - p_{ij}(s_2, t)}{s_2 - s_1} =$$

$$= \lim_{s_1 \uparrow s,\ s_2 \downarrow s} \sum_{j \in X} \frac{p_{ik}(s_1, s_2) - \delta_{ik}}{s_2 - s_1} p_{kj}(s_2, t),$$

то

$$-\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} - \sum_{j \in X} a_{ik} p_{kj}(s, t) =$$

$$= \lim_{s_1 \uparrow s,\ s_2 \downarrow s} \sum_{j \in X} \left[\frac{p_{ik}(s_1, s_2) - \delta_{ik}}{s_2 - s_1} - a_{ik}(s)\right] p_{kj}(s_2, t) +$$

$$+ \lim_{s_2 \downarrow s} \sum_{j \in X} a_{ik}(s)\,[p_{kj}(s_2, t) - p_{kj}(s_1, t)] = 0$$

в силу ранее упомянутой равномерной сходимости ряда (16). ■

Переходя к выводу второй системы уравнений Колмогорова, ограничимся случаем конечного числа состояний ($X$ состоит из конечного числа точек). Будем предполагать, что пределы (15) существуют. Тогда соотношения (14) автоматически выполняются.

Пусть

$$m_j(t) = \sum_{k \in X} m_k p_{kj}(s, t), \qquad t > s.$$

Тогда ($t_1 < t < t_2$)

$$\frac{m_j(t_2) - m_j(t_1)}{t_2 - t_1} = \sum_{k \in X} m_k(t_1) \frac{p_{kj}(t_1, t_2) - \delta_{kj}}{t_2 - t_1} \to \sum_{k \in X} m_k(t)\, a_{kj}(t).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial m_j(t)}{\partial t} = \sum_{k \in X} m_k(t)\, a_{kj}(t), \qquad t > s. \tag{18}$$

В частности,

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = \sum_{k \in X} p_{ik}(s, t)\, a_{kj}(t), \qquad t > s. \tag{19}$$

В случае конечного числа состояний уравнения (17) или (19) представляют собою систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, имеющих при весьма широких предположениях о функции $a_{kj}(s)$ единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $p_{kj}(s, s) = \delta_{kj}$. Таким образом, в этом случае каждая из систем уравнений Колмогорова однозначно определяет вероятности перехода.

**Скачкообразные процессы в широком смысле.** Можно ожидать, что в достаточно регулярных случаях марковский процесс со счетным числом состояний является моделью процесса следующего рода: в течение некоторого случайного промежутка времени движущаяся точка находится в начальном состоянии, после чего с определенными вероятностями переходит в новое состояние, где она проводит случайный промежуток времени, после которого переходит в другое состояние, и т. д. Подобного рода процессы можно рассматривать и в произвольном фазовом пространстве. Их называют скачкообразными марковскими процессами.

Рассмотрим марковский процесс в широком смысле в фазовом пространстве $\{X, \mathfrak{B}\}$ с вероятностью перехода $\mathsf{P}(s, x, t, B)$, $s < t$, $(s, t) \in I \times I$. Будем считать, что $\sigma$-алгебра $\mathfrak{B}$ содержит одноточечные подмножества $X$.

Определение. *Марковский процесс в широком смысле называется скачкообразным, если для произвольных* $(s, x, B) \in I \times X \times \mathfrak{B}$ *существует предел*

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{\mathsf{P}(s, x, t, B) - \chi(B, x)}{t - s} = \bar{a}(s, x, B) \tag{20}$$

*и при фиксированных* $(s, x)$ $\bar{a}(s, x, B)$ *являются конечным зарядом на* $\mathfrak{B}$.

Скачкообразный марковский процесс в широком смысле будем называть *регулярным*, если сходимость в формуле (20) равномерна по $(s, x, B) \in [0, t] \times X \times \mathfrak{B}$ и функция $\bar{a}(s, x, B)$ при фиксированных $(x, B)$ непрерывна по $s \in [0, t]$ равномерно относительно $(x, B)$, где $t$ — любое число из $I$.

Отметим, что функция $\bar{a}(s, x, B)$ обладает следующими свойствами:

$$\bar{a}(s, x, X) = 0,$$

$$\bar{a}(s, x, B) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathsf{P}(s, x, t, B)}{t - s} \geqslant 0, \quad \text{если} \quad x \,\bar{\in}\, B,$$

$$\bar{a}(s, x, \{x\}) = -\bar{a}(s, x, X \setminus \{x\}) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathsf{P}(s, x, t, \{x\}) - 1}{t - s} \leqslant 0,$$

где $\{x\}$ — множество, состоящее из одной точки $x$. Эти соотношения можно объединить в одной формуле, положив

$$\bar{a}(s, x, B) = -a(s, x)\chi(B, x) + a(s, x, B),$$

где

$$a(s, x) = -\bar{a}(s, x, \{x\}), \quad a(s, x, B) = \bar{a}(s, x, B \setminus \{x\}),$$

причем $a(s, x, B)$ является конечной мерой на $\mathfrak{B}$ и $a(s, x, \{x\}) = 0$.

Для регулярного скачкообразного процесса то обстоятельство, что $\bar{a}(s, x, B)$ является конечным зарядом на $\mathfrak{B}$, вытекает из требования равномерной сходимости в соотношении (20).

Действительно, из определения функции $a(s, x, B)$ непосредственно следует, что она является неотрицательной аддитивной функцией множеств на $\mathfrak{B}$. Пусть теперь $B_n \subset B_{n+1}$, $B_n \in \mathfrak{B}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и $x \overline{\in} B$. Тогда

$$a(s, x, B) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathsf{P}(s, x, t, B)}{t-s} = \lim_{t \downarrow s} \lim_{n \to \infty} \frac{\mathsf{P}(s, x, t, B)}{t-s} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathsf{P}(s, x, t, B_n)}{t-s} = \lim_{n \to \infty} a(s, x, B_n),$$

причем изменение порядка предельного перехода возможна в силу предполагаемой равномерной сходимости относительно $B \in \mathfrak{B}$ в соотношении (20). Таким образом, счетная аддитивность функции $a(s, x, B)$ доказана.

Отметим еще следующее свойство регулярного скачкообразного процесса: для каждого $t \in I$ найдется такая постоянная $K$, что

$$|\bar{a}(s, x, B)| \leqslant K \quad \text{для всех} \quad (s, x, B) \in [0, t] \times X \times \mathfrak{B}.$$

В оставшейся части настоящего пункта рассматриваются только регулярные скачкообразные процессы в широком смысле. Положим

$$\Pi(t, x, B) = \begin{cases} \dfrac{a(t, x, B)}{a(t, x)} & \text{при} \quad a(t, x) > 0, \\ \chi(B, x) & \text{при} \quad a(t, x) = 0. \end{cases}$$

При фиксированных $(t, x)$ $\Pi(t, x, B)$ является вероятностной мерой на $\mathfrak{B}$. Легко указать для нее теоретико-вероятностную интерпретацию. Из (20) следует

$$\mathsf{P}(t, x, t+\Delta t, \{x\}) = 1 - (a(t, x) + \varepsilon)\Delta t,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Таким образом, с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости $a(t, x)\Delta t$ есть вероятность того, что движущаяся точка, находящаяся в момент времени $t$ в состоянии $x$, в момент времени $t + \Delta t$ уже не будет в нем. Далее, при $a(t, x) \neq 0$

$$\Pi(t, x, B) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{P}(t, x, t+\Delta t, B \setminus \{x\})}{\mathsf{P}(t, x, t+\Delta t, X \setminus \{x\})},$$

так что $\Pi(t, x, B)$ можно рассматривать как условную вероятность системе, находящейся в момент времени $t$ в состоянии $x$

и в этот же момент времени покидающей это состояние, оказаться в результате скачка во множестве $B$. Эта интерпретация функции $\Pi(t, x, B)$ будет доказана в дальнейшем (см. § 1 гл. VII).

Соотношение (20) можно переписать в виде

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = (1 - a(s, x))(t - s)\chi(B, x) + \\ + (a(s, x, B) + r(s, x, t, B))(t - s), \quad (21)$$

где $r(s, x, t, B)$ — некоторая функция, равномерно по $(s, x, B)$, $s \in [0, t]$, стремящаяся к 0 при $t \downarrow s$.

Из последнего соотношения, в частности, следует, что для любого $u \in I$

$$|\mathsf{P}(s, x, t, B) - \chi(B, x)| \leqslant K_1(t - s), \quad (22)$$

где $K_1$ — некоторая постоянная, не зависящая от $(s, x, t, B) \in \in [0, u] \times X \times [0, u] \times \mathfrak{B}$.

Перейдем к выводу уравнений Колмогорова для скачкообразных процессов. Начнем с вывода второго уравнения.

Пусть $s$ фиксировано, $t > s$, $m$ — произвольная вероятностная мера на $\mathfrak{B}$ и $m_t(B) = T^*_{ts}m(B)$, где $T^*_{ts}$ — оператор, введенный ранее. Если $t_2 > t_1 > s$, то

$$m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B) = \int_X m_{t_1}(dx)\,[\mathsf{P}(t_1, x, t_2, B) - \chi(B, x)],$$

откуда, в силу неравенства (22),

$$\sup_B |m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B)| \leqslant K_1(t_2 - t_1).$$

Далее, из (21) следует, что

$$m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B) = (t_2 - t_1)\int_X [\bar{a}(t_1, x, B) + r(t_1, x, t_2, B)]\,m_{t_1}(dx). \quad (23)$$

Пусть теперь $t_2 \downarrow t$, $t_1 \uparrow t$. Тогда

$$\sup_{(x, B)}\left|\frac{m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B)}{t_2 - t_1} - \int_X \bar{a}(t, x, B)\,m_t(dx)\right| \leqslant \sup_{(x, B)}|r(t_1, x, t_2, B)| + \\ + \sup_{(x, B)}\left|\int_X [\bar{a}(t_1, x, B) - \bar{a}(t, x, B)]\,m_{t_1}(dx)\right| + \\ + \sup_{(x, B)}\left|\int_X \bar{a}(t, x, B)\,[m_{t_1}(dx) - m_t(dx)]\right| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + K\sup_B |m_{t_1}(B) - m_t(B)|,$$

где

$$\varepsilon_1 = \sup_{(x, B)} |r(t_1, x, t_2, B)| \to 0 \quad \text{при} \quad t_1 \uparrow t,\ t_2 \downarrow t,$$

$$\varepsilon_2 = \sup_{(x, B)} |\bar{a}(t_1, x, B) - \bar{a}(t, x, B)| \to 0 \quad \text{при} \quad t_1 \uparrow t.$$

Из (23) вытекает также, что $\sup_B |m_{t_1}(B) - m_t(B)| \to 0$ при $t_1 \uparrow t$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Функции $T^*_{ts}m(B)$ аргумента $t$ в случае регулярного скачкообразного процесса при $t > s$ дифференцируемы, и*

$$\frac{dT^*_{ts}m}{dt} = A^*_s T^*_{ts} m, \tag{24}$$

*где*

$$A^*_s m(B) = \int_X \bar{a}(t, y, B)\, m(dy) = -\int_B a(t, y)\, m(dy) + \int_X a(t, y, B)\, m(dy).$$

*Формулу* (24) *можно записать еще следующим образом:*

$$\frac{dm_t(B)}{dt} = -\int_B a(t, y)\, m_t(dy) + \int_X a(t, y, B)\, m_t(dy). \tag{25}$$

Положив $m(B) = \chi(B, x)$, получим $m_t(B) = \mathsf{P}(s, x, t, B)$, и из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие. *Вероятности перехода $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ регулярного скачкообразного процесса дифференцируемы по $t$ при $t > s$, и*

$$\frac{\partial \mathsf{P}(s, x, t, B)}{\partial t} =$$

$$= -\int_B a(t, y)\, \mathsf{P}(s, x, t, dy) + \int_X a(t, y, B)\, \mathsf{P}(s, x, t, dy). \tag{26}$$

Из соотношения (20) вытекает следующее начальное условие для дифференциальных уравнений (25) и (26):

$$\lim_{t \downarrow s} m_t(B) = m(B), \quad \lim_{t \downarrow s} \mathsf{P}(s, x, t, B) = \chi(B, x). \tag{27}$$

Если уравнение (26) при соответствующем начальном условии имеет единственное решение, то, решая это уравнение, найдем вероятности перехода рассматриваемого процесса.

Перейдем к выводу первого уравнения Колмогорова. Пусть $t$ фиксировано, $f(x) \in \mathscr{B}(\mathfrak{B})$, $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ и

$$f_s(x) = T_{st} f(x) = \int_X f(y)\, \mathsf{P}(s, x, t, dy), \qquad s < t.$$

Положим $s_1 < s < s_2 < t$. Тогда

$$f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x) = \int [f_{s_2}(x) - f_{s_2}(y)]\, \mathsf{P}(s_1, x, s_2, dy) =$$
$$= (s_2 - s_1) \int [f_{s_2}(x) - f_{s_2}(y)]\, (\bar{a}(s_1, x, dy) + r(s_1, x, s_2, dy)).$$

Из этого соотношения следует, что

$$\sup_x |f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)| \leqslant 2\|f\|(s_2 - s_1)\,|\,[K + 2 \sup_{(x,\, B)} |r(s_1, x, s_2, B)|\,].$$

Далее, учитывая, что $\bar{a}(s, x, X) = 0$, получим неравенство

$$\left\| \frac{f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)}{s_2 - s_1} + \int f_s(y)\, \bar{a}(s, x, dy) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int [f_s(y) - f_{s_2}(y)]\, \bar{a}(s, x, dy) \right\| +$$
$$+ \left\| \int f_{s_2}(y)\, [\bar{a}(s, x, dy) - \bar{a}(s_1, x, dy)] \right\| +$$
$$+ \left\| \int [f_{s_2}(x) - f_{s_2}(y)]\, r(s_1, x, s_2, dy) \right\|. \qquad (28)$$

Правая часть неравенства в силу (28) не превосходит

$$2\|f\|(s_2 - s)\,[K + 2 \sup_{(x,\, B)} |r(s_1, x, s_2, B)|\,] +$$
$$+ \|f\|\, 2 \sup_{(x,\, B)} |\bar{a}(s, x, B) - \bar{a}(s_1, x, B)| + 2\|f\| \cdot 2 \sup_{(x,\, B)} |r(s_1, x, s_2, B)|.$$

Из предположения регулярности скачкообразного процесса следует, что полученное выражение стремится к 0 при $s_1 \uparrow s$; $s_2 \downarrow s$. Тем самым доказана

Теорема 3. *Для регулярного скачкообразного в широком смысле процесса функция $f_s(x) = T_{st}f(x)$, $s < t$, дифференцируема по $s$ (равномерно по $x$), удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial f_s(x)}{\partial s} = -\int f_s(y)\, \bar{a}(s, x, dy) =$$
$$= a(s, x)\left[f_s(x) - \int f_s(y)\, \Pi(s, x, dy)\right], \qquad s < t, \qquad (29)$$

*и граничному условию*

$$\lim_{s \uparrow t} f_s(x) = f(x). \qquad (30)$$

Уравнение (29) является первым уравнением Колмогорова для регулярных скачкообразных процессов, а оператор $A_s$, введенный ранее, в данном случае имеет вид

$$A_s f(x) = a(s, x)\left[-f(x) + \int f(y)\, \Pi(s, x, dy)\right].$$

Следствие. *Вероятности перехода* $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ *регулярного скачкообразного процесса дифференцируемы по* $s$, $s < t$, *удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial \mathsf{P}(s, x, t, B)}{\partial s} =$$
$$= a(s, x)\left[\mathsf{P}(s, x, t, B) - \int \mathsf{P}(s, y, t, B)\, \Pi(s, x, dy)\right] \quad (31)$$

*и граничному условию*

$$\lim_{s \uparrow t} \mathsf{P}(s, x, t, B) = \chi(B, x).$$

Покажем теперь, что при определенных условиях функции $a(t, x)$ и $a(t, x, B)$ однозначно определяют регулярный скачкообразный марковский процесс в широком смысле. Речь идет в первую очередь о решении уравнений (26) или (29) при соответствующих граничных условиях.

Пусть $I = [0, t^*)$. В соответствии с требованиями регулярности скачкообразного процесса наложим на функции $a(t, x)$ и $a(t, x, B)$ следующие условия:

а) при фиксированных $(t, x) \in I \times X$ функция $a(t, x, B)$ является мерой на $\mathfrak{B}$, $a(t, x, \{x\}) = 0$ и $a(t, x) = a(t, x, X)$;

б) при фиксированных $(x, B)$ функция $a(t, x, B)$, $t \in I$, непрерывна по $t$ равномерно по $(x, B)$, а при фиксированных $(t, B)$ она $\mathfrak{B}$-измерима, как функция от $x$.

Введем пространство $\mathscr{W} = \mathscr{W}(\mathfrak{B})$ всех конечных вполне аддитивных функций (конечных зарядов) $w(B)$, заданных на измеримом пространстве $\{X, \mathfrak{B}\}$. В $\mathscr{W}$ определим расстояние $\rho(w_1, w_2)$ с помощью соотношения

$$\rho(w_1, w_2) = \| w_1(B) - w_2(B) \|, \qquad w_i \in \mathscr{W},$$

где

$$\| w(B) \| = \sup \{ | w(B) |, \ B \in \mathfrak{B} \}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathscr{W}$ является полным линейным нормированным пространством. Будем понимать уравнения (25) и (27) как уравнения в пространстве $\mathscr{W}$ и соответственно интерпретировать понятие производной в левой части равенства (25).

Введем еще пространство $\mathscr{C}^{\mathscr{W}}[s, t^*)$ непрерывных функций $\check{w} = \check{w}_t = w_t(B)$, $t \in [s, t^*]$, со значениями в $\mathscr{W}$ и нормой $||| \check{w} ||| = \max \{ \| \check{w}_t \|, t \in [s, t^*] \}$.

Теорема 4. *Если функция* $a(t, x, B)$ *удовлетворяет условиям а) и б), то система уравнений (25) и (27) имеет в* $\mathscr{C}^{\mathscr{W}}$ *единственное решение. Это решение является мерой, если* $m(B)$ *является мерой.*

*Доказательство.* Заметим, что из условия б) вытекает, что функция $a(t, x)$ равномерно ограничена по $(t, x)$, $a(t, x) \leqslant$

$\leqslant K < \infty$. Введем функцию $q_t(B)$ в $\mathscr{C}^{\mathscr{W}}[s, t^*]$, положив

$$q_t(B) = \int\limits_B \exp\left\{\int\limits_s^t a(\theta, x)\,d\theta\right\} m_t(dx).$$

Если функция $m_t$ дифференцируема в $\mathscr{W}$, то таковой же будет и $q_t$, и обратно, причем

$$\frac{dq_t(B)}{dt} = \int\limits_B a(t, x)\,q_t(dx) + \int\limits_B \exp\left\{\int\limits_s^t a(\theta, x)\,d\theta\right\} \frac{dm_t}{dt}(dx).$$

Подставляя в эту формулу вместо $\frac{dm_t}{dt}$ выражение из уравнения (25), получим

$$\frac{dq_t(B)}{dt} = \int\limits_B \int\limits_X \exp\left\{\int [a(\theta, x) - a(\theta, y)]\,d\theta\right\} a(t, y, dx)\,q_t(dy) = \\ = \int\limits_X b(t, y, B)\,q_t(dy),$$

где

$$b(t, y, B) = \int\limits_B \exp\left\{\int\limits_s^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)]\,d\theta\right\} a(t, y, dx).$$

Таким образом, уравнения (25), (27) эквивалентны уравнению

$$q_t(B) = m(B) + \int\limits_s^t \int\limits_X b(\theta, y, B)\,q_\theta(dy)\,d\theta, \qquad t \in [s, t^*], \tag{32}$$

где $b(t, y, B)$ равномерно ограничена, $b(t, y, B) \leqslant K_1$ и, как функция от $B$, является мерой. Оператор $Q^*$ в $\mathscr{C}^{\mathscr{W}}$, определяемый равенством

$$(Q^*\check{w})_t(B) = m(B) + \int\limits_s^t \int\limits_X b(\theta, y, B)\,w_\theta(dy)\,d\theta,$$

удовлетворяет соотношениям

$$\|(Q^*\check{w}')_t - (Q^*\check{w}'')_t\| \leqslant 2K_1(t - s)\,|||\check{w}' - \check{w}''|||,$$

$$\|(Q^{*n}\check{w}')_t - (Q^{*n}\check{w}'')_t\| \leqslant (2K_1)^n \frac{(t-s)^n}{n!}\,|||\check{w}' - \check{w}''|||,$$

где $Q^{*n}$ обозначает $n$-ю степень оператора $Q^*$. Таким образом, некоторая степень оператора $Q^*$ является сжимающим оператором и, в силу принципа сжатых отображений, уравнение (32) имеет в $\mathscr{C}^{\mathscr{W}}$ единственное решение. Это решение может быть получено с помощью метода последовательных приближений, и поэтому, если $m(B)$ является мерой, то таковой будет и $q_t(B)$. ■

Аналогично можно рассмотреть уравнение (29). Подстановка

$$f_s(x) = \exp\left\{-\int_s^t a(\theta, x)\,d\theta\right\} g_s(x)$$

приводит уравнение (29) к эквивалентному, несколько более простому уравнению

$$\frac{\partial g_s(x)}{\partial t} = -\int_X g_s(y) \exp\left\{\int_s^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)]\,d\theta\right\} a(s, x, dy),$$

$(s < t)$ с граничным условием $g_t(x) = f(x)$. В свою очередь это уравнение эквивалентно уравнению

$$g_s(x) = f(x) + \\ + \int_s^t \int_X g_v(y) \exp\left\{\int_v^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)]\,d\theta\right\} a(v, x, dy)\,dv. \quad (33)$$

Введем пространство $\mathscr{C}^{\mathscr{B}(\mathfrak{B})}[0, t]$ непрерывных функций $\check{f} = f_s = f_s(x)$ аргумента $s$ со значениями в $\mathscr{B}(\mathfrak{B})$ и с нормой $|||\check{f}||| = \sup\{|f_s(x)|,\ (s, x) \in [0, t] \times X\}$. Линейный оператор $Q$ в $\mathscr{C}^{\mathscr{B}(\mathfrak{B})}[0, t]$, определяемый формулой

$$(Q\check{g})_s(x) = \\ = f(x) + \int_s^t \int_X g_v(y) \exp\left\{\int_v^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)]\,d\theta\right\} a(v, x, dy)\,dv,$$

отображает множество неотрицательных функций пространства $\mathscr{C}^{\mathscr{B}(\mathfrak{B})}[0, t]$ в себя, причем

$$\|(Q\check{g}')_s - (Q\check{g}'')_s\| \leqslant K_2(t-s)\,|||\check{g}' - \check{g}''|||,$$

$$\|(Q^n\check{g}')_s - (Q^n\check{g}'')_s\| \leqslant \frac{K_2^n(t-s)^n}{n!}\,|||\check{g}' - \check{g}''|||,$$

где $K_2 = Ke^{Kt}$. Таким образом, некоторая степень оператора $Q$ является сжимающим оператором и уравнение (33), а вместе с ним и уравнение (29) при граничном условии (30) имеют в $\mathscr{C}^{\mathscr{B}(\mathfrak{B})}[0, t]$ единственное решение.

Теорема 5. *Если функция $a(t, x, B)$ удовлетворяет условиям а) и б), то уравнение (29)—(30) имеют единственное решение. В частности, в рассматриваемом случае вероятности перехода соответствующего процесса определяются функцией $a(t, x, B)$ однозначно.*

Замечание. Решение уравнения (33) может быть получено методом последовательных приближений. В соответствии с этим решение уравнений (29)—(30) можно представить в виде

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_s^{(n)}(x),$$

где

$$f_s^{(0)}(x) = \exp\left\{-\int_s^t a(\theta, x)\, d\theta\right\} f(x),$$

$$f_s^{(n+1)}(x) = \int_s^t \int_X f_v^{(n)}(y) \exp\left\{-\int_s^v a(\theta, x)\, d\theta\right\} a(v, x, dy)\, dv.$$

В частности, для вероятностей перехода $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ получаем следующие выражения:

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}^{(n)}(s, x, t, B), \tag{34}$$

где

$$\mathsf{P}^{(0)}(s, x, t, B) = \exp\left\{-\int_s^t a(\theta, x)\, d\theta\right\} \chi(B, x), \tag{35}$$

$$\mathsf{P}^{(n+1)}(s, x, t, B) = \\ = \int_s^t \int_X \mathsf{P}^{(n)}(v, y, t, B) \exp\left\{-\int_s^v a(\theta, x)\, d\theta\right\} a(v, x, dy)\, dv. \tag{36}$$

Функции $\mathsf{P}^{(n)}(s, x, t, B)$ имеют простую теоретико-вероятностную интерпретацию. Она будет приведена в § 2 гл. VII, где будет также показано, как по заданной функции $a(s, x, B)$ можно построить марковский процесс при условиях более широких, чем рассматриваемые здесь.

Полученные результаты могут быть применены к процессам со счетным числом состояний. В этом случае пространство $X$ состоит из счетного числа точек и достаточно рассматривать вероятности перехода в одноточечные множества. Пусть $p_{ij}(s, t) = \mathsf{P}(s, i, t, \{j\})$, $i, j \in X$. Вместо функции $a(s, x, B)$ рассмотрим функцию $a(s, i, j)$:

$$a(s, i, j) = \lim_{t \downarrow s} \frac{p_{ij}(s, t)}{t - s}, \qquad i \neq j,$$

совпадающую с ранее введенной функцией $a_{ij}(s)$. Условия а) и б) для нее принимают следующий вид: а) $a(t, i) = \sum_{j \in X} a(t, i, j)$, где $a(s, i) = \lim_{t \downarrow s} (1 - p_{ii}(s, t))(t - s)^{-1}$; б) $a(t, i, j)$ непрерывны по $t$ на $[0, t^*]$ равномерно относительно $(i, j)$. Если эти условия выполнены, то первое и второе уравнения Колмогорова для марковских процессов со счетным числом состояний имеют единственные решения, которые могут быть получены по ранее указанным формулам. Например,

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}(s, t),$$

где

$$p_{ij}^{(0)}(s, t) = \exp\left\{-\int_s^t a_i(\theta)\,d\theta\right\}\delta_{ij},$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(s, t) = \int_s^t \sum_{k\in X} p_{kj}^{(n)}(v, t)\exp\left\{-\int_s^v a_i(\theta)\,d\theta\right\}a_{ik}(v)\,dv,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

**Процессы с независимыми приращениями.** Эти процессы являются частным случаем марковских процессов. Пусть $X$ — векторное метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств $X$. Через $B + x$ $(B \subset X,\ x \in X)$ обозначим параллельный сдвиг множества $B$ на вектор $x$: $B + x\ \{y: y = z + x,\ z \in B\}$.

Рассмотрим семейство вероятностных мер $\mathsf{P}_{st}(\cdot)$ на $\mathfrak{B}$ $(s \geqslant 0,\ t > s)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\mathsf{P}_{st}(B - x)$ является $\mathfrak{B}$-измеримой функцией от $x$ при любом $B \in \mathfrak{B}$;

б) если $s < u < t$, то

$$\mathsf{P}_{st}(B) = \int_X \mathsf{P}_{ut}(B - y)\,\mathsf{P}_{su}(dy). \tag{37}$$

Нетрудно проверить, что для произвольной ограниченной $\mathfrak{B}$-измеримой функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\int_X f(x + y)\,\mathsf{P}_{st}(dy) = \int_X f(y)\,\mathsf{P}_{st}(dy - x)$$

(для индикаторов $\mathfrak{B}$-измеримых множеств оно тривиально). Поэтому из (37) следует

$$\mathsf{P}_{st}(B - x) = \int_X \mathsf{P}_{ut}(B - y)\,\mathsf{P}_{su}(dy - x).$$

Следовательно, если положить $\mathsf{P}(s, x, t, B) = \mathsf{P}_{st}(B - x)$, то функция $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ будет вероятностью перехода. Она обладает пространственной однородностью. Это означает, что

$$\mathsf{P}(s, x + y, t, B + y) = \mathsf{P}(s, x, t, B)$$

для всех $y \in X$. Обратно, если вероятности перехода обладают этим свойством, то $\mathsf{P}(s, x, t, B) = \mathsf{P}_{st}(B - x)$.

Зададим на $\{X, \mathfrak{B}\}$ произвольную вероятностную меру и рассмотрим семейство распределений $\{\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n},\ 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, где $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(B^{(n)})$ есть распределение на $\{X^n, \mathfrak{B}^n\}$, определяемое формулой ($B^{(n)} \in \mathfrak{B}^n$)

$$\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(B^{(n)}) = \int\limits_X \left\{ \int\limits_{B^{(n)}} \mathsf{P}(0, x_0, t_1, dx_1)\, \mathsf{P}(t_1, x_1, t_2, dx_2) \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \mathsf{P}(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \right\} q(dx_0).$$

Нетрудно проверить, что введенное семейство распределений определяет процесс с независимыми приращениями.

В § 3 была полностью выяснена структура семейства мер $\mathsf{P}_{st}$, удовлетворяющих равенству (37), в случае, когда пространство $X$ конечномерно ($X = \mathscr{R}^d$), а процесс с независимыми приращениями стохастически непрерывен и однороден во времени (т. е. $\mathsf{P}_{st}(B) = \mathsf{P}_{t-s}(B)$). При этих предположениях характеристическую функцию $\varphi(t, u)$ распределения $\mathsf{P}_t(B)$ можно представить в виде

$$\varphi(t, u) = \int\limits_{\mathscr{R}^d} e^{i(u, x)} \mathsf{P}_t(dx) = \exp\left( t \left\{ i(a, u) - \frac{1}{2}(bu, u) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_{\mathscr{R}^d} \left[ e^{i(u, z)} - 1 - \frac{i(u, z)}{1 + |z|^2} \right] \frac{1 + |z|^2}{|z|^2} \Pi(dz) \right\} \right), \tag{38}$$

где $a \in \mathscr{R}^d$, $b$ — некоторое линейное неотрицательное определенное симметрическое отображение $\mathscr{R}^d$ в $\mathscr{R}^d$, $\Pi$ — конечная мера на $\mathfrak{B}$ и $\Pi\{0\} = 0$.

Положим

$$f_s(x) = \int\limits_{\mathscr{R}^d} f(y)\, \mathsf{P}(s, x, t, dy) = \int\limits_{\mathscr{R}^d} f(x + y)\, \mathsf{P}_{st}(dy), \qquad s < t.$$

Очевидно, что если $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своими частными производными первого и второго порядка, то этими же свойствами обладает функция $f_s(x)$. Имеем

$$\frac{f_{s-h}(x) - f_s(x)}{h} = \int\limits_{\mathscr{R}^d} [f_s(x + z) - f_s(x)] \frac{1}{h} \mathsf{P}_{s-h\, h}(dz) =$$
$$= (\bar{A}_h, \nabla f_s(x)) - \frac{1}{2}(\bar{B}_h \nabla, \nabla f_s(x)) + \int \left[ f(x + z) - f(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{(z, \nabla) f_s(x)}{1 + |z|^2} + \frac{1}{2} \frac{(z, \nabla f_s(x))^2}{1 + |z|^2} \right] \frac{1 + |z|^2}{|z|^2} \Pi_h(dz),$$

где мера $\Pi_h(dz)$ определяется из (10) § 3 и $(a, \nabla) f_s(x) = \sum_1^d a_k \frac{\partial f_s(x)}{\partial x_k}$,

$$\bar{A}_h = \int_{\mathscr{R}^d} \frac{(z, \nabla) f_s(x)}{|z|^2} \Pi_h(dz), \qquad \bar{B}_h = \int_{\mathscr{R}^d} \frac{(z, \nabla f_s(x))^2}{|z|^2} \Pi_h(dz).$$

Из результатов § 3 (см. доказательство теоремы 3) следует, что существует производная $\frac{\partial f_s(x)}{\partial s}$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial f_s(x)}{\partial s} = (a, \nabla) f_s(x) - \frac{1}{2}(b\nabla, \nabla) f_s(x) + \\ + \int_{\mathscr{R}^d} \left[ f_s(x+z) - f_s(x) - \frac{(z, \nabla) f_s(x)}{1+|z|^2} \right] \frac{1+|z|^2}{|z|^2} \Pi(dz), \quad (39)$$

где

$$(b\nabla, \nabla) f_s(x) = \sum_{k, j=1}^d b_{kj} \frac{\partial^2 f_s(x)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Последнее уравнение может быть преобразовано к виду (см. формулу (17) § 3)

$$\frac{\partial f_s(x)}{\partial s} = (a, \nabla) f_s(x) + \frac{1}{2}(b\nabla, \nabla) f_s(x) + \\ + \int_{\mathscr{R}^d \setminus S_c} [f_s(x+z) - f_s(x)] \bar{\Pi}(dz) + \\ + \int_{S_c} [f_s(x+z) - f_s(x) - (z, \nabla) f_s(x)] \bar{\Pi}(dz), \quad (40)$$

где $S_c$ — сфера в $\mathscr{R}^d$ с центром в начале координат радиуса $c$, мера $\bar{\Pi}$ теперь не обязательно конечна, но по-прежнему $\bar{\Pi}\{0\} = 0$ и

$$\int_{S_c} |z|^2 \Pi(dz) < \infty, \quad \Pi(\mathscr{R}^d \setminus S_c) < \infty.$$

**Слабо дифференцируемые марковские процессы в широком смысле.** При изучении марковских процессов в конечномерном пространстве $\mathscr{R}^d$ представляется естественным рассмотреть класс процессов, имеющих такую же локальную структуру, что и процессы с независимыми приращениями. Можно дать следующее определение процессов подобного рода.

Введем характеристическую функцию распределения $\mathsf{P}(s, x, t, B)$:

$$\varphi(s, x, t, u) = \int\limits_{\mathscr{R}^d} e^{i(u, y)} \mathsf{P}(s, x, t, dy), \quad s < t, \quad \varphi(s, x, s, u) = 1.$$

Назовем марковский процесс в широком смысле *слабо дифференцируемым*, если функция $\varphi(s, x, t, u)$ дифференцируема по $s$ в точке $s = t$ равномерно в конечной области изменения $u$, т. е. если предел

$$g(t, x, u) = \lim_{s \downarrow t} \frac{J(s, x, t, u) - 1}{t - s}$$

существует равномерно по $u$ при $|u| \leqslant N$, где $N$ произвольно, для всех $x \in \mathscr{R}^d$, $t \in (0, t^*)$.

Из результатов теоремы 1 § 3 следует, что если марковский процесс слабо дифференцируем, то существует вектор $a(s, x)$, $a(s, x) \in \mathscr{R}^d$, неотрицательно определенное симметрическое отображение $b(s, x) \in \mathscr{R}^d$ в $\mathscr{R}^d$ и мера $q(s, x, B)$ на $\mathfrak{B}$ такие, что для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $x \in \mathscr{R}^d$, ограниченной вместе со своими частными производными первого и второго порядка, имеет место равенство

$$\begin{aligned} A_s f(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{s-h\, s} f(x) - f(x)}{h} = \\ = (a(s, x), \nabla) f(x) + \frac{1}{2} (b(s, x) \nabla, \nabla) f(x) + \\ + \int\limits_{\mathscr{R}^d \setminus S} [f(x+z) - f(x)]\, q(s, x, dz) + \\ + \int\limits_S [f(x+z) - f(x) - (z, \nabla) f(x)]\, q(s, x, dz), \end{aligned} \tag{41}$$

причем $q(s, x, \{0\}) = 0$, $q(s, x, \mathscr{R}^d \setminus S) < \infty$ и

$$\int\limits_S |z|^2 q(s, x, dz) < \infty.$$

В частности, если $q(s, x) = q(s, x, \mathscr{R}^d) < \infty$, то предыдущую формулу можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_s f(x) = (\tilde{a}(s, x), \nabla) f(x) + \frac{1}{2} (b(s, x) \nabla, \nabla) f(x) - \\ - \left[ q(s, x) f(x) - \int\limits_{\mathscr{R}^d} f(x+z)\, q(s, x, dz) \right]. \end{aligned} \tag{42}$$

Если $\tilde{a}(s, x) \equiv 0$, $b(s, x) \equiv 0$, то соответствующий марковский процесс является, как следует из предыдущего, скачкообразным процессом.

В общем случае соотношение (41) можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через $\xi(t)$ состояние системы, характеризуемой рассматриваемым марковским процессом. Допустим, что $\xi(s) = x$. Тогда $\Delta\xi(s) = \xi(s + \Delta s) - x$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно представить в виде $\Delta\xi(s) = \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 + \Delta\xi_3$, где $\Delta\xi_1$ соответствует неслучайной составляющей смещения $\Delta\xi(s)$ и может быть представлено в виде $\Delta\xi_1 = \tilde{a}(s, x)\Delta s$, $\Delta\xi_2$ соответствует смещению винеровского процесса с дисперсионной матрицей $b(s, x)\Delta s$, а $\Delta\xi_3$ равно 0 с вероятностью $1 - q(s, x)\Delta s$, а с вероятностью $q(s, x)$ совпадает со случайным вектором, имеющим распределение $\frac{q(s, x, B)}{q(s, x)}$. При этом $\Delta\xi_2$ и $\Delta\xi_3$ независимы.

Если в формуле (41) $q(s, x, B) \equiv 0$, то соответствующий марковский процесс называется *диффузионным*. В этом случае главная часть смещения $\Delta\xi(s)$ состоит из неслучайного слагаемого $a(s, \xi_s)\Delta s$ (вектора переноса) и из флуктуационного члена, имеющего $d$-мерное гауссово распределение со средним значением 0 и корреляционной матрицей $b(s, \xi_s)\Delta s$.

Диффузионные процессы играют важную роль в теории и в применениях марковских процессов и подробнее рассматриваются в гл. VIII. Здесь же ограничимся тем, что приведем несколько иное определение диффузионного процесса и уточним для него вывод дифференциальных уравнений Колмогорова.

Определение. *Марковский процесс в широком смысле называется диффузионным, если выполняются следующие условия:*

1) *для произвольного* $x \in \mathscr{R}^d$, $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $t < s$

$$\mathsf{P}(s, x, t, \overline{S_\varepsilon(x)}) = o(t - s), \tag{43}$$

*где* $\overline{S_\varepsilon(x)}$ — *дополнение к сфере* $S_\varepsilon(x)$ *радиуса* $\varepsilon$ *с центром в точке* $x$;

2) *существует такая функция* $a(s, x)$ *со значениями в* $\mathscr{R}^d$ *и линейный симметрический неотрицательно определенный оператор* $b(s, x)$, *отображающий* $\mathscr{R}^d$ *в* $\mathscr{R}^d$ $((s, x) \in [0, t^*] \times \mathscr{R}^d)$, *что для произвольного* $x \in X$ *и* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $s, s < t$,

$$\int_{S_\varepsilon(x)} (y - x)\,\mathsf{P}(s, x, t, dy) = a(s, x)(t - s) + o(t - s), \tag{44}$$

$$\int_{S_\varepsilon(x)} (z, y - x)^2\,\mathsf{P}(s, x, t, dy) = (b(s, x)z, z)(t - s) + o(t - s). \tag{45}$$

*Вектор $a(s, x)$ называется вектором переноса, а оператор $b(s, x)$ — оператором диффузии марковского процесса.*

Выберем в $\mathcal{R}^d$ некоторый базис и обозначим через $a_i(s, x)$, $i = 1, \ldots, m$, компоненты вектора $a(s, x)$, а через $b_{ij}(s, x)$, $i, j = 1, \ldots, m$, элементы матрицы оператора $b(s, x)$ в этом базисе.

Теорема 6. *Если функции $a(s, x)$, $b(s, x)$ непрерывны, а $f(x)$ непрерывна, ограничена и такова, что функция*

$$u(s, x) = \int_{\mathcal{R}^d} f(y)\,\mathsf{P}(s, x, t, dy)$$

*имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial u(s, x)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x_i \partial x_j}$, то $u(s, x)$ имеет производную $\frac{\partial u}{\partial s}$, удовлетворяет уравнению*

$$-\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} = (a(s, x), \nabla)\,u(s, x) + \frac{1}{2}(b(s, x)\nabla, \nabla)\,u(s, x) \tag{46}$$

*и граничному условию*

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, x) = f(x). \tag{47}$$

*Доказательство.* Пусть $s_1 \leqslant s \leqslant s_2 < t$. Так как функция $u(s, x)$ ограничена, то

$$u(s_1, x) - u(s_2, x) = \int_{\mathcal{R}^d} [u(s_2, y) - u(s_2, x)]\,\mathsf{P}(s_1, x, s_2, dy) =$$

$$= \int_{S_\varepsilon(x)} [u(s_2, y) - u(s_2, x)]\,\mathsf{P}(s_1, x, s_2, dy) + o_\varepsilon(s_2 - s_1),$$

где $\frac{o_\varepsilon(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} \to 0$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Из формулы Тейлора вытекает, что

$$u(s_2, y) - u(s_2, x) =$$

$$= (y - x, \nabla)\,u(s_2, x) + \frac{1}{2}(y - x, \nabla)^2 u(s_2, x) + r(x, y, s_2),$$

причем при $y \in S_\varepsilon(x)$ $|r(x, y, s_2)| \leqslant |y - x|^2 \omega_\varepsilon$, где

$$\omega_\varepsilon = \sup_{i, j, s_2, y \in S_\varepsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 u(s_2, x + \theta(y - x))}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(s_2, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует равенство

$$u(s_1, x) - u(s_2, x) =$$

$$= \left[(a(s_2, x), \nabla)\,u(s_2, x) + \frac{1}{2}(b(s_2, x)\nabla, \nabla)\,u(s_2, x) + R'\right](s_2 - s_1), \tag{48}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ \lim\limits_{s_2-s_1\downarrow 0} R'=0$. Разделив полученное соотношение на $s_2-s_1$, перейдя к пределу при $s_2\downarrow s$, $s_1\uparrow s$ и учитывая непрерывность первых трех слагаемых в правой части формулы (48) по $s_2$, получим уравнение (46).

Граничное условие (47) вытекает из равенства

$$u(s, x)-f(x)=\int\limits_{S_\varepsilon(x)}[f(y)-f(x)]\,\mathsf{P}(s, x, t, dy)+o_\varepsilon(t-s),$$

в котором $\varepsilon>0$ — произвольно малое число, и из непрерывности $f(x)$. ■

Допустим теперь, что существует плотность вероятностей перехода, т. е. такая функция $p(s, x, t, y)$, что для любого борелевского множества $B$

$$\mathsf{P}(s, x, t, B)=\int\limits_B p(s, x, t, y)\,dy,$$

где интегрирование производится по лебеговой мере в $\mathscr{R}^d$. Уравнение Колмогорова — Чепмена в этом случае можно записать в виде

$$p(s, x, t, y)=\int\limits_{\mathscr{R}^d} p(s, x, u, z)\,p(u, z, t, y)\,dz,\qquad s<u<t. \tag{49}$$

Если $p(s, x, t, y)$, как функция от $(t, y)$, достаточно гладкая, то она удовлетворяет второму уравнению Колмогорова, носящему еще название *уравнения Фоккера — Планка.*

Теорема 7. *Если соотношения* (43), (44), (45) *выполняются равномерно по $x$ и существуют непрерывные производные* $\dfrac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial(a_i(t, y)\,p(s, x, t, y))}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2(b_{ij}(t, y)\,p(s, x, t, y))}{\partial x_i\,\partial x_j}$, *то функция $p(s, x, t, y)$ при $(t, y)\in(s, t^*)\times\mathscr{R}^d$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial t}=$$
$$=-(\nabla, a(t, y)\,p(s, x, t, y))+\frac{1}{2}(\nabla, \nabla b(t, y)\,p(s, x, t, y)). \tag{50}$$

*Доказательство.* Пусть $g(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в 0 вне некоторого компакта. Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно убедиться, что равномерно по $x$

$$\lim_{t_2\downarrow t,\ t_1\uparrow t}\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int g(y)\,p(t_1, x, t_2, y)\,dy-g(x)\right]=$$
$$=(a(t, x), \nabla)\,g(x)+\frac{1}{2}(b(t, x)\nabla, \nabla)\,g(x).$$

Используя условия теоремы и последнее равенство, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int p(s,\,x,\,t,\,y)\,g(y)\,dy=$$

$$=\lim_{t_1\uparrow t,\,t_2\downarrow t}\frac{1}{t_2-t_1}\int[p(s,\,x,\,t_2,\,y)-p(s,\,x,\,t_1,\,y)]\,g(y)\,dy=$$

$$=\lim_{t_1\uparrow t,\,t_2\downarrow t}\int p(s,\,x,\,t_1,\,y)\left[\frac{1}{t_2-t_1}\int_{\mathscr{R}^d}p(t_1,y,t_2,z)\,g(z)\,dz-g(y)\right]dy=$$

$$=\int p(s,\,x,\,t,\,y)\Big[(a(t,\,y),\,\nabla)\,g(y)+\frac{1}{2}(b(t,\,y)\nabla,\,\nabla)\,g(y)\Big]\,dy.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, найдем, что

$$\int\frac{\partial}{\partial t}p(s,\,x,\,t,\,y)\,g(y)\,dy=-\int\Big[(\nabla,\,p(s,\,x,\,t,\,y)\,a(t,\,y))+$$
$$+\frac{1}{2}(\nabla,\,\nabla p(s,\,x,\,t,\,y)\,b(t,\,y))\Big]\,g(y)\,dy.$$

Учитывая произвольность функции $g(y)$, из последнего равенства получим уравнение (50). ■

Замечание. Если марковский процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\mathscr{R}^d}(y-x)\,\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,dy)=a(s,\,x)(t-s)+o(t-s),\tag{51}$$

$$\int_{\mathscr{R}^d}(z,\,y-x)^2\,\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,dy)=(b(s,\,x)\,z,\,z)(t-s)+o(t-s)\tag{52}$$

и для некоторого $\delta>0$

$$\int_{\mathscr{R}^d}|\,y-x\,|^{2+\delta}\,\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,dy)=o(\Delta t),\tag{53}$$

то он является диффузионным. Действительно,

$$\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,\overline{S_\varepsilon(x)})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^{2+\delta}}\int_{\mathscr{R}^d}|\,y-x\,|^{2+\delta}\,\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,dy),$$

$$\int_{S_\varepsilon(x)}(y-x)\,\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,dy)=a(s,\,x)(t-s)+o(t-s)-$$
$$-\int_{\overline{S}_\varepsilon(x)}(y-x)\,\mathsf{P}(s,\,x,\,t,\,dy),$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon(x)} (z,\, y-x)^2 \mathsf{P}(s,\, x,\, t,\, dy) =$$
$$= (b(s,\, x)z,\, z)(t-s) + o(t-s) - \int\limits_{\overline{S}_\varepsilon(x)} (z,\, y-x)^2 \mathsf{P}(s,\, x,\, t,\, dy),$$

причем при $\alpha < 2+\delta$

$$\int\limits_{\overline{S}_\varepsilon(x)} |y-x|^\alpha \mathsf{P}(s,\, x,\, t,\, dy) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta-\alpha}} \int\limits_{\overline{S}_\varepsilon(x)} |y-x|^{2+\delta} \mathsf{P}(s,\, x,\, t,\, dy).$$

Таким образом, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ условия (43)—(45) выполняются и процесс $\xi(t)$ — диффузионный.

## § 5. Процессы, стационарные в широком смысле

Важный класс случайных процессов образуют стационарные процессы. Так называют процессы, теоретико-вероятностные характеристики которых не меняются со временем. Можно еще сказать, что стационарные процессы — это процессы, протекающие в не изменяющихся во времени условиях. Более точно это означает следующее. Пусть $T$ — конечный или бесконечный отрезок времени.

Определение. *Случайный процесс (в широком смысле) $\xi(t)$, $t \in T$, со значениями в $\mathscr{R}^d$ называют стационарным, если для любого $n$ и любых $t_1, t_2, \ldots, t_n$ таких, что $t + t_k \in T$ ($k = 1, \ldots, n$), совместное распределение случайных векторов*

$$\xi(t_1 + t),\ \ldots,\ \xi(t_n + t) \tag{1}$$

*не зависит от $t$.*

Условие независимости распределения последовательности (1) от $t$ эквивалентно требованию, чтобы для любой ограниченной непрерывной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathscr{R}^d$, величина

$$\mathsf{M} f(\xi(t_1+t),\ \ldots,\ \xi(t_n+t))$$

не зависела от $t$. В частности, если компоненты $\xi^j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, вектора $\xi(t)$ обладают конечными моментами второго порядка, то величины

$$m^j(t) = \mathsf{M}\xi^j(t), \qquad j = 1, \ldots, d,$$

не зависят от $t$, $m^j(t) = m^j$, а величины

$$b^{jk}(t,\, s) = \mathsf{M}\xi^j(t)\xi^k(s), \qquad j,\, k = 1, \ldots, d,$$

$t \geqslant s$, зависят только от разности $t - s$, $b^{jk}(t, s) = b^{jk}(t-s)$.

Имеется обширный круг вопросов, относящихся к теории стационарных процессов, решение которых может быть выражено через моменты первого и второго порядка рассматриваемых процессов. Поэтому целесообразно выделить класс процессов, моменты первого и второго порядка которых обладают свойством стационарности. Этот класс процессов был впервые определен и изучен А. Я. Хинчиным [3].

Определение. *Случайный процесс* $\xi(t) = (\xi^1(t), \ldots \ldots, \xi^d(t))$, $t \geqslant 0$, *со значениями в* $\mathcal{R}^d$ *называют процессом, стационарным в широком смысле, если* $\mathsf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$ *и*

$$\mathsf{M}\,\xi(t) = m = \text{const}, \qquad \mathsf{M}\,[\xi(t) - m]\,[\xi(s) - m]^* = R(t - s) \qquad (t > s),$$

*где* $R(t)$ — *непрерывная матричная функция.*

Функцию $R(t)$ называют *корреляционной* (*матричной*) *функцией* процесса $\xi(t)$. В некоторых случаях целесообразно рассматривать комплекснозначные случайные векторные процессы $\zeta(t) = (\zeta^1(t), \ldots, \zeta^d(t))$, где $\zeta^k(t) = \xi^k(t) + i\eta^k(t)$, $\xi^k(t)$, $\eta^k(t)$ — действительные случайные процессы. Чтобы задать процесс $\zeta(t)$, нужно задать $2d$-мерный векторный процесс $\theta(t) = (\xi^1(t), \ldots, \xi^d(t), \eta^1(t), \ldots, \eta^d(t))$. Распределения всевозможных характеристик процесса $\zeta(t)$ тогда легко выражаются через совместные распределения векторов $\theta(t)$.

В качестве примера стационарных в широком смысле процессов рассмотрим колебания со случайными параметрами. Будем рассматривать скалярные процессы $\xi(t)$.

Введем некоторые термины, оказывающиеся полезными при физической интерпретации случайных процессов. Если $\xi(t)$ обозначает силу тока в момент времени $t$ и имеется в виду энергия, рассеиваемая этим током на единичном сопротивлении, то естественными являются следующие определения.

*Энергией*, переносимой случайным процессом $\xi(t)$ в течение промежутка времени $(t_1, t_2)$, называется величина

$$\int_{t_1}^{t_2} \xi^2(t)\,dt;$$

*полной энергией*, переносимой процессом $\xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, называется интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2(t)\,dt$, если он существует.

*Средней мощностью* случайного процесса называется предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^2(t)\,dt.$$

Если процесс $\xi(t)$ является комплексным, то вместо $\xi^2(t)$ в предыдущих выражениях следует писать $|\xi(t)|^2$.

В том случае, когда процесс имеет иную физическую интерпретацию, принятая терминология может ей не соответствовать. Все же в дальнейшем эта терминология будет использована.

Во многих вопросах случайные процессы моделируются суммами гармоник с заданными частотами и случайными амплитудами и фазами. Иными словами, рассматриваются процессы вида

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos(u_k t+\varphi_k),$$

где $u_k$ — заданные числа, а величины $\alpha_k$ и $\varphi_k$ случайны. Теоретико-вероятностная структура этого процесса полностью определяется совместным распределением случайных величин $\alpha_k$, $\varphi_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. При этом под процессом, определенным формулой (1), следует понимать случайный процесс, конечномерные распределения которого могут быть вычислены исходя из формулы (1) и совместного распределения величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой сумму $n$ гармоничных колебаний с амплитудами $|\alpha_k|$ и частотами $u_k$.

Во многих случаях целесообразно рассматривать комплекснозначные случайные процессы колебательного характера

$$\zeta(t)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k e^{iu_k t}, \tag{2}$$

где комплексные амплитуды $\gamma_k$ являются случайными величинами:

$$\gamma_k=\alpha_k+i\beta_k;$$

$\alpha_k$, $\beta_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, вещественны. При этом совокупность всех частот $\{u_k\}$, $k=1, 2, \ldots, n$, рассматриваемая как множество точек на прямой $(-\infty<u<\infty)$, называется *спектром* случайной функции $\zeta(t)$.

Процесс $\zeta(t)$ можно расщепить на вещественную и мнимую части:

$$\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t),$$

где

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos u_k t-\beta_k\sin u_k t,\\ \eta(t)&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sin u_k t+\beta_k\cos u_k t.\end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно вычислить среднюю мощность, переносимую процессом $\zeta(t)$. Имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(t)|^2\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{k,\,r=1}^{n}\gamma_k\bar{\gamma}_r e^{it(u_k-u_r)}\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^2+\sum_{\substack{k,\,r=1\\k\neq r}}^{n}\gamma_k\bar{\gamma}_r\frac{\sin T(u_k-u_r)}{T(u_k-u_r)}.$$

При $T\to\infty$ получаем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(t)|^2\,dt=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^2.$$

Таким образом, средняя мощность, переносимая колебательным случайным процессом $\zeta(t)$, равна сумме средних мощностей, переносимых каждой гармонической составляющей процесса.

Аналогично вычисляется среднее значение случайной функции $\zeta(t)$ за бесконечный промежуток времени. Имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\zeta(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\frac{\sin Tu_k}{Tu_k},$$

причем если точка 0 есть точка спектра случайного процесса, то значение функции $\frac{\sin u}{u}$ в этой точке ($u=0$) считается равным 1. Таким образом,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\zeta(t)\,dt=\gamma_0,$$

где $\gamma_0$ — амплитуда, соответствующая частоте $u=0$.

Распределение величины $\zeta(t)$ даже при специальных предположениях о распределении величин $\gamma_k$ является весьма сложным. Все же простейшие характеристики распределения случайной величины $\zeta(t)$ получить нетрудно. Предположим, что комплексные амплитуды $\gamma_k$ имеют математические ожидания, равные 0, и между собой не коррелированы, т. е.

$$\mathsf{M}\gamma_k=0,\quad \mathsf{M}\gamma_k\bar{\gamma}_r=0,\qquad k\neq r.$$

Тогда

$$\mathsf{M}\zeta(t)=0.$$

Заметим, что если 0 не есть точка спектра случайного процесса, то математическое ожидание функции $\zeta(t)$, т. е. ее среднее значение в теоретико-вероятностном смысле, совпадает со средним значением по бесконечному отрезку времени $(-\infty, \infty)$. Если же 0 является точкой спектра процесса, то среднее значение выборочной функции по времени является случайной величиной. Для корреляционной функции процесса $\zeta(t)$ имеем следующее выражение:

$$R(t_1, t_2) = \mathsf{M}[\zeta(t_1)\overline{\zeta(t_2)}] =$$
$$= \mathsf{M}\left[\sum_{k,\,r=1}^{n} \gamma_k \bar{\gamma}_r e^{i(u_k t_1 - u_r t_2)}\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 e^{iu_k(t_1 - t_2)},$$

где $c_k^2 = \mathsf{M}|\gamma_k|^2$. Таким образом, корреляционная функция процесса $\zeta(t)$ зависит только от разности $t_1 - t_2$:

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2), \tag{4}$$

$$R(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 e^{iu_k t}. \tag{5}$$

Следовательно, если в процессе (2) величины $\gamma_k$ некоррелированы и имеют средние значения, равные 0, то процесс $\zeta(t)$ является стационарным процессом в широком смысле и его корреляционная функция дается формулой (5). Эта формула называется *спектральным представлением* корреляционной функции. Она определяет спектр случайного процесса, т. е. совокупность частот $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, гармонических колебаний, составляющих процесс $\zeta(t)$, и математические ожидания $c_k^2$ средних мощностей, переносимых соответствующими составляющими процесса. Величину $c_k^2$ можно называть *средним значением мощности* гармонической составляющей процесса с частотой $u_k$. Она получается путем усреднения мощности по времени и затем усреднения в теоретико-вероятностном смысле. В связи с этими энергетическими представлениями введем следующую важную характеристику стационарного процесса, называемую спектральной функцией процесса.

*Спектральная функция* $F(u)$ процесса (2) определяется соотношением

$$F(u) = \sum_{\substack{k \\ u_k < u}} c_k^2.$$

Это означает, что $F(u)$ равна средней мощности, переносимой гармоническими составляющими процесса $\zeta(t)$, частоты которых менее заданного значения $u$. Она полностью характеризует как среднюю мощность каждой гармонической составляющей процесса $\zeta(t)$, так и суммарную среднюю мощность гармонических составляющих процесса, частоты которых лежат в любом заданном интервале. Действительно,

$$c_k^2 = F(u_k + 0) - F(u_k), \qquad \sum_{u_1 \leqslant u_k \leqslant u_2} c_k^2 = F(u_2) - F(u_1).$$

С помощью спектральной функции корреляционная функция процесса $\zeta(t)$ может быть записана в виде

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dF(u). \tag{6}$$

С математической точки зрения спектральная функция является неотрицательной неубывающей непрерывной слева функцией, постоянной всюду, кроме конечного числа точек, в которых она имеет скачки величиною $c_k^2$. Оказывается, что понятие спектральной функции может быть введено для произвольных стационарных в широком смысле процессов. Этот вопрос, так же как и вопрос об обобщении представления (6) на произвольные стационарные процессы, рассматривается ниже.

Особый интерес представляют случайные процессы, которые могут быть получены из процессов вида (2) с помощью предельного перехода. Сущность этого предельного перехода состоит в том, что число слагаемых в сумме (2) неограниченно возрастает при убывании комплексных амплитуд $\gamma_k$, а спектр процесса, т. е. совокупность всех частот $u_k$, все плотнее заполняет прямую $(-\infty, \infty)$. В пределе получается некоторый случайный процесс, о котором следует говорить, что он имеет непрерывный спектр. Более точный смысл последнего термина и вопрос об аналоге представления (2) для получаемых таким образом случайных процессов рассматриваются ниже и в гл. V. Здесь же ограничимся рассмотрением предельных распределений.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_{nk}$, $\beta_{nk}$ $(k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ — две последовательности серий взаимно независимых (в каждой серии) случайных величин,*

$$\mathsf{M}\alpha_{nk} = \mathsf{M}\beta_{nk} = 0, \quad \mathsf{D}\alpha_{nk} = \mathsf{D}\beta_{nk} = \frac{b_{nk}^2}{2} < \infty$$

*и*

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} e^{iu_{nk}t} = \xi_n(t) + i\eta_n(t), \qquad \gamma_{nk} = \alpha_{nk} + i\beta_{nk}.$$

*Допустим, что при $n \to \infty$ выполнены следующие условия:*

а) *спектральные функции $F_n(u)$ процессов $\zeta_n(t)$ при $n \to \infty$ сходятся на некотором всюду плотном множестве значений на* *прямой* $(-\infty, \infty)$ *к функции* $F(u)$, *причем*

$$F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=\sigma^2=\lim\sum_{k=1}^{n} b_{nk}^2<\infty;$$

б) *случайные величины* $\{\alpha_{nk}, \beta_{nk}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга* (теорема 5 § 2).

*Тогда при* $n\to\infty$ *случайный процесс* $\zeta_n(t)$ *слабо сходится к стационарному процессу* $\zeta(t)$, $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$. *Характеристическая функция совместного распределения величин*

$$\xi(t_1), \ldots, \xi(t_s), \quad \eta(t_1), \ldots, \eta(t_s) \tag{7}$$

*дается выражением*

$$\varphi(u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s)=\exp\left\{-\frac{1}{2}B^2\right\},$$

*где*

$$B^2=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} R(t_j-t_k)z_j\bar{z}_k, \quad z_j=u_j-iv_j, \quad j=1, \ldots, s,$$

$$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,dF(u). \tag{8}$$

Заметим, что в условиях сформулированной теоремы можно получить в качестве функции $F(u)$ произвольную ограниченную монотонно неубывающую функцию.

Сформулированная теорема является частным случаем теоремы 5 § 2. При этом следует считать, что $\Theta$ есть множество пар $\theta=(t,q)$, $-\infty<t<\infty$, $q=1, 2$, $\alpha_{nk}(\theta)=\alpha_{nk}(t,q)$, где

$$\alpha_{nk}(t, 1)=\operatorname{Re}\gamma_{nk}e^{iu_{nk}t}, \quad \alpha_{nk}(t, 2)=\operatorname{Im}\gamma_{nk}e^{iu_{nk}t}.$$

Легко проверить, что если $\alpha_{nk}$, $\beta_{nk}$ удовлетворяют условию Линдеберга, то ему удовлетворяют и величины $\alpha_{nk}(\theta)$ при любом $\theta$.Пусть $R^{(n)}(\theta_1, \theta_2)=R^{(n)}_{q_1q_2}(t_1, t_2)$, $\theta_i=(t_i, q_i)$, $R^{(n)}_{11}(t_1, t_2)=$ $=\mathsf{M}\xi_n(t_1)\xi_n(t_2)$, $R^{(n)}_{22}(t_1, t_2)=\mathsf{M}\eta_n(t_1)\eta_n(t_2)$, $R^{(n)}_{12}(t_1, t_2)=$ $=\mathsf{M}\xi_n(t_1)\eta_n(t_2)$. В силу формул (3)

$$R^{(n)}_{11}(t_1, t_2)=R^{(n)}_{22}(t_1, t_2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos[(t_2-t_1)u]\,dF_n(u),$$

$$R^{(n)}_{12}(t_1, t_2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin[(t_2-t_1)u]\,dF_n(u).$$

Принимая во внимание теорему Хелли, из условия а) при $n \to \infty$ получим существование пределов

$$R_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty} R_{ij}^{(n)}(\tau, \tau + t), \qquad i, j = 1, 2,$$

$$R_{11}(t) = R_{22}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tu)\, dF(u),$$

$$R_{12}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tu)\, dF(u).$$

Таким образом, условия теоремы 5 § 2 выполнены. Из этой теоремы следует, что характеристическая функция совместного распределения величин (7) равна

$$\varphi(u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s) = e^{-\frac{1}{2}B^2},$$

где

$$B^2 = \sum_{k, j=1}^{s} R_{11}(t_j - t_k) u_k u_j + 2R_{12}(t_j - t_k) u_k v_j + $$
$$+ R_{22}(t_j - t_k) v_k v_j = \frac{1}{2}\sum_{j, k=1}^{s} R(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k,$$

$$z_j = u_j - iv_j, \qquad j = 1, \ldots, s. \ \blacksquare$$

Доказанная теорема приводит к примеру стационарного процесса, корреляционная функция которого дается формулой (8), где $F(u)$ — произвольная неотрицательная ограниченная монотонно неубывающая функция, непрерывная слева.

Оказывается, что соотношение (8) является общим для всех стационарных в широком смысле процессов. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (теорема Хинчина). *Для того чтобы непрерывная функция* $R(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ *была корреляционной функцией стационарного в широком смысле процесса, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление* (8).

*Доказательство.* Необходимость. Корреляционная функция стационарного в широком смысле процесса положительно определена, т. е.

$$\sum_{k, j=1}^{n} R(t_k - t_j)\lambda_k \bar{\lambda}_j \geqslant 0$$

при любом выборе чисел $n$, $t_1, \ldots, t_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($n$ — целое, $t_k$ — действительные, а $\lambda_k$ — комплексные числа). Из теоремы

Бохнера — Хинчина следует, что $R(t)$ допускает представление (8). Достаточность условия теоремы вытекает из предыдущей теоремы. ■

Впрочем, можно значительно проще построить стационарный в широком смысле процесс, корреляционная функция которого выражается формулой (8) с наперед заданной спектральной функцией $F(u)$.

Пусть $F(+\infty)=\sigma^2$ и $\xi$ — случайная величина с функцией распределения $\frac{1}{\sigma^2}F(x)$. Положим

$$\zeta(t)=\sigma e^{i(t\xi+\varphi)},$$

где $\varphi$ и $\xi$ независимы и $\varphi$ равномерно распределена на интервале $(0, 2\pi)$. Тогда

$$\mathsf{M}\zeta(t)=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}e^{i(tu+\varphi)}\frac{1}{\sigma^2}\,dF(u)\frac{d\varphi}{2\pi}=0$$

и

$$R(t+h,\ h)=\mathsf{M}\{\zeta(t+h)\overline{\zeta(h)}\}=$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}e^{itu}\frac{1}{\sigma^2}\,dF(u)\frac{d\varphi}{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\,dF(u).$$

Определение. *Функцию $F(u)$, фигурирующую в представлении (8) корреляционной функции стационарного (в широком смысле) процесса, называют спектральной функцией. Если $F(u)$ абсолютно непрерывна,*

$$F(u)=\int_{-\infty}^{u}f(u)\,du,$$

*то $f(u)$ называют спектральной плотностью процесса.*

Напомним физический смысл спектральной функции. Если под случайной функцией $\xi(t)$ понимать электрический ток, то функцию $F(u)$ можно интерпретировать следующим образом: процесс $\xi(t)$ представим в виде «континуальной суммы» простых гармонических колебаний со случайными амплитудами, и приращение $F(u_2)-F(u_1)$ $(u_1<u_2)$ равно средней мощности, рассеиваемой гармоническими составляющими процесса, частоты которых лежат в полуинтервале $[u_1, u_2)$.

Отметим, что функцию $R^{-1}(0)R(t)$, где $R(0)=F(+\infty)$, можно рассматривать как характеристическую функцию функции распределения $(F(+\infty))^{-1}F(x)$. Отсюда следует, что спектральная функция однозначно восстанавливается по корреляционной. Если $a$ и $b$ — точки непрерывности функции распределения $F(u)$, то, как известно из теории характеристических функций,

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} R(t)\, dt, \tag{9}$$

где интеграл справа понимается в смысле главного значения. В точках разрыва функции $F(u)$ формула (9) останется справедливой, если в ее левой части вместо $F(u)$ подставить $\frac{F(u+0)+F(u)}{2}$.

Если корреляционная функция $R(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\, dt < \infty$, то правая часть равенства (9) дифференцируема по параметру $b$. Таким образом, из абсолютной интегрируемости функции $R(t)$ вытекает существование спектральной плотности и равенство

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} R(t)\, dt,$$

т. е. $f(u)$ есть обратное преобразование Фурье корреляционной функции $R(t)$.

Теорема 2 допускает обобщения в разных направлениях. Во-первых, можно рассматривать векторные стационарные процессы (в широком смысле), а во-вторых, стационарные функции (скалярные или векторные) нескольких аргументов. Остановимся сначала на векторных стационарных в широком смысле процессах с комплексными компонентами. Пусть $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \ldots, \zeta_d(t))$.

Теорема 3. *Для того чтобы непрерывная матричная функция $R(t) = (R_{jk}(t))$, $j, k = 1, \ldots, d$, была корреляционной матричной функцией некоторого стационарного в широком смысле процесса $\zeta(t)$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде*

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dF(u), \tag{10}$$

*где $F(u) = (F_{jk}(u))$, $j, k = 1, \ldots, d$, — матричная функция со следующими свойствами:*

а) *для любых $u_1$ и $u_2$, $u_1 < u_2$, матрица $\Delta F(u) = F(u_2) - F(u_1)$ неотрицательно определена;*

б) $\operatorname{Sp}\{F(+\infty) - F(-\infty)\} < \infty$.

По поводу условия б) заметим, что в силу а) диагональные элементы матрицы $F(u)$ являются монотонно неубывающими функциями $u$. Таким образом, условие б) эквивалентно требованию ограниченности вариации на прямой $(-\infty, \infty)$ каждого диагонального элемента $F_{ii}(u)$ матрицы $F(u)$.

Далее, из положительной определенности матрицы $\Delta F(u)$ следует, что

$$|\Delta F_{jk}(u)|^2 \leqslant \Delta F_{jj}(u)\,\Delta F_{kk}(u),$$

откуда

$$\sum_{p=1}^{s} |\Delta F_{jk}(u_p)| \leqslant \left[\sum_{p=1}^{s} \Delta F_{jj}(u_p)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{p=1}^{s} \Delta F_{kk}(u_p)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\Delta F(u_p) = F(u_p) - F(u_{p-1})$, $p = 1, 2, \ldots, s$, $u_0 < u_1 < \ldots \ldots < u_s$.

Отсюда вытекает, что недиагональные элементы $F_{jk}(u)$ матрицы $F(u)$ также будут функциями ограниченной вариации. Без ограничения общности можно считать, что $F(-\infty) = 0$.

Теорема 3 вытекает из матричного варианта теоремы Бохнера — Хинчина. Его можно получить в качестве следствия из теоремы Бохнера — Хинчина. Приведем соответствующее доказательство для того, чтобы проиллюстрировать, как из «одномерных» теорем можно получить их многомерные аналоги.

*Доказательство теоремы* 3. Пусть $R(t)$ — непрерывная корреляционная матричная функция стационарного в широком смысле $d$-мерного векторного процесса $\zeta(t)$ с комплексными компонентами. Для любого $d$-мерного комплексного вектора $c$ введем случайную величину

$$\zeta_c(t) = (\zeta(t),\ c).$$

Тогда $\zeta_c(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс с непрерывной корреляционной функцией:

$$m_c = \mathsf{M}\zeta_c(t) = (\mathsf{M}\zeta(t),\ c) = \text{const},$$

$$R_c(t) \underset{\text{Def}}{=} \mathsf{M}\left([\zeta_c(t+s) - m_c]\,\overline{[\zeta_c(s) - m_c]}\right) = c^* R(t)\, c, \qquad t > 0.$$

В силу теоремы 2 корреляционная функция $R_c(t)$ может быть представлена в виде

$$R_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, dF_c(u),$$

где $F_c(u)$ — монотонно неубывающая функция от $u$ и $F_c(u) < \infty$.

Пусть $e^{(k)}$ — $d$-мерный вектор, у которого $k$-я компонента равна единице, а остальные нулю:

$$e_p^{(k)} = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ 1, & p = k. \end{cases}$$

Тогда $R_{e^{(k)}}(t) = R_{kk}(t)$ является корреляционной функцией $k$-й компоненты векторного процесса $\zeta(t)$. Положим

$$e^{(k,j)} = e^{(k)} + e^{(j)}, \qquad \tilde{e}^{(k,j)} = ie^{(k)} + e^{(j)}.$$

Имеем

$$R_{e^{(k,j)}}(t) = R_{kk}(t) + R_{kj}(t) + R_{jk}(t) + R_{jj}(t), \qquad k \neq j,$$

$$R_{\tilde{e}^{(k,j)}}(t) = R_{kk}(t) + iR_{kj}(t) - iR_{jk}(t) + R_{jj}(t),$$

откуда

$$R_{kj}(t) = \frac{R_{e^{(k,j)}}(t) - iR_{\tilde{e}^{(k,j)}}(t)}{2} - \frac{1-i}{2}\left(R_{e^{(k)}} - R_{e^{(j)}}\right).$$

Если положить

$$F_{kj}(u) = \frac{F_{e^{(k,j)}}(u) - iF_{\tilde{e}^{(k,j)}}(u)}{2} - \frac{1-i}{2}\left(F_{e^{(k)}}(u) - F_{e^{(j)}}(u)\right), \qquad k \neq j,$$

$$F_{kk}(u) = F_{e^{(k)}}(u),$$

то получим

$$R_{kj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, dF_{kj}(u), \qquad k, j = 1, \ldots, d.$$

При этом

$$R_c(t) = \sum_{k,j=1}^{d} \bar{c}_k R_{kj} c_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} d\left(\sum_{k,j=1}^{d} \bar{c}_k F_{kj}(t) c_j\right).$$

Из единственности спектральной функции $F_c(u)$ следует

$$F_c(u) = \sum_{k,j=1}^{d} \bar{c}_k F_{kj}(u) c_j.$$

Отсюда вытекает, что $\Delta F_c(u) = \sum_{k,j=1}^{d} \bar{c}_k \Delta F_{kj}(u) c_j \geqslant 0$, так что матрица $\Delta F(u)$ неотрицательно определенная и $F_{kk}(+\infty) < \infty$. Теперь остается показать, что для любой матричной функции $F(u)$, обладающей свойствами а) и б) теоремы 3, можно построить векторный стационарный в широком смысле процесс с корреляционной функцией (10). С этой целью сначала введем $2d$-мерный действительный гауссов процесс $(\xi(t), \eta(t))$, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — $d$-мерные действительные гауссовы процессы, определив его следующим образом. Пусть $\bar{a}_k = (a_k^1, \ldots, a_k^d)$, $\bar{b}_k = (b_k^1, \ldots, b_k^d)$, $k = 1, \ldots, n$, — две последовательности векторов в $\mathcal{R}^d$. Определим характеристическую функцию совместного распределения векторов $(\xi(t_1), \ldots$ $\ldots, \xi(t_n), \eta(t_1), \ldots, \eta(t_n))$ с помощью формулы

$$\varphi_{t_1, \ldots, t_n}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2} K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\right\},$$

где

$$K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = \sum_{k, j=1}^{n} \bar{a}_k^* R'(t_k - t_j)\bar{a}_j + \\ + \sum_{k, j=1}^{n} [a_k^* R''(t_k - t_j)\bar{b}_j + \bar{b}_k^* R''(t_k - t_j)\bar{a}_j] + \sum_{k, j=1}^{n} \bar{b}_k^* R'(t_k - t_j)\bar{b}_j,$$

$$R'(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tu)\, dF(u), \quad R''(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tu)\, dF(u),$$

$$R'(t) - iR''(t) = \frac{1}{2} R(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, dF(u).$$

Для того, чтобы это определение имело смысл, т. е. чтобы функция $\varphi_{t_1 \ldots t_n}(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n, \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n)$ действительно была характеристической функцией совместного распределения $2dn$ случайных величин, необходимо и достаточно, чтобы функция $K(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n, \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n)$ была неотрицательно определенной квадратической формой своих аргументов. Как нетрудно увидеть,

$$K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum z_k^* R(t_k - t_j) z_j,$$

где $z_k = a_k - ib_k$, $k = 1, \ldots, n$. С другой стороны,

$$\sum z_k^* R(t_k - t_j) z_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-it_k u} z_k\right)^* dF(u) \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-it_k u} z_k\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, $\varphi_{t_1 \ldots t_n}$ действительно является характеристической функцией. Легко убедиться, что семейство распределений $\{F_{t_1, \ldots, t_n}\}$, соответствующих характеристическим функциям $\varphi_{t_1 \ldots t_n}$, удовлетворяет условиям согласованности (§ 1), так что оно определяет гауссов случайный процесс в широком смысле. При этом

$$\mathsf{M}\xi(t) = \mathsf{M}\eta(t) = 0, \quad \mathsf{M}\xi(t)\xi(s) = \mathsf{M}\eta(t)\eta(s) = R'(t, s),$$
$$\mathsf{M}\xi(t)\eta(s) = R''(t - s).$$

Положим $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$. Процесс $\zeta(t)$ является векторным гауссовым процессом с комплексными компонентами. Имеем

$$\mathsf{M}\zeta(t) = 0, \quad \mathsf{M}\zeta(t)\zeta^*(s) = \mathsf{M}[\xi(t)\xi^*(s) + \eta(t)\eta^*(s)] -$$

$$- i\mathsf{M}[\xi(t)\eta^*(s) + \eta(t)\xi^*(s)] = 2R(t-s) - 2iR''(t-s) = R(t-s).$$

Итак, $\xi(t)$ — гауссов стационарный в широком смысле процесс с корреляционной матричной функцией $R(t-s)$. ■

Понятие стационарности в широком смысле может быть обобщено на случайные функции нескольких аргументов. Пусть $\zeta(x) = (\zeta^1(x), \ldots, \zeta^d(x))$ — векторная случайная функция в широком смысле, возможно с комплексными координатами, определенная для всех $x \in \mathcal{R}^m$. Будем называть ее *случайным полем*. Случайное поле $\zeta(x)$ назовем *однородным*, если

$$\mathsf{M}\zeta(x) = m = \mathrm{const}, \quad \mathsf{M}(\zeta(x) - m)(\zeta(y) - m)^* = R(x-y),$$

где $R(x)$ — непрерывная матричная функция. Ее называют *корреляционной функцией однородного поля*. Матричная функция $R(x)$ неотрицательно определена. Это означает, что для любых $d$-мерных комплексных векторов $z_k$, точек $x_k \in \mathcal{R}^m$, $k = 1, \ldots, n$, и любого целого $n$

$$\sum_{k,j=1}^{n} z_k^* R(x_k - x_j) z_j \geqslant 0.$$

Теорема Бохнера — Хинчина легко обобщается на неотрицательно определенные функции аргумента $x \in \mathcal{R}^m$. Так же как и теорему 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы матричная функция $R(x)$, $x \in \mathcal{R}^d$, была корреляционной функцией однородного поля, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$R(x) = \int_{\mathcal{R}^d} e^{i(x,u)} F(du), \tag{11}$$

*где $F(A)$ — матричнозначная комплексная счетно аддитивная функция множеств, определенная на борелевских множествах $\mathcal{R}^m$, такая, что $z^*F(A)z \geqslant 0$ для любого комплексного вектора $z$ и любого множества $A \in \mathfrak{B}^m$. При этом $\mathrm{Sp}\, F(\mathcal{R}^m) < \infty$.*

Случайное поле $\zeta(x)$ называют *однородным* и *изотропным*, если его корреляционная функция $R(x)$ зависит только от длины вектора $x$. Таким образом, для однородного и изотропного случайного поля

$$\mathsf{M}(\zeta(x) - m)(\zeta(y) - m)^* = R(\rho),$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — расстояние между точками $x$ и $y$.

Найдем представление корреляционной функции однородного и изотропного поля. С этой целью рассмотрим выражение для корреляционной функции однородного поля

$$R(\rho)=\int_{\mathcal{R}^m} e^{i(x,u)}F(du)$$

и проинтегрируем его по поверхности сферы $S_\rho$ радиуса $\rho$. Меняя порядок интегрирования, получим

$$R(\rho)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}\rho^{m-1}}\int_{\mathcal{R}^m}\left\{\int_{S_\rho} e^{i(x,u)}\,ds\right\}F(du). \tag{12}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция в $\mathcal{R}^m$, $V_\rho$ — сфера радиуса $\rho$ с центром в фиксированной точке. Тогда

$$\frac{d}{d\rho}\int_{V_\rho} f(x)\,dx^1\ldots dx^m=\int_{S_\rho} f(x)\,ds,$$

где интеграл справа взят по поверхности $S_\rho$ сферы $V_\rho$. Применим эту формулу к вычислению внутреннего интеграла в правой части формулы (12). Переходя к сферическим координатам в $n$-мерном пространстве (см. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчислений, т. 3, «Наука», М., стр. 484), приняв за $\varphi_1$ угол между векторами $x$ и $u$, получим

$$\int_{V_\rho} e^{i(x,u)}dx^1\ldots dx^m=\int_0^\rho\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{ir|u|\cos\varphi_1}r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\times$$

$$\times\sin^{m-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\,dr\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{m-2}=$$

$$=\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^\rho\int_0^\pi e^{ir|u|\cos\varphi_1}r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\,dr\,d\varphi_1.$$

Далее,

$$\int_0^\pi e^{ir|u|\cos\varphi_1}\sin^{m-2}\varphi_1\,d\varphi_1=\sum_{k=0}^\infty\int_0^\pi\frac{(ir|u|\cos\varphi_1)^k}{k!}\sin^{m-2}\varphi_1\,d\varphi_1=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{r^{2k}|u|^{2k}}{(2k)!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+m}{2}\right)}$$

и

$$I = \int_0^\rho \int_0^\pi e^{ir\,|u|\cos\varphi_1} r^{m-1} \sin^{m-2}\varphi_1\, d\varphi_1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k+m}\,|u|^{2k}}{(2k)!\,(2k+m)} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+m}{2}\right)}.$$

Воспользуемся формулой удвоения в теории гамма-функции:

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}} \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)}.$$

Получим

$$I = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}-1} \rho^{\frac{m}{2}}}{|u|^{\frac{m}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho\,|u|}{2}\right)^{2k+\frac{m}{2}}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{m}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \left(\frac{2\rho}{|u|}\right)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\rho\,|u|),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода $n$-го порядка. Следовательно,

$$\int_{V_\rho} e^{i(x,\,u)}\, dx^1 \ldots dx^n = \left(\frac{2\pi\rho}{|u|}\right)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\rho\,|u|).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{S_\rho} e^{i(x,\,u)}\, ds = \left(\frac{2\pi\rho}{|u|}\right)^{\frac{m}{2}} |u|\, J_{\frac{m-2}{2}}(\rho\,|u|).$$

В частности, рассматриваемый нами интеграл зависит от $|u|$. Введем положительный параметр $\lambda$ и положим

$$g(\lambda) = F(V_\lambda), \qquad \lambda > 0.$$

Тогда последняя формула и формула (12) дают

$$R(\rho) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda\rho)}{(\lambda\rho)^{\frac{m-2}{2}}}\, dg(\lambda), \tag{13}$$

где $g(\lambda)$ — монотонно возрастающая функция, $g(-0) = 0$ и

$$g(+\infty) = F(\mathscr{R}^m) = R(0) < \infty.$$

Мы получили, таким образом, следующую теорему.

Теорема 5. *Для того чтобы* $R(\rho)$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ *была корреляционной функцией однородного и изотропного случайного поля, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить с помощью формулы* (13), *где* $g(\lambda)$ — *ограниченная монотонно неубывающая функция.*

При $m = 2$ формула (13) принимает следующий простой вид:

$$R(\rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\, dg(\lambda), \tag{14}$$

а при $m = 3$

$$R(\rho) = 2\int_0^\infty \frac{\sin\lambda\rho}{\lambda\rho}\, dg(\lambda). \tag{15}$$

ГЛАВА II

# АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## § 1. Аксиомы теории вероятностей и основные определения

В настоящем параграфе вводится ряд основных понятий теории вероятностей и приводятся, в основном без доказательств, их наиболее важные свойства, непосредственно вытекающие из теории меры. Доказательства приводимых утверждений можно найти в учебниках по теории меры (см., например, А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин [1]).

**События.** Допустим, что при выполнении определенного комплекса условий $У$ имеется возможность производить некоторые эксперименты. Назовем их *допустимыми* (относительно заданного комплекса условий $У$). Наблюдая результаты данного эксперимента, можно утверждать, что какие-то события в этом эксперименте осуществились, а иные не осуществились. В теории вероятностей каждый эксперимент полностью характеризуется этими событиями, т. е. непустым множеством событий, о каждом из которых можно сказать, осуществилось ли оно в эксперименте или нет. Условимся называть соответствующие события *наблюдаемыми* (в данном эксперименте).

Для большей наглядности изложения целесообразно воспользоваться теоретико-множественной интерпретацией вводимых понятий и соотношений. В этой интерпретации исходят из некоторого множества $\Omega$ и каждое событие, наблюдаемое в каком-либо допустимом эксперименте, отождествляется с некоторым подмножеством множества $\Omega$. При этом алгебраическим соотношениям и действиям над событиями соответствуют аналогичные соотношения и действия над множествами. Например, если из события $A$ следует событие $B$ $(A \subset B)$, то множество $A$ содержится во множестве $B$. Событию «или $A$, или $B$» соответствует сумма множеств $A$ и $B$ $(A \cup B)$, совмещению событий $A$ и $B$ — пересечение множеств $(A \cap B)$, событию противоположному $A$ $(\bar{A})$ — дополнение к $A$ в $\Omega$, т. е. множество всех точек $\Omega$, не входящих в $A$. Если два события несовместимы, то соответствующие им множества не имеют общих точек.

В свою очередь каждое подмножество $\Omega$ называют *событием*, но оно не обязано быть наблюдаемым для какого-либо из рассматриваемых экспериментов.

Точки из $\Omega$ называют *элементарными событиями*, само $\Omega$ — *достоверным событием*, так как оно соответствует событию, происходящему в любом эксперименте. Пустое подмножество $\Omega$ называют *невозможным событием*.

Мы будем пользоваться еще следующими обозначениями и определениями:

$\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} A_\alpha$ — сумма множества событий $A_\alpha$, перенумерованных с помощью индекса $\alpha$, пробегающего множество I.

$\bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} A_\alpha$ — совмещение множества событий $A_\alpha$, где $\alpha$ принимает значения из I.

$A \setminus B$ — разность событий $A$ и $B$ (событие «$A$, но не $B$»).

$A \Delta B$ — симметрическая разность событий $A$ и $B$ (событие «или $A$, или $B$, но не их совмещение»).

$\overline{\lim}\, A_n$ — верхний предел последовательности событий $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — событие, происходящее тогда и только тогда, когда осуществляется бесконечная последовательность событий $A_n$ $(\overline{\lim}\, A_n = \{\text{б. мн. } A_n\})$.

$\underline{\lim}\, A_n$ — нижний предел последовательности событий $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — событие, происходящее тогда и только тогда, когда осуществляются все события $A_n$, начиная с некоторого номера. Нетрудно заметить, что

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \qquad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n. \tag{1}$$

Например, событие, написанное в правой части первого равенства, происходит тогда и только тогда, когда для любого $m$ найдется такое $n \geqslant m$, что событие $A_n$ осуществляется. Последнее равносильно тому, что существует бесконечная подпоследовательность осуществляющихся событий $A_n$.

В дальнейшем часто применяются следующие формулы, выражающие соотношение двойственности операций суммирования и совмещения событий:

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} (A \setminus B_\alpha) \quad \Bigl(\text{или } \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} B_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} \bar{B}_\alpha\Bigr), \tag{2}$$

$$A \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} (A \setminus B_\alpha) \quad \Bigl(\text{или } \overline{\bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} B_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} \bar{B}_\alpha\Bigr). \tag{3}$$

Проверка этих формул не составляет затруднений, причем одна из них следует из другой.

**Эксперимент.** Как было сказано ранее, каждый допустимый при данном комплексе условий $У$ эксперимент полностью описывается некоторым классом (совокупностью) событий, наблюдаемых в этом эксперименте. Условимся классы событий (классы подмножеств множества $\Omega$) обозначать готическими буквами $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{F}, \ldots$

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс событий, наблюдаемых в данном эксперименте. Если $A_n \in \mathfrak{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то, очевидно, событие $\bigcup_n A_n$ (оно осуществляется тогда и только тогда, когда осуществляется одно из $A_n$), событие $\bigcap_n A_n$ (оно осуществляется тогда и только тогда, когда осуществляются все $A_n$) и событие $\bar{A}_n$ (оно осуществляется тогда и только тогда, когда не осуществляется $A_n$) также являются наблюдаемыми.

Определение. *Класс событий* (*множеств*) $\mathfrak{A}$ *называется алгеброй, если* $\mathfrak{A}$ *содержит* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, *каковы бы ни были* $A$ *и* $B$ *из* $\mathfrak{A}$.

*Алгебра событий* (*множеств*) *называется* $\sigma$-*алгеброй, если* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ *для любой последовательности* $\{A_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, $A_n \in \mathfrak{A}$.

События из $\sigma$-алгебры $\mathfrak{A}$ называются $\mathfrak{A}$-*измеримыми*.

Из определения $\sigma$-алгебры следует: если $A_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Это вытекает из формулы (3): $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n}$.

В соответствии с предыдущим замечанием условимся считать, что класс наблюдаемых в данном эксперименте событий является $\sigma$-алгеброй.

Множество экспериментов можно упорядочить. А именно, если экспериментам $Э_1$ и $Э_2$ соответствуют $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ наблюдаемых событий и $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, то будем говорить, что эксперимент $Э_2$ *более информативен*, чем $Э_1$. С другой стороны, если дано некоторое множество экспериментов $\{Э_\alpha, \alpha \in \mathrm{I}\}$ и $\mathfrak{F}_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{I})$ — соответствующие $\sigma$-алгебры наблюдаемых событий, то множество $\{Э_\alpha, \alpha \in \mathrm{I}\}$ можно рассматривать как один составной эксперимент, если считать наблюдаемыми в этом эксперименте события из минимальной $\sigma$-алгебры, содержащей все $\mathfrak{F}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{I}$. Такую минимальную $\sigma$-алгебру условимся обозначать $\sigma\{\mathfrak{F}_\alpha, \alpha \in \mathrm{I}\}$. Ее существование вытекает из следующего предложения:

*Пусть* $\mathfrak{M}$ — *произвольный класс подмножеств* $\Omega$. *Всегда существует минимальная* $\sigma$-*алгебра множеств, содержащая* $\mathfrak{M}$.

Действительно, всегда существует $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathfrak{M}$. Таковой является, например, $\sigma$-алгебра всех подмножеств $\Omega$. Рассмотрим пересечение всех $\sigma$-алгебр, содержащих $\mathfrak{M}$. Оно является $\sigma$-алгеброй, и притом, по построению, минимальной, содержащей $\mathfrak{M}$.

Минимальную $\sigma$-алгебру, содержащую класс множеств $\mathfrak{M}$, обозначают $\sigma\{\mathfrak{M}\}$ и называют *$\sigma$-алгеброй, порожденной классом* $\mathfrak{M}$.

В ряде случаев требуется установить, что некоторый класс событий содержит данную $\sigma$-алгебру. Следующий результат при этом часто бывает полезным.

Теорема 1. *Если класс множеств $\mathfrak{M}$ содержит некоторую алгебру $\mathfrak{A}$ и монотонен, т. е. если вместе с произвольной монотонно возрастающей (убывающей) последовательностью множеств $A_n \in \mathfrak{M}$ он содержит и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, то $\mathfrak{M}$ содержит $\sigma$-алгебру $\sigma\{\mathfrak{A}\}$.*

**Вероятность.** Пусть $\mathfrak{S}$ — $\sigma$-алгебра всех наблюдаемых событий в данном множестве допустимых экспериментов. Вероятность $\mathsf{P}(A)$ события $A$, $A \in \mathfrak{S}$, характеризует связь между комплексом условий $У$ и событиями из $\mathfrak{S}$, не зависящую от производимого эксперимента. Естественнонаучная интерпретация этой связи достаточно хорошо известна, и мы о ней не напоминаем. Аксиоматически понятие вероятности вводится следующим образом (А. Н. Колмогоров [2], [7]).

Определение. *Вероятностью $\mathsf{P}(\cdot)$ называется числовая функция, определенная на $\mathfrak{S}$, обладающая следующими свойствами:*

а) $$\mathsf{P}(A) \geqslant 0, \quad \mathsf{P}(\Omega) = 1,$$

б) $$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

*для произвольной последовательности попарно несовместимых событий $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$ ($A_n \cap A_r = \varnothing$ при $n \neq r$, $A_n \in \mathfrak{S}$).*

Таким образом, функция $\mathsf{P}$ является мерой, заданной на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющей условию нормировки $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ (вероятностной мерой).

Определение. *Множество $\Omega$ с выделенной в нем $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{S}$ всех наблюдаемых событий и вероятностной мерой $\mathsf{P}$, заданной на $\mathfrak{S}$, называется вероятностным пространством* $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$.

Вероятность обладает следующими свойствами:

1. $\mathsf{P}(\bar{A} = 1 - \mathsf{P}(A)$. В частности, $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.

2. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$. В частности, если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$.

3. Если $A_n \subset A_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mathsf{P}(A_n). \tag{4}$$

4. Если $A_n \supset A_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mathsf{P}(A_n). \tag{5}$$

В частности, если $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то

$$\mathsf{P}(A_n) \to 0. \tag{6}$$

Эти свойства вероятности хорошо известны из теории меры. В ряде случаев бывает целесообразным расширить область определения вероятности $\mathsf{P}$ с помощью следующей операции, которую называют пополнением вероятностного пространства.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ класс всех наблюдаемых событий $N$ вероятности 0, $\mathfrak{N} = \{N\colon \mathsf{P}(N) = 0, N \in \mathfrak{S}\}$, а через $\tilde{\mathfrak{N}}$ — класс всех событий $A$, для которых существует $N \in \mathfrak{N}$ такое, что $A \subset N$, $\tilde{\mathfrak{N}} = \{A\colon\ A \subset N,\ \ N \in \mathfrak{N}\}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ — класс событий $\tilde{S}$ вида $\tilde{S} = S \cup A$, $S \in \mathfrak{S}$, $A \in \mathfrak{N}$. Нетрудно проверить, что $\tilde{\mathfrak{S}}$ является $\sigma$-алгеброй событий.

Определим на $\tilde{\mathfrak{S}}$ вероятность $\tilde{\mathsf{P}}$, положив $\tilde{\mathsf{P}}(S \cup A) = \mathsf{P}(S)$, если $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathfrak{N}$. Это определение однозначно и $\tilde{\mathsf{P}}$ — счетно аддитивная функция на $\tilde{\mathfrak{S}}$. Таким образом, $\{\Omega, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathsf{P}}\}$ является вероятностным пространством.

Операцию перехода от $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ к $\{\Omega, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathsf{P}}\}$ называют *пополнением вероятностного пространства.* Если $\tilde{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}$, то $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$ и вероятностное пространство называется *полным.* Очевидно, что $\{\Omega, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathsf{P}}\}$ является полным вероятностным пространством. В полном вероятностном пространстве произвольное подмножество наблюдаемого события вероятности 0 само является наблюдаемым событием.

**Случайные элементы.** Во многих случаях класс наблюдаемых в данном эксперименте событий задается следующим образом. Принимают, что результат эксперимента описывается точкой некоторого множества $X$. Например, если эксперимент состоит в измерении в данный момент времени и в данной точке пространства скорости ветра, то в качестве $X$ можно принять трехмерное векторное пространство. Если же скорость ветра измеряется непрерывно в течение некоторого промежутка времени $[t_0, t_1]$ и предполагается, что соответствующая функция непрерывна, то в качестве $X$ можно взять пространство непрерывных функций на отрезке $[t_0, t_1]$ со значениями в трехмерном векторном пространстве.

Определение. *Множество $X$ с выделенной в нем $\sigma$-алгеброй подмножеств $\mathfrak{B}$ называется измеримым пространством $\{X, \mathfrak{B}\}$.*

Точку $x$, характеризующую результат эксперимента, обозначим через $\zeta$. Предположим, что наблюдаемыми событиями являются события вида $\{\zeta \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}$. Из исходных предположений следует, что событию $\{\zeta \in B\}$ соответствует в $\Omega$ некоторое множество $S = S_B \in \mathfrak{S}$. Таким образом, рассматриваемый эксперимент определяет некоторое отображение $g$ $\sigma$-алгебры $\mathfrak{B}$ в $\sigma$-алгебру $\mathfrak{S}$. Это отображение обладает следующими свойствами:

а) $g(X) = \Omega$;

б) если $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $B_i \in \mathfrak{B}$, то

$$g(B_1) \cap g(B_2) = \varnothing;$$

в) $g\left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} g(B_\alpha)$, где $\mathrm{I}$ — произвольное множество индексов, $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.

Из а) — в) легко вытекает, что

г) $g(\varnothing) = \varnothing$;

д) $g(\bar{B}) = \overline{g(B)}$;

е) $g(B_2 \setminus B_1) = g(B_2) \setminus g(B_1)$;

ж) $g\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} g(B_\alpha)$.

Будем говорить, что отображение $g$ $\sigma$-алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{S}$, обладающее свойствами а) — в), порождает в $\{X, \mathfrak{B}\}$ некоторый случайный элемент $\zeta$.

Положим $m(B) = \mathsf{P}(S)$ $(B \in \mathfrak{B})$. Очевидно, что $m(B)$ является вероятностной мерой и $\{X, \mathfrak{B}, m\}$ — вероятностным пространством. Меру $m$ называют *распределением случайного элемента* $\zeta$. При этом $m(B) = \mathsf{P}\{\zeta \in B\}$. В некоторых случаях удобно пользоваться обозначением

$$m = \mathsf{P}g \qquad (\mathsf{P}g(B) = \mathsf{P}(g(B))).$$

Если $\mathfrak{B}$ содержит одноточечные множества (т. е. множества $\{x\}$, состоящие из одной точки $x$, $x \in X$), то отображение $g$ можно описать следующим образом.

Пусть $g\{x\} = S_x$. Заставляя $x$ пробегать $X$, получим разбиение пространства $\Omega$ на семейство $\mathfrak{S}$-измеримых множеств $\{S_x, x \in X\}$ попарно без общих точек:

$$S_{x_1} \cap S_{x_2} = \varnothing \quad \text{при} \quad x_1 \neq x_2, \quad \bigcup_{x \in X} S_x = \Omega.$$

Определим отображение $f$ множества $\Omega$ в $X$, положив $f(\omega)=x$, если $\omega\in S_x$. При этом $S_B=g(B)=\{\omega\colon f(\omega)\in B\}$. Таким образом, $g(B)$ является прообразом множества $B$ при точечном отображении $f$ пространства $\Omega$ в $X$, $g(B)=f^{-1}(B)$. С другой стороны, пусть $f$ — произвольное отображение $\Omega$ в $X$. Тогда $f^{-1}(B)$ обладает свойствами а) — в), и если для любого $B\in\mathfrak{B}$

$$f^{-1}(B)=\{\omega\colon f(\omega)\in B\}\in\mathfrak{S},\tag{7}$$

то $f^{-1}$ является случайным элементом в $\{X,\mathfrak{B}\}$.

Определение. *Отображение $f$ пространства $\Omega$ в $X$, удовлетворяющее* (7), *называют измеримым отображением* $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ *в* $\{X,\mathfrak{B}\}$.

Из предыдущего следует: произвольное измеримое точечное отображение $f$ $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ в $\{X,\mathfrak{B}\}$ определяет случайный элемент $\zeta=f(\omega)$ в $\{X,\mathfrak{B}\}$. Обратно, если одноточечные множества $X$ $\mathfrak{B}$-измеримы, то произвольный случайный элемент в $\{X,\mathfrak{B}\}$ задается с помощью измеримого точечного отображения $f\colon\Omega\to X$. В частности, последнее имеет место, если $X$ — метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — $\sigma$-алгебра его борелевских множеств.

Проверка выполнения условия измеримости (7) в ряде случаев облегчается следующим предложением.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{B}=\sigma\{\mathfrak{M}\}$. Для того чтобы $f$ было измеримым отображением $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ в $\{X,\mathfrak{B}\}$, достаточно, чтобы условие* (7) *выполнялось для произвольного $B\in\mathfrak{M}$.*

Действительно, класс множеств, для которых (7) имеет место, является $\sigma$-алгеброй. Поэтому, если равенство (7) выполняется для всех $B$ из $\mathfrak{M}$, то оно выполняется и для всех $B\in\sigma\{\mathfrak{M}\}$. ■

Пусть $\zeta$ — произвольный случайный элемент в $\{X,\mathfrak{B}\}$. Из свойств а) — в) отображения $g$ вытекает, что класс событий

$$\sigma\{\zeta\}\underset{\text{Def}}{=}\{S\colon S=g(B),\ B\in\mathfrak{B}\}\tag{8}$$

является $\sigma$-алгеброй. Она называется *$\sigma$-алгеброй, порожденной случайным элементом* $\zeta$, и является классом событий, наблюдаемых в том эксперименте, возможные исходы которого описываются случайным элементом $\zeta$.

В дальнейшем рассматриваются главным образом случайные элементы, определяемые точечным отображением $\Omega$ в $X$, т. е. элементы $\zeta=f(\omega)$.

Пусть дана последовательность случайных элементов $\zeta_k=f_k(\omega)$, $k=1,\ldots,n$ со значениями соответственно в $\{X_k,\mathfrak{B}_k\}$. Эту последовательность можно рассматривать как один случайный элемент $\zeta$ со значениями в измеримом пространстве $\{Y,\mathfrak{B}\}$, определяемый следующим образом. Пусть $Y$ — множество всех упорядоченных последовательностей $y=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где $x_k\in X_k$. Пространство $Y$ называют *произведением* *пространств* $X_1, \ldots, X_n$ и пишут $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$ или $Y = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. В $Y$ рассмотрим класс множеств $B$ вида $B = \prod_{k=1}^{n} B_k$, $B_k \in \mathfrak{B}_k$, т. е.

$$B = \{y = (x_1, x_2, \ldots, x_n): x_k \in B_k, \ k = 1, \ldots, n\}.$$

Множества этого вида будем называть *кирпичами* в $Y$. Минимальную $\sigma$-алгебру $\mathfrak{B}$, содержащую все кирпичи, называют *произведением $\sigma$-алгебр* $\mathfrak{B}_k$ и пишут $\mathfrak{B} = \sigma\{\mathfrak{B}_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$, а измеримое пространство $\{Y, \mathfrak{B}\} = \prod_{k=1}^{n} \{X_k, \mathfrak{B}_k\}$ — *прямым произведением пространств* $\{X_k, \mathfrak{B}_k\}$.

Рассмотрим отображение $f$ $\Omega$ в $Y$, определяемое соотношением $Y = f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$. Если $B = \prod_{k=1}^{n} B_k$, то $f^{-1}(B) = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}(B_k) \in \mathfrak{S}$.

Класс $\mathfrak{A}$ множеств $A$, для которых $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}$, является $\sigma$-алгеброй (в силу того, что прообраз суммы, пересечения и разности множеств равен, соответственно, сумме, пересечению и разности прообразов). Так как $\mathfrak{A}$ содержит кирпичи, то он содержит и минимальную $\sigma$-алгебру $\mathfrak{B}$, порожденную кирпичами. Итак, $f$ есть измеримое отображение $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$ в $\{Y, \mathfrak{B}\}$. Будем говорить, что случайный элемент $\zeta = f(\omega)$ является прямым произведением случайных элементов $\zeta_k = f_k(\omega)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Случайный элемент $\zeta = f(\omega)$, принимающий действительные значения ($X = \mathscr{R}^1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на действительной оси), называют *случайной величиной*. Случайный элемент $\zeta$ со значениями в $n$-мерном действительном пространстве $\mathscr{R}^n$ называют *случайным вектором* (при этом $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^n$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств $n$-мерного пространства).

**Случайные величины.** Произвольная случайная величина $\zeta$ задается некоторой действительной функцией $f(\omega)$, обладающей свойством $f^{-1}(B) \in \mathfrak{S}$ для любого борелевского множества $B \in \mathscr{R}^1$. Так как $\sigma$-алгебра борелевских множеств на прямой порождается системой бесконечных интервалов $\{(-\infty, a), a \in \mathscr{R}^1\}$, то для измеримости $f$ достаточно, чтобы при любом $a$ $f^{-1}(-\infty, a) = \{\omega: f(\omega) < a\} \in \mathfrak{S}$. Последнее требование обычно фигурирует в определении действительной $\mathfrak{S}$-измеримой функции, заданной на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$. Таким образом, понятие случайной величины совпадает с понятием действительной $\mathfrak{S}$-измеримой функции и общие свойства случайных величин совпадают с общими свойствами действительных измеримых функций.

Заметим, что в некоторых случаях приходится рассматривать случайные элементы со значениями из расширенной числовой прямой $\tilde{\mathscr{R}}^1 = [-\infty, +\infty]$. Такие случайные элементы называют *обобщенными случайными величинами.* При этом роль $\sigma$-алгебры $\mathfrak{B}$ играет $\sigma$-алгебра $\tilde{\mathfrak{B}}^1$, состоящая из множеств вида

$$B,\ B\cup\{-\infty\},\quad B\cup\{+\infty\},\quad B\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\qquad (B\in\mathfrak{B}^1).$$

Отметим некоторые свойства случайных величин.

Теорема 3. *Борелевская функция* $\eta = g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = g(f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ случайных величин $\xi_k = f_k(\omega)$, $k = 1, \ldots \ldots, n$, *также является случайной величиной, а* $\xi_1/\xi_2$, $\sup \xi_n$, $\inf \xi_n$, $\overline{\lim}\, \xi_n$, $\underline{\lim}\, \xi_n$ — *обобщенными случайными величинами.*

При этом частное двух случайных величин условимся считать равным 0, если числитель и знаменатель одновременно равны нулю.

Указанные свойства случайных величин (измеримых функций) хорошо известны из теории меры.

Важным примером случайных величин являются индикаторы измеримых событий. *Индикатор* $\chi(A) = \chi(A, \omega)$ события $A$ определяется следующим образом.

Определение. $\chi(A, \omega) = 1$, *если* $\omega \in A$, *и* $\chi(A, \omega) = 0$, *если* $\omega \bar{\in} A$.

Алгебраическим действиям над событиями соответствуют аналогичные действия над их индикаторами. Действительно,

$$\chi\left(\bigcap_1^\infty A_n\right) = \prod_1^\infty \chi(A_n),$$

$$\chi\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty \chi(A_n), \text{ если } A_n \cap A_r = \varnothing \text{ при } n \neq r,$$

$$\chi(A \setminus B) = \chi(A) - \chi(B), \quad \text{если} \quad B \subset A,$$

$$\chi(\overline{\lim}\, A_n) = \overline{\lim}\, \chi(A_n),$$

$$\chi(\underline{\lim}\, A_n) = \underline{\lim}\, \chi(A_n).$$

Случайная величина, принимающая только конечное или счетное множество значений, называется *дискретной.* Если $\{c_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — множество возможных значений случайной величины $\xi$, $A_k$ — событие $\{\xi = c_n\}$, то $\xi = \sum_n c_n \chi(A_n)$.

Теорема 4. *Для произвольной случайной величины* $\xi$ *существует последовательность дискретных случайных величин* $\xi_n$, *принимающих только конечное число различных значений и сходящихся к $\xi$ при каждом $\omega$. Если $\xi$ неотрицательна, то существует монотонно неубывающая последовательность дискретных случайных величин $\xi'_n$ таких, что $0 \leqslant \xi - \xi'_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ при любом $\omega$.*

Действительно, если положить $\xi_n = \sum_{j=-n}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(j + \frac{k-1}{n}\right) \times \chi(A_{jk})$, где $A_{jk} = \left\{\omega\colon j + \frac{k-1}{n} \leqslant \xi < j + \frac{k}{n}\right\}$, то при $|\xi| < n$ будем иметь $0 \leqslant \xi - \xi_n \leqslant \frac{1}{n}$. Положив $\xi'_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi(A'_{nk})$, где $A'_{nk} = \left\{\omega\colon \frac{k}{2^n} \leqslant \xi < \frac{k+1}{2^n}\right\}$, получим $0 \leqslant \xi - \xi'_n < \frac{1}{2^n}$ для всех $\omega$, при которых $\xi \geqslant 0$, причем последовательность $\xi'_n$ монотонно не убывает. ■

Пусть значение случайной величины $\xi$ можно определить по некоторому эксперименту, результаты которого описываются случайным элементом $\zeta$ со значениями в измеримом пространстве $\{X, \mathfrak{B}\}$. Естественно ожидать, что $\xi$ является $\mathfrak{B}$-измеримой функцией от случайного элемента $\zeta$. Точная формулировка этого соображения содержится в следующем предложении.

Теорема 5. *Если $\xi$ — случайная величина, измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_\zeta$, порожденной случайным элементом $\zeta = f(\omega)$ на измеримом пространстве $\{X, \mathfrak{B}\}$, то найдется такая $\mathfrak{B}$-измеримая функция $g(x)$, $x \in X$, что $\xi = g(\zeta)$.*

*Доказательство.* Допустим сначала, что $\xi$ принимает конечное или счетное множество значений $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $A_n = \{\omega\colon \xi = a_n\}$. Так как $\xi$ $\mathfrak{F}_\zeta$-измеримо, то $A_n \in \mathfrak{F}_\zeta$ и, следовательно, найдется такое $B_n \in \mathfrak{B}$, что $f^{-1}(B_n) = A_n$. Пусть $C_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. Тогда $C_n \in \mathfrak{B}$, $C_n \cap C_m = \varnothing$ при $n \neq m$, $f^{-1}(C_n) = f^{-1}(B_n) \setminus \bigcup_1^{n-1} f^{-1}(B_k) = A_n \setminus \bigcup_1^{n-1} A_k = A_n$ и $f^{-1}\left(\bigcup_1^{\infty} C_n\right) = \bigcup_1^{\infty} A_n = \Omega$, т. е. $f(\Omega) \subset \bigcup_1^{\infty} C_n$. Положим $g(x) = \sum a_n \chi(C_n, x)$. Тогда $\xi = g(\zeta) = g(f(\omega))$. Перейдем к общему случаю. Существует последовательность дискретных случайных величин $\xi_n$, $\mathfrak{F}_\zeta$-измеримых и сходящихся к $\xi$ при каждом $\omega$. По предыдущему $\xi_n = g_n(\zeta)$, где $g_n(x)$ — $\mathfrak{B}$-измеримая функция. Множество точек $S$, в которых $g_n(x)$ сходится к некоторому пределу, $\mathfrak{B}$-измеримо, содержит $f(\Omega)$ и при каждом $x = f(\omega) = \zeta$ существует $\lim g_n(x) = \xi$. Положим $g(x) = \lim g_n(x)$ при $x \in S$ и $g(x) = 0$ при $x \overline{\in} S$. Тогда $g(x)$ — $\mathfrak{B}$-измеримая функция и $g(\zeta) = \xi$. ■

Определение. *$\sigma$-алгебра $\mathfrak{F}$ называется простой, если она состоит из $\varnothing$ и всех множеств вида $F=\sum_j E_{n_j}$, где $\{E_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ — счетная (или конечная) последовательность попарно несовместимых событий и $\bigcup_n E_n=\Omega$. Множества $E_n$ будем называть атомами $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$.*

Теорема 6. *Если случайная величина $\eta$ измерима относительно простой $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$, то она постоянна на атомах $\mathfrak{F}$:*

$$\eta=\sum_n a_n\chi(E_n).$$

Действительно, случайную величину $\eta$ можно аппроксимировать сходящейся при каждом $\omega$ последовательностью случайных величин $\eta_n$, постоянных на атомах $E_n$ (теорема 4). Отсюда следует постоянство $\eta$ на множествах $E_n$. ■

Говорят, что некоторое утверждение или свойство, относящееся к вероятностному пространству $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, имеет место *с вероятностью* 1 или *почти наверное*, если событие, состоящее в том, что оно выполняется, $\mathfrak{S}$-измеримо и имеет вероятность, равную 1. Если $\xi=\eta$ с вероятностью 1, то случайные величины $\xi$ и $\eta$ называются *эквивалентными*. Пишут также, что $\xi=\eta(\mathrm{mod}\,\mathsf{P})$.

Теорема 7. *Если $\xi_n=\eta_n\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P})$, $n=1, 2, \ldots$, и $h(t_1, \ldots, t_n)$ — борелевская функция в $\mathcal{R}^n$, то следующие равенства выполняются с вероятностью* 1:

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_n)=h(\eta_1, \ldots, \eta_n), \quad \sup\xi_n=\sup\eta_n,$$
$$\inf\xi_n=\inf\eta_n, \quad \overline{\lim}\,\xi_n=\overline{\lim}\,\eta_n, \quad \underline{\lim}\,\xi_n=\underline{\lim}\,\eta_n.$$

Это предложение показывает, что обычно аналитические операции преобразуют системы эквивалентных случайных величин в эквивалентные, так что можно говорить об операциях над классами эквивалентных величин.

**Сходимость с вероятностью 1.** Пусть $\xi_n$, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность случайных величин. Событие $S=\{\lim\xi_n$ существует$\}$ $\mathfrak{S}$-измеримо.

Действительно, $S=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m_1,\,m_2\geqslant n}\left\{\omega\colon |\xi_{m_1}-\xi_{m_2}|<\frac{1}{k}\right\}$.

Определение. *Последовательность $\xi_n$, $n=1, 2, \ldots$, сходится с вероятностью* 1 *или почти наверное, если*

$$\mathsf{P}\{\lim\xi_n \text{ существует}\}=1.$$

Для доказательства сходимости с вероятностью 1 в конкретных задачах бывает полезным следующий критерий.

Теорема 8. *Если найдется такая последовательность чисел $\varepsilon_n$, что*

$$\varepsilon_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\} < \infty,$$

*то с вероятностью* 1 *существует* $\lim \xi_n$.

*Если для любого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|\xi - \xi_n| > \varepsilon\} < \infty,$$

*то* $\xi_n$ *почти наверное сходится к* $\xi$.

*Доказательство.* Пусть $A_n = \{\omega\colon\ |\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\}$. Тогда

$$\mathsf{P}(\overline{\lim}\, A_n) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \lim \mathsf{P}\left(\bigcup_n A_m\right) \leqslant \overline{\lim} \sum_n^{\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Поэтому с вероятностью 1 существует такое $n_0 = n_0(\omega)$, что $|\xi_{n+1} - \xi_n| \leqslant \varepsilon_n$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда следует, что ряд $\xi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{n+1} - \xi_n)$ сходится с вероятностью 1, что и доказывает первое утверждение. Пусть теперь $A_{Nn} = \left\{\omega\colon\ |\xi - \xi_n| > \frac{1}{N}\right\}$. Имеем

$$\mathsf{P}\{\underline{\lim}\, |\xi - \xi_n| > 0\} = \mathsf{P}\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_{Nn}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N \to \infty} \lim_{m \to \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathsf{P}(A_{Nm}) = 0. \quad \blacksquare$$

**Сходимость по вероятности.**

Определение. *Последовательность случайных величин* $\xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *называется сходящейся по вероятности к случайной величине* $\xi$ ($\mathsf{P}\text{-}\lim \xi_n = \xi$), *если для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

*Она называется фундаментальной по вероятности, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $n_0 = n_0(\varepsilon)$, *что для всех* $n_1, n_2 \geqslant n_0$

$$\mathsf{P}\{|\xi_{n_1} - \xi_{n_2}| > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Понятие сходимости по вероятности соответствует понятию сходимости по мере в общей теории меры. Из результатов последней вытекает

Теорема 9. а) *Если* $\eta_i = \mathsf{P}\text{-}\lim \xi_n$, $i = 1, 2$, *то* $\eta_1 = \eta_2 \pmod{\mathsf{P}}$.

б) *Для того чтобы последовательность случайных величин* $\xi_n$ *сходилась по вероятности к некоторому пределу, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной по вероятности.*

в) *Если последовательность* $\xi_n$ *сходится с вероятностью* 1, *то она сходится по вероятности. Обратное, вообще говоря, неверно. Но из последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся с вероятностью* 1.

г) *Пусть* $\eta^{(k)} = \mathsf{P}\text{-}\lim \xi_n^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, d)$, $\zeta_n = g(\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(d)})$, *где* $g(t_1, \ldots, t_d)$ — *действительная функция, непрерывная в* $\mathcal{R}^d$, *исключая, быть может, множество* $D$ *такое, что* $\mathsf{P}\{(\eta^{(1)}, \ldots \ldots, \eta^{(d)}) \in D\} = 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\text{-}\lim \zeta_n = g(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(d)}).$$

В частности, одновременно с последовательностями $\{\xi_n^{(k)}\}$ сходятся по вероятности последовательности $\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}$, $\xi_n^{(1)} \cdot \xi_n^{(2)}$ и $\xi_n^{(1)}/\xi_n^{(2)}$, последняя — при условии, что $\mathsf{P}\{\eta^{(2)} = 0\} = 0$ и

$$\mathsf{P}\text{-}\lim (\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}) = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}, \quad \mathsf{P}\text{-}\lim (\xi_n^{(1)} \cdot \xi_n^{(2)}) = \eta^{(1)} \cdot \eta^{(2)},$$

$$\mathsf{P}\text{-}\lim \frac{\xi_n^{(1)}}{\xi_n^{(2)}} = \frac{\eta^{(1)}}{\eta^{(2)}}.$$

**Математическое ожидание.** Математическое ожидание дискретной случайной величины $\xi = \sum_n c_n \chi(A_n)$ определяется формулой

$$\mathsf{M}\xi = \sum_n c_n \mathsf{P}\{\xi = c_n\},$$

если сумма ряда, стоящего в правой части равенства, имеет смысл. Это выражение представляет собою интеграл в абстрактном пространстве с мерой $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ от простой функции $f(\omega) = \sum c_n \chi(A_n)$:

$$\mathsf{M}\xi = \int_\Omega f(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega). \tag{9}$$

Последнюю формулу будем считать определением математического ожидания в общем случае при условии, что интеграл в правой части равенства (9) определен. Последнее означает, что по крайней мере один из интегралов

$$\int_\Omega f^+(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega), \quad \int_\Omega f^-(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega)$$

конечен (здесь $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$). Если один из них бесконечен, то $\mathsf{M}\xi = +\infty$ или $-\infty$ соответственно. Если математическое ожидание величины $\xi$ конечно, то будем говорить, что величина $\xi$ *интегрируема.*

Будем пользоваться также обозначением

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi \, d\mathsf{P}.$$

Положим

$$\int\limits_{A} \xi \, d\mathsf{P} = \int\limits_{A} f(\omega) \mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{M}\chi(A)\xi.$$

Из общих свойств интеграла вытекают следующие свойства математического ожидания.

Теорема 10. а) *Неравенство*

$$\int\limits_{A} \xi \, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A} \eta \, d\mathsf{P}$$

*тогда и только тогда выполняется для всех* $A \in \mathfrak{S}$, *когда*

$$\xi \geqslant \eta \pmod{\mathsf{P}};$$

б)
$$\int\limits_{A} \xi \, d\mathsf{P} = \int\limits_{A} \eta \, d\mathsf{P}$$

*для всех* $A$, *тогда и только тогда, когда* $\xi = \eta \pmod{\mathsf{P}}$;

в) *если* $\mathsf{M}\xi$ *и* $\mathsf{M}\eta$ *конечны, то*

$$\mathsf{M}(a\xi + b\eta) = a\mathsf{M}\xi + b\mathsf{M}\eta$$

*для всех постоянных* $a$ *и* $b$.

Отметим ряд часто используемых неравенств.

**Неравенство Чебышева.** *Если* $f(x) > 0$ $(x > 0)$ *и монотонно не убывает* $(x \geqslant 0)$, *то* $\forall a > 0$

$$\mathsf{P}\{|\xi| > a\} \leqslant \frac{\mathsf{M}f(|\xi|)}{f(a)}.$$

**Неравенство Иенсена.** *Если* $g(x)$ — *непрерывная выпуклая функция на* $(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *и* $a < \xi < b \pmod{\mathsf{P}}$, *то*

$$g(\mathsf{M}\xi) \leqslant \mathsf{M}g(\xi). \tag{10}$$

Напомним, что функция $g(x)$ называется *выпуклой на* $(a, b)$, если для любых двух точек $x_1$ и $x_2$ из $(a, b)$ и любого $\lambda \in (0, 1)$

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2),$$

т. е. если любая точка дуги графика кривой $y = g(x)$ $x \in (x_1, x_2)$ лежит не выше отрезка, соединяющего концы этой дуги. Из определения вытекает, что для каждой точки $Q = (x_0, g(x_0))$ графика выпуклой кривой существует опорная прямая, т. е.

прямая, проходящая через точку $Q$ и такая, что все точки графика кривой лежат не ниже опорной прямой. Это означает, что для любого $x_0 \in (a, b)$ найдется такое $\alpha$, что

$$g(x) - g(x_0) \geqslant \alpha (x - x_0)$$

для всех $x \in (a, b)$. Полагая здесь $x_0 = M\xi$, $x = \xi$ и беря математическое ожидание от обеих частей неравенства, получим неравенство (10).

Следствие. $|\mathsf{M}\xi|^p \leqslant \mathsf{M}|\xi|^p$ *при* $p > 1$ *и*

$$(\mathsf{M}|\xi|^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant (\mathsf{M}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 0 < q < p. \tag{11}$$

**Неравенство Гёльдера.**

$$\mathsf{M}|\xi\eta| \leqslant (\mathsf{M}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathsf{M}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p > 1. \tag{12}$$

Частным случаем неравенства Гёльдера является неравенство Коши — Буняковского

$$(\mathsf{M}\xi\eta)^2 \leqslant \mathsf{M}\xi^2 \cdot \mathsf{M}\eta^2.$$

С помощью неравенства Гёльдера легко получить неравенство Минковского

$$[\mathsf{M}|\xi + \eta|^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant [\mathsf{M}|\xi|^p]^{\frac{1}{p}} + [\mathsf{M}|\eta|^p]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geqslant 1. \tag{13}$$

В разных вопросах часто используется возможность предельного перехода под знаком математического ожидания.

Теорема 11. а) (Теорема о монотонной сходимости.) *Если* $0 \leqslant \xi_n \leqslant \xi_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *то*

$$\lim \mathsf{M}\xi_n = \mathsf{M}(\lim \xi_n).$$

б) (Лемма Фату.) *Если* $\xi_n \geqslant 0 (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$, *то*

$$\mathsf{M} \underline{\lim}\, \xi_n \leqslant \underline{\lim}\, \mathsf{M}\xi_n.$$

в) (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.) *Если* $|\xi_n| \leqslant \eta (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$, $\lim \xi_n = \xi (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$ *и* $\mathsf{M}\eta < \infty$, *то*

$$\lim \mathsf{M}\xi_n = \mathsf{M}\xi.$$

Положим

$$\varphi(A) = \int\limits_A \xi\, d\mathsf{P} = \mathsf{M}\xi\chi(A), \quad A \in \mathfrak{S}. \tag{14}$$

Определение. *Действительная функция множества* $\varphi(A)$, *определенная на некоторой* $\sigma$*-алгебре* $\mathfrak{S}$, *называется зарядом, если она может принимать бесконечные значения только одного знака и если для произвольной последовательности не-*

*пересекающихся множеств* $A_n$ ($A_n \in \mathfrak{S}$, $A_n \cap A_r = \varnothing$ *при* $n \neq r$, $n = 1, 2, \ldots$)

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Если случайная величина $\xi$ имеет математическое ожидание (конечное или бесконечное), то функция множеств $\varphi$, определяемая формулой (14), является зарядом.

Следующая формула соответствует правилу замены переменных в теории интегрирования.

Теорема 12. *Пусть* $\xi = g(\zeta)$, *где* $\zeta = f(\omega)$ — *случайный элемент в* $\{X, \mathfrak{B}\}$, $g$ — *действительная* $\mathfrak{B}$-*измеримая функция на* $X$, $m = \mathsf{P}f^{-1}$ — *распределение случайного элемента* $\zeta$. *Тогда*

$$\mathsf{M}\xi = \int_X g(x)\, m(dx), \tag{15}$$

*если одна из сторон этого равенства определена.*

Допустим, что на $\{X, \mathfrak{B}\}$ задана конечная или $\sigma$-конечная мера $q$. Напомним, что мера $q$ называется *$\sigma$-конечной*, если существует последовательность множеств $B_n$, $B_n \in \mathfrak{B}$, таких, что $\bigcup_n B_n = X$ и $q(B_n) < \infty$.

Определение. *Мера* $m$ *на* $\{X, \mathfrak{B}\}$ *называется абсолютно непрерывной относительно меры* $q$ ($m \ll q$), *если существует* $\mathfrak{B}$-*измеримая функция* $\rho(x)$ *такая, что*

$$m(B) = \int_B \rho(x)\, q(dx) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{16}$$

Теорема 13 (теорема Радона — Никодима). *Для того чтобы мера* $m$ *была абсолютно непрерывна относительно меры* $q$, *необходимо и достаточно, чтобы из* $q(B) = 0$ *следовало* $m(B) = 0$.

Пусть $m$ — распределение случайного элемента $\zeta = f(\omega)$ ($m = \mathsf{P}f^{-1}$) на $\{X, \mathfrak{B}\}$ и $m \ll q$.

Определение. *Функция* $\rho$, *определяемая соотношением* (16), *называется плотностью распределения случайного элемента* $\zeta$ *относительно меры* $q$. *Плотность распределения обладает следующими свойствами:*

$$\rho(x) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \qquad \int_X \rho(x)\, q(dx) = 1.$$

Если распределение обладает плотностью, то математическое ожидание величины $\xi = f(\zeta)$ можно вычислить по формуле

$$\mathsf{M}\xi = \int_X f(x)\, \rho(x)\, q(dx). \tag{17}$$

**Пространство $\mathscr{L}_p$.** Класс случайных величин $\xi$, для которых $\mathbf{M}|\xi|^p < \infty$ $(p > 0)$, обозначим через $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$. Этот класс линеен: если $\xi_i \in \mathscr{L}_p$ $(i = 1, 2)$, то $c\xi_i \in \mathscr{L}_p$ и $\xi_1 + \xi_2 \in \mathscr{L}_p$. Первое из этих утверждений очевидно, а второе при $p \geqslant 1$ вытекает из неравенства Минковского (13), при $p \in (0, 1)$ — из неравенства

$$|\xi_1 + \xi_2|^p \leqslant |\xi_1|^p + |\xi_2|^p \qquad (0 < p < 1), \tag{18}$$

следующего из того, что $(1+x)^p < 1 + x^p$ $(x > 0,\ 0 < p < 1)$.

Если в $\mathscr{L}_p$ $(p \geqslant 1)$ ввести норму

$$\|\xi\|_p = (\mathbf{M}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}},$$

то оно будет полным линейным нормированным пространством.

Сходимость в $\mathscr{L}_p$ последовательности $\xi_n$ к пределу $\xi$ означает, что

$$\mathbf{M}|\xi - \xi_n|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из полноты пространства $\mathscr{L}_p$ следует, что для сходимости последовательности $\xi_n$ необходимо и достаточно выполнение условия Коши:

$$\mathbf{M}|\xi_{n_1} - \xi_{n_2}|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n_1, n_2 \to \infty.$$

Последовательность случайных величин, удовлетворяющая этому условию, называется *фундаментальной в* $\mathscr{L}_p$. Из фундаментальности (а следовательно, и сходимости) в $\mathscr{L}_p$ следует фундаментальность (сходимость) по вероятности. Это вытекает из неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}\{|\xi_{n_1} - \xi_{n_2}| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\mathbf{M}|\xi_{n_1} - \xi_{n_2}|^p.$$

**Равномерная интегрируемость.** Семейство случайных величин $\{\xi(t),\ t \in T\}$ ($T$ — некоторое множество) называют *равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N = N(\varepsilon)$, не зависящее от $t$, что

$$\mathbf{M}\chi(\{|\xi(t)| > N\})|\xi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in T.$$

В следующем утверждении указываются свойства, эквивалентные равномерной интегрируемости.

Теорема 14. *Семейство $\{\xi(t),\ t \in T\}$ равномерно интегрируемо тогда и только тогда, когда*

а) $\mathbf{M}|\xi(t)| \leqslant C \quad \forall t \in T$;

б) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, не зависящее от $t$, такое, что для всякого измеримого $A$, для которого $\mathbf{P}(A) < \delta$, имеем $\mathbf{M}\chi(A)|\xi(t)| < \varepsilon$.*

Заметим, что одна или конечное число интегрируемых случайных величин образуют равномерно интегрируемое семейство и если объединить два или конечное число равномерно интегрируемых семейств, то снова получится равномерно интегрируемое семейство.

Следующие признаки равномерной интегрируемости бывают полезными в конкретных случаях.

Теорема 15. а) *Если семейство* $\{\xi(t),\ t \in T\}$ *мажорируется интегрируемой случайной величиной* $\eta$ ($|\xi(t)| \leqslant \eta \pmod{\mathsf{P}}$, $\mathsf{M}\eta < \infty$), *то оно равномерно интегрируемо.*

б) *Пусть* $g(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, — *неотрицательная борелевская функция такая, что* $g(x)/x \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$, *и*

$$\mathsf{M}g(\xi(t)) \leqslant c \qquad \forall t \in T,$$

*где* $c$ *не зависит от* $t$. *Тогда семейство* $\{\xi(t),\ t \in T\}$ *равномерно интегрируемо.*

С помощью понятия равномерной интегрируемости легко сформулировать критерий сходимости в $\mathscr{L}_1$.

Теорема 16. *Для того чтобы последовательность* $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ *сходилась в* $\mathscr{L}_1$, *необходимо и достаточно, чтобы она сходилась по вероятности к некоторому пределу и была равномерно интегрируемой.*

Аналогично формулируется критерий сходимости в $\mathscr{L}_p$ ($p \geqslant 1$). Вместо равномерной интегрируемости самой последовательности $\xi_n$ в этом случае следует потребовать равномерную интегрируемость $\{|\xi_n|^p,\ n = 1, 2, \ldots\}$. По поводу доказательств сформулированных утверждений см. А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин [1], Ж. Невё [1], П. Л. Хеннекен и А. Тортра [1].

## § 2. Построение вероятностных пространств

Вероятностное пространство является довольно сложным математическим объектом, и во многих задачах его нельзя считать первоначально заданным. Поэтому важно уметь конструировать вероятностные пространства. В наиболее простых случаях нужно построить конечномерное вероятностное пространство по заданной функции распределения. Рассмотрим сначала некоторые свойства функций распределения.

**Функции распределения.** Пусть $\xi$ — случайный вектор со значениями в $\mathscr{R}^d$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^d)$, где $\xi^k$ его компоненты. Положим

$$F(x) = F(x^1, x^2, \ldots, x^d) = \mathsf{P}\{\xi^1 < x^1,\ \xi^2 < x^2,\ \ldots,\ \xi^d < x^d\}.$$

Определение. *Функция* $F(x)$ *называется функцией распределения случайного вектора* $\xi$ (*или совместной функцией распределения случайных величин* $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^d$).

Пусть $a,\ b \in \mathscr{R}^d$, $a=(a^1, \ldots, a^d)$, $b=(b^1, \ldots, b^d)$. Условимся писать $a \leqslant b$ $(a<b)$, если $a^k \leqslant b^k$ $(a^k<b^k)$ для всех $k=1, \ldots, d$.

*Назовем множество* $I[a, b)=\{x\colon a \leqslant x<b\}$ *$d$-мерным интервалом* (*интервалом в* $\mathscr{R}^d$). Аналогично определяются замкнутые интервалы $I[a, b]=\{x\colon a \leqslant x \leqslant b\}$ и открытые интервалы $I(a, b)=\{x\colon a<x<b\}$. Нетрудно выразить вероятность попадания случайного вектора $\xi$ в $d$-мерный интервал через функцию распределения. С этой целью положим $(t<s)$

$$\Delta_{[t, s)}^k f(x^1, x^2, \ldots, x^d)=f(x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}, s, x^{k+1}, \ldots, x^d)-\\
-f(x^1, \ldots, x^{k-1}, t, x^{k+1}, \ldots, x^d).$$

Очевидно,

$$\Delta_{[t, s)}^k F(x)=\mathsf{P}\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^d\{\xi^j<x^j\} \cap\{t \leqslant \xi^k<s\}\right),$$

и нетрудно убедиться, что

$$F(I[a, b))=\Delta_{[a^1, b^1)}^1 \Delta_{[a^2, b^2)}^2 \ldots \Delta_{[a^d, b^d)}^d F(x)=\mathsf{P}(\xi \in I[a, b)). \quad (1)$$

Теорема 1. *Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами*:

а) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

б) *если* $x \leqslant y$, *то* $F(x) \leqslant F(y)$;

в) $\Delta_{[a^1, b^1)}^1 \Delta_{[a^2, b^2)}^2 \ldots \Delta_{[a^d, b^d)}^d F(x) \geqslant 0$ *для любых* $a \leqslant b$;

г) *функция* $F(x)$ *непрерывна слева, т. е.* $F(x-0)=F(x)$;

д) $F(x) \rightarrow 0$, *если* $\min\limits_k x^k \rightarrow-\infty$, *и* $F(x) \rightarrow 1$, *если* $\min\limits_k x^k \rightarrow+\infty$.

*Доказательство.* а) — очевидно. Если $x \leqslant y$, то $F(y)-F(x)=\mathsf{P}(\{\xi<y\} \backslash\{\xi<x\})$, откуда следует б). в) вытекает из (1). Пусть $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x$ и $\lim x_n=x$. События $A_n=\{\xi \leqslant x\} \backslash\{\xi<x_n\}$ образуют монотонно убывающую последовательность, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$. Поэтому (см. (6) § 1) $F(x)-F(x_n)=\mathsf{P}(A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что доказывает г). Далее, если $\min\limits_k x_n^k \rightarrow-\infty$, то существует такое $j$, что $x_n^j \rightarrow-\infty$. Положим $z_n=\sup\{x_k^j,\ k=n,\ n+1, \ldots\}$, тогда $z_n \rightarrow-\infty$, $z_n$ монотонно не возрастает и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\xi^j<z_n\}=\varnothing$. Поэтому $F(x_n) \leqslant \mathsf{P}\{\xi^j<z_n\} \rightarrow 0$. Аналогично доказывается вторая часть утверждения д) (следует заметить, что $1-F(x)=\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{\xi^k \geqslant x^k\}\right)$). ∎

Произвольную функцию в $\mathcal{R}^d$, удовлетворяющую а) — д), будем называть *функцией распределения* (*в* $\mathcal{R}^d$); если же она удовлетворяет только условиям б), в), — *монотонно возрастающей функцией в* $\mathcal{R}^d$. Монотонно возрастающую функцию в $\mathcal{R}^d$ следует отличать от функции $d$ переменных, монотонной по каждому аргументу, — удовлетворяющей только условию б).

Сделаем следующее замечание о возможных разрывах функции распределения $F(x)$. Как функция от одной фиксированной координаты $x^k$, она монотонная, и поэтому пределы $F(x^1+0, x^2+0, \ldots, x^d+0)$ в каждой точке $x$ существуют.

Рассмотрим гиперплоскость $H_c^k=\{x\colon x^k=c\}$. При $c_1\neq c_2$ $H_{c_1}^k$ и $H_{c_2}^k$ не пересекаются. Поэтому существует не более чем счетное множество значений $c_r^k$, $r=1, 2, \ldots$, таких, что

$$F(+\infty, \ldots, +\infty, c+0, +\infty, \ldots, +\infty)-\\ -F(-\infty, \ldots, -\infty, c, -\infty, \ldots, -\infty)=0$$

для всех $c\neq c_r^k$.

Назовем $H_{c_r^k}^k$ *гиперплоскостями разрыва функции* $F(x)$. Таким образом, если $x \overline{\in} H^0$, где $H^0=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} H_{c_r^k}^k$, то $F(x)$ непрерывна в точке $x$, а если $a \overline{\in} H^0$ и $b^0 \overline{\in} H^0$, то $F(I[a_n, b_n])\to F(I[a, b))$, если $a_n\to a$ и $b_n\to a$.

**Конечномерное вероятностное пространство.** Пусть $\{\mathcal{R}^d, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{S}\supset\mathfrak{B}^d$, где $\mathfrak{B}^d$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathcal{R}^d$. Если положить

$$F(x)=\mathsf{P}(I(-\infty, x)),$$

то $F(x)$ будет функцией распределения.

Теорема 2. *Пусть в* $\mathcal{R}^d$ *задана произвольная функция распределения* $F(x)$. *Тогда можно определить вероятностное пространство* $\{\mathcal{R}^d, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ *так, чтобы* $\mathfrak{S}\supset\mathfrak{B}^d$ *и* $\mathsf{P}\{(-\infty, x)\}=F(x)$. *При этом вероятность* $\mathsf{P}$ *на σ-алгебре* $\mathfrak{B}^d$ *определяется однозначно.*

Доказательство этого предложения основано на общих теоремах о продолжении мер. Приведем соответствующие формулировки.

Определения. 1. *Нетривиальный класс множеств* $\mathfrak{M}$ *называется полукольцом, если для любых* $\Delta_i\in\mathfrak{M}$, $i=1, 2$,

$$\Delta_1\cap\Delta_2\in\mathfrak{M},\quad \Delta_1\setminus\Delta_2=\bigcup_{k=1}^{r}\Delta^k,\quad \text{где}\quad \Delta^k\in\mathfrak{M}.$$

2. *Неотрицательную аддитивную функцию множеств* $m$, *определенную на полукольце* $\mathfrak{M}$, *называют предмерой* $\{\mathfrak{M}, m\}$.

3. *Функцию множеств $m'$, определенную на классе множеств $\mathfrak{M}'$, называют продолжением функции множеств $m$, определенной на $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ и $m'(\Delta) = m(\Delta)$ при $\Delta \in \mathfrak{M}$.*

4. *Предмера называется $\sigma$-конечной на $X$, если найдется такая последовательность $\Delta_k$, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, $\Delta_k \in \mathfrak{M}$.*

Теорема 3 (теорема о продолжении меры). *Предмера $m$ тогда и только тогда имеет некоторое продолжение $\{\mathfrak{S}, q\}$, где $\mathfrak{S}$ — $\sigma$-алгебра, $q$ — мера на $\mathfrak{S}$, когда она полуаддитивна, т. е. если из $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset \Delta$ следует*

$$m(\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta_k) \tag{2}$$

*для любых $\Delta$ и $\Delta_k$ из $\mathfrak{M}$. При этом, если $m$ $\sigma$-конечна, то $q$ на $\sigma\{\mathfrak{M}\}$ определяется однозначно.*

Теорема 4. *Класс $J$ полуинтервалов $I[a, b)$, $a, b \in \mathcal{R}^d$, образует полукольцо, а $F(I[a, b))$ — предмера на $J$.*

Действительно, $I[a, b) \cap I[c, d) = I[t, s)$, где $t = (t^1, \ldots, t^d)$, $s = (s^1, \ldots, s^d)$, $t^k = \max(a^k, c^k)$, $s^k = \min(b^k, d^k)$ и $I[t, s) = \varnothing$, если условие $t \leqslant s$ не выполнено. Далее, $I[a, b) \setminus I[c, d) = \{x: x^j \in [a^j, b^j) \setminus [c^j, d^j),\ j = 1, \ldots, d\}$, что представляет собою сумму не более чем $2^d$ интервалов. Покажем теперь, что $F(I[a, b))$ является аддитивной функцией на $J$. Если интервал $I[a, b)$ разбить на два: $I[a, c_1)$ и $I[c_1, b)$, где $c_1 = (c^1, b^2, \ldots, b^d)$, $a^1 < c^1 < b^1$, то

$$F(I[a, b)) = \Delta^1_{[a^1, c^1)} \Delta^2_{[a^2, b^2)} \ldots \Delta^d_{[a^d, b^d)} F(x) + \\ + \Delta^1_{[c^1, b^1)} \Delta^2_{[c^2, b^2)} \ldots \Delta^d_{[c^d, b^d)} F(x) = F(I[a, c_1)) + F(I[c_1, b)).$$

Такое же равенство имеет место, если $I[a, b)$ разбить на два интервала с помощью деления любой из сторон $[a^k, b^k)$ на две части. По индукции аддитивность функции $F(I)$ доказывается для произвольного разложения $I$ на сумму интервалов. ■

Перейдем к доказательству теоремы 2. Остается показать, что функция $F(I)$ обладает свойством полуаддитивности (2).

Пусть $I = I[a_0, b_0)$, $I_n = I[a_n, b_n)$ и $I \subset \bigcup\limits_{1}^{\infty} I_n$. В силу непрерывности функции $F(x)$ слева можно найти такое $\varepsilon = (\varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, что

$$0 \leqslant F(I[a_k - \varepsilon_k, b_k)) - F(I[a_k, b_k)) < \frac{\eta}{2^k}, \quad \eta > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Открытые интервалы $I(a_k-\varepsilon_k,\ b_k)$ покрывают замкнутый интервал $I[a_0,\ b_0-\varepsilon]$. В силу теоремы Гейне — Бореля из них можно выделить конечное подпокрытие, например $\{I(a_k-\varepsilon_k,\ b_k),\ k=1,\ldots,n\}$. Тогда последовательность интервалов $I[a_k-\varepsilon_k,\ b_k)$, $k=1,\ \ldots,\ n$, покрывает интервал $I[a_0,\ b_0-\varepsilon)$. Непересекающиеся множества $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$

$$I[a_0,\ b_0-\varepsilon)\cap\left\{I[a_k-\varepsilon_k,\ b_k)\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}I[a_i-\varepsilon_i,\ b_i)\right\}$$

являются суммами непересекающихся полуинтервалов $I_{kj}$ $(j=1,\ \ldots,\ d)$. Таким образом, $I[a_0,\ b_0-\varepsilon)=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{d_k}I_{kj}$ и

$$F(I[a_0,\ b_0-\varepsilon))=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d_k}F(I_{kj})\leqslant\sum_{k=1}^{n}F(I[a_k-\varepsilon_k,\ b_k))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I[a_k-\varepsilon_k,\ b_k))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I_k)+\eta.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим $F(I[a_0,b_0))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I_k)+\eta$, или, в силу произвольности $\eta$,

$$F(I[a,\ b_0))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I_k).\ \blacksquare$$

**Теорема Колмогорова.** Рассмотрим следующую задачу. Пусть дано некоторое множество измеримых пространств $\{X_s,\ \mathfrak{B}_s\}$, $s\in S$, и совокупность вероятностных мер $\{m_{s_1,s_2,\ldots,s_n};\ n=1,\ 2,\ \ldots;\ s_k\in S\}$, где $m_{s_1,s_2,\ldots,s_n}$ — мера на прямом произведении $\prod_{k=1}^{n}\{X_{s_k},\ \mathfrak{B}_{s_k}\}$. Требуется построить вероятностное пространство $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \mathsf{P}\}$ и семейство $\{\zeta_s,\ s\in S\}$, где $\zeta_s$ — случайный элемент в $\{X_s,\mathfrak{B}_s\}$, так, чтобы произвольная последовательность $(\zeta_{s_1},\ \zeta_{s_2},\ \ldots,\ \zeta_{s_n})$ ($n$ — любое) имела на $\prod_{k=1}^{n}\{X_{s_k},\ \mathfrak{B}_{s_k}\}$ заданное распределение $m_{s_1,\ldots,s_n}$.

Прежде всего, ясно, что совокупность мер $m_{s_1,\ldots,s_n}$ не может быть совершенно произвольной. Действительно, если задача имеет решение и

$$m_{s_1,s_2,\ldots,s_n}\left(\prod_{k=1}^{n}B_{s_n}\right)=\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\zeta_{s_k}\in B_{s_k}\}\right),\tag{3}$$

то, очевидно,

$$m_{s_1,\ldots,s_{n+r}}\left(\prod_{k=1}^{n+r} B_{s_k}\right)=m_{s_1,\ldots,s_n}\left(\prod_{k=1}^{n} B_{s_k}\right), \tag{4}$$

если $B_{s_j}=X_{s_j}$ при $j=n+1, \ldots, n+m$ и

$$m_{s_1,\ldots,s_n}\left(\prod_{k=1}^{n} B_{s_k}\right)=m_{s_{j_1},\ldots,s_{j_n}}\left(\prod_{k=1}^{n} B_{s_{j_k}}\right), \tag{5}$$

где $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — некоторая перестановка чисел $(1, 2, \ldots, n)$.

Соотношения (4) и (5) называют *условиями согласованности* семейства распределений $\{m_{s_1,\ldots,s_n},\ n=1,2,\ldots,\ s_k\in S\}$.

Теорема 5 (теорема Колмогорова). *Пусть $X_s$ — полные метрические сепарабельные пространства, $\mathfrak{B}_s$ — σ-алгебра борелевских множеств $X_s$. Для произвольного согласованного семейства распределений $\{m_{s_1,\ldots,s_n};\ n=1,2,\ldots;\ s_k\in S\}$ можно построить вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ и семейство случайных величин $\{\zeta_s,\ s\in S\}$ так, чтобы $m_{s_1,\ldots,s_n}$ было распределением последовательности $\{\zeta_{s_1}, \ldots, \zeta_{s_n}\}$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем ряд нужных для дальнейшего замечаний и построений.

Пусть $\Omega$ — пространство всех функций $\omega=\omega(s)$ аргумента $s\in S$, принимающих при каждом $s$ значения из $X_s$ $\left(\Omega=\prod_{s\in S} X_s\right)$.

Определение. *Множество $C_{s_1,\ldots,s_n}(B^{(s_1,\ldots,s_n)})$ вида*

$$C_{s_1,\ldots,s_n}(B^{(s_1,\ldots,s_n)})=\{\omega\colon\ (\omega(s_1), \ldots, \omega(s_n))\in B^{(s_1,\ldots,s_n)}\},$$

*где $B^{(s_1,\ldots,s_n)}\in\sigma\{\mathfrak{B}_{s_k},\ k=1,2,\ldots,n\}$, называют цилиндрическим или, подробнее, цилиндрическим множеством в $\Omega$ с основанием $B^{(s_1,\ldots,s_n)}$ над координатами $s_1, \ldots, s_n$.*

При фиксированных точках $s_1, s_2, \ldots, s_n$ между цилиндрическими множествами $C_{s_1,\ldots,s_n}(B^{(s_1,\ldots,s_n)})$ и множествами из $\sigma\{\mathfrak{B}_{s_k},\ k=1,\ldots,n\}$ существует изоморфизм: каждое множество $B\in\sigma\{\mathfrak{B}_{s_k},\ k=1,\ldots,n\}$ определяет цилиндрическое множество $C_{s_1,\ldots,s_n}(B)$, для которого оно служит основанием; разным основаниям соответствуют разные цилиндрические множества; сумме, разности или пересечению оснований соответствует сумма, разность или пересечение цилиндрических множеств. Это непосредственно вытекает из определения цилиндрического множества.

Рассматривая действия над цилиндрическими множествами в общем случае, нужно иметь в виду, что одно и то же цилиндрическое множество может задаваться над разными наборами координат.

Так, очевидно, что

$$C_{s_1, \ldots, s_n}(B) = C_{s_1, \ldots, s_n, \ldots, s_{n+r}}(B \times X_{s_{n+1}} \times \ldots \times X_{s_{n+r}}).$$

Легко видеть, что любые два цилиндрических множества $C_{s_1, \ldots, s_n}(B)$ и $C_{s'_1, \ldots, s'_r}(B)$ всегда можно рассматривать как цилиндрические множества над одной и той же последовательностью координат $s''_1, s''_2, \ldots, s''_r$, содержащей как $s_1, \ldots, s_n$, так и $s'_1, \ldots, s'_p$. Отсюда следует, что, рассматривая алгебраические действия над конечным числом цилиндрических множеств, можно считать, что они заданы над фиксированной последовательностью координат. Таким образом, класс всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств.

К этому можно добавить, что если $S$ — бесконечное множество, $X_s$ имеют по крайней мере две точки, то класс цилиндрических множеств не является $\sigma$-алгеброй.

Действительно, множество $\bigcup\limits_{1}^{\infty} C_{s_n}(\{x_{s_n}\})$, где $x_{s_n}$ — одноточечное множество, $x_{s_n} \in X_{s_n}$, не является цилиндрическим.

Пусть $X_k$ — полное метрическое пространство, $\rho_k$ — соответствующая метрика, $k = 1, 2, \ldots, n$. В пространство $Y = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ введем метрику $\rho(y_1, y_2) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k^2(x_1^k, x_2^k)}$, где $y_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$, $x_i^k \in X_k$.

Точки $x_i^k$ $(k = 1, \ldots, n)$ будем называть *координатами* точки $y_i \in Y$. Нетрудно увидеть, что последовательность точек $y_n$ сходится к некоторому пределу тогда и только тогда, когда координаты точек $y_n$ сходятся в соответствующих пространствах к некоторому пределу. Отсюда следует, что $Y$ — полное метрическое пространство. Оно сепарабельно, так как счетное множество точек вида $(x_{r_1}^1, x_{r_2}^2, \ldots, x_{r_n}^n)$, $x_{r_k}^k \in Z_k$, где $Z_k$ — счетное всюду плотное множество в $X_k$, образует в $Y$ всюду плотную сеть.

При доказательстве теоремы Колмогорова мы используем следующую теорему.

Теорема 6. *Если $X$ — полное метрическое сепарабельное пространство, $m$ — вероятностная мера на $\sigma$-алгебре борелевских множеств пространства $X$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathfrak{B}$ найдется такой компакт $K$, $K \in \mathfrak{B}$, что $m(B \setminus K) < \varepsilon$.*

*Доказательство теоремы Колмогорова.* Введем ранее определенное пространство $\Omega$ функций $\omega = \omega(s)$, $\omega(s) \in X_s$, $s \in S$, и для произвольного цилиндрического множества $C = C_{s_1, \ldots, s_n}\left(B^{(s_1, \ldots, s_n)}\right)$ положим $\mathsf{P}'(C) = m_{s_1, \ldots, s_n}\left(B^{(s_1, \ldots, s_n)}\right)$. Из условий согласованности мер вытекает, что $\mathsf{P}'(C)$ определено однозначно. Пусть $C_k$, $k = 1, \ldots, n, \ldots$ — некоторая последовательность цилиндрических множеств. Не уменьшая общности, можно считать, что они заданы основаниями $B_k^{(s_1, \ldots, s_p)}$ над одной и той же последовательностью координат $(s_1, \ldots, s_p, \ldots)$. Учитывая существующий изоморфизм между цилиндрическими множествами над фиксированной последовательностью координат и их основаниями, видим, что $\mathsf{P}'(C)$ является конечно аддитивной мерой. Покажем, что она может быть продолжена до некоторой меры $\mathsf{P}$ на $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$, где $\mathfrak{S}$ — $\sigma$-алгебра. В силу теоремы о продолжении меры для этого достаточно проверить, что $\mathsf{P}'$ полуаддитивна, т. е. если $C_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, то

$$\mathsf{P}'(C_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}'(C_n).$$

Пусть $C_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ ($C_k \cap C_r = \varnothing$ при $k \neq r$). Докажем, что

$$\mathsf{P}'(C_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}'(C_n). \tag{6}$$

Отсюда будет вытекать требуемое. Положим $C_n' = C_0 \setminus \bigcup_1^n C_k$. Множества $C_n'$ образуют монотонно неубывающую последовательность цилиндрических множеств с пустым пересечением. Так как

$$\mathsf{P}'(C_0) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}'(C_k) + \mathsf{P}'(C_n'),$$

то для доказательства (6) достаточно показать, что $\lim \mathsf{P}'(C_n') = 0$.

Допустим противное, т. е. что $\lim \mathsf{P}'(C_n') = a > 0$. Обозначим через $B_n$ основание цилиндрического множества $C_n'$, и пусть $C_n'$ расположено над координатами $s_1, s_2, \ldots, s_{r_n}$. Без умаления общности можно предположить, что при увеличении $n$ набор соответствующих точек $\left(s_1, s_2, \ldots, s_{r_n}\right)$ не убывает. В силу теоремы 6 найдется такое компактное множество $K_n$, $K_n \subset B_n$, что

$$m_{s_1, \ldots, s_{r_n}}(B_n \setminus K_n) < \frac{a}{2^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть $Q_n$ — цилиндрическое множество над координатами $s_1, \ldots, s_{r_n}$ с основанием $K_n$, $F_n = \bigcap_{r=1}^{n} Q_r$ и $D_n$ — основание множества $F_n$. Очевидно, что $D_n$ есть компакт в $\prod_{k=1}^{r_n} X_{s_k}$, так как $D_n$ является пересечением замкнутых множеств, среди которых по крайней мере одно, $K_n$, компактно.

Так как множества $F_n$ монотонно убывают, то из $\omega(s) \in F_{n'}$, $n' > n$, следует $\omega(s) \in F_n$. Поэтому, если $\left(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_{r_n}}, \ldots \ldots, x_{s_{r_{n+p}}}\right) \in D_{n+p}$, то $\left(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_{r_n}}\right) \in D_n$.

Множества $F_n$, очевидно, непустые. Более того, так как $C'_n \setminus F_n = \bigcup_{j=1}^{n} (C'_n \setminus Q_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (C'_j \setminus Q_j)$, то

$$\mathsf{P}'\left(C'_n \setminus F_n\right) < \sum_1^n \mathsf{P}\left(C'_j \setminus Q_j\right) = \sum_1^n m_{s_1 \ldots s_{r_j}} (B_j \setminus K_j) \leqslant \frac{a}{2},$$

откуда следует, что

$$\lim \mathsf{P}'(F_n) = \lim \mathsf{P}'\left(C'_n\right) - \lim \mathsf{P}'\left(C'_n \setminus F_n\right) \geqslant \frac{a}{2}.$$

Из каждого множества $D_n$ выберем какую-либо точку $\left(x_1^n, \ldots, x_{r_n}^n\right)$. При любом $k$ последовательность точек $x_k^n$, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежит компактному множеству в $X_{s_k}$, а последовательность $\left(x_1^{n+j}, \ldots, x_{r_n}^{n+j}\right)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, лежит в $D_n$. С помощью диагонального процесса найдем последовательность индексов $n_j$ таких, что при каждом $k$ последовательность $x_k^{n_j}$ сходится к некоторому пределу $x_k^0$. Из замкнутости множества $D_n$ следует, что при любом $n$ $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{r_n}^0\right) \in D_n$.

Определим функцию $\omega(s)$, положив $\omega\left(s_k\right) = x_k^0$, $k = 1, 2, \ldots$, и доопределив ее в остальных точках произвольным образом. Тогда при любом $n$ имеем $\omega(s) \in F_n \subset C'_n$. Следовательно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n$ непусто, что противоречит первоначальному допущению. Отсюда вытекает, что $\lim \mathsf{P}'\left(C'_n\right) = 0$ и предмера $\mathsf{P}'$ допускает продолжение до некоторой меры $\mathsf{P}$ на $\sigma$-алгебре $\mathfrak{S}$, содержащей все цилиндрические множества пространства. Вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ построено. Положим теперь $\zeta_s = g_s(\omega) = \omega(s)$.

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{(\zeta_{s_1}, \ldots, \zeta_{s_n}) \in B^{(s_1, \ldots, s_n)}\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{(\omega(s_1), \ldots, \omega(s_n)) \in B^{(s_1, \ldots, s_n)}\right\} = \\ = \mathsf{P}'\left(C_{s_1, \ldots, s_n}\left(B^{(s_1, \ldots, s_n)}\right)\right) = m_{s_1, \ldots, s_n}\left(B^{(s_1, \ldots, s_n)}\right). \blacksquare$$

## § 3. Условные вероятности

Элементарная формула для условной вероятности события $A$ при гипотезе $B$

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \mathsf{P}(B) > 0, \tag{1}$$

показывает, как следует определять вероятность, если определенным образом меняется класс допустимых экспериментов или комплекс условий $\mathcal{У}$, при которых проводятся эксперименты. А именно, к $\mathcal{У}$ добавляется следующее требование: рассматриваются только те эксперименты, в которых $B$ обязано происходить.

Поставим вопрос шире. Допустим, что производится некоторый эксперимент $Э$. Как следует определить вероятности событий, наблюдаемых в других экспериментах, если предположить результат эксперимента $Э$ фиксированным?

Прежде чем дать формальное определение, обсудим и рассмотрим поставленный вопрос в частных случаях. Поскольку эксперимент $Э$ полностью описывается $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{F}$ наблюдаемых в $Э$ событий, обозначим вероятность, которую желательно определить, через $\mathsf{P}\{A \mid \mathfrak{F}\}$ и назовем ее условной вероятностью события $A$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$. Если $A \in \mathfrak{F}$, то естественно положить $\mathsf{P}\{A \mid \mathfrak{F}\} = 1$ или $0$ в зависимости от того, произошло ли событие $A$ или нет.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ является простой $\sigma$-алгеброй, $E_n$ — ее атомы и $\mathsf{P}(E_n) > 0$. Если $A$ — произвольное событие на $\mathfrak{S}$, то положим

$$\mathsf{P}\{A \mid \mathfrak{F}\} = \sum_n \mathsf{P}(A \mid E_n)\, \chi(E_n), \tag{2}$$

где $\mathsf{P}(A \mid E_n)$ определяется по формуле (1).

Отметим существенную особенность данного определения: условная вероятность является случайной величиной, зависящей от результата соответствующего эксперимента. Последнее формально означает, что условная вероятность является $\mathfrak{F}$-измеримой случайной величиной.

Введем понятие условного математического ожидания $\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}$ случайной величины $\xi$. Естественно положить

$$\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}=\int_{\Omega}\xi\mathsf{P}(d\omega|\mathfrak{F})$$

или

$$\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}=\sum_n \frac{\chi(E_n)}{\mathsf{P}(E_n)}\int_{E_n}\xi\,d\mathsf{P}. \tag{3}$$

При этом предполагается, что $\mathsf{M}\xi$ конечно. Если в последней формуле положить $\xi=\chi(A)$, то получим условную вероятность события $A$:

$$\mathsf{M}\{\chi(A)|\mathfrak{F}\}=\sum_n \chi(E_n)\frac{\mathsf{P}(E_n\cap A)}{\mathsf{P}(E_n)}=\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\},$$

так что условная вероятность является частным случаем условного математического ожидания.

Пусть $\eta$ — произвольная ограниченная $\mathfrak{F}$-измеримая случайная величина. Тогда $\eta=\sum\limits_n a_n\chi(E_n)$. Умножая равенство (3) на $\eta$, получим

$$\mathsf{M}(\eta\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\})=\sum_n a_n\int_{E_n}\xi\,d\mathsf{P}=\sum_n\int_{E_n}\eta\xi\,d\mathsf{P}$$

или

$$\mathsf{M}(\eta\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\})=\mathsf{M}\eta\xi. \tag{4}$$

Последнее соотношение полностью определяет условное математическое ожидание случайной величины $\xi$. Действительно, пусть $\check{\xi}$ — $\mathfrak{F}$-измеримая случайная величина такая, что для любой ограниченной $\mathfrak{F}$-измеримой случайной величины $\eta$ имеем $\mathsf{M}(\eta\check{\xi})=\mathsf{M}(\eta\xi)$. Так как $\check{\xi}$ — постоянная на $E_n$, то $\check{\xi}=c_n$ при $\omega\in E_n$. Пусть $\eta=\chi(E_n)$. Тогда

$$\mathsf{M}(\eta\check{\xi})=c_n\mathsf{M}\chi(E_n)=c_n\mathsf{P}(E_n)=\int_{E_n}\xi\,d\mathsf{P},$$

т. е. $\check{\xi}$ совпадает с правой частью формулы (3).

Воспользуемся равенством (4) для определения условного математического ожидания в общем случае. Если в (4) положить $\eta=\chi(F)$, то оно примет вид

$$\int_F \mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}\,d\mathsf{P}=\int_F\xi\,d\mathsf{P}. \tag{5}$$

Определение. *Условным математическим ожиданием* $\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}$ *случайной величины* $\xi$ ($\mathsf{M}\xi$ *существует*) *относительно*

*$\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{F}$-измеримая случайная величина, удовлетворяющая равенству* (5) *для каждого $F \in \mathfrak{F}$.*

Теорема 1. *Условное математическое ожидание произвольной случайной величины* ($\mathsf{M}\xi$ *определено*) *существует и* ($\operatorname{mod} \mathsf{P}$) *единственно.*

*Доказательство.* Правая часть формулы (5) является $\sigma$-конечным зарядом $\varphi(F)$ на $\mathfrak{F}$, абсолютно непрерывным относительно меры $\mathsf{P}$. В силу теоремы Радона — Никодима существует $\mathfrak{F}$-измеримая функция $g(u)$ такая, что

$$\varphi(F) = \int_F g(u)\,\mathsf{P}(du).$$

Остается положить $\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\} = g(u)$. Покажем единственность ($\operatorname{mod}\mathsf{P}$) условного математического ожидания. Если существуют две случайные величины $\check{\xi}_1$ и $\check{\xi}_2$, удовлетворяющие определению условного математического ожидания, то для любого $F \in \mathfrak{F}$ $\int_F (\check{\xi}_1 - \check{\xi}_2)\,d\mathsf{P} = 0$, что в силу $\mathfrak{F}$-измеримости величины $\check{\xi}_1 - \check{\xi}_2$ возможно тогда, когда $\check{\xi}_1 = \check{\xi}_2$ ($\operatorname{mod} \mathsf{P}$). ■

Определение. *Условной вероятностью события $A$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$ называют случайную величину*

$$\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\{\chi(A)|\mathfrak{F}\}.$$

Прямое определение $\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\}$ можно сформулировать так:

*Условная вероятность $\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\}$ есть $\mathfrak{F}$-измеримая случайная величина, удовлетворяющая для каждого $F \in \mathfrak{F}$ равенству*

$$\int_F \mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\}\,d\mathsf{P} = \mathsf{P}(A \cap F). \tag{6}$$

Из теоремы 1 следует, что $\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\}$ существует и при каждом $A$ ($A \in \mathfrak{S}$) определяется ($\operatorname{mod} \mathsf{P}$) единственным образом.

Очевидно, что для любой $\mathfrak{F}$-измеримой случайной величины выполняется равенство (4), если только величина $\eta\xi$ интегрируема. Соотношению (4) можно придать следующую важную интерпретацию. Предположим, что $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$. Будем рассматривать случайные величины как векторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P})$. Положим для краткости $\check{\xi} = \mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}$, и пусть $H$ обозначает подпространство $\mathscr{L}_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ всех $\mathfrak{F}$-измеримых случайных величин с конечным моментом второго порядка. $H$ является линейным замкнутым подпространством $\mathscr{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P})$, $\check{\xi} \in H$, и для любого $\eta \in H$ $\mathsf{M}\eta(\check{\xi} - \xi) = 0$. Это равенство означает, что вектор $\check{\xi} - \xi$ ортогонален подпространству $H$, т. е. что $\check{\xi}$ является проекцией вектора $\xi$ на $H$. Итак, если $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$, то условное математическое ожидание $\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}$ является проекцией $\xi$ на подпространство всех $\mathfrak{F}$-измеримых случайных величин с конечным моментом второго порядка.

Приведем ряд свойств условных математических ожиданий. Условимся, что все рассматриваемые ниже случайные величины имеют конечное или бесконечное математическое ожидание, а все написанные равенства понимаются как равенства с вероятностью 1.

а) *Если случайная величина $\xi$ $\mathfrak{F}$-измерима, то*

$$\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\} = \xi.$$

Действительно, условие (5) выполняется тривиально, если положить $\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\} = \xi$. В частности, если $A \in \mathfrak{F}$, то

$$\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\} = \chi(A). \tag{7}$$

б) *Если $\xi_1$, $\xi_2$ принимают значения одного знака или имеют конечное математическое ожидание, то*

$$\mathsf{M}\{\xi_1 + \xi_2|\mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\{\xi_1|\mathfrak{F}\} + \mathsf{M}\{\xi_2|\mathfrak{F}\}.$$

Положим $\check{\xi}_i = \mathsf{M}\{\xi_i|\mathfrak{F}\}$. Для любого $F \in \mathfrak{F}$

$$\int_F (\check{\xi}_1 + \check{\xi}_2)\,d\mathsf{P} = \int_F \check{\xi}_1\,d\mathsf{P} + \int_F \check{\xi}_2\,d\mathsf{P} =$$
$$= \int_F \xi_1\,d\mathsf{P} + \int_F \xi_2\,d\mathsf{P} = \int_F (\xi_1 + \xi_2)\,d\mathsf{P}.$$

Учитывая единственность (mod $\mathsf{P}$) условного математического ожидания, получим требуемое.

Следствие. *Если $A \cap B = \varnothing$, то*

$$\mathsf{P}\{A \cup B|\mathfrak{F}\} = \mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}\} + \mathsf{P}\{B|\mathfrak{F}\} \pmod{\mathsf{P}}.$$

в) *Если $\xi \leqslant \eta$, то*

$$\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\} \leqslant \mathsf{M}\{\eta|\mathfrak{F}\},$$

*когда хотя бы одна из сторон неравенства имеет смысл.*

Если $\eta \geqslant 0$, то $\int_F \mathsf{M}\{\eta|\mathfrak{F}\}\,d\mathsf{P} \geqslant 0$ для любого $F \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathsf{M}\{\eta|\mathfrak{F}\} \geqslant 0$. В общем случае, положив $\eta = \xi + (\eta - \xi)$ и воспользовавшись б), получим

$$\mathsf{M}\{\eta|\mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\} + \mathsf{M}\{\eta - \xi|\mathfrak{F}\} \geqslant \mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}\}.$$

г) *Если $\xi_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — монотонно неубывающая последовательность неотрицательных случайных величин, то*

$$\lim \mathsf{M}\{\xi_n|\mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\{\lim \xi_n|\mathfrak{F}\}.$$

Действительно, в силу теоремы об интегрировании монотонных последовательностей

$$\int_F \lim \mathsf{M}\{\xi_k \mid \mathfrak{F}\}\, d\mathsf{P} = \lim \int_F \mathsf{M}\{\xi_n \mid \mathfrak{F}\}\, d\mathsf{P} \leqslant \lim \int_F \xi_n\, d\mathsf{P} = \int_F \lim \xi_n\, d\mathsf{P}.$$

Следствие. *Если $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, попарно несовместимы, то*

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_1^\infty A_n \mid \mathfrak{F}\right\} = \sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}\{A_n \mid \mathfrak{F}\}. \tag{8}$$

**Важное замечание.** Условные вероятности $\mathsf{P}\{A \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{P}_\mathfrak{F}\{A, \omega\}$ являются функциями двух аргументов — $A$ и $\omega$ ($A \in \mathfrak{S}$, $\omega \in \Omega$). Равенство (8) имеет место только с вероятностью 1, причем исключительное множество $N$ тех $\omega$, для которых (8) не выполнено, зависит от последовательности $A_n$. Поэтому, вообще говоря, нельзя утверждать, что $\mathsf{P}_\mathfrak{F}(A, \omega)$ для каких-либо $\omega$ является мерой.

д) *Если математические ожидания $\xi$ и $\alpha\xi$ имеют смысл, $\alpha$ — $\mathfrak{F}$-измеримая случайная величина, то*

$$\mathsf{M}\{\alpha\xi \mid \mathfrak{F}\} = \alpha \mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}\}. \tag{9}$$

В силу б) при доказательстве можно ограничиться предположением, что $\xi > 0$ и $\alpha \geqslant 0$.

Для дискретных $\alpha$ и $\xi$ равенство (9) было установлено ранее, хотя и записывалось в другой, но эквивалентной форме (4). В общем случае построим монотонно возрастающую последовательность неотрицательных дискретных случайных величин $\xi_n$, сходящуюся к $\xi$ при каждом $\omega$, и монотонно возрастающую последовательность $\mathfrak{F}$-измеримых неотрицательных дискретных случайных величин $\alpha_n$, сходящуюся к $\alpha$, подставим в (9) $\alpha = \alpha_n$, $\xi = \xi_m$ и перейдем к пределу, положив сначала $m \to \infty$, а затем $n \to \infty$. Используя г), получим требуемое. ■

Следствие. *Если $F \in \mathfrak{F}$, то*

$$\mathsf{P}\{A \cap F \mid \mathfrak{F}\} = \chi(F)\, \mathsf{P}\{A \mid \mathfrak{F}\}. \tag{10}$$

Повторное применение операции вычисления условного математического ожидания обладает важным и часто применяемым свойством «поглощения».

Теорема 2. *Если $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, то*

$$\mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}_2\} \mid \mathfrak{F}_1\} = \mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}_1\}.$$

Доказательство. Из $F \in \mathfrak{F}_1$ следует $F \in \mathfrak{F}_2$, и поэтому

$$\int_F \mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}_2\} \mid \mathfrak{F}_1\}\, d\mathsf{P} = \int_F \mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}_2\}\, d\mathsf{P} = \int_F \xi\, d\mathsf{P} = \int_F \mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}_1\}\, d\mathsf{P}.$$

Сопоставляя крайние части полученных равенств, получим требуемое. Заметим, что равенство $\mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}_1\}|\mathfrak{F}_2\}=\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}_1\}$ ($\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}_2$) тривиально. Действительно, величина $\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}_1\}$ $\mathfrak{F}_1$-, а тем более и $\mathfrak{F}_2$-измерима. Написанное равенство тогда вытекает из а). ∎

Пусть рассматривается некоторый эксперимент, описываемый случайным элементом $\zeta$, $\zeta=g(\omega)$, со значениями в $\{X,\mathfrak{B}\}$. Условное математическое ожидание $\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}$ случайной величины $\xi$ относительно случайного элемента $\zeta$ — это то среднее значение $\xi$, которое оно имеет при фиксированном значении $\zeta$. В соответствии с предыдущими рассуждениями примем следующее

Определение. $\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}=\mathsf{M}\{\xi|\mathfrak{F}_\zeta\}$, *где* $\mathfrak{F}_\zeta$ — *σ-алгебра, порожденная случайным элементом* $\zeta$.

Если исходить из первоначального определения условного математического ожидания, то это определение эквивалентно следующему:

$\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}$ *является* $\mathfrak{F}_\zeta$*-измеримой случайной величиной, удовлетворяющей при любом* $B\in\mathfrak{B}$ *соотношению*

$$\int\limits_{g^{-1}(B)}\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}\,d\mathsf{P}=\int\limits_{g^{-1}(B)}\xi\,d\mathsf{P}.\tag{11}$$

Теорема 3. *Условное математическое ожидание* $\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}$ *является* $\mathfrak{B}$*-измеримой функцией от* $\zeta$, *т. е. найдется такая* $\mathfrak{B}$*-измеримая действительная функция* $h(x)$, $x\in X$, *что* $\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}=h(\zeta)$ *и* $\forall B\in\mathfrak{B}$

$$\int\limits_B h(x)\,\mathsf{P}g^{-1}(dx)=\int\limits_{g^{-1}(B)}\xi\,d\mathsf{P}.$$

Первая часть утверждения вытекает из теоремы 5 § 1, а вторая — из правила замены переменных (теорема 12 § 1). ∎

Отметим следующие свойства условных математических ожиданий относительно случайных величин, непосредственно вытекающие из предыдущего:

е) *Если* $\xi=h(\zeta)$, *где* $h(x)$ — $\mathfrak{B}$*-измеримая функция, то* $\mathsf{M}\{\xi|\zeta\}=\xi$.

ж) *Если* $\zeta_i$ — *случайные элементы в* $\{X_i,\ \mathfrak{B}_i\}$, $i=1,\ 2$, $(\zeta_1,\ \zeta_2)$ — *их прямое произведение, то* $\mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\xi|(\zeta_1,\ \zeta_2)\}|\zeta_1\}=\mathsf{M}\{\xi|\zeta_1\}$.

Утверждение е) следует из д), ж) — из теоремы 2.

**Регулярные условные вероятности.** Положим $\mathsf{P}\{A|\mathfrak{B}\}=\mathsf{P}^{\mathfrak{F}}(A,\omega)$. При каждом $A\in\mathfrak{S}$ условная вероятность $\mathsf{P}^{\mathfrak{F}}(A,\omega)$ определена однозначно, но только с вероятностью 1.

Определение. *Если существует функция* $p(A,\ \omega)$, $A\in\mathfrak{S}$, $\omega\in\Omega$, *такая, что* а) *почти для всех* $\omega$ $p(A, \omega)$, *как функция от множества* $A$, *является вероятностной мерой,*

б) *при фиксированном* $A$ $p(A, \omega)$ $\mathfrak{F}$-*измерима и*

$$p(A, \omega) = \mathsf{P}^{\mathfrak{F}}(A, \omega) \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}),$$

*то* $p(A, \omega)$ *называют регулярной условной вероятностью.*

Можно привести примеры, когда регулярные условные вероятности не существуют. Если же они существуют, то условные математические ожидания выражаются через них с помощью интегрирования.

Теорема 4. *Если* $p(A, \omega) = \mathsf{P}^{\mathfrak{F}}(A, \omega)$ — *регулярная условная вероятность, то*

$$\mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}\} = \int f(\omega') \mathsf{P}(d\omega', \omega). \tag{12}$$

*Доказательство.* Класс случайных величин $\xi$, для которых эта формула справедлива, линеен, замкнут относительно предельного перехода по монотонно возрастающим последовательностям неотрицательных случайных величин (в силу теоремы об интегрировании монотонных последовательностей) и содержит индикаторы $\chi(A)$, $A \in \mathfrak{S}$. Отсюда формула (12) следует для всех $\xi$, для которых $\mathsf{M}\xi$ конечно. ∎

Поскольку регулярные условные распределения не всегда существуют, введем видоизменение этого понятия, достаточное для решения ряда задач, возникающих в приложениях.

Пусть $\{X, \mathfrak{B}\}$ — измеримое пространство, $\zeta$ — случайный элемент в $\{X, \mathfrak{B}\}$, $\mathfrak{F}$ — $\sigma$-алгебра, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}$.

Определение. *Если существует функция* $Q(B, \omega)$, *определенная на* $\mathfrak{B} \times \Omega$ *и такая, что*

а) *при фиксированном* $B \in \mathfrak{B}$ $Q(B, \omega)$ $\mathfrak{F}$-*измерима,*

б) *с вероятностью* 1 $Q(B, \omega)$ *при фиксированном* $\omega$ *является вероятностной мерой на* $\mathfrak{B}$,

в) *при каждом* $B \in \mathfrak{B}$ $Q(B, \omega) = \mathsf{P}\{(\zeta \in \mathfrak{B}) \mid \mathfrak{F}\}$ $(\mathrm{mod}\,\mathsf{P})$, *то* $Q(B, \omega)$ *называют регулярным условным распределением случайного элемента* $\zeta$ *относительно* $\sigma$-*алгебры* $\mathfrak{F}$.

Условие в) эквивалентно требованию: для всякого $F \in \mathfrak{F}$

$$\int_F Q(B, \omega) \mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{P}(\{\xi \in B\} \cap F).$$

Теорема 5. *Пусть* $X$ — *полное сепарабельное метрическое пространство,* $\mathfrak{B}$ — $\sigma$-*алгебра борелевских множеств* $X$, $\zeta$ — *случайный элемент в* $\{X, \mathfrak{B}\}$. *Тогда* $\zeta$ *обладает регулярным условным распределением относительно произвольной* $\sigma$-*алгебры* $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S})$.

*Доказательство.* Пусть $q$ — распределение случайного элемента $\zeta$. Можно построить монотонно возрастающую последовательность компактов $K_n$ в $X$ такую, что (см. теорему 6 § 2) $q(X\setminus K_n)<\varepsilon_n$ и $\varepsilon_n\to 0$. Пространство всех ограниченных непрерывных функций на метрическом пространстве $X$ обозначим через $\mathscr{C}(X)$ и введем в $\mathscr{C}(X)$ метрику $\rho(f, g)$, положив $r(f, g) = \|f-g\|$, $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. Пространство $\mathscr{C}(K_n)$ является сепарабельным. Пусть $\{f_{nk}(x),\ k=1, 2, \ldots\}$ — счетная всюду плотная сеть в $\mathscr{C}(K_n)$. Продолжим $f_{nk}(x)$ на все $X$ так, чтобы $\sup\limits_{x\in K_n}|f_{nk}(x)|=\sup\limits_{x\in X}|f_{nk}(x)|$.

Положим $\chi_n=\chi_n(\zeta)$, $\chi_n(x)=\chi(K_n, x)$. Из свойств условных математических ожиданий вытекает, что можно найти такое $D_0$, что $\mathsf{P}(D_0)=0$ и при $\omega\overline{\in} D_0$ выполняются следующие соотношения:

если $f_{nk}\geqslant 0$, то

$$\mathsf{M}\{f_{nk}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}\geqslant 0,\qquad \mathsf{M}\{rf_{nk}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}=r\mathsf{M}\{f_{nk}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\};$$

если $|f_{nk}-f_{nj}|<r$, то

$$|\mathsf{M}\{(f_{nk}-f_{nj})\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}|\leqslant r,$$

$$\mathsf{M}\{(f_{nk}(\zeta)+f_{nj}(\zeta))\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}=\mathsf{M}\{f_{nk}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}+\mathsf{M}\{f_{nj}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}$$

для всех $n$, $k$, $j$ и рациональных $r$. С другой стороны,

$$\left|\int_F(\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}-\mathsf{M}\{f_{nk}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\})\chi_n(\zeta)\,d\mathsf{P}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{F\cap K_n}|f(x)-f_{nk}(x)|\,q(dx),$$

так что если $\|\chi_n(f-f_{nj})\|\to 0$, то

$$\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}=\lim\mathsf{M}\{f_{nk_j}(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}\ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}),\tag{13}$$

причем предел справа не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.

Так как условное математическое ожидание не определено на множествах вероятности 0, то можно воспользоваться соотношением (13) для определения $\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n|\mathfrak{F}\}$ в случае произвольной $f$, непрерывной на $K_n$, где $f_{nk_j}$ — некоторая последовательность элементов всюду плотной сети такая, что $\|(f-f_{nk_j})\chi_n\|\to 0$. При таком определении условных математических ожиданий для всех $\omega\overline{\in} D_0$ и для всех непрерывных на $K_n$ функций $f(x)$, $g(x)$ и любых действительных $c$ и $d$

$$\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n|\mathfrak{F}\}\geqslant 0,\ \text{если}\ f\geqslant 0,$$

$$\mathsf{M}\{cf(\zeta)\chi_n+dg(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}=c\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\}+d\mathsf{M}\{g(\zeta)\chi_n\,|\,\mathfrak{F}\},$$

т. е. с вероятностью 1 $\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n|\mathfrak{F}\}$ оказывается положительным линейным функционалом на $\mathscr{C}(K_n)$. Согласно одной теореме из теории меры такой функционал допускает представление

$$\mathsf{M}\{f(\zeta)\chi_n|\mathfrak{F}\}=\int_{K_n} f(x)\,q_n(dx,\omega), \qquad \omega \overline{\in} D_0,$$

где $q_n(B, \omega)$ — меры определяемые на борелевских подмножествах $K_n$ однозначно. Для произвольного $B \in \mathfrak{B}$ положим

$$\begin{aligned} q(B, \omega) &= \lim q_n(B \cap K_n, \omega), && \omega \overline{\in} D_0, \\ q(B, \omega) &= q(B), && \omega \in D_0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при фиксированном $\omega$ $q(B, \omega)$ является мерой. Действительно, во-первых, $q(B, \omega)$ конечно аддитивна (это вытекает из аддитивности $q_n$). Далее, если $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_{n_1} \cap B_{n_2} = \varnothing$ при $n_1 \neq n_2$, то $(\omega \overline{\in} D_0)$

$$\sum_1^N q(B_k, \omega) = q\left(\bigcup_1^N B_k, \omega\right) \leqslant q\left(\bigcup_1^\infty B_k, \omega\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} q_n\left(\bigcup_1^\infty B_k, \omega\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^\infty q_n(B_k \cap K_n, \omega) \leqslant \sum_1^\infty q(B_k, \omega).$$

Заставляя $N \to \infty$, получим $q\left(\bigcup_1^\infty B_k, \omega\right) = \sum_1^\infty q(B_k, \omega)$, т. е. $q(B, \omega)$ счетно аддитивна. Из равенства

$$\int_{K_n} f(x)\,q_n(dx, \omega) = \int_{K_n} f(x)\,q(dx, \omega), \qquad \omega \overline{\in} \mathscr{D}_0,$$

следует $(\omega \overline{\in} D_0)$

$$\int_X f(x)\,q(dx, \omega) = \int_{\bigcup_1^\infty K_n} f(x)\,q(dx, \omega) = \lim \int_{K_n} f(x)\,q_n(dx, \omega)$$

для любой $\mathfrak{B}$-измеримой неотрицательной функции $f$. Поэтому, если $f$ — непрерывная и ограниченная, то

$$\mathsf{M}\{f|\mathfrak{F}\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\{f\chi_n|\mathfrak{F}\} = \int_X f(x)\,q(dx, \omega) \pmod{\mathsf{P}}. \qquad (14)$$

Так как произвольную ограниченную $\mathfrak{B}$-измеримую функцию $f(x)$ можно аппроксимировать последовательностью ограниченных непрерывных функций $f_n(x)$ так, чтобы $\int\limits_X |f(x)-f_n(x)|q(dx)\to 0$, то из неравенства $\left|\int\limits_F \mathsf{M}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}\,d\mathsf{P}-\int\limits_F \mathsf{M}\{f_n(\zeta)|\mathfrak{F}\}\,d\mathsf{P}\right|\leqslant \int\limits_F |f(x)-f_n(x)|q(dx)$ вытекает, что равенство (14) имеет место и для произвольной $\mathfrak{B}$-измеримой ограниченной функции. В частности, $\mathsf{P}\{B|\mathfrak{F}\}=q(B,\omega)\ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$. ■

Рассмотрим случайные элементы $\zeta_1$ и $\zeta_2$ в $\{Y_1,\mathfrak{B}_1\}$ и $\{Y_2,\mathfrak{B}_2\}$ соответственно, где $\{Y_i,\mathfrak{B}_i\}$ удовлетворяют условиям теоремы 5. Положим $Y^{(1,2)}=Y_1\times Y_2$, $\mathfrak{B}^{(1,2)}=\sigma\{\mathfrak{B}_k,\ k=1,2\}$. Последовательность $\zeta^{(1,2)}=(\zeta_1,\zeta_2)$ можно рассматривать как случайный элемент в $\{Y^{(1,2)},\mathfrak{B}^{(1,2)}\}$, а $Y^{(1,2)}$ — как полное метрическое сепарабельное пространство. Пусть $q_i$ обозначает распределение $\zeta_i$ $(i=1,\ 2)$, $q^{(1,2)}$ — распределение $\zeta^{(1,2)}$, а $q^{(2|1)}$ — регулярное условное распределение $\zeta_2$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{\zeta_1}$, порожденной случайным элементом $\zeta_1$. Так как $q^{(2|1)}$ является $\mathfrak{F}_{\zeta_1}$-измеримой функцией, то $q^{(2|1)}(B_2,\omega)=q(B_2,\zeta_1)$, где $B_2\in\mathfrak{B}_2$, и функция $q(B_2,y)$ $\mathfrak{B}_1$-измерима. Из определения условных вероятностей следует

$$\int\limits_{q_1^{-1}(B_1)} q(B_2,\zeta_1)\,d\mathsf{P}=q^{(1,2)}(B_1\times B_2),$$

где $B_1$ — произвольное множество из $\mathfrak{B}_1$ и $\zeta_1=q_1(\omega)$. В соответствии с правилом замены переменной это равенство можно записать в виде

$$q^{(1,2)}(B_1\times B_2)=\int\limits_{B_1} q(B_2,y_1)\,dy_1$$

или

$$q^{(1,2)}(B_1\times B_2)=\int\limits_{Y_1}\chi^{(1)}(B_1,y_1)\int\limits_{Y_2}\chi^{(2)}(B_2,y_2)\,q(dy_2,y_1)\,q_1(dy_1), \tag{15}$$

где $\chi^{(i)}$ — индикаторы множеств в пространстве $Y_i$. Из последней формулы вытекает

Теорема 6.

$$\int\limits_{Y^{(1,2)}} f(y_1,y_2)\,dq^{(1,2)}=\int\limits_{Y_1}\left(\int\limits_{Y_2} f(y_1,y_2)\,q(dy_2,y_1)\right)q_1(dy_1) \tag{16}$$

*для любых $\mathfrak{B}^{(1,2)}$-измеримых неотрицательных функций.*

Действительно, класс функций $f$, для которых формула (16) верна, линеен и замкнут относительно предельного перехода по монотонным последовательностям. Так как он в силу (15) содержит функции вида $\chi^{(1)}\chi^{(2)}$, то он содержит и их линейные комбинации. С другой стороны, произвольную $\mathfrak{B}^{(1,2)}$-измеримую функцию можно аппроксимировать монотонно возрастающими последовательностями линейных комбинаций функций вида $\chi^{(1)}\chi^{(2)}$. ■

Заметим, что формула (16) верна и для знакопеременных функций $f$, если только одна из сторон равенства (16) имеет смысл. Из формулы (16) вытекает

Следствие.

$$\mathsf{M}\{f(\zeta_1, \zeta_2) \mid \mathfrak{F}_{\zeta_1}\} = \int\limits_{Y_2} f(\zeta_1, y_2)\, q(dy_2, \zeta_1). \tag{17}$$

Полученным результатам можно придать следующую более общую форму. Пусть $\zeta_k$ — случайные элементы в $\{Y_k, \mathfrak{B}_k\}$, $Y_k$ — полные сепарабельные метрические пространства. Положим

$$Y^{(1,s)} = \prod_{k=1}^{s} Y_k, \qquad \mathfrak{B}^{(1,s)} = \sigma\{\mathfrak{B}_k,\ k = 1, \ldots, s\},$$

$\eta_s = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s)$, $q_k$ — распределение элемента $\zeta_k$ в $\{Y_k, \mathfrak{B}_k\}$, $q^{(s)} = q^{(s)}(B_s, \zeta_1, \ldots, \zeta_{s-1})$ — регулярное условное распределение элемента $\zeta_s$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{\eta_{s-1}} = \mathfrak{F}_{(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{s-1})}$. Из формулы

$$\mathsf{M}\{f \mid \mathfrak{F}_{\zeta_1}\} = \mathsf{M}\{\ldots\{\mathsf{M}\{f \mid \mathfrak{F}_{\eta_{n-1}}\} \mid \mathfrak{F}_{\eta_{n-2}}\} \ldots \mid \mathfrak{F}_{\eta_1}\},$$

повторно применяя соотношение (17), получим

$$\mathsf{M}\{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mid \mathfrak{F}_{\zeta_1}\} = \\ = \int\limits_{Y_2} \cdots \int\limits_{Y_{n-1}} \left( \int\limits_{Y_n} f(\zeta_1, y_2, \ldots, y_n)\, q^{(n)}(dy_n, \zeta_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \right) \times \\ \times q^{(n-1)}(dy_{n-1}, \zeta_1, y_2, \ldots, y_{n-2}) \ldots q^{(2)}(dy_2, \zeta_1), \tag{18}$$

$$\mathsf{M}\{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} = \\ = \int\limits_{Y_1} \cdots \int\limits_{Y_{n-1}} \left( \int\limits_{Y_n} f(y_1, \ldots, y_n)\, q^{(n)}(dy_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) \right) \times \\ \times q^{(n-1)}(dy_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-2}) \ldots q^{(2)}(dy_2, y_1)\, q_1(dy_1). \tag{19}$$

## § 4. Независимость

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — фиксированное вероятностное пространство. Под событиями будем понимать, если не оговорено иное, $\mathfrak{S}$-измеримые подмножества $\Omega$.

Два события $A$ и $B$ называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$. В случае $\mathsf{P}(B) > 0$ это условие эквивалентно следующему: $\mathsf{P}(A|B)=\mathsf{P}(A)$. Из определения непосредственно следует:

а) $\Omega$ и $A$, где $A$ — произвольное событие, независимы;

б) если $\mathsf{P}(N)=0$, $A$ — любое, то $N$ и $A$ независимы;

в) если $A$ и $B_i$ $(i=1,\ 2)$ независимы, $B_1\supset B_2$, то $A$ и $B_1\setminus B_2$ независимы. В частности, $A$ и $\bar{B}_1$ независимы;

г) если $A$ и $B_i$ независимы, $i=1, 2, \ldots, n$, причем $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_n$ попарно несовместимы, то $A$ и $\bigcup\limits_1^n B_i$ также независимы.

Заметим, что без оговорки о попарной несовместимости событий $B_i$ последнее утверждение, вообще говоря, не имеет места.

д) $A$ не зависит от $A$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}(A)=0$ или $\mathsf{P}(A)=1$.

Пусть $I$ — некоторое множество, $\{\mathfrak{M}_i,\ i\in I\}$ — множество классов событий.

Определение. *Классы событий $\{\mathfrak{M}_i,\ i\in I\}$ называются независимыми (или независимыми в совокупности), если для произвольных попарно неравных $i_1, \ldots, i_n$ $(i_k\in I)$ и произвольных $A_{i_k}$, $A_{i_k}\in\mathfrak{M}_{i_k}$, $k=1, 2, \ldots, n$,*

$$\mathsf{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \ldots \cap A_{i_n}\right)=\mathsf{P}\left(A_{i_1}\right)\mathsf{P}\left(A_{i_2}\right)\ldots\mathsf{P}\left(A_{i_n}\right).$$

Заметим, что для бесконечного множества классов событий определение независимости эквивалентно требованию, чтобы произвольное конечное подмножество классов событий состояло из независимых классов событий.

Назовем класс событий $\pi$-классом, если он замкнут относительно операции пересечения событий (т. е. если из $A\in\mathfrak{M}$, $B\in\mathfrak{M}$ следует $A\cap B\in\mathfrak{M}$).

Теорема 1. *Пусть $\{\mathfrak{M}_i,\ i\in I\}$ — совокупность независимых $\pi$-классов событий. Тогда минимальные $\sigma$-алгебры $\sigma\{\mathfrak{M}_i\}$, $i\in I$, независимы.*

*Доказательство.* Можно ограничиться конечным числом классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$. Достаточно показать, что если один из классов, например $\mathfrak{M}_1$, заменить на $\sigma\{\mathfrak{M}_1\}$, то новая последовательность классов событий также независима.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех событий, не зависящих от $\mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$. По определению $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ обладает свойствами: он замкнут относительно суммирования счетной последовательности непересекающихся событий и образования разности $B_2\setminus B_1$ при условии, что $B_2\supset B_1$. Теорема 1 теперь вытекает из следующего предложения.

Теорема 2. *Если класс событий $\mathfrak{A}$ содержит $\pi$-класс $\mathfrak{M}$ и обладает свойствами:*

а) *из $A_1\subset A_2$, $A_i\in\mathfrak{A}$, $i=1, 2$, следует $A_2\setminus A_1\in\mathfrak{A}$;*

б) *из* $A_n \in \mathfrak{A}, n = 1, 2, \ldots, A_n \cap A_m = \varnothing$ *при* $n \neq m$ *следует* $\bigcup\limits_1^\infty A_n \in \mathfrak{A}$,

*то* $\mathfrak{A}$ *содержит* $\sigma\{\mathfrak{M}\}$.

*Доказательство.* Обозначим $\mathfrak{A}_1$ минимальный класс событий, содержащий $\mathfrak{M}$ и обладающий свойствами а) и б) ($\mathfrak{A}_1$ есть пересечение всех классов, содержащих $\mathfrak{M}$ и обладающих свойствами а) и б)). Покажем, что $\mathfrak{A}_1 = \sigma\{\mathfrak{M}\}$. Пусть $\mathfrak{A}_1(B)$ обозначает класс всех событий $A$ из $\mathfrak{A}_1$, для которых $A \cap B \in \mathfrak{A}_1$. Легко проверить, что $\mathfrak{A}_1(B)$ обладает свойствами а) и б). Далее, если $B \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{A}_1(B) \supset \mathfrak{M}$, так как $\mathfrak{M}$ — $\pi$-класс. Поэтому $\mathfrak{A}_1(B) = \mathfrak{A}_1$ (если $B \in \mathfrak{M}$). Но это означает, что $\mathfrak{A}_1(A) \supset \mathfrak{M}$ для любого $A \in \mathfrak{A}_1$, т. е. $\mathfrak{A}_1(A) = \mathfrak{A}_1$ теперь уже для любого $A \in \mathfrak{A}_1$. Таким образом, $\mathfrak{A}_1$ является $\pi$-классом. Но $\pi$-класс событий, одновременно обладающий свойствами а) и б), очевидно является $\sigma$-алгеброй. Итак, $\mathfrak{A}_1 = \sigma\{\mathfrak{M}\}$ и $\mathfrak{A} \supset \sigma\{\mathfrak{M}\}$. ■

Теорема 3. *Пусть* $\{\mathfrak{M}_i, i \in I\}$ — *множество независимых* $\pi$-*классов событий*, $I = I_1 \cup I_2$ $(I_1 \cap I_2 = \varnothing)$, $\mathfrak{B}_k = \sigma\{\mathfrak{M}_i, i \in I_k\}$, $k = 1, 2$. *Тогда* $\mathfrak{B}_1$ *и* $\mathfrak{B}_2$ *независимы.*

В силу теоремы 1 можно ограничиться предположением, что $\mathfrak{M}_i$ — $\sigma$-алгебры. Рассмотрим классы $\mathfrak{A}_k$ $(k = 1, 2)$, состоящие из всевозможных событий вида $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}$, $n$ — любое, $i_r \in I_k$. Они замкнуты относительно пересечений, $\mathfrak{A}_k$ содержит все $\mathfrak{M}_i$, $i \in I_k$, и $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ независимы. В силу теоремы 2 $\sigma\{\mathfrak{A}_1\} = \sigma\{\mathfrak{M}_i, i \in I_1\}$ и $\sigma\{\mathfrak{A}_2\} = \sigma\{\mathfrak{M}_i, i \in I_2\}$ независимы. ■

Следствие. *Если* $I$ *разбить на произвольную совокупность подмножеств*, $I = \bigcup\limits_{k \in Q} I_k$ *попарно без общих точек, то* $\sigma$-*алгебры* $\mathfrak{B}_k = \sigma\{\mathfrak{M}_i, i \in I_k\}$, $k \in Q$, *независимы в совокупности.*

**Независимые случайные элементы.** Пусть $\zeta_i = f_i(\omega)$ — случайный элемент в $\{X_i, \mathfrak{B}_i\}$, $i \in I$.

Определение. *Случайные элементы* $\{\zeta_i, i \in I\}$ *называются независимыми (независимыми в совокупности), если для любого* $n$ *и произвольных* $B_k \in \mathfrak{B}_{i_k}$ $i_k \in I$,

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{\zeta_{i_k} \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\zeta_{i_k} \in B_k\}.$$

Более общим является определение независимости семейства множеств случайных элементов. Рассмотрим некоторое семейство множеств $\{\zeta_i^\mu, i \in I_\mu\}$, $\mu \in M$, случайных элементов со значениями в $\{X_i^\mu, \mathfrak{B}_i^\mu\}$.

Определение. *Множества случайных элементов* $\{\zeta_i^\mu, i \in I_\mu\}$ $(\mu \in M)$ *называются независимыми (взаимно независимыми), если независимы классы событий* $\{\mathfrak{M}_\mu, \mu \in M\}$, где $\mathfrak{M}_\mu$ *состоит из всевозможных событий вида*

$$\bigcap_{k=1}^{n} \left\{\zeta_{i_k}^\mu \in B_{i_k}^\mu\right\}, \ n = 1, 2, \ldots, \ i_k \in I_\mu, \ B_{i_k}^\mu \in \mathfrak{B}_{i_k}^\mu.$$

Пусть $\sigma\{\zeta_i^\mu, i \in I_\mu\} = \mathfrak{F}_\mu$ обозначает $\sigma$-алгебру, порожденную множеством случайных элементов $\zeta_i^\mu$, $i \in I_\mu$, т. е. минимальную $\sigma$-алгебру, относительно которой измеримы все случайные величины $\zeta_i^\mu$, $i \in I_\mu$, $\mu$ фиксировано.

Теорема 4. *Множества случайных элементов* $\{\zeta_i^\mu, i \in I_\mu\}$ $(\mu \in M)$ *независимы тогда и только тогда, когда независимы $\sigma$-алгебры* $\mathfrak{F}_\mu$, $\mu \in M$.

Доказательство вытекает из замечания, что классы событий, введенные в определении независимости множеств случайных элементов, являются $\pi$-классами, и из теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $(\zeta_1^\mu, \ldots, \zeta_s^\mu)$, $\mu \in M$, — *множество независимых последовательностей случайных элементов*, $g_\mu(x_1, \ldots \ldots, x_{s_\mu})$ — $\sigma\{\mathfrak{B}_k^\mu, k = 1, \ldots, s_\mu\}$*-измеримые функции* $(\mu \in M)$. *Тогда случайные величины*

$$\xi_\mu = g_\mu\left(\zeta_1^\mu, \ldots, \zeta_{s_\mu}^\mu\right), \qquad \mu \in M,$$

*взаимно независимы.*

Замечание. Случайные величины $\{\xi_\mu, \mu \in M\}$ взаимно независимы тогда и только тогда, когда для любого $n$, любых $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ из $M$ и любых действительных $a_1, \ldots, a_n$

$$\mathsf{P}\left\{\xi_{\mu_1} < a_1, \ldots, \xi_{\mu_n} < a_n\right\} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\left\{\xi_{\mu_k} < a_k\right\}.$$

Необходимость тривиальна, а достаточность вытекает из того, что $\sigma$-алгебра, порождаемая событиями вида $\{\xi_\mu < a\}$, совпадает с $\sigma$-алгеброй $\{\xi_\mu \in B, B \in \mathfrak{B}^1\}$, $\mathfrak{B}^1$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на прямой.

Пусть $\zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — последовательность независимых случайных элементов (на $\{X_k, \mathfrak{B}_k\}$ соответственно), $q_k$ — распределение $\zeta_k$ на $\mathfrak{B}_k$, $q^{(1, n)}$ — совместное распределение последовательности $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ в $\left\{\prod_{k=1}^{n} X_k, \ \sigma\{\mathfrak{B}_k, k = 1, \ldots, n\}\right\}$.

Из определения независимости следует, что

$$q^{(1,n)}(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n) = \prod_{k=1}^{n} q_k(B_k), \qquad B_k \in \mathfrak{B}_k. \tag{1}$$

Очевидно и обратное: если выполняется (1) для всех $B_k \in \mathfrak{B}_k$, то величины $\{\zeta_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ независимы.

Пусть $g(x_1, x_2)$ — $\sigma\{\mathfrak{B}_i,\ i = 1, 2\}$-измеримая функция, $\zeta_1$ и $\zeta_2$ — независимые случайные элементы и $\mathsf{M}g(\zeta_1, \zeta_2) < \infty$. Из правила замены переменной и теоремы Фубини тогда следует, что $\mathsf{M}g(x_1, \zeta_2)$ является $\mathfrak{B}_1$-измеримой функцией, конечной для $q_1$-почти всех $x_1$, и

$$\mathsf{M}g(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{X_1} q_1(dx_1) \int_{X_2} g(x_1, x_2)\, q_2(dx_2). \tag{2}$$

В качестве следствия отсюда вытекает формула

$$\mathsf{M}g(\zeta_1)\, g(\zeta_2) = \mathsf{M}g(\zeta_1)\, \mathsf{M}g(\zeta_2), \tag{3}$$

справедливая, если $\mathsf{M}g(\zeta_k)$ конечны.

Следующее предложение можно рассматривать как усиление предыдущего.

Теорема 5. *Если случайная величина $\xi$ с конечными математическими ожиданиями и $\sigma$-алгебра $\mathfrak{F}$ независимы, то*

$$\mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\xi.$$

*Доказательство.* Независимость случайной величины $\xi$ от $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$ означает, что независимы $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_\xi = \sigma\{\xi\}$. Поэтому для любого $F \in \mathfrak{F}$ случайные величины $\xi$ и $\chi(F)$ независимы. Следовательно,

$$\int_F \xi\, d\mathsf{P} = \mathsf{M}\chi(F)\, \mathsf{M}\xi = \int_F (\mathsf{M}\xi)\, d\mathsf{P}.$$

Так как $\mathsf{M}\xi$ — постоянная, то она $\mathfrak{F}$-измерима. Поэтому

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\{\xi \mid \mathfrak{F}\}. \ \blacksquare$$

**Закон «0 или 1».** Пусть $A_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — некоторая последовательность событий.

Теорема 6 (теорема Бореля — Кантелли). *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) < \infty$, *то событие* $\overline{\lim}\, A_n = \{A_n$ *бесконечно часто*$\}$ *имеет вероятность* 0. *Если же события* $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *независимы, то вероятность события* $\overline{\lim}\, A_n$ *равна* 0 *или* 1 *в зависимости от того, сходится ли ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$ *или расходится.*

*Доказательство.* а) Так как $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, то

$$\mathsf{P}\{A_n \text{ б. ч.}\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = 0,$$

что доказывает первую часть утверждения.

б) Пусть теперь события $A_n$ независимы. Нужно доказать только, что если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty$, то $\mathsf{P}\{\overline{\lim} A_n\} = 1$. Пусть $A^* = \overline{\lim} A_n$, тогда

$$\Omega \setminus A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (\Omega \setminus A_k)$$

и

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus A^*) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} (\Omega \setminus A_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(\Omega \setminus A_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathsf{P}(A_k)) = 0$$

в силу расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k)$. ■

Рассмотрим теперь произвольную последовательность независимых σ-алгебр $\mathfrak{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ В силу теоремы Бореля — Кантелли событие $A^* = \overline{\lim} A_n$, где $A_n$ — произвольная последовательность такая, что $A_n \in \mathfrak{F}_n$, имеет вероятность 0 или 1. Этот результат может быть обобщен на произвольные события, порождаемые совокупностью всех σ-алгебр $\mathfrak{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и не зависящих от произвольной конечной последовательности σ-алгебр $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$. Уточним это утверждение.

Пусть $\mathfrak{B}_k = \sigma(\mathfrak{F}_j, j = k, k+1, \ldots\}$, $\mathfrak{B}_k$ образуют монотонно убывающую последовательность σ-алгебр. Их пересечение $\mathfrak{B} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k$ есть снова σ-алгебра. Положим по определению

$$\mathfrak{B} = \overline{\lim} \mathfrak{F}_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma\{\mathfrak{F}_j,\ j = k,\ k+1, \ldots\}.$$

Очевидно, что σ-алгебра $\overline{\lim} \mathfrak{F}_n$ не изменится при замене любого конечного числа σ-алгебр $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ другими.

Теорема 7 (общий закон «0 или 1» Колмогорова). *Если $\mathfrak{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — взаимно независимые σ-алгебры, то всякое событие из $\overline{\lim} \mathfrak{F}_n$ имеет вероятность* 0 *или* 1.

Действительно, пусть $A \in \overline{\lim} \mathfrak{F}_n$. Тогда $A \in \mathfrak{B}_k$ при любом $k$, следовательно, $A$ и $\sigma\{\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{k-1}\}$ независимы. Поэтому независимы $A$ и $\sigma\{\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots\}$. Так как $A \in \sigma\{\mathfrak{F}_k, k = 1, 2, \ldots\}$, то $A$ не зависит от $A$. Это возможно только тогда, когда $\mathsf{P}(A) = 0$ или $\mathsf{P}(A) = 1$. ■

Теорема 8. *Пусть $\{\zeta_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых случайных элементов в фиксированном метрическом пространстве $\{X, \mathfrak{B}\}$, $\mathfrak{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная $\zeta_n$, и $\mathfrak{B}_n = \sigma\{\mathfrak{F}_k, k = n, n+1, \ldots\}$. Тогда*

а) *предел последовательности $\{\zeta_n, n = 1, 2, \ldots\}$ существует с вероятностью 1 или с вероятностью 0;*

б) *если $X$ сепарабельно и полно, то предел последовательности $\{\zeta_n, n = 1, 2, \ldots\}$, если он существует, с вероятностью 1 постоянен;*

в) *если $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — функция бесконечного числа аргументов $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ $\mathfrak{B}_n$-измерима, каково бы ни было $n$, то она с вероятностью 1 постоянна.*

*Доказательство.* а). Если $\rho(x, y)$ — расстояние в $X$, то множество точек, в которых $\zeta_n$ сходится, можно записать в виде $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n', n'' \geq n} \left\{\omega: |\zeta_{n'} - \zeta_{n''}| < \frac{1}{k}\right\}$. Так как события $A_n = \bigcap_{n', n'' \geq n} \left\{|\zeta_{n'} - \zeta_{n''}| < \frac{1}{k}\right\}$ монотонно возрастают, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}_m$ при любом $m$, так что и $D \in \mathfrak{B}_m$ при любом $m$ и можно применить общий закон 0 или 1.

б) Пусть $F$ — замкнутое множество, $F \subset X$; через $F_k$ обозначим открытое множество $F_k = \left\{x: \rho(x, F) < \frac{1}{k}\right\}$. Тогда событие $D \cap \{\lim \zeta_n \in F\}$ можно представить в виде

$$D \cap \{\lim \zeta_n \in F\} = D \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \{\zeta_n \in F_k\}\right],$$

что принадлежит $\mathfrak{B}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, в силу тех же соображений, что и при доказательстве а). Таким образом, для любого замкнутого $F$ выполняется соотношение $\mathsf{P}\{\lim \zeta_n \in F\} = 0$ или 1. Но класс множеств $\mathfrak{B}$, для которых аналогичное заключение имеет место, является σ-алгеброй. Следовательно, $\mathsf{P}\{\lim \zeta_n \in B\} = 0$ или 1 для любого $B \in \mathfrak{B}$. В случае сепарабельного и полного пространства $X$ отсюда нетрудно получить, что мера $q$, индуцируемая на $\mathfrak{B}$ случайным элементом $\lim \zeta_n$, сосредоточена на одном атоме. Действительно, так как $q(X) = 1$, то найдется сфера $S_1$ радиуса 1 такая, что $q(S_1) = 1$ (если бы такой сферы не нашлось, то все сферы в $X$ радиуса 1 имели бы меру 0, что невозможно, так как $X$ покрывается счетным числом таких сфер). Аналогично, найдется сфера $S_2$ радиуса $\frac{1}{2}$, $S_2 \subset S_1$ и $q(S_2) = 1$. Продолжая это рассуждение, получим последовательность вложенных друг в друга сфер $S_n$ радиуса $\frac{1}{n}$, мера которых равна 1. Эти сферы имеют только одну общую точку $x$ и $q\{x\} = \lim q(S_n) = 1$.

в) События $A = \{\omega: f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) < a\} \in \mathfrak{B}_n$ по условию. Поэтому $A \in \overline{\lim}\, \mathfrak{F}_n$ и $A$ имеет вероятность 0 или 1. Таким образом, функция распределения случайной величины $\zeta = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \ldots)$ принимает только два значения 0 или 1 и величина $\zeta$ с вероятностью 1 постоянна. ■

ГЛАВА III

# СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## § 1. Мартингалы

**Определение и простейшие свойства.** Мартингалом называют семейство случайных величин $\xi(t)$, $t \in T$ ($T$ — множество действительных чисел), обладающих некоторым «безразличием к прошлому». Это «безразличие» состоит в том, что условные математические ожидания приращений $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ $(t_1 < t_2)$ при заданных значениях $\xi(s)$, $s \leqslant t$, независимо от этих значений равны нулю. Если предположить, что эти условные математические ожидания неотрицательны (неположительны), то $\xi(t)$ называют субмартингалом (супермартингалом).

Перейдем к точным определениям. В настоящем параграфе в основном рассматриваются последовательности случайных величин. Но сначала мы приведем общее определение. Пусть $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — фиксированное вероятностное пространство, $T$ — множество действительных чисел. Будем интерпретировать значения $t \in T$ как моменты времени проведения некоторых экспериментов. Совокупность событий, наблюдаемых до момента времени $t$, обозначим через $\mathfrak{F}_t$. Естественно, что $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$, если $t_1 < t_2$. Рассмотрим семейство случайных величин $\xi(t)$, $t \in T$, обладающих тем свойством, что значения $\xi(t)$ точно определяются совокупностью экспериментов, производимых в моменты времени $s$, $s \leqslant t$. Это означает, что величины $\xi(t)$ должны быть $\mathfrak{F}_t$-измеримы при любом $t \in T$. Чтобы описать эту ситуацию формально, введем следующие определения.

Определение. *Монотонно неубывающее семейство σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ ($\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$, если $t_1 < t_2$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{S}$) назовем потоком σ-алгебр. Семейство случайных величин $\{\xi(t), t \in T\}$ называют подчиненным потоку $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$, если $\xi(t)$ при любом $t \in T$ $\mathfrak{F}_t$-измеримо.*

Определение. *Семейство $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t; t \in T\}$, в котором случайные величины $\xi(t)$ подчинены потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ и $\mathsf{M}|\xi(t)| < \infty$, $t \in T$, называют мартингалом, если при $s < t$, $s$, $t \in T$*

$$\mathsf{M}\{\xi(t) \mid \mathfrak{F}_s\} = \xi(s), \tag{1}$$

*субмартингалом, если*

$$\mathsf{M}\{\xi(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\} \geqslant \xi(s), \tag{2}$$

*и супермартингалом, если*

$$\mathsf{M}\{\xi(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\} \leqslant \xi(s). \tag{3}$$

Из определения следует, что σ-алгебра $\sigma\{\xi(s),\ s \leqslant t,\ s \in T\}$ содержится в $\mathfrak{F}_t$. В ряде случаев можно считать, что $\mathfrak{F}_t = \sigma\{\xi(s),\ s \leqslant t,\ s \in T\}$, но часто под $\mathfrak{F}_t$ следует понимать более широкую σ-алгебру. В тех случаях, когда понятно, о каком потоке σ-алгебр идет речь, мартингалом (или субмартингалом) будем называть семейство $\{\xi(t),\ t \in T\}$.

Так как при умножении на $-1$ супермартингал переходит в субмартингал, то свойства, установленные для субмартингала, легко переформулировать для супермартингала.

Из определения условных математических ожиданий вытекает, что семейство $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ будет мартингалом (субмартингалом) тогда и только тогда, когда оно подчинено потоку $\mathfrak{F}_t$, $t \in T$, $\mathsf{M}|\xi(t)| < \infty$ и для любых $s$, $t$, $A \in \mathfrak{F}_s$ $(s < t,\ s, t \in T)$

$$\int_A \xi(s)\,d\mathsf{P} = \int_A \xi(t)\,d\mathsf{P} \tag{4}$$

$$\left(\int_A \xi(s)\,d\mathsf{P} \leqslant \int_A \xi(t)\,d\mathsf{P}\right). \tag{5}$$

В частности, в случае мартингала $\mathsf{M}\xi(t) = \mathrm{const}$, а для субмартингала $\mathsf{M}\xi(s) \leqslant \mathsf{M}\xi(t)$ при $s < t$.

Очевидно, что если $\xi(t)$, $\eta(t)$ — два субмартингала, $a > 0$, $b > 0$, то $a\xi(t) + b\eta(t)$ также является субмартингалом. С другой стороны, линейная комбинация двух мартингалов всегда является мартингалом.

Теорема 1. а) *Если* $\{\xi(t),\ \mathfrak{F}_t,\ t \in T\}$ — *мартингал,* $f(x)$ — *непрерывная выпуклая функция и* $\mathsf{M}|f(\xi(t))| < \infty$, *то* $\{f(\xi(t)),\ \mathfrak{F}_t,\ t \in T\}$ — *субмартингал.* б) *Если же* $\{\xi(t),\ \mathfrak{F}_t,\ t \in T\}$ — *субмартингал, а* $f(x)$ — *непрерывная монотонно неубывающая выпуклая функция,* $\mathsf{M}|f(\xi(t))| < \infty$, то $\{f(\xi(t)),\ \mathfrak{F}_t,\ t \in T\}$ — *также субмартингал.* в) *Если* $\xi(t)$, $\eta(t)$, $t \in [0, T]$, — *субмартингалы, то* $\xi(t) \vee \eta(t)$ — *также субмартингал.*

Эти утверждения легко вытекают из неравенства Иенсена. Действительно, если функция $f$ выпукла, а $\xi(t)$ — мартингал, $s < t$, то

$$\mathsf{M}\{f(\xi(t))\,|\,\mathfrak{F}_s\} \geqslant f(\mathsf{M}\{\xi(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\}) = f(\xi(s)),$$

т. е. $f(\xi(t))$ — субмартингал. Если $\xi(t)$ — субмартингал, а функция $f(x)$ выпукла и монотонно не убывает, то

$$\mathsf{M}\{f(\xi(t))\,|\,\mathfrak{F}_s\} \geqslant f(\mathsf{M}\{\xi(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\}) \geqslant f(\xi(s)).$$

Пусть $\zeta(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$. Процесс $\zeta(t)$ подчинен потоку $\mathfrak{F}_t$ и интегрируем. Для любого $A\in\mathfrak{F}_s$, где $s\in T$, $s<t$, учитывая, что события $A_1=A\cap\{\xi(s)<\eta(s)\}$ и $A_2=A\cap\{\xi(s)\geqslant\eta(s)\}$ $\mathfrak{F}_s$-измеримы, имеем

$$\int_A\zeta(s)\,d\mathsf{P}=\int_{A_1}\eta(s)\,d\mathsf{P}+\int_{A_2}\xi(s)\,d\mathsf{P}\leqslant$$
$$\leqslant\int_{A_1}\eta(t)\,d\mathsf{P}+\int_{A_2}\xi(t)\,d\mathsf{P}\leqslant\int_A\zeta(t)\,d\mathsf{P}.$$

Следовательно, $\zeta(t)$ — субмартингал. ■

Следствие. 1) *Если* $\xi(t)$, $t\in T$, — *субмартингал, то и* $a\vee\xi(t)$, $t\in T$, — *также субмартингал, где* $a$ — *постоянная.*

2) *Если* $\xi(t)$, $t\in T$, — *мартингал, то* $|\xi(t)|$ — *субмартингал и* $\mathsf{M}|\xi(t)|$ — *монотонно неубывающая функция. Если* $p>1$ *и* $\mathsf{M}|\xi(t)|^p<\infty$, *то* $|\xi(t)|^p$ — *субмартингал. Если же* $\xi(t)$ — *субмартингал, то* $\xi^+(t)$ — *также субмартингал. При этом, если* $p>1$ *и* $\mathsf{M}(\xi^+)^p<\infty$, *то* $(\xi^+)^p$ — *также субмартингал.*

Примеры. а) Пусть $\zeta_k$, $k=0,1,\dots,n,\dots$, — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, $\mathfrak{F}_n=\sigma\{\zeta_1,\dots,\zeta_n\}$, $\xi_n=\zeta_1+\zeta_2+\dots+\zeta_n$. Если $\mathsf{M}\zeta_n=0$ ($\mathsf{M}\zeta_n\geqslant 0$) $\forall n$, то $\{\xi_n,\mathfrak{F}_n,n=1,2,\dots\}$ является мартингалом (субмартингалом).

Действительно, при $m<n$

$$\mathsf{M}\{\xi_n\,|\,\mathfrak{F}_m\}=\mathsf{M}\{\xi_n-\xi_m\,|\,\mathfrak{F}_m\}+\xi_m=\xi_m+\sum_{k=m+1}^{n}\mathsf{M}\xi_k.$$

Аналогично, если $\mathsf{M}\zeta_n=1$ ($\mathsf{M}\zeta_n\geqslant 1$) $\forall n$, то последовательность $\{\xi_n,\mathfrak{F}_n,n=1,2,\dots\}$, где $\xi_n=\prod_{k=1}^{n}\zeta_k$, является мартингалом (субмартингалом). Действительно ($m<n$),

$$\mathsf{M}\{\xi_n\,|\,\mathfrak{F}_m\}=\xi_m\mathsf{M}\left\{\prod_{m+1}^{n}\zeta_k\,|\,\mathfrak{F}_m\right\}=\xi_m\prod_{m+1}^{n}\mathsf{M}\,\zeta_k.$$

б) Пусть $\{\mathfrak{F}_n,n=1,2,\dots\}$ — некоторый поток $\sigma$-алгебр, $\mathfrak{F}_n\subset\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ — $\sigma$-алгебра подмножеств множества $\Omega$, $\mathsf{P}$ и $\mathsf{Q}$ — две вероятностные меры на $\mathfrak{S}$, $\mathsf{P}_n$ и $\mathsf{Q}_n$ — сужения мер $\mathsf{P}$ и $\mathsf{Q}$ на $\mathfrak{F}_n$. Предположим, что $\mathsf{Q}_n$ абсолютно непрерывна относительно $\mathsf{P}_n$ $\forall n$. На вероятностном пространстве $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathsf{P}\}$ рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_n$:

$$\xi_n=\frac{d\mathsf{Q}_n}{d\mathsf{P}_n},\qquad n=1,2,\dots,$$

где $\frac{dQ_n}{dP_n}$ — производная Радона — Никодима меры $Q_n$ по $P_n$. Тогда при $A \in \mathfrak{F}_m$, $m < n$

$$\int_A \xi_n \, dP = Q_n(A) = Q_m(A) = \int_A \xi_m \, dP,$$

т. е. $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, P\}$ — мартингал.

В частности, пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — последовательность случайных векторов со значениями в $\mathcal{R}^d$, $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathcal{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$, — совместная плотность распределения векторов $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ относительно некоторой $\sigma$-конечной меры $q_n$, определенной на борелевских множествах $\mathcal{R}^{dn}$. Предположим, что $g(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая другая плотность относительно $q_n$ такая, что

$$\text{из} \quad \int_A f_n \, dq_n = 0 \quad \text{следует} \quad \int_A g_n \, dq_n = 0.$$

Тогда последовательность

$$\frac{g_n(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{f_n(\eta_1, \ldots, \eta_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

является мартингалом относительно потока $\mathfrak{F}_n$, где $\mathfrak{F}_n = \sigma\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$.

**Марковские моменты времени.** Пусть $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ — некоторый поток $\sigma$-алгебр.

Определение. *Марковским моментом времени $\tau$ на потоке $\sigma$-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ называют случайную величину, принимающую значения из $T$ или значение $+\infty$ и такую, что при каждом $t \in T$ $\{\tau \leqslant T\} \in \mathfrak{F}_t$.*

Если $\tau$ — марковский момент времени, то $\forall t \in T$ события $\{\tau > T\}$, $\{\tau < T\}$, $\{\tau = T\}$ $\mathfrak{F}_t$-измеримы.

Каждому марковскому моменту времени $\tau$ сопоставим $\sigma$-алгебру событий $\mathfrak{F}_t$, о которых можно сказать, произошли ли они до момента времени $\tau$ или нет. Будем называть ее $\sigma$-алгеброй, порожденной марковским моментом времени $\tau$. Формальное определение следующее.

Определение. *$\sigma$-алгеброй $\mathfrak{F}_\tau$, порожденной марковским моментом времени $\tau$, называют $\sigma$-алгебру всех $\mathfrak{S}$-измеримых событий $B$, удовлетворяющих условию: для каждого $t \in T$*

$$B \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Пример. Величина $\tau = t_0$, где $t_0$ не зависит от случая, $t_0 \in T$, является марковским моментом времени, а порожденная им $\sigma$-алгебра $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_{t_0}$.

Действительно, в рассматриваемом случае $\{\tau \leqslant t\} = \varnothing \in \mathfrak{F}_t$, если $t < t_0$, и $\{\tau \leqslant t\} = \Omega \in \mathfrak{F}_t$, если $t_0 \leqslant t$, так что $\tau = t_0$ — марковский момент времени. Далее, $B \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall t \in T$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathfrak{F}_{t_0}$.

Отметим два простых свойства марковских моментов времени (на одном и том же потоке σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$).

Теорема 2. а) *Если* $\tau_1 < \tau_2$, *то* $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$.

б) *Если* $\tau_1$ и $\tau_2$ — *два марковских момента времени, то* $\tau_1 \vee \tau_2$ *и* $\tau_1 \wedge \tau_2$ — *также марковские моменты времени.*

Действительно, пусть $B \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$. Тогда $B \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$. Поэтому

$$B \bigcap_{t \in T} \{\tau_2 \leqslant t\} = (B \cap \{\tau_1 \leqslant t\}) \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Следовательно, $B \in \mathfrak{F}_{\tau_2}$. Это доказывает утверждение а). Далее, пусть $\tau^* = \tau_1 \vee \tau_2$. Тогда $\{\tau^* \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$. Если $\tau_* = \tau_1 \wedge \tau_2$, то

$$\{\tau_* \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t \qquad \forall t \in T. \blacksquare$$

Марковские моменты времени вводятся для того, чтобы иметь возможность рассматривать значения случайного процесса в эти моменты времени. Предположим, что $T$ — счетное множество, $\{\xi(t), t \in T\}$ — процесс, подчиненный $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$, и $\tau$-марковский момент времени со значениями в $T$.

Теорема 3. *Случайная величина* $\xi_\tau$ $\mathfrak{F}_\tau$-*измерима.*

Действительно, для любого $a$

$$\{\xi_\tau < a\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_{\substack{s \leqslant t \\ s \in T}} \{\xi(s) < a\} \cap \{\tau = s\}.$$

Так как при $s < t$ $\{\xi(s) < a\} \in \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$, $\{\tau = s\} \in \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$, то $\{\xi_\tau < a\} \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$. $\blacksquare$

Рассмотрим конечную последовательность $\{\xi_t, t = 1, 2, \ldots, N\}$ и предположим, что она является $\mathfrak{F}_t$-субмартингалом. Введем монотонно неубывающую последовательность $\mathfrak{F}_t$-марковских моментов времени $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p$ и положим $\eta_k = \xi_{\tau_k}$, $\mathfrak{F}_k^* = \mathfrak{F}_{\tau_k}$.

Теорема 4. *Последовательность* $\{\eta_k, \mathfrak{F}_k^*, k = 1, \ldots, p\}$ *является субмартингалом.*

*Доказательство.* Мы уже знаем, что величины $\eta_k$ $\mathfrak{F}_k^*$-измеримы. Кроме того, $\mathsf{M}|\eta_k| < \infty$. В самом деле,

$$\mathsf{M}|\eta_k| \leqslant \mathsf{M} \sum_{k=1}^{N} |\xi(t)| < \infty.$$

Остается показать, что $\mathsf{M}\{\eta_{k+1} | \mathfrak{F}_k^*\} \geqslant \eta_k$. Можно ограничиться тем случаем, когда $\tau_{k+1} - \tau_k$ принимает два значения: 0 и 1.

Действительно, если это не так, то введем новую последовательность марковских времен $\sigma_1 = \tau_k$, $\sigma_2 = \tau_{k+1} \wedge (\sigma_1 + 1)$, ... ..., $\sigma_N = \tau_{k+1} = \tau_{k+1} \wedge (\sigma_{N-1} + 1)$. Тогда $\{\sigma_k, k = 1, \ldots, N\}$ образуют монотонно неубывающую последовательность марковских времен, для которых разности $\sigma_{k+1} - \sigma_k$ принимают только значения 0 или 1. Если показать, что последовательность $\{\xi_{\sigma_k}, k = 1, \ldots, N\}$ является субмартингалом, то отсюда будет следовать, что $\mathsf{M}\{\eta_{k+1} | \mathfrak{F}_k^*\} = \mathsf{M}\{\xi_{\sigma_N} | \mathfrak{F}_k^*\} \geqslant \xi_{\sigma_k} = \eta_k$, и тем самым теорема будет доказана.

Итак, пусть $\tau_{k+1} - \tau_k = 0$ или 1. Тогда для любого $B \in \mathfrak{F}_k^*$

$$\int_B (\eta_{k+1} - \eta_k)\, d\mathsf{P} = \int_{B \cap \{\tau_{k+1} - \tau_k = 1\}} (\eta_{k+1} - \eta_k)\, d\mathsf{P} =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \int_{B \cap \{\tau_k = r\} \cap \{\tau_{k+1} = r+1\}} (\xi_{r+1} - \xi_r)\, d\mathsf{P}.$$

Но событие $B \cap \{\tau_k = r\} \in \mathfrak{F}_r$, $\{\tau_{k+1} = r + 1\} = \{\tau_{k+1} > r\} \in \mathfrak{F}_r$. Поэтому $B \cap \{\tau_k = r\} \cap \{\tau_{k+1} = r + 1\} \in \mathfrak{F}_r$ и

$$\int_{B \cap \{\tau_k = r\} \cap \{\tau_{k+1} = r+1\}} (\xi_{r+1} - \xi_r)\, d\mathsf{P} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int_B (\eta_{k+1} - \eta_k)\, d\mathsf{P} \geqslant 0 \qquad \forall B \in \mathfrak{F}_k^*,$$

что эквивалентно неравенству $\mathsf{M}\{\eta_{k+1} | \mathfrak{F}_k^*\} \geqslant \eta_k$. ■

Следствие. *Если* $\{\xi_t, \mathfrak{F}_t, t = 1, \ldots, N\}$ — *мартингал*, $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p$ — *последовательность* $\mathfrak{F}_t$-*марковских моментов времени, то* $\{\xi_{\tau_k}, \mathfrak{F}_{\tau_k}, k = 1, 2, \ldots, p\}$ — *мартингал.*

**Некоторые неравенства.**

Теорема 5. *Пусть* $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n = 1, \ldots, N\}$ — *субмартингал. Тогда*

$$\mathsf{P}\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n \geqslant C\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi_N^+}{C}, \qquad C > 0. \tag{6}$$

*Если же* $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n = 1, \ldots, N\}$ — *супермартингал, то*

$$\mathsf{P}\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n \geqslant C\} \leqslant \frac{2 \sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathsf{M}|\xi_n|}{C}. \tag{7}$$

Доказательство. а) Пусть $\tau = k$, если $\xi_j \leqslant C$, $j = 1, \ldots, k - 1$, а $\xi_k > C$. Если же $\xi_k \leqslant C$ для $k = 1, \ldots, N$, то полагаем $\tau = N$. Величина $\tau$ является марковским моментом времени и $\tau \leqslant N$. Следовательно, пара $(\xi_\tau, \xi_N)$ образует субмартингал. Поэтому

$$CP\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n \geqslant C\} \leqslant \int_{\{\xi_\tau \geqslant C\}} \xi_\tau \, dP \leqslant \int_{\{\xi_\tau \geqslant C\}} \xi_N \, dP \leqslant M\xi_N^+. \tag{8}$$

б) Если последовательность $\xi_n$ — супермартингал, то

$$M\xi_0 \geqslant M\xi_\tau \geqslant CP\{\sup \xi_n \geqslant C\} + \\ + \int_{\{\sup \xi_n \leqslant C\}} \xi_N \, dP \geqslant CP\{\sup \xi_n \geqslant C\} - M\xi_N^-,$$

откуда следует

$$CP\{\sup \xi_n \geqslant C\} \leqslant 2 \sup_{1 \leqslant n \leqslant N} M|\xi_n|. \blacksquare$$

С л е д с т в и е 1. *Если $\xi_n$ — мартингал и $p \geqslant 1$, то*

$$P\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant N} |\xi_k| \geqslant C\} \leqslant \frac{M|\xi_N|^p}{C^p}.$$

С л е д с т в и е 2 (неравенство Колмогорова). *Если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $\ldots, \zeta_N$ — независимые случайные величины,* $M\zeta_k = 0$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, N$, *то*

$$P\{\sup_{1 \leqslant k \leqslant N} |\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k| > C\} \leqslant \frac{1}{C^2} \sum_{k=1}^{N} D\zeta_k. \tag{9}$$

Неравенство (6) часто называют *неравенством Колмогорова для субмартингалов.*

Далее, если $\xi_n$ — произвольный супермартингал, то в силу неравенства (6) $CP\{\inf_n \xi_n \leqslant -C\} \leqslant M|\xi_N|$, что вместе с неравенством (6) дает

$$P\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant N} |\xi_n| > C\} \leqslant \frac{3 \sup_{1 \leqslant n \leqslant N} M|\xi_n|}{C}. \tag{10}$$

В пространстве случайных величин, заданных на $\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$, введем нормы, соответствующие пространствам $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$. Положим

$$\|\xi\|_p = \{M|\xi|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_\Omega |\xi(\omega)|^p \, dP\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Т е о р е м а 6. *Если $\xi_n$ — субмартингал, то при $p > 1$*

$$\left\| \sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n^+ \right\|_p \leqslant q \left\| \xi_N^+ \right\|_p, \qquad q = \frac{p}{p-1} \tag{11}$$

и

$$\Big\| \sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n^+ \Big\|_1 \leqslant 2\left(1 + \mathsf{M}\xi_N^+ (\ln \xi_N^+)^+\right). \tag{12}$$

*Доказательство.* Пусть $G(x)$, $x \geqslant 0$, — произвольная монотонно неубывающая непрерывная функция и $G(0) = 0$, $\eta$ — некоторая неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. В силу формулы интегрирования по частям

$$\mathsf{M}G(\eta) = \int_0^\infty G(x)\,dF(x) = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dG(x). \tag{13}$$

Пусть $\eta = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n^+$. В силу (8)

$$x\mathsf{P}\{\eta \geqslant x\} \leqslant \int_{\{\eta \geqslant x\}} \xi_N\,d\mathsf{P} \qquad \forall x > 0.$$

Поэтому $1 - F(x) = \mathsf{P}\{\eta \geqslant x\} \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{\{\eta \geqslant x\}} \xi_N\,d\mathsf{P}$ и

$$\mathsf{M}G(\eta) \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\int_{\{\eta \geqslant x\}} \xi_N\,d\mathsf{P}\right) dG(x) \leqslant \int_0^\infty \mathsf{M}\chi(\eta - x)\,\xi_N^+ \frac{dG(x)}{x},$$

где $\chi(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $\chi(x) = 0$ при $x < 0$. Таким образом,

$$\mathsf{M}G(\eta) \leqslant \mathsf{M}\xi_N^+ \int_0^\eta \frac{dG(x)}{x}.$$

Полагая здесь $G(x) = |x|^p$ и воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим

$$\|\eta\|_p^p \leqslant \frac{p}{p-1}\,\mathsf{M}\xi_N^+ \eta^{p-1} \leqslant q \left\|\xi_N^+\right\|_p \|\eta\|_p^{p-1},$$

откуда и вытекает неравенство (11).

Перейдем к случаю $p = 1$. Снова воспользуемся неравенством (8). Имеем

$$2C\mathsf{P}\{\eta \geqslant 2C\} \leqslant \int_{\{\eta \geqslant 2C\}} \xi_N\,d\mathsf{P} \leqslant \int_{\{\xi_N \geqslant C\}} \xi_N\,d\mathsf{P} + {}$$

$$+ \int_{\{\xi_N < C,\ \eta \geqslant 2C\}} \xi_N\,d\mathsf{P} \leqslant \int_{\{\xi_N \geqslant C\}} \xi_N\,d\mathsf{P} + C\mathsf{P}\{\eta \geqslant 2C\},$$

так что

$$C\mathsf{P}\{\eta \geqslant 2C\} \leqslant \int_{\{\xi_n \geqslant C\}} \xi_N\,d\mathsf{P}.$$

Воспользуемся равенством (13) для величины $\frac{\eta}{2}$. Так как в этом случае

$$1 - F(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\eta}{2} \geqslant x\right\} \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{\{\xi_N \geqslant x\}} \xi_N \, d\mathsf{P},$$

то

$$\mathsf{M}G\left(\frac{\eta}{2}\right) \leqslant \int\limits_0^\infty \mathsf{M}\xi_N^+ \chi\left(\xi_N^+ - x\right) \frac{dG(x)}{x}.$$

Положим $G(x) = (x-1)^+$. Получаем

$$\mathsf{M}\left(\frac{\eta}{2} - 1\right)^+ \leqslant \mathsf{M}\xi_N^+ \int\limits_1^{\xi_N^+ \vee 1} \frac{dx}{x} = \mathsf{M}\xi_N^+ \left(\ln \xi_N^+\right)^+.$$

Так как $\mathsf{M}\left(\frac{\eta}{2} - 1\right)^+ \geqslant \mathsf{M}\frac{\eta}{2} - 1$, то $\mathsf{M}\eta \leqslant 2\left(1 + \mathsf{M}\xi_N^+ \left(\ln \xi_N^+\right)\right)^+$. ■

Определение. *Числом пересечений $\nu[a, b)$ полуинтервала $[a, b)$ $(a < b)$ сверху вниз семейством случайных величин $\{\xi(t), t \in T\}$ называется точная верхняя граница чисел $s$ таких, что существует последовательность $\{t_i,\ i = 1, \ldots, 2s\}$, $t_i < t_{i+1}$, $t_i \in T$, для которой*

$$\xi(t_1) > b,\ \xi(t_2) \leqslant a,\ \xi(t_3) > b,\ \ldots,\ \xi(t_{2s}) \leqslant a.$$

Теорема 7 (неравенство Дуба). *Если $\xi_n$, $n = 1, \ldots, N$, — субмартингал, то*

$$\mathsf{M}\{\nu[a, b) \mid \mathfrak{F}_1\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\{(\xi(N) - b)^+ \mid \mathfrak{F}_1\}}{b - a}. \tag{14}$$

*Доказательство.* Без умаления общности можно предположить, что $a = 0$ и $\xi_n \geqslant 0$. Действительно, общий случай сводится к этому, если заменить $\xi_n$ на $(\xi_n - a)^+$. Определим последовательность марковских моментов времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $(\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N)$ следующим образом: $\tau_1$ — это наименьшее $j$ такое, что $\xi(j) > b$, если такое $j$ существует, и $\tau_1 = N$, если такого $j$ нет. Далее, $\tau_2$ — наименьшее такое $j$, что $j > \tau_1$ и $\xi_j = 0$, если такое $j$ существует, и $\tau_2 = N$, если такого нет; $\tau_3$ равно наименьшему $j$, для которого $\xi_j > b$, $j > \tau_2$, или $\tau_3 = N$, если такого $j$ нет, и т. д. В силу теоремы 1

$$\mathsf{M}\{(\xi(\tau_2) - \xi(\tau_1)) + (\xi(\tau_4) - \xi(\tau_3)) + \ldots \mid \mathfrak{F}_1\} \geqslant 0.$$

С другой стороны, сумма, стоящая под знаком математического ожидания, содержит $\nu[a, b)$ слагаемых, меньших чем $-b$, и, быть может, только одно, не превосходящее величины $(\xi(N)-b)^+$. Таким образом,

$$-b\mathsf{M}\{\nu(0, b] \mid \mathfrak{F}_1\} + \mathsf{M}\{(\xi(N)-b)^+ \mid \mathfrak{F}_1\} \geqslant 0. \blacksquare$$

Полученные неравенства легко обобщаются на бесконечные последовательности. Так, если $n = 1, 2, \ldots$, неравенство (6) принимает вид

$$\mathsf{P}\{\sup_{1 \leqslant n < \infty} \xi(n) \geqslant C\} \leqslant \frac{\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \mathsf{M}\xi^+(n)}{C}. \tag{15}$$

Доказательство вытекает из того, что

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \xi_n = \lim_{N \to \infty} \sup_{1 \leqslant n < N} \xi_n,$$

и поэтому

$$\mathsf{P}\{\sup_{1 \leqslant n < \infty} \xi_n \geqslant C\} = \lim_{N \to \infty} \mathsf{P}\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \xi_n > C\}.$$

Аналогично, если $\nu_N(a, b]$ обозначает число пересечений сверху вниз полуинтервала $(a, b]$ урезанной последовательностью $\xi(1), \ldots, \xi(N)$, а $\nu_\infty(a, b]$ — всей последовательностью, то из того, что $\nu_N(a, b]$ при возрастании $N$ монотонно не убывают и $\nu_\infty(a, b] = \lim\limits_{N \to \infty} \nu_n(a, b]$, следует

$$(b-a)\mathsf{M}\nu_\infty(a, b] \leqslant \sup_{1 \leqslant n < \infty} \mathsf{M}(\xi_n - b)^+.$$

Несколько иначе обстоит дело, если последовательность значений $n$ не имеет наименьшего, но имеет наибольшее значение. Пусть $n = \ldots -k, -k+1, \ldots, -1$ $(k > 0)$. Правые части рассматриваемых неравенств достигают максимума при $n = -1$. Таким образом,

$$\mathsf{P}\{\sup_{-\infty < n \leqslant -1} \xi_n \geqslant C\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi_{-1}^+}{C}, \tag{16}$$

$$\mathsf{M}\nu_\infty(a, b] \leqslant \frac{\mathsf{M}(\xi_{-1} - b)^+}{b-a}. \tag{17}$$

**Существование предела.** Важную роль в дальнейшем играют теоремы о существовании предела субмартингала.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для того чтобы ограниченная числовая последовательность $\{c_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходилась к некоторому пределу, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары рациональных чисел $a$ и $b$ $(a < b)$ число пересечений сверху вниз отрезка $(a, b]$ этой последовательностью было конечным.*

Обозначим соответствующее число пересечений через $\nu(a, b]$. Если для какой-либо пары $(a, b)$ $\nu(a, b] = \infty$, то последовательность $c_n$ не может удовлетворять критерию сходимости. С другой стороны, если $c_n$ не имеет предела, то $\bar{c} = \overline{\lim}\, c_n > \underline{\lim}\, c_n = \underline{c}$. Если $a$ и $b$ рациональны, $\underline{c} < a < b < \bar{c}$, то найдется бесконечно много $n_i$ и $n_i'$, для которых $c_{n_i} < a$, $c_{n_i}' > b$, т. е. $\nu(a, b] = \infty$. ■

Теорема 8. *Пусть* $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — *субмартингал. Тогда*:

а) *если* $\sup \mathsf{M}\xi_n^+ < \infty$, *то* $\xi_\infty = \lim \xi_n$ *существует с вероятностью* 1 *и* $\mathsf{M}|\xi_\infty| < \infty$;

б) *если последовательность* $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *равномерно интегрируема, то* $\xi_\infty = \lim \xi_n$ *существует с вероятностью* 1 *и в* $\mathscr{L}_1$ *и*

$$\xi_n \leqslant \mathsf{M}\{\xi_\infty \mid \mathfrak{F}_n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

*Доказательство.* Покажем сначала, что последовательность $\{\xi_n\}$ ограничена снизу. С этой целью заметим, что $\{\xi_1 > b, \inf \xi_n = -\infty\} \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \{\nu(-N, b] > 0\}$. С другой стороны,

$$\mathsf{M}\nu(-N, b] \leqslant \frac{\mathsf{M}(\xi_n - b)^+}{b + N} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi_n^+ + b}{b + N} \to 0$$

при $N \to \infty$. Следовательно, с вероятностью 1 $\lim \nu(-N, b] = 0$, а так как $\nu(a, b]$ — целочисленная величина, то $\nu(-N, b] = 0$ с вероятностью 1 при достаточно большом $N$. Таким образом, при любом $b$ $\mathsf{P}\{\xi_1 > b, \inf \xi_n = -\infty\} = 0$. Поэтому $\mathsf{P}\{\inf \xi_n = -\infty\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi_1 > -k, \inf \xi_n = -\infty\} = 0$. Ограниченность снизу последовательности $\xi_n$ доказана. Аналогично устанавливается, что она ограничена сверху. Последнее вытекает также из неравенства Колмогорова

$$\mathsf{P}\left\{\sup \xi_n^+ > C\right\} \leqslant \frac{\sup \mathsf{M}\xi_n^+}{C},$$

в силу которого $\mathsf{P}\left\{\sup \xi_n = +\infty\right\} = \lim_{C \to \infty} \mathsf{P}\left\{\sup \xi_n^+ > C\right\} = 0$. Таким образом, последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ограничена с вероятностью 1.

Из неравенства Дуба вытекает, что $\mathsf{M}\nu(a, b] < \infty$ для любых $a$ и $b$, так что $\mathsf{P}(\Lambda_{ab}) = 0$, где $\Lambda_{ab} = \{\omega: \nu(a, b] = \infty\}$. Следовательно, если $\Lambda = \bigcup_{a, b} \Lambda_{ab}$, где суммирование распространяется на все рациональные $a$ и $b$, $b > a$, то $\mathsf{P}(\Lambda) = 0$. В силу леммы 1 при $\omega \overline{\in} \Lambda$ $\lim \xi_n = \xi_\infty$ существует. При этом $|\xi_n| = 2\xi_n^+ - \xi_n$, $\mathsf{M}|\xi_n| = 2\mathsf{M}\xi_n^+ - \mathsf{M}\xi_n \leqslant 2\sup \mathsf{M}\xi_n^+ - \mathsf{M}\xi_1 < \infty$, так что

$$\mathsf{M}|\xi_\infty| = \mathsf{M}\lim|\xi_n| \leqslant \underline{\lim}\, \mathsf{M}|\xi_n| < \infty,$$

и утверждение а) теоремы доказано.

Предположим теперь, что последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ равномерно интегрируема. Тогда $\mathsf{M}|\xi_n| \leqslant C$, с вероятностью 1 существует предел $\xi_\infty = \lim \xi_n$ и $\mathsf{M}|\xi_\infty - \xi_n| \to 0$. Отсюда следует, что в неравенстве

$$\int_B \xi_m \, d\mathsf{P} \leqslant \int_B \xi_n \, d\mathsf{P}, \qquad m < n, \quad B \in \mathfrak{F}_m,$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$ под знаком интеграла, так что

$$\int_B \xi_m \, d\mathsf{P} \leqslant \underline{\lim} \int_B \xi_n \, d\mathsf{P} = \int_B \xi_\infty \, d\mathsf{P}. \ \blacksquare$$

Следствие. *Если* $\xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — *неотрицательный супермартингал, то предел* $\xi_\infty = \lim \xi_n$ *существует с вероятностью* 1.

Теорема 9. *Пусть* $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — *мартингал и* $\mathfrak{F}_\infty$ — *минимальная σ-алгебра, содержащая все σ-алгебры* $\mathfrak{F}_n$.

1. *Если* $\sup \mathsf{M}|\xi_n| < \infty$, *то* $\lim \xi_n = \xi_\infty$ *существует с вероятностью* 1.

2. *Для того чтобы последовательность* $\xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *была равномерно интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая интегрируемая случайная величина* $\eta$, *что*

$$\xi_n = \mathsf{M}\{\eta \mid \mathfrak{F}_n\}. \tag{18}$$

*Если это условие выполнено, то можно положить* $\eta = \xi_\infty$ *и в классе* $\mathfrak{F}_\infty$*-измеримых случайных величин* $\eta$ *определяется однозначно* (mod $\mathsf{P}$).

*Доказательство.* Утверждение 1 вытекает из теоремы 8. Если последовательность $\xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно интегрируема, то в силу теоремы 8 $\xi_\infty = \lim \xi_n$ существует с вероятностью 1 и в $\mathscr{L}_1$ и $\xi_n \leqslant \mathsf{M}\{\xi_\infty | \mathfrak{F}_n\}$. Применяя это неравенство к последовательности $-\xi_n$, получим $\xi_n = \mathsf{M}\{\xi_\infty | \mathfrak{F}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\mathsf{M}|\xi_\infty| < \infty$.

Пусть $\eta$ — произвольная интегрируемая случайная величина. Покажем, что последовательность $\xi_n = \mathsf{M}\{\eta | \mathfrak{F}_n\}$ является равномерно интегрируемым мартингалом. Во-первых,

$$\mathsf{P}\{|\xi_n| > C\} \leqslant \frac{\mathsf{M}|\xi_n|}{C} \leqslant \frac{\mathsf{M}|\eta|}{C} \to 0$$

при $C \to \infty$ равномерно по $n$. Далее,

$$\int\limits_{\{|\xi_n|>C\}} |\xi_n|\,d\mathsf{P} = \int\limits_{\{\xi_n>C\}} \xi_n\,d\mathsf{P} - \int\limits_{\{\xi_n<-C\}} \xi_n\,d\mathsf{P} =$$

$$= \int\limits_{\{\xi_n>C\}} \eta\,d\mathsf{P} - \int\limits_{\{\xi_n>-C\}} \eta\,d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_{\{|\xi_n|>C\}} |\eta|\,d\mathsf{P} \to 0 \quad \text{при} \quad C\to\infty$$

равномерно по $n$, так как $\mathsf{P}\{|\xi_n|>C\}\to 0$ при $C\to\infty$ равномерно по $n$. Таким образом, последовательность $\xi_n$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно интегрируема. Из равенств

$$\mathsf{M}\{\xi_{n+1}\,|\,\mathfrak{F}_n\} = \mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\eta\,|\,\mathfrak{F}_{n+1}\}\,|\,\mathfrak{F}_n\} = \mathsf{M}\{\eta\,|\,\mathfrak{F}_n\} = \xi_n$$

следует, что $\xi_n$ — $\mathfrak{F}_n$-мартингал. Остается показать, что $\eta$ в классе $\mathfrak{F}_\infty$-измеримых случайных величин определяется единственным образом.

Так как $\mathsf{M}\{\eta|\mathfrak{F}_n\} = \mathsf{M}\{\xi_\infty|\mathfrak{F}_n\}$ для любого $n$, то

$$\int\limits_A \eta\,d\mathsf{P} = \int\limits_A \xi_\infty\,d\mathsf{P} \tag{19}$$

для любого множества $A$, принадлежащего какой-либо $\sigma$-алгебре $\mathfrak{F}_n$. Но класс множеств $A$, для которых имеет место равенство (19), является монотонным и содержит алгебру множеств $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$. Поэтому он содержит и $\sigma$-алгебру $\sigma\left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n\right\}$. Таким образом, (19) выполнено для любого $A \in \mathfrak{F}_\infty$. Тем самым, если $\eta$ — $\mathfrak{F}_\infty$-измеримая величина, то $\eta = \xi_\infty \pmod{\mathsf{P}}$. ■

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F}_n$ — *поток $\sigma$-алгебр*, $\mathfrak{F}_\infty = \sigma\{\mathfrak{F}_n, n = 1, 2, \ldots\}$, $\eta$ — $\mathfrak{F}_\infty$-*измеримая случайная величина*, $A \in \mathfrak{F}_\infty$. *Тогда с вероятностью* 1 *и в* $\mathscr{L}_1$

$$\lim \mathsf{M}\{\eta\,|\,\mathfrak{F}_n\} = \eta, \quad \lim \mathsf{P}\{A\,|\,\mathfrak{F}_n\} = \chi_A(\omega). \ ■$$

Рассмотрим субмартингал

$$\ldots \xi_{-n}, \xi_{-n+1}, \ldots, \xi_{-1} \quad (\mathfrak{F}_{-n} \subset \mathfrak{F}_{-n+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{-1}). \tag{20}$$

Обозначим $\mathfrak{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{-n}$. Результаты, получаемые в этом случае, несколько сильнее предыдущих.

Теорема 10. *Если* $\inf \mathsf{M}\xi_n > -\infty$ *и последовательность* (20) *является субмартингалом, то она равномерно интегрируема, предел* $\lim \xi_{-n} = \xi_{-\infty}$ *существует с вероятностью* 1 *и в* $\mathscr{L}_1$ *и*

$$\mathsf{M}\{\xi_{-n}\,|\,\mathfrak{F}_{-\infty}\} \geqslant \xi_{-\infty}. \tag{21}$$

*Доказательство.* Докажем сначала, что последовательность $\xi_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно интегрируема. Так как последовательность $\mathsf{M}\xi_{-n}$ монотонно не возрастает, то существует $\lim \mathsf{M}\xi_{-n} = l > -\infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0$, что $0 \leqslant \mathsf{M}\xi_{-n_0} - \mathsf{M}\xi_{-n} < \varepsilon$, $n \geqslant n_0$. Заметим, что

$$\mathsf{M}\chi(|\xi_{-n}| > C)|\xi_{-n}| = \\ = -\mathsf{M}\xi_{-n} + \mathsf{M}\chi(\xi_{-n} \geqslant -C)\xi_{-n} + \mathsf{M}\chi(\xi_{-n} > C)\xi_{-n},$$

где $\chi(A)$ — индикатор события $A$. Из определения субмартингала следует, что при $n > n_0$

$$\mathsf{M}\chi(\xi_{-n} \geqslant -C)\xi_{-n} \leqslant \mathsf{M}\chi(\xi_{-n} \geqslant -C)\xi_{-n_0},$$
$$\mathsf{M}\chi(\xi_{-n} > C)\xi_{-n} \leqslant \mathsf{M}\chi(\xi_{-n} > C)\xi_{-n_0}.$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}\chi(|\xi_{-n}| > C)|\xi_{-n}| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon - \mathsf{M}\xi_{-n_0} + \mathsf{M}\chi(\xi_{-n} \geqslant -C)\xi_{-n_0} + \mathsf{M}\chi(\xi_{-n} > C)\xi_{n_0} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon + \mathsf{M}\chi(|\xi_{-n}| > C)|\xi_{-n_0}|.$$

С другой стороны, $|\xi_{-n}| = 2\xi^+_{-n} - \xi_{-n}$, $\mathsf{M}|\xi_{-n}| \leqslant 2\mathsf{M}\xi^+_{-1} - l = k$, так что в силу неравенства Чебышева

$$\mathsf{P}\{|\xi_{-n}| > C\} \leqslant \frac{\mathsf{M}|\xi_{-n}|}{C} \leqslant \frac{k}{C},$$

т. е. величина $\mathsf{P}\{|\xi_{-n}| > C\} \to 0$ при $C \to \infty$ равномерно по $n$. Поэтому найдется такое $C = C(\varepsilon)$, не зависящее от $n$, что $\mathsf{M}\chi(|\xi_{-n}| > C)|\xi_{-n_0}| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\mathsf{M}\chi(|\xi_{-n}| > C)|\xi_{-n}| \leqslant 2\varepsilon \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Равномерная интегрируемость последовательности $\xi_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, доказана. В частности, $\mathsf{M}|\xi_{-n}| \leqslant k$. Существование с вероятностью 1 предела $\xi_{-\infty}$ последовательности $\xi_{-n}$ вытекает из неравенства Дуба и доказывается точно так же, как доказательство существования предела в теореме 7. Из равномерной интегрируемости последовательности $\xi_{-n}$ тогда вытекает сходимость в $\mathscr{L}_1$. Кроме того, в неравенстве

$$\int_B \xi_{-n}\, d\mathsf{P} \leqslant \int_B \xi_{-k}\, d\mathsf{P}, \qquad n > k, \quad B \in \mathfrak{F}_{-\infty},$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Получим

$$\int_B \xi_{-\infty}\, d\mathsf{P} \leqslant \int_B \xi_{-k}\, d\mathsf{P},$$

откуда вытекает неравенство (21). ■

Следствие. *Если* $\{\ldots, \xi_{-n}, \xi_{-n+1}, \ldots, \xi_{-1}\}$ — *мартингал, то* $\xi_{-\infty} = \lim \xi_{-n}$ *существует с вероятностью* 1 *и в* $\mathscr{L}_1$, *последовательность* $\xi_{-n}$ *равномерно интегрируема и* $\xi_{-\infty} = \mathsf{M}\{\xi_{-n} | \mathfrak{F}_{-\infty}\}$.

Действительно, если $\xi_{-n}$ — мартингал, то и $\xi_{-n}$ и $-\xi_{-n}$ являются субмартингалами. Кроме того, $\mathsf{M}\xi_{-n} = \text{const}$. Применяя теорему 10 к последовательностям $\xi_{-n}$ и $-\xi_{-n}$, получим требуемое.

## § 2. Ряды независимых случайных величин

В настоящем параграфе рассматриваются условия сходимости с вероятностью 1 рядов с независимыми случайными членами.

Пусть дан ряд

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots \tag{1}$$

Теорема 1. *Если существует последовательность чисел* $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n| > \varepsilon_n\} < \infty, \tag{2}$$

*то ряд* (1) *с вероятностью* 1 *сходится абсолютно.*

*Доказательство.* Пусть $A_n = \{|\xi_n| > \varepsilon_n\}$. Из сходимости второго ряда в (2) и теоремы 8 § 1 гл. II следует, что $\mathsf{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$, т. е. с вероятностью 1 наступает только конечное число событий $A_n$. Таким образом, существует такое $N = N(\omega)$, что при $n > N(\omega)$ $|\xi_n| < \varepsilon_n$ и ряд (1) сходится. ∎

Более сильные результаты имеют место для полумартингалов. Положим

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \quad \zeta_0 = 0, \quad \mathfrak{F}_n = \sigma\{\xi_1 \ldots, \xi_n\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\xi_n$ *интегрируемы,* $n = 0, 1, \ldots$ *Тогда:*

а) *если* $\mathsf{M}\{\xi_n | \mathfrak{F}_{n-1}\} \geqslant 0$ *и* $\sup \mathsf{M}\zeta_n^+ < \infty$, *то ряд* (1) *сходится с вероятностью* 1;

б) *если* $\mathsf{M}\{\xi_n | \mathfrak{F}_{n-1}\} = 0$ *и при некотором* $p \geqslant 1$ $\sup\limits_n \mathsf{M}|\zeta_n|^p < \infty$, *то ряд* (1) *сходится с вероятностью* 1 *и в* $\mathscr{L}_p$.

Условие а) равносильно предположению, что $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n\}$ — субмартингал. Соответствующее утверждение является поэтому следствием теоремы о сходимости субмартингала. Условие б) означает, что $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n\}$ — мартингал. Поэтому $|\zeta_n|^p$ — субмартингал и $\mathsf{M}\sup\limits_n |\zeta_n|^p \leqslant q^p \sup\limits_n \mathsf{M}|\zeta_n|^p$. Таким образом, величина $|\zeta_n|^p$ равномерно интегрируема и $\zeta_n$ сходятся к некоторому пределу с вероятностью 1 и в $\mathscr{L}_p$ (теорема 16 § 1 гл. II, теорема 9 § 1). ∎

Следствие 1. *Если* $\mathsf{M}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}=0$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{M}\xi_n^2<\infty$, *то ряд* (1) *сходится с вероятностью* 1 *и в* $\mathscr{L}_2$.

Доказательство вытекает из того, что при $k\neq n$

$$\mathsf{M}\xi_k\xi_n=\mathsf{M}\{\xi_k\mathsf{M}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}\}=0,$$

$$\mathsf{M}\zeta_n^2=\mathsf{M}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\xi_k^2+2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k<j}^{n}\mathsf{M}\xi_k\xi_j=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\xi_k^2,$$

и из утверждения б) теоремы. ■

Для рядов с независимыми членами последний результат известен как теорема Колмогорова.

Следствие 2 (теорема Колмогорова). *Если* $\{\xi_n, n=1, 2, \ldots\}$ — *независимые случайные величины*, $\mathsf{M}\xi_k=0$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{D}\xi_k<\infty$, *то ряд* (1) *сходится с вероятностью* 1.

Это утверждение вытекает из следствия 1, если под $\mathfrak{F}_n$ понимать $\sigma$-алгебру, порожденную случайными величинами $\xi_1$, $\xi_2, \ldots, \xi_n$, и принять во внимание, что в силу независимости случайных величин $\xi_n$

$$\mathsf{M}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}=\mathsf{M}\xi_n=0.$$

Остановимся подробнее на сходимости рядов с независимыми слагаемыми. Как следует из закона «0 или 1», такие ряды сходятся или с вероятностью 0, или с вероятностью 1.

В дальнейшем понадобится одна оценка для распределения максимума сумм независимых слагаемых.

Теорема 3. *Если* $\{\xi_k, k=1, 2, \ldots, n\}$ *независимы*, $\mathsf{M}\xi_k=0$ *и* $|\xi_k|<c$ *с вероятностью* 1, *где* $c$ — *некоторая постоянная, то*

$$\mathsf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|\leqslant t\}\leqslant\frac{(c+t)^2}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2},\tag{3}$$

*где* $\sigma_k^2=\mathsf{M}\xi_k^2$.

Обозначим через $E_n$ события $\{\max_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|\leqslant t\}$, $n=1, 2, \ldots$ Они образуют монотонно убывающую последовательность. Имеем

$$\mathsf{M}\chi(E_n)\zeta_n^2=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\{\chi(E_k)\zeta_k^2-\chi(E_{k-1})\zeta_{k-1}^2\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\chi(E_{k-1})(\zeta_k^2-\zeta_{k-1}^2)-\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\chi(E_{k-1}\setminus E_k)\zeta_k^2.\tag{4}$$

Далее,

$$\mathsf{M}\chi(E_{k-1}\setminus E_k)\zeta_k^2=\mathsf{M}\chi(E_{k-1}\setminus E_k)(\zeta_{k-1}+\xi_k)^2\leqslant$$
$$\leqslant(t+c)^2\,\mathsf{M}\chi(E_{k-1}\setminus E_k),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\chi(E_{k-1}\setminus E_k)\zeta_k^2\leqslant(t+c)^2\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\chi(E_{k-1}\setminus E_k)=$$
$$=(t+c)^2[1-\mathsf{P}(E_n)]. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\mathsf{M}\chi(E_{k-1})(\zeta_k^2-\zeta_{k-1}^2)=\mathsf{M}\chi(E_{k-1})(2\zeta_{k-1}\xi_k+\xi_k^2)=$$
$$=2\mathsf{M}\chi(E_{k-1})\zeta_{k-1}\mathsf{M}\xi_k+\mathsf{M}\chi(E_{k-1})\,\mathsf{M}\xi_k^2=\sigma_k^2\mathsf{M}\chi(E_{k-1}). \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) дают

$$t^2\mathsf{P}(E_n)\geqslant\mathsf{M}\chi(E_n)\zeta_n^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\mathsf{M}\chi(E_{k-1})-(t+c)^2(1-\mathsf{P}(E_n))\geqslant$$
$$\geqslant\mathsf{P}(E_n)\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2+(t+c)^2\right\}-(t+c)^2,$$

или

$$(t+c)^2\geqslant\mathsf{P}(E_n)\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2+c^2+2ct\right\}, \tag{7}$$

откуда следует (3). ■

В общем случае рядов с независимыми слагаемыми вопрос о сходимости ряда (1) полностью решается следующей теоремой.

Теорема 4 (теорема Колмогорова о трех рядах). *Для того чтобы ряд* (1) *независимых случайных величин сходился с вероятностью* 1, *необходимо, чтобы для каждого* $c>0$, *и достаточно, чтобы для некоторого* $c>0$ *сходились ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\xi_n|>c\}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{M}\xi_n', \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{D}\xi_n', \tag{10}$$

*где* $\xi_n'=\xi_n$ *при* $|\xi_n|<c$ *и* $\xi_n'=0$ *при* $|\xi_n|>c$.

*Доказательство.* Достаточность. В силу следствия 2 теоремы 2 с вероятностью 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n'-\mathsf{M}\xi_n')$, откуда, принимая во внимание сходимость ряда (9), вытекает, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\xi'_n$. Из условия (8) и теоремы Бореля — Кантелли следует, что только конечное число членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi'_n)$ отлично от нуля. Поэтому ряд (1) сходится с вероятностью 1.

Необходимость. Пусть ряд (1) сходится с вероятностью 1. Тогда его общий член с вероятностью 1 стремится к нулю, так что лишь конечное число членов ряда превосходит по абсолютной величине $c$ ($c>0$). Поэтому с вероятностью 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\xi'_n$. Обозначим через $\{\eta_n\}$, $n=1,2,\ldots$, последовательность независимых случайных величин, не зависящих от последовательности $\{\xi'_n\}$, $n=1,2,\ldots$, и имеющих такие же распределения, как и $\xi'_n$. Положим $\tilde{\xi}_n=\xi'_n-\eta_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{n}\tilde{\xi}_n$ сходится с вероятностью 1, $\mathsf{M}\tilde{\xi}_n=0$, $|\tilde{\xi}_n|\leqslant 2c$, $\mathsf{D}\tilde{\xi}_n=2\mathsf{D}\xi'_n$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\xi}_n$ следует, что

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant n\leqslant\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k\right|<\infty\right\}=1.$$

Поэтому при некотором $t$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant n<\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k\right|\leqslant t\right\}=a>0.$$

Из неравенства (3) следует при любом $n$

$$2\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}\xi'_k=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}\tilde{\xi}_k\leqslant\frac{(2c+t)^2}{a},$$

что доказывает сходимость ряда (10). Из следствия 2 теоремы 2 вытекает тогда, что с вероятностью 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi'_n-\mathsf{M}\xi'_n)$. Отсюда в свою очередь следует сходимость ряда (9). Сходимость ряда (8) вытекает из теоремы Бореля — Кантелли, так как если ряд (1) сходится, то с вероятностью 1 найдется только конечное число членов ряда (1) таких, что $|\xi_n|>c$. ■

Следствие. *Для сходимости ряда* (1) *независимых неотрицательных случайных величин необходимо, чтобы для любого*

*$c>0$, и достаточно, чтобы для некоторого $c>0$ сходились ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi_n > c\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\xi'_n.$$

Действительно, для неотрицательных величин $\xi_n$ имеем $\mathsf{M}\xi'^2_n \leqslant c\mathsf{M}\xi'_n$ так, что из сходимости ряда (9) вытекает сходимость ряда (10).

Из теоремы о сходимости рядов с вероятностью 1 при помощи простого преобразования можно получить теоремы типа усиленного закона больших чисел, т. е. теоремы о сходимости с вероятностью 1 некоторых средних от случайных величин. Приведем пример такого рода.

Лемма 1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и $a_n$ — монотонно возрастающая последовательность, $a_n>0$, $a_n \to \infty$, то*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \to 0.$$

*Доказательство.* Пусть $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k$ и $|S_n|\leqslant c$, $n=1, 2, \ldots$, где $c$ — некоторая постоянная. Положим $a_k-a_{k-1}=\Delta_k$, $k=1, 2, \ldots$, $a_0=0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k = \sum_{k=1}^{n} (\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_k) z_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k (S_n - S_{k-1}).$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n_0} \Delta_k (S_n-S_{k-1})\right| + \sup_{n_0\leqslant k\leqslant n} |S_n-S_{k-1}| \leqslant$$

$$\leqslant 2C\frac{a_{n_0}}{a_n} + \sup_{n_0\leqslant k\leqslant n} |S_n-S_{k-1}| < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon>0$, если $n$ и $n_0$ выбраны достаточно большими. ∎

Из доказанной леммы и теоремы Колмогорова (следствие 2 теоремы 2) вытекают следующие утверждения.

Теорема 5. *Если $\{\xi_n, n=1, 2, \ldots\}$ независимы и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathsf{D}\xi_n < \infty,$$

*то с вероятностью* 1

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathsf{M}\xi_k) = 0.$$

Для одинаково распределенных случайных величин $\xi_n$ более сильные результаты будут получены в дальнейшем как следствия общих эргодических теорем.

## § 3. Эргодические теоремы

Рассмотрим стационарную случайную последовательность $\{\xi(t),\ t \in T\}$, $T = \{t\colon\ t = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n,\ \ldots\}$, со значениями в некотором измеримом пространстве $\{X, \mathfrak{B}\}$. Стационарность последовательности означает (см. гл. I, § 5), что совместное распределение последовательности $\{\xi(t_1 + t),\ \xi(t_2 + t),\ \ldots$ $\ldots,\ \xi(t_n + t)\}$ не зависит от $t$, каковы бы ни были $n,\ t,\ t_1,\ \ldots$ $\ldots,\ t_n$ $(t \in T, n > 0)$. Это определение равнозначно тому, что для любой ограниченной $\mathfrak{B}^n$-измеримой функции $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $x_k \in X$, величина $\mathsf{M}f(\xi(t_1 + t),\ \ldots,\ \xi(t_n + t))$ не зависит от $t$ для любых $n,\ t_1,\ \ldots,\ t_n$.

Пусть $X^T$ обозначает пространство всех последовательностей $u = \{\ldots,\ x_{-n},\ x_{-n+1},\ \ldots,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\}$, $\mathfrak{C}$ — минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая все цилиндрические множества $X^T$, $\mathsf{P}_\xi$ — мера, индуцируемая на $\mathfrak{C}$ последовательностью $\{\xi(t),\ t \in T\}$. Таким образом, вероятностное пространство $\{X^T,\ \mathfrak{C},\ \mathsf{P}_\xi\}$ является естественным представлением процесса $\{\xi(t),\ t \in T\}$. Через $\{X^T,\ \tilde{\mathfrak{C}},\ \tilde{\mathsf{P}}_\xi\}$ обозначим пространство с пополненной мерой. В $X^T$ введем операцию сдвига времени $S$: $u' = Su$, если $x'_n = x_{n+1}$, $n \in T$, где $u = \{x_n, n \in T\}$, $u' = \{x'_n,\ n \in T\}$. Операция $S$ имеет обратную $S^{-1}$, причем если $u'' = S^{-1}u$, $u'' = \{x''_n,\ n \in T\}$, то $x''_n = x_{n-1}$. Условие стационарности последовательности $\xi(t)$ означает, что для произвольного цилиндрического множества $C$

$$\mathsf{P}_\xi(C) = \mathsf{P}_\xi(SC). \tag{1}$$

Поскольку мера на цилиндрических множествах однозначно определяет меру на $\mathfrak{C}$ и на ее пополнении $\tilde{\mathfrak{C}}_\xi$, то равенство (1) сохраняется для произвольного $A \in \tilde{\mathfrak{C}}_\xi$:

$$\mathsf{P}_\xi(A) = \mathsf{P}_\xi(SA), \qquad A \in \tilde{\mathfrak{C}}_\xi. \tag{2}$$

Определение. *Пусть* $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ — *некоторое пространство с мерой*, $S$ — *измеримое отображение* $\{U, \mathfrak{F}\}$ *в* $\{U, \mathfrak{F}\}$. *Преобразование* $S$ *называется сохраняющим меру, если для любого* $A \in \mathfrak{F}$

$$\mu(S^{-1}A) = \mu(A),$$

*где* $S^{-1}A$ — *полный прообраз множества* $A$.

Преобразование $S$ называется *обратимым*, если существует такое измеримое преобразование $S^{-1}$, что $SS^{-1} = S^{-1}S = I$, $I$ — тождественное преобразование. В этом случае преобразование $S^{-1}$ называется *обратным к* $S$. Определение стационарной последовательности эквивалентно следующему: *последовательность* $\{\xi(t),\ t \in T\}$ *стационарна, если оператор сдвига времени* $S$ *в* $X^T$ *сохраняет меру* $\mathsf{P}_\xi$.

Задача изучения стационарных последовательностей является частным случаем задачи изучения сохраняющих меру обратимых преобразований (автоморфизмов) некоторого пространства с мерой.

Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении при $n \to \infty$ среднего

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u), \tag{3}$$

где $S^k$ — $k$-я степень преобразования $S$, $f(u)$ — произвольная $\mathfrak{F}$-измеримая функция, $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ — некоторое пространство с мерой $\mu$ и $\mu(U) \leqslant \infty$. Чтобы понять смысл этой задачи, рассмотрим тот случай, когда $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ совпадает с $\{X^T, \tilde{\mathfrak{C}}, \tilde{\mathsf{P}}_\xi\}$, а $S$ — оператор сдвига времени. Пусть $\xi_k = \xi(k, u) = x_k$, $f(u) = \chi_B(x_0)$, где $\chi_B(x)$ — индикатор множества $B \in \mathfrak{B}$. Тогда $f(S^k u) = \chi_B(S^k u) = \chi_B(\xi(k))$ и

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) = \frac{\nu_n(B, u)}{n}, \tag{4}$$

где $\nu_n(B, u)$ — число членов последовательности $\xi(0), \xi(1), \ldots$ $\ldots, \xi(n-1)$, значения которых попадают в множество $B$, т. е. $\nu_n(B, u)$ является частотой попадания в множество $B$ первых $n$ членов последовательности $\xi(t)$ $(t = 0, 1, \ldots, n-1)$. Таким образом, поставленный вопрос, в частности, является вопросом о поведении частоты попадания значения случайной величины $\xi(t)$ в произвольное множество $B$. Докажем прежде всего, что предел при $n \to \infty$ величины (3) существует с вероятностью 1. Это предложение составляет содержание известной теоремы Биркхофа — Хинчина.

Лемма 1. *Если $S$ сохраняет меру $\mu$, $D \in \mathfrak{F}$ и $f(u)$ — $\mathfrak{F}$-измеримая неотрицательная $\mu$-интегрируемая функция, то*

$$\int_{S^{-1}D} f(Su)\,\mu(du) = \int_D f(u)\,\mu(du). \tag{5}$$

Если положить $f(u) = \chi_A(u)$, то формула (5) перейдет в равенство $\mu(S^{-1}(A \cap D)) = \mu(A \cap D)$, что верно для любых $A$ и

$D \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что формула (5) верна для произвольных $\mathfrak{F}$-измеримых неотрицательных и $\mu$-интегрируемых функций. ■

Докажем сейчас одну лемму арифметического характера. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательность действительных чисел, $p$ — целое число. Назовем член последовательности $a_k$ *$p$-отмеченным*, если в последовательности сумм

$$a_k,\ a_k + a_{k+1},\ \ldots,\ a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+p-1}$$

по крайней мере одна неотрицательна ($a_k$ 1-отмечен тогда и только тогда, когда он неотрицателен).

Лемма 2. *Сумма всех $p$-отмеченных элементов неотрицательна.*

Пусть $a_{k_1}$ — $p$-отмеченный элемент последовательности с наименьшим номером и $a_{k_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_1+r}$ $(r \leqslant p-1)$ — неотрицательная сумма с наименьшим числом слагаемых. При $h < r$ $a_{k_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_1+h} < 0$, следовательно, $a_{k_1+h+1} + \ldots + a_{k_1+r} \geqslant 0$, т. е. все члены последовательности $a_{k_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_1+r}$ $p$-отмечены и их сумма неотрицательна. Можно продолжить это рассуждение, рассматривая последовательность, начиная с члена $a_{k_1+r+1}$ Таким образом, вся последовательность разбивается на части, каждая из которых кончается группой $p$-отмеченных членов, и сумма $p$-отмеченных элементов каждой части неотрицательна. Множество $p$-отмеченных элементов всей последовательности совпадает с суммой множеств $p$-отмеченных элементов таких ее частей, что и доказывает лемму. ■

Следующая лемма является основным этапом в доказательстве теоремы Биркхофа — Хинчина.

Лемма 3. *Пусть $f(u)$ — $\mu$-интегрируемая функция, $S$ — измеримое, сохраняющее меру $\mu$ отображение $\{U, \mathfrak{F}\}$ в $\{U, \mathfrak{F}\}$ и*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{u\colon \sum_{k=1}^{n} f(S^{k-1}u) \geqslant 0\right\}.$$

*Тогда*

$$\int_E f(u)\,\mu(du) \geqslant 0. \tag{6}$$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность $f(u)$, $f(Su), \ldots, f(S^{N+p-1}u)$ и обозначим через $s(u)$ сумму всех $p$-отмеченных элементов этой последовательности. В силу леммы 2 $s(u) \geqslant 0$. Пусть $D_k = \{u\colon f(S^k u)$ есть $p$-отмеченный элемент$\}$, $\chi_k(u)$ — индикатор множества $D_k$. Заметим, что

$D_0 = \{u\colon \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} f(S^{k-1}(u)) \geqslant 0\}$ и $D_k = S^{-1}D_{k-1}$ при $k \leqslant N$, откуда $D_k = S^{-k}D_0$ $(k \leqslant N)$. Отсюда

$$0 \leqslant \int_U s(u)\,\mu(du) = \int_U \sum_{k=0}^{N+p-1} f(S^k u)\,\chi_k(u)\,\mu(du) = \\ = \sum_{k=0}^{N+p-1} \int_{D_k} f(S^k u)\,\mu(du).$$

В силу леммы 1

$$\int_{D_k} f(S^k u)\,\mu(du) = \int_{S^{-k}D_0} f(S^k u)\,\mu(du) = \int_{D_0} f(u)\,\mu(du), \qquad k \leqslant N.$$

Следовательно,

$$N\int_{D_0} f(u)\,\mu(du) + \sum_{k=N+1}^{N+p-1} \int_{D_k} f(S^k u)\,\mu(du) \geqslant 0. \tag{7}$$

Так как

$$\left| \int_{D_k} f(S^k u)\,\mu(du) \right| \leqslant \int_U |f(S^k u)|\,\mu(du) = \int_U |f(u)|\,\mu(du) < \infty,$$

то, разделив неравенство (7) на $N$ и устремив $N$ к $\infty$, получим

$$\int_{D_0} f(u)\,\mu(du) \geqslant 0. \tag{8}$$

Множества $D_0 = D_0(p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ образуют монотонно возрастающую последовательность, и

$$\lim_{p\to\infty} D_0(p) = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_0(p) = E.$$

Переходя в (8) к пределу при $p \to \infty$, получим (6). ■

Лемма 4 (максимальная эргодическая теорема). *Пусть $f(u)$ $\mu$-интегрируема, $\lambda$ — действительное число и*

$$E_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ u:\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(S^{k-1}u) \geqslant \lambda \right\}.$$

*Тогда*

$$\int_{E_\lambda} f(u)\,\mu(du) \geqslant \lambda\mu(E_\lambda). \tag{9}$$

Доказательство получим, если к функции $f(u) - \lambda$ применим лемму 3.

Теорема 1 (теорема Биркхофа — Хинчина). *Пусть $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ — пространство с мерой, $S$ — измеримое, сохраняющее меру*

*$\mu$ отображение $\{U, \mathfrak{F}\}$ в $\{U, \mathfrak{F}\}$ и $f(u)$ — произвольная $\mu$-интегрируемая функция. Тогда $\mu$-почти всюду в $U$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) = f^*(u) \pmod{\mu}, \tag{10}$$

*функция $f^*(u)$ $S$-инвариантна, т. е.*

$$f^*(Su) = f^*(u) \pmod{\mu}, \tag{11}$$

*и интегрируема. Если $\mu(U) < \infty$, то*

$$\int_U f^*(u)\,\mu(du) = \int_U f(u)\,\mu(du). \tag{12}$$

*Доказательство.* Не уменьшая общности, можно считать, что функция $f(u)$ конечна и неотрицательна. Положим

$$g^*(u) = \overline{\lim}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u), \quad g_*(u) = \underline{\lim}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u).$$

Нужно установить, что $g^*(u) = g_*(u) \pmod{\mu}$. Пусть

$$K_{\alpha\beta} = \{u\colon\ g^*(u) > \beta,\ g_*(u) < \alpha\}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \beta.$$

Достаточно показать, что $\mu(K_{\alpha\beta}) = 0$. (Действительно, $\{u\colon\ g^*(u) > g_*(u)\} = \bigcup\limits_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\ \beta\in R}} K_{\alpha\beta}$, где $R$ — множество неотрицательных рациональных чисел.) Заметим, что

$$g^*(Su) = \overline{\lim}\left\{\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(S^k u) - \frac{f(u)}{n}\right\} = g^*(u)$$

и, аналогично, $g_*(Su) = g_*(u)$. Это означает, в частности, что $S^{-1}K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}$. Поэтому можно применить лемму 4 к пространству с мерой $\{K_{\alpha\beta}, \mathfrak{F}\cap K_{\alpha\beta}, \mu\}$. Отсюда следует, что

$$\int_{K_{\alpha\beta}} f(u)\,\mu(du) \geqslant \beta\mu(K_{\alpha\beta}). \tag{13}$$

Применяя лемму 4 к функции $-f(u)$, получим

$$\int_{K_{\alpha\beta}} f(u)\,\mu(du) \leqslant \alpha\mu(K_{\alpha\beta}). \tag{14}$$

Так как $\beta > 0$, то из (13) следует, что $\mu(K_{\alpha\beta}) < \infty$, но тогда (14) возможно лишь, когда $\mu(K_{\alpha\beta}) = 0$. Итак, существование

$(\mathrm{mod}\,\mu)$ предела (10) доказано. Положим $f^*(u)=g^*(u)$. Тогда выполняется (10) и $f^*(u)$ $S$-инвариантна почти всюду в $U$.

Для доказательства формулы (12) положим $A_{kn}=\left\{u\colon \frac{k}{2^n}\leqslant f^*(u)<\frac{k+1}{2^n}\right\}$. Имеем $U=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} A_{kn}$, $S^{-1}A_{kn}=\left\{u\colon \frac{k}{2^n}\leqslant f^*(Su)<\frac{k+1}{2^n}\right\}=A_{kn}$. Применим к множеству $A_{kn}$ лемму 4. Для любого $\varepsilon>0$ получим, что $\int\limits_{A_{kn}} f(u)\,\mu(du)\geqslant\left(\frac{k}{2^n}-\varepsilon\right)\mu(A_{kn})$, откуда при $\varepsilon\to 0$ получаем неравенство $\int\limits_{A_{kn}} f(u)\,\mu(du)\geqslant\frac{k}{2^n}\mu(A_{kn})$. Аналогично, $\int\limits_{A_{kn}} f(u)\,\mu(du)\leqslant\frac{k+1}{2^n}\mu(A_{kn})$, откуда следует

$$\left|\int\limits_{A_{kn}} f(u)\,\mu(du)-\int\limits_{A_{kn}} f^*(u)\,\mu(du)\right|\leqslant\frac{1}{2^n}\mu(A_{kn}).$$

Суммируя эти неравенства по всем $k$, получим

$$\left|\int\limits_{U} f(u)\,\mu(du)-\int\limits_{U} f^*(u)\,\mu(du)\right|<\frac{1}{2^n}\mu(U).$$

Принимая во внимание произвольность $n$ в случае, когда $\mu(U)<\infty$, получим формулу (12). ■

Некоторые следствия теоремы Биркхофа — Хинчина.

Следствие 1. *Пусть* $\mu(U)<\infty$, $f(u)\in\mathcal{L}_p\{U,\mathfrak{F},\mu\}$. *Тогда*

$$\int\limits_U\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u)-f^*(u)\right|^p\mu(du)\to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty. \tag{15}$$

Для доказательства возьмем какую-либо ограниченную функцию $f_0(u)$, и пусть $\|f(u)-f_0(u)\|_p=\delta$, где $\|f\|_p$ — норма элемента $f$ в $\mathcal{L}_p\{U,\mathfrak{F},\mu\}$. Тогда

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(S^k u)-f^*(u)\right\|_p\leqslant\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[f(S^k u)-f_0(S^k u)]\right\|_p+$$
$$+\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_0(S^k u)-f_0^*(u)\right\|_p+\|f_0^*(u)-f^*(u)\|_p.$$

В силу неравенства Иенсена и леммы 1

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)] \right\|_p =$$

$$= \left\{ \int_U \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(S^k u) - f_0(S^k u)) \right|^p \mu(du) \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_U \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | f(S^k u) - f_0(S^k u) |^p \mu(du) \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_U | f(u) - f_0(u) |^p \mu(du) \right\}^{1/p} = \delta.$$

Используя лемму Фату, получим

$$\| f_0^*(u) - f^*(u) \|_p =$$

$$= \left\{ \int_U \lim \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)] \right|^p \mu(du) \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)] \right\|_p \leqslant \delta.$$

Далее, так как функция $f_0(u)$ ограничена, то и все ее средние ограничены одной и той же константой. Поэтому в выражении

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_0(S^k u) - f_0^*(u) \right\|_p = \left\{ \int_U \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_0(S^k u) - f_0^*(u) \right|^p \mu(du) \right\}^{1/p}.$$

при $n \to \infty$ можно перейти к пределу под знаком интеграла в силу теоремы Лебега. Следовательно, оно стремится к нулю и при достаточно больших $n$ становится меньше $\delta$. Таким образом,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) - f^*(u) \right\|_p < 3\delta, \qquad n \geqslant n_0 = n_0(\delta),$$

причем число $\delta$ может быть выбрано сколь угодно малым ($\delta > 0$). Таким образом, (15) доказано. ∎

Определение 2. *Множество $A \in \mathfrak{F}$ называется $S$-инвариантным, если* $\mu((S^{-1}A) \Delta A) = 0$.

Здесь $\Delta$ — символ симметрической разности множеств.

Легко проверить, что класс всех $S$-инвариантных множеств образует $\sigma$-алгебру $\mathfrak{F}$-измеримых множеств. Далее, если $g(u)$ — $S$-инвариантная функция, то множества $\{u: g(u) \geqslant c\}$,

$\{u\colon g(u)=c\}$ $S$-инвариантны. С другой стороны, если $A$ $S$-инвариантно, то $\chi_A(u)$ — $S$-инвариантная функция. Обозначим $\sigma$-алгебру $S$-инвариантных множеств через $\mathfrak{J}$. Пусть $\mu(U)=1$. Будем считать $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ вероятностным пространством и символом $\mathsf{M}$ обозначать интегрирование по мере $\mu$ (математическое ожидание).

Следствие 2. $f^*(u)=\mathsf{M}\{f(u)\,|\,\mathfrak{J}\}$ $\pmod{\mu}$.

Очевидно, что $\mathsf{M}\{f(u)\,|\,\mathfrak{J}\}$ является $S$-инвариантной функцией. Поэтому для доказательства следствия 2 достаточно проверить, что для произвольной ограниченной $S$-инвариантной функции

$$\mathsf{M}g(u)(f^*(u)-\mathsf{M}\{f(u)\,|\,\mathfrak{J}\})=0$$

или что $\mathsf{M}(g(u)f^*(u)-g(u)f(u))=0$; но последнее вытекает из (12), так что

$$(g(u)f(u))^*=\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(S^ku)f(S^ku)=g(u)f^*(u) \pmod{\mu}. \ \blacksquare$$

**Эргодические стационарные последовательности.** Возвратимся к стационарным последовательностям.

Пусть $\{\xi(t),\ t\in T\}$ — стационарная последовательность и $\{X^T, \mathfrak{C}, \mathsf{P}\}$ — ее естественное представление.

Следствие 3. *Если $f$ — измеримая функция в $\{X^m, \mathfrak{B}^m\}$ и $\mathsf{M}f(\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(m-1))\neq\infty$, то с вероятностью* 1

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi(k),\ \xi(k+1),\ \ldots,\ \xi(k+m-1))\to$$

$$\to\mathsf{M}\{f(\xi(0),\ \xi(1),\ \ldots,\ \xi(m-1))\,|\,\mathfrak{J}\}\quad \textit{при}\quad n\to\infty,$$

*где $\mathfrak{J}$ — $\sigma$-алгебра событий из $\mathfrak{F}$, инвариантных относительно сдвига времени.*

Рассмотрим произвольное событие $A\in\mathscr{C}$ и последовательность событий, получаемых из $A$ «сдвигом времени» — $A$, $S^{\pm1}A$, $S^{\pm2}A,\ldots$ Если $\chi_n$ — индикатор события $S^nA$, то $\chi_n$ $(n=0, \pm1, \ldots)$ образуют стационарную последовательность случайных величин и $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_k$ есть частота наступления события $A$, вычисленная по одной реализации последовательности $\{\xi(t),\ t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_k=\frac{\nu_n(A)}{n}.$$

В силу теоремы Биркхофа — Хинчина с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(A)}{n} = \pi(A) = \mathsf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{J}\} \quad \text{и} \quad \mathsf{M}\pi(A) = \mathsf{P}(A).$$

Величину $\pi(A)$ можно назвать *эмпирической вероятностью* события $A$. Она является случайной величиной. Естественно, возникает вопрос: когда эмпирическая вероятность $\pi(A)$ не зависит от случая и совпадает с вероятностью $\mathsf{P}(A)$?

Стационарные последовательности, обладающие этим свойством, называются *эргодическими.*

Более общим является следующее определение.

Определение. *Пусть* $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ — *вероятностное пространство,* $S$ — *сохраняющее меру преобразование* $U$ *в себя,* $\nu_n(A) = \nu_n(A, u)$ — *число членов последовательности* $\{u, Su, \ldots, S^{n-1}u\}$, *попадающих во множество* $A$. *Преобразование* $S$ *называют эргодическим, если для любого* $A \in \mathfrak{F}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(A, u)}{n} = \mu(A) \pmod{\mu}.$$

*Преобразование* $S$ *называют метрическим транзитивным, если любое* $S$-*инвариантное множество имеет меру* 1 *или* 0.

Теорема 2. *Чтобы преобразование* $S$ *в вероятностном пространстве* $\{U, \mathfrak{F}, \mu\}$ *было эргодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий*:

а) $S$ *метрически транзитивно*;

б) *для любой* $\mathfrak{F}$-*измеримой* $\mu$-*интегрируемой функции* $f(u)$ *функция*

$$f^*(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u)$$

*с вероятностью* 1 *постоянна.*

*Доказательство.* Пусть $A$ — $S$-инвариантное множество и $0 < \mu(A) < 1$. Множества $A$, $SA$, $S^2A$, ... отличаются друг от друга на множества меры 0 и $\nu_n(A) = n\chi_A(u) \pmod{\mu}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_n(A)}{n}$ не может быть постоянной $(\mathrm{mod}\,\mu)$ величиной. Таким образом, из эргодичности следует метрическая транзитивность. Пусть теперь $S$ метрически транзитивно. Так как функция $f^*(u)$ $S$-инвариантна, то симметрическая разность множеств

$$S^{-1}\{u\colon f^*(u) < x\} = \{u\colon f^*(Su) < x\} \quad \text{и} \quad \{u\colon f^*(u) < x\}$$

имеет $\mu$-меру 0. Отсюда вытекает, что $\mu\{u\colon f^*(u) < x\} = 0$ или 1 для любого действительного $x$, т. е. $f^*(u) = \text{const} \pmod{\mu}$. Таким образом, из а) вытекает б). Наконец, условие эргодичности является частным случаем условия б), а именно когда $f(u)$ есть индикатор некоторого события. ■

Приведем несколько следствий из эргодичности.

Пусть $\{X, \tilde{\mathfrak{S}}, \mathsf{P}\}$ — естественное представление стационарной последовательности $\xi(n)$, $S$ — преобразование сдвига времени в $X^T$, $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2\{X^T, \tilde{\mathfrak{S}}, \mathsf{P}\}$.

Из следствия 1 теоремы 1 вытекает, что для произвольных функций $f(u)$ и $g(u)$ из $\mathscr{L}_2$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X^T} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u)\, g(u)\, \mathsf{P}(du) = \int_{X^T} f^*(u)\, g(u)\, \mathsf{P}(du). \tag{16}$$

Будем говорить, что последовательность $\{\xi(n),\ n = 0, \pm 1, \ldots\}$ эргодична, если эргодическим является преобразование $S$. Положим $g(u) = \eta$, $f(S^k u) = \zeta_k$ и предположим, что исходная стационарная последовательность $\{\xi(n),\ n = 0, \pm 1, \ldots\}$ эргодична. Соотношение (16) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k \eta = \mathsf{M}\zeta_0 \mathsf{M}\eta. \tag{17}$$

Пусть $g(u) = \chi_B(u)$, $f(u) = \chi_A(u)$, $A$ и $B \in \tilde{\mathfrak{S}}$. Из (17) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}\left(S^{-k} A \cap B\right) = \mathsf{P}(A)\, \mathsf{P}(B) \tag{18}$$

или (если $\mathsf{P}(B) \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}\left(S^{-k} A \mid B\right) = \mathsf{P}(A), \tag{19}$$

где $\mathsf{P}(S^{-k}A \mid B)$ — условная вероятность события $S^{-k}A$ относительно $B$.

Лемма 5. *Равенство* (18) (*или* (19)), *для любых* $A, B \in \tilde{\mathfrak{S}}$ *эквивалентно эргодичности.*

Достаточно показать, что из (18) следует эргодичность. Пусть $C$ — любое $S$-инвариантное событие. Положим в (18) $A = B = C$. Тогда оно переходит в следующее: $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}^2(C)$, откуда $\mathsf{P}(C) = 0$ или 1, и лемма следует из теоремы 2. ■

Равенство (19), имеет следующий теоретико-вероятностный смысл. Пусть $A$ и $B$ — два события из $\tilde{\mathfrak{S}}$. Если событие $A$ неограниченно сдвигать во времени, то в среднем события $S^{-n}A$ и $B$ становятся независимыми, каково бы ни было событие $B$.

Условие (19) является частным случаем более жесткого требования:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(S^{-n}A \mid B\right) = \mathsf{P}(A), \tag{20}$$

которое называется *условием перемешивания*. Условие (20) является частным случаем равенства

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\zeta_n\eta = \mathsf{M}\zeta_0\mathsf{M}\eta, \tag{21}$$

где $\zeta_n = f(S^n u)$, $\eta = g(u)$, $f(u)$ и $g(u)$ — произвольные функции из $\mathscr{L}_2$. С другой стороны, из (20) следует (21) для простых функций $f$ и $g$. Аппроксимируя произвольные $f(u)$ и $g(u)$ из $\mathscr{L}_2$ последовательностями простых функций $f_n(u)$ и $g_n(u)$, сходящихся в $\mathscr{L}_2$ к $f(u)$ и $g(u)$ соответственно, нетрудно убедиться, что условие перемешивания эквивалентно условию (21) ($f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции из $\mathscr{L}_2$). С другой стороны, условие (21) достаточно проверить для некоторого множества функций, линейная оболочка которых всюду плотна в $\mathscr{L}_2$. В качестве таковой удобно принимать индикаторы цилиндрических множеств.

Рассмотрим последовательность $\{\xi_n,\ n = 0, \pm 1, \ldots\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, и пусть $\mathsf{M}|\xi_n| < \infty$. Она является стационарной последовательностью. В силу теоремы Биркхофа — Хинчина

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = \xi^* \pmod{\mathsf{P}}, \qquad \mathsf{M}\xi^* = \mathsf{M}\xi.$$

Случайная величина $\xi^*$, очевидно, не зависит от любого конечного числа величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p$. Поэтому $\xi^*$ измерима относительно $\overline{\lim}\,\tilde{\sigma}\{\xi_k\}$ и на основании «закона 0 или 1» постоянна, $\xi^* = c \pmod{\mathsf{P}}$, причем $c = \mathsf{M}\xi$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3 (усиленный закон больших чисел). *Если $\{\xi_n,\ n = 0, \pm 1, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\mathsf{M}|\xi_n| < \infty$, то с вероятностью* 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = \mathsf{M}\xi_0. \tag{22}$$

Доказанная теорема является следствием эргодичности независимых одинаково распределенных случайных величин. Но можно доказать большее, а именно, что оператор сдвига времени в $X^T$ является перемешиванием. В свою очередь это вытекает из более общего утверждения. Пусть $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ —

стационарная последовательность случайных элементов в $\{X, \mathfrak{S}\}$, $\mathfrak{F}_n$ — $\sigma$-алгебра, порождаемая случайными элементами $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \mathfrak{F}_\infty = \bigcap_n \mathfrak{F}_n = \lim \mathfrak{F}_n$. Будем говорить, что к последовательности $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ применим «закон 0 или 1», если $\sigma$-алгебра $\mathfrak{F}_\infty$ содержит только события вероятности 0 или 1.

Теорема 4. *Если последовательность* $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ *удовлетворяет «закону* 0 *или* 1», *то преобразование сдвига времени является перемешиванием.*

Положим $\zeta_{-n} = \mathsf{P}\{B \mid \mathfrak{F}_n\}$. Последовательность $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n, n = \ldots -k, -k+1, \ldots, 0\}$, $\mathfrak{F}_{-n} = \mathfrak{F}_n$, является мартингалом, и $\mathsf{P}\{B \mid \mathfrak{F}_\infty\}$ является его замыканием слева. Так как $\sigma$-алгебра $\mathfrak{F}_\infty$ тривиальна, то $\mathsf{P}\{B \mid \mathfrak{F}_\infty\} = \mathrm{const} = \mathsf{P}(B)$ $(\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$. В силу теоремы о сходимости мартингалов (теорема 1, следствие, § 1) $\lim \mathsf{P}\{B \mid \mathfrak{F}_n\} = \mathsf{P}(B)$ с вероятностью 1. Пусть $A$ — цилиндрическое множество над координатами $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $S^{-n}A \in \mathfrak{F}_n$. Поэтому при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(B \cap S^{-n}A) = \int\limits_{S^{-n}A} \mathsf{P}\{B \mid \mathfrak{F}_n\} \mathsf{P}(du) \to \mathsf{P}(B) \mathsf{P}(S^{-n}A) = \mathsf{P}(B) \mathsf{P}(A).$$

Очевидно, что это соотношение имеет место и для любого цилиндрического $A$. Отсюда вытекает, как было замечено ранее, соотношение (21). ■

Другим примером процесса, удовлетворяющего условию перемешивания, может служить стационарная гауссова последовательность, коэффициент корреляции которой стремится к нулю. Пусть $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — стационарная гауссова последовательность, $\mathsf{M}\xi_n = m$, $\mathsf{M}(\xi_n - m)(\xi_0 - m) = R_n$, $f(u) = f(x_0, x_1, \ldots, x_p)$, $g(u) = g(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ — ограниченные достаточно гладкие функции $p + 1$ переменных, имеющие абсолютно интегрируемые преобразования Фурье $f^*(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$, $g^*(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$. Тогда

$$\mathsf{M} f(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+p}) g(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p) =$$

$$= \mathsf{M} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k \xi_{n+k} + \sum\limits_{k=0}^{p} \mu_k \xi_k\right)} \times$$

$$\times f^*(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) g^*(\mu_0, \ldots, \mu_p) d\lambda_0 \ldots d\lambda_p d\mu_0 \ldots d\mu_p =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left\{\sum\limits_{k, r=0}^{p} R_{k-r}(\lambda_k \lambda_r + \mu_k \mu_r) + \sum\limits_{k, r=0}^{p} R_{n+k-r} \lambda_k \mu_r\right\}} \times$$

$$\times f^*(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) g^*(\mu_0, \ldots, \mu_p) d\lambda_0 \ldots d\lambda_p d\mu_0 \ldots d\mu.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, то, переходя в написанном соотношении к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M} f(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+p})\, g(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p) = \\ = \mathsf{M} f(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p)\, \mathsf{M}\, g(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p). \quad (23)$$

Так как класс функций $f$ и $g$, для которых доказано последнее соотношение, всюду плотен в $\mathscr{L}_2$, то соотношение (23) имеет место для произвольных $f$ и $g$ из $\mathscr{L}_2$.

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 5. *Стационарная гауссова последовательность, коэффициент корреляции которой $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, удовлетворяет условию перемешивания.*

## § 4. Процесс восстановления

В общих чертах процесс восстановления может быть описан следующим образом. Рассматривается работающий прибор, который время от времени выходит из строя (отказывает). В момент отказа прибор немедленно заменяется новым. Будем считать, что продолжительность исправной работы $n$-го прибора $\tau_n$ является случайной величиной, причем все величины $\tau_n$, $n = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены. Моменты времени, когда один из приборов выходит из строя, называют *моментами восстановления*. При этом считают, что 0 является моментом восстановления. Положим

$$\xi_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad \xi_0 = 0.$$

Величина $\xi_n$ является моментом $n$-го восстановления, а всего промежуток времени $[0, \xi_n]$ имеет $n+1$ восстановление (считая восстановление в момент времени 0).

Пусть $F(x) = \mathsf{P}\{\tau_n \leqslant x\}$ (в настоящем параграфе удобней пользоваться таким определением функции распределения случайной величины вместо обычного $F(x) = \mathsf{P}\{\tau_n < x\}$). Тогда $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(0) \geqslant 0$. Будем считать, что $F(0) < 1$. Тогда $\mathsf{M}\tau_n > 0$.

Лемма 1. *С вероятностью 1 $\xi_n \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Действительно, $\mathsf{P}(\xi_n \leqslant c) = \mathsf{P}\left(e^{-\sum\limits_1^n \tau_k} \geqslant e^{-c}\right)$. Используя неравенство Чебышева, получим

$$\mathsf{P}(\xi_n \leqslant c) \leqslant e^c q^n, \quad \text{где} \quad q = \mathsf{M} e^{-\tau_n}. \quad (1)$$

Таким образом, $\mathsf{P}(\lim \xi_n \leqslant c) = \lim \mathsf{P}(\xi_n \leqslant c) = 0$. ∎

Из леммы 1 следует, что для любого $t \geqslant 0$ найдется такое $\nu = \nu(t)$, что $\xi_{\nu-1} \leqslant t < \xi_\nu$. Величину $\nu(t)$ называем *числом восстановлений* на промежутке времени $[0, t]$. Так как $\{\nu(t) = n\} = \{\xi_{n-1} \leqslant t\} \setminus \{\xi_n \leqslant t\}$, то

$$\mathsf{P}\{\nu(t) = n\} = \mathsf{P}\{\xi_{n-1} \leqslant t\} - \mathsf{P}\{\xi_n \leqslant t\}.$$

При этом $\xi_n$ — сумма $n$ независимых одинаково распределенных величин. Следовательно, $\mathsf{P}(\xi_n \leqslant t) = F^{*(n)}(t)$, где $F^{*(n)}(t)$ — $n$-кратная свертка функции распределения $F(x)$:

$$F^{*(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F^{*(n-1)}(t-s)\,dF(s) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)\,dF(s),$$

причем $F^{*(n)}(t) = 0$ при $t < 0$, $F^{*(0)}(t) = I(t)$ ($I(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ и $I(t) = 0$ при $t < 0$), $F^{*(1)} = F$.

Положим

$$H(t) = \mathsf{M}\nu(t), \quad t \geqslant 0, \quad H(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Функция $H(t)$ играет в дальнейшем важную роль. Ее называют *функцией восстановления*. Она монотонно не убывает и непрерывна справа. Покажем, что она конечна $\forall t \geqslant 0$. Пусть $\chi_n(t)$ — индикатор события $\{\xi_n \leqslant t\}$. Тогда

$$H(t) = \mathsf{M}\nu(t) = \mathsf{M}\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_n \leqslant t).$$

Таким образом,

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*(n)}(t), \tag{2}$$

и в силу неравенства (1) ряд в правой части равенства сходится равномерно в любом конечном отрезке $t \in [0, T]$. Из равномерной сходимости ряда (2) следует $\sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}(t) = F * \left(\sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n-1)}\right)(t) = F * H(t)$, где $F * G$ обозначает свертку двух функций $F$ и $G$, обращающихся в 0 для отрицательных значений аргумента:

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s)\,dF(s) = \int_0^x G(x-s)\,dF(s).$$

Следовательно, функция $H(t)$ является решением уравнения

$$H(t) = I(t) + \int_0^t H(t-s)\,dF(s). \tag{3}$$

Более того, если $z(t)$ — произвольная измеримая ограниченная функция на каждом компакте $[0, T]$, $Z(t)=\int_0^t z(t-s)\,dH(s)=$ $=H*z(t)$, то

$$Z(t)=z(t)+\int_0^t Z(t-s)\,dF(s), \qquad t\geqslant 0. \tag{4}$$

При этом следует иметь в виду, что под интегралом $\int_0^t f\,dF$ мы в настоящем параграфе будем понимать интеграл по замкнутому отрезку $[0, t]$ и в нем нужно учитывать значение меры, порождаемой функцией $F$, сосредоточенной в точках 0 и $t$. Уравнение (4) называют *уравнением восстановления*. Оно имеет решение для любой измеримой локально ограниченной функции $z(t)$ (т. е. ограниченной на всех конечных отрезках). Нетрудно убедиться, что в классе локально ограниченных функций решение уравнения (4) единственно.

Действительно, разность $V(t)$ между двумя решениями уравнения (4) (при заданных $z(t)$ и $F(t)$) удовлетворяет уравнению $V=F*V$. Следовательно, для любого $n$ $V=F^{*(n)}*V$. Но тогда $\max\limits_{t\in[0,T]} V(t)\leqslant \max\limits_{t\in[0,T]} V(t)F^{*(n)}(T)\to 0$ при $n\to\infty$, так что $V(t)\equiv 0$.

Исследуем асимптотическое поведение функции $H(t)$ при $t\to\infty$.

Лемма 2. *Функция $H(t)$ полуаддитивна, т. е.*

$$H(t_1+t_2)\leqslant H(t_1)+H(t_2).$$

*Доказательство*. Имеем

$$H(t_1+t_2)-H(t_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(t_1<\xi_n\leqslant t_1+t_2)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_{k-1}\leqslant t_1<\xi_k\leqslant t_1+t_2,\ \xi_n\leqslant t_1+t_2).$$

Так как $\xi_n-\xi_k$ не зависит от $\xi_k$ и $\xi_{k-1}$, то

$$\mathsf{P}(\xi_{k-1}\leqslant t_1<\xi_k\leqslant t_1+t_2,\ \xi_n\leqslant t_1+t_2)=$$
$$=\mathsf{MP}(\xi_n-\xi_k\leqslant t_1+t_2-\xi_k\mid\xi_k)\,\chi(\xi_{k-1}\leqslant t_1<\xi_k\leqslant t_1+t_2),$$

где $\chi(A)$ обозначает индикатор события $A$. Далее,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_n - \xi_k \leqslant t_1 + t_2 - \xi_k \mid \xi_k) \leqslant H(t_1 + t_2 - \xi_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi(\xi_{k-1} \leqslant t_1 < \xi_k \leqslant t_1 + t_2) \leqslant 1,$$

поэтому

$$H(t_1 + t_2) - H(t_1) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M} \sum_{k=1}^{\infty} H(t_1 + t_2 - \xi_k)\, \chi(\xi_{k-1} \leqslant t_1 < \xi_k \leqslant t_1 + t_2) \leqslant H(t_2). \blacksquare$$

Лемма 3. *Для произвольной неотрицательной локально ограниченной полуаддитивной функции $H(t)$ предел $l = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t}$ существует.*

*Доказательство.* Пусть $c > 0$, $t = kc + h$, $h \in [0, c)$ и $k$ — целое число. Тогда

$$\frac{H(t)}{t} = \frac{H(kc+h)}{kc+h} \leqslant \frac{kH(c) + H(h)}{kc+h},$$

откуда

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} \leqslant \frac{H(c)}{c} \quad \text{и} \quad \varlimsup_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} \leqslant \varliminf_{c\to\infty} \frac{H(c)}{c}. \blacksquare$$

Найдем значение предела $\lim \frac{H(t)}{t}$.

Теорема 1 (элементарная теорема теории восстановления).

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mathsf{M}\tau_1} \qquad \left(\frac{1}{\mathsf{M}\tau_1} = 0, \ \textit{если} \ \ \mathsf{M}\tau_1 = \infty\right). \tag{5}$$

*Доказательство.* Рассмотрим преобразование Лапласа $\hat{H}(s)$ функции $H(t)$:

$$\hat{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} H(t)\, dt.$$

Имеем

$$s^2 \hat{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} \left[\frac{H\left(\frac{u}{s}\right)}{\frac{u}{s}}\right] u\, du.$$

Так как

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-u} \frac{H\left(\frac{u}{s}\right)}{\frac{u}{s}} u\,du = s^2 \int_0^{\varepsilon/s} e^{-st} H(t)\,dt \leqslant s\varepsilon H\left(\frac{\varepsilon}{s}\right) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ и $H\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s}\right)^{-1} \to l$ при $s \to 0$ и любом $u \geqslant 0$, то

$$\lim_{s\to 0} s^2 \hat{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} lu\,du = l.$$

С другой стороны, переходя к преобразованиям Лапласа в равенстве (3), будем иметь

$$\hat{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt + \int_0^{\infty}\int_0^{t} H(t-t') e^{-s(t-t')-st'}\,dF(t')\,dt =$$

$$= \frac{1}{s} + \int_0^{\infty} e^{-st'}\,dF(t') \int_0^{\infty} H(u) e^{-su}\,du = \frac{1}{s} + \hat{H}(s)\hat{F}(s),$$

где $\hat{F}(s)$ — преобразование Лапласа — Стилтьеса функции $F(t)$:

$$\hat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dF(t). \tag{6}$$

Таким образом, для функции $\hat{H}(s)$ имеем следующее выражение:

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s(1-\hat{F}(s))}. \tag{7}$$

Если величина $\mathsf{M}\tau_1$ конечна, то

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{1-\hat{F}(s)}{s} = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-st}}{s}\,dF(t) \to \int_0^{\infty} t\,dF(t).$$

В этом случае

$$l = \lim_{s\to 0} s^2 \hat{H}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1-\hat{F}(s)} = \frac{1}{\mathsf{M}\tau_1}.$$

Если же $\int_0^{\infty} t\,dF(t) = \infty$, то, как нетрудно видеть,

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{1-\hat{F}(s)}{s} = \infty. \ \blacksquare$$

Полученный результат можно было предвидеть: среднее число восстановлений в единицу времени равно величине, обратной среднему времени непрерывной работы прибора.

Более точные результаты в теории восстановления зависят от природы функции распределения $F(t)$.

Предположим, что продолжительность работы прибора может иметь только значение вида $\tau = nh$, $n = 0, 1, \ldots$ В этом случае говорят, что величины $\tau_k$ имеют *решетчатое* распределение. Не умаляя общности, можно считать $h = 1$. Пусть $p_n = \mathsf{P}(\tau_k = n)$. Положим

$$G(n) = 1 + \mathsf{P}(\tau_1 = n) + \ldots + \mathsf{P}(\tau_1 + \ldots \tau_k = n) + \ldots$$

Из предыдущего следует, что $G(n) < \infty$ (если $\tau_k > 0$ с вероятностью 1, то $G(n) \leqslant 2$). Пусть $d$ — наибольший общий делитель тех $n$, для которых $p_n > 0$. Если $d = 1$, будем называть процесс восстановления *апериодическим*; если $d > 1$ — *периодическим*, а $d$ — *периодом восстановления*. В случае апериодического процесса восстановления $G(n) > 0$ для всех $n$, начиная с некоторого $n = n_0$. Если же $d > 1$, то при всех достаточно больших $k$, $k \geqslant k_0$, $G(kd) > 0$. Эти утверждения вытекают из следующей элементарной теоретико-числовой леммы.

Лемма 4. *Пусть $d$ — наибольший общий делитель последовательности положительных целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Существует такое число $m_0 > 0$, что для всех целых $m \geqslant m_0$ неопределенное уравнение*

$$md = \sum_{j=1}^{s} c_j n_j$$

*имеет решение в целых неотрицательных числах $c_j$.*

*Доказательство.* Пусть $A$ — множество всех чисел, представимых в виде $x = \sum_{1}^{s} a_j n_j$, где $a_j$ — целые (положительные, отрицательные или 0). Каждое $x$ делится на $d$. Пусть $d_0$ — наименьшее положительное число из $A$. Так как $x - kd_0 \in A$ при любом целом $k$, то, каково бы ни было $x$, найдется такое $k$, что $x = kd_0$ (в противном случае нашлось бы такое $k_1$, что $x_1 = x - k_1 d_0$ удовлетворял бы неравенствам $0 < x_1 < d_0$, что противоречит определению $d_0$). Итак, $d_0$ есть наибольший общий делитель чисел из $A$. Пусть теперь $B = \left\{ x\colon\ x = \sum_{j=1}^{s} b_j n_j \right\}$, где $b_j$ — целые неотрицательные числа, и $d_1 = \sum_{j=1}^{s} n_j$. Число $d_0$ можно представить в виде $d_0 = N_2 - N_1$, где $N_i \in B$. Пусть $c$ — наибольший из целочисленных коэффициентов при $n_j$, входящих в $N_2$. Для любого целого $m>0$ положим $m=kd_1+m_1$, где $0\leqslant m_1<d_1$. Тогда $md_0=kd_0\cdot d_1+m_1d_0\in B$, если $kd_0>m_1c$, что наверное будет выполнено, когда $k>\frac{d_1c}{d_0}$ или когда $m>\frac{d_1^2c}{d_0}+d_1$. ■

Рассмотрим апериодический процесс восстановления и докажем существование предела $G_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}G(n)$.

Лемма 5. *Пусть $\tau$ — случайная величина, принимающая значение $n$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ с вероятностью $p_n$, $\varphi(u)$ — характеристическая функция величины $\tau$. Если $d=1$, то $\varphi(u)\neq1$ при $|u|<2\pi$, $u\neq0$.*

*Доказательство.* Имеем

$$\varphi(u)=\mathsf{M}e^{iu\tau}=\sum_{-\infty}^{\infty}p_ne^{iun}.$$

Пусть $\varphi(u_0)=1$, $|u_0|<2\pi$, $u_0\neq0$. Имеем

$$0=1-\operatorname{Re}\varphi(u_0)=\sum_{-\infty}^{\infty}(1-\cos nu_0)p_n.$$

Поэтому $\cos nu_0=1$ для всех тех $n$, для которых $p_n>0$, или $nu_0=2\pi k$. Выберем последовательность целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$, для которых $p_{n_r}>0$ и наибольший общий делитель которых равен единице. Тогда $n_ru_0=2\pi k_r$ $(r=1, 2, \ldots, s)$. С другой стороны, уравнение $\sum\limits_{r=1}^{s}a_rn_r=1$ имеет решение в целых числах $a_r$. Следовательно,

$$u_0=\sum_{r=0}^{s}a_rn_ru_0=2\pi\sum_{r=1}^{s}a_rk_r=2\pi k_0,$$

где $k_0$ — целое число, что противоречит условию $|u_0|<2\pi$. ■

Лемма 6. *Если восстановление апериодично, то предел $G_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}G(n)$ существует.*

*Доказательство.* Положим

$$G(z, n)=\sum_{k=0}^{\infty}z^kp_n(k), \qquad n\geqslant0, \quad 0\leqslant z\leqslant1,$$

где $p_n(k)=\mathsf{P}\{\xi_k=n\}$, $\xi_k=\tau_1+\ldots+\tau_k$. Из теоремы Абеля о степенных рядах следует, что

$$G(n)=\lim_{z\uparrow1}G(z, n).$$

Так как характеристическая функция случайной величины $\xi_k$ равна $[\varphi(u)]^k$,

$$[\varphi(u)]^k = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(k) e^{inu},$$

где $\varphi(u) = \mathsf{M} e^{iu\tau_k}$, то

$$p_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inu} [\varphi(u)]^k \, du.$$

Поэтому

$$G(z, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inu} \, du}{1 - z\varphi(u)}, \qquad n \geqslant 0.$$

При $n < 0$ интеграл в правой части последней формулы равен нулю. Следовательно,

$$G(z, n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nu \, du}{1 - z\varphi(u)}.$$

Положим $h(z, u) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}(1 - z\varphi(u))^{-1}$. Так как $G(z, n)$ — вещественная функция, то

$$G(z, n) = \int_{-\pi}^{\pi} h(z, u) \cos nu \, du.$$

Ядро $h(z, u)$ $(z \in [0, 1],\ 0 < |u| < 2\pi)$ положительно и непрерывно в силу апериодичности восстановления и леммы 5. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$

$$G(n) = \lim_{z \uparrow 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z, u) \cos nu \, du + \int_{\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi} h(1, u) \cos nu \, du. \tag{8}$$

Полагая здесь $n = 0$, видим, что существует предел

$$h_\varepsilon = \lim_{z \uparrow 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z, u) \, du$$

и $h_\varepsilon \leqslant G(0)$. Так как $h_\varepsilon$ убывает при $\varepsilon \downarrow 0$, то предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = h_0$ также существует. Следовательно, существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{z \uparrow 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z, u) \cos nu \, du = h.$$

Возвращаясь к формуле (8), видим, что $h(1, u)$ является интегрируемой (в смысле Коши) функцией на отрезке $(-\pi, \pi)$ и

$$G(n) = h + \int_{-\pi}^{\pi} h(1, u) \cos nu\, du.$$

Так как $h(1, u)$ интегрируема, то по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h(1, u) \cos nu\, du = 0.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = h$ существует. ■

Теорема 2. *Если восстановление апериодично, то*

$$\lim_{n\to\infty} G(n) = \frac{1}{m}, \qquad m = \mathsf{M}\tau_k,$$

*причем если* $\mathsf{M}\tau_k = \infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = 0$.

*Доказательство.* Так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = h$ существует в силу предыдущей леммы, то, используя теорему Абеля о степенных рядах, получим

$$h = \lim_{z\uparrow 1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n [G(n) - G(n-1)]\right) =$$
$$= \lim_{z\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n (1-z) G(n) = \lim_{z\uparrow 1} (1-z) \Phi(z),$$

где $\Phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n G(n)$ — производящая функция последовательности $\{G(n), n = 0, 1, \ldots\}$. Из независимости и равнораспределенности величин $\tau_k$ следует, что $G(n)$ удовлетворяет уравнению

$$G(n) = \delta(n) + \sum_{k=1}^{n} G(n-k) p_k, \qquad n \geqslant 0 \tag{9}$$

($\delta(n) = 0$ при $n > 0$, $\delta(0) = 1$). Умножая это соотношение на $z^n$ и суммируя по всем $n \geqslant 0$, получим

$$\Phi(z) = 1 + F(z)\Phi(z), \qquad |z| < 1,$$

где $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n z^n$. Таким образом,

$$\Phi(z) = [1 - F(z)]^{-1}$$

и

$$h = \lim_{z\uparrow 1} \left[\frac{1 - F(z)}{1 - z}\right]^{-1}.$$

Если $m = \infty$, то для любого $N > 0$

$$\lim_{z \uparrow 1} \frac{1 - F(z)}{1 - z} \geqslant \lim_{z \uparrow 1} \sum_{n=1}^{N} p_n \frac{1 - z^n}{1 - z} = \sum_{n=1}^{N} p_n n,$$

откуда следует, что $h = 0$. Если же $m < \infty$, то, учитывая неравенство $\left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| < n$ при $|z| < 1$, получим

$$\lim_{z \uparrow 1} \frac{1 - F(z)}{1 - z} = \lim_{z \uparrow 1} \sum_{1}^{\infty} p_n \frac{1 - z^n}{1 - z} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n n = m. \blacksquare$$

Следствие. *Если восстановление имеет период d, то*

$$\lim_{n \to \infty} G(nd) = \frac{d}{m}, \qquad m = \mathbf{M}\tau_k. \tag{10}$$

Действительно, если данное восстановление периодично и $d$ — его период, то новое восстановление, в котором длительность восстановления $\tau'_n = \frac{\tau_n}{d}$, является апериодичным. Если $G'(n)$ — его функция восстановления, то $G'(n) = G(nd)$. С другой стороны, $\mathbf{M}\tau'_n = \frac{\mathbf{M}\tau_n}{d} = \frac{m}{d}$. Из доказанной теоремы теперь следует (10). $\blacksquare$

Рассмотрим функцию восстановления в нерешетчатом случае. Исследование будет основано на уравнении восстановления (4). Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — одинаково распределенные независимые случайные величины, $\zeta_n = f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрическая функция своих аргументов ($f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, 2, \ldots, n)$). Если $\zeta = \mathbf{P}.\lim \zeta_n$, то величина $\zeta$ не зависит от случая.*

Доказательство. Можно предположить, что $|f_n| \leqslant 1$ (если бы это было не так, то можно было бы заменить величины $\zeta$ и $\zeta_n$ величинами $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\zeta$, $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\zeta_n$). Тогда $\mathbf{M}|\zeta_{2n} - \zeta_n|^2 \to 0$. Но величина $\zeta_{2n} - \zeta_n$ имеет то же распределение, что и $\zeta_{2n} - \zeta'_n$, где $\zeta'_n = f_n(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n})$. Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}(\zeta_{2n} - \zeta'_n)^2 = 0$ и, как следствие, $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}(\zeta_n - \zeta'_n)^2 = 0$. Из независимости величин $\zeta_n$ и $\zeta'_n$ вытекает $\mathbf{M}(\zeta_n - \zeta'_n)^2 = (\mathbf{M}\zeta_n - \mathbf{M}\zeta'_n)^2 + \mathbf{D}\zeta_n + \mathbf{D}\zeta'_n \to 0$. Отсюда следует $\mathbf{D}\zeta = \lim \mathbf{D}\zeta_n = 0$. $\blacksquare$

Лемма 8. *Если функция $\theta(t)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет уравнению*

$$\theta(t)=\int_0^\infty \theta(t-s)\,dF(s), \tag{11}$$

*то* $\theta(t)\equiv\text{const}$.

*Доказательство.* Уравнение (11) можно записать в виде $\theta(t)=\mathsf{M}\theta(t-\tau_k)$. Пусть $\mathfrak{F}_n$ — $\sigma$-алгебра, порожденная случайными величинами $\tau_1,\ldots,\tau_n$. Тогда $\mathsf{M}\{\theta(t-\xi_n)\,|\,\mathfrak{F}_{n-1}\}=$ $=\mathsf{M}\{\theta(t-\xi_{n-1}-\tau_n)\,|\,\mathfrak{F}_{n-1}\}=\mathsf{M}\theta(t-y-\tau_n)\,|_{y=\xi_{n-1}}=\theta(t-\xi_{n-1})$. Следовательно, последовательность $\theta(t-\xi_n)$ является ограниченным мартингалом. Поэтому с вероятностью 1 и в $\mathscr{L}_1$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\theta(t-\xi_n)=\hat\theta(t)$. Так как $\hat\theta(t)$ является пределом симметрических функций от одинаково распределенных случайных величин, то $\hat\theta(t)$ не зависит от случая (лемма 7). Поэтому $\hat\theta(t)=\lim\mathsf{M}\theta(t-\xi_n)=\theta(t)$. Итак, $\theta(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\theta(t-\xi_n)$ для любого $t$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\theta(t-\xi_n)=\lim\theta(t-\tau_1-(\tau_2+\ldots+\tau_n))=$ $=\theta(t-\tau_1)$, то $\theta(t)=\theta(t-\tau_1)$ с вероятностью 1. Из непрерывности функции $\theta(t)$ следует, что $\mathsf{P}\left(\sup\limits_t|\theta(t-\xi_1)-\theta(t)|>0\right)=$ $=0$. Таким образом, можно найти такое множество $A$ ($A\subset(-\infty,\infty)$), что $\theta(t)=\theta(t-x)$ для всех $t\in(-\infty,\infty)$ и всех $x\in A$. Так как распределение величины $\tau_1$ нерешетчато, то в $A$ содержатся либо две несоизмеримые точки, либо пары точек со сколь угодно малым расстоянием. Следовательно, непрерывная функция $\theta(t)$ либо имеет два несоизмеримых периода, либо обладает сколь угодно малыми периодами. В обоих случаях оно константа. ■

Следующая теорема носит название *основной теоремы теории восстановления.*

Теорема 3. *Если распределение величин $\tau_k$ нерешетчато, то для любого $c>0$*

$$\lim_{t\to\infty}[H(t+c)-H(t)]=c/m,\quad m=\mathsf{M}\tau_k$$

*(при $m=\infty$ полагаем $c/m=0$).*

*Доказательство.* Пусть $z(t)$ — непрерывная функция, равная 0 вне некоторого отрезка, и $Z(t)=H*z(t)$. Функция $Z(t)$ ограничена. Действительно, если $z(t)=0$ при $|t|\geqslant A$ и $|z(t)|\leqslant C$, то $|Z(t)|\leqslant C[H(t+A)-H(t-A)]$. С другой стороны, в силу полуаддитивности функции $H(t)$ $H(t+A)-$ $-H(t-A)\leqslant H(2A)$. Очевидно, что функция $Z(t)$ непрерывна. Таким образом, она является единственным решением уравнения (4). Рассмотрим семейство $\{H(s+t)-H(s),\ s\geqslant 0\}$ монотонно неубывающих функций аргумента $t$. Из равномерной ограниченности этого семейства $(H(s+t)-H(s)\leqslant H(t))$ на произвольных отрезках $t\in[-A,\ A]$ вытекает, что из любой последовательности значений $s$ можно выбрать подпоследовательность $s_k\to\infty$ такую, что $H(s_k+t)-H(s_k)$ сходятся на всюду плотном множестве значений $t$ к некоторому пределу $v(t)$. Но тогда

$$Z(s_k+t)=\int_{-\infty}^{\infty} z(t-s)\,dH(s_k+s)\to\int_{-\infty}^{\infty} z(t-s)\,dv(s), \tag{12}$$

так как $z(t)$ отлична от нуля только на конечном интервале.

Положим $\theta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} z(t-s)\,dv(s)$. Перейдем в равенстве

$$Z(s_k+t)=z(s_k+t)+\int_{0}^{\infty} Z(s_k+t-s)\,dF(s)$$

к пределу при $s_k\to\infty$. Учитывая, что $\lim z(s_k+t)=0$, получим

$$\theta(t)=\int_{0}^{\infty}\theta(t-s)\,dF(s).$$

В силу леммы 8 $\theta(t)=\mathrm{const}$. Таким образом, для любой непрерывной функции $z(t)$ $(z(t)=0$ при $|t|>A$ для некоторого $A)$ функция $\theta(t)=\int_{0}^{t} z(t-s)\,dv(s)$ не зависит от $t$. С помощью предельного перехода получаем, что $v(t_2)-v(t_1)$ зависит только от разности $t_2-t_1$. Положим $v(t+s)-v(s)=h(t)$. Тогда $h(t_1+t_2)=v(t_1+t_2+s)-v(t_1+s)+v(t_1+s)-v(s)=h(t_2)+h(t_1)$. Функция $h(t)$ монотонно не убывает, поэтому решения уравнения $h(t_1+t_2)=h(t_2)+h(t_1)$ $(t_1,\ t_2>0)$ имеют вид $h(t)=\alpha t$. Мы получили, что $v(t+s)-v(t)=\alpha s$. Таким образом,

$$Z(s_k+t)\to\alpha\int_{-\infty}^{\infty} z(t-s)\,ds.$$

При этом константа $\alpha$ не зависит от выбора последовательности $s_k$, ни от функции $z(t)$. Так как в последнем соотношении $s_k$ — подпоследовательность любой последовательности чисел $s'_n\to\infty$, то мы видим, что предел $Z(t)$ при $t\to\infty$ существует и

$$\lim_{t\to\infty} Z(t)=\alpha\int_{-\infty}^{\infty} z(s)\,ds. \tag{13}$$

С другой стороны, из предыдущих соображений вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty}[H(s+t)-H(t)]=\alpha s \tag{14}$$

для счетного всюду плотного множества значений $s$. Из непрерывности правой части равенства (14) следует, что равенство (14) выполняется для всех значений $s$. Напомним, что (13) доказано для всех непрерывных функций $z(t)$, отличных от 0 на конечном отрезке, а равенство (14) можно рассматривать как частный случай (13) при $z(s)$, равном индикатору полуинтервала $(t, t+s]$. Отсюда вытекает, что равенство (13) имеет место, например, для функции $z(t)=1-F(t)$ при $t\geqslant 0$, $z(t)=0$ при $t<0$, если

$$m=\int_0^\infty (1-F(t))\,dt=\mathsf{M}\tau_1<\infty.$$

В этом случае $Z(t)=H*z(t)=\int_0^t (1-F(t-s))\,dH(s)=1$ и равенство (13) дает $1=\alpha m$, $\alpha=1/m$. Тем самым, для случая $m<\infty$ теорема доказана. Пусть теперь $m=\infty$. Тогда

$$1=\int (1-F(t-s))\,dH(s)\geqslant\lim\int_0^c [1-F(s)]\,dH(t-s).$$

При $t\to\infty$ получим для любого $c>0$

$$1\geqslant\alpha\int_0^c (1-F(s))\,ds.$$

Но интеграл справа стремится к $\infty$ при $c\to\infty$. Следовательно, $\alpha=0$. ■

Замечание. При доказательстве теоремы формула (13) была применена к функции $z(t)=1-F(t)$, $t\geqslant 0$, в то время как непосредственно она была доказана для непрерывных функций, равных 0 вне некоторого компакта. Введем следующее условие.

Пусть $h>0$ и $c_{*n}$, $c_n^*$ обозначают минимум и максимум функции $z(t)$ на интервале $(n-1)h\leqslant x\leqslant nh$.

Условие А: ряды $\sigma_*=h\sum c_{*n}$, $\sigma^*=h\sum c_n^*$ сходятся абсолютно и $\sigma^*-\sigma_*\to 0$ при $h\to 0$.

Нетрудно проверить, что если функция $z(t)$ удовлетворяет условию $A$, то к ней применима формула (13). Покажем это. Пусть сначала функция $z(t)$ ступенчатая, $z(t)=\sum a_n z_n(t)$, $z_n(t)=1$ при $h(n-1)\leqslant t<hn$ и $z_n(t)=0$ при других зна-

чениях $t$, $Z_n = H * z_n$. В силу (14) $Z_n(t) = H(t-(n-1)h) - H(t-nh) \to \alpha h$, причем $Z_n(t) \leqslant M_h$ для всех $n$, где $M_h$ — некоторая постоянная. Пусть $a_n \geqslant 0$, $\sum a_n < \infty$. Тогда

$$(Z = H * z) \quad \sum_1^n a_k Z_k(t) \leqslant Z(t) \leqslant \sum_1^n a_k Z_k(t) + M_h \sum_{n+1}^{\infty} a_k.$$

Переходя здесь к пределу при $t \to \infty$, получим

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \alpha h \sum_1^{\infty} a_k = \alpha \int_0^{\infty} z(x)\,dx.$$

Пусть теперь $z(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию А. Применяя полученный выше результат к ступенчатым функциям $\sum c_{*n} z_n(t)$ и $\sum \overset{*}{c}_n z_n(t)$, получим, что все предельные точки $Z(t)$ (при $t \to \infty$) лежат между $\alpha\sigma_*$ и $\alpha\sigma^*$. Поэтому (13) верно для любых $z(t)$, удовлетворяющих условию А. Очевидно, что $z(t) = 1 - F(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условию А, если $m = \mathsf{M}\tau_1 < \infty$. ■

Введем теперь еще две важные характеристики процесса восстановления. Если $\xi_{k-1} \leqslant t < \xi_k$, то положим

$$\gamma_t^+ = \xi_k - t, \quad \gamma_t^- = t - \xi_{k-1}.$$

Процессы $\gamma_t^+$, $\gamma_t^-$ кусочно линейны. Процесс $\gamma_t^+$ убывает на каждом промежутке времени $[\xi_{k-1}, \xi_k)$ от $\tau_k$ до 0, а $\gamma_t^-$ — возрастает от 0 до $\tau_k$. Величина $\gamma_t^+$ показывает, сколько еще времени будет работать прибор, если он работает в момент времени $t$, а $\gamma_t^-$ — сколько он уже проработал. В некоторых вопросах представляет интерес величина $\gamma_t = \gamma_t^+ + \gamma_t^-$, равная общей продолжительности работы прибора, работающего в момент времени $t$. Так как величина $\gamma_t$ совпадает с одной из величин $\tau_k$, то может показаться, что распределение величины $\gamma_t$ совпадает с распределением величины $\tau_k$. На самом деле это не так. Дело в том, что $\gamma_t$ совпадает с величиной $\tau_k$, взятой в случайный момент времени $k = \nu(t) + 1$, $\gamma(t) = \tau_{\nu(t)+1}$, где $\nu(t)$ — число восстановлений в момент времени $t$. Поэтому распределение $\gamma_t$ может не совпадать с распределением $\tau_k$. Это обстоятельство известно под названием *парадокса теории восстановления.*

Найдем предельное распределение величин $\gamma_t$, $\gamma_t^+$ и $\gamma_t^-$. Введем функцию

$$V_t(x) = \mathsf{P}\{\gamma_t^+ > x\}.$$

Событие $\{\gamma_t^- > y\} \cap \{\gamma_t^+ > x\}$ происходит тогда и только тогда, когда в промежутке времени $[t-y, t+x]$ нет ни одного восстановления, т. е. когда $\gamma_{t-y}^{+} > x+y$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\gamma_t^- > y,\ \gamma_t^+ > x\} = V_{t-y}(x+y).$$

Таким образом, совместное распределение величин $\gamma_t^+$ и $\gamma_t^-$ (а следовательно, и распределение величин $\gamma_t^+ + \gamma_t^-$, $\gamma_t^-$) выражается через функцию $V_t(x)$. Заметим, что

$$\{\gamma_t^+ > x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\xi_{k-1} \leqslant t\} \cap \{\xi_k > t+x\}.$$

Следовательно,

$$V_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_k \leqslant t,\ \xi_{k+1} > t+x).$$

При этом

$$\mathsf{P}(\xi_k \leqslant t,\ \xi_{k+1} > t+x) =$$
$$= \mathsf{M}\chi(\xi_k \leqslant t)\,\mathsf{P}\{\tau_{k+1} > t+x-\xi_k \mid \xi_k\} = \int_0^t [1-F(t+x-s)]\,dF_k(s)$$

где $F_k(s)$ — функция распределения величины $\xi_k$, $F_k(s) = \mathsf{P}(\xi_k \leqslant s)$, $k \geqslant 1$ и $F_0(s)$ — распределение, сосредоточенное в точке $s=0$. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} F_k(s) = H(s)$, то

$$V_t(x) = \int_0^t (1-F(t+x-s))\,dH(s). \tag{15}$$

Теорема 4. *Если величины $\tau_k$ имеют нерешетчатое распределение и $\mathsf{M}\tau_k < \infty$, то*

$$\lim_{t\to\infty} V_t(x) = \frac{1}{\mathsf{M}\tau_1} \int_0^{\infty} [1-F(s+x)]\,ds. \tag{16}$$

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из соотношения (13), если положить $z(t) = 1-F(t+x)$, $t \geqslant 0$ и заметить, что так как $z(t)$ удовлетворяет условию A замечания к теореме 3, то формула (13) к ней применима. ■

Аналогично в решетчатом случае получим следующее утверждение.

Теорема 5. *Если $\tau_k$ имеют решетчатое распределение,*

$$v_t(k) = \mathsf{P}(\gamma_t^+ = k), \qquad p(k) = \mathsf{P}(\tau_1 = k),$$

*то*

$$\lim_{t\to\infty} v_t(k) = \frac{1}{\mathsf{M}\tau_1} \sum_{j=0}^{\infty} p(k+j). \tag{17}$$

Рассмотрим теперь совместное распределение величин $\gamma_t^-$ и $\gamma_t^+$. Имеем

$$\{\gamma_t^- = j\} \cap \{\gamma_t^+ = k\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\xi_n = t - j\} \cap \{\xi_{n+1} = t + k\} = \\ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\xi_n = t - j\} \cap \{\tau_{n+1} = k + j\}.$$

Поэтому $\mathsf{P}\{\gamma_t^- = j,\ \gamma_t^+ = k\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{t-j}(n)\, p(k+j)$. На основании теоремы 2 получаем

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\gamma_t^- = j,\ \gamma_t^+ = k\} = \frac{1}{\mathsf{M}\tau_1} p(k+j).$$

Отсюда также следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\gamma_t = l\} = \frac{lp(l)}{\mathsf{M}\tau_1}. \tag{18}$$

В формуле (18) отражается парадокс теории восстановления: вообще говоря, $\mathsf{P}(\gamma_t = l) \neq p(l)$.

## § 5. Цепи Маркова

Общее понятие процесса Маркова в широком смысле было введено в § 4 гл. I. В настоящем параграфе рассматриваются цепи Маркова — процессы Маркова с дискретным временем. Речь идет о стохастической системе, состояния которой описываются точками некоторого измеримого пространства $\{X, \mathfrak{B}\}$, называемого *фазовым пространством* системы. Система может менять свои состояния в момент времени $t = 1, 2, \ldots$ Вероятностью перехода $\mathsf{P}^{(m,n)}(x, B)$ называют условную вероятность системе, находящейся в момент времени $m$ в состоянии $x \in X$, оказаться в момент времени $n > m$ в одном из состояний множества $B$, $B \in \mathfrak{B}$. Предполагается, что $\mathsf{P}^{(m,n)}(x, B)$ при фиксированном $x$ является мерой на $\mathfrak{B}$, $\mathsf{P}^{(m,n)}(x, X) = 1$, а при фиксированном $B$ — $\mathfrak{B}$-измеримой функцией от $x$. Основное предположение о характере теоретико-вероятностной эволюции рассматриваемой системы — это отсутствие последействия. Формально это выражается в требовании, чтобы вероятность перехода удовлетворяла уравнению Колмогорова — Чепмена:

$$\mathsf{P}^{(l,n)}(x, B) = \int_X \mathsf{P}^{(m,n)}(y, B)\, \mathsf{P}^{(l,m)}(x, dy), \qquad l < m < n,$$

для всех $0 < l < m < n$, $x \in X$, $B \in \mathfrak{B}$.

В случае дискретного времени уравнение Колмогорова — Чепмена показывает, что вероятности перехода $\mathsf{P}^{(m,n)}(x, B)$

индуктивно определяются через вероятности перехода за один шаг $\mathsf{P}_n(x, B) \underset{\text{Def}}{=} \mathsf{P}^{(n, n+1)}(x, B)$. При этом

$$\mathsf{P}^{(m, n+1)}(x, B) = \int_X \mathsf{P}_n(y, B)\,\mathsf{P}^{(m, n)}(x, dy).$$

Покажем, что для любого измеримого пространства $\{X, \mathfrak{B}\}$, нормированной меры $m$ на $\mathfrak{B}$ и последовательности стохастических ядер $\mathsf{P}_n(x, B)$, $n = 0, 1, \ldots$, можно построить цепь Маркова, для которой вероятности перехода за один шаг равны $\mathsf{P}_n(x, B)$, а начальное распределение состояния цепи задается мерой $m$.

Для этого рассмотрим задачу о построении с помощью данных стохастических ядер меры в произведении пространств.

Пусть $K$ — некоторый класс действительных функций. Напомним, что $K$ называется *конусом*, если одновременно с парой функций $f$ и $g$ из $K$ ему принадлежат и все функции вида $af + bg$, где $a$ и $b$ — неотрицательные числа. Класс $K$ называют *монотонным*, если из того, что $f_n \in K$, $f_n \leqslant f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, вытекает $\lim f_n \in K$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полукольцо множеств из $X$, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{M}$, $K$ — некоторый класс функций, определенных на $X$, обладающий следующими свойствами:*

а) *он является конусом и монотонным классом*;

б) *из $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$ вытекает $f_2 - f_1 \in K$*;

в) $1 \in K$;

г) *он содержит индикаторы множеств из $\mathfrak{M}$.*

*Тогда $K$ содержит все неотрицательные $\mathfrak{A}$-измеримые функции.*

*Доказательство.* Пусть $\mathscr{L}$ обозначает класс всех подмножеств $X$, индикаторы которых входят в $K$. Тогда: а) $X \in \mathscr{L}$; б) если $A \in \mathscr{L}$, $B \in \mathscr{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathscr{L}$ и $X \setminus A \in \mathscr{L}$; в) если $A \in \mathscr{L}$ и $B \in \mathscr{L}$, то $A \cap B \in \mathscr{L}$ и $A \cup B \in \mathscr{L}$. Таким образом, $\mathscr{L}$ является алгеброй множеств. Из монотонности класса $K$ вытекает, что $\mathscr{L}$ — σ-алгебра. Итак, $K$ содержит индикаторы всех $\mathfrak{A}$-измеримых множеств. Поэтому $K$ содержит все простые $\mathfrak{A}$-измеримые функции и пределы монотонно неубывающих последовательностей простых функций, т. е. все неотрицательные $\mathfrak{A}$-измеримые функции. ■

Лемма 2. *Пусть $f(x, y)$ — неотрицательная $\sigma\{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}$-измеримая функция и $\mathsf{P}(\cdot, \cdot)$ — стохастическое ядро на $\{X, \mathfrak{B}\}$. Тогда функция*

$$g(x) = \int_X f(x, y)\,\mathsf{P}(x, dy)$$

*$\mathfrak{A}$-измерима.*

*Доказательство.* При фиксированном $x$ функция $f(x, \cdot)$ $\mathfrak{B}$-измерима, так что интеграл в правой части равенства имеет смысл. Класс $K$ неотрицательных функций $f(x, \cdot)$, для которых лемма верна, является конусом и, в силу теоремы Лебега, монотонным. Кроме того, $K$ содержит разность двух своих элементов и $f(x, y) \equiv 1 \in K$. Так как он содержит индикаторы множества вида $A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, то он содержит все неотрицательные $\sigma\{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}$-измеримые функции. ■

Следующие предположения можно рассматривать как обобщение известной теоремы Фубини.

Теорема 1. *Пусть $\{X, \mathfrak{A}\}$, $\{Y, \mathfrak{B}\}$, $\{Z, \mathfrak{C}\}$ — измеримые пространства, $Q_1(x, B)$, $Q_2(y, C)$ — стохастические ядра на $\{X, \mathfrak{B}\}$, $\{Y, \mathfrak{C}\}$ соответственно. Существует, и притом единственное, стохастическое ядро $Q_3(x, D)$ на $\{X, \sigma\{\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}\}\}$ такое, что*

$$Q_3(x, B \times C) = \int_B Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C). \tag{1}$$

*При этом для произвольной неотрицательной $\sigma\{\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}\}$-измеримой функции $f(y, z)$ имеем*

$$\int_{Y \times Z} f(y, z)\, Q_3(x, dy \times dz) = \int_Y \left( \int_Z f(y, z)\, Q_2(y, dz) \right) Q_1(x, dy). \tag{2}$$

Для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что формула (1) определяет на полукольце прямоугольников в $Y \times Z$ полуаддитивную предмеру. Пусть $D_1 = B_1 \times C_1$, $D_2 = B_2 \times C_2$ и $D_2 \subset D_1$. Тогда $B_2 \subset B_1$, $C_2 \subset C_1$ и $D_1 = D_2 \cup D' \cup D''$, где $D' = B_2 \times (C_1 \setminus C_2)$, $D'' = (B_1 \setminus B_2) \times C_1$.

Множества $D_2$, $D'$, $D''$ попарно без общих точек. Если применить формулу (1) последовательно к множествам $D_2$, $D'$ и $D''$, то получим

$$Q_3(x, D_2) + Q_3(x, D') + Q_3(x, D'') =$$
$$= \int_{B_1} Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C_2) + \int_{B_2} Q_1(x, dy)\, Q_2(y_1, C_1 \setminus C_2) +$$
$$+ \int_{B_1 \setminus B_2} Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C) = \int_{B_1} Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C) = Q_3(y, D_1).$$

Таким образом, функция $Q_3(x, D)$ аддитивна на рассматриваемых специальных разбиениях множества $D$. В частности, если $D_3 = D_1 \cup D_2$, где $D_i$ — прямоугольники и $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$Q_3(x, D_1) + Q_3(x, D_2) = Q_3(x, D_3) \text{ и } Q_3(x, Y \times Z) = 1.$$

Аддитивность функции $Q_3(x, \cdot)$ на полукольце всех прямоугольников в общем случае нетрудно получить по индукции.

Пусть $D=\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$, где $D_k$ — прямоугольники попарно без общих точек. Тогда $D\setminus D_n=D'\cup D''=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} D_k$, где $D'$ и $D''$ определяются только что использованными формулами. Как уже доказано,

$$Q_3(x,\ D)=Q_3(x,\ D_n)+Q_3(x,\ D')+Q_3(x,\ D'').$$

Используя предположение индукции, получаем

$$Q_3(x,\ D')=Q_3\left(x,\ D'\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} D_k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n-1} Q_3(x,\ D'\cap D_k)$$

и аналогичное выражение для $Q_3(x,\ D'')$. Таким образом,

$$Q_3(x,\ D)=Q_3(x,\ D_n)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[Q_3(x,\ D'\cap D_k)+Q_3(x,\ D''\cap D_k)\right].$$

Так как $D'$ и $D''$ — прямоугольники без общих точек, в сумме покрывающие $D_k$, то $D'\cap D_k$ и $D''\cap D_k$ — также прямоугольники и $(D'\cap D_k)\cup(D''\cap D_k)=D_k$. Поэтому $Q_3(x, D'\cap D_k)+$ $+Q_3(x,\ D''\cap D_k)=Q_3(x,\ D_k)$ и, следовательно,

$$Q_3(x,\ D)=\sum_{k=1}^{n} Q_3(x,\ D_k).$$

Таким образом, аддитивность $Q_3(x,\ \cdot)$ доказана. Докажем теперь свойство полуаддитивности для $Q_3(x,\ \cdot)$. Пусть $D_0\subseteq\bigcup\limits_{1}^{\infty} D_k$, $D_k=B_k\times C_k$, $k=0,\ 1,\ \ldots$ Тогда $\chi_{D_0}(y,\ z)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\chi_{D_k}(y,\ z)$. Так как $\chi_{D_k}(y,\ z)=\chi_{B_k}(y)\chi_{C_k}(z)$, то

$$\chi_{B_0}(y)\chi_{C_0}(z)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{B_k}(y)\chi_{C_k}(z).$$

Интегрируя обе части этого неравенства по мере $Q_2(y,\ \cdot)$ по пространству $Z$, получим

$$\chi_{B_0}(y)\,Q_2(y,\ C_0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{B_k}(y)\,Q_2(y,\ C_k).$$

Еще раз интегрируя полученное соотношение по мере $Q_1(x,\ \cdot)$, придем к неравенству

$$Q_3(x,\ D_0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} Q_3(x,\ D_k),$$

доказывающему, что $Q_3(x, D_k)$ счетно полуаддитивна. Отсюда вытекает, что $Q_3(x, B\times C)$ допускает единственное продолжение на $\sigma\{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}\}$. Чтобы доказать формулу (2), заметим прежде всего, что в силу леммы 2 внутренний интеграл в правой части равенства (2) является $\mathfrak{B}$-измеримой функцией, так что двукратный интеграл в правой части формулы (2) имеет смысл. Далее, класс функций $f$ ($f\geqslant 0$), для которых формула (2) верна, удовлетворяет условиям а) — в) леммы 1. Кроме того, в силу формулы (1) он содержит индикаторы прямоугольников. Поэтому он содержит все $\sigma\{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}\}$-измеримые неотрицательные функции. ■

Точно так же доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть $\{X, \mathfrak{A}\}$, $\{Y_1, \mathfrak{B}_1\}$, ..., $\{Y_s, \mathfrak{B}_s\}$ — измеримые пространства и $Q_1(x, B^{(1)})$, $Q_2(y_1, B^{(2)})$, ..., $Q_s(y_{s-1}, B^{(s)})$ — стохастические ядра, $y_k\in Y_k$, $B^{(k)}\in\mathfrak{B}_k$ ($k=1, \ldots, s$). Существует единственное стохастическое ядро $Q^{(1,s)}(x, D)$ на $\{X, \mathfrak{D}\}$, где $\mathfrak{D}=\sigma\{\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2\times\ldots\times\mathfrak{B}_s\}$, такое, что*

$$Q^{(1,s)}(x, B^{(1)}\times\ldots\times B^{(s)})=\int\limits_{B^{(1)}}Q_1(x, dy_1)\int\limits_{B^{(2)}}Q_2(y_1, dy_2)\ldots$$

$$\ldots\int\limits_{B^{(s-1)}}Q_s(y_{s-1}, B^{(s)})\,Q_{s-1}(y_{s-2}, dy_{s-1}). \qquad (3)$$

*При этом для произвольной неотрицательной $\mathfrak{D}$-измеримой функции $f(y_1, y_2, \ldots, y_s)$*

$$\int\limits_{Y_1\times\ldots\times Y_s}f(y_1, \ldots, y_s)\,Q^{(1,s)}(x, dy_1\times\ldots\times dy_s)=$$

$$=\int\limits_{Y_1}Q_1(x, dy_1)\ldots\int\limits_{Y_s}f(y_1, \ldots, y_s)\,Q_s(y_{s-1}, dy_s). \qquad (4)$$

Замечание. Формулы (2) и (4) доказаны для неотрицательных функций. Но они, разумеется, верны для произвольных $f$, если только одна из функций $f^+$ или $f^-$ интегрируема. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и в других теоремах, в которых ради краткости упоминаются только неотрицательные функции.

Ядро $Q^{(1,s)}$ называют *прямым произведением* ядер $Q_1, Q_2, \ldots$ $\ldots, Q_s$ и пишут $Q^{(1,s)}=Q_1\times Q_2\times\ldots\times Q_s$.

Если в (3) положить $B^{(1)}=Y_1, \ldots, B^{(s-1)}=Y_{s-1}$, то получаем новое вероятностное ядро в $\{X, \mathfrak{B}_s\}$:

$$Q^{*(1,s)}(x, B^{(s)})=Q^{(1,s)}(x, Y_1\times Y_2\times\ldots\times Y_{s-1}\times B^{(s)}). \qquad (5)$$

Его называют *сверткой* ядер $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ и пишут

$$Q^{*(1, s)} = Q_1 * Q_2 * \ldots * Q_s.$$

Применим формулу (4) к функции $f(y_1, y_2, \ldots, y_s) = f(y_s) = \chi_{B^{(s)}}(y^{(s)})$ и сопоставим ее с (5). Получим

$$\int\limits_{Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_s} f(y_s)\, Q^{(1, s)}(x, dy_1 \times dy_2 \times \ldots \times dy_s) = \int\limits_{Y_s} f(y_s)\, Q^{*(1, s)}(x, dy_s). \tag{6}$$

Так как класс неотрицательных функций, для которых формула (6) имеет место, удовлетворяет условиям леммы 1, то (6) имеет место для произвольной неотрицательной $\mathfrak{B}_s$-измеримой функции. Отсюда в свою очередь вытекает, что для произвольной неотрицательной $\sigma\{\mathfrak{B}_{m_1} \times \mathfrak{B}_{m_2} \times \ldots \times \mathfrak{B}_{m_r} \times \mathfrak{B}_s\}$-измеримой функции $r+1$ переменных $f(y_{m_1}, y_{m_2}, \ldots, y_{m_r}, y_s)$ $(y_m \in Y_m,\ 0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_r < s)$ имеем

$$\int\limits_{Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_{s-1} \times Y_s} f(y_{m_1}, y_{m_2}, \ldots, y_{m_r}, y_s) \times \\ \times Q^{(1, s)}(x, dy_1 \times dy_2 \times \ldots \times dy_s) = \\ = \int\limits_{Y_{m_1}} Q^{*(1, m_1)}(x, dy_{m_1}) \int\limits_{Y_{m_2}} Q^{*(m_1+1, m_2)}(y_{m_1}, dy_{m_2}) \ldots \\ \ldots \int\limits_{Y_s} f(y_{m_1}, \ldots, y_{m_r}, y_s)\, Q^{*(m_r+1, s)}(y_{m_r}, dy_s). \tag{7}$$

Частным случаем формулы (7) является соотношение

$$Q^{*(1, s)} = Q^{*(1, m_1)} * Q^{*(m_1+1, m_2)} * \ldots * Q^{*(m_r+1, s)},$$

означающее, что операция свертки ядер является ассоциативной.

Рассмотрим бесконечные произведения стохастических ядер. Пусть $\{X_n, \mathfrak{B}_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — бесконечная последовательность измеримых пространств и $P_n(\cdot, \cdot)$, $n = 0, 1, \ldots,$ — последовательность стохастических ядер, определенных на $\{X_n, \mathfrak{B}_{n+1}\}$. В соответствии с теоремой 2 построим прямые произведения ядер

$$P^{(0, n)} = P_0 \times P_1 \times \ldots \times P_n,$$
$$P^{(0, n)} = P^{(0, n)}(x_0, D),\ x_0 \in X_0,\ D \in \mathfrak{C}_{n+1},$$

где $\mathfrak{C}_n$ — минимальная σ-алгебра, содержащая прямоугольники $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ $(B_k \in \mathfrak{B}_k)$, $\mathfrak{C}_n = \sigma\{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n\}$.

Введем пространство $X^\infty = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, элементами которого служат бесконечные последовательности $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in X_n$. Через $\mathfrak{C}^0$ обозначим алгебру цилиндрических множеств $X^\infty$. Определим на $\mathfrak{C}^0$ семейство функций множеств $\mathsf{P}^{(x_0)}$, зависящих от параметра $x_0$ $(x_0 \in X_0)$ следующим образом: если $C$ — цилиндрическое множество,

$$C = \{\omega\colon (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in D\}, \qquad D \in \mathfrak{C}_n,$$

то полагаем

$$\mathsf{P}^{(x_0)}(C) = \mathsf{P}^{(0,\, n)}(x_0, D).$$

Это определение однозначно. Действительно, если

$$C = \{\omega\colon (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in D'\}, \qquad D' \in \mathfrak{C}_m$$

и, например, $m > n$, то $D' = D \times X_{n+1} \times \ldots \times X_m$ и

$$\mathsf{P}^{(0,\, m)}(x_0, D') = \int\limits_{X_1 \times \ldots \times X_m} \!\!\ldots\!\int \mathsf{P}_0(x_0, dx_1)\, \mathsf{P}_1(x_1, dx_2) \ldots$$
$$\ldots \mathsf{P}_{m-1}(x_{m-1}, dx_m)\, \chi_{D'}(x_1, \ldots, x_m),$$

где $\chi_{D'}(x_1, \ldots, x_m)$ — индикатор $D'$. Учитывая, что $\chi_{D'}(x_1, \ldots, x_m) = \chi_D(x_1, \ldots, x_n)$ и что $\mathsf{P}_{k-1}(x, X_k) = 1$, из последнего выражения получаем

$$\mathsf{P}^{(0,\, m)}(x_0, D') = \mathsf{P}^{(0,\, n)}(x_0, D).$$

Аддитивность функции $\mathsf{P}^{(x_0)}$ на $\mathfrak{C}^0$ очевидна.

Теорема 3. *На $\{X^\infty, \mathfrak{C}\}$, где $\mathfrak{C}$ — $\sigma$-алгебра, порождаемая цилиндрическими множествами пространства $X^\infty$, существует единственное семейство мер $\mathsf{P}^{(x_0)}$ такое, что*

$$\mathsf{P}^{(x_0)}\{\omega\colon x_k \in B_k,\ k = 1, \ldots, n\} = \int\limits_{B_1} \mathsf{P}_0(x_0, dx_1) \int\limits_{B_2} \mathsf{P}_1(x_1, dx_2) \ldots$$
$$\ldots \int\limits_{B_{n-1}} \mathsf{P}_{n-2}(x_{n-2}, dx_{n-1})\, \mathsf{P}_{n-1}(x_{n-1}, B_n).$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что введенная на $\mathfrak{C}^0$ мера $\mathsf{P}^{(x_0)}$ удовлетворяет условию непрерывности: для любой монотонно убывающей последовательности цилиндрических множеств $C_n$, для которой $\bigcap C_n = \varnothing$, имеем $\mathsf{P}^{(x_0)}(C_n) \to 0$. Допустим обратное: $\mathsf{P}^{(x_0)}(C_n) \geqslant \varepsilon$ при некотором $x_0$; основания цилиндрических множеств $C_n$ обозначим через $D_n$, индикатор $D_n$ — через $\chi(D_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{m_n}) = \chi(D_n)$, и пусть $D_n$ расположено над координатами $(1, 2, \ldots, m_n)$. Определим последовательность множеств из $\mathfrak{B}$

$$B_n^{(1)} = \left\{ x_1 \colon \int\limits_{X^{(2,\, m_n)}} \chi(D_n;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m_n}) \times \right.$$

$$\left. \times \mathsf{P}^{(1,\, m_n)}(x_1,\ dx_2 \times \ldots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

где $X^{(s,\, m)}$ обозначает произведение пространств $X_s \times X_{s+1} \times \ldots$ $\ldots \times X_m$.

Из того, что $C_n$ убывают, следует, что $B_n^{(1)}$ также монотонно убывают. Далее, если $\chi(B_n^{(1)})$ — индикатор $B_n^{(1)}$ и $\bar{\chi}(B_n^{(1)}) = 1 - \chi(B_n^{(1)})$, то

$$\varepsilon \leqslant \mathsf{P}^{(x_0)}(C_n) = \int\limits_{X_1} \int\limits_{X^{(2,\, m_n)}} (\chi(B_n^{(1)}) + \bar{\chi}(B_n^{(1)})) \times$$

$$\times \chi(D_n) P_0(x_0,\ dx_1) \mathsf{P}^{(1,\, m_n)}(x_1,\ dx_2 \times \ldots \times dx_{m_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}_0(x_0,\ B_n^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{X_1} \bar{\chi}(B_n^{(1)}) \mathsf{P}_0(x_0,\ dx_1) \leqslant \mathsf{P}_0(x_0,\ B_n^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\mathsf{P}_0(x_0,\ B_n^{(1)}) > \varepsilon/2$. Так как $\mathsf{P}_0(x_0,\ \cdot)$ является мерой, то отсюда следует, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \neq \varnothing$. Пусть $\bar{x}_1 \in B_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\int\limits_{X^{(2,\, m_n)}} \chi(D_n;\ \bar{x}_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m_n}) \mathsf{P}^{(1,\, m_n)}(\bar{x}_1,\ dx_2 \times \ldots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Приведенные только что рассуждения можно применить к ядру $\mathsf{P}^{(2,\, m_n)}(x_2,\ dx_3 \times \ldots \times dx_{m_n})$ и мере $\mathsf{P}_1(\bar{x}_1,\ dx_2)$. Тогда будет доказано существование такой точки $\bar{x}_2$, что для любого $D_n$

$$\int\limits_{X^{(3,\, m_n)}} \chi(D_n;\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{m_n}) \times$$

$$\times \mathsf{P}^{(2,\, m_n)}(\bar{x}_2,\ dx_3 \times \ldots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, строим последовательность $(\bar{x}_1, \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n,\ \ldots)$, в которой $\bar{x}_n \in X_n$ и при любом $s$, $D_n$

$$\int\limits_{X^{(s+1,\, m_n)}} \chi(D_n;\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_s,\ x_{s+1},\ \ldots,\ x_{m_n}) \times$$

$$\times \mathsf{P}^{(s,\, m_n)}(\bar{x}_s,\ dx_{s+1} \times \ldots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{2^s}.$$

Возьмем произвольное множество $C_h$. Допустим, что его основание $D_k$ расположено над координатами $(1, 2, \ldots, s)$. Последнее неравенство показывает, что $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s) \in D_k$ (в противном случае было бы $\chi(D_k; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s, x_{s+1}, \ldots, x_{m_n}) \equiv 0$ при всех $(x_{s+1}, \ldots, x_m)$). Поэтому $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s, \ldots) \in C_k$, каково бы ни было $C_k$, и, значит, $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \neq \varnothing$, что противоречит первоначальному допущению. ■

Следствие. *Пусть дана счетная последовательность вероятностных пространств $\{X_n, \mathfrak{B}_n, q_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $X$ — пространство всех последовательностей $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in X_n$, и $\mathfrak{C}$ — $\sigma$-алгебра, порождаемая цилиндрическими множествами $X^\infty$. На $\{X^\infty, \mathfrak{C}\}$ существует единственная вероятностная мера* $\mathsf{Q}$ *такая, что*

$$\mathsf{Q}\{\omega:\ x_k \in B_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\} = \prod_{k=1}^{n} q_k(B_k), \qquad B_k \in \mathfrak{B}_k.$$

Иными словами, если задана некоторая последовательность вероятностных пространств $\{X_n, \mathfrak{B}_n, q_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, то всегда существует вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{Q}\}$ и последовательность отображений $f_n$ пространства $\Omega$ в $X_n$ таких, что случайные элементы $\xi_n = f_n(\omega)$ имеют заданные распределения $q_n$ на $\mathfrak{B}_n$ и $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ независимы в совокупности.

Замечание. Доказанная теорема, в отличие от теоремы Колмогорова (гл. II, § 2, теорема 5), не использует каких-либо топологических предположений о природе пространств $X_n$. С другой стороны, она является менее общей, чем теорема Колмогорова, так как относится к специальной конструкции мер в произведении пространств.

Возвратимся к цепям Маркова.

Определение. *Цепью Маркова с фазовым пространством $\{X, \mathfrak{B}\}$ называется семейство мер $\mathsf{P}^{(m)}(\cdot)$, заданных на $\{X \times X^\infty, \mathfrak{C}\}$, зависящих от произвольной меры $m$ на $\{X, \mathfrak{B}\}$ как от параметра, частные распределения которых определяются формулой*

$$\mathsf{P}^{(m)}\{\omega:\ x_k \in B_k,\ k = 0, \ldots, n\} = \\ = \int_{B_0} m(dx) \int_{B_1} \mathsf{P}_0(x, dy_1) \ldots \int_{B_{n-1}} \mathsf{P}_{n-1}(y_{n-1}, B_n), \tag{8}$$

*где $\{\mathsf{P}_n(x, B),\ n = 0, 1, \ldots\}$ — некоторая система стохастических ядер на $\{X, \mathfrak{B}\}$.*

Стохастические ядра $\mathsf{P}_n(x, B)$ называются *вероятностями перехода за один шаг*, а мера $m$ — *начальным распределением цепи*. Фиксируя меру $m$, получим случайную последовательность со значениями в $X$, которую будем называть *марковским процессом, соответствующим начальному распределению m*.

Конечномерные распределения этого процесса будем обозначать через $\mathsf{P}^{(m)}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$, а операцию вычисления математического ожидания некоторой функции от процесса по вероятностной мере $\mathsf{P}^{(m)}$ обозначим символом $\mathsf{M}_m$.

Если мера $m$ сосредоточена в фиксированной точке $x$ фазового пространства, то $x$ будем называть *начальным состоянием процесса*, а конечномерные распределения, меру в $\{X^\infty, \mathfrak{C}\}$ и математическое ожидание некоторой функции от процесса по соответствующей мере будем обозначать через $\mathsf{P}^{(x)}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$, $\mathsf{P}^{(x)}$ и $\mathsf{M}_x$ соответственно. Положим $(k < r)$

$$\mathsf{P}(k, x, r, B) = \int\limits_X \mathsf{P}_k(x, dy_{k+1}) \int\limits_X \mathsf{P}_{k+1}(y_{k+1}, dy_{k+2}) \ldots \\ \ldots \int\limits_X \mathsf{P}_{r-2}(y_{r-2}, dy_{r-1}) \mathsf{P}_{r-1}(y_{r-1}, B).$$

С аналитической точки зрения $\mathsf{P}(k, \cdot, r, \cdot)$ — стохастическое ядро, являющееся сверткой вероятностей перехода $\mathsf{P}_k * \mathsf{P}_{k+2} * \ldots \ldots * P_{r-1}$. Оно также называется *вероятностью перехода*. Точнее, $\mathsf{P}(k, x, r, B)$ есть вероятность перехода из состояния $x$ за промежуток времени $(k, r)$ в множество $B$. Из ассоциативности свертки ядер вытекает равенство

$$\mathsf{P}(k, x, s, B) = \int\limits_X \mathsf{P}(k, x, r, dy) \mathsf{P}(r, y, s, B), \qquad k < r < s, \tag{9}$$

т. е. уравнение Чепмена — Колмогорова, а формула (7) дает

$$\mathsf{M}_m f(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_s)) = \\ = \int m(dx) \int \mathsf{P}(0, x, t_1, dy_1) \int \mathsf{P}(t_1, y_1, t_2, dy_2) \times \ldots \\ \ldots \times \int f(y_1, y_2, \ldots, y_s) \mathsf{P}(t_{s-1}, y_{s-1}, t_s, dy_s). \tag{10}$$

Обозначим $\xi(m) = \xi(m, \omega)$ координатную функцию на $X \times X^\infty$:

$$\xi(m, \omega) = x_m, \ m = 0, 1, \ldots, \ \omega = (x_0, x_1, \ldots).$$

Формула (10) позволяет уточнить теоретико-вероятностный смысл вероятностей перехода. Для этого вычислим условное математическое ожидание функции $f(\xi(s), \xi(s+1), \ldots, \xi(s+n))$ ($f(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ — неотрицательная борелевская функция $n+1$ переменных) относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{[0, t]}$, порожденной величинами $\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t)$, $t \leqslant s$. Соответствующее условное математическое ожидание обозначим через $\Psi$. По определению $\Psi$ есть единственная $\mathfrak{F}_{[0, t]}$-измеримая случайная величина такая, что для любой неотрицательной функции $g(x_0, x_1, \ldots, x_t)$ выполняется равенство

$$\mathsf{M}_m g(\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t)) f(\xi(s), \xi(s+1), \ldots, \xi(s+n)) = \\ = \mathsf{M}_m g(\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t)) \Psi.$$

С другой стороны, из (10) следует, что

$$\mathsf{M}_m g(\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t)) f(\xi(s), \xi(s+1), \ldots, \xi(s+n)) = \\ = \mathsf{M}_m g(\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(n)) \hat{f},$$

где

$$\hat{f} = \hat{f}(\xi(t)) = \int \mathsf{P}(t, \xi(t), s, dy_0) \int \mathsf{P}_s(y_0, dy_1) \times \ldots \\ \ldots \times \int f(y_0, y_1, \ldots, y_n) \mathsf{P}_{s+n-1}(y_{n-1}, dy_n).$$

Таким образом, $\Psi = \hat{f}$.

Полученная формула приводит к следующим выводам.

Теорема 4. *Условное математическое ожидание произвольной неотрицательной функции* $f(\xi(s), \xi(s+1), \ldots, \xi(s+n))$ *относительно* $\mathfrak{F}_{[0,t]}$ $(t \leqslant s)$ *не зависит от начального распределения* $m$, *от вероятностей перехода, предшествующих моменту времени* $t$, *и от значений* $\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t-1)$. *Оно дается выражением*

$$\mathsf{M}_m \{f(\xi(s), \xi(s+1), \ldots, \xi(s+n)) \mid \mathfrak{F}_{[0,t]}\} = \\ = \int \mathsf{P}(t, \xi(t), s, dy_0) \int \mathsf{P}_s(y_0, dy_1) \ldots \\ \ldots \int f(y_0, y_1, \ldots, y_n) \mathsf{P}_{s+n-1}(y_{n-1}, dy_n). \qquad (11)$$

Условное распределение величин $\xi(s), \xi(s+1), \ldots, \xi(s+n)$ в $\{X^{n+1}, \mathfrak{B}_{n+1}\}$ относительно $\mathfrak{F}_{[0,t]}$ совпадает с прямым произведением ядер

$$\mathsf{P}(t, \xi(t), s, \cdot), \mathsf{P}_s(\cdot, \cdot), \ldots, \mathsf{P}_{s+n-1}(\cdot, \cdot).$$

В частности, вероятность перехода $\mathsf{P}(t, \xi(t), s, B)$ совпадает с условной вероятностью попасть системе в момент времени $s$ в множество $B$, если известны состояния $\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t)$. Эта вероятность зависит только от состояния $\xi(t)$ в последний известный момент времени и не зависит ни от значений $\xi(0)$, $\xi(1), \ldots, \xi(t-1)$, ни от $m$, ни от вероятностей перехода $\mathsf{P}_1(\cdot, \cdot)$, $\mathsf{P}_2(\cdot, \cdot), \ldots, \mathsf{P}_t(\cdot, \cdot)$. Последнее свойство марковской цепи, как упоминалось ранее, называют *отсутствием последействия*, и оно является основной качественной характеристикой марковской цепи.

Замечание. Пусть дано измеримое пространство $\{X, \mathfrak{B}\}$ и на нем система стохастических ядер $\mathsf{P}_n(x, B)$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда существует марковская цепь, для которой $\mathsf{P}_n(x, B)$ являются вероятностями перехода за один шаг. Доказательство этого утверждения и конструкция соответствующего вероятностного пространства даются теоремой 3.

Марковская цепь называется *однородной*, если вероятности перехода за один шаг не зависят от времени:

$$\mathsf{P}_t(x, B) = \mathsf{P}(x, B).$$

В этом случае вероятности перехода за промежуток времени $(t, s)$ зависят только от длины этого промежутка:

$$\mathsf{P}(t, x, s, B) = \int_X \mathsf{P}(x, dy_1) \int_X \mathsf{P}(y_1, dy_2) \ldots \int_X \mathsf{P}(y_{s-1}, B)\,\mathsf{P}(y_{s-2}, dy_{s-1}) = \mathsf{P}^{(s-t)}(x, B).$$

Для однородной цепи уравнение Чепмена — Колмогорова принимает следующий вид:

$$\mathsf{P}^{(s+m)}(x, B) = \int_X \mathsf{P}^{(s)}(x, dy)\,\mathsf{P}^{(m)}(y, B).$$

Пусть марковская цепь однородна. Формула (10) показывает, что

$$\mathsf{M}_m f(\xi(s+1), \xi(s+2), \ldots, \xi(s+n)) = \mathsf{M}_{m_s} f(\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n)), \qquad (12)$$

где

$$m_s(B) = \int \mathsf{P}(0, x, s, B)\, m(dx) = \int \mathsf{P}^{(s)}(x, B)\, m(dx).$$

Если величина (12) не зависит от $s$, какова бы ни была функция $f(\cdot)$, то однородный марковский процесс, соответствующий заданному начальному распределению $m$, называется *стационарным*. Для стационарности процесса необходимо и достаточно, чтобы мера $m$ удовлетворяла условию

$$m(B) = \int \mathsf{P}^{(s)}(x, B)\, m(dx). \qquad (13)$$

Это условие эквивалентно более простому:

$$m(B) = \int \mathsf{P}(x, B)\, m(dx). \qquad (14)$$

Действительно, (14) является частным случаем (13). Если же (14) выполнено, то

$$m(B) = \int \mathsf{P}(x, B) \int \mathsf{P}(y, dx)\, m(dy) = \int \mathsf{P}^{(2)}(y, B)\, m(dy) = \ldots = \int \mathsf{P}^{(s)}(y_s, B)\, m(dy_s).$$

Вероятностные меры $m$, удовлетворяющие уравнению (14), называются *инвариантными* или, подробнее, *инвариантными мерами, соответствующими данному стохастическому ядру*.

Таким образом, если для данного стохастического ядра существует инвариантная вероятностная мера, то существует такое начальное распределение для однородной цепи Маркова, которому соответствует стационарный марковский процесс. Вероятностью перехода за один шаг этого процесса служит данное ядро.

Пусть $\mathfrak{F}_t$ обозначает минимальную $\sigma$-алгебру, относительно которой измеримы $\xi(0)$, $\xi(1)$, ..., $\xi(t)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, $\tau$ — марковский момент на $\{\mathfrak{F}_t, t = 0, 1, \ldots\}$, принимающий, возможно, значение $\tau = \infty$.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть $\xi(t)$ — однородная марковская цепь. Как ведет себя процесс $\xi_\tau(t) = \xi(t + \tau)$ при $\tau < \infty$? Естественно ожидать, что при гипотезе $\xi(\tau) = x$, $\tau < \infty$, случайный процесс $\xi_\tau(t)$ ведет себя точно так же, как марковский процесс $\xi(t)$ при гипотезе $\xi(0) = x$. Уточним и докажем это утверждение. Выраженное им свойство называется *строгой марковостью*. Обозначим $\Omega_\tau = \{\omega: \tau < \infty\}$. Положим $\mathsf{P}^{(\tau)}(x, A) = \mathsf{P}^{(x)}\{\Omega_\tau \cap (\xi(\tau) \in A)\}$. Имеем

$$\mathsf{P}^{(\tau)}(x, A) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathsf{P}^{(x)}\{[\tau = s] \cap [\xi(s) \in A]\}.$$

Отсюда вытекает, что $\mathsf{P}^{(\tau)}(x, A)$ является мерой на $\mathfrak{B}$ и

$$\mathsf{P}^{(\tau)}(x, X) = \mathsf{P}^{(x)}\{\Omega_\tau\} \leqslant 1.$$

С другой стороны, существует такое множество $B^{(s)} \in \mathfrak{B}^{(s)}$, что событие $\{\tau = s\}$ эквивалентно событию $\{\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(s)\} \in B^{(s)}$. Следовательно,

$$\mathsf{P}^{(x)}\{[\tau = s] \cap [\xi(s) \in A]\} = \mathsf{P}^{(x)}\{(\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(s)) \in B^{(s)} \cap A^{(s)}\},$$

где $A^{(s)} = X \times X \times \ldots \times X \times A$ $(s - 1$ сомножителей, равных $X)$, и из предыдущего вытекает, что эта вероятность, а также и $\mathsf{P}^{(\tau)}(x, A)$ являются $\mathfrak{B}$-измеримыми функциями.

Обозначим $\sigma$-алгебру, индуцируемую случайным временем $\tau$, через $\mathfrak{F}_\tau$.

Теорема 5. *Если $D \in \mathfrak{F}_\tau$ и $D \subset \Omega_\tau$, то*

$$\mathsf{P}^{(x)}\left\{D \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k + \tau) \in A_k]\right)\right\} = \int_X \mathsf{P}^{(y)}\left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k) \in A_k]\right) \mathsf{P}^{(\tau)}(x, D, dy), \quad (15)$$

*где* $\mathsf{P}^{(\tau)}(x, D, A) = \mathsf{P}^{(x)}(D \cap [\xi(\tau) \in A])$.

*Доказательство.* Так как $D \subset \Omega_\tau$, то

$$\mathsf{P}^{(x)}\left\{D \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k+\tau) \in A_k]\right)\right\} = \\ = \sum_{s=1}^{\infty} \mathsf{P}^{(x)}\left\{D_s \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k+\tau) \in A_k]\right)\right\},$$

где $D_s = D \cap [\tau = s]$. Пусть $\chi(D_s)$ — индикатор события $D_s$. Имеем, учитывая свойства условных вероятностей для марковской цепи (теорема 4):

$$\mathsf{P}^{(x)}\left\{D_s \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k+\tau) \in A_k]\right)\right\} = \\ = \mathsf{M}_x\left\{\chi(D_s)\,\mathsf{P}^{(x)}\left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k+s) \in A_k] \mid \mathfrak{F}_s\right)\right\} = \\ = \mathsf{M}_x\left\{\chi(D_s)\,\mathsf{P}^{(\xi_s)}\left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k+s) \in A_k]\right)\right\}.$$

В силу однородности цепи правая часть последнего равенства равна

$$\int_{D_s} \mathsf{P}^{(y)}\left\{\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k) \in A_k]\right\} d\mathsf{P}^{(x)} = \\ = \int_{X} \mathsf{P}^{(y)}\left\{\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k) \in A_k]\right\} \mathsf{P}(s, x, D, dy), \qquad (16)$$

где $\mathsf{P}(s, x, D, \cdot)$ есть мера, определяемая на $\{X, \mathfrak{B}\}$ соотношением

$$\mathsf{P}(s, x, D, A) = \mathsf{P}^{(x)}\{D \cap [\tau = s] \cap [\xi(s) \in A]\}.$$

Если еще ввести меру

$$\mathsf{P}^{(\tau)}(x, D, A) = \mathsf{P}^{(x)}\{D \cap [\xi(\tau) \in A]\} = \sum_{s=1}^{\infty} \mathsf{P}(s, x, D, A)$$

и просуммировать равенства (16) по $s$, то получим требуемое. ■

## § 6. Цепи Маркова со счетным числом состояний

**Приводимость и неприводимость.** Пусть $X$ — счетное или конечное множество. Под $\sigma$-алгеброй измеримых множеств $X$ в этом случае условимся постоянно понимать совокупность всех подмножеств $X$. При этом измеримыми оказываются произвольные функции на $X$.

Точки пространства $X$ будем обозначать буквами $i, j, \ldots$ Рассмотрим однородную марковскую цепь со значениями в $X$. Она задается вероятностями перехода за один шаг $p(i, j)$, $i, j \in X$, в одноточечные множества $j$. Вероятность перехода за один шаг в произвольное множество $B$ выражается через $p(i, j)$ очевидной формулой

$$\mathsf{P}(i, B) = \sum_{j \in B} p(i, j),$$

а интегрирование по мере, соответствующей стохастическому ядру $\mathsf{P}(i, B)$, превращается в суммирование:

$$\int_X f(j)\,\mathsf{P}(i, dj) = \sum_{j \in X} p(i, j) f(j).$$

Выражение для вероятности перехода за $n$ шагов в одноточечное множество $j$ принимает вид

$$\mathsf{P}^{(n)}(i, j) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in X} p(i, j_1) p(j_1, j_2) \ldots p(j_{n-1}, j). \tag{1}$$

Если ввести матрицу $\mathsf{P}^{(n)}$ (с конечным или бесконечным числом строк), элементами которой служат вероятности перехода за $n$ шагов, $\mathsf{P}^{(n)} = \{\mathsf{P}^{(n)}(i, j)\}_{i, j \in X}$, то из формулы (1) следует, что

$$\mathsf{P}^{(n)} = \mathsf{P}^n,$$

где $\mathsf{P}^n$ — $n$-я степень матрицы $\mathsf{P} = \mathsf{P}^{(1)}$ — матрицы вероятностей перехода за один шаг. Матрица $\mathsf{P} = \{p(i, j)\}$ обладает свойствами:

$$\text{а) } p(i, j) \geqslant 0; \qquad \text{б) } \sum_{j \in X} p(i, j) = 1. \tag{2}$$

Матрица $\mathsf{P}$ со свойствами а) и б) называется *стохастической*. Из равенства $\mathsf{P}^{n+m} = \mathsf{P}^n \mathsf{P}^m$ следует, что

$$p^{(n+m)}(i, j) = \sum_{k \in X} p^{(n)}(i, k) p^{(m)}(k, j). \tag{3}$$

С другой стороны, формула (3) является записью уравнения Чепмена — Колмогорова ((9), § 5) в рассматриваемом случае.

Определение. *Состояние $j \in X$ достижимо из состояния $i$, если вероятность перехода из $i$ в $j$ за некоторое число шагов положительна. Если $j$ достижимо из $i$, а $i$ достижимо из $j$, то состояния $i$ и $j$ называют сообщающимися. По определению состояние $i$ всегда сообщается с $i$.*

Тот факт, что $i$ и $j$ — сообщающиеся состояния, условимся записывать символом $i \longleftrightarrow j$. Если $j$ достижимо из $i$, а $k$ — из $j$, то $k$ достижимо из $i$. Это вытекает из неравенства $p^{(n+m)}(j, k) \geqslant p^{(n)}(i, j) p^{(m)}(j, k)$.

Отношение $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности:

а) $i \leftrightarrow i$;

б) если $i \leftrightarrow j$, то $j \leftrightarrow i$;

в) из $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$ следует $i \leftrightarrow k$.

Действительно, а) следует из того, что $p^{(0)}(i, i) = 1$, б) вытекает из симметрии $i$ и $j$ в определении сообщающихся состояний, и, наконец, в) вытекает из того, что

$$p^{(n+m)}(i, k) \geqslant p^{(n)}(i, j)\, p^{(m)}(j, k) > 0,$$

$$p^{(n_1+m_1)}(k, i) \geqslant p^{(n_1)}(k, j)\, p^{(m_1)}(j, i) > 0,$$

если $p^{(n)}(i, j) > 0$, $p^{(m_1)}(j, i) > 0$; $p^{(m)}(j, k) > 0$, $p^{(n_1)}(k, j) > 0$.

Произвольная цепь Маркова может быть разложена на непересекающиеся классы $X_\alpha$ сообщающихся состояний. Это разложение можно осуществить следующим образом. Выбираем произвольное состояние $i_1$ и обозначаем через $X_{i_1}$ совокупность всех состояний, сообщающихся с $i_1$. Из свойства в) отношения $\leftrightarrow$ вытекает, что любая пара состояний из $X_{i_1}$ сообщается между собой. Если $X_{i_1}$ не исчерпывает $X$, выбираем состояние $i_2 \overline{\in} X_{i_1}$ и, аналогично предыдущему, строим класс $X_{i_2}$. Так как $i_1$ и $i_2$ не сообщаются, то классы $X_{i_1}$ и $X_{i_2}$ не имеют общих элементов. Продолжаем построение множеств $X_{i_k}$ до тех пор, пока не будет исчерпано все $X$. Построенные классы $X_\alpha$ обладают следующими свойствами:

а) число классов $X_\alpha$ не более чем счетно;

б) каждый элемент $X$ попадает в один и только один класс $X_\alpha$;

г) любая пара состояний из $X_\alpha$ сообщается между собой;

д) любая пара состояний из разных классов между собой не сообщается.

Последние два свойства могут быть сформулированы еще так: из любого состояния $i$ данного класса $X_\alpha$ можно за некоторое число шагов с положительной вероятностью попасть в любое другое состояние этого же класса. Не исключена возможность того, что система, находясь в данном классе, выйдет из него когда-либо, но вероятность того, что она, покинув данный класс, вернется в него когда-нибудь, равна нулю.

Определение. *Марковская цепь называется неприводимой, если она состоит из одного класса сообщающихся состояний. Если любое состояние $j$, достижимое из $i$, сообщается с $i$, то состояние $i$ называется существенным. В противном случае оно называется несущественным.*

Нетрудно заметить, что из существенного состояния достижимы только существенные состояния. Действительно, пусть $i$ существенно и $j$ достижимо из $i$. Если $k$ достижимо из $j$, то $k$

достижимо из $i$ и (в силу существенности состояния $i$) $i$ достижимо из $k$. Но тогда и $j$ достижимо из $k$, т. е. $j$ существенно.

Отсюда вытекает следствие: в классе сообщающихся состояний или все состояния существенны, или все они несущественны.

**Возвратность.** Пусть $\xi(n)$ — состояние марковской системы в момент времени $n$. Обозначим через $\tau_j = \tau_j(n)$ число шагов, которые затрачивает марковская система, начиная с момента времени $n$, чтобы впервые попасть в состояние $j$. Таким образом, $\tau_j(n)$ определяется цепочкой соотношений

$$\xi(n+1) \neq j, \ \ldots, \ \xi(n+\tau_j-1) \neq j, \qquad \xi(n+\tau_j) = j.$$

Введем семейство $\sigma$-алгебр $\{\mathfrak{F}_{[n,t]}, \ t = 0, 1, \ldots\}$, где $\mathfrak{F}_{[n,t]}$ — минимальная $\sigma$-алгебра, относительно которой измеримы $\xi(n)$, $\xi(n+1), \ldots, \xi(n+t)$.

Величина $\tau_j(n)$ является марковским моментом на этом семействе. Положим

$$f^{(s)}(i, j) = \mathsf{P}(\tau_j(n) = s \mid \xi(n) = i), \qquad s = 1, 2, \ldots,$$
$$f^{(0)}(i, j) = 0.$$

При этом

$$f^{(1)}(i, j) = p^{(1)}(i, j) = p(i, j).$$

Из однородности цепи следует, что вероятности $f^{(s)}(i, j)$ не зависят от $n$. При $i \neq j$ они называются *вероятностями первого попадания* в состояние $j$, а при $i = j$ — *вероятностями первого возвращения* в состояние $i$.

Сумма

$$F(i, j) = \sum_{s=1}^{\infty} f^{(s)}(i, j), \qquad (i \neq j),$$

есть вероятность того, что система, выйдя из $i$-го состояния, когда-нибудь попадает в $j$-е состояние. Аналогично $F(i, i)$ есть вероятность того, что система, выйдя из $i$-го состояния, за конечное число шагов возвратится в $i$-состояние. При $F(i, j) < 1$ случайная величина $\tau_j$ является несобственной.

Определение. *Состояние $i$ называется возвратным, если $F(i, i) = 1$, и невозвратным, если $F(i, i) < 1$.*

Нетрудно установить связь между вероятностями перехода и вероятностями первого попадания. Она дается соотношением

$$p^{(n)}(i, j) = \sum_{s=1}^{n} f^{(s)}(i, j)\, p^{(n-s)}(j, j), \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

При этом полагаем $p^{(0)}(i, j) = \delta_{ij} = 0$. Действительно, пусть $\tau_j$ — время первого попадания в $j$, отсчитываемое от начального момента времени. Тогда

$$\mathsf{P}^{(n)}(i,\ j)=\mathsf{P}^{(i)}\left\{\bigcup_{s=1}^{n}[\tau_j=s]\cap[\xi(n)=j]\right\}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\mathsf{P}^{(i)}\{[\tau_j=s]\cap[\xi(n)=j]\}=\sum\mathsf{P}^{(i)}\{\tau_j=s\}\,\mathsf{P}^{(i)}\{\xi(n)=j\}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}f^{(s)}(i,\ j)\,\mathsf{P}^{(n-s)}(j,\ j).$$

Формула (4) доказана. Отметим ее частный случай:

$$p^{(n)}(i,\ i)=\sum_{s=1}^{n}f^{(s)}(i,\ i)\,p^{(n-s)}(i,\ i), \tag{5}$$

что можно также переписать в виде

$$f^{(n)}(i,\ i)=p^{(n)}(i,\ i)-\sum_{s=1}^{n-1}f^{(s)}(i,\ i)\,p^{(n-s)}(i,\ i).$$

Последнее соотношение позволяет последовательно вычислить вероятность возвращения, если известны вероятности перехода. Заметим, что для вычисления вероятностей возвращения в $i$-е состояние достаточно знать только вероятности перехода в то же состояние.

Введем производящие функции $P_{ij}(z)$, $F_{ij}(z)$ последовательностей $\{p^{(n)}(i, j),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$, $\{f^{(n)}(i, j),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$:

$$P_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,\ j)\,z^n,\quad F_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(i,\ j)\,z^n.$$

Из формулы (5) следует, что

$$P_{ii}(z)=p^{(0)}(i,\ i)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(i,\ i)\,z^k p^{(n-k)}(i,\ i)\,z^{n-k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}f^{(k)}(i,\ i)\,z^k p^{(n-k)}(i,\ i)\,z^{n-k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}f^{(k)}(i,\ i)\,z^k P_{ii}(z)$$

или

$$P_{ii}(z)=1+P_{ii}(z)\,F_{ii}(z).$$

Изменение порядка суммирования в проведенной выкладке законно, так как рассматриваемые ряды сходятся абсолютно при $|z|\leqslant 1$. Последняя формула может быть записана также в виде

$$P_{ii}(z)=\frac{1}{1-F_{ii}(z)}. \tag{6}$$

Аналогично из (4) вытекает равенство

$$P_{ij}(z) = P_{jj}(z) F_{ij}(z), \qquad i \neq j. \tag{7}$$

Пусть теперь $z$ — действительное число и $z \uparrow 1$. Функции $P_{ii}(z)$ и $F_{ii}(z)$ представляют собой монотонно вазрастающие функции, причем в силу теоремы Абеля $\lim\limits_{z\uparrow 1} F_{ii}(z)$ существует и $\lim\limits_{z\uparrow 1} F_{ii}(z) = F_{ii}(1) = F(i, i)$. Положим $\lim\limits_{z\uparrow 1} P_{ii}(z) = G(i, i) = P_{ii}(1)$. Из соотношения (6) следует

Теорема 1. *Состояние $i$ возвратно, если* $G(i, i) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i, i) = \infty$, *и невозвратно, если* $G(i, i) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i, i) < \infty$. *В невозвратном случае*

$$G(i, i) = \frac{1}{1 - F(i, i)}.$$

Теорема 2. *Если состояния $i$ и $j$ сообщаются, то они возвратны или невозвратны одновременно.*

*Доказательство.* Так как $i \leftrightarrow j$, то найдутся $m_1$ и $m_2$ такие, что $p^{(m_1)}(i, j) > 0$, $p^{(m_2)}(j, i) > 0$. Так как

$$p^{(m_1+m_2+n)}(j, j) \geqslant p^{(m_2)}(j, i)\, p^{(n)}(i, i)\, p^{(m_1)}(i, j),$$

то

$$\sum_{n=m_1+m_2}^{\infty} p^{(n)}(j, j) \geqslant p^{(m_2)}(j, i)\, p^{(m_1)}(i, j) \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i, i)$$

и ряд $G(j, j)$ расходится, если расходится ряд $G(i, i)$. Меняя роли $i$ и $j$, получим, что $G(j, j)$ и $G(i, i)$ конечны или бесконечны одновременно. ∎

Таким образом, свойство возвратности для марковской цепи является не столько свойством состояния, сколько характеристикой класса сообщающихся состояний.

Интуитивные соображения подсказывают, что возвращения в течение неограниченного промежутка времени в возвратное состояние происходят бесконечно много раз, а в невозвратное состояние — только конечное число раз. Это нетрудно доказать.

Пусть $Q_j(m)$ — событие: система попадает в $j$-е состояние по меньшей мере $m$ раз, а $\tau_j$ — число шагов до первого попадания в состояние $j$. Тогда

$$Q_j(m) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_j(m) \cap \{\tau_j = n\}.$$

Пусть $q_{ij}(m)$ — вероятность события $Q_j(m)$, если $\xi(0)=i$. Имеем

$$q_{ij}(m)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(Q_j(m)\cap[\tau_j=n]\mid\xi(0)=i)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}^{(i)}(Q_j(m)\mid\tau_j=n)\,\mathsf{P}^{(i)}(\tau_j=n\mid\xi(0)=i)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(i,\ j)\,\mathsf{P}^{(i)}(Q_j(m)\mid\tau_j=n).$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathsf{P}^{(i)}(Q_j(m)\mid\tau_j=n)=\mathsf{P}^{(j)}(Q_j(m-1))=q_{jj}(m-1).$$

Таким образом,

$$q_{ij}(m)=F(i,\ j)\,q_{jj}(m-1). \tag{8}$$

Пусть $q_{ij}=q_{ij}(\infty)$ — вероятность того, что система, выйдя из $i$-го состояния, попадает в $j$-е состояние бесконечно много раз. Так как $q_{ij}=\lim\limits_{m\to\infty}q_{ij}(m)$, то из (8) следует

$$q_{ij}=F(i,\ j)\,q_{jj}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Если $j$ — возвратное состояние, то $q_{ij}=F(i,j)$ и, в частности, $q_{jj}=1$; если же $j$ невозвратно, то $q_{ij}=0$ для любого $i$.*

*Доказательство.* Если $F(j,j)<1$, то, положив в (9) $i=j$, получим $q_{jj}=0$ и из того же равенства имеем $q_{ij}=0$. Если $F(j,j)=1$, то из (8) вытекает $q_{jj}(m)=[F(j,j)]^{m-1}=1$, откуда $q_{jj}=1$. Из (9) тогда следует, что $q_{ij}=F(i,j)$. ∎

Пусть $F(i,j)=1$. Из свойства строгой марковости (см. § 5, теорема 5) получаем

$$\mathsf{P}^{(i)}\left(B\cap\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{\xi(\tau_j+t_k)=j_k\}\right)\right)=\mathsf{P}^{(i)}(B)\,\mathsf{P}^{(j)}\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{\xi(t_k)=j_k\}\right)$$

для любого $B\in\mathfrak{F}_{\tau_j}$. Из этого соотношения вытекает

Теорема 4. *Если $F(i,j)=1$, то случайный процесс $\xi'(t)=\xi(\tau_j+t)$ $(\xi(0)=i)$ стохастически эквивалентен $\xi(t)$ с начальным состоянием $\xi(0)=j$ и не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{F}_{\tau_j}$.*

Следствие. *Пусть $\xi(0)=i$, $i$ — возвратное состояние, $\xi_1$ — число шагов до первого возвращения в $i$, $\xi_2$ — число шагов между первым и вторым возвращением в $i$ и т. д.*

*Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ одинаково распределены и независимы.*

Теорема 5. *Если состояние $i$ возвратно и $F(i,j)>0$, то система, выйдя из состояния $i$, посетит $j$ бесконечно много раз $(q_{ij}=1)$ и $F(j,i)>0$. В частности, $F(i,j)=1$.*

Из теоремы 3 следует, что число возвращений в состояние $i$ бесконечно. Пусть $C_k$ обозначает событие: между $(k-1)$-м и $k$-м посещениями состояния $i$ система зайдет в состояние $j$. В силу строгой марковости процесса события $C_k$ независимы между собой и имеют одну и ту же вероятность. Так как $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ есть вероятность того, что система вообще когда-либо посетит $j$, то $\mathbf{P}(C_k) > 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(C_k) = \infty$. Из теоремы Бореля — Кантелли следует, что с вероятностью 1 осуществляется бесконечно много $C_k$. Более того, система, попав в $j$-е состояние, бесконечно много раз посетит $i$-е состояние. ■

Следствие 1. *Из возвратного состояния достижимы только возвратные состояния. Возвратные состояния существенны.*

Это следствие уточняет теорему 2, полученную ранее с применением производящих функций.

Следствие 2. *В классе сообщающихся состояний, содержащем возвратное состояние, все остальные состояния также возвратны, и система, находящаяся в этом классе, с течением времени с вероятностью* 1 *попадает во все остальные состояния класса, и притом бесконечно много раз.*

Класс возвратных сообщающихся состояний будем называть *возвратным классом.*

Положим

$$G(i,\ j) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i,\ j).$$

Смысл этого ряда был выяснен для случая $i = j$. В общем случае установим следующее соотношение:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p^{(n)}(i,\ j)}{\sum\limits_{n=0}^{N} p^{(n)}(j,\ j)} = F(i,\ j). \tag{10}$$

Доказательство основано на формуле (4). Полагая в (4) $n = 1, 2, \ldots, N$ и суммируя полученные равенства, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(i,\ j) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{s=0}^{n-1} f^{(n-s)}(i,\ j)\, p^{(s)}(j,\ j) =$$
$$= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{n=s+1}^{N} f^{(n-s)}(i,\ j)\, p^{(s)}(j,\ j) = \sum_{s=0}^{N-1} p^{(s)}(j,\ j)\, F_{N-s},$$

где $F_{N-s}=\sum\limits_{n=1}^{N-s} f^{(n)}(i, j)$ и $F_N \to F(i, j)$ при $N\to\infty$. Таким образом,

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p^{(n)}(i, j)}{\sum\limits_{n=0}^{N} p^{(n)}(j, j)}=\sum_{s=0}^{N} F_{N-s}\frac{p^{(s)}(j, j)}{\sum\limits_{n=0}^{N} p^{(n)}(j, j)}.$$

Справедливость формулы (10) теперь вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Если $b_n$, $n=0, 1, \ldots,$ — последовательность неотрицательных чисел и $\dfrac{b_N}{\sum\limits_{s=0}^{N} b_s}\to 0$, то для произвольной сходящейся последовательности $c_n$, $n=1, 2, \ldots,$*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k c_{N-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k}=\lim_{n\to\infty} c_n.$$

*Доказательство.* Если $c=\lim c_n$, то

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k c_{N-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k}-c=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-n} b_k(c_{N-k}-c)}{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k}-c\,\frac{\sum\limits_{k=N-n+1}^{N} b_k}{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k}+\frac{\sum\limits_{k=N-n+1}^{N} b_k c_{N-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k}. \tag{11}$$

Если номер $n$ выбран так, что при $n'\geqslant n$ имеем $|c-c_{n'}|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ произвольно, то первое слагаемое в правой части равенства (11) меньше $\varepsilon$. При фиксированном $n$ второе и третье слагаемые также стремятся к 0 при $N\to\infty$, так как $c_n$ ограничены. Это доказывает лемму и вместе с тем равенство (10), так как условия леммы всегда применимы к рассматриваемому случаю, ибо $p^{(n)}(j, i)$ ограничены. ■

Из формулы (10) вытекает

Теорема 6. *Внутри возвратного класса $G(i, j)=+\infty$; если же $j$ невозвратно, то $G(i, j)<\infty$ при всех $i$.*

Действительно, если $j$ — невозвратное состояние, то знаменатель в левой части соотношения (10) стремится к конечному пределу, а поэтому и предел числителя конечен. Если же $j$ возвратно, то предел знаменателя равен $\infty$; если $F(i, j) > 0$, то и предел числителя также равен $\infty$. ■

**Периодичность.** Заметим, что если $p^{(n)}(i, i) > 0$, то также $p^{(kn)}(i,i) > 0$. Действительно, $p^{(kn)}(i,i) \geqslant p^{(n)}(i,i)\,p^{(n)}(i,i) \ldots p^{(n)}(i,i)$. Обозначим через $d(i)$ наибольший общий делитель всех $n$, для которых $p^{(n)}(i, i) > 0$. Если $p^{(n)}(i, i) = 0$ для всех $n \geqslant 1$, то будем считать $d(i) = \infty$.

Теорема 7. *Если $i \leftrightarrow j$, то $d(i) = d(j)$.*

*Доказательство.* Во-первых, если $i \leftrightarrow j$, то $d(i)$ и $d(j)$ конечны. Пусть $p^{(s)}(i, i) > 0$. Найдутся некоторые $n > 0$ и $m > 0$ такие, что $p^{(n)}(i, j) > 0$ и $p^{(m)}(j, i) > 0$, так что $p^{(n+m+s)}(j, j) \geqslant$ $\geqslant p^{(m)}(j, i)\,p^{(s)}(i, i)\,p^{(n)}(i, j) > 0$. Аналогично $p^{(n+m+ks)}(j, j) > 0$. Поэтому $d(j)$ делит $(n+m+2s)-(n+m+s) = s$. Отсюда вытекает, что $d(j) \leqslant d(i)$. Из симметрии ролей $i$ и $j$ вытекает $d(i) = d(j)$. ■

Следствие. *В каждом классе сообщающихся состояний величина $d(i)$ постоянна.*

В частности, для неприводимой цепи Маркова величина $d = d(i)$ не зависит от состояния.

Определение. *Если в неприводимой цепи $d = 1$, то цепь Маркова называется апериодичной; если $d > 1$, цепь называется периодической, а число $d$ — ее периодом.*

Теорема 8. *Если $d(i) < \infty$, то найдется такое $n_0$, что при $n > n_0$*

$$p^{(nd(i))}(i, i) > 0.$$

*Доказательство.* Пусть $n_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ — последовательность чисел таких, что $p^{(n_k)}(i, i) > 0$, и наибольший общий делитель чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ равен $d(i)$. В силу леммы 4 § 4 найдется такое $n_0$, что при $n \geqslant n_0$ будем иметь $nd(i) = \sum_{k=1}^{s} c_k n_k$. Следовательно,

$$p^{(nd(i))}(i, i) \geqslant [p^{(n_1)}(i, i)]^{c_1}\,[p^{(n_2)}(i, i)]^{c_2} \ldots [p^{(n_s)}(i, i)]^{c_s} > 0. \ ■$$

Следствие. *Если $p^{(m)}(j, i) > 0$, то для всех достаточно больших $n$*

$$p^{(m+nd(i))}(j, i) > 0.$$

Действительно,

$$p^{(m+nd(i))}(j, i) \geqslant p^{(m)}(j, i)\,p^{(nd(i))}(i, i).$$

При изучении цепей Маркова во многих случаях удобнее сначала рассматривать апериодические цепи, а затем обобщать полученные результаты на периодические.

Покажем еще, что период состояния может быть вычислен по вероятности первого возвращения.

Лемма 2. *Период $i$-го состояния совпадает с наибольшим общим делителем тех $n$, для которых $f^{(n)}(i, i) > 0$.*

*Доказательство.* Пусть $Z_N$ и $Z'_N$ — множества тех $n, n \leqslant N$, для которых $p^{(n)}(i, i) > 0$ и соответственно $f^{(n)}(i, i) > 0$, а $d_N$ и $d'_N$ — их наибольшие общие делители. Очевидно, $Z'_N \subset Z_N$ и, следовательно, $d'_N \geqslant d_N$. При этом $d'_1 = d_1$. Пусть существует $N$ такое, что $d'_n = d_n$ при $n \leqslant N$, а $d'_{N+1} > d_{N+1}$. Тогда $f^{(N+1)}(i, i) = 0$, а $p^{(N+1)}(i, i) > 0$. Из равенства $p^{(N+1)}(i, i) = f^{(N+1)}(i, i) + \sum_{k=1}^{N} f^{(k)}(i, i)\, p^{(N+1-k)}(i, i)$ вытекает при некотором $s$, $0 < s \leqslant N$, соотношение $f^{(s)}(i, i)\, p^{(N+1-s)}(i, i) > 0$, т. е. $s$ и $N + 1 - s$ делятся на $d_N$ и, следовательно, $N + 1$ делится на $d_N$, что противоречит соотношениям $d_{N+1} < d'_{N+1} = d_N$. ■

Теорема 9. *Каждый класс $K$ сообщающихся состояний периода $d$ $(d < \infty)$ можно разбить на $d$ подмножеств $K_0$, $K_1, \ldots, K_{d-1}$ попарно без общих элементов так, чтобы за один шаг из $K_s$ $(s < d - 1)$ можно было перейти только в $K_{s+1}$, а из $K_{d-1}$ — только в $K_0$. При этом, если $i \in K_r$, $j \in K_s$, то найдется такое $N = N(i, j)$, что $p^{nd+s-r}(i, j) > 0$ при $n > N$.*

*Доказательство.* Пусть $K_0$ — множество всех состояний $j$, для которых хотя бы при одном положительном целом $k$ имеем $p^{(kd)}(i, j) > 0$, где $i$ — произвольно выбранное состояние из $K$. Тогда $i \in K_0$. Так как $i$ и $j$ сообщаются, то найдется такое $m$, что $p^{(m)}(j, i) > 0$. Число $m$ кратно $d$. Действительно, $p^{(kd+m)}(i, i) \geqslant p^{(kd)}(i, j)\, p^{(m)}(j, i) > 0$, и, следовательно, $kd + m$ делится на $d$. Так как $m$ делится на $d$, то если вместо состояния $i$ в определении $K_0$ взять любое $j$, для которого $p^{(kd)}(i, j) > 0$ при некотором $k$, то $K_0$ не изменится. Теперь определим $K_1$ как множество тех $j$, $j \in K$, для которых $\sum_{i \in K_0} p(i, j) > 0$, $K_2$ — как множество всех тех $j$, для которых $\sum_{i \in K_1} p(i, j) > 0$, $j \in K$, и т. д. Из определения множества $K_s$ вытекает: $K_{rd+s} \subset K_s$ при любых $r$ и $s$. С другой стороны, если $j \in K_s$, то найдутся такие $j_0, j_1, \ldots, j_s = j$, что $j_r \in K_r$, $r \leqslant s$, и $p(j_{r-1}, j_r) > 0$, т. е. $p^{(s-r)}(j_r, j) > 0$. Верно и обратное: если $p^{(s-r)}(j_r, j) > 0$, $j_r \in K_r$, $j \in K$, то $j \in K_s$ (из $j_r \to j_{r+1}$, $j_{r+1} \to j$ и $j_r \leftrightarrow j$ следует $j_{r+1} \leftrightarrow j_r$). Теперь убедимся, что классы $K_r$ и $K_s$, $0 \leqslant r < s < d$, не имеют общих элементов. Действительно, пусть $j \in K_r$, $j \in K_s$. Тогда найдутся такие $i_1$ и $i_2 \in K_0$, для которых $p^{(r)}(i_1, j) > 0$ и $p^{(s)}(i_2, j) > 0$. Так как $i_2$ и $j$ сообщаются, то $p^{(m)}(j, i_2) > 0$ для некоторого $m$. Следовательно, $p^{(m+s)}(i_2, i_2) \geqslant p^{(s)}(j, j)\, p^{(m)}(j, i_2) > 0$; поэтому $m + s$ делится на $d$, т. е. $m = kd - s$, где $s$ — некоторое целое число. Но тогда

$$0 < p^{(r)}(i_1, j)\, p^{(m)}(j, i_2) \leqslant p^{(kd-s+r)}(i_1, i_2),$$

а это, как было показано выше, невозможно, так как переходы из $i_1$ в $i_2$, $i_1, i_2 \in K_0$, возможны только за число шагов, кратное $d$. Далее, пусть $i \in K_r$ и $j \in K_s$. Найдется такое $m$, что $p^{(m)}(i, j) > 0$. Тогда $m$ имеет вид $m = k_0 d + (s - r)$. С другой стороны, в силу теоремы 8 $p^{(nd)}(i, i) > 0$ для всех $n \geqslant n_0(i)$. Следовательно, $p^{((n+k_0)d+s-r)}(i, j) \geqslant p^{(nd)}(i, i)\, p^{(k_0 d+s-r)}(i, j) > 0$ при всех $n > n_0(i)$. ∎

Условимся множества $K_0, K_1, \ldots, K_{d-1}$ называть *подклассами периодического класса сообщающихся состояний.*

**Предельные теоремы для вероятностей перехода.**

Теорема 10. *Пусть $p^{(n)}(i, j)$ — вероятности перехода неприводимой возвратной апериодической цепи Маркова. Обозначим через $m_i$ среднее число шагов до первого возвращения в $i$-е состояние:*

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{(n)}(i, i).$$

*Тогда для любого $j$*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(j, i) = \frac{1}{m_i}. \tag{12}$$

*Доказательство.* Пусть $\tau_0$ — число шагов до первого возвращения в $i$-е состояние, $\tau_1$ — число шагов между вторым и первым возвращением в это состояние и т. д. В силу следствия теоремы 4 величины $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ взаимно независимы, одинаково распределены и принимают целые значения, не меньшие единицы, причем

$$\mathbf{P}\{\tau_k = n\} = f^{(n)}(i, i), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(i, i) = 1, \quad \mathbf{M}\tau_k = m_i.$$

Рассмотрим процесс восстановления, в котором $\tau_n$ является длительностью $n$-го восстановления. Роль величин $p_n$ и $G(n)$ теперь играют $f^{(n)}(i, i)$ и $p^{(n)}(i, i)$ соответственно. Так как цепь апериодическая, то в силу леммы 2 восстановление также апериодично.

Из теоремы 2 § 4 следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(i, i) = \frac{1}{m_i},$$

что является частным случаем (12) при $j = i$. Нетрудно перейти к общему случаю. Воспользовавшись формулой (4), получим

$$\frac{p^{(n)}(j, i)}{\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(j, i)} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}^{(k)}(j, i)\, p^{(n-k)}(i, i), \quad \tilde{f}^{(n)}(j, i) = \frac{f^{(n)}(j, i)}{\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(j, i)}.$$

Замечая, что $f^{(n)}(j, i) \to 0$, $\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(j, i) \to 1$ при $n \to \infty$ (в силу неприводимости и возвратности цепи), и применяя лемму 1, получим равенство (12) в общем случае. ■

Доказанную теорему часто называют *эргодической теоремой для цепей Маркова.*

Теорема 11. *Если неприводимая возвратная цепь Маркова периодична с периодом* $d$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd)}(i, i) = \frac{d}{m_i}. \tag{13}$$

*Если* $K_s$ — *подклассы, введенные в теореме* 9, *и* $i \in K_r$, $j \in K_s$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd+l)}(i, j) = \begin{cases} \dfrac{d}{m_j}, & l = s - r \pmod d, \\ 0, & l \neq s - r \pmod d. \end{cases} \tag{14}$$

*Доказательство.* Из леммы 2 следует, что период неприводимой цепи Маркова совпадает с периодом процесса восстановления, введенного при доказательстве предыдущей теоремы. Поэтому равенство (13) непосредственно вытекает из следствия теоремы 2 § 4. Из теоремы 9 имеем: $p^{(nd+l)}(i, j) = 0$ при $i \in K_r$, $j \in K_s$ и $l \neq s - r \pmod d$. Следовательно, если, например, $r < s$, то

$$p^{(nd+s-r)}(i, j) = \sum_{k=0}^{n} f^{(kd+s-r)}(i, j)\, p^{(n-k)d}(j, j).$$

Доказательство формулы (14) завершается ссылкой на лемму 1, точно так же как доказательство теоремы 10. ■

Определение. *Возвратное состояние* $j$ *называется*

$$\text{нулевым, если } \lim p^{(nd_j)}(j, j) = 0,$$

$$\text{положительным, если } \lim p^{(nd_j)}(j, j) > 0.$$

В возвратном классе состояний все состояния одновременно либо положительны, либо нулевые. Действительно, если $i \leftrightarrow j$, то из неравенства

$$p^{(m+nd_j+s)}(i, i) \geqslant p^{(m)}(i, j)\, p^{(nd_j)}(j, j)\, p^{(s)}(j, i),$$

где $m$ и $s$ таковы, что $p^{(m)}(i, j) > 0$, $p^{(s)}(j, i) > 0$, следует

$$\lim p^{(nd)}(i, i) \geqslant \lim p^{(nd)}(j, j), \qquad d = d_i = d_j.$$

Меняя роли $i$ и $j$, получим доказательство утверждения.

Полученные результаты можно подытожить следующим образом.

Теорема 12. а) *Чтобы состояние $j$ было невозвратным, необходимо и достаточно, чтобы* $G_{jj}=\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(j, j)<\infty$. *При этом для всех* $i$

$$G_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i, j) \leqslant G_{jj}<\infty, \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i, j)=0.$$

б) *Пусть $j$ — возвратное состояние с периодом $d$ и средним временем возвращения $m_j$. Если $i$ достижимо из $j$, тогда $i$ — также возвратное состояние с тем же периодом $d$, нулевое или положительное одновременно с $j$, и существует такое $k$, $0 \leqslant k < d$, зависящее только от $i$ и $j$, что*

$$\lim p^{(md+r)}(i, j)=\begin{cases} \dfrac{d}{m_j} & \text{при} \quad r=k, \\ 0 & \text{при} \quad r \not\equiv k \pmod d. \end{cases} \tag{15}$$

в) *Если $i$, $j$ принадлежат одному и тому же возвратному классу, то*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(i, j)=\frac{1}{m_j}. \tag{16}$$

Последнее утверждение является непосредственным следствием б). С другой стороны, в отличие от утверждения б), формула (16) не отражает различия между апериодическим и периодическим классами состояний.

Условимся называть неприводимую возвратную цепь Маркова *положительной* (*нулевой*), если ее состояния положительны (нулевые).

**Критерий возвратности. Стационарные распределения.** Свойство цепи Маркова быть возвратной (положительной или нулевой) тесно связано с нетривиальными решениями линейной однородной системы

$$\sum_{j \in I} p(i, j) x_j=x_i, \qquad i \in I, \tag{17}$$

и ей транспонированной

$$\sum_{j \in I} p(j, i) x_j=x_i, \qquad i \in I. \tag{18}$$

Если система (17) обладает неотрицательным и суммируемым решением, т. е. $x_i \geqslant 0$, $\sum x_i<\infty$, то можно считать, что $\sum x_i=1$, и такое решение можно интерпретировать как инвариантное начальное распределение $x_i=\mathsf{P}\{\xi(0)=i\}=\mathsf{P}\{\xi(1)=i\}=\ldots$, порождающее стационарный марковский процесс.

С другой стороны, существование стационарного марковского процесса с заданными вероятностями перехода эквивалентно существованию неотрицательного суммируемого решения системы (17).

Что же касается транспонированной системы (18), то существование нетривиального решения $x_i = c$ очевидно. Для возвратной цепи Маркова характерно, что (18) не имеет других нетривиальных неотрицательных решений. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 13. *Неприводимая цепь Маркова возвратна тогда и только тогда, когда система неравенств*

$$\sum_{j \in I} p(i, j) x_j \leqslant x_i, \qquad i \in I, \tag{19}$$

*не имеет неотрицательных решений, отличных от решений вида* $x_i = c$, $i \in I$.

*Доказательство.* Допустим, что цепь возвратна, $x_i \geqslant 0$ и $x_i$ $(i \in I)$ образуют решения системы (19). Выберем произвольное $x_l > 0$ (если такого нет, то все $x_i \equiv 0$). Из (19) следует

$$x_i \geqslant \sum_{j \in I} p(i, j) \sum_{k \in I} p(j, k) x_k = \sum_{k \in I} p^{(2)}(i, k) x_k,$$

и по индукции

$$x_i \geqslant \sum_{k \in I} p^{(n)}(i, k) x_k.$$

Для каждого $i$ найдется такое $n$, что $p^{(n)}(i, l) > 0$, следовательно, $x_i \geqslant p^{(n)}(i, l) x_l > 0$. Итак, $x_i > 0$ для всех $i \in I$. Положим $y_i = \frac{x_i}{x_l}$, где $l$ — произвольно выбранное состояние. Имеем $y_i \geqslant \sum_{j \in I} p(i, j) y_j \geqslant p(i, l) + \sum_{j \neq l} p(i, j) y_j$. Применяя это неравенство к величинам $y_j$, стоящим в его правой части, получим

$$y_i \geqslant p(i, l) + \sum_{j \neq l} p(i, j) p(j, l) + \sum_{j \neq l} \sum_{k \neq l} p(i, j) p(j, k) y_k =$$
$$= f^{(1)}(i, l) + f^{(2)}(i, l) + \sum_{k \neq l} {}_l p^{(2)}(i, k) y_k,$$

где ${}_l p^{(2)}(i, k) = \sum_{j \neq l} p(i, j) p(j, k)$ есть вероятность, выйдя из $i$-го состояния, на втором шаге попасть в $k$-е состояние, не заходя при этом в $l$-е состояние. Повторяя предыдущий прием, приходим к неравенству

$$y_i \geqslant \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(i, l) + \sum_{k \neq l} {}_l p^{(N)}(i, k) y_k,$$

где ${}_lp^{(N)}(i, k)$ — вероятность перехода за $N$ шагов из $i$-го состояния в $k$-е, не заходя при этом в $l$-е состояние. Полагая в последнем неравенстве $N \to \infty$, получим

$$y_i \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(i, l) = 1,$$

т. е. $x_i \geqslant x_l$.

Так как $i$ и $l$ любые, то $x_i = x_l = \text{const}$, т. е. система неравенств (19) не имеет неотрицательных решений, отличных от $x_i = c$, $i \in I$.

Пусть теперь цепь имеет хотя бы одно невозвратное состояние (сейчас неприводимость цепи не используется). Положим $x_l = 1$, $x_i = F(i, l)$ при $i \neq l$, где $l$ — любое невозвратное состояние. Заметим, что не для всех $i$, $i \neq l$, $F(i, l) = 1$. Действительно, в противном случае имели бы $F(l, l) = \sum_{k \neq l} p(l, k) F(k, l) + p(l, l) = \sum_{k \in I} p(l, k) = 1$, что противоречит невозвратности состояния $l$. Таким образом, определенные выше неотрицательные числа $x_i$ не все равны между собой. Имеем при $i \neq l$

$$x_i = F(i, l) = \sum_{k \neq l} p(i, k) F(k, l) + p(i, l) = \sum_{k \in I} p(l, k) x_k$$

и

$$x_l = 1 > F(l, l) = \sum_{k \in I} p(l, k) x_k,$$

т. е. $\{x_i, i \in I\}$ образуют неотрицательное и отличное от постоянной решение системы (19). ■

Перейдем к вопросу о связи между существованием инвариантных начальных распределений и свойствами возвратности марковской цепи, т. е. к вопросу о разрешимости системы (17) для возвратной цепи.

Теорема 14. *Пусть цепь Маркова неприводима и возвратна. Система уравнений* (17) *не может иметь больше одного решения, удовлетворяющего условиям*

$$\sum_{i \in I} |x_i| < \infty, \qquad \sum_{i \in I} x_i = 1. \tag{20}$$

*Если цепь возвратна и положительна, то решение системы* (17), *удовлетворяющее соотношениям* (20), *имеет вид*

$$x_i = v_i = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, i). \tag{21}$$

*Если же цепь возвратна и нулевая, то единственное абсолютно суммируемое решение системы* (17) *тривиально* ($x_i = 0$).

*Доказательство.* Сначала докажем единственность решения системы (17) при условиях (20). Пусть такое решение существует. Умножая (17) на $p(i, k)$ и суммируя по всем $i$, получим

$$x_k = \sum_{i \in I} x_i p(i, k) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} x_j p(j, i) p(i, k) =$$
$$= \sum_{i \in I} x_j \sum_{i \in I} p(j, i) p(i, k) = \sum_{j \in I} x_j p^{(2)}(j, k).$$

Перестановка порядка суммирования возможна в силу абсолютной сходимости соответствующего двойного ряда. Аналогично получаем

$$x_k = \sum_{j \in I} x_j p^{(n)}(j, k). \tag{22}$$

Положим

$$s_N(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, k);$$

тогда

$$x_k = \sum_{j \in I} x_j s_N(j, k).$$

Принимая во внимание, что $s_N(j, k) \to m_k^{-1}$ и абсолютную сходимость ряда $\sum_{j \in I} x_j$, переходя к пределу в последнем равенстве, получим

$$x_k = \sum_{j \in I} x_j m_k^{-1} = m_k^{-1}, \tag{23}$$

что и доказывает единственность решения системы (17), (20). Отсюда вытекает, что если цепь возвратна и нулевая, то $x_k = 0$ для всех $k \in I$.

Докажем теперь, что для положительной возвратной цепи величины (21) образуют требуемое решение системы (17). Пусть $I'$ — произвольное конечное подмножество $I$. Из неравенства $p^{(n+1)}(k, i) \geqslant \sum_{j \in I'} p^{(n)}(k, j) p(j, i)$ получаем

$$s_{N+1}(k, i) - \frac{1}{N+1} p(k, i) \geqslant \frac{N}{N+1} \sum_{j \in I'} s_N(k, j) p(j, i),$$

откуда после перехода к пределу при $N \to \infty$ вытекает, что

$$v_j \geqslant \sum_{j \in I'} v_j p(j, i).$$

Полагая теперь $I' \to I$, получим $v_i \geqslant \sum_{j \in I} v_j p(j, i)$. Умножая последнее неравенство на $p(i, k)$ и суммируя по $k$, придем к неравенствам $v_k \geqslant \sum_{i \in I} v_i p(i, k) \geqslant \sum_{i \in I} v_i p^{(2)}(i, k)$ и, продолжая этот процесс, к неравенствам $v_k \geqslant \sum_{j \in I} v_i p^{(n)}(i, k)$ при любом $n \geqslant 1$. Если бы в последнем соотношении хотя бы при одном $k$ имел место знак строгого неравенства, то мы имели бы

$$\sum_{k \in I} v_k > \sum_{j \in I} v_i \sum_{k \in I} p^{(n)}(i, k) = \sum_{i \in I} v_i,$$

что невозможно. Поэтому

$$v_k = \sum_{i \in I} v_i p^{(n)}(i, k), \qquad k \in I, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

В частности, величины $v_i$ образуют решение системы (17). Из (24) получаем

$$v_l = \sum_{i \in I} v_i s_N(i, k). \tag{25}$$

Заметим, что из неравенства $\sum_{k \in I'} p^{(n)}(i, k) \leqslant 1$ вытекает $\sum_{k \in I'} s_N(i, k) \leqslant 1$ и $\sum_{k \in I'} v_k \leqslant 1$ при любом конечном $I' \subset I$. Отсюда $\sum_{k \in I} v_k \leqslant 1$. Поэтому в (25) можно перейти к пределу при $N \to \infty$, после чего получим $v_k = \sum_{i \in I} v_i v_k$, откуда $\sum_{i \in I} v_i = 1$. Таким образом, решение $v_i$ системы (17) удовлетворяет условиям (20). ∎

Замечание. Если цепь Маркова произвольна, $\{x_i, i \in I\}$ — абсолютно суммируемое решение системы (17), $k$ — невозвратное состояние, то $x_k = 0$.

Это утверждение следует из возможности перехода к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (22) и из соотношения $\lim_{n \to \infty} p^{(n)}(j, k) = 0$, имеющего место для произвольного невозвратного $k$.

Следствия.

1. *Для того чтобы неприводимая цепь Маркова была положительной возвратной, необходимо и достаточно, чтобы система* (17) *обладала нетривиальным абсолютно суммируемым решением* $\{x_i, i \in I\}$. *При этом* $x_i = cv_i$, *где* $c$ — *постоянная*, $v_i > 0$.

2. *Неприводимая цепь Маркова имеет инвариантное начальное распределение тогда и только тогда, когда она положительная возвратная.*

3. *Если цепь неприводима, положительна и апериодична, то единственное решение системы* (17), *удовлетворяющее* (20), *имеет вид*

$$x_i = v_i = \lim_{n \to \infty} p^{(n)}(j, i). \tag{26}$$

Последнее утверждение вытекает из того, что для положительной апериодической цепи пределы $\lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}(j, i)$ существуют, так что (17) следует из (21).

Из предыдущей теоремы вытекает, что для нулевой возвратной цепи система (17) не может иметь нетривиального абсолютно суммируемого решения. Однако она обладает важным неотрицательным несуммируемым решением. Чтобы получить это решение, введем вероятности перехода с запрещениями (табу-вероятности). Это понятие является обобщением понятия вероятности первого попадания. Оно уже встречалось при доказательстве теоремы 13. *Табу-вероятность* ${}_lp^{(n)}(i, j)$ есть вероятность попасть на $n$-м шаге в состояние $j$ из начального состояния $i$, не посещая при этом в моменты времени $1, 2, \ldots, n-1$ состояния $l$. Таким образом,

$$ {}_lp^{(n)}(i, j) = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1},\\ j_r \neq l,\, r=1, \ldots, n-1}} p(i, j_1)\, p(j_1, j_2) \ldots p(j_{n-1}, j), \quad n \geqslant 1. $$

Очевидно,

$$ {}_lp^{(1)}(i, j) = p(i, j), \quad {}_jp^{(n)}(i, j) = f^{(n)}(i, j). $$

Положим еще

$$ {}_lp^{(0)}(i, j) = \delta(i, j). $$

Аналогично вводятся табу-вероятности ${}_Hp^{(i, j)}$, когда запрещенным является некоторое множество состояний $H$. Если запрещены два состояния $l$, $j$, то табу-вероятность ${}_{\{l, j\}}p^{(n)}(i, j)$ логично обозначить через ${}_lf^{(n)}(i, j)$. Это есть вероятность, выходя из начального состояния $i$, впервые попасть в состояние $j$ на $n$-м шаге, не заходя до этого в состояние $l$.

Отметим следующие два равенства:

$$ {}_lp^{(n)}(i, j) = \sum_{k=1}^{n} {}_lf^{(k)}(i, j)\, {}_lp^{(n-k)}(j, j), \tag{27} $$

$$ {}_lp^{(n)}(i, j) = \sum_{k=1}^{n} {}_lp^{(k)}(i, i)\, {}_{\{i, l\}}p^{(n-k)}(i, j). \tag{28} $$

В частности, из формулы (28) следует (при $l = j$)

$$ f^{(n)}(i, j) = \sum_{k=1}^{n} {}_jp^{(k)}(i, i)\, {}_if^{(n-k)}(i, j). \tag{29} $$

Введем производящие функции

$$ {}_lP_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_lp^{(n)}(i, j)\, z^n, $$

$$ {}_lF_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_lf^{(n)}(i, j)\, z^n, \quad {}_lf^{(0)}(i, j) = 0. $$

Правые части равенств (27) и (29) представляют собой свертки двух последовательностей, поэтому

$$ {}_lP_{ij}(z) = {}_lF_{ij}(z)\,{}_lP_{jj}(z), \quad F_{ij}(z) = {}_jP_{ii}(z)\,{}_iF_{ij}(z). \tag{30}$$

Заметим, что ряды ${}_iF_{ij}(z)$ сходятся при $z=1$, причем если состояния $i$ и $j$ сообщаются, то ${}_iF_{ij}(1) > 0$. При этом предположении второе из равенств (30) показывает, что существует конечный предел ${}_jP_{ii}(z)$ при $z \to 1$ и, следовательно, ${}_jP_{ii}(1) < < \infty$. Положим

$$ {}_lG(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_lp^{(n)}(i, j). \tag{31}$$

Таким образом, если состояния $i$ и $j$ сообщаются, то

$$ {}_jG(i, i) = \frac{F_{ij}(1)}{{}_iF_{ij}(1)} < \infty. \tag{32}$$

С другой стороны, первое из соотношений (30) дает

$$ {}_iG(i, j) = {}_iF_{ij}(1)\,{}_iG(j, j),$$

откуда

$$ {}_iG(i, j) \leqslant {}_iG(j, j) < \infty. \tag{33}$$

Возвращаясь к решению системы (17), докажем следующую теорему.

Теорема 15. *Пусть $l$ — произвольное состояние неприводимой возвратной цепи Маркова. Система* (17) *имеет неотрицательное решение*

$$ x_l = 1, \quad x_i = {}_lG(l, i) \qquad (i \neq l) \quad i \in I.$$

*Доказательство.* Положим

$$ u_l = 1, \quad u_i = {}_lG(l, i) \qquad (i \neq l). \tag{34}$$

Имеем при $i \neq l$

$$\sum_{j \in I} u_j p(j, i) = p(l, i) + \sum_{j \neq l} {}_lG(l, j)\,p(j, i) =$$

$$= p(l, i) + \sum_{j \neq l} \sum_{n=1}^{\infty} {}_lp^{(n)}(l, j)\,p(j, i) =$$

$$= p(l, i) + \sum_{n=1}^{\infty} {}_lp^{(n+1)}(l, i) = {}_lG(l, i) = u_i;$$

если же $i = l$, то

$$\sum_{j \in I} u_j p(j, l) = p(l, l) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n+1)}(l, l) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(l, l) = 1 = u_l. \ \blacksquare$$

Рассмотрим вопрос о единственности решения системы уравнений (17), удовлетворяющего условиям $u_l = 1$, $u_i \geqslant 0$. С этой целью применим прием, связанный с введением обращенной цепи Маркова.

Предположим сначала, что цепь положительно возвратна, и пусть $\{v_j, j \in I\}$ — инвариантное начальное распределение.

Рассмотрим стационарный марковский процесс, соответствующий начальному распределению $\{v_j, j \in I\}$. Пусть $\mathsf{P}^{(v)}$ — вероятностная мера, соответствующая этому процессу. Введем условные вероятности

$$q_i(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \\ = \mathsf{P}^{(v)}\{\xi(t-1) = j_1, \xi(t-2) = j_2, \ldots, \xi(t-n) = j_n \mid \xi(t) = i\},$$

где $t > n$; имеем

$$q_i(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \frac{v_{j_n} p(j_n, j_{n-1}) p(j_{n-1}, j_{n-2}) \ldots p(j_1, i)}{v_i} = \\ = q(i, j_1) q(j_1, j_2) \ldots q(j_{n-1}, j_n),$$

где $q(i, j) = p(j, i)\dfrac{v_j}{v_i}$.

Таким образом, в стационарной положительно возвратной цепи Маркова условные вероятности перехода, получаемые при изменении направления отсчета времени (от настоящего к прошедшему), также соответствуют некоторой цепи Маркова. При этом следует заметить, что все $v_i > 0$, и поэтому

$$q(i, j) \geqslant 0, \quad \sum_{j \in I} q(i, j) = \frac{1}{v_i} \sum_{j \in I} v_j p(j, i) = \frac{v_i}{v_i} = 1.$$

Аналогичное построение можно осуществить не только для положительной, но и для нулевой возвратной цепи. С этой целью возьмем произвольное положительное решение $\{x_j, j \in I\}$ системы (17) (ниже будет показано, что такое решение существует) и положим

$$q(i, j) = p(j, i)\frac{x_j}{x_i}. \tag{35}$$

Так же как и выше,

$$q(i, j) \geqslant 0, \quad \sum_{j \in I} q(i, j) = 1.$$

Цепь Маркова с переходными вероятностями (35) будем называть *обращением* исходной цепи (*обратной цепью*).

Отметим формулы для вероятностей перехода за $n$ шагов в обращенной цепи. Имеем

$$q^{(n)}(i, j) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}} q(i, j_1) q(j_1, j_2) \ldots q(j_{n-1}, j) =$$
$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}} p(j_1, i) p(j_2, j_1) \ldots p(j, j_{n-1}) \frac{x_j}{x_i},$$

т. е.

$$q^{(n)}(i, j) = \frac{x_j}{x_i} p^{(n)}(j, i). \tag{36}$$

Отсюда вытекает: если исходная цепь неприводима, возвратна, положительная или нулевая, то такой же будет обращенная цепь.

Применяя предельную теорему для отношений (10) к возвратной цепи, получим

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} q^{(n)}(i, j)}{\sum\limits_{n=0}^{N} q^{(n)}(j, j)} = 1.$$

Воспользовавшись формулами (36), будем иметь

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, i)}{\sum\limits_{n=0}^{N} p^{(n)}(j, j)} = \frac{x_i}{x_j}. \tag{37}$$

Отсюда вытекает

Теорема 16. *Для неприводимой возвратной цепи неотрицательное решение системы* (17) *такое, что* $x_l = 1$, *единственно. При этом* $x_i = {}_lG(l, i)$ *и*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, i)}{\sum\limits_{n=0}^{N} p^{(n)}(j, j)} = {}_jG(j, i). \tag{38}$$

Формула (38) следует из единственности решения системы (17) и теоремы 15, а единственность — из формулы (37) в предположении, что $x_j > 0$ для всех $j$. Таким образом, в силу теоремы 15 достаточно показать, что если $\{x_j, j \in I\}$ — неотрицательное нетривиальное решение системы (17), то $x_j > 0$. Последнее можно получить следующим образом. Для неотрицательного решения системы (17) имеем

$$x_i = \sum_j x_j p(j, i) = \sum_j \sum_k x_k p(k, j) p(j, i) =$$
$$= \sum_k x_k \sum_j p(k, j) p(j, i) = \sum_k x_k p^{(2)}(k, i).$$

По индукции легко получить, что $x_i = \sum_{k \in I} x_k p^{(n)}(k, i)$. Пусть $x_l > 0$; для любого $i$ найдется $n$ такое, что $p^{(n)}(l, i) > 0$; поэтому $x_i \geqslant x_l p^{(n)}(l, i) > 0$. Построив для данного решения системы (17) обращенную цепь и положив $x_l = 1$, из (37) получим единственность $x_i, i \in I$. В силу теоремы 15 $x_i = {}_lG(l, i)$. ■

Замечание. Формула (37) является обобщением соотношения $\lim\limits_{N \to \infty} N^{-1} \sum\limits_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, i) = v_i$, где $\{v_i\}$ — инвариантное начальное распределение, имеющего место для неприводимой положительной возвратной цепи.

Теорема 16 может быть усилена.

Теорема 17. *Для неприводимой возвратной цепи Маркова система неравенств*

$$x_i \geqslant \sum_{j \in I} x_j p(j, i), \qquad x_i \geqslant 0, \quad x_l = 1, \tag{39}$$

*имеет единственное решение, и при этом* $x_i = \sum x_j p(j, i)$, $i \in I$.

В силу теоремы 16 достаточно доказать единственность решения системы (39). Введем обращенную марковскую цепь с вероятностями перехода $q(i, j) = p(j, i) \dfrac{u_j}{u_i}$, где $u_i$ — положительное решение системы (17). Она будет неприводимой и возвратной. Имеем

$$\sum_j q(i, j) \frac{x_j}{u_j} = \sum_j p(j, i) \frac{x_j}{u_i} \leqslant \frac{x_i}{u_i}, \qquad \frac{x_l}{u_l} = 1.$$

Но в силу теоремы 13 система неравенств

$$\sum_j q(i, j) y_j \leqslant y_i, \qquad y_l = 1,$$

имеет единственное неотрицательное решение $y_i = 1$. Следовательно, $x_i = u_i$ для всех $i \in I$. ■

ГЛАВА IV

# СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

## § 1. Определение случайной функции

В главе I случайная функция была определена как семейство случайных величин, зависящих от параметра. Там же указывались затруднения, связанные с пониманием этого определения в широком смысле, т. е. как набора конечномерных функций распределения, удовлетворяющих условиям согласованности. Аксиоматика теории вероятностей непосредственно подсказывает, что под случайной функцией естественно понимать произвольное семейство случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

Определение. *Пусть* $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — *некоторое вероятностное пространство. Функция двух переменных* $g(\theta, \omega) = \xi(\theta)$, *определенная при* $\theta \in \Theta$, $\omega \in \Omega$, *принимающая значения в метрическом пространстве* $X$, $\mathfrak{S}$-*измеримая, как функция* $\omega$ *при каждом* $\theta \in \Theta$, *называется случайной функцией. Множество* $\Theta$ *называется областью определения случайной функции, а* $X$ — *ее областью значений.*

Представляет интерес следующий частный случай общего определения. Предположим, что $\Omega$ является функциональным пространством, $\omega = \omega(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $\sigma$-алгебра $\mathfrak{S}$ содержит все множества пространства $\Omega$ вида

$$\{\omega\colon \omega(\theta) \in A\},$$

каково бы ни было $\theta \in \Theta$ и борелевское множество $A \in X$, $\mathsf{P}$ — произвольная вероятностная мера на $\mathfrak{S}$. Естественно сопоставить с таким вероятностным пространством случайную функцию $g(\theta, \omega) = \omega(\theta)$. В некоторых задачах удобно отождествлять случайную функцию $g(\theta, \omega) = \omega(\theta)$ с вероятностным пространством $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ описанного типа.

Легко заметить, что общее определение случайной функции можно свести к только что описанному частному случаю. Действительно, если случайная функция $\xi(\theta)$ задана как функция двух переменных, $\xi(\theta) = g(\theta, \omega)$, то, положив $u = g(\theta, \omega)$, где

$\omega$ фиксировано, $\omega \in \Omega$, и обозначив через $U$ множество всех функций $u = g(\theta, \omega)$, получаемых, когда $\omega$ пробегает $\Omega$, получим некоторое отображение $T$ множества $\Omega$ на $U$. При этом $\sigma$-алгебра $\mathfrak{S}$ множеств $\Omega$ отображается в некоторую $\sigma$-алгебру $\mathfrak{F}$ множеств $U$, а вероятностная мера $\mathsf{P}$ на $\mathfrak{S}$ отображается в вероятностную меру $\mathsf{P}'$ на $\mathfrak{F}$ (см. § 6 гл. II). Для любого фиксированного $\theta$ множество $\{u: u = g(\theta, \omega) < x\}$ принадлежит $\mathfrak{F}$, так как $T^{-1}\{u: u = g(\theta, \omega) < x\} = \{\omega: g(\theta, \omega) < x\} \in \mathfrak{S}$.

Таким образом, получено вероятностное пространство $\{U, \mathfrak{F}, \mathsf{P}'\}$, где $U$ — некоторое множество функций $u = u(\theta)$, причем для любых $n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ ($\theta_k \in \Theta, k = 1, \ldots, n$) распределение последовательности случайных величин на $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$

$$g(\theta_1, \omega),\ g(\theta_2, \omega),\ \ldots,\ g(\theta_n, \omega)$$

совпадает с распределением последовательности

$$u(\theta_1),\ u(\theta_2),\ \ldots,\ u(\theta_n)$$

случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $\{U, \mathfrak{F}, \mathsf{P}'\}$.

Сформулируем теперь принципиально важную для дальнейшего точку зрения об эквивалентности случайных функций. При решении многих задач нет оснований различать случайные функции, получаемые друг из друга преобразованиями вероятностного пространства. В этом направлении можно пойти еще дальше. С практической точки зрения эксперимент позволяет различать только гипотезы, относящиеся к конечномерным распределениям случайной функции. Поэтому принято считать, что опытные данные не позволяют различать две случайные функции $\xi(\theta)$ и $\xi'(\theta)$, у которых совпадают все конечномерные распределения, т. е. совместные распределения последовательностей

$$\xi(\theta_1),\ \xi(\theta_2),\ \ldots,\ \xi(\theta_n) \tag{1}$$

и

$$\xi'(\theta_1),\ \xi'(\theta_2),\ \ldots,\ \xi'(\theta_n) \tag{2}$$

для любых целых $n \geqslant 1$ и $\theta_k \in \Theta$, $k = 1, \ldots, n$. В соответствии с этим примем следующее определение.

Определение. *Две случайные функции $\xi(\theta)$ и $\xi'(\theta)$ с одной и той же областью определения $\Theta$ называются стохастически эквивалентными в широком смысле, если для любого целого $n \geqslant 1$ и любых $\theta_k \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots, n$, совместные распределения последовательностей случайных величин* (1) и (2) *совпадают.*

В дальнейшем часто применяется понятие стохастической эквивалентности случайных функций в более узком смысле.

Определение. *Две случайные функции* $g_1(\theta, \omega)$, $g_2(\theta, \omega)$ $(\theta \in \Theta, \omega \in \Omega)$, *заданные на одном и том же вероятностном пространстве* $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, *называются стохастически эквивалентными, если для любого* $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{P}\{g_1(\theta, \omega) \neq g_2(\theta, \omega)\} = 0.$$

Очевидно, что если $g_1(\theta, \omega)$ и $g_2(\theta, \omega)$ стохастически эквивалентны, то они стохастически эквивалентны в широком смысле.

Рассмотрим несколько примеров случайных функций.

а) Случайное колебание $\zeta(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, рассмотренное в § 5 гл. I,

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{iu_k t}, \qquad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

$\alpha_k$, $\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — случайные величины, можно представить в виде $\zeta(t) = g(t, \omega)$, где $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — точка в $2n$-мерном вещественном пространстве $\mathscr{R}^{2n}$ и $g(t, \omega)$ при фиксированном $t$ является линейной функцией от $\omega$, а при фиксированном $\omega$ — суммой тригонометрических функций от $t$. Вероятность $\mathsf{P}$ в $\mathscr{R}^{2n}$ задается совместным распределением случайных величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. С другой стороны, процесс $\zeta(t)$ можно рассматривать как вероятностное пространство $\{U, \mathfrak{S}, \mathsf{P}'\}$, где $U$ — пространство всех комплекснозначных функций вида $u = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{iu_k t}$ с заданным базисом показателей $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Мера $\mathsf{P}'$ в $U$ индуцируется мерой $\mathsf{P}$ посредством отображения $\omega \to u = g(t, \omega)$.

б) Рассмотрим процесс $\xi(t)$, выборочные функции которого постоянны на промежутках времени $[k-1, k]$ и принимают на них значения 0 и 1 с одинаковыми вероятностями, не зависящими от значений $\xi(t)$ на предшествующих отрезках времени.

Между выборочными функциями процесса $\xi(t)$ и бесконечными двоичными дробями можно установить взаимно однозначное соответствие. Его можно реализовать схемой

$$\xi(t) \to \omega = 0,\ x_1 x_2 \ldots x_n \ldots, \tag{3}$$

где $x_n$ — значение $\xi(t)$ на отрезке времени $[n-1, n]$. Каждой бесконечной двоичной дроби $\omega$ соответствует некоторая точка отрезка $[0, 1]$. Взаимная однозначность этого соответствия нарушается только для дробей, у которых все двоичные знаки, начиная с некоторого места, совпадают. Двум таким различным дробям соответствует одна и та же точка отрезка $[0, 1]$ (исключение составляют только точки 0 и 1, имеющие единственную запись в виде бесконечной двоичной дроби: $0 = 0{,}00 \ldots 0 \ldots$, $1 = 0{,}11 \ldots 1 \ldots$). Выборочные функции, соответствующие подобным бесконечным двоичным дробям, становятся постоянными, начиная с некоторого момента времени. Обозначим это множество функций $\mathfrak{A}$, а через $\mathfrak{A}_n$ обозначим событие, состоящее в том, что случайная функция $\xi(t)$ окажется постоянной, начиная с момента времени $n$. Тогда $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$. Пусть еще $\mathfrak{A}_{nm}$ означает, что функция $\xi(t)$ постоянна на отрезке времени $[n, n+m]$. События $\mathfrak{A}_{nm}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ образуют монотонно убывающую последовательность, $\mathfrak{A}_n = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{nm}$ и

$$\mathsf{P}(\mathfrak{A}_n) = \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}(\mathfrak{A}_{nm}).$$

Так как $\mathsf{P}(\mathfrak{A}_{nm}) = \frac{1}{2^{m-1}}$, то $\mathsf{P}(\mathfrak{A}_n) = 0$ и $\mathsf{P}(\mathfrak{A}) = 0$. Следовательно, если пренебречь случайными функциями $\xi(t)$ из множества $\mathfrak{A}$, имеющего вероятность 0, то между точками отрезка $[0, 1]$ и случайными функциями $\xi(t)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть $\Delta$ — отрезок с двоично-рациональными концами длиною $1/2^n$, т. е. отрезок, записываемый в двоичной системе счисления в виде $[0, j_1 \ldots j_n;\ 0, j_1 \ldots j_n + 1)$, где $j_k$ принимают значения 0 и 1, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Множество $A$ случайных функций $\xi(t)$, соответствующих точкам $\omega \in \Delta$, состоит из функций, удовлетворяющих условиям

$$\xi(0) = j_1,\ \xi(1) = j_2,\ \ldots,\ \xi(n-1) = j_n.$$

Вероятность того, что $\xi(t) \in A$, равна $1/2^n$, что совпадает с длиною отрезка $\Delta$. Отсюда следует, что если $B$ — любое борелевское множество точек на отрезке $[0, 1]$, а $B'$ — множество функций $\xi(t)$, соответствующее в силу (3) числовому множеству $B$, то $\mathsf{P}(B')$ совпадает с лебеговой мерой $B$. Таким образом, выбор случайной функции $\xi(t)$ эквивалентен случайному выбору точки $\omega$ на отрезке $[0, 1]$ с заданной на нем лебеговой мерой. Подробнее это означает, что случайный процесс полностью описывается следующим образом. Производится случайный выбор точки из отрезка $[0, 1]$. При этом вероятность того, что точка $\omega \in B$, где $B$ — борелевское множество отрезка $[0, 1]$, равна лебеговой мере $B$. Координата точки $\omega$ записывается в двоичной системе счисления: $\omega = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ Тогда значение функции $\xi(t)$ на отрезке $[(n-1), n]$ равно $x_n$. В соответствии с этим случайную функцию $\xi(t)$ можно записать в виде

$$\xi(t) = f(t, \omega),$$

где $f(t, \omega)$ — вполне определенная неслучайная функция двух переменных $t$ и $\omega$ $(0 \leqslant t < \infty, 0 \leqslant \omega \leqslant 1)$.

в) Рассмотрим произвольную случайную функцию в широком смысле со значениями в метрическом полном и сепарабельным пространстве $X$ и с областью определения $\Theta$. Как показано в § 2 гл. II, всегда можно построить вероятностное пространство $\{\Omega, \tilde{\mathfrak{C}}, \mathsf{P}\}$, где $\Omega$ — множество всех отображений $\omega = \omega(\theta)$ множества $\Theta$ в $X$ такое, что распределение последовательности $\{\omega(\theta_1), \ldots, \omega(\theta_n)\}$ в $X^n$ при любых $n$, $\theta_k \in \Theta$, $k = 1, \ldots, n$, совпадает с соответствующим распределением заданной случайной функции в широком смысле. Иными словами, для произвольной случайной функции в широком смысле можно построить стохастически эквивалентную в широком смысле случайную функцию (представление в терминологии § 2 гл. II).

К сожалению, представление случайной функции, даваемое теоремой Колмогорова, не может нас вполне устроить. Элементарными событиями построенного вероятностного пространства являются произвольные функции $\omega = \omega(\theta)$ переменной $\theta$, и мы лишены возможности говорить о таких свойствах функций $\omega(\theta)$, как их непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость и т. п. (при этом мы, конечно, считаем, что $\Theta$ и $X$ таковы, что соответствующие понятия имеют смысл).

Далее, в построенном вероятностном пространстве нет возможности рассматривать важные при решении многих конкретных вопросов события вида

$$\{\omega(\theta) \in A \text{ для всех } \theta \in Q\}, \tag{4}$$

где $Q$ — несчетное подмножество из $\Theta$ и $A \subset X$. Действительно, событию

$$\{\omega\colon \omega = \omega(\theta) \in A \text{ для всех } \theta \in Q\} = \bigcap_{\theta \in Q} \{\omega\colon \omega(\theta) \in A\}$$

в $\Omega$ соответствует множество, являющееся пересечением несчетного числа множеств из $\tilde{\mathfrak{C}}$, и, следовательно, оно не обязано принадлежать $\sigma$-алгебре $\tilde{\mathfrak{C}}$. Эти соображения подсказывают, что при построении представления семейства распределений (1) желательно, чтобы пространство $\Omega$ было как можно более узким, т. е. чтобы функции из $\Omega$ обладали возможно лучшими аналитическими свойствами.

Например, для возможности решения только что упомянутой задачи о вычислении вероятности события (4) желательно, чтобы случайная функция $g(\theta, \omega)$, являющаяся представлением семейства распределений (1), обладала следующим свойством:

c) Для достаточно широких классов множеств $\mathfrak{A}$ из $X$ и $\mathfrak{Q}$ из $\Theta$ существует счетное множество $S$ точек $\theta_j (\in \Theta)$ такое, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ и $Q \in \mathfrak{Q}$ множество точек

$$\{\omega:\ g(\theta, \omega) \in A \text{ для всех } \theta \in Q\}, \quad A \in \mathfrak{A}, \quad Q \in \mathfrak{Q}, \tag{5}$$

отличается от множества

$$\{\omega:\ g(\theta_j, \omega) \in A \text{ для всех } \theta_j \in S \cap Q\} \tag{6}$$

только на подмножество некоторого фиксированного множества $N$ $\mathsf{P}$-меры 0, не зависящего от $A$ и $Q$.

Так как множество (6) является пересечением не более чем счетной последовательности измеримых множеств, то оно само измеримо и вместе с ним измеримо множество (5) (в силу полноты меры $\mathsf{P}$). При этом вероятности событий (5) и (6) равны между собой.

Случайная функция, удовлетворяющая условию c), называется *сепарабельной* (относительно класса множеств $\mathfrak{A}$).

Заметим, что если $\Theta$ — сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{Q}$ — класс открытых множеств, $\mathfrak{A}$ — класс замкнутых множеств пространства $X$, а функция $g(\theta, \omega)$ почти для всех $\omega$ является непрерывной функцией аргумента $\theta$ при фиксированном $\omega$, то случайная функция $g(\theta, \omega)$ сепарабельна относительно класса замкнутых множеств $\mathfrak{A}$.

В задачах, связанных с интегрированием случайных величин относительно некоторой меры $\{m, \mathfrak{K}\}$ на $\Theta$, желательно, чтобы функция $g(\theta, \omega)$ была $\mathfrak{K}$-измеримой как функция от $\theta$ при фиксированном $\omega$ $\mathsf{P}$-почти для всех $\omega$.

В других случаях необходимо найти представление заданной в широком смысле функции, при котором почти все выборочные функции непрерывны, или имеют только разрывы первого рода, или $k$ раз дифференцируемы и т. п. Конечно, следует ожидать, что возможность получения представления, обладающего специальными свойствами, определяется конечномерными распределениями случайной функции.

Аналогичные задачи возникают не только для случайных функций в широком смысле. Случайная функция $g(\theta, \omega)$ может обладать «патологическими» свойствами, но для нее может существовать стохастически эквивалентная «сглаженная» функция $g^*(\theta, \omega)$, $\mathsf{P}\{g(\theta, \omega) \neq g^*(\theta, \omega)\} = 0$, которая уже не «патологична». В соответствии с принятой точкой зрения на стохастически эквивалентные функции при решении интересующих нас задач допустима замена такой функции на стохастически эквивалентную регулярную функцию $g^*(\theta, \omega)$.

Приведем один пример. Пусть $A$ — множество рациональных чисел на прямой $(-\infty, \infty)$, $\chi(t)$ — индикатор множества $A$ и $\omega$ — равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина.

Положим $g(t, \omega) = \chi(t + \omega)$. При любом фиксированном $\omega$ функция $g(t, \omega)$ всюду разрывна. С другой стороны, при фиксированном $t$ функция $g(t, \omega)$ равна 0 с вероятностью 1. Таким образом, с вероятностью 1 всюду разрывная случайная функция $g(t, \omega)$ стохастически эквивалентна функции $g^*(t, \omega) \equiv 0$.

В настоящей главе рассматриваются различные условия, при которых для данной случайной функции существует стохастически эквивалентная (или стохастически эквивалентная в широком смысле) функция, обладающая определенными свойствами регулярности.

## § 2. Сепарабельные случайные функции

Идея сепарабельной случайной функции была уже введена в § 1. Оказывается, что свойство сепарабельности не является жестким ограничением на случайную функцию. При достаточно широких предположениях, относящихся только к природе области определения $\Theta$ и области значений $X$ случайной функции, существует сепарабельная случайная функция, стохастически эквивалентная данной. Следует, однако, заметить, что при построении эквивалентной сепарабельной случайной функции иногда приходится расширять область значений функции, превращая ее в компактное множество.

В настоящем параграфе постоянно предполагается, что $\Theta$ и $X$ — метрические пространства с расстоянием $r(\theta_1, \theta_2)$ и $\rho(x_1, x_2)$ соответственно, причем $\Theta$ сепарабельно. Роль классов множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{Q}$ из определения сепарабельности играют замкнутые множества в $X$ и открытые множества в $\Theta$. Таким образом, сепарабельность случайной функции в дальнейшем понимается в следующем смысле.

Определение. *Случайная функция $g(\theta, \omega)$ называется сепарабельной, если существуют в $\Theta$ всюду плотное множество точек $\{\theta_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, и в $\Omega$ множество $N$ вероятности 0 такие, что для любого открытого множества $G \subset \Theta$ и любого замкнутого множества $F \subset X$ два множества*

$$\{\omega\colon\ g(\theta_j, \omega) \in F,\ \theta_j \in G\},$$

$$\{\omega\colon\ g(\theta, \omega) \in F \text{ для всех } \theta \in G\}$$

*отличаются друг от друга только на подмножество $N$.*

Счетное множество точек $\theta_j$, фигурирующее в этом определении, называют *множеством сепарабельности* случайной функции.

Теорема 1. *Пусть $X$ и $\Theta$ — метрические пространства, $X$ компактно, $\Theta$ сепарабельно. Произвольная случайная функция $g(\theta, \omega)$, заданная на $\Theta$ со значениями в $X$, стохастически эквивалентна некоторой сепарабельной случайной функции.*

Докажем сначала три леммы. Пусть $\tilde{g}(\theta, \omega)$ — сепарабельная случайная функция, $I$ — множество сепарабельности и $N$ — соответствующее исключительное множество точек $\omega$.

Обозначим через $V$ класс всех открытых сфер пространства $\Theta$ с рациональными радиусами и с центрами в точках фиксированного счетного всюду плотного множества в $\Theta$. Класс $V$ счетен. С другой стороны, произвольное открытое множество $G$ из $\Theta$ может быть представлено как сумма (счетного числа) сфер из $V$.

Пусть $A(G, \omega)$ — замыкание множества значений функции $\tilde{g}(\theta, \omega)$, когда $\theta$ пробегает множество $I \cap G$, а

$$A(\theta, \omega) = \bigcap_{S \in V} A(S, \omega)$$

есть пересечение всех $A(S, \omega)$, когда $S$ пробегает совокупность сфер из $V$, содержащих точку $\theta$ в качестве своего элемента. Семейство замкнутых множеств $A(S, \omega)$ $(\theta \in S)$ является центрированным, т. е. любое конечное число множеств этого семейства имеет общие точки, и в силу компактности $X$ их пересечение $A(\theta, \omega)$ непусто. Кроме того, $A(\theta, \omega)$ замкнуто. Из сепарабельности функции $\tilde{g}(\theta, \omega)$ следует (при $\omega \notin N$)

$$\tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega). \tag{1}$$

Обратно, если (1) выполняется для всякого $\omega \notin N$, $\mathsf{P}(N) = 0$, то $\tilde{g}(\theta, \omega)$ — сепарабельная случайная функция. Действительно, если $\tilde{g}(\theta, \omega) \in F$ для всех $\theta \in I \cap S$, где $F$ — некоторое замкнутое множество в $X$ и $S \in V$, то $A(\theta, \omega) \subset A(S, \omega) \subset F$ для всякого $\theta \in S$ и, следовательно, $\tilde{g}(\theta, \omega) \in F$ для всех $\theta$ из $S$.

Если $G$ — произвольное открытое множество в $\Theta$, то достаточно представить его в виде суммы $G = \bigcup_k S_k$ множеств из $V$, чтобы убедиться на основании только что сказанного, что из

$$\tilde{g}(\theta, \omega) \in F \quad \text{для всех} \quad \theta \in I \cap G, \ \omega \notin N,$$

следует

$$\tilde{g}(\theta, \omega) \in F \quad \text{для любого} \quad \theta \in G.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы случайная функция $\tilde{g}(\theta, \omega)$ была сепарабельной, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество $N$, $\mathsf{P}(N) = 0$, такое, чтобы при $\omega \notin N$ выполнялось* (1).

Следовательно, чтобы построить для $g(\theta, \omega)$ сепарабельную стохастически эквивалентную функцию, достаточно найти функцию $\tilde{g}(\theta, \omega)$, удовлетворяющую (1) и такую, что для любого $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{P}\{\tilde{g}(\theta, \omega) \neq g(\theta, \omega)\} = 0.$$

Лемма 2. *Пусть $B$ — произвольное борелевское множество в $X$. Существует конечная или счетная последовательность точек $\theta_1, \theta_2, \ldots$ такая, что множество $N(\theta, B) = \{\omega: g(\theta_k, \omega) \in B, k = 1, 2, \ldots, g(\theta, \omega) \notin B\}$ имеет вероятность 0 при любом $\theta \in \Theta$.*

Доказательство. Пусть $\theta_1$ — любое. Если $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ построены, то полагаем

$$m_k = \sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}\{g(\theta_1, \omega) \in B, \ldots, g(\theta_k, \omega) \in B; \ g(\theta, \omega) \notin B\}.$$

Последовательность $m_k$ монотонно убывает. Если $m_k = 0$, то соответствующая последовательность построена. Если $m_k > 0$, то пусть $\theta_{k+1}$ — такая точка, что

$$\mathsf{P}\{g(\theta_1, \omega) \in B, \ldots, g(\theta_k, \omega) \in B, \ g(\theta_{k+1}, \omega) \notin B\} \geqslant \frac{m_k}{2}.$$

Так как множества

$$L_k = \{\omega: \ g(\theta_i, \omega) \in B, \ i = 1, 2, \ldots, k, \ g(\theta_{k+1}, \omega) \notin B\}$$

не имеют общих точек, то

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(L_k) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k.$$

Следовательно, $m_k \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, при любом $\theta$

$$\mathsf{P}\{g(\theta_k, \omega) \in B, \ k = 1, 2, \ldots, g(\theta, \omega) \notin B\} \leqslant \lim m_k = 0. \ \blacksquare$$

Из доказанного нетрудно вывести следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M}_0$ — счетный класс множеств, а $\mathfrak{M}$ — класс, состоящий из пересечений всевозможных последовательностей множеств из $\mathfrak{M}_0$. Существует конечная или счетная последовательность точек $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$ и для каждого $\theta$ такое множество $N(\theta)$, что*

$$\mathsf{P}\{N(\theta)\} = 0$$

*и*

$$\{\omega: \ g(\theta_n, \omega) \in B, \ n = 1, 2, \ldots, g(\theta, \omega) \notin B\} \subset N(\theta)$$

*для любого $B \in \mathfrak{M}$.*

Для доказательства поступим следующим образом. Пусть $I$ — счетное множество точек из $\Theta$, являющееся суммой последовательностей $\{\theta_n, n = 1, 2, \ldots\}$, построенных для каждого $B \in \mathfrak{M}_0$ в соответствии с леммой 2, и $N(\theta) = \bigcup_{B \in \mathfrak{M}_0} N(\theta, B)$. Если $B' \in \mathfrak{M}$ и $B \supset B'$, $B \in \mathfrak{M}_0$, то

$$\{\omega: \ g(\theta_n, \omega) \in B', \ \theta_n \in I, \ g(\theta, \omega) \notin B\} \subset \{\omega: \ g(\theta_n, \omega) \in B, \\ \theta_n \in I, \ g(\theta, \omega) \notin B\} \subset N(\theta, B) \subset N(\theta).$$

Далее, если $B' = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k \in \mathfrak{M}_0$, то

$$\{\omega\colon g(\theta_n, \omega) \in B', \ \theta_n \in I, \ g(\theta, \omega) \notin B'\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega\colon g(\theta_n, \omega) \in B', \ \theta_n \in I, \ g(\theta, \omega) \notin B_k\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\theta, B_k) \subset N(\theta),$$

что и доказывает лемму. ■

Теперь нетрудно доказать теорему 1.

Фиксируем некоторое счетное всюду плотное множество точек $L$ в $X$ и под $\mathfrak{M}_0$ понимаем класс дополнений к сферам рационального радиуса с центрами в точках $L$. Тогда $\mathfrak{M}$ — класс пересечений множеств из $\mathfrak{M}_0$ содержит все замкнутые множества. Далее, для каждого $S \in V$ рассматриваем случайную функцию $g(\theta, \omega)$ как заданную только для $\theta \in S$ и строим последовательность $I = I(S)$ и множества $N(\theta) = N_S(\theta)$ в соответствии с леммой 3. Пусть

$$J = \bigcup_{S \in V} I(S), \qquad N_\theta = \bigcup_{S \in V} N_S(\theta).$$

Положим

$$\tilde{g}(\theta, \omega) = g(\theta, \omega),$$

если $\theta \in J$ или $g(\theta, \omega) \overline{\in} N_\theta$; если же $g(\theta, \omega) \in N_\theta$, $\theta \notin J$, то определим $\tilde{g}(\theta, \omega)$ любым способом, так чтобы $\tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega)$. Так как для точек $\theta \in J$ значения функций $\tilde{g}(\theta, \omega)$ и $g(\theta, \omega)$ совпадают, то множества $A(\theta, \omega)$, построенные для функций $\tilde{g}(\theta, \omega)$ и $g(\theta, \omega)$, также совпадают. Из определения следует, что

$$\tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega)$$

для любого $\theta$ и $\omega$. Так как $\{\omega\colon g(\theta, \omega) \neq \tilde{g}(\theta, \omega)\} \subset N_\theta$, то $\mathsf{P}\{\tilde{g}(\theta, \omega) = g(\theta, \omega)\} = 1$. ■

Теорема 1 непосредственно обобщается и на случайные функции со значениями в сепарабельных локально компактных пространствах.

Теорема 2. *Пусть $X$ — сепарабельное локально компактное пространство и $\Theta$ — произвольное метрическое сепарабельное пространство. Для любой случайной функции $g(\theta, \omega)$, заданной на $\Theta$ и со значениями в $X$, существует стохастически эквивалентная сепарабельная случайная функция $\tilde{g}(\theta, \omega)$, принимающая значения на некотором компактном расширении $\tilde{X}$ пространства $X$, $\tilde{X} \supset X$.*

Доказательство вытекает из того факта, что всякое локально компактное сепарабельное пространство $X$ можно рассматривать как подмножество некоторого компакта $\tilde{X}$. Например, если

$g(\theta, \omega)$ — случайная функция со значениями в конечномерном пространстве $X$, то, дополняя $X$ одной «бесконечно удаленной» точкой $\infty$, легко получить компактное пространство $\tilde{X} = X \cup \cup \{\infty\}$ с новой метрикой, такой что каждое замкнутое $F \subset X$ (в топологии пространства $X$) является также замкнутым в $\tilde{X}$ (по отношению к новой метрике). При построении сепарабельной реализации случайной функции ей, возможно, придется приписывать дополнительное значение «$\infty$»; но, очевидно, при фиксированном $\theta$ вероятность этого равна 0. ■

Во многих вопросах бывает важным знать, какое множество $J$ может играть роль множества сепарабельности.

Теорема 3. *Пусть $\Theta$ — сепарабельное пространство и $g(\theta, \omega)$ — сепарабельная стохастически непрерывная случайная функция. Тогда любое счетное всюду плотное множество точек из $\Theta$ может служить множеством сепарабельности случайной функции $g(\theta, \omega)$.*

*Доказательство.* Пусть $V = \{S\}$ — счетное множество сфер в $\Theta$, введенное в доказательство теоремы 1, $J = \{\theta_k, k = 1, 2, \ldots \ldots, n, \ldots\}$ — множество сепарабельности случайной функции $g(\theta, \omega)$, $N$ — исключительное множество значений $\omega$, фигурирующих в определении сепарабельности, и $\Lambda$ — произвольное всюду плотное множество точек в $\Theta$. Пусть $B(S, \omega)$ обозначает замыкание множества значений $g(\theta, \omega)$, когда точка $\theta$ пробегает $\Lambda \cap S$, а $N(S, k)$ — событие, состоящее в том, что $g(\theta_k, \omega) \overline{\in} \overline{\in} B(S, \omega)$, если $\theta_k \in S$. События $N(S, k)$ имеют вероятность 0. Действительно, пусть $\gamma_r$, $r = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, — произвольная последовательность точек из $\Lambda \cap S$, сходящаяся к $\theta_k$. Тогда

$$\mathsf{P}\{g(\theta_k, \omega) \notin B(S, \omega)\} \leqslant \mathsf{P}\{\underline{\lim_{r\to\infty}}\, \rho(g(\theta_k, \omega), g(\gamma_r, \omega)) > 0\} \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{P}\left\{\underline{\lim_{r\to\infty}}\, \rho(g(\theta_k, \omega), g(\gamma_r, \omega)) > \frac{1}{n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \underline{\lim_{r\to\infty}}\, \mathsf{P}\left\{\rho(g(\theta_k, \omega), g(\gamma_r, \omega)) > \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

Пусть $N' = \bigcup\limits_{S} \bigcup\limits_{\theta_k \in S} N(S, k)$, тогда $\mathsf{P}(N') = 0$. Если $\omega \notin N \cup N'$ и $g(\gamma, u) \in F$ для всех $\gamma \in \Lambda \cap G$, где $G$ — некоторое открытое множество, а $F \subset X$ замкнуто, то для любого $\theta_k \in G$ и $S$ такого, что $\theta_k \in S \subset G$, имеем

$$g(\theta_k, \omega) \in B(S, k) \subset F.$$

Из определения множества $\{\theta_k\}$ отсюда вытекает, что $g(\theta, \omega) \in \in F$ для всех $\theta \in G$ и $\omega \notin N \cup N'$. Таким образом, множество $\Lambda$ удовлетворяет условию определения множества сепарабельности случайной функции. ■

## § 3. Измеримые случайные функции

Пусть $\Theta$ и $X$ по-прежнему обозначают метрические пространства с расстояниями $r(\theta_1, \theta_2)$, $\rho(x_1, x_2)$ соответственно, $g(\theta, \omega)$ — случайная функция со значениями в $X$ и с областью определения $\Theta$, $\omega$ — элементарное событие вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$.

Допустим, что на $\Theta$ определена $\sigma$-алгебра множеств $\mathfrak{K}$, содержащая борелевские множества, и на $\mathfrak{K}$ — некоторая полная мера $m$. Через $\sigma\{\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}\}$ обозначена наименьшая $\sigma$-алгебра, порожденная в $\Theta \times \Omega$ произведением $\sigma$-алгебр $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{S}$, а через $\tilde{\sigma}\{\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}\}$ — ее пополнение относительно меры $m \times \mathsf{P}$ (см. гл. II, § 2).

Определение. *Случайная функция $g(\theta, \omega)$ называется измеримой, если она измерима относительно $\tilde{\sigma}\{\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}\}$.*

По определению случайная функция $g(\theta, \omega)$ при любом $\theta \in \Theta$ $\mathfrak{S}$-измерима. Если же случайная функция измерима, то в силу теоремы Фубини $g(\theta, \omega)$ $\mathfrak{K}$-измерима, как функция от $\theta$ $\mathsf{P}$-почти для всех $\omega$. Иными словами, ее реализации $\mathfrak{K}$-измеримы с вероятностью единица.

Рассмотрим теперь условия, обеспечивающие существование для данной случайной функции стохастически эквивалентной, измеримой и сепарабельной функции.

Теорема 1. *Пусть $\Theta$ и $X$ — компакты и мера $m$ конечна. Если для $m$-почти всех $\theta$ случайная функция $g(\theta, \omega)$ стохастически непрерывна, то существует измеримая сепарабельная случайная функция $g^*(\theta, \omega)$, стохастически эквивалентная функции $g(\theta, \omega)$.*

В силу теоремы 1 § 2 для функции $g(\theta, \omega)$ существует стохастически эквивалентная сепарабельная случайная функция $\tilde{g}(\theta, \omega)$. Пусть $I$ — множество сепарабельности функции $\tilde{g}(\theta, \omega)$. Как прежде (§ 2), $\tilde{A}(G, \omega)$ обозначает замыкание множества значений $\tilde{g}(\theta, \omega)$, когда $\theta$ пробегает множество $G \cap I$, и $\tilde{A}(\theta, \omega)$ — пересечение всех множеств вида $A(S, \omega)$, где $S$ — произвольная открытая сфера из $V$ (§ 2), содержащая $\theta$. В силу сепарабельности $\tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega)$ почти наверное (т. е. при $\omega \notin N$, где $\mathsf{P}(N) = 0$). С другой стороны, если функция $g'(\theta, \omega)$ такова, что $g'(\theta, \omega) = \tilde{g}(\theta, \omega)$ при $\theta \in I$ и $g'(\theta, \omega) \in \tilde{A}(\theta, \omega)$ $(\omega \notin N'$, $\mathsf{P}(N') = 0)$, то $g'(\theta, \omega)$ — также сепарабельная случайная функция (лемма 1 § 2). Построим функцию $g^*(\theta, \omega)$, обладающую только что указанным свойством, стохастически эквивалентную функции $\tilde{g}(\theta, \omega)$ и измеримую относительно $\sigma$-алгебры $\tilde{\sigma}\{\mathfrak{K} \times \mathfrak{S}\}$. Расположим точки $I$ в последовательность $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots\}$, и пусть $r_n = \min\{r(x_k, x_s), k, s = 1, \ldots, n\}$. Для каждого $n$ построим конечное покрытие множества $\Theta$ сферами $S_1^n, \ldots, S_{j_n}^n$, радиус которых равен $r_n/n$, с центрами в точках $\theta_j^n$. При этом предполагается, что $\theta_j^n = \theta_j$ при $j = 1, \ldots, n$, а остальные точки $\theta_j^n$ $(j = n+1, \ldots, j_n)$ выбраны из $I$ произвольно, лишь бы соответствующие сферы образовывали покрытие $\Theta$.

Положим $\bar{g}_n(\theta, \omega) = \tilde{g}(\theta_j, \omega)$ при $j \in S_k^n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (эти сферы не пересекаются, так что приведенное определение корректно), и $\bar{g}_n(\theta, \omega) = \tilde{g}(\theta_j^n, \omega)$, если $\theta \in S_j^n \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} S_i^n$, $j = n+1, \ldots, r_n$. Заметим, что $\bar{g}_{n+p}(\theta_n, \omega) = \tilde{g}(\theta_n, \omega)$, $\bar{g}_n(\theta, \omega)$ — борелевская функция аргумента $\theta$ при фиксированном $\omega$ и $\sigma\{\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}\}$-измеримая функция по паре аргументов $(\theta, \omega)$. Кроме того,

$$\rho[\bar{g}_n(\theta, \omega), \tilde{g}(\theta, \omega)] = \rho[\tilde{g}(\theta_k^n, \omega), \tilde{g}(\theta, \omega)],$$

причем

$$r(\theta_k^n, \theta) < \frac{r_n}{n}. \tag{1}$$

Если положить

$$G_{np}(\theta) = \mathsf{P}\{\omega: \rho[\bar{g}_n(\theta, \omega), \bar{g}_{n+p}(\theta, \omega)] > \varepsilon\},$$

то в силу условий теоремы $m$-почти для всех $\theta$ $G_{np}(\theta) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$(m \times \mathsf{P})\{(\theta, \omega): \rho[\bar{g}_n(\theta, \omega), \bar{g}_{n+p}(\theta, \omega)] > \varepsilon\} = \\ = \int_\Theta G_{np}(\theta)\, m(d\theta) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для всех $\varepsilon > 0$, т. е. последовательность $\bar{g}_n(\theta, \omega)$ фундаментальна по мере $m \times \mathsf{P}$. Из нее можно выделить подпоследовательность $\bar{g}_{n_k}(\theta, \omega)$, сходящуюся $m \times \mathsf{P}$-почти всюду к некоторой $\sigma\{\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}\}$-измеримой функции $\bar{g}(\theta, \omega)$. Множество точек $\{\theta, \omega\}$, где эта сходимость не имеет места, обозначим через $K$. Из построения следует, что можно считать $(\theta_j, \omega) \notin K$. Очевидно, что при $(\theta, \omega) \notin K$ $\bar{g}(\theta, \omega) \in \tilde{A}(\theta, \omega)$. Далее, если $L$ — множество точек $\Theta$, в которых функция $g(\theta, \omega)$ не является стохастически непрерывной, то из (1) следует, что при $\theta \notin L$

$$\mathsf{P}\{\bar{g}(\theta, \omega) \neq \tilde{g}(\theta, \omega)\} = 0. \tag{2}$$

Положим теперь

$$g^*(\theta, \omega) = \tilde{g}(\theta, \omega), \text{ если } \theta \in L \text{ или если } (\theta, \omega) \in K;$$
$$g^*(\theta, \omega) = \bar{g}(\theta, \omega), \text{ если } \theta \notin L \text{ и } (\theta, \omega) \notin K.$$

Функция $g^*(\theta, \omega)$ совпадает с $\bar{g}(\theta, \omega)$ $m \times \mathsf{P}$-почти для всех $(\theta, \omega)$, и поэтому она $\bar{\sigma}\{\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}\}$-измерима. Далее, $g^*(\theta, \omega) = \tilde{g}(\theta, \omega)$ при $\theta \in I$, так что $A^*(\theta, \omega) = \tilde{A}(\theta, \omega)$, где $A^*(\theta, \omega)$ — ранее определенное множество $A(\theta, \omega)$, построенное по функции $g^*(\theta, \omega)$

и множеству $I$, и $g^*(\theta, \omega) \in \tilde{A}(\theta, \omega) = A^*(\theta, \omega)$. Таким образом, функция $g^*(\theta, \omega)$ сепарабельна. Учитывая (2), получаем $\mathsf{P}\{g^*(\theta, \omega) \neq \tilde{g}(\theta, \omega)\} = 0$ для всех $\theta \in \Theta$, т. е. $g^*(\theta, \omega)$ и $g(\theta, \omega)$ стохастически эквивалентны. ■

Приведем ряд замечаний, обобщающих теорему 1.

Замечание 1. В теореме 1 требование компактности пространств $\Theta$ и $X$ может быть заменено требованием локальной компактности и сепарабельности. Действительно, компактность пространства $X$ нужна была только для возможности сослаться на теорему 1 § 2. Теперь можно ссылаться на теорему 2 § 2. При этом сепарабельное и измеримое представление $g^*(\theta, \omega)$ функции $g(\theta, \omega)$ принимает, вообще говоря, значение из некоторого компактного топологического расширения пространства $X$. Далее, если пространство $\Theta$ локально компактно и сепарабельно, то его можно представить в виде суммы счетного числа компактов. К каждому такому слагаемому в отдельности применимы предыдущие рассуждения, откуда следует утверждение теоремы и для объединения. Более того, при этом мера $m$ не обязана быть конечной, достаточно, чтобы она была $\sigma$-конечной.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 имеет место для того случая, когда $\Theta$ и $X$ — евклидовы конечномерные пространства и мера $\{m, \mathfrak{K}\}$ есть лебегова мера в $\Theta$.

Заметим теперь, что доказательство теоремы 1 упростилось бы, если не требовать сепарабельности измеримого представления заданной случайной функции. Множество $I$ при этом не привлекалось бы к рассмотрению. Из свойств пространства $X$ использовалась бы только полнота пространства.

Замечание 3. Если $X$ — полное метрическое пространство, $\Theta$ — локально компактное сепарабельное пространство, $m$ — $\sigma$-конечная мера на $\sigma$-алгебре, содержащей борелевские множества $\Theta$, то случайная функция $g(\theta, \omega)$ со значениями в $X$, $\theta \in \Theta$, $\omega \in \Omega$, стохастически непрерывная $m$-почти для всех $\theta$, стохастически эквивалентна измеримой случайной функции.

Следующий результат, имеющий важное значение, непосредственно вытекает из теоремы Фубини.

Теорема 2. *Пусть* $\xi(\theta) = g(\theta, \omega)$ — *измеримая случайная функция, принимающая действительные значения. Если*

$$\int_{\Theta} \mathsf{M} |\xi(\theta)| \, m(d\theta) < \infty,$$

*то для любого множества* $B \in \mathfrak{K}$

$$\int_B \mathsf{M}\xi(\theta) \, m(d\theta) = \mathsf{M} \int_B \xi(\theta) \, m(d\theta).$$

Последнее равенство означает перестановочность знака математического ожидания и интеграла по параметру.

## § 4. Критерии отсутствия разрывов второго рода

**Функции без разрывов второго рода.** Пусть $\xi(t)$, $t \in [a, b]$, — случайный процесс со значениями в полном метрическом пространстве $X$.

Определение. *Если с вероятностью 1 выборочные функции процесса для каждого $t \in (a, b)$ имеют пределы слева и справа, а в точке $a$ ($b$) предел справа (слева), то говорят, что процесс не имеет разрывов второго рода на отрезке $[a, b]$.*

В настоящем параграфе постоянно предполагается, что процесс $\xi(t)$ сепарабелен. Множество сепарабельности процесса обозначим через $I$.

Определение. *Функция $x = f(t)$, $x \in X$, имеет на отрезке $[a, b]$ не менее $m$ $\varepsilon$-колебаний ($\varepsilon > 0$), если существуют точки $t_0, \ldots, t_m$, $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant b$, такие, что $\rho(f(t_{k-1}), f(t_k)) > \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, m$.*

Лемма 1. *Для того чтобы функция $y = f(t)$ не имела на отрезке $[a, b]$ разрывов второго рода, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ у нее было только конечное число $\varepsilon$-колебаний на $[a, b]$.*

*Доказательство.* Достаточность. Докажем существование предела $f(t-0)$ для любого $t \in (a, b]$. Пусть $\{t_n\}$ — произвольная последовательность $t_n \uparrow t$. Может найтись только конечное множество чисел $t_{n_k}$ ($n_k < n_{k+1}$) таких, что $\rho\left(f\left(t_{n_k}\right), f\left(t_{n_{k+1}}\right)\right) > \varepsilon$. Следовательно, начиная с некоторого $m$, $\rho(f(t_n), f(t_{n+k})) \leqslant 2\varepsilon$ для всех $n \geqslant m$, $k > 0$, т. е. последовательность $f(t_n)$ сходится. Отсюда вытекает существование $f(t-0) = \lim\limits_{s \uparrow t} f(s)$. Аналогично доказывается существование $f(t+0)$ на $[a, b)$.

Необходимость. Пусть в некоторой точке $t_0$ не существует одностороннего предела (например, предела слева). Тогда найдется последовательность $t_n \uparrow t_0$ такая, что для любого $n$ $\sup\limits_{m > n} \rho(f(t_m), f(t_n)) > \varepsilon$, т. е. число $\varepsilon$-колебаний неограниченно. ■

Заметим, что определение числа $\varepsilon$-колебаний тривиально переносится на случайные функции, рассматриваемые на произвольном множестве действительных значений $t$.

В дальнейшем, рассматривая функции без разрывов второго рода, мы не будем различать две функции, имеющие в каждой точке $t \in [a, b]$ одинаковые пределы слева и справа. Поэтому естественно принять какое-либо стандартное соглашение о значениях этих функций в точке разрыва. Обозначим через $\mathscr{D}[a, b] = \mathscr{D}[a, b; X]$ пространство функций, заданных на $[a, b]$, со значениями в $X$, не имеющих разрывов второго рода и в каждой точке $t \in [a, b]$ односторонне непрерывных. Положим

$$\Delta_c(f) = \sup\{\min[\rho(f(t'), f(t)), \rho(f(t''), f(t))]; \\ t-c \leqslant t' < t < t'' \leqslant t+c,\ t', t, t'' \in [a, b]\} + \\ + \sup\{\rho(f(t), f(a));\ a < t < a+c\} + \\ + \sup\{\rho(f(t), f(b));\ b-c < t < b\}. \quad (1)$$

Лемма 2. *Для того чтобы функция $x = f(t)$ не имела разрывов второго рода, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{c\to 0} \Delta_c(f) = 0. \quad (2)$$

*Доказательство.* Необходимость. То, что два последних слагаемых в правой части (1) стремятся к нулю при $c \to 0$ для каждой функции $f \in \mathscr{D}[a, b]$, вытекает из определения.

Пусть условие (2) не выполнено. Тогда найдутся такие последовательности $t_n'$, $t_n$, $t_n''$, что $t_n' < t_n < t_n''$, $t_n'' - t_n' \to 0$ и $\rho(f(t_n'), f(t_n)) > \varepsilon$, $\rho(f(t_n''), f(t_n)) > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $t_n$ сходится к некоторому $t_0$ (если это не так, то можно заменить последовательность $t_n$ некоторой сходящейся подпоследовательностью). Из трех последовательностей $\{t_n'\}$, $\{t_n\}$, $\{t_n''\}$ по крайней мере две имеют бесконечно много точек, лежащих по одну сторону от $t_0$. Если, например, $\{t_n'\}$ и $\{t_n\}$ лежат слева от $t_0$, то $f(t_n) \to f(t-0)$, $f(t_n') \to f(t-0)$, что противоречит условию $\rho(f(t_n'), f(t_n)) > \varepsilon$. Аналогичен случай, когда $\{t_n\}$ и $\{t_n''\}$ имеют бесконечно много значений, лежащих правее $t_0$. Остальные случаи сводятся к этим двум.

Достаточность. Из условия (2) следует, что $f(t)$ непрерывна справа в точке $a$ и слева в точке $b$. Если бы при некотором $t_0 \in (a, b)$ не существовало $f(t_0+0)$, то нашлась бы последовательность $t_n \downarrow t$ и $\varepsilon > 0$, для которых $\rho(f(t_n), f(t_{n+1})) > \varepsilon$, что противоречит (2). Таким образом, существует $f(t_0+0)$ при любом $t_0 \in [a, b)$. Аналогично существует $f(t_0-0)$. Из соотношения (2) следует также, что либо $f(t_0) = f(t_0-0)$, либо $f(t_0) = f(t_0+0)$. Лемма доказана. ■

**Некоторые неравенства.**

Лемма 3. *Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, — сепарабельный стохастический непрерывный процесс со значениями в $X$ и существует такая неотрицательная монотонно возрастающая функция $g(h)$ и функция $q(C, h) \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, что*

$$\mathsf{P}\{[\rho(\xi(t), \xi(t-h)) > Cg(h)] \cap \\ \cap [\rho(\xi(t+h), \xi(t)) > Cg(h)]\} \leqslant q(C, h) \quad (3)$$

*и*

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} g(T2^{-n}) < \infty, \quad Q(C) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C, T2^{-n}) < \infty. \quad (4)$$

*Тогда для всех* $N > 0$

$$\mathsf{P}\{\sup_{t', t'' \in [0, T]} \rho(\xi(t'), \xi(t'')) > N\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\rho(\xi(0), \xi(T)) > \frac{N}{2G}\right\} + Q\left(\frac{N}{2G}\right).$$

*Доказательство.* Положим

$$A_{nk} = \left\{\rho\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right), \xi\left(\frac{k}{2^n}T\right)\right) \leqslant Cg\left(T2^{-n}\right)\right\},$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$B_{nk} = A_{nk-1} \cup A_{nk}, \quad D_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{2^m - 1} B_{mk} \quad (n \geqslant 1),$$

$$D_0 = A_{00} \cap D_1.$$

В силу стохастической непрерывности можно считать (см. теорему 3 § 2), что множеством сепарабельности $I$ процесса $\xi(t)$ является множество чисел вида $k/2^n$, $k = 0, 1, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$ Имеем

$$\mathsf{P}\{\bar{D}_n\} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m - 1} P\{\bar{B}_{mk}\} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} 2^m q\left(C, T2^{-m}\right) = Q(n, C), \tag{5}$$

где $Q(n, C) = \sum_{m=n}^{\infty} 2^m q\left(C, T2^{-m}\right)$.

Из $D_0$ вытекает, что $\rho(\xi(T), \xi(0)) \leqslant Cg(T)$, и выполнено одно из событий: или $\rho(\xi(T/2), \xi(0)) \leqslant Cg\left(T2^{-1}\right)$, или же $\rho\left(\xi(T), \xi\left(T2^{-1}\right)\right) \leqslant Cg\left(T2^{-1}\right)$. В обоих случаях

$$\rho(\xi(0), \xi(T/2)) \leqslant Cg(T) + Cg\left(T2^{-1}\right),$$

$$\rho(\xi(T/2), \xi(T)) \leqslant Cg(T) + Cg\left(T2^{-1}\right).$$

Воспользуемся теперь методом индукции. Допустим, что неравенство

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^m}T\right), \xi\left(\frac{j}{2^m}T\right)\right) < Cg(T) + 2C\sum_{s=1}^{m} g\left(T2^{-s}\right) \tag{6}$$

доказано для $m = n$ и для $k, j = 0, 1, \ldots, 2^n$ при предположении, что $D_0$ имеет место. Докажем, что аналогичное неравенство имеет место и для $m = n + 1$. Пусть $k$ и $j$ — нечетные числа: $k = 2k_1 + 1$, $j = 2j_1 + 1$. Так как из $D_{n+1}$ следует, что по крайней мере одно из неравенств

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k_1}{2^n}T\right), \xi\left(\frac{2k_1+1}{2^{n+1}}T\right)\right) \leqslant Cg\left(T2^{-(n+1)}\right),$$

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k_1+1}{2^n}T\right), \xi\left(\frac{2k_1+1}{2^{n+1}}T\right)\right) \leqslant Cg\left(T2^{-(n+1)}\right)$$

выполняется, то

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^{n+1}}T\right),\ \xi\left(\frac{k'}{2^n}T\right)\right)\leqslant Cg\left(T2^{-(n+1)}\right),$$

где $k'$ равно или $k_1$, или $k_1+1$. Аналогично найдется целое $j'$ такое, что

$$\rho\left(\xi\left(\frac{j}{2^{n+1}}T\right),\ \xi\left(\frac{j'}{2^n}T\right)\right)\leqslant Cg\left(T2^{-(n+1)}\right).$$

Учитывая теперь предположение индукции, получим

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^{n+1}}T\right),\ \xi\left(\frac{j}{2^{n+1}}T\right)\right)\leqslant Cg(T)+2C\sum_{s=1}^{n+1}g\left(T2^{-s}\right).$$

Аналогично рассматривается случай, когда $k$ или $j$ могут быть четными. Таким образом, неравенство (5) доказано для всех $m\geqslant 1$. Из сепарабельности процесса тогда следует, что если событие $D_0$ происходит, то

$$\sup\{\rho(\xi(t'),\ \xi(t'')),\ t',\ t''\in[0,\ T]\}\leqslant 2CG$$

с вероятностью 1. Отсюда следует, что

$$\mathsf{P}\{\sup_{t',\ t''\in[0,\ T]}\rho(\xi(t'),\ \xi(t''))>N\}\leqslant$$
$$\leqslant Q\left(\frac{N}{2G}\right)+\mathsf{P}\left\{\rho(\xi(0),\ \xi(T))>\frac{N}{2G}\right\}. \blacksquare$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\Delta_\varepsilon(\xi)>CG\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\right\}\leqslant Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right],\ C\right),\tag{7}$$

*где*

$$G(n)=\sum_{m=n}^{\infty}g\left(T2^{-m}\right),\quad Q(n,\ C)=\sum_{m=n}^{\infty}2^mq\left(C,\ 2T^{-m}\right).$$

*Доказательство.* Продолжим ход рассуждений предыдущей леммы. Пусть событие $D_n$ имеет место. Воспользовавшись индукцией, докажем, что для любых $k$ и $m$ найдется такое целое $j_{nm}$ $(0\leqslant j_{nm}<2^{m+1})$, что

$$\max_{0\leqslant j\leqslant j_{nm}}\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right),\ \xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j}{2^{n+m}}\right]T\right)\right)\leqslant C\sum_{s=n}^{n+m}g\left(T2^{-s}\right),\tag{8}$$

$$\max_{j_{nm}+1\leqslant j\leqslant 2^{m+1}}\rho\left(\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j}{2^{n+m}}\right]T\right),\ \xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{s=n}^{n+m}g\left(T2^{-s}\right),\tag{9}$$

причем, как функция от $m$ ($n$ и $k$ фиксированы), величина $j_{nm}2^{-(n+m)}$ монотонно не убывает. При $m=0$ в качестве $j_{n0}$ следует выбрать нуль, если $\rho(\xi(kT2^{-n}),\ \xi((k+1)T2^{-n}))\leqslant \leqslant Cg(T2^{-n})$, и единицу, если $\rho(\xi((k-1)T2^{-n}),\ \xi(kT2^{-n}))\leqslant \leqslant Cg(T2^{-n})$. При предположении $D_n$ одно из этих двух неравенств обязательно имеет место. Пусть $j_{nm}$ уже выбрано. В качестве $j_{nm+1}$ следует взять $2j_{nm}$, если

$$\rho\left(\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{2j_{nm}+1}{2^{n+m+1}}\right]T\right),\ \xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j_{nm}+1}{2^{n+m}}\right]T\right)\right)\leqslant \leqslant Cg\left(T2^{-(n+m+1)}\right),$$

и $2j_{nm}+1$, если

$$\rho\left(\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j_{nm}}{2^{n+m}}\right]T\right),\ \xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{2j_{nm}+1}{2^{n+m+1}}\right]T\right)\right)\leqslant \leqslant Cg\left(T2^{-(n+m+1)}\right).$$

Такой выбор возможен, так как одно из этих неравенств, если происходит $D_n$, обязательно имеет место; если же выполнены оба неравенства, то выбор между указанными значениями $j_{nm}+1$ произволен.

Переходя в соотношениях (8) и (9) к пределу при $m\to\infty$, получим, что для каждой выборочной функции, для которой $D_n$ имеет место, найдется такое $\tau=\tau(\omega)$, $0\leqslant\tau\leqslant T2^{-(n-1)}$, что

$$\sup_{\substack{0<t<\tau\\ t\in I}}\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right),\ \xi\left(\frac{k-1}{2^n}T+t\right)\right)\leqslant CG(n)$$

и

$$\sup_{\substack{\tau<t<T2^{-(n-1)}\\ t\in I}}\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T+t\right),\ \xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right)\right)\leqslant CG(n).$$

Пусть $\varepsilon\in[2^{-(n+1)}T,\ 2^{-n}T]$ и $0<t''-t'<\varepsilon$. Найдется такое $k$, что $(k-1)2^{-n}T\leqslant t'<t''<(k+1)2^{-n}T$. Если $t\in[t',t'']$, то либо $(t',t)\subset[(k-1)2^{-n}T,\ (k-1)2^{-n}T+\tau]$, либо $(t,t'')\subset \subset[(k-1)2^{-n}T+\tau,\ (k+1)2^{-n}T]$. Если при этом $t'$, $t$ и $t''$ взяты из $I$, то выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$\rho(\xi(t'),\xi(t))\leqslant 2CG(n),\quad \rho(\xi(t),\xi(t''))\leqslant 2CG(n).$$

Из сепарабельности процесса вытекает, что одно из этих неравенств будет иметь место с вероятностью 1 для всякой выборочной функции процесса. Поэтому из $D_n$ вытекает, что с вероятностью 1

$$\Delta_\varepsilon(\xi)\leqslant 2CG(n).$$

В силу неравенства (5)

$$\mathsf{P}\{\Delta_\varepsilon(\xi) > 2CG(n)\} \leqslant \mathsf{P}(\bar{D}_n) \leqslant Q(n, C),$$

или, учитывая, что $\varepsilon \geqslant 2^{-(n+1)}T$, и монотонность функций $g(h)$ и $q(h)$, окончательно получаем

$$\mathsf{P}\left\{\Delta_\varepsilon(\xi) > CG\left(\left[\lg_2 \frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\right\} \leqslant Q\left(\left[\lg_2 \frac{T}{2\varepsilon}\right], C\right). \blacksquare$$

**Условия отсутствия разрывов второго рода, использующие частные распределения процесса.** Из последней леммы сразу вытекает следующая

Теорема 1. *Если* $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, — *сепарабельный стохастически непрерывный процесс со значениями в* $X$, *удовлетворяющий условиям*

$$\mathsf{P}\{[\rho(\xi(t), \xi(t-h)) \geqslant Cg(h)] \cap [\rho(\xi(t+h), \xi(t)) \geqslant \\ \geqslant Cg(h)]\} \leqslant q(C, h), \qquad (10)$$

*где*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(T2^{-n}) < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C, T2^{-n}) < \infty, \qquad (11)$$

*то* $\xi(t)$ *с вероятностью* 1 *не имеет разрывов второго рода.*

*Доказательство.* Положив в неравенстве (7) $C = 1$, *увидим*, что в условиях теоремы $\Delta_\varepsilon(\xi) \to 0$ по вероятности при $\varepsilon \to 0$. Но $\Delta_\varepsilon(\xi)$, как функция от $\varepsilon$, монотонно убывает при $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому $\lim \Delta_\varepsilon(\xi)$ при $\varepsilon \to 0$ существует с вероятностью 1 и равен нулю. ■

Следствие. *Пусть на* $[0, T]$ *задан стохастически непрерывный случайный процесс в широком смысле со значениями в полном сепарабельном локально компактном пространстве* $X$, *«трехмерные» частные распределения которого удовлетворяют условиям* (10), (11). *Тогда существует некоторое представление этого процесса, не имеющее разрывов второго рода.*

**Условия отсутствия разрывов второго рода, использующие условные вероятности.** В предыдущей теореме условие отсутствия разрывов второго рода выражалось через свойства частных («трехмерных») распределений случайного процесса. Приведем результаты несколько иного характера. Они используют предположения, относящиеся к условным вероятностям, и применимы тогда, когда имеется важная информация о свойствах условных распределений процесса.

Пусть $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ — некоторый поток $\sigma$-алгебр. Предположим, что процесс $\xi(t)$ подчинен потоку $\sigma$-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$, т. е. при каждом $t \in [0, T]$ случайный элемент $\xi(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измерим.

Введем величину

$$\alpha(\varepsilon, \delta) = \inf \sup_{s,t} [\mathsf{P}\{\rho(\xi(s), \xi(t)) \geqslant \varepsilon \mid \mathfrak{F}_s\}; \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s + \delta \leqslant T, \ \omega \in \Omega'], \qquad (12)$$

где inf берется по всем подмножествам $\Omega'$ ($\Omega' \in \mathfrak{S}$), имеющим вероятность 1. Нетрудно заметить, что существует такое $\Omega^0$, $\mathsf{P}(\Omega^0) = 1$, $\Omega^0 \in \mathfrak{S}$, на котором рассматриваемая точная нижняя граница достигается так, что

$$\alpha(\varepsilon, \delta) = \sup_{s,t} \{\mathsf{P}\{\rho(\xi(s), \xi(t)) \geqslant \varepsilon \mid \mathfrak{F}_s\}; \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s + \delta \leqslant T, \ \omega \in \Omega^0\}.$$

Покажем, что для сепарабельных процессов условие $\alpha(\varepsilon, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и любом $\varepsilon > 0$ обеспечивает отсутствие разрывов второго рода. Пусть $[c, d]$ — фиксированный отрезок, $[c, d] \subset [0, T]$ и $I$ — произвольная конечная последовательность моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $s \leqslant c \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant d$. Через $A(\varepsilon, Z)$ обозначим событие: выборочная функция случайного процесса $\xi(t)$ на $[c, d] \cap Z$ имеет по крайней мере одно $\varepsilon$-колебание.

Лемма 5. *С вероятностью* 1

$$\mathsf{P}\{A(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right). \qquad (13)$$

*Доказательство.* Заметим прежде всего, что в силу свойств условных математических ожиданий при $s < t < u$

$$\mathsf{P}\{\rho(\xi(t), \xi(u)) \geqslant \varepsilon \mid \mathfrak{F}_s\} = \mathsf{M}\{\mathsf{P}\{\rho(\xi(t), \xi(u)) \geqslant \varepsilon \mid \mathfrak{F}_t\} \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \alpha(\varepsilon, u - s). \qquad (14)$$

Введем теперь события

$$B_k = \left\{\rho(\xi(c), \xi(t_i)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \ \rho(\xi(c), \xi(t_k)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$C_k = \left\{\rho(\xi(t_k), \xi(d)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\}, \quad D_k = B_k \cap C_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$C_0 = \left\{\rho(\xi(c), \xi(d)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

События $B_k$ несовместимы, и если положить $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, то $A(\varepsilon, I) \subset C_0 \cup D$. Действительно, если $A(\varepsilon, I)$ имеет место, то при некотором $k$ впервые выполняется неравенство $\rho(\xi(c), \xi(t_k)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. осуществляется одно из событий $B_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Если при этом $D$ не имеет места, т. е. если $\rho(\xi(t_k), \xi(d)) < \frac{\varepsilon}{4}$, то $\rho(\xi(c), \xi(d)) \geqslant \rho(\xi(c), \xi(t_k)) - \rho(\xi(t_k), \xi(d)) > \frac{\varepsilon}{4}$, т. е. имеет место событие $C_0$. Таким образом, $A(\varepsilon, I) \subset C_0 \cup D$. Имеем теперь с вероятностью 1

$$\mathsf{P}\{D_k \mid \mathfrak{F}_s\} = \mathsf{M}\{\chi_{D_k} \mid \mathfrak{F}_s\} = \mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\chi_{B_k}\chi_{C_k} \mid \mathfrak{F}_{t_k}\} \mid \mathfrak{F}_s\} =$$
$$= \mathsf{M}\{\chi_{B_k}\mathsf{P}\{C_k \mid \mathfrak{F}_{t_k}\} \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) \mathsf{M}\{\chi_{B_k} \mid \mathfrak{F}_s\},$$

где $\chi_A$, как обычно, обозначает индикатор события $A$. Отсюда следует

$$\mathsf{P}\{D \mid \mathfrak{F}_s\} = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{D_k \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) \mathsf{M}\left\{\sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k} \mid \mathfrak{F}_s\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) \pmod{\mathsf{P}}.$$

В силу (14) $\mathsf{P}\{C_0 \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right)$. Таким образом,

$$\mathsf{P}\{A(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \mathsf{P}\{D \mid \mathfrak{F}_s\} + \mathsf{P}\{C_0 \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) \pmod{\mathsf{P}},$$

что и доказывает лемму.

Лемма 6. *Пусть $A^k(\varepsilon, I)$ обозначает событие: $\xi(t)$ имеет на $I$ по крайней мере $k$ $\varepsilon$-колебаний. Тогда*

$$\mathsf{P}\{A^k(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \left[2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right)\right]^k \pmod{\mathsf{P}}. \tag{15}$$

*Доказательство.* Пусть $B_r(\varepsilon, I)$ обозначает событие: на множестве $(t_1, \ldots, t_r)$ выборочная функция процесса $\xi(t)$ имеет не менее $k-1$ $\varepsilon$-колебаний, но на $(t_1, \ldots, t_{r-1})$ число $\varepsilon$-колебаний менее $k-1$. События $B_r(\varepsilon, I)$ $r = 1, \ldots, n$) несовместимы, и $\bigcup_{r=1}^{n} B_r(\varepsilon, I) = A^{k-1}(\varepsilon, I) \supset A^k(\varepsilon, I)$. С другой стороны, из $A^k(\varepsilon, I) \cap B_r(\varepsilon, I)$ следует, что на множестве $(t_r, t_{r+1}, \ldots, t_n)$ имеется по крайней мере одно $\varepsilon$-колебание. Следовательно,

$$A^k(\varepsilon, I) \subset \bigcup_{r=1}^{n} (B_r(\varepsilon, I) \cap C_r(\varepsilon, I)),$$

где $C_r(\varepsilon, I)$ означает, что $\xi(t)$ на $(t_r, t_{r+1}, \ldots, t_n)$ имеет по крайней мере одно $\varepsilon$-колебание. Поэтому

$$\mathsf{P}\{A^k(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \sum_{r=1}^{n} \mathsf{P}\{B_r(\varepsilon, I) \cap C_r(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \pmod{\mathsf{P}}. \tag{16}$$

Используя свойства условных математических ожиданий, получим

$$\mathsf{P}\{B_r(\varepsilon, I) \cap C_r(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} = \mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\chi_{B_r(\varepsilon, I)}\chi_{C_r(\varepsilon, I)} \mid \mathfrak{F}_{t_r}\} \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M}\{\chi_{B_r(\varepsilon, I)}\mathsf{P}\{C_r(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_{t_r}\} \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d-c\right)\mathsf{P}\{B_r(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \pmod{\mathsf{P}}.$$

Из полученного неравенства и (16) следует, что

$$\mathsf{P}\{A^k(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d-c\right)\sum_{r=1}^{n}\mathsf{P}\{B_r(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} =$$
$$= 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d-c\right)\mathsf{P}\{A^{k-1}(\varepsilon, I) \mid \mathfrak{F}_s\} \pmod{\mathsf{P}},$$

откуда и вытекает доказываемое. ■

Теорема 2. *Если $\xi(t)$ — сепарабельный процесс и при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\varepsilon, \delta) = 0, \tag{17}$$

*то процесс $\xi(t)$ не имеет разрывов второго рода.*

Достаточно доказать, что с вероятностью 1 каждая выборочная функция $\xi(t)$ имеет только конечное число $\varepsilon$-колебаний. Пусть $I$ — множество сепарабельности процесса $\xi(t)$. Представим его в виде $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, где $I_n$ — монотонно возрастающая последовательность множеств, состоящих из конечного числа элементов. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Разобьем $[0, T]$ на $m$ отрезков $\Delta_r$, $r = 1, \ldots, m$, одинаковой длины так, чтобы $2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{T}{m}\right) = \beta < 1$. Тогда

$$\mathsf{P}\{A^\infty(\varepsilon, I \cap \Delta_r) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \mathsf{P}\{A^k(\varepsilon, J \cap \Delta_r) \mid \mathfrak{F}_s\} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{A^k(\varepsilon, I_n \cap \Delta_r) \mid \mathfrak{F}_s\} \leqslant \beta^k,$$

откуда $\mathsf{P}\{A^\infty(\varepsilon, I \cap \Delta_r) \mid \mathfrak{F}_s\} = 0 \pmod{\mathsf{P}}$ и $\mathsf{P}\{A^\infty(\varepsilon, I \cap \Delta_r)\} = 0$. Следовательно, $\mathsf{P}\{A^\infty(\varepsilon, I)\} = 0$. ■

Приведем некоторые важные следствия из доказанной теоремы.

Теорема 3. *Сепарабельный стохастически непрерывный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, с независимыми приращениями и со* *значениями в линейном нормированном пространстве $X$ не имеет разрывов второго рода.*

Действительно, из определения процессов с независимыми приращениями имеем

$$\mathsf{P}\{|\xi(s)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon\,|\,\mathfrak{F}_s\}=\mathsf{P}\{|\xi(s)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon\}\quad(\operatorname{mod}\mathsf{P}).$$

С другой стороны, из свойства равномерной стохастической непрерывности (см. теорему 2 § 1 гл. I) вытекает, что

$$\alpha(\varepsilon,\delta)=\sup\{\mathsf{P}[|\xi(s)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon];\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\delta\leqslant T\}$$

стремится к нулю при $\delta\to 0$ и любом $\varepsilon>0$. Таким образом, условия теоремы 2 выполняются. ■

Теорема 2 дает сильные результаты и для марковских процессов.

Теорема 4. *Если $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, — сепарабельный марковский процесс со значениями в метрическом пространстве $X$ и с вероятностью перехода $\mathsf{P}(t,x,s,A)$, удовлетворяющей условию*

$$\alpha(\varepsilon,\delta)=\sup[\mathsf{P}\{s,x,t,\bar{S}_\varepsilon(x)\};\quad x\in X,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\delta\leqslant T]\to 0$$

*при $\delta\to 0$, где $S_\varepsilon(x)$ — сфера радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $x$, $\bar{S}_\varepsilon(x)$ — ее дополнение, то процесс $\xi(t)$ не имеет разрывов второго рода.*

Последнее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2 и определения марковского процесса.

**Регуляризация выборочных функций процесса без разрывов второго рода.** Ранее уже отмечалось, что, рассматривая функции без разрывов второго рода, отождествляют функции, имеющие в каждой точке одинаковые пределы справа и слева.

Напомним, что если процесс сепарабелен, то значения выборочных функций $\xi(t)$ с вероятностью 1 являются предельными значениями последовательностей $\xi(t_i)$ при $t_i\to t$ и $t_i$ из множества сепарабельности. Если при этом процесс не имеет разрывов второго рода, то с вероятностью 1 $\xi(t)$ при каждом $t$ равно $\xi(t-0)$ или $\xi(t+0)$.

Теорема 5. *Если $\xi(t)$ — стохастически непрерывный справа процесс без разрывов второго рода со значениями в метрическом пространстве $X$, то существует эквивалентный ему процесс $\xi'(t)$, выборочные функции которого непрерывны справа* $(\operatorname{mod}\mathsf{P})$.

*Доказательство.* Событие $A$: предел $\lim\limits_{n\to\infty}\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)$ существует для каждого $t\in[0,T]$ — имеет вероятность 1. Положим $\xi'(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)$ в случае $A$ и $\xi'(t)=\xi(t)$ в случае $\bar{A}$.

Имеем

$$\{\xi'(t) \neq \xi(t)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{\rho(\xi(t), \xi'(t)) > \frac{1}{m}\right\} \cap A,$$

$$\mathsf{P}\{\xi'(t) \neq \xi(t)\} = \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left(\rho(\xi(t), \xi'(t)) > \frac{1}{m}\right) \cap A\right\}.$$

С другой стороны,

$$\mathsf{P}\left\{\rho(\xi(t), \xi'(t)) > \frac{1}{m}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \rho\left(\xi(t), \xi\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) > \frac{1}{m}\right\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left\{\bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{\rho\left(\xi(t), \xi\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) > \frac{1}{m}\right\}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\rho\left(\xi(t), \xi\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) > \frac{1}{m}\right\}.$$

Таким образом, $\mathsf{P}\{\xi'(t) \neq \xi(t)\} = 0$. Остается заметить, что на множестве $A$ функция $\xi'(t)$ непрерывна справа. ■

## § 5. Непрерывные процессы

**Условия непрерывности процесса без разрывов второго рода.** Как и в предыдущем параграфе, предположим, что $X$ — полное метрическое пространство, $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, — случайный процесс со значениями в $X$.

Определение. *Процесс $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, называется непрерывным, если почти все выборочные функции процесса непрерывны на $[0, T]$.*

Для процессов, не имеющих разрывов второго рода, можно указать простое достаточное условие непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $\{t_{nk}, k = 0, 1, \ldots, m_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность разбиений отрезка $[0, T]$, $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nm_n} = T$ и $\lambda_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m_n} (t_{nk} - t_{n,k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$. Если процесс $\xi(t)$ сепарабелен, не имеет разрывов второго рода и*

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n \to 0, \tag{1}$$

*то процесс $\xi(t)$ непрерывен.*

*Доказательство.* Обозначим через $\nu_\varepsilon$ $(0 \leqslant \nu_\varepsilon \leqslant \infty)$ число тех значений $t$, для которых $\rho[\xi(t+0), \xi(t-0)] > 2\varepsilon$, а через $\nu_\varepsilon^{(n)}$ — число таких индексов $k$, что $\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] < \varepsilon$. Очевидно, что $\nu_\varepsilon \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \nu_\varepsilon^{(n)}$. С другой стороны,

$$\mathsf{M}\nu_\varepsilon^{(n)} = \sum_{k=1}^{m_n} \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\}.$$

В силу леммы Фату $\mathsf{M}\nu_\varepsilon \leqslant \mathsf{M} \varliminf\limits_{n\to\infty} \nu_\varepsilon^{(n)} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}\nu_\varepsilon^{(n)}$. Итак, $\mathsf{M}\nu_\varepsilon = 0$, т. е. $\nu_\varepsilon = 0$ с вероятностью 1 при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, с вероятностью 1 $\xi(t-0) = \xi(t+0)$ при любом $t$. В силу сепарабельности процесса $\xi(t) = \xi(t-0) = \xi(t+0)$, т. е. процесс непрерывен. ■

Применим теорему 1 к процессам, удовлетворяющим условиям теоремы 2 § 4. Пусть $\alpha(\varepsilon, \delta)$ определяется соотношением (12) § 4.

Теорема 2. *Если процесс $\xi(t)$ сепарабелен и*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\mathsf{M}\alpha(\varepsilon, \delta)}{\delta} = 0 \tag{2}$$

*при любом $\varepsilon > 0$, то процесс $\xi(t)$ непрерывен.*

Так как при выполнении условия (2) процесс $\xi(t)$ не имеет разрывов второго рода, то достаточно проверить соотношение (1). Учитывая, что $\mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\} \leqslant \mathsf{M}\alpha(\varepsilon, \Delta t_{nk})$, где $\Delta t_{nk} = t_{nk} - t_{nk-1}$, получим

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\} \leqslant (b-a) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\mathsf{M}\alpha(\varepsilon, \Delta t_{nk})}{\Delta t_{nk}} \to 0$$

при $\lambda_n \to 0$. ■

Применяя теорему 2 к марковским процессам, получаем следующее условие непрерывности марковского процесса.

Теорема 3. *Если $\xi(t)$ — сепарабельный марковский процесс и*

$$\frac{1}{\delta} \mathsf{P}(s, y, t, \bar{S}_\varepsilon(y)) \to 0$$

*при $\delta \to 0$ и любом фиксированном $\varepsilon > 0$ равномерно по $y$, $s$, $t$, $0 \leqslant t - s \leqslant \delta$, то процесс $\xi(t)$ непрерывен.*

Здесь $\bar{S}_\varepsilon(x)$ — дополнение к сфере $S_\varepsilon(x)$ с центром в точке $x$ и радиуса $\varepsilon$.

**Процессы с независимыми приращениями.** Теорема 1 дает только достаточные условия непрерывности случайного процесса. Оказывается, что для частного случая процессов с независимыми приращениями условия теоремы 1 являются также и необходимыми.

Теорема 4. *Если процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями непрерывен, то условие* (1) *выполняется для произвольной последовательности $\{t_{nk},\ k=0, \ldots, m_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, разбиений отрезка $[0, T]$, для которой $\lambda_n \to 0$.*

*Доказательство.* Положим $\Delta_h = \sup\limits_{|t_1-t_2|\leqslant h} \rho[\xi(t_1), \xi(t_2)]$. В силу непрерывности процесса $\xi(t)$, $\Delta_h \to 0$ при $h \to 0$ с вероятностью 1. Поэтому $\lim\limits_{h\to 0} \mathsf{P}\{\Delta_n > \varepsilon\} = 0$. С другой стороны, если $\lambda_n < h$, то

$$\mathsf{P}\{\Delta_h > \varepsilon\} \geqslant \mathsf{P}\{\sup \rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{n1}), \xi(t_{n0})] > \varepsilon\} + \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{n1}), \xi(t_{n0})] \leqslant \varepsilon\} \times$$
$$\times \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{n2}), \xi(t_{n1})] > \varepsilon\} + \ldots + \prod_{k=1}^{m_n-1} \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] \leqslant \varepsilon\} \times$$
$$\times \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nm_n}), \xi(t_{n, m_n-1})] > \varepsilon\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{P}\{\Delta_h \leqslant \varepsilon\} \sum_{k=1}^{m_n} \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\},$$

откуда $\sum\limits_{k=1}^{m_n} \mathsf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{nk-1})] > \varepsilon\} \leqslant \dfrac{\mathsf{P}\{\Delta_h > \varepsilon\}}{\mathsf{P}\{\Delta_h \leqslant \varepsilon\}} \to 0$ при $h \to 0$ и любом $\varepsilon > 0$. ■

Следствие. *Случайный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями непрерывен тогда и только тогда, когда $\xi(t)$ является процессом броуновского движения с непрерывным средним $a(t) = \mathsf{M}\xi(t)$ и непрерывной дисперсионной матрицей $B(t)$.*

Это следствие вытекает из теоремы 4 и теоремы 1 § 3 гл. I.

**Условие Колмогорова непрерывности случайного процесса.** Докажем одно удобное прямое (т. е. не использующее предположения об отсутствии разрывов второго рода) достаточное условие непрерывности случайного процесса. Оно основывается на упрощенном варианте лемм 3 и 4 § 4.

Лемма 1. *Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, — сепарабельный процесс, удовлетворяющий условию: существуют неотрицательная монотонно неубывающая функция $g(h)$ и функция $q(c, h)$, $h \geqslant 0$, такие, что*

$$\mathsf{P}\{\rho(\xi(t+h), \xi(t)) > Cg(h)\} \leqslant q(C, h) \tag{3}$$

*и*

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} g(2^{-n}T) < \infty, \quad Q(C) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C, 2^{-n}T) < \infty. \tag{4}$$

*Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t'<t''\leqslant T} \rho(\xi(t'),\ \xi(t''))>N\right\}\leqslant Q\left(\frac{N}{2G}\right) \tag{5}$$

*и*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant\varepsilon} \rho(\xi(t'),\xi(t''))>CG\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right],\ C\right), \tag{6}$$

*где*

$$G(m)=\sum_{n=m}^{\infty} g(2^{-n}T),\quad Q(m,\ C)=\sum_{n=m}^{\infty} 2^n q(C,\ 2^{-n}T). \tag{7}$$

Для доказательства этой леммы достаточно повторить в упрощенном виде рассуждения из доказательств лемм 3 и 4 § 4. Ограничимся самыми краткими указаниями. Вводим события

$$A_{nk}=\left\{\rho\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right),\ \xi\left(\frac{k}{2^n}T\right)\right)\leqslant Cg(2^{-n}T)\right\},$$
$$k=0,1,\ \ldots,\ 2^n-1,\quad n=0,1,2,\ \ldots,$$

и полагаем $D_m=\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\bigcap\limits_{k=0}^{2^n-1}A_{nk}$. Тогда

$$\mathsf{P}\{\bar D_n\}\leqslant Q(n,\ C).$$

Из $D_n$ вытекает, что для любых $t'$ и $t''$ из $J$

$$\rho(\xi(t'),\xi(t''))\leqslant 2CG;$$

если же, кроме $D_n$, выполнены неравенства $0\leqslant t''-t'\leqslant 2^{-n}T$, то $\rho(\xi(t'),\ \xi(t''))\leqslant 2CG(n)$. Рассуждая так же, как и при окончании доказательства упомянутых лемм § 4, получим требуемое. При этом следует иметь в виду, что из условий (3) и (4) вытекает стохастическая непрерывность процесса $\xi(t)$. ■

Теорема 5. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда процесс* $\xi(t)$ *непрерывен.*

В качестве частного случая, когда условия (3) и (4) оказываются выполненными, рассмотрим процесс, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{M}\rho^p[\xi(t'),\ \xi(t'')]\leqslant L\,|\,t''-t'\,|^{1+r}, \tag{8}$$

где $p>0$, $r>0$. Положим $g(h)=h^{r'/p}$, где $0<r'<r$. Тогда $G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\leqslant K_1\varepsilon^{r'/p}$, а $Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right],C\right)\leqslant C^{-p}K_2\varepsilon^{(r-r')}$, где $K_1$ и $K_2$ — некоторые постоянные. Из теоремы 5 вытекает

Следствие 1. *Если сепарабельный случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию* (8), *то он непрерывен.*

Приведем еще одно условие, обеспечивающее выполнение предположений (3), (4), более общее, чем (8). Пусть

$$\mathsf{M}\rho^p[\xi(t), \xi(t+h)] \leqslant \frac{L|h|}{|\lg_2|h||^{1+r}}, \qquad p < r. \tag{9}$$

Если положить $g(h) = |\lg_2|h||^{-r'/p}$, где $p < r' < r$, то получим

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} |\lg_2|2^{-n}||^{-r'/p} < \infty, \quad Q(C) \leqslant \frac{LT}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C^p|\lg_2|2^{-n}T||^{1+r-r'}} < \infty.$$

Следствие 2. *Если сепарабельный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет соотношению* (9), *то он непрерывен.*

**Гауссовы процессы.** Применим предыдущие результаты к одномерному сепарабельному вещественному гауссовскому процессу $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, с корреляционной функцией $R(t)$ и средним значением 0. Разность $\xi(t+h) - \xi(t)$ имеет дисперсию

$$\sigma^2(t, h) = R(t+h, t+h) - 2R(t, t+h) + R(t, t).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > Cg(h)\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

где $\alpha = Cg(h)\sigma^{-1}(t, h)$. Воспользовавшись неравенством

$$\int_\alpha^\infty e^{-t^2/2}\, dt \leqslant \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha^2/2}, \tag{10}$$

которое нетрудно получить, применяя к левой части неравенства интегрирование по частям, получим

$$\mathsf{P}\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > Cg(h)\} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma(t, h)}{Cg(h)} e^{-\frac{C^2 g^2(h)}{2\sigma^2(t, h)}}. \tag{11}$$

Теорема 6. *Если гауссов процесс удовлетворяет условию*

$$\sigma^2(t, h) \leqslant \frac{K}{|\ln|h||^p}, \qquad p > 3, \tag{12}$$

*то он непрерывен.*

*Доказательство.* Положим $g(h) = |\ln|h||^{-p'}$, где $p'$ — любое число, удовлетворяющее неравенству $1 < p' < \frac{p-1}{2}$. Тогда можно принять

$$q(C, h) = \frac{K'}{C\,|\ln|h||^{p/2-p'}}\, e^{-\frac{C^2}{2K}\,|\ln|h||^{p-2p'}},$$

и ряды (4) будут сходиться. Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

## § 6. Субмартингалы непрерывного аргумента

Субмартингалы (супермартингалы, мартингалы) были введены в § 6 гл. III. В настоящем параграфе будет показано, что при весьма широких предположениях субмартингалы (а следовательно, супермартингалы и мартингалы) обладают непрерывными справа модификациями. При этом теоремы о существовании сепарабельной модификации не будут использованы.

Отметим сначала, что установленные в § 1 гл. III неравенства для субмартингалов последовательностей без труда переносятся на субмартингалы $\xi(t)$, заданные на произвольном счетном множестве $S \subset [0, \infty)$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_t, t \in S\}$ — некоторый поток $\sigma$-алгебр, $C > 0$.

Если $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in S\}$ — субмартингал, то

а) $$\mathsf{P}\{\sup_{t\in S} \xi(t) > C\} \leqslant \frac{\sup\limits_{t \in S} \mathsf{M}\xi^+(t)}{C}; \tag{1}$$

б) пусть $\nu([a, b], S)$ — число пересечений отрезка $(a, b]$ сверху вниз функцией $f(t) = \xi(t, \omega)$ на множестве $t \in S$. Тогда

$$\mathsf{M}\nu([a, b], S) \leqslant \frac{\sup\limits_{t \in S} \mathsf{M}(\xi(t) - b)^+}{C}; \tag{2}$$

в) если при некотором $p > 1$ $\mathsf{M}[\xi^+(t)]^p < \infty$, то

$$\mathsf{M} \sup_{t \in S} [\xi^+(t)]^p \leqslant q^p \sup_{t \in S} \mathsf{M}[\xi^+(t)]^p. \tag{3}$$

Доказательство такое же, как и в случае, когда $S$ — последовательность $S = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Рассмотрим субмартингал $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in [0, \infty)\}$. Предположим, что $\mathfrak{F}_0$ содержит все множества вероятности 0. Покажем, что при довольно широких условиях существует модификация процесса $\xi(t)$, выборочные функции которой с вероятностью 1 имеют пределы слева ($t > 0$) и непрерывны справа для любых $t > 0$.

С этой целью выберем некоторое счетное всюду плотное на $[0, \infty)$ множество $S$ и рассмотрим сужение $\xi(t)$ на $S$.

Положим

$$N_{nab}=\{\omega:\ \nu((a,b],\ S\cap[0,n])=\infty\},$$
$$L_n'=\{\omega:\ \sup\xi(t)=+\infty,\ t\in S\cap[0,n]\},$$
$$L_n''=\{\omega:\ \inf\xi(t)=-\infty,\ t\in S\cap[0,n]\}.$$

Из неравенства (2) следует, что $\mathsf{P}(N_{nab})=0$ для любых $n$, $a$, $b$. Так как

$$\mathsf{P}(L_n'')\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mathsf{M}\lim_{k\to\infty}\nu((-k,-m],\ S\cap[0,n]),$$

то в силу того же неравенства (2)

$$\mathsf{P}(L_n'')\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\lim_{\substack{k\to\infty\\ k>m}}\frac{\mathsf{M}(\xi(n)+m)^+}{k-m}=0.$$

Наконец, из неравенства (1) следует, что и $\mathsf{P}(L_n')=0$. Пусть

$$N=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(\bigcup_{a,b}N_{nab}\right)\cup L_n'\cup L_n''\right),$$

где $a$ и $b$ пробегают множество рациональных чисел. Тогда $\mathsf{P}(N)=0$. Нетрудно теперь увидеть, что если $\omega\overline{\in}N$, то в любой точке $t$ $\xi(s)$, $s\in S$, имеет пределы слева $\xi(t-0)$ и справа $\xi(t+0)$. Действительно, если бы при некотором $t$ хотя бы один из этих пределов не существовал бы, например $\xi(t-0)$, то величины $b'=\overline{\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s<t}}}\xi(s)$, $a'=\underline{\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s<t}}}\xi(s)$ были бы конечными и не равными друг другу. Но тогда для произвольной пары рациональных чисел $(a,b)$ таких, что $a'<a<b<b'$, число пересечений отрезка $(a,b]$ процессом $\xi(s)$, $s\in S$, $s<t$, было бы бесконечным, что противоречит условию $\omega\notin N$. Положим для любого $t\geqslant 0$ $\eta(t)=\xi(t+0)$, если $\omega\notin N$, и $\eta(t)=\xi(t)$ при $\omega\in N$. Тогда при $\omega\notin N$ функция $\eta(t)$ при каждом $t\geqslant 0$ непрерывна справа и имеет предел слева $(\eta(t-0)=\xi(t-0))$.

Введем $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{t+}$, $t\geqslant 0$, положив $\mathfrak{F}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\mathfrak{F}_s$. Очевидно, что $\{\mathfrak{F}_{t+},\ t\geqslant 0\}$ образуют поток $\sigma$-алгебр, $\mathfrak{F}_{t+}$ содержат все подмножества вероятности 0 и $\eta(t)$ $\mathfrak{F}_{t+}$-измерима. Покажем, что $\{\eta(t),\mathfrak{F}_{t+},t\geqslant 0\}$ — субмартингал.

Так как последовательность $\xi(s_n)$, $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots\geqslant s_n\geqslant\geqslant\ldots$, $s_n\downarrow s$, равномерно интегрируема и сходится к $\eta(s)$ в $\mathscr{L}_1$, то в неравенстве

$$\int_B\xi(s_n)\,d\mathsf{P}\leqslant\int_B\xi(t)\,d\mathsf{P},\qquad s_n<t,\ B\in\mathfrak{F}_{s+},$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Получим

$$\int_B \eta(s)\,d\mathsf{P} \leqslant \int_B \xi(t)\,d\mathsf{P}.$$

Аналогично убеждаемся, что в правой части последнего неравенства можно заменить $\xi(t)$ на $\eta(t)$. Получим

$$\int_B \eta(s)\,d\mathsf{P} \leqslant \int_B \eta(t)\,d\mathsf{P}. \tag{4}$$

Это доказывает, что $\{\eta(t),\ \mathfrak{F}_{t+},\ t \geqslant 0\}$ — субмартингал.

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi(t),\ \mathfrak{F}_t,\ t > 0\}$ — *субмартингал,* $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$ *и функция* $a(t) = \mathsf{M}\xi(t)$ *непрерывна справа для всех* $t \geqslant 0$. *Тогда существует модификация* $\{\eta(t),\ \mathfrak{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ *процесса* $\xi(t)$, *выборочные функции которой с вероятностью* 1 *при каждом* $t$ *непрерывны справа и имеют пределы слева.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что ранее построенный процесс $\{\eta(t),\ \mathfrak{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ является модификацией заданного процесса. Аналогично неравенству (4) получаем

$$\int_B \xi(s)\,d\mathsf{P} \leqslant \int_B \eta(t)\,d\mathsf{P} \qquad \forall\,(t, B),\quad t \geqslant s,\quad B \in \mathfrak{F}_s,$$

или $\xi(s) \leqslant \mathsf{M}\{\eta(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\}$, $s \leqslant t$. Так как величина $\eta(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима, то

$$\xi(t) \leqslant \mathsf{M}\{\eta(t)\,|\,\mathfrak{F}_t\} = \eta(t) = \xi(t+0) \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}).$$

В силу равномерной интегрируемости последовательности $\xi(t_n)$ при $t_n \downarrow t$

$$\mathsf{M}(\xi(t+0) - \xi(t)) = \lim_{t_n \downarrow t} \mathsf{M}(\xi(t_n) - \xi(t)) = \lim_{t_n \downarrow t} (a(t_n) - a(t)) = 0,$$

что вместе с предыдущим неравенством дает

$$\xi(t+0) = \xi(t) \qquad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}).$$

Замечание. Условие $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$ было использовано только для того, чтобы иметь возможность утверждать, что $\eta(t)$ — $\mathfrak{F}_t$-измеримая случайная величина. Поэтому теорема 1 остается в силе, если заменить условие $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+}$ следующим: случайная величина $\xi(t+0) = \lim\limits_{s_n \downarrow t} \xi(s_n)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима.

Следствие. *Пусть* $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, — *субмартингал относительно потока* σ-*алгебр* $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geqslant 0\}$, *где* $\mathfrak{F}_t$ — *пополнение* σ-*алгебры, порожденной случайными величинами* $(\xi(s),\ s \leqslant t)$, *стохастически непрерывный справа*:

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathsf{P}\{|\xi(t) - \xi(t+h)| > \varepsilon\} = 0 \qquad \forall\,(\varepsilon > 0,\ t \geqslant 0).$$

*Тогда существует субмартингал* $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$, *стохастически эквивалентный процессу* $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, *выборочные функции которого с вероятностью* 1 *непрерывны справа и имеют пределы слева.*

Для доказательства нужно проверить, что из условия стохастической непрерывности вытекают условия теоремы 1. Так как $\xi(t+h)$ при $h \downarrow 0$ сходятся по вероятности к $\xi(t)$, то для каждого $t$ найдется последовательность $t_n$, $t_n \downarrow t$, $t_n \in S$, такая, что $\xi(t) = \lim \xi(t_n) \pmod{\mathsf{P}}$. Следовательно, $\xi(t+0)$ $\mathfrak{F}_t$-измеримо. Из равномерной интегрируемости семейства $\xi(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, следует, что $a(t) = \mathsf{M}\xi(t) = \mathsf{M}\lim \xi(t_n) = \lim \mathsf{M}\xi(t_n) = \lim a(t_n)$, т. е. $a(t+0) = a(t)$. Учитывая замечание к теореме 1, получаем, что процесс $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t > 0\}$ является субмартингалом с требуемыми свойствами. ■

Из теоремы 1 § 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$ — *субмартингал, удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\max_k |t_{nk+1} - t_{nk}| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}\{|\xi(t_{nk+1}) - \xi(t_{nk})| > \varepsilon\} = 0,$$

*где* $a = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = b$. *Тогда он обладает непрерывной модификацией.*

ГЛАВА V

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящей главе рассматриваются линейные операции над случайными процессами. Примерами таких операций являются дифференцирование и интегрирование процессов, преобразования с помощью дифференциальных и интегральных уравнений. Задача прогноза значения случайной функции или задача выделения полезной компоненты из наблюденных значений случайной функции, представляющей собою сумму передаваемого сигнала и искажающего «шума», часто решается в рамках теории линейных преобразований случайных процессов.

Для изучения возникающих при этом проблем рассматривается гильбертово пространство случайных величин, что позволяет в ряде случаев получить законченные и удобные для применений решения. Предполагается, что читатель знаком с элементарными понятиями теории гильбертовых пространств.

## § 1. Гильбертовы случайные функции

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство.

Определение 1. *Гильбертовым пространством* $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P})$ *случайных величин вероятностного пространства* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P})$ *называют множество комплекснозначных случайных величин* $\zeta = f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, *для которых* $\mathsf{M}|\zeta|^2 < \infty$.

Скалярное произведение в $\mathscr{L}_2$ определяется формулой

$$(\zeta, \eta) = \mathsf{M}\zeta\bar{\eta}, \qquad \zeta, \eta \in \mathscr{L}_2.$$

В соответствии с этим определением норма $\|\zeta\|$ случайной величины $\zeta$ равна

$$\|\zeta\| = \{\mathsf{M}|\zeta|^2\}^{1/2}.$$

Две случайные величины $\zeta$ и $\eta$ ортогональны, если

$$(\zeta, \eta) = \mathsf{M}\zeta\bar{\eta} = 0.$$

Для действительной случайной величины $\zeta$ квадрат нормы $\|\zeta\|^2$ совпадает с моментом второго порядка, $\|\zeta\|^2 = \mathsf{M}\zeta^2$, а при $\mathsf{M}\zeta = 0$ — с дисперсией. Если $\zeta$ и $\eta$ действительны и $\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}\eta = 0$, то их ортогональность означает некоррелированность.

Определение. *Комплекснозначная случайная функция* $\zeta(\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ *называется гильбертовой, если*

$$\mathsf{M}|\zeta(\theta)|^2 < \infty, \qquad \theta = \Theta.$$

Гильбертову случайную функцию можно рассматривать как заданную на $\Theta$ функцию со значением в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2$:

$$\theta \to \zeta(\theta) = f(\theta, \omega) \in \mathscr{L}_2.$$

В частности, когда $\Theta$ есть промежуток действительных чисел $(a, b)$, гильбертову случайную функцию следует рассматривать как некоторую линию в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2$ и запись $\zeta = \zeta(\theta)$, $\theta \in (a, b)$ является параметрическим уравнением этой линии. В настоящей главе рассматриваются только гильбертовы случайные функции, поэтому слово «гильбертова» часто будет опускаться.

Пусть на $\Theta$ задана неотрицательная функция $\psi(\theta)$, принимающая сколь угодно малые положительные значения.

Определение. *Случайная величина* $\eta \in \mathscr{L}_2$ *называется среднеквадратическим пределом (кратко — с. к. пределом) гильбертовой случайной функции* $\zeta(\theta)$ *при* $\psi(\theta) \to 0$, *если* $\zeta(\theta) \to \eta$ *при* $\psi(\theta) \to 0$ *в смысле сходимости в гильбертовом пространстве* $\mathscr{L}_2$, *т. е. если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что*

$$\mathsf{M}|\eta - \zeta(\theta)|^2 < \varepsilon^2$$

*для всех* $\theta$ *таких, что* $0 < \psi(\theta) < \delta$.

В частности, если $\Theta$ — метрическое пространство с метрикой $r(\theta_1, \theta_2)$, то функция $\zeta(\theta)$ называется *среднеквадратически непрерывной в точке* $\theta_0 \in \Theta$ *(с. к. непрерывной), если*

$$\mathsf{M}|\zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_0)|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad r(\theta_1, \theta_0) \to 0. \tag{1}$$

Определение. *Ковариацией* $B(\theta_1, \theta_2)$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$, *гильбертовой случайной функции* $\zeta(\theta)$ *называется величина*

$$B(\theta_1, \theta_2) = \mathsf{M}\zeta(\theta_1)\overline{\zeta(\theta_2)} = (\zeta(\theta_1), \zeta(\theta_2)). \tag{2}$$

Лемма 1. *Для того чтобы случайная функция* $\zeta(\theta)$ *имела с. к. предел при* $\psi(\theta) \to 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал предел* $\lim B(\theta_1, \theta_2)$ *при* $\psi(\theta_1) + \psi(\theta_2) \to 0$. *Если это условие соблюдается и* $\eta = \underset{\psi(\theta)\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \zeta(\theta)$, *то*

$$\mathsf{M}|\eta|^2 = \lim_{\psi(\theta_1)+\psi(\theta_2)\to 0} B(\theta_1, \theta_2). \tag{3}$$

Доказательство этой леммы несложно и может быть опущено.

Следствие. *Для с. к. непрерывности* $\zeta(\theta)$ *в точке* $\theta_0$ *необходима и достаточна непрерывность ковариации* $B(\theta_1, \theta_2)$ *в точке* $(\theta_0, \theta_0)$.

Необходимость вытекает из леммы 1, а достаточность проверяется простым подсчетом.

Замечание. Из с. к. непрерывности $\zeta(\theta)$ в точке $\theta_0$ вытекает стохастическая непрерывность $\zeta(\theta)$ в той же точке. Действительно, в силу неравенства Чебышева

$$\mathsf{P}\{|\zeta(\theta)-\zeta(\theta_0)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{M}|\zeta(\theta)-\zeta(\theta_0)|^2}{\varepsilon^2}.$$

Если $\zeta(\theta)$ с. к. непрерывны на $\Theta$ (т. е. в каждой точке $\Theta$), то это не означает, что выборочные функции с вероятностью 1 непрерывны на $\Theta$. Действительно, для процесса Пуассона имеем $\mathsf{M}|\zeta(t+h)-\zeta(t)|^2=\lambda h+(\lambda h)^2$, но выборочные функции $\zeta(t)$ с положительной вероятностью разрывны.

Исследование гильбертовых случайных функций с общей точки зрения является задачей исследования функций в обычном смысле со значениями в гильбертовом пространстве. Использование ковариации, рассмотрение различных типов сходимости, применение специфических теоретико-вероятностных понятий придает задачам анализа случайных функций некоторые особенности.

**Интегрирование.** Пусть $\{\Theta, \mathfrak{A}, m\}$ — полное сепарабельное метрическое пространство с $\sigma$-конечной полной мерой, $\{\zeta(\theta), \theta\in\Theta\}$ — гильбертова случайная функция. Если ковариация $B(\theta_1, \theta_2)$ непрерывна в точке $(\theta, \theta)$ $m$-почти для всех $\theta$, то, в силу леммы 1 и теоремы 1 § 3 гл. IV, для $\zeta(\theta)$ существует стохастически эквивалентная, измеримая и сепарабельная случайная функция. Это замечание показывает, насколько ограничительно принятое выше допущение. Из теоремы 2 (гл. IV, § 3) непосредственно вытекает следствие.

Теорема 1. *Если*

$$\int_\Theta B(\theta, \theta)\, m(d\theta)<\infty, \tag{4}$$

*то с вероятностью* 1

$$\int_\Theta |\zeta(\theta)|^2 m(d\theta)<\infty$$

*и*

$$\mathsf{M}\int_\Theta |\zeta(\theta)|^2 m(d\theta)=\int_\Theta B(\theta, \theta)\, m(d\theta). \tag{5}$$

Следствие. *Пусть* $f_i(\theta)$, $i=1, 2$, — *функции из* $\mathcal{L}_2(\Theta, \mathfrak{A}, m)$ *и выполнено условие* (4). *Тогда с вероятностью* 1 *существуют интегралы*

$$\eta_i = \int_\Theta f_i(\theta)\,\zeta(\theta)\,m(d\theta),$$

*причем в силу теоремы Фубини*

$$\mathsf{M}\eta_1\bar{\eta}_2 = \mathsf{M}\int_\Theta\int_\Theta f_1(\theta_1)\,\overline{f_2(\theta_2)}\,\zeta(\theta_1)\,\overline{\zeta(\theta_2)}\,m(d\theta_1)\,m(d\theta_2) =$$

$$= \int_\Theta\int_\Theta f_1(\theta_1)\,B(\theta_1, \theta_2)\,\overline{f_2(\theta_2)}\,m(d\theta_1)\,m(d\theta_2).$$

Сделаем несколько замечаний по поводу определения интегралов от случайных функций.

Замечание 1. Пусть выполнено условие (4) и $m(\Theta) < \infty$. Тогда интеграл

$$\int_\Theta \zeta(\theta)\,m(d\theta) \tag{6}$$

для измеримой случайной функции $\zeta(\theta)$ определен и конечен с вероятностью 1 для каждой реализации $\zeta(\theta)$. При определении интеграла (6) можно поступить несколько иначе. Интеграл (6) можно определить как с. к. предел лебеговых интегральных сумм для $\zeta(\theta)$. Нетрудно убедиться, что это определение совпадает с обычным. Для доказательства достаточно ограничиться неотрицательными случайными величинами. По определению интеграл (6) есть предел при $n \to \infty$

$$\int_\Theta \zeta_n(\theta)\,m(d\theta),$$

где $\zeta_n(\theta)$ — монотонно неубывающая последовательность случайных функций, принимающих конечное число значений и таких, что $\lim \zeta_n(\theta) = \zeta(\theta)$ $\forall\theta \in \Theta$. Имеем

$$\mathsf{M}\left|\int_\Theta \zeta(\theta)\,m(d\theta) - \int_\Theta \zeta_n(d\theta)\,m(d\theta)\right|^2 \leqslant \mathsf{M}\int_\Theta |\zeta(\theta) - \zeta_n(\theta)|^2\,m(d\theta).$$

Так как $0 \leqslant \zeta(\theta) - \zeta_n(\theta) \leqslant \zeta(\theta)$, то в силу теоремы Лебега

$$\int_\Theta \zeta(\theta)\,m(d\theta) = \text{l.i.m.}\int_\Theta \zeta_n(\theta)\,m(d\theta).$$

Замечание 2. Рассмотрим случайный процесс $\{\zeta(t), t \in [a, b]\}$. Интеграл

$$\int_a^b \zeta(t)\,dt$$

часто определяют как с. к. предел интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta(t_{nk}) \Delta t_{nk},$$

$$\Delta t_{nk} = t_{nk} - t_{nk-1}, \quad a = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = b.$$

Для существования с. к. предела этих сумм в силу леммы 1 необходимо и достаточно существования предела

$$\mathsf{M} \sum_{k=1}^{n} \zeta(t_{nk}) \Delta t_{nk} \sum_{k=1}^{m} \overline{\zeta(t_{mk})} \Delta t_{mk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} B(t_{nk}, t_{mr}) \Delta t_{nk} \Delta t_{mr}$$

при $n, m \to \infty$, т. е. интегрируемости по Риману функции $B(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$. Таким образом, данное определение интеграла является более узким по сравнению с первоначальным, но зато оно не связано с понятием измеримости процесса. Легко убедиться, что, когда применимо последнее определение интеграла, оно приводит $(\operatorname{mod} \mathsf{P})$ к тому же результату, что и исходное.

Действительно,

$$\mathsf{M} \left| \int_a^b \zeta(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \zeta(t_{nk}) \Delta t_{nk} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \int_{t_{n,k-1}}^{t_{nk}} \int_{t_{n,r-1}}^{t_{nr}} [B(t, s) - B(t, t_{nr}) - B(t_{nk}, s) +$$

$$+ B(t_{nk}, t_{nr})]\,dt\,ds \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \Omega_{nkr} \to 0,$$

где $\Omega_{nkr}$ — колебание функции $B(t, s)$ в прямоугольнике $t_{n,k-1} \leqslant \leqslant t \leqslant t_{nk}$, $t_{n,r-1} \leqslant s \leqslant t_{nr}$.

Замечание 3. Под несобственным с. к. интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t)\,dt \qquad \left(\text{или } \int_a^{\infty} \zeta(t)\,dt\right) \tag{7}$$

условимся понимать предел

$$\underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \zeta(t)\,dt \qquad \left(\text{l.i.m.} \int_a^{N} \zeta(t)\,dt\right).$$

Для существования этих интегралов в силу леммы 1 необходимо и достаточно существование пределов

$$\lim_{N, N' \to \infty} \int_{-N}^{N} \int_{-N'}^{N'} B(t, s)\,dt\,ds \qquad \left(\lim_{N, N' \to \infty} \int_a^{N} \int_a^{N'} B(t, s)\,dt\,ds\right).$$

Это определение несобственных интегралов в некоторых случаях оказывается более широким, чем понимание интегралов (7) как интегралов Лебега от функций $\zeta(t)$ при фиксированном $\omega$.

**Закон больших чисел.** Пусть $\{\zeta(t),\ t \geqslant 0\}$ — измеримый гильбертов процесс с интегрируемой ковариацией на каждом конечном промежутке. Будем говорить, что $\{\zeta(t),\ t \geqslant 0\}$ удовлетворяет закону больших чисел, если в определенном смысле

$$\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt \to c \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Из леммы 1 вытекает, что для существования среднего

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt$$

необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{T,\,T'\to\infty} \mathsf{M}\,\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt\,\frac{1}{T'}\int_0^{T'} \overline{\zeta(t)}\,dt = \lim_{T,\,T'\to\infty} \frac{1}{TT'}\int_0^T\int_0^{T'} B(t,\,s)\,dt\,ds.$$

Далее, для выполнения равенства

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{M}\zeta(t)\,dt\right\} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{T,\,T'\to\infty} \frac{1}{TT'}\int_0^T\int_0^{T'} R(t,\,s)\,dt\,ds = 0, \tag{8}$$

где $R(t,\,s)$ — корреляционная функция процесса.

Нетрудно заметить, что

$$\left|\int_0^T\int_0^T R(t,\,s)\,dt\,ds\right|^2 \leqslant \int_0^T\int_0^T R(t,\,s)\,dt\,ds \int_0^{T'}\int_0^{T'} R(t,\,s)\,dt\,ds.$$

Поэтому равенство (8) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T\to 0} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t,\,s)\,dt\,ds = 0. \tag{9}$$

Для стационарного процесса в широком смысле $R(t, s) = R(t-s)$. Так как

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t-s)\,dt\,ds = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt,$$

то получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если $\zeta(t)$ — стационарный в широком смысле процесс, то для выполнения равенства*

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt = \mathsf{M}\zeta(t) \tag{10}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = 0. \tag{11}$$

В частности, условие (11) выполняется, если среднее значение корреляционной функции равно нулю:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R(s)\,ds = 0.$$

Выразим условие (11) через спектральную функцию процесса. Имеем

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(du)\,\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} e^{itu}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt,$$

откуда

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos Tu)}{T^2u^2}\,F(du) =$$

$$= F\{0\} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos Tu)}{T^2u^2}\,\tilde{F}(du),$$

где $\tilde{F}(A) = F(A\setminus\{0\})$, $\{0\}$ — множество, состоящее из одной точки $u=0$. Нетрудно видеть, что при $T\to\infty$ последний интеграл стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = F\{0\}. \tag{12}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Для стационарного в широком смысле процесса равенство* (10) *имеет место тогда и только тогда, когда его спектральная функция непрерывна в точке* $u=0$.

**Дифференцирование.** Пусть $\{\zeta(t),\ t\in(a,\ b)\}$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, — гильбертов случайный процесс.

Определение. *Случайный процесс* $\{\zeta(t),\ t\in(a,b)\}$, *с. к. дифференцируем в точке* $t_0$ (*дифференцируем в среднем квадратическом*), *если существует*

$$\zeta'(t_0)=\underset{n\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{\zeta(t_0+h)-\zeta(t_0)}{h},\qquad t_0,\ t_0+h\in(a,\ b).$$

*Случайная величина* $\zeta'(t_0)$ *называется с. к.* (*среднеквадратической*) *производной случайного процесса в точке* $t_0$.

Легко найти необходимые и достаточные условия с. к. дифференцируемости случайного процесса. Так как

$$\mathsf{M}\,\frac{\zeta(t_0+h)-\zeta(t_0)}{h}\cdot\frac{\overline{\zeta(t_0+h_1)-\zeta(t_0)}}{h_1}=$$

$$=\frac{1}{h_1h}\{B(t_0+h,\ t_0+h_1)-B(t_0,\ t_0+h_1)-B(t_0+h,\ t_0)+B(t_0,\ t_0)\},$$

то в силу леммы 1 для с. к. дифференцируемости процесса $\zeta(t)$ в точке $t_0$ необходимо и достаточно, чтобы существовала обобщенная смешанная производная

$$\left.\frac{\partial^2B(t,t')}{\partial t\,\partial t'}\right|_{t=t'=t_0}=$$

$$=\lim_{h,\ h_1\to 0}\frac{B(t_0+h,\ t_0+h_1)-B(t_0,\ t_0+h_1)-B(t_0+h,\ t_0)+B(t_0;\ t_0)}{hh_1}.$$

Из с. к. дифференцируемости процесса в точке $t$ и неравенства

$$\left|\mathsf{M}\left(\zeta'(t)-\frac{\zeta(t+h)-\zeta(t)}{h}\right)\right|\leqslant\left\{\mathsf{M}\left|\zeta'(t)-\frac{\zeta(t+h)-\zeta(t)}{h}\right|^2\right\}^{1/2}$$

следует

$$\mathsf{M}\zeta'(t)=\frac{d}{dt}\,\mathsf{M}\zeta(t),\tag{13}$$

причем производная справа существует.

Если процесс $\zeta(t)$ с. к. дифференцируем в каждой точке интервала $(a,\ b)$, то производная $\zeta'(t)$ образует гильбертов случайный процесс на $(a,\ b)$.

Теорема 4. *Пусть* $\{\zeta(t),\ t\in(a,\ b)\}$ — *гильбертов случайный процесс и обобщенная производная*

$$\left.\frac{\partial^2B(t,t')}{\partial t\,\partial t'}\right|_{t=t'}$$

*существует при каждом значении* $t \in (a, b)$. *Тогда процесс* $\zeta(t)$ *с. к. дифференцируем на* $(a, b)$ *и*

$$B_{\zeta'\zeta'}(t, t') = \frac{\partial^2 B(t, t')}{\partial t\, \partial t'}, \tag{14}$$

$$B_{\zeta'\zeta}(t, t') = \frac{\partial B(t, t')}{\partial t}, \tag{15}$$

*где* $B_{\zeta'\zeta'}(t, t') = \mathsf{M}\zeta'(t)\overline{\zeta'(t')}$ — *ковариация процесса* $\zeta'(t)$, *а* $B_{\zeta'\zeta}(t, t') = \mathsf{M}\zeta'(t)\zeta(t')$ — *взаимная ковариация процессов* $\zeta'(t)$ *и* $\zeta(t)$.

В доказательстве нуждаются лишь формулы (14) и (15). Имеем

$$B_{\zeta'\zeta}(t, t') = \mathsf{M}\overline{\zeta(t')}\zeta'(t) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \mathsf{M}\overline{\zeta(t')}\left(\frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{B(t+h, t') - B(t, t')}{h}.$$

Следовательно, производная $\dfrac{\partial B(t, t')}{\partial t}$ существует и взаимная ковариация процессов $\zeta'(t)$ и $\zeta(t)$ дается формулой (15). Далее,

$$B_{\zeta'\zeta'}(t, t') = \lim_{h, h'\to 0} \mathsf{M}\frac{(\zeta(t'+h') - \zeta(t'))(\zeta(t+h) - \zeta(t))}{h'h} =$$
$$= \lim_{h, h'\to 0} \frac{B(t+h, t'+h') - B(t, t'+h') - B(t+h, t') + B(t, t')}{hh'}.$$

Отсюда вытекает существование обобщенной второй производной

$$\frac{\partial^2 B(t, t')}{\partial t\, \partial t'}$$

(в условии теоремы предполагалось только, что эта производная существует при $t = t'$) и формула (14). ■

Если процесс $\zeta(t)$ стационарен в широком смысле, то $B(t, t') = R(t - t')$ и из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. *Для с. к. дифференцируемости стационарного в широком смысле процесса* $\zeta(t)$ $(t \in T)$ *необходимо и достаточно существование обобщенной второй производной корреляционной функции* $R(t)$ *при* $t = 0$. *Если это условие выполнено, то существует обобщенная производная* $\dfrac{d^2R(t)}{dt^2}$ *и*

$$R_{\zeta'\zeta'}(t_0, t_0 + t) = -\frac{d^2R(t)}{dt^2},$$

$$R_{\zeta'\zeta}(t_0 + t, t_0) = R_{\zeta'\zeta}(t) = \frac{dR(t)}{dt}.$$

Аналогичные результаты имеют местс и для с. к. производных высших порядков.

Следствие 2. *Если $\zeta(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, — процесс, стационарный в широком смысле, и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 F(du) < \infty,$$

*где $F$ — спектральная мера процесса, то процесс $\zeta(t)$ с. к. дифференцируем, процесс $(\zeta'(t), \zeta(t))$ стационарен в широком смысле и его матричная корреляционная функция $R(t)$ имеет вид*

$$\left\| \begin{matrix} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} u^2 F(du) & \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} iu F(du) \\ -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} iu F(du) & \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(du) \end{matrix} \right\|.$$

**Разложение случайного процесса в ортогональные ряды.** Пусть $\{\zeta(t), t \in [a, b]\}$ — измеримый с. к. непрерывный гильбертов процесс. Его ковариация $B(t_1, t_2)$ является непрерывным неотрицательно определенным ядром в квадрате $[a, b] \times [a, b]$. Согласно теории интегральных уравнений ядро $B(t_1, t_2)$ может быть разложено в равномерно сходящийся ряд по своим собственным функциям $\varphi_n(t)$:

$$B(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t_1) \overline{\varphi_n(t_2)},$$

где

$$\lambda_n \varphi_n(t) = \int_a^b B(t, s) \varphi_n(s)\, ds, \quad \int_a^b \varphi_n(t) \overline{\varphi_m(t)}\, dt = \delta_{nm},$$

причем собственные числа $\lambda_n$ положительны.

Положим

$$\xi_n = \int_a^b \zeta(t) \overline{\varphi_n(t)}\, dt.$$

Этот интеграл существует (теорема 1), и в силу следствия из теоремы 1

$$\mathsf{M} \xi_n \bar{\xi}_m = \int_a^b \int_a^b B(t, s) \overline{\varphi_n(t)} \varphi_m(s)\, dt\, ds = \lambda_n \delta_{nm},$$

т. е. последовательность случайных величин $\xi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ является ортогональной. Далее,

$$\mathsf{M}\zeta(t)\bar{\xi}_n = \int_a^b B(t, s)\varphi_n(s)\,ds = \lambda_n\varphi_n(t).$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{M}\left|\zeta(t) - \sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k(t)\right|^2 =$$

$$= B(t, t) - 2\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi_k(t)}\,\mathsf{M}\zeta(t)\bar{\xi}_k + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\varphi_k(t)|^2 =$$

$$= B(t, t) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\varphi_k(t)|^2 \to 0$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t$ в силу теоремы Дини.

Теорема 5. *Измеримый с. к. непрерывный гильбертов процесс $\zeta(t)$, $t\in[a, b]$, может быть разложен в ряд*

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t), \tag{16}$$

*сходящийся в $\mathscr{L}_2$ при каждом $t\in[a, b]$. В этом разложении $\xi_k$ — ортогональная последовательность случайных величин, $\mathsf{M}|\xi_k|^2=\lambda_k$, $\lambda_k$ — собственные числа, $\varphi_k(t)$ — собственные функции ковариации процесса.*

Замечание. Если процесс $\zeta(t)$ гауссов, то его с. к. производная и интегралы вида $\int_a^b f(t)\zeta(t)\,dt$ являются гауссовыми случайными величинами. Поэтому, если $\zeta(t)$ — вещественный гауссов процесс и $\mathsf{M}\zeta(t)=0$, то коэффициенты $\xi_k$ ряда (16) являются независимыми гауссовыми величинами и ряд (16) сходится с вероятностью 1 при каждом $t$.

Действительно, независимость величин $\xi_k$ вытекает из их ортогональности и гауссовости. Для сходимости ряда (16) с вероятностью 1 достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{M}(\xi_k\varphi_k(t))^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k(t)|^2$. Но уже упоминалось, что этот ряд сходится (и его сумма равна $B(t, t)$).

В качестве примера рассмотрим разложение в ортогональный ряд процесса броуновского движения на отрезке $[0, 1]$. При этом $\zeta(0)=0$, $\mathsf{M}\zeta(t)=0$, $\mathsf{D}\zeta(t)=t$, $B(t, s)=\mathsf{M}\zeta(t)\zeta(s)=\min(t, s)$. Собственные числа и функции ядра $B(t, s)$ легко находятся. Из уравнения

$$\lambda_n\varphi_n(t)=\int_0^1 \min(t,\ s)\,\varphi_n(s)\,ds=\int_0^t s\varphi_n(s)\,ds+\int_t^1 t\varphi_n(s)\,ds$$

имеем $\varphi_n(0)=0$. Дифференцируя по $t$, получим $\lambda_n\varphi_n'(t)=$ $=\int_t^1 \varphi_n(s)\,ds$, откуда $\varphi_n'(1)=0$. Повторно дифференцируя, придем к уравнению $\lambda_n\varphi_n''(t)=-\varphi_n(t)$. Нормированные решения последнего уравнения, удовлетворяющие граничным условиям $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n'(1)=0$, имеют вид

$$\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t,\quad \lambda_n^{-1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2,\qquad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Таким образом,

$$\zeta(t)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi},\tag{17}$$

где $\xi_n$ — последовательность независимых гауссовых случайных величин с параметрами (0, 1). При фиксированном $t$ этот ряд сходится с вероятностью 1.

Другое разложение процесса броуновского движения может быть получено следующим образом. Положим $\xi(t)=\zeta(t)-t\zeta(1)$. Тогда $\xi(t)$ — гауссов процесс с ковариацией $B_1(t,s)=$ $=\min(t,s)-ts$ и $\mathsf{M}\xi(t)=0$. Собственные числа и функции ядра $B_1(t,s)$ находятся так же, как и в предыдущем случае. Мы приходим снова к уравнению $\lambda_n\varphi_n''(t)=-\varphi_n(t)$ с граничными условиями $\varphi_n(0)=\varphi_n(1)=0$, решения которого имеют вид

$$\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t,\quad \lambda_n^{-1}=n^2\pi^2,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом,

$$\xi(t)=\zeta(t)-t\zeta(1)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\frac{\sin n\pi t}{n\pi},$$

где $\xi_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — нормированная последовательность независимых гауссовых случайных величин, причем

$$\xi_n=\sqrt{2}\int_0^1 \xi(t)\sin n\pi t\,dt.$$

Так как $\mathsf{M}\zeta(1)=1$, $\mathsf{M}\zeta^2(1)=1$,

$$\mathsf{M}\xi_n\zeta(1)=\sqrt{2}\int_0^1 \mathsf{M}(\zeta(t)-t\zeta(1))\zeta(1)\sin n\pi t\,dt=0,$$

то, положив $\xi_0=\zeta(1)$, получим

$$\zeta(t)=t\xi_0+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\frac{\sin n\pi t}{n\pi}, \tag{18}$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0, 1). Характер сходимости ряда (18) таков же, как и у ряда (17).

## § 2. Стохастические меры и интегралы

В ряде вопросов важную роль играют интегралы, записываемые в виде

$$\int_a^b f(t)\,d\zeta(t), \tag{1}$$

где $f(t)$ — заданная неслучайная функция, а $\zeta(t)$ — случайный процесс. Реализации процесса $\zeta(t)$, вообще говоря, являются функциями неограниченной вариации, и интеграл (1) нельзя понимать как интеграл Стилтьеса или Лебега — Стилтьеса, существующий почти для всех реализаций $\zeta(t)$. Все же и в этом случае интеграл (1) можно определить таким образом, чтобы он обладал свойствами, присущими обычному интегралу.

В настоящем параграфе дается определение и рассматриваются свойства интеграла, соответствующего интегрированию по случайной мере. Такие интегралы называются *стохастическими.*

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство, $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P})$, $E$ — некоторое множество и $\mathfrak{M}$ — полукольцо подмножеств $E$. Предположим, что каждому $\Delta\in\mathfrak{M}$ поставлена в соответствие комплекснозначная случайная величина $\zeta(\Delta)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\zeta(\Delta)\in\mathscr{L}_2$, $\zeta(\varnothing)=0$;
2) $\zeta(\Delta_1\cup\Delta_2)=\zeta(\Delta_1)+\zeta(\Delta_2)$ (mod $\mathsf{P}$), если $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$;
3) $\mathsf{M}\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)}=m(\Delta_1\cap\Delta_2)$,

где $m(\Delta)$ — некоторая функция множества на $\mathfrak{M}$.

Определение 1. *Семейство случайных величин $\{\zeta(\Delta), \Delta\in\mathfrak{M}\}$, удовлетворяющее условиям* 1) — 3), *будем называть элементарной ортогональной стохастической мерой, а $m(\Delta)$ — ее структурной функцией.*

Свойство ортогональности стохастической меры выражается условием 3): если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то величины $\zeta(\Delta_1)$ и $\zeta(\Delta_2)$ ортогональны.

Из определения $m(\Delta)$ следует, что она неотрицательна:

$$m(\Delta) = \mathsf{M} |\zeta(\Delta)|^2 \geqslant 0, \qquad m(\varnothing) = 0,$$

и аддитивна; если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то

$$m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mathsf{M} |\zeta(\Delta_1) + \zeta(\Delta_2)|^2 = \\ = m(\Delta_1) + m(\Delta_2) + 2m(\Delta_1 \cap \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2).$$

Таким образом, $m(\Delta)$ является предмерой (гл. II, § 2) на $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ класс всех простых функций $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k}(x), \qquad \Delta_k \in \mathfrak{M}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $n$ — любое число и $\chi_A(x)$ — индикатор множества $A$.

Определим стохастический интеграл от функции $f(x) \in \mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ по элементарной стохастической мере $\zeta(\Delta)$ формулой

$$\eta = \int f(x) \zeta(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta(\Delta_k). \tag{3}$$

Так как $\mathfrak{M}$ — полукольцо, то любую пару функций из $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ можно представить как линейные комбинации индикаторов одних и тех же множеств из $\mathfrak{M}$. Поэтому, если $f, g \in \mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$, то положим, что $f(x)$ дается формулой (2) и $g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{\Delta_k}(x)$, причем $\Delta_k \cap \Delta_r = \varnothing$ при $k \neq r$.

Из ортогональности $\zeta(\Delta)$ следует, что

$$\mathsf{M}\left(\int f(x) \zeta(dx) \overline{\int g(x) \zeta(dx)}\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{d}_k. \tag{4}$$

Предположим, что предмера $m$ удовлетворяет условию полуаддитивности и поэтому может быть продолжена до полной меры $\{E, \mathfrak{B}, m\}$. Тогда $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ является линейным подмножеством гильбертова пространства $\mathscr{L}_2\{m\} = \mathscr{L}_2\{E, \mathfrak{B}, m\}$. Обозначим $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ замыкание $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ в $\mathscr{L}_2\{m\}$.

Равенство (4) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathsf{M} \int f(x) \zeta(dx) \overline{\int g(x) \zeta(dx)} = \int f(x) \overline{g(x)} m(dx) \tag{5}$$

для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$ из $\mathscr{L}_0\{m\}$.

Введем теперь линейную оболочку $\mathscr{L}_0\{\zeta\}$ семейства случайных величин $\{\zeta(\Delta), \Delta \in \mathfrak{M}\}$, т. е. множество случайных величин, представимых в виде (3), и пространство $\mathcal{L}_2\{\zeta\}$, являющееся замыканием $\mathcal{L}_0\{\zeta\}$ в гильбертовом пространстве случайных величин $\mathcal{L}_2\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$. Заметим, что соотношение (3) устанавливает изометрическое соответствие $\eta = \psi(f)$ между $\mathcal{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ и $\mathcal{L}_0\{\zeta\}$. Это соответствие может быть продолжено до изометрического соответствия $\psi$ между $\mathcal{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ и $\mathcal{L}_2\{\zeta\}$. Если $\eta = \psi(f)$, $f \in \mathcal{L}_2\{\mathfrak{M}\}$, то полагаем по определению

$$\eta = \psi(f) = \int f(x)\, \zeta(dx) \tag{6}$$

и называем случайную величину $\eta$ *стохастическим интегралом* функции $f(x)$ по мере $\zeta$. Отсюда следует

Теорема 1. а) *Для простой функции* (2) *значение стохастического интеграла дается формулой* (3);

б) *для любых* $f(x)$ *и* $g(x)$ *из* $\mathcal{L}_2\{E, \mathfrak{B}, m\}$ *имеет место равенство* (5);

в) $$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, \zeta(dx) = \alpha \int f(x)\, \zeta(dx) + \beta \int g(x)\, \zeta(dx); \tag{7}$$

г) *для произвольной последовательности функций* $f^{(n)}(x) \in \mathcal{L}_2\{E, \mathfrak{B}, m\}$ *такой, что*

$$\int |f(x) - f^{(n)}(x)|^2\, m(dx) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{8}$$

*выполняется соотношение*

$$\int f(x)\, \zeta(dx) = \text{l.i.m.} \int f^{(n)}(x)\, \zeta(dx).$$

Замечание. В частности, если $f^{(n)}(x)$ — простые функции,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} \chi_{\Delta_k^{(n)}}(x), \quad \Delta_k^{(n)} \in \mathfrak{M}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и (8) выполнено, то

$$\int f(x)\, \zeta(dx) = \text{l.i.m.} \sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} \zeta(\Delta_k^{(n)}).$$

Существование последовательности простых функций, аппроксимирующих произвольную функцию $f(x) \in \mathcal{L}_2\{E, \mathfrak{B}, m\}$, вытекает из общих теорем теории меры. Таким образом, стохастический интеграл можно рассматривать как с. к. предел надлежащих интегральных сумм.

Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ класс всех множеств $A \in \mathfrak{B}$, для которых $m(\Delta) < \infty$. Определим случайную функцию множеств $\tilde{\zeta}(A)$:

$$\tilde{\zeta}(A) = \int \chi_A(x)\, \zeta(dx) = \int_A \zeta(dx). \tag{9}$$

Она обладает следующими свойствами:

а) $\tilde{\zeta}(A)$ определена на классе множеств $\mathfrak{B}_0$;

б) если $A_n \in \mathfrak{B}_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_k \cap A_r = \varnothing$ при $k \neq r$, $k > 0$, $r > 0$, то $\tilde{\zeta}(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\zeta}(A_n)$ в смысле с. к. сходимости;

в) $\mathsf{M}\tilde{\zeta}(A)\overline{\tilde{\zeta}(B)} = m(A \cap B)$, $A, B \in \mathfrak{B}_0$;

г) $\tilde{\zeta}(\Delta) = \zeta(\Delta)$ при $\Delta \in \mathfrak{M}$.

Определение 2. *Случайная функция множеств $\tilde{\zeta}$, удовлетворяющая условиям* а), б), в), *называется стохастической ортогональной мерой.*

Свойство г) означает, что $\tilde{\zeta}(\Delta)$ является продолжением элементарной стохастической меры $\zeta(\Delta)$. Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Если структурная функция элементарной стохастической меры $\zeta(\Delta)$ полуаддитивна, то $\zeta(\Delta)$ может быть продолжена до стохастической меры $\tilde{\zeta}(\Delta)$.*

Замечание. Так как $\mathscr{L}_2\{\zeta\} = \mathscr{L}_2\{\tilde{\zeta}\}$, то

$$\int f(x)\,\zeta(dx) = \int f(x)\,\tilde{\zeta}(dx).$$

В соответствии с этим равенством условимся в дальнейшем отождествлять стохастический интеграл по элементарной ортогональной мере $\zeta(\Delta)$, структурная функция которого полуаддитивна, со стохастическим интегралом по стохастической мере $\tilde{\zeta}$, определенной соотношением (9).

Сделаем несколько замечаний по поводу определения стохастического интеграла на отрезке прямой. Пусть $\xi(t)$ $(a \leqslant t < b)$ — процесс с ортогональными приращениями, т. е.

$$\mathsf{M}\,(\xi(t_2) - \xi(t_1))\,\overline{(\xi(t_4) - \xi(t_3))} = 0$$

для любых $t_i \in [a, b)$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, с. к. непрерывный слева:

$$\mathsf{M}\,|\xi(t) - \xi(s)|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad s \uparrow t.$$

Положим

$$F(t) = \mathsf{M}\,|\xi(t) - \xi(a)|^2.$$

Из ортогональности приращений процесса $\xi(t)$ следует, что при $t_2 > t_1$

$$F(t_2) = \mathsf{M}\,|\xi(t_2) - \xi(t_1) + \xi(t_1) - \xi(a)|^2 = F(t_1) + \mathsf{M}\,|\xi(t_2) - \xi(t_1)|^2,$$

откуда $F(t_2) \geqslant F(t_1)$ и $F(t) = \lim\limits_{s \uparrow t} F(s)$. Таким образом, $F(t)$ — монотонно неубывающая непрерывная слева функция. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех полуинтервалов $\Delta = [t_1, t_2)$, $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, $\zeta([t_1, t_2)) = \xi(t_2) - \xi(t_1)$, $m([t_1, t_2)) = F(t_2) - F(t_1)$. Тогда $\mathfrak{M}$ — полукольцо множеств,

$$\mathsf{M}\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)} = m(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

$\zeta(\Delta)$ — элементарная ортогональная стохастическая мера, структурная функция которой допускает продолжение до меры. Таким образом, можно определить стохастический интеграл Стилтьеса с помощью равенства

$$\int\limits_a^b f(t)\,d\xi(t) = \int\limits_a^b f(t)\,\zeta(dt),$$

в котором $\xi(t)$ — процесс с ортогональными приращениями. Этот интеграл существует для произвольной борелевской функции $f(t)$, $t \in [a, b)$, для которой

$$\int\limits_a^b |f(t)|^2 F(dt) < \infty,$$

где $F(A)$ — мера, соответствующая монотонной функции $F(t)$. Аналогично определение стохастического интеграла по всей прямой $(-\infty, \infty)$.

Докажем несколько предложений о стохастических интегралах.

Пусть $\zeta(\cdot)$ — ортогональная стохастическая мера со структурной функцией $m$, являющейся полной мерой на $\{E, \mathfrak{B}\}$, и $g(x) \in \mathscr{L}_2\{m\}$. Положим

$$\lambda(A) = \int \chi_A(x)\,g(x)\,\zeta(dx), \qquad A \in \mathfrak{B}.$$

Тогда

$$\mathsf{M}\lambda(A)\overline{\lambda(B)} = \int \chi_A(x)\,\chi_B(x)\,|g(x)|^2\,m(dx) = \int\limits_{A \cap B} |g(x)|^2\,m(dx).$$

Если на $\mathfrak{B}$ ввести новую меру

$$l(A) = \int\limits_A |g(x)|^2\,m(dx),$$

то видим, что $\lambda(A)$ будет ортогональной стохастической мерой со структурной функцией $l(A)$.

Л е м м а 1. *Если $f(x) \in \mathscr{L}_2\{l\}$, то $f(x)g(x) \in \mathscr{L}_2\{m\}$ и*

$$\int f(x)\,\lambda(dx) = \int f(x)\,g(x)\,\zeta(dx).$$

*Доказательство.* Утверждение леммы очевидно для простых $f(x)$, $f(x)=\sum_k c_k\chi_{A_k}(x)$, $A_k\in\mathfrak{B}$. Далее, если $f_k(x)$ — фундаментальная последовательность простых функций в $\mathscr{L}_2\{l\}$, то

$$\left|\int f_n(x)\lambda(dx)-\int f_{n+m}(x)\lambda(dx)\right|^2=\int|f_n(x)-f_{n+m}(x)|^2 l(dx)=$$

$$=\int|f_n(x)-f_{n+m}(x)|^2|g(x)|^2 m(dx),$$

т. е. $f_n(x)g(x)$ является фундаментальной в $\mathscr{L}_2\{m\}$. Переходя в равенстве

$$\int f_n(x)\lambda(dx)=\int f_n(x)g(x)\zeta(dx)$$

к пределу при $n\to\infty$, получим утверждение леммы в общем случае. ■

Лемма 2. *Если $A\in\mathfrak{B}_0$, то*

$$\zeta(A)=\int\frac{\chi_A(x)}{g(x)}\lambda(dx).$$

Заметим прежде всего, что $g(x)=0$ на множестве $l$-меры 0; таким образом, $\frac{1}{g(x)}\neq\infty\ (\mathrm{mod}\ l)$. Далее,

$$\int\frac{\chi_A(x)}{|g(x)|^2}l(dx)=\int\frac{1}{|g(x)|^2}|g(x)|^2 m(dx)=m(A)<\infty.$$

Следовательно, можно воспользоваться леммой 1:

$$\int\frac{1}{g(x)}\chi_A(x)\lambda(dx)=\int\frac{1}{g(x)}\chi_A(x)g(x)\zeta(dx)=\zeta(A).\ ■$$

Пусть $T$ — конечный или бесконечный отрезок на прямой линии, $\mathfrak{B}^1$ — $\sigma$-алгебра подмножеств $T$, измеримых по Лебегу, $l$ — мера Лебега.

Допустим, что $g(t,x)$ $\mathfrak{B}^1\times\mathfrak{B}$-измерима, $g(t,x)\in\mathscr{L}_2\ \{l\times m\}$ и $g(t,x)\in\mathscr{L}_2\{m\}$ при произвольном $t\in T$. Рассмотрим стохастический интеграл

$$\xi(t)=\int g(t,x)\zeta(dx). \tag{10}$$

При каждом $t$ он определен с вероятностью 1.

Лемма 3. *Стохастический интеграл* (10) *можно определить как функцию от $t$ таким образом, чтобы процесс $\xi(t)$ был измерим.*

*Доказательство.* Если

$$g(t,x)=\sum c_k\chi_{B_k}(t)\chi_{A_k}(x), \tag{11}$$

$B_k \in \mathfrak{B}^1$, $A_k \in \mathfrak{B}$, то $\xi(t) = \sum c_k \chi_{B_k}(t) \zeta(A_k)$ является $\mathfrak{B}^1 \times \mathfrak{S}$-измеримой функцией переменных $(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. В общем случае можно построить последовательность простых функций $g_n(t, x)$ вида (11) и таких, что

$$\iint |g(t, x) - g_n(t, x)|^2 m(dx)\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность процессов, построенных по формуле (10) при $g = g_n$. Тогда существует процесс $\tilde{\xi}(t)$ такой, что

$$\int \mathsf{M} |\tilde{\xi}(t) - \xi_n(t)|^2 dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и $\tilde{\xi}(t)$ является $\mathfrak{B}^1 \times \mathfrak{S}$-измеримой функцией от $(t, \omega)$. С другой стороны,

$$\int \mathsf{M} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2 dt = \iint |g(t, x) - g_n(t, x)|^2 m(dx)\, dt \to 0,$$

откуда следует, что $\mathsf{M}|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)|^2 = 0$ почти для всех $t$. Положим

$$\xi'(t) = \begin{cases} \tilde{\xi}(t), & \text{если} \quad \mathsf{P}\{\xi(t) \neq \tilde{\xi}(t)\} = 0, \\ \xi(t), & \text{если} \quad \mathsf{P}\{\xi(t) \neq \tilde{\xi}(t)\} > 0. \end{cases}$$

Процесс $\xi'(t)$ измерим (так как $\xi'(t)$ отличается от $\mathfrak{B}^1 \times \mathfrak{S}$-измеримой функции $\tilde{\xi}(t)$ на множестве меры 0) и стохастически эквивалентен $\xi(t)$. ■

В дальнейшем, рассматривая процессы, определяемые стохастическими интегралами вида (10) и удовлетворяющие ранее перечисленным условиям, будем предполагать их измеримыми.

Лемма 4. *Если $g(t, s)$ и $h(t)$ — борелевские функции,*

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, s)|^2 dt\, m(ds) < \infty, \qquad \int_a^b |h(t)|^2 dt < \infty, \tag{12}$$

*$\zeta$ — ортогональная стохастическая мера на $\{\mathcal{R}^1, \mathfrak{B}^1\}$, то*

$$\int_a^b h(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s) \zeta(ds)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(s) \zeta(ds), \tag{13}$$

*где*

$$g_1(s) = \int_a^b h(t) g(t, s)\, dt.$$

*Доказательство.* Математическое ожидание квадрата модуля интеграла в левой части равенства (13) равно

$$\int_a^b \int_a^b h(t_1)\overline{h(t_2)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1, s)\overline{g(t_2, s)}\, m(ds)\right) dt_1\, dt_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_a^b h(t)\, g(t, s)\, dt\right|^2 m(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |h(t)|^2\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b |g(t, s)|^2\, dt\, m(ds).$$

Для математического ожидания квадрата модуля в правой части равенства (13) имеем неравенство, указанное во второй строчке последнего соотношения. Следовательно, правая и левая части равенства (13) непрерывны относительно предельного перехода по последовательностям $g_n(t, s)$, сходящимся в $\mathscr{L}_2\{\Phi\}$, где $\Phi$ — прямое произведение лебеговой меры на меру $m$ в полосе $[a, b]\times(-\infty, \infty)$. Далее, множество функций $g(t, s)$, для которых (13) верно, линейно и содержит все функции вида $\sum c_k\chi_{A_k}(t)\,\chi_{B_k}(s)$. Следовательно, оно содержит все функции из $\mathscr{L}_2\{\Phi\}$. ■

Замечание. *Если условия леммы* 4 *выполнены для каждого конечного отрезка* $(a, b)$ *и существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, g(t, s)\, dt = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b h(t)\, g(t, s)\, dt$$

*в смысле сходимости в* $\mathscr{L}_2\{m\}$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s)\,\zeta(ds)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)\,\zeta(ds), \tag{14}$$

*где*

$$f_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, g(t, s)\, dt.$$

Доказательство непосредственно вытекает из того, что левая часть равенства (14) является с. к. пределом левой части равенства (13), и из возможности перехода к пределу под знаком стохастического интеграла в правой части формулы (13). ■

Рассмотрим теперь обобщение предыдущих результатов на векторные стохастические меры. Ограничимся простейшим случаем интегрирования скалярных функций, мало чем отличающимся от интегрирования по числовым стохастическим мерам.

Пусть $Z$ обозначает некоторое комплексное векторное пространство размерности $p$. Для простоты будем считать, что некоторый базис в этом пространстве фиксирован. Допустим, что каждому $\Delta \in \mathfrak{M}$ поставлена в соответствие векторная случайная величина $\zeta(\Delta)$ со значениями в $Z^p$, $\zeta(\Delta) = \{\zeta^1(\Delta), \zeta^2(\Delta), \ldots \ldots, \zeta^p(\Delta)\}$. Через $|\zeta(\Delta)|$ обозначим норму вектора $\zeta(\Delta)$,

$$|\zeta(\Delta)|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\zeta^k(\Delta)|^2.$$

Предположим, что

1) $\mathsf{M}|\zeta(\Delta)|^2 < \infty$, $\zeta(\varnothing) = 0$;

2) $\zeta(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \zeta(\Delta_2) \pmod P$, если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$;

3) $M\zeta^k(\Delta_1)\overline{\zeta^j(\Delta_2)} = m_j^k(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, $\Delta_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2$; $k, j = 1, \ldots, p$.

Семейство случайных векторов $\{\zeta(\Delta), \Delta \in \mathfrak{M}\}$ будем называть *элементарной векторной стохастической* (*ортогональной*) *мерой*, а матрицу $m(\Delta) = \{m_j^k(\Delta)\} = \mathsf{M}\zeta(\Delta)\zeta^*(\Delta)$ — *структурной матрицей*.

Отметим, что, как функция от $\Delta_1$ и $\Delta_2$, матрица $m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ обладает свойствами корреляционной матрицы векторной случайной функции. Кроме того, если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то

$$m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2).$$

Отсюда следует, что диагональные элементы матрицы $m(\Delta)$ являются предмерами. Кроме того, из неравенства

$$|m_j^k(\Delta)| \leqslant \sqrt{m_k^k(\Delta)\, m_j^j(\Delta)} \tag{15}$$

следует

$$\sum_r |m_j^k(\Delta_r)| \leqslant \Big\{ \sum_r m_k^k(\Delta_r) \sum_r m_j^j(\Delta_r) \Big\}^{1/2}, \tag{16}$$

и, значит, функции множеств $m_j^k$ $(k, j = 1, \ldots, p)$ имеют ограниченную вариацию на $\Delta$.

Положим $m_0(\Delta) = \operatorname{Sp} m(\Delta) = \sum_{k=1}^{p} m_k^k(\Delta)$. Из (16) следует также, что если $\sum_{r=1}^{m_N} m_0(\Delta_r^N) \to 0$ при $N \to \infty$, то и $\sum_{r=1}^{m_N} |m_j^k(\Delta_r^N)| \to 0$. Отсюда вытекает, что функции $m_j^k(\Delta)$ могут быть продолжены до счетно аддитивных функций множеств на $\mathfrak{B}$, если функция $m_0(\Delta)$ полуаддитивна на $\mathfrak{M}$.

В дальнейшем матричные функции, полученные путем такого продолжения из структурной функции элементарной ортогональной стохастической меры, будем называть *положительно определенными матричными мерами.*

Выше $\mathfrak{B}$ обозначало пополнение $\sigma\{\mathfrak{M}\}$ относительно продолженной элементарной меры $m_0(\Delta)$. Простоты ради для продолжений функций $m_j^k$, $m_0$ и матрицы $m$ на $\mathfrak{B}$ сохраним первоначальные обозначения, причем в дальнейшем будем считать, что $m_0(\Delta)$ полуаддитивна на $\mathfrak{M}$.

Определим на $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ стохастический интеграл с помощью формулы

$$\eta = \int f(x)\,\zeta(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta(\Delta_k), \tag{17}$$

если $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k}(x)$, $\Delta_k \in \mathfrak{M}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Значением этого интеграла является случайный вектор (столбец) со значениями в $Z^p$. Через $\mathscr{L}_0^p(\zeta)$ обозначим совокупность всех случайных векторов $\eta$ вида (17). Если $g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{\Delta_k}(x)$, то

$$\mathsf{M}\left(\int f(x)\,\zeta(dx)\left(\int g(x)\,\zeta(dx)\right)^*\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{d}_k m(\Delta_k),$$

что можно записать в виде

$$\mathsf{M}\left(\int f(x)\,\zeta(dx)\left(\int g(x)\,\zeta(dx)\right)^*\right) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,m(dx). \tag{18}$$

Отсюда следует равенство

$$\mathsf{M}\left|\int f(x)\,\zeta(dx)\right|^2 = \int |f(x)|^2\, m_0(dx). \tag{19}$$

Введем в $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ скалярное произведение

$$(f, g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,m_0(dx).$$

Формула (17) устанавливает изометрическое отображение $\eta = \psi(f)$ пространства $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ на $\mathscr{L}_0^p\{\zeta\}$, если в $\mathscr{L}_0^p\{\zeta\}$ скалярное произведение элементов $\eta_1$ и $\eta_2$ определяется как $\mathsf{M}\eta_2^*\eta_1$. Замыкание пространства случайных величин $\mathscr{L}_0^p\{\zeta\}$ обозначим через $\mathscr{L}_2^p\{\zeta\}$, а пополнение $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ — через $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$.

Аналогично неравенству (16) выводится неравенство

$$\int |f(x)|\,|m_j^k|(dx) \leqslant \left\{\int |f(x)|\,m_k^k(dx) \int |f(x)|\,m_j^j(dx)\right\}^{1/2}, \tag{20}$$

где $|m_j^k|(A)$ — абсолютная вариация функции $m_j^k$. Из неравенства (20) вытекает существование и непрерывность интеграла

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,m_j^k(dx)$$

как функционала от $f$ и $g$ в $\mathscr{L}_2\{m_0\}$.

Исходя из этого, изометрическое соответствие $\eta=\psi(f)$ пространства $\mathscr{L}_0(\mathfrak{M})$ на $\mathscr{L}_0^p(\zeta)$ может быть продолжено до изометрического соответствия $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ на $\mathscr{L}_2^p\{\zeta\}$. При этом случайный вектор $\eta$ называют стохастическим интегралом и пишут

$$\eta=\int f(x)\,\zeta(dx),$$

где $f(x)\in\mathscr{L}_2(m_0)$.

Аналогично понятию стохастической меры в скалярном случае может быть определена векторная стохастическая мера $\tilde{\zeta}(A)$.

## § 3. Интегральные представления случайных функций

Используя результаты предыдущего параграфа, можно получать различные представления случайных функций с помощью стохастических интегралов.

Предположим сначала, что $p$-мерная векторная случайная функция $\xi(\theta)$, $\theta\in\Theta$, может быть представлена в виде

$$\xi(\theta)=\int g(\theta,\,x)\,\zeta(dx), \tag{1}$$

где $\zeta$ — стохастическая мера на измеримом пространстве $\{X,\,\mathfrak{B}\}$ со значениями в $Z^p$ и структурной матрицей $m(A)$ (мы используем здесь обозначения предыдущего параграфа), $g(\theta,\,x)$ — скалярная функция и при каждом $\theta\in\Theta$

$$g(\theta,\,x)\in\mathscr{L}_2\{m_0\}=\mathscr{L}_2\{X,\,\mathfrak{B},\,m_0\},\qquad m_0(A)=\operatorname{Sp} m(A).$$

В силу формулы (18) § 2 ковариационная матрица случайной функции $\xi(\theta)$ имеет вид

$$B(\theta_1,\,\theta_2)=\mathsf{M}\xi(\theta_1)\,\xi^*(\theta_2)=\int g(\theta_1,\,x)\,\overline{g(\theta_2,\,x)}\,m(dx), \tag{2}$$

а из (19) § 2 следует, что

$$\mathsf{M}\xi^*(\theta_2)\,\xi(\theta_1)=\int g(\theta_1,\,x)\,\overline{g(\theta_2,\,x)}\,m_0(dx). \tag{3}$$

Напомним, что $\{X,\,\mathfrak{B},\,m_0\}$ — пространство с полной мерой, $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ — гильбертово пространство $\mathfrak{B}$-измеримых комплексно-значных функций с $m_0$-интегрируемым квадратом.

Через $\mathscr{L}_2\{g\}$ обозначим замыкание в $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ линейной оболочки, порожденной системой функций $\{g(\theta, x),\ \theta\in\Theta\}$. Тогда $\mathscr{L}_2\{g\}$ есть линейное замкнутое подпространство $\mathscr{L}_2\{m_0\}$. Если $\mathscr{L}_2\{g\}=\mathscr{L}_2\{m_0\}$, то система функций $\{g(\theta, x),\ \theta\in\Theta\}$ называется полной в $\mathscr{L}_2\{m_0\}$.

Пусть $\{\xi(\theta),\ \theta\in\Theta\}$ — гильбертова случайная функция со значениями в $Z^p$, $\mathscr{L}_0\{\xi\}$ — множество всех случайных векторов

$$\eta=\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(\theta_k),\qquad n=1, 2, \ldots,\qquad \theta_k\in\Theta, \tag{4}$$

где $c_k$ — произвольные комплексные числа, и $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ — замыкание $\mathscr{L}_0\{\xi\}$ в смысле средней квадратической сходимости случайных векторов.

Определение. *Семейство случайных векторов $\{\eta_\alpha,\ \alpha\in A\}$, $\eta_\alpha\in\mathscr{L}_2\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, называется подчиненным случайной функции $\{\xi(\theta), \theta\in\Theta\}$, если $\eta_\alpha\in\mathscr{L}_2\{\xi\}$, $\alpha\in A$.*

Теорема 1. *Пусть ковариационная матрица случайной функции $\{\xi(\theta),\ \theta\in\Theta\}$ допускает представление* (2), *где $m$ — положительно определенная матричная мера на $\{X, \mathfrak{B}\}$, $g(\theta, x)\in\mathscr{L}_2\{m_0\}$, $\theta\in\Theta$, и семейство $\{g(\theta, x),\ \theta\in\Theta\}$ полно в $\mathscr{L}_2\{X, \mathscr{L}, m_0\}$. Тогда $\xi(\theta)$ представима по формуле* (1), *где $\{\zeta(B),\ B\in\mathfrak{B}\}$ — некоторая стохастическая ортогональная векторная мера, подчиненная случайной функции $\xi(\theta)$ со структурной функцией $m(\cdot)$, и равенство* (1) *выполняется с вероятностью* 1 *при каждом $\theta$.*

*Доказательство.* Каждой линейной комбинации

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k g(\theta_k, x),\qquad \theta_k\in\Theta, \tag{5}$$

поставим в соответствие случайный вектор $\eta$, $\eta=\psi(f)$, с помощью соотношения (4). Через $\mathscr{L}_0\{g\}$ обозначим множество функций вида (5). Определим в $\mathscr{L}_0\{g\}$ скалярное произведение с помощью соотношения

$$(f_1, f_2)=\int f_1(x)\overline{f_2(x)}\,m_0(dx). \tag{6}$$

Соответствие $\eta=\psi(f)$ является изометрическим отображением $\mathscr{L}_0\{g\}$ на $\mathscr{L}_0\{\xi\}$. Следовательно, оно может быть продолжено до изометрического отображения $\mathscr{L}_2\{g\}$ на $\mathscr{L}_2\{\xi\}$. Если $B\in\mathfrak{B}$, то $\chi_B(x)\in\mathscr{L}_2\{m_0\}=\mathscr{L}_2\{g\}$ в силу полноты семейства функций $\{g(\theta, x),\ \theta\in\Theta\}$. Положим $\zeta(A)=\psi(\chi_A)$. Тогда $\zeta(A)$ является векторной стохастической мерой и ее структурная функция совпадает с $m$:

$$\mathsf{M}\zeta(A_1)\zeta^*(A_2)=\int\chi_{A_1}(\theta)\overline{\chi_{A_2}(\theta)}\,m(d\theta)=m(A_1\cap A_2).$$

Определим теперь случайную функцию $\tilde{\xi}(\theta)$ с помощью стохастического интеграла

$$\tilde{\xi}(\theta)=\int g(\theta, x)\zeta(dx).$$

Так как

$$\mathsf{M}\xi(\theta)\zeta^*(A)=\int g(\theta, x)\chi_A(x)m(dx),$$

то из изометричности соответствия $\eta=\psi(f)$ следует равенство

$$\mathsf{M}\xi(\theta)\tilde{\xi}^*(\theta)=\int g(\theta, x)\overline{g(\theta, x)}m(dx).$$

Отсюда получаем

$$\mathsf{M}|\xi(\theta)-\tilde{\xi}(\theta)|^2=$$
$$=\mathsf{M}\xi^*(\theta)\xi(\theta)-\mathsf{M}\tilde{\xi}^*(\theta)\xi(\theta)-\mathsf{M}\xi^*(\theta)\tilde{\xi}(\theta)+\mathsf{M}\tilde{\xi}^*(\theta)\tilde{\xi}(\theta)=0$$

что и доказывает теорему. ■

Приведем ряд примеров на применение доказанной теоремы. Ради краткости условимся до конца настоящего параграфа писать «стационарный процесс» вместо «стационарный в широком смысле».

Корреляционная матрица стационарного и с. к. непрерывного процесса может быть представлена в виде (см. § 5 гл. I)

$$R(t_1, t_2)=R(t_1-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(t_1-t_2)}F(du), \tag{7}$$

где $F(\cdot)$ — неотрицательно определенная матричная мера (спектральная матрица процесса). Выражение (7) является частным случаем (2), в котором функции $g(\theta, x)$ соответствуют $e^{iut}$, $\theta\longleftrightarrow t$, $x\to u$, причем совокупность функций $\{e^{iut}, -\infty< u<\infty\}$ является полной в $\mathscr{L}_2\{m_0\}$, где $m_0$ — любая ограниченная мера на прямой. Таким образом, применима теорема 1 и мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Векторный стационарный с. к. непрерывный случайный процесс* $\xi(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, $\mathsf{M}\xi(t)=0$, *допускает представление*

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\zeta(du), \tag{8}$$

*где* $\zeta(A)$ — *векторная ортогональная стохастическая мера на* $\mathfrak{B}$, *подчиненная* $\xi(t)$. *Между* $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ *и* $\mathscr{L}_2\{F_0\}$, *где* $F_0(\cdot)=\operatorname{Sp}F(\cdot)$, *существует изометрическое соответствие, при котором*

а) $\xi(t)\longleftrightarrow e^{itu}$, $\zeta(A)\longleftrightarrow\chi_A(u)$;

б) *если* $\eta_i \leftrightarrow g_i(u)$ $(i=1,\ 2)$, *то*

$$\eta_i = \int g_i(u)\,\zeta(du)$$

*и*

$$\mathsf{M}\eta_1\eta_2^* = \int g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\,F(u).$$

Формула (8) носит название *спектрального разложения* стационарного процесса, а мера $\zeta(A)$ — *стохастической спектральной меры* процесса. Из теоремы 2 следует, что

$$\mathsf{M}\zeta(A_1)\,\zeta^*(A_2) = \int\limits_{A_1\cap A_2} F(du) = F(A_1\cap A_2), \tag{9}$$

т. е. $F(\cdot)$ является структурной функцией векторной стохастической меры $\zeta(\cdot)$.

Замечание 1. Для любого $\eta \in \mathscr{L}_2\{\xi\}$ имеем $\mathsf{M}\eta = 0$. В частности, для любого $A \in \mathfrak{B}$ будет $\mathsf{M}\zeta(A) = 0$.

Замечание 2. Если $\mathsf{M}\xi(t) = a \neq 0$, то предыдущую теорему можно применить к процессу $\xi(t) - a$. С другой стороны, представление (8) можно сохранить и в общем случае, если к $\zeta(A)$ добавить меру, сосредоточенную в точке $u=0$, по величине равную $a$.

В качестве примера применения теоремы 2 выведем формулу Котельникова — Шеннона для одномерного случайного процесса, спектральная мера которого сосредоточена на конечном интервале $[-B,\ B]$. Разложим функцию $e^{iut}$ на интервале $[-B,\ B]$ в ряд Фурье. Имеем

$$e^{iut} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Bt-\pi n)}{Bt-\pi n}\, e^{i\frac{\pi n}{B}u}.$$

Ряд в правой части последней формулы сходится равномерно по $u$ во всяком отрезке $[-B',\ B']$, $B' < B$, и имеет ограниченные частные суммы, а потому сходится и в $\mathscr{L}_2\{m_0\}$. В силу изоморфизма пространств $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ и $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ имеем (в смысле с. к. сходимости)

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Bt-\pi n)}{Bt-\pi n}\,\xi\left(\frac{\pi n}{B}\right). \tag{10}$$

Таким образом, значение случайной функции $\xi(t)$ в любой момент времени $t$ однозначно восстанавливается по ее значениям в равноотстоящие моменты времени $\pi n/B$, $n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Для стационарных векторных последовательностей $\xi_n$, $n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, можно сформулировать теорему, полностью аналогичную теореме 2. Отличие состоит в том, что спектральная мера последовательности сосредоточена на полуинтервале $[-\pi, \pi)$, а не на всей вещественной прямой, как в случае процесса с непрерывным временем (см. теорему 1 § 2).

Из теорем 1 и 2 § 2 вытекает следующее обобщение теоремы 2 о спектральном разложении однородного с. к. непрерывного поля.

Теорема 3. *Векторное однородное с. к. непрерывное поле* $\xi(x)$, $x \in \mathscr{R}^m$, *может быть представлено в виде*

$$\xi(x) = a + \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(x, u)}\zeta(du), \qquad a = \mathsf{M}\xi(x),$$

*где* $\zeta$ — *векторная ортогональная мера на* $\mathfrak{B}^m$, *подчиненная полю* $\xi(x)$. *Между* $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ *и* $\mathscr{L}_2\{F_0\}$, $F_0(\cdot) = \operatorname{Sp} F(\cdot)$, *существует изометрическое соответствие, при котором*

а) $\zeta(x) \leftrightarrow e^{i(x, u)}$;

б) *если* $\eta_i \leftrightarrow g_i(u)$, $\eta_i \in \mathscr{L}_2\{\xi\}$, $g_i(u) \in \mathscr{L}_2\{F_0\}$, $i = 1, 2$, *то*

$$\eta_i = \int_{\mathscr{R}^m} g_i(u)\zeta(du),$$

$$\mathsf{M}\eta_1\eta_2^* = \int_{\mathscr{R}^m} g_1(u)\overline{g_2(u)}\,F(du).$$

Следствие. *Если однородное поле* $\xi(x)$ $(\mathsf{M}\xi(x) = 0)$ *(скалярное) имеет ограниченный спектр, т. е.*

$$R(x) = \int_{-B_1}^{B_1} \cdots \int_{-B_m}^{B_m} e^{i(x, u)}F(du),$$

*то оно однозначно определяется своими значениями в точках решетки* $\left\{x_n = \left(\frac{\pi n^1}{B_1}, \frac{\pi n^2}{B_2}, \ldots, \frac{\pi n^m}{B_m}\right),\ n^k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$ *по формуле*

$$\xi(x) = \sum_{n=(n^1, \ldots, n^m)} \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin(B_k x^k - \pi n^k)}{B_k x^k - \pi n^k}\,\xi\left(\frac{\pi n^1}{B_1}, \frac{\pi n^2}{B_2}, \ldots, \frac{\pi n^m}{B_m}\right), \tag{11}$$

*в которой суммирование производится по всевозможным целочисленным векторам n и ряд в правой части при каждом x сходится в среднем квадратическом.*

Рассмотрим еще спектральное разложение с. к. непрерывного изотропного двумерного случайного поля. На основании формулы (10) § 5 гл. I корреляционная функция поля имеет вид

$$R(x_1,\ x_2)=R(\rho)=\int_0^\infty J_0(u\rho)\,g(du), \tag{12}$$

где $x_1$ и $x_2$ — точки плоскости, $\rho$ — расстояние между ними. Если $(r_i,\ \theta_i)$ — полярные координаты точки $x_i$ $(i=1,\ 2)$, то

$$\rho=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}.$$

Используя формулу сложения для функции $J_0$:

$$J_0(u\rho)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(ur_1)\,J_k(ur_2)\,e^{ik(\theta_1-\theta_2)},$$

перепишем формулу (12) в виде

$$R(\rho)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} J_\nu(ur_1)\,e^{i\nu\theta_1}J_\nu(ur_2)\,e^{i\nu\theta_2}g(du)\,\varepsilon(d\nu),$$

где $\varepsilon(d\nu)$ — мера, сосредоточенная в точках $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$ причем $\varepsilon(\{k\})=1$. В силу теоремы 1 плоское, изотропное, однородное и с. к. непрерывное поле $\xi(x)$, $x=re^{i\theta}$ $(\mathsf{M}\xi(x)=0)$ допускает представление вида

$$\xi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}\int_0^\infty J_k(ur)\,\zeta_k(du), \tag{13}$$

где $\zeta_k$ — последовательность ортогональных между собой стохастических мер на прямой $[0,\ \infty)$.

## § 4. Линейные преобразования

Представим себе некоторую систему $\Sigma$ (прибор или устройство), предназначенную для преобразования сигналов (функций) $x(t)$, зависящих от времени $t$. Функция, которая должна быть преобразована, называется *функцией на входе системы*; преобразованная функция — *функцией на выходе* или *реакцией* на входную функцию. Математически всякая система задается классом $\mathscr{D}$ «допустимых» функций на входе и соотношением вида

$$z(t)=T(x\,|\,t),$$

где $x=x(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ — функция на входе, $x(s)\in\mathscr{D}$, а $z(t)$ — значение функции на выходе в момент времени $t$.

Система $\Sigma$ называется *линейной*, если: а) класс допустимых функций $\mathscr{D}$ линеен; б) оператор $T$ удовлетворяет принципу суперпозиции

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2 \mid t) = \alpha T(x_1 \mid t) + \beta T(x_2 \mid t).$$

Введем операцию сдвига времени $S_\tau$ $(-\infty < \tau < \infty)$ с помощью соотношения

$$x_\tau(t) = S_\tau(x \mid t) = x(t+\tau).$$

Она определена на множестве всех функций переменной $t$ $(-\infty < t < \infty)$ и линейна. Система $\Sigma$ называется *однородной во времени* (или просто *однородной*), если класс допустимых функций $\mathscr{D}$ инвариантен относительно операции сдвига $S_\tau$, $S_\tau\mathscr{D} = \mathscr{D}$ и

$$T(x_\tau \mid t) = T(x \mid t+\tau) \quad \text{или} \quad T(S_\tau x \mid t) = S_\tau T(x \mid t),$$

т. е. если преобразование $T$ перестановочно с операцией сдвига времени $S_\tau$ $(-\infty < \tau < \infty)$.

Простейшим примером линейного преобразования может служить преобразование вида

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\, s)\, x(s)\, ds, \tag{1}$$

для которого класс допустимых функций $\mathscr{D}$ зависит от свойств функции $h(t,\, s)$. Пусть на вход системы поступает функция $\delta_{x-s}$, где $\delta_s$ — функция Дирака. Тогда $z(t) = h(t, s)$. Таким образом, функцию $h(t, s)$ следует интерпретировать как реакцию системы на $\delta$-функцию в момент времени $s$. В соответствии с этим $h(t, s)$ называется *импульсной переходной функцией системы*. Если система $\Sigma$ однородна во времени, то формально

$$h(t,\, a-c) = T(\delta_{a-c} \mid t) = T(S_c\delta_a \mid t) = S_c T(\delta_a \mid t) = h(t+c,\, a),$$

или, заменив $a$ на $c$ и $t$ на $t-c$, получим

$$h(t-c,\, 0) = h(t,\, c).$$

Функция $h(t) = h(t+c,\, c)$ называется *импульсной переходной функцией однородной системы*.

Таким образом, для однородной системы уравнение (1) принимает вид

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\, x(s)\, ds. \tag{2}$$

Операция в правой части соотношения (2) называется *сверткой* функций $h(t)$ и $x(t)$.

Если функция на входе системы отличается от функции на выходе только скалярным множителем (преобразование $T$ не меняет формы сигнала)

$$T(f\mid t)=\lambda f(t) \qquad (-\infty<t<\infty),$$

то $f(t)$ называется *собственной функцией*, а $\lambda$ — *собственным значением* преобразования $T$. Для однородных во времени систем с интегрируемой импульсной переходной функцией функции $e^{itu}$ ($u$ — любое действительное число) являются собственными. Действительно, все ограниченные измеримые функции являются допустимыми и

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\,e^{ius}\,ds=\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,e^{iu(t-s)}\,ds=H(iu)\,e^{iut},$$

где

$$H(iu)=\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,e^{-isu}\,ds \tag{3}$$

— преобразование Фурье импульсной переходной функции, является собственным значением преобразования.

Таким образом, отношение реакции системы на простую гармоническую функцию $e^{iut}$ к этой функции

$$H(iu)=\frac{T(e^{isu}\mid t)}{e^{iut}}$$

не зависит от времени. Функция $H(iu)$ называется *частотной характеристикой* системы или *коэффициентом передачи.*

Можно несколько иначе интерпретировать частотную характеристику системы (2), рассматривая иной класс допустимых функций. Пусть $x(t)$ интегрируема. В силу теоремы Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|\,dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-s)|\,|x(s)|\,ds\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|\,ds\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt<\infty,$$

т. е. функция $z(t)$ также интегрируема. Рассмотрим преобразование Фурье функции $z(t)$. Применяя теорему Фубини, получим

$$\bar{z}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu}z(t)\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(t-s)}h(t-s)\,e^{-ius}x(s)\,ds\,dt=H(iu)\,\tilde{x}(u),$$

$$\tilde{x}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ius}x(s)\,ds.$$

Следовательно, отношение преобразования Фурье функции на выходе к преобразованию Фурье функции на входе не зависит от функции на входе системы и равно ее частотной характеристике:

$$H(iu) = \frac{\tilde{z}(u)}{\tilde{x}(u)}.$$

В формуле (1) реакция системы в момент времени $t$ зависит от значений функции на входе как в моменты времени $s < t$, так и в моменты времени $s > t$. В физических устройствах, однако, нет возможности предвосхитить будущее. Поэтому для них

$$h(t, s) = 0 \quad \text{при} \quad t < s. \tag{4}$$

Соотношение (4) называется *условием физической осуществимости* системы. Для систем, удовлетворяющих условию (4), формула (1) принимает вид

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{5}$$

а если система однородна, то

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-s)\, x(s)\, ds = \int_{0}^{\infty} h(s)\, x(t-s)\, ds. \tag{6}$$

Если на вход системы подается функция, начиная с момента времени 0 ($x(s) = 0$ при $s < 0$), то

$$z(t) = \int_{0}^{t} h(t-s)\, x(s)\, ds. \tag{7}$$

Изучая такие системы, вместо преобразования Фурье удобно пользоваться преобразованием Лапласа

$$\tilde{z}(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} z(t)\, dt. \tag{8}$$

Из формулы (7) следует, что

$$\tilde{z}(p) = H(p)\, \tilde{x}(p), \qquad \tilde{x}(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} x(t)\, dt \tag{9}$$

при $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$, если функции $e^{-\alpha t} h(t)$ и $e^{-\alpha t} x(t)$ абсолютно интегрируемы.

Перейдем к основной теме настоящего параграфа — к линейным преобразованиям случайных процессов. В основном рассматриваются однородные во времени преобразования стационарных процессов. По поводу более общего случая мы ограничимся простыми замечаниями.

Пусть $\xi(t)$ — измеримый гильбертов процесс $(-\infty<t<\infty)$ с ковариацией $B(t, s)$, причем функция $B(t, t)$ интегрируема по $t$ на каждом конечном интервале, так же как и функция $|h(s, t)|^2$ при фиксированном $s$. Тогда с вероятностью 1 при любых $a$ и $b$ существует интеграл

$$\zeta(t)=\int_a^b h(t, s)\,\xi(s)\,ds. \tag{10}$$

Определим несобственный интеграл от $-\infty$ до $\infty$ как с. к. предел интегралов по конечным промежуткам интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t, s)\,\xi(s)\,ds=\operatorname*{l.i.m.}_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b h(t, s)\,\xi(s)\,ds.$$

Для существования этого предела необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t, s_1)\,B(s_1, s_2)\,\overline{h(t, s_2)}\,ds_1\,ds_2$$

существовал как несобственный интеграл Коши на плоскости. Если он существует для $t\in T$, то $\zeta(t)$ является гильбертовым случайным процессом на $T$ с ковариацией

$$B(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, s_1)\,B(s_1, s_2)\,\overline{h(t_2, s_2)}\,ds_1\,ds_2.$$

Предположим теперь, что $\xi(t)$ — стационарный процесс в широком смысле со спектральной мерой $F(du)$ и $\mathsf{M}\xi(t)=0$. Это предположение будет сохранено до конца настоящего параграфа. Интеграл

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\,\xi(s)\,ds \tag{11}$$

существует (в ранее определенном смысле) тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s_1)\,R(s_1-s_2)\,\overline{h(t-s_2)}\,ds_1\,ds_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s_1)\,R(s_2-s_1)\,\overline{h(s_2)}\,ds_1\,ds_2,$$

где $R(t)$ — корреляционная функция процесса. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы функция $h(t)$ была абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$. В этом случае, воспользовавшись спектральным представлением корреляционной функции $R(t)$, получим следующее выражение для корреляционной функции $R_\eta(t_1, t_2)$ процесса $\eta(t)$:

$$R_\eta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - s_1) R(s_1 - s_2) \overline{h(t_2 - s_2)}\, ds_1\, ds_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - s_1) e^{iu(s_1 - s_2)} \overline{h(t_2 - s_2)}\, ds_1\, ds_2 F(du) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 - t_2)u} |H(iu)|^2 F(du) = R_\eta(t_1 - t_2).$$

Таким образом, процесс $\eta(t)$ также является стационарным в широком смысле.

Определение. *Для процесса $\xi(t)$ преобразование $T$ называется допустимым фильтром (или, проще, фильтром), если оно задается формулой* (11), *где $h(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$ и интегрируема в квадрате на любом конечном интервале или является с. к. пределом последовательности таких преобразований (в $\mathscr{L}_2\{\xi\}$).*

Условие сходимости последовательности преобразований (11) $\eta_n(t) = T_n(\xi \mid t)$ с импульсными переходными функциями $h_n(t)$ и частотными характеристиками $H_n(iu)$ состоит в следующем:

$$\mathsf{M}|\eta_n(t) - \eta_m(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_n(iu) - H_m(iu)|^2 F(du) \to 0 \tag{12}$$

при $n, m \to \infty$.

Это означает, что последовательность $H_n(iu)$ фундаментальна в $\mathscr{L}_2\{F\}$. Но тогда существует предел $H(iu) = \text{l.i.m.}\, H_n(iu)$ (в $\mathscr{L}_2\{F\}$), который называют *частотной характеристикой предельного фильтра,* и если $\eta(t) = \text{l.i.m.}\, \eta_n(t)$, то

$$R_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} |H(iu)|^2 F(du). \tag{13}$$

Обратно, какова бы ни была функция $H(iu) \in \mathscr{L}_2\{F\}$, ее можно аппроксимировать в смысле сходимости в $\mathscr{L}_2\{F\}$ функциями, являющимися преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций. Таким образом, фильтры удобно задавать частотными характеристиками.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $H(iu)$ была частотной характеристикой допустимого фильтра для процесса $\xi(t)$ со спектральной мерой $F$, необходимо и достаточно, чтобы $H(iu) \in \mathscr{L}_2\{F\}$. Корреляционная функция процесса на выходе фильтра с частотной характеристикой $H(iu)$ дается формулой* (13).

Если вспомнить энергетическую интерпретацию спектральной функции, то из формулы (13) следует, что $|H(iu)|^2$ показывает, во сколько раз увеличивается энергия простых гармонических составляющих процесса с частотами в интервале $(u, u + du)$ при прохождении через фильтр.

Теорема 2. *Если процесс $\xi(t)$ на входе фильтра с частотной характеристикой $H(iu)$ имеет спектральное представление*

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} \zeta(du), \tag{14}$$

*то процесс $\eta(t)$ на выходе фильтра имеет вид*

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} H(iu) \zeta(du). \tag{15}$$

Действительно, если фильтр имеет абсолютно интегрируемую импульсную переходную функцию, то

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) \xi(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} H(iu) \zeta(du).$$

Доказательство в общем случае получается с помощью предельного перехода по последовательностям $H_n(iu)$, сходящимся к $H(iu)$ в $\mathscr{L}_2\{F\}$. ■

Пусть $\eta_k(t)$ — процесс на выходе фильтра с частотной характеристикой $H_k(iu)$, $\mathsf{M}\eta_k(t) = 0$ $(k = 1, 2)$. Найдем взаимную корреляционную функцию процессов $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$. Из изоморфизма пространств $\mathscr{L}_2\{\zeta\}$ и $\mathscr{L}_2\{F\}$ непосредственно следует, что

$$R_{12}(t) = \mathsf{M}\eta_1(t+s)\overline{\eta_2(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} H_1(iu) \overline{H_2(iu)} F(du). \tag{16}$$

Приведем несколько примеров фильтров и их частотных характеристик.

1. Полосовой фильтр пропускает (не изменяя их) только гармонические составляющие процессов с частотами $u$, для которых $a < |u| < b$, $a > 0$. Частотная характеристика фильтра равна $H(iu) = \chi_{(a,\,b)}(u) + \chi_{(-b,\,-a)}(u)$, и фильтр является допустимым для произвольного процесса. Импульсная переходная функция находится по формуле Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b}\right) e^{itu}\,du = \frac{\sin bt - \sin at}{\pi t}.$$

2. Фильтр высоких частот подавляет низкие частоты, не изменяя высоких. Его частотная характеристика $H(iu) = \chi_{\{|u|>a\}}(u)$, а импульсная переходная функция не существует.

3. Рассмотрим операцию с. к. дифференцирования стационарного в широком смысле процесса. Для существования с. к. производной процесса $\xi(t)$ достаточно существования $R''(0)$ (§ 3, следствие 1). Это условие эквивалентно требованию (теорема 4 § 5 гл. I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 F(du) < \infty. \tag{17}$$

С другой стороны, если это условие выполнено, то при $h \to 0$

$$\frac{e^{ihu} - 1}{h} \to iu \quad (\text{в } \mathscr{L}_2\{F\})$$

и в соотношении

$$\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\,\frac{e^{ihu} - 1}{h}\,\zeta(du)$$

можно перейти к пределу при $h \to 0$ под знаком стохастического интеграла. Следовательно,

$$\xi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} iu\zeta(du). \tag{18}$$

Таким образом, операции дифференцирования соответствует фильтр с частотной характеристикой $iu$, который является допустимым для всех стационарных процессов, удовлетворяющих условию (17). Импульсная переходная функция не существует, но фильтр можно рассматривать как предельный ($\varepsilon \to 0$) для фильтров с импульсными переходными функциями $h_\varepsilon(t) = 0$ при $|t| \geqslant \varepsilon$ и $h_\varepsilon(t) = -\frac{\operatorname{sgn} t}{\varepsilon^2}$ при $|t| < \varepsilon$, которым соответствуют частотные характеристики $-\dfrac{4\sin^2\frac{u\varepsilon}{2}}{iu\varepsilon^2}$.

4. Операция сдвига времени. Так как

$$\xi(t+s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}e^{ius}\zeta(du),$$

то операции сдвига времени $T_s$, $T_s(\xi|t)=\xi(t+s)$, соответствует частотная характеристика $H(iu)=e^{ius}$. Импульсная переходная функция не существует.

5. Дифференциальные уравнения. Рассмотрим фильтр, определяемый линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$L\eta=M\xi, \tag{19}$$

где

$$L=a_0\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n,$$

$$M=b_0\frac{d^m}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\ldots+b_m.$$

Уравнение (19) имеет смысл только тогда, когда процесс $\xi(t)$ $m$ раз с. к. дифференцируем. Тогда мы ищем $n$ раз с. к. дифференцируемый стационарный процесс $\eta(t)$, удовлетворяющий (19). Предположим, что (19) имеет стационарное решение. Его можно представить в виде

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}H(iu)\zeta(du).$$

Применяя к процессам $\xi(t)$ и $\eta(t)$ операции $M$ и $L$ (соответственно), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}L(iu)H(iu)\zeta(du)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}M(iu)\zeta(du),$$

где $L(iu)=\sum_{k=0}^{n}a_k(iu)^{n-k}$, $M(iu)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(iu)^{m-k}$, откуда, если $L(iu)$ не имеет вещественных корней,

$$H(iu)=\frac{M(iu)}{L(iu)}. \tag{20}$$

Обратно, если процесс $\xi(t)$ $m$ раз с. к. дифференцируем, $M(iu)\in\mathscr{L}_2\{F\}$, $L(iu)\neq 0$ $(-\infty<u<\infty)$, то процесс

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\frac{M(iu)}{L(iu)}\xi(du)$$

$n$ раз с. к. дифференцируем и удовлетворяет уравнению (19). Таким образом, при условии $M(iu) \in \mathscr{L}_2\{F\}$, $L(iu) \neq 0$ существует единственный фильтр, соответствующий дифференциальному уравнению (19). Заметим, однако, что можно определить решение уравнения (19) и в более общих случаях. Допустим, что многочлен $L(iu)$ не имеет вещественных корней. Фильтр с частотной характеристикой $M(iu)/L(iu)$ существует и без требования $M(iu) \in \mathscr{L}_2\{F\}$; достаточно требовать только, чтобы $\frac{M(iu)}{L(iu)} \in \mathscr{L}_2\{F\}$. Последнее выполняется всегда, когда степень $n$ многочлена $L$ не меньше $m$. Таким образом, при $n \geqslant m$ фильтр с частотной характеристикой (20), знаменатель которого не обращается в нуль при действительных $u$, является допустимым для произвольного процесса на входе, и процесс на выходе фильтра мы отождествляем со стационарным решением уравнения (19). Ограничиваясь по-прежнему дифференциальными уравнениями, для которых многочлен $L(x)$ не имеет чисто мнимых корней, выделим из дробно-рациональной функции $M(x)/L(x)$ целую часть $P(x)$ (она отлична от нуля, если $m \geqslant n$) и остаток разложим на простые дроби. Тогда

$$\frac{M(iu)}{L(iu)} = P(iu) + \sum_{k=1}^{n'} \sum_{s=1}^{l'_k} \frac{c'_{ks}}{(iu - p'_k)^s} + \sum_{k=1}^{n''} \sum_{s=1}^{l''_k} \frac{c''_{ks}}{(iu - p''_k)^s},$$

где $P(iu) = \sum_{k=0}^{m-n} d_k (iu)^k$ $(m \geqslant n)$ и $P(iu) = 0$ $(m < n)$, $\operatorname{Re} p'_k < 0$ и $\operatorname{Re} p''_k > 0$, $p'_k$ и $p''_k$ являются корнями многочлена $L(x) = 0$. Так как

$$\frac{1}{(iu-p)^s} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \int_0^\infty e^{pt} e^{-iut}\, dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{pt} e^{-iut}\, dt$$

$$(\operatorname{Re} p < 0)$$

и

$$\frac{1}{(iu-p)^s} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{pt} e^{-iut}\, dt \qquad (\operatorname{Re} p > 0),$$

то процесс $\eta(t)$ на выходе фильтра можно представить в виде

$$\eta(t) = \sum_{k=0}^{m-n} d_k \xi^{(k)}(t) + \int_0^\infty \xi(t-\tau) G_1(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty \xi(t+\tau) G_2(-\tau)\, d\tau,$$

где

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{n'} \left( \sum_{s=1}^{l'_k} \frac{c'_{ks} t^s}{(s-1)!} \right) e^{p'_k t} \qquad (t > 0),$$

$$G_2(t) = -\sum_{k=1}^{n''} \left( \sum_{s=1}^{l''_k} \frac{c''_{ks} t^s}{(s-1)!} \right) e^{p''_k t} \qquad (t < 0).$$

Заметим, что если многочлен $L(x)$ имеет корни с положительной действительной частью, то соответствующий фильтр физически неосуществим.

## § 5. Физически осуществимые фильтры

В настоящем параграфе рассматривается следующий вопрос: какие спектральные функции могут быть получены на выходе физически осуществимого фильтра? При этом на входе фильтра рассматривается в некотором смысле простейший случайный процесс.

Процессы, рассматриваемые в настоящем параграфе, неизменно предполагаются одномерными и стационарными в широком смысле. Поэтому слово «стационарный» иногда, а слова «в широком смысле» постоянно будут опускаться.

Начнем с рассмотрения стационарных последовательностей. Мы не будем переносить на последовательности всех определений и эвристических соображений, приведенных для процессов с непрерывным временем, хотя будем пользоваться соответствующей терминологией. Представим себе систему, у которой состояние на входе и выходе регистрируется только в целочисленные моменты времени $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пусть на вход системы в момент времени 0 поступил единичный импульс. Реакцию системы на этот импульс в момент времени $t$ обозначим через $a_t$. Если система не предвосхищает будущего, то $a_t = 0$ при $t < 0$. Если система однородна во времени, то реакция системы на единичный импульс, приложенный к системе в момент времени $s$, равна $a_{t-s}$. Реакция линейной однородной и физически осуществимой системы в момент времени $t$ на последовательность импульсов $\xi_n$ $(-\infty < n < \infty)$ будет

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{t} a_{t-n} \xi(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi(t-n). \qquad (1)$$

Процесс, определяемый формулой (1), называют *процессом скользящего суммирования.*

Предположим, что $\xi(n)$ — некоррелированная последовательность случайных величин и

$$\mathsf{M}\xi(n)=0, \quad \mathsf{M}\xi(n)\overline{\xi(m)}=\delta_{nm} \qquad (-\infty<n,\ m<\infty).$$

Назовем ее *стандартной*. Она имеет постоянную спектральную плотность.

Для с. к. сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty. \tag{2}$$

Если это условие выполнено, то процесс $\eta(t)$ также стационарен и

$$\mathsf{M}\eta(t)=0, \qquad R_\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+t}\bar{a}_n. \tag{3}$$

Какие же последовательности могут быть таким образом получены?

Лемма 1. *Для того чтобы стационарная последовательность $\eta(n)$ была реакцией физически осуществимого фильтра на стандартную последовательность случайных величин, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\eta(n)$ имела абсолютно непрерывную спектральную меру и ее спектральная плотность $f(u)$ допускала представление*

$$f(u)=|g(e^{iu})|^2, \quad g(e^{iu})=\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{inu}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2<\infty. \tag{4}$$

*Доказательство.* Необходимость. Пусть последовательность представима в виде (1). Положим

$$g(e^{iu})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_ne^{inu}. \tag{5}$$

Тогда по формуле Парсеваля

$$R_\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+t}\bar{a}_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}|g(e^{iu})|^2\,du,$$

т. е. последовательность $\eta(n)$ имеет абсолютно непрерывный спектр с плотностью $f(u)=|g(e^{iu})|^2$.

Достаточность. Пусть $\eta(n)$ — последовательность с корреляционной функцией

$$R_\eta(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}f(u)\,du$$

и $f(u)=|g(e^{iu})|^2$, где $g(e^{iu})$ определяется соотношениями (4). Последовательность $\eta(n)$ имеет спектральное представление

$$\eta(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}\zeta(du).$$

На $\sigma$-алгебре борелевских множеств отрезка $[-\pi, \pi)$ построим стохастическую меру

$$\xi(A)=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}}\chi_A(u)\zeta(du).$$

Тогда

$$\mathsf{M}\xi(A)\overline{\xi(B)}=\int_{-\pi}^{\pi}\chi_A(u)\chi_B(u)\frac{1}{2\pi|g(e^{iu})|^2}f(u)\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{A\cap B}du,$$

т. е. $\xi(A)$ является ортогональной мерой со структурной функцией $l(A\cap B)$, где $l$ — мера Лебега. Используя леммы 2 и 1 § 2, получим

$$\eta(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}\zeta(du)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\,\xi(du)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{2\pi}\,\bar{b}_k\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)u}\xi(du)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi(n-k),$$

где

$$a_n=\sqrt{2\pi}\,\bar{b}_n,\quad \xi(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{iun}\xi(du)$$

и

$$\mathsf{M}\xi(n)\overline{\xi(m)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)u}\,du=\delta_{nm}.$$

Таким образом, $\xi(n)$ является стандартной последовательностью. ■

Доказанная лемма дает простой ответ на поставленный вопрос. Но этот ответ в общем случае недостаточно эффективен, так как остается неясным, когда спектральная плотность может быть представлена формулой (4).

Найдем условия, при которых $f(u)$ допускает представление (4). Обозначим через $H_2$ множество всех функций $f(z)$, аналитических в круге $D = \{z: |z| < 1\}$ и таких, что

$$\| f(z) \|^2 = \lim_{r \uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 \, d\theta < \infty.$$

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, т. е. $a_n r^n$ являются коэффициентами Фурье функции $f(re^{i\theta})$. В силу равенства Парсеваля

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 r^{2n}.$$

Отсюда видно, что $f(z) \in H_2$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 < \infty.$$

Следовательно, для каждой функции $f(z) \in H_2$ можно определить ряд $f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, сходящийся в $\mathscr{L}_2(l)$, где $l$ — лебегова мера на $[-\pi, \pi)$. Функция $f(z)$ $(|z| < 1)$ восстанавливается через функцию $f(e^{i\theta})$ по формуле Пуассона

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{iu}) P(r, \theta, u) \, du, \tag{6}$$

где

$$P(r, \theta, u) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - u)}.$$

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из равенства Парсеваля.

В теории функций доказывается (см. И. И. Привалов [1]), что если в формуле (6) функция $f(e^{i\theta})$ интегрируема по Лебегу, то почти для всех $\theta$ существует

$$\lim_{r \uparrow 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}).$$

Функцию $f(e^{i\theta})$ называют *граничным значением* функции $f(z)$ $(|z| < 1)$.

Теорема 1. *Пусть $f(u)$ — неотрицательная и интегрируемая по Лебегу функция на $[-\pi, \pi)$. Для того чтобы существовала функция $g(z) \in H_2$ такая, что*

$$f(u) = | g(e^{iu}) |^2, \tag{7}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f(u)|\, du < \infty. \tag{8}$$

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H_2$ и (7) имеет место. Можно считать, что $g(0) \neq 0$ (в противном случае вместо $g(z)$ можно рассмотреть $z^{-m}g(z)$, где $m$ — кратность нуля $z=0$ функции $g(z)$, и положить $|g(0)| = 1$). Пусть $0 < r < 1$ и $A = \{u\colon\ |g(re^{iu})| \leqslant 1\}$, $B = \{u\colon\ |g(re^{iu})| > 1\}$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln|g(re^{iu})||\, du = \int_B \ln|g(re^{iu})|\, du -$$
$$- \int_A \ln|g(re^{iu})|\, du = 2\int_B \ln|g(re^{iu})|\, du - \int_{-\pi}^{\pi} \ln|g(re^{iu})|\, du.$$

Из формулы Иенсена вытекает, что при $f(0) = 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{iu})|\, du = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|z_k|} \geqslant 0,$$

где $z_k$ — нули функции $f(z)$ внутри круга $|z| < r$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln|g(re^{iu})||\, du \leqslant 2\int_B \ln|g(re^{iu})|\, du \leqslant \int_B |g(re^{iu})|^2\, du \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{iu})|^2\, du \leqslant 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Применяя лемму Фату, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln|g(e^{iu})||\, du = \int_{-\pi}^{\pi} \varliminf_{r\uparrow 1} |\ln|g(re^{iu})||\, du \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{r\uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\ln|g(re^{iu})||\, du \leqslant 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,$$

что и доказывает необходимость условия (8).

Достаточность. Пусть условие (8) выполнено. Функция

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u)\, P(r, \theta, u)\, du$$

является гармонической в круге $D=\{z\colon |z|<1\}$. Из неравенства Иенсена следует

$$v(r,\ \theta)\leqslant\ln\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,P(r,\ \theta,\ u)\,du\right\}.$$

Обозначим через $\varphi(z)$ аналитическую функцию в $D$ с действительной частью $v(r,\theta)$. Положим $g(z)=e^{\frac{1}{2}\varphi(z)}$. Тогда

$$|g(re^{i\theta})|^2=e^{\operatorname{Re}\varphi(z)}=e^{v(r,\ \theta)}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,P(r,\ \theta,\ u)\,du$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^2\,d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du<\infty.$$

Таким образом, $g(z)\in H_2$ и $\lim\limits_{r\uparrow 1}|g(re^{i\theta})|^2=e^{\lim\limits_{r\uparrow 1}v(r,\ \theta)}=f(\theta)$ почти всюду. Теорема доказана.

Замечание 1. Как вытекает из доказательства теоремы, функция $g(z)$ может быть выбрана так, чтобы при $z=0$ она была положительной и не имела нулей в $D$.

Замечание 2. Функция $g(z)$, существование которой установлено теоремой 1, определяется не единственным образом. Но если $g(z)$ удовлетворяет условиям

а) $g(z)\neq 0,\ z\in D$, б) $g(0)>0$,

то она единственна и, следовательно, совпадает с найденной нами.

Действительно, если $g_i(z)$ $(i=1,\ 2)$ — две такие функции, то $\psi(z)=\frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ аналитична в $D$, не обращается в нуль и на границе $D$ по модулю равна единице. Функция $\ln\psi(z)$ является аналитической в $D$, и на границе $D$ ее действительная часть равна нулю. Следовательно, $\ln\psi(z)=ik$, где $k$ вещественно. Так как $\ln\psi(0)$ вещественно, то $\ln\psi(z)=0$.

Сопоставляя лемму 1 и теорему 1, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность* $\eta(t)$ *могла быть представлена в виде*

$$\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi(t-n),\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty,$$

*где* $\xi(n)$ — *некоррелированная последовательность, необходимо и достаточно, чтобы* $\eta(t)$ *имела абсолютно непрерывную спектральную меру, а ее спектральная плотность* $f(u)$ *удовлетворяла* *требованию*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u)\,du > -\infty.$$

Пусть $\zeta_1(x)$, $\zeta_2(x)$, $x \in X$, — две гильбертовы случайные функции. Через $\mathscr{L}_2\{\zeta_i\}$ обозначим замкнутую линейную оболочку системы случайных величин $\{\zeta_i(x), x \in X\}$ в $\mathscr{L}_2$.

Определение. *Если $\mathscr{L}_2(\zeta_1) \subset \mathscr{L}_2(\zeta_2)$, то случайная функция $\zeta_1(x)$ называется подчиненной $\zeta_2(x)$. Если же $\mathscr{L}_2(\zeta_1) = \mathscr{L}_2(\zeta_2)$, то $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$ называются эквивалентными.*

Замечание. Как вытекает из доказательства леммы 1, последовательности $\xi(n)$ и $\eta(n)$ эквивалентны.

Покажем, как можно выразить коэффициенты $a_n$ в операции скользящего суммирования через спектральную плотность $f(u)$ последовательности $\eta(t)$.

Введенная при доказательстве теоремы 1 функция $\varphi(z)$ является аналитической функцией в $D$, действительная часть которой имеет граничные значения $\ln f(u)$. Следовательно, по формуле Шварца

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u) \frac{e^{iu}+z}{e^{iu}-z}\,du. \tag{9}$$

Разлагая функцию $g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}\varphi(z)\right\}$ в степенной ряд $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, получим следующие значения для коэффициентов $a_n$:

$$a_n = \sqrt{2\pi}\,\bar{b}_n.$$

С другой стороны, выражение для $g(z)$ можно преобразовать следующим образом. Так как

$$\frac{e^{iu}+z}{e^{iu}-z} = 1 + \frac{2ze^{-iu}}{1-ze^{-iu}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k e^{-iku},$$

то

$$\overline{g(z)} = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u)\,du + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} d_k \bar{z}^k\right\},$$

где

$$d_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iku} \ln f(u)\,du.$$

Полагая

$$P=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(u)\,du\right\},\quad \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}d_k z^k\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \qquad (c_0=1),$$

получим

$$\overline{g(z)}=P\sum_{k=0}^{\infty}c_k\bar{z}^k.$$

Таким образом,

$$a_n=\sqrt{2\pi}\,Pc_n. \tag{10}$$

Перейдем к процессам с непрерывным временем. Обобщением операции скользящего суммирования на случайные процессы с непрерывным временем может служить операция, ставящая в соответствие случайному процессу $\xi(t)$ процесс $\eta(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$, по формуле

$$\eta(t)=\int_0^{\infty}a(s)\,d\xi(t-s). \tag{11}$$

Будем называть процесс с ортогональными приращениями $\xi(t)$ стандартным, если

$$\mathbf{M}\xi(t)=0,\quad \mathbf{M}\,|\,\xi(t+h)-\xi(t)\,|^2=h.$$

В соответствии с тем, что было сказано в § 4 о стохастическом интеграле Стилтьеса, процессу $\xi(t)$ соответствует некоторая стохастическая ортогональная мера $\xi(A)$ на $\sigma$-алгебре множеств, измеримых по Лебегу. Эту меру также будем называть *стандартной стохастической мерой*. Для существования интеграла (11) необходимо и достаточно, чтобы $a(t)$ была измерима по Лебегу и

$$\int_0^{\infty}|\,a(t)\,|^2\,dt<\infty.$$

Заметим, что стандартный процесс $\xi(t)$ не с.к. дифференцируем. Однако отношения

$$\xi'_\Delta(t_k)=\frac{\xi(t_{k+1}+\Delta)-\xi(t_k)}{\Delta},\qquad \Delta=t_{k+1}-t_k,$$

при всех $t_k$ и сколь угодно малых $\Delta$ ортогональны. Таким образом, фиктивную производную $\xi'(t)$ следовало бы рассматривать как процесс, значения которого в любые два момента времени ортогональны, а их дисперсия бесконечна. Этот фиктивный процесс часто вводят в рассуждения и называют *белым шумом*.

Точное определение белого шума дается в рамках теории обобщенных случайных процессов (И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин [1]). Символически формулу (11) можно записать в виде

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\,\xi'(s)\,ds$$

и интерпретировать $\eta(t)$ как реакцию физически осуществимого фильтра на белый шум. Импульсная переходная функция этого фильтра равна нулю при $t < 0$ и $a(t)$ при $t > 0$. Отметим, что все допустимые для процесса $\xi'(t)$ физически осуществимые фильтры исчерпываются формулой (11). Действительно, всякий допустимый физически осуществимый фильтр по определению или имеет вид (11) или является предельным для фильтров такого вида. Условие с. к. сходимости фильтров вида (11) с импульсными переходными функциями $a_n(t)$ состоит в следующем:

$$\int_{0}^{\infty} |a_n(s) - a_{n'}(s)|^2\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n,\ n' \to \infty.$$

Но если это условие выполнено, то существует $\text{l.i.m.}\, a_n(t) = a(t)$ (относительно лебеговой меры на $(0, \infty)$) и

$$\text{l.i.m.}\, \eta_n(t) = \text{l.i.m.} \int_{0}^{\infty} a_n(s)\,d\xi(t-s) = \int_{0}^{\infty} a(s)\,d\xi(t-s).$$

Таким образом, предельный переход в фильтрах вида (11) не расширяет класса фильтров.

Формулу (11) можно переписать следующим образом:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-s)\,d\xi(s), \quad a(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Следовательно, корреляционная функция процесса $\eta(t)$ равна

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t+s-u)\,\overline{a(s-u)}\,du,$$

или

$$R(t) = \int_{0}^{\infty} a(t+s)\,\overline{a(s)}\,ds. \tag{12}$$

Лемма 2. *Для того чтобы стационарный (в широком смысле) процесс $\eta(t)$ являлся реакцией физически осуществи-*

*мого фильтра на подчиненный процессу белый шум, необходимо и достаточно, чтобы процесс $\eta(t)$ обладал абсолютно непрерывной спектральной мерой и его спектральная плотность $f(u)$ допускала представление*

$$f(u)=|h(iu)|^2, \tag{13}$$

*где*

$$h(iu)=\int_0^\infty b(s)\,e^{-ius}\,ds, \qquad \int_0^\infty |b(s)|^2\,ds<\infty. \tag{14}$$

*Доказательство.* Необходимость. Пусть процесс $\eta(t)$ допускает представление (11). Положим $h(iu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty a(s)\,e^{-isu}\,ds$.

В силу равенства Парсеваля

$$R(t)=\int_0^\infty a(t+s)\,\overline{a(s)}\,ds=\int_{-\infty}^\infty e^{iut}\,|h(iu)|^2\,du,$$

т. е. спектр процесса абсолютно непрерывен и спектральная плотность имеет вид (13), (14).

Достаточность. Пусть выполнены условия леммы. Рассмотрим спектральное представление процесса $\eta(t)$:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^\infty e^{iut}\zeta(du),$$

и стохастическую меру

$$\mu(A)=\int_{-\infty}^\infty \frac{\chi_A(u)}{h(iu)}\,\zeta(du). \tag{15}$$

Стохастический интеграл (15) имеет смысл для произвольного ограниченного борелевского множества $A$, так как $\frac{\chi_A(u)}{h(iu)}\in \in\mathscr{L}_2\{F\}$, где $F$ — спектральная мера процесса

$$F(A)=\int_A |h(iu)|^2\,du.$$

Легко заметить, что $\mu(A)$ является ортогональной мерой, причем

$$\mathsf{M}\mu(A)\,\overline{\mu(B)}=\int_{A\cap B} du.$$

Положим

$$\xi(t_2)-\xi(t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iut_2}-e^{-iut_1}}{-iu}\,\mu(du). \tag{16}$$

Очевидно, что стохастический интеграл (16) существует. Случайная функция интервала $\xi(\Delta)=\xi(t_2)-\xi(t_1)$, $\Delta=[t_1, t_2)$, является элементарной мерой, соответствующей стандартному процессу. Действительно, $\mathsf{M}\xi(\Delta)=0$. Далее, используя равенство Парсеваля для интегралов Фурье, получим

$$\mathsf{M}\xi(\Delta_1)\xi(\Delta_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iut_2}-e^{-iut_1}}{-iu}\,\frac{e^{iut_4}-e^{iut_3}}{iu}\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\Delta_1}(t)\,\chi_{\Delta_2}(t)\,dt=l\left(\Delta_1\cap\Delta_2\right),$$

где $\Delta_1=[t_1, t_2)$, $\Delta_2=[t_3, t_4)$, $l$ — лебегова мера на прямой. На основании леммы 1 § 2 и формулы (15) получаем

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}h(iu)\,\mu(du). \tag{17}$$

Заметим теперь, что если

$$h(iu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a(s)\,e^{ius}\,ds, \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|a(s)|^2\,ds<\infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(iu)\,\mu(du)=\int_{-\infty}^{\infty}a(-s)\,\xi(ds). \tag{18}$$

Действительно, так как пространства $\mathscr{L}_2\{\mu\}$ и $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ изоморфны пространству $\mathscr{L}_2\{l\}$, где $l$ — лебегова мера на прямой $(-\infty, \infty)$, и преобразование Фурье не меняет скалярного произведения в $\mathscr{L}_2\{l\}$, то формулу (18) достаточно проверить для простых функций. Пусть $a(t)=\sum c_k\chi_{\Delta_k}(t)$, где $\Delta_k$ — интервал (или полуинтервал) $(a_k, b_k)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}a(-s)\,\xi(ds)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k c_k\frac{e^{iub_k}-e^{iua_k}}{iu}\,\mu(du),$$

что является частным случаем (18). Итак, формула (18) установлена. Из (18) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} h(iu)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} a(s)\,d\xi(t-s), \tag{19}$$

так как умножение меры $\xi(\cdot)$ на $e^{iut}$ в силу формулы (16) приводит к сдвигу аргумента функции $\xi(\cdot)$ на $t$. Из (17) и (19) получим

$$\eta(t) = \int_{0}^{\infty} a(s)\,d\xi(t-s), \quad \text{где} \quad a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(iu)\,e^{-iut}\,du. \ ■$$

Пусть задана спектральная плотность $f(u)$ процесса $\eta(t)$. Возникают следующие вопросы. Когда спектральная плотность допускает представление (13), (14) (или, как говорят, факторизацию)? Как найти по функции $f(u)$ функцию $h(iu)$ (а следовательно, и функцию $a(t)$)? Ответы на эти теоретико-функциональные вопросы можно получить, сведя их к уже решенным вопросам для случая факторизации функций на окружности. Введем преобразование $\omega = \frac{1+z}{1-z}$, отображающее круг $D = \{z\colon |z| < 1\}$ в правую полуплоскость $\Pi^{+} = \{\omega\colon \operatorname{Re}\omega > 0\}$. На границе соответствующих областей ($\omega = iu$, $z = e^{i\theta}$) это преобразование имеет вид $u = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. Пусть $f(u)$ допускает факторизацию (13), (14). Положим

$$\left.\begin{aligned} g(z) &= (1+\omega)\,h(\omega) = \frac{2}{1-z}\,h\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \\ \tilde{f}(\theta) &= f(u)(1+u^2). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Функция $\tilde{f}(\theta)$ допускает факторизацию $|\tilde{f}(\theta)| = |g(e^{i\theta})|^2$, где $g(z)$ аналитична в $D$ и интегрируема на $(-\pi, \pi)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta)\,d\theta = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du < \infty,$$

т. е. $g(z) \in H_2$. В силу теоремы 1

$$-\infty < \int_{-\pi}^{\pi} \ln \tilde{f}(\theta)\,d\theta = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(u) + \ln(1+u^2)}{1+u^2}\,du,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(u)}{1+u^2}\,du > -\infty. \tag{21}$$

Допустим теперь обратное. Пусть $f(u)$ неотрицательна, интегрируема и удовлетворяет соотношению (21). Определим $\tilde{f}(\theta)$ с помощью (20). Тогда $\tilde{f}(\theta)$ интегрируема и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \tilde{f}(\theta)\, d\theta > -\infty.$$

Из теоремы 1 следует, что $\tilde{f}(\theta)$ допускает факторизацию

$$\tilde{f}(\theta) = |g(e^{i\theta})|^2, \quad g(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty.$$

Положим

$$h(\omega) = \frac{1}{1+\omega} \sum_{n=0}^\infty a_n \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^n.$$

Тогда функция $h(\omega)$ аналитична в правой части полуплоскости и $f(u) = |h(iu)|^2$,

$$h(iu) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(1-iu)^n}{(1+iu)^{n+1}}. \tag{22}$$

Учитывая, что функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$ образуют полную ортонормированную последовательность в $\mathscr{L}_2(-\pi, \pi)$, нетрудно увидеть, что последовательность $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-iu)^n}{(1+iu)^{n+1}}$ является полной ортонормированной последовательностью на $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ относительно лебеговой меры. Поэтому ранее написанный ряд для $h(iu)$ сходится в среднем квадратическом. Заметим теперь, что

$$\frac{(1-iu)^n}{(1+iu)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{(1+iu)^k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-(1+iu)t} t^{(k-1)}\, dt = \int_0^\infty e^{-iut} B_n(t)\, dt,$$

так что

$$h(iu) = \int_0^\infty e^{-iut} b(t)\, dt, \quad \text{где} \quad b(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n B_n(t).$$

При этом надо иметь в виду, что частные суммы ряда (22) представляют собой преобразование Фурье (с точностью до множителя) функций, равных $\sum_1^N a_n B_n(t)$ при $t \geqslant 0$ и равных нулю при $t<0$. Так как преобразование Фурье не меняет нормы функции в $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$, то из с. к. сходимости ряда (22) следует с. к. сходимость ряда для $b(t)$ и

$$\int_0^\infty |b(t)|^2\,dt < \infty.$$

По поводу единственности полученной факторизации функции $f(u)$ можно сделать замечания, аналогичные тем, которые были сделаны о факторизации функций на окружности. Выражение для $h(\omega)$ можно получить из формулы (9), заменив $z$ на $\omega$ и произведя соответственную замену переменных под знаком интеграла:

$$h(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)}{1+u^2}\,\frac{i+u\omega}{u+i\omega}\,du\right\}. \tag{23}$$

Теорема 3. *Для того чтобы неотрицательная интегрируемая функция* $f(u)$ $(-\infty<u<\infty)$ *допускала факторизацию* (13), (14), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)}{1+u^2}\,du > -\infty. \tag{24}$$

*При дополнительных условиях* $h(\omega)\neq 0$ $(\operatorname{Re}\omega>0)$, $h(1)>0$ *функция* $h(\omega)$ *единственна и определяется формулой* (23).

Теорема 4. *Для того чтобы стационарный процесс* $\eta(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ *допускал представление* (11), *необходимо и достаточно, чтобы он имел абсолютно непрерывный спектр и его спектральная плотность удовлетворяла условию* (24).

## § 6. Прогноз и фильтрация стационарных процессов

Одна из важных задач теории случайных процессов, имеющая многочисленные практические применения, заключается в следующем: требуется наилучшим образом оценить значение случайной величины $\zeta$, наблюдая некоторое множество случайных величин $\{\xi_\alpha,\ \alpha\in A\}$. Таким образом, нужно найти функцию $f(\xi_\alpha\,|\,\alpha\in A)$ от множества переменных $\xi_\alpha$, $\alpha\in A$, с наименьшей ошибкой, удовлетворяющей приближенному равенству

$$\zeta\approx\hat{\zeta}=f(\xi_\alpha\,|\,\alpha\in A). \tag{1}$$

Примером такой задачи является прогноз (экстраполяция) случайного процесса. В этом случае требуется оценить значение случайного процесса в момент времени $t^*$ по его значениям на некотором множестве моментов времени, предшествовавших $t^*$.

Другим примером является задача фильтрации случайного процесса. В простейшем случае она состоит в следующем: в моменты времени $t' \in T' \subset T$ наблюдается процесс $\xi(t) = \eta(t) + \zeta(t)$, представляющий собой сумму «полезного» сигнала $\zeta(t)$ и «шума» $\eta(t)$; требуется отделить шум от сигнала, т. е. для некоторого $t^* \subset T$ нужно найти наилучшее приближение $\zeta(t)$ вида

$$\zeta(t^*) \approx \hat{\zeta} = f(\xi(t') \mid t' \in T').$$

Постановка задачи пока еще не закончена, так как не указано, что означает «наилучшее приближение». Разумеется, критерий оптимальности зависит от практического характера рассматриваемой задачи. Что же касается математической теории, то в ней преимущественно развиты методы решения поставленной задачи, основанные на среднем квадратическом уклонении как на мере точности приближенного равенства (1).

Величина

$$\delta = \{\mathsf{M}\,[\zeta - f(\xi_\alpha \mid \alpha \in A)]^2\}^{1/2} \tag{2}$$

называется средней квадратической погрешностью приближенной формулы (1). Задача состоит в определении функции $f$ такой, что (2) принимает минимальное значение. В том случае, когда $A$ — конечное множество, под $f(\xi_\alpha \mid \alpha \in A)$ мы понимаем измеримую по Борелю функцию аргументов $\xi_\alpha$, $\alpha \in A$. Если же $A$ бесконечно, то этот символ обозначает случайную величину, измеримую относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F} = \sigma\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$, порожденной множеством случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$.

В дальнейшем предполагается, что и $\zeta$ и $f(\xi_\alpha \mid \alpha \in A)$ обладают моментами второго порядка.

Положим

$$\gamma = \mathsf{M}\,(\zeta \mid \mathfrak{F}). \tag{3}$$

Тогда

$$\delta^2 = \mathsf{M}\,\{\zeta - \hat{\zeta}\}^2 = \mathsf{M}\,(\zeta - \gamma)^2 + 2\mathsf{M}\,(\zeta - \gamma)(\gamma - \hat{\zeta}) + \mathsf{M}\,(\gamma - \hat{\zeta})^2.$$

Так как величина $\gamma - \hat{\zeta}$ $\mathfrak{F}$-измерима, то

$$\mathsf{M}\,(\zeta - \gamma)(\gamma - \hat{\zeta}) = \\ = \mathsf{M}\mathsf{M}\,\{(\zeta - \gamma)(\gamma - \hat{\zeta}) \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\,(\gamma - \hat{\zeta})\,\mathsf{M}\,\{(\zeta - \gamma) \mid \mathfrak{F}\} = 0.$$

Таким образом,

$$\delta^2 = \mathsf{M}\,(\zeta - \gamma)^2 + \mathsf{M}\,(\gamma - \hat{\zeta})^2,$$

откуда следует

Теорема 1. *Приближение случайной величины $\zeta$, имеющей конечный момент второго порядка, с минимальной средней* *квадратической погрешностью при помощи* $\mathfrak{F} = \sigma\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$-*измеримой случайной величины* $\hat{\zeta}$ *единственно* (mod $\mathsf{P}$) *и дается формулой*

$$\hat{\zeta} = \mathsf{M}\{\zeta \mid \mathfrak{F}\}.$$

Замечание. Оценка $\hat{\zeta} = \gamma$ случайной величины $\zeta$ является несмещенной, т. е.

$$\mathsf{M}\gamma = \mathsf{M}\mathsf{M}\{\zeta \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\zeta,$$

и величины $\zeta - \gamma$ и $\xi_\alpha$ при любом $\alpha \in A$ не коррелированы:

$$\mathsf{M}(\zeta - \gamma)\xi_\alpha = \mathsf{M}\mathsf{M}\{(\zeta - \gamma)\xi_\alpha \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\xi_\alpha M\{(\zeta - \gamma) \mid \mathfrak{F}\} = 0.$$

К сожалению, практическое применение теоремы 1 для получения эффективных формул приближения бывает весьма трудным. В случае гауссовских случайных величин, однако, можно пойти дальше. Заметим, прежде всего, что более простой постановкой задачи, приводящей в ряде случаев к законченным и аналитически доступным решениям, является задача отыскания оптимального приближения не в классе всех измеримых функций от заданных случайных величин, а в более узком классе линейных функций. Более точно это означает следующее. Пусть $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \mathsf{P}\}$ — основное вероятностное пространство. Предположим, что величины $\xi_\alpha$ и $\zeta$ имеют конечные моменты второго порядка. Введем подпространство $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$ гильбертова пространства $\mathscr{L}_2\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \mathsf{P}\}$, являющееся замкнутой линейной оболочкой величин $\xi_\alpha$, $\alpha \in A$, и константы. Можно рассматривать подпространство $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$ как множество всех линейных (неоднородных) функций от $\xi_\alpha$ с конечными дисперсиями. Наилучшим линейным приближением $\tilde{\zeta}$ к случайной величине $\zeta$ является тот элемент $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$, который находится от $\zeta$ на кратчайшем расстоянии, т. е.

$$\delta^2 = \mathsf{M}|\tilde{\zeta} - \zeta|^2 \leqslant \mathsf{M}|\zeta' - \zeta|^2$$

для любого $\zeta' \in \mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$. Из теории гильбертовых пространств известно, что задача отыскания элемента $\tilde{\zeta}$ из подпространства $H_0$, который находится на кратчайшем расстоянии от заданного элемента $\zeta$, всегда имеет единственное решение. А именно, $\tilde{\zeta}$ является проекцией $\zeta$ на $H_0$. Элемент $\tilde{\zeta}$ может быть определен, и притом единственным образом, из системы уравнений $(\zeta - \tilde{\zeta},\ \zeta'') = 0$ для любого $\zeta'' \in \mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$. В нашем случае эта система уравнений сводится к уравнениям

$$\mathsf{M}(\tilde{\zeta}\bar{\xi}_\alpha) = \mathsf{M}(\zeta\bar{\xi}_\alpha), \tag{4}$$

и поскольку в $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$ включена единица, то

$$\mathsf{M}\tilde{\zeta} = \mathsf{M}\zeta,$$

так что оптимальные линейные оценки $\tilde{\zeta}$ обязательно не смещены. Можно считать, что $\mathsf{M}\xi_\alpha = 0$ для любого $\alpha$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением подпространства случайных величин из $\mathscr{L}_2\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ с математическим ожиданием 0.

Разумеется, не всегда есть основания считать, что линейная оценка величины $\zeta$ является приемлемой. Например, если $\xi(n) = e^{i(\nu n+\varphi)}$, где $\nu$ равномерно распределена на $(-\pi, \pi)$, то $\mathsf{M}\{\xi(n)\overline{\xi(m)}\} = 0$ $(n \neq m)$ и наилучшая линейная оценка величины $\xi(m)$ по значениям всех $\xi(n)$ $(n \neq m)$ имеет вид $\tilde{\xi}(m) = 0$, т. е. не использует значений величин $\xi(n)$. С другой стороны, достаточно произвольной пары наблюдений $\xi(k)$ и $\xi(k+1)$, чтобы определить всю последовательность $\xi(n)$ точно, а именно $\xi(n) = \left(\frac{\xi(k+1)}{\xi(k)}\right)^{n-k} \xi(k)$.

Допустим теперь, что все конечномерные распределения системы $\{\zeta, \xi_\alpha, \alpha \in A\}$ нормальны и $\mathsf{M}\xi_\alpha = 0$, $\mathsf{M}\zeta = 0$. В этом случае из некоррелированности величин $\zeta - \tilde{\zeta}$ и $\xi_\alpha$ следует, что они независимы. Поэтому $\zeta - \tilde{\zeta}$ не зависит от $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$ и

$$\mathsf{M}\{\zeta \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{M}\{\zeta - \tilde{\zeta} + \tilde{\zeta} \mid \mathfrak{F}\} = \mathsf{M}(\zeta - \tilde{\zeta}) + \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}.$$

Теорема 2. *Для системы гауссовых случайных величин $\{\zeta, \xi_\alpha, \alpha \in A\}$ наилучшая (в смысле среднего квадратического отклонения) оценка величины $\zeta$ с помощью $\sigma\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$-измеримой функции совпадает с наилучшей линейной оценкой в $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$.*

В дальнейшем рассматривается ряд частных задач на построение оптимальных линейных оценок.

А) Число случайных величин $\xi_\alpha$ конечно $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Задача имеет простое решение, хорошо известное из линейной алгебры. Предполагая, что $\xi_\alpha$ линейно независимы, можно представить проекцию $\tilde{\zeta}$ величины $\zeta$ на конечномерное пространство $H_0$, натянутое на величины $\xi_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, с помощью формулы

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{\Gamma}\begin{vmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \ldots & (\xi_n, \xi_1) & \xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\xi_n, \xi_1) & \ldots & (\xi_n, \xi_n) & \xi_n \\ (\zeta, \xi_1) & \ldots & (\zeta, \xi_n) & 0 \end{vmatrix},$$

где $\Gamma = \Gamma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — определитель Грама системы векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \begin{vmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \ldots & (\xi_1, \xi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\xi_n, \xi_1) & \ldots & (\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix},$$

и $(\xi, \eta) = \mathsf{M}(\xi\bar{\eta})$. Средняя квадратическая погрешность $\delta$ приближенного равенства $\zeta \approx \tilde{\zeta}$ равна длине перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\xi$ на пространство $H_0$, и дается формулой

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \zeta)}{\Gamma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}.$$

Б) Рассмотрим задачу об оценке случайной величины $\zeta$ по результатам наблюдения с. к. непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ на конечном промежутке времени $T = [a, b]$. Пусть $R(t, s)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$. В силу теоремы 5 § 1 процесс $\xi(t)$ может быть разложен в ряд

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t) \xi_k,$$

где $\varphi_k(t)$ — ортонормированная последовательность собственных функций, $\lambda_k$ — собственные значения корреляционной функции на $(a, b)$:

$$\lambda_k \varphi_k(t) = \int_a^b R(t, s) \varphi_k(s)\, ds,$$

$\xi_k$ — нормированная некоррелированная последовательность,

$$\mathsf{M}\xi_k \bar{\xi}_r = \delta_{kr}.$$

Очевидно, что $\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют базис в $\mathscr{L}_2\{\xi(t), t \in (a, b)\}$. Поэтому

$$\tilde{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n,$$

где

$$\sqrt{\lambda_n} \xi_n = \int_a^b \xi(t) \overline{\varphi_n(t)}\, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$c_n = \mathsf{M}\zeta\bar{\xi}_n = \int_a^b R_{\zeta\xi}(t) \varphi(t)\, dt, \qquad R_{\zeta\xi}(t) = \mathsf{M}\zeta\bar{\xi}(t).$$

Средняя квадратическая погрешность $\delta$ оценки может быть найдена по формуле

$$\delta^2 = \mathsf{M}|\zeta|^2 - \mathsf{M}|\tilde{\zeta}|^2 = \mathsf{M}|\zeta|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_a^b R_{\zeta\xi}(t) \varphi_n(t)\, dt \right|^2.$$

Практическое применение этого метода затруднено сложностью вычисления собственных функций и собственных значений ядра $R(t, s)$.

В) **Метод Винера.** Пусть $\xi(t)$ и $\zeta(t)$, $t \in T$, — две гильбертовы случайные функции. Допустим, что процесс $\xi(t)$ наблюдается на некотором множестве $T^*$ значений аргумента $t$. Ставится задача об определении оптимальной оценки значения $\zeta(t_0)$, $t_0 \in T$, по наблюденным значениям $\xi(t)$, $t \in T^*$. Если предположить, что искомая оценка имеет вид

$$\tilde{\zeta}(t_0) = \int_{T^*} c(s)\,\xi(s)\,m(ds), \tag{5}$$

где $m$ — некоторая мера на $T^*$ и выполнены условия, при которых этот интеграл имеет смысл, то уравнение (4) принимает вид

$$\int_{T^*} c(s)\,R_{\xi\xi}(s, t)\,m(ds) = R_{\zeta\xi}(t_0, t), \qquad t \in T^*, \tag{6}$$

где $R_{\xi\xi}$ — корреляционная функция $\xi(t)$, а $R_{\zeta\xi}$ — взаимная корреляционная функция $\zeta(t)$ и $\xi(t)$. Уравнение (6) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с симметричным (эрмитовым) ядром. Далеко не всегда оно имеет решение. Однако если

$$\int_T \mathsf{M}\,|\xi(t)|^2\,m(dt) < \infty,$$

то интегральное уравнение (6) имеет решение $c(s) \in \mathscr{L}_2\{m\}$ тогда и только тогда, когда оптимальная линейная оценка $\tilde{\zeta}(t_0)$ величины $\zeta(t)$ имеет вид (5).

Пусть $T$ — ось действительных чисел, $T^* = (a, b)$, процессы $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ стационарны и стационарно связаны (в широком смысле), а в качестве меры $m$ взята лебегова мера. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$\int_a^b c(s)\,R_{\xi\xi}(s - t)\,ds = R_{\zeta\xi}(t_0 - t), \quad t \in (a, b). \tag{7}$$

Если $\zeta(t) = \xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ и $t_0 > b$, т. е. если задача состоит в оценке величины $\xi(t_0)$ по значениям $\xi(t)$ в прошлом, то задачу будем называть *задачей чистого прогноза.*

Остановимся подробнее на задаче прогноза величины $\zeta(t+q)$ по результатам наблюдения процесса $\xi(s)$ до момента времени $t$, $t \geqslant s$. При этом будем предполагать, что процессы $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ стационарны и стационарно связаны (в широком смысле). Прогнозирующую величину $\tilde{\zeta}(t)$ будем рассматривать как функцию от $t$ при фиксированном $q$.

Положим

$$\tilde{\zeta}(t)=\int_{-\infty}^{t} c_t(s)\,\xi(s)\,ds.$$

Легко заметить, что процесс $\tilde{\zeta}(t)$ является стационарным. Действительно, уравнение (7) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_{-\infty}^{t} c_t(s)\,R_{\xi\xi}(s-u)\,ds=R_{\zeta\xi}(t+q-u), \qquad u\leqslant t.$$

Замена переменных $t-u=v$, $t-s=\theta$ преобразует последнее уравнение в следующее:

$$\int_{0}^{\infty} c_t(t-\theta)\,R_{\xi\xi}(v-\theta)\,d\theta=R_{\zeta\xi}(q+v), \qquad v\geqslant 0. \tag{8}$$

Отсюда мы видим, что функция $c_t(t-\theta)$ не зависит от $t$. Положим $c(\theta)=c_t(t-\theta)$. Уравнение (8) запишется теперь так:

$$\int_{0}^{\infty} c(s)\,R_{\xi\xi}(t-s)\,ds=R_{\zeta\xi}(q+t), \qquad t\geqslant 0, \tag{9}$$

а формула (5) для прогнозирующей функции имеет вид

$$\tilde{\zeta}(t)=\int_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\xi(s)\,ds=\int_{0}^{\infty} c(s)\,\xi(t-s)\,ds. \tag{10}$$

Таким образом, процесс $\tilde{\zeta}(t)=\tilde{\zeta}_q(t)$ стационарен. Из формулы (10) следует, что $c(t)$ является импульсной переходной функцией физически осуществимого фильтра, преобразующего наблюдаемый процесс в оптимальную оценку величины $\zeta(t+q)$.

Легко указать выражение для средней квадратической погрешности $\delta$ прогнозирующей функции $\tilde{\zeta}(t)$. Так как $\delta^2$ есть квадрат длины перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\zeta(t+q)$ на $\mathscr{L}_2\{\xi(s),\ s\leqslant t\}$, то

$$\delta^2=\mathsf{M}\,|\zeta(t+q)|^2-\mathsf{M}\,|\tilde{\zeta}(t)|^2=$$
$$=R_{\zeta\zeta}(0)-\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\overline{c(t)}\,R_{\xi\xi}(t-s)\,c(s)\,ds\,dt. \tag{11}$$

Полагая $R_{\zeta\zeta}(0)=\sigma_\zeta^2$ и переходя к спектральному представлению корреляционной функции $R_{\xi\xi}(t)$, получим

$$\delta^2=\sigma_\zeta^2-\int_{-\infty}^{\infty}|c(iu)|^2\,dF_{\xi\xi}(u), \tag{12}$$

где $F_{\xi\xi}(u)$ — спектральная функция процесса $\xi(t)$ и

$$c(iu)=\int_0^\infty c(t)\,e^{-iut}\,dt.$$

Изложим кратко метод решения уравнения (9), предложенный Н. Винером. Допустим, что спектр процесса $\xi(t)$ абсолютно непрерывен и спектральная плотность $f_{\xi\xi}(u)$ допускает факторизацию (см. теорему 3 § 5)

$$f_{\xi\xi}(u)=|h(iu)|^2,\quad h(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty a(t)\,e^{-zt}\,dt,\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0.$$

Из равенства Парсеваля для преобразования Фурье следует, что

$$R_{\xi\xi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\,|h(iu)|^2\,du=\int_0^\infty a(t+s)\,\overline{a(s)}\,ds.$$

Предположим еще, что взаимная спектральная функция процессов $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ абсолютно непрерывна и ее плотность $f_{\zeta\xi}(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{f_{\zeta\xi}(u)}{\overline{h(iu)}}=k(iu)\in\mathscr{L}_2. \tag{13}$$

Тогда

$$R_{\zeta\xi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}f_{\zeta\xi}(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}k(iu)\,\overline{h(iu)}\,du=\int_0^\infty b(t+s)\,\overline{a(s)}\,ds,$$

где

$$b(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k(iu)\,e^{itu}\,du.$$

С помощью полученных выражений уравнение (9) может быть переписано следующим образом:

$$\int_0^\infty\left[b(q+t+s)-\int_0^\infty c(\theta)\,a(t-\theta+s)\,d\theta\right]\overline{a(s)}\,ds=0,\quad t>0. \tag{14}$$

Чтобы (14) имело место, достаточно, чтобы функция $c(t)$ удовлетворяла уравнению

$$b(q+x)=\int_0^\infty c(\theta)\,a(x-\theta)\,d\theta,\qquad x>0. \tag{15}$$

Уравнение (15) того же типа, что и уравнение (9), с тем лишь существенным различием, что функция $a(t)$ обращается в нуль для отрицательных значений $t$. Записав (15) в виде

$$b(q+x)=\int_0^x c(\theta)\,a(x-\theta)\,d\theta, \qquad x>0, \tag{16}$$

мы можем непосредственно решить это уравнение с помощью преобразования Лапласа. Умножая равенство (16) на $e^{-zx}$ и интегрируя от 0 до $\infty$, получим

$$B_q(z)=C(z)\,h(z),$$

где

$$B_q(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty b(q+x)\,e^{-zx}\,dx, \quad C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty c(t)\,e^{-zt}\,dt.$$

Таким образом,

$$C(z)=\frac{B_q(z)}{h(z)}, \quad c(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\frac{B_q(iu)}{h(iu)}\,du, \tag{17}$$

причем выражение для $B_q(z)$, $\operatorname{Re} z>0$, может быть записано в виде

$$B_q(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqu}\frac{f_{\zeta\xi}(u)}{\overline{h(iu)}}\,\frac{du}{z-iu}. \tag{18}$$

Формулировка предположений, при которых выведены формулы (17), (18), весьма громоздкая. Проще при решении конкретных задач непосредственно проверять законность предлагаемых преобразований, приводящих к решению задачи.

Г) **Метод Яглома.** В методе Яглома, в отличие от метода Винера, отыскивается не импульсная переходная функция оптимального фильтра, которая может и не существовать, а частотная характеристика. Не даются общие формулы решения задачи, а предлагается только метод подбора искомой функции, исходя из тех требований, которым она должна удовлетворять. Во многих важных случаях этот подбор довольно просто осуществим.

Пусть двумерный стационарный процесс $(\xi(t), \zeta(t))$ допускает спектральное представление

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\nu_1(du), \quad \zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\nu_2(du)$$

с матрицей спектральной плотности

$$\begin{pmatrix} f_{\xi\xi}(u) & f_{\xi\zeta}(u) \\ f_{\zeta\xi}(u) & f_{\zeta\zeta}(u) \end{pmatrix}.$$

По-прежнему рассматривается задача оптимальной оценки величины $\zeta(t+q)$ по значениям процесса $\xi(s)$, $s \leqslant t$. Прогнозирующий процесс $\tilde{\zeta}(t)$ подчинен $\xi(t)$. Поэтому

$$\tilde{\zeta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} c(iu)\, \nu_1(du), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |c(iu)|^2 f_{\xi\xi}(u)\, du < \infty. \tag{19}$$

Уравнение

$$\mathsf{M}\zeta(t+q)\overline{\xi(s)} = \mathsf{M}\tilde{\zeta}(t)\overline{\xi(s)}, \qquad s \leqslant t,$$

определяющее процесс $\tilde{\zeta}(t)$, принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} \{e^{iuq} f_{\zeta\xi}(u) - c(iu) f_{\xi\xi}(u)\}\, du = 0, \qquad s > 0. \tag{20}$$

Кроме условий (19) и (20), мы имеем еще требование, чтобы $c(iu)$ была частотной характеристикой физически осуществимого фильтра. Эти условия будут выполнены, если

а) функция $f_{\xi\xi}(u)$ ограничена;

б) $c(iu)$ является граничным значением функции $c(z) \in \mathscr{H}_2^+$;

в) $\psi(iu) = e^{iuq} f_{\zeta\xi}(u) - c(iu) f_{\xi\xi}(u)$ является граничным значением функции $\psi(z)$ из $\mathscr{H}_2^-$.

Здесь $\mathscr{H}_2^+$ $(\mathscr{H}_2^-)$ обозначает пространство функций $h(z)$, аналитических в правой (левой) полуплоскости, для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x+iu)|^2\, du$$

равномерно ограничен при $x > 0$ $(x < 0)$.

Действительно, из б) следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} |c(iu)|^2 du < \infty$, а это вместе с а) обеспечивает выполнение условия (19). Кроме того, из б) следует, что $c(iu)$ есть частотная характеристика физически осуществимого фильтра. Из условия в) следует, что $e^{iuq} f_{\zeta\xi}(u) - c(iu) f_{\xi\xi}(u)$ является преобразованием Фурье функции, равной нулю при положительных значениях аргумента.

Заметим, что, ограничив себя условием б), мы отбрасываем фильтры, частотные характеристики которых на бесконечности могут возрастать. Такие частотные характеристики соответствуют операциям, связанным с дифференцированием процесса $\xi(t)$, и часто встречаются при построении оптимальных фильтров. Поэтому условие б) желательно заменить менее ограничительным. Предположим, что $c(z)$ — функция, аналитическая в правой полуплоскости, и $|c(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$ не быстрее, чем некоторая степень $z$ (например, $r$-я). Функция

$$c_n(z) = \frac{c(z)}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{r+1}} \in \mathscr{H}_2^+.$$

Так как $|c_n(z)| \leqslant |c(z)|$, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |c_n(iu) - c(iu)|^2 f_{\xi\xi}(u)\, du = 0,$$

если условие (19) выполнено. Таким образом, $c(iu)$ является пределом в $\mathscr{L}_2\{F_{\xi\xi}\}$ частотных характеристик допустимых физически осуществимых фильтров, а поэтому $c(iu)$ — также частотная характеристика такого фильтра. Мы получили следующий результат.

Теорема 3. *Если спектральная плотность $f_{\xi\xi}(u)$ процесса $\xi(t)$ ограничена, то условия:*

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |c(iu)|^2 f_{\xi\xi}(u)\, du < \infty$,

б) *$c(iu)$ является граничным значением функции $c(z)$, аналитической в правой полуплоскости и возрастающей при $|z| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|z|$,*

в) $\psi(iu) = e^{iuq} f_{\zeta\xi}(u) - c(iu) f_{\xi\xi}(u)$ *является граничным значением функции $\psi(z)$ из $\mathscr{H}_2^-$,*

*однозначно определяют частотную характеристику $c(iu)$ оптимального фильтра, оценивающего величину $\zeta(t+q)$.*

Средняя квадратическая погрешность $\delta$ оптимальной оценки равна

$$\delta = \{\mathsf{M}\,|\zeta(t+q)|^2 - \mathsf{M}\,|\tilde{\zeta}(t)|^2\}^{1/2} =$$
$$= \left\{\sigma_\zeta^2 - \int_{-\infty}^{\infty} |c(iu)|^2 f_{\xi\xi}(u)\, du\right\}^{1/2}. \qquad (21)$$

Пример 1. Рассмотрим задачу чистого прогноза процесса $\xi(t)$ $(\xi(t) = \zeta(t))$ с корреляционной функцией $R(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$ $(\alpha > 0)$. Спектральная плотность легко находится: $f_{\xi\xi}(u) = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi}\frac{1}{u^2+\alpha^2}$. Аналитическое продолжение функции $\psi(iu)$ имеет вид

$$\psi(z) = \frac{c(z) - e^{zq}}{(z+\alpha)(z-\alpha)} \frac{\sigma^2\alpha}{\pi}.$$

Функция $\psi(z)$ имеет единственный полюс в левой полуплоскости $z = -\alpha$. Для того чтобы его нейтрализовать с помощью функции $c(z)$, аналитической в правой полуплоскости, достаточно положить $c(z) = \text{const} = e^{-\alpha q}$. При этом условие а) теоремы 3 выполняется. Итак,

$$c(iu) = e^{-\alpha q}, \quad \tilde{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} e^{-\alpha q} \nu(du),$$

т. е. наилучшей формулой оптимального прогноза величины $\xi(t+q)$ является следующая формула:

$$\xi(t+q) \approx e^{-\alpha q} \xi(t),$$

зависящая только от значения $\xi(t)$ в последний наблюденный момент времени. Средняя квадратическая ошибка экстраполирования равна

$$\delta = \sigma\sqrt{1 - e^{-2\alpha q}}.$$

Пример 2. Снова рассматривается задача чистого прогноза процесса $\xi(t)$, т. е. оценки $\xi(t+q)$ по наблюденным величинам $\xi(s)$, $s < t$. Если спектр процесса $\xi(t)$ абсолютно непрерывен и выполнено условие (24) § 5, то спектральная плотность процесса допускает факторизацию: $f_{\xi\xi}(u) = |h(iu)|^2$, где $h(z) \in \mathcal{H}_2^+$ и не имеет нулей в правой полуплоскости.

Рассмотрим тот важный для практики случай, когда $h(z)$ является дробно-рациональной функцией:

$$h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ — многочлен степени $m$, $Q(z)$ — многочлен степени $n$ $(m < n)$. Допустим еще, что спектральная плотность $f_{\xi\xi}(u)$ ограничена и не обращается в нуль. Тогда нули многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ лежат в левой полуплоскости. Пусть

$$P(z) = A\prod_{j=1}^{p} (z - z_j)^{\alpha_j}, \quad Q(z) = B\prod_{j=1}^{r} (z - \tilde{z}_j)^{\beta_j},$$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = m, \quad \sum_{j=1}^{r} \beta_j = n.$$

Положим

$$P_1(z) = (-1)^m \bar{A} \prod_{j=1}^{p} (z + \bar{z}_1)^{\alpha_j}, \quad Q_1(z) = (-1)^n \bar{B} \prod_{j=1}^{r} (z + \bar{\tilde{z}}_j)^{\beta_j},$$

Аналитическое продолжение функции $\psi(iu)$ имеет вид

$$\psi(z)=(e^{zq}-c(z))\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

Функция $c(z)$ должна быть аналитической в правой полуплоскости, а $\psi(z)$ — в левой. Поэтому $c(z)$ должна быть аналитической во всей плоскости комплексной переменной и может иметь полюсы в нулях многочлена $P(z)$, причем порядок полюса не должен превосходить порядка соответствующего нуля $P(z)$. Поэтому

$$c(z)=\frac{M(z)}{P(z)},$$

где $M(z)$ — аналитическая функция в плоскости $z$, не имеющая особенностей при конечных $z$. Так как $c(z)$ имеет не выше чем степенной порядок роста, $M(z)$ является многочленом. Ввиду интегрируемости квадрата модуля функции

$$c(iu)\frac{P(iu)}{Q(iu)}=\frac{M(iu)}{Q(iu)}$$

степень $m_1$ многочлена $M(iu)$ не выше $n-1$, $m_1\leqslant n-1$.

С другой стороны, указанный выбор функции $c(z)$ обеспечивает выполнение условий а) и б) теоремы 3. Остается подобрать многочлен $M(z)$ так, чтобы функция

$$\psi(z)=\frac{[e^{zq}P(z)-M(z)]}{Q(z)}\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$$

или, что то же самое, функция

$$\psi_1(z)=\frac{e^{zq}P(z)-M(z)}{Q(z)}$$

не имела полюсов в левой полуплоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\left.\frac{d^jM(z)}{dz^j}\right|_{z=\tilde z_k}=\left.\frac{d^j(e^{zq}P(z))}{dz^j}\right|_{z=\tilde z_k}, \tag{22}$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ \beta_k-1,\quad k=1,\ \ldots,\ r.$$

Задача построения многочлена $M(z)$, удовлетворяющего условиям (22), является обычной задачей теории интерполяции и всегда имеет единственное решение в классе многочленов степени $n-1$. Найдя многочлен $M(z)$, мы тем самым найдем частотную характеристику оптимального прогнозирующего фильтра

$$c(iu)=\frac{M(iu)}{P(iu)}.$$

Можно предложить еще следующую методику определения функции $c(z)$. Разложим функции $P(z)Q^{-1}(z)$ и $M(z)Q^{-1}(z)$ на элементарные дроби. Пусть

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{c_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}, \quad \frac{M(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}.$$

Для того чтобы функция $\psi_1(z)$ не имела полюсов в точках $\tilde{z}_k$, $k=1, \ldots, r$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left.\frac{d^j}{dz^j}(z-\tilde{z}_k)^{\beta_k}\psi_1(z)\right|_{z=\tilde{z}_k}=0, \qquad j=0, 1, \ldots, \beta_k-1,$$

причем

$$\psi_1(z)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{c_{kj}e^{zq}-\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}.$$

Простой подсчет показывает, что

$$\gamma_{kj}=\left[c_{kj}+\frac{q}{1!}c_{kj+1}+\frac{q^2}{2!}c_{kj+2}+\ldots+\frac{q^{\beta_k-j}}{(\beta_k-j)!}c_{k\beta_k}\right]e^{\tilde{z}_k q}.$$

Зная коэффициенты $\gamma_{kj}$, мы можем написать выражение для $c(iu)$:

$$c(iu)=\frac{1}{h(iu)}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{c_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}}.$$

Пример 3. Предположим, что наблюдается процесс $\zeta(s)$ ($s\leqslant t$), но результаты измерений величины $\zeta(s)$ искажаются различными помехами, так что наблюденные значения дают некоторую функцию $\xi(s)$, $s\leqslant t$, отличную от $\zeta(s)$. Примем, что величина помехи (или, как говорят, шум) $\eta(t)=\xi(t)-\zeta(t)$ является стационарным процессом со средним значением 0. Желательно по результатам наблюдений процесса $\xi(s)=\zeta(s)+\eta(s)$, $s\leqslant t$, оценить значение $\zeta(t+q)$.

Такие задачи называются задачами фильтрации или сглаживания (говорят, что от процесса $\xi(t)$ нужно отфильтровать шум $\eta(t)$ или что процесс $\xi(t)$ нужно «сгладить», т. е. вычесть из него нерегулярный шум). При этом для $q>0$ мы имеем задачу фильтрации с прогнозом, а при $q<0$ — задачу фильтрации с запаздыванием.

Предположим, что шум $\eta(t)$ и процесс $\zeta(t)$ не коррелированы и имеют спектральные плотности $f_{\xi\xi}(u)$ и $f_{\eta\eta}(u)$. Тогда

$$R_{\xi\xi}(t)=R_{\eta\eta}(t)+R_{\zeta\zeta}(t),\quad f_{\xi\xi}(u)=f_{\eta\eta}(u)+f_{\zeta\zeta}(u).$$

Так как $R_{\zeta\xi}(t)=R_{\zeta\zeta}(t)$, то существует взаимная спектральная плотность процессов $\zeta(t)$, $\xi(t)$ и $f_{\zeta\xi}(u)=f_{\zeta\zeta}(u)$.

Пусть $f_{\zeta\zeta}(u)=\dfrac{c_1}{u^2+\alpha^2}$, $f_{\eta\eta}(t)=\dfrac{c_2}{u^2+\beta^2}$. Тогда

$$f_{\xi\xi}(u)=\frac{c_3\,(u^2+\gamma^2)}{(u^2+\alpha^2)\,(u^2+\beta^2)},\quad c_3=c_1+c_2,\quad \gamma^2=\frac{c_2\alpha^2+c_1\beta^2}{c_1+c_2}.$$

Для функции $\psi(z)$ мы получаем выражение

$$\psi(z)=\frac{-c_1e^{zq}\,(z^2-\beta^2)+c_3c\,(z)\,(z^2-\gamma^2)}{(z^2-\alpha^2)\,(z^2-\beta^2)}.$$

Пусть $q>0$. Функция $\psi(z)$ должна быть аналитической в левой полуплоскости и принадлежать $\mathscr{H}_2^-$. Для этого нужно, чтобы числитель обращался в нуль в точках $z=-\alpha$ и $z=-\beta$. Это приводит к равенствам

$$c(-\beta)=0,\quad c(-\alpha)=\frac{c_1}{c_3}\,\frac{e^{-\alpha q}\,(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\gamma^2}. \tag{23}$$

Кроме того, $c(z)$ должна быть аналитической в левой полуплоскости (и по условию б) — в правой), за исключением точки $z=-\gamma$, где она может иметь простой полюс. Таким образом,

$$c(z)=\frac{\varphi(z)}{z+\gamma},$$

где $\varphi(z)$ — целая функция. Из условия конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\,c\,(iu)\,|^2 f_{\xi\xi}(u)\,du$$

следует, что $\varphi(z)$ — линейная функция, $\varphi(z)=Az+B$.

Из (23) получаем

$$c(z)=A\frac{z+\beta}{z+\gamma},\quad A=\frac{c_1}{c_3}\,\frac{\beta+\alpha}{\gamma+\alpha}\,e^{-\alpha q}.$$

Поэтому формула оптимального сглаживания с прогнозом имеет вид

$$\tilde{\zeta}_q(t)=A\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\,\frac{iu+\beta}{iu+\gamma}\,\nu_1(du).$$

Вспоминая, что $(iu+\gamma)^{-1}$ является частотной характеристикой физически осуществимого фильтра с импульсной переходной функцией $e^{-\gamma t}$, получаем

$$\tilde{\zeta}_q(t) = \frac{c_1}{c_3}\frac{\beta+\alpha}{\gamma+\alpha}e^{-\alpha q}\left\{\xi(t) + (\beta-\gamma)\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\xi(s)\,ds\right\}. \quad (24)$$

При $q < 0$ формула (24) неверна. Формально это связано с тем, что функция $\psi(z)$ в этом случае не ограничена в левой полуплоскости. Функция $\psi(z)$ при $q < 0$ может быть определена из следующих соображений. Пусть $\psi_1(z) = -c_1e^{zq}(z^2-\beta^2) + c_3c(z)(z^2-\gamma^2)$. Тогда $c(z)$ должна быть аналитической в левой полуплоскости, кроме точки $z=-\gamma$, и $\psi_1(-\alpha)=\psi_1(-\beta)=0$. Так как

$$c(z) = \frac{\psi_1(z) + c_1e^{zq}(z^2-\beta^2)}{c_3(z^2-\gamma^2)}$$

и $c(z)$ аналитична в правой полуплоскости, то $\psi_1(z)$ — целая функция и

$$\psi_1(\gamma) = -c_1e^{\gamma q}(\gamma^2-\beta^2). \quad (25)$$

Положим

$$\psi_1(z) = A(z)(z+\alpha)(z+\beta).$$

Функция $A(z)$ должна быть целой. Из условия а) теоремы 3 следует, что $A(z) = \mathrm{const} = A$. Значение $A$ определяется из уравнения (25):

$$A = c_1e^{\gamma q}\frac{-\gamma+\beta}{\alpha+\gamma}.$$

Отсюда

$$c(iu) = \frac{c_1}{c_3}\frac{(\alpha+\gamma)(u^2+\beta^2)e^{iuq} - e^{\gamma q}(-\gamma+\beta)(iu+\alpha)(iu+\beta)}{(\alpha+\gamma)(u^2+\gamma^2)}. \quad (26)$$

Для прогноза и фильтрации стационарных последовательностей применимы методы, аналогичные тем, которые были изложены для процессов с непрерывным временем. Ограничимся одним примером.

Пример 4. Рассмотрим стационарную последовательность $\xi(t)$, удовлетворяющую простейшему уравнению авторегрессии

$$a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \ldots + a_p\xi(t-p) = \eta(t), \quad (27)$$

где $\eta(t)$ — стандартная некоррелированная последовательность и $\xi(t)$ подчинено $\eta(t)$. Пусть

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\,d\zeta(u)$$

— спектральное представление последовательности $\eta(t)$, $\zeta(u)$ — процесс с некоррелированными приращениями и структурной функцией $\frac{1}{2\pi} l(A \cap B)$, где $l$ — мера Лебега. Спектральное представление последовательности $\xi(t)$ должно иметь вид

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu} \varphi(u)\, d\zeta(u), \quad \text{где} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(u)|^2\, du < \infty. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{itu} \overline{P(e^{iu})}\, \varphi(u)\, d\zeta(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\, d\zeta(u),$$

где $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k z^k$. Отсюда следует, что

$$\varphi(u) = \frac{1}{\overline{P(e^{iu})}} \quad (\mathrm{mod}\, l).$$

Предположим, что функция $P(z)$ не имеет нулей в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Тогда, если

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k z^k \qquad \left(b_0 = \frac{1}{a_0}\right),$$

то

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta(t-n),$$

и мы получили представление последовательности $\xi(t)$ в виде реакции физически осуществимого фильтра на некоррелированную последовательность $\eta(t)$. Так как

$$\xi(t) = -\frac{1}{a_0} [a_1 \xi(t-1) + \ldots + a_p \xi(t-p) + \eta(t)], \tag{29}$$

то оптимальный прогноз $\xi(t)$ по данным $\xi(t-n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет вид

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{a_0} [a_1 \xi(t-1) + a_2 \xi(t-2) + \ldots + a_p \xi(t-p)].$$

Минимальная средняя квадратическая погрешность прогноза равна

$$\delta(t) = \left\{ \mathsf{M} \frac{|\eta(t)|^2}{|a_0|^2} \right\}^{1/2} = \frac{1}{|a_0|}.$$

Повторное использование формулы (29) позволяет получить оптимальный прогноз на несколько шагов вперед.

ГЛАВА VI

# ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Процессы с независимыми приращениями уже рассматривались в § 4 гл. I.

В настоящей главе будут исследованы свойства выборочных функций таких процессов, а также рассмотрены различные функционалы от процессов с независимыми приращениями. Начнем с простейшего примера — однородного процесса с дискретным временем — случайного блуждания.

## § 1. Случайные блуждания на прямой

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Под случайным блужданием понимают последовательность сумм

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

При этом $\zeta_n$ называют *положением* блуждающей частицы в момент $n$, $\xi_n$ — *n-м шагом* блуждания. Иногда рассматривают блуждание, начинающееся в точке $x$, тогда $\zeta_0 = x$, $\zeta_n = x + \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Мы в этом параграфе будем рассматривать лишь блуждания, начинающиеся в точке 0. Будет также предполагаться, что величины $\xi_k$ целочисленны. Тогда и блуждание называется *целочисленным*.

Максимальное целое число $h$, при котором величина $\frac{1}{h}\xi_1$ также целочисленна, называется *шагом решетки* блуждания. Если $h = 1$, то блуждание называется *нерешетчатым*. Очевидно, что $h$ совпадает с наибольшим общим делителем тех $k$, для которых $\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$.

Обозначим через $\varphi(z)$ характеристическую функцию величин $\xi_k$.

Лемма 1. *Если $z_0$ — минимальный положительный корень уравнения $1 - \varphi(z) = 0$, то $hz_0 = 2\pi$, где $h$ — шаг решетки блуждания.*

*Доказательство.* Обозначим $p_k = \mathsf{P}\{\xi_1 = k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Тогда

$$0 = 1 - \varphi(z_0) = \sum p_k (1 - e^{ikz_0}) =$$
$$= \sum p_k (1 - \cos kz_0) = \sum p_k 2 \sin^2 \frac{kz_0}{2}.$$

Пусть $N' = \{k\colon p_k > 0\}$. Тогда при $k \in N'$ число $\frac{kz_0}{2\pi}$ — целое. Если $h$ — наибольший общий делитель чисел из $N'$, то $\frac{hz_0}{2\pi}$ — также целое число, поскольку $h$ представимо в виде

$$h = m_1 k_1 + \ldots + m_n k_n,$$

где $m_i$ — целые числа, $k_i \in N'$. Значит, $\frac{hz_0}{2\pi} \geqslant 1$, $z_0 \geqslant \frac{2\pi}{h}$. С другой стороны,

$$\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = \sum_{k \in N'} p_k e^{i \frac{2\pi}{h} k} = \sum_{k \in N'} p_k = 1,$$

поскольку $\frac{k}{h}$ — целое число при $k \in N'$. Поэтому $\frac{2\pi}{h}$ — положительный корень уравнения $1 - \varphi(z) = 0$. Значит, $z_0 \leqslant \frac{2\pi}{h}$. ■

Следствие. *Если блуждание нерешетчатое, то существует такое* $\alpha > 0$, *что*

$$\operatorname{Re}(1 - \varphi(z)) \geqslant \alpha z^2, \qquad z \in [-\pi, \pi].$$

Пусть $p_l \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Re}(1 - \varphi(z)) \geqslant 2p_l \sin^2 \frac{lz}{2} \geqslant 2p_l \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{lz}{2}\right)^2,$$

если $\left|\frac{lz}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. А при $\frac{\pi}{l} \leqslant |z| \leqslant \pi$ функция $\frac{z^2}{\operatorname{Re}(1 - \varphi(z))}$ непрерывна (в силу леммы 1 знаменатель не обращается в нуль) и, значит, ограничена.

Легко видеть, что достаточно изучать нерешетчатые блуждания, так как таким будет последовательность $\left\{\frac{1}{h} \zeta_n, n = 0, 1, \ldots\right\}$, где $h$ — шаг решетки блуждания. Поэтому в дальнейшем блуждание будет предполагаться нерешетчатым.

Введем случайную величину $\nu_x$ ($x$ — целое число) — момент первого попадания случайного блуждания в точку $x$:

$$\nu_x = \inf [n > 0\colon \zeta_n = x]$$

(если $\zeta_n \neq x\ \forall n$, считаем $\nu_x = +\infty$). Блуждание называется *возвратным*, если $\mathsf{P}\{\nu_0 < +\infty\} = 1$. Исследуем условия возвратности случайного блуждания. Для этого нам понадобится преобразование Лапласа величины $\nu_x$.

Лемма 2. *При* $|\lambda| < 1$

$$\mathsf{M}\lambda^{\nu_x} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathsf{P}\{\nu_x = k\} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n = x\}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\}\right)^{-1}$$

($\lambda^{+\infty}$ *считаем равным* 0).

*Доказательство.* Имеем

$$\mathsf{P}\{\zeta_n = x\} = \mathsf{P}\{\zeta_n = x,\ \nu_x \leqslant n\} = \\ = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\zeta_n = x,\ \nu_x = k\} = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\zeta_n - \zeta_k = 0,\ \nu_x = k\}.$$

Очевидно, что $\zeta_n - \zeta_k$ не зависит от события $\{\nu_x = k\}$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta_n = x\} = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\nu_x = k\}\,\mathsf{P}\{\zeta_n - \zeta_k = 0\} = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\nu_x = k\}\,\mathsf{P}\{\zeta_{n-k} = 0\}.$$

Умножая это равенство на $\lambda^n$ и суммируя по $n$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n = x\} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathsf{P}\{\nu_x = k\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\}. \blacksquare$$

Следствие. *Для возвратности блуждания необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\} = +\infty.$$

Действительно,

$$\mathsf{P}\{\nu_0 < +\infty\} = \lim_{\lambda \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathsf{P}\{\nu_0 = k\} = \\ = 1 - \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\}} = 1 - \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\}}.$$

Сформулируем условие возвратности случайного блуждания через характеристическую функцию одного шага.

Теорема 1. *Для того чтобы нерешетчатое случайное блуждание было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(z)}\, dz = +\infty. \tag{1}$$

*Доказательство.* Достаточность. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n=0\}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{M}e^{iz\zeta_n}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi^n(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\,dz.$$

В силу теоремы Фату

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}=\lim_{\lambda\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}=\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\,dz\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(z)}\,dz.$$

Из (1) и следствия леммы 2 вытекает возвратность случайного блуждания.

Необходимость. Будем доказывать от противного. Предположим, что блуждание возвратно, но

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(z)}\,dz<\infty. \tag{2}$$

Пусть $x\neq 0$. Рассмотрим при $0<\lambda<1$ выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=0,\ \nu_x>n\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=0,\ \nu_x\leqslant n\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\nu_x=k\}\mathsf{P}\{\zeta_{n-k}=-x\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\mathsf{P}\{\nu_x=k\}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathsf{P}\{\zeta_n=-x\}.$$

В силу леммы 2 последнее выражение имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n=0\}\left(1-\mathsf{M}\lambda^{\nu_x}\mathsf{M}\lambda^{\nu_{-x}}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n=0\}\left(2-\mathsf{M}\lambda^{\nu_x}-\mathsf{M}\lambda^{\nu_{-x}}-\left(1-\mathsf{M}\lambda^{\nu_x}\right)\left(1-\mathsf{M}\lambda^{\nu_{-x}}\right)\right).$$

Поскольку $\mathsf{M}\lambda^{\nu_x}<1$, $\mathsf{M}\lambda^{\nu_{-x}}<1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n=0,\ \nu_x>n\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n=0\}\left(2-\mathsf{M}\lambda^{\nu_x}-\mathsf{M}\lambda^{\nu_{-x}}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left[2\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}-\mathsf{P}\{\zeta_n=x\}-\mathsf{P}\{\zeta_n=-x\}\right]$$

(мы снова использовали лемму 2). Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathsf{P}\{\zeta_n=0,\ \nu_x>n\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2-e^{-izx}-e^{izx}\right)\varphi^n(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos zx)\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\,dz. \tag{3}$$

Из следствия леммы 1 вытекает, что функция

$$\frac{1-\cos zx}{1-\varphi(z)}$$

ограничена. Кроме того, функция $\dfrac{1-\varphi(z)}{1-\lambda\varphi(z)}$ ограничена при $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ и $z\in[-\pi,\pi]$, поскольку $|\varphi(z)|\leqslant 1$, а функция $\dfrac{1-u}{1-\lambda u}$ ограничена, если $\lambda\in[0,1]$, а $u$ меняется в единичном круге комплексной плоскости, так как она непрерывна, если ее положить равной 1 при $\lambda=1$, $u=1$. Поэтому в (3) можно перейти к пределу при $\lambda\uparrow 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n=0,\ \nu_x>n\} \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos zx)\frac{dz}{1-\varphi(z)}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos zx)\operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(z)}\,dz.$$

Из (2) вытекает, что

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cos zx\operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(z)}\,dz=0$$

в силу теоремы Римана — Лебега. Далее, поскольку $\nu_x \to \infty$ при $x \to \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0,\ \nu_x > n\} = \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\}.$$

Значит, для всякого $m$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0,\ \nu_x > n\} = \sum_{n=0}^{m} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(z)}\,dz.$$

Поэтому и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(z)}\,dz < \infty$$

(в предположении (2)), что противоречит возвратности блуждания. ∎

Пусть $x \geqslant 0$. Обозначим через $\tau_x$ момент первого попадания в множество $(x, \infty)$:

$$\tau_x = \inf\,[n\colon\ \zeta_n > x]$$

(если $\zeta_n \leqslant x$ для всех $x$, полагаем $\tau_x = +\infty$). Если $\tau_x$ конечно, положим $\gamma_x = \zeta_{\tau_x} - x$. Будем искать совместное распределение величин $\tau_x$ и $\gamma_x$. Пусть $|\lambda| < 1$, $z \in [-\pi, \pi]$. Положим

$$u_x(\lambda, z) = \mathsf{M} e^{i\gamma_x z}\lambda^{\tau_x}\chi_{\{\tau_x<\infty\}} = \sum_{k=1,\ m=1}^{\infty} e^{ikz}\lambda^m \mathsf{P}\{\tau_x = m,\ \gamma_x = k\}.$$

Пусть $p_l = \mathsf{P}\{\xi_1 = l\}$. При $m > 1$ имеем

$$\mathsf{P}\{\tau_x = m,\ \gamma_x = k\} = \mathsf{P}\{\zeta_1 \leqslant x, \ldots, \zeta_{m-1} \leqslant x,\ \zeta_m = k + x\} =$$
$$= \sum_{l\leqslant x} \mathsf{P}\{\zeta_1 \leqslant x, \ldots, \zeta_{m-1} \leqslant x,\ \zeta_m = k + x,\ \xi_1 = l\} =$$
$$= \sum_{l\leqslant x} p_l \mathsf{P}\{\zeta_2 - \zeta_1 \leqslant x - l, \ldots, \zeta_{m-1} - \zeta_1 \leqslant x - l,\ \zeta_m - \zeta_1 =$$
$$= k + x - l\} = \sum_{l\leqslant x} p_l \mathsf{P}\{\tau_{x-l} = m - 1,\ \gamma_{x-l} = k\}.$$

Кроме того,

$$\mathsf{P}\{\tau_x = 1,\ \gamma_x = k\} = \mathsf{P}\{\zeta_1 = k + x\} = p_{k+x}.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1,\ k=1}^{\infty} \lambda^m e^{ikz} \mathsf{P}\{\tau_x = m,\ \gamma_x = k\} =$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} p_{k+x} + \sum_{l\leqslant x} p_l \sum_{m=2,\ k=1}^{\infty} \lambda^m e^{ikz} \mathsf{P}\{\tau_{x-l} = m - 1,\ \gamma_{x-l} = k\},$$

или

$$u_x(\lambda, z) = \lambda g_x(z) + \lambda \sum_{l\leqslant x} p_l u_{x-l}(\lambda, z), \tag{4}$$

где
$$g_x(z)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz}p_{k+x}.$$

Покажем, как можно решить систему уравнений
$$u_x=g_x+\lambda\sum_{l\leqslant x} p_l u_{x-l}, \tag{5}$$
где $u_x$ и $g_x$ определены для $x\geqslant 0$ и ограничены. Положим $u_x=0$, $g_x=-\lambda\sum\limits_{l\leqslant x} p_l u_{x-l}$ для $x<0$. Тогда (5) запишется в виде
$$u_x=g_x+\lambda\sum p_l u_{x-l}, \qquad -\infty<x<\infty. \tag{6}$$
Нам потребуется следующее вспомогательное предложение.

Лемма 3. *Пусть числа $c_k$ определены из равенства*
$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=-\infty}^{0}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}. \tag{7}$$
*Тогда $c_k=0$ при $k>0$, $\sum|c_k|\leqslant\frac{1}{1-|\lambda|}$* и
$$c_k=\lambda\sum_l p_l c_{k-l}, \qquad k<0. \tag{8}$$

*Доказательство.* Поскольку степенной ряд относительно $e^{iz}$ в правой части (7) под знаком $\exp\{\cdot\}$ сходится абсолютно, если вместо $e^{iz}$ подставить $u$ при $|u|\leqslant 1$, то левую часть (7) можно получить, разлагая $\exp\{\cdot\}$ в степенной ряд и собирая коэффициенты при одинаковых гармониках. Отсюда видно, что коэффициенты при $e^{ikz}$ для $k>0$ будут равны 0 и что
$$\sum|c_k|\leqslant\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{n}\sum_{k=-\infty}^{0}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\right\}\leqslant\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{n}\right\}=\frac{1}{1-|\lambda|}.$$
Далее,
$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k e^{ikz}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}=$$
$$=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n\varphi^n(z)}{n}\right\}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}=$$
$$=\frac{1}{1-\lambda\varphi(z)}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}.$$

Значит,

$$\left(1-\lambda\sum p_l e^{ilz}\right)\sum c_k e^{ikz}=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\,e^{ikz}\right\}. \qquad (9)$$

Точно так же как и выше, можем установить, что выражение в правой части разлагается в ряд Фурье лишь по $e^{ikz}$ при положительных $k$. Поэтому при $k<0$

$$c_k-\lambda\sum p_l c_{k-l}=0$$

(это коэффициент левой части при $e^{ikz}$). ■

Замечание. Из соотношения (9) вытекает, что при $k\geqslant 0$

$$c_k-\lambda\sum p_l c_{k-l}=b_k, \qquad (10)$$

где $b_k$ определяются из соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{ikz}=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\,e^{ikz}\right\}. \qquad (11)$$

Вернемся к уравнению (6). Имеем

$$\sum c_k u_{x-k}=\sum c_k g_{x-k}+\lambda\sum p_l\sum_k c_k u_{x-l-k},$$

или

$$\sum c_k g_{x-k}=\sum\left(c_k-\sum_l p_l c_{k-l}\right)u_{x-k}.$$

Из леммы 3 и замечания к ней вытекает, что

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k g_{x-k}=\sum_{k=0}^{\infty} b_k u_{x-k}. \qquad (12)$$

Заметим, что при $x<0$ правая часть обращается в нуль, значит, и левая также обращается в нуль. Пусть теперь $x\geqslant 0$. Тогда в $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} c_k g_{x-k}$ входят лишь $g$ с неотрицательными индексами, которые нам известны. Умножая соотношение (12) на $\rho^x$, где $|\rho|<1$, и суммируя по $x$, получим

$$\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x\sum_{k=-\infty}^{0} c_k g_{x-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k b_k\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x u_x.$$

Следовательно,

$$\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x u_x=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k b_k\right)^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_{x-k}.$$

Заметим теперь, что функция

$$\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}$$

аналитична при $|\rho|<1$ и непрерывна при $|\rho|\leqslant 1$. Так как при $\rho=e^{iz}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{ikz}b_k=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{izk}\right\},$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k b_k=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}. \tag{13}$$

Таким образом,

$$\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x u_x=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k g_{x-k}. \tag{14}$$

Из этой формулы определим $u_0$. Для этого нужно положить $\rho=0$: $u_0=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k g_{-k}$. Для того чтобы найти $u_0(\lambda, z)$, нужно вместо $g_{-k}$ подставить $\lambda g_{-k}(z)$:

$$u_0(\lambda, z)=\lambda\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\sum_{j=1}^{\infty}p_{j-k}e^{ijz}.$$

Введем операцию $[\ ]_+$, ставящую каждому тригонометрическому ряду $\sum_k \alpha_k e^{ikz}$ в соответствие тригонометрический ряд $\left[\sum_k \alpha_k e^{ikz}\right]_+ = \sum_{k>0}\alpha_k e^{ikz}$. Тогда

$$u_0(\lambda, z)=\lambda\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\sum_{j=-\infty}^{\infty}p_{j-k}e^{ijz}\right]_+=\lambda\left[\sum_k e^{ikz}c_k\varphi(z)\right]_+=$$
$$=-\left[\sum_k c_k e^{ikz}(1-\lambda\varphi(z))\right]_+,$$

поскольку $\left[\sum_k c_k e^{ikz}\right]_+=0$. Используя соотношение (9) и равенство

$$\left[\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k\geqslant 1}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}-1\right]_+=$$
$$=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k\geqslant 1}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}-1,$$

находим

$$u_0(\lambda, z) = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \sum_{k \geqslant 1} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\} e^{ikz}\right\}. \tag{15}$$

Полагая в (15) $z=0$, найдем производящую функцию $\tau_0$:

$$\mathsf{M}\lambda^{\tau_0} = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\}\right\}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Для того чтобы блуждание было ограничено сверху, т. е. чтобы*

$$\mathsf{P}\{\sup_n \zeta_n < +\infty\} = 1, \tag{17}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\} < \infty. \tag{18}$$

*Доказательство.* Из (16) вытекает, что

$$\mathsf{P}\{\tau_0 = +\infty\} = 1 - \lim_{\lambda \uparrow 1} \mathsf{M}\lambda^{\tau_0} =$$
$$= \lim_{\lambda \uparrow 1} \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\}\right\} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\}\right\}$$

(считаем $e^{-\infty} = 0$). Значит, если выполнено условие (17), то

$$\mathsf{P}\{\sup_n \zeta_n < +\infty\} \geqslant \mathsf{P}\{\tau_0 = +\infty\} > 0.$$

Но в силу закона 0 или 1 Колмогорова (см. гл. II, § 4, теорема 7) $\mathsf{P}\{\sup_n \zeta_n < +\infty\}$ может принимать лишь значения 0 или 1. Поэтому в этом случае выполнено (17).

Пусть $\mathsf{P}\{\tau_0 = +\infty\} = 0$. Это эквивалентно соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\} = +\infty.$$

Если $\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant 0\} = 1$, то

$$\mathsf{P}\{\sup_n \zeta_n = +\infty\} = 1, \tag{19}$$

так как с вероятностью 1 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k=+\infty$. Предположим, что $\mathsf{P}\{\xi_1<0\}>0$ и $m<0$ таково, что $p_m>0$. Тогда для всех $n$ имеем

$$\mathsf{P}\{\xi_1=m,\ \ldots,\ \xi_n=m,\ \sup_{k\geqslant 0}(\zeta_{n+k}-\zeta_n)\leqslant -nm\}\leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\{\sup_l \zeta_l\leqslant 0\}=\mathsf{P}\{\tau_0=+\infty\}=0.$$

Но левая часть этого соотношения равна

$$(p_m)^n\,\mathsf{P}\{\sup_k \zeta_k\leqslant -nm\}.$$

Поэтому для всех $n$ $\mathsf{P}\{\sup_k \zeta_k<n\}=0$. Значит, выполнено (19). ■

Используем теперь соотношение (14) для определения распределения величины

$$\zeta^+=\sup_{n\geqslant 0}\zeta_n.$$

Очевидно, что

$$\mathsf{P}\{\zeta^+=m\}=\mathsf{P}\{\tau_{m-1}<\infty,\ \tau_m=+\infty\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\tau_{m-1}<\infty\}-\mathsf{P}\{\tau_m<\infty\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta^+=m\}=u_{m-1}(1,\ 0)-u_m(1,\ 0).$$

Пусть $0<\rho<1$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta^+=m\}\rho^m=\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m[u_{m-1}(1,\ 0)-u_m(1,\ 0)]+\mathsf{P}\{\zeta^+=0\}=$$
$$=1-\mathsf{P}\{\tau_0<\infty\}-\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m u_m(1,\ 0)+\rho\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m u_m(1,\ 0)=$$
$$=1+(\rho-1)\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m u_m(1,\ 0). \qquad (20)$$

Воспользуемся теперь формулой (14), учитывая, что для получения $\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m u_m(1,\ 0)$ нужно в правую часть подставить $z=0$, а затем перейти к пределу при $\lambda\uparrow 1$. Числа $g_x$ в силу определения при этом будут равны

$$g_x=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}p_{k+x}.$$

Поэтому

$$(\rho-1)\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m u_m(\lambda,0)=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}\times$$

$$\times\sum_{x=0}^{\infty}(\rho^{x+1}-\rho^x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k g_{x-k}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}\times$$

$$\times\left[-\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k g_{-k}+\sum_{x=1}^{\infty}\rho^x\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(g_{x-k-1}-g_{x-k})\right]=$$

$$=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}\times$$

$$\times\left[-u_0(\lambda,0)+\lambda\sum_{x=1}^{\infty}\rho^x\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k p_{x-k}\right].$$

Воспользовавшись замечанием к лемме 3 и формулой (11), можем записать

$$\lambda\sum_{x=1}^{\infty}\rho^x\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k p_{x-k}=-\sum_{x=1}^{\infty}b_x\rho^x=1-\sum_{x=0}^{\infty}b_x\rho^x=$$

$$=1-\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}$$

(поскольку формула (11) верна при $|\rho|=1$, она верна и при $|\rho|<1$).

Следовательно, учитывая (16), получим

$$(\rho-1)\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m u_m(\lambda,0)=$$

$$=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}\left[\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\mathsf{P}\{\zeta_n>0\}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^k\right\}\right]=$$

$$=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}(\rho^k-1)\right\}-1. \quad (21)$$

Теорема 3. *Если* $\mathsf{P}\{\sup_n \zeta_n < \infty\} = 1$, *то распределение величины* $\zeta^+ = \sup_n \zeta_n$ *определяется соотношением*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \mathsf{P}\{\zeta^+ = m\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\}(\rho^k - 1)\right\}. \tag{22}$$

Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\lambda \uparrow 1$ в (21) и воспользоваться формулой (20). Возможность перехода к пределу вытекает из теоремы 2. ■

Замечание. Формула (22) справедлива и при $|\rho| = 1$, поскольку обе части этого равенства определены и непрерывны при $|\rho| \leqslant 1$.

Следствие. *В условиях теоремы* 3

$$\mathsf{P}\{\sup_{n \geqslant 1} \zeta_n = 0\} = \\ = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\}\right\}\left[1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n = 0\}\right\}\right]. \tag{23}$$

Действительно,

$$\mathsf{P}\{\sup_{n \geqslant 1} \zeta_n = 0\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{-k} \mathsf{P}\{\zeta^+ = k\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta^+ = k\} e^{izk}\, dz = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\}(e^{ikz} - 1)\right\} dz = \\ = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\lambda\varphi(z) - 1}{\lambda} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\} e^{ikz}\right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda}\right] dz \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\}\right\}.$$

Воспользовавшись соотношениями (9) и (7), можем записать

$$\mathsf{P}\{\sup_{n \geqslant 1} \zeta_n = 0\} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \sum_{k \leqslant 0} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\} e^{ikz}\right\}\right] dz \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \mathsf{P}\{\zeta_n > 0\}\right\}. \tag{24}$$

Поскольку

$$\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k\leqslant 0}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}\rho^{-k}\right\}\Bigg|_{\rho=0}=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}\right\},$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\sum_{k\leqslant 0}\mathsf{P}\{\zeta_n=k\}e^{ikz}\right\}dz=$$
$$=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}\right\}.$$

Подставляя это выражение в (24), получаем (23).

Замечание. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathsf{P}\{\zeta_n=0\} \tag{25}$$

*сходится.*

Пусть $\xi_1-\xi_2$ имеет решетчатое распределение с шагом $h$, тогда $|\varphi(z)|^2=\mathsf{M}e^{iz(\xi_1-\xi_2)}$ — функция периодическая с периодом $\frac{\pi}{h}$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^n(z)\,dz\leqslant\frac{h}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}|\varphi(z)|^n\,dz.$$

Используя следствие из леммы 1, убеждаемся, что существует такое $\alpha>0$, что $|\varphi(z)|^2\leqslant e^{-\alpha z^2}$ при $|z|\leqslant\pi/h$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta_n=0\}\leqslant\frac{h}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}e^{-\frac{n\alpha}{2}z^2}dz\leqslant\frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n\alpha}{2}z^2}dz\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}},$$

где $C$ — некоторая постоянная. Из этой оценки и вытекает сходимость ряда (25).

Выше мы нашли лишь совместное распределение величин $\tau_0$ и $\gamma_0$. Для нахождения совместного распределения $\tau_x$ и $\gamma_x$ можно использовать следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathsf{P}\{\tau_x=m,\ \gamma_x=k\}=\mathsf{P}\{\tau_0=m,\ \gamma_0=x+k\}+$$
$$+\sum_{\substack{0<n<m\\0<t\leqslant x}}\mathsf{P}\{\tau_0=n,\ \gamma_0=t\}\,\mathsf{P}\{\tau_{x-t}=m-n,\ \gamma_{x-t}=k\}.$$

Умножая это соотношение на $\lambda^m$, $e^{izk}$ и суммируя по $m$ и $k$ от 1 до $\infty$, получим

$$u_x(\lambda,z)=\sum_{m,k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\tau_0=m,\ \gamma_0=x+k\}\lambda^m e^{izk}+$$
$$+\sum_{0<t\leqslant x}u_{x-t}(\lambda,z)\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\tau_0=n,\ \gamma_0=t\}\lambda^n.$$

Умножим теперь это равенство на $\rho^x$ ($|\rho|<1$) и просуммируем по $x$ от $0$ до $\infty$ (при $x=0$ вторая сумма в правой части пропадает). Тогда получим

$$\sum_{x=0}^{\infty} \rho^x u_x(\lambda, z) = \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x \sum_{m,\,k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\tau_0 = m,\ \gamma_0 = x+k\}\,\lambda^m e^{izk} + \\ + \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x u_x(\lambda, z) \sum_{n,\,t=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\tau_0 = n,\ \gamma_0 = t\}\,\lambda^n \rho^t. \qquad (26)$$

В силу формулы (15)

$$\sum_{n,\,t=1}^{\infty} \lambda^n \rho^t \mathsf{P}\{\tau_0 = n,\ \gamma_0 = t\} = \\ = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\}\,\rho^k\right\} \qquad (27)$$

(поскольку эта формула верна при $\rho = e^{iz}$, она верна и при $|\rho|<1$). Далее,

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{m,\,k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\tau_0 = m,\ \gamma_0 = x+k\}\,\lambda^m e^{izk} \rho^x = \\ = \sum_{m,\,t=1}^{\infty} \lambda^m \mathsf{P}\{\tau_0 = m,\ \gamma_0 = t\} \sum_{\substack{k+x=t\\ k\geqslant 1,\ x\geqslant 0}} e^{izk}\rho^x = \\ = \sum_{m,\,t=1}^{\infty} \lambda^m \mathsf{P}\{\tau_0 = m,\ \gamma_0 = t\}\, \frac{e^{izt} - \rho^t}{1 - \rho e^{-iz}} = \\ = \frac{1}{1-\rho e^{-iz}} \left[\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\}\,\rho^k\right\} - \right. \\ \left. - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\}\,e^{izk}\right\}\right]$$

(мы воспользовались формулой (27)). Таким образом, из (26) получаем после несложных преобразований следующую формулу:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \rho^x u_x(\lambda, z) = \\ = \frac{1}{1-\rho e^{-iz}} \left(1 - \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\}\,[\rho^k - e^{ikz}]\right\}\right). \qquad (28)$$

## § 2. Скачкообразный процесс с независимыми приращениями. Обобщенный процесс Пуассона

Пусть $\xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями со значениями в $\mathscr{R}^m$. Такой процесс будем называть *скачкообразным*, если для каждого $t$ существует конечное число точек $0 < s_1 < \ldots < s_n \leqslant t$ таких, что $\xi(s)$ — постоянная величина на интервалах $[0, s_1)$, $(s_1, s_2)$, ... ..., $(s_n, t)$. Будем считать, что процесс непрерывен справа, $\xi(s) = \xi(s+0)$. Из стохастической непрерывности $\xi(s)$ вытекает, что вероятность того, что в точке $s$ $\xi(s)$ имеет разрыв, равна 0 для всех $s \geqslant 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями был скачкообразным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $t > 0$

$$\varlimsup_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) \neq 0\} < \infty,$$

$$0 = t_0 < \ldots < t_n = t, \quad \lambda_n = \max(t_{k+1} - t_k).$$

*Доказательство.* Пусть процесс является скачкообразным. Обозначим через $\nu(t)$ число скачков процесса $\xi(t)$ на отрезке $[0, t]$. Очевидно, что $\nu(t)$ — также стохастически непрерывный процесс (поскольку вероятность того, что $t$ — точка разрыва $\nu(t)$, равна 0 в силу совпадения точек разрывов $\xi(t)$ и $\nu(t)$). Кроме того, $\nu(t)$ — процесс с независимыми приращениями: $\nu(t+h) - \nu(t)$ — число точек разрыва $\xi(s)$ на $[t, t+h]$ — не зависит от поведения $\xi(s)$ (а значит, и $\nu(s)$) на $[0, t]$. Заметим, далее, что

$$\mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) \neq 0\} \leqslant \mathsf{P}\{\nu(t_k) - \nu(t_{k-1}) \neq 0\}$$

(если $\xi(t_k) \neq \xi(t_{k-1})$, то на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ $\xi(s)$ имеет хотя бы один разрыв). Поэтому для доказательства необходимости условия теоремы достаточно показать, что для всех $t > 0$

$$\varlimsup_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\nu(t_k) - \nu(t_{k-1}) \neq 0\} < \infty,$$

$$0 = t_0 < \ldots < t_n = t, \quad \lambda_n = \max(t_{k+1} - t_k).$$

Но

$$\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[\nu(t_k) - \nu(t_{k-1}) \neq 0]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathsf{P}\{\nu(t_k) - \nu(t_{k-1}) \neq 0\}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\nu(t_k) - \nu(t_{k-1}) = 0\} = \mathsf{P}\{\nu(t) = 0\}.$$

То, что $\mathsf{P}\{\nu(t)=0\}>0$, вытекает из того, что $\nu(s)$ равномерно стохастически непрерывна на $[0, t]$ и, значит, при некотором $\delta>0$

$$\mathsf{P}\{\nu(s_1)-\nu(s_2)=0\}\geqslant 1-\varepsilon \quad \text{при} \quad |s_1-s_2|<\delta,$$

но

$$\mathsf{P}\{\nu(t)=0\}=\prod_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\nu(s_k)-\nu(s_{k-1})=0\}\geqslant(1-\varepsilon)^n,$$

где $0=s_0<s_1<\ldots<s_n=t$ и $s_k-s_{k-1}<\delta$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\nu(t_k)-\nu(t_{k-1})\neq 0\}<-\ln\mathsf{P}\{\nu(t)=0\}<\infty.$$

Необходимость условия теоремы доказана.

Для доказательства достаточности введем величину $\tau_1=\inf[s:\ \xi(s)\neq\xi(0)]$, $\tau_1$ — момент первого скачка (он может равняться $+\infty$). В силу сепарабельности процесса он не имеет разрывов второго рода (см. гл. IV, § 4, теорема 3). Поэтому

$$\mathsf{P}\{\tau_1>t\}=\lim_{\lambda_n\to 0}\mathsf{P}\{\xi(t_1)=\xi(t_0),\ \xi(t_2)=\xi(t_0),\ \ldots,\ \xi(t_n)=\xi(t_0)\},$$

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t,\quad \lambda_n=\max(t_{k+1}-t_k),$$

$$\mathsf{P}\{\tau_1>t\}=\lim_{\lambda_n\to 0}\prod_{k=1}^{n}(1-\mathsf{P}\{\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})\neq 0\}).$$

Из стохастической непрерывности процесса $\xi(t)$ вытекает, что $\max\limits_k\mathsf{P}\{\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)\neq 0\}\to 0$ при $\lambda_n\to 0$. Поэтому

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\mathsf{P}\{\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)\neq 0\})\sim$$

$$\sim\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})\neq 0\}\times\right.$$

$$\left.\times(1+O(\max_k\mathsf{P}\{\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})\neq 0\})\right\}\sim$$

$$\sim\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})\neq 0\}\right\}\geqslant\alpha>0.$$

Оценим теперь вероятность события: $\xi(s)$ на $[0, t]$ имеет $r$ скачков. Обозначим вероятность этого события $p_r(t)$. Тогда (точно так, как при оценке $p_0(t)$) имеем

$$p_r(t)=\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_r<n}\prod_{j=1}^{r}\mathsf{P}\{\xi(t_{i_j})-\xi(t_{i_j-1})\neq 0\}\times$$

$$\times\prod_{k\neq i_1,\ldots,i_r}\mathsf{P}\{\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})=0\},$$

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t.$$

Значит,

$$p_r(t) = \lim_{\lambda_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) = 0\} \times$$
$$\times \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \prod_{j=1}^{r} \mathsf{P}\{\xi(t_{i_j}) - \xi(t_{i_j - 1}) \neq 0\}$$

(мы воспользовались тем, что $\mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) = 0\} \to 1$ равномерно по $k$ при $\lambda_n \to 0$),

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) = 0\} = p_0(t) = \mathsf{P}\{\tau_1 > t\} > 0.$$

Далее,

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \prod_{j=1}^{r} \mathsf{P}\{\xi(t_{i_j}) - \xi(t_{i_j - 1}) \neq 0\} =$$
$$= \frac{1}{r!}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) \neq 0\}\right)^r +$$
$$+ O(\max_j \mathsf{P}\{\xi(t_j) - \xi(t_{j-1}) \neq 0\}) \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) \neq 0\}\right)^{r-1}.$$

Выше было доказано, что

$$p_0(t) = \exp\left\{-\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) \neq 0\}\right\}.$$

Если обозначить

$$\lambda(t) = -\ln p_0(t),$$

то

$$p_r(t) = \frac{\lambda^r(t)}{r!} e^{-\lambda(t)}$$

и

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_r(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r(t)}{r!} e^{-\lambda(t)} = 1.$$

Это и есть вероятность того, что процесс $\xi(s)$ имеет на отрезке $[0, t]$ конечное число скачков. ■

Следствие. *Если $\xi(s)$ — скачкообразный процесс с независимыми приращениями, то $\nu(t)$ — число скачков процесса $\xi(s)$ на $[0, t]$ — является стохастически непрерывным пуассоновским* *процессом с независимыми приращениями:*

$$\mathsf{P}\{\nu(t)=k\}=\frac{\lambda^k(t)}{k!}e^{-\lambda(t)},$$

*где* $\lambda(t)=\mathsf{M}\nu(t)$ — *непрерывная функция.*

Пусть $\tau_1$ — величина, введенная при доказательстве теоремы 1. Введем совместное распределение величин $\tau_1$ и $\xi(\tau_1)-\xi(0)$:

$$\Phi(ds,\ A)=\mathsf{P}\{\tau_1\in ds,\ \xi(\tau_1)-\xi(0)\in A\}.$$

Пусть, далее, $\pi(s,A)$ — условное распределение величины $\xi(\tau_1)-\xi(0)$ при условии, что $\tau_1=s$:

$$\int\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant\beta}\pi(s,\ A)\,\mathsf{P}\{\tau_1\in ds\}=\mathsf{P}\{\tau_1\in[\alpha,\ \beta],\ \xi(\tau_1)-\xi(0)\in A\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi(u)=\xi(0),\ u\leqslant\alpha,\ \xi(\tau^\alpha)-\xi(\alpha)\in A,\ \tau^\alpha<\beta\}.$$

Здесь $\tau^\alpha=\inf[s>\alpha:\ \xi(s)-\xi(\alpha)\neq 0]$. Поскольку $\mathsf{P}\{\tau_1<s\}=1-\exp\{-\lambda(s)\}$, то последнее равенство можно переписать так:

$$\int\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant\beta}\pi(s,\ A)\,e^{-\lambda(s)}\,d\lambda(s)=e^{-\lambda(\alpha)}\mathsf{P}\{\xi(\tau^\alpha)-\xi(\alpha)\in A,\ \tau^\alpha<\beta\},$$

откуда

$$\mathsf{P}\{\xi(\tau^\alpha)-\xi(\alpha)\in A,\ \tau^\alpha<\beta\}=\int\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant\beta}\pi(s,\ A)\,e^{-[\lambda(s)-\lambda(\alpha)]}\,d\lambda(s).$$

Последняя формула позволяет найти характеристическую функцию процесса с независимыми приращениями. Заметим, что при $z\in\mathscr{R}^n$

$$\mathsf{M}e^{i(z,\ \xi(\beta)-\xi(\alpha))}=\mathsf{M}\chi_{\{\tau^\alpha>\beta\}}+$$
$$+\mathsf{M}e^{i(z,\ \xi(\beta)-\xi(\alpha))}\chi_{\{\nu(\beta)-\nu(\alpha)=1\}}+O(\mathsf{P}\{\nu(\beta)-\nu(\alpha)>1\}).$$

Но при условии $\nu(\beta)-\nu(\alpha)=1$ имеем $\xi(\beta)-\xi(\alpha)=\xi(\tau^\alpha)-\xi(\alpha)$ и $\tau^\alpha<\beta$. Поэтому

$$\mathsf{M}\chi_{\{\tau^\alpha>\beta\}}+\mathsf{M}e^{i(z,\ \xi(\beta)-\xi(\alpha))}\chi_{\{\nu(\beta)-\nu(\alpha)=1\}}=$$
$$=1+\mathsf{M}\left[e^{i(z,\ \xi(\tau^\alpha)-\xi(\alpha))}-1\right]\chi_{\{\tau^\alpha<\beta\}}+$$
$$+O(\mathsf{P}\{\nu(\beta)-\nu(\alpha)>1\})=1+\int\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant\beta}\int(e^{i(z,\ x)}-1)\,\pi(s,\ dx)\times$$
$$\times e^{-[\lambda(s)-\lambda(\alpha)]}d\lambda(s)+O([\lambda(\beta)-\lambda(\alpha)]^2)=$$
$$=\exp\Big\{\int\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant\beta}\int(e^{i(z,\ x)}-1)\,\pi(s,\ dx)\,d\lambda(s)+O([\lambda(\beta)-\lambda(\alpha)]^2)\Big\}.$$

Поэтому при $u=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$

$$\mathbf{M}\exp\{i(z,\ \xi(t)-\xi(u))\}=$$
$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}<t<t_k}\int(e^{i(z,\ x)}-1)\,\pi(s,\ dx)\,d\lambda(s)+\right.$$
$$\left.+O\left(\sum_{k=1}^{n}[\lambda(t_k)-\lambda(t_{k-1})]^2\right)\right\}.$$

Переходя к пределу при $\max(t_k-t_{k-1})\to 0$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $\xi(t)$ — скачкообразный процесс с независимыми приращениями, то его приращение $\xi(t)-\xi(u)$ $(u<t)$ имеет характеристическую функцию*:

$$\mathbf{M}\exp\{i(z,\ \xi(t)-\xi(u))\}=\exp\left\{\int\limits_{u}^{t}\int\limits_{\mathscr{R}^m}(e^{i(z,\ x)}-1)\,\pi_s(dx)\,d\lambda(s)\right\},\quad (1)$$

*где $e^{-\lambda(s)}=\mathbf{P}\{\tau_1>s\}$ — распределение момента первого скачка, а $\pi_s(A)$ — условное распределение первого скачка при условии, что он произошел в момент $s$.*

Замечание. Из (1) вытекает, что характеристическая функция $\xi(t)-\xi(0)$ имеет вид

$$\exp\left\{\int\limits_{\mathscr{R}^m}(e^{i(z,\ x)}-1)\,\Pi_t(dx)\right\},\qquad (2)$$

где $\Pi_t(A)=\int\limits_0^t\pi_s(A)\,d\lambda(s)$ — конечная мера на $\mathscr{R}^m$. Покажем, что это условие и достаточно для того, чтобы процесс был скачкообразным. Действительно, если величина $\xi$ имеет безгранично делимое распределение с характеристической функцией

$$e^{-\Pi(\mathscr{R}^m)}\exp\left\{\Pi(\mathscr{R}^m)\int e^{i(z,\ x)}\frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathscr{R}^m)}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Pi^n(\mathscr{R}^m)}{n!}e^{-\Pi(\mathscr{R}^m)}(\varphi(z))^n,$$
$$\varphi(z)=\frac{1}{\Pi(\mathscr{R}^m)}\int e^{i(z,\ x)}\Pi(dx),$$

то $\xi$ имеет такое же распределение, как $\sum_1^{\nu}\eta_k$, где $\eta_k$ независимы и имеют характеристическую функцию $\varphi(z)$, а $\nu$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Pi(\mathscr{R}^m)$. Значит,

$$\mathbf{P}\{\xi\neq 0\}\leqslant\mathbf{P}\{\nu\neq 0\}\leqslant 1-e^{-\Pi(\mathscr{R}^m)}.$$

Поэтому, если $\xi(t)-\xi(0)$ имеет характеристическую функцию (2), то

$$\mathsf{P}\{\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})\neq 0\}\leqslant$$
$$\leqslant 1-\exp\{-\Pi_{t_k}(\mathscr{R}^m)+\Pi_{t_{k-1}}(\mathscr{R}^m)\}\leqslant \Pi_{t_k}(\mathscr{R}^m)-\Pi_{t_{k-1}}(\mathscr{R}^m).$$

Поэтому выполнено условие теоремы 1.

Рассмотрим теперь однородный скачкообразный процесс $\xi(t)$ (см. гл. I, § 3). Очевидно, что в этом случае и процесс $\nu(t)$ будет однородным. Поэтому функция $\lambda(t)$ имеет вид $\lambda t$, где $\lambda$ — некоторая постоянная. Далее, из (1) вытекает, что

$$\mathsf{M}\exp\{i(z,\ \xi(t+h)-\xi(t))\}=$$
$$=\exp\left\{\lambda\int_t^{t+h}\int_{\mathscr{R}^m}(e^{i(z,\ x)}-1)\,\pi_s(dx)\,ds\right\}=$$
$$=\exp\left\{\lambda\int_0^{h}\int_{\mathscr{R}^m}(e^{i(z,\ x)}-1)\,\pi_{s+t}(dx)\,ds\right\},$$

и последнее выражение не должно зависеть от $t$. Отсюда вытекает, что и $\pi_s(A)$ от $s$ не зависит. Таким образом, в этом случае величины $\xi(\tau_1)-\xi(0)$ и $\tau_1$ независимы.

Теорема 3. *Если* $\xi(t)$ $(\xi(0)=0)$ — *скачкообразный однородный процесс с независимыми приращениями, то процесс* $\xi_1(t)=\xi(t+\tau_1)-\xi(\tau_1)$ *также является однородным процессом с независимыми приращениями, не зависящим от* $\tau_1$ *и* $\eta_1=\xi(\tau_1)$.

*Доказательство.* Пусть $0<s_1<\ldots<s_k$, $z_0, z_1, \ldots, z_k\in\mathscr{R}^m$. Тогда

$$\mathsf{M}e^{-\lambda\tau_1+i(z_0,\ \eta_1)}\exp\left\{i\sum(z_j,\ \xi(s_j+\tau_1)-\xi(\tau_1))\right\}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\mathsf{M}\exp\left\{-\lambda\tau^{(h)}+i\left(z_0,\ \eta_1^{(h)}\right)+i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j+\tau^{(h)})-\xi(\tau^{(h)}))\right\},\tag{3}$$

где $\tau^{(h)}=nh$, если $\xi(lh)=0$ для $l=1,\ldots,n-1$, $\xi(nh)\neq 0$.

Далее,

$$\mathsf{M}\exp\left\{-\lambda\tau^{(h)}+i\left(z_0,\ \eta_1^{(h)}\right)+i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j+\tau^{(h)})-\xi(\tau^{(h)}))\right\}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{M}\exp\left\{-\lambda nh+i(z_0,\ \xi(nh))+\right.$$
$$\left.+\,i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j+nh)-\xi(nh))\right\}\chi_{\{\tau^{(h)}=nh\}}=$$

$$=\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j))\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{M}\exp\{-\lambda nh+$$
$$+i(z_0,\ \xi(nh))\}\,\chi_{\{\tau(h)=nh\}}=$$
$$=\mathsf{M}e^{-\lambda\tau(h)+i(z_0,\ \xi(nh))}\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j))\right\}.$$

Поэтому, переходя в правой части (3) к пределу, получим

$$\mathsf{M}e^{-\lambda\tau_1+i(z_0,\ \eta_1)}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j+\tau_1)-\xi(\tau_1))\right\}=$$
$$=\mathsf{M}e^{-\lambda\tau_1+i(z_0,\ \eta_1)}\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k}(z_j,\ \xi(s_j))\right\}. \blacksquare$$

Следствие. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательные скачки процесса $\xi(t)$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — промежутки между моментами, когда они произошли; тогда все эти случайные величины независимы в совокупности.*

Действительно, поскольку $\eta_2, \eta_3, \ldots, \tau_2, \tau_3, \ldots$ полностью определяются процессом $\xi_1(t)$, то $\eta_1$, $\tau_1$ от этих величин не зависят и, кроме того, независимы между собой.

Так как $\xi_1(t)$ точно так же выражается через $\eta_2, \eta_3, \ldots, \tau_2, \tau_3, \ldots$, то $\eta_2$, $\tau_2$ независимы и не зависят от $\eta_3, \ldots, \tau_3, \ldots$ Вводя последовательно процессы $\xi_n(t)=\xi_{n-1}(t+\tau_n)-\xi_{n-1}(\tau_n)$, убеждаемся, что для всех $n$ величины $\eta_n$ и $\tau_n$ независимы и не зависят от $\eta_{n+1}, \tau_{n+1}, \ldots$

Пусть $\nu(t)$ — число скачков процесса $\xi(s)$ на отрезке $[0, t]$. Так как

$$\nu(t)=m,\ \text{если}\ \sum_{1}^{m}\tau_k\leqslant t<\sum_{1}^{m+1}\tau_k\quad\left(\sum_{1}^{0}=0\right),$$

то процесс $\nu(t)$ выражается через $\tau_k$, $k=1, \ldots$, и, следовательно, не зависит от $\eta_k$, $k=1, \ldots$

Поэтому

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\nu(t)}\eta_k, \tag{4}$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин, а $\nu(t)$ — не зависящий от них однородный процесс Пуассона. Процесс вида (4) называется *обобщенным процессом Пуассона.*

Изучим распределение некоторых характеристик для такого процесса в $\mathscr{R}^1$. Пусть $a$ — параметр пуассоновского процесса, а $\Phi(x)$ — функция распределения величин $\eta_k$. Найдем функцию распределения максимума процесса на конечном отрезке. Обозначим

$$Q(t, x) = \mathsf{P}\{\sup_{s\leqslant t}\xi(s) < x\}.$$

Используя независимость величин $\tau_1, \eta_1$ и процесса $\xi_1(t)$, можем записать при $x > 0$

$$Q(t, x) = \mathsf{P}\{\tau_1 > t\} + \mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s) < x,\ \tau_1 \leqslant t\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\tau_1 > t\} + \mathsf{P}\{\tau_1 \leqslant t,\ \eta_1 < x,\ \sup_{0<s<t-\tau_1}\xi_1(s) < x - \eta_1\} =$$
$$= e^{-at} + \int_0^t\int_{-\infty}^x \mathsf{P}\{\tau_1 \in du,\ \eta_1 \in dy\}\,\mathsf{P}\{\sup_{0<s<t-u}\xi_1(s) < x - y\} =$$
$$= e^{-at} + \int_0^t e^{-au}\,du\int_{-\infty}^x d\Phi(y)\,Q(t-u, x-y).$$

При $x \leqslant 0$ $Q(t, x) = 0$. Поэтому, полагая

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t, x)\,dt = q(\lambda, x),$$

получим

$$q(\lambda, x) = \frac{1}{a+\lambda} + \frac{a}{a+\lambda}\int q(\lambda, x-y)\,d\Phi(y) \tag{5}$$

($q(\lambda, x) = 0$ для $x \leqslant 0$). Соотношение (5) выполняется для всех $x > 0$. Значит, полагая $\varepsilon(x) = 1$ при $x > 0$, $\varepsilon(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, (5) можно переписать в виде

$$\frac{\varepsilon(x)}{a+\lambda} = \varepsilon(x)\int q(\lambda, x-y)\,d\left[\varepsilon(y) - \frac{a}{a+\lambda}\Phi(y)\right]. \tag{6}$$

Покажем, как можно решить уравнение

$$g(x) = \varepsilon(x)\int q(x-y)\,d\left[\varepsilon(y) - \frac{a}{a+\lambda}\Phi(y)\right], \tag{7}$$
$$q(x) = 0,\ x \leqslant 0,$$

где $g(x)$ — некоторая ограниченная функция, $g(x) = 0$ при $x \leqslant 0$. Пусть $v_1(t)$ — некоторая функция ограниченной вариации, для которой $v_1(t) = v_1(0)$ при $t > 0$. Из (7) находим

$$\int g(x-t)\,dv_1(t) =$$
$$= \int\varepsilon(x-t)\int q(x-t-y)\,d\left[\varepsilon(y) - \frac{a}{a+\lambda}\Phi(y)\right]dv_1(t).$$

Если $x > 0$, то в выражении справа под знаком интеграла можно $\varepsilon(x-t)$ заменить на $\varepsilon(x)$, так как интегрирование ведется на самом деле лишь по отрицательным $t$. Поэтому

$$\varepsilon(x)\int g(x-t)\,dv_1(t)=$$
$$=\varepsilon(x)\iint q(x-t-y)\,d\left[\varepsilon(y)-\frac{a}{a+\lambda}\Phi(y)\right]dv_1(t)=$$
$$=\varepsilon(x)\int q(x-y)\,dv_2(y),$$

где функция ограниченной вариации $v_2(y)$ определяется из соотношения

$$v_2(y)=\int v_1(y-t)\,d\left[\varepsilon(t)-\frac{a}{a+\lambda}\Phi(t)\right]. \qquad (8)$$

Пусть теперь $v_2(y)$ таково, что $v_2(y)=0$ при $y\leqslant 0$. Тогда

$$\varepsilon(x)\int q(x-y)\,dv_2(y)=\int q(x-y)\,dv_2(y),$$

так как при $x\leqslant 0$

$$\int q(x-y)\,dv_2(y)=\int_0^\infty q(x-y)\,dv_2(y)=0.$$

Значит, в том случае, когда существуют функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ с указанными свойствами, из (7) получаем следующее соотношение:

$$\varepsilon(x)\int g(x-y)\,dv_1(y)=\int q(x-y)\,dv_2(y). \qquad (9)$$

Последнее уравнение относительно $q$ является уравнением типа свертки и может быть решено с помощью преобразования Фурье. Предложенный здесь метод решения уравнения (7) (такие уравнения называются уравнениями типа свертки на полуоси) принадлежит Н. Винеру.

Покажем, как найти функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ с требуемыми свойствами. Обозначим

$$\tilde v_k(z)=\int e^{izx}\,dv_k(x),\quad \varphi(z)=\int e^{izx}\,d\Phi(x).$$

Применяя к (8) преобразование Фурье, получим

$$\tilde v_2(z)=\tilde v_1(z)\left[1-\frac{a}{a+\lambda}\varphi(z)\right]. \qquad (10)$$

Но

$$1-\frac{a}{a+\lambda}\varphi(z)=\exp\left\{\ln\left(1-\frac{a}{a+\lambda}\varphi(z)\right)\right\}=$$
$$=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\varphi^n(z)\right\}.$$

Имеем $\varphi^n(z)=\int e^{izx}\,d\Phi_n(x)$, где $\Phi_n(x)$ — функция распределения $\eta_1+\ldots+\eta_n$.

Пусть

$$\tilde{v}_1(z)=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_{-\infty}^{+0}e^{izx}d\,\Phi_n(x)\right\},\tag{11}$$

$$\tilde{v}_2(z)=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_{+0}^{\infty}e^{izx}\,d\Phi_n(x)\right\}.\tag{12}$$

Соотношение (10) в этом случае выполнено. Пусть

$$H_-(x)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\Phi_n(x), & x<0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\Phi_n(0), & x>0.\end{cases}$$

Тогда

$$\tilde{v}_1(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\int e^{izx}\,dH_-(x)\right]^k=$$
$$=\int e^{izx}d\left[\varepsilon(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}H_-^{(k)}(x)\right],$$

где $H_-^{(1)}(x)=H_-(x)$, $H_-^{(k)}(x)=\int H_-^{(k-1)}(x-y)\,dH_-(y)$. Очевидно, что функция

$$v_1(x)=\varepsilon(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}H_-^{(k)}(x)$$

имеет ограниченную вариацию и $v_1(x)=v_1(0)$ при $x\geqslant 0$. Аналогично устанавливаем, что

$$\tilde{v}_2(z)=\int e^{izx}d\left[\varepsilon(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}H_+^{(k)}(x)\right],$$

где

$$H_+(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n[\Phi_n(x)-\Phi_n(0)], & x>0,\end{cases}$$

$$H_+^{(1)}(x)=H_+(x),\qquad H_+^{(k)}(x)=\int H_+^{(k-1)}(x-y)\,dH_+(y).$$

Функция

$$v_2(x) = \varepsilon(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} H_+^{(k)}(x)$$

также имеет ограниченную вариацию и $v_2(x) = 0$ при $x \leqslant 0$.

Перейдем к определению функции $q(\lambda, x)$. Из (6), (7) и (9) вытекает соотношение

$$\varepsilon(x) \int \frac{\varepsilon(x-y)}{a+\lambda} dv_1(y) = \int q(\lambda, x-y)\, dv_2(y). \tag{13}$$

Поскольку при $x > 0$ левая часть совпадает с $\frac{v_1(0)}{a+\lambda}$, то (13) эквивалентно равенству

$$\frac{\varepsilon(x)\, v_1(0)}{a+\lambda} = \int q(\lambda, x-y)\, dv_2(y).$$

Переходя к преобразованию Фурье, находим

$$\frac{v_1(0)}{a+\lambda} = \tilde{v}_2(z) \int e^{izx}\, dq(\lambda, x).$$

Учитывая, что $v_1(0) = v_1(+\infty) = \tilde{v}_1(0)$,

$$\frac{1}{a+\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{a+\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \exp\left\{\ln\left(1 - \frac{a}{a+\lambda}\right)\right\} = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\right\},$$

находим

$$\int e^{izx}\, dq(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\tilde{v}_1(0)}{\tilde{v}_2(z)} \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n \left[\int_{-\infty}^{+0} d\Phi_n(x) + \int_{+0}^{\infty} e^{izx}\, d\Phi_n(x) - 1\right]\right\}.$$

Окончательно

$$\int e^{izx}\, dq(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1)\, d\Phi_n(x)\right\}. \tag{14}$$

Используя представление (4), можем записать

$$\mathsf{P}\{\xi(t) < x\} = \varepsilon(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} \Phi_n(x). \tag{15}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{a^n t^{n-1}}{n!}\,e^{-at}\,dt.$$

Поэтому, обозначая $F_t(x)=\mathsf{P}\{\xi(t)<x\}$, будем иметь (в силу того, что $\int\limits_0^\infty (e^{izx}-1)\,d\varepsilon(x)=0$)

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t}\int\limits_0^\infty (e^{izx}-1)\,dF_t(x)\,dt=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{a^n t^{n-1}}{n!}\,e^{-at}\int\limits_0^\infty (e^{izx}-1)\,d\Phi_n(x)\,dt=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int\limits_0^\infty (e^{izx}-1)\,d\Phi_n(x).$$

Следовательно, мы можем выразить правую часть (14) непосредственно через распределение $\xi(t)$.

Теорема 4. *Пусть $\xi(t)$ — обобщенный процесс Пуассона, $F_t(x)=\mathsf{P}\{\xi(t)<x\}$. Тогда для функции*

$$\tilde q(\lambda,z)=\int\limits_0^\infty\int e^{-\lambda t+izx}\,d\mathsf{P}\{\sup_{s\leqslant t}\xi(s)<x\}\,dt$$

*имеет место представление*

$$\tilde q(\lambda,z)=\frac{1}{\lambda}\exp\left\{\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\lambda t}}{t}\int\limits_0^\infty (e^{izx}-1)\,dF_t(x)\,dt\right\}. \tag{16}$$

Следствие. *Для того чтобы*

$$\mathsf{P}\{\sup_{t\geqslant 0}\xi(t)<+\infty\}=1,$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^\infty\frac{1}{t}\,\mathsf{P}\{\xi(t)>0\}\,dt<\infty. \tag{17}$$

*Если это условие выполнено, то распределение величины $\xi_+=\sup_{t\geqslant 0}\xi(t)$ определяется характеристической функцией:*

$$\mathsf{M}e^{iz\xi_+}=\exp\left\{\int\limits_0^\infty\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty (e^{izx}-1)\,dF_t(x)\right\}. \tag{18}$$

Действительно,

$$\mathsf{P}\{\sup_{t\geqslant 0}\xi(t)<+\infty\}=\mathsf{P}\left\{\sup_{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k=+\infty\right\}.$$

А из теоремы 2 § 1 вытекает, что последняя вероятность равна 1 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\Phi_n(0))<\infty.$$

Воспользовавшись соотношением (15), убеждаемся, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\Phi_n(0))=\int_0^{\infty}\frac{1}{t}(1-F_t(0))\,dt.$$

Формула (18) может быть получена из (16) предельным переходом, законность которого следует конечности меры

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\int_A dF_t(x)\,dt$$

на $[0,\infty)$, вытекающей из (17).

Пусть $x\geqslant 0$. Обозначим

$$\tau^x=\inf[t\colon\ \xi(t)>x],\qquad \gamma_x=\xi(\tau^x+0)-\xi(\tau^x);$$

$\tau^x$ называется *моментом первого перескока через уровень* $x$, $\gamma_x$ — *величиной первого перескока через уровень* $x$. Если $\sup\limits_{s<\infty}\xi(s)\leqslant x$, считаем $\tau^x=+\infty$; $\gamma_x$ в этом случае не определено.

Найдем совместное распределение величин $\tau^x$ и $\gamma_x$. Обозначим

$$N(t,\ y,\ x)=\mathsf{P}\{\tau^x<t,\ \gamma_x\geqslant y\}.$$

Очевидно, если $\eta_1>x$, $\tau^x=\tau_1$, $\gamma_x=\eta_1-x$. Если $\eta_1\leqslant x$, то

$$\tau^x=\hat{\tau}^{x-\xi_1}+\tau_1,\qquad \gamma_x=\hat{\gamma}_{x-\xi_1},$$

где $\hat{\tau}^y$, $\hat{\gamma}_y$ — соответственно момент и величина перескока для процесса $\xi_1(t)=\xi(t+\tau_1)-\xi(\tau_1)$. Используя независимость $\xi_1(t)$ от $\tau_1$ и $\eta_1$, получаем следующее уравнение:

$$N(t,\ y,\ x)=\mathsf{P}\{\tau_1<t\}\,\mathsf{P}\{\eta_1\geqslant x+y\}+\\ +\int_0^t\int_{-\infty}^{x}ae^{-as}N(t-s,\ y,\ x-u)\,d\Phi(u)\,ds. \qquad (19)$$

Пусть

$$n(\lambda,\ y,\ x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_tN(t,\ y,\ x).$$

Применяя к (19) преобразование Лапласа, находим

$$n(\lambda,\ y,\ x)=\frac{a}{a+\lambda}[1-\Phi(x+y)]+\frac{a}{a+\lambda}\int_{-\infty}^{x} n(\lambda,\ y,\ x-u)\,d\Phi(u). \tag{20}$$

Это уравнение можно рассматривать при фиксированном $y$. Будем считать, что $n(\lambda,\ y,\ x)=0$ для $x<0$. Тогда его можно переписать так:

$$\varepsilon(x)\frac{a}{a+\lambda}[1-\Phi(x+y)]=\\ =\varepsilon(x)\int_{-\infty}^{\infty} n(\lambda,\ y,\ x-u)\,d\left[\varepsilon(u)-\frac{a}{a+\lambda}\Phi(u)\right]. \tag{21}$$

Это уравнение вида (7). Поэтому для него справедливо соотношение (9):

$$\varepsilon(x)\int\varepsilon(x-u)\frac{a}{a+\lambda}[1-\Phi(x-u+y)]\,dv_1(u)=\\ =\int n(\lambda,\ y,\ x-u)\,dv_2(u).$$

Умножая это соотношение на $e^{-\mu x}$ и интегрируя по $x$ от 0 до $\infty$, получаем

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\varepsilon(x-u)\frac{a}{a+\lambda}[1-\Phi(x-u+y)]\,e^{-\mu x}dv_1(u)\,dx=\\ =\int_0^\infty e^{-\mu u}dv_2(u)\int_0^\infty n(\lambda,\ y,\ x)\,e^{-\mu x}\,dx.$$

Из (12) вытекает, что

$$\int_0^\infty e^{-\mu u}dv_2(u)=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_0^\infty e^{-\mu u}\,d\Phi_n(u)\right\}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty n(\lambda,\ y,\ x)\,e^{-\mu x}\,dx=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_0^\infty e^{-\mu u}\,d\Phi_n(u)\right\}\times\\ \times\int_0^\infty e^{-\mu x}\int_0^\infty\frac{a}{a+\lambda}[1-\Phi(x-u+y)]\,dv_1(u)\,dx.$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что преобразование Лапласа свертки двух функций есть произведение преобразований Лапласа, и равенством

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_0^{\infty}(e^{-\mu u}-1)\,d\Phi_n(u)\right\}=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\mu x}dq(\lambda,\ x),$$

которое вытекает из (14); находим

$$n(\lambda,\ y,\ x)=\lambda\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_0^{\infty}d\Phi_n(u)\right\}\times$$
$$\times\iint\frac{a}{a+\lambda}\left[1-\Phi(x-z-u+y)\right]dv_1(u)\,dq(\lambda,\ z). \tag{22}$$

Пусть $q_-(\lambda,\ x)$ определяется равенством

$$\int e^{izx}\,dq_-(\lambda,\ x)=\frac{1}{\lambda}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_{-\infty}^{0}(e^{izx}-1)\,d\Phi_n(x)\right\}. \tag{23}$$

Легко убедиться, рассматривая процесс $-\xi(t)$, что

$$q_-(\lambda,\ x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathsf{P}\left\{\inf_{s\leqslant t}\xi(s)<x\right\}dt. \tag{24}$$

Функция $q_-(\lambda,\ x)$ выражается через $v_1(x)$ в силу (11) следующим образом:

$$q_-(\lambda,\ x)=\frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\int_{-\infty}^{0}d\Phi_n(x)\right\}v_1(x).$$

Подставляя выражение $v_1(x)$ через $q_-(\lambda,\ x)$ в (22) и воспользовавшись равенством

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n\right\}=\exp\left\{-\ln\left(1-\frac{a}{a+\lambda}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{1-\dfrac{a}{a+\lambda}}=\frac{a+\lambda}{\lambda},$$

находим окончательно

$$n(\lambda,\ y,\ x)=\lambda a\iint\left[1-\Phi(x+y-u-z)\right]dq_-(\lambda,\ z)\,dq(\lambda,\ u). \tag{25}$$

Используя еще раз то обстоятельство, что произведение преобразований Лапласа есть преобразование Лапласа свертки, можем обратить (25). При этом заметим, что

$$\lambda q_-(\lambda, z) = -\int_0^\infty Q_-(t, x)\, de^{-\lambda t} =$$
$$= Q_-(0, x) + \int_0^\infty Q_-(t, x)\, e^{-\lambda t}\, dt = \varepsilon(x) + \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t Q_-(t, x),$$

где

$$Q_-(t, x) = \mathsf{P}\{\inf_{s \leqslant t} \xi(s) < x\}.$$

Поэтому $\int \lambda q_-(\lambda, z-u)\, dq(\lambda, u)$ является преобразованием Лапласа функции $Q(t, z) + \int_0^t \int Q_-(t-s, z-u)\, d_u d_s Q(s, u)$. Значит,

$$N(t, y, x) = a\int [1 - \Phi(x+y-z)]\, d_z Q(t, z) +$$
$$+ a\int [1 - \Phi(x+y-z)]\, d_z \int_0^t \int Q_-(t-s, z-u)\, d_u d_s Q(s, u). \qquad (26)$$

## § 3. Непрерывные процессы. Винеровский процесс

В этом параграфе рассматривается непрерывный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$, определенный на некотором отрезке $[0, T]$ и принимающий значения из $\mathscr{R}^m$. Будет доказано, что в этом случае приращения процесса имеют гауссовы распределения. Будем обозначать через $\mathscr{L}_+(\mathscr{R}^m)$ множество линейных неотрицательных симметричных операторов в $\mathscr{R}^m$.

Теорема 1. *Существуют такие непрерывные функции $a(t)$ и $B(t)$ со значениями в $\mathscr{R}^m$ и $\mathscr{L}_+(\mathscr{R}^m)$ соответственно, при этом $B(t)$ не убывает ($B(t_2) - B(t_1) \in \mathscr{L}_+(\mathscr{R}^m)$ при $t_1 < t_2$), что характеристическая функция приращения $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ $(t_1 < t_2)$ имеет вид*

$$\mathsf{M}\exp\{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\} =$$
$$= \exp\left\{ i(z, a(t_2) - a(t_1)) - \frac{1}{2}([B(t_2) - B(t_1)]z, z)\right\}. \qquad (1)$$

*Доказательство.* Для того чтобы установить (1), достаточно показать, что $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ имеет нормальное распределение. При этом можно предполагать, что $\xi(0) = 0$, $t_1 = 0$ и процесс принимает значения в $\mathscr{R}^1$ (вместо процесса $\xi(t)$ можно рассматривать процесс $(\xi(t), z)$). Возьмем последовательность разбиений $0 = t_{n0} < \ldots < t_{nn} = t$ такую, что $\max_k (t_{nk} - t_{nk-1}) \to 0$. Из непрерывности процесса вытекает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{|\xi(t_{nk}) - \xi(t_{n\,k-1})| > \varepsilon\} = 0 \tag{2}$$

(см. теорему 4, гл. IV, § 5). Из (2) вытекает существование такой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{|\xi(t_{nk}) - \xi(t_{n\,k-1})| > \varepsilon_n\} = 0. \tag{3}$$

Положим

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \xi(t_{nk}) - \xi(t_{n\,k-1}), & \text{если } |\xi(t_{nk}) - \xi(t_{n\,k-1})| \leqslant \varepsilon_n, \\ 0, & \text{если } |\xi(t_{nk}) - \xi(t_{n\,k-1})| > \varepsilon_n. \end{cases}$$

Тогда $\mathsf{P}\left\{\xi(t) \neq \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{|\xi(t_{nk}) - \xi(t_{n\,k-1})| > \varepsilon_n\}\Bigg\}$ и, значит, $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ сходится по вероятности к $\xi(t)$.

Из центральной предельной теоремы для схемы серий вытекает, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} - \mathsf{M}\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}\right) \Big/ \mathsf{D}\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$$

имеет предельное невырожденное нормальное распределение, если только $\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{D}\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} > 0$. Но тогда и величина

$$\left(\xi(t) - \mathsf{M}\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}\right) \Big/ \mathsf{D}\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$$

будет иметь предельное нормальное невырожденное распределение, что возможно лишь в том случае, когда $\xi(t)$ имеет нормальное распределение. Если же для некоторой последовательности $n_r$

$$\lim_{r\to\infty} \mathsf{D}\sum_{k=1}^{n_r} \xi_{n_r k} \to 0,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n_r} \xi_{n_r k} - \mathsf{M}\sum_{k=1}^{n_r} \xi_{n_r k} \to 0$$

по вероятности, поэтому и

$$\xi(t) - \mathsf{M}\sum_{k=1}^{n_r} \xi_{n_r k} \to 0$$

по вероятности, что возможно лишь в том случае, когда $\xi(t)$ с вероятностью 1 постоянна. ■

Если $\xi(t)$ — однородный непрерывный процесс, то существуют $a \in \mathscr{R}^m$ и $B \in \mathscr{L}_+(\mathscr{R}^m)$ такие, что функции $a(t)$ и $B(t)$, входящие в формулу (1), имеют вид

$$a(t) = ta, \quad B(t) = tB.$$

Однородный процесс $w(t)$, для которого $a = 0$, $B = I$ ($I$ — единичный оператор), называется *винеровским процессом*. Если $B^{1/2}$ обозначает (неотрицательный) квадратный корень из неотрицательного оператора $B$, то процесс

$$\xi(t) = ta + B^{1/2}w(t),$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, будет однородным гауссовым процессом с независимыми приращениями, для которого

$$\mathsf{M}\exp\{i(z, \xi(t))\} = \exp\left\{t(z, a) - \frac{1}{2}t(Bz, z)\right\}.$$

Через винеровский процесс можно выразить и процесс с характеристической функцией (1), если только функция $B(t)$ дифференцируема. Для такого представления понадобятся стохастические интегралы по винеровскому процессу вида

$$\int_0^T Z(t)\,dw(t), \tag{4}$$

где $Z(t)$ — некоторая операторная (неслучайная) функция. Выберем в $\mathscr{R}^m$ некоторый ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Положим $w_k(t) = (e_k, w(t))$. Так как

$$\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^m \lambda_k w_k(t)\right\} = \mathsf{M}\exp\left\{i\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k e_k,\ w(t)\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k e_k,\ \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \lambda_k^2\right\},$$

то процессы $w_k(t)$ — независимые между собой одномерные винеровские процессы. Каждый из этих процессов является, очевидно, процессом с ортогональными приращениями: при $t_1 < t_2 < t_3$

$$\mathsf{M}(w_k(t_3) - w_k(t_2))(w_k(t_2) - w_k(t_1)) =$$
$$= \mathsf{M}(w_k(t_3) - w_k(t_2))\,\mathsf{M}(w_k(t_2) - w_k(t_1)) = 0,$$

кроме того, $\mathsf{M}|w_k(t_2) - w_k(t_1)|^2 = t_2 - t_1$.

Поэтому определены интегралы

$$\int_0^T f(s)\,dw_k(s)$$

для всех $f \in \mathscr{L}_2[0, T]$ (см. гл. V, § 3).

Интеграл (4) определяется с помощью соотношения

$$\int_0^T Z(t)\,dw(t) = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \int_0^T (Z(t)e_j, e_k)\,dw_j(t) \right) e_k. \tag{5}$$

Этот интеграл определен для всех измеримых операторных функций $Z(t)$, для которых

$$\int_0^T \operatorname{Sp} Z(t) Z^*(t)\,dt < \infty$$

(здесь $Z^*$ — оператор, сопряженный $Z$, $\operatorname{Sp} ZZ^*$ — след оператора $ZZ^*$).

Легко убедиться, используя (5) и независимость процессов $w_j(t)$, что

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{M} \int_0^T Z(t)\,dw(t) = 0,\\ &\mathsf{M} \left( \int_0^T Z_1(t)\,dw(t),\ \int_0^T Z_2(t)\,dw(t) \right) = \int_0^T \operatorname{Sp} Z_1(t) Z_2^*(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\mathsf{M} \left( \int_0^T Z_1(t)\,dw(t),\ z \right)^2 = \int_0^T Z_1(t) Z_1^*(t) z,\ z)\,dt. \tag{7}$$

Кроме того, интеграл (5) имеет гауссово распределение (поскольку он является пределом интегралов от простых функций, которые линейно выражаются через приращения винеровского процесса и поэтому имеют гауссово распределение).

Пусть теперь $C(t) = \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^{1/2}$. Тогда процесс

$$\xi(t) = a(t) + \int_0^t C(s)\,dw(s)$$

будет гауссовским; в силу (6), (7)

$$\mathsf{M}\xi(t) = a(t),$$

$$\mathsf{M}(\xi(t) - a(t), z)^2 = \mathsf{M}\left(\int_0^t C(s)\,dw(s), z\right)^2 =$$

$$= \int_0^t \left(\left(\frac{d}{ds}B(s)\right)^{1/2}\left(\frac{d}{ds}B(s)\right)^{1/2} z, z\right) ds =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{d}{ds}B(s) z, z\right) = (B(t) z, z) - (B(0) z, z).$$

Следовательно, приращение процесса $\xi(t)$ имеет характеристическую функцию (1).

Заметим, что всегда можно указать строго возрастающую функцию $\lambda(t)$ такую, чтобы $B(t)$ было абсолютно непрерывно относительно $\lambda(t)$. В качестве такой функции можно, например, взять $\lambda(t) = t + \operatorname{Sp}[B(t) - B(0)]$. Так как для неотрицательного оператора $B$ выполнено неравенство $\|B\| \leqslant \operatorname{Sp} B$, то при $t_1 < t_2$

$$\|B(t_2) - B(t_1)\| \leqslant \operatorname{Sp}[B(t_2) - B(t_1)] \leqslant \lambda(t_2) - \lambda(t_1). \tag{8}$$

Если теперь $\varphi(t)$ — функция, обратная к $\lambda(t)$: $\lambda(\varphi(t)) = t$, то процесс $\hat{\xi}(t) = \xi(\varphi(t))$, будет иметь характеристическую функцию приращения

$$\mathsf{M}\exp\{i(z, \hat{\xi}(t_2) - \hat{\xi}(t_1))\} =$$
$$= \exp\left\{i(z, \hat{a}(t_2) - \hat{a}(t_1)) - \frac{1}{2}((\widehat{B}(t_2) - \widehat{B}(t_1)) z, z)\right\},$$

где $\hat{a}(t) = a(\varphi(t))$, $\widehat{B}(t) = B(\varphi(t))$, при этом в силу (8)

$$\|\widehat{B}(t_2) - \widehat{B}(t_1)\| \leqslant \lambda(\varphi(t_2)) - \lambda(\varphi(t_1)) = t_2 - t_1,$$

т. е. $\hat{B}(t)$ уже абсолютно непрерывно. Так как $\xi(t) = \hat{\xi}(\lambda(t))$, то можем утверждать, что всякий непрерывный процесс с независимыми приращениями может быть получен из суммы непрерывной неслучайной функции и стохастического интеграла вида (5) с помощью непрерывной монотонной (неслучайной) замены времени.

Винеровский процесс называется также *процессом броуновского движения*. Это название объясняется следующим обстоятельством. Рассмотрим движение достаточно малой частицы, взвешенной в жидкости, под влиянием соударений с находящимися в хаотическом тепловом движении молекулами жидкости. В физике это явление носит название «броуновского движения».

При вероятностном изучении этого явления естественно считать скорости молекул, с которыми соударяется частица, случайными, причем для однородной жидкости нужно считать, что распределение скорости не зависит от положения молекулы (оно может зависеть лишь от температуры, а она всюду одинакова). Если предположить, далее, что скорости различных молекул независимы между собой, пренебречь инерцией частицы, то тогда смещение частицы из любого положения за некоторый промежуток времени не будет зависеть от положения частицы и ее предыдущего движения. Следовательно, процесс $\xi(t)$ в $\mathscr{R}^3$, описывающий положение частицы в момент времени $t$, будет процессом с независимыми приращениями. Кроме того, из физических соображений очевидно, что он будет непрерывным и однородным по времени, если физическое состояние жидкости не меняется со временем. Но всякий непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями будет гауссовым. Будем считать, что в начальный момент времени положение частицы совпадало с началом координат, т. е. $\xi(0)=0$. Пусть $\mathsf{M}\xi(t)=a(t)$, $\mathsf{D}\,(\xi(t),z)=(Bz,z)$, $a(t)$ — вектор из $\mathscr{R}^3$, $B$ — симметричный оператор в $\mathscr{R}^3$. В случае однородной жидкости при отсутствии течений процесс должен быть изотропным (поскольку распределение проекций скорости молекулы жидкости на произвольное направление не зависит от этого направления), т. е. $(a,z)$ и $(Bz,z)$ при $|z|=1$ не должны зависеть от $z$. Это возможно в том случае, когда $(a,z)=0$, $(Bz,z)=c(z,z)$. Так, используя самые общие соображения, мы пришли к определенному выше процессу броуновского движения, рассматривая физическое явление, носящее то же название.

Изучим подробнее одномерный винеровский процесс.

Пусть $a\neq 0$ — некоторое число. Обозначим через $\tau_a$ такой момент времени, что $w(t)/a\leqslant 1$ при $t\leqslant\tau_a$, а при любом $\delta>0$ $\sup\limits_{\tau_a\leqslant t\leqslant\tau_a+\delta}\dfrac{w(t)}{a}>1$. Если $w(t)/a\leqslant 1$ для всех $t$, то полагаем $\tau_a=+\infty$. $\tau_a$ будем называть моментом первого пересечения процессом $w(t)$ уровня $a$.

Пусть теперь $\tau'_a$ — такой момент времени, что $w(t)/a<1$ при $t<\tau'_a$, $w(\tau'_a)=a$. $\tau'_a$ будем называть моментом первого достижения процессом $w(t)$ уровня $a$. Очевидно, что $\tau'_a\leqslant\tau_a$. Оказывается справедлива

Лемма 1. $\mathsf{P}\{\tau'_a=\tau_a\}=1$.

*Доказательство.* Ввиду симметрии процесса $w(t)$ ($-w(t)$ имеет такие же распределения) считаем, что $a>0$. Событие

$\{\tau'_a < \tau_a\}$ влечет хотя бы одно из событий

$$\{\max_{0\leqslant s\leqslant \frac{r}{m}} w(s)=a\},\quad r=1,2,\ \ldots,\ m=1,2,\ \ldots,\ r<mt.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что при $a>0$

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)=a\}=0,$$

каково бы ни было $t$; легко видеть, что при $t_1<t$

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)=a\}\leqslant \mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t_1} w(s)=a\}+$$
$$+\int_{-\infty}^{a}\mathsf{P}\{w(t_1)\in dx\}\,\mathsf{P}\{\max_{t_1\leqslant s\leqslant t} w(s)-w(t_1)=a-x\}.$$

Но $\mathsf{P}\{\max_{t_1\leqslant s\leqslant t} w(s)-w(t_1)=z\}$ может быть отлично от нуля не более чем для счетного числа различных $z$, т. е. $\mathsf{P}\{\max_{t_1\leqslant s\leqslant t} w(s)-$ $-w(t_1)=a-x\}=0$ почти для всех (по мере Лебега) $x$. Значит,

$$\int_{-\infty}^{a}\mathsf{P}\{w(t_1)\in dx\}\,\mathsf{P}\{\max_{t_1\leqslant s\leqslant t} w(s)-w(t_1)=a-x\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\int_{-\infty}^{a}\mathsf{P}\{\max_{t_1\leqslant s\leqslant t} w(s)-w(t_1)=a-x\}\,e^{-\frac{x^2}{2t_1}}\,dx=0,$$

так как подынтегральная функция равна нулю почти всюду. Таким образом,

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)=a\}\leqslant \mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t_1} w(s)=a\},$$

т. е. $\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)=a\}$ не убывает при $t\downarrow 0$, и в то же время, ввиду непрерывности $w(t)$, $\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)>\varepsilon\}\to 0$ при $\varepsilon>0$, $t\to 0$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)=a\}\leqslant \lim_{t_1\downarrow 0}\mathsf{P}\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)>\frac{a}{2}\right\}=0.\ \blacksquare$$

Эта лемма позволяет нам в дальнейшем не различать время первого достижения и время первого пересечения уровня $a$. Мы будем и то и другое обозначать $\tau_a$.

Для изучения некоторых характеристик процесса $w(t)$ будет использоваться следующая

Лемма 2. *Пусть $w(t)$ — процесс броуновского движения, $a\neq 0$ и $\tau_a$ — момент первого пересечения процессом $w(t)$*

*уровня $a$. Определим процесс $w_1(t)$ соотношениями:* $w_1(t) = w(t)$ *при* $t < \tau_a$, $w_1(t) = 2a - w(t)$ *при* $t \geqslant \tau_a$. *Тогда процесс* $w_1(t)$ *также будет процессом броуновского движения.*

*Доказательство.* Положим $w_{nk} = w\left(\frac{k}{n}\right) - w\left(\frac{k-1}{n}\right)$, $w^{(n)}(t) = \sum\limits_{k \leqslant nt} w_{nk}$, $w_1^{(n)}(t) = \sum\limits_{k \leqslant nt} (-1)^{\varepsilon_{nk}} w_{nk}$, где $\varepsilon_{nk} = 0$, если $\sup\limits_{j \leqslant k-1} \dfrac{w^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right)}{a} \leqslant 1$, и $\varepsilon_{nk} = 1$, если $\sup\limits_{j \leqslant k-1} \dfrac{w^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right)}{a} > 1$. Заметим, что величины $(-1)^{\varepsilon_{nk}} w_{nk}$ при $k = 1, 2, \ldots$ независимы между собой и одинаково распределены, причем распределения их совпадают с распределениями величин $w_{nk}$. Это вытекает из того, что $w_{nk}$ и $-w_{nk}$ одинаково распределены, а $w_{nk}$ не зависит от $\varepsilon_{nk}, w_{n1}, \ldots, w_{nk-1}$. Следовательно, $w_{nk}(-1)^{\varepsilon_{nk}}$ имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $1/n$. Поэтому конечномерные распределения процессов $w^{(n)}(t)$ и $w_1^{(n)}(t)$ совпадают. Доказательство леммы получается, если заметить, что $w^{(n)}(t) \to w(t)$, $w_1^{(n)}(t) \to w_1(t)$ с вероятностью 1 ввиду непрерывности процесса броуновского движения.

Используем доказанную лемму для нахождения распределения таких характеристик процесса, как $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} w(t)$, $\min\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} w(t)$, $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |w(t)|$.

Теорема 2. *При* $a > 0$

$$\mathsf{P}\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} w(t) > a,\ w(T) \in [c, d]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{c \vee a}^{d \vee a} e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{(2a-d) \vee a}^{(2a-c) \vee a} e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx, \tag{9}$$

*где* $a \vee b = \max[a, b]$.

*Доказательство.* Воспользуемся соотношением

$$\mathsf{P}\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} w(t) > a,\ w(T) \in [c, d]\} = \mathsf{P}\{w(T) \in [c, d] \cap (a, \infty)\} + \mathsf{P}\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} w(t) > a,\ w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\}$$

(справедливость его вытекает из того, что событие $\{w(T) \in [c, d] \cap (a, \infty)\}$ влечет событие $\{\max\limits_{a \leqslant t \leqslant T} w(t) > a\}$). Найдем теперь вероятность

$$\mathsf{P}\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} w(t) > a,\ w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\}.$$

Пусть $w_1(t)$ — процесс, определенный так, как в лемме 2. Тогда событие $\{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} w(t) > a,\ w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\}$ совпадает с событием $\{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} w_1(t) \geqslant a,\ w_1(T) \in [2a-d, 2a-c] \cap [a, \infty)\}$. Но событие $\{w_1(T) \in [2a-d, 2a-c] \cap [a, \infty)\}$ влечет событие $\{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} w_1(t) \geqslant a\}$, поэтому

$$\{\max_{0\leqslant t\leqslant T} w_1(t) \geqslant a,\ w_1(T) \in [2a-d, 2a-c] \cap [a, \infty)\} = \\ = \{w_1(T) \in [2a-d, 2a-c] \cap [a, \infty)\}.$$

Значит, на основании леммы 2

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant t\leqslant T} w(t) > a,\ w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{(2a-d)\vee a}^{(2a-c)\vee a} e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx. \qquad (10)$$

Кроме того,

$$\mathsf{P}\{w(T) \in [c, d] \cap [a, \infty)\} = \int\limits_{c\vee a}^{d\vee a} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) и вытекает доказательство теоремы. ∎

Следствие. *При* $a > 0$

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant t\leqslant T} w(t) > a\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx.$$

Последняя формула вытекает из теоремы 2, если $[c, d] = (-\infty, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $a_1 < 0 < a_2$ *и* $[c, d] \subset [a_1, a_2]$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\{\min_{0\leqslant t\leqslant T} w(t) > a_1,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T} w(t) < a_2,\ w(T) \in [c, d]\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_c^d \Big[\exp\Big\{-\frac{1}{2T}(x + 2k(a_2 - a_1))^2\Big\} - \\ - \exp\Big\{-\frac{1}{2T}(x - 2a_2 + 2k(a_2 - a_1))^2\Big\}\Big]\, dx. \qquad (12)$$

*Доказательство.* Обозначим через $\mathfrak{A}_k^{(i)}$ событие, заключающееся в том, что процесс $w(t)$ на отрезке $[0, T]$ пересечет уровень $a_i$ раньше, чем уровень $a_j$ ($j \neq i$, $i, j = 1, 2$), и затем не менее $k$ раз пресечет отрезок $[a_1, a_2]$ (считается, что функция $x(t)$ $k$ раз пересекает отрезок $[a_1, a_2]$, если функция $\operatorname{sgn}(x(t) - a_1) + \operatorname{sgn}(x(t) - a_2)$ $k$ раз меняет знак), и $w(T) \in [c, d]$. Искомая вероятность может быть выражена следующим образом:

$$\mathsf{P}\{w(T) \in [c, d]\} - \mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(1)}\} - \mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(2)}\}.$$

Для подсчета $\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(i)}\}$ найдем вероятности

$$\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(i)}\} + \mathsf{P}\{\mathfrak{A}_{k+1}^{(j)}\} = \mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(i)} \cup \mathfrak{A}_{k+1}^{(j)}\} \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2).$$

Событие $\mathfrak{A}_k^{(i)} \cup \mathfrak{A}_{k+1}^{(j)}$, как легко видеть, заключается в том, что процесс $w(t)$ до момента $T$ пересечет уровень $a_i$ (не обязательно раньше, чем $a_j$), затем не менее $k$ раз пересечет отрезок $[a_1, a_2]$ и при $t = T$ попадет в отрезок $[c, d]$. Пусть $\tau_1$ — момент первого пересечения уровня $a_i$, $\tau_2$ — первый после $\tau_1$ момент пересечения $a_j$, $\tau_3$ — первый после $\tau_2$ момент пересечения $a_i$ и т. д. Положим $w_1(t) = w(t)$ при $t < \tau_1$, $w_1(t) = 2w(\tau_1) - w(t)$ при $t \geqslant \tau_1$, $w_2(t) = w_1(t)$ при $t < \tau_2$, $w_2(t) = 2w(\tau_2) - w_1(t)$ при $t \geqslant \tau_2$, $w_3(t) = w_2(t)$ при $t < \tau_3$, $w_3(t) = 2w_2(\tau_3) - w_2(t)$ при $t \geqslant \tau_3$ и т. д. Заметим, что процессы $w_l(t)$ будут процессами броуновского движения, так как $\tau_l$ является моментом первого пересечения процессом $w_{l-1}(t)$ уровня

$$a_i + (l - 1)(a_i - a_j).$$

Если происходит событие $\mathfrak{A}_k^{(i)} \cup \mathfrak{A}_{k+1}^{(j)}$, то процесс $w_{k+1}(t)$ при $t < T$ поочередно пересекает уровни

$$a_i,\ a_i + (a_i - a_j),\ \ldots,\ a_i + k(a_i - a_j)$$

и в момент $T$ попадает в отрезок $[c_k, d_k]$, где

$$\left.\begin{aligned} c_k &= c + (k+1)(a_i - a_j),\\ d_k &= d + (k+1)(a_i - a_j) \end{aligned}\right\} \text{ при нечетном } k,$$

$$\left.\begin{aligned} c_k &= 2a_i - d + k(a_i - a_j),\\ d_k &= 2a_i - c + k(a_i - a_j) \end{aligned}\right\} \text{ при четном } k.$$

Наоборот, если $w_{k+1}(t)$ удовлетворяет перечисленным условиям, то тогда происходит событие $\mathfrak{A}_k^{(i)} \cup \mathfrak{A}_{k+1}^{(j)}$. Так как $w_{k+1}(t)$ — непрерывный процесс, обращающийся в нуль при $t = 0$, то для того, чтобы попасть в промежуток $[c_k, d_k]$, $w_{k+1}(t)$ должен последовательно пересечь уровни $a_i + l(a_i - a_j)$, $l = 0, \ldots, k$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(i)} \cup \mathfrak{A}_{k+1}^{(j)}\} = \mathsf{P}\{w_{k+1}(T) \in [c_k, d_k]\} = \mathsf{P}\{w(T) \in [c_k, d_k]\}.$$

Из непрерывности процесса $w(t)$ вытекает, что с вероятностью 1 он пересекает отрезок $[a_1, a_2]$ конечное число раз, и, следовательно, $\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(i)}\} \to 0$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$

в соотношении

$$\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(1)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(2)}\}=(-1)^{n+1}\left[\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_{n+1}^{(1)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_{n+1}^{(2)}\}\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(1)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(2)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_{k+1}^{(1)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_{k+1}^{(2)}\}\right),$$

получим

$$\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(1)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_0^{(2)}\}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{i=1}^{2}\left(\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_k^{(i)}\}+\mathsf{P}\{\mathfrak{A}_{k+1}^{(i)}\}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int\limits_{2a_1-d+2k(a_2-a_1)}^{2a_1-c+2k(a_2-a_1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)dx+\right.$$
$$+\int\limits_{2a_2-d+2k(a_2-a_1)}^{2a_2-c+2k(a_2-a_1)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx-\int\limits_{c-2(k+1)(a_2-a_1)}^{d-2(k+1)(a_2-a_1)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx-$$
$$\left.-\int\limits_{c+2(k+1)(a_2-a_1)}^{d+2(k+1)(a_2-a_1)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx\right].$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{c+2k(a_2-a_1)}^{d+2k(a_2-a_1)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{2a_2-d+2k(a_2-a_1)}^{2a_2-c+2k(a_2-a_1)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx\right].$$

Полагая в первом интеграле под знаком суммы $x-2k(a_2-a_1)=u$, а во втором $2k(a_2-a_1)+2a_2-x=u$, получим формулу (12). ■

Следствие 1. *Совместное распределение величин* $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}w(t)$ $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant T}w(t)$ *при* $a_1<0$, $a_2>0$ *дается формулой*

$$\mathsf{P}\{\min_{0\leqslant t\leqslant T}w(t)>a_1,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}w(t)<a_2\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{a_1}^{a_2}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2T}(x+2k(a_2-a_1))^2\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-\frac{1}{2T}(x-2a_2+2k(a_2-a_1))^2\right\}\right]dx. \qquad (13)$$

Следствие 2. *При* $a>0$, $[c, d]\subset[-a, a]$

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)|<a,\ w(T)\in[c, d]\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^d\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\exp\left\{-\frac{1}{2T}(x-2ka)^2\right\}dx. \qquad (14)$$

## § 4. Строение общих процессов с независимыми приращениями

Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, определенный при $t\in[0, T]$ и принимающий значения из конечномерного евклидова пространства $X$. Тогда он на основании § 4 гл. IV с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода.

Для каждого $\varepsilon>0$ с вероятностью 1 будет лишь конечное число таких точек $t$, для которых $|\xi(t+0)-\xi(t-0)|>\varepsilon$.

Пусть $X_\varepsilon=\{x: |x|>\varepsilon\}$, $\mathfrak{B}_\varepsilon$ — σ-алгебра борелевских множеств, целиком лежащих в $X_\varepsilon$. Из сказанного выше вытекает, что для всякого $A\in\mathfrak{B}_\varepsilon$ число точек $t$ из $[0, T]$, для которых $\xi(t+0)-\xi(t-0)\in A$, с вероятностью 1 конечно. Обозначим через $\nu(t, A)$ число точек $s\in[0, t)$, для которых $\xi(s+0)-\xi(s-0)\in A$. Процесс $\nu(t, A)$ имеет независимые приращения, поскольку $\nu(t_2, A)-\nu(t_1, A)$ при $t_1<t_2$ полностью определяются приращениями $\xi(s)-\xi(t_1)$ при $s\in[t_1, t_2]$, и, значит, приращения $\nu(t, A)$ на непересекающихся интервалах выражаются через приращения $\xi(t)$ на непересекающихся интервалах. Кроме того, $\nu(t, A)$ будет стохастически непрерывным процессом (если бы при $t'-t\to0$ величина $\nu(t', A)-\nu(t, A)$ не стремилась к нулю по вероятности, то тогда бы и $\mathsf{P}\{|\xi(t')-\xi(t)|>\varepsilon\}\not\to0$, а это невозможно ввиду стохастической непрерывности $\xi(t)$).

Поскольку $\nu(t, A)$ — стохастически непрерывный скачкообразный процесс, все скачки которого равны 1 (и, следовательно, $\nu(t, A)$ есть число скачков этого процесса на отрезке $[0, t]$), то в силу следствия из теоремы 1 § 2 $\nu(t, A)$ имеет пуассоновское распределение.

Положим $\Pi(t, A)=\mathsf{M}\nu(t, A)$. Тогда функция множества $\Pi(t, A)$ (при фиксированном $t$) является мерой на $\mathfrak{B}_\varepsilon$.

Действительно, если $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ и $A_k$ попарно не пересекаются, то $\nu(t, A)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(t, A_k)$ и, следовательно,

$$\mathsf{M}\nu(t, A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{M}\nu(t, A_k)$$

ввиду того, что
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu(t, A_k) \leqslant \nu(t, A).$$

Для изучения свойств величины $\nu(t, A)$ полезно рассмотреть процесс $\xi(t, A)$, определяемый соотношением
$$\xi(t, A) = \sum_{s<t} [\xi(s+0) - \xi(s-0)]\, \chi_A(\xi(s+0) - \xi(s-0)),$$
где $\chi_A(x)$ — индикатор множества $A$. Другими словами, $\xi(t, A)$ является суммой скачков процесса $\xi(t)$, которые произошли до момента $t$ и попали в множество $A$. Если $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, то число таких скачков с вероятностью 1 конечно, так что $\xi(t, A)$ имеет смысл. Из стохастической непрерывности $\nu(t, A)$ вытекает стохастическая непрерывность $\xi(t, A)$. Кроме того, $\xi(t, A)$ является процессом с независимыми приращениями. Важнейшее свойство процессов $\xi(t, A)$ — независимость процессов $\xi(t, A_1), \ldots, \xi(t, A_k)$ при попарно непересекающихся множествах $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Для всякого $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ процессы $\xi(t, A)$ и $\xi(t) - \xi(t, A)$ являются независимыми процессами с независимыми приращениями.*

*Доказательство.* То, что $\xi(t) - \xi(t, A)$ является стохастически непрерывным процессом, вытекает из стохастической непрерывности процессов $\xi(t)$ и $\xi(t, A)$. Те же соображения, что и относительно $\nu(t, A)$, позволяют утверждать, что процесс $[\xi(t, A); \xi(t) - \xi(t, A)]$ в $X \times X$ также будет процессом с независимыми приращениями. Для доказательства независимости процессов $\xi(t, A)$ и $\xi(t) - \xi(t, A)$ достаточно поэтому установить, что при $z_1$ и $z_2 \in X$, $s < t$ будет
$$\begin{aligned}\mathsf{M} \exp\{i(z_1, \xi(t, A) - \xi(s, A)) +{}& \\ + i(z_2, \xi(t) - \xi(t, A) - \xi(s) + \xi(s, A))\} &= \\ = \mathsf{M} \exp\{i(z_1, \xi(t, A) - \xi(s, A))\} &\times \\ \times \mathsf{M} \exp\{i(z_2, \xi(t) - \xi(t, A) - \xi(s) + \xi(s, A))\}&. \qquad (1)\end{aligned}$$

Действительно, из независимости приращений процесса $[\xi(t, A); \xi(t) - \xi(t, A)]$ вытекает, что для любых $0 < t_0 < \ldots \ldots < t_n = T$, $z_1^{(j)}$, $z_2^{(k)} \in X$ выполняется соотношение
$$\begin{aligned}\mathsf{M} \exp\Big\{ i \sum_{k=1}^{n} \big[\big(z_1^{(k)}, \xi(t_k, A) - \xi(t_{k-1}, A)\big) +{}& \\ + \big(z_2^{(k)}, \xi(t_k) - \xi(t_k, A) - \xi(t_{k-1}) + \xi(t_{k-1}, A)\big)\big] \Big\} &= \\ = \mathsf{M} \exp\Big\{ i \sum_{k=1}^{n} \big(z_1^{(k)}, \xi(t_k, A) - \xi(t_{k-1}, A)\big) \Big\} &\times \\ \times \mathsf{M} \exp\Big\{ i \sum_{k=1}^{n} \big(z_2^{(k)}, \xi(t_k) - \xi(t_k, A) - \xi(t_{k-1}) + \xi(t_{k-1}, A)\big) \Big\}&,\end{aligned}$$

а это означает независимость процессов $\xi(t, A)$ и $\xi(t)-\xi(t, A)$. Докажем соотношение (1) сначала для того случая, когда $\Pi(T, \Gamma_A)=0$, где $\Gamma_A$ — граница множества $A$. Заметим, что в этом случае у процесса $\xi(t)$ с вероятностью 1 отсутствуют скачки, попадающие на $\Gamma_A$. Пусть $s=t_{n0}<t_{n1}<\ldots<t_{nn}=t$ и

$$\lim_{n\to\infty}\max_k (t_{n\,k+1}-t_{nk})=0.$$

Тогда, если $\chi_A(x)$ — индикатор множества $A$, то с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\xi(t, A)-\xi(s, A)=\\ =\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(\xi(t_{nk})-\xi(t_{n,k-1}))\,[\xi(t_{nk})-\xi(t_{n,k-1})]. \qquad (2)$$

Положим

$$\xi_{nk}=\chi_A(\xi(t_{nk})-\xi(t_{n,k-1}))\,[\xi(t_{nk})-\xi(t_{n,k-1})],$$
$$\eta_{nk}=\xi(t_{nk})-\xi(t_{n,k-1})-\xi_{nk}.$$

Для доказательства (1), принимая во внимание (2), достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(z_1, \xi_{nk})+i\sum_{k=1}^{n}(z_2, \eta_{nk})\right\}-\right.\\ \left.-\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(z_1, \xi_{nk})\right\}\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(z_2, \eta_{nk})\right\}\right|=0.$$

Воспользовавшись независимостью пар $(\xi_{nk}, \eta_{nk})$ и неравенством (при $|a_k|\leqslant 1$, $|b_k|\leqslant 1$)

$$\left|\prod_{k=1}^{n}a_k-\prod_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|,$$

убеждаемся, что

$$\left|\mathsf{M}\exp\left\{i\left(\sum_{k=1}^{n}(z_1, \xi_{nk})+\sum_{k=1}^{n}(z_2, \eta_{nk})\right)\right\}-\right.\\ \left.-\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(z_1, \xi_{nk})\right\}\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(z_2, \eta_{nk})\right\}\right|=\\ =\left|\prod_{k=1}^{n}\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})+i(z_2, \eta_{nk})\}-\right.\\ \left.-\prod_{k=1}^{n}\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})\}\mathsf{M}\exp\{i(z_2, \eta_{nk})\}\right|\leqslant\\ \leqslant\sum_{k=1}^{n}|\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})+i(z_2, \eta_{nk})\}-\\ -\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})\}\mathsf{M}\exp\{i(z_2, \eta_{nk})\}|.$$

Так как $(z_1, \xi_{nk})(z_2, \eta_{nk})=0$ (т. е. обе эти величины не могут одновременно быть отличными от нуля), то

$$e^{i(z_1, \xi_{nk})+i(z_2, \eta_{nk})}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(i(z_1, \xi_{nk})+i(z_2, \eta_{nk}))^m}{m!}=$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(i(z_1, \xi_{nk}))^m}{m!}+\frac{(i(z_2, \eta_{nk}))^m}{m!}\right]=e^{i(z_1, \xi_{nk})}+e^{i(z_2, \eta_{nk})}-1.$$

Поэтому

$$|\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})+i(z_2, \eta_{nk})\}-\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})\}\mathsf{M}\exp\{i(z_2, \eta_{nk})\}|=$$
$$=|\mathsf{M}\exp\{i(z_1, \xi_{nk})\}-1||\mathsf{M}\exp\{i(z_2, \eta_{nk})\}-1|.$$

Но

$$\left|\mathsf{M}e^{i(z_1, \xi_{nk})}-1\right|\leqslant\mathsf{M}\left|e^{i(z_1, \xi_{nk})}-1\right|\leqslant 2\mathsf{P}\{|\xi_{nk}|>0\}=$$
$$=2\mathsf{P}\{\chi_A(\xi(t_{nk})-\xi(t_{n, k-1}))>0\}$$

и для всякого $\rho>0$

$$\left|\mathsf{M}e^{i(z_2, \eta_{nk})}-1\right|\leqslant\sup_{|x|\leqslant\rho}\left|1-e^{i(z_2, x)}\right|+2\mathsf{P}\{|\eta_{nk}|>\rho\}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\mathsf{M}\exp\left\{i\left(z_1, \sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\right)+i\left(z_2, \sum_{k=1}^{n}\eta_{nk}\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\mathsf{M}\exp\left\{i\left(z_1, \sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\right)\right\}\mathsf{M}\exp\left\{i\left(z_2, \sum_{k=1}^{n}\eta_{nk}\right)\right\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(\sup_{|x|\leqslant\rho}|e^{i(z_2, x)}-1|+2\sup_k\mathsf{P}\{|\eta_{nk}|>\rho\}\right)\times$$
$$\times\varlimsup_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\chi_A(\xi(t_{nk})-\xi(t_{n, k-1}))>0\}=$$
$$=2\varlimsup_{n\to\infty}\left(\sup_{|x|\leqslant\rho}|e^{i(z_2, x)}-1|+2\sup_k\mathsf{P}\{|\eta_{nk}|>\rho\}\right)\times$$
$$\times\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{M}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(\xi(t_{nk})-\xi(t_{n, k-1})).$$

Так как при $\rho<\varepsilon$ $(A\in\mathfrak{B}_\varepsilon)$

$$\mathsf{P}\{|\eta_{nk}|>\rho\}\leqslant\mathsf{P}\{|\xi(t_{nk})-\xi(t_{n, k-1})|>\rho\},$$

то из равномерной стохастической непрерывности $\xi(t)$ вытекает, что $\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\{|\eta_{nk}|>\rho\}=0$.

Учитывая то, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(\xi(t_{nk})-\xi(t_{n, k-1}))=\nu(t, A)-\nu(s, A)$$

с вероятностью 1, точно так, как при доказательстве теоремы 1 § 2, находим, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{M} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(\xi(t_{nk}) - \xi(t_{n,k-1})) \leqslant$$
$$\leqslant -\ln \mathsf{P}\{\nu(t, A) - \nu(s, A) = 0\} = C < \infty.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \mathsf{M} \exp\left\{ i\left(z_1, \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}\right) + i\left(z_2, \sum_{k=1}^{n} \eta_{nk}\right)\right\} - \right.$$
$$\left. - \mathsf{M} \exp\left\{ i\left(z_1, \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}\right)\right\} \mathsf{M} \exp\left\{ i\left(z_2, \sum_{k=1}^{n} \eta_{nk}\right)\right\} \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2C \sup_{|x|\leqslant\rho} |e^{i(z_2, x)} - 1|.$$

Переходя к пределу при $\rho\to 0$, получим (1), что и доказывает теорему для того случая, когда $\Pi(T, \Gamma_A) = 0$.

Переходя к общему случаю, заметим предварительно, что совокупность множеств $\mathfrak{A}$, для которых теорема справедлива, образует монотонный класс (см. Халмош [1], гл. 1, § 6), так как для любой последовательности множеств $A_n$ из $\mathfrak{B}_\varepsilon$ с вероятностью 1 справедливы соотношения

$$\xi\left(t, \bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \xi\left(t, \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right),$$
$$\xi\left(t, \bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \xi\left(t, \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

и операция предельного перехода не нарушает независимости случайных величин. Легко также обнаружить, что в том случае, когда $\varepsilon > 0$ таково, что $\Pi\left(T, \Gamma_{X_\varepsilon}\right) = 0$, множества $A$ из $\mathfrak{B}_\varepsilon$, для которых $\Pi(T, \Gamma_A) = 0$, образуют алгебру множеств. Но всякая монотонная алгебра является $\sigma$-алгеброй (см. Халмош [1], гл. 1, § 6), так что $\mathfrak{A}$ является $\sigma$-алгеброй. Наконец, заметим, что в $\mathfrak{A}$ входят сферы с центром в каждой точке со сколь угодно малыми радиусами (поскольку границы сфер $S_\rho(x)$ с одним и тем же центром $x$, но различными радиусами $\rho$ не имеют общих точек, то не более чем для счетного множества значений $\rho$ $\Pi\left(T, \Gamma_{S_\rho(x)}\right) > 0$). Поэтому в $\mathfrak{A}$ входят все открытые множества, принадлежащие $\mathfrak{B}_\varepsilon$, так что $\mathfrak{A}$ содержит $\mathfrak{B}_\varepsilon$. ∎

Следствие 1. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ принадлежат $\mathfrak{B}_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ и попарно не пересекаются, то процессы $\xi(t, A_1), \xi(t, A_2), \ldots, \xi(t, A_k)$ и $\xi(t) - \sum_{j=1}^{k} \xi(t, A_j)$ независимы между собой.*

Действительно, процесс

$$\xi(t)-\sum_{j=1}^{k}\xi(t, A_j)=\xi(t)-\xi\left(t, \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)$$

не зависит от процесса $\xi\left(t, \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)$. Процессы $\xi(t, A_j)$ полностью определяются процессом $\xi\left(t, \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)$, поэтому они в совокупности не зависят от процесса $\xi(t)-\sum_{j=1}^{k}\xi(t, A_j)$. Аналогично совокупность процессов $\xi(t, A_j)$, $j \neq i$, $\xi(t)-\sum_{j=1}^{k}\xi(t, A_j)$ полностью определяется процессом $\xi(t)-\xi(t, A_i)$, не зависящим от $\xi(t, A_i)$, так что эта совокупность также не зависит от процесса $\xi(t, A_i)$. Таким образом, среди процессов

$$\xi(t, A_j), \quad j=1, 2, \ldots, k; \quad \xi(t)-\sum_{j=1}^{k}\xi(t, A_j)$$

каждый не зависит от совокупности остальных. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Следствие 2. *Для попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$ из $\mathfrak{B}_\varepsilon$ процессы $\nu(t, A_1), \ldots, \nu(t, A_k)$ независимы между собой.*

Это вытекает из предыдущего утверждения, поскольку процесс $\nu(t, A)$ полностью определяется процессом $\xi(t, A)$.

Пусть $B^*$ — борелевское множество из $[0, T]\times X_\varepsilon$. Обозначим через $\nu^*(B^*)$ множество тех $t$, для которых пара $(t; \xi(t+0)-\xi(t-0))$ принадлежит $B^*$. Легко убедиться, что $\nu^*$ является случайной мерой на $\sigma$-алгебре $\mathfrak{B}^*_\varepsilon$ всех борелевских подмножеств $[0, T]\times X_\varepsilon$. Положим $\Pi^*(B^*)=\mathsf{M}\nu^*(B^*)$; $\Pi^*(B^*)$ — конечная мера на $\mathfrak{B}^*_\varepsilon$. Очевидна связь между мерами $\nu(t, A)$ и мерой $\nu^*$:

$$\nu^*([t_1, t_2]\times A)=\nu(t_2, A)-\nu(t_1, A).$$

Аналогично

$$\Pi^*([t_1, t_2]\times A)=\Pi(t_2, A)-\Pi(t_1, A).$$

Следствие 3. *Мера $\nu^*$ является пуассоновской случайной мерой с независимыми значениями; характеристическая функция величины $\nu^*(B^*)$ дается формулой*

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\nu^*(B^*)}=\exp\{(e^{i\lambda}-1)\Pi^*(B^*)\}.$$

Действительно, обозначим через $\mathfrak{A}_0$ алгебру множеств, порожденную множествами вида $[t_1, t_2]\times A$, $[t_1, t_2]\subset[0, T]$, $A\in\mathfrak{B}_\varepsilon$.

Если $A_1^*, \ldots, A_k^*$ — непересекающиеся множества на $\mathfrak{A}_0$, то можно указать такие непересекающиеся множества $\Delta_i^* = [t_1^{(i)}, t_2^{(i)}] \times A_i$, $i = 1, \ldots, N$, что $A_j^*$ являются суммами $\Delta_i^*$. При этом множества $\Delta_i^*$ возможно подобрать так, чтобы при различных $i$ как отрезки $[t_1^{(i)}, t_2^{(i)}]$, так и множества $A_i$ либо не пересекались, либо совпадали. В этом случае независимость $\nu^*(\Delta_i^*)$ является следствием независимости $\nu(t, A_i)$ при различных $A_i$ и независимости приращений $\nu(t, A_i)$. Из независимости $\nu^*(\Delta_i^*)$ вытекает независимость $\nu^*(A_j^*)$. Эти величины имеют распределение Пуассона, как суммы независимых пуассоновских величин. Для доказательства остается заметить, что $\sigma(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{B}_\varepsilon^*$.

Обозначим через $\xi_\varepsilon(t)$ процесс, полученный из $\xi(t)$ после выбрасывания скачков, превосходящих по абсолютной величине $\varepsilon$: $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t) - \xi(t, X_\varepsilon)$. Процесс $\xi_\varepsilon(t)$ будет стохастически непрерывным процессом с независимыми приращениями, скачки которого не превосходят $\varepsilon$. Можно ожидать, что при $\varepsilon \to 0$ $\xi_\varepsilon(t)$ будет сходиться к некоторому непрерывному процессу с независимыми приращениями. Это оказывается верным, если из $\xi_\varepsilon(t)$ вычитать специально подобранные непрерывные неслучайные функции. Для доказательства этого факта потребуется следующая

Лемма. *Пусть* $\xi_\varepsilon(0) = 0$; *тогда* $\mathsf{M}|\xi_\varepsilon(t)|^2 < \infty$.

*Доказательство.* Пусть $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = t$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_k (t_{nk} - t_{n,k-1}) = 0$. Положим $\xi_{nk} = \psi_{2\varepsilon}(\xi_\varepsilon(t_{nk}) - \xi_\varepsilon(t_{n,k-1}))$, где $\psi_\alpha(x) = x$ при $|x| \leqslant \alpha$, $\psi_\alpha(x) = 0$ при $|x| > \alpha$. Легко видеть, что с вероятностью 1

$$\xi_\varepsilon(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}. \tag{3}$$

Заметим, что все слагаемые в этой сумме не превосходят по абсолютной величине $2\varepsilon$. Обозначим $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ортонормированный базис в $X$. Если бы $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_{nk}, x_i)$ была неограничена при некотором $i$, то можно было бы выбрать такую последовательность $n$, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_{nk}, x_i) \to \infty$. В таком случае величины

$$\eta_{nk} = \frac{(\xi_{nk} - \mathsf{M}\xi_{nk}, x_i)}{\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_{nl}, x_i)}}$$

удовлетворяли бы условиям центральной предельной теоремы. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_{nk}$ имела бы нормальное предельное распределение, так что для любого $\alpha$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i) > \alpha\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}(\xi_{nk}, x_i)} + \sum_{k=1}^{n}(\mathsf{M}\xi_{nk}, x_i)\right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i) < -\alpha\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}(\xi_{nk}, x_i)} + \sum_{k=1}^{n}(\mathsf{M}\xi_{nk}, x_i)\right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-u^2/2}\,du.$$

Последние соотношения противоречат ограниченности по вероятности $\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i)$, которая вытекает из соотношения (3). Таким образом, $\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}(\xi_{nk}, x_i)$ ограничена для всех $i$.

Заметим, далее, что на основании неравенства Чебышева

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i) - \sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}(\xi_{nk}, x_i)\right| > L\right\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i)}{L^2}.$$

Отсюда и из ограниченности по вероятности величины $\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i)$ вытекает ограниченность $\mathsf{M}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i)$. Так как

$$\mathsf{M}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\right|^2 = \mathsf{M}\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i)\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{r}\left[\mathsf{D}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i) + \left(\mathsf{M}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}, x_i)\right)^2\right],$$

то ограничено $\mathsf{M}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\right|^2$, а значит, и $\mathsf{M}|\xi_\varepsilon(t)|^2$, поскольку

$$\mathsf{M}|\xi_\varepsilon(t)|^2 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{M}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\right|^2. \blacksquare$$

Пусть последовательность $\varepsilon_n$ монотонно стремится к нулю. Обозначим через $\Delta_k$ множество тех $x$, для которых $\varepsilon_k < |x| \leqslant$

$\leqslant \varepsilon_{k-1}$, $k=2, 3, \ldots$, а через $\Delta_1$ — множество тех $x$, для которых $|x| > \varepsilon_1$. Заметим, что

$$\xi_{\varepsilon_1}(t) = \sum_{k=2}^{m} \xi(t, \Delta_k) + \xi_{\varepsilon_m}(t)$$

и слагаемые в правой части независимы на основании следствия 1 теоремы 1. Поэтому при любом $x$

$$\sum_{k=2}^{m} \mathsf{D}(\xi(t, \Delta_k), x) \leqslant \mathsf{D}(\xi_{\varepsilon_1}(t), x),$$

и, значит, при любом $x$ сходится ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \mathsf{D}(\xi(t, \Delta_k), x)$. Выберем такую последовательность $n_k$ $(n_1 = 2)$, чтобы

$$\sum_{j=n_k}^{\infty} \mathsf{D}(\xi(T, \Delta_j), x_i) \leqslant \frac{1}{k^6} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Тогда последовательность

$$\sum_{j=2}^{n_k} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)] \tag{4}$$

будет с вероятностью 1 равномерно сходиться к некоторому пределу при $k \to \infty$. Действительно,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}\left|\sum_{j=2}^{n_{k+1}} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{j=2}^{n_k} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)]\right| > \frac{1}{k^2}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} \mathsf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j), x_i)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{r}\,k^2}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} \varlimsup_{m \to \infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{l \leqslant mT}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \left(\xi\left(\frac{l}{m}, \Delta_j\right) - \mathsf{M}\xi\left(\frac{l}{m}, \Delta_j\right), x_i\right)\right| \geqslant \right.$$
$$\left. \geqslant \frac{1}{\sqrt{r}\,k^2}\right\} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \varlimsup_{m \to \infty} rk^4 M \left|\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (\xi(T, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(T, \Delta_j), x_i)\right|^2 \leqslant \frac{r^2}{k^2}$$

(здесь использовалось неравенство Колмогорова, гл. III, § 1, замечание к теореме 5).

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^2}{k^2}$ сходится, то по теореме Бореля — Кантелли члены ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j))$$

с вероятностью 1, начиная с некоторого номера, мажорируются членами сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Отсюда и вытекает равномерная с вероятностью 1 сходимость последовательности (4). Поэтому существует процесс $\xi_0(t)$, являющийся равномерным пределом последовательности

$$\xi_{\varepsilon_1}(t) - \sum_{j=2}^{n_k} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)].$$

Так как $\xi(t, \Delta_j)$ — стохастически непрерывный процесс и $\mathsf{M}|\xi(t, \Delta_j)|^2 \leqslant \mathsf{M}|\xi(T, \Delta_j)|^2 < \infty$, то на основании теоремы о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{t \to s} \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j) = \mathsf{M}\xi(s, \Delta_j)$$

и, значит, $\mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)$ непрерывно по $t$. Следовательно, процесс

$$\xi_{\varepsilon_1}(t) - \sum_{j=2}^{n_k} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)]$$

с вероятностью 1 не имеет скачков, по абсолютной величине превосходящих $\varepsilon_{n_k}$, а $\xi_0(t)$ (равномерный предел таких процессов) с вероятностью 1 непрерывен. Заметим, что ряд

$$\sum_{j=2}^{\infty} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)]$$

сходится по теореме Колмогорова (гл. III, § 2, следствие 2 теоремы 1) ввиду сходимости ряда $\sum_{j=2}^{\infty} \mathsf{D}(\xi(t, \Delta_j), x)$ при каждом $x$. Сумма ряда $\sum_{j=2}^{\infty} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)]$ при каждом $t$ совпадает $(\mathrm{mod}\,\mathsf{P})$ с суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)]$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для всякого сепарабельного стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями существует такой непрерывный процесс $\xi_0(t)$, что*

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi(t, \Delta_1) + \sum_{j=2}^{\infty} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)].$$

Замечание. *Процесс $\xi_0(t)$, как предел процессов $\xi_{\varepsilon_i}(t) - \sum_{j=2}^{n} [\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)]$, не зависит от каждого из процессов $\xi(t, \Delta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Так как*

$$\xi_0(t) + \sum_{j=2}^{\infty} (\xi(t, \Delta_j) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_j)) = \xi_{\varepsilon_i}(t)$$

*и $\mathsf{M}|\xi_{\varepsilon_i}(t)|^2 < \infty$, а слагаемые в правой части независимы, то и $\mathsf{M}|\xi_0(t)|^2 < \infty$.*

Рассмотрим стохастические интегралы по мере $\nu(t, A)$. Как уже отмечалось, $\nu(t, A)$ является счетно аддитивной неотрицательной функцией множества $A$ на $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Пусть измеримая функция $\varphi(x)$ ограничена на каждом компакте пространства $X$ и равна нулю при $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon$ — некоторое неотрицательное число). Можно обычным образом определить интеграл $\int \varphi(x) \nu(t, dx)$. Это вытекает из конечности меры $\nu(t, A)$ на $\mathfrak{B}_\varepsilon$, а также из того, что $\nu(t, X_\rho) = 0$, где $X_\rho$ — множество тех $x$, для которых $|x| > \rho$, а

$$\rho = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |\xi(s+0) - \xi(s-0)|,$$

так что на самом деле рассматривается интеграл лишь по множеству $\{\varepsilon < |x| \leqslant \rho\}$, на котором и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Покажем, что

$$\xi(t, A) = \int_A x \nu(t, dx). \tag{5}$$

Действительно, если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k$ — попарно непересекающиеся множества, диаметры которых не превосходят $\delta$, а $x_k \in B_k$, то

$$\left|\xi(t, A) - \sum_k x_k \nu(t, B_k)\right| \leqslant \sum_k |\xi(t, B_k) - x_k \nu(t, B_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \delta \sum_k \nu(t, B_k) \leqslant \delta \nu(t, A)$$

($\xi(t, B_k)$ представляет собой сумму $\nu(t, B_k)$ скачков, принадлежащих $B_k$ и, значит, отличающихся от $x_k$ не более чем на $\delta$). Отсюда и вытекает (5).

Так как

$$\mathsf{M}\left|\xi(t, A)-\sum_k x_k\nu(t, B_k)\right|\leqslant\delta\mathsf{M}\nu(t, A),$$

$$\mathsf{M}\left|\xi(t, A)-\sum_k x_k\nu(t, B_k)\right|^2\leqslant\delta^2\mathsf{M}[\nu(t, A)]^2,$$

то

$$\mathsf{M}\xi(t, A)=\lim_{\delta\to 0}\mathsf{M}\sum_k x_k\nu(t, B_k)=\int_A x\Pi(t, dx),$$

$$\mathsf{D}(\xi(t, A), z)=\int_A (z, x)^2\,\Pi(t, dx)$$

для всякого ограниченного множества $A$, лежащего на положительном расстоянии от точки нуль пространства $X$.

Рассмотрим, далее, случайную функцию множества

$$\tilde{\nu}(t, A)=\nu(t, A)-\Pi(t, A).$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$\mathsf{M}\tilde{\nu}(t, A)=0,$$

$$\mathsf{M}(\tilde{\nu}(t, A)\,\tilde{\nu}(t, B))=\mathsf{M}\nu(t, A\cap B)=\Pi(t, A\cap B). \tag{6}$$

Равенства (6) позволяют использовать общую конструкцию стохастического интеграла по ортогональной мере для построения интеграла

$$\int f(x)\,\tilde{\nu}(t, dx)$$

для всех измеримых функций $f(x)$, для которых

$$\int |f(x)|^2\,\Pi(t, dx)<\infty$$

(см. гл. V, § 3). В предыдущем параграфе было установлено, что $\sum_{k=2}^{\infty}\mathsf{D}(\xi(t, \Delta_k), z)<\infty$. Так как

$$\mathsf{D}(\xi(t, \Delta_k), z)=\int_{\Delta_k}(x, z)^2\,\Pi(t, dx),$$

то при любом $z\in X$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\leqslant\varepsilon_1}(x, z)^2\,\Pi(t, dx)<\infty.$$

Следовательно, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\leqslant\varepsilon_1}|x|^2\,\Pi(t, dx)<\infty.$$

Поэтому существует

$$\int\limits_{0<|x|<\varepsilon_1} x\tilde{\nu}(t, dx).$$

Заметим, далее, что

$$\sum_{k=2}^{n} (\xi(t, \Delta_k) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_k)) = \int\limits_{\varepsilon_{n+1}<|x|\leqslant\varepsilon_1} x\tilde{\nu}(t, dx),$$

и, значит, ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (\xi(t, \Delta_k) - \mathsf{M}\xi(t, \Delta_k))$ сходится по вероятности к $\int\limits_{0<|x|\leqslant\varepsilon_1} x\tilde{\nu}(t, dx)$. Принимая во внимание равенство

$$\xi(t, \Delta_1) = \int\limits_{|x|>\varepsilon_1} x\nu(t, dx),$$

получаем из теоремы 2 и замечания к ней следующий результат (для определенности положим $\varepsilon_1 = 1$).

Теорема 3. *Если $\xi(t)$ — сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, то существует с вероятностью* 1 *непрерывный с независимыми гауссовыми приращениями процесс $\xi_0(t)$, не зависящий от меры $\nu(t, A)$, такой, что имеет место следующее представление*:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \int\limits_{|x|>1} x\nu(t, dx) + \int\limits_{|x|\leqslant 1} x\tilde{\nu}(t, dx). \tag{7}$$

Найдем характеристическую функцию процесса $\xi(t)$. Так как слагаемые в правой части (7) независимы между собой, достаточно найти характеристическую функцию каждого слагаемого. Характеристическая функция процесса $\xi_0(t)$ определяется формулой (1) § 3. Пусть $A$ — ограниченное множество из $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Тогда

$$\mathsf{M}\exp\{i(z, \xi(t, A))\} = \lim_{\lambda\to 0} \mathsf{M}\exp\left\{i\left(z, \sum_k x_k\nu(t, B_k)\right)\right\},$$

где $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, $B_k$ — попарно непересекающиеся множества, диаметры которых не превосходят $\lambda$, точки $x_k$ принадлежат $B_k$. Величины $\nu(t, B_k)$ независимы между собой и имеют пуассоновские распределения с параметрами $\Pi(t, B_k)$ соответственно. Поэтому

$$\mathsf{M}\exp\left\{i\left(z, \sum_k x_k\nu(t, B_k)\right)\right\} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{M}\exp\{i(z, x_k)\nu(t, B_k)\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{\left(e^{i(z, x_k)} - 1\right)\Pi(t, B_k)\right\} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(e^{i(z, x_k)} - 1\right)\Pi(t, B_k)\right\}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\lambda \to 0$, убеждаемся, что

$$\mathsf{M}\exp\{i(z, \xi(t, A))\} = \exp\left\{\int_A (e^{i(z,x)} - 1)\,\Pi(t, dx)\right\}. \tag{8}$$

Формула (8) имеет место и для неограниченных множеств из $\mathfrak{B}_\varepsilon$, так как такие множества можно представить как суммы монотонно возрастающей последовательности ограниченных множеств $A_n$, для которых (8) справедливо, и использовать предельный переход по $n$. Из (8) вытекает, что

$$\mathsf{M}\exp\{i(z, \xi(t, A) - \mathsf{M}\xi(t, A))\} = \\ = \exp\left\{\int_A (e^{i(z,x)} - 1 - i(z, x))\,\Pi(t, dx)\right\}, \tag{9}$$

т. е.

$$\mathsf{M}\exp\left\{i\left(z, \int_A x\tilde{\nu}(t, dx)\right)\right\} = \exp\left\{\int_A (e^{i(z,x)} - 1 - i(z, x))\,\Pi(t, dx)\right\}.$$

Опять используя операцию предельного перехода по $A$, убеждаемся, что формула (9) справедлива для всех множеств $A$, для которых правая часть этого равенства имеет смысл. Теперь, учитывая формулы (1) § 3, (8) и (9), можем записать характеристическую функцию процесса $\xi(t)$:

$$\mathsf{M}e^{i(z,\xi(t))} = \mathsf{M}e^{i(z,\xi(0))}\exp\left\{i(a(t), z) - \frac{1}{2}(B(t)z, z) + \right. \\ \left. + \int\limits_{0<|x|>1} (e^{i(z,x)} - 1)\,\Pi(t, dx) + \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} (e^{i(z,x)} - 1 - i(z, x))\,\Pi(t, dx)\right\}. \tag{10}$$

С помощью этой формулы можно определить распределение $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, а значит, и все конечномерные распределения процесса $\xi(t)$.

Поскольку стохастически эквивалентные процессы имеют одинаковые конечномерные распределения и всякому процессу соответствует стохастически эквивалентный сепарабельный процесс (теорема 2 § 2 гл. IV), то справедлива следующая

Теорема 4. *Характеристическая функция стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями имеет вид* (10), *где*

1) *функция* $\Pi(t, A)$ — *непрерывная, монотонно не убывает по* $t$ *при каждом* $A \in \bigcup_\varepsilon \mathfrak{B}_\varepsilon$ *и удовлетворяет условию*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|^2\,\Pi(t, dx) < \infty;$$

2) *$a(t)$ — непрерывная функция, принимающая значения из $X$;*

3) *функция $B(t)$ — непрерывная и ее значениями служат неотрицательные симметрические линейные операторы в $X$, причем $B(t_2)-B(t_1)$ также неотрицательны при $t_1<t_2$.*

## § 5. Свойства выборочных функций

В этом параграфе изучаются некоторые свойства выборочных функций стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями. Заметим, что в § 2 найдены необходимые и достаточные условия, при которых выборочные функции процесса являются ступенчатыми, а в § 3 — непрерывными.

Пусть теперь $\xi(t)$ — процесс с числовыми значениями, т. е. $X$ является числовой прямой. Исследуем условия, при которых реализации процесса $\xi(t)$ будут с вероятностью 1 монотонными функциями.

Теорема 1. *Для того чтобы реализации числового сепарабельного стохастически непрерывного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями были с вероятностью 1 неубывающими, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция величины $\xi(t)$ представлялась следующей формулой:*

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\xi(t)}=\mathsf{M}e^{i\lambda\xi(0)}\exp\left\{i\lambda\gamma(t)+\int_0^\infty(e^{i\lambda x}-1)\Pi(t,dx)\right\},\tag{1}$$

*в которой мера $\Pi$ удовлетворяет условию $\int_0^1 x\Pi(t,dx)<\infty$, а $\gamma(t)$ является неубывающей функцией.*

*Доказательство.* Необходимость. Если $\xi(t)$ — неубывающая функция, то процесс $\xi(t)$ имеет лишь положительные скачки, значит, $\Pi(t,A)=0$ для всякого множества $A$, лежащего на отрицательной полупрямой. Заметим, далее, что в рассматриваемом случае процесс $\xi(t)-\xi(t,X_\varepsilon)$ также будет неубывающим (выбрасывание скачков не нарушает монотонности). Монотонным процессом будет и процесс $\xi(t,X_\varepsilon)-\xi(t,X_1)$, $0<\varepsilon<1$, являющийся суммой неотрицательных скачков, причем

$$0\leqslant\xi(t,X_\varepsilon)-\xi(t,X_1)\leqslant\xi(t)-\xi(0)-\xi(t,X_1).$$

На основании леммы 1 § 4 $\mathsf{M}[\xi(t)-\xi(0)-\xi(t,X_1)]<\infty$, поэтому

$$\mathsf{M}[\xi(t,X_\varepsilon)-\xi(t,X_1)]=\int_\varepsilon^1 x\Pi(t,dx)\leqslant\mathsf{M}[\xi(t)-\xi(0)-\xi(t,X_1)];$$

переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, убеждаемся в конечности

$$\int_0^1 x\Pi(t, dx).$$

Заметим, далее, что величины $\xi(t)-\xi(t, X_\varepsilon)$ убывают при $\varepsilon \to 0$ (так как с уменьшением $\varepsilon$ выбрасываются новые положительные скачки). Следовательно, с вероятностью 1 существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\xi(t)-\xi(t, X_\varepsilon)] = \xi_0(t)$, причем процесс $\xi_0(t)$ с вероятностью 1 непрерывен. Как было доказано в § 3, приращения процесса $\xi_0(t)$ будут иметь гауссовы распределения. Но процесс $\xi_0(t)$, как предел неубывающих процессов, сам будет неубывающим, так что $\mathsf{P}\{\xi_0(t)-\xi_0(0) \geqslant 0\} = 1$. Из последнего соотношения вытекает, что $\mathsf{D}(\xi_0(t)-\xi_0(0)) = 0$ (нормально распределенная величина $\xi$ может быть с вероятностью 1 неотрицательной лишь в том случае, когда $\mathsf{D}\xi = 0$). Таким образом,

$$\xi_0(t) = \xi_0(0) + \gamma(t), \quad \text{где} \quad \gamma(t) = \mathsf{M}[\xi_0(t)-\xi_0(0)],$$

и следовательно, не убывает. Формула (1) может быть получена из соотношения

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\xi(t)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{M}e^{i\lambda\xi_0(t)}\mathsf{M}e^{i\lambda\xi(t, X_\varepsilon)},$$

если учесть вид процесса $\xi_0(t)$ и формулу (8) § 4. Необходимость условий теоремы установлена.

Достаточность. Покажем, что $\mathsf{P}\{\xi(t_2)-\xi(t_1) \geqslant 0\} = 1$. Для этого достаточно показать, что с вероятностью 1 неотрицательна случайная величина $\xi$, характеристическая функция которой имеет вид

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\xi} = \exp\left\{\int_0^\infty (e^{i\lambda x}-1)\,dG(x)\right\}, \tag{2}$$

где $G(x)$ — монотонная ограниченная функция.

Это вытекает из того, что распределение величины $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ является пределом распределений величин с характеристической функцией

$$\exp\left\{i\lambda(\gamma(t_2)-\gamma(t_1)) + \int_\varepsilon^\infty (e^{i\lambda x}-1)\,\Pi(t, dx)\right\}$$

при $\varepsilon \downarrow 0$. Положим

$$F(x) = c\,[G(x)-G(+0)], \qquad c = [G(+\infty)-G(+0)]^{-1},$$

Тогда

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} e^{-c} \left( \int_0^{\infty} e^{i\lambda x}\, dF(x) \right)^k,$$

так что характеристическая функция величины $\xi$ совпадает с характеристической функцией величины $S_\nu$, где $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$; $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных величин, имеющих функцию распределения $F(x)$, а $\nu$ — не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ пуассоновская случайная величина. Следовательно, $\xi$ неотрицательна.

Таким образом,

$$\mathsf{P}\{\xi(t_2) \geqslant \xi(t_1)\} = 1 \quad \text{при} \quad t_1 < t_2.$$

Из полученного соотношения вытекает, что событие, заключающееся в том, что для всех пар рациональных точек $t_1, t_2$, для которых $t_1 < t_2$, выполняется неравенство $\xi(t_1) \leqslant \xi(t_2)$, имеет вероятность 1. Если учесть, что, кроме того, $\xi(t)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода и с вероятностью 1 $\xi(t)$ совпадает либо с $\xi(t-0)$, либо с $\xi(t+0)$ (ввиду сепарабельности процесса $\xi(t)$), получаем, что с вероятностью 1 $\xi(t_1) \leqslant \xi(t_2)$ для всех пар $t_1, t_2$, для которых $t_1 < t_2$. ∎

Исследуем условия, при которых реализации процесса $\xi(t)$ с вероятностью 1 имеют ограниченную вариацию.

Напомним, что вариацией на $[a, b]$ функции $x(t)$, определенной на $[a, b]$ и принимающей значения из $X$, называется величина $\operatorname{var}\limits_{[a,b]} x(t)$, определяемая соотношением

$$\operatorname*{var}_{[a,b]} x(t) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |x(t_i) - x(t_{i+1})|,$$

причем точная верхняя грань берется по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Теорема 2. *Для того чтобы реализации сепарабельного стохастически непрерывного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями, определенного на отрезке $[0, T]$, имели на этом отрезке с вероятностью 1 ограниченную вариацию, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция величины $\xi(t)$ определялась формулой* (10) § 4, *в которой* $\operatorname*{var}\limits_{[0,T]} a(t) < \infty$, $B(t) = 0$, *а мера* $\Pi(t, A)$ *такова, что*

$$\int_{0<|x|\leqslant 1} |x|\, \Pi(t, dx) < \infty.$$

*Доказательство.* Докажем сначала достаточность условий теоремы. Так как процесс, определяемый соотношением $\xi(t, X_1) = \int\limits_{|x|>1} x\nu(t, dx)$, будет с вероятностью 1 кусочно постоянным, то его вариация, совпадающая с суммой абсолютных величин скачков, будет конечной. Функция $a(t)$ по условию теоремы имеет ограниченную вариацию, поэтому для доказательства ограниченности вариации $\xi(t)$ достаточно доказать ограниченность вариации интеграла $\int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\tilde{\nu}(t, dx)$ как функции $t$ (см. формулу (7) § 4). Рассмотрим процесс

$$\xi^{(\varepsilon)}(t) = \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} x\tilde{\nu}(t, dx).$$

Легко подсчитать, что вариация процесса $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ на отрезке $[0, T]$ будет равна

$$\operatorname*{var}_{[0,T]} \xi^{(\varepsilon)}(t) = \operatorname*{var}_{[0,T]} \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} x\nu(t, dx) + \operatorname*{var}_{[0,T]} \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} x\Pi(t, dx).$$

Поэтому

$$\operatorname*{var}_{[0,T]} \xi^{(\varepsilon)}(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(T, dx) + \sup \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|(\Pi(t_k, dx) - \Pi(t_{k-1}, dx)) =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(T, dx) + \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\Pi(T, dx) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(T, dx) + \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} |x|\,\Pi(T, dx).$$

Существование $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(T, dx)$ вытекает из того, что величина $\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(T, dx)$ монотонно зависит от $\varepsilon$ и

$$\mathsf{M} \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(T, dx) \leqslant \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} |x|\,\Pi(T, dx) < \infty.$$

Можно подобрать последовательность $\varepsilon_n$, стремящуюся к нулю при $n\to\infty$, так, чтобы последовательность процессов $\xi^{(\varepsilon_n)}(t)$

с вероятностью 1 равномерно сходилась к процессу $\int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\tilde{\nu}(t, dx)$.

Поэтому с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\operatorname*{var}_{[0, T]} \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\tilde{\nu}(t, dx) \leqslant \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} |x|\nu(T, dx) + \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} |x|\Pi(T, dx).$$

(Легко видеть, что если $x_n(t)\to x(t)$ при каждом $t$, то

$$\sum_{k=0}^{m-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} |x_n(t_{k+1}) - x_n(t_k)| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \operatorname*{var}_{[0, T]} x_n(t),$$

а значит, $\operatorname*{var}_{[0, T]} x(t) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \operatorname*{var}_{[0, T]} x_n(t)$.) Отсюда и вытекает ограниченность вариации $\int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\tilde{\nu}(t, dx)$.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть вариация $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$ ограничена. Тогда она будет конечной и на каждом отрезке, являющемся частью $[0, T]$. Рассмотрим процесс

$$\zeta(t) = \operatorname*{var}_{[0, t]} \xi(s).$$

Этот процесс будет также процессом с независимыми приращениями, так как приращение $\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ при $t_1 < t_2$ является вариацией процесса на отрезке $[t_1, t_2]$ и поэтому зависит лишь от приращений процесса $\xi(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ и не зависит от значений $\xi(t)$ при $t \leqslant t_1$, а значит, и от значений $\zeta(t)$ при $t \leqslant t_1$. $\zeta(t)$ будет стохастически непрерывным процессом, так как вариация $\operatorname*{var}_{[0, t]} x(s)$ функции $x(s)$ может иметь разрывы лишь в точках разрыва самой функции $x(s)$, а процесс $\xi(t)$ ввиду стохастической непрерывности не имеет фиксированных разрывов. Очевидно, наконец, что $\zeta(t)$ является неубывающей функцией. Из сказанного выше вытекает, что всегда $\zeta(t+0) - \zeta(t-0) = |\xi(t+0) - \xi(t-0)|$. Поэтому, если $\zeta^{(\varepsilon)}(t)$ представляет собой сумму всех скачков $\zeta(t)$, превосходящих $\varepsilon$ и происходящих на $[0, t)$, то

$$\zeta^{(\varepsilon)}(t) = \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|\nu(t, dx).$$

Из монотонности процесса $\zeta(t)$ вытекает, что

$$\zeta(t) = \gamma(t) + \lim_{\varepsilon\to 0} \zeta^{(\varepsilon)}(t) = \gamma(t) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|\nu(t, dx)$$

(поскольку $\zeta(0)=0$), где $\gamma(t)$ — вариация непрерывной составляющей процесса $\xi(t)$. Кроме того,

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|\,\Pi(t, dx) = \mathsf{M}\,[\zeta(t)-\zeta^{(1)}(t)] < \infty.$$

Наконец, заметим, что если $\xi_0(t)$ — непрерывная составляющая процесса $\xi(t)$, то

$$|\xi_0(t)-\xi_0(0)| \leqslant \operatorname*{var}_{[0, T]} \xi_0(t) = \gamma(t)$$

и, значит,

$$|(\xi_0(t)-\xi_0(0), z)| \leqslant \gamma(t)\,|z|.$$

Но нормально распределенная величина с положительной дисперсией не может быть с вероятностью 1 ограничена какой бы то ни было постоянной (не зависящей от случая). Следовательно, при любом $z$ $\mathsf{D}\,(z, \xi_0(t)-\xi_0(0))=0$, т. е. $B(t)=0$. Таким образом, $\gamma(t)$ является вариацией функции

$$a(t) = \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\Pi(t, dx).$$

Так как $\operatorname*{var}\limits_{[0, T]} \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\Pi(t, dx) \leqslant \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} |x|\,\Pi(T, dx)$ конечна, то и $\operatorname*{var}\limits_{[0, T]} a(t) < \infty$. ■

Замечание. Из хода доказательства необходимости вытекает следующее утверждение: *если процесс* $\xi(t)$ *определяется соотношением*

$$\xi(t) = \xi(0) + a_1(t) + \int\limits_{|x|>0} x\nu(t, dx),$$

*то*

$$\zeta(t) = \operatorname*{var}_{[0, t]} \xi(s) = \operatorname*{var}_{[0, t]} a_1(s) + \int\limits_{|x|>0} |x|\,\nu(t, dx)$$

*и характеристическая функция величины* $\zeta(t)$ *дается формулой*

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\zeta(t)} = \exp\left\{i\lambda \operatorname*{var}_{[0, t]} a_1(s) + \int\limits_{|x|>0} (e^{i\lambda|x|}-1)\,\Pi(t, dx)\right\}.$$

Рассмотрим теперь однородный процесс со значениями в $\mathscr{R}^1$. Нас будет интересовать поведение $\xi(t)$ при $t\downarrow 0$ и $t\to\infty$.

Функцию $g(t)$, непрерывную и монотонно возрастающую при $t>0$, будем называть *функцией регулярного роста*, если существуют такие функции $k_1(\lambda)$ и $k_2(\lambda)$, что $k_1(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\infty$, $k_2(\lambda)\to 1$ при $\lambda\to 1$ и

$$k_1(\lambda)\,g(t) \leqslant g(\lambda t) \leqslant k_2(\lambda)\,g(t).$$

Функция регулярного роста $g(t)$ называется *верхней функцией* для процесса $\xi(t)$ при $t \uparrow \infty$ $(t \downarrow 0)$, если

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\xi(t)}{g(t)} > 1\right\} = 1 \quad \left(\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\xi(t)}{g(t)} > 1\right\} = 1\right),$$

и *нижней функцией* при $t \uparrow \infty$ $(t \downarrow 0)$, если

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\xi(t)}{g(t)} < 1\right\} = 1 \quad \left(\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\xi(t)}{g(t)} < 1\right\} = 1\right).$$

В первую очередь рассмотрим верхние и нижние функции для симметричных однородных процессов с независимыми приращениями. Затем будут рассмотрены верхние и нижние функции для $|\xi(t)|$, где $\xi(t)$ уже не обязательно симметричный процесс.

Процесс $\xi(t)$ называется *симметричным*, если процессы $\xi(t)$ и $-\xi(t)$ имеют одинаковые конечномерные распределения. Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Если $\xi(t)$ — симметричный сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, то*

$$\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \xi(t) > c\} \leqslant 2\mathsf{P}\{\xi(T) > c\}. \tag{3}$$

*Доказательство.* Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и симметрично распределены, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Тогда

$$\mathsf{P}\{\sup_k S_k > c\} \leqslant 2\mathsf{P}\{S_n > c\}. \tag{4}$$

Действительно, так как $2\mathsf{P}\{S_n - S_k \geqslant 0\} \geqslant 1$, то

$$\mathsf{P}\{\sup_k S_k > c\} = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\sup_{i\leqslant k-1} S_i \leqslant c,\ S_k > c\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\sup_{i\leqslant k-1} S_i \leqslant c,\ S_k > c\}\, 2\mathsf{P}\{S_n - S_k \geqslant 0\} =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\sup_{i\leqslant k-1} S_i \leqslant c,\ S_k > c,\ S_n - S_k \geqslant 0\}.$$

События $\{\sup_{i\leqslant k-1} S_i \leqslant c,\ S_k > c,\ S_n - S_k \geqslant 0\}$ несовместимы, и каждое из них влечет событие $\{S_n > c\}$. Поэтому

$$2\mathsf{P}(S_n > c\} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\sup_{i\leqslant k-1} S_i \leqslant c,\ S_k > c,\ S_n - S_k \geqslant 0\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{P}\{\sup_k S_k > c\}.$$

Формула (4) установлена. Применим теперь формулу (4) к величинам

$$\xi_k = \xi\left(\frac{k}{n}T\right) - \xi\left(\frac{k-1}{n}T\right), \quad \xi_1 = \xi\left(\frac{T}{n}\right).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \xi\left(\frac{kT}{n}\right) > c\right\} \leqslant 2\mathsf{P}\{\xi(T) > c\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая, что $\xi(t)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода, так что

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \xi\left(\frac{kT}{n}\right) = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\xi(t)\right\} = 1,$$

мы получаем (3). ■

Теорема 3. *Пусть $\xi(t)$ — симметричный однородный сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, а $g(t)$ — функция регулярного роста, для которой*

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathsf{P}\{\xi(t) > g(t)\}\,dt < \infty.$$

*Тогда для любого $\lambda > 1$ функция $\lambda g(t)$ будет верхней функцией для процесса $\xi(t)$ при $t\to\infty$.*

*Доказательство.* Пусть $a > 1$. Обозначим через $A_k$ событие, заключающееся в том, что $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant a^k}\xi(t) > g(a^{k+1})$. Тогда на основании леммы 1

$$\mathsf{P}\{A_k\} \leqslant 2\mathsf{P}\{\xi(a^k) > g(a^{k+1})\}.$$

Но при $t\in[a^k, a^{k+1}]$ будет $g(t) < g(a^{k+1})$, $2\mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(a^k) \geqslant 0\} \geqslant 1$, поэтому

$$\mathsf{P}\{A_k\} \leqslant 4\mathsf{P}\{\xi(a^k) > g(t)\}\,\mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(a^k) \geqslant 0\} \leqslant 4\mathsf{P}\{\xi(t) > g(t)\}.$$

Следовательно,

$$\int_{a^k}^{a^{k+1}} \frac{1}{t}\mathsf{P}\{A_k\}\,dt \leqslant 4\int_{a^k}^{a^{k+1}} \frac{1}{t}\mathsf{P}\{\xi(t) > g(t)\}\,dt$$

и

$$\sum_{k=1}^n \mathsf{P}\{A_k\} \leqslant \frac{4}{\ln a}\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathsf{P}\{\xi(t) > g(t)\}\,dt.$$

Из леммы Бореля — Кантелли следует, что с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $A_k$, т. е., начиная с некоторого (вообще говоря, случайного) номера, события $A_k$ не происходят. Значит,

$$\mathsf{P}\left\{\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{g(a^{k+1})}\sup_{a^{k-1}\leqslant t\leqslant a^k}\xi(t)\leqslant 1\right\}=1.$$

При $t\in[a^{k-1}, a^k]$

$$\frac{\xi(t)}{k_2(a^2)\,g(t)}\leqslant\frac{1}{k_2(a^2)\,g(a^{k-1})}\sup_{a^{k-1}\leqslant t\leqslant a^k}\xi(t)\leqslant\frac{1}{g(a^{k+1})}\sup_{a^{k-1}\leqslant t\leqslant a^k}\xi(t).$$

Поэтому $\lambda g(t)$ при любом $a>1$ и $\lambda>k_2(a^2)$ будет верхней функцией для $\xi(t)$. ■

Очевидно, что утверждение теоремы справедливо и для неоднородного процесса $\xi(t)$, так как при доказательстве теоремы однородность не использовалась.

Теорема 4. *Пусть $\xi(t)$ — симметричный однородный процесс с независимыми приращениями, а $g(t)$ — функция регулярного роста, удовлетворяющая условию: для всех $a>1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\xi(a^k)>g(a^k)\}$ расходится. Тогда $\lambda g(t)$ будет нижней функцией для процесса $\xi(t)$ для любого $\lambda\in(0,1)$ при $t\to\infty$.*

*Доказательство.* Рассмотрим два случая.

1) Пусть

$$\varliminf_{t\to\infty}\mathsf{P}\{|\xi(t)|<g(t)\}=0.$$

Тогда найдется такая последовательность $t_k\to\infty$, что

$$\mathsf{P}\{|\xi(t_k)|<g(t_k)\}<2^{-k}.$$

Следовательно, в силу леммы Бореля — Кантелли

$$\mathsf{P}\left\{\varlimsup_{k\to\infty}\frac{|\xi(t_k)|}{g(t_k)}\geqslant 1\right\}=1.$$

Но тогда, каково бы ни было $\lambda\in(0, 1)$,

$$\mathsf{P}\left\{\varlimsup_{t\to\infty}\frac{|\xi(t)|}{\lambda g(t)}>1\right\}=1. \tag{5}$$

2) Пусть

$$\varliminf_{t\to\infty}\mathsf{P}\{|\xi(t)<g(t)\}>\delta>0.$$

Тогда для всех достаточно больших $t$

$$\mathsf{P}\{|\xi(t)|<g(t)\}>\delta.$$

Рассмотрим независимые события

$$B_k=\{\xi(a^{k+1})-\xi(a^k)>g(a^{k+1})-g(a^k)\},$$

где $a > 1$. Тогда

$$\mathsf{P}(B_k) \geqslant \int_{-g(a^k)}^{g(a^k)} \mathsf{P}\{\xi(a^{k+1}) - z > g(a^{k+1}) - g(a^k)\}\,\mathsf{P}\{\xi(a^k) \in dz\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\{\xi(a^{k+1}) > g(a^{k+1})\} \int_{-g(a^k)}^{g(a^k)} \mathsf{P}\{\xi(a^k) \in dz\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi(a^{k+1}) > g(a^{k+1})\}\,\mathsf{P}\{|\xi(a^k)| \leqslant g(a^k)\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\{\xi(a^{k+1}) > g(a^{k+1})\}\,\delta$$

для достаточно больших $k$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{B_k\}$ расходится, и поэтому на основании леммы Бореля — Кантелли с вероятностью 1 произойдет бесконечно много событий $B_k$. Заметим, что событие $B_k$ влечет одно из событий

$$\{-\xi(a^k) > g(a^k)\}, \quad \{\xi(a^{k+1}) > g(a^{k+1}) - 2g(a^k)\}.$$

Поэтому с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий

$$\{|\xi(a^k)| > g(a^k) - 2g(a^{k-1})\}.$$

Выбирая $a$ так, чтобы

$$g(a^k) - 2g(a^{k-1}) = g(a^k)\left[1 - \frac{2g(a^{k-1})}{g(a^k)}\right] \geqslant$$

$$\geqslant g(a^k)\left[1 - \frac{2}{k_1(a)}\right] > \lambda g(a^k) \qquad (0 < \lambda < 1)$$

(возможность такого выбора $a$ обеспечивается регулярностью роста $g(t)$), убеждаемся, что и в этом случае выполнено (5).

Введем события

$$C = \left\{\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\xi(t)}{\lambda g(t)} > 1\right\}, \qquad D = \left\{\varlimsup_{t\to\infty} \frac{-\xi(t)}{\lambda g(t)} > 1\right\}.$$

Тогда из (5) вытекает, что $\mathsf{P}(C \cup D) = 1$. Из симметрии процесса $\xi(t)$ заключаем, что $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(D)$. Наконец, из «закона нуля и единицы» (теорема 7 § 4 гл. II) следует, что $\mathsf{P}(C)$ и $\mathsf{P}(D)$ могут равняться лишь нулю или единице. Значит, $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(D) = 1$, так как в противном случае $\mathsf{P}(C) = 0$, а значит, и $\mathsf{P}(C \cup D) = 0$, что противоречит (5). ∎

Замечание 1. Не меняя доказательства теорем 3 и 4, беря лишь $a < 1$, убеждаемся в справедливости следующих утверждений:

*пусть* $\varphi(t)$ — *функция регулярного роста;*

а) *если* $\xi(t)$ — *симметричный сепарабельный однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями,*

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \mathsf{P}\{\xi(t) > \varphi(t)\}\, dt < \infty,$$

*то при* $\lambda > 1$ *функция* $\lambda\varphi(t)$ *будет верхней для процесса* $\xi(t)$ *при* $t \downarrow 0$, *т. е.*

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\xi(t)}{\lambda\varphi(t)} < 1\right\} = 1;$$

б) *если* $\xi(t)$ — *однородный симметричный процесс с независимыми приращениями, для которого ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi(a^k) > \varphi(a^k)\}$ *расходится при любом* $a < 1$, *то при* $\lambda < 1$ *функция* $\lambda\varphi(t)$ *будет нижней для* $\xi(t)$ *при* $t \downarrow 0$, *т. е.*

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\xi(t)}{\lambda\varphi(t)} > 1\right\} = 1.$$

Применим полученные результаты к процессу броуновского движения. Этот процесс является симметричным.

Используя оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2/2}\, du \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \frac{u}{z} e^{-u^2/2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, z} e^{-z^2/2} \quad (z > 0),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2/2}\, du \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{z+1} e^{-u^2/2}\, du \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z+1)^2/2} \quad (z > 0),$$

убеждаемся в справедливости неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{z}{\sqrt{t}} + 1\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right\} \leqslant \mathsf{P}\{w(t) > z\} \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\, \frac{1}{z}\, e^{-\frac{z^2}{2t}}.$$

Покажем, что $(1+\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$ и $(1-\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ будут соответственно верхней и нижней функциями. Действительно,

$$\mathsf{P}\left\{w(t) > (1+\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\varepsilon)^2\, 2\ln\ln t}} \exp\left\{-\frac{(1+\varepsilon)^2\, 2\ln\ln t}{2}\right\} = O\left((\ln t)^{-(1+\varepsilon)^2}\right),$$

а интеграл $\int\limits_c^\infty \frac{dt}{t(\ln t)^{(1+\varepsilon)^2}}$ при $c>1$ сходится. С другой стороны,

$$\mathsf{P}\left\{w(a^k) > (1-\varepsilon)\sqrt{2a^k \ln\ln a^k}\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln a^k}+1\right)^2\right\} =$$
$$= \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-(1-\varepsilon)^2 \ln\ln a^k - (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln a^k}\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\left[\ln a^k\right]^{-\alpha} = \frac{c_1}{k^\alpha},$$

где $c_1$ — некоторая постоянная, если только

$$\alpha > (1-\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{\ln\ln a^k}}.$$

Очевидно, что для достаточно больших $k$ можно взять $\alpha < 1$. Следовательно, ряд $\sum \mathsf{P}\left\{w(a^k) > (1-\varepsilon)\sqrt{2a^k \ln\ln a^k}\right\}$ расходится. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если $w(t)$ — сепарабельный процесс броуновского движения, то*

$$\mathsf{P}\left\{\varlimsup_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1\right\} = 1.$$

Используя замечание 1, можно установить, что справедлива

Теорема 6. *Если $w(t)$ — сепарабельный процесс броуновского движения, то*

$$\mathsf{P}\left\{\varlimsup_{t\to 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = 1\right\} = 1.$$

Теоремы 5 и 6 называют «законом повторного логарифма».

При изучении верхних и нижних функций для $|\xi(t)|$, где $\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями, используются некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 2. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ и при некоторых $\alpha < 1$ и $c > 0$*

$$\mathsf{P}\{|S_n - S_k| > c\} \leqslant \alpha, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

*Тогда при $a > 0$*

$$\mathsf{P}\{\sup_k |S_k| > a + c\} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\mathsf{P}\{|S_n| > a\}.$$

*Доказательство.* Имеем

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_k \big[\{\sup_{i\leqslant k-1} |S_i| \leqslant a+c\} \cap \{|S_k| > a+c\} \cap$$
$$\cap \{|S_n - S_k| \leqslant c\}\big]\Big) \leqslant \mathsf{P}\{|S_n| > a\}.$$

Поэтому

$$\sum_k \mathsf{P}(\{\sup_{i\leqslant k-1}|S_i|\leqslant a+c\}\cap\{|S_k|>a+c\})\,\mathsf{P}\{|S_n-S_k|\leqslant c\}\leqslant \leqslant \mathsf{P}\{|S_n|>a\},$$

$$\Big[\sum_k \mathsf{P}(\{\sup_{i\leqslant k-1}|S_i|\leqslant a+c\}\cap\{|S_k|>a+c\})\Big](1-\alpha)\leqslant \mathsf{P}\{|S_n|>a\}.$$

В квадратных скобках слева стоит $\mathsf{P}\{\sup_k |S_k|>a+c\}$. ■

Лемма 3. *Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, для которого существует такое $\alpha<1$, что при $0<s\leqslant T$ $\mathsf{P}\{|\xi(T)-\xi(s)|>>c\}\leqslant\alpha$. Тогда для всякого $x>0$*

$$\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi(s)|>c+x\}\leqslant\frac{1}{1-a}\mathsf{P}\{|\xi(T)|>x\}. \tag{6}$$

*Доказательство.* Из леммы 2 вытекает соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\xi\left(\frac{k}{n}T\right)\right|>x+c\right\}\leqslant\frac{1}{1-a}\mathsf{P}\{|\xi(T)|>x\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем доказательство леммы. ■

Теорема 7. *Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями и $g(t)$ — функция регулярного роста такая, что при любом $\varepsilon>0$*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathsf{P}\{|\xi(t)|>\varepsilon g(t)\}<1$$

*и*

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathsf{P}\{|\xi(t)|>g(t)\}\,dt<\infty.$$

*Тогда при любом $\lambda>1$ функция $\lambda g(t)$ будет верхней функцией для $|\xi(t)|$, т. е.*

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\xi(t)|}{g(t)}\leqslant 1\right\}=1.$$

*Доказательство.* Выберем $a\in(1,2)$ и $\varepsilon>0$. Обозначим через $A_k$ событие $\{\sup_{t\leqslant a^k}|\xi(t)|>(1+2\varepsilon)\,g(a^{k+1})\}$. Из условий теоремы вытекает, что существуют такие $c>0$ и $T_0$, что $\mathsf{P}\{|\xi(t)|>\varepsilon g(t)\}\leqslant\leqslant 1-c$ при $t>T_0$. Поэтому для достаточно больших $k$ при $t<a^k$

$$\mathsf{P}\{|\xi(a^k)-\xi(t)|>\varepsilon g(a^{k+1})\}=\mathsf{P}\{|\xi(a^k-t)|>\varepsilon g(a^{k+1})\}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\begin{matrix}\sup_{s\geqslant T_0}\mathsf{P}\{|\xi(s)|>\varepsilon g(s)\}\\ \sup_{s\leqslant T_0}\mathsf{P}\{|\xi(s)|>\varepsilon g(a^{k+1})\}\end{matrix}\right\}\leqslant 1-c,$$

так что для всех достаточно больших $k$ на основании леммы 3

$$\mathsf{P}\{A_k\} \leqslant \frac{1}{c} \mathsf{P}\{|\xi(a^k)| > (1+\varepsilon) g(a^{k+1})\}.$$

Учитывая, что при $t \in [a^k, a^{k+1}]$ имеем $t - a^k \leqslant (a-1) a^k \leqslant a^k$ и, значит $\mathsf{P}\{|\xi(t) - \xi(a^k)| > \varepsilon g(a^k)\} < 1 - c$ для достаточно больших $k$, получаем

$$\mathsf{P}\{A_k\} \leqslant \frac{1}{c^2} \mathsf{P}\{|\xi(a^k)| > (1+\varepsilon) g(a^{k+1})\} \times$$
$$\times \mathsf{P}\{|\xi(t) - \xi(a^k)| \leqslant \varepsilon g(a^{k+1})\} \leqslant \frac{1}{c^2} \mathsf{P}\{|\xi(t)| > g(a^{k+1})\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{c^2} \mathsf{P}\{|\xi(t)| > g(t)\},$$

так что

$$\mathsf{P}\{A_k\} \leqslant \frac{(\ln a)^{-1}}{c^2} \int\limits_{a^k}^{a^{k+1}} \frac{1}{t} \mathsf{P}\{|\xi(t)| > g(t)\}\, dt,$$

$$\sum_{k=l}^{\infty} \mathsf{P}\{A_k\} \leqslant (\ln a)^{-1} c^{-2} \int\limits_{a^l}^{\infty} \frac{1}{t} \mathsf{P}\{|\xi(t)| > g(t)\}\, dt.$$

Значит, с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $A_k$. Используя рассуждения теоремы 4, убеждаемся, что функция $\lambda(1+2\varepsilon) k_2(a^2) g(t)$ при $\lambda > 1$ будет верхней для $|\xi(t)|$. Так как $k_2(a) \to 1$ при $a \to 1$, то из того, что $a - 1$ и $\varepsilon > 0$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, и вытекает утверждение теоремы. ■

Анализируя доказательства теоремы 4, нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 8. *Пусть $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями. Если функция регулярного роста такова, что при любом $a > 1$ расходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|\xi(a^k)| > g(a^k)\},$$

*то при всяком $0 < \lambda < 1$ функция $\lambda g(t)$ будет нижней функцией для $|\xi(t)|$, т. е.*

$$\mathsf{P}\left\{ \varlimsup_{t \to \infty} \frac{|\xi(t)|}{g(t)} \geqslant 1 \right\} = 1.$$

Результаты теорем 7 и 8 можно переформулировать для того случая, когда $t \to 0$, аналогично тому, как это сделано в замечании 1.

ГЛАВА VII

# СКАЧКООБРАЗНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

## § 1. Общее определение марковского процесса

В § 4 гл. I уже рассматривались марковские процессы в широком смысле. Там же были введены вероятности перехода марковского процесса $\mathsf{P}(s, x, t, A)$ — вероятность находиться процессу в момент $t$ во множестве состояний $A$ при условии, что в момент $s$ он находился в состоянии $x$. Вероятности перехода позволяют построить при помощи теоремы Колмогорова (гл. III, § 2) целое семейство вероятностных мер в пространстве функций $\mathsf{P}_{s,x}$, задаваемых на цилиндрических множествах пространства $F_{[s,\infty)}$ всех функций, определенных на $[s, \infty)$, равенствами: при $s < t_1 < \ldots < t_k$

$$\mathsf{P}_{s,x}\{x(\cdot):\ x(t_1) \in A_1, \ldots, x(t_k) \in A_k\} = \\ = \int_{A_1} \mathsf{P}(s, x, t_1, dx_1) \ldots \int_{A_k} \mathsf{P}(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, dx_k). \quad (1)$$

Меры $\mathsf{P}_{s,x}$ естественно трактовать как условные распределения марковского процесса, рассматриваемого на промежутке $[s, \infty)$, при условии, что в момент $s$ он находился в состоянии $x$. Таким образом, в отличие от обычного определения случайного процесса, когда имелось лишь одно вероятностное пространство, при рассмотрении марковских процессов мы будем исходить из некоторого семейства вероятностных пространств, которые будут различаться как $\sigma$-алгебрами, так и мерами.

В гл. IV было показано, что во многих случаях удается построить меру, согласованную с конечномерными распределениями процесса, на более узком функциональном пространстве, чем пространство всех функций. Процессы, выборочные функции которых обладают определенными свойствами регулярности, представляют собой более богатый объект для изучения, и для приложений они более важны. Поэтому мы будем предполагать, что выборочные функции процесса при условии, что он начинается в момент $s$, принадлежат некоторому функциональному пространству $F_s$ $(s \geqslant 0)$. Функциональные пространства $F_s$ согласованы следующим образом: для всех $x(\cdot) \in F_s$ ограничение функции $x(\cdot)$ на $[u, \infty)$ $(u > s)$ принадлежит $F_u$.

Наконец, при изучении марковских процессов очень существенную роль играет такое понятие, как «прошлое». Если процесс начался в момент $s$, то «прошлое» в момент $t$ определяется теми событиями, которые можно наблюдать на промежутке времени $[s, t]$. Множество таких событий обозначим $\mathfrak{S}_t^s$. Естественно предположить, что $\mathfrak{S}_t^s$ есть некоторая $\sigma$-алгебра, причем $\mathfrak{S}_{t_1}^s \subset \subset \mathfrak{S}_{t_2}^s$ при $t_1 < t_2$, и что значение процесса в момент $t$ измеримо относительно $\mathfrak{S}_t^s$ (это означает, что значение процесса в данный момент может быть наблюдаемо).

Итак, будем говорить, что задан марковский процесс, если заданы следующие объекты:

а) измеримое пространство $\{X, \mathfrak{B}\}$ — фазовое пространство процесса;

б) семейство функциональных пространств $F_s$ $(s \geqslant 0)$ функций со значениями в $X$, удовлетворяющих условию согласования: ограничение функции из $F_s$ на $[u, \infty)$ принадлежит $F_u$ при $u > s$;

в) измеримое пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$, совокупность $\sigma$-алгебр $\mathfrak{S}_t^s \subset \mathfrak{S}$, определенных при $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, таких, что $\mathfrak{S}_{t_1}^{s_1} \subset \mathfrak{S}_{t_2}^{s_2}$ при $[s_1, t_1] \subset [s_2, t_2]$;

г) семейство вероятностных мер $\mathsf{P}_{s,x}$, $s \in [0, \infty)$, $x \in X$, определенных на $\sigma$-алгебрах $\mathfrak{S}^s = \bigcup\limits_t \mathfrak{S}_t^s$;

д) функция $x_s(t, \omega)$, определенная на $[s, \infty)$ и удовлетворяющая условиям:

1) $x_s(\cdot, \omega) \in F_s$ при $\omega \in \Omega$;

2) $x_s(t, \omega)$ измерима относительно $\mathfrak{S}_t^u$, каковы бы ни были $s \leqslant u \leqslant t$;

3) $\mathsf{P}_{s,x}(\{\omega\colon x_s(s, \omega) = x\}) = 1$;

4) при $B \in \mathfrak{B}$, $s < u < t$

$$\mathsf{P}_{s,x}\big(\{\omega\colon x_s(t, \omega) \in B\} \mid \mathfrak{S}_u^s\big) = \\ = \mathsf{P}_{u, x_s(u, \omega)}(\{\omega\colon x_u(t, \omega) \in B\}) \pmod{\mathsf{P}_{s,x}}. \quad (2)$$

Марковский процесс, определяемый перечисленными объектами, будем обозначать $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s,x}\}$; $x_s(\cdot, \omega)$ — выборочные функции процесса; $\mathfrak{S}_t^s$ — $\sigma$-алгебра событий, наблюдаемых на $[s, t]$; $\mathsf{P}_{s,x}$ — распределение вероятностей для процесса, начинающегося в момент $s$ из точки $x$; (2) определяет основное свойство марковости (марковское свойство) — независимость от прошлого при заданном настоящем.

Переходные вероятности процесса теперь можно ввести соотношением

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \mathsf{P}_{s, x}(\{\omega:\ x_s(t, \omega) \in B\}). \qquad (3)$$

Будем предполагать, что всегда выполнено условие

5) переходная вероятность измерима по $x$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{B}$.

Тогда из (2) легко получаем уравнение Колмогорова — Чепмена: при $s < u < t$

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \mathsf{P}_{s, x}(\{\omega:\ x_s(t, \omega) \in B\}) =$$
$$= \mathsf{M}_{s, x}\mathsf{P}_{s, x}\big(\{\omega: x_s(t, \omega) \in B\} \mid \mathfrak{S}_u^s\big) = \mathsf{M}_{s, x}\mathsf{P}_{u, x_s(u, \omega)}(\{\omega:\ x_u(t, \omega) \in B\}) =$$
$$= \mathsf{M}_{s, x}\mathsf{P}(u, x_s(u, \omega), t, B) = \int \mathsf{P}(s, x, u, dy)\,\mathsf{P}(u, y, t, B).$$

Здесь и в дальнейшем через $\mathsf{M}_{s, x}$ обозначается математическое ожидание по мере $\mathsf{P}_{s, x}$ для $\mathfrak{S}^s$-измеримой величины $\xi(\omega)$

$$\mathsf{M}_{s, x}\xi(\omega) = \int \xi(\omega)\,\mathsf{P}_{s, x}(d\omega). \qquad (4)$$

Соотношение (2) можно записать в терминах математических ожиданий: при $s < u < t$

$$\mathsf{M}_{s, x}\big(g(x_s(t, \omega)) \mid \mathfrak{S}_u^s\big) = \mathsf{M}_{u, x_s(u, \omega)}g(x_u(t, \omega)) \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}_{s, x}) \qquad (5)$$

для любой ограниченной $\mathfrak{B}$-измеримой функции $g$. Действительно, взяв $g(x) = \chi_B(x)$, где $\chi_B$ — индикатор $B$, из (5) получим (2). С другой стороны, из (2) вытекает справедливость (5) для индикаторов измеримых множеств, а значит, и для простых функций, являющихся линейными комбинациями индикаторов; остается заметить, что любая ограниченная измеримая функция является равномерным пределом простых. Заметим также, что $\mathsf{M}_{s, x}g(x_s(t, \omega))$ является $\mathfrak{B}$-измеримой функцией по $x$ для всех неотрицательных $\mathfrak{B}$-измеримых $g$. Это вытекает из измеримости $\mathsf{M}_{s, x}\chi_B(x_s(t, \omega))$, а значит, измеримости указанного выражения при простых $g$ и $g$, являющихся пределами простых.

Пусть $s < u < t_1 < \ldots < t_n$, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — ограниченные $\mathfrak{B}$-измеримые функции. Тогда

$$\mathsf{M}_{s, x}\Big(\prod_{k=1}^{n} g_k(x_s(t_k, \omega)) \,\Big|\, \mathfrak{S}_u^s\Big) =$$
$$= \mathsf{M}_{u, x_s(u, \omega)}\prod_{k=1}^{n} g_k(x_u(t_k, \omega)) \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}_{s, x}). \qquad (6)$$

Действительно, используя повторные условные математические ожидания, получим

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(\prod_{k=1}^{n} g_k(x_s(t_k,\omega))\,\Big|\,\mathfrak{S}_u^s\right) = \\ = \mathsf{M}_{s,x}\left(\mathsf{M}_{s,x}\left(\prod_{k=1}^{n} g_k(x_s(t_k,\omega))\,\Big|\,\mathfrak{S}_{t_{n-1}}^s\right)\Big|\,\mathfrak{S}_u^s\right) = \\ = \mathsf{M}_{s,x}\left(\prod_{k=1}^{n-1} g_s(x_u(t_k,\omega))\cdot \mathsf{M}_{t_{n-1},\,x_s(t_{n-1},\,\omega)} g_n\left(x_{t_{n-1}}(t_n,\omega)\right)\Big|\,\mathfrak{S}_u^s\right).$$

Теперь под знаком математического ожидания стоит произведение уже $n-1$ функций, если считать последнюю функцию равной

$$g_{n-1}(x)\,\mathsf{M}_{t_{n-1},\,x} g_n\left(x_{t_{n-1}}(t_n,\omega)\right).$$

Поэтому, воспользовавшись индукцией, найдем

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(\prod_{k=1}^{n} g_k(x_s(t,\omega))\,\Big|\,\mathfrak{S}_u^s\right) = \\ = \mathsf{M}_{s,x}\Big(g_1(x_s(t_1,\omega))\,\mathsf{M}_{t_1,\,x_s(t_1,\,\omega)} g_2\left(x_{t_1}(t_2,\omega)\right)\times \\ \times \mathsf{M}_{t_2,\,x_{t_1}(t_2,\,\omega)} g_3\left(x_{t_2}(t_3,\omega)\right)\times\ldots \\ \ldots\times \mathsf{M}_{t_{n-1},\,x_{t_{n-2}}(t_{n-1},\,\omega)} g_n\left(x_{t_{n-1}}(t_n,\omega)\right)\Big|\,\mathfrak{S}_u^s\Big) = \\ = \mathsf{M}_{u,\,x_s(u,\,\omega)} g_1(x_u(t_1,\omega))\,\mathsf{M}_{t_1,\,x_u(t_1,\,\omega)} g_2\left(x_{t_1}(t_2,\omega)\right)\times\ldots \\ \ldots\times \mathsf{M}_{t_{n-1},\,x_{t_{n-2}}(t_{n-1},\,\omega)} g_n\left(x_{t_{n-1}}(t_n,\omega)\right)\quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}_{s,x}). \tag{7}$$

Полагая в последней формуле $s=u$, находим

$$\mathsf{M}_{u,x}\left(\prod_{k=1}^{n} g_k(x_u(t,\omega))\right) = \mathsf{M}_{u,x} g_1(x_u(t,\omega))\times \\ \times \mathsf{M}_{t_1,\,x_u(t_1,\,\omega)} g_2\left(x_{t_1}(t_2,\omega)\right)\ldots \mathsf{M}_{t_{n-1},\,x_{t_{n-2}}(t_{n-1},\,\omega)} g\left(x_{t_{n-1}}(t_n,\omega)\right). \tag{8}$$

Если в (8) вместо $x$ подставим $x_s(u,\omega)$, то получим выражение для правой части (6). Поскольку оно совпадает с правой частью (7), (6) доказано.

Введем $\sigma$-алгебры $\mathfrak{N}_t^s$ — это $\sigma$-алгебры событий, порожденная величинами $x_u(t',\omega)$ при $u\leqslant s$, $t'\in[s,t]$. $\mathfrak{N}_t^s$ — $\sigma$-алгебра событий, порожденных процессом, наблюдаемым на отрезке $[s,t]$. Так как в силу условия д, 2) $x_u(t',\omega)$ $\mathfrak{S}_t^s$-измеримо при

$u \leqslant s \leqslant t' \leqslant t$, то $\mathfrak{N}_t^s \subset \mathfrak{S}_t^s$. $\sigma$-алгебры $\mathfrak{N}_t^s$ удовлетворяют всем условиям, которые налагались на $\sigma$-алгебры $\mathfrak{S}_t^s$ при определении марковского процесса (это условия б), д 2) и д 4)). В проверке нуждается лишь условие д 4). Но по формуле повторных условных математических ожиданий

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(g(x_s(t,\omega)) \mid \mathfrak{N}_u^s\right) = \mathsf{M}_{s,x}\left(\mathsf{M}_{s,x}\left(g(x_s(t,\omega)) \mid \mathfrak{S}_u^s\right) \mid \mathfrak{N}_u^s\right) =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x}\left(\mathsf{M}_{u,x_s(u,\omega)} g(x_u(t,\omega)) \mid \mathfrak{N}_u^s\right) = \mathsf{M}_{u,x_s(u,\omega)} g(x_u(t,\omega))$$
$$(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}_{s,x}), \quad s \leqslant u \leqslant t,$$

так как $\mathfrak{N}_u^s \subset \mathfrak{S}_u^s$ и $x_s(u,\omega)$ — $\mathfrak{N}_u^s$-измеримая величина, а функция $\mathsf{M}_{u,x} g(x_u(t,\omega))$ — $\mathfrak{B}$-измерима. Мы показали, что (5) имеет место, если $\mathfrak{S}_u^s$ заменить на $\mathfrak{N}_u^s$.

Таким образом, если $\{x_t(s,\omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s,x}\}$ — марковский процесс, то и $\{x_t(s,\omega), \mathfrak{N}_t^s, \widehat{\mathsf{P}}_{s,x}\}$, где $\widehat{\mathsf{P}}_{s,x}$ — ограничение меры $\mathsf{P}_{s,x}$ на $\mathfrak{N}^s = \bigcup_t \mathfrak{N}_t^s$, также является марковским. Очевидно, что $\mathfrak{N}_t^s$ — семейство минимальных $\sigma$-алгебр, относительно которых $x_t(s,\omega)$ может быть марковским.

Приведем, наконец, соотношение, обобщающее (6) и выражающее марковское свойство в самом общем виде. Пусть $\xi(\omega)$ является ограниченной $\mathfrak{N}^t$-измеримой величиной. Тогда при $s \leqslant u \leqslant t$

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(\xi(\omega) \mid \mathfrak{S}_u^s\right) = \mathsf{M}_{u,x_s(u,\omega)} \xi(\omega) \quad (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}_{s,x}). \tag{9}$$

(9) вытекает из (6), так как всякая ограниченная $\mathfrak{N}^t$-измеримая величина представима как предел по вероятности $\mathsf{P}_{s,x}$ сумм вида

$$\sum_m \prod_{k=1}^{n_m} g_k^{(m)}\left(x_s\left(t_k^{(m)}, \omega\right)\right).$$

Пусть, далее, $\eta(\omega)$ — $\mathfrak{S}_t^s$-измеримая величина. Из (9) вытекает

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\, \mathsf{M}_{s,x}\left(\eta(\omega) \mid \mathfrak{N}^t\right) = \mathsf{M}_{s,x}\eta(\omega)\xi(\omega) = \mathsf{M}_{s,x}\eta(\omega)\, \mathsf{M}_{t,x_s(t,\omega)}\xi(\omega) =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x}\left(\mathsf{M}_{t,x_s(t,\omega)}\xi(\omega)\right) \mathsf{M}_{s,x}\left(\eta_\omega \mid \mathfrak{N}_t^t\right) = \mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\, \mathsf{M}_{s,x}\left(\eta(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^t\right).$$

Значит,

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(\eta(\omega) \mid \mathfrak{N}^t\right) = \mathsf{M}_{s,x}\left(\eta(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^t\right).$$

В силу (9) и $\mathsf{M}_{s,x}\left(\xi(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^s\right) = \mathsf{M}_{s,x}\left(\xi(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^t\right)$. Поэтому, какова бы ни была ограниченная измеримая функция $g(x)$,

$$\mathsf{M}_{s,x}\eta(\omega)\, g\left(x_s(t,\omega)\right)\xi(\omega) = \mathsf{M}_{s,x}\eta(\omega)\, g_s\left(x_s(t,\omega)\right) \mathsf{M}_{s,x}\left(\xi(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^t\right) =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x} g_s\left(x_s(t,\omega)\right) \mathsf{M}_{s,x}\left(\xi(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^t\right) \mathsf{M}_{s,x}\left(\eta(\omega) \mid \mathfrak{N}_t^t\right).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\mathsf{M}_{s,\,x}\big(\eta(\omega)\,\xi(\omega)\,|\mathfrak{N}_t^t\big)=\mathsf{M}_{s,\,x}\big(\eta(\omega)\,|\,\mathfrak{N}_t^t\big)\,\mathsf{M}_{s,\,x}\big(\xi(\omega)\,|\,\mathfrak{N}_t^t\big), \qquad (10)$$

выражающее независимость прошлого от будущего при заданном настоящем.

Укажем сейчас некоторые полезные расширения σ-алгебр $\mathfrak{N}_t^s$, относительно которых марковость будет сохраняться. Обозначим $\mathfrak{N}_t^{s,\,x}$ пополнение σ-алгебры $\mathfrak{N}_t^s$ по мере $\mathsf{P}_{s,\,x}$, $\bar{\mathsf{P}}_{s,\,x}$ — пополнение меры,

$$\bar{\mathfrak{N}}_t^s=\bigcap_x \mathfrak{N}_t^{s,\,x}.$$

Тогда $\{x_t(s,\,\omega),\ \bar{\mathfrak{N}}_t^s,\ \bar{\mathsf{P}}_{s,\,x}\}$ (мы будем обозначать сужение меры на меньшую σ-алгебру тем же символом, если это не вызывает путаницы) также является марковским процессом. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что выполнено (5), если $\mathfrak{S}_u^s$ заменить $\bar{\mathfrak{N}}_u^s$. Пусть $\xi(\omega)$ — ограниченная $\bar{\mathfrak{N}}_u^s$-измеримая функция. Тогда она и $\mathfrak{N}_u^{s,\,x}$-измерима. Поэтому существует такая $\xi_1(\omega)$, измеримая относительно $\mathfrak{N}_u^s$, что

$$\bar{\mathsf{P}}_{s,\,x}\{\xi(\omega)=\xi_1(\omega)\}=1.$$

Значит, при $s<u<t$ (обозначая $\bar{\mathsf{M}}$ интеграл по $\bar{\mathsf{P}}$) будем иметь

$$\bar{\mathsf{M}}_{s,\,x}g(x_s(t,\,\omega))\,\xi(\omega)=\mathsf{M}_{s,\,x}g(x_s(t,\,\omega))\,\xi_1(\omega)=$$

$$=\mathsf{M}_{s,\,x}\xi_1(\omega)\,\mathsf{M}_{s,\,x}\big(g(x_s(t,\,\omega))\,|\,\mathfrak{S}_u^s\big)=$$

$$=\mathsf{M}_{s,\,x}\xi_1(\omega)\,\mathsf{M}_{u,\,x_s(u,\,\omega)}g(x_u(t,\,\omega))=\bar{\mathsf{M}}_{s,\,x}\xi(\omega)\,\mathsf{M}_{u,\,x_s(u,\,\omega)}g(x_u(t,\,\omega)).$$

Из этого соотношения и вытекает (5).

Пусть теперь $X$ — метрическое пространство, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ содержит все сферы. Обозначим

$$\mathfrak{N}_{t+}^s=\bigcap_{u>t}\mathfrak{N}_u^s.$$

Теорема 1. *Пусть σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается множеством непрерывных функций, а вероятность перехода $\mathsf{P}(s,x,t,B)$ непрерывного справа марковского процесса $\{x_s(t,\,\omega),\ \mathfrak{N}_t^s,\ \mathsf{P}_{s,\,x}\}$ удовлетворяет условию: для всех $s$ и $t$ и ограниченной непрерывной $\mathfrak{B}$-измеримой функции $g(x)$ функция*

$$g_s(x)=\mathsf{M}_{s,\,x}g(x_s(t,\,\omega))$$

*непрерывна по $x$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{\substack{h\downarrow 0\\ y\to x}}|g_{s+h}(x)-g_{s+h}(y)|=0.$$

*Тогда процесс $\{x_s(t,\,\omega),\ \mathfrak{N}_{t+}^s,\ \mathsf{P}_{s,\,x}\}$ также является марковским.*

*Доказательство.* Достаточно проверить соотношение (5), если $\mathfrak{S}_t^s = \mathfrak{N}_{t+}^s$ для непрерывных функций $g(x)$. Пусть $\xi(\omega)$ — $\mathfrak{N}_{t+}^s$-измеримая ограниченная функция. Тогда для любого $h > 0$ она $\mathfrak{N}_{u+h}^s$-измерима. Следовательно,

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,g(x_s(t,\omega)) = \mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,\mathsf{M}_{s,x}\left(g(x_s(t,\omega))\,|\,\mathfrak{N}_{u+h}^s\right) =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,\mathsf{M}_{u+h,\,x_s(u+h,\,\omega)}g(x_{u+h}(t,\omega)) =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,g_{u+h}(x_s(u+h,\omega)). \quad (11)$$

Заметим, что функция $g_u(x_s(u,\omega))$ является ограниченным мартингалом, так как при $u_1 < u$

$$\mathsf{M}_{s,x}\left[g_u(x_s(u,\omega))\,|\,\mathfrak{N}_{u_1}^s\right] = \mathsf{M}_{s,x}\left[\left[\mathsf{M}_{s,x}g(x_s(t,\omega))\,|\,\mathfrak{N}_u^s\right]/\mathfrak{N}_{u_1}^s\right] =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x}\left[g(x_s(t,\omega))\,|\,\mathfrak{N}_{u_1}^s\right] = g_{u_1}(x_s(u_1,\omega)).$$

Поэтому существует с вероятностью 1 предел (см. § 6 гл. IV)

$$\lim_{h\downarrow 0} g_{u+h}(x_s(u+h,\omega)).$$

Так как в силу условия теоремы и непрерывности процесса справа с вероятностью 1

$$\lim_{h\downarrow 0}\,[g_{u+h}(x_s(u+h,\omega)) - g_{u+h}(x_s(u,\omega))] = 0,$$

то $\lim\limits_{h\downarrow 0} g_{u+h}(x_s(u+h,\omega)) = \lim\limits_{h\downarrow 0} g_{u+h}(x_s(u,\omega))$. Пусть $\eta$ обозначает общее значение этих пределов. $\eta$ совпадает с $\mathfrak{N}_u^u$-измеримой величиной (как предел таких величин) и, следовательно, имеет вид $\lambda(x_s(u,\omega))$, где $\lambda(y)$ — некоторая $\mathfrak{B}$-измеримая функция. Переходя в равенстве (11) к пределу при $h\downarrow 0$, находим

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,g(x_s(t,\omega)) = \mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,\lambda(x_s(u,\omega)). \quad (12)$$

Если $\xi(\omega)$ $\mathfrak{N}_u^s$-измерима, то левая часть этого равенства совпадает с выражением

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,\mathsf{M}_{u,\,x_s(u,\,\omega)}g(x_s(t,\omega)).$$

Поэтому

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,\mathsf{M}_{u,\,x_s(u,\,\omega)}g(x_s(t,\omega)) = \mathsf{M}_{s,x}\xi(\omega)\,\lambda(x_s(u,\omega))$$

для всех $\mathfrak{N}_u^s$-измеримых ограниченных величин $\xi(\omega)$ и, значит,

$$\lambda(x_s(u,\omega)) = \mathsf{M}_{u,\,x_s(u,\,\omega)}g(x_s(t,\omega)).$$

Подставляя выражение для $\lambda$ в (12), убеждаемся в справедливости (5) при $\mathfrak{S}_t^s = \mathfrak{N}_{t+}^s$. ∎

Замечание. Используя марковость процесса $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{N}_{t+}^s, \mathsf{P}_{s, x}\}$, можем точно также, как (10), установить аналогичное равенство, если $\eta(\omega)$ $\mathfrak{N}_{t+}^s$-измерима. Пусть $B \in \mathfrak{N}_{t+}^t$. Тогда $\chi_B$ является $\mathfrak{N}_{t+}^s$-измеримой и $\mathfrak{N}^t$-измеримой. Значит,

$$\mathsf{P}_{s, x}(B \mid \mathfrak{N}_t^t) = \mathsf{M}_{s, x}(\chi_B \chi_B \mid \mathfrak{N}_t^t) = \\ = \mathsf{M}_{s, x}(\chi_B \mid \mathfrak{N}_t^t)\, \mathsf{M}_{s, x}(\chi_B \mid \mathfrak{N}_t^t) = \mathsf{P}_{s, x}^2(B \mid \mathfrak{N}_t^t).$$

Поэтому *в условиях теоремы* 1 $\mathsf{P}_{s, x}(B \mid \mathfrak{N}_t^t)$ *может равняться или* 0, *или* 1 *для* $B \in \mathfrak{N}_{t+}^t$. *Это утверждение носит название «закона* 0 *или* 1» *для марковских процессов.*

В дальнейшем мы будем использовать понятие стохастической эквивалентности марковских процессов. Пусть имеется два марковских процесса $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s, x}\}$ и $\{\bar{x}_s(t, \omega), \bar{\mathfrak{S}}_t^s, \bar{\mathsf{P}}_{s, x}\}$ с одним и тем же фазовым пространством $(X, \mathfrak{B})$ и заданных на одном и том же пространстве элементарных событий $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$. Они называются стохастически эквивалентными, если существует такой же марковский процесс $\{\tilde{x}_s(t, \omega), \tilde{\mathfrak{S}}_t^s, \tilde{\mathsf{P}}_{s, x}\}$, для которого: а) $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s \subset \mathfrak{S}_t^s$, $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s \subset \bar{\mathfrak{S}}_t^s$; б) меры $\tilde{\mathsf{P}}_{s, x}$, $\bar{\mathsf{P}}_{s, x}$, $\mathsf{P}_{s, x}$ совпадают на $\tilde{\mathfrak{S}}^s$; в) для всех $t$

$$\mathsf{P}_{s, x}\{x_s(t, \omega) = \tilde{x}_s(t, \omega)\} = 1, \quad \bar{\mathsf{P}}_{s, x}\{\bar{x}_s(t, \omega) = \tilde{x}_s(t, \omega)\} = 1.$$

Очевидно, стохастически эквивалентные процессы имеют одинаковые вероятности перехода.

Пусть $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s, x}\}$ — марковский процесс. Неотрицательная случайная величина $\tau$ называется *марковским моментом* для этого процесса, если при $t > 0$ событие $\{\tau > t\} \in \mathfrak{S}_t^0$, т. е. наблюдая процесс на отрезке времени $[0, t]$ мы можем судить, наступил момент $\tau$ или нет. Вообще говоря, будут рассматриваться моменты, могущие принимать значение $+\infty$. Кроме марковских моментов будем рассматривать $s$-марковские моменты ($s \geqslant 0$); в этом случае $\tau \geqslant s$ и при $t \geqslant s$ событие $\{\tau > t\} \in \mathfrak{S}_t^s$. 0-марковские моменты являются просто марковскими. Пусть $\tau$ — $s$-марковский момент. Совокупность событий из $\mathfrak{S}^s$, для которых

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{S}_t^s,$$

обозначим $\mathfrak{S}_\tau^s$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_\tau^s$ является $\sigma$-алгеброй. Очевидно, что $\tau$ измеримо относительно $\mathfrak{S}_\tau^s$.

Лемма 1. *Если $X$ — метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ порождено некоторым классом непрерывных функций и $x_s(t, \omega)$ непрерывно* *справа, то* $x_s(\tau,\omega)$ *также* $\mathfrak{S}^s_\tau$*-измеримо для любого s-марковского момента* $\tau$.

*Доказательство.* Имеем для любой непрерывной измеримой функции $g(x)$

$$g(x_s(\tau,\omega))\chi_{\{\tau\leqslant t\}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n} g\left(x_s\left(t\frac{k}{2^n},\ \omega\right)\right)\chi_{\left\{\frac{k-1}{2^n}t<\tau\leqslant\frac{k}{2^n}t\right\}}.$$

Следовательно, $g(x_s(\tau,\omega))\chi_{\{\tau\leqslant t\}}$ является $\mathfrak{S}^s_t$-измеримой величиной. Поэтому это справедливо и для любой измеримой функции $g$, в частности для $\mathfrak{B}$-измеримых $B$:

$$\chi_B(x_s(\tau,\omega))\chi_{\{\tau\leqslant t\}}$$

$\mathfrak{S}^s_t$-измеримо, значит, $\{x_s(\tau,\omega)\in B\}\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{S}^s_t$, $\{x_s(\tau,\omega)\in\in B\}\in\mathfrak{S}^s_\tau$. ■

Наиболее интересными примерами марковских моментов являются моменты первого достижения некоторого множества (или выхода из некоторого множества).

Пусть $X$ — метрическое пространство, $x_s(t,\omega)$ непрерывно справа. Пусть $G$ — открытое множество. Тогда величина $\tau=\sup[t\colon x_s(u,\omega)\notin G,\ u\leqslant t]$, называемая *моментом первого попадания* в $G$, будет $s$-марковским моментом. Действительно,

$$\{\tau>t\}=\bigcap_k\{\omega\colon x_s(t_k,\omega)\notin G\}\cap\{\omega\colon x_s(t,\omega)\notin G\},$$

где $\{t_k\}$ — всюду плотное множество на $[s,t]$, а множества в правой части этого равенства принадлежат $\mathfrak{S}^s_t$. Если $\tau_n\uparrow\tau$ и $\tau_n$ — $s$-марковские моменты, то и $\tau$ — $s$-марковский момент:

$$\{\tau>t\}=\bigcup_n\{\tau_n>t\}.$$

Поэтому для всякого множества $F=\bigcap_n G_n$, где $G_n$ — монотонно убывающая последовательность открытых множеств,

$$\tau=\sup[t\colon x_s(u,\omega)\notin F,\ u\leqslant t]$$

будет также $s$-марковским моментом, так как

$$\tau=\sup_n\tau_n,$$

где $\tau_n$ — момент первого попадания в множество $G_n$. В частности, момент первого попадания в замкнутое множество также является $s$-марковским моментом.

Очень важный класс процессов — это такие марковские процессы, у которых марковское свойство сохраняется и в марковские моменты. Такие процессы называются строго марковскими. Приведем точное определение этого понятия.

Определение. *Процесс* $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s,x}\}$ *называется строго марковским, если выполняются следующие условия:*

I. *Для любого $s$-марковского момента $\tau$ величина $x_s(\tau, \omega)$ является $\mathfrak{S}_\tau^s$-измеримой.*

II. *Для $t > 0$ и $\mathfrak{B}$-измеримой функции $g(x)$*

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(g(x_s(\tau+t, \omega)) \mid \mathfrak{S}_\tau^s\right) = \mathsf{M}_{\tau, x_s(\tau, \omega)} g(x_\tau(\tau+t, \omega)) \pmod{\mathsf{P}_{s,x}}. \quad (13)$$

Правую часть (13) нужно понимать как результат подстановки $u = \tau$, $x = x_s(\tau, \omega)$ в функцию $\mathsf{M}_{u,x} g(x_u(u+t, \omega))$. Чтобы результат такой подстановки был случайной величиной, будем требовать еще выполнения следующего условия:

III. *Для всякой измеримой ограниченной функции $g$ функция $\mathsf{M}_{u,x} g(x_u(u+t, \omega))$ измерима по совокупности переменных $u, x$ относительно произведения $\sigma$-алгебр $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на $[0, \infty)$.*

Лемма 2. *Соотношение* (13) *выполняется для любого $s$-марковского момента $\tau$, принимающего счетное множество значений.*

*Доказательство.* Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ — все возможные значения $\tau$. Тогда $\{\tau = t_k\} \in \mathfrak{S}_{t_k}^s$. Пусть $A \in \mathfrak{S}_\tau^s$. Тогда $A \cap \{\tau = t_k\} \in \mathfrak{S}_{t_k}^s$. Значит,

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_{s,x}\chi_A g(x_s(\tau+t, \omega)) &= \sum_k \mathsf{M}_{s,x}\chi_A \chi_{\{\tau=t_k\}} g(x_s(\tau+t, \omega)) = \\
&= \sum_k \mathsf{M}_{s,x}\chi_A \chi_{\{\tau=t_k\}} g(x_s(t_k+t, \omega)) = \\
&= \sum_k \mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau=t_k\}\cap A} \mathsf{M}_{s,x}\left(g(x_s(t_k+t, \omega)) \mid \mathfrak{S}_{t_k}^s\right) = \\
&= \sum_k \mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau=t_k\}}\chi_A \mathsf{M}_{t_k, x_s(t_k, \omega)} g\left(x_{t_k}(t_k+t, \omega)\right) = \\
&= \sum_k \mathsf{M}_{s,x}\chi_A \chi_{\{\tau=t_k\}} \mathsf{M}_{\tau, x_s(\tau, \omega)} g(x_\tau(\tau+t, \omega)) = \\
&= \mathsf{M}_{s,x}\chi_A \mathsf{M}_{\tau, x_s(\tau, \omega)} g(x_\tau(\tau+t, \omega)).
\end{aligned}$$

Из этого равенства и вытекает (13). ■

Приведем одно достаточное условие строгой марковости.

Теорема 2. *Пусть $X$ — метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — $\sigma$-алгебра, порожденная некоторым классом непрерывных функций, и марковский процесс $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s,x}\}$ удовлетворяет условиям:*

1) *$x_s(t, \omega)$ непрерывно справа по $t$;*

2) *для всякой измеримой ограниченной непрерывной функции* $f(x)$ *функция*

$$R_\lambda f(s, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int \mathsf{P}(s, x, s+t, dy) f(y) \tag{14}$$

*удовлетворяет условию*

$$\lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ y \to x}} R_\lambda f(s+h, y) = R_\lambda f(s, x).$$

*Тогда процесс* $\{x_s(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathsf{P}_{s,x}\}$ *является строго марковским.*

*Доказательство.* Пусть $\tau$ — некоторый $s$-марковский момент. Положим $\tau_n = \frac{k+1}{n}$, если $\frac{k}{n} < \tau \leqslant \frac{k+1}{n}$. Очевидно, $\tau_n \geqslant \tau$ и $\{\tau_n \leqslant t\} = \left\{\tau_n \leqslant \frac{[nt]}{n}\right\} = \left\{\tau \leqslant \frac{[nt]}{n}\right\} \in \mathfrak{S}^s_{\frac{[nt]}{n}} \subset \mathfrak{S}_t^s$ (здесь $[x]$ обозначает целую часть $x$). Значит, $\tau_n$ — также $s$-марковский момент. Поэтому в силу леммы 2

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(g\left(x_s\left(\tau_n + t, \omega\right)\right) \middle| \mathfrak{S}^s_{\tau_n}\right) =$$
$$= \mathsf{M}_{\tau_n, x_s(\tau_n, \omega)} g\left(x_{\tau_n}(\tau_n + t, \omega)\right) \pmod{\mathsf{P}_{s,x}}. \tag{15}$$

Левая часть (15) совпадает с

$$\mathsf{M}_{u,x} g(x_u(u+t, \omega)), \tag{16}$$

если положить $u = \tau_n$, $x = x_s(\tau_n, \omega)$. В силу непрерывности $x_u(u+t, \omega)$ по $t$ справа при непрерывных $g$ выражение (16) также непрерывно по $t$ справа и, значит, интегрируемо. Поэтому и функции, стоящие в равенстве (15), интегрируемы по $t$. Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathsf{M}_{s,x}\left(g\left(x_s(\tau_n + t, \omega)\right) \middle| \mathfrak{S}^s_{\tau_n}\right) dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathsf{M}_{\tau_n, x_s(\tau_n, \omega)} g\left(x_{\tau_n}(\tau_n + t, \omega)\right) dt \pmod{\mathsf{P}_{s,x}}. \tag{17}$$

Пусть $A \in \mathfrak{S}_\tau^s$. Тогда

$$A \cap \{\tau_n \leqslant t\} = A \cap \left\{\tau_n \leqslant \frac{[nt]}{n}\right\} = A \cap \left\{\tau \leqslant \frac{[nt]}{n}\right\} \in \mathfrak{S}_t^s.$$

Значит, $A \in \mathfrak{S}^s_{\tau_n}$. Умножая (17) на $\chi_A$ и беря $\mathsf{M}_{s,x}$, получим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathsf{M}_{s,x} g(x_s(\tau_n + t, \omega)) \chi_A \, dt = \mathsf{M}_{s,x} R_\lambda g(\tau_n, x_s(\tau_n, \omega)) \chi_A.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая, что $\tau_n\geqslant\tau$, $\tau_n\to\tau$, а $x_s(\tau_n+t,\ \omega)\to x_s(\tau+t,\ \omega)$, и условие 2) теоремы, находим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{M}_{s,\,x}g(x_s(\tau+t,\ \omega))\chi_A\,dt=\mathsf{M}_{s,\,x}R_\lambda g(\tau,\ x_s(\tau,\ \omega))\chi_A=$$
$$=\mathsf{M}_{s,\,x}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}g(x_\tau(\tau+t,\ \omega))\chi_A\,dt=$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{M}_{s,\,x}\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}g(x_\tau(\tau+t,\ \omega))\chi_A\,dt.$$

Из того, что две непрерывных справа функции имеют одинаковые преобразования Лапласа, вытекает совпадение этих функций. Поэтому

$$\mathsf{M}_{s,\,x}g\big(x_s(\tau+t,\ \omega)\big)\chi_A=\mathsf{M}_{s,\,x}\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}g\big(x_\tau(\tau+t,\ \omega)\big)\chi_A \qquad (18)$$

для всех $A\in\mathfrak{S}_\tau^s$. Значит, (13) выполнено для ограниченных непрерывных измеримых $g$, а следовательно, и для всех ограниченных измеримых $g$. $\mathfrak{S}_\tau^s$-измеримость $x_s(\tau,\omega)$ вытекает из леммы 1. ∎

Соотношение (13) для строго марковских процессов может быть обобщено следующим образом.

Пусть $t_1<t_2$, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — две ограниченные измеримые функции, а $\tau$ — $s$-марковский момент. Тогда $\tau+t_1$ также является $s$-марковским моментом: при $u>t_1+s$

$$\{\tau+t_1\leqslant u\}=\{\tau\leqslant u-t_1\}\in\mathfrak{S}_{u-t_1}^s\subset\mathfrak{S}_u^s.$$

Легко убедиться, что $\mathfrak{S}_{\tau+t_1}^s\supset\mathfrak{S}_\tau^s$. Запишем соотношение (13) для функции $g_2$ и момента $\tau+t_1$:

$$\mathsf{M}_{s,\,x}\Big(g_2\big(x_s(\tau+t_2,\omega)\big)\,\big|\,\mathfrak{S}_{\tau+t_1}^s\Big)=\mathsf{M}_{\tau+t_1,\,x_s(\tau+t_1,\,\omega)}g_2\Big(x_{\tau+t_1}\big(\tau+t_2,\ \omega\big)\Big).$$

Умножив это равенство на $g_1(x_s(\tau+t_1,\omega))$ и беря условное математическое ожидание относительно $\mathfrak{S}_\tau^s$, получим

$$\mathsf{M}_{s,\,x}\big(g_1(x_s(\tau+t_1,\ \omega))\,g_2(x_s(\tau+t_2,\ \omega))\,|\,\mathfrak{S}_\tau^s\big)=$$
$$=\mathsf{M}_{s,\,x}\Big(g_1\big(x_s\big(\tau+t_1,\ \omega\big)\big)\,\mathsf{M}_{\tau+t_1,\,x_s(\tau+t_1,\,\omega)}g_2\big(x_{\tau+t_1}\big(\tau+t_2,\ \omega\big)\big)\,\Big|\,\mathfrak{S}_\tau^s\Big).$$

Используем теперь следующее равенство: если $f(x,s)$ — ограниченная $\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}$-измеримая функция, $\tau$ — $s$-марковский момент, то

$$\mathsf{M}_{s,\,x}\big(f(x_s(\tau+t,\ \omega),\ \tau)\,\big|\,\mathfrak{S}_\tau^s\big)=$$
$$=\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}f(x_\tau(\tau+t,\ \omega),\ \tau)\pmod{\mathsf{P}_{s,\,x}} \qquad (18)$$

(правая часть (18) есть результат подстановки $u=\tau$, $x=x_s(\tau,\omega)$ в функцию $\mathsf{M}_{u,x}f(x_u(u+t,\omega),u))$. Равенство (18) очевидно, если $f(x,u)=f_1(x)g_1(u)$ в силу $\mathfrak{S}_\tau^s$-измеримости величины $\tau$ и соотношения (13). Далее можно воспользоваться тем, что функция $f(x,u)$ является пределом по любой мере на $\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}$-последовательности функций вида

$$\sum_k f_k(x)\,g_k(u).$$

Используя (18), можем записать

$$\mathsf{M}\Big(g_1(x_s(\tau+t_1,\omega))\,\mathsf{M}_{\tau+t_1,\,x_s(\tau+t_1,\,\omega)}g_2\big(x_{\tau+t_1}(\tau+t_2,\omega)\big)\,\big|\,\mathfrak{S}_\tau^s\Big)=$$
$$=\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}g_1(x_\tau(\tau+t_1,\omega))\,\mathsf{M}_{\tau+t_1,\,x_\tau(\tau+t_1,\,\omega)}g_2\big(x_{\tau+t_1}(\tau+t_2,\omega)\big).$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}_{s,x}\big(g_1(x_s(\tau+t_1,\omega))\,g_2(x_s(\tau+t_2,\omega))\,|\,\mathfrak{S}_\tau^s\big)=$$
$$=\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}g_1(x_\tau(\tau+t_1,\omega))\times$$
$$\times\,\mathsf{M}_{\tau+t_1,\,x_\tau(\tau+t_1,\,\omega)}g_2\big(x_{\tau+t_1}(\tau+t_2,\omega)\big)\pmod{\mathsf{P}_{s,x}}.$$

Аналогично устанавливается следующая формула: для $0<t_1<<t_2<\ldots<t_k$, ограниченных измеримых функций $g_1(x),\ldots\ldots,g_k(x)$ и $s$-марковского момента $\tau$

$$\mathsf{M}_{s,x}\Big(\prod_{j=1}^k g_j(x_s(\tau+t_j,\omega))\,|\,\mathfrak{S}_\tau^s\Big)=$$
$$=\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}g_1(x_\tau(\tau+t_1,\omega))\,\mathsf{M}_{\tau+t_1,\,x_\tau(\tau+t_1,\,\omega)}g_2\big(x_{\tau+t_1}(\tau+t_2,\omega)\big)\ldots$$
$$\ldots\mathsf{M}_{\tau+t_{k-1},\,x_{\tau+t_{k-2}}}(\tau+t_{k-1},\omega)\,g_k\big(x_{\tau+t_{k-1}}(\tau+t_k,\omega)\big)\pmod{\mathsf{P}_{s,x}}.\quad(19)$$

Из (19) с помощью (8) и (6) получаем следующую формулу:

$$\mathsf{M}_{s,x}\Big(\prod_{j=1}^k g_j(x_s(\tau+t_j,\omega))\,|\,\mathfrak{S}_\tau^s\Big)=$$
$$=\mathsf{M}_{\tau,\,x_s(\tau,\,\omega)}\prod_{j=1}^k g_j(x_\tau(\tau+t_j,\omega))\pmod{\mathsf{P}_{s,x}}.\quad(20)$$

## § 2. Общие скачкообразные марковские процессы

Пусть $(X,\mathfrak{B})$ — произвольное измеримое пространство, а $\sigma$-алгебра $\mathfrak{B}$ содержит все одноточечные множества. Марковский процесс $\{x_s(t,\omega),\ \mathfrak{S}_t^s,\ \mathsf{P}_{s,x}\}$ называется *ступенчатым*, если для всех $s$ и $x$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\mathsf{P}_{s,x}(\{\omega\colon\ x_s(t,\omega)=x,\ s\leqslant t\leqslant s+\delta\})=1.\quad(1)$$

Если выполнено условие (1), то для всех $s$ определена положительная случайная величина $\tau_1$:

$$\tau_1 = \sup [t\colon\ x_s(u,\ \omega) = x_s(s,\ \omega),\ s \leqslant u \leqslant t],$$

называемая моментом первого выхода из начального состояния. Очевидно, что эта величина является $s$-марковским моментом.

Заметим, что $\omega$ — множество, стоящее под знаком вероятности в (1) — не обязано быть событием, так как оно является пересечением континуума событий. Чтобы оно было событием, будем рассматривать лишь процессы, выборочные функции которых сепарабельны в следующем смысле: если $x_s(t, \omega) = x$ при $t \in (\alpha, \beta) \cap \Lambda$, где $\Lambda$ — некоторое счетное плотное на $[0, \infty)$ множество, то $x_s(t, \omega) = x$ для всех $t \in [\alpha, \beta)$.

Из условия (1) вытекает, в частности, условие

$$\lim_{t \downarrow s} \mathsf{P}_{s,\,x}(\{\omega\colon\ x_s(t,\ \omega) = x\}) = \lim_{t \downarrow s} \mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ \{x\}) = 1 \tag{2}$$

($\{x\}$ — одноточечное множество, состоящее из одной точки $x$). Процессы, вероятности перехода которых удовлетворяют условию (2) для всех $s, x$, называются *стохастически непрерывными*.

Лемма 1. *Если процесс стохастически непрерывен, то существует стохастически эквивалентный ему сепарабельный процесс.*

*Доказательство.* Построим процесс $\tilde{x}_s(t, \omega)$ следующим образом: $\tilde{x}_s(t, \omega) = x$, если существует такое $\delta > 0$, что $x_s(u, \omega) = x$ при $u \in (t, t+\delta) \cap \Lambda$; $\tilde{x}_s(t, \omega) = x_s(t, \omega)$ в остальных случаях. Обозначим через $\mathfrak{A}_k$ событие $x_s(t_i,\ \omega) = x_s(t_j,\ \omega)$, $t_i,\ t_j \in \left(t, t + \frac{1}{k}\right)$, $\Lambda = \{t_1,\ t_2,\ \ldots\}$. Выберем последовательность $t_{n_k} \in \Lambda$ такую, чтобы $t < t_{n_k} < t + \frac{1}{k}$. Тогда

$$\{\tilde{x}_s(t,\ \omega) \neq x_s(t,\ \omega)\} \subset \bigcup_k \mathfrak{A}_k.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{s,\,x}(\{\tilde{x}_s(t,\ \omega) \neq x_s(t,\ \omega)\}) &\leqslant \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_{s,\,x}(\{\tilde{x}_s(t,\ \omega) \neq x_s(t,\ \omega)\} \cap \mathfrak{A}_k) \leqslant \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_{s,\,x}\left(\left\{x_s\left(t_{n_k},\ \omega\right) \neq x_s(t,\ \omega)\right\} \cap \mathfrak{A}_k\right) \leqslant \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_{s,\,x}\left(x_s\left(t_{n_k},\ \omega\right) \neq x_s(t,\ \omega)\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty} \mathsf{M}_{s,\,x} \mathsf{M}_{t,\,x_s(t,\,\omega)} \chi\left\{x_t(t,\ \omega) \neq x_t\left(t_{n_k},\ \omega\right)\right\} = \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \mathsf{P}(s,\ x,\ t,\ dy)\, \mathsf{P}\left(t,\ y,\ t_{n_k},\ X - \{y\}\right) = 0,
\end{aligned}$$

так как $t_{n_k} \downarrow t$ и $\mathsf{P}(t, y, t_{n_k}, X - \{y\}) \to 0$ для всех $y$. Очевидно, $\tilde{x}_s(t, \omega)$ будет измеримо относительно σ-алгебры $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$-событий, порожденной событиями из $\mathfrak{S}_t^s$ и $\bigcap_m \tilde{N}^t_{t+\frac{1}{m}}$, где $\tilde{N}^t_{t+\frac{1}{m}}$ порождена множеством $\mathfrak{A}_m \cap A_{t_k}$, $A_{t_k} \subset \mathfrak{N}_{t_k}^{t_k}$, $t_k \in (t, t+\delta)$. Поскольку $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s \subset \bar{\mathfrak{S}}_t^s$, то мера $\mathsf{P}_{s,x}$ определена и на $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$. Покажем, что $\{x_s(t, \omega), \tilde{\mathfrak{S}}_t^s, \mathsf{P}_{s,x}\}$ также является марковским процессом.

Пусть $\xi$ — произвольная $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$-измеримая ограниченная величина. Так как $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ содержится в пополнении $\mathfrak{S}_t^s$ по мере $\mathsf{P}_{s,x}$, то существует такая $\mathfrak{S}_t^s$-измеримая величина $\bar{\xi}$, что $\mathsf{P}_{s,x}\{\xi = \bar{\xi}\} = 1$. Поэтому при $u > t$

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi\chi_B(x_s(u, \omega)) = \mathsf{M}_{s,x}\bar{\xi}\chi_B(x_s(u, \omega)) =$$
$$= \mathsf{M}_{s,x}\bar{\xi}\mathsf{M}_{t, x_s(t,\omega)}\chi_B(x_t(u, \omega)) = \mathsf{M}_{s,k}\xi\mathsf{M}_{t, x_s(t,\omega)}\chi_B(x_t(u, \omega)).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\mathsf{P}_{s,x}(\{x_s(u, \omega) \in B\} \mid \tilde{\mathfrak{S}}_t^s) = \mathsf{P}_{t, x_s(t,\omega)}(\{x_t(u, \omega) \in B\}).$$

Но тогда, учитывая равенство $\mathsf{P}_{s,x}\{x_s(u, \omega) = \tilde{x}_s(u, \omega)\} = 1$, убеждаемся, что последнее соотношение выполнено, если $x_s(\cdot, \cdot)$ заменить на $\tilde{x}_s(\cdot, \cdot)$. ■

Будем предполагать, что все рассматриваемые далее процессы стохастически непрерывны и сепарабельны. Найдем условие, при котором выполнено (1).

Теорема 1. *Для того чтобы сепарабельный марковский процесс в фазовом пространстве* $(X, \mathfrak{B})$ *был ступенчатым, необходимо и достаточно выполнения условия: для всех* $s \in [0, \infty)$, $x \in X$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim_{\max(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0}} \sum_{s \leqslant t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = s+\delta} \mathsf{P}(t_k^{(n)}, x, t_{k+1}^{(n)}, X - \{x\}) = 0, \quad (3)$$

*какова бы ни была последовательность разбиений* $s = t_0^{(n)} < \ldots$ $\ldots < t_n^{(n)} = s + \delta$, *для которой* $\max(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0$.

*Доказательство.* Необходимость. Пусть выполнено условие (1). Тогда

$$\mathsf{P}_{s,x}(\{\omega\colon x_s(t, \omega) = x, s \leqslant t \leqslant s + \delta\}) =$$
$$= \lim_{\max(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0} \mathsf{P}_{s,x}\{x_s(t_k^{(n)}, \omega) = x, k = \overline{1, n}\} =$$
$$= \lim_{\max(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(t_{k-1}^{(n)}, x, t_k^{(n)}, \{x\}) =$$

$$= \lim_{\max\left(t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right)\to 0} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\lim_{\max\left(t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)\right\}.$$

Значит,

$$\varliminf_{\max\left(t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\ln \mathsf{P}_{s,\,x}(\{\omega\colon\ x_s(t,\ \omega)=x,\ s\leqslant t\leqslant s+\delta\}).$$

Переходя к пределу при $\delta\downarrow 0$, из (1) получим (3).

Достаточность. Пусть выполнено (3). Выберем последовательность разбиений $s=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ \ldots\ <t_n^{(n)}=s+\delta$ так, чтобы множества $\Lambda_n=\left\{t_1^{(n)},\ \ldots,\ t_{n-1}^{(n)}\right\}$ монотонно возрастали с $n$ и $\bigcup_n \Lambda_n=\Lambda\cap(s,\ s+\delta)$. Тогда

$$\mathsf{P}_{s,\,x}(\{x_s(t,\ \omega)=x,\ s\leqslant t\leqslant s+\delta\})=$$

$$=\mathsf{P}_{s,\,x}(\{x_s(t,\ \omega)=x,\ t\in\Lambda\cap(s,\ s+\delta)\})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_{s,\,x}(\{x_s(t,\ \omega)=x,\ t\in\Lambda_n\})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ \{x\}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)\right)=$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)\right)\right\}. \qquad (4)$$

Если $\delta$ выбрано так, чтобы

$$\varliminf \sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)<\varepsilon,$$

то и $\varliminf \sup_k \mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)<\varepsilon$ и, значит,

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right)\right)\geqslant$$

$$\geqslant[1+O(\varepsilon)]\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left(t_{k-1}^{(n)},\ x,\ t_k^{(n)},\ X-\{x\}\right).$$

Поэтому, учитывая (3), из (4) получаем (1). ■

Рассмотрим в $X$ дискретную топологию, при которой $\{x\}$ является наименьшей окрестностью точки $x$. Всякая функция на $X$ тогда будет непрерывной. Из соотношений

$$\mathsf{P}(s, x, t+h, A) = \int \mathsf{P}(s, x, t, dy)\, \mathsf{P}(t, y, t+h, A)$$

и

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathsf{P}(t, y, t+h, A) = \chi_A(y),$$

$$\mathsf{P}(s, x, s+h, \{x\})\, \mathsf{P}(s+h, x, t, A) + \\ + \int\limits_{X-\{x\}} \mathsf{P}(s, x, s+h, dy)\, \mathsf{P}(s+h, y, t, A) = \mathsf{P}(s, x, t, A)$$

вытекает, что для стохастически непрерывного процесса $\mathsf{P}(s, x, t, A)$ непрерывна справа и по $s$ и по $t$. Поэтому и функция

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \int \mathsf{P}(s, x, t+s, dy)\, g(y)\, dt$$

непрерывна справа по $s$. Из того, что процесс ступенчатый, вытекает, что каждое свое значение он принимает на некотором интервале, при этом этот интервал можно считать замкнутым слева (таким будет процесс, построенный в лемме 1). Однако это не гарантирует непрерывности процесса справа, как показывает пример

$$x(t) = k \quad \text{при} \quad \frac{1}{2^k} \leqslant t < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad x(0) = 0.$$

Непрерывные справа в дискретной топологии процессы будут обязательно ступенчатыми. Они образуют более узкий класс, чем ступенчатые процессы. Их мы и будем называть *скачкообразными*. В силу теоремы 2 § 1 скачкообразный процесс является строго марковским.

Рассмотрим марковские моменты $\tau_k$ — моменты $k$-го скачка процесса $x_s(t, \omega)$. Они определяются рекуррентно следующим образом. $\tau_1$ — это момент выхода из начального состояния, он уже определен выше. В силу строгой марковости определена величина $x_s(\tau_1, \omega)$. Из скачкообразности процесса вытекает существование такого интервала $(\tau_1, \tau_1 + \delta)$, что $x_s(t, \omega) = x_s(\tau_1, \omega)$ при $t \in (\tau_1, \tau_1 + \delta)$. Пусть $\tau_2 = \sup[t\colon x_s(u, \omega) = x_s(\tau_1, \omega),\ \tau_1 \leqslant u < t]$. Легко проверить, что $\tau_2$ — также $s$-марковский момент. Очевидно, $\tau_1 < \tau_2$. Если определен момент $\tau_{k-1}$, то $\tau_k$ определяется так:

$$\tau_k = \sup[t\colon x_s(u, \omega) = x_s(\tau_{k-1}, \omega),\ \tau_{k-1} \leqslant u < t].$$

Может оказаться, что при некотором $k$ $\tau_k = +\infty$. Тогда $\tau_j$ при

$j>k$ не определены. Не определено также и $x_s(\tau_k, \omega)$. Чтобы построить процесс (его выборочные функции) на интервале $[s, \sup_k \tau_k]$, достаточно знать последовательности пар $\{(\tau_k, x_s(\tau_k, \omega)),\ k=1, 2, \ldots\}$.

Теорема 2. *Последовательность* $\{\tau_k, x_s(\tau_k, \omega)\}$, $k=1, 2, \ldots$, *образует, вообще говоря, обрывающуюся однородную цепь Маркова в фазовом пространстве* $([0, \infty)\times X, \mathfrak{A}\times\mathfrak{B})$, *где* $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-*алгебра борелевских множеств на* $[0, \infty)$, *с вероятностью перехода за один шаг, определяемой из соотношения*

$$\mathsf{P}(\tau_m<t, x_s(\tau_m, \omega)\in B \mid \tau_{m-1}, x_s(\tau_{m-1}, \omega))= \\ =\mathsf{P}_{u, x}(\tau_1<t, x_u(\tau_1, \omega)\in B)\big|_{\substack{u=\tau_{m-1}, \\ x=x_s(\tau_{m-1}, \omega)}}, \quad t>s, \quad B\in\mathfrak{B}. \tag{5}$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы достаточно показать, что правая часть (5) совпадает с

$$\mathsf{P}_{s, x}\left(\{\tau_m\in A, x_s(\tau_m, \omega)\in B\}\mid\mathfrak{S}^s_{\tau_{m-1}}\right).$$

Но в силу скачкообразности процесса имеем

$$\{\tau_m<t, x_s(\tau_m, \omega)\in B\}=\bigcup_n\ \bigcup_{\tau_{m-1}+\frac{k}{2^n}<t}\left[\bigcap_{i=1}^{k-1}\left\{x_s\left(\tau_{m-1}+\frac{i}{2^n}, \omega\right)=\right.\right. \\ \left.\left.=x_s(\tau_{m-1}, \omega)\right\}\right]\cap\left\{x_s\left(\tau_{m-1}+\frac{k}{2^n}, \omega\right)\in B\setminus\{x_s(\tau_{m-1}, \omega)\}\right\}.$$

Для всякой $\mathfrak{S}^s_{\tau_{m-1}}$-измеримой ограниченной величины $\xi$ в силу соотношения (18) § 1 можем записать

$$\mathsf{M}_{s, x}\xi\sum_{\tau_{m-1}+\frac{k}{2^n}<t}\ \prod_{i=1}^{k-1}\chi\left\{x_s\left(\tau_{m-1}+\frac{i}{2^n}, \omega\right)=x_s(\tau_{m-1}, \omega)\right\}\times \\ \times\chi\left\{x_s\left(\tau_{m-1}+\frac{k}{2^n}, \omega\right)\in B\setminus\{x_s(\tau_{m-1}, \omega)\}\right\}= \\ =\mathsf{M}_{s, x}\xi\mathsf{M}_{\tau_{m-1}, x_s(\tau_{m-1}(\omega))}\sum_{\tau_{m-1}+\frac{k}{2^n}<t}\ \prod_{i=1}^{k-1}\chi\left\{x_{\tau_{m-1}}\left(\tau_{m-1}+\frac{i}{2^n}, \omega\right)=\right. \\ \left.=x_s\{\tau_{m-1}, \omega\}\right\}\chi\left\{x_{\tau_{m-1}}\left(\tau_{m-1}+\frac{k}{2^n}, \omega\right)\in B\setminus\{x_s(\tau_{m-1}, \omega)\}\right\}. \tag{6}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ слева, получим

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi\chi\{\tau_m < t,\ x_s(\tau_m, \omega) \in B\}.$$

Заметим теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}_{u,x} \sum_{u+\frac{k}{2^n}<t} \prod_{i=1}^{k-1} \chi\left\{x_u\left(u+\frac{i}{2^n},\ \omega\right)=x\right\} \times$$

$$\times \chi\left\{x_u\left(u+\frac{k}{2^n},\ \omega\right) \in B \setminus \{x\}\right\} =$$

$$= \mathsf{M}_{u,x}\chi\{\tau_1 < t,\ x_u(\tau_1, \omega) \in B\} = \mathsf{P}_{u,x}\{\tau_1 < t,\ x_u(\tau_1, \omega) \in B\}.$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}_{s,x}\xi\chi\{\tau_m < t,\ x_s(\tau_m, \omega) \in B\} =$$

$$= \mathsf{M}_{s,x}\xi\,[\mathsf{P}_{u,x}\{\tau_1 < t,\ x_u(\tau_1, \omega) \in B\}]_{\substack{u=\tau_{m-1} \\ x=x_s(\tau_{m-1},\ \omega)}}. \blacksquare$$

Скачкообразный процесс называется *регулярным*, если $\sup \tau_k = +\infty$ с вероятностью $\mathsf{P}_{s,x} = 1$, каковы бы ни были $s, x$. Приведем одно достаточное условие регулярности.

Лемма 2. *Пусть существует такое $\delta > 0$, что для всех $s$, $x$*

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 > s + \delta\} > \delta.$$

*Тогда процесс является регулярным.*

*Доказательство.* Используя теорему 2, можем записать, что для всех $n$

$$\mathsf{P}\{\tau_n - \tau_{n-1} > \delta \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}\} = \mathsf{P}_{u,x}\{\tau_1 > u + \delta\}\,|_{\substack{u=\tau_{n-1} \\ x=x_s(\tau_{n-1},\ \omega)}} > \delta. \qquad (7)$$

Положим $\zeta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$. Из (7) вытекает, что

$$\mathsf{P}\{\zeta_n > \delta \mid \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\} \geqslant \delta, \quad \mathsf{P}\{\zeta_n \leqslant \delta \mid \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\} \leqslant (1-\delta).$$

Для каждого из событий $A_{i_1, \ldots, i_m} = \bigcap_{k=1}^{m} \{\zeta_{i_k} \leqslant \delta\}$ имеем оценку

$$\mathsf{P}(A_{i_1, \ldots, i_m}) \leqslant (1-\delta)^m.$$

Далее, событие $\{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n \leqslant k\delta\}$ влечет одно из событий $A_{i_1, \ldots, i_{n-k}}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n-k} \leqslant n$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n \leqslant k\delta\} \leqslant C_n^k (1-\delta)^{n-k} \to 0$$

при $n \to \infty$, каково бы ни было $k$. Значит, $\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_n \leqslant t\} \to 0$ при $n \to \infty$. $\blacksquare$

Выведем одно интегральное уравнение для вероятностей перехода скачкообразного процесса. Обозначим $\pi(s, x, A, B) = \mathsf{P}_{s,x}(\tau_1 \in A, x_s(\tau_1, \omega) \in B)$ совместную функцию распределения $\tau_1$ и $x_s(\tau_1, \omega)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(s, x, t, B) &= \mathsf{P}_{s,x}(\{x_s(t, \omega) \in B\}) = \\
&= \mathsf{P}_{s,x}(\{x_s(t, \omega) \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\}) + \mathsf{P}_{s,x}(\{x_s(t, \omega) \in B\} \cap \{\tau > t\}) = \\
&= \chi_B(x)\,\mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau > t\}} + \mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau \leqslant t\}}\chi_B(x_s(t, \omega)) = \\
&= \chi_B(x)\,\mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau > t\}} + \mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau \leqslant t\}}\mathsf{M}_{s,x}(\chi_B(x_s(t, \omega))|\mathfrak{S}_\tau^s) = \\
&= \chi_B(x)\,\mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau > t\}} + \mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau \leqslant t\}}\mathsf{M}_{\tau, x_s(\tau,\omega)}\chi_B(x_s(t, \omega)) = \\
&= \chi_B(x)\,\mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau > t\}} + \mathsf{M}_{s,x}\chi_{\{\tau \leqslant t\}}\mathsf{P}(\tau, x_s(\tau, \omega), t, B).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \chi_B(x)\,\pi(s, x, [t, \infty), X) + \int_s^t \int \pi(s, x, du, dy)\,\mathsf{P}(u, y, t, B). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь однородный скачкообразный процесс. Для такого процесса вероятность перехода $\mathsf{P}(s, x, t, B)$ зависит лишь от разности $t - s$, которую будем обозначать $\mathsf{P}(t - s, x, B)$. Условие стохастической непрерывности теперь имеет вид

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathsf{P}(t, x, \{x\}) = 1. \tag{9}$$

Из теоремы 1 вытекает, что для того, чтобы сепарабельный однородный процесс был ступенчатым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varliminf_{h \downarrow 0} \frac{1 - \mathsf{P}(h, x, \{x\})}{h} < \infty. \tag{10}$$

Если это условие выполнено, то величина $\tau_1$ — $s$-момент выхода из начальной точки процесса $x_s(t, \omega)$ — имеет показательное распределение, т. е. существует такое $\lambda(x)$, что

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 > t + s\} = \exp\{-\lambda(x)\,t\}.$$

Необходимость условия (10) вытекает из того, что при $s = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = s + \delta$, $h = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} = \delta/n$

$$\varliminf_{n \to \infty} \sum \mathsf{P}(t_{k-1}^{(n)}, x, t_k^{(n)}, X \setminus \{x\}) = \varliminf\left(1 - \mathsf{P}\left(\frac{\delta}{n}, x, X \setminus \{x\}\right)\right) = \\
= \delta \varliminf_{h \downarrow 0} \frac{1 - \mathsf{P}(h, x, \{x\})}{h}.$$

Из этого соотношения можем получить и достаточность условия (10), учитывая то обстоятельство, что в качестве множества сепарабельности можно взять множество всех двоично-рациональных чисел. Далее,

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 < t+s\} = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right)\right)^{k_n} =$$

$$= 1 - \lim\left(1 + \left[\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right) - 1\right]\right)^{k_n} =$$

$$= 1 - \exp\left\{\varliminf \frac{k_n}{2^n}\left(\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right) - 1\right)\right\} = 1 - \exp\{-t\lambda(x)\},$$

где $\lambda(x) = \varlimsup_{h\downarrow 0} \dfrac{1-\mathsf{P}(h,\ x,\ \{x\})}{h}$, $k_n = [t2^n - 1] + 1$, $[\cdot]$ — целая часть числа.

Пусть теперь процесс $x_s(t,\ \omega)$ скачкообразный. Тогда

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 < t+s,\ x_s(\tau_1,\omega) \in B\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k<t2^n} \mathsf{P}_{s,x}\left\{x_s\left(s+\frac{i}{2^n},\ \omega\right) = \right.$$

$$\left. = x,\ i = 1,\ \ldots,\ k-1,\ x_s\left(s+\frac{k}{2^n},\ \omega\right) \in B\setminus\{x\}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k<t2^n}\left[\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right)\right]^{k-1}\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ B\setminus\{x\}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ B\setminus\{x\}\right)\frac{1-\mathsf{P}^{k_n}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right)}{1-\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right)},$$

причем этот предел существует. Значит, существует и предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ B\setminus\{x\}\right)}{1-\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ \{x\}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ B\setminus\{x\}\right)}{\mathsf{P}\left(\frac{1}{2^n},\ x,\ X-\{x\}\right)}.$$

Обозначая этот предел $\pi(x,\ B)$, получим

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 < t+s,\ x_s(\tau_1,\ \omega) \in B\} = \pi(x,\ B)(1-e^{-t\lambda(x)}). \tag{11}$$

Таким образом, $\tau_1$ и $x_s(\tau_1,\ \omega)$ независимы.

Заметим, что $\dfrac{1}{\lambda(x)} = \mathsf{M}_{s,x}[\tau_1 - s]$ — среднее время пребывания в состоянии $x$. Если $\lambda(x) = 0$, то $\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 > t+s\} = 1$ для всех $s$, т. е. процесс никогда не покинет состояния $x$, если только он был в этом состоянии в настоящий момент. Такое состояние называется *поглощающим*.

Рассмотрим величины $\{\tau_n, x_s(\tau_n, \omega)\}$ в однородном случае. Формула (11) позволяет с помощью теоремы 2 получить здесь более сильное утверждение, чем в теореме 2.

Теорема 3. *Если у процесса отсутствуют поглощающие состояния, то последовательность* $\{x_n(\omega) = x_s(\tau_n, \omega),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *образует однородную цепь Маркова с вероятностью перехода* $\pi(x, B)$:

$$\mathsf{P}\{x_n(\omega) \in B \mid x_{n-1}(\omega)\}\,|_x = \pi(x_{n-1}(\omega), B),$$

*а величины* $\zeta_1 = \tau_1 - s$, $\zeta_2 = \tau_2 - \tau_1, \ldots$ *условно независимы, если заданы* $\{x_n(\omega),\ n = 1, 2, \ldots\}$, *и имеют показательное распределение*:

$$\mathsf{P}\{\zeta_k > t \mid x_{k-1}(\omega)\} = \exp\{-t\lambda(x_{k-1}(\omega))\}.$$

*Доказательство.* В силу теоремы 2 и формулы (11)

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\zeta_k > t,\ x_k(\omega) \in B \mid \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, x_1(\omega), \ldots, x_{k-1}(\omega)\} = \\ = \mathsf{P}_{u,x}\{\tau_1 > t + u,\ x_u(\tau_1(\omega)) \in B\}\,\Big|_{\substack{u=\tau_{k-1} \\ x=x_{k-1}(\omega)}} = \\ = \pi(x_{k-1}(\omega), B)\exp\{-t\lambda(x_{k-1}(\omega))\}.$$

Следовательно, совместное распределение величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, $x_1(\omega), \ldots, x_k(\omega)$ задается формулой

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\zeta_1 > t_1, \zeta_2 > t_2, \ldots, \zeta_k > t_k, x_1(\omega) \in B_1, \ldots, x_k(\omega) \in B_k\} = \\ = \int\limits_{B_1} \pi(x, dx_1) \ldots \int\limits_{B_k} \pi(x_{k-1}, dx_k) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} t_i\lambda(x_{i-1}(\omega))\right\} \tag{12}$$

$(x_0(\omega) = x)$. Из этой формулы, полагая $t_i = 0$, находим

$$\mathsf{P}_{s,x}\{x_1(\omega) \in B_1, \ldots, x_k(\omega) \in B_k\} = \int\limits_{B_1} \pi(x, dx_1) \ldots \int\limits_{B_k} \pi(x_{k-1}, dx_k),$$

откуда следует, что $x_k(\omega)$ образуют однородную цепь Маркова с вероятностью перехода $\pi(x, B)$. Кроме того, из (12) можно найти условное распределение величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$:

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\zeta_1 > t_1, \ldots, \zeta_k > t_k \mid x_1(\omega), \ldots, x_k(\omega)\} = \\ = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} t_i\lambda(x_{i-1}(\omega))\right\}. \blacksquare$$

Цепь Маркова $\{x_k(\omega)\}$ называется *вложенной цепью Маркова* для данного процесса.

Замечание. Если $x$ — поглощающее состояние, то $\zeta_1 = +\infty$, $x_1(\omega)$ не определено. Положим для такого $x$ $\pi(x, B) = \chi_B(x)$ и будем считать, что $x_k(\omega) = x_{k-1}(\omega)$, $\zeta_k = +\infty$, если $x_{k-1}(\omega)$ попало в поглощающее состояние. Тогда $\{x_k(\omega)\}$ по-прежнему будет однородной цепью Маркова с вероятностью перехода $\pi(x, B)$.

Если переписать соотношение (12) в виде

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\zeta_1 < t_1, \ldots, \zeta_k < t_k, x_1(\omega) \in B_1, \ldots, x_k(\omega) \in B_k\} = \\ = \int_{B_1} \pi(x, dx_1) \ldots \int_{B_k} \pi(x_{k-1}, dx_k) \prod_{i=1}^{k} (1 - \exp\{-t_i\lambda(x_{i-1}(\omega))\}),$$

то оно будет справедливо и при наличии поглощающих состояний.

Отметим еще, что уравнение (8) для вероятностей перехода в однородном случае имеет вид

$$\mathsf{P}(t, x, B) = \chi_B(x)\exp\{-t\lambda(x)\} + \\ + \lambda(x)\int_0^t e^{-s\lambda(x)}\, ds \int \pi(x, dy)\, \mathsf{P}(t-s, y, B). \quad (13)$$

Если $\lambda(x)$ ограничено, то методом последовательных приближений устанавливается существование и единственность решения (13). Как вытекает из леммы 2, при этом предположении процесс будет регулярным, так как

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau_1 > s + \delta\} = e^{-\delta\lambda(x)} \geqslant e^{-\delta c}.$$

Приведем общее условие регулярности процесса.

Теорема 4. *Для того чтобы однородный марковский процесс был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы для всех $s$, $x$*

$$\mathsf{P}_{s,x}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x_k(\omega))} = +\infty\right\} = 1, \quad (14)$$

*где $x_k(\omega)$ — вложенная цепь Маркова.*

*Доказательство.* Так как

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(e^{-\lambda\zeta_k} \,|\, x_{k-1}(\omega)\right) = \\ = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda(x_{k-1}(\omega))\, e^{-t\lambda(x_{k-1}(\omega))}\, dt = \frac{\lambda(x_{k-1}(\omega))}{\lambda + \lambda(x_{k-1}(\omega))},$$

то

$$\mathsf{M}_{s,x}\left(e^{-\lambda\tau_n} \,\middle|\, x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(x_{k-1}(\omega))}{\lambda + \lambda(x_{k-1}(\omega))} e^{-\lambda s}. \qquad (15)$$

Поэтому, если $\tau^* = \sup\limits_n \tau_n$, то

$$\mathsf{M}_{s,x} e^{-\lambda\tau^*} = e^{-\lambda s} \mathsf{M}_{s,x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(x_{k-1}(\omega))}{\lambda + \lambda(x_{k-1}(\omega))}$$

($e^{-\infty} = 0$). Переходя к пределу при $\lambda \downarrow 0$, получаем

$$\mathsf{M}_{s,x} \chi_{\{\tau^* < \infty\}} = \mathsf{M}_{s,x} \lim_{\lambda \downarrow 0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(x_{k-1}(\omega))}{\lambda + \lambda(x_{k-1}(\omega))}. \qquad (16)$$

Но легко видеть, что

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(x_{k-1}(\omega))}{\lambda + \lambda(x_{k-1}(\omega))} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda(x_{k-1}(\omega))} < \infty, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda(x_{k-1}(\omega))} = +\infty. \end{cases}$$

Значит,

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\tau^* < \infty\} = \mathsf{P}_{s,x}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x_{k-1}(\omega))} < \infty \right\}. \blacksquare \qquad (17)$$

## § 3. Однородные процессы со счетным множеством состояний

В этом параграфе рассматриваются однородные процессы в счетном фазовом пространстве $X$. В этом случае естественно отождествить $X$ с множеством $N$ всех натуральных чисел. Если $\sigma$-алгебра $\mathfrak{B}$ содержит все одноточечные множества, то она содержит все подмножества $N$, поскольку любое такое множество является суммой не более чем счетного числа одноточечных. На этом же основании достаточно знать вероятности перехода $\mathsf{P}(t, x, B)$ лишь в том случае, когда $B$ одноточечно. Обычно используются обозначения

$$\mathsf{P}(t, i, \{j\}) = p_{ij}(t).$$

Функции $p_{ij}(t)$ также называются вероятностями перехода. Из общих свойств вероятностей перехода (см. гл. I, § 4) вытекает, что они удовлетворяют условиям:

1) $p_{ij}(t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0,\ p_{ij}(0) = \delta_{ij}\ (\delta_{ij} = 1, i = j;\ \delta_{ij} = 0, i \neq j)$;

2) $\sum\limits_{j \in N} p_{ij}(t) = 1$;

3) при $t > 0,\ s > 0$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in N} p_{ik}(t)\, p_{kj}(s)$$

(уравнение Чепмена — Колмогорова). Мы будем также предполагать, что процесс стохастически непрерывен, т. е. что выполнено условие

4) $\lim\limits_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$.

Иногда заменяют условие 2) более слабым:

$$\sum_{j \in N} p_{ij}(t) \leqslant 1.$$

Случай $\sum\limits_{j \in N} p_{ij}(t) < 1$ можно интерпретировать следующим образом: система, находящаяся в некоторый момент времени в $i$-м состоянии, с положительной вероятностью, равной $1 - \sum\limits_{j \in N} p_{ij}(t)$, через промежуток времени $t$ отсутствует в фазовом пространстве. Иными словами, в фазовом пространстве не хватает точек для описания всех возможных состояний системы. Процессы подобного типа условимся называть *несобственными* марковскими процессами. Нетрудно заметить, что, прибавляя к фазовому пространству некоторое множество точек, можно доопределить несобственный марковский процесс, не изменяя при этом заданных вероятностей перехода, превратив его в марковский процесс в собственном смысле. Проще всего этого можно достичь присоединением к фазовому пространству одного «поглощающего» «бесконечно далекого» состояния «$\infty$». Положим

$$N^* = N \cup \{\infty\}, \quad p_{i\infty} = 1 - \sum_{j \in N} p_{ij}(t),$$

$$p_{\infty i}(t) = 0, \quad i \in N, \quad p_{\infty\infty}(t) = 1.$$

Легко убедиться, что совокупность вероятностей перехода

$$\{p_{ij}(u)\}, \qquad i,\ j \in N^*,$$

образует процесс Маркова в собственном смысле. Для доказательства достаточно проверить только выполнимость условия 3).

Имеем

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{\alpha\in N} p_{i\alpha}(t)\,p_{\alpha j}(s)=\sum_{\alpha\in N} p_{i\alpha}(t)\,p_{\alpha j}(s)+p_{i\infty}(t)\,p_{\infty j}(s)=$$
$$=\sum_{\alpha\in N^*} p_{i\alpha}(t)\,p_{\alpha j}(s),\qquad i,\ j\in N,$$

$$p_{\infty j}(t+s)=0=\sum_{\alpha\in N} p_{\infty\alpha}(t)\,p_{\alpha j}(s)+p_{\infty\infty}(t)\,p_{\infty j}(s)=$$
$$=\sum_{\alpha\in N^*} p_{\infty\alpha}(t)\,p_{\alpha j}(s),\qquad j\in N,$$

$$p_{\infty\infty}(t+s)=1=\sum_{\alpha\in N} p_{\infty\alpha}(t)\,p_{\alpha\infty}(s)+p_{\infty\infty}(t)\,p_{\infty\infty}(s)=$$
$$=\sum_{\alpha\in N^*} p_{\infty\alpha}(t)\,p_{\alpha\infty}(s),$$

$$p_{i\infty}(t+s)=1-\sum_{\alpha\in N} p_{i\alpha}(t+s)=1-\sum_{\alpha\in N}\sum_{\beta\in N} p_{i\beta}(t)\,p_{\beta\alpha}(s)=$$
$$=1-\sum_{\beta\in N} p_{i\beta}(t)\sum_{\alpha\in N} p_{\beta\alpha}(s)=1-\sum_{\beta\in N} p_{i\beta}(t)\bigl(1-p_{\beta\infty}(s)\bigr)=$$
$$=p_{i\infty}(t)+\sum_{\beta\in N} p_{i\beta}(t)\,p_{\beta\infty}(s)=p_{i\infty}(t)\,p_{\infty\infty}(s)+$$
$$+\sum_{\beta\in N} p_{i\beta}(t)\,p_{\beta\infty}(s)=\sum_{\beta\in N^*} p_{i\beta}(t)\,p_{\beta\infty}(s).$$

Таким образом, несобственные процессы Маркова, по сути, не расширяют класс процессов Маркова. В частности, общие свойства переходных вероятностей однородных процессов Маркова являются также свойствами переходных вероятностей в несобственном процессе Маркова. Более того, для несобственных процессов величина

$$p_{i\infty}(t)=1-\sum_{\alpha\in N} p_{i\alpha}(t)$$

обладает теми же свойствами, что и вероятность перехода $p_{i\alpha}(t)$, $\alpha\in N$. Можно заметить, что величина $p_{i\infty}(t)$ является монотонно неубывающей функцией. Действительно, как мы только что видели,

$$p_{i\infty}(t+s)=p_{i\infty}(t)+\sum_{\beta\in N} p_{i\beta}(t)\,p_{\beta\infty}(s)\geqslant p_{i\infty}(t),\qquad s>0.$$

В силу вышесказанного мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением марковских процессов в собственном смысле.

У стохастически непрерывного процесса переходные вероятности равномерно непрерывны при $t\geqslant 0$: для $s>0$

$$|\,p_{ij}(t+s)-p_{ij}(t)\,|\leqslant\sum_{k\in N}|\,p_{ik}(s)-\delta_{ik}\,|\,p_{kj}(t)\leqslant$$
$$\leqslant 1-p_{ii}(s)+\sum_{k\neq i} p_{ik}(s)=2\,(1-p_{ii}(s))$$

и, значит,

$$|p_{ij}(t_1)-p_{ij}(t_2)|\leqslant 2(1-p_{ii}(|t_1-t_2|)).$$

Как видим, $p_{ij}(t)$ равномерно непрерывны равностепенно по $j$.

Рассмотрим вопрос о существовании производных у функций $p_{ij}(t)$. Сначала покажем существование правых производных в точке 0.

Теорема 1. *Всегда существуют конечные или бесконечные пределы*

$$a_{ij}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)-\delta_{ij}}{h}.$$

*Если $i\neq j$, то $a_{ij}$ конечно; $a_{ii}$ либо конечны, либо $a_{ii}=-\infty$; во всех случаях $\sum\limits_{j\neq i}a_{ij}\leqslant -a_{ii}$.*

*Доказательство*. Пусть $i=j$. Положим

$$s=\sup_{h>0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}$$

(может быть, $s=+\infty$). Если $c<s$ и $\frac{1-p_{ii}(t_0)}{t_0}>c$, то при $\frac{t_0}{n+1}\leqslant\tau<\frac{t_0}{n}$, учитывая неравенство $p_{ii}(t+h)\geqslant p_{ii}(t)\,p_{ii}(h)$, будем иметь

$$c<\frac{1}{t_0}\left[1-[p_{ii}(\tau)]^n p_{ii}(t_0-n\tau)\right]<$$

$$<\frac{1-[p_{ii}(\tau)]^n+(1-p_{ii}(t_0-n\tau))}{n\tau}<\frac{[1-p_{ii}(\tau)]\,n}{n\tau}+\frac{1-p_{ii}(t_0-n\tau)}{t_0}.$$

Поскольку при $\tau\to 0$ $t_0-n\tau\to 0$, $p_{ii}(t_0-n\tau)\to 1$, то

$$\varliminf_{\tau\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(\tau)}{\tau}\geqslant c,$$

каково бы ни было $c<s$. Так как

$$\varlimsup_{\tau\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(\tau)}{\tau}\leqslant s,$$

то из этих двух соотношений вытекает, что

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(\tau)}{\tau}=\sup_{h}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}.$$

Пусть $i\neq j$. Выберем $\delta$ так, чтобы при $0<s\leqslant nh<\delta$ выполнялись неравенства $p_{ii}(s)>c$, $p_{jj}(s)>c$, где $1/2<c<1$. Пусть $\{\xi_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$ — цепь Маркова с фазовым пространством $N$ и вероятностью перехода за один шаг $p_{ij}=p_{ij}(h)$.

Тогда

$$p_{ij}(nh) = \mathsf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{r=0}^{n-1} \mathsf{P}\{\xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{r-1} \neq j, \xi_r = i \mid \xi_0 = i\} p_{ij} \mathsf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{r+1} = j\} \geqslant$$

$$\geqslant c p_{ij} \sum_{r=0}^{n-1} \mathsf{P}\{\xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{r-1} \neq j, \xi_r = i \mid \xi_0 = i\}.$$

Но

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{r-1} \neq j, \xi_r = i \mid \xi_0 = i\} = \mathsf{P}\{\xi_r = i \mid \xi_0 = i\} -$$

$$- \sum_{l<r} \mathsf{P}\{\xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{l-1} \neq j, \xi_l = j \mid \xi_0 = i\} \mathsf{P}\{\xi_r = i \mid \xi_l = j\} \geqslant$$

$$\geqslant c - (1-c) \sum_{l<r} \mathsf{P}\{\xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{l-1} \neq j, \xi_l = j \mid \xi_0 = i\} \geqslant 2c - 1.$$

Значит,

$$p_{ij}(nh) \geqslant c(2c-1) n p_{ij}(h).$$

Пусть $t < \delta$, $h < \delta$, $n = \left[\frac{t}{h}\right]$ (целая часть). Тогда

$$\frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \frac{p_{ij}\left(\left[\frac{t}{h}\right] h\right)}{\left[\frac{t}{h}\right] h}.$$

Переходя к пределу при $h \downarrow 0$, получаем

$$\varlimsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \varliminf_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

Но выбором сколь угодно малого $\delta$ можем сделать $c$ сколь угодно близким к 1. Значит,

$$\varlimsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \varliminf_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t},$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \varlimsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} < \infty.$$

Далее, если $N_1 \subset N$ — любое конечное множество состояний, не содержащее $i$, то

$$\frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \geqslant \sum_{j \in N_1} \frac{1}{h} p_{ij}(h),$$

откуда $-a_{ii} \geqslant \sum_{j \in N_1} a_{ij}$; значит,

$$-a_{ii} \geqslant \sum_{j \neq i} a_{ij}. \blacksquare$$

С помощью величин $a_{ij}$ производится классификация состояний процесса. Состояние $i$ называется *мгновенным*, если $a_{ii} = -\infty$; в противном случае оно называется *немгновенным* или *задерживающим*. Немгновенное состояние $i$ называется *регулярным*, если

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} = -a_{ii}.$$

В противном случае оно называется *нерегулярным*.

Пусть состояние $i$ немгновенно. Будем предполагать процесс сепарабельным. Тогда момент $\zeta$ первого выхода из состояния $i$ имеет показательное распределение:

$$\mathsf{P}\{\zeta > t \mid x_0(0, \omega) = i\} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{x_0(t_{nk}, \omega) = i, \ k = 1, \ldots, n\},$$

где $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = t$ и $\max(t_{nk+1} - t_{nk}) \to 0$, множества $\Lambda_n = \{t_{n1}, \ldots, t_{nk-1}\}$ монотонно возрастают и $\bigcup \Lambda_n = \Lambda \cap [0, t]$, где $\Lambda$ — множество сепарабельности. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta > t \mid x_0(0, \omega) = i\} = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} p_{ii}(t_{nk} - t_{nk-1}) =$$
$$= \exp\left\{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \ln p_{ii}(t_{nk} - t_{nk-1})\right\} = \exp\{a_{ii} t\},$$

так как $\ln p_{ii}(t_{nk} - t_{nk-1}) \sim p_{ii}(t_{nk} - t_{nk-1}) - 1 \sim a_{ii}(t_{nk} - t_{nk-1})$.

Предположим теперь, что процесс непрерывен справа в момент $\zeta$ первого выхода из регулярного состояния $i$. Найдем распределение величины $x_0(\zeta, \omega)$. Имеем

$$\mathsf{P}\{x_0(\zeta, \omega) = j \mid x_0(0, \omega) = i\} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}_{0,i}\left\{\bigcup_k \left\{x_0\left(\frac{1}{2^n}, \omega\right) = i, \ldots, x_0\left(\frac{k-1}{2^n}, \omega\right) = i, x_0\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right) = j\right\}\right\} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{ii}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]^{k-1} p_{ij}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{p_{ij}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{1 - p_{ii}\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{a_{ij}}{-a_{ii}}.$$

Таков вероятностный смысл коэффициентов $a_{ij}$.

Рассмотрим теперь дифференцируемость вероятности перехода при $t>0$. Если $i$ — регулярное состояние, то при $h>0$

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_k [p_{ik}(h)-\delta_{ik}]\,p_{kj}(t)=$$
$$=(p_{ii}(h)-1)\,p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)\,p_{kj}(t).$$

Выберем такое конечное множество $N_1$, не содержащее $i$, чтобы

$$-a_{ii}-\sum_{j\in N_1} a_{ij}<\varepsilon.$$

Если $h$ настолько мало, что

$$\left|\frac{1-p_{ii}(h)}{h}+a_{ii}\right|<\varepsilon,\qquad \sum_{j\in N_1}\left|\frac{p_{ij}(h)}{h}-a_{ij}\right|<\varepsilon,$$

то

$$\sum_{j\neq i,\ j\overline{\in} N_1}\frac{p_{ij}(h)}{h}=\frac{1-p_{ii}(h)}{h}+\sum_{j\in N_1}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leqslant$$
$$\leqslant -a_{ii}+\sum_{j\in N_1}a_{ij}+\left|\frac{1-p_{ii}(h)}{h}+a_{ii}\right|+\sum_{j\in N_1}\left|\frac{p_{ij}(h)}{h}-a_{ij}\right|<3\varepsilon.$$

Поэтому

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}-\frac{p_{ii}(h)-1}{h}\,p_{ij}(t)-\sum_{k\in N_1}\frac{p_{ik}(h)}{h}\,p_{kj}(t)\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\substack{k\neq i\\ k\overline{\in} N_1}}\frac{p_{ik}(h)}{h}\,p_{kj}(t)\leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}-a_{ii}p_{ij}(t)-\sum_{k\in N_1}a_{ik}p_{kj}(t)\right|\leqslant 5\varepsilon.$$

Поскольку $\sum_{k\neq i,\ k\overline{\in} N_1} a_{ik}p_{kj}(t)\leqslant \sum_{k\neq i,\ k\overline{\in} N_1} a_{ik}=a_{ii}-\sum_{j\in N_1}a_{ij}<\varepsilon$, то

$$\left|\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}-\sum a_{ik}p_{kj}(t)\right|<6\varepsilon.$$

Отсюда вытекает существование правой производной $\dfrac{d^+p_{ij}(t)}{dt}$ и равенства

$$\frac{d^+p_{ij}(t)}{dt}=\sum a_{ik}p_{kj}(t).$$

Так как правая часть этого равенства непрерывна, то и правая производная $\dfrac{d^+p_{ij}(t)}{dt}$ тоже непрерывна и, следовательно, совпадает с обычной производной. Таким образом, доказано соотношение

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum a_{ik} p_{kj}(t). \tag{1}$$

Теорема 2. *Если все состояния процесса регулярны, то вероятности перехода $p_{ij}(t)$ $(i, j \in N)$ удовлетворяют системе уравнений* (1), *носящей название первой* (*обратной*) *системы Колмогорова.*

Покажем, что система уравнений (1) имеет всегда решение $p_{kj}(t)$, удовлетворяющее условиям 1)—4), если только коэффициенты $a_{ik}$ удовлетворяют условиям:

1) $\quad -a_{ii} \geqslant 0, \quad a_{ik} \geqslant 0, \quad k \neq i; \qquad$ 2) $\sum\limits_k a_{ik} = 0.$

Это решение можно построить с помощью метода последовательных приближений. Для этого перепишем (1) в виде

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{a_{ii} t} + \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}(s)\, ds. \tag{2}$$

(Поскольку

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} - a_{ii} p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}(t),$$

то

$$e^{a_{ii} t} \frac{d}{dt}\left[p_{ij}(t) e^{-a_{ii} t}\right] = \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}(t),$$

$$\frac{d}{ds}\left[p_{ij} e^{-a_{ii} s}\right] = e^{-a_{ii} s} \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}(s).$$

Интегрируя это соотношение от 0 до $t$ и получим (2).)

Положим, далее,

$$p_{ij}^{(0)}(t) = \delta_{ij} e^{a_{ii} t}, \tag{3}$$

$$p_{ij}^{(n)}(t) = \delta_{ij} e^{a_{ii} t} + \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}^{(n-1)}(s)\, ds \qquad (n > 0). \tag{4}$$

Тогда

$$p_{ij}^{(1)}(t) - p_{ij}^{(0)}(t) = \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}^{(0)}\, ds, \tag{5}$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(t) - p_{ij}^{(n)}(t) = \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik} \left[p_{kj}^{(n)}(s) - p_{kj}^{(n-1)}(s)\right] ds. \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) вытекает, что $0 \leqslant p_{ij}^{(0)}(t) \leqslant p_{ij}^{(1)}(t) \leqslant \dots$ $\dots \leqslant p_{ij}^{(n)}(t)$. Далее, если $s_i^{(n)}(t) = \sum_j p_{ij}^{(n)}(t)$, то из (3) и (4) вытекает

$$s_i^{(0)}(t) = e^{a_{ii}t} \leqslant 1,$$

$$s_i^{(n)}(t) = e^{a_{ii}t} + \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum a_{ik} s_k^{(n-1)}(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{a_{ii}t} + \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik}\, ds = e^{a_{ii}t} - a_{ii} \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)}\, ds = 1,$$

если только $s_k^{(n-1)}(t) \leqslant 1$. Следовательно, для всех $n$

$$\sum_j p_{ij}^{(n)}(t) \leqslant 1.$$

Поэтому существуют пределы

$$\bar{p}_{ij}(t) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}(t). \tag{7}$$

Переходя к пределу в соотношении (4), убеждаемся, что $\bar{p}_{ij}(t)$ удовлетворяют равенству (2). Покажем, что $\bar{p}_{ij}(t)$ являются наименьшими неотрицательными решениями (2). Пусть $\tilde{p}_{ij}(t)$ — некоторое неотрицательное решение (2). Тогда

$$\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant \delta_{ij} e^{a_{ii}t} = p_{ij}^{(0)}(t).$$

Если $\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant p_{ij}^{(n-1)}(t)$ при некотором $n > 0$, то

$$\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant \delta_{ij} e^{a_{ii}t} + \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik} p_{kj}^{(n-1)}(s)\, ds = p_{ij}^{(n)}(t).$$

Значит, $\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant p_{ij}^{(n)}(t)$ для всех $n$. Переходя к пределу, получаем $\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant \bar{p}_{ij}(t)$. Это решение $\bar{p}_{ij}$ называется минимальным. Прежде чем вывести уравнение Колмогорова — Чепмена, получим для $\bar{p}_{ij}(t)$ некоторое представление.

Используя рекуррентные соотношения (4), можем убедиться, что

$$p_{ij}^{(n)}(t) = \delta_{ij} e^{a_{ii}t} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k_1 \neq i \\ k_2 \neq k_1, \dots, k_{r-1} \neq k_{r-2}}} a_{ik_1} a_{k_1k_2} \dots a_{k_{r-1}j} \times$$

$$\times \int\limits_{s_1 + \dots + s_r < t} \exp\{a_{ii}s_1 + a_{k_1k_1}s_2 + \dots + a_{k_{r-1}k_{r-1}}s_r +$$

$$+ a_{jj}(t - s_1 - \dots - s_r)\}\, ds_1 \dots ds_r$$

(считаем $k_0 = i$). Поэтому

$$\bar{p}_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{a_{ii}t} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \neq i \\ k_2 \neq k_1, \ldots, k_{r-1} \neq k_{r-2}}} a_{ik_1} \ldots a_{k_{r-1}j} \times$$
$$\times \int\limits_{s_1+s_2+\ldots+s_r<t} \exp\{a_{ii}s_1 + \ldots + a_{k_{r-1}k_{r-1}}s_r +$$
$$+ a_{jj}(t - s_1 - \ldots - s_r)\} \, ds_1 \ldots ds_r. \qquad (8)$$

Обозначим через $\Pi(t)$ матрицу $\|p_{ij}(t)\|$; пусть $\pi_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$ $\lambda_i = -a_{ii}$, $\Pi = \|\pi_{ij}\|$, $\Lambda = \|\lambda_i \delta_{ij}\|$. Тогда (8) можно переписать так:

$$\Pi(t) = Ie^{-t\Lambda} +$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_{s_1+\ldots+s_r<t} e^{-s_1\Lambda} \Lambda \Pi e^{-s_2\Lambda} \Lambda \Pi \ldots e^{-(t-s_1-\ldots-s_r)\Lambda} \, ds_1 \ldots ds_r \qquad (9)$$

($I$ — единичная матрица).

Формула (9) допускает простую вероятностную интерпретацию. Пусть $\{x_n(\omega),\ n = 0, 1, \ldots\}$ — цепь Маркова с фазовым пространством $N$ и матрицей вероятностей перехода за один шаг $\Pi$. Рассмотрим последовательность случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, связанных с цепью Маркова, совместное распределение которых при заданных $x_0(\omega),\ x_1(\omega), \ldots$ совпадает с распределением независимых показательных величин, при этом

$$\mathsf{P}\{\zeta_k > t \mid x_0(\omega),\ x_1(\omega), \ldots\} = \exp\left\{-\lambda_{x_{k-1}(\omega)} t\right\}.$$

Другими словами, $\{x_n(\omega)\}$ — вложенная цепь Маркова для процесса, вероятности перехода которого мы хотим построить, а $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots\}$ — времена пребывания в состояниях. Пусть $\bar{x}(t, \omega) = x_n(\omega)$, если $\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \leqslant t < \sum_{k=1}^{n+1} \zeta_k$ $\left(\sum_1^0 = 0\right)$. Процесс $\bar{x}(t, \omega)$ определен на $\left[0, \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k\right)$ и после момента $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ обрывается (или можно считать, что он попадает в поглощающее состояние $+\infty$). Обозначим

$$q_{ij}^{(r)}(t) = \mathsf{P}\left\{\bar{x}(t, \omega) = j,\ \sum_{k=1}^{r} \zeta_k \leqslant t < \sum_{k=1}^{r+1} \zeta_k \mid \bar{x}(0, \omega) = i\right\} \qquad (10)$$

(вероятность перейти из $i$-го состояния в $j$-е, совершив ровно $r$ переходов). Тогда

$$q_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-t\lambda_i},$$

$$q_{ij}^{(r)}(t)=\sum_{k_1,\ldots,k_r}\ \int\limits_{s_1+\ldots+s_r<t} e^{-\lambda_i s_1}\lambda_i\pi_{ik_1}e^{-\lambda_{k_1}s_2}\lambda_{k_1}\pi_{k_1k_2}\times\ldots$$
$$\ldots\times e^{-\lambda_{k_r}s_r}\lambda_{k_r}\pi_{k_rj}e^{-\lambda_j(t-s_1-\ldots-s_r)}\,ds_1\ldots ds_r.$$

Таким образом, обозначая $Q^{(r)}(t)=\|q_{ij}^{(r)}(t)\|$, можем (9) переписать в виде

$$\Pi(t)=\sum_{r=0}^{\infty}Q^{(r)}(t). \tag{11}$$

Используя равенство (10), легко получить

$$q_{ij}^{(r)}(t)=\sum_k\sum_{l=0}^{r}\mathsf{P}\Big\{\bar{x}(t+u,\,\omega)=j,\ \bar{x}(t,\,\omega)=k,$$
$$\sum_{m=1}^{l}\zeta_m\leqslant t<\sum_{m=1}^{l+1}\zeta_k,\ \sum_{n=l+1}^{r}\zeta_n\leqslant u<\sum_{n=l+1}^{r+1}\Big|\,\bar{x}(0,\,\omega)=i\Big\}=$$
$$=\sum_k\sum_{l=0}^{r}q_{ik}^{(l)}(t)\,q_{kj}^{(r-l)}(u),$$

т. е.

$$Q^{(r)}(t+u)=\sum_{l=0}^{r}Q^{(l)}(t)\,Q^{(r-l)}(u).$$

Поэтому

$$\Pi(t+u)=\sum_{r=0}^{\infty}Q^{(r)}(t+u)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{r}Q^{(l)}(t)\,Q^{(r-l)}(u)=$$
$$=\sum_{\substack{r\geqslant 0\\ q\geqslant 0}}Q^{(r)}(t)\,Q^{(q)}(u)=\Pi(t)\,\Pi(u).$$

Тем самым для $\bar{p}_{ij}(t)$ установлено уравнение Колмогорова — Чепмена.

Вопрос о единственности решения первой системы Колмогорова с начальным условием $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$ непосредственно связан с регулярностью процесса. Действительно, заметим, что для единственности решения достаточно выполнения условия

$$\sum_j\bar{p}_{ij}(t)=1 \tag{12}$$

(вероятность перейти из $i$-го состояния в $j$-е, совершив ровно $r$ переходов). Тогда

$$q_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-t\lambda_i},$$

$$q_{ij}^{(r)}(t)=\sum_{k_1,\ldots,k_r}\ \int\limits_{s_1+\ldots+s_r<t} e^{-\lambda_i s_1}\lambda_i\pi_{ik_1}e^{-\lambda_{k_1}s_2}\lambda_{k_1}\pi_{k_1k_2}\times\ldots$$

$$\ldots\times e^{-\lambda_{k_r}s_r}\lambda_{k_r}\pi_{k_rj}e^{-\lambda_j(t-s_1-\ldots-s_r)}\,ds_1\ldots ds_r.$$

Таким образом, обозначая $Q^{(r)}(t)=\|q_{ij}^{(r)}(t)\|$, можем (9) переписать в виде

$$\Pi(t)=\sum_{r=0}^{\infty}Q^{(r)}(t). \tag{11}$$

Используя равенство (10), легко получить

$$q_{ij}^{(r)}(t)=\sum_k\sum_{l=0}^{r}\mathsf{P}\Bigg\{\bar x(t+u,\omega)=j,\ \bar x(t,\omega)=k,$$

$$\sum_{m=1}^{l}\zeta_m\leqslant t<\sum_{m=1}^{l+1}\zeta_k,\ \sum_{n=l+1}^{r}\zeta_n\leqslant u<\sum_{n=l+1}^{r+1}\Bigg|\,\bar x(0,\omega)=i\Bigg\}=$$

$$=\sum_k\sum_{l=0}^{r}q_{ik}^{(l)}(t)\,q_{kj}^{(r-l)}(u),$$

т. е.

$$Q^{(r)}(t+u)=\sum_{l=0}^{r}Q^{(l)}(t)\,Q^{(r-l)}(u).$$

Поэтому

$$\Pi(t+u)=\sum_{r=0}^{\infty}Q^{(r)}(t+u)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{r}Q^{(l)}(t)\,Q^{(r-l)}(u)=$$

$$=\sum_{\substack{r\geqslant 0\\ q\geqslant 0}}Q^{(r)}(t)\,Q^{(q)}(u)=\Pi(t)\,\Pi(u).$$

Тем самым для $\bar p_{ij}(t)$ установлено уравнение Колмогорова — Чепмена.

Вопрос о единственности решения первой системы Колмогорова с начальным условием $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$ непосредственно связан с регулярностью процесса. Действительно, заметим, что для единственности решения достаточно выполнения условия

$$\sum_j\bar p_{ij}(t)=1 \tag{12}$$



для всех $i, t>0$ ($\bar p_{ij}$ — минимальное решение). Действительно, если $p_{ij}(t)$ — другое неотрицательное решение, для которого $\sum p_{ij}(t)=1$, то $p_{ij}(t)-\bar p_{ij}(t)\geqslant 0$ и

$$\sum_j(p_{ij}(t)-\bar p_{ij}(t))=1-1=0.$$

Значит, $p_{ij}(t)=\bar p_{ij}(t)$. Но из (10) вытекает

$$\sum_j\bar p_{ij}(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{r}\zeta_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{r+1}\zeta_k\,|\,\bar x(0,\omega)=i\right\}=$$

$$=\mathsf{P}\left\{\sup_r\sum_{k=1}^{r}\zeta_k>t\,|\,\bar x(0,\omega)=i\right\}=\mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k>t\,|\,\bar x(0,\omega)=i\right\}.$$

Поэтому условие (12) эквивалентно регулярности процесса. В случае нерегулярности процесса можно построить и другие решения первой системы Колмогорова. Укажем лишь один способ такого построения. Зададим произвольные вероятности $p_k$, $\sum p_k=1$ и будем считать, что в момент $\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k$ (если он конечен) процесс с вероятностью $p_k$ попадает в состояние $k$. Для такого процесса вероятности перехода будут удовлетворять следующему уравнению:

$$p_{ij}(t)=\mathsf{P}\left\{x(t,\omega)=j,\ \sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k>t\,|\,x(0,\omega)=i\right\}+$$

$$+\sum_l\int_0^t\mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\in ds\,|\,\bar x(0,\omega)=i\right\}p_l p_{lj}(t-s) \tag{13}$$

(можем перейти из $i$ в $j$ за конечное число скачков либо после того, как произошло бесконечное число скачков). Первое слагаемое справа в (13) совпадает с $\bar p_{ij}(t)$. Функции

$$\Phi_i(s)=\mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k<s\,|\,\bar x(0,\omega)=i\right\}$$

можно считать заданными. Уравнение (13) принимает вид

$$p_{ij}(t)=\bar p_{ij}(t)+\sum_l\int_0^t p_l p_{lj}(t-s)\,d\Phi_i(s). \tag{14}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее 1)—4), строится точно так же, как минимальное решение уравнения (2).

Рассмотрим теперь вторую (прямую) систему Колмогорова. Формально она получается из уравнения Колмогорова —

Чепмена следующим образом:

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\sum_k p_{ik}(t)\left[\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h}\right],$$

и после перехода к пределу

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k p_{ik}(t)\,a_{kj}. \tag{15}$$

Уравнение (15) удобно тем, что из него можно получить уравнение для безусловного распределения процесса: если $\mathsf{P}\{x(0,\omega)=i\}=p_i$, то

$$\mathsf{P}\{x(t,\omega)=j\}=\sum_i p_i p_{ij}(t).$$

Умножая (15) на $p_i$ и суммируя по $i$, найдем

$$\frac{d}{dt}\mathsf{P}\{x(t,\omega)=j\}=\sum_k \mathsf{P}\{x(t,\omega)=k\}\,a_{kj}. \tag{16}$$

Приведем одно достаточное условие, при котором вторая система Колмогорова выполняется.

Теорема 3. *Пусть все состояния процесса регулярны и при заданном $i$*

$$\sum_k p_{ik}(t)\,a_{kk}>-\infty. \tag{17}$$

*Тогда при заданном $i$ для всех $j$ выполнено* (15).

*Доказательство.* При доказательстве теоремы 1 установлено, что

$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h}\leqslant -a_{ii}.$$

Значит, при $k\neq i$

$$\frac{p_{kj}(h)}{h}\leqslant\frac{1-p_{kk}(h)}{h}\leqslant -a_{kk}.$$

Имеем

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\sum_k p_{ik}(t)\left[\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h}\right].$$

Поскольку для ряда в правой части существует мажоранта по $h$

$$\sum_k\left|p_{ik}(t)\,\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h}\right|\leqslant\sum_k|p_{ik}(t)\,a_{kk}|,$$

то можно перейти к пределу при $h\downarrow 0$. Существование производной слева установлено в теореме 2. ■

Заметим, что ряд справа в (15) сходится всегда, каковы бы ни были вероятности перехода, если только все состояния процесса регулярны. Действительно,

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}+\frac{1-p_{jj}(h)}{h}p_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h};$$

переходя к пределу при $h\downarrow 0$ и учитывая существование производной $\frac{d}{dt}p_{ij}(t)$ (теорема 2), убеждаемся, что

$$\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)a_{kj}\leqslant\frac{dp_{ij}(t)}{dt}-a_{jj}p_{ij}(t).$$

Покажем, что минимальное решение $\bar{p}_{ij}(t)$ первой системы Колмогорова удовлетворяет и второй системе. Из полученной оценки вытекает, что определены суммы

$$\sum_k\bar{p}_{ik}(t)a_{kj}=\sum_k\bar{p}_{ik}(t)\lambda_k\pi_{kj},$$

а значит, определено произведение матриц

$$\Pi(u)\Lambda\Pi.$$

Из (9) находим

$$\int_0^t\Pi(u)\Lambda\Pi e^{-\Lambda(t-u)}du=\int_0^t e^{-u\Lambda}\Lambda\Pi e^{-(t-u)\Lambda}du+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^t\int_{s_1+\ldots+s_r<u}e^{-s_1\Lambda}\Lambda\Pi\ldots e^{-(u-s_1-\ldots-s_r)\Lambda}\Lambda\Pi e^{-(t-u)\Lambda}du.$$

Полагая в $r$-м слагаемом суммы $s_{r+1}=u-s_1-\ldots-s_r$, получим

$$\int_0^t\Pi(u)\Lambda\Pi e^{-(t-u)\Lambda}du=$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{s_1+\ldots+s_r<t}e^{-s_1\Lambda}\Pi\Lambda\ldots e^{-(t-s_1-\ldots-s_r)\Lambda}ds_1\ldots ds_r=$$

$$=\Pi(t)-e^{-t\Lambda}I.$$

Последнее соотношение поэлементно можно записать так:

$$\int_0^t\sum_{k\neq j}\bar{p}_{ik}(u)a_{kj}e^{-\lambda_j(t-u)}du=\bar{p}_{ij}(t)-e^{-t\lambda_j}\delta_{ij},$$

откуда

$$\int_0^t \sum_{k \neq j} \bar{p}_{ik}(u)\, a_{kj} e^{\lambda_j u}\, du = \bar{p}_{ij}(t)\, e^{\lambda_j t} - \delta_{ij}.$$

Дифференцируя по $t$, находим

$$\sum_{k \neq j} \bar{p}_{ik}(t)\, a_{kj} e^{\lambda_j t} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\, e^{\lambda_j t} + \lambda_j \bar{p}_{ij}(t)\, e^{\lambda_j t};$$

подставляя $\lambda_j = -a_{jj}$ и сокращая $e^{\lambda_j t}$, получаем (15).

Приведем еще одно условие регулярности процесса. Положим

$$g_i(\lambda) = \mathsf{M}\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k\right\} \middle| x(0, \omega) = i\right) = \mathsf{M}_i \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k\right\} \qquad (18)$$

(через $\mathsf{M}_x$ мы обозначаем $\mathsf{M}_{0x}$; последнее обозначение введено в § 1). Функции $g_i(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений

$$g_i(\lambda) = \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda\zeta_1\}\, \mathsf{M}\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \zeta_k\right\} \middle| x(\zeta_1, \omega),\ \zeta_1\right) =$$

$$= \sum_j \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda\zeta_1\}\, \chi_{\{x(\zeta_1, \omega) = j\}} \mathsf{M}\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \zeta_k \,|\, x(\zeta_1, \omega) = j\right\}\right).$$

Поскольку

$$\mathsf{M} \exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \zeta_k \,|\, x(\zeta_1, \omega) = j\right\} = g_j(\lambda),$$

то

$$g_i(\lambda) = \sum_j \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda\zeta_1\}\, \chi_{\{x(\zeta_1, \omega) = j\}} g_j(\lambda) =$$

$$= \sum_j \pi_{ij} \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i} g_j(\lambda) = \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{\lambda - a_{ii}} g_j(\lambda).$$

Окончательно для $g_i(\lambda)$ получаем следующее уравнение:

$$\lambda g_i(\lambda) = \sum a_{ij} g_j(\lambda). \qquad (19)$$

Теорема 4. *Для того чтобы процесс был регулярен, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (19) *не имело при* $\lambda > 0$ *ограниченных решений, отличных от нуля.*

*Доказательство.* Если процесс нерегулярен, то функции $g_i(\lambda)$, определяемые равенствами (18), будут ограниченными ненулевыми решениями (19). Пусть теперь процесс регулярен. Равенство (19) эквивалентно соотношению

$$g_i(\lambda) = \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda\zeta_1\}\, g_{x_1(\omega)}(\lambda) \qquad (20)$$

(это установлено в промежуточных выкладках при выводе (19)). Из (20) вытекает, что

$$g_{x_1(\omega)}(\lambda) = \mathsf{M}_{x_1(\omega)} e^{-\lambda\zeta_2} g_{x_2(\omega)}(\lambda);$$

таким образом,

$$g_i(\lambda) = \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda(\zeta_1 + \zeta_2)\} g_{x_2(\omega)}(\lambda).$$

Используя соотношение

$$g_{x_k(\omega)}(\lambda) = \mathsf{M}_{x_k(\omega)} \exp\{-\lambda\zeta_{k+1}\} g_{x_{k+1}(\omega)}(\lambda),$$

точно так же убеждаемся, что справедливо равенство

$$g_i(\lambda) = \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda(\zeta_1 + \ldots + \zeta_n)\} g_{x_n(\omega)}(\lambda).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$|g_i(\lambda)| \leqslant \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda(\zeta_1 + \ldots + \zeta_n)\} \sup_k |g_k(\lambda)|$$

и учитывая, что для регулярного процесса

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}_i \exp\{-\lambda(\zeta_1 + \ldots + \zeta_n)\} = 0,$$

убеждаемся, что $g_i(\lambda) = 0$. ■

Рассмотрим необрывающиеся процессы с конечным множеством состояний. Будем считать, что фазовое пространство совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, r\}$. Очевидно, что для таких процессов справедливы все результаты, которые получены выше для процессов со счетным множеством состояний. (Можно добавить к фазовому пространству бесконечное множество поглощающих состояний $\{r+1, r+2, \ldots\}$ таких, что $p_{ij}(t) = 0$ при $i \leqslant r$, $j > r$.) Если для вероятностей перехода выполнены условия 1)—4), то все состояния процесса регулярны, так как

$$-a_{ii} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \sum_{j\neq i} a_{ij}$$

(переход к пределу под знаком суммы возможен, так как число слагаемых конечно). Поэтому вероятности перехода удовлетворяют первой системе уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} p_{kj}(t), \qquad i, j = 1, \ldots, r. \tag{21}$$

Поскольку $-\sum_{j=1}^{r} p_{kj}(t) a_j \leqslant -\sum_{j=1}^{r} a_j < \infty$, то в силу теоремы 3 выполнена и вторая система уравнений Колмогорова.

Пусть $\Pi(t)=\|p_{ij}(t)\|$ — матрица вероятностей перехода. Если $A=\|a_{ij}\|$, то (21) может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt}\Pi(t)=A\Pi(t).$$

Так как $\Pi(0)=I$, то

$$\Pi(t)=e^{tA}.$$

Процесс регулярен в силу теоремы 4. Действительно, ограниченное решение уравнения $\lambda g_i=\sum_j a_{ij}g_j$ удовлетворяет неравенству

$$(\lambda-a_{ii})|g_i|\leqslant\sum_{j\neq i}a_{ij}|g_j|\leqslant\max_j|g_j||a_{ii}|.$$

Значит, если $i$ таково, что $|g_i|=\max_j|g_j|$,

$$(\lambda-a_{ii})\max_j|g_j|\leqslant|a_{ii}|\max_j|g_j|,$$

что возможно лишь при условии $\max_j|g_j|=0$.

## § 4. Процесс рождения и гибели

Так называется однородный марковский процесс с состояниями $\{0, 1, 2, \ldots\}$, в котором из состояния $n$ возможен лишь непосредственный переход в состояния $n-1$ и $n+1$, а из состояния $0$ — в состояние $1$. Состояние процесса интерпретируется как число особей некоторой популяции, переход из состояния $n$ в $n+1$ — рождение новой особи, переход из $n$ в $n-1$ — гибель некоторой особи; в общем случае не исключается самозарождения (переход $0\to1$). Пусть такой процесс стохастически непрерывен и все его состояния регулярны. Тогда конечны величины

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=a_{ii}$$

для всех $i=0, 1, 2, \ldots$, и если

$$a_{ij}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h},\qquad j\neq i,$$

то вероятность перейти из состояния $i$ непосредственно в $j$ будет $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$. Из определения процесса рождения и гибели вытекает, что лишь $a_{i,i+1}$ и $a_{i,i-1}$ могут быть отличны от нуля. Обозначим $a_{i,i+1}=\lambda_i$, $a_{i,i-1}=\mu_i$. Тогда

$$p_{i,i+1}(t)=\lambda_i t+o(t),\qquad p_{i,i-1}(t)=\mu_i t+o(t)$$

и, следовательно, $\lambda_i\Delta t$ с точностью до $o(\Delta t)$ есть вероятность рождения новой особи в популяции из $i$ особей, а $\mu_i\Delta t+o(\Delta t)$ — вероятность гибели особи в этой популяции. В силу регулярности $a_{ii}=-\lambda_i-\mu_i$. Первая система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=-(\lambda_i+\mu_i)p_{ij}(t)+\lambda_i p_{i+1,\,j}(t)+\mu_i p_{i-1,\,j}(t),\quad \mu_0=0,\tag{1}$$

а вторая система уравнений —

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=-(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t)+\lambda_{j-1}p_{i,\,j-1}(t)+\mu_{j+1}p_{i,\,j+1}(t)\tag{2}$$

(при $j=0$ считаем $\lambda_{-1}=0$). Чтобы вторая система уравнений имела место, будем считать, что процесс обрывается после первого накопления скачков. Из (2) получаем уравнение для безусловных вероятностей:

$$\frac{d}{dt}p_j(t)=-(\lambda_j+\mu_j)p_j(t)+\lambda_{j-1}p_{j-1}(t)+\mu_{j+1}p_{j+1}(t)\tag{3}$$

($p_j(0)$ — вероятность того, что система в начальный момент находится в состоянии $j$, — считаем известной). Исследуем важный вопрос о существовании стационарного распределения процесса, т. е. такого начального распределения вероятностей, при котором $p_j(t)$ постоянны. Пусть $p_j(t)=p_j$. Тогда из (3) находим

$$-(\lambda_j+\mu_j)p_j+\lambda_{j-1}p_{j-1}+\mu_{j+1}p_{j+1}=0.\tag{4}$$

Предположим, что $\mu_j>0$ при $j>0$. Тогда, полагая в (4) $j=0$, находим

$$-\lambda_0p_0+\mu_1p_1=0,\qquad p_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0,$$

далее, при $j=1$

$$\mu_2p_2=(\lambda_1+\mu_1)p_1-\lambda_0p_0=\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_1}p_0,\qquad p_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0.$$

С помощью индукции легко убедиться, что решением системы (4) будет

$$p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}p_0.\tag{5}$$

Для того чтобы $\{p_k\}$ было распределением вероятностей, необходимо и достаточно, чтобы $\sum p_k=1$, так как $p_k$ неотрицательны. Поэтому для существования стационарного распределения необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}<\infty;\tag{6}$$

при выполнении этого условия стационарные вероятности задаются формулами

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\right)^{-1},$$

$$p_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\ldots\mu_k}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Процесс рождения и гибели может служить и для описания поведения чисто технических систем. Приведем некоторые примеры.

1. *Обслуживание станков.* Пусть $m$ станков обслуживаются бригадой, состоящей из $s$ рабочих.

Когда станок выходит из строя, он немедленно обслуживается одним рабочим, если не все рабочие заняты обслуживанием ранее вышедших из строя станков, или ожидает обслуживания, если все рабочие заняты. Станки обслуживаются в порядке, в котором они выходят из строя.

Примем следующие предположения. Для отдельного работающего станка вероятность выхода из строя за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ не зависит от $t$ и равна $\lambda(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ независимо от «истории» его работы (т. е. от продолжительности работы, числа выходов из строя и продолжительности обслуживания) до момента времени $t$. Аналогично, если станок обслуживается рабочим, то вероятность окончания обслуживания за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна $\mu(\Delta t)=\mu\,\Delta t+o(\Delta t)$ и не зависит от характера его работы и продолжительности обслуживания до момента времени $t$. Станки работают, выходят из строя и обслуживаются независимо друг от друга.

Условимся говорить, что производственный процесс находится в состоянии $\mathscr{E}_k$, если в данный момент времени число обслуживаемых или ожидающих обслуживания станков (т. е. общее число неработающих станков) равно $k$. Дополнительный выход из строя одного станка означает переход в состояние $\mathscr{E}_{k+1}$, а окончание обслуживания одного из станков означает переход в состояние $\mathscr{E}_{k-1}$. Таким образом, мы имеем однородную марковскую систему с конечным числом состояний $\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_m$. При этом из наших предположений вытекает, что

$$\begin{aligned}
&p_{k\,k+1}(\Delta t)=(m-k)\lambda\,\Delta t+o(\Delta t), && k=0,\ldots,m-1;\\
&p_{k\,k-1}(\Delta t)=k\mu\,\Delta t+o(\Delta t) && \text{при}\quad 1\leqslant k\leqslant s;\\
&p_{k\,k-1}(\Delta t)=s\mu\,\Delta t+o(\Delta t) && \text{при}\quad s\leqslant k\leqslant m;\\
&p_{k\,k\pm r}(\Delta t)=o(\Delta t), && r\geqslant 2,
\end{aligned}$$

т. е. мы имеем процесс рождения и гибели с конечным числом возможных состояний. В предыдущих обозначениях

$$\lambda_k = (m-k)\lambda, \qquad k = 0, 1, \ldots, m;$$

$$\mu_k = k\mu \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant s; \qquad \mu_k = s\mu \quad \text{при} \quad s \leqslant k \leqslant m.$$

Стационарное распределение всегда существует и в силу уравнений (7) задается следующими формулами:

$$p_k = C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \qquad k \leqslant s,$$

$$p_k = C_m^k \frac{k(k-1)\ldots(s+1)}{s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \qquad s < k \leqslant m,$$

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=0}^{s} C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=s+1}^{m} C_m^k \frac{k(k-1)\ldots(s+1)}{s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}.$$

Эти формулы могут быть использованы при расчете наиболее выгодного соотношения между числом станков и количеством обслуживающего персонала в конкретных производственных условиях.

2. *Телефонная сеть.* В ряде случаев мы имеем ту же схему, что и в предыдущем примере, но с $m = \infty$. Такое положение имеет место, например, в случае междугородной телефонной станции, обладающей $s$ линиями связи и обслуживающей практически неограниченное число абонентов. Роль единиц, требующих обслуживания, в настоящем примере играют абоненты, а роль обслуживающих единиц — линии связи. Номер состояния системы показывает число абонентов, требующих в данный момент обслуживания. Если их число $> s$, то они становятся в очередь и ожидают свободной линии. В отличие от предположений предыдущего примера примем, что вероятность того, что в течение промежутка времени $(t, t+\Delta t)$ потребует обслуживания один абонент, равна $\lambda(\Delta t) = \lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность того, что потребует обслуживания более чем один абонент, равна $o(\Delta t)$, причем эти вероятности не зависят от числа абонентов, потребовавших обслуживания до данного момента времени. Что касается режима обслуживания абонентов, то мы сохраним полностью предположения предыдущего примера. Тогда имеем

$$\lambda_k = \lambda, \quad \mu_k = k\mu \quad \text{при} \quad k \leqslant s; \qquad \mu_k = s\mu \quad \text{при} \quad k \geqslant s.$$

Для существования стационарного распределения необходима и достаточна сходимость ряда

$$S = \sum_{k=0}^{s} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{s!\,s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k < \infty,$$

т. е. условие $\lambda < \mu$.

В этом случае стационарное распределение дается формулами

$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{S}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant s,$$

$$p_k = \frac{1}{s!\, s^{k-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{S}, \qquad k \geqslant s.$$

3. *Текстильная нить.* Текстильная нить представляет собой пучок волокон, причем число волокон в данной точке меняется вдоль ее длины. Если предположить, что длина волокна имеет фиксированное отрицательно показательное распределение, не зависящее ни от числа волокон в какой-либо точке нити, ни от их длин, и что вероятность появления нового волокна на участке $(t, t+\Delta t)$ нити равна $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от числа волокон и их длин, то число волокон $\nu(t)$ в точке $t$ нити представляет собой процесс рождения и гибели с параметрами

$$\lambda_n = \lambda, \qquad \mu_n = n\mu,$$

где $\mu$ есть величина, обратная средней длине одного волокна.

Рассмотрим для процесса рождения и гибели задачу об определении распределения времени $\tau_{r,s}$ первого попадания из состояния $r$ в состояние $s$ при $r < s$. Положим

$$F_{rs}(t) = \mathsf{P}\{\tau_{rs} < t\},$$

$$\varphi_{rs}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dF_{rs}(t) = \mathsf{M} e^{-z\tau_{rs}} \qquad (z > 0).$$

Используя строгую марковость процесса и то, что момент $\tau_{r,r+1}$ является марковским, $x(\tau_{r,r+1}, \omega) = r+1$ ($x(t, \omega)$ — выборочная функция процесса), а также равенство (20) § 2, находим

$$\mathsf{P}_{0r}\{\tau_{rs} > t\} = \mathsf{M}_{0r}\mathsf{P}\left\{\tau_{rs} > t \,|\, \mathfrak{S}^0_{\tau_{r\,r+1}}\right\} =$$

$$= \mathsf{M}_{0r} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{x\left(\frac{i}{2^n} + \tau_{r\,r+1}, \omega\right) < s,\ i < t2^n \,\Big|\, \mathfrak{S}^0_{\tau_{r\,r+1}}\right\} =$$

$$= \mathsf{M}_{0r} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{\tau_{r\,r+1},\, x(\tau_{r\,r+1}, \omega)}\left\{x\left(\frac{i}{2^n} + \tau_{r\,r+1}, \omega\right) < s,\ \frac{i}{2^n} + \tau_{r\,r+1} < t\right\} =$$

$$= \mathsf{M}_{0r}\left(\mathsf{P}_{0\,r+1}\{\tau_{r+1\,s} > t-u\}\,|_{u=\tau_{r\,r+1}}\right) = \mathsf{M}_{0r}[1 - F_{r+1\,s}(t - \tau_{r\,r+1})]. \quad (8)$$

Поэтому

$$F_{rs}(t) = \int_0^t F_{r+1\,s}(t-u)\, dF_{r\,r+1}(u).$$

Следовательно,

$$\varphi_{r\,s}(z) = \varphi_{r+1\,s}(z)\,\varphi_{r\,r+1}(z)$$

и

$$\varphi_{r\,s}(z) = \varphi_{r\,r+1}(z)\,\varphi_{r+1\,r+2}(z)\,\ldots\,\varphi_{s-1\,s}(z). \tag{9}$$

Для нахождения функции $\varphi_{r,\,r+1}(z)$ воспользуемся следующим уравнением: при $r > 0$, если $\zeta_r$ — время первого выхода из состояния $r$, имеем

$$\mathsf{P}_{0\,r}\{\tau_{r\,r+1} < t\} = \mathsf{P}_{0\,r}\{\zeta_r < t,\ x(\zeta_r,\ \omega) = r+1\} + \\ + \int_0^t \mathsf{P}_{0\,r}\{\zeta_r \in ds, x(\zeta_r, \omega) = r-1\}\,\mathsf{P}_{0\,r-1}\{\tau_{r-1\,r+1} < t-s\}. \tag{10}$$

Это уравнение может быть получено с использованием строгой марковости процесса точно так же как и соотношение (8). Переходя в (10) к преобразованиям Лапласа, находим

$$\varphi_{r\,r+1}(z) = \mathsf{M}e^{-z\zeta_r}\left[\frac{\lambda_r}{\lambda_r+\mu_r} + \frac{\mu_r}{\lambda_r+\mu_r}\,\varphi_{r-1\,r+1}(z)\right] = \\ = \frac{\lambda_r+\mu_r}{z+\lambda_r+\mu_r}\left[\frac{\lambda_r}{\lambda_r+\mu_r} + \frac{\mu_r}{\lambda_r+\mu_r}\,\varphi_{r-1\,r}(z)\,\varphi_{r\,r+1}(z)\right] = \\ = \frac{\lambda_r}{z+\lambda_r+\mu_r} + \frac{\mu_r}{z+\lambda_r+\mu_r}\,\varphi_{r-1\,r}(z)\,\varphi_{r\,r+1}(z).$$

Поэтому

$$\varphi_{r\,r+1}(z) = \frac{\lambda_r}{z+\lambda_r+\mu_r\,(1-\varphi_{r-1\,r}(z))}. \tag{11}$$

Формула (11) позволяет последовательно определять $\varphi_{r\,r+1}(z)$, если только известно $\varphi_{0\,1}(z)$. Но в силу определения процесса $\tau_{0\,1} = \zeta_0$ и, значит,

$$\varphi_{0\,1}(z) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+z}. \tag{12}$$

Формулы (12), (11), (9) позволяют определить $\varphi_{r\,s}(s)$ при $r < s$.

Исследуем теперь условия регулярности процесса рождения и гибели. Воспользуемся для этого теоремой 4 § 3. Система уравнений (19) § 3 принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda g_0 &= -\lambda_0 g_0 + \lambda_0 g_1, \\ \lambda g_k &= -(\lambda_k+\mu_k)\,g_k + \lambda_k g_{k+1} + \mu_k g_{k-1}, \qquad k > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из уравнений (13) последовательно можем выразить все $g_k$ через $g_0$. Если $g_0 = 0$, то и все $g_k = 0$; если $g_0 \neq 0$, то отношения $g_k/g_0$ определяются из (13) однозначно. Обозначим

$g_{k+1}-g_k=f_k$. Тогда из второго соотношения (13) находим

$$f_k=\frac{\lambda}{\lambda_k}g_k+\frac{\mu_k}{\lambda_k}f_{k-1}=$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda_k}g_k+\frac{\mu_k}{\lambda_k}\left[\frac{\lambda}{\lambda_{k-1}}g_{k-1}+\frac{\mu_{k-1}}{\lambda_{k-1}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{k-2}}g_{k-2}+\ldots\right)\right]=$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda_k}g_k+\frac{\mu_k}{\lambda_k}\frac{\lambda}{\lambda_{k-1}}g_{k-1}+\frac{\mu_k}{\lambda_k}\frac{\mu_{k-1}}{\lambda_{k-1}}\frac{\lambda}{\lambda_{k-2}}g_{k-2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\mu_k\ldots\mu_2}{\lambda_k\ldots\lambda_2}\frac{\lambda}{\lambda_1}g_1+\frac{\mu_k\ldots\mu_1}{\lambda_k\ldots\lambda_1}f_0. \qquad (14)$$

Пусть $g_0=1$, В этом случае все $g_k>0$ и $f_k>0$. Поэтому $g_k$ возрастает с $k$. Поскольку $f_0=\frac{\lambda}{\lambda_0}g_0$, то, заменяя в (14) все $g_k$ на $g_0=1$, будем иметь

$$f_k\geqslant\lambda\left[\frac{1}{\lambda_k}+\frac{\mu_k}{\lambda_k\lambda_{k-1}}+\frac{\mu_k\mu_{k-1}}{\lambda_k\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}}+\ldots+\frac{\mu_r\ldots\mu_1}{\lambda_k\ldots\lambda_1\lambda_0}\right].$$

Поскольку $\sum\limits_{k=0}^{n}f_k=g_{n+1}-g_0$, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_{n+1}}+\ldots+\frac{\mu_n\ldots\mu_1}{\lambda_n\ldots\lambda_1\lambda_0}\right]<\infty \qquad (15)$$

необходимо для существования ограниченного решения системы (13). Заменим теперь в (14) все $g_i$ на $g_k$. Получим

$$f_k\leqslant\left[\frac{\lambda}{\lambda_k}+\ldots+\frac{\mu_k\ldots\mu_1\lambda}{\lambda_k\ldots\lambda_1\lambda_0}\right]g_k,$$
$$g_{k+1}\leqslant\left[1+\frac{\lambda}{\lambda_k}+\ldots+\frac{\mu_k\ldots\mu_1\lambda}{\lambda_k\ldots\lambda_1\lambda_0}\right]g_k\leqslant$$
$$\leqslant g_k\exp\left\{\lambda\left[\frac{1}{\lambda_k}+\ldots+\frac{\mu_k\ldots\mu_1}{\lambda_k\ldots\lambda_0}\right]\right\}.$$

Следовательно, при $g_0=1$

$$\sup_n g_n\leqslant\exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu_k}+\ldots+\frac{\mu_k\ldots\mu_1}{\lambda_k\ldots\lambda_0}\right]\right\}.$$

Таким образом, соотношение (15) и достаточно для ограниченности решения (13).

Теорема 1. *Для регулярности процесса рождения и гибели необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_{n-1}}+\ldots+\frac{\mu_n\ldots\mu_1}{\lambda_n\ldots\lambda_1\lambda_0}\right]=+\infty. \qquad (16)$$

Рассмотрим специальный случай процесса рождения и гибели, у которого $\mu_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Такой процесс называется процессом *чистого размножения* (или *роста*). У этого процесса из состояния $i$ возможен лишь переход в состояние $i+1$. Выборочные функции такого процесса являются неубывающими целочисленными функциями, все скачки которых равны 1. Подобного рода процесс может служить математической моделью процессов регистрации некоторого явления, происходящего в случайные моменты времени.

Например, при последовательном радиоактивном распаде из исходного радиоактивного вещества (материнского) образуется другое радиоактивное вещество (1-е дочернее), из 1-го дочернего — 2-е и т. д. Фиксируем некоторый атом исходного вещества. В течение случайного промежутка времени он находится в исходном состоянии и затем распадается, превращаясь в атом 1-го дочернего вещества, и т. д. При этом вероятность распада атома в промежуток $(t, s)$ не зависит от «продолжительности жизни» атома до момента времени $t$ и каждое состояние атома имеет определенную среднюю продолжительность жизни $l_k = 1/\lambda_k$. Примерами таких цепей последовательного радиоактивного распада являются превращения естественных изотопов урана и тория, заканчивающиеся образованием устойчивых изотопов свинца. Из сказанного выше вытекает, что случайный процесс, описывающий превращения атома, является марковским.

Уравнения Колмогорова имеют следующий вид:

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1\,j}(t), \qquad i \geqslant 0$$

(первая система уравнений), и

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -p_{ij}(t)\lambda_j + p_{i\,j-1}(t)\lambda_{j-1}, \qquad j \geqslant i+1, \\ p'_{ii}(t) &= -p_{ii}(t)\lambda_0 \end{aligned} \tag{17}$$

(вторая система уравнений).

К этим уравнениям нужно присоединить еще начальные условия $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Решим систему уравнений (17).

Если $i > j$, то в соответствии с определением процесса чистого роста полагаем

$$p_{ij}(t) = 0 \qquad (j < i),$$

что, конечно, также является решением системы (17) и удовлетворяет начальным условиям. После этого система уравнений (17) (при фиксированном $i$) приобретает рекуррентный характер.

Сначала определяем $p_{ii}(t)$ из уравнения

$$p'_{ii}(t) = \lambda_i p_{ii}(t), \qquad p_{ii}(0) = 1,$$

а затем последовательно функции $p_{i\,i+1}(t)$, $p_{i\,i+2}(t)$, для каждой из которых (17) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением. На первом шаге имеем $p_{ii}(t)=e^{-\lambda_i t}$ и затем

$$p_{ij}(t)=\lambda_{j-1}\int_0^t \exp\{-\lambda_j(t-s)\}\, p_{i\,j-1}(s)\, ds.$$

Решение системы (17) в явном виде может быть легко получено обычными методами операционного исчисления.

С этой целью рассмотрим преобразования Лапласа функций $p_{ij}(t)$:

$$\varphi_{ij}(z)=\int_0^\infty e^{-zt} p_{ij}(t)\, dt.$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-zt} p'_{ij}(t)\, dt = z\varphi_{ij}(z)-\delta_{ij}$$

и при переходе к изображениям функций уравнения (17) принимают вид

$$z\varphi_{ij}(z)=-\lambda_j\varphi_{ij}(z)+\lambda_{j-1}\varphi_{i\,j-1}(z), \qquad j>i,$$
$$z\varphi_{ii}(z)-1=-\lambda_i\varphi_{ii}(z),$$

откуда

$$\varphi_{ii}(z)=\frac{1}{z+\lambda_i}, \qquad \varphi_{ij}=\frac{\lambda_{j-1}}{z+\lambda_j}\varphi_{i\,j-1}, \qquad j>i,$$

и

$$\varphi_{ij}(z)=\left(\prod_{k=i}^{j-1}\lambda_k\right)\frac{1}{\psi(z)},$$

где

$$\psi(z)=\prod_{k=i}^{j}(z+\lambda_k).$$

Если среди чисел $\lambda_k$ нет равных, то

$$\frac{1}{\psi(z)}=\sum_{k=i}^{j}\frac{1}{(z+\lambda_k)\,\psi'(-\lambda_k)}.$$

С помощью этой формулы выражение для $\varphi_{ij}(z)$ записывается следующим образом:

$$\varphi_{ij}(z)=\left(\prod_{k=i}^{j-1}\lambda_k\right)\sum_{k=i}^{j}\frac{1}{(z+\lambda_k)\,\psi'(-\lambda_k)}.$$

Так как $\varphi_{ii}(z)=\frac{1}{z+\lambda_i}$ есть преобразование Лапласа функции $e^{-\lambda_i t}$, то $p_{ij}=0$, если $j<i$,

$$p_{ij}(t)=\left(\prod_{k=i}^{j-1}\lambda_k\right)\sum_{k=i}^{j}\frac{e^{-\lambda_k t}}{\psi'(-\lambda_k)}, \qquad j>i, \qquad p_{ii}(t)=e^{-\lambda_i t},$$

где

$$\psi'(-\lambda_k)=\prod_{\substack{r=i\\ r\neq k}}^{j}(\lambda_r-\lambda_k).$$

Полученные выражения и представляют собою решение уравнений (17) в явном виде.

В простейшем случае $\lambda_k=k\lambda$ соответствующий процесс называется процессом *линейного роста.*

В этом случае

$$p_{ij}(t)=i(i+1)\ldots(j-1)\lambda^{j-i}\times$$
$$\times\sum_{k=i}^{j}\frac{e^{-\lambda kt}}{\lambda^{j-i}(i-k)(i+1-k)\ldots(-1)\cdot 1\ldots(j-k)}=$$
$$=e^{-i\lambda t}C_{j-1}^{j-i}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-i}.$$

Соответствующее распределение носит название *распределения Юла — Фарри.* Заметим, что $(\xi(0)=i)$

$$\mathsf{M}\xi(t)=ie^{\lambda t}, \qquad \mathsf{D}\xi(t)=ie^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1).$$

Поскольку вложенная цепь для процесса чистого роста удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}_{0r}\{x_n(\omega)=n+r\}=1,$$

то в силу теоремы 4 § 2 условие

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=+\infty$$

является необходимым и достаточным для регулярности процесса. В частности, процесс линейного роста является регулярным.

## § 5. Ветвящиеся процессы

Важным классом марковских процессов со счетным числом состояний являются ветвящиеся процессы.

Предположим, что наблюдается некоторая физическая система, состоящая из конечного числа частиц одного и того же или нескольких различных типов. С течением времени каждая частица независимо от других частиц может исчезнуть или превратиться в группу новых частиц. Явления, описываемые такой схемой, довольно часто встречаются в природе и технике. К ним относятся ливни космических лучей, прохождение элементарных частиц через вещество, развитие биологических популяций, распространение эпидемии и др.

Точное определение процессов подобного типа в рамках теории процессов Маркова приводит к понятию ветвящегося процесса.

Пусть $n$ — число различных возможных типов частиц. Состояние системы $\Sigma$ в момент времени $t$ характеризуется целочисленным вектором $\nu(t)=\{\nu_1(t), \nu_2(t), \ldots, \nu_n(t)\}$, где $\nu_i(t)$ — число частиц $i$-го типа, существующих в момент времени $t$. В дальнейшем мы будем отождествлять состояние системы $\Sigma$ в момент времени $t$ с вектором $\nu(t)$. Относительно характера эволюции системы $\Sigma$ во времени предположим следующее: какова бы ни была частица, существующая в момент времени $t$, ее последующая эволюция не зависит от того, когда и каким образом эта частица появилась, и от характера эволюции всех остальных частиц, входящих в $\Sigma$ в момент времени $t$.

Пусть $\alpha$, $\beta$, ... обозначают $n$-мерные векторы с целочисленными неотрицательными координатами:

$$\alpha=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \qquad \beta=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Введем вероятности перехода $p_{\alpha\beta}(t_1, t_2)$ системы $\Sigma$ из состояния $\alpha$, имевшего место в момент времени $t_1$, в состояние $\beta$ в момент времени $t_2$:

$$p_{\alpha\beta}(t_1, t_2)=\mathsf{P}\{\nu(t_2)=\beta \mid \nu(t_1)=\alpha\}.$$

Обозначим через $\{i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ состояние системы $\Sigma$, состоящей из одной частицы $i$-го типа.

Сформулированное выше предположение о характере эволюции системы $\Sigma$ во времени может быть записано следующей формулой:

$$p_{\alpha\beta}(t_1, t_2)=\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{a_i}\beta^{(ij)}=\beta}\ \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{a_i} p_{\{i\}\beta^{(ij)}}(t_1, t_2), \tag{1}$$

где суммирование в правой части равенства производится по всевозможным векторам $\beta^{(ij)}$ с неотрицательными целочисленными компонентами $(j=1, \ldots, a_i,\ i=1, \ldots, n)$, в сумме составляющими вектор $\beta$. При этом, если $a_i=0$, то считаем

$$\prod_{j=1}^{a_i} p_{\{i\}\beta^{(ij)}}(t_1, t_2)=0.$$

Итак, *ветвящийся процесс* есть марковский процесс, пространство возможных состояний $N$ которого является совокупностью всех целочисленных $n$-мерных векторов с неотрицательными координатами и переходные вероятности которого удовлетворяют соотношению (1).

В дальнейшем рассматриваются только однородные ветвящиеся процессы, т. е. процессы, для которых

$$p_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = p_{\alpha\beta}(t_2 - t_1).$$

Рассмотрим процессы с одним типом частиц ($n = 1$). Так как в ветвящемся процессе каждая частица эволюционирует независимо от других, можно считать, что в начальный момент времени существовала одна частица. С течением времени она или исчезает, или превращается в $k$ однотипных частиц — первую генерацию.

Каждая частица первой генерации «живет» независимо от других частиц, и для нее имеют место те же теоретико-вероятностные законы, что и для исходной. В некоторый момент времени она или исчезает, или превращается в частицы второй генерации и т. д. Весь процесс описывается одной целочисленной случайной функцией $\nu(t)$, равной числу частиц, существующих в момент времени $t$, при этом $\nu(0) = 1$.

Множеством возможных состояний процесса является последовательность натуральных чисел $0, 1, 2, \ldots$, причем $0$ является поглощающим состоянием: если $\nu(t_0) = 0$ в момент времени $t_0$, то и во все последующие моменты времени $\nu(t) = 0$ ($t > t_0$). Если с вероятностью 1 в некоторый момент времени $t$ окажется, что $\nu(t) = 0$, то процесс называется *вырождающимся*. В других случаях величина $\nu(t)$ обращается за конечный промежуток времени в 0 только с определенной вероятностью. Эту вероятность называют *вероятностью вырождения* процесса. Возможно, что со временем величина $\nu(t)$ неограниченно возрастает. В случае ядерной реакции эту ситуацию можно интерпретировать как взрыв. Таким образом, в теории ветвящихся процессов нас могут интересовать следующие вопросы: какова вероятность вырождения ветвящегося процесса, каково асимптотическое поведение величины $\nu(t)$?

Пусть $p_{ij}(t)$ обозначает условную вероятность того, что в момент времени $t + \tau$ система состоит из $j$ частиц, если в момент времени $\tau$ имелось $i$ частиц. Для решения задач, возникающих в теории ветвящихся процессов, удобно пользоваться методом производящих функций. Введем производящие функции $f_i(z, t)$ распределений $\{p_{ij}(t)\}$, $j = 0, 1, \ldots$ :

$$f_i(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_{ik}(t), \qquad |z| \leqslant 1.$$

Вероятности $p_{ij}(t)$ ($i$ фиксировано) соответствуют распределению суммы $i$ независимых случайных величин, каждая из которых имеет одно и то же распределение с производящей функцией $f_i(z, t)$. Поэтому

$$f_i(z, t) = [f_1(z, t)]^i. \tag{2}$$

Для определения функции $f_1(z, t)$ можно воспользоваться любой из систем уравнений Колмогорова (§ 3)

В соответствии с общей теорией существуют производные

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_{1j}(t)}{t} = b_j, \quad j > 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{11}(t)}{t} = b_1.$$

Предположим, что $b_1 = b_0 + \sum_{j=2}^{\infty} b_j < \infty$. Тогда имеет место первая система уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_{1j}(t)}{dt} = -b_1 p_{1j}(t) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{\infty} b_k p_{kj}(t). \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) на $z^j$ и просуммировав по $j$ от 0 до $\infty$, получим

$$\frac{\partial f_1(z, t)}{\partial t} = -b_1 f_1(z, t) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{\infty} b_k f_k(z, t) \qquad (|z| \leqslant 1)$$

или, в силу (2),

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -b_1 f(z, t) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{\infty} b_k f^k(z, t),$$

где положено $f(z, t) = f_1(z, t)$. Окончательно получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u(f), \tag{4}$$

где

$$u(z) = b_0 - b_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \qquad (|z| \leqslant 1). \tag{5}$$

К уравнению (4) нужно присоединить еще начальное условие

$$f(z, 0) = z. \tag{6}$$

Решение уравнения (4) при условии (6) может быть записано в виде

$$\varphi(f) - \varphi(z) = t, \qquad \varphi(z) = \int \frac{dz}{u(z)}. \tag{7}$$

Предположим, что выполнены условия, при которых имеет место вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова. Заметим, что из определения ветвящихся процессов вытекают следующие формулы:

$$p_{kk}(t) = (1 - b_1 t)^k + o(t) = 1 - kb_1 t + o(t),$$
$$p_{k\,k-1}(t) = k(1 - b_1 t)^{k-1} b_0 t + o(t) = kb_0 t + o(t),$$
$$p_{k\,k-j}(t) = o(t), \qquad j \geqslant 2,$$
$$p_{k\,k+j}(t) = k(1 - b_1 t) b_{j+1} t + o(t) = kb_{j+1} t + o(t), \qquad j \geqslant 1,$$

откуда следует (принимая обозначения § 3)

$$a_{jj} = jb_1, \quad a_{j\,j-1} = jb_0, \quad a_{j\,j-k} = 0, \qquad k \geqslant 2;$$
$$a_{j\,j+k} = jb_{k+1}, \qquad k \geqslant 1.$$

Таким образом, для функций $p_{1j}(t)$ система уравнений (15) § 3 принимает вид

$$\frac{\partial p_{1j}(t)}{\partial t} = (j+1) b_0 p_{1\,j+1}(t) - jb_1 p_{1\,j}(t) + \\ + (j-1) b_2 p_{1\,j-1}(t) + \ldots + b_j p_{1j}(t). \tag{8}$$

Умножая (8) на $z^j$ и суммируя по $j$ от 0 до $\infty$, получим новое уравнение для производящей функции $f(z, t)$:

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = u(z) \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \qquad (|z| < 1), \tag{9}$$

где $u(z)$ имеет значение (5). К этому уравнению добавляется начальное условие (6). Решение уравнений (9) и (6) имеет вид

$$f(z, t) = \psi\left(t + \int_0^z \frac{dz}{u(z)}\right), \tag{10}$$

где $\psi(t)$ — обратная функция для $t = \varphi(z) = \int\limits_0^z \frac{dz}{u(z)}$. Это решение совпадает с (7).

Пример. Положим

$$u(z) = p - (p+q) z + qz^2.$$

В этом случае одна частица за промежуток времени $t$ исчезает с вероятностью $pt + o(t)$, или превращается в две частицы с вероятностью $qt + o(t)$, или с вероятностью $1 - (p+q)t + o(t)$ сохраняется. Вероятность превращения более чем в две частицы равна $o(t)$. Имеем

$$\varphi(z)=\int_0^z \frac{dz}{u(z)}=\int_0^z \frac{dz}{p-(p+q)z+qz^2}=\frac{1}{q-p}\ln\frac{z-1}{z-\frac{p}{q}} \qquad (p\neq q).$$

Для обратной функции $z=\psi(t)$ получаем выражение

$$z=\psi(t)=\frac{1-\beta e^{qt(1-\beta)}}{1-e^{qt(1-\beta)}}, \qquad \beta=\frac{p}{q},$$

откуда

$$f(z, t)=\psi(t+\varphi(z))=\frac{z-\beta-\beta(z-1)e^{qt(1-\beta)}}{z-\beta-(z-1)e^{qt(1-\beta)}}.$$

Разлагая $f(z, t)$ в ряд по степеням $z$:

$$f(z, t)=\frac{1-e^{t(q-p)}}{1-\frac{1}{\beta}e^{t(q-p)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\beta)^2\left(1-e^{t(q-p)}\right)^{n-1}e^{t(q-p)}}{\left[\beta-e^{t(q-p)}\right]^{n+1}}z^n,$$

придем к следующим формулам:

$$p_{10}(t)=\frac{1-e^{t(q-p)}}{1-\frac{1}{\beta}e^{t(q-p)}}, \tag{11}$$

$$p_{1n}(t)=(1-\beta)^2\frac{\left(1-e^{t(q-p)}\right)^{n-1}e^{t(q-p)}}{\left[\beta-e^{t(q-p)}\right]^{n+1}}, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{12}$$

В предыдущем исключалась возможность $p=q$. Остановимся на ней. В этом случае

$$\varphi(z)=\int_0^z \frac{dz}{p(1-z)^2}=\frac{1}{p}\frac{z}{1-z}, \qquad z=\psi(t)=1-\frac{1}{1+pt},$$

откуда

$$f(z, t)=z(t+\varphi(z))=1-\frac{1-z}{1+pt(1-z)}=\frac{pt}{1+pt}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(pt)^{n-1}}{(1+pt)^{n+1}}z^n.$$

Следовательно,

$$p_{10}(t)=\frac{pt}{1+pt}, \tag{13}$$

$$p_{1n}(t)=\frac{(pt)^{n-1}}{(1+pt)^{n+1}}, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{14}$$

Из формул (11)—(14) непосредственно вытекают следующие асимптотические соотношения при $t\to\infty$: если $q\leqslant p$, то

$$p_{10}(t)\to 1, \quad p_{1n}(t)\to 0 \quad \text{при} \quad n\geqslant 1, \quad t\to\infty;$$

если же $q > p$, то

$$p_{10}(t) \to \beta \ (\beta < 1), \quad p_{1n}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 1, \quad t \to \infty.$$

В первом случае ($q \leqslant p$) ветвящийся процесс с вероятностью, равной 1, вырождается, т. е. со временем все частицы исчезают. Во втором случае ($q > p$) вероятность вырождения процесса равна $\beta = \frac{p}{q} < 1$; если же частицы не исчезают, то их число неограниченно увеличивается во времени. Действительно,

$$\mathbf{P}\{\nu(t) > N \mid \nu(t) > 0\} = 1 - \frac{1}{p_{10}(t)} \sum_{k=1}^{N} p_{1k}(t) \to 1,$$

каково бы ни было $N$.

Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ ветвящегося процесса в общем случае. В дальнейшем понадобятся моменты величины $\nu(t)$.

Поскольку мы используем производящие функции, вместо моментов удобней вводить факториальные моменты. Положим

$$m_k(t) = \mathbf{M}[\nu(t)(\nu(t) - 1) \ldots (\nu(t) - k + 1)].$$

Нетрудно установить линейные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют факториальные моменты $m_k(t)$. Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k < \infty.$$

Тогда при $|z| < 1$ дифференциальное уравнение (4) можно продифференцировать по $z$, в результате чего получим

$$\frac{\partial m_1(z, t)}{\partial t} = u'(f)\, m_1(z, t), \tag{15}$$

где положено

$$m_1(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} f(z, t) = \mathbf{M}\nu(t)\, z^{\nu(t)},$$

$$u'(z) = -b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k b_k z^{k-1}.$$

Из (15) и равенства $m_1(z, 0) = 1$ следует

$$m_1(z, t) = e^{\int_0^t u'(f)\,dt} \qquad (|z| < 1).$$

При $z \to 1$ имеем $u'(z) \to -b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k b_k = m_1 < \infty$ и $f(z, t) \to 1$, монотонно возрастая, а поэтому и равномерно относительно $t$. Следовательно,

$$\lim_{z \uparrow 1} m_1(z, t) = e^{m_1 t}.$$

С другой стороны, в силу теоремы Лебега при $z \uparrow 1$

$$\lim_{z \uparrow 1} m_1(z, t) = \lim_{z \uparrow 1} \mathsf{M}\nu(t) z^{\nu(t)} = \mathsf{M}\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t).$$

Таким образом,

$$m_1(t) = e^{m_1 t}. \tag{16}$$

Этот результат немедленно обобщается на факториальные моменты высших порядков.

Лемма 1. *Предположим, что*

$$m_r = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-r+1) b_n < \infty, \qquad r = 1, \ldots, k. \tag{17}$$

*Тогда факториальные моменты $m_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots, k$, величины $\nu(t)$ конечны и удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям первого порядка с постоянными коэффициентами.*

Для доказательства последовательно дифференцируем по $z$ ($|z| < 1$) уравнение (4). Полагая

$$m_k(z, t) = \frac{\partial^k f(z, t)}{\partial z^k} = \mathsf{M}(\nu(t)(\nu(t)-1) \ldots (\nu(t)-k+1) z^{\nu(t)-k}),$$

получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial m_2(z, t)}{\partial t} = u'(f) m_2(z, t) + u''(f) m_1^2(z, t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial m_k(z, t)}{\partial t} = u'(f) m_k(z, t) + F_k(z, t), \end{gathered} \tag{18}$$

где $F_k(z, t)$ — многочлен от $m_1(z, t), \ldots, m_{k-1}(z, t)$ с коэффициентами, линейно зависящими от $u''(f), \ldots, u^{(k)}(f)$. К этим уравнениям добавляются начальные условия

$$m_k(z, 0) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$m_k(z, t) = e^{\int_0^t u'(f)\,dt} \int_0^t F_k(z, \tau) e^{-\int_0^\tau u'(f)\,d\theta} d\tau.$$

По индукции, используя те же соображения, что и в случае $k = 1$, получаем

$$m_k(t) = \lim_{z \to 1} m_k(z, t) = e^{m_1 t} \int_0^t F_k(1, \tau) e^{-m_1 \tau} d\tau,$$

причем, очевидно, $m_k(t)$ удовлетворяет уравнению (18), в котором положено $z = 1$. ■

В частности,

$$m_2(t) = \frac{m_2}{m_1}(e^{m_1 t} - 1)\,e^{m_1 t} \qquad (m_1 \neq 0), \tag{19}$$

$$m_2(t) = m_2 t \qquad (m_1 = 0). \tag{20}$$

При изучении асимптотического поведения ветвящегося процесса важную роль играет функция $u(z)$ (см. (5)), которую мы будем сейчас рассматривать для действительных значений $z$. Заметим, что

$$u(0) = b_0 \geqslant 0, \quad u(1) = b_0 - b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k = 0,$$

$$u''(z) > 0 \quad \text{при} \quad z > 0;$$

при этом будем считать, что не все $b_k$ $(k \geqslant 2)$ равны нулю. Таким образом, $u''(z)$ выпукла вниз при $z > 0$ и, следовательно, на интервале $(0, 1)$ имеет не более одного нуля. Перейдем к определению вероятности $\alpha$ вырождения ветвящегося процесса $\nu(t)$. Так как события $\{\nu(t) = 0\}$ образуют монотонно возрастающий класс событий, то

$$\alpha = \mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} \nu(t) = 0\} = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\nu(t) = 0\} = \lim_{t\to\infty} p_{1\,0}(t).$$

Теорема 1. *Вероятность вырождения ветвящегося процесса совпадает с наименьшим неотрицательным корнем уравнения* $u(x) = 0$. *Если*

$$u'(1) = m_1 = -b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k b_k < \infty,$$

*то при* $u'(1) \leqslant 0$ *вероятность вырождения* $\alpha = 1$; *если же* $u'(1) > 0$, *то* $\alpha < 1$.

*Доказательство.* Так как $p_{1\,0}(t) = f(0, t)$, то из (4) следует, что

$$\frac{dp_{1\,0}(t)}{dt} = u(p_{1\,0}(t)), \qquad p_{1\,0}(0) = 0. \tag{21}$$

Если $b_0 = 0$, то решением уравнения (21) является $p_{1\,0}(t) \equiv 0$, и теорема 1 тривиальна. Пусть $b_0 > 0$. Заметим, что если $x_0$ — наименьший положительный корень уравнения $u(x) = 0$, то $p_{1\,0}(t_0) < x_0$ для всех $t > 0$. Действительно, если бы $p_{1\,0}(t_0) = x_0$, $t_0 > 0$, то в силу единственности решения уравнения (21) было бы $p_{1\,0}(t) \equiv x_0$, что невозможно.

Далее, так как существует предел $\alpha = \lim_{t\to\infty} p_{1\,0}(t) \leqslant 1$, то из (21) следует существование $\lim_{t\to\infty} p'_{1\,0}(t) = u(\alpha)$. Но отсюда вытекает, что $u(\alpha) = 0$, в противном случае $p_{1\,0}(t) = \int_{t_0}^{t} p'_{1\,0}(t)\,dt + p_{1\,0}(t_0)$

возрастало бы неограниченно. Таким образом, доказано, что $\alpha = x_0$. Если $x_0 < 1$, то в точке $x = 1$ функция $u(x)$ возрастает и производная $u'(1) > 0$, если только она существует. Если же $x_0 = 1$, то $u'(1) \leqslant 0$. ∎

Исследуем теперь асимптотическое поведение вероятности $p_{10}(t)$ при $t \to \infty$ для вырождающихся процессов ($\alpha = 1$).

Теорема 2. *Если* $m_1 = u'(1) \leqslant 0$, $m_2 = u''(1) < \infty$, *то*

$$1 - p_{10}(t) \sim Ke^{m_1 t} \quad \text{\textit{при}} \quad m_1 < 0 \quad \text{\textit{и некотором}} \quad K > 0$$

*и*

$$1 - p_{10}(t) \sim \frac{2}{m_2 t} \quad \text{\textit{при}} \quad m_1 = 0.$$

*Доказательство.* Положим

$$q(t) = 1 - p_{10}(t).$$

Функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dq}{dt} = -u(1 - q(t)), \qquad q(0) = 1.$$

Пользуясь формулой конечных приращений, получим

$$\frac{dq}{dt} = -u(1) + q(t)\,u'(\xi) = q(t)\,u'(\xi),$$

где $\xi$ лежит между $p_{10}(t)$ и 1. Так как $u'(x)$ — монотонно возрастающая функция, $\xi \to 1$ при $t \to \infty$, то $u'(\xi) = u'(1) - \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) > 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$. Таким образом,

$$\frac{dq}{dt} = q(t)(m_1 - \varepsilon(t)),$$

откуда

$$q(t) = e^{m_1 t - \int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau}.$$

Заметим, что ($\xi < \zeta < 1$)

$$0 < \varepsilon(t) = u'(1) - u'(\xi) = u''(\zeta)(1 - \xi) \leqslant u''(1)(1 - p_{10}(t)) \leqslant m_2 e^{m_1 t},$$

поэтому интеграл $\int\limits_0^\infty \varepsilon(t)\,dt$ конечен. Отсюда следует, что при $m_1 < 0$

$$q(t) \sim Ke^{m_1 t}, \quad \text{где} \quad K = \exp\left(-\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt\right).$$

Рассмотрим случай $m_1 = 0$. Имеем

$$\frac{dq}{dt} = -u(1 - q(t)) = -u(1) + q(t)\,u'(1) - \frac{q^2(t)}{2}\,u''(\xi_1),$$

где $\xi_1$ — число из интервала $(p_{10}(t), 1)$. Так как $u''(\xi_1) \to u''(1)$ при $t \to \infty$, то

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q^2(t)}{2}(m_2 + \varepsilon(t)),$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда следует

$$q(t) = \frac{2}{m_2 t + \int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau + 2} = \frac{2}{m_2 t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \blacksquare$$

Дополним теорему 2 результатом, относящимся к асимптотическому поведению вероятностей $p_{1k}(t)$ для вырождающихся процессов.

Так как $\lim\limits_{t \to \infty} p_{1n}(t) = 0$ $(n > 0)$, то $\lim\limits_{t \to \infty} f(z, t) = 1$. Положим

$$q(z, t) = 1 - f(z, t).$$

При $z = 0$ имеем $q(0, t) = 1 - f(0, t) = 1 - p_{10}(t) = q(t) \sim Ke^{m_1 t}$. Можно предположить, что такой же будет скорость убывания функции $q(z, t)$ и при $z \neq 0$. В связи с этим положим

$$\varphi(z, t) = \frac{q(z, t)}{q(t)} = \frac{1 - f(z, t)}{q(t)}. \tag{22}$$

Заметим, что функцию

$$f^*(z, t) = 1 - \varphi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{1n}(t)}{q(t)} z^n \tag{23}$$

можно рассматривать как производящую для условного распределения числа частиц $\nu(t)$ при гипотезе $\nu(t) \neq 0$.

Теорема 3. *Если $m_1 = u'(1) < 0$, $m_2 = u''(1) < \infty$, то при $t \to \infty$ условное распределение числа частиц $\nu(t)$ при гипотезе $\nu(t) > 0$ стремится к определенному пределу, производящая функция которого $f^*(z)$ равна*

$$f^*(z) = 1 - e^{m_1 \int\limits_0^z \frac{dz}{u(z)}}. \tag{24}$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $\varphi(z, t)$. Из (4) следует, что $\varphi(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{q(t)} u(1 - q(t)\varphi) + \frac{\varphi}{q(t)} u(1 - q(t)).$$

Разлагая правую часть полученного равенства по формуле Тейлора, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{q(t)}\left[u(1) - q(t)\varphi u'(1) + \frac{(q(t)\varphi)^2}{2}(u''(1) + \varepsilon_1)\right] + \\ + \frac{\varphi}{q(t)}\left[u(1) - q(t)u'(1) + \frac{q^2(t)}{2}(u''(1) + \varepsilon_2)\right],$$

где $\varepsilon_1 = u''(\xi_1) - u''(1)$, $\varepsilon_2 = u''(\xi_2) - u''(1)$, $\xi_1$ $(\xi_2)$ — число, лежащее между $f(z, t)$ и 1 (между $f(0, t)$ и 1). При $t \to \infty$ функции $\varepsilon_i \to 0$ $(i = 1, 2)$ равномерно в любой области $|z| \leqslant \rho < 1$. Предыдущее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{q(t)\varphi^2}{2}(m_2 + \varepsilon_1) + \frac{q(t)\varphi}{2}(m_2 + \varepsilon_2). \tag{25}$$

Начиная с некоторого достаточно большого $t$, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} < \frac{q(t)\varphi}{2}\left(m_2 + \frac{m_2}{2}\right) = \frac{3}{4} m_2 q(t)\varphi,$$

откуда

$$\varphi(z, t) \leqslant \varphi(z, t_0) e^{\frac{3}{4} m_2 \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau}.$$

Из сходимости интеграла $\int_{t_0}^{\infty} q(\tau)\, d\tau$ следует, что функция $\varphi(z, t)$ остается ограниченной при $t \to \infty$. Поэтому уравнение (25) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{q(t)\varphi}{2}[m_2(1 - \varphi) + \varepsilon], \qquad \varphi(z, 0) = 1 - z,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varphi\varepsilon_1 \to 0$ при $t \to \infty$. Представляя решение последнего уравнения в виде

$$\varphi(z, t) = (1 - z) e^{\frac{1}{2}\int_0^t q(\tau)[m_2(1 - \varphi(z, \tau)) + \varepsilon]\, d\tau},$$

убеждаемся в существовании предела

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(z, t) = K(z).$$

Кроме того, из (25) следует, что $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Так как $\varphi(z, t)$ является аналитической функцией внутри круга $|z| < 1$ и все использованные предельные соотношения имеют место равномерно внутри всякого круга $|z| \leqslant \rho < 1$, то функция $K(z)$ также является аналитической внутри круга и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} = \frac{dK(z)}{dz}$$

равномерно внутри любого круга $|z| \leqslant \rho < 1$. Для определения функции $K(z)$ можно воспользоваться уравнением (9). Подставляя в него $f(z, t) = 1 - q(t)\varphi(z, t)$, получим

$$-q'(t)\varphi(z, t) - q(t)\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = -u(z)\, q(t)\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}.$$

Разделив это уравнение на $q(t)$ при $t\to\infty$, получим, учитывая, что $q'(t)/q(t)\to m_1$ (см. доказательство теоремы 2),

$$m_1K(z)=u(z)\frac{dK(z)}{dz},$$

причем $K(0)=\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(0, t)=1$. Таким образом,

$$K(z)=e^{m_1\int\limits_0^z\frac{dz}{u(z)}},$$

$$1-f(z, t)\sim q(t)K(z)=e^{m_1\left(t+\int\limits_0^z\frac{dz}{u(z)}\right)}. \blacksquare$$

Приведем теперь выражение для среднего числа частиц в момент времени $t$ при гипотезе, что к этому моменту времени процесс не вырождается. Имеем

$$m^*(t)=\mathsf{M}\{\nu(t)\mid\nu(t)>0\}=\frac{e^{m_1t}}{q(t)}, \tag{26}$$

откуда, принимая во внимание теорему 2, вытекают следующие асимптотические соотношения при $t\to\infty$:

$$m^*(t)\sim\begin{cases}1/K & \text{при}\quad m_1<0,\\ m_2t/2 & \text{при}\quad m_1=0,\\ e^{m_1t}/(1-\alpha) & \text{при}\quad m_1>0.\end{cases}$$

При $m_1\geqslant 0$ число частиц $\nu(t)$ при гипотезе $\nu(t)>0$ неограниченно увеличивается. Положим

$$\nu^*(t)=\frac{\nu(t)}{m^*(t)}.$$

Тогда $\mathsf{M}\{\nu^*(t)\mid\nu^*(t)>0\}=1$. Изучим предельное поведение величины $\nu^*(t)$ при $t\to\infty$.

Так как можно ожидать, что предельное распределение величины $\nu^*(t)$ при гипотезе $\nu(t)>0$, если оно существует, будет непрерывным распределением на полупрямой $[0,\infty)$, целесообразно перейти от производящих функций к характеристическим. Для характеристической функции $g(\lambda, t)$ случайной величины $\nu^*(t)$ при гипотезе $\nu(t)>0$ имеем следующее значение:

$$g(\lambda, t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{i\lambda n}{m^*(t)}}\frac{p_{1n}(t)}{q(t)}=\frac{f\left(e^{\frac{i\lambda}{m^*(t)}}, t\right)-f(0, t)}{q(t)},$$

или

$$g(\lambda, t) = 1 - \frac{1 - f\left(e^{\frac{i\lambda}{m^*(t)}}, t\right)}{q(t)}. \tag{27}$$

Рассмотрим случай $m_1 = 0$.

Теорема 4. *Если $m_1 = 0$ и $m_2 < \infty$, то*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{2\nu(t)}{m_2(t)} < x \mid \nu(t) > 0\right\} = 1 - e^{-x}. \tag{28}$$

*Доказательство.* Полагая

$$\psi(z, t) = 1 - f(z, t),$$

получим из уравнения (4)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -u(1-\psi) = -\frac{\psi^2}{2}[u''(1) + \varepsilon(t)], \qquad \psi(z, 0) = 1 - z.$$

Так как при $m_1 = 0$ процесс является вырождающимся, имеем $\psi(z, t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно в области $|z| \leqslant 1$. Отсюда следует, что $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ также равномерно относительно $z$, $|z| \leqslant t$. Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{\psi(z, t)} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\left[m_2 t + \int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau\right],$$

откуда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{q(t)}{\psi\left(e^{\frac{i\lambda}{m^*(t)}}, 1\right)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{q(t)}{1 - e^{\frac{i\lambda}{m^*(t)}}} + \frac{m_2 t q(t)}{2} + q(t)\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau\right\} = -\frac{1}{i\lambda} + 1$$

и, следовательно,

$$g(\lambda) = \lim_{t\to\infty} g(\lambda, t) = \frac{1}{1 - i\lambda}.$$

Функция $g(\lambda)$ является характеристической функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-x}$ при $x > 0$, $F(x) = 0$ при $x < 0$. ■

В случае $m_1 > 0$ величина $q(t)$ стремится к пределу $1 - \alpha \neq 0$. Поэтому нормировка с помощью функции $g(t)$ или переход к условным математическим ожиданиям при гипотезе $\nu(t) > 0$ не может играть существенной роли. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Если $m_1 > 0$, $m_2 < \infty$, то величина $\nu(t)e^{-m_1 t}$ при $t \to \infty$ сходится в смысле среднего квадратического к случайной величине $\eta = \text{l.i.m.}\,\nu(t)e^{-m_1 t}$, характеристическая функ-*

*ция $g(\lambda)$ которой удовлетворяет функциональному уравнению*

$$(1-g(\lambda))\exp\left\{-\int_1^{g(\lambda)}\frac{u(v)-m_1(v-1)}{u(v)(v-1)}\,dv\right\}=-i\lambda. \tag{29}$$

Для доказательства сходимости величины $\tilde{\nu}(t)=\nu(t)e^{-m_1t}$ в смысле среднего квадратического воспользуемся критерием Коши. Пусть $t<t'$. Тогда

$$\mathsf{M}(\tilde{\nu}(t)-\tilde{\nu}(t'))^2=\mathsf{M}\tilde{\nu}(t)^2+\mathsf{M}\tilde{\nu}(t')^2-2\mathsf{M}(\tilde{\nu}(t)\tilde{\nu}(t')).$$

В силу формул (16) и (19)

$$\mathsf{M}\tilde{\nu}(t)^2\sim m_2/m_1 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Используя определение ветвящегося процесса и его однородность, получим

$$\mathsf{M}(\nu(t)\nu(t'))=\mathsf{M}\nu(t)\,\mathsf{M}\{\nu(t')\,|\,\nu(t)\}=\mathsf{M}\nu^2(t)\,\mathsf{M}\nu(t'-t)$$

откуда следует в силу тех же формул (16) и (19)

$$\mathsf{M}(\tilde{\nu}(t)\tilde{\nu}(t'))\sim m_2/m_1.$$

Таким образом, $\mathsf{M}(\tilde{\nu}(t)-\tilde{\nu}(t'))^2\to 0$ при $t,\ t'\to\infty$ и существует предел $\eta=\operatorname*{l.i.m.}_{t\to\infty}\nu(t)$. Записывая уравнение (4) в виде

$$\frac{df}{f-1}-\frac{u(f)-m_1(f-1)}{u(f)(f-1)}\,df=m_1\,dt$$

и интегрируя его по $t$ от 0 до $t$, получим

$$\ln(1-f)-\int_0^t\frac{u(v)-m_1(v-1)}{u(v)(v-1)}\,dv=m_1t+\ln(1-z).$$

Полагая здесь $z=e^{\frac{i\lambda}{m^*(t)}}$ и устремив $t$ к $\infty$, придем к равенству

$$\ln(1-g)-\int_0^g\frac{u(v)-m_1(v-1)}{u(v)(v-1)}\,dv=\ln(-i\lambda),$$

откуда следует (29). ■

Теория ветвящихся процессов с частицами нескольких типов аналогична, но более сложна. Остановимся только на основных соотношениях этой теории. Как и в случае частиц одного типа, удобно воспользоваться методом производящих функций.

Пусть $M$ — множество возможных состояний процесса, т. е. совокупность всех векторов $\alpha=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ с неотрицательными целочисленными компонентами (условимся обозначать

$n$-мерные векторы греческими буквами $\alpha$, $\beta$, $\sigma$, ..., а их компоненты — соответствующими латинскими буквами). Определим производящие функции $F_i(t,\sigma) = F_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_n)$ вероятностей перехода $p_{\{i\},\beta}(t)$ соотношениями

$$F_i(t, \sigma) = F_i(t, s_1, \ldots, s_n) = \sum_{\beta \in M} p_{\{i\}\beta}(t)\, s_1^{b_1} s_2^{b_2} \ldots s_n^{b_n} \tag{30}$$

$$(\sigma = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}, \qquad \beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}).$$

Напомним, что $\{i\}$ обозначает вектор $\{i\} = \{\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}\}$. Функции $F_i(t,\sigma)$ являются аналитическими функциями переменных $s_1, s_2, \ldots, s_n$ в области $|s_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем

$$\begin{gathered} |F_i(t, \sigma)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad |s_i| \leqslant 1, \\ F_i(t, 1, \ldots, 1) = 1, \qquad F_i(0, \sigma) = s_i. \end{gathered} \tag{31}$$

Если ввести $n$-мерную векторную функцию

$$\Phi(t, \sigma) = \{F_1(t, \sigma), \ldots, F_n(t, \sigma)\},$$

то из (31) следует

$$\Phi(0, \sigma) = \sigma. \tag{32}$$

Найдем теперь эквивалент формулы Колмогорова — Чепмена для ветвящихся процессов, выраженный через производящие функции. Имеем

$$p_{\{i\}\,\beta}(t + \tau) = \sum_{\alpha \in M} p_{\{i\}\,\alpha}(t)\, p_{\alpha\,\beta}(\tau), \qquad t > 0, \quad \tau > 0.$$

Заменяя здесь $p_{\alpha\,\beta}(\tau)$ по формуле (1), получим

$$p_{\{i\}\beta}(t + \tau) = \sum_{\alpha \in M} p_{\{i\}\alpha}(t) \sum_{\sum\limits_k \sum\limits_j \beta^{(k,j)} = \beta} \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_k} p_{\{k\}\,\beta^{(k,j)}}(\tau).$$

Умножая обе части последнего равенства на $s_1^{b_1} \ldots s_n^{b_n}$ и просуммировав по всем $\beta$, приходим к следующим соотношениям:

$$F_i(t + \tau, \sigma) =$$

$$= \sum_{\alpha \in M} p_{\{i\}\,\alpha}(t) \sum_{\beta \in M} \sum_{\sum\limits_k \sum\limits_j \beta^{(k,j)} = \beta} \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_k} p_{\{k\}\,\beta^{(k,j)}}(\tau)\, s_1^{b_1^{(k,j)}} \ldots s_n^{b_n^{(k,j)}} =$$

$$= \sum_{\alpha \in M} p_{\{i\}\,\alpha}(t) \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_k} \Biggl( \sum_{\beta^{(k,j)} \in M} p_{\{k\}\,\beta^{(k,j)}}(\tau)\, s_1^{b_1^{(k,j)}} \ldots s_n^{b_n^{(k,j)}} \Biggr) =$$

$$= \sum_{\alpha \in M} p_{\{i\}\,\alpha}(t) \prod_{k=1}^{n} F_k^{a_k}(\tau, \sigma),$$

откуда следует

$$F_i(t+\tau, \sigma) = F_i(t, F_1(\tau, \sigma), \ldots, F_n(\tau, \sigma)), \qquad i = 1, \ldots, s,$$

или

$$\Phi(t+\tau, \sigma) = \Phi(t, \Phi(\tau, \sigma)). \tag{33}$$

Теорема 6. *Система производящих функций ветвящегося процесса удовлетворяет системе функциональных уравнений* (33) *и начальному условию* (32)

Выведем для производящих функций дифференциальные уравнения, соответствующие первой и второй системе уравнений Колмогорова для переходных вероятностей.

Пусть

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{\{i\}\beta}(t)}{t} = b_{i\beta} \quad (\beta \neq \{i\}), \qquad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{\{i\}\{i\}}(t)}{t} = b_{ii},$$

и предположим, что

$$b_{ii} = \sum_{\beta \in M,\ \beta \neq \{i\}} b_{i\beta} < \infty, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда вероятности перехода $p_{\{i\}\beta}(t)$ удовлетворяют первой системе уравнений Колмогорова (см. § 3, (1))

$$\frac{dp_{\{i\}\beta}(t)}{dt} = -b_{ii}p_{\{i\}\beta}(t) + \sum_{\alpha \in M,\ \alpha \neq \{i\}} b_{i\alpha}p_{\alpha\beta}(t).$$

Умножая это уравнение на $s_1^{b_1}, \ldots, s_n^{b_n}$, суммируя по всем $\beta$ и замечая, что из равенства (1) следует

$$\sum_{\beta \in M} p_{\alpha\beta}(t)\, s_1^{b_1} s_2^{b_2} \ldots s_n^{b_n} = \prod_{i=1}^{n} [F_i(t, \sigma)]^{a_i}$$

(последнее выражает собою взаимную независимость эволюции имеющихся в данный момент времени частиц), получим

$$\frac{\partial F_i(t, \sigma)}{\partial t} = -b_{ii}F_i(t, \sigma) + \sum_{\alpha \in M,\ \alpha \neq \{i\}} b_{i\alpha} \prod_{i=1}^{n} [F_i(t, \sigma)]^{a_i},$$

или

$$\frac{\partial F_i(t, \sigma)}{\partial t} = u_i(F_1(t, \sigma), \ldots, F_n(t, \sigma)), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{34}$$

где

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = -b_{ii}s_i + \sum_{\alpha \in M,\ \alpha \neq \{i\}} b_{i\alpha} s_1^{a_1} \ldots s_n^{a_n}, \tag{35}$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Функции $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ представляют собою производящие функции систем величин $\{-b_{ii}, b_{i\alpha}, \alpha \in M, \alpha \neq \{i\}\}$.

Чтобы получить второе уравнение, предположим, что $|s_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $|F_i(t, \sigma)| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ и мы можем дифференцировать равенство (33) по $\tau$. Положив после дифференцирования $\tau = 0$, получим

$$\frac{\partial \Phi(t, \sigma)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} u_k(\sigma) \frac{\partial \Phi(t, \sigma)}{\partial s_k}. \tag{36}$$

Уравнение (36) представляет собою систему одинаковых уравнений для производящих функций $F_i(t, \sigma)$:

$$\frac{\partial F_i(t, \sigma)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} u_k(\sigma) \frac{\partial F_i(t, \sigma)}{\partial s_k}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

которые нужно решать при начальных условиях (31). Таким образом, получена следующая

Теорема 7. *Система производящих функций* $F_i(t, \sigma)$ *при* $|s_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$ *удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений* (34), *уравнению в частных производных* (36) *и начальным условиям* (31).

ГЛАВА VIII

# ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В этой главе рассматриваются непрерывные марковские процессы со значениями в $m$-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{R}^m$. Полностью такие процессы до сих пор не описаны. Мы будем изучать важнейший класс таких процессов, носящий название *диффузионных*. Это название указывает, что процессы подобного типа могут служить вероятностной моделью физического явления диффузии. В § 3 гл. VI уже рассматривался процесс броуновского движения в качестве вероятностной модели диффузии в однородной среде. Используя подобное построение в случае неоднородной среды, можем прийти к понятию общего диффузионного процесса. Поясним основные идеи на примере одномерного процесса.

Пусть $x_t$ обозначает координату взвешенной в жидкости достаточно малой частицы в момент времени $t$.

Пренебрегая инерцией частицы, можно считать, что перемещение частицы состоит из двух компонент: «усредненного» смещения, вызываемого макроскопической скоростью движения жидкости, и флуктуации смещения, вызываемого хаотическим характером теплового движения молекул жидкости.

Пусть скорость макроскопического движения жидкости в точке $x$ в момент времени $t$ равна $a(t, x)$. Относительно флуктуационной составляющей перемещения будем предполагать, что она является случайной величиной, распределение которой зависит от положения $x$ частицы, момента времени $t$, в который рассматривается перемещение, и величины $\Delta t$ — длины промежутка времени, на котором рассматривается перемещение, причем среднее значение этого перемещения будем считать равным нулю независимо от того, какие значения принимают $t$, $x_t$, $\Delta t$. Тогда перемещение частицы может быть приближенно записано следующим образом:

$$x_{t+\Delta t} - x_t = a(t, x_t)\Delta t + \xi_{t, x_t, \Delta t}, \tag{1}$$

причем $M\xi_{t,\,x_t,\,\Delta t}=0$. Если $a(t, x)$ равно нулю, а распределение $\xi_{t,\,x_t,\,\Delta t}$ не зависит от $x$, как предполагалось при рассмотрении броуновского движения (§ 3 гл. VI), то тогда $M\xi^2_{t,\,\Delta t}=\lambda\,\Delta t$. Так как при небольших изменениях $t$, $x$ свойства среды естественно предполагать мало меняющимися, то в малом процесс является однородным; поэтому можно считать, что $\xi_{t,\,x_t,\,\Delta t}=\sigma(t,\ x)\,\xi_{t,\,\Delta t}$, где $\sigma(t, x)$ характеризует свойства среды в точке $x$ в момент времени $t$, а $\xi_{t,\,\Delta t}$ — величина приращения, которая получилась бы в однородном случае при условии, что $\sigma(t, x)=1$. Таким образом, $\xi_{t,\,\Delta t}$ должно равняться приращению процесса броуновского движения: $w(t+\Delta t)-w(t)$.

Следовательно, для приращения $x_{t+\Delta t}-x_t$ можно записать такую приближенную формулу:

$$x_{t+\Delta t}-x_t\approx a(t,\ x_t)\,\Delta t+\sigma(t,\ x_t)\,[w(t+\Delta t)-w(t)]. \tag{2}$$

Чтобы эта формула стала точной, нужно, как это всегда делается в математическом анализе, приращения заменить дифференциалами. После такой замены для $x_t$ получится дифференциальное уравнение

$$dx_t=a(t,\ x_t)\,dt+\sigma(t,\ x_t)\,dw(t), \tag{3}$$

которое и можно принять за исходный пункт при определении диффузионного процесса.

Если $x_t$ — многомерный процесс, принимающий значения из $\mathcal{R}^m$, то соотношение (1) сохраняет смысл, если $a(t, x_t)$ является функцией со значениями из $\mathcal{R}^m$, а $\xi_{t,\,x_t,\,\Delta t}$ — случайным вектором в $\mathcal{R}^m$. В этом случае будем считать, что $\xi_{t,\,x_t,\,\Delta t}$ представляется в виде

$$\xi_{t,\,x_t,\,\Delta t}=\sum_{k=1}^{m} b_k(t,\ x_t)\,[w_k(t+\Delta t)-w_k(t)],$$

где $b_k(t, x_t)$ — некоторые функции со значениями из $\mathcal{R}^m$, а $w_k(t)$ — независимые одномерные процессы броуновского движения. Такое представление соответствует неизотропной среде: перемещения по разным направлениям имеют, вообще говоря, различные распределения. Уравнение для величины $x_t$ в этом случае имеет вид

$$dx_t=a(t,\ x_t)\,dt+\sum_{k=1}^{m} b_k(t,\ x_t)\,dw_k(t). \tag{4}$$

Отметим, что уравнениям (3) и (4) пока нельзя придать строгого смысла. Дело в том, что величина $\dfrac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}$, если $w(t)$ — процесс броуновского движения, имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\frac{1}{\Delta t}$. Поэтому величина $\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}$ ни в каком вероятностном смысле предела не имеет. Ввиду отсутствия производной у $w(t)$ обычно применяемое определение дифференциала $dw(t)$ не имеет смысла.

Уравнениям (3) и (4) будет придан строгий смысл после введения в § 1 понятий стохастического интеграла и стохастического дифференциала.

## § 1. Стохастический интеграл Ито

Пусть $w(t)$ — винеровский процесс, а совокупность σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, определенных на основном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ для всех $t \geqslant 0$, связана с $w(t)$ так, что выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2} \subset \mathfrak{S}$ при $t_1 < t_2$; 2) $w(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_t$ при каждом $t$; 3) процесс $w(t+h)-w(h)$ при каждом $h$ не зависит от любого из событий σ-алгебры $\mathfrak{F}_h$. Обозначим, далее, через $\mathfrak{M}_2[a, b]$ $(0 \leqslant a < b)$ совокупность измеримых по совокупности переменных $(t, \omega)$ функций $f(t) = f(t, \omega)$, определенных при $t \in [a, b]$, $\omega \in \Omega$ и удовлетворяющих условиям: а) $f(t)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_t$ при каждом $t$ из $[a, b]$; б) с вероятностью 1 конечен интеграл

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt.$$

Для всех функций из $\mathfrak{M}_2[a, b]$ ниже определяется интеграл $\int_a^b f(t)\, dw(t)$.

Функция $f(t)$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$, что $f(t) = f(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, r-1$.

Определим интеграл $\int_a^b f(t)\, dw(t)$ сначала для того случая, когда функция $f(t)$ является ступенчатой. Пусть $f(t) = f(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Положим тогда

$$\int_a^b f(t)\, dw(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)\,[w(t_{k+1}) - w(t_k)].$$

Отметим некоторые свойства этого интеграла.

I. *Если* $\mathsf{M}(|f(t)||\mathfrak{F}_a) < \infty$ *при* $t \in [a, b]$, *то с вероятностью* 1

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,dw(t) \mid \mathfrak{F}_a\right) = 0. \tag{1}$$

II. *Если* $\mathsf{M}(|f(t)|^2 | \mathfrak{F}_a) < \infty$ *с вероятностью* 1 *для* $t \in [a, b]$, *то*

$$\mathsf{M}\left(\left[\int_a^b f(t)\,dw(t)\right]^2 \Big| \mathfrak{F}_a\right) = \int_a^b \mathsf{M}(f^2(t) | \mathfrak{F}_a)\,dt \qquad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}). \tag{2}$$

Действительно,

$$\mathsf{M}\left(\left[\int_a^b f(t)\,dw(t)\right]^2 \Big| \mathfrak{F}_a\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \mathsf{M}\left[f(t_k)^2 (w(t_{k+1}) - w(t_k))^2 | \mathfrak{F}_a\right] +$$

$$+ 2 \sum_{j<k} \mathsf{M}\left[f(t_j) f(t_k) (w(t_{j+1}) - w(t_j)) (w(t_{k+1}) - w(t_k)) | \mathfrak{F}_a\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \mathsf{M}\left\{f^2(t_k)\, \mathsf{M}\left[(w(t_{k+1}) - w(t_k))^2 | \mathfrak{F}_{t_k}\right] | \mathfrak{F}_a\right\} +$$

$$+ 2 \sum_{j<k} \mathsf{M}\left\{f(t_j) f(t_k) [w(t_{j+1}) - w(t_j)] \times\right.$$

$$\left.\times\, \mathsf{M}\left(w(t_{k+1}) - w(t_k) | \mathfrak{F}_{t_k}\right) | \mathfrak{F}_a\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \mathsf{M}(f^2(t_k) | \mathfrak{F}_a) [t_{k+1} - t_k] = \int_a^b \mathsf{M}(f^2(t) | \mathfrak{F}_a)\,dt.$$

III. *Если* $\varphi(t)$ — *ступенчатая функция, то для всякого* $N > 0$ *и* $c > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int_a^b \varphi(t)\,dw(t)\right| > c\right\} \leqslant \frac{N}{c^2} + \mathsf{P}\left\{\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt > N\right\}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $\varphi(t) = \varphi(t_i)$ при $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$. Так как $\varphi(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ измерима относительно $\mathfrak{F}_{t_i}$, то $\int_a^{t_{i+1}} |\varphi(t)|^2\,dt$ также является величиной, измеримой относительно $\mathfrak{F}_{t_i}$.

Положим $\varphi_N(t)=\varphi(t)$ при $t\leqslant t_i$ для тех $i$, для которых $\int\limits_a^{t_{i+1}} |\varphi(t)|^2\,dt\leqslant N$; если же при некотором $k$

$$\int\limits_a^{t_k} |\varphi(t)|^2\,dt\leqslant N<\int\limits_a^{t_{k+1}} |\varphi(t)|^2\,dt,$$

то при $t\in[t_k,\ b]$ $\varphi_N(t)=0$. Очевидно,

$$\int\limits_0^t |\varphi_N(t)|^2\,dt\leqslant N$$

и

$$\mathsf{P}\{\sup_t|\varphi_N(t)-\varphi(t)|>0\}=\mathsf{P}\left\{\int\limits_a^b|\varphi(t)|^2\,dt>N\right\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_a^b\varphi(t)\,dw(t)\right|>c\right\}=$$

$$=\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_a^b\varphi_N(t)\,dw(t)+\int\limits_a^b(\varphi(t)-\varphi_N(t))\,dw(t)\right|>c\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_a^b\varphi_N(t)\,dw(t)\right|>c\right\}+\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_a^b[\varphi(t)-\varphi_N(t)]\,dw(t)\right|>0\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mathsf{M}\left|\int\limits_a^b\varphi_N(t)\,dw(t)\right|^2}{c^2}+\mathsf{P}\left\{\int\limits_a^b|\varphi(t)|^2\,dt>N\right\},$$

что и требовалось доказать.

Пусть последовательность ступенчатых функций $f_n$ такова, что

$$\int\limits_a^b[f(t)-f_n(t)]^2\,dt\to 0$$

по вероятности. Тогда $\int\limits_a^b|f_n(t)-f_m(t)|^2\,dt$ также стремится к нулю по вероятности при $n\to\infty$, $m\to\infty$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \mathsf{P}\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt > \varepsilon\right\} = 0.$$

Используя свойство III, можем записать при любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$\overline{\lim_{n,\, m\to\infty}}\, \mathsf{P}\left\{\left|\int_a^b f_n(t)\,dw(t) - \int_a^b f_m(t)\,dw(t)\right| > \delta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \overline{\lim_{n,\, m\to\infty}}\, \mathsf{P}\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt > \varepsilon\right\} = \frac{\varepsilon}{\delta^2},$$

так что ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ для всякого $\delta > 0$

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\int_a^b f_n(t)\,dw(t) - \int_a^b f_m(t)\,dw(t)\right|^2 > \delta\right\} = 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что последовательность случайных величин $\int_a^b f_n(t)\,dw(t)$ сходится по вероятности к некоторому пределу. Этот предел не зависит от выбора последовательности $f_n(t)$, для которой $\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\,dt \to 0$ (если имеются две последовательности $f_n(t)$ и $\bar{f}_n(t)$, то, объединяя их в одну, убеждаемся в равенстве с вероятностью 1 пределов на разных последовательностях). Положим

$$\int_a^b f(t)\,dw(t) = \mathsf{P}\text{-}\lim \int_a^b f_n(t)\,dw(t).$$

Этот предел будем называть *стохастическим интегралом Ито* функции $f(t)$.

Поскольку для всех $f \in \mathfrak{M}_2[a, b]$ можно построить такую последовательность ступенчатых функций $f_n$ из $\mathfrak{M}_2[a, b]$, чтобы с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(t) - f(t)]^2\,dt = 0,$$

то тем самым стохастический интеграл Ито определен для всех $f \in \mathfrak{M}_2[a, b]$.

Так определенный интеграл является однородным и аддитивным функционалом от функции $f(t)$ на $\mathfrak{M}_2[a, b]$. Кроме того, при $a < c < b$

$$\int_a^c f(t)\,dw(t) + \int_c^b f(t)\,dw(t) = \int_a^b f(t)\,dw(t). \tag{4}$$

Доказательство этих свойств очевидно для ступенчатых функций и тривиальным предельным переходом переносится на общий случай.

Используя предельный переход в (3) от ступенчатых функций к произвольным функциям из $\mathfrak{M}_2[a, b]$, убеждаемся, что свойство III справедливо для всех $f(t) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$.

С помощью этого свойства легко установить, что имеет место

IV. *Если* $f(t) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$, $f_n(t) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$ *и*

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\,dt \to 0$$

*по вероятности, то*

$$\mathsf{P}\text{-}\lim \int_a^b f_n(t)\,dw(t) = \int_a^b f(t)\,dw(t).$$

Используя предельный переход, можем легко убедиться в справедливости следующего свойства, обобщающего свойства I и II.

II*. *Если функция $f$ такова, что с вероятностью* 1

$$\int_a^b \mathsf{M}(|f(t)|^2 | \mathfrak{F}_a)\,dt < \infty,$$

*то*

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,dw(t) \,|\, \mathfrak{F}_a\right) = 0 \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}), \tag{5}$$

$$\mathsf{M}\left(\left[\int_a^b f(t)\,dw(t)\right]^2 | \mathfrak{F}_a\right) = \int_a^b \mathsf{M}(|f(t)|^2 | \mathfrak{F}_a)\,dt \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}). \tag{6}$$

Рассмотрим теперь стохастический интеграл как функцию верхнего предела. Обозначим через $\psi_t(s)$ функцию, равную 1 при $s < t$ и равную 0 при $s > t$. Если $f(s) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$, то $f(s)\psi_t(s) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$ при любом $t \in [a, b]$ и

$$\int_a^t f(s)\,dw(s) = \int_a^b f(s)\,\psi_t(s)\,dw(s).$$

Из определения стохастического интеграла вытекает, что он определен с точностью до событий вероятности 0. Поэтому интеграл как функция верхнего предела определен с точностью до стохастической эквивалентности (см. § 1 гл. IV). В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что значения интеграла как функции верхнего предела при различных $t$ согласованы таким образом, что $\zeta(t)=\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)$ является сепарабельным процессом.

Отметим основные свойства функции $\zeta(t)=\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)$.

V. *Если* $\int\limits_a^b \mathsf{M}(|f(s)|^2\,|\,\mathfrak{F}_a)\,ds<\infty$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)\right|>c\,|\,\mathfrak{F}_a\right\}\leqslant\frac{1}{c^2}\int\limits_a^b \mathsf{M}(|f(s)|^2\,|\,\mathfrak{F}_a)\,ds \tag{7}$$

*и*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)\right|>c\right\}\leqslant\frac{1}{c^2}\int\limits_a^b \mathsf{M}|f(s)|^2\,ds. \tag{8}$$

Достаточно доказать (7). Выберем разбиение отрезка $[a, b]$: $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$. Положим $\zeta_k=\int\limits_a^{t_k} f(s)\,dw(s)$.

Так как при $k<l$

$$\mathsf{M}(\zeta_l-\zeta_k\,|\,\mathfrak{F}_{t_k})=\mathsf{M}\left(\int\limits_{t_k}^{t_l} f(s)\,dw(s)\,|\,\mathfrak{F}_{t_k}\right)=0$$

и $\zeta_k$ измеримо относительно $\mathfrak{F}_{t_k}$, то последовательность $\{\zeta_k\}$ является мартингалом, а значит, $\{\zeta_k^2\}$ — субмартингалом. Поэтому в силу теоремы 5 § 1 гл. III

$$\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|>c\,|\,\mathfrak{F}_a\}\leqslant\frac{1}{c^2}\mathsf{M}(\zeta_n^2\,|\,\mathfrak{F}_a).$$

Таким образом, установлено неравенство

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\int\limits_a^{t_k} f(s)\,dw(s)\right|>c\,|\,\mathfrak{F}_a\right\}\leqslant\frac{1}{c^2}\int\limits_a^b \mathsf{M}(|f(s)|^2\,|\mathfrak{F}_a)\,ds,$$

из которого легко получить доказательство свойства V, воспользовавшись сепарабельностью процесса $\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)$.

VI. *Сепарабельный процесс* $\zeta(t)=\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)$ *непрерывен.*

*Доказательство.* Если $f(t)$ — ступенчатая функция, то непрерывность $\zeta(t)$ вытекает из непрерывности $w(t)$ и формулы, определяющей $\zeta(t)$ в этом случае. Пусть функция $f(t)$ из $\mathfrak{M}_2[a, b]$ такова, что $\int\limits_a^b \mathsf{M}\,|f(s)|^2\,ds<\infty$, а $f_n(t)$ — последовательность ступенчатых функций, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \mathsf{M}\,|f(s)-f_n(s)|^2\,ds=0.$$

Ввиду свойства V

$$\mathsf{P}\left\{\sup_t\left|\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)-\int\limits_a^t f_n(s)\,dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_a^b \mathsf{M}\,|f(s)-f_n(s)|^2\,ds.$$

Выбирая последовательности $\varepsilon_k\to 0$ и $n_k$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon_k^2}\int\limits_a^b \mathsf{M}\,|f(t)-f_{n_k}(t)|^2\,dt<\infty,$$

убеждаемся, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)-\int\limits_a^t f_{n_k}(s)\,dw(s)\right|>\varepsilon_k\right\}<\infty,$$

и, значит, на основании леммы Бореля — Кантелли с вероятностью 1, начиная с некоторого номера $k$,

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)-\int\limits_a^t f_{n_k}(s)\,dw(s)\right|\leqslant\varepsilon_k.$$

Таким образом, $\int\limits_a^t f(s)\,dw(s)$ с вероятностью 1 является равномерным пределом непрерывных функций, поэтому этот предел также будет непрерывным. Пусть, наконец, $f(t)$ —

произвольная функция из $\mathfrak{M}_2[a, b]$. Положим $f_N(s) = f(s)$, если $\int_a^s |f(u)|^2\, du \leqslant N$, и $f_N(s) = 0$, если $\int_a^s |f(u)|^2\, du > N$. Тогда

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{a \leqslant t \leqslant b}\left|\int_a^t f(s)\, dw(s) - \int_a^t f_N(s)\, dw(s)\right| > 0\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left\{\int_a^b |f(s)|^2\, ds > N\right\}.$$

Так как $\int_a^t f_N(s)\, dw(s)$ непрерывен и вероятность, стоящая в правой части последнего соотношения, может быть сделана сколь угодно малой, то процесс $\int_a^t f(s)\, dw(s)$ непрерывен в общем случае.

Нам будет нужна следующая оценка четвертого момента от стохастического интеграла:

VII. *Если* $f(t)$ *из* $\mathfrak{M}_2[a, b]$ *такова, что* $\int_a^b \mathsf{M}|f(t)|^4\, dt < \infty$, *то*

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\, dw(t)\right)^4 \leqslant 36(b-a)\int_a^b \mathsf{M}|f(t)|^4\, dt. \tag{9}$$

*Доказательство.* Пусть сначала $f(t)$ является ступенчатой функцией, для которой $f(t) = f(t_i)$ при $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, где $a = t_0 < \ldots < t_r = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\, dw(t)\right)^4 = \mathsf{M}\left(\sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)\,[w(t_{k+1}) - w(t_k)]\right)^4 =$$
$$= \mathsf{M}\sum_{k=0}^{r-1} |f(t_k)|^4\,[w(t_{k+1}) - w(t_k)]^4 +$$
$$+ 6\sum_{k=1}^{r-1}\mathsf{M}\left(\sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)\,[w(t_{i+1}) - w(t_i)]\right)^2 |f(t_k)|^2\,[w(t_{k+1}) - w(t_k)]^2 =$$
$$= 3\sum_{k=0}^{r-1}\mathsf{M}\,|f(t_k)|^4\,(t_{k+1} - t_k)^2 +$$
$$+ 6\sum_{k=1}^{r-1}\mathsf{M}\left(\sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)\,[w(t_{i+1}) - w(t_i)]\right)^2 |f(t_k)|^2\,(t_{k+1} - t_k).$$

так как математическое ожидание тех слагаемых, у которых приращение $w(t_{k+1})-w(t_k)$ с наибольшим номером входит в нечетной степени, равно нулю, а при $m=1, 2, \ldots$ имеем

$$\mathsf{M}\left([w(t_{k+1})-w(t_k)]^{2m} \mid \mathfrak{F}_{t_k}\right)=(2m-1)!!\,(t_{k+1}-t_k)^m.$$

Для любой ступенчатой функции $f(t)$ мы можем считать, что отрезки $[t_k, t_{k+1}]$ выбраны таким образом, что $\max\limits_k [t_{k+1}-t_k]$ сколь угодно мал. Поэтому из предыдущего соотношения получаем, переходя к пределу при $\max\limits_k [t_{k+1}-t_k]\to 0$,

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,dw(t)\right)^2=6\int_a^b \mathsf{M}\left(\int_a^t f(s)\,dw(s)\right)^2 f^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, можем записать

$$\int_a^b \mathsf{M}\left(\int_a^t f(s)\,dw(s)\right)^2 f^2(t)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_a^b \mathsf{M}\,|f(t)|^4\,dt\cdot\int_a^b \mathsf{M}\left(\int_a^t f(s)\,dw(s)\right)^4 dt\right]^{1/2}.$$

Из формулы (10) вытекает, что

$$\mathsf{M}\left(\int_a^t f(u)\,dw(u)\right)^4=6\int_a^t \mathsf{M}\left(\int_a^u f(s)\,dw(s)\right)^2 f^2(u)\,du$$

возрастает с $t$ и, значит,

$$\int_a^b \mathsf{M}\left(\int_a^t f(s)\,dw(s)\right)^4 dt\leqslant(b-a)\,\mathsf{M}\left(\int_a^b f(s)\,dw(s)\right)^4.$$

Таким образом

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,dw(t)\right)^4\leqslant 6\left[(b-a)\int_a^b \mathsf{M}\,|f(s)|^4\,ds\,\mathsf{M}\left(\int_a^b f(s)\,dw(s)\right)^4\right]^{1/2}.$$

Отсюда вытекает формула (9) для ступенчатых функций $f(t)$. Доказательство этой формулы в общем случае можно получить, построив для $f(t)$ последовательность ступенчатых функций $f_n(t)$ так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \mathsf{M}\,|f(t)-f_n(t)|^4\,dt=0.$$

Введем понятие стохастического дифференциала. Если для процесса $\zeta(t)$, измеримого при каждом $t$ относительно $\mathfrak{F}_t$, существуют такие $b(t)$ из $\mathfrak{M}_2[a, b]$ и $a(t)$, измеримое при каждом $t$ относительно $\mathfrak{F}_t$ и имеющее с вероятностью 1 конечный интеграл $\int\limits_a^b |a(t)|dt$, что для всех $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} b(t)\,dw(t),$$

то будем говорить, что $a(t)\,dt + b(t)\,dw(t)$ является стохастическим дифференциалом процесса $\zeta(t)$, и записывать

$$d\zeta(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dw(t).$$

Установим важнейшее свойство стохастического дифференциала — *формулу Ито* дифференцирования сложной функции.

VIII. *Предположим, что процесс $\zeta(t)$ имеет стохастический дифференциал $d\zeta(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dw(t)$, а функция $u(t, x)$ (неслучайная) определена при $t \in [a, b]$, $x \in \mathscr{R}^1$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u'_t(t, x)$, $u'_x(t, x)$, $u''_{xx}(t, x)$. Тогда процесс $\eta(t) = u(t, \zeta(t))$ также имеет стохастический дифференциал и справедлива следующая формула, носящая название формулы Ито*:

$$d\eta(t) = \Big[u'_t(t, \zeta(t)) + u'_x(t, \zeta(t))\,a(t) + \\ + \frac{1}{2}u''_{xx}(t, \zeta(t))\,b^2(t)\Big]dt + u'_x(t, \zeta(t))\,b(t)\,dw(t). \qquad (11)$$

Доказательство этой формулы будет получено сразу в многомерном случае (см. XIII).

Далее будут рассматриваться стохастические интегралы со случайными пределами. Пусть $\tau$ — марковский момент относительно $\sigma$-алгебр $\mathfrak{F}_t$ (т. е. $\{\tau > t\} \in \mathfrak{F}_t$). Предположим, далее что с вероятностью 1 $\tau \in [a, b]$. Тогда для любой $f(t) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$ функция $f(t)\,\chi_{\{\tau > t\}} \in \mathfrak{M}_2[a, b]$, так как $\chi_{\{\tau > t\}}$ измерима относительно $\mathfrak{F}_t$.

Положим

$$\int\limits_a^\tau f(t)\,dw(t) = \int\limits_a^b f(t)\,\chi_{\{\tau > t\}}\,dw(t).$$

Если

$$\mathsf{M}\left(\int\limits_a^b f^2(t)\,dt \mid \mathfrak{F}_a\right) < \infty, \qquad (12)$$

то

$$\mathsf{M}\left(\int_a^\tau f(t)\,dw(t)\mid\mathfrak{F}_a\right)=\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,\chi_{\{\tau>t\}}\,dw(t)\mid\mathfrak{F}_a\right)=0,$$

$$\mathsf{M}\left(\left(\int_a^\tau f(t)\,dw(t)\right)^2\middle|\,\mathfrak{F}_a\right)=\mathsf{M}\left(\int_a^b f^2(t)\,\chi_{\{\tau>t\}}\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right)=$$

$$=\mathsf{M}\left(\int_a^\tau f^2(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right). \qquad (13)$$

Таким образом, свойство II* справедливо и в том случае, когда верхний предел стохастического интеграла является марковским моментом. Легко видеть, что вместо выполнения (12) можно требовать лишь конечности правой части (13).

Рассмотрим теперь интеграл с двумя случайными пределами. Пусть $f(t)\in\mathfrak{M}_2[a,b]$, каково бы ни было $b>a$. Если $\tau_1$ и $\tau_2$ — два марковских момента относительно σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, для которых $a\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2$ с вероятностью 1, определим

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dw(t)=\int_a^{\tau_2} f(t)\,dw(t)-\int_0^{\tau_1} f(t)\,dw(t).$$

Обозначим через $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ σ-алгебру событий $A$ из $\bigcup_t\mathfrak{F}_t$, для которых

$$A\cap\{\tau_1\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t.$$

IX. *Если*

$$\mathsf{M}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dw(t)\right)<\infty,$$

*то*

$$\mathsf{M}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dw(t)\mid\mathfrak{F}_{\tau_1}\right)=0, \qquad (14)$$

$$\mathsf{M}\left(\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dw(t)\right]^2\middle|\,\mathfrak{F}_{\tau_1}\right)=\mathsf{M}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f^2(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_{\tau_1}\right). \qquad (15)$$

Для доказательства рассмотрим $\mathfrak{F}_{\tau_1}$-измеримую величину $\xi$, принимающую лишь значения 0 или 1. Функция

$$f_n(t)=\xi\chi_{\{\tau_1\leqslant t\}}f(t)\,\chi_{\{\tau_2\wedge n>t\}}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_2[a,b]$ при любом $b>a$, так как она измерима относительно $\mathfrak{F}_t$ (по определению $\mathfrak{F}_{\tau_1}$-измеримой величины

$\{\omega\colon \xi=1\}\cap\{\tau_1\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$). Кроме того,

$$\mathsf{M}\left(\int_a^n f_n^2(t)\,dt\right)=\mathsf{M}\xi\int_{\tau_1\wedge n}^{\tau_2\wedge n} f^2(t)\,dt<\infty.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\xi\int_{\tau_1\wedge n}^{\tau_2\wedge n} f(t)\,dw(t)=0,$$

$$\mathsf{M}\xi\left[\int_{\tau_1\wedge n}^{\tau_2\wedge n} f(t)\,dw(t)\right]^2=\mathsf{M}\xi\int_{\tau_1\wedge n}^{\tau_2\wedge n} f(t)\,dw(t).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\mathsf{M}\xi\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dw(t)=0,$$

$$\mathsf{M}\xi\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dw(t)\right)^2=\mathsf{M}\xi\int_{\tau_1}^{\tau_2} f^2(t)\,dw(t).$$

Из этих равенств и вытекают (14) и (15).

Предположим, что с совокупностью $\sigma$-алгебр $\mathfrak{F}_t$ $(t\geqslant 0)$, определенных на $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathsf{P}\}$ и удовлетворяющих условию: при $0\leqslant t_1<t_2$ $\mathfrak{F}_{t_1}\subset\mathfrak{F}_{t_2}\subset\mathfrak{S}$, связаны одномерные винеровские процессы $w_1(t),\ \ldots,\ w_m(t)$, удовлетворяющие условиям: а) $w_1(t),\ldots$ $\ldots,\ w_m(t)$ независимы; б) $w_k(t)$ измеримо относительно $\mathfrak{F}_t$, $t\geqslant 0$; в) $m$-мерный процесс $(w_1(t+h)-w_1(h),\ \ldots,\ w_m(t+h)-w_m(h))$, $t\geqslant 0$, не зависит от $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_h$.

Для всякой функции $f\in\mathfrak{M}_2[a,b]$ определены интегралы

$$\int_a^b f(t)\,dw_k(t).$$

Укажем некоторые свойства, относящиеся к интегралам по различным винеровским процессам.

X. *Если* $w_1(t)$ *и* $w_2(t)$ *независимы и*

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right)<\infty,\quad \mathsf{M}\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right)<\infty,$$

*то*

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b f(t)\,dw_1(t)\int_a^b g(t)\,dw_2(t)\mid\mathfrak{F}_a\right)=0. \tag{16}$$

Предположим сначала, что $f(t)$ и $g(t)$ — ступенчатые функции: $f(t)=f(t_k)$, $g(t)=g(t_k)$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, где $a=t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_n=b$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\,[w_1(t_{k+1})-w_1(t_k)] \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j)\,[w_2(t_{j+1})-w_2(t_j)] \mid \mathfrak{F}_a\right) &= \\
=\mathsf{M}\Big(\sum_{k<j} f(t_k)\, g(t_j)\,[w_1(t_{k+1})-w_1(t_k)] \times{}&\\
\times \mathsf{M}\left[w_2(t_{j+1})-w_2(t_j) \mid \mathfrak{F}_{t_j}\right] \Big| \,\mathfrak{F}_a\Big) +{}&\\
+\mathsf{M}\Big(\sum_{j<k} f(t_k)\, g(t_j)\,[w_2(t_{j+1})-w_2(t_j)] \times{}&\\
\times \mathsf{M}\left[w_1(t_{k+1})-w_1(t_k) \mid \mathfrak{F}_{t_k}\right] \Big| \,\mathfrak{F}_a\Big) +{}&\\
+\mathsf{M}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\, g(t_k)\, \mathsf{M}\big([w_1(t_{k+1})-w_1(t_k)] \times{}&\\
\times [w_2(t_{k+1})-w_2(t_k)] \mid \mathfrak{F}_{t_k}\big)\, \mathfrak{F}_a\Big) &= 0.
\end{aligned}$$

В общем случае (16) доказывается предельным переходом от ступенчатых функций.

Обозначим через $w(t)$ $m$-мерный винеровский процесс. Определим для векторных функций $f(t) \in \mathscr{R}^m$, компоненты которых принадлежат $\mathfrak{M}_2[a, b]$, интеграл

$$\int_a^b (f(t),\ dw(t)) = \sum_{k=1}^{m} \int_a^b f_k(t)\, dw_k(t),$$

где $f(t)=(f_1(t), \ldots, f_m(t))$. Будем обозначать для вектора $x \in \mathscr{R}^m$ с компонентами $(x_1, \ldots, x_m)$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}.$$

XI. *Если* $f(t)$ — *такая функция, что* $f_k(t) \in \mathfrak{M}_2[a, b]$ *и* $\mathsf{M}\left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt \mid \mathfrak{F}_a\right) < \infty$, *то*

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b (f(t),\ dw(t)) \mid \mathfrak{F}_a\right) = 0,$$

$$\mathsf{M}\left(\left[\int_a^b (f(t),\ dw(t))\right]^2 \Bigg|\, \mathfrak{F}_a\right) = \mathsf{M}\left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt \mid \mathfrak{F}_a\right).$$

Эти формулы вытекают из свойств II* и X.

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int_a^b A(t)\,dw(t), \tag{17}$$

где $A(t)$ — матричная функция $A(t)=\|a_{ij}(t)\|_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$, функции $a_{ij}(t)\in\mathfrak{M}_2[a,b]$. Интеграл (17) является векторной функцией со значениями в $\mathscr{R}^n$, компоненты этого вектора определяются формулами

$$\left(\int_a^b A(t)\,dw(t)\right)_i=\sum_{j=1}^m\int_a^b a_{ij}(t)\,dw_j(t),\qquad i=1,\ldots,n.$$

Используя опять свойства II* и X, можем установить следующее свойство.

XII. *Если* $A(t)$ — *матричная функция, для которой* $a_{ij}(t)\in\mathfrak{M}_2[a,b]$ *и*

$$\mathsf{M}\left(\int_a^b \operatorname{Sp}A(t)A^*(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right)=\mathsf{M}\left(\int_a^b\sum_{i,j}a_{ij}^2(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right)<\infty,$$

*то*

$$\mathsf{M}\left(\left|\int_a^b A(t)\,dw(t)\right|^2\middle|\mathfrak{F}_a\right)=\mathsf{M}\left(\int_a^b\operatorname{Sp}A(t)A^*(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right) \tag{18}$$

(*здесь* $\operatorname{Sp}C$ — *след матрицы* $C$). *Если* $B(t)=\|b_{ij}(t)\|_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$, $b_{ij}(t)\in\mathfrak{M}_2[a,b]$ *и* $\mathsf{M}\left(\int_a^b\operatorname{Sp}B(t)B^*(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right)<\infty$, *то*

$$\mathsf{M}\left[\left(\int_a^b A(t)\,dw(t),\int_a^b B(t)\,dw(t)\right)\middle|\mathfrak{F}_a\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left(\int_a^b\operatorname{Sp}A(t)B^*(t)\,dt\mid\mathfrak{F}_a\right). \tag{19}$$

Слева под знаком математического ожидания записано скалярное произведение двух векторов. (18) является частным случаем (19), если $B(t)=A(t)$. Расписывая скалярное произведение слева в (19), будем иметь

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_a^b a_{ij}(t)\,dw_j(t)\sum_{k=1}^m\int_a^b b_{ik}(t)\,dw_k(t).$$

Если возьмем математическое ожидание, то останутся лишь те слагаемые, у которых $k=j$. Воспользовавшись формулой II*, получим справа под знаком математического ожидания

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_a^b a_{ij}(t)\,b_{ij}(t)\,dt,$$

что совпадает с выражением под знаком математического ожидания в правой части (19).

Получим теперь обобщение формулы Ито на функции от нескольких стохастических интегралов. Будем говорить, что процесс $\zeta(t)$ имеет стохастический дифференциал на отрезке $[a, b]$, если существуют такие функции $b_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$, из $\mathfrak{M}_2[a, b]$ и $\mathfrak{F}_t$-измеримая функция $a(t)$, для которой $\int_a^b |a(t)|\,dt < \infty$, что для $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s)\,ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2} b_k(s)\,dw_k(s).$$

Положим тогда

$$d\zeta(t) = a(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)\,dw_k(t).$$

XIII. *Пусть процессы* $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ *имеют стохастические дифференциалы на* $[a, b]$:

$$d\zeta_k(t) = a_k(t)\,dt + \sum_{j=1}^{m} b_{kj}(t)\,dw_j(t), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

*а функция* $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна и имеет непрерывные производные* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда функция* $\eta(t) = u(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))$ *также имеет стохастический дифференциал*

$$\begin{aligned} d\eta(t) = \Bigg[\frac{\partial u}{\partial t}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))\,a_k(t) +{} \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_m(t))\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)\,b_{kj}(t)\Bigg]dt +{} \\ + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))\,b_{kj}(t)\right)dw_j(t). \end{aligned} \tag{21}$$

*Доказательство.* Предположим сначала, что функции $a_k$ и $b_{kj}$ постоянны на отрезке $[s_1, s_2]$, а функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ отлична от нуля лишь при $|x| \leqslant N$. Пусть $s_1 = t_0 < \ldots < t_l = s_2$.

Тогда, используя формулу

$$u(t_{k+1}, x_1, \ldots, x_n) - u(t_k, y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}(t_k, y_1, \ldots, y_n)[t_{k+1} - t_k] + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(t_k, y_1, \ldots, y_n)[x_j - y_j] +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t_k, y_1, \ldots, y_n)(x_i - y_i)(x_j - y_j) +$$
$$+ \varepsilon \left[ (t_{k+1} - t_k) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \right],$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t_k, t_{k+1}, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ равномерно стремится к нулю при $|t_{k+1} - t_k| + \sum_{j=1}^{n} [x_j - y_j]^2 \to 0$, можем записать

$$\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k) = \beta(t_k)\Delta t_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(t_k, \zeta_1(t_k), \ldots, \zeta_n(t_k)) \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{m} b_{jl}\, \Delta w_l(t_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t_k, \zeta_1(t_k), \ldots, \zeta_n(t_k)) \times$$
$$\times \left[ \Delta\zeta_i(t_k)^2 \Delta\zeta_j(t_k) - \sum_{r=1}^{m} b_{ir} b_{jr} \Delta t_k \right] + \varepsilon \left[ \Delta t_k + \sum_{j=1}^{n} \Delta\zeta_j(t_k)^2 \right], \qquad (22)$$

где

$$\beta(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))\, a_j +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)) \sum_{r=1}^{m} b_{ir} b_{jr},$$
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta w_i(t_k) = w_i(t_{k+1}) - w_i(t_k),$$
$$\Delta\zeta_j(t_k) = \zeta_j(t_{k+1}) - \zeta_j(t_k).$$

Пусть $\max_k \Delta t_k \to 0$. Тогда и $\max_{k,\, i} |\Delta w_i(t_k)| \to 0$, $\max_{k,\, i} |\Delta\zeta_i(t_k)| \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum \varepsilon \left[ \Delta t_k + \sum_{j=1}^{n} \Delta\zeta_j(t_k)^2 \right] \to 0$$

по вероятности, так как при некотором $c$

$$\sum_{k=0}^{l-1} \Delta\zeta_j(t_k)^2 \leqslant c \sum_{k=0}^{l-1} \left[ \Delta t_k^2 + \sum_{l=1}^{m} \Delta w_l(t_k)^2 \right]$$

и правая часть ограничена по вероятности, поскольку

$$\mathsf{M}\sum_{k=0}^{l-1}\Delta w_i(t_k)^2\leqslant s_2-s_1.$$

При этих предположениях относительно $\max_k \Delta t_k$

$$\sum_{k=0}^{l-1}\beta(t_k)\Delta t_k\to\int_{s_1}^{s_2}\beta(t)\,dt,$$

$$\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(t_k,\zeta_1(t_k),\ldots,\zeta_n(t_k))\sum_{i=1}^{m}b_{ji}\,\Delta w_j(t_k)\to$$
$$\to\sum_{i=1}^{m}\int_{s_1}^{s_2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t))\,b_{ij}\,dw_j(t).$$

Далее,

$$\mathsf{M}\Bigg[\Bigg(\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(t_k,\zeta_1(t_k),\ldots,\zeta_n(t_k))\times$$
$$\times\Bigg\{\Bigg[a_i\,\Delta t_k+\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\,\Delta w_r(t_k)\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[a_j\,\Delta t_k+\sum_{r=1}^{m}b_{jr}\,\Delta w_r(t_k)\Bigg]-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}b_{jr}\,\Delta t_k\Bigg\}\Bigg)^2\Bigg|\mathfrak{F}_{s_1}\Bigg]\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{M}\Bigg[\Bigg(\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(t_k,\zeta_1(t_k),\ldots,\zeta_n(t_k))\,a_i^2\,\Delta t_k^2\Bigg)^2\Bigg|\mathfrak{F}_{s_1}\Bigg]+$$
$$+2\mathsf{M}\Bigg[\Bigg(\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(t_k,\zeta_1(t_k),\ldots,\zeta_n(t_k))\times$$
$$\times\Bigg[\sum_{r,q=1}^{m}b_{ir}b_{jq}\,\Delta w_r(t_k)\,\Delta w_q(t_k)-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}b_{jr}\,\Delta t_k\Bigg]\Bigg)^2\Bigg|\mathfrak{F}_{s_1}\Bigg].$$

Пусть $\max\limits_{t,\,x_1,\ldots,\,x_n}\max\limits_{i,\,j}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(t,x_1,\ldots,x_n)\right|\leqslant L.$ Тогда первая сумма в правой части последнего неравенства оценивается величиной

$$2\left(nL\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\left(\sum_{k=0}^{l-1}\Delta t_k^2\right)^2\leqslant 2\left(nL\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2(s_2-s_1)^2(\max_k\Delta t_k)^2\to 0$$

при $\max \Delta t_k \to 0$. Для оценки второй суммы заметим, что слагаемые ее при разных $k$ некоррелированы. Поэтому она оценивается величиной

$$2\mathsf{M}\Biggl(\sum_{k=0}^{l-1}\Biggl(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(t_k, \zeta_1(t_k), \ldots, \zeta_n(t_k))\times$$
$$\times\Biggl[\sum_{r,q=1}^{m} b_{ir}b_{jq}\,\Delta w_r(t_k)\,\Delta w_q(t_k) - \sum_{r=1}^{m} b_{ir}b_{jr}\,\Delta t_k\Biggr]\Biggr)^2\Biggl|\,\mathfrak{F}_{s_1}\Biggr)\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{l-1} n^2L^2 \sum_{i,j=1}^{n}\mathsf{M}\Biggl(\Biggl[\sum_{r,q=1}^{m} b_{ir}b_{jq}\,\Delta w_r(t_k)\,\Delta w_q(t_k) -$$
$$-\sum_{r=1}^{m} b_{ir}b_{jr}\,\Delta t_k\Biggr]^2\Biggl|\,\mathfrak{F}_{s_1}\Biggr)\leqslant$$
$$\leqslant 2n^2L^2\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i,j=1}^{n}\Biggl(2\sum_{r=1}^{m} b_{ir}^2 b_{jr}^2 + \sum_{\substack{r\neq q\\ r,q=1}}^{m} b_{ir}^2 b_{jq}^2\Biggr)\Delta t_k^2 \to 0$$

при $\max \Delta t_k \to 0$. (Заметим, что $a_k$ и $b_{ij}$ являются $\mathfrak{F}_{s_1}$-измеримыми, так как они совпадают с $a_k(s_1)$ и $b_{ij}(s_1)$ соответственно.)

Таким образом, формула (21) установлена для финитных по $x$ $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ и постоянных $a_j$, $b_{ij}$. Значит, формула (21) справедлива и для ступенчатых функций. Запишем ее в проинтегрированном виде:

$$u(s_2, \zeta_1(s_2), \ldots, \zeta_n(s_2)) - u(s_1, \zeta_1(s_1), \ldots, \zeta_n(s_1)) =$$
$$=\int_{s_1}^{s_2}\Biggl[\frac{\partial u}{\partial t}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))\,a_k(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_j}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))\sum_{i=1}^{m} b_{ki}(t)\,b_{ji}(t)\Biggr]dt +$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{s_1}^{s_2}\sum_{k}\frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))\,b_{ki}(t)\,dw_i(t). \qquad (23)$$

В этой формуле можем перейти к пределу по $a_k(t)$ и $b_{kj}(t)$ от ступенчатых функций к произвольным, а затем от финитных $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ к любым функциям, удовлетворяющим условиям XIII, используя при этом свойство IV.

## § 2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sigma(t, \xi(t))\,dw(t), \qquad (1)$$

решение которого, как естественно предположить, будет диффузионным процессом с коэффициентом диффузии $\sigma^2(t, x)$ и коэффициентом переноса $a(t, x)$. Предположим, что $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ — борелевские функции, определенные при $x \in \mathscr{R}^1$, $t \in [t_0, T]$.

Уравнение (1) эквивалентно следующему уравнению:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\,dw(s), \qquad (2)$$

и решается при условии, что $\xi(t_0)$ задано. Для того чтобы интегралы в (2), а значит, и дифференциалы в (1) имели смысл, нужно ввести $\sigma$-алгебры событий $\mathfrak{F}_t$.

В дальнейшем величина $\xi(t_0)$ будет всюду предполагаться независимой от процесса $w(t) - w(t_0)$, а под $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{F}_t$ будем понимать минимальную $\sigma$-алгебру, относительно которой измеримы величины $\xi(t_0)$ и $w(s) - w(t_0)$ при $t_0 < s \leqslant t$. Процесс $\xi(t)$ будет считаться решением уравнения (2), если $\xi(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима, интегралы в (2) существуют и (2) имеет место при каждом $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1.

Заметим, что из свойства III предыдущего параграфа вытекает, что для стохастически эквивалентных процессов $f_1(s)$ и $f_2(s)$ совпадают с вероятностью 1 стохастические интегралы

$$\int_{t_0}^{t} f_1(s)\,dw(s), \quad \int_{t_0}^{t} f_2(s)\,dw(s),$$

так как $f_1(s) = f_2(s)$ с вероятностью 1 при каждом $s$ и, значит,

$$\mathsf{P}\left\{\int_{t_0}^{T} |f_1(s) - f_2(s)|^2\,ds > 0\right\} = 0.$$

Отсюда вытекает, что всякий процесс, стохастически эквивалентный решению уравнения (2), сам будет решением этого же уравнения. А так как правая часть (2) стохастически эквивалентна левой и с вероятностью 1 непрерывна, то для всякого решения (2) существует стохастически эквивалентное ему непрерывное решение. В дальнейшем рассматриваются только непрерывные решения уравнения (2).

Теорема 1. *Пусть $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ — борелевские функции ($t \in [t_0, T]$, $x \in \mathscr{R}^1$), удовлетворяющие при некотором $K$ условиям:*

а) *для всех* $x$ *и* $y \in \mathscr{R}^1$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant K|x - y|;$$

б) *для всех* $x \in \mathscr{R}^1$

$$|a(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leqslant K^2(1 + x^2).$$

*Тогда существует решение уравнения* (2), *и если* $\xi_1(t)$ *и* $\xi_2(t)$ — *два непрерывных решения (при фиксированном* $\xi(t_0)$), *то*

$$\mathsf{P}\{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\} = 0.$$

*Доказательство.* Докажем сначала единственность непрерывного решения. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два непрерывных решения (2). Обозначим через $\chi_N(t)$ случайную величину, равную 1, если $|\xi_1(s)| \leqslant N$, $|\xi_2(s)| \leqslant N$ при $s \in [t_0, t]$, и равную 0 в противном случае.

Поскольку $\chi_N(t)\chi_N(s) = \chi_N(t)$ при $s < t$, то

$$\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)] = \chi_N(t)\left[\int_{t_0}^{t} \chi_N(s)[a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))]\,ds + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s)\right].$$

Так как

$$\chi_N(s)[|a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))| + |\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))|] \leqslant$$
$$\leqslant K\chi_N(s)|\xi_1(s) - \xi_2(s)| \leqslant 2KN,$$

то существуют математические ожидания от квадратов интегралов в правой части предыдущего равенства. Применяя неравенство $(a + b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, неравенство Коши и свойство II* предыдущего параграфа, приходим к неравенству

$$\mathsf{M}\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{M}\chi_N(t)\left(\int_{t_0}^{t} \chi_N(s)[a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))]\,ds\right)^2 +$$
$$+ 2\mathsf{M}\chi_N(t)\left(\int_{t_0}^{t} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s)\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2(T - t_0)\int_{t_0}^{t} \mathsf{M}\chi_N(s)[a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))]^2\,ds +$$
$$+ 2\int_{t_0}^{t} \mathsf{M}\chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]^2\,ds.$$

Учитывая условие а), убеждаемся в существовании такой постоянной $L$, что

$$\mathsf{M}\chi_N(t)\,[\xi_1(t)-\xi_2(t)]^2 \leqslant L\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\chi_N(s)\,[\xi_1(s)-\xi_2(s)]^2\,ds. \tag{3}$$

Воспользуемся теперь одним вспомогательным предложением, которое окажется полезным для многих оценок.

Лемма 1. *Пусть неотрицательная интегрируемая функция $\alpha(t)$, определенная при $t\in[t_0, T]$, удовлетворяет неравенству*

$$\alpha(t)\leqslant H\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds+\beta(t), \tag{4}$$

*где $H$ — некоторая неотрицательная постоянная, а $\beta(t)$ — интегрируемая функция. Тогда*

$$\alpha(t)\leqslant\beta(t)+H\int_{t_0}^{t}e^{H(t-s)}\beta(s)\,ds.$$

*Доказательство.* Из (4) вытекает

$$\alpha(t)\leqslant\beta(t)+H\int_{t_0}^{t}\left[\beta(s)+H\int_{t_0}^{s}\alpha(s_1)\,ds_1\right]ds\leqslant$$

$$\leqslant\beta(t)+H\int_{t_0}^{t}\left[\beta(s_1)+H\int_{t_0}^{s_1}\left[\beta(s_2)+H\int_{t_0}^{s_2}\alpha(s_3)\,ds_3\right]ds_2\right]ds_1\leqslant$$

$$\leqslant\beta(t)+H\int_{t_0}^{t}\beta(s_1)\,ds+H^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\beta(s_2)\,ds_2\,ds_1+\ \ldots$$

$$\ldots+H^n\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\ldots\int_{t_0}^{s_{n-1}}\beta(s_n)\,ds_1\ldots ds_n+$$

$$+H^{n+1}\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{s_n}\alpha(s_{n+1})\,ds_1\ldots ds_{n+1}.$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\ldots\int_{t_0}^{s_n}\alpha(s_{n+1})\,ds_1\ldots ds_{n+1}=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s_{n+1})^n}{n!}\,\alpha(s_{n+1})\,ds_{n+1},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}H^{n+1}\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{s_n}\alpha(s_{n+1})\,ds_1\ldots ds_{n+1}=0$$

и, значит,

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t) + H\int_{t_0}^{t}\beta(s)\,ds + H^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\beta(s_2)\,ds_2\,ds_1 + \ldots =$$

$$= \beta(t) + H\int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{\infty} H^k\frac{(t-s)^k}{k!}\beta(s)\,ds. \blacksquare$$

Полагая $\alpha(t) = \mathsf{M}\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2$, $\beta(t) = 0$, получим из (3)

$$\mathsf{M}\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 = 0,$$

т. е.

$$\mathsf{P}\{\xi_1(t) \neq \xi_2(t)\} \leqslant \mathsf{P}\{\sup_s|\xi_1(s)| > N\} + \mathsf{P}\{\sup_s|\xi_2(s)| > N\}.$$

Вероятности справа стремятся к нулю ввиду непрерывности (а значит, и ограниченности) с вероятностью 1 процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Значит, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ стохастически эквивалентны. А так как оба процесса с вероятностью 1 непрерывны, то $\mathsf{P}\{\sup_t|\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\} = 0$. Единственность решения уравнения (2) доказана.

Докажем теперь существование решения уравнения (2) Предположим сначала, что $\mathsf{M}|\xi(t_0)|^2 < \infty$. Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{B}$ измеримых случайных функций $\zeta(t)$, при каждом $t$ измеримых относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_t$ и удовлетворяющих соотношению $\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\mathsf{M}|\zeta(t)|^2 < \infty$ с нормой

$$\|\zeta\| = (\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\mathsf{M}|\zeta(t)|^2)^{1/2}.$$

Определим в пространстве $\mathscr{B}$ оператор $S$ по формуле

$$S\zeta(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \zeta(s))\,ds + \int_{t_0}^{t}\sigma(s, \zeta(s))\,dw(s).$$

Существование обоих интегралов вытекает из соотношения

$$|a(s, \zeta(s))|^2 + |\sigma(s, \zeta(s))|^2 \leqslant K^2(1 + |\zeta(s)|^2).$$

Очевидно, что $S\zeta(t)$ измеримо относительно $\mathfrak{F}_t$.

Воспользовавшись неравенством $(a + b + c)^3 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$ и условием б) теоремы, получим

$$\mathsf{M}|S\zeta(t)|^2 \leqslant 3\mathsf{M}|\xi(t_0)|^2 +$$

$$+ 3(T - t_0)\mathsf{M}\int_{t_0}^{t} K^2(1 + |\zeta(s)|^2)\,ds + 3\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}K^2(1 + |\zeta(s)|^2)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 3\mathsf{M}|\xi(t_0)|^2 + [3(T - t_0)^2K^2 + 3(T - t_0) + K^2](1 + \|\zeta\|^2).$$

Таким образом, оператор $S$ преобразует $\mathscr{B}$ в $\mathscr{B}$. Далее, имеем

$$\mathsf{M}\,|\,S\zeta_1(t) - S\zeta_2(t)\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2(T - t_0)\int_{t_0}^{t} \mathsf{M}\,[a(s, \zeta_1(s)) - a(s, \zeta_2(s))]^2\,ds +$$

$$+ 2\mathsf{M}\left(\int_{t_0}^{t}[\sigma(s, \zeta_1(s)) - \sigma(s, \zeta_2(s))]\,dw(s)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant L\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\,|\,\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\,|^2\,ds \leqslant L(t - t_0)\,\|\,\zeta_1 - \zeta_2\,\|^2,$$

$$L = 2K^2(T - t_0 + 1).$$

Это соотношение показывает, что оператор $S$ непрерывен на $\mathscr{B}$. Далее,

$$\mathsf{M}\,|\,S^n\zeta_1(t) - S^n\zeta_2(t)\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant L\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\,|\,S^{n-1}\zeta_1(u) - S^{n-1}\zeta_2(u)\,|^2\,du \leqslant$$

$$\leqslant L^n \int_{t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t}\!\!\ldots\!\int \mathsf{M}\,|\,\zeta_1 - \zeta_2\,|^2\,dt_1\,\ldots\,dt_n = \frac{L^n\,(t - t_0)^n}{n!}\,\|\,\zeta_1 - \zeta_2\,\|^2.$$

Поэтому для каждого $\zeta(t)$ из $\mathscr{B}$ справедливо неравенство

$$\|\,S^{n+1}\zeta - S^n\zeta\,\|^2 \leqslant \frac{L^n\,(T - t_0)^n}{n!}\,\|\,S\zeta - \zeta\,\|^2.$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\,S^{n+1}\zeta - S^n\zeta\,\|$$

вытекает существование предела процесса $S^n\zeta(t)$ при $n \to \infty$. Если обозначить этот предел через $\xi(t)$, то из непрерывности $S$ вытекает, что $S[S^n\zeta(t)] \to S\xi(t)$. Но $S[S^n\zeta(t)] = S^{n+1}\zeta(t) \to \xi(t)$. Таким образом, $\|\,S\xi - \xi\,\| = 0$. Из определения нормы вытекает, что тогда $\xi(t) = S\xi(t)$ с вероятностью 1 при каждом $t \in [t_0, T]$, т. е. $\xi(t)$ — решение уравнения (2).

Перейдем теперь к доказательству существования решения уравнения (2) в общем случае.

Обозначим через $\xi^N(t_0)$ величину, равную $\xi(t_0)$ при $|\,\xi(t_0)\,| \leqslant N$ и равную 0 при $|\,\xi(t_0)\,| > N$. Через $\xi^N(t)$ обозначим решение уравнения

$$\xi^N(t) = \xi^N(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi^N(s))\,ds + \int_{t_0}^{t}\sigma(s, \xi^N(s))\,dw(s). \tag{5}$$

Так как $|\xi^N(t_0)| \leqslant N$ и $\mathsf{M}|\xi^n(t_0)|^2 < \infty$, то решение уравнения (5) существует и, как вытекает из уже доказанного, $\sup\limits_t \mathsf{M}|\xi^N(t)|^2 < \infty$.

Покажем, что при $N \to \infty$ $\xi^N(t)$ сходится по вероятности к некоторому процессу $\xi(t)$, являющемуся решением уравнения (2). Пусть $N' > N$. Обозначим через $\eta$ случайную величину, равную 1 при $|\xi(t_0)| \leqslant N$ и 0 при $|\xi(t_0)| > N$. Тогда $|\xi^N(t_0) - \xi^{N'}(t_0)|\eta = 0$. Величина $\eta$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{t_0}$. Исходя из соотношения

$$|\xi^N(t) - \xi^{N'}(t)|^2\eta \leqslant 2\left[\int\limits_{t_0}^{t} [a(s, \xi^N(s)) - a(s, \xi^{N'}(s))]\,\eta\, ds\right]^2 + \\ + 2\left(\int\limits_{t_0}^{t} [\sigma(s, \xi^N(s)) - \sigma(s, \xi^{N'}(s))]\,\eta\, dw(s)\right)^2$$

и используя условие а) теоремы и уже применявшиеся оценки интегралов, убеждаемся, что существует постоянная $L$ такая, что

$$\mathsf{M}|\xi^N(t) - \xi^{N'}(t)|^2\eta \leqslant L\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}|\xi^N(s) - \xi^{N'}(s)|^2\eta\, ds.$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}|\xi^N(t) - \xi^{N'}(t)|^2\eta = 0,$$

так что

$$\mathsf{P}\{|\xi^N(t) - \xi^{N'}(t)| > 0\} < \mathsf{P}\{|\xi(t_0)| > N\}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что $\xi^N(t)$ по вероятности сходится к некоторому пределу $\xi(t)$ при $N \to \infty$, причем

$$\int\limits_{t_0}^{T} (\xi^N(t) - \xi(t))^2\, dt$$

по вероятности сходится к нулю при $N \to \infty$. Используя условие а) и свойство IV § 1, убеждаемся, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} a(s, \xi^N(s))\, ds \to \int\limits_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi^N(s))\, dw(s) \to \int\limits_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s)$$

по вероятности при $N \to \infty$. Таким образом, $\xi(s)$ удовлетворяет (2). ∎

Покажем, что в условиях теоремы 1 решение уравнения (2) будет процессом Маркова. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а $\xi_{t,x}(s)$ — процесс, определенный при $s \in [t, T]$, $t > t_0$ и являющийся решением уравнения*

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u, \xi_{t,x}(u))\, du + \int_t^s \sigma(u, \xi_{t,x}(u))\, dw(u). \tag{6}$$

*Тогда процесс $\xi(t)$, являющийся решением уравнения* (2), *будет процессом Маркова, вероятности перехода которого определяются соотношением* $\mathsf{P}(t, x, s, A) = \mathsf{P}\{\xi_{t,x}(s) \in A\}$.

*Доказательство.* Так как $\xi(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_t$, а $\xi_{t,x}(s)$ полностью определяется процессом $w(s) - w(t)$ при $s \in [t, T]$ (не зависящим от $\mathfrak{F}_t$), то $\xi_{t,x}(s)$ не зависит от $\xi(t)$ и событий из $\mathfrak{F}_t$. При $s \in [t, T]$ $\xi(s)$ будет единственным (ввиду теоремы 1) решением уравнения

$$\xi(s) = \xi(t) + \int_t^s a(u, \xi(u))\, du + \int_t^s \sigma(u, \xi(u))\, dw(u).$$

Процесс $\xi_{t,\xi(t)}(s)$ будет также решением этого уравнения.

Поэтому с вероятностью 1 $\xi(s) = \xi_{t,\xi(t)}(s)$. Покажем теперь, что

$$\mathsf{P}\{\xi(s) \in A \mid \xi(t)\} = \mathsf{P}\{\xi(s) \in A \mid \mathfrak{F}_t\}.$$

Для этого достаточно показать, что для любой измеримой относительно $\mathfrak{F}_t$ ограниченной величины $\zeta$ и любой ограниченной непрерывной функции $\lambda(x)$

$$\mathsf{M}\zeta\lambda(\xi(s)) = \mathsf{M}\zeta\mathsf{M}(\lambda(\xi(s)) \mid \xi(t)). \tag{7}$$

Обозначим $\varphi(x, \omega) = \lambda(\xi_{t,x}(s))$. Тогда $\lambda(\xi(s)) = \varphi(\xi(t), \omega)$. Предположим сначала, что $\varphi(x, \omega)$ имеет вид

$$\varphi(x, \omega) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\psi_k(\omega). \tag{8}$$

Тогда, так как $\psi_k(\omega)$ не зависит от $\mathfrak{F}_t$, то

$$\mathsf{M}\zeta\sum_{k=1}^n \varphi_k(\xi(t))\psi_k(\omega) = \sum_{k=1}^n \mathsf{M}\zeta\varphi_k(\xi(t))\mathsf{M}\psi_k(\omega) = \mathsf{M}\sum_{k=1}^n \zeta\varphi_k(\xi(t))\mathsf{M}\psi_k(\omega),$$

$$\mathsf{M}\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(\xi(t))\psi_k(\omega) \mid \xi(t)\right) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\xi(t))\mathsf{M}\psi_k(\omega).$$

Таким образом, (7) установлено для того случая, когда $\varphi(x, \omega)$ имеет вид (8). Более того, мы установили, что в этом случае

$$\mathsf{M}(\lambda(\xi(s))\,|\,\mathfrak{F}_t)=g(\xi(t)), \tag{9}$$

где $g(x)=\mathsf{M}\lambda(\xi_{t,x}(s))$.

Очевидным предельным переходом (7) и (9) распространяются на все функции $\varphi(x, \omega)$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\xi(s)\in A\,|\,\mathfrak{F}_t\}=\mathsf{P}_{t,\xi(t)}(s, A),$$

где $\mathsf{P}_{t,x}(s, A)=\mathsf{P}\{\xi_{t,x}(s)\in A\}$. ∎

Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях процесс $\xi(t)$ будет диффузионным процессом с коэффициентом диффузии $\sigma^2(t,x)$ и коэффициентом переноса $a(t,x)$. Для этого установим предварительно одно вспомогательное предложение.

Лемма 2. *Пусть $\xi_{t,x}(s)$ — решение уравнения* (6), *коэффициенты которого $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда существует такая постоянная $H$, что*

$$\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,x}(s)-x\,|^4\leqslant H(s-t)^2(1+x^4).$$

*Доказательство*. Пусть $\chi_N(s)=1$ при $\sup\limits_{t\leqslant u\leqslant s}|\,\xi_{t,x}(u)-x\,|\leqslant N$ и $\chi_N(s)=0$ в противном случае. Тогда

$$(\xi_{t,x}(s)-x)\,\chi_N(s)=$$
$$=\chi_N(s)\left[\int_t^s\chi_N(u)\,a(u, \xi_{t,x}(u))\,du+\int_t^s\chi_N(u)\,\sigma(u, \xi_{t,x}(u))\,dw(u)\right].$$

Используя неравенство $(a+b)^4\leqslant 8a^4+8b^4$, неравенство Коши и свойство VII § 1, получаем

$$\mathsf{M}(\xi_{t,x}(s)-x)^4\chi_N(s)\leqslant 8\mathsf{M}\left[\int_t^s\chi_N(u)\,a(u, \xi_{t,x}(u))\,du\right]^4+$$
$$+8\mathsf{M}\left[\int_t^s\chi_N(u)\sigma(u, \xi_{t,x}(u))\,dw(u)\right]^4\leqslant$$
$$\leqslant 8(s-t)^3\int_t^s\mathsf{M}\chi_N(u)\,[a(u, \xi_{t,x}(u))]^4\,du+$$
$$+8\cdot 36\,(s-t)\int_t^s\mathsf{M}\chi_N(u)\,[\sigma(u, \xi_{t,x}(u))]^4\,du\leqslant$$
$$\leqslant 64(s-t)^3\int_t^s a^4(u, x)\,du+$$

$$+64(s-t)^3\int_t^s \mathsf{M}\chi_N(u)\,[a(u,\,\xi_{t,\,x}(u))-a(u,\,x)]^4\,du+$$

$$+64\cdot 36\,(s-t)\int_t^s \sigma^4(u,\,x)\,du+$$

$$+64\cdot 36\,(s-t)\int_t^s \mathsf{M}\chi_N(u)\,[\sigma(u,\,\xi_{t,\,x}(u))-\sigma(u,x)]^4\,du\leqslant$$

$$\leqslant L\,(s-t)\int_t^s \mathsf{M}\chi_N(u)\,|\,\xi_{t,\,x}(u)-x\,|^4\,du+R\,(s-t)^2,$$

где $L$ зависит лишь от $K$, а $R=H_1(1+x^4)$, где $H_1$ зависит лишь от $K$. Значит, если

$$\alpha(s)=\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,\,x}(s)-x\,|^4\,\chi_N(s),$$

то

$$\alpha(s)\leqslant L\,(s-t)\int_t^s \alpha(u)\,du+R\,(s-t)^2.$$

При $t\leqslant s\leqslant t+1$

$$\alpha(s)\leqslant L\int_t^s \alpha(u)\,du+R\,(s-t)^2.$$

Значит, в силу леммы 1

$$\alpha(s)\leqslant R\,(s-t)^2+L\int_t^s e^{L\,(s-u)}R\,(s-u)^2\,du.$$

Поэтому при $t\leqslant s<t+1$ можно указать такое $H$, что

$$\alpha(s)\leqslant H\,(1+x^4)\,(s-t)^2,$$

$$\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,\,x}(s)-x\,|^4\,\chi_N(s)\leqslant H\,(1+x^4)\,(s-t)^2.$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим доказательство леммы. ■

Следствие 1. *Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения* (2) *и $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а* $\mathsf{M}|\,\xi(t_0)\,|^4<\infty$. *Тогда*

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{M}\,|\,\xi(t)\,|^4<\infty.$$

Действительно, из леммы 2 вытекает

$$\mathsf{M}\,(|\,\xi(t)-\xi(t_0)\,|^4\,|\,\xi(t_0))\leqslant H\,(T-t_0)^2\,(1+|\,\xi(t_0)\,|^4),$$

$$\mathsf{M}\,|\,\xi(t)\,|^4\leqslant 8\mathsf{M}\,|\,\xi(t_0)\,|^4+8\mathsf{M}\mathsf{M}\,(|\,\xi(t)-\xi(t_0)\,|^4\,|\,\xi(t_0)).$$

Следствие 2. *В условиях предыдущего следствия существует такая постоянная $H_1$, что*

$$\mathsf{M}\,|\,\xi(t)-\xi(s)\,|^4 \leqslant H_1 (s-t)^2.$$

Действительно, при $t<s$

$$\mathsf{M}\,|\,\xi(s)-\xi(t)\,|^4 \leqslant H (s-t)^2 (\mathsf{M}\,\,|\,\xi(t)\,|^4+1).$$

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ непрерывны по $t$ при $t\in[t_0,T]$, то тогда $\sigma^2(t,x)$ и $a(t,x)$ будут соответственно коэффициентами диффузии и переноса для процесса $\xi(t)$, являющегося решением уравнения* (2).

*Доказательство.* Так как переходная вероятность $\mathsf{P}(t,x,s,A)$ для процесса $\xi(t)$ на основании теоремы 2 совпадает с распределением величины $\xi_{t,x}(s)$, то, как вытекает из леммы 2,

$$\int (y-x)^4\,\mathsf{P}(t,\ x,\ s,\ dy)=\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,x}(s)-x\,|^4=o(s-t).$$

Используя замечание к теореме 6 § 4 гл. I, убеждаемся, что для доказательства теоремы достаточно показать, что выполняются соотношения

$$\int (y-x)\,\mathsf{P}(t,x,s,dy)=\mathsf{M}\xi_{t,x}(s)-x=a(t,\ x)(s-t)+o(s-t) \tag{10}$$

и

$$\int (y-x)^2\,\mathsf{P}(t,\ x,\ s,\ dy)=\mathsf{M}\,(\xi_{t,x}(s)-x)^2=$$
$$=\sigma^2(t,\ x)(s-t)+o(s-t). \tag{11}$$

Доказательства этих формул проводятся аналогичным образом. Докажем, например, (11). Из (6) вытекает

$$\mathsf{M}\,(\xi_{t,x}(s)-x)^2=\mathsf{M}\left(\int_t^s a(u,\ \xi_{t,x}(u))\,du+\int_t^s \sigma(u,\ \xi_{t,x}(u))\,dw(u)\right)^2.$$

Поскольку

$$\mathsf{M}\left[\int_t^s a(u,\ \xi_{t,x}(u))\,du\right]^2 \leqslant (s-t)\int_t^s \mathsf{M}a^2(u,\ \xi_{t,x}(u))\,du=o(s-t),$$

а

$$\mathsf{M}\left(\int_t^s \sigma(u,\ \xi_{t,x}(u))\,dw(u)\right)^2=\int_t^s \mathsf{M}\,[\sigma(u,\ \xi_{t,x}(u))]^2\,du\leqslant$$
$$\leqslant K^2\int_t^s \mathsf{M}\,(1+|\,\xi_{t,x}(u)\,|^2)\,du=O(s-t),$$

то

$$\mathsf{M}(\xi_{t,x}(s)-x)^2=\mathsf{M}\left(\int_t^s \sigma(u,\ \xi_{t,x}(u))\,dw(u)\right)^2+o(s-t)=$$

$$=\int_t^s \mathsf{M}\sigma^2(u,\ \xi_{t,x}(u))\,du+o(s-t).$$

Воспользовавшись равенством

$$\lim_{u\downarrow t}\mathsf{M}\sigma^2(u,\ \xi_{t,x}(u))=\sigma(t,\ x),$$

вытекающим из возможности перехода к пределу под знаком математического ожидания (в силу неравенства $\sigma^4(u,\ \xi_{t,x}(u))\leqslant \leqslant K^4(1+|\xi_{t,x}(u)|^2)^2$ и следствия 1 из теоремы 2) и непрерывности $\sigma(t,x)$, находим

$$\int_t^s \mathsf{M}\sigma^2(u,\ \xi_{t,x}(u))\,du=\sigma^2(t,\ x)(s-t)+o(s-t),$$

откуда и вытекает (11). ■

Перейдем к построению многомерного диффузионного процесса $\xi(t)$ с вектором переноса $a(t,x)$ и оператором диффузии $B(t,x)$. Положим

$$b_k(t,\ x)=\sqrt{\lambda_k(t,\ x)}\,e_k(t,\ x),$$

где $e_k(t,x)$ — собственные векторы, а $\lambda_k(t,x)$ — соответствующие им собственные значения оператора $B(t,x)$.

Процесс $\xi(t)$ мы будем искать как решение уравнения

$$d\xi(t)=a(t,\ \xi(t))\,dt+\sum_{k=1}^{m} b_k(t,\ \xi(t))\,dw_k(t), \tag{12}$$

где $w_k(t)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$ — независимые винеровские процессы.

Функции $a(t,x)$ и $b_k(t,x)$ определены при $t\in[t_0,T]$, $x\in\mathscr{R}^m$ и принимают значения из $\mathscr{R}^m$. Уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{t} a(s,\ \xi(s))\,ds+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s,\ \xi(s))\,dw_k(s). \tag{13}$$

Это уравнение решается при заданном $\xi(t_0)$, которое всюду в дальнейшем будет считаться величиной, не зависящей от процессов $w_k(t)$.

Пусть $\mathfrak{F}_t$ — минимальная $\sigma$-алгебра, порожденная величинами $\xi(t_0)$ и $w_k(s)-w_k(t_0)$ при $k=1,\ \ldots,\ m$; $s\in[t_0,t]$. Решением

(13) будем считать такой процесс $\xi(t)$, для которого существуют интегралы в правой части (13) и при каждом $t \in [t_0, T]$ (13) выполняется с вероятностью 1.

Сформулируем в виде одной теоремы основные свойства решений уравнения (13).

Теорема 4. *Пусть $a(t,x)$, $b_1(t,x), \ldots, b_m(t,x)$ — определенные при $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathscr{R}^m$ борелевские функции, принимающие значения из $\mathscr{R}^m$. Если существует такое $K$, что*

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{k=1}^{m} |b_k(t, x)|^2 \leqslant K^2(1 + |x|^2),$$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + \sum_{k=1}^{m} |b_k(t, x) - b_k(t, y)| \leqslant K|x - y|$$

*для всех $x$ и $y$ из $\mathscr{R}^m$, то уравнение* (13) *имеет единственное с точностью до стохастической эквивалентности с вероятностью* 1 *непрерывное решение $\xi(t)$. Это решение $\xi(t)$ будет процессом Маркова, переходные вероятности которого $\mathsf{P}(t, x, s, A)$ при $t < s$ определяются соотношением*

$$\mathsf{P}(t, x, s, A) = \mathsf{P}\{\xi_{t,x}(s) \in A\},$$

*где $\xi_{t,x}(s)$ является решением уравнения*

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u, \xi_{t,x}(u))\,du + \sum_{k=1}^{m} \int_t^s b_k(u, \xi_{t,x}(u))\,dw_k(u). \tag{14}$$

*Если функции $a(t,x)$ и $b_k(t,x)$ непрерывны по $t$, то процесс $\xi(t)$ будет диффузионным процессом с вектором переноса $a(t,x)$ и оператором диффузии $B(t,x)$, удовлетворяющим соотношению*

$$(B(t, x)z, z) = \sum_{k=1}^{m} (b_k(t, x), z)^2.$$

Доказательство всех этих фактов в принципе совершенно не отличается от доказательств для одномерных процессов, приведенных в теоремах 1, 2, 3.

Замечание 1. *Если $\xi_{t,x}(s)$ является решением уравнения* (14), *коэффициенты которого $a(s,x)$ и $b_k(s,x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 4, *то существует постоянная $H$, для которой при $s > t$*

$$\mathsf{M}|\xi_{t,x}(s) - x|^4 \leqslant H(s - t)^2(1 + |x|^4).$$

Это утверждение аналогично тому, которое доказано в лемме 2 для одномерного процесса.

Замечание 2. *Если коэффициенты* $a(t, x)$ *и* $b_k(t, x)$ *уравнения* (12) *не зависят от* $t$, *т. е. уравнение имеет вид*

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(\xi(t))\,dw_k(t), \tag{15}$$

*и* $a(x)$, $b_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, *удовлетворяют условиям теоремы* 4, *то решение* $\xi(t)$ *уравнения будет однородным процессом Маркова, т. е. переходная вероятность* $\mathsf{P}(t, x, t+h, A)$ *не зависит от* $t$.

Действительно, $\mathsf{P}(t, x, t+h, A)$ совпадает с распределением $\zeta_{t,x}(h) = \xi_{t,x}(t+h)$, но, как вытекает из теоремы 4, $\zeta_{t,x}(h)$ будет решением уравнения

$$d\zeta_{t,x}(h) = a(\zeta_{t,x}(h))\,dh + \sum_{k=1}^{m} b_k(\zeta_{t,x}(h))\,d_h[w_k(t+h) - w_k(t)]$$

с начальным условием $\zeta_{t,x}(0) = x$.

Так как совместное распределение $[w_k(t+h) - w_k(t)]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, не зависит от $t$, то и распределение $\zeta_{t,x}(h)$ не будет зависеть от $t$.

## § 3. Дифференцируемость решений стохастических уравнений по начальным данным

Цель этого параграфа — доказать, что функция $\xi_{t,x}(s)$, введенная в предыдущем параграфе как решение уравнения (14), является дифференцируемой функцией $x$ при достаточно гладких коэффициентах $a(t, x)$ и $b_k(t, x)$. Так как $\xi_{t,x}(s)$ — случайная функция $x$, то нужно уточнить, в каком смысле будет пониматься производная от $\xi_{t,x}(s)$. Для наших целей удобно рассматривать среднеквадратическую дифференцируемость случайных функций. Если $\varphi(x, \omega)$ — случайная функция, зависящая от точки $x$ пространства $\mathscr{R}^m$, а $x^1, \ldots, x^m$ — координаты точки $x$, то под $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ мы будем понимать такую случайную величину, для которой

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \mathsf{M}\left|\frac{1}{\Delta x^i}[\varphi(x^1, \ldots, x^i + \Delta x^i, \ldots, x^m, \omega) - \varphi(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m, \omega)] - \frac{\partial \varphi(x, \omega)}{\partial x^i}\right|^2 = 0.$$

Как и в предыдущем параграфе, мы дадим полные доказательства лишь для одномерных процессов.

Теорема 1. *Пусть функции* $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ *определены и непрерывны при* $x \in \mathscr{R}^1$, $t \in [t_0, T]$ *и имеют непрерывные ограниченные частные производные* $a'_x(t, x)$, $a''_{xx}(t, x)$, $\sigma'_x(t, x)$, $\sigma''_{xx}(t, x)$.

*Тогда решение $\xi_{t,x}(s)$ уравнения* (6) § 2 *дважды дифференцируемо по $x$, причем производные непрерывны по $x$ в среднем квадратическом.*

Доказательство теоремы будет опираться на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть процессы $\zeta_n(t)$, $n=0, 1, \ldots$, являются решениями стохастических уравнений*

$$\zeta_n(t)=\varphi_n(t)+\int_{t_0}^{t}\psi_n(s)\,\zeta_n(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\chi_n(s)\,\zeta_n(s)\,dw(s). \tag{1}$$

*Функции $\varphi_n(t)$, $\psi_n(t)$ и $\chi_n(t)$ при каждом $t$ измеримы относительно $\mathfrak{F}_t$, $\sup\limits_t \mathsf{M}\,|\varphi_n(t)|^2<\infty$, и существует такое $K$, что с вероятностью 1 $|\psi_n(s)|\leqslant K$, $|\chi_n(s)|\leqslant K$. Если при $n\to\infty$ $\sup\limits_t \mathsf{M}\,|\varphi_n(t)-\varphi_0(t)|^2\to 0$ и при каждом $t$ $\psi_n(t)\to\psi_0(t)$, $\chi_n(t)\to\chi_0(t)$ по вероятности, то и $\sup\limits_t \mathsf{M}\,|\zeta_n(t)-\zeta_0(t)|^2\to 0$ при $n\to\infty$.*

*Доказательство.* Отметим, во-первых, что точно таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1 § 2, доказывается существование и единственность решения уравнения (1), а также то, что в этом случае $\sup\limits_t \mathsf{M}\,|\zeta_n(t)|^2<\infty$. Поэтому можем записать

$$\mathsf{M}\,|\zeta_n(t)-\zeta_0(t)|^2\leqslant 3\mathsf{M}\,|\varphi_n(t)-\varphi_0(t)|^2+ \\ +3\mathsf{M}\left(\int_{t_0}^{t}[\psi_n(s)\,\zeta_n(s)-\psi_0(s)\,\zeta_0(s)]\,ds\right)^2+ \\ +3\mathsf{M}\left(\int_{t_0}^{t}(\chi_n(s)\,\zeta_n(s)-\chi_0(s)\,\zeta_0(s))\,dw(s)\right)^2= \\ =3\mathsf{M}\,|\varphi_n(t)-\varphi_0(t)|^2+3\mathsf{M}\left(\int_{t_0}^{t}\psi_n(s)\,[\zeta_n(s)-\zeta_0(s)]\,ds+\right. \\ \left.+\int_{t_0}^{t}\zeta_0(s)\,[\psi_n(s)-\psi_0(s)]\,ds\right)^2+3\mathsf{M}\left(\int_{t_0}^{t}\chi_n(s)\,[\zeta_n(s)-\zeta_0(s)]\,dw(s)+\right. \\ \left.+\int_{t_0}^{t}\zeta_0(s)\,[\chi_n(s)-\chi_0(s)]\,dw(s)\right)^2\leqslant \\ \leqslant\delta_n(t)+6\mathsf{M}\left(\int_{t_0}^{t}K\,|\zeta_n(s)-\zeta_0(s)|\,ds\right)^2+6K^2\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\,|\zeta_n(s)-\zeta_0(s)|^2\,ds,$$

где

$$\delta_n(t) = 3\mathsf{M}\,|\,\varphi_n(t) - \varphi_0(t)\,|^2 + \\ + 6(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\,|\,\zeta_0(s)\,|^2\,|\,\psi_n(s) - \psi_0(s)\,|^2\,ds + \\ + 6\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\,|\,\zeta_0(s)\,|^2\,|\,\chi_n(s) - \chi_0(s)\,|^2\,ds.$$

Так как

$$\sup_t \delta_n(t) \leqslant 3\sup_t \mathsf{M}\,|\,\varphi_n(t) - \varphi_0(t)\,|^2 + \\ + 6(T - t_0 + 1)\int_{t_0}^{T}\mathsf{M}\,|\,\zeta_0(s)\,|^2\,(|\,\psi_n(s) - \psi_0(s)\,|^2 + |\,\chi_n(s) - \chi_0(s)\,|^2)\,ds,$$

то $\delta_n(t)$ равномерно относительно $t$ стремится к нулю (интеграл стремится к нулю по теореме Лебега, так как подынтегральная функция ограничена величиной $4K^2|\zeta_0(s)|^2$ и стремится к нулю по вероятности).

Если положить $H = 6K^2(T - t_0 + 1)$, то

$$\mathsf{M}\,|\,\zeta_n(t) - \zeta_0(t)\,|^2 \leqslant \sup_t \delta_n(t) + H\int_{t_0}^{t}\mathsf{M}\,|\,\zeta_n(s) - \zeta_0(s)\,|^2\,ds.$$

Тогда в силу леммы 1 § 2

$$\mathsf{M}\,|\,\zeta_n(t) - \zeta_0(t)\,|^2 \leqslant \sup_t \delta_n(t)\,e^{H(T-t_0)}.$$

Последнее неравенство доказывает лемму. ■

Замечание. *Лемма остается справедливой, если процессы будут зависеть от непрерывного параметра $\alpha$ и соответствующие пределы будут существовать при $\alpha \to 0$.*

Приступим теперь к доказательству теоремы. Положим

$$\zeta_{x,\,\Delta x}(s) = \frac{1}{\Delta x}\left[\xi_{t,\,x+\Delta x}(s) - \xi_{t,\,x}\right].$$

Тогда процесс $\zeta_{x,\,\Delta x}(s)$ будет решением уравнения

$$\zeta_{x,\,\Delta x}(s) = 1 + \int_t^s \psi_{x,\,\Delta x}(u)\,\zeta_{x,\,\Delta x}(u)\,du + \int_t^s \chi_{x,\,\Delta x}(u)\,\zeta_{x,\,\Delta x}(u)\,dw(u),$$

где

$$\psi_{x,\,\Delta x}(s) = \frac{a(s,\,\xi_{t,\,x+\Delta x}(s)) - a(s,\,\xi_{t,\,x}(s))}{\xi_{t,\,x+\Delta x}(s) - \xi_{t,\,x}(s)},$$

$$\chi_{x,\,\Delta x}(s) = \frac{\sigma(s,\,\xi_{t,\,x+\Delta x}(s)) - \sigma(s,\,\xi_{t,\,x}(s))}{\xi_{t,\,x+\Delta x}(s) - \xi_{t,\,x}(s)}.$$

Так как $a(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ имеют ограниченные производные по $x$, то существует такая постоянная $K$, что с вероятностью 1 $|\psi_{x, \Delta x}(s)| \leqslant K$ и $|\chi_{x, \Delta x}(s)| \leqslant K$. Поэтому

$$\mathsf{M}|\zeta_{x, \Delta x}(s)|^2 \leqslant 3 + 3(T - t_0)\int_t^s K^2 \mathsf{M}|\zeta_{x, \Delta x}(u)|^2\, du + \\ + 3K^2 \int_t^s \mathsf{M}|\zeta_{x, \Delta x}(u)|^2\, du \leqslant 3 + H\int_t^s \mathsf{M}|\zeta_{x, \Delta x}(u)|^2\, du,$$

где $H = 3(T - t_0 + 1)K^2$. Из леммы 1 § 2 вытекает, что

$$\mathsf{M}|\zeta_{x, \Delta x}(s)|^2 \leqslant 3e^{H(T - t_0)},$$

и, следовательно, при некотором $H_1$

$$\mathsf{M}|\xi_{t, x+\Delta x}(s) - \xi_{t, x}(s)|^2 \leqslant H_1(\Delta x)^2. \tag{2}$$

Последнее соотношение показывает, что $\xi_{t, x+\Delta x}(s) - \xi_{t, x}(s) \to 0$ по вероятности при $\Delta x \to 0$, поэтому

$$\psi_{x, \Delta x}(s) \to a'_x(s, \xi_{t, x}(s)), \quad \chi_{x, \Delta x}(s) \to \sigma'_x(s, \xi_{t, x}(s))$$

по вероятности при $\Delta x \to 0$. Обозначим через $\zeta_x(s)$ решение уравнения

$$\zeta_x(s) = 1 + \int_t^s a'_x(u, \xi_{t, x}(u))\,\zeta_x(u)\, du + \\ + \int_t^s \sigma'_x(u, \xi_{t, x}(u))\,\zeta_x(u)\, dw(u). \tag{3}$$

Из леммы 1 следует, что $\mathsf{M}|\zeta_{x, \Delta x}(s) - \zeta_x(s)|^2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. что

$$\zeta_x(s) = \frac{\partial}{\partial x}\xi_{t, x}(s).$$

Заметим, что из соотношения (3) вытекает равенство

$$\zeta_x(s) = \exp\left\{\int_t^s \left(a'_x(u, \xi_{t, x}(u)) - \frac{1}{2}[\sigma'_x(u, \xi_{t, x}(u))]^2\right) du + \right. \\ \left. + \int_t^s \sigma'_x(u, \xi_{t, x}(u))\, dw(u)\right\}. \tag{4}$$

Действительно, пусть процесс $\zeta(s)$ таков, что $\zeta(t)=1$ и

$$d\zeta(s)=a(s)\zeta(s)\,ds+\sigma(s)\zeta(s)\,dw(s),$$

где $a(s)$ и $b(s)$ — ограниченные функции. Тогда в силу формулы Ито

$$d\left[\zeta(s)\exp\left\{-\int_t^s\left[a(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du-\int_t^s\sigma(u)\,dw(u)\right\}\right]=$$

$$=[d\zeta(s)]\exp\left\{-\int_t^s\left[a(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du-\int_t^s\sigma(u)\,dw(u)\right\}+$$

$$+\zeta(s)\exp\left\{-\int_t^s\left[a(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du-\int_t^s\sigma(u)\,dw(u)\right\}\times$$

$$\times\left[\left(-a(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds-\sigma(s)\,dw(s)\right]-$$

$$-\zeta(s)\exp\left\{-\int_t^s\left[a(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du-\int_t^s\sigma(u)\,dw(u)\right\}\sigma^2(s)\,ds=0,$$

и, значит,

$$\zeta(s)\exp\left\{-\int_t^s\left[a(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du-\int_t^s\sigma(u)\,dw(u)\right\}=c.$$

Полагая $s=t$, находим, что $c=1$. Тем самым формула (4) установлена. Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 2. *Пусть* $|\varphi(u)|\leqslant N$, $u\in[s,t]$. *Тогда*

$$\mathsf{M}\exp\left\{\int_s^t\varphi(u)\,dw(u)\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2}N^2(s-t)\right\}. \tag{5}$$

*Доказательство. Если* $\varphi(u)$ — ступенчатая функция: $\varphi(u)=\varphi(t_k)$ при $u\in[t_k,t_{k+1}]$, где $t=t_0<t_1<\ldots<t_r=s$, то (5) получаем, последовательно используя неравенство

$$\mathsf{M}\left(\exp\{\varphi(t_k)[w(t_{k+1})-w(t_k)]\}\,|\,\mathfrak{F}_{t_k}\right)=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\varphi^2(t_k)(t_{k+1}-t_k)\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2}N(t_{k+1}-t_k)\right\}.$$

В общем случае (5) получается предельным переходом. ■

Из леммы 2, ограниченности $a'_x$, $\sigma'_x$ и (4) вытекает, что для всех $m>0$

$$\mathsf{M}(\zeta_x(s))^m$$

равномерно ограничено. Из формулы (4) легко находим, что существует $\frac{\partial}{\partial x}\zeta_x(s)$ в среднем квадратическом и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi_{t,x}(s)=\frac{\partial}{\partial x}\zeta_x(s)=\exp\left\{\int_t^s\left(a'_x(u,\ \xi_{t,x}(u))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}[\sigma'_x(u,\ \xi_{t,x}(u))]^2\right)du+\int_t^s\sigma'_x(u,\ \xi_{t,x}(u))\,dw(u)\right\}\times$$

$$\times\left[\int_t^s[a''_{xx}(u,\ \xi_{t,x}(u))-\sigma'_x(u,\ \xi_{t,x}(u))\,\sigma''_{xx}(u,\ \xi_{t,x}(u))]\,\zeta_x(u)\,du+\right.$$

$$\left.+\int_t^s\sigma''_{xx}(u,\ \xi_{t,x}(u))\,\zeta_x(u)\,dw(u)\right]. \qquad (6)$$

Из этой формулы вытекает и среднеквадратическая непрерывность $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi_{t,x}(s)$. ■

Для многомерных процессов имеет место

Теорема 2. *Пусть $\xi_{t,x}(s)$ является решением уравнения (14) § 2, а функции $a(t,x)$, $b_1(t,x)$, ..., $b_m(t,x)$ определены и непрерывны при $t\in[t_0,T]$, $x\in\mathscr{R}^m$ и обладают ограниченными непрерывными производными по всем переменным $x^1$, ..., $x^m$ до второго порядка включительно. Тогда функция $\xi_{t,x}(s)$ дифференцируема дважды по $x$ в среднем квадратическом, причем производные*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\xi_{t,x}(s),\quad \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\xi_{t,x}(s),$$

*как функции $x$, будут непрерывны в смысле среднего квадратического.*

Доказательство этой теоремы проводится в том же плане, что и доказательство теоремы 1, поэтому мы не будем приводить его.

Замечание 1. *Если выполняются условия теоремы 2 и $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные до второго порядка включительно, то функция $u(x)=\mathsf{M}f(\xi_{t,x}(s))$ дважды непрерывно дифференцируема по $x$.*

Проверим справедливость этого утверждения опять лишь в случае одномерных процессов. Покажем, что

$$u'_x(x)=\mathsf{M}f'_x(\xi_{t,x}(s))\,\zeta_x(s). \qquad (7)$$

Действительно,

$$\mathsf{M}\left[\frac{f(\xi_{t,\,x+\Delta x}(s))-f(\xi_{t,\,x}(s))}{\Delta x}-f'_x(\xi_{t,\,x}(s))\,\zeta_x(s)\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{M}\left[\frac{f(\xi_{t,\,x+\Delta x}(s))-f(\xi_{t,\,x}(s))}{\xi_{t,\,x+\Delta x}(s)-\xi_{t,\,x}(s)}\left[\zeta_{x,\,\Delta x}(s)-\zeta_x(s)\right]\right]^2+$$

$$+2\mathsf{M}\left[\frac{f(\xi_{t,\,x+\Delta x}(s))-f(\xi_{t,\,x}(s))}{\xi_{t,\,x+\Delta x}(s)-\xi_{t,\,x}(s)}-f'_x(\xi_{t,\,x}(s))\right]^2[\zeta_x(s)]^2\to 0$$

ввиду ограниченности $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, сходимости

$$\frac{f(\xi_{t,\,x+\Delta x}(s))-f(\xi_{t,\,x}(s))}{\xi_{t,\,x+\Delta x}(s)-\xi_{t,\,x}(s)}-f'_x(\xi_{t,\,x}(s))$$

к нулю по вероятности и соотношений

$$\lim_{\Delta x\to 0}\mathsf{M}\,|\zeta_{x,\,\Delta x}(s)-\zeta_x(s)|^2=0,\quad \mathsf{M}\,|\zeta_x(s)|^2<\infty.$$

Но

$$\left|\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-\mathsf{M}f'_x(\xi_{t,\,x}(s))\,\zeta_x(s)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\mathsf{M}\left[\frac{1}{\Delta x}\left(f(\xi_{t,\,x+\Delta x}(s))-f(\xi_{t,\,x}(s))\right)-f'_x(\xi_{t,\,x}(s))\,\zeta_x(s)\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Отсюда и вытекает (7). Аналогично устанавливается, что

$$u''_{xx}=\mathsf{M}f''_{xx}(\xi_{t,\,x}(s))\,\zeta_x^2(s)+\mathsf{M}f'_x(\xi_{t,\,x}(s))\frac{\partial}{\partial x}\zeta_x(s). \tag{8}$$

Непрерывность $u'_x$ и $u''_{xx}$ следует из непрерывности процессов $\zeta_x(s)$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}\zeta_x(s)$ в среднем квадратическом.

Замечание 2. *Процессы*

$$\xi_{t,\,x}(s),\quad \frac{\partial}{\partial x}\xi_{t,\,x}(s),\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi_{t,\,x}(s)$$

*являются стохастически непрерывными функциями $t$ при фиксированном $s$, $t_0\leqslant s\leqslant T$, равномерно относительно $x$ на каждом компакте.*

Пусть $t<t'<s$; тогда

$$\xi_{t,\,x}(s)-\xi_{t',\,x}(s)=\xi_{t,\,x}(t')-x+\int_{t'}^{s}\left(a(u,\,\xi_{t,\,x}(u))-\right.$$

$$\left.-a(u,\,\xi_{t',\,x}(u))\right)du+\int_{t'}^{s}\left[\sigma(u,\,\xi_{t,\,x}(u))-\sigma(u,\,\xi_{t',\,x}(u))\right]dw(u).$$

Следовательно, при некотором $H$ справедливо соотношение

$$\mathsf{M}\,[\xi_{t,x}(s)-\xi_{t',x}(s)]^2 \leqslant 3\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,x}(t')-x\,|^2 + H\int_{t'}^{s} \mathsf{M}\,[\xi_{t,x}(u)-\xi_{t',x}(u)]^2\,du,$$

из которого вытекает неравенство

$$\mathsf{M}\,[\xi_{t,x}(s)-\xi_{t',x}(s)]^2 \leqslant 3\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,x}(t')-x\,|^2 e^{H(s-t')}.$$

Но $\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,x}(t')-x\,|^2 = O(t'-t)$ равномерно на каждом компакте на основании леммы 2 § 2. Следовательно,

$$\mathsf{M}\,|\,\xi_{t,x}(s)-\xi_{t',x}(s)\,|^2 = O(t'-t).$$

Используя (4) и (6), можно получить аналогичные оценки и для

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi_{t,x}(s), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi_{t,x}(s).$$

Объединяя утверждения замечаний 1 и 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Если $\xi_{t,x}(s)$ — решение уравнения* (14) § 2, *коэффициенты которого $a(t,x)$, $b_1(t,x)$, ..., $b_m(t,x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 2, *а функция $f(x)$, определенная на $\mathcal{R}^m$, непрерывна, ограничена и имеет непрерывные и ограниченные производные до второго порядка включительно, то функция*

$$u(t,x) = \mathsf{M}f(\xi_{t,x}(s)),$$

*определенная при $t_0 \leqslant t \leqslant s$, $x \in \mathcal{R}^m$, непрерывна и имеет производные по $x$ до второго порядка включительно, непрерывные по совокупности переменных $t$, $x$.*

## § 4. Метод дифференциальных уравнений

В этом параграфе выводятся дифференциальные уравнения, позволяющие определить распределения некоторых функционалов от диффузионных процессов. Попутно дается новый вывод первого (обратного) уравнения Колмогорова для диффузионных процессов.

Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (13) § 2. Как установлено в § 2, условное распределение процесса $\xi(s)$ на $[t, T]$ при условии, что $\xi(t)=x$, совпадает с распределением $\xi_{t,x}(s)$. Будем обозначать $\mathsf{M}_{t,x}\eta$ условное математическое ожидание случайных величин $\eta$, являющихся функциями от траектории процесса $\xi(s)$ на $[t, T]$, при условии, что $\xi(t)=x$. Из сказанного выше вытекает, что

$$\mathsf{M}_{t,x}\eta = \mathsf{M}\hat{\eta},$$

где $\hat{\eta}$ — величина, полученная из $\eta$ подстановкой вместо траектории $\xi(s)$ траектории $\xi_{t,x}(s)$. Для определения вероятностей перехода процесса достаточно определить

$$\mathsf{M}_{t,x}\varphi(\xi(s)) = \int \varphi(y)\,\mathsf{P}(t, x, s, dy)$$

для достаточно гладких функций $\varphi$.

Теорема 1. *Пусть для процесса $\xi(t)$ выполняются условия теоремы 2 § 3, функция $\varphi(x)$ ограничена, непрерывна и имеет ограниченные и непрерывные производные до второго порядка включительно. Тогда функция*

$$u(t, x) = \mathsf{M}_{t,x}\varphi(\xi(s)), \qquad t \in [t_0, s),$$

*имеет непрерывные производные по $x^i$ до второго порядка включительно, дифференцируема по $t$, удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \sum_{i=1}^{m} a^i(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i}u(t, x) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j=1}^{m} b_k^i(t, x)\,b_k^j(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}u(t, x) = 0 \qquad (1)$$

*и условию $\lim\limits_{t\uparrow s} u(t, x) = \varphi(x)$. Здесь $a^i$, $b_k^i$, $x^i$ — компоненты векторов $a$, $b_k$, $x$ соответственно.*

*Доказательство.* Дифференцируемость функции $u(t, x)$ по $x$, а также непрерывность и ограниченность частных производных вытекает из теоремы 3 § 3. Заметим, далее, что

$$u(t, x) = \mathsf{M}_{t,x}\varphi(\xi(s)) = \mathsf{M}_{t,x}\mathsf{M}_{t+\Delta t,\,\xi(t+\Delta t)}\varphi(\xi(s)) = \\ = \mathsf{M}_{t,x}u(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)).$$

Используя формулу Ито, можем записать

$$u(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - u(t+\Delta t, \xi(t)) = \\ = \int_t^{t+\Delta t}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x^j}(t+\Delta t, \xi(s))\,a^j(s, \xi(s)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j=1}^{m} b_k^i(s, \xi(s))\,b_k^j(s, \xi(s))\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}u(t+\Delta t, \xi(s))\right]ds + \\ + \int_t^{t+\Delta t}\sum_{k,i=1}^{m} b_k^i(s, \xi(s))\frac{\partial}{\partial x^i}u(t+\Delta t, \xi(s))\,dw_k(s).$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}_{t,x}u(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - \mathsf{M}_{t,x}u(t+\Delta t, \xi(t)) =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \mathsf{M}_{t,x}\Bigg[\sum_{j=1}^m a^j(s, \xi(s)) \frac{\partial}{\partial x^j} u(t+\Delta t, \xi(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,\,i\;j=1}^m b_k^i(s, \xi(s))\, b_k^j(s, \xi(s)) \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j} u(t+\Delta t, \xi(s))\Bigg] ds.$$

Так как

$$\mathsf{M}_{t,x}u(t+\Delta t, \xi(t)) = u(t+\Delta t, x),$$

то

$$u(t, x) - u(t+\Delta t, x) = \mathsf{M}_{t,x}\Bigg[\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} u(t+\Delta t, \xi(s'))\, a^i(s', \xi(s')) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,\,i,\,j=1}^m b_k^i(s', \xi(s'))\, b_k^j(s', \xi(s')) \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j} u(t+\Delta t, \xi(s'))\Bigg] \Delta t,$$

где $s'$ — некоторое число из $(t, t+\Delta t)$.

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}$ ограничены и $s' \to t$ при $\Delta t \to 0$, на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим

$$\frac{u(t, x) - u(t+\Delta t, x)}{\Delta t} \to \mathsf{M}_{t,x}\Bigg[\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} u(t, \xi(t))\, a^i(t, \xi(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,\,i,\,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j} u(t, \xi(t))\, b_k^i(t, \xi(t))\, b_k^j(t, \xi(t))\Bigg].$$

Уравнение (1) установлено. То, что $\mathsf{M}_{t,x}\varphi(\xi(s)) \to \varphi(x)$, вытекает из соотношения $\mathsf{M}_{t,x}\varphi(\xi(s)) = \mathsf{M}\varphi(\xi_{t,x}(s))$ и непрерывности $\xi_{t,x}(s)$. ■

Установим теперь уравнения, позволяющие определить распределение случайной величины

$$J = \int_{t_0}^T f(s, \xi(s))\, ds,$$

где $f(s, x)$ — достаточно гладкая функция, а $\xi(s)$ — процесс, являющийся решением уравнения (13) § 2. Введем функцию

$$v_\lambda(t, x) = \mathsf{M}_{t,x} \exp\left\{\lambda \int_t^T f(s, \xi(s))\, ds\right\}. \tag{2}$$

Для определения распределения величины $J$ достаточно определить функцию $v_\lambda(t, x)$ при $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathscr{R}^m$ и всех мнимых $\lambda$, так как тогда $v_\lambda(t_0, x)$ даст нам условную характеристическую функцию величины $J$ при условии $\xi(t_0) = x$. Проинтегрировав $v_\lambda(t_0, x)$ по начальному распределению, получим безусловную характеристическую функцию величины $J$.

Теорема 2. *Если $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 § 3, а $f(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial x^i} f(t, x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(t, x)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ непрерывны и ограничены, то при $t \in [t_0, T]$ функция $v_\lambda(t, x)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\lambda(t, x) + \sum_{i=1}^m a^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} v_\lambda(t, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i, j, k=1}^m b_k^i(t, x) b_k^j(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} v_\lambda(t, x) + \lambda f(t, x) v_\lambda(t, x) = 0 \quad (3)$$

*и условию* $\lim\limits_{t \uparrow T} v_\lambda(t, x) = 1$.

*Доказательство.* Последнее условие выполняется очевидным образом. Непрерывность и дифференцируемость $v_\lambda(t, x)$ и непрерывность и ограниченность производных $\frac{\partial}{\partial x^i} v_\lambda(t, x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} v_\lambda(t, x)$ вытекает из формулы (2) и дифференцируемости $\xi_{t, x}(s)$ и $f(s, x)$ по $x$ точно так же, как при доказательстве теоремы 3 § 3. Из соотношения

$$\lambda \int_{t'}^{t''} \exp\left\{\lambda \int_s^T f(u, \xi(u))\, du\right\} f(s, \xi(s))\, ds =$$

$$= \exp\left\{\lambda \int_{t'}^T f(u, \xi(u))\, du\right\} - \exp\left\{\lambda \int_{t''}^T f(u, \xi(u))\, du\right\}$$

получаем при $t' < t''$, беря $\mathsf{M}_{t', x}$, что

$$v_\lambda(t', x) - \mathsf{M}_{t', x} \exp\left\{\lambda \int_{t''}^T f(u, \xi(u))\, du\right\} =$$

$$= \lambda \int_{t'}^{t''} \mathsf{M}_{t', x} f(s, \xi(s))\, \mathsf{M}_{s, \xi(s)} \exp\left\{\lambda \int_s^T f(u, \xi(u))\, du\right\} ds.$$

Но

$$\mathsf{M}_{t',x}\exp\left\{\lambda\int_{t'}^{T}f(s,\xi(s))\,ds\right\}=$$

$$=\mathsf{M}_{t',x}\mathsf{M}_{t'',\xi(t'')}\exp\left\{\lambda\int_{t''}^{T}f(s,\xi(s))\,ds\right\}=\mathsf{M}_{t',x}v_\lambda(t'',\xi(t'')).$$

Поэтому

$$v_\lambda(t',x)-\mathsf{M}_{t',x}v_\lambda(t'',\xi(t''))=\lambda\int_{t'}^{t''}\mathsf{M}_{t',x}f(s,\xi(s))\,v_\lambda(s,\xi(s))\,ds.$$

Так как

$$f(s,\xi_{t',x}(s))\,v_\lambda(s,\xi(s))-f(t',x)\,v_\lambda(t',x)\to 0$$

по вероятности при $t'\to s$, то существует предел

$$\lim_{\substack{t''\to t\\ t'\to t}}\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}\mathsf{M}_{t',x}f(s,\xi(s))\,v_\lambda(s,\xi(s))\,ds=f(t,x)\,v_\lambda(t,x).$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{\substack{t''-t'\downarrow 0\\ t'\to t}}\frac{v_\lambda(t',x)-\mathsf{M}_{t',x}v_\lambda(t'',\xi(t''))}{t''-t'}=$$

$$=\lim_{\substack{t''-t'\downarrow 0\\ t'\to t}}\left[\frac{v_\lambda(t',x)-v_\lambda(t'',x)}{t''-t'}+\frac{v_\lambda(t'',x)-\mathsf{M}_{t',x}v_\lambda(t'',\xi(t''))}{t''-t'}\right].$$

Но, как установлено при доказательстве теоремы 1,

$$\lim_{\substack{t''-t'\downarrow 0\\ t'\to t}}\frac{\mathsf{M}_{t',x}v_\lambda(t'',\xi(t''))-v_\lambda(t'',x)}{t''-t'}=\sum_{i=1}^{m}a^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}v_\lambda(t,x)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{m}b_k^i(t,x)\,b_k^j(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}v_\lambda(t,x).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\substack{t''-t'\downarrow 0\\ t'\to t}}\frac{v_\lambda(t'',x)-v_\lambda(t',x)}{t''-t'}=\frac{\partial}{\partial t}v_\lambda(t,x)$$

и выполняется уравнение (3). ■

## § 5. Граничные задачи для диффузионных процессов

Пусть $\xi(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения вида (12) § 2, коэффициенты уравнения (12) удовлетворяют условиям теоремы 4 § 2, так что решение $\xi(t)$ уравнения (12) существует и единственно. Пусть $D$ — некоторая связная область в $[t_0, T] \times \mathcal{R}^m$. Обозначим через $D_t$ область в $\mathcal{R}^m$: $D_t = \{x: (t; x) \in D\}$,

$$\tau = \inf\{s: s \in [t_0, T],\ \xi(s) \notin D_t\},$$

если множество под знаком inf непусто, и $\tau = T$ в противном случае. $\tau$ является марковским моментом относительно $\sigma$-алгебр $\mathfrak{F}_t$, порожденных величинами $\xi(t_0)$ и $w_k(s) - w_k(t_0)$, $k = 1, \ldots, m$, $s \in [t_0, t]$. Действительно, обозначим $D^c$ дополнение к $D$ в $[t_0, T] \times \mathcal{R}^m$, $\rho((t;x), D^c)$ — расстояние точки $(t; x)$ до $D^c$. Тогда $\tau = \sup \tau_n$, где

$$\tau_n = \inf\{s: \rho((s; \xi(s)), D^c) < 1/n\},$$

если множество под знаком inf непусто, и $\tau = T$ в противном случае. То, что $\tau_n$ — марковский момент, вытекает из равенства

$$\{\tau_n > t\} = \bigcap_k \{\omega: \rho((s_k; \xi(s_k)), D^c) \geqslant 1/n\},$$

где $\{s_k\}$ — всюду плотное на $[t_0, t]$ множество. Момент $\tau$ называется *моментом первого выхода* из области $D$. Нас будут интересовать следующие распределения, связанные с $\tau$: 1) распределение $\xi(t)$ при условии, что $\tau > t$, 2) распределение $\tau$, 3) распределение $\xi(\tau)$.

Обозначим через $Lu(t, x)$ параболический дифференциальный оператор, определяемый левой частью соотношения (1) § 4.

Теорема 1. *Пусть функция $\Phi(t, x)$ определена и непрерывна на замыкании $D \cap [t_0, t_1] \times \mathcal{R}^m$, во внутренних точках этого множества она дважды непрерывно дифференцируема по $x$ и один раз по $t$, $L\Phi(t, x) = 0$ и $\Phi(t, x) = 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, $x \in D'_t$, где $D'_t$ — граница $D_t$ в $\mathcal{R}^m$, $\Phi(t_1, x) = f(x)$. Тогда*

$$\Phi(t, x) = \mathsf{M} f(\xi_{t,x}(t_1))\, \chi_{\{\tau_{t,x} \geqslant t_1\}},$$

*где $\tau_{t,x}$ — величина первого выхода из области $D$ для процесса $\xi_{t,x}$, являющегося решением уравнения* (14) § 2.

*Доказательство.* Используя формулу Ито (см. (11) в § 1) при $\tau_{t,x} > t_1$, можно доказать, что

$$\Phi(t_1, \xi(t_1)) - \Phi(t, x) = \int_t^{t_1} L\Phi(s, \xi_{t,x}(s))\, ds + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_t^{t_1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x}(s, \xi_{t,x}(s))\, b_{ki}(s, \xi_{t,x}(s))\, dw_k(s). \qquad (1)$$

Формулу (1) можно получить следующим образом. Пусть $D_n$ — последовательность односвязных компактов в $[t_0, T]\times\mathscr{R}^m$, для которых $D_n\subset D_{n+1}$, $\bigcup D_n = D$. Обозначим через $\Phi_n(t, x)$ функцию, совпадающую с $\Phi(t, x)$ на $D_n$, дважды непрерывно дифференцируемую по $x$ и один раз по $t$ и ограниченную со своими производными на $[t_0, T]\times\mathscr{R}^m$. Тогда к $\Phi_n(t, x)$ применима формула Ито и

$$\Phi_n(t_1, \xi_{t,x}(t_1)) - \Phi_n(t, x) = \int_t^{t_1} L\Phi_n(s, \xi_{t,x}(s))\,ds +$$
$$+\sum_{k=1}^m \int_t^{t_1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i}\Phi_n(s, \xi_{t,x}(s))\,b_{ki}(s, \xi_{t,x}(s))\,dw_k(s).$$

Очевидно, что при $t_1<\tau_{t,x}$ будет и $t_1<\tau_{t,x}^{(n)}$ при некотором достаточно большом $n$, где $\tau_{t,x}^{(n)}$ — момент первого выхода из $D_n$ процесса $\xi_{t,x}(s)$. Но при $s\leqslant\tau_{t,x}^{(n)}$

$$\Phi_n(s, \xi_{t,x}(s)) = \Phi(s, \xi_{t,x}(s)),$$
$$L\Phi_n(s, \xi_{t,x}(s)) = L\Phi(s, \xi_{t,x}(s)),$$
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi_n(s, \xi_{t,x}(s)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(s, \xi_{t,x}(s)).$$

Тем самым формула (1) доказана .

Пусть $\tau_n' = t_1\wedge\tau_{t,x}^{(n)}$. Тогда $\tau_n'$ — марковский момент и при $s<\tau_n'$ $L\Phi(s, \xi_{t,x}(s)) = 0$. Поэтому

$$\Phi(\tau_n', \xi_{t,x}(\tau_n')) =$$
$$= \Phi(t, x) + \sum_{k=1}^m \int_t^{\tau_n'} \sum_{i=1}^m \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(s, \xi_{t,x}(s))\,b_{ki}(s, \xi_{t,x}(s))\,dw_k(s).$$

Беря математическое ожидание и учитывая, что при $s\leqslant\tau_n'$ $\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(s, \xi_{t,x}(s))$ ограничены, так как $(s, \xi_{t,x}(s))$ лежит в компакте $D_n$, получим

$$\mathsf{M}\Phi(\tau_n', \xi(\tau_n')) = \Phi(t, x).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\mathsf{M}\Phi(\tau_{t,x}\wedge t_1, \xi(\tau_{t,x}\wedge t_1)) = \Phi(t, x).$$

Но при $t_1 > \tau_{t,x}$ $\Phi(\tau_{t,x}\wedge t_1,\ \xi(\tau_{t,x}\wedge t_1)) = \Phi(\tau_{t,x},\ \xi(\tau_{t,x})) = 0$, так как точка $\xi(\tau_{t,x})$ лежит на границе $D_{\tau_{t,x}}$. Поэтому

$$\mathsf{M}\Phi(\tau_{t,x}\wedge t_1, \xi(\tau_{t,x}\wedge t_1)) = \mathsf{M}\Phi(t_1, \xi_{t,x}(t_1))\,\chi_{\{\tau_{t,x}\geq t_1\}} = \\ = \mathsf{M}f(\xi_{t,x}(t_1))\,\chi_{\{\tau_{t,x}\geq t_1\}}. \ ■$$

Для того чтобы определить совместное распределение $\tau$ и $\xi(\tau)$, достаточно определить $\mathsf{M}\psi(\tau, \xi(\tau))$ для всех достаточно гладких функций $\psi(t, x)$, заданных на границе $\Gamma$ области $D$.

Теорема 2. *Пусть $v(t, x)$ — непрерывная функция в $D\cup\Gamma$, для $(t; x)\in D$ $Lv(t, x) = 0$ и при $t > t_0$, $(t; x)\in\Gamma$ $v(t, x) = \psi(t, x)$. Тогда*

$$v(t, x) = \mathsf{M}\psi(\tau_{t,x}, \xi_{t,x}(\tau_{t,x})).$$

*Доказательство.* Опять используя формулу Ито и те же рассуждения, что в теореме 1, можем получить равенство

$$v\left(\tau_{t,x}^{(n)}, \xi_{t,x}\left(\tau_{t,x}^{(n)}\right)\right) - v\left(t, \xi_{t,x}(t)\right) = \\ = \sum_{k=1}^{m}\int_{t}^{\tau_{t,x}^{(n)}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial x^i}(s, \xi_{t,x}(s))\,b_{ki}(s, \xi_{t,x}(s))\,dw_k(s),$$

так как при $s<\tau_{t,x}$ $(s, \xi_{t,x}(s))\in D$. Беря математическое ожидание на основании формулы (14) § 1 находим

$$v(t, x) = \mathsf{M}v\left(\tau_{t,x}^{(n)}, \xi_{t,x}\left(\tau_{t,x}^{(n)}\right)\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и используя равенство

$$v(\tau_{t,x}, \xi_{t,x}(\tau_{t,x})) = \psi(\tau_{t,x}, \xi_{t,x}(\tau_{t,x}))$$

(точка $(\tau_{t,x}, \xi_{t,x}(\tau_{t,x}))\in\Gamma$), получаем доказательство теоремы. ■

Рассмотрим теперь однородный процесс $\xi(t)$, являющийся решением уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(\xi(t))\,dw_k(t), \tag{2}$$

определенный при $t\in[0, \infty)$. Через $\xi_x(t)$ обозначим решение уравнения (2) с начальным условием $\xi(0) = x$. Пусть $G$ — некоторая область в $\mathscr{R}^m$. Пусть $D = [0, \infty)\times\mathscr{R}^m$. В этом случае вместо решений уравнения $Lv = 0$ (параболического типа) для нахождения величин, рассмотренных в теоремах 1 и 2, можно использовать решения более простого уравнения (эллиптического типа) с дифференциальным оператором

$$L_1 u(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,\,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x) b_{kj}(x). \qquad (3)$$

Теорема 3. *Пусть $f$ — ограниченная непрерывная функция в замыкании $G$, $u_\lambda(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям: она определена, непрерывна и ограничена в замыкании $G$, дважды непрерывно дифференцируема в $G$, удовлетворяет соотношению*

$$\lambda u_\lambda(x) - L_1 u_\lambda(x) = f(x), \qquad \lambda > 0, \qquad (4)$$

*и $u_\lambda(x) = 0$ на границе $\Gamma$ области $G$.*

*Тогда*

$$u_\lambda(x) = \mathsf{M} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\xi_x(t)) \chi_{\{\tau_x > t\}} \, dt, \qquad (5)$$

*где $\tau_x$ — момент первого выхода процесса $\xi_x(t)$ из области $G$ ($\tau_x = +\infty$, если $\xi_x(t) \in G$ для всех $t$).*

*Доказательство.* Пусть $t < \tau_x$. Тогда, применяя формулу Ито к функции $e^{-\lambda t} u_\lambda(\xi_x(t))$, получим

$$u_\lambda(\xi_x(t)) e^{-\lambda t} - u_\lambda(x) = \int_0^t [-\lambda e^{-\lambda s} u_\lambda(\xi_x(s)) \, ds + e^{-\lambda s} L_1 u_\lambda(\xi_x(s))] \, ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^i}(\xi_x(s)) b_{ki}(\xi_x(s)) \, dw_k(s). \qquad (6)$$

Пусть $\tau_x^{(n)}$ — момент первого выхода из компактного множества $F_n$, где $F_n$ — возрастающая последовательность компактов, для которой $\bigcup_n F_n = G$. Тогда $\tau_x^{(n)} \wedge T < \tau_x$ и при $s < \tau_x^{(n)} \wedge T$ величины $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x^i}(\xi_x(s))$ ограничены. Подставляя в (6) $t = \tau_x^{(n)} \wedge T$ и учитывая (4), найдем

$$\mathsf{M} u_\lambda(\xi_x(\tau_x^{(n)} \wedge T)) e^{-\lambda \tau_x^{(n)} \wedge T} - u_\lambda(x) = -\mathsf{M} \int_0^{\tau_x^{(n)} \wedge T} e^{-\lambda s} f(\xi_x(s)) \, ds.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\mathsf{M} u_\lambda(\xi_x(\tau_x \wedge T)) e^{-\lambda \tau_x \wedge T} - u_\lambda(x) = -\mathsf{M} \int_0^{\tau_x \wedge T} f(\xi_x(s)) e^{-\lambda s} \, ds. \qquad (7)$$

Заметим, что

$$\lim_{T\to\infty} u_\lambda(\xi(\tau_x \wedge T))e^{-\lambda\tau_x\wedge T}=0,$$

так как при $\tau_x$ конечном $u_\lambda(\xi_x(\tau_x))=0$, поскольку $\xi_x(\tau_x)\in\Gamma$, а при $\tau_x=+\infty$

$$|u_\lambda(\xi_x(\tau_x\wedge T))|e^{-\lambda\tau_x\wedge T}\leqslant\sup_y|u_\lambda(y)|e^{-\lambda T}\to 0.$$

Кроме того,

$$|u_\lambda(\xi_x(\tau_x\wedge T))|e^{-\lambda\tau_x\wedge T}\leqslant\sup_y|u_\lambda(y)|.$$

Значит,

$$\lim_{T\to\infty}\mathsf{M}u_\lambda(\xi_x(\tau_x\wedge T))e^{-\lambda\tau_x\wedge T}=0.$$

Переходя в (7) к пределу при $T\to\infty$, получим доказательство теоремы. ■

Для того чтобы найти совместное распределение величин $\tau$ и $\xi(\tau)$, достаточно знать $\mathsf{M}e^{-\lambda\tau}\psi(\xi(\tau))$ для $\lambda>0$ и всех достаточно гладких функций $\psi$, заданных на $\Gamma$.

Теорема 4. *Пусть функция $v_\lambda(x)$ определена, ограниченна и непрерывна на $G\cup\Gamma$, дважды непрерывно дифференцируема в $G$ и в $G$ удовлетворяет уравнению $\lambda v_\lambda(x)-L_1v_\lambda(x)=0$ $(\lambda\geqslant 0)$. Если $v_\lambda(x)=\psi(x)$ при $x\in\Gamma$, то*

$$v_\lambda(x)=\mathsf{M}e^{-\lambda\tau_x}\psi(\xi_x(\tau_x)).$$

*Доказательство.* Используя формулу Ито, для функции $e^{-\lambda t}v_\lambda(\xi_x(t))$ находим при $t<\tau_x$

$$v_\lambda(\xi_x(t))e^{-\lambda t}-v_\lambda(x)=\sum_{k=1}^m\int_0^t\sum_{i=1}^m\frac{\partial v_\lambda(\xi_x(t))}{\partial x^i}b_{ki}(\xi_x(s))\,dw_k(s).$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 3, получаем отсюда равенство

$$\mathsf{M}v_\lambda(\xi_x(\tau_x))e^{-\lambda\tau_x}=v_\lambda(x).$$

Остается заметить, что $v_\lambda(\xi_x(\tau_x))=\psi(\xi_x(\tau_x))$, так как $\xi_x(\tau_x)\in\Gamma$. ■

Замечание 1. Полагая $\lambda=0$, можем найти распределение $\xi(\tau)$: $\mathsf{M}\psi(\xi_x(\tau_x))=v(x)$, где $v(x)$ — непрерывная ограниченная функция в $G\cup\Gamma$, удовлетворяющая уравнению $L_1v(x)=0$ внутри $G$ и равенству $v(x)=\psi(x)$ при $x\in\Gamma$.

Замечание 2. Положим $\psi(x)=1$. Тогда $v_\lambda(x)=\mathsf{M}e^{-\lambda\tau_x}$. $v_\lambda(x)$ — функция, непрерывная и ограниченная в $G\cup\Gamma$, удовлетворяющая условию $v_\lambda(x)=1$ при $x\in\Gamma$ и уравнению

$$\lambda v_\lambda(x)-L_1v_\lambda(x)=0. \tag{8}$$

Продифференцируем это соотношение по $\lambda$ и положим $\lambda=0$. Пусть $-\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\lambda(x)\big|_{\lambda=0}=M_1(x)$. Тогда $M_1(x)=\mathbf{M}\tau_x$; из (8), учитывая равенство $v_0(x)=1$, получаем

$$L_1M_1(x)=-1,$$

$M_1(x)=0$ при $x\in\Gamma$.

*Пусть $M_1(x)$ — функция, непрерывная и ограниченная в $G\cup\Gamma$, дважды непрерывно дифференцируема в $G$, $M_1(x)=0$, $x\in\Gamma$, $L_1M_1(x)=-1$. Тогда*

$$\mathbf{M}\tau_x=M_1(x). \tag{9}$$

Чтобы убедиться в этом, применим формулу Ито к функции $M_1(\xi_x(t))$ при $t\in[0,\tau_x^{(n)}]$:

$$M_1\left(\xi_x\left(\tau_x^{(n)}\right)\right)-M_1(x)=$$

$$=\int_0^{\tau_x^{(n)}}L_1M_1(\xi_x(s))\,ds+\sum_{k=1}^m\int_0^{\tau_x^{(n)}}\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial x^i}M_1(\xi_x(s))\,b_{ki}(\xi_x(s))\,dw_k(s)=$$

$$=-\tau_x^{(n)}+\sum_{k=1}^m\int_0^{\tau_x^{(n)}}\frac{\partial}{\partial x^i}M_1(\xi_x(s))\,b_{ki}(\xi_x(s))\,dw_k(s).$$

Беря математическое ожидание и переходя к пределу при $n\to\infty$, устанавливаем (9).

Пусть функция $M_{n-1}(x)=\mathbf{M}(\tau_x)^{n-1}$ *непрерывна в* $G\cup\Gamma$. *Если существует такая непрерывная в $G\cup\Gamma$ и дважды дифференцируемая в $G$ функция $M_n(x)$, для которой $M_n(x)=0$ на $\Gamma$ и*

$$L_1M_n(x)=-nM_{n-1}(x),$$

то $M_n(x)=\mathbf{M}(\tau_x)^n$. Действительно, аналогично предыдущему получаем

$$M_n(x)=\mathbf{M}\int_0^{\tau_x}nM_{n-1}(\xi_x(s))\,ds.$$

Заметим теперь, что при $s<\tau_x$ $\tau_{\xi_x(s)}=\tau_x-s$ (по истечении времени $s$ процесс $\xi_x(\cdot)$ попадет в точку $\xi_x(s)$, и до выхода из области $G$ останется времени на $s$ меньше, чем с начального момента времени). Поэтому при $s<\tau_x$ в силу марковости процесса

$$\mathbf{M}\left[(\tau_x-s)^{n-1}\,\middle|\,\mathfrak{F}_s\right]=M_{n-1}(\xi_x(s)),$$

где $\mathfrak{F}_s$ — σ-алгебра, порожденная величинами $w_k(u)$, $u \leqslant s$, $k = 1, \ldots, m$. Таким образом,

$$M_n(x) = \mathsf{M} \int_0^{\tau_x} n\mathsf{M}\left[(\tau_x - s)^{n-1} \mid \mathfrak{F}_s\right] ds =$$

$$= n\mathsf{M} \int_0^{\infty} \chi_{\{\tau_x > s\}} \mathsf{M}\left[(\tau_x - s)^{n-1} \mid \mathfrak{F}_s\right] ds =$$

$$= n \int_0^{\infty} \mathsf{M}\chi_{\{\tau_x > s\}} \mathsf{M}\left[(\tau_x - s)^{n-1} \mid \mathfrak{F}_s\right] ds =$$

$$= n \int_0^{\infty} \mathsf{M}\chi_{\{\tau_x > s\}} (\tau_x - s)^{n-1}\, ds = \mathsf{M} \int_0^{\tau_x} n (\tau_x - s)^{n-1}\, ds = \mathsf{M}(\tau_x)^n.$$

Рассмотрим одномерный однородный процесс $\xi_x(t)$, являющийся решением стохастического уравнения

$$\xi_x(t) = x + \int_0^t a(\xi_x(s))\, ds + \int_0^t b(\xi_x(s))\, dw(s),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 1 § 2. Пусть $\tau_x$ — момент первого выхода процесса $\xi_x(t)$ из интервала $(\alpha, \beta)$. Введем функцию

$$\varphi(x) = \int_\alpha^x \exp\left\{-\int_\alpha^y \frac{2a(z)}{b^2(z)}\, dz\right\} dy.$$

Легко видеть, что функция $\varphi(x)$ является решением уравнения

$$a(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2} b^2(x)\varphi''(x) = L_1\varphi = 0$$

(такой вид в данном случае имеет оператор $L_1$). Всякое решение уравнения $Lu = 0$ имеет вид $u = c_1\varphi + c_2$, где $c_1$ и $c_2$ — некоторые постоянные. Используя замечание 1, можем записать

$$\mathsf{M}\varphi(\xi_x(\tau_x)) = \varphi(x).$$

Покажем, что $\tau_x$ — конечная величина. Для этого найдем решение уравнения

$$a(x) M_1'(x) + \frac{1}{2} b^2(x) M_1''(x) = -1, \quad M_1(\alpha) = M_1(\beta) = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $M_1(\alpha) = 0$, имеет вид

$$C\varphi(x) + 2\int_\alpha^x \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{b^2(z)\,\varphi'(z)}\,dz.$$

Значит, учитывая, что $\varphi(\beta) \neq 0$, находим

$$M_1(x) = -2\frac{\varphi(x)}{\varphi(\beta)}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\beta)-\varphi(z)}{b^2(z)\,\varphi'(z)}\,dz + 2\int_\alpha^x \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{b^2(z)\,\varphi'(z)}\,dz.$$

В силу замечания 2 $\mathsf{M}\tau_x = M_1(x) < \infty$. Из конечности $\tau_x$ вытекает, что $\xi(\tau_x)$ принимает с вероятностью 1 одно из значений $\alpha$ или $\beta$. Поэтому

$$\varphi(x) = \mathsf{P}\{\xi(\tau_x) = \beta\}\,\varphi(\beta),$$

$$\mathsf{P}\{\xi(\tau_x) = \beta\} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\beta)}, \quad \mathsf{P}\{\xi(\tau_x) = \alpha\} = \frac{\varphi(\beta)-\varphi(x)}{\varphi(\beta)}.$$

Пусть $a = 0$, $b = 1$. Тогда $\varphi(x) = x - \alpha$,

$$\mathsf{P}\{\xi(\tau_x) = \alpha\} = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}, \quad \mathsf{P}\{\xi(\tau_x) = \beta\} = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

В этом случае легко подсчитать все моменты величины $\tau_x$ Уравнение для $M_1(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2}M_1''(x) = -1, \quad M_1(\alpha) = M_1(\beta) = 0, \quad M_1(x) = (x-\alpha)(x-\beta).$$

Для $M_n(x)$ имеем уравнение

$$\frac{1}{2}M_n''(x) = -nM_{n-1}(x), \qquad M_n(\alpha) = M_n(\beta) = 0.$$

Значит,

$$M_n(x) = 2n\int_\alpha^x (x-z)\,M_{n-1}(z)\,dz + 2n\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (\beta - z)\,M_{n-1}(z)\,dz.$$

Это соотношение позволяет рекуррентно вычислять все моменты величины $\tau_x$. Распределение $\tau_x$ можем найти с помощью замечания 2:

$$\mathsf{M}e^{-\lambda\tau_x} = v_\lambda(x),$$

где $v_\lambda(x)$ — решение уравнения

$$\frac{1}{2}v_\lambda''(x) - \lambda v_\lambda(x) = 0$$

с граничными условиями $v_\lambda(\alpha) = v_\lambda(\beta) = 1$. Значит,

$$v_\lambda(x) = \frac{\operatorname{ch}\left[\sqrt{2\lambda}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]}{\operatorname{ch}\left[\sqrt{2\lambda}\,\frac{\beta-\alpha}{2}\right]}.$$

## § 6. Абсолютная непрерывность мер, отвечающих диффузионным процессам

Если $\xi(t)$ — некоторый случайный процесс, определенный на $[0, T]$, принимающий значения из $\mathscr{R}^m$, то по теореме Колмогорова (гл. II, § 2) ему соответствует мера в пространстве $(\mathscr{F}_{[0,T]}, \mathfrak{F})$, где $\mathscr{F}_{[0,T]}$ — пространство всех функций $x(t)$, определенных на $[0, T]$ со значениями в $\mathscr{R}^m$, $\mathfrak{F}$ — $\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами. Если заранее известно, что процесс $\xi(t)$ непрерывный, то меру, соответствующую процессу, можно построить на $(\mathscr{C}_{[0,T]}, \mathfrak{F})$, где $\mathscr{C}_{[0,T]}$ — пространство непрерывных функций. Далее мы будем рассматривать только непрерывные процессы и меры, отвечающие этим процессам, будут заданы на $\mathscr{C}_{[0,T]}$. Обозначим через $\mu_\xi$ меру, отвечающую процессу $\xi(\cdot)$. Нас будет интересовать, при каких условиях для двух диффузионных процессов $\xi_1(\cdot)$ и $\xi_2(\cdot)$ меры, соответствующие этим процессам, будут абсолютно непрерывны одна относительно другой.

Напомним, что если на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ заданы две меры $\mu_1$ и $\mu_2$, то $\mu_2$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_1$, если $\mu_2(B) = 0$ для всех $B \in \mathfrak{B}$, для которых $\mu_1(B) = 0$. Известная теорема Радона — Никодима утверждает, что $\mu_2$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_1$ тогда и только тогда, когда существует такая $\mathfrak{B}$-измеримая неотрицательная функция $\rho(x)$, что для всех $B \in \mathfrak{B}$

$$\mu_2(B) = \int_B \rho(x)\,\mu_1(dx).$$

Функция $\rho(x)$ определяется однозначно с точностью до множеств, мера $\mu_1$ которых равна 0; она называется *плотностью* (*производной*) *меры* $\mu_2$ *относительно* $\mu_1$ и обозначается

$$\rho(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

В этом параграфе не только исследуются условия абсолютной непрерывности для мер, отвечающих диффузионным процессам, но и вычисляются соответствующие плотности.

Заметим, что если процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ задан на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, то соответствующая ему мера есть просто образ меры $\mathsf{P}$ при отображении

$$\Omega \xrightarrow{\xi(\cdot,\,\omega)} \mathscr{C}_{[0,\,T]}$$

в пространстве $\mathscr{C}_{[0,\,T]}$. Для любого множества $B \in \mathfrak{F}$

$$\mu_\xi(B) = \mathsf{P}\{\omega:\ \xi(\,\cdot\,,\omega) \in B\}.$$

Это позволяет строить меры на $\mathscr{C}_{[0,\,T]}$, абсолютно непрерывные относительно $\mu_\xi$, отображая с помощью функции $\xi(\cdot,\omega)$ меру

$$\tilde{\mathsf{P}}(A) = \int_A \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega),$$

где $\rho(\omega)$ — $\mathfrak{S}$-измеримая неотрицательная функция, для которой

$$\int \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = 1$$

(последнее условие нужно для того, чтобы $\tilde{\mathsf{P}}(\Omega) = 1$). Обозначим через $\tilde{\xi}(t)$ случайный процесс, задаваемый функцией $\xi(t,\omega)$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \tilde{\mathsf{P}}\}$, а через $\mu_{\tilde{\xi}}$ — меру, соответствующую этому процессу на $\mathscr{C}_{[0,\,T]}$. Тогда, если $\mathfrak{S}^\xi$ — σ-алгебра в $\Omega$, порожденная величинами $\xi(t,\omega)$, $t \in [0, T]$, то

$$\frac{d\mu_{\tilde{\xi}}}{d\mu_\xi}(\xi(\,\cdot\,,\omega)) = \mathsf{M}\left(\rho(\omega)\,|\,\mathfrak{S}^\xi\right). \tag{1}$$

Действительно, для $A \in \mathfrak{F}$

$$\mu_{\tilde{\xi}}(A) = \tilde{\mathsf{P}}(\xi(\,\cdot\,,\omega) \in A) = \int_A \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{M}\rho(\omega)\,\chi_A(\xi(\,\cdot\,,\omega)) =$$

$$= \mathsf{M}\chi_A(\xi(\,\cdot\,,\omega))\,\mathsf{M}\left(\rho(\omega)\,|\,\mathfrak{S}^\xi\right) = \int_A \mathsf{M}\left(\rho(\omega)\,|\,\mathfrak{S}^\xi\right)\Big|_{\xi = x(\cdot)}\,\mu_\xi(dx)$$

(мы воспользовались тем, что $\mathsf{M}(\rho(\omega)\,|\,\mathfrak{S}^\xi)$ является функцией от $\xi(\cdot)$, а математическое ожидание от этой функции есть интеграл по мере $\mu_\xi$).

Сейчас мы докажем одну теорему, которая позволит описать класс функций $\rho(\omega)$, для которых мера в $\mathscr{C}_{[0,\,T]}$, полученная отображением из $\tilde{\mathsf{P}}$, будет соответствовать диффузионному процессу, если только и процесс $\xi(t,\omega)$ на $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ был диффузионным.

Теорема 1 (Гирсанов). *Пусть $w_1(t), \ldots, w_m(t)$ — независимые между собой винеровские процессы, $\mathfrak{F}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — семейство σ-алгебр, для которых $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$ при $t_1 < t_2$, $w_k(t)$ измеримо относительно $\mathfrak{F}_t$, а величины $\{w_k(s+t) - w_k(t)$, $s > 0$, $k = 1, \ldots, m\}$ в совокупности не зависят от $\mathfrak{F}_t$. Если*

*$f_1(t), \ldots, f_m(t)$ — $\mathfrak{F}_t$-измеримые функции на $[0, T]$,*

$$\int_0^T \sum_{k=1}^m f_k^2(t)\,dt < \infty,$$

$$\rho(\omega) = \mathsf{M}\exp\left\{\sum_{k=1}^m \int_0^T f_k(t)\,dw_k(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right\}$$

*и* $\mathsf{M}\rho(\omega) = 1$, *а*

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \int_A \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{M}\chi_A(\omega)\,\rho(\omega),$$

*то процессы*

$$\tilde{w}_k(t) = w_k(t) - \int_0^t f_k(s)\,dw_k(s)$$

*на вероятностном пространстве* $\{\Omega, \mathfrak{S}, \widetilde{\mathsf{P}}\}$ *являются независимыми винеровскими процессами.*

Для доказательства теоремы понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Если* $\sum_{k=1}^m f_k^2(t) \leqslant N$, *то*

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^m \int_t^T f_k(s)\,dw_k(s)\right\}\middle|\,\mathfrak{F}_t\right) \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}N(T-t)\right\}. \tag{2}$$

*Доказательство.* Пусть $f_k(s)$ — ступенчатые функции на $[t, T]$, $f_k(s) = f_k(s_j)$ при $s \in [s_j, s_{j+1}]$, $t = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = T$. Используя равенство

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^m f_k(s_j)\,[w_k(s_{j+1}) - w_k(s_j)]\right\}\middle|\,\mathfrak{F}_{s_j}\right) =$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m f_k^2(s_j)(s_{j+1} - s_j)\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}N(s_{j+1} - s_j)\right\},$$

убеждаемся, что

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^m f_k(s_j)\,[w_k(s_{j+1}) - w_k(s_j)]\right\}\middle|\,\mathfrak{F}_t\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}N(s_n - s_{n-1})\right\}\mathsf{M}\left(\exp\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=1}^m f_k(s_j)\,[w_k(s_{j+1}) - w_k(s_j)]\right\}\middle|\,\mathfrak{F}_t\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}N\sum_{j=0}^{n-1}(s_{j+1} - s_j)\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}N(T-t)\right\}.$$

Для неступенчатых функций (2) может быть получено предельным переходом.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_{t}^{T} f_k(s)\,dw_k(s)-\frac{1}{2}\int_{t}^{T}\sum_{k=1}^{m} f_k^2(s)\,ds\right\}\middle|\mathfrak{F}_t\right)=1.$$

*Доказательство.* Обозначим

$$\rho_{t_1,t_2}(\omega)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2} f_k(s)\,dw_k(s)-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m} f_k^2(s)\,ds\right\}.$$

При $t_1=t_2$ $\rho_{t_1,t_2}(\omega)=1$. Используя формулу Ито, находим

$$d\rho_{t_1,t}(\omega)=\rho_{t_1,t}(\omega)\sum_{k=1}^{m} f_k(t)\,dw_k(t).$$

Поэтому

$$\rho_{t_1,t_2}(\omega)=1+\int_{t_1}^{t_2}\rho_{t_1,s}(\omega)\sum_{k=1}^{m} f_k(s)\,dw_k(s).$$

Так как в силу леммы 1

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathsf{M}\rho_{t_1,s}^2(\omega)\sum_{k=1}^{m} f_k^2(s)\,ds\leqslant N\int_{t_1}^{t_2} e^{2N(t_2-t_1)}\,ds<\infty,$$

то

$$\mathsf{M}\left(\int_{t_1}^{t_2}\rho_{t_1,s}(\omega)\sum_{k=1}^{m} f_k(s)\,dw_k(s)\,|\,\mathfrak{F}_{t_1}\right)=0. \blacksquare$$

Следствие 1. *Каковы бы ни были* $\mathfrak{F}_t$*-измеримые функции* $f_k(t)$, *для которых* $\int_0^T\sum_{k=1}^{m} f_k^2(t)\,dt<\infty$,

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_{t}^{T} f_k(s)\,dw_k(s)-\frac{1}{2}\int_{t}^{T}\sum_{k=1}^{m} f_k^2(s)\,ds\right\}\middle|\mathfrak{F}_t\right)\leqslant 1.$$

Это неравенство является следствием теоремы Фату.

Следствие 2. *Если* $\mathsf{M}\rho_{0,T}(\omega)=1$, *то и при* $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$

$$\mathsf{M}\left(\rho_{t_1,t_2}(\omega)\,|\,\mathfrak{F}_{t_1}\right)=1.$$

Действительно,

$$1=\mathsf{M}\rho_{0,t_1}(\omega)\,\mathsf{M}\left(\rho_{t_1,t_2}(\omega)\,\mathsf{M}\left(\rho_{t_2,T}(\omega)\,|\,\mathfrak{F}_{t_2}\right)|\,\mathfrak{F}_{t_1}\right). \tag{3}$$

Если бы с положительной вероятностью выполнялось неравенство $\mathsf{M}(\rho_{t_1, t_2}(\omega) | \mathfrak{F}_{t_1}) < 1$, то, в силу следствия 1, и правая часть (3) была бы строго меньше 1.

Перейдем к доказательству теоремы. Будем обозначать математическое ожидание по мере $\tilde{\mathsf{P}}$ через $\tilde{\mathsf{M}}$. Для любой случайной величины $\xi(\omega)$ на $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$

$$\tilde{\mathsf{M}}\xi(\omega) = \mathsf{M}\xi(\omega)\rho(\omega).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $t_1 < t_2$ и любых вещественных $z_k$

$$\tilde{\mathsf{M}}\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t_2) - \tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\Big|\mathfrak{F}_{t_1}\right) = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_2 - t_1)\sum_{k=1}^{m} z_k^2\right\}. \tag{4}$$

Другими словами, для всякой ограниченной $\mathfrak{F}_{t_1}$-измеримой величины $\eta$

$$\tilde{\mathsf{M}}\eta\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t_2) - \tilde{w}_k(t_1))z_k\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_2 - t_1)\sum_{k=1}^{m} z_k^2\right\}\tilde{\mathsf{M}}\eta. \tag{4}$$

Из следствия 2 вытекает, что для $\mathfrak{F}_t$-измеримой величины $\xi$

$$\tilde{\mathsf{M}}\xi = \mathsf{M}\xi\rho_{0,t}(\omega)\rho_{t,T}(\omega) = \mathsf{M}\xi\rho_{0,t}(\omega)\,\mathsf{M}(\rho_{t,T}(\omega)|\mathfrak{F}_t) = \mathsf{M}\xi\rho_{0,t}(\omega),$$

поэтому (4) эквивалентно равенству

$$\mathsf{M}\eta'\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t_2) - \tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1, t_2}(\omega) = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_2 - t_1)\sum_{k=1}^{m} z_k^2\right\}\mathsf{M}\eta', \tag{5}$$

где $\eta' = \eta\rho_{0, t_1}(\omega)$ — $\mathfrak{F}_{t_1}$-измеримая величина, для которой $\mathsf{M}|\eta'| < \infty$.

По формуле Ито

$$d\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t) - \tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1, t}(\omega) = \\ = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t) - \tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1, t}(\omega)\times \\ \times\left[\sum_{k=1}^{m} f_k(t)\,dw_k(t) + i\sum_{k=1}^{m} z_k\,dw_k(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} z_k^2\,dt + i\sum_{k=1}^{m} f_k(t)z_k\,dt\right].$$

Поэтому

$$\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t_2)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)=$$

$$=1+\int_{t_1}^{t_2}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t}(\omega)\times$$

$$\times\left[i\sum_{k=1}^{m}z_k\,dw_k(t)+\sum_{k=1}^{m}f_k(t)\,dw_k(t)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}z_k^2\int_{t_1}^{t_2}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t}(\omega)\,dt.$$

Пусть $\sum_{k=1}^{m}f_k^2(t)\leqslant N$. Тогда в силу леммы 1

$$\mathsf{M}\left(\int_{t_1}^{t_2}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{m}(iz_k+f_k(t))\,dw_k(t)\mid\mathfrak{F}_{t_1}\right)=0.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\eta'\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t_2)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)=$$

$$=\mathsf{M}\eta'-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}z_k^2\int_{t_1}^{t_2}\mathsf{M}\eta'\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t}(\omega)\,dt.$$

Полагая

$$\mathsf{M}\eta'\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}(\tilde{w}_k(t_2)-\tilde{w}_k(t_1))z_k\right\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)=\lambda(t_2),$$

находим

$$\lambda(t_2)=\mathsf{M}\eta'-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}z_k^2\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt,$$

откуда

$$\lambda(t_2)=\mathsf{M}\eta'\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}z_k^2(t_2-t_1)\right\}.$$

Тем самым формула (5) при сделанном предположении относительно $f_k(t)$ доказана.

Пусть теперь $f_k^{(N)}(t)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{m} [f_k^{(N)}(t)]^2 \leqslant N$$

и

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{m} (f_k(t) - f_k^{(N)}(t))^2\, dt \to 0$$

при $N \to \infty$. Положим

$$\tilde{w}_k^{(N)}(t) = w_k(t) - \int_0^t f_k^{(N)}(s)\, ds,$$

$$\rho_{t_1, t_2}^{(N)}(\omega) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} f_k^{(N)}(t)\, dw_k(t) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} (f_k^{(N)}(t))^2\, dt\right\}.$$

По доказанному

$$\mathbf{M}\eta\rho_{0, t_2}^{(N)}(\omega) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} (\tilde{w}_k^{(N)}(t_2) - \tilde{w}_k^{(N)}(t_1)) z_k\right\} = \\ = \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_1}^{(N)}(\omega) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} z_k^2 (t_2 - t_1)\right\}. \tag{6}$$

Поскольку $\tilde{w}_k^{(N)}(t) \to \tilde{w}_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$, по вероятности, то

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_2}(\omega) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} (\tilde{w}_k^{(N)}(t_2) - \tilde{w}_k^{(N)}(t_1)) z_k\right\} = \\ = \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_2}(\omega) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} (\tilde{w}_k(t_2) - \tilde{w}_k(t_1)) z_k\right\}. \tag{7}$$

Далее,

$$\left| \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_2}^{(N)}(\omega) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} (\tilde{w}_k^{(N)}(t_2) - \tilde{w}_k^{(N)}(t_1)) z_k\right\} - \right. \\ \left. - \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_2}(\omega) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} (\tilde{w}_k^{(N)}(t_2) - \tilde{w}_k^{(N)}(t_1)) z_k\right\} \right| \leqslant \\ \leqslant c\mathbf{M} \left| \rho_{0, t_2}^{(N)}(\omega) - \rho_{0, t_2}(\omega) \right|, \tag{8}$$

$$\left| \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_1}^{(N)}(\omega) - \mathbf{M}\eta\rho_{0, t_1}(\omega) \right| \leqslant c\mathbf{M} \left| \rho_{0, t_1}^{(N)}(\omega) - \rho_{0, t_1}(\omega) \right|, \tag{9}$$

где $c$ таково, что $|\eta| \leqslant c$. Покажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M} \left| \rho_{0, t}^{(N)}(\omega) - \rho_{0, t}(\omega) \right| = 0. \tag{10}$$

Имеем

$$\mathsf{M}\,|\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|=\mathsf{M}\left(|\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|+\rho_{0,t}(\omega)-\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)\right),$$

так как $\mathsf{M}\rho_{0,t}(\omega)=\mathsf{M}\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)=1$. Но

$$|\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|+\rho_{0,t}(\omega)-\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)\leqslant 2\rho_{0,t}(\omega)$$

и $\rho_{0,t}^{(N)}(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)\to 0$ по вероятности. Поэтому (10) выполняется в силу теоремы Лебега. Переходя к пределу в равенстве (6) с учетом (7), оценок (8) и (9) и равенства (10), получим (5) (с учетом значения $\eta'$). ■

Применим доказанную теорему для доказательства абсолютной непрерывности мер, соответствующих двум диффузионным процессам, задаваемым стохастическими дифференциальными уравнениями

$$d\xi_i(t)=a_i(t,\xi_i(t))\,dt+\sum_{k=1}^{m}b_k(t,\xi_i(t))\,dw_k(t),\qquad \xi_i(0)=x. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнений* (11) *удовлетворяют условиям*: I. *Существует такое $K$, что*

1) $$|a_1(t,x)-a_1(t,y)|+|a_2(t,x)-a_2(t,y)|+\\+\sum_{k=1}^{m}|b_k(t,x)-b_k(t,y)|\leqslant K|x-y|;$$

2) $$|a_1(t,x)|^2+|a_2(t,x)|^2+\sum_{k=1}^{m}|b_k(t,x)|^2\leqslant K(1+|x|^2).$$

II. *Существуют такие непрерывные функции $\lambda_1(t,x),\ldots$ $\ldots,\lambda_m(t,x)$,*

$$a_2(t,x)-a_1(t,x)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(t,x)\,b_k(t,x).$$

*Тогда мера $\mu_{\xi_2}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1}$ и*

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot,\omega))=\\=\mathsf{M}\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_0^T\lambda_k(s,\xi_1(s))\,dw_k(s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T\lambda_k^2(s,\xi_1(s))\,ds\right\}\Bigg|\,\mathfrak{S}^{\xi_1}\right], \tag{12}$$

*где $\mathfrak{S}^{\xi_1}$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi_1(t,\omega)$, $t\in[0,T]$.*

*Доказательство.* Пусть $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathsf{P}\}$ — то вероятностное пространство, на котором заданы процессы $w_k(t)$, $k=1,\ldots,m$, и

$\xi_1(t)$ — решение уравнения (11) при $i=1$. Положим

$$\rho(\omega)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \lambda_k(s,\xi_1(s))\,dw_k(s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \lambda_k^2(s,\xi_1(s))\,ds\right\}.$$

Предположим сначала, что

$$\mathsf{M}\rho(\omega)=1 \tag{13}$$

(это будет, например, выполнено при ограниченных $\lambda_k(s,x)$ в силу леммы 2).

Обозначим $\widetilde{\mathsf{P}}$ меру на $\mathfrak{S}$, определяемую равенством

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A)=\int_A \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega).$$

В силу теоремы 1 процессы

$$\tilde{w}_k(t)=w_k(t)-\int_0^t \lambda_k(s,\xi_1(s))\,ds$$

являются независимыми винеровскими процессами. Рассмотрим процесс $\xi_1(t)$ на вероятностном пространстве $\{\Omega,\mathfrak{S},\widetilde{\mathsf{P}}\}$. Он удовлетворяет соотношению

$$\xi_1(t)-x_0=\int_0^t a_1(s,\xi_1(s))\,ds+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t b_k(s,\xi_1(s))\,dw_k(s)=$$
$$=\int_0^t a_1(s,\xi_1(s))\,ds+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t b_k(s,\xi_1(s))\,[d\tilde{w}_k(s)+\lambda_k(s,\xi_1(s))\,ds]=$$
$$=\int_0^t\left[a_1(s,\xi_1(s))+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(s,\xi_1(s))\,b_k(s,\xi_1(s))\right]ds+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t b_k(s,\xi_1(s))\,d\tilde{w}_k(s)=\int_0^t a_2(s,\xi_1(s))\,ds+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t b_k(s,\xi_1(s))\,d\tilde{w}_k(s).$$

Таким образом, $\xi_1(t)$ совпадает с решением уравнения

$$d\tilde{\xi}_2(t)=a_2(t,\tilde{\xi}_2(t))\,dt+\sum_{k=1}^{m} b_k(t,\tilde{\xi}_2(t))\,d\tilde{w}_k(t)$$

на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \tilde{\mathsf{P}}\}$. Поэтому мера $\mu_{\tilde{\xi}_2}$ совпадает с $\mu_{\xi_2}$. В силу формулы (1)

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot, \omega)) = \mathsf{M}(\rho(\omega) \mid \mathfrak{S}^{\xi_1}),$$

теорема в предположении (13) доказана.

Покажем, что соотношение (13) всегда выполнено. Пусть $\lambda_k^{(N)}(t, x)$ таковы, что $\lambda_k(t, x) = \lambda_k^{(N)}(t, x)$ при $|x| \leqslant N$, $\lambda_k^{(N)}(t, x)$ непрерывны, $\lambda_k^{(N)}(t, x) = 0$ при $|x| > 2N$ и функция

$$a_2^{(N)}(t, x) = a_1(t, x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(N)}(t, x)\, b_k(t, x)$$

удовлетворяет условиям

$$|a_2^{(N)}(t, x) - a_2^{(N)}(t, y)| \leqslant K_1 |x - y|,$$
$$|a_2^{(N)}(t, x)|^2 \leqslant K_1 (1 + |x|^2),$$

где $K_1$ — некоторая постоянная (не зависящая от $N$). Тогда, полагая

$$\rho_N(\omega) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \lambda_k^{(N)}(s, \xi_1(s))\, dw_k(s) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T [\lambda_k^{(N)}(s, \xi_1(s))]^2\, ds\right\},$$

будем иметь по доказанному

$$\frac{d\mu_{\xi_2^{(N)}}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot, \omega) = \mathsf{M}(\rho_N(\omega) \mid \mathfrak{S}^{\xi_1}),$$

где $\xi_2^{(N)}(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$\xi_2^{(N)}(t) = x_0 + \int_0^t a_2^{(N)}(s, \xi_2^{(N)}(s))\, ds + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t b_k(s, \xi_2^{(N)}(s))\, dw_k(s). \quad (14)$$

Заметим теперь, что $\rho_N(\omega) = \rho(\omega)$ при $\sup\limits_t |\xi_1(t, \omega)| \leqslant N$. Поэтому

$$\mathsf{M}\rho(\omega)\chi\{\sup_t |\xi_1(t, \omega)| \leqslant N\} = \mathsf{M}\rho_N(\omega)\chi\{\sup_t |\xi_1(t, \omega)| \leqslant N\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\sup_t \left|\xi_2^{(N)}(t)\right| \leqslant N\right\}. \quad (15)$$

Оценим $\mathsf{M}\,|\xi_2^{(N)}(t)|^2$. Поскольку

$$\mathsf{M}\,|\xi_2^{(N)}(t)|^2 \leqslant (m+2)\left[|x_0|^2 + \mathsf{M}\left|\int_0^t a_2^{(N)}(s,\ \xi_2^{(N)}(s))\,ds\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \mathsf{M}\sum_{k=1}^{m}\left|\int_0^t b_k(s,\ \xi_2^{(N)}(s))\,dw_k(s)\right|^2\right] =$$

$$= (m+2)\left[|x_0|^2 + \mathsf{M}\int_0^t\left[|a_2^{(N)}(s,\ \xi_2^{(N)}(s))|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{m}|b_k(s,\ \xi_2^{(N)}(s))|^2\right]ds\right] \leqslant$$

$$\leqslant (m+2)\left[|x_0|^2 + (TK_1 + mK)\int_0^t (1 + \mathsf{M}\,|\xi_2^{(N)}(s)|^2)\,ds\right],$$

то, используя лемму 1 § 2, убеждаемся, что существует $K_2$ (не зависящее от $N$), для которого

$$\mathsf{M}\,|\xi_2^{(N)}(t)|^2 \leqslant K_2. \tag{16}$$

Имеем

$$\mathsf{P}\,\{\sup_t |\xi_2^{(N)}(t)| > N\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\int_0^T |a_2^{(N)}(s,\ \xi_2^{(N)}(s))|\,ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t b_k(s,\ \xi_2^{(N)}(s))\,dw_k(s)\right| > N - |x_0|\right\}.$$

Используя неравенство Чебышева, оценку

$$\int_0^T |a_2^{(N)}(s,\ \xi_2^{(N)}(s))|\,ds \leqslant \int_0^T \frac{1}{2}(1 + |a_2^{(N)}(s,\ \xi_2^{(N)}(s))|^2)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T}{2} + \frac{1}{2}K_1\int_0^T (1 + |\xi_2^{(N)}(s)|^2)\,ds,$$

а также свойство V § 1 для стохастических интегралов, по которому

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t b_k\left(s,\ \xi_2^{(N)}(s)\right)dw_k(s)\right|>c\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{c^2}\int_0^T \mathsf{M}\left|b_k\left(s,\ \xi_2^{(N)}(s)\right)\right|^2 ds\leqslant\frac{K}{c^2}\int_0^T \mathsf{M}\left(1+\left|\xi_2^{(N)}(s)\right|^2\right)ds,$$

и, наконец, (16), убеждаемся, что

$$\mathsf{P}\left\{\sup_t\left|\xi_2^{(N)}(t)\right|>N\right\}=O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

и, значит, правая часть (15) стремится к 1 при $N\to\infty$. Поэтому

$$\mathsf{M}\rho(\omega)=\lim_{N\to\infty}\mathsf{M}\rho(\omega)\chi\{\sup_t|\xi_1(t,\ \omega)|\leqslant N\}=1.$$

Тем самым доказана справедливость (13) и теорема. ■

Замечание. Пусть матрица $B(s,x)=(b_{kj}(s,x))$, $j,k=1,\ldots,m$ ($b_{kj}$ — координаты вектора $b_k$), невырождена. Тогда в условиях теоремы 2

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot,\ \omega))=\rho(\omega).$$

Чтобы убедиться в этом, покажем, что $\rho(\omega)$ является $\mathfrak{S}^{\xi_1}$-измеримой величиной. Для этого достаточно показать $\mathfrak{S}^{\xi_1}$-измеримость процессов $w_k(t)$, $k=1,\ldots,m$. Обозначим $c_{kj}(s,\ x)$ элементы обратной матрицы к матрице $B(s,\ x)$:

$$\sum_{j=1}^m b_{kj}(s,\ x)c_{jl}(s,\ x)=\delta_{kl}.$$

Пусть, далее, $0=s_0<s_1<\ldots<s_n=t$, $\Delta s_l=s_{l+1}-s_l$; тогда

$$w_k(t)=\lim_{\max\Delta s_l\to 0}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=1}^m c_{jk}(s_l,\ \xi_1(s_l))\times$$
$$\times\left[\xi_1^j(s_{l+1})-\xi_1^j(s_l)-\int_{s_l}^{s_{l+1}} a_1^j(s,\ \xi_1(s))\,ds\right]\quad(17)$$

в смысле сходимости по вероятности; здесь $\xi_1^j$ и $a_1^j$ — координаты векторов $\xi_1$ и $a_1$. Действительно, выражение под знаком предела справа в (17) имеет вид

$$\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} c_{jk}(s_l, \xi(s_l))\sum_{i=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}} b_{ij}(s, \xi_1(s))\,dw_i(s) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}} c_{jk}(s_l, \xi_1(s_l))\,b_{ij}(s, \xi_1(s))\,dw_i(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \psi_i^{(n)}(s)\,dw_i(s),$$

где

$$\psi_i^{(n)}(s) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(s, \xi_1(s))\,c_{jk}(s_l, \xi_1(s_l)) \quad \text{при} \quad s_l \leqslant s < s_{l+1}.$$

Заметим, что $\psi_i^{(n)}(s) - \delta_{ik} \to 0$ равномерно при $\max \Delta s_l \to 0$ в силу непрерывности функций $b_{ij}(s, \xi_1(s))$ и $c_{jk}(s, \xi_1(s))$. Тем самым, (17) вытекает из свойства IV § 1 для стохастических интегралов. Очевидно, что правая часть (17) $\mathfrak{S}^{\xi_1}$-измерима.

# ГЛАВА IX

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

На протяжении этой книги уже неоднократно встречались процессы, которые получались предельным переходом из более простых случайных процессов.

При изучении случайных процессов значительное внимание уделяется методам нахождения распределения различных функционалов от случайного процесса, например:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\xi(s))\,ds, \qquad \sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \xi(t), \ \inf_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \xi(t).$$

Естественно поставить вопрос: если процесс $\xi(t)$ получается определенным предельным переходом из последовательности процессов $\xi_n(t)$, то нельзя ли получить и распределения функционалов от процесса $\xi(t)$, зная распределения функционалов от процессов $\xi_n(t)$?

В дальнейшем мы будем предполагать, что последовательность процессов $\xi_n(t)$ по крайней мере слабо сходится к некоторому процессу $\xi(t)$, т. е. конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi(t)$. Эти требования являются слишком слабыми, чтобы из них можно было вывести сходимость распределений для достаточно широкого класса функционалов (например, для функционалов, отмеченных выше). Поэтому естественно искать дополнительные условия, при которых распределения функционалов из некоторого класса $F$ от процессов $\xi_n(t)$ будут сходиться к распределениям соответствующих функционалов от процесса $\xi(t)$. Класс функционалов $F$ должен быть таким, чтобы $f(\xi_n(t))$ и $f(\xi(t))$ при $f \in F$ были случайными величинами. Следовательно, выбор класса $F$ должен зависеть от свойств процессов $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$.

Мы будем рассматривать случаи, когда процессы непрерывны с вероятностью 1 или с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода.

В каждом из этих случаев рассматривается свой класс функционалов.

Предельные теоремы для случайных процессов важны не только для определения распределений функционалов от предельного процесса с помощью предельного перехода от более простых процессов. Не менее естественно использовать непрерывные процессы для описания предельного поведения дискретных процессов: процессы с независимыми приращениями — для описания последовательности сумм независимых случайных величин, непрерывные процессы Маркова — для описания цепей Маркова с дискретным временем. В этом случае мы будет рассматривать предельный переход от процессов, у которых изменения происходят лишь в некоторые фиксированные моменты времени, к процессам, непрерывно меняющимся во времени, при условии, что расстояния между моментами, в которые происходят изменения допредельных процессов, стремятся к нулю. Для таких процессов будут также рассмотрены условия слабой сходимости.

## § 1. Слабая сходимость распределений в метрическом пространстве

Пусть реализации процессов $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$ $(t \in [a, b])$ принадлежат с вероятностью 1 некоторому функциональному метрическому пространству $X$ с метрикой $\rho_X(x, y)$, $x, y \in X$. Например, если $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$ с вероятностью 1 непрерывны, то они принадлежат пространству $\mathscr{C}$ непрерывных функций с метрикой

$$\rho_{\mathscr{C}}(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|.$$

В качестве класса функционалов $F$, для которых ищутся условия сходимости распределения $f(\xi_n(t))$ к распределению $f(\xi(t))$, мы принимаем совокупность непрерывных в метрике $\rho_X$ функций на $X$. Для того чтобы $f(\xi(t))$ была случайной величиной, достаточно потребовать сепарабельности пространства $X$ и измеримости множества $\{\omega: \xi(t) \in S\}$ относительно исходного вероятностного пространства для всякой открытой сферы $S$ пространства $X$ (так как в этом случае будет измеримым и множество $\{\omega: \xi(t) \in A\}$ для всякого борелевского $A$ из $X$).

В дальнейшем мы будем считать $X$ сепарабельным пространством, а процессы $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$ удовлетворяющими сформулированному выше требованию. Случайному процессу $\xi(t)$ $(\xi_n(t))$ будет соответствовать мера $\mu$ $(\mu_n)$, определенная на $\sigma$-алгебре $\mathfrak{B}$ всех борелевских подмножеств следующим соотношением:

$$\mu(A) = \mathsf{P}\{\xi(\cdot) \in A\} \qquad (\mu_n(A) = \mathsf{P}\{\xi_n(\cdot) \in A\}).$$

Для всякого ограниченного $\mathfrak{B}$-измеримого функционала $f$ выполняется соотношение

$$\mathsf{M} f(\xi(t)) = \int f(x)\,\mu(dx).$$

Заметим, что для сходимости распределений $f(\xi_n(t))$ к распределению $f(\xi(t))$ для всех непрерывных функционалов необходимо и достаточно, чтобы для всех непрерывных ограниченных функционалов $f$

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\,\mu_n(dx) = \int f(x)\,\mu(dx). \tag{1}$$

Действительно, из сходимости распределения $f(\xi_n(t))$ к распределению $f(\xi(t))$ и ограниченности $f$ вытекает сходимость $\mathsf{M}f(\xi_n(t))$ к $\mathsf{M}f(\xi(t))$, а значит, и соотношение (1). С другой стороны, из (1) вытекает, что для всякого непрерывного функционала $f$ характеристическая функция величины $f(\xi_n(t))$ сходится к характеристической функции величины $f(\xi(t))$:

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}e^{i\lambda f(\xi_n(t))} = \lim_{n\to\infty}\int e^{i\lambda f(x)}\mu_n(dx) = \int e^{i\lambda f(x)}\mu(dx) = \mathsf{M}e^{i\lambda f(\xi(t))}.$$

Определение. *Если для всех непрерывных ограниченных функций $f(x)$ выполнено (1), то говорят, что последовательность $\mu_n$ слабо сходится к мере $\mu$, и пишут $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

Определение. *Последовательность мер $\mu_n$ называется слабо компактной, если из всякой ее подпоследовательности можно выбрать слабо сходящуюся последовательность мер.*

Теорема 1. *Пусть $X$ — полное сепарабельное пространство, $\mathfrak{B}$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств. Для того чтобы последовательность мер $\mu_n$ на $\mathfrak{B}$ была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы*

а) $\sup\limits_n \mu_n(X) < \infty$;

б) *для всякого $\varepsilon > 0$ существовал компакт $K$ такой, что* $\sup\limits_n \mu_n(X\setminus K) < \varepsilon$.

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма 1. *Пусть $X$ — компакт и $\sup\limits_n \mu_n(X) = H < \infty$. Тогда последовательность мер $\mu_n$ слабо компактна.*

*Доказательство.* Пусть $\mathscr{C}_X$ — пространство непрерывных функций $f$ на $X$, $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$, $\mathscr{C}_X$ — полное нормированное сепарабельное линейное пространство. Обозначим через $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, всюду плотную в $\mathscr{C}_X$ последовательность. Диагональным методом можно выбрать такую последовательность мер

$\mu_{n_k}$, чтобы для всех $i$ существовал предел

$$\lim_{k\to\infty}\int f_i(x)\,\mu_{n_k}(dx)=l\,[f_i].$$

Так как

$$|\,l\,[f_i]-l\,[f_j]\,|\leqslant H\,\|\,f_i-f_j\,\|,$$

то $l\,[f_i]$ — равномерно непрерывный функционал на множестве $\{f_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, и, следовательно, он может быть продолжен по непрерывности на все пространство $\mathscr{C}_X$: $l\,[f]=\lim\limits_{f_{n_i}\to f} l\,[f_{n_i}]$.

При этом соотношение

$$l\,[f]=\lim_{k\to\infty}\int f(x)\,\mu_{n_k}(dx)$$

остается справедливым для всех $f$. Как предел последовательности линейных неотрицательных функционалов, $l\,[f]$ также является линейным неотрицательным функционалом на $\mathscr{C}_X$. Поэтому в силу теоремы о виде линейного функционала на пространстве $\mathscr{C}_X$ (см., например, Р. Эдварс [1], стр. 285) $l\,[f]$ представимо в виде

$$l\,[f]=\int\limits_X f(x)\,\mu\,(dx),$$

где $\mu$ — некоторая неотрицательная счетно аддитивная функция множества. Значит, $\mu$ — мера и $\mu_{n_k}$ слабо сходится к $\mu$. ■

Приступим к доказательству теоремы.

Выберем последовательность $\varepsilon_m\to 0$ и компакты $K^{(m)}\subset\subset K^{(m+1)}$, для которых $\sup\limits_n \mu_n\left(X\setminus K^{(m)}\right)\leqslant\varepsilon_m$. Положим

$$\mu_n^{(m)}(A)=\mu_n\,(A\cap K^{(m)}).$$

Выберем последовательность $n_k^{(1)}$ так, чтобы последовательность мер $\mu^{(1)}_{n_k^{(1)}}$ слабо сходилась к некоторой мере $\mu^{(1)}$. Определим последовательности $n_k^{(j)}$ так, чтобы $n_k^{(j)}$ была подпоследовательностью $n_k^{(j-1)}$ и последовательность $\mu^{(j)}_{n_k^{(j)}}$ слабо сходилась к некоторой мере $\mu^{(j)}$. Так как $\mu^{(j)}$ и $\mu^{(j-1)}$ совпадают на $K^{(j-1)}$, то $\operatorname{var}|\,\mu^{(j)}-\mu^{(j+p)}\,|\leqslant 2\varepsilon_j$; значит последовательность $\mu^{(j)}$ сходится по вариации к некоторой мере $\mu$. Покажем, что $\mu_{n_k^{(k)}}$ слабо сходится к $\mu$. Действительно, для всякой ограниченной непрерывной функции

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left|\int f(x)\,\mu_{n_k^{(k)}}(dx)-\int f(x)\,\mu(dx)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\left|\int\limits_{K^{(m)}} f(x)\,\mu_{n_k^{(k)}}(dx)-\int\limits_{K^{(m)}} f(x)\,\mu(dx)\right|+$$
$$+\|f\|\left(\varlimsup_{k\to\infty}\mu_{n_k^{(k)}}(X\setminus K^{(m)})+\mu(X\setminus K^{(m)})\right)\leqslant 2\|f\|\,\varepsilon_m.$$

Достаточность условий теоремы установлена.

Для доказательства необходимости нам понадобится

Лемма 2. *Каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать такой компакт $K$, что $\mu(X\setminus K)<\varepsilon$.*

Действительно, пусть $\{x_k, k=1, 2, \ldots\}$ — всюду плотная последовательность в $X$, $S_k^n$ — сфера радиуса $1/2^n$ с центром в $x_k$. Так как

$$\bigcup_k S_k^n = X,$$

то для всякого $n$ можно указать такой номер $k_n$, что

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k_n} S_k^n\right)\geqslant\mu(X)-\varepsilon/2^n.$$

Полагая $K=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{k_n} S_k^n$, получим компакт, для которого

$$\mu(X\setminus K)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(X\setminus\bigcup_{k=1}^{k_n} S_k^n\right)\leqslant\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\varepsilon. \blacksquare$$

Необходимость. а) Если $\mu_n$ слабо компактна, то $\int 1\cdot\mu_n(dx)$ компактное числовое множество, следовательно, последовательность $\mu_n(X)$ ограничена.

Предположим, далее, что последовательность $\mu_n$ слабо компактна, но условие б) не выполнено. Заметим, что условие б) эквивалентно следующему: б′) для всех $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ существует компакт $K$, для которого $\sup\limits_n\mu_n(X\setminus K_\delta)<\varepsilon$, если $K_\delta$ обозначает совокупность точек $x$, расстояние которых от $K$ не превышает $\delta$. То, что из б′) вытекает б), очевидно. Обратно, пусть $K_{1/r}^{(r)}$ — компакт, для которого

$$\sup_n\mu_n\left(X\setminus K_{1/r}^{(r)}\right)\leqslant\varepsilon/2^r.$$

Тогда $\bigcap_r K_{1/r}^{(r)}$ будет компактом, для которого выполняется условие б). То, что условие б′) не выполнено, означает следующее: существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для всякого компакта $K$ будет $\sup_n \mu_n (X \setminus K_\delta) > \varepsilon$.

Обозначим через $K^{(0)}$ компакт, для которого $\mu_1 (X \setminus K^{(0)}) < \varepsilon$ (существование такого компакта $K^{(0)}$ вытекает из леммы 2). Так как $\sup_n \mu_n (X \setminus K_\delta^{(0)}) > \varepsilon$, то найдется такой номер $n_1$, что $\mu_{n_1} (X \setminus K_\delta^{(0)}) > \varepsilon$, а значит, найдется и компакт $K^{(1)}$, для которого $\mu_{n_1} (K^{(1)}) > \varepsilon$ и $K^{(1)} \subset X \setminus K_\delta^{(0)}$ (опять на основании леммы 2). Так как $\sup_n \mu_n (X \setminus K_\delta^{(0)} \setminus K_\delta^{(1)}) > \varepsilon$, то найдется номер $n_2$ и компакт $K^{(2)} \subset X \setminus K_\delta^{(0)} \setminus K_\delta^{(1)}$ такие, что $\mu_{n_2} (K^{(2)}) > \varepsilon$. Продолжая этот процесс, выберем последовательность номеров $n_j$ и компактов $K^{(j)}$ так, чтобы $\mu_{n_j} (K^{(j)}) > \varepsilon$ и $K^{(j)} \subset X \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} K_\delta^{(i)} = X \setminus \left[\bigcup_{i=0}^{j-1} K^{(i)}\right]_\delta$. Обозначим через $\chi_i (x)$ непрерывную, неотрицательную, ограниченную единицей функцию, равную нулю на $X \setminus K_{\delta/2}^{(i)}$ и равную 1 на $K^{(i)}$. Так как расстояние между каждыми двумя компактами последовательности $K^{(i)}$ не менее $\delta$, то функции $\chi_i (x)$ при различных $i$ не могут быть одновременно отличными от нуля. Выберем из последовательности $\mu_{n_j}$ слабо сходящуюся последовательность $\mu_k'$. Пусть она сходится к $\mu$. Так как мера $\mu$ конечна, а $\sum_i \chi_i (x)$ непрерывна и ограничена, то

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i (x) \mu (dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \int \chi_i (x) \mu (dx) < \infty$$

и, значит, $\lim_{p \to \infty} \sum_{i=p}^{\infty} \int \chi_i (x) \mu (dx) = 0$. С другой стороны,

$$\int \sum_{i=p}^{\infty} \chi_i (x) \mu_k' (dx) \geqslant \mu_{n_{p'}} (K^{(p')}) \geqslant \varepsilon \qquad (\mu_k' = \mu_{n_{p'}}),$$

как только $n_{p'} > p$, и, значит, для всех $p$

$$\sum_{i=p}^{\infty} \int \chi_i (x) \mu (dx) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=p}^{\infty} \int \chi_i (x) \mu_k' (dx) \geqslant \varepsilon.$$

Полученное противоречие убеждает нас в необходимости условия б). ■

Замечание 1. *Полнота пространства $X$ использовалась только при доказательстве необходимости условий теоремы. Условия теоремы достаточны для слабой компактности последовательности мер в произвольном метрическом пространстве.*

Замечание 2. *Если $\mu_n$ слабо сходится к $\mu$, то для всякого множества $A \in \mathfrak{B}$, для которого $\mu(A') = 0$, где $A'$ — граница $A$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.*

Действительно, возьмем произвольное множество $A \in \mathfrak{B}$. Пусть $A^{(0)}$ — его открытое ядро (множество всех внутренних точек $A$), а $[A]$ — его замыкание. Если $\mu_n$ слабо сходится к $\mu$, то, выбирая непрерывную функцию $f(x) \geqslant 0$ так, чтобы $f(x) = 1$ при $x \in [A]$ и

$$\mu([A]) \geqslant \int f(x)\,\mu(dx) - \varepsilon,$$

получаем

$$\mu([A]) \geqslant \int f(x)\,\mu(dx) - \varepsilon = \lim \int f(x)\,\mu_n(dx) - \varepsilon \geqslant \overline{\lim}\,\mu_n(A) - \varepsilon.$$

Значит, $\overline{\lim}\,\mu_n(A) \leqslant \mu([A])$,

$$\overline{\lim}\,\mu_n(X \setminus A) \leqslant \mu([X \setminus A]), \quad -\underline{\lim}\,\mu_n(A) \leqslant -\mu(A^{(0)}).$$

Поэтому

$$\mu(A^{(0)}) \leqslant \underline{\lim}\,\mu_n(A) \leqslant \overline{\lim}\,\mu_n(A) \leqslant \mu([A]).$$

Если $\mu(A') = 0$, то $\mu(A^{(0)}) = \mu([A]) = \mu(A)$ и, значит,

$$\mu(A) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\,\mu_n(A) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\,\mu_n(A) \leqslant \mu(A).$$

Отсюда и вытекает утверждение замечания.

Замечание 3. *Пусть $f(x)$ почти всюду непрерывна по мере $\mu$ и $\mu_n$ слабо сходится к $\mu$. Тогда для почти всех $\alpha$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{x\colon\ f(x) < \alpha\}) = \mu(\{x\colon\ f(x) < \alpha\}).$$

Действительно, обозначим через $A_0$ множество точек разрыва $f$. Тогда $\mu(A_0) = 0$. Пусть $G_\alpha$ — множество тех $x$, для которых $f(x) < \alpha$, а $G'_\alpha$ — граница множества $G_\alpha$:

$$G'_\alpha = [\{x\colon\ f(x) < \alpha\}] \cap [\{x\colon\ f(x) \geqslant \alpha\}].$$

Пересечение множеств $G'_\alpha$ и $G'_{\alpha_1}$ при $\alpha < \alpha_1$ содержится в пересечении множеств $[\{x\colon\ f(x) < \alpha\}] \cap [\{x\colon\ f(x) \geqslant \alpha_1\}]$; поэтому из $x \in G'_\alpha \cap G'_{\alpha_1}$ вытекает, что

$$\lim_{y\to x}\,\inf f(y) \leqslant \alpha, \quad \lim_{y\to x}\sup f(y) \geqslant \alpha_1,$$

т. е.

$$G'_\alpha \cap G'_{\alpha_1} \subset A_0.$$

Следовательно, $\mu\left(G'_\alpha \cap G'_{\alpha_1}\right) = 0$, и, значит, для любой последовательности $\alpha_k$

$$\mu\left(\bigcup_k G'_{\alpha_k}\right) = \sum_k \mu\left(G'_{\alpha_k}\right).$$

Отсюда вытекает, что существует не более чем счетное множество чисел $\alpha$, для которых $\mu\left(G'_\alpha\right) \neq 0$.

Поэтому для всех $\alpha$, за исключением, быть может, счетного числа значений, $G_\alpha$ является множеством непрерывности меры $\mu$, так что $\mu_n(G_\alpha) \to \mu(G_\alpha)$.

Наше утверждение доказано.

Замечание 4. При доказательстве предельных теорем для случайных процессов теорема 1 используется следующим образом. Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность случайных процессов, конечномерные распределения которых сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$. Если $\mu_n$ — меры, соответствующие $\xi_n(t)$, образуют слабо компактное множество, то $\mu_n$ слабо сходятся к мере $\mu_0$, соответствующей процессу $\xi_0(t)$. Действительно, в противном случае можно было бы указать такую подпоследовательность $n_k$, чтобы $\mu_{n_k}$ слабо сходились к некоторой мере $\bar{\mu} \neq \mu_0$. Пусть $\bar{\xi}(t)$ — процесс, которому соответствует мера $\bar{\mu}$. Конечномерные распределения $\bar{\xi}(t)$, как предел конечномерных распределений $\xi_{n_k}(t)$, совпадают с конечномерными распределениями $\xi_0(t)$, что возможно лишь при $\bar{\mu} = \mu_0$, так как меры, соответствующие процессам, однозначно определяются их конечномерными распределениями.

## § 2. Предельные теоремы для непрерывных процессов

В этом параграфе мы будем предполагать, что процессы $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Их реализации с вероятностью 1 принадлежат полному метрическому сепарабельному пространству $\mathscr{C}_{[a,b]}$ всех непрерывных на $[a, b]$ функций $x(t)$ с метрикой $\rho(x, y) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$.

Заметим, что в пространстве $\mathscr{C}_{[a,b]}$ минимальная $\sigma$-алгебра множеств $\mathfrak{A}$, содержащая все цилиндрические множества, содержит все борелевские множества. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что всякая замкнутая сфера принадлежит $\mathfrak{A}$, так как

$$\left\{x\colon \sup_t |x(t) - \alpha(t)| \leqslant r\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x\colon |x(t_k) - \alpha(t_k)| \leqslant r\},$$

где $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная функция, а $t_k$ — произвольная всюду плотная на $[a, b]$ последовательность.

Пусть $H$ — некоторая постоянная, а $\omega_\delta$ — функция, определенная при $\delta > 0$ и удовлетворяющая соотношению $\omega_\delta \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Обозначим через $K(H, \omega_\delta)$ совокупность функций $x(t)$, для которых

$$x(a) \leqslant H, \quad \forall \delta > 0 \sup_{|t'-t''| \leqslant \delta} |x(t') - x(t'')| \leqslant \omega_\delta.$$

Как вытекает из теоремы Арцела (см. Колмогоров и Фомин [1], стр. 68), всякий компакт в $\mathscr{C}_{[a, b]}$ будет замкнутым подмножеством некоторого множества $K(H, \omega_\delta)$, которые также являются компактами.

Теорема 1. *Пусть конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$. Для того чтобы для всех функционалов $f$, непрерывных на $\mathscr{C}_{[a, b]}$, распределение $f(\xi_n(t))$ сходилось к распределению $f(\xi(t))$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ выполнялось соотношение*

$$\lim_{h \to 0} \sup_n \mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''| \leqslant h} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{1}$$

*Доказательство.* Необходимость. Если выполнено утверждение теоремы, то последовательность мер $\mu_n$, соответствующих процессам $\xi_n(t)$, слабо компактна, так что выполнено условие б) теоремы 1 § 1. Поэтому для всякого $\eta > 0$ найдется такой компакт $K(H, \omega_\delta)$, для которого

$$\sup_n \mu_n(\mathscr{C}_{[a, b]} \setminus K(H, \omega_\delta)) = \sup_n \mathsf{P}\{\xi_n(t) \notin K(H, \omega_\delta)\} \leqslant \eta.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''| \leqslant h} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \omega_h\right\} \leqslant \mathsf{P}\{\xi_n(t) \notin K(H, \omega_h)\} \leqslant \eta.$$

Если $h$ достаточно мало, то $\omega_h < \varepsilon$ и

$$\varlimsup_{h \to 0} \sup_n \mathsf{P}\{|\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \varepsilon\} \leqslant \eta.$$

Ввиду произвольности $\eta > 0$ и получаем (1).

Достаточность. В силу замечания 4 § 1 достаточно доказать слабую компактность последовательности мер $\mu_n$. Покажем, что для всякого $\eta > 0$ найдется такой компакт $K(H, \omega_\delta)$, что

$$\sup_n \mathsf{P}\{\xi_n(t) \notin K(H, \omega_\delta)\} \leqslant \eta.$$

Так как распределение $\xi_n(a)$ сходится к распределению $\xi(a)$, то найдется такое $H$, что для всех $n$

$$\mathsf{P}\{|\xi_n(a)| > H\} \leqslant \eta/2.$$

Возьмем последовательность $\varepsilon_r \downarrow 0$. Для каждого $\varepsilon_r$ найдем $h_r$ такое, чтобы $h_r < h_{r-1}$ и

$$\sup_n \mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|<h_r} |\xi_n(t')-\xi_n(t'')| > \varepsilon_r\right\} \leqslant \frac{\eta}{2^{r+1}}.$$

Пусть $\omega_\delta$ — неотрицательная невозрастающая функция, для которой $\omega_\delta = \varepsilon_r$ при $\delta \in [h_{r+1}, h_r)$. Очевидно, что $\omega_\delta \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Кроме того,

$$\mathsf{P}\{\xi_n(t) \notin K(H, \omega_\delta)\} \leqslant \mathsf{P}\{|\xi_n(a)| > H\} + \sum_{r=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h_r} |\xi_n(t')-\xi_n(t'')| > \varepsilon_r\right\} \leqslant \frac{\eta}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^{r+1}} = \eta. \blacksquare$$

Замечание 1. Вместо условия (1) можно требовать выполнения условия

$$\lim_{h\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h} |\xi_n(t')-\xi_n(t'')| > \varepsilon\right\} = 0, \tag{2}$$

которое часто удобнее проверять.

Действительно, из (2) вытекает, что для всякого $\eta > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и $N$, что при $n > N$, $h < \delta$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h} |\xi_n(t')-\xi_n(t'')| > \varepsilon\right\} \leqslant \eta. \tag{3}$$

Из непрерывности процессов $\xi_n(t)$ вытекает их равномерная непрерывность, так что при каждом $n$

$$\lim_{h\to 0} \mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h} |\xi_n(t')-\xi_n(t'')| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Поэтому можно подобрать такое $\delta$, чтобы при $h < \delta$ соотношение (3) выполнялось для всех $n$.

Следующая теорема может оказаться более удобной для применений.

Теорема 2. *Пусть конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$ и существуют такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $H > 0$, что для всех $t_1$, $t_2$ и всех $n$*

$$\mathsf{M}|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|^{\alpha} \leqslant H|t_1-t_2|^{1+\beta}. \tag{4}$$

*Тогда для всех непрерывных на $\mathscr{C}_{[a,b]}$ функционалов $f$ распределение $f(\xi_n(t))$ будет сходиться к распределению $f(\xi(t))$.*

*Доказательство.* Очевидно, ввиду непрерывности процессов $\xi_n(t)$ будет выполняться соотношение

$$\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} |\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)| = \sup_{\substack{|t_1-t_2|\leqslant h\\ t_1,\, t_2\in N}} |\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|,$$

где $N$ — множество всех точек вида $k/2^m$, принадлежащих $[a, b]$. Если $2h < \frac{1}{2^k}$, то

$$\sup_{\substack{t', t'' \in N \\ |t'-t''| \leqslant h}} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_j \sup_{\frac{j}{2^k} < \frac{l}{2^m} < \frac{j+1}{2^k}} \left|\xi_n\left(\frac{l}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{2^k}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{m=k+1}^{\infty} \sup_l \left|\xi_n\left(\frac{l+1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{l}{2^m}\right)\right|,$$

так как $\frac{l}{2^m} - \frac{j}{2^k} = \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{2^{m_r}}$, где $k < m_1 < m_2 < \ldots < m_s \leqslant m$, и, значит,

$$\xi_n\left(\frac{l}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{2^k}\right) = \sum_{i=1}^{s}\left[\xi_n\left(\frac{j}{2^k} + \sum_{r=1}^{i}\frac{1}{2^{m_r}}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{2^k} + \sum_{r=1}^{i-1}\frac{1}{2^{m_r}}\right)\right].$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{a \leqslant \frac{i}{2^m} < \frac{i+1}{2^m} \leqslant b} \left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > \frac{1}{m^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \mathsf{P}\left\{\left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > \frac{1}{m^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant m^{2\alpha} \sum_i \mathsf{M}\left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right|^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant m^{2\alpha}(b-a)\, 2^m H \frac{1}{2^{m(1+\beta)}} = L\frac{m^{2\alpha}}{2^{m\beta}}.$$

Следовательно, если $\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, $k = \left[\log_2 \frac{1}{h}\right] + 1$, то

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t_1-t_2| \leqslant h} |\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=k+1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_i \left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > \frac{1}{m^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{m \geqslant \left[\log_2 \frac{1}{h}\right]+2} \frac{m^{2\alpha}}{2^{m\beta}} \to 0$$

равномерно относительно $n$ при $h \to 0$. ■

## § 3. Сходимость сумм независимых случайных величин к процессу броуновского движения

Рассмотрим последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\mathsf{M}\xi_{ni}=0$;

2) $\mathsf{D}\xi_{ni}=b_{ni}, \quad \sum_{i=1}^{k_n} b_{ni}=1.$

Построим случайную функцию $\xi_n(t)$, $t\in[0, 1]$, следующим образом: положим $S_{nk}=\sum_{i=1}^{k}\xi_{ni}$, $t_{nk}=\sum_{i=1}^{k} b_{ni}$,

$$\xi_n(t)=S_{nk}+\frac{t-t_{nk}}{t_{n\,k+1}-t_{nk}}[S_{n\,k+1}-S_{nk}]$$

при $t\in[t_{nk}, t_{n\,k+1}]$, $S_{n0}=0$, $t_{n0}=0$. $\xi_n(t)$ является случайной ломаной, соединяющей точки плоскости $(t, \xi)$, имеющие координаты $(t_{nk}, S_{nk})$, $k=0, 1, \ldots, k_n$.

В этом параграфе изучаются условия, при которых конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ и распределения функционалов от этих процессов сходятся к конечномерным распределениям и распределениям соответствующих функционалов процесса броуновского движения $w(t)$.

Теорема 1. *Пусть случайные величины $\xi_{ni}$ удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *и условию Линдеберга: если $F_{ni}(x)$ — функция распределения величины $\xi_{ni}$, то для всякого* $\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\int_{|u|>\varepsilon} u^2\,dF_{ni}(u)=0. \tag{1}$$

*Тогда конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $w(t)$ и распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(w(t))$ для всякого непрерывного на $\mathscr{C}_{[0,1]}$ функционала $f$.*

*Доказательство.* Сходимость конечномерных распределений процессов $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям процесса $w(t)$ есть следствие многомерной центральной предельной теоремы.

Для доказательства сходимости распределений $f(\xi_n(t))$ к распределениям $f(w(t))$ для всех непрерывных на $\mathscr{C}_{[0,1]}$ функционалов $f$ проверим, что при произвольном $\varepsilon>0$ выполняется условие

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\varepsilon\right\}=0,$$

и воспользуемся замечанием 1 § 2. Так как

$$\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|\leqslant 2\sup_k \sup_{kh<t\leqslant(k+2)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|\leqslant$$
$$\leqslant 4\sup_k \sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|,$$

то

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\varepsilon\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{kh<1}\mathsf{P}\left\{\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|>\varepsilon/4\right\}.$$

Заметим, что

$$\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|\leqslant 2\sup_{j_{nk}<r\leqslant j_{n,\,k+1}}\left|\sum_{j=j_{nk}}^{r}\xi_{nj}\right|,$$

где $j_{nk}$ — максимальный из индексов $j$, для которых $t_{nj}$ не превосходит $kh$. Так как при $j_{nk}\leqslant r\leqslant j_{n,k+1}$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{j=r}^{j_{n,\,k+1}}\xi_{nj}\right|>\frac{\varepsilon}{8}\right\}\leqslant\frac{64}{\varepsilon^2}\sum\mathsf{D}\xi_{nj}\to\frac{64h}{\varepsilon^2},$$

то в силу леммы 3 § 5 гл. VI при достаточно малых $h$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|>\varepsilon/4\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{1-\frac{64h}{\varepsilon^2}}\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\xi_n\left(t_{nj_{n,\,k+1}}\right)-\xi_n\left(t_{nj_{nk}}\right)\right|>\varepsilon/8\right\}.$$

Из доказанной сходимости конечномерных распределений $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям $w(t)$ вытекает, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\xi_n\left(t_{nj_{n,\,k+1}}\right)-\xi_n\left(t_{nj_{nk}}\right)\right|>\varepsilon/8\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int\limits_{|u|>\varepsilon/8}e^{-u^2/2h}\,du.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\varepsilon\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{kh<1}\frac{1}{1-\frac{64h}{\varepsilon^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|u|>\frac{\varepsilon}{8\sqrt{h}}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-\frac{64h}{\varepsilon^2}}\frac{1}{h}\int\limits_{|u|>\frac{\varepsilon}{8\sqrt{h}}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Так как

$$\frac{1}{h}\int\limits_{|u|>\frac{c}{\sqrt{h}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \leqslant \frac{1}{c^2}\int\limits_{|u|>\frac{c}{\sqrt{h}}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \to 0,$$

то отсюда вытекает (2). ■

Следствие. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, для которых* $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\xi_i = 1$.

*Обозначим через* $\xi_n(t)$ *случайную ломаную с вершинами* $\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}} S_k\right)$, *где* $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. *Тогда для любого функционала* $f$, *определенного и непрерывного на* $\mathscr{C}_{[0,1]}$ *почти всюду по мере* $\mu_w$, *распределение* $f(\xi_n(t))$ *будет сходиться к распределению* $f(w(t))$.

## § 4. Сходимость последовательности цепей Маркова к диффузионному процессу

Рассмотрим последовательность серий случайных величин $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk_n}$, связанных в каждой серии в цепь Маркова. Обозначим через $p_{nk}(x, A)$ вероятности перехода

$$p_{nk}(\xi_{nk}, A) = \mathsf{P}\{\xi_{n,k+1} \in A \mid \xi_{nk}\} \quad (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}).$$

Пусть, далее, $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nk_n} = 1$ — некоторая последовательность разбиений отрезка $[0, 1]$. Построим случайную ломаную $\xi_n(t)$ с вершинами в точках $(t_{nk}, \xi_{nk})$. В этом параграфе будут изучаться условия сходимости конечномерных распределений $\xi_n(t)$ и распределений функционалов от $\xi_n(t)$ к соответствующим распределениям марковского процесса $\xi(t)$, являющегося решением стохастического уравнения типа, рассмотренного в гл. VIII.

Положим

$$\Delta t_{nk} = t_{n,k+1} - t_{nk},$$

$$a_n(t_{nk}, x) = \frac{1}{\Delta t_{nk}}\int (y - x)\, p_{nk}(x, dy),$$

$$b_n(t_{nk}, x) = \sigma_n^2(t_{nk}, x) = \frac{1}{\Delta t_{nk}}\int (y - x)^2 p_{nk}(x, dy) - \Delta t_{nk} a_n^2(t_{nk}, x).$$

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t)$ *является решением стохастического уравнения*

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s, \xi(s))\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s, \xi(s))\,dw(s),$$

*где* $\xi_0$ *не зависит от* $w(t)$, *а* $a(s, x)$ *и* $\sigma(s, x)$ — *непрерывные по совокупности переменных функции, удовлетворяющие условию Липшица по* $x$: $|a(s, x) - a(s, y)| + |\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| \leqslant K|x - y|$. *Для того чтобы конечномерные распределения процессов* $\xi_n(t)$ *сходились к конечномерным распределениям процесса* $\xi(t)$, *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_k \Delta t_{nk} = 0$;

2) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{M}\left(|a_n(t_{nk}, \xi_{nk}) - a(t_{nk}, \xi_{nk})|^2 + |\sigma_n(t_{nk}, \xi_{nk}) - \sigma_n(t_{nk}, \xi_{nk})|^2\right) \Delta t_{nk} = 0;$$

3) *при некотором* $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} \mathsf{M}\,|\xi_{n,k+1} - \xi_{nk}|^{2+\delta} = 0$$

*и*

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant 0} \sum_{i=k}^{k_n-1} \mathsf{M}\left(|\xi_{n,i+1} - \xi_{ni}|^{2+\delta} \,|\, \xi_{nk}\right) = 0;$$

4) *функции* $\dfrac{1}{\sigma_n(t_{nk}, x)}$ *и* $\dfrac{a_n(t_{nk}, x)}{\sigma_n(t_{nk}, x)}$ *равномерно ограничены относительно* $n$;

5) *предельное распределение величины* $\xi_{n0}$ *совпадает с распределением величины* $\xi_0$.

*Доказательство.* Положим

$$\omega_{nk} = [\xi_{n,k+1} - \xi_{nk} - a_n(t_{nk}, \xi_{nk}) \Delta t_{nk}] (\sigma_n(t_{nk}, \xi_{nk}))^{-1}. \tag{1}$$

Тогда

$$\xi_{n,k+1} = \xi_{nk} + a_n(t_{nk}, \xi_{nk}) \Delta t_{nk} + \sigma_n(t_{nk}, \xi_{nk}) \omega_{nk}.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}_{nk}$ минимальную $\sigma$-алгебру, относительно которой измеримы величины $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}$. Величина $\omega_{nk}$ будет измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{n,k+1}$, причем

$$\mathsf{M}(\omega_{nk} \,|\, \mathfrak{F}_{nk}) = 0, \qquad \mathsf{M}(\omega_{nk}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{nk}) = \Delta t_{nk}. \tag{2}$$

Рассмотрим величины $\eta_{nk}$, определяемые соотношениями

$$\eta_{n0} = \xi_{n0},$$

$$\eta_{n,k+1} = \eta_{nk} + a(t_{nk}, \eta_{nk}) \Delta t_{nk} + \sigma(t_{nk}, \eta_{nk}) \omega_{nk},$$

и оценим $\mathsf{M}(\eta_{nk}-\xi_{nk})^2$. Очевидно, что $\eta_{nk}$ также измеримы относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_{nk}$. Имеем

$$\eta_{n,k+1}-\xi_{n,k+1}=\eta_{nk}-\xi_{nk}+[a(t_{nk},\eta_{nk})-a(t_{nk},\xi_{nk})]\Delta t_{nk}+\\+[\sigma(t_{nk},\eta_{nk})-\sigma(t_{nk},\xi_{nk})]\omega_{nk}+\varepsilon_{nk},$$

$$\varepsilon_{nk}=[a(t_{nk},\xi_{nk})-a_n(t_{nk},\xi_{nk})]\Delta t_{nk}+[\sigma(t_{nk},\xi_{nk})-\sigma_n(t_{nk},\xi_{nk})]\omega_{nk}.$$

Поэтому, используя соотношения (2) и условия Липшица для $a$ и $\sigma$, а также неравенство $2ab\leqslant a^2+b^2$, получим

$$\mathsf{M}|\eta_{n,k+1}-\xi_{n,k+1}|^2\leqslant\\ \leqslant\mathsf{M}|\eta_{nk}-\xi_{nk}|^2+2\mathsf{M}(\eta_{nk}-\xi_{nk})(a(t_{nk},\eta_{nk})-a(t_{nk},\xi_{nk}))\Delta t_{nk}+\\+2\mathsf{M}(\eta_{nk}-\xi_{nk})(a(t_{nk},\xi_{nk})-a_n(t_{nk},\xi_{nk}))\Delta t_{nk}+\\+\mathsf{M}[(a(t_{nk},\eta_{nk})-a(t_{nk},\xi_{nk}))\Delta t_{nk}+(\sigma(t_{nk},\eta_{nk})-\\-\sigma(t_{nk},\xi_{nk}))\omega_{nk}+\varepsilon_{nk}]^2\leqslant\mathsf{M}|\eta_{nk}-\xi_{nk}|^2(1+2K\Delta t_{nk}+\Delta t_{nk})+\\+\mathsf{M}|a(t_{nk},\xi_{nk})-a_n(t_{nk},\xi_{nk})|^2\Delta t_{nk}+\\+2\mathsf{M}\left(a\left(t_{nk},\eta_{nk}\right)-a\left(t_{nk},\xi_{nk}\right)\right)^2\Delta t_{nk}^2+\\+\mathsf{M}\left(\sigma\left(t_{nk},\eta_{nk}\right)-\sigma\left(t_{nk},\xi_{nk}\right)\right)^2\mathsf{M}\left(\omega_{nk}^2\,|\,\mathfrak{F}_{nk}\right)+2\mathsf{M}\varepsilon_{nk}^2\leqslant\\ \leqslant\mathsf{M}|\eta_{nk}-\xi_{nk}|^2(1+L\Delta t_{nk})+\alpha_{nk},$$

где $L=2K+1+4K^2$,

$$\alpha_{nk}=\mathsf{M}\left[a\left(t_{nk},\xi_{nk}\right)-a_n\left(t_{nk},\xi_{nk}\right)\right]^2\left(\Delta t_{nk}+2\Delta t_{nk}^2\right)+\\+\mathsf{M}[\sigma(t_{nk},\xi_{nk})-\sigma_n(t_{nk},\xi_{nk})]^2\Delta t_{nk}.$$

Так как $\mathsf{M}|\eta_{n0}-\xi_{n0}|^2=0$, то $\mathsf{M}|\xi_{n1}-\eta_{n1}|^2\leqslant\alpha_{n0}$,

$$\mathsf{M}|\xi_{n2}-\eta_{n2}|^2\leqslant\alpha_{n0}(1+L\Delta t_{n0})+\alpha_{n1}\leqslant(1+L\Delta t_{n0})[\alpha_{n0}+\alpha_{n1}],$$

$$\mathsf{M}|\xi_{n3}-\eta_{n3}|^2\leqslant[\alpha_{n0}+\alpha_{n1}](1+L\Delta t_{n0})(1+L\Delta t_{n1})+\alpha_{n2}\leqslant\\ \leqslant[\alpha_{n0}+\alpha_{n1}+\alpha_{n2}](1+L\Delta t_{n0})(1+L\Delta t_{n1}),$$

$$\mathsf{M}|\xi_{nk}-\eta_{nk}|^2\leqslant\sum_{i=0}^{k-2}\alpha_{ni}\prod_{i=0}^{k-2}(1+L\Delta t_{ni})\leqslant e^L\sum_{i=0}^{k_n-1}\alpha_{ni}.$$

Из условия 2) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k_n-1}\alpha_{ni}=0$.

Следовательно, конечномерные распределения процесса $\xi_n(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, если только к конечномерным распределениям $\xi(t)$ будут сходиться конечномерные распределения процесса $\eta_n(t)$, где $\eta_n(t)$ — случайная ломаная с вершинами в точках $(t_{nk},\eta_{nk})$. Для дальнейшего доказательства понадобится

Лемма 1. *Пусть* $w_n(t)=\sum_{t_{nk}<t}\omega_{nk}$. *Тогда конечномерные распределения процесса* $w_n(t)$ *будут сходиться к конечномерным распределениям винеровского процесса* $w(t)$.

Для доказательства достаточно показать, что для всех $\lambda_{nk}$, для которых $\sup\limits_{n,k}|\lambda_{nk}|<\infty$, будет

$$\lim_{n\to\infty}\left[\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=0}^{k_n-1}\lambda_{nk}\omega_{nk}\right\}-\right.$$
$$\left.-\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=0}^{k_n-1}\lambda_{nk}\,[w(t_{n,k+1})-w(t_{nk})]\right\}\right]=0.$$

Заметим, что функция $\dfrac{e^{i\lambda x}-1-i\lambda x+\dfrac{\lambda^2x^2}{2}}{|\lambda|^2|x|^{2+\delta}}$ при $0<\delta<1$ ограничена на всей числовой оси. Поэтому

$$\left|e^{i\lambda x}-\left(1+i\lambda x-\frac{\lambda^2x^2}{2}\right)\right|\leqslant O(\lambda^2)\,|x|^{2+\delta}$$

и, значит,

$$\mathsf{M}\prod_{k=0}^{r}e^{i\lambda_{nk}\omega_{nk}}=\mathsf{M}\left(\prod_{k=0}^{r-1}e^{i\lambda_{nk}\omega_{nk}}\right)\mathsf{M}\left[e^{i\lambda_{nr}\omega_{nr}}\,|\,\mathfrak{F}_{nr}\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left(\prod_{k=0}^{r-1}e^{i\lambda_{nk}\omega_{nk}}\right)\mathsf{M}\left[1+\lambda_{nr}\omega_{nr}-\frac{\lambda_{nr}^2}{2}\,\omega_{nr}^2+O\left(|\omega_{nr}|^{2+\delta}\right)|\,\mathfrak{F}_{nr}\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left(\prod_{k=0}^{r-1}e^{i\lambda_{nk}\omega_{nk}}\right)\left(1-\frac{\lambda_{nr}^2}{2}\,\Delta t_{nr}\right)+O\left(\mathsf{M}\,|\,\omega_{nr}|^{2+\delta}\right)=$$
$$=\prod_{k=0}^{r}\left(1-\frac{\lambda_{nk}^2}{2}\,\Delta t_{nk}\right)+O\left(\sum_{k=0}^{r}\mathsf{M}\,|\,\omega_{nk}|^{2+\delta}\right).$$

Из формулы (1) для $\omega_{nk}$ и ограниченности $\dfrac{1}{\sigma_n}$ и $\dfrac{a_n}{\sigma_n}$ вытекает, что

$$\mathsf{M}\,|\,\omega_{nk}|^{2+\delta}\leqslant L\left(\mathsf{M}\,|\,\xi_{n,k+1}-\xi_{nk}|^{2+\delta}+|\,\Delta t_{nk}|^{2+\delta}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1}\mathsf{M}\,|\,\omega_{nk}|^{2+\delta}=0.$$

Далее,

$$\left|\prod_{k=0}^{k_n-1}\left(1-\frac{\lambda_{nk}^2}{2}\Delta t_{nk}\right)-\prod_{k=0}^{k_n-1}e^{-\frac{\lambda_{nk}^2}{2}\Delta t_{nk}}\right|\leqslant O\left(\sum \Delta t_{nk}^2\right)=$$
$$=O(\max_k \Delta t_{nk})\to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{M}e^{i\sum\limits_{k=0}^{k_n-1}\lambda_{nk}\omega_{nk}}-e^{-\sum\limits_{k=0}^{k_n-1}\frac{\lambda_{nk}^2}{2}\Delta t_{nk}}\right)=0.$$

Остается заметить, что

$$\mathsf{M}\exp\{i\lambda_{nk}[w(t_{n,k+1})-w(t_{nk})]\}=e^{-\frac{\lambda_{nk}^2}{2}\Delta t_{nk}}. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. *Из доказанной леммы вытекает, что для всякой непрерывной функции двух переменных $\alpha(t, x)$ равномерно по $x$ в каждом конечном интервале*

$$\mathsf{M}\left\{\exp\left(i\lambda\sum_{t'\leqslant t_{nk}\leqslant t''}\alpha(t_{nk}, x)\,\omega_{nk}\right)\Big|\,\mathfrak{F}_{l_n}\right\}\to$$
$$\to\mathsf{M}\left\{\exp i\lambda\int_{t'}^{t''}\alpha(t, x)\,dw(t)\right\},$$

*если только $l_n$ таково, что $t_{nl_n}\leqslant t'$.*

Действительно, точно так же, как при доказательстве леммы 1, убеждаемся, что

$$\mathsf{M}\left\{\exp\left(i\lambda\sum_{t'\leqslant t_{nk}\leqslant t''}\alpha(t_{nk}, x)\,\omega_{nk}\,|\,\mathfrak{F}_{l_n}\right)\right\}-$$
$$-\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{t'\leqslant t_{nk}\leqslant t''}\alpha^2(t_{nk}, x)\,\Delta t_{nk}\right\}\to 0$$

равномерно относительно $x$ в каждом конечном интервале ввиду ограниченности $\alpha(t, x)$ на конечном интервале изменения $x$.

Остается заметить, что

$$\sum_{t'\leqslant t_{nk}\leqslant t''}\alpha^2(t_{nk}, x)\,\Delta t_{nk}\to\int_{t'}^{t''}\alpha^2(t, x)\,dt$$

равномерно относительно $x$ в каждом конечном интервале, поскольку $\alpha(t, x)$ будет равномерно непрерывной по совокупности переменных в каждом конечном интервале изменения $x$.

Лемма 2. *Если последовательность измеримых функций $\varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$ ограничена одной постоянной и на каждом компакте равномерно сходится к непрерывной функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$, а последовательность функций распределения $F_n(x_1, \ldots, x_m)$ слабо сходится к функции $F_0(x_1, \ldots, x_m)$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)\,dF_n(x_1, \ldots, x_m) = \int \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)\,dF_0(x_1, \ldots, x_m).$$

*Доказательство.* Так как ввиду слабой сходимости функций $F_n(x_1, \ldots, x_m)$ к $F_0(x_1, \ldots, x_m)$

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)\,dF_n(x_1, \ldots, x_m) = \int \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)\,dF_0(x_1, \ldots, x_m),$$

то для доказательства достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int |\varphi_n(x_1, \ldots, x_m) - \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)|\,dF_n(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Но, каково бы ни было $K > 0$,

$$\int |\varphi_0 - \varphi_n|\,dF_n \leqslant \int\limits_{\sum_i |x_i| \leqslant K} |\varphi_0 - \varphi_n|\,dF_n + \int\limits_{\sum_i |x_i| > K} |\varphi_0 - \varphi_n|\,dF_n;$$

первый интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $|\varphi_0 - \varphi_n|$ стремится равномерно к нулю при $\sum |x_i| \leqslant K$; второй интеграл можно сделать сколь угодно малым для всех $n$ выбором достаточно большого $K$ ввиду ограниченности $|\varphi_0 - \varphi_n|$ и слабой сходимости последовательности распределений $F_n$. ■

Лемма 3. *Пусть $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, — $m$ последовательностей случайных величин и функции $\Phi_k^{(n)}(\lambda, x_1, \ldots, x_{k-1})$ таковы, что с вероятностью* 1

$$\Phi_1^{(n)}(\lambda) = \mathsf{M}e^{i\lambda\xi_1^{(n)}}, \quad \Phi_k^{(n)}\left(\lambda, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k-1}^{(n)}\right) = \mathsf{M}\left(e^{i\lambda\xi_k^{(n)}}\middle|\,\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k-1}^{(n)}\right), \qquad k = 2, \ldots, m.$$

*Если для всех $k$ функции $\Phi_k^{(0)}(\lambda, x_1, \ldots, x_{k-1})$ непрерывны и $\Phi_k^{(n)}(\lambda, x_1, \ldots, x_{k-1})$ при $n \to \infty$ сходится к $\Phi_k^{(0)}(\lambda, x_1, \ldots, x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, m$, равномерно на каждом компакте, то совместное распределение величин $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}$ слабо сходится к совместному распределению величин $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$.*

*Доказательство.* Беря $k=1$, убеждаемся, что распределение величины $\xi_1^{(n)}$ сходится к распределению величины $\xi_1^{(0)}$. Предположим, что совместное распределение $F_{k-1}^{(n)}$ величин $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k-1}^{(n)}$ сходится к совместному распределению $F_{k-1}^{(0)}$ величин $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_{k-1}^{(0)}$. Тогда

$$\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi_j^{(n)}\right\}=$$
$$=\int\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_jx_j\right\}\Phi_k^{(n)}(\lambda_k, x_1, \ldots, x_{k-1})\,dF_{k-1}^{(n)}(x_1, \ldots, x_{k-1})\to$$
$$\to\int\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_jx_j\right\}\Phi_k^{(0)}(\lambda_k, x_1, \ldots, x_{k-1})\,dF_{k-1}^{(0)}(x_1, \ldots, x_{k-1})=$$
$$=\mathsf{M}\exp\left\{i\lambda_1\xi_1^{(0)}+i\lambda_2\xi_2^{(0)}+\ldots+i\lambda_k\xi_k^{(0)}\right\}$$

на основании леммы 2. Значит, совместное распределение величин $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}$ также будет сходиться к совместному распределению величин $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)}$. Применяя индукцию по $k$, получаем доказательство леммы. ■

Возвратимся к доказательству теоремы. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$: $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N=1$. Положим

$$\eta_n^*(\tau_0)=\xi_{n0},$$
$$\eta_n^*(\tau_k)=\eta_n^*(\tau_{k-1})+\sum_{\tau_{k-1}\leqslant t_{nr}<\tau_k}a(t_{nr}, \eta_n^*(\tau_{k-1}))\,\Delta t_{nr}+$$
$$+\sum_{\tau_{k-1}\leqslant t_{nr}<\tau_k}\sigma(t_{nr}, \eta_n^*(\tau_{k-1}))\,\omega_{nr}, \qquad k=1, \ldots, N,$$
$$\eta_0^*(\tau_0)=\xi_0,$$
$$\eta_0^*(\tau_k)=\eta_0^*(\tau_{k-1})+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}a(s, \eta_0^*(\tau_{k-1}))\,ds+$$
$$+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sigma(s, \eta_0^*(\tau_{k-1}))\,dw(s), \qquad k=1, \ldots, N.$$

Очевидно,

$$\mathsf{M}\left(e^{i\lambda\eta_0^*(\tau_k)}\,\Big|\,\eta_0^*(\tau_0), \ldots, \eta_0^*(\tau_{k-1})\right)=\Phi_k^{(0)}(\lambda, \eta_0^*(\tau_{k-1})),$$

где

$$\Phi_k^{(0)}(\lambda, x) = \exp\left\{ i\lambda x + i\lambda \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} a(s, x)\, ds - \frac{\lambda^2}{2} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma^2(s, x)\, ds \right\}$$

— непрерывная функция $x$. Из замечания к лемме 1 вытекает, что

$$\mathsf{M}\left(e^{i\lambda\eta_n^*(\tau_k)} \middle| \eta_n^*(\tau_0), \ldots, \eta_n^*(\tau_{k-1})\right) = \mathsf{M}\left\{ \exp\left(i\lambda\eta_n^*(\tau_{k-1}) + \right.\right.$$
$$\left. + i\lambda \sum_{\tau_{k-1} \leqslant t_{nr} < \tau_k} a\left(t_{nr}, \eta_n^*(\tau_{k-1})\right) \Delta t_{nr}\right) \times$$
$$\left.\times \mathsf{M}\left[\exp\left(i\lambda \sum_{\tau_{k-1} \leqslant t_{nr} < \tau_n} \sigma\left(t_{nr}, \eta_n^*(\tau_{k-1})\right) \omega_{nr}\right) \middle| \eta_n^*(\tau_0), \ldots, \eta_n^*(\tau_{k-1})\right]\right\}$$

при подстановке $x$ вместо $\eta_n^*(\tau_{k-1})$ будет сходиться к $\Phi_k^{(0)}(\lambda, x)$ равномерно относительно $x$ в каждом конечном интервале. Поэтому на основании леммы 3 совместное распределение величин $\eta_n^*(\tau_0), \ldots, \eta_n^*(\tau_N)$ будет сходиться к совместному распределению величин $\eta_0^*(\tau_0), \ldots, \eta_0^*(\tau_N)$.

Так как

$$\xi(\tau_k) - \eta_0^*(\tau_k) = \xi(\tau_{k-1}) - \eta_0^*(\tau_{k-1}) +$$
$$+ \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[a(s, \xi(s)) - a\left(s, \eta_0^*(\tau_{k-1})\right)\right] ds +$$
$$+ \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[\sigma(s, \xi(s)) - \sigma\left(s, \eta_0^*(\tau_{k-1})\right)\right] dw(s),$$

то, используя условие Липшица и некоторые простые преобразования, получим

$$\mathsf{M}\left|\xi(\tau_k) - \eta_0^*(\tau_k)\right|^2 =$$
$$= \mathsf{M}\left|\xi(\tau_{k-1}) - \eta_0^*(\tau_{k-1})\right|^2 + 2\mathsf{M}\left|\xi(\tau_{k-1}) - \eta_0^*(\tau_{k-1})\right| \times$$
$$\times \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left|a(s, \xi(s)) - a\left(s, \eta_0^*(\tau_{k-1})\right)\right| ds +$$
$$+ \mathsf{M}\left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left(a(s, \xi(s)) - a\left(s, \eta_0^*(\tau_{k-1})\right)\right) ds\right)^2 +$$

$$+\mathsf{M}\left(\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(\sigma(s,\xi(s))-\sigma(s,\eta_0^*(\tau_{k-1})))\,dw(s)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\,|\xi(\tau_{k-1})-\eta_0^*(\tau_{k-1})|^2+$$

$$+2K\mathsf{M}\,|\xi(\tau_{k-1})-\eta_0^*(\tau_{k-1})|\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}|\xi(s)-\eta_0^*(\tau_{k-1})|\,ds+$$

$$+2\mathsf{M}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}([a(s,\xi(s))-a(s,\eta_0^*(\tau_{k-1}))]^2+$$

$$+[\sigma(s,\xi(s))-\sigma(s,\eta_0^*(\tau_{k-1}))]^2)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\,|\xi(\tau_{k-1})-\eta_0^*(\tau_{k-1})|^2(1+H(\tau_k-\tau_{k-1}))+$$

$$+H\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}|\xi(s)-\xi(\tau_{k-1})|^2\,ds,$$

где $H=2K+8K^2$. Следовательно, используя уже применявшиеся оценки, получаем

$$\mathsf{M}\,(\xi(\tau_k)-\eta_0^*(\tau_k))^2\leqslant He^H\mathsf{M}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}|\xi(s)-\xi(\tau_{k-1})|^2\,ds.$$

Из следствия 2 § 2 гл. VIII вытекает, что

$$\mathsf{M}\,|\xi(s_1)-\xi(s_2)|^2\leqslant C\,|s_1-s_2|,$$

так что

$$\mathsf{M}\,(\xi(\tau_k)-\eta_0^*(\tau_k))^2=O\,[\max_k(\tau_k-\tau_{k-1})]. \tag{3}$$

Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathsf{M}\,[\eta_n(\tau_k)-\eta_n^*(\tau_k)]^2=O\,(\max_k(\tau_k-\tau_{k-1})). \tag{4}$$

Заметим теперь, что, каковы бы ни были вещественные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ и случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_m$, справедливо неравенство

$$|\mathsf{M}\exp(i\lambda_1\xi_1+\ldots+i\lambda_m\xi_m)-\mathsf{M}\exp(i\lambda_1\eta_1+\ldots+i\lambda_m\eta_m)|\leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\,|\exp\{i\lambda_1(\xi_1-\eta_1)+\ldots+i\lambda_m(\xi_m-\eta_m)\}-1|\leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\,|\lambda_1(\xi_1-\eta_1)+\ldots+\lambda_m(\xi_m-\eta_m)|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2\sum_{k=1}^{m}\mathsf{M}(\xi_k-\eta_k)^2}. \tag{5}$$

Возьмем произвольные числа $s_1, \ldots, s_m$ из $[0, 1]$. Можно считать, что $s_i = \tau_{k_i}$. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \eta_n(\tau_{k_j})\right\} - \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \xi(\tau_{k_j})\right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left| \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \eta_n(\tau_{k_j})\right\} - \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \eta_n^*(\tau_{k_j})\right\} \right| +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \eta_n^*(\tau_{k_j})\right\} - \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \eta_0^*(\tau_{k_j})\right\} \right| +$$

$$+ \left| \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \eta_0^*(\tau_{k_j})\right\} - \mathsf{M} \exp\left\{i \sum \lambda_j \xi(\tau_{k_j})\right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\sqrt{m \max_k (\tau_k - \tau_{k-1})}\right)$$

ввиду соотношений (3), (4), (5) и сходимости совместного распределения величин $\eta_n^*(s_j)$ к совместному распределению величин $\eta_0^*(s_j)$. Произвольность $\max_k(\tau_k - \tau_{k-1})$ убеждает нас в справедливости теоремы. ■

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *для всякого непрерывного на* $\mathscr{C}_{[0,1]}$ *функционала* $f$ *распределение* $f(\xi_n(t))$ *будет сходиться к распределению* $f(\xi(t))$.

*Доказательство.* Учитывая сходимость конечномерных распределений процессов $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$ и замечание § 2, можем свести доказательство теоремы к доказательству соотношения

$$\lim_{h\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \sup_{|t'-t''|\leqslant h} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \varepsilon \right\} = 0. \qquad (6)$$

Используя рассуждения теоремы 2 § 2, убеждаемся, что

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{|t'-t''|\leqslant h} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{kh<1} \mathsf{P}\left\{ \sup_{kh\leqslant t\leqslant (k+1)h} |\xi_n(t) - \xi_n(kh)| > \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Обозначим через $s_k$ наибольший из индексов $r$, для которых $t_{nr} \leqslant kh$. Тогда

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{kh\leqslant t\leqslant (k+1)h} |\xi_n(t) - \xi_n(kh)| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \sup_{s_k\leqslant j_1 < j_2 \leqslant s_{k+1}+1} |\xi_{nj_1} - \xi_{nj_2}| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \sup_{s_k\leqslant j\leqslant s_{k+1}+1} |\xi_{nj} - \xi_{ns_k}| > \frac{\varepsilon}{8} \right\}.$$

Для дальнейшей оценки этой вероятности потребуется

Лемма 4. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *образуют цепь Маркова и с вероятностью* 1

$$\mathsf{P}\{|\xi_m-\xi_k|>c\,|\,\xi_k\}\leqslant\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha<1,$$

*то*

$$\mathsf{P}\{\sup_k|\xi_k|>2c\}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\mathsf{P}\{|\xi_m|>c\}.$$

*Доказательство.*

$$\mathsf{P}\{\sup_k|\xi_k|>2c,\ |\xi_m|\leqslant c\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\mathsf{P}\{|\xi_i|\leqslant 2c,\ i\leqslant k-1,\ |\xi_k|>2c,\ |\xi_m|\leqslant c\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\mathsf{P}\{|\xi_i|\leqslant 2c,\ i\leqslant k-1,\ |\xi_k|>2c,\ |\xi_m-\xi_k|>c\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\mathsf{M}(\mathsf{P}\{|\xi_i|\leqslant 2c,\ i\leqslant k-1,\ |\xi_k|>2c\,|\,\xi_k\}\mathsf{P}\{\xi_m-\xi_k|>c\,|\,\xi_k\})\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\sum_{k=1}^{m}\mathsf{MP}\{|\xi_i|\leqslant 2c,\ i\leqslant k-1,\ |\xi_k|>2c\,|\,\xi_k\}=\alpha\mathsf{P}\{\sup_k|\xi_k|>2c\}.$$

Значит,

$$\mathsf{P}\{\sup_k|\xi_k|>2c\}\leqslant\mathsf{P}\{|\xi_m|>c\}+\mathsf{P}\{\sup_k|\xi_k|>2c,\ |\xi_m|\leqslant c\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{P}\{|\xi_m|>c\}+\alpha\mathsf{P}\{\sup_k|\xi_k|>2c\}.$$

Из последнего соотношения и вытекает доказательство леммы. ■

Возвратимся к доказательству теоремы. Так как

$$\mathsf{P}\left\{\left|\xi_{ns_{k+1}+1}-\xi_{nj}\right|>\delta\,|\,\xi_{nj}\right\}\leqslant\frac{1}{\delta^2}\mathsf{M}\left([\xi_{ns_{k+1}+1}-\xi_{nj}]^2\,|\,\xi_{nj}\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{r=j}^{s_{k+1}}\left[a_n(t_{nr},\xi_{nr})\Delta t_{nr}+\sigma_n(t_{nr},\xi_{nr})\omega_{nr}\right]\right)^2\middle|\,\xi_{nj}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\delta^2}\mathsf{M}\left[\left(\sum_{r=j}^{s_{k+1}}a_n(t_{nr},\xi_{nr})\Delta t_{nr}\right)^2\middle|\,\xi_{nj}\right]+$$

$$+\frac{2}{\delta^2}\mathsf{M}\left[\left(\sum_{r=j}^{s_{k+1}}\sigma_n(t_{nr},\xi_{nr})\omega_{nr}\right)^2\middle|\,\xi_{nj}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\delta^2}\mathsf{M}\left[\left(\sum_{r=j}^{s_{k+1}}a_n(t_{nr},\xi_{nr})\Delta t_{nr}\right)^2\middle|\,\xi_{nj}\right]+$$

$$+\frac{2}{\delta^2}\mathsf{M}\left[\sum_{r=j}^{s_{k+1}}\sigma_n^2(t_{nr},\xi_{nr})\,\mathsf{M}(\omega_{nr}^2\,|\,\xi_{nr})\,|\,\xi_{nj}\right]+$$

$$+\frac{4}{\delta^2}\mathsf{M}\left(\sum_{j=r<l<s_{k+1}}\sigma_n(t_{nr},\xi_{nr})\,\sigma_n(t_{nl},\xi_{nl})\,\omega_{nr}\mathsf{M}(\omega_{nl}\,|\,\xi_{nl})\,|\,\xi_{nj}\right)=$$

$$=\mathsf{M}\left[\left(\sum_{r=j}^{s_{k+1}}a_n(t_{nr},\xi_{nr})\,\Delta t_{nr}\right)^2+\sum_{r=j}^{s_{k+1}}\sigma_n^2(t_{nr},\xi_{nr})\,\Delta t_{nr}\,|\,\xi_{nj}\right]$$

и функции $a_n$ и $\sigma_n$ ограничены, а

$$\sum_{r=s_k}^{s_{k+1}}\Delta t_{nj}\leqslant h+2\max_j\Delta t_{nj},$$

то существует такая постоянная $H_1$, что

$$\mathsf{P}\{|\xi_{ns_{k+1}+1}-\xi_{kj}|>\delta\,|\,\xi_{nj}\}\leqslant\frac{H_1}{\delta^2}(h+2\max_j\Delta t_{nj}).$$

Следовательно, при достаточно малых $h$ и всех достаточно больших $n$

$$\mathsf{P}\{|\xi_{ns_{k+1}+1}-\xi_{nj}|>\varepsilon/16\}\leqslant 1/2,$$

и тогда на основании леммы 4

$$\mathsf{P}\{\sup_{kh\leqslant t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|>\varepsilon/4\}\leqslant 2\mathsf{P}\{|\xi_{ns_{k+1}+1}-\xi_{ns_k}|>\varepsilon/16\}.$$

Из сходимости конечномерных распределений $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям $\xi(t)$ вытекает, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\{|\xi_{ns_{k+1}+1}-\xi_{ns_k}|>\varepsilon/16\}\leqslant\mathsf{P}\{|\xi((k+1)h)-\xi(kh)|>\varepsilon/16\}.$$

Значит,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{kh<1}\mathsf{P}\{|\xi(kh+h)-\xi(kh)|>\varepsilon/16\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{kh<1}\left(\frac{16}{\varepsilon}\right)^4\mathsf{M}|\xi(kh+h)-\xi(kh)|^4.$$

Но при некотором $L$ $\mathsf{M}|\xi(t+h)-\xi(t)|^4\leqslant Lh^2$ на основании следствия 2 § 2 гл. VIII, так что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\varepsilon\}\leqslant\left(\frac{16}{\varepsilon}\right)^4 Lh.$$

Соотношение (6), а значит, и теорема доказаны. ■

## § 5. Пространство функций без разрывов второго рода

Обозначим через $\mathscr{D}_{[0,1]}$ совокупность функций $x(t)$, определенных на отрезке [0, 1], принимающих вещественные значения и имеющих в каждой точке пределы слева и справа. Функции, совпадающие во всех точках непрерывности, будут считаться неразличимыми; поэтому естественно принять какое-то стандартное определение значений функций $x(t)$ в точках разрыва. В дальнейшем будет предполагаться, что для всех функций из $\mathscr{D}_{[0,1]}$ выполняются соотношения

$$x(t)=x(t+0), \quad x(0)=x(+0), \quad x(1)=x(1-0). \tag{1}$$

Изучение пространства $\mathscr{D}_{[0,1]}$ полезно, так как существуют классы случайных процессов, у которых выборочные функции с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода (например, процессы с независимыми приращениями, марковские процессы при весьма широких предположениях). Чтобы можно было использовать результаты § 1, нужно ввести в $\mathscr{D}_{[0,1]}$ метрику, в которой $\mathscr{D}_{[0,1]}$ превратилось бы в сепарабельное метрическое пространство, обладающее тем свойством, что минимальная σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств этого пространства. Желательно при этом, чтобы метрика была достаточно «сильной» (т. е. чтобы было возможно меньше сходящихся последовательностей и, значит, больше непрерывных в этой метрике функционалов). Равномерная метрика

$$\rho_u(x, y)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$$

для этих целей не годится, так как в этой метрике $\mathscr{D}_{[0,1]}$ не будет сепарабельным пространством (множество функций $x_s(t)=\frac{1+\operatorname{sgn}(t-s)}{2}$, $0<s<1$, имеет мощность континуума, но расстояние между каждыми двумя элементами этого множества равно 1). Введем в пространстве $\mathscr{D}_{[0,1]}$ метрику, являющуюся несколько ослабленной по сравнению с равномерной.

Обозначим через $\Lambda$ совокупность всех непрерывных монотонно возрастающих на [0, 1] числовых функций $\lambda(t)$, для которых $\lambda(0)=0$, $\lambda(1)=1$ (т. е. $\lambda$ отображает непрерывно и взаимно однозначно [0, 1] на самого себя).

Отметим, что для всех $\lambda\in\Lambda$ существуют обратные функции $\lambda^{-1}\in\Lambda$, также принадлежащие $\Lambda$. Если $\lambda_1$ и $\lambda_2\in\Lambda$, то и сложная функция $\lambda_1(\lambda_2(\cdot))$ будет принадлежать $\Lambda$.

Определим теперь для каждой пары $x(t)$ и $y(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$ величину

$$\rho_{\mathscr{D}}(x, y)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\sup_t|x(t)-y(\lambda(t))|+\sup_t|t-\lambda(t)|\right]. \tag{2}$$

Покажем, что $\rho_{\mathscr{D}}$ определяет метрику в $\mathscr{D}_{[0,1]}$. Для этого нужно проверить, что функция $\rho_{\mathscr{D}}$ удовлетворяет трем метрическим аксиомам: а) $\rho_{\mathscr{D}}(x, y) \geqslant 0$ и равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y$; б) $\rho_{\mathscr{D}}(x, y) = \rho_{\mathscr{D}}(y, x)$; в) $\rho_{\mathscr{D}}(x, z) \leqslant \rho_{\mathscr{D}}(x, y) + \rho_{\mathscr{D}}(y, z)$ для всех $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$.

Свойство а) очевидно. Свойство б) вытекает из соотношения

$$\rho_{\mathscr{D}}(y, x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} [\sup_t | y(t) - x(\lambda(t)) | + \sup_t | t - \lambda(t) |] =$$
$$= \inf_{\lambda^{-1} \in \Lambda} \left[\sup_t \left| y\left(\lambda^{-1}(t)\right) - x(t)\right| + \sup_t \left|\lambda^{-1}(t) - t\right|\right] = \rho_{\mathscr{D}}(x, y).$$

Остановимся на свойстве в) — неравенстве треугольника. Пусть $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — некоторые функции из $\mathscr{D}_{[0,1]}$. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, для которых выполнялись бы соотношения

$$\begin{aligned} \rho_{\mathscr{D}}(x, y) &\geqslant \sup_t | x(t) - y(\lambda_1(t)) | + \sup_t | t - \lambda_1(t) | - \varepsilon, \\ \rho_{\mathscr{D}}(y, z) &\geqslant \sup_t | y(t) - z(\lambda_2(t)) | + \sup_t | t - \lambda_2(t) | - \varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда

$$\rho_{\mathscr{D}}(x, z) \leqslant \sup_t | x(t) - z(\lambda_2(\lambda_1(t))) | + \sup_t | t - \lambda_2(\lambda_1(t)) | \leqslant$$
$$\leqslant \sup_t | x(t) - y(\lambda_1(t)) | + \sup_t | t - \lambda_1(t) | +$$
$$+ \sup_t | y(\lambda_1(t)) - z(\lambda_2(\lambda_1(t))) | + \sup_t | \lambda_1(t) - \lambda_2(\lambda_1(t)) | =$$
$$= \sup_t | x(t) - y(\lambda_1(t)) | + \sup_t | t - \lambda_1(t) | +$$
$$+ \sup_t | y(t) - z(\lambda_2(t)) | + \sup_t | t - \lambda_2(t) |,$$

так как если $t$ пробегает $[0, 1]$, то $\lambda_1(t)$ будет также пробегать отрезок $[0, 1]$. Учитывая соотношения (3), получаем

$$\rho_{\mathscr{D}}(x, z) \leqslant \rho_{\mathscr{D}}(x, y) + \rho_{\mathscr{D}}(y, z) + 2\varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает в).

Положим

$$\Delta_c(x) = \sup_{t-c \leqslant t' \leqslant t \leqslant t'' \leqslant t+c} [\min\{| x(t') - x(t) |; \ | x(t'') - x(t) |\}] +$$
$$+ \sup_{0 \leqslant t \leqslant c} | x(t) - x(0) | + \sup_{1-c \leqslant t \leqslant 1} | x(t) - x(1) |.$$

Легко убедиться, что для $x(t) \in \mathscr{D}_{[0,1]}$

$$\lim_{c\to 0} \Delta_c(x) = 0.$$

Лемма 1. *Пусть $x(t)$ — функция из $\mathscr{D}_{[0,1]}$ и $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Если $x(t)$ не имеет скачков, превосходящих $\varepsilon$ на $[\alpha, \beta]$, то при $|t' - t''| \leqslant c$, $t'$, $t'' \in [\alpha, \beta]$*

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant 2\Delta_c(x) + \varepsilon.$$

*Доказательство.* Выберем произвольное $\delta \in (0, \varepsilon)$ и точку $\tau$ в промежутке $[t', t'']$, обладающую свойством: при $t \in [t', \tau)$ $|x(t') - x(t)| < \Delta_c(x) + \delta$, $|x(t') - x(\tau)| \geqslant \Delta_c(x) + \delta$. Если такой точки нет, то тогда $|x(t') - x(t'')| \leqslant \Delta_c(x) + \delta$ и, значит, утверждение леммы выполнено. Если точка $\tau$ существует, то, поскольку

$$\min[|x(\tau) - x(t')|;\ |x(\tau) - x(t'')|] \leqslant \Delta_c(x),$$

а $|x(\tau) - x(t')| \geqslant \Delta_c(x) + \delta$, имеем $|x(\tau) - x(t'')| \leqslant \Delta_c(x)$. Таким образом,

$$|x(t'') - x(t')| \leqslant |x(t'') - x(\tau)| + |x(\tau) - x(\tau - 0)| + \\ + |x(\tau - 0) - x(t')| \leqslant 2\Delta_c(x) + \delta + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\delta \downarrow 0$, получаем доказательство леммы. ■

Обозначим через $H_{m,n}$ совокупность функций $x(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$, постоянных на каждом из интервалов $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ и принимающих значения, кратные $m$.

Лемма 2. *Для каждой функции $x(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$ существует функция $x^*(t)$ из $H_{m,n}$ такая, что*

$$\rho_{\mathscr{D}}(x, x^*) \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + 4\Delta_{\frac{2}{n}}(x). \tag{4}$$

*Доказательство.* В каждом из отрезков $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ найдется не более одной точки, скачок в которой превосходит $2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$. Действительно, если $\tau$ — одна такая точка, то тогда

$$|x(s) - x(\tau - 0)| = \min[|x(s) - x(\tau - 0)|; \\ |x(\tau) - x(\tau - 0)|] \leqslant \Delta_{\frac{1}{n}}(x) \quad \text{при} \quad s \in \left[\frac{k}{n}, \tau\right),$$

$$|x(s) - x(\tau)| \leqslant \Delta_{\frac{1}{n}}(x) \quad \text{при} \quad s \in \left[\tau, \frac{k+1}{n}\right]$$

и, значит, $|x(s)-x(s-0)|\leqslant 2\Delta_{\frac{1}{n}}(x)\leqslant 2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$. Пусть $\tau_k$ — точка отрезка $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, в которой $|x(\tau_k)-x(\tau_k-0)|\geqslant 2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$, если такая точка в этом отрезке существует. Обозначим через $\lambda(t)$ функцию из $\Lambda$, для которой $\lambda\left(\frac{k+1}{n}\right)=\tau_k$ и $t-\frac{1}{n}\leqslant\lambda(t)\leqslant t$ (такой будет, например, кусочно линейная функция, определяемая равенствами $\lambda(0)=0$, $\lambda\left(\frac{k+1}{n}\right)=\tau_k$, $\lambda(1)=1\Big)$. Положим $\bar{x}(t)=x(\lambda(t))$. Функция $\bar{x}(t)$ будет иметь разрывы, превосходящие $2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$, лишь в точках вида $\frac{k}{n}$, и

$$\rho_{\mathscr{D}}(x, \bar{x})\leqslant\sup_t|\bar{x}(t)-x(\lambda(t))|+\sup_t|t-\lambda(t)|\leqslant\frac{1}{n}.$$

Пусть, далее, $\bar{x}^*(t)$ — функция, равная $\bar{x}\left(\frac{k}{n}\right)$ при

$$t\in\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \quad k\leqslant n-1; \qquad \bar{x}^*(1)=\bar{x}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Тогда

$$\rho_{\mathscr{D}}(\bar{x}, \bar{x}^*)\leqslant\sup|\bar{x}(t)-\bar{x}^*(t)|\leqslant\sup_k\sup_{\frac{k}{n}\leqslant t<\frac{k+1}{n}}\left|\bar{x}(t)-\bar{x}\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Так как скачки $x(t)$, превосходящие $2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$, происходят лишь в точках вида $\frac{k}{n}$, то в полуинтервале $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ таких скачков нет, и, значит, по лемме 1

$$\left|\bar{x}\left(\frac{k}{n}\right)-\bar{x}(t)\right|\leqslant 2\Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x})+2\Delta_{\frac{2}{n}}(x) \quad \text{при} \quad t\in\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right).$$

Оценим $\Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x})$:

$$\Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x})=\sup_{t-\frac{1}{n}\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''+\frac{1}{n}}[\min\{|\bar{x}(t')-\bar{x}(t)|;\ |\bar{x}(t)-\bar{x}(t'')|\}]+$$
$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}}|\bar{x}(t)-\bar{x}(0)|+\sup_{1-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1}|\bar{x}(t)-\bar{x}(1)|=$$
$$=\sup_{t-\frac{1}{n}\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\frac{1}{n}}[\min\{|x(\lambda(t'))-x(\lambda(t))|;\ |x(\lambda(t))-x(\lambda(t''))|\}]+$$
$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}}|x(\lambda(t))-x(0)|+\sup_{1-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1}|x(\lambda(t))-x(1)|.$$

Заметим, что при $t_1 < t_2 \leqslant t_1 + \frac{1}{n}$

$$t_1 - \frac{1}{n} \leqslant \lambda(t_1) < \lambda(t_2) \leqslant t_2 \leqslant t_1 + \frac{1}{n},$$

так что $0 < \lambda(t_2) - \lambda(t_1) \leqslant \frac{2}{n}$. Поэтому $\Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) \leqslant \Delta_{\frac{2}{n}}(x)$. Значит, $\rho_{\mathscr{D}}(\bar{x}, \bar{x}^*) \leqslant 4\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$.

Наконец, положим $x^*(t) = \frac{1}{m}\operatorname{Ent}(m\bar{x}^*(t))$, где $\operatorname{Ent}(x)$ — целая часть $x$. Так как $|x^*(t) - \bar{x}^*(t)| \leqslant \frac{1}{m}$, то

$$\rho_{\mathscr{D}}(x, x^*) \leqslant \rho_{\mathscr{D}}(x, \bar{x}) + \rho_{\mathscr{D}}(\bar{x}, \bar{x}^*) + \rho_{\mathscr{D}}(\bar{x}^*, x^*) \leqslant \frac{1}{n} + 4\Delta_{\frac{2}{n}}(x) + \frac{1}{m}. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Пространство $\mathscr{D}_{[0,1]}$ с метрикой $\rho_{\mathscr{D}}$ сепарабельно.*

Теорема 1. *Пусть $L$ — некоторая положительная постоянная, а $\omega(\delta)$ — функция, определенная, непрерывная и монотонная при $\delta > 0$, причем $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \omega(\delta) = 0$. Обозначим через $K(L, \omega)$ множество функций из $\mathscr{D}_{[0,1]}$, удовлетворяющих соотношениям $|x(t)| \leqslant L$, $\Delta_c(x) \leqslant \omega(c)$. Тогда $K(L, \omega)$ является компактом в метрике $\rho_{\mathscr{D}}$.*

*Доказательство.* Заметим, во-первых, что для каждого $\varepsilon > 0$ $K(L, \omega)$ имеет конечную $\varepsilon$-сеть; такую $\varepsilon$-сеть образуют функции из $H_{m,n}$, удовлетворяющие соотношению $|x(t)| \leqslant L$, если $m$ и $n$ выбраны так, что $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + 4\omega\left(\frac{2}{n}\right) < \varepsilon$. Множество $K(L, \omega)$ замкнуто. Легко проверить соотношение

$$\Delta_c(x) \leqslant \Delta_{c+\rho_{\mathscr{D}}(x,y)}(y) + 3\rho_{\mathscr{D}}(x, y).$$

Поэтому, если $\rho_{\mathscr{D}}(x_n, \bar{x}) \to 0$ и $x_n \in K(L, \omega)$, то для всякого $\alpha > 0$

$$\Delta_c(\bar{x}) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \Delta_{c+\alpha}(x_n) + 3\alpha \leqslant \omega(c + \alpha) + 3\alpha.$$

Значит, ввиду непрерывности $\omega$ $\Delta_c(\bar{x}) \leqslant \omega(c)$. Очевидно также, что $\sup\limits_t |x(t)| \leqslant \sup\limits_t |y(t)| + 3\rho_{\mathscr{D}}(x, y)$, так что

$$\sup_t |\bar{x}(t)| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left[\sup_t |x_n(t)| + 3\rho_{\mathscr{D}}(x_n, \bar{x})\right] \leqslant L.$$

Следовательно, предел последовательности, принадлежащей $K(L, \omega)$, будет также принадлежать $K(L, \omega)$. Остается показать, что всякая фундаментальная последовательность $x_n(t)$, принадлежащая $K(L, \omega)$, будет сходящейся (тогда мы покажем, что $K(L, \omega)$ является полным метрическим пространством с конечной $\varepsilon$-сетью для каждого $\varepsilon > 0$, а это и означает, что $K(L, \omega)$ — компакт). Пусть $x_n(t)$ — последовательность функций из $K(L, \omega)$, для которой $\rho_{\mathscr{D}}(x_n, x_m) \to 0$ при $n$ и $m \to \infty$ (т. е. $x_n(t)$ — фундаментальная последовательность). Достаточно показать, что некоторая подпоследовательность $x_{n_k}(t)$ имеет предел $\bar{x}(t)$. Поэтому можно считать, что последовательность $x_n(t)$ такова, что $\rho_{\mathscr{D}}(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Тогда существует последовательность функций $\lambda_n(t)$ из $\Lambda$ такая, что

$$\sup_t |x_n(t) - x_{n+1}(\lambda_{n+1}(t))| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\sup_t |t - \lambda_{n+1}(t)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Положим $\mu_1(t) = \lambda_1(t)$, $\mu_n(t) = \lambda_n(\mu_{n-1}(t))$. Так как

$$\sup_t |\mu_n(t) - \mu_{n-1}(t)| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

то $\mu_n(t)$ сходится к некоторой неубывающей непрерывной функции $\mu(t)$, удовлетворяющей условиям $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$. Далее,

$$\sup_t |x_n(\mu_n(t)) - x_{n-1}(\mu_{n-1}(t))| = \sup_t |x_n(\lambda_n(t)) - x_{n-1}(t)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Поэтому $x_n(\mu_n(t))$ равномерно сходится к некоторой функции $x^*(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$. Рассмотрим связь между функциями $x^*(t)$ и $\mu(t)$. Пусть $\mu(t)$ постоянна на некотором промежутке $[\alpha, \beta]$. Если $x^*(\alpha) = x^*(\beta)$, то $x^*(t)$ также постоянна на $[\alpha, \beta]$; если же $x^*(\alpha) \neq x^*(\beta)$, то существует такое $\gamma \in [\alpha, \beta]$, что $x^*(t) = x^*(\alpha)$ при $t \in [\alpha, \gamma)$, $x^*(t) = x^*(\beta)$ при $t \in [\gamma, \beta]$. Действительно, в противном случае нашлись бы такие точки $t' < t'' < t'''$, принадлежащие $[\alpha, \beta]$, что $x^*(t') \neq x^*(t'')$, $x^*(t'') \neq x^*(t''')$, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} \min[|x_n(\mu_n(t')) - x_n(\mu_n(t''))|; |x_n(\mu_n(t'')) - x_n(\mu_n(t'''))|] =$$
$$= \min[|x^*(t') - x^*(t'')|; |x^*(t'') - x^*(t''')|] > 0,$$

хотя $\mu_n(t') < \mu_n(t'') < \mu_n(t''')$ и $\mu_n(t')$, $\mu_n(t'')$, $\mu_n(t''')$ стремятся к $\mu(\alpha)$. Это противоречило бы тому, что последовательность $x_n(t)$ принадлежит $K(L, \omega)$. Обозначим через $\bar{x}(t)$ функцию из $\mathscr{D}_{[0,1]}$, определенную соотношением

$$x^*(t) = \bar{x}(\mu(t)), \tag{5}$$

выполняющимся во всех точках $t$, в которых $\mu(s) > \mu(t)$ для всех $s \in (t, 1]$. Соотношение (5) определяет единственную функцию $\bar{x}(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$. Покажем, что эта функция $\bar{x}(t)$ будет пределом последовательности $x_n(t)$. Для этого построим вспомогательные функции $\varphi_n(t)$ из $\Lambda$. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ — все точки $[0, 1]$, в которых $\bar{x}(t)$ имеет скачки, превосходящие $1/n$. Обозначим через $[\alpha_i, \beta_i]$ максимальный промежуток, на котором $\mu(t)$ принимает значение $\tau_i$ (этот промежуток может содержать и одну точку).

Пусть $\gamma_i$ — такая точка промежутка $[\alpha_i, \beta_i]$, что при $t \in [\alpha_i, \gamma_i)$ $x^*(t) = \bar{x}(\tau_i - 0)$, а при $t \in [\gamma_i, \beta_i]$ $x^*(t) = \bar{x}(\tau_i)$ (в частности, если $\alpha_i = \gamma_i$, то $x^*(t)$ на $[\alpha_i, \beta_i]$ принимает единственное значение $\bar{x}(\tau_i)$). Выберем $\varepsilon_n$, не превосходящее $1/n$, так, чтобы $\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}) < 1/n$. Пусть $\varphi_n(t)$ — функция, удовлетворяющая соотношениям $\varphi_n(\gamma_i) = \tau_i$, $|\varphi_n(t) - \mu(t)| \leqslant \varepsilon_n$. Оценим $\sup\limits_t |x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))|$. Если $t$ не принадлежит ни одному из промежутков $[\alpha_i, \beta_i]$, то

$$|x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| = |\bar{x}(\mu(t)) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leqslant 2\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}) + 1/n$$

на основании леммы 1, так как $\bar{x}(t)$ между $\mu(t)$ и $\varphi_n(t)$ не имеет скачков, превосходящих $1/n$. Если $t \in [\alpha_i, \gamma_i)$, то

$$|x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leqslant \sup_{s \in [\tau_i - \varepsilon_n, \tau_i)} |\bar{x}(\tau_i - 0) - \bar{x}(s)| \leqslant \Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}),$$

поскольку $|\bar{x}(\tau_i - 0) - \bar{x}(\tau_i)| > 1/n$. Аналогично устанавливаем, что при $t \in [\gamma_i, \beta_i]$ $|x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leqslant \Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x})$. Следовательно,

$$\sup_t |x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leqslant 2\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}) + 1/n \leqslant 3/n.$$

Оценим теперь $\rho_{\mathscr{D}}(x_n, \bar{x})$. Имеем

$$\begin{aligned}\rho_{\mathscr{D}}(x_n, \bar{x}) &\leqslant \rho_{\mathscr{D}}(x_n(t), x^*(\mu_n^{-1}(t))) + \\ &+ \rho_{\mathscr{D}}(x^*(\mu_n^{-1}(t)), \bar{x}(\varphi_n(\mu_n^{-1}(t)))) + \rho_{\mathscr{D}}(\bar{x}(t), \bar{x}(\varphi_n(\mu_n^{-1}(t)))) \leqslant \\ &\leqslant \sup_t |x_n(\mu_n(t)) - x^*(t)| + \sup_t |x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| + \\ &+ \sup_t |t - \varphi_n(\mu_n^{-1}(t))| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{3}{n} + \\ &+ \sup_t |\mu_n(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{3}{n} + \frac{1}{2^n} + \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Таким образом, $\rho_{\mathscr{D}}(x_n, \bar{x}) \to 0$, т. е. последовательность $x_n$ сходится к функции $\bar{x}(t)$. ■

Теорема 2. *Если конечномерные распределения последовательности процессов $\xi_n(t)$, не имеющих разрывов второго рода, сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$*

*и для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\Delta_c(\xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0, \tag{6}$$

*то для всякого функционала* $f$, *определенного на* $\mathscr{D}_{[0,1]}$ *и непрерывного в метрике* $\rho_{\mathscr{D}}$, *распределение* $f(\xi_n(t))$ *будет сходиться к распределению* $f(\xi(t))$.

*Доказательство.* Используя замечание § 2, убеждаемся, что условие (6) влечет следующее условие:

$$\lim_{c\to 0} \sup_n \mathsf{P}\{\Delta_c(\xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0. \tag{7}$$

Используя замечания 1 и 4 § 1 и теорему 1, видим, что для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{L\to\infty} \sup_n \mathsf{P}\{\sup_t |\xi_n(t)| > L\} = 0. \tag{8}$$

Но для всякой функции $x(t)$ из $\mathscr{D}_{[0,1]}$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant k\leqslant m} \left|x\left(\frac{k}{m}\right)\right| + \Delta_{\frac{1}{m}}(x),$$

так как при $t \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$ или $\left|x(t) - x\left(\frac{k}{m}\right)\right| < \Delta_{\frac{1}{m}}(x)$, или $\left|x(t) - x\left(\frac{k+1}{m}\right)\right| < \Delta_{\frac{1}{m}}(x)$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\sup_t |\xi_n(t)| > L\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\sup_{k\leqslant m} \left|\xi_n\left(\frac{k}{m}\right)\right| > L - \varepsilon\right\} + \\ + \mathsf{P}\{\Delta_{\frac{1}{m}}(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon\}.$$

Случайная величина $\sup_{k\leqslant m}\left|\xi_n\left(\frac{k}{m}\right)\right|$ ограничена по вероятности равномерно относительно $n$. Это следует из сходимости конечномерных распределений $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям $\xi(t)$, что влечет сходимость распределения $\sup_{k\leqslant m}\left|\xi_n\left(\frac{k}{m}\right)\right|$ к распределению $\sup_{k\leqslant m}\left|\xi\left(\frac{k}{m}\right)\right|$. Значит,

$$\varlimsup_{L\to\infty} \sup_n \mathsf{P}\{\sup_t |\xi_n(t)| > L\} \leqslant \sup_n \mathsf{P}\{\Delta_{\frac{1}{m}}(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon\}.$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$, убеждаемся в справедливости (8). ■

## § 6. Сходимость сумм одинаково распределенных независимых случайных величин к однородному процессу с независимыми приращениями

Пусть $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn}$ при каждом $n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Положим $S_{nk} = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nk}$. Рассмотрим случайный процесс $\xi_n(t)$, определенный соотношениями $\xi_n(t) = S_{nk}$, $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ $(S_{n0} = 0)$, $\xi_n(1) = S_{nn}$. Этот процесс является процессом с независимыми приращениями, имеющим разрывы в точках $k/n$. В этом параграфе будут исследоваться условия, при которых конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ и распределения непрерывных в метрике $\rho_{\mathscr{D}}$ функционалов от этих процессов будут сходиться к конечномерным распределениям и распределениям соответствующих функционалов от однородного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями. Мы будем считать, что выборочные функции процесса $\xi(t)$ (который будет предполагаться стохастически непрерывным) с вероятностью 1 принадлежат $\mathscr{D}_{[0,1]}$. Как известно (см. гл. I, § 3), характеристическая функция однородного процесса с независимыми приращениями может быть представлена в виде

$$\mathsf{M}e^{i\lambda\xi(t)} = \exp\left\{t\left[i\lambda\gamma + \int\left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right]\right\}, \tag{1}$$

где $G$ — монотонная ограниченная функция, причем формула (1) полностью определяет конечномерные распределения процесса $\xi(t)$. Свяжем с последовательностью сумм $S_{nk}$ две величины:

$$\gamma_n = n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dF_n(x), \qquad G_n(x) = n\int_{-\infty}^{x}\frac{u^2}{1+u^2}\,dF_n(u), \tag{2}$$

где $F_n(x)$ — функция распределения величин $\xi_{nk}$.

Теорема 1. *Если существуют число $\gamma$ и неубывающая ограниченная функция $G(x)$ такие, что $\gamma_n \to \gamma$ и $G_n(x) \Rightarrow G(x)$, то конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$ с характеристической функцией* (1). *При этом для всякого функционала $f$, определенного на $\mathscr{D}_{[0,1]}$ и непрерывного в метрике $\rho_{\mathscr{D}}$, распределение $f(\xi_n(\cdot))$ будет сходиться к распределению $f(\xi(\cdot))$.*

*Доказательство.* Поскольку $\xi_n(t)$ также является процессом с независимыми приращениями, то для доказательства сходимости конечномерных распределений достаточно доказать, что распределение $\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)$ при $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$ сходится к распределению $\xi(t_2)-\xi(t_1)$. Это же вытекает из предельной теоремы для сумм независимых случайных величин (см. Б. В. Гнеденко [3], стр. 289). Воспользовавшись замечанием 4 § 1 и учитывая теорему 2 § 5, убеждаемся, что для доказательства теоремы достаточно показать, что для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathsf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0. \tag{3}$$

Для доказательства (3) нужна следующая

Лемма 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные величины. Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant i<j<l\leqslant n}\min\left[\left|\sum_{k=i+1}^{j}\xi_k\right|;\left|\sum_{k=j+1}^{l}\xi_k\right|\right]>\varepsilon\right\}\leqslant \leqslant\left(\mathsf{P}\left\{\sup_k\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)^2. \tag{4}$$

*Доказательство.* Пусть $i<j<l$ и $\left|\sum_{k=i+1}^{j}\xi_k\right|>\varepsilon$, $\left|\sum_{k=j+1}^{l}\xi_k\right|>\varepsilon$. Тогда или $\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k\right|>\frac{\varepsilon}{2}$, или $\left|\sum_{k=1}^{j}\xi_k\right|>\frac{\varepsilon}{2}$ и для всех $r<j$ или $\left|\sum_{k=r+1}^{j}\xi_k\right|>\frac{\varepsilon}{2}$, или $\left|\sum_{k=r+1}^{l}\xi_k\right|>\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, событие

$$\left\{\sup_{i<j<l}\min\left[\left|\sum_{k=i+1}^{j}\xi_k\right|;\left|\sum_{k=j+1}^{l}\xi_k\right|\right]>\varepsilon\right\}$$

влечет одно из событий $A_r$ $(r=1,\ldots,n)$:

$$A_r=\left\{|\xi_1+\ldots+\xi_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ k\leqslant r-1;\ |\xi_1+\ldots+\xi_r|>\frac{\varepsilon}{2};\ \sup_{l>r}|\xi_{r+1}+\ldots+\xi_l|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Так как

$$\mathsf{P}(A_r)=\mathsf{P}\left\{|\xi_1+\ldots+\xi_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ k\leqslant r-1;|\xi_1+\ldots+\xi_r|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\times \times\mathsf{P}\left\{\sup_{l>r}|\xi_{r+1}+\ldots+\xi_l|>\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

то, учитывая, что величины $\xi_i$ одинаково распределены, получаем

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{i<j<l}\min\left[\left|\sum_{k=i+1}^{j}\xi_k\right|;\ \left|\sum_{k=j+1}^{l}\xi_k\right|\right]>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_r \mathsf{P}\left\{|\xi_1+\ldots+\xi_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ k\leqslant r-1;\ |\xi_1+\ldots+\xi_r|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\times$$

$$\times\mathsf{P}\left\{\sup_{l>r}|\xi_{r+1}+\ldots+\xi_l|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant l\leqslant n}|\xi_1+\ldots+\xi_l|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\sum_r\mathsf{P}\left\{|\xi_1+\ldots+\xi_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\right.$$

$$\left.k\leqslant r-1;\ |\xi_1+\ldots+\xi_r|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}=$$

$$=\left(\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant l\leqslant n}|\xi_1+\ldots+\xi_l|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)^2. \blacksquare$$

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что

$$\Delta_c(x(\cdot))\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant c}|x(t)-x(0)|+\sup_{1-c\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-x(1)|+$$

$$+\max_{0<k<\frac{1}{c}}\ \sup_{kc\leqslant t'<t''<t'''\leqslant(k+3)c}\min[|x(t')-x(t'')|;\ \ |x(t'')-x(t''')|].$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant c}|\xi_n(t)-\xi_n(0)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$$

$$+\mathsf{P}\left\{\sup_{1-c\leqslant t\leqslant 1}|\xi_n(t)-\xi_n(1)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$$

$$+\sum_{k<\frac{1}{c}}\mathsf{P}\left\{\sup_{kc\leqslant t'<t''<t'''\leqslant(k+3)c}\min[|\xi_n(t'')-\xi_n(t')|;\right.$$

$$\left.|\xi_n(t''')-\xi_n(t'')|]>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant c}|\xi_n(t)-\xi_n(0)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$$

$$+\mathsf{P}\left\{\sup_{1-c\leqslant t\leqslant 1}|\xi_n(1)-\xi_n(t)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$$

$$+\sum_{k<\frac{1}{c}}\left(\mathsf{P}\left\{\sup_{kc\leqslant t\leqslant(k+3)c}|\xi_n(t)-\xi_n(kc)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right)^2.$$

Если $n<1/c$, то легко видеть, что $\Delta_c(\xi_n(\cdot))=0$, так как $\xi_n(t)$ постоянна на интервалах $\left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right)$. Если же $n>1/c$, то хотя число точек вида $i/n$ в интервале $[kc,\ (k+3)c]$ меняется с изменением $k$, однако оно не превосходит числа этих точек в интервале $[0, 4c]$, так что всегда

$$\mathsf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon\} \leqslant 2\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 4c} |\xi_n(t) - \xi_n(0)| > \varepsilon/4\} + \left(1+\frac{1}{c}\right)\left(\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 4c} |\xi_n(t)-\xi_n(0)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right)^2.$$

Для оценки вероятности

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 4c} |\xi_n(t)-\xi_n(0)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{k\leqslant 4nc}\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_{ni}\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

введем величины $\xi'_{ni} = \xi_{ni}$, если $|\xi_{ni}| \leqslant L$, $\xi'_{ni} = 0$, если $|\xi_{ni}| > L$, $\xi''_{ni} = \xi_{ni} - \xi'_{ni}$. Тогда

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant N}\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_{ni}\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant \mathsf{P}\{\sup_{1\leqslant k\leqslant N}|\xi''_{nk}| > 0\} + \mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant N}\left|\sum_{i=1}^{k}\xi'_{ni}\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} = \sum_{i=1}^{N}\mathsf{P}\{|\xi_{ni}| > L\} + \mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant N}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi'_{ni} - \mathsf{M}\xi'_{ni})\right| > \frac{\varepsilon}{4} - \left|\sum_{i=1}^{N}\mathsf{M}\,\xi'_{ni}\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant N\mathsf{P}\{|\xi_{n1}| > L\} + \frac{N\mathsf{D}\xi'_{n1}}{\left(\frac{\varepsilon}{4} - N|\mathsf{M}\xi'_{n1}|\right)^2}$$

(мы воспользовались неравенством Колмогорова — замечанием к теореме 5 § 1 гл. III), если только $N|\mathsf{M}\xi'_{n1}| < \varepsilon/4$.

Если $L$ и $-L$ являются точками непрерывности функции $G$, то справедливы предельные соотношения

$$\lim_{n\to\infty} n\mathsf{P}\{|\xi_{n1}| > L\} = \lim_{n\to\infty}\int_{|x|>L}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_n(x) = \int_{|x|>L}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathsf{M}\xi'_{n1} = \lim_{n\to\infty} n\int_{|x|<L} x\,dF_n(x) =$$

$$= \gamma - \lim_{n\to\infty} n\int_{|x|>L}\frac{x}{1+x^2}\,dF_n(x) + \lim_{n\to\infty} n\int_{|x|\leqslant L}\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dF_n(x) =$$

$$= \gamma - \int_{|x|>L}\frac{1}{x}\,dG(x) + \int_{|x|\leqslant L} x\,dG(x) = \gamma_L,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\mathsf{D}\xi'_{n1} \leqslant \lim_{n\to\infty} n\mathsf{M}(\xi'_{n1})^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} n\mathsf{M}\frac{1+L^2}{1+\xi_{n1}^2}\xi_{n1}^2 = (1+L^2)\int dG(x).$$

Поэтому, если $4c|\gamma_L| < \frac{\varepsilon}{4}$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant 4nc}\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_{ni}\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 4c\int\limits_{|x|>L}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) + \frac{4c(1+L^2)\int dG(x)}{\left(\frac{\varepsilon}{4} - 4c|\gamma_L|\right)^2}.$$

Значит, для достаточно малых $c$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 4c}|\xi_n(t) - \xi_n(0)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant Kc,$$

где $K$ — некоторая постоянная, так что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 4c}|\xi_n(t) - \xi_n(0)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant Kc.$$

Из последнего соотношения вытекает (3). ■

Рассмотрим в качестве следствий из этой общей теоремы некоторые конкретные предельные теоремы.

Следствие 1. *Пусть $a(t)$ и $b(t) > 0$ — непрерывные функции, $\alpha$ — вещественное число. Если выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{a\left(\frac{k}{n}\right) - \alpha b\left(\frac{k}{n}\right) < S_{nk} < a\left(\frac{k}{n}\right) + \alpha b\left(\frac{k}{n}\right),\ k = \overline{1, n}\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\{a(t) - \alpha b(t) < \xi(t) < a(t) + \alpha b(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

*для всех $\alpha > 0$, для которых правая часть последнего равенства является непрерывной функцией $\alpha$.*

Следствие 2. *Пусть $g(x)$ — непрерывная функция, определенная при $x \in (-\infty, \infty)$; тогда, если выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(S_{nk}) < \alpha\right\} = \mathsf{P}\left\{\int_0^1 g(\xi(t))\,dt < \alpha\right\}$$

*для всех $\alpha$, для которых*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 g(\xi(t))\,dt = \alpha\right\} = 0.$$

Доказательства этих утверждений получим, рассмотрев функционалы

$$f_1(x(\cdot)) = \sup_t \frac{1}{b(t)} |x(t) - a(t)|, \quad f_2(x(\cdot)) = \int_0^1 g(x(t))\,dt.$$

Введем функционал $\gamma_a(x(\cdot))$, равный нулю, если $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) < a$, и равный $x(\tau) - a$, если $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) \geqslant a$, где $\tau$ — такая точка отрезка $[0, 1]$, что $x(t) < a$ при $t < \tau$, а $x(\tau) \geqslant a$. $\gamma_a(x(\cdot))$ называется величиной первого перескока функции $x(\cdot)$ через уровень $a$.

Следствие 3. *Если $a$ таково, что для всех $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ $\mathsf{P}\{\sup\limits_{t_1 \leqslant s \leqslant t_2} \xi(s) = a\} = 0$, то распределение $\gamma_a(\xi_n(\cdot))$ сходится к распределению $\gamma_a(\xi(\cdot))$.*

Это утверждение вытекает из замечания 3 § 1 и того, что $\gamma_a(x(\cdot))$ непрерывно на всех $x(\cdot)$, для которых $a$ не является локальным максимумом.

# ПРИМЕЧАНИЯ

Нижеследующие примечания содержат некоторые указания на литературу по затронутым вопросам и не преследуют своей целью дать полную библиографию или осветить историю основных идей теории случайных процессов. Во многих случаях мы позволили себе не ссылаться на оригинальные труднодоступные работы, а отсылали читателя к более поздним учебникам и монографиям, содержащим библиографию по соответствующим вопросам.

## Глава I

**§ 1.** Систематическое изучение вопросов теории случайных процессов было начато в работах Е. Е. Слуцкого [1] и А. Н. Колмогорова [7], [8]. Главную роль в создании теории случайных процессов сыграли работы А. Н. Колмогорова [7], [8].

**§ 2.** Гауссовы процессы широко применяются во многих прикладных теоретико-вероятностиых задачах (см., например, Г. Крамер, М. Лидбеттер [1]), в задачах статистики, прогноза и фильтрации случайных процессов, в теории оптимального управления решениями дифференциальных уравнений, возмущаемых случайным процессом (Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [1], К. Острем [1]). Многомерное обобщение центральной предельной теоремы впервые было получено С. Н. Бернштейном [3].

**§ 3.** Впервые процесс броуновского движения рассматривал Л. Башелье [1]. Толчком к изучению произвольных процессов с независимыми приращениями послужила работа Б. Финетти [1]. А. Н. Колмогоров [4] нашел характеристическую функцию произвольного процесса с независимыми приращениями и конечным моментом второго порядка; общая формула принадлежит П. Леви [1].

**§ 4.** Марковские процессы с непрерывным временем (в широком смысле) и их основные типы были введены в работе А. Н. Колмогорова [8]. Теоремы существования решений уравнений Колмогорова впервые рассматривал В. Феллер [1], [2].

**§ 5.** Стационарные процессы в широком смысле были введены А. Я. Хинчиным [3]. Колебания со случайными амплитудами и фазами рассматривались во многих работах. См., например, Н. Н. Боголюбов [1]. Спектральное представление корреляционной функции стационарного в широком смысле процесса было получено А. Я. Хинчиным [3], многомерное обобщение дано Г. Крамером [1]. Формула для корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля содержится в работе Дж. Шенберга [1].

## Глава II

**§ 1.** Общепринятая в настоящее время теоретико-множественная аксиоматика теории вероятностей предложена А. Н. Колмогоровым в 1929 г. и изложена в его монографии [7]. По поводу теории меры и интеграла см. книги П. Халмоша [1], А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1]. Она изложена также в учебниках по теории вероятностей. П. Невё [1], М. Лоэва [1], П. Л. Хеннекена и А. Тортра [1].

**§ 2.** Основная теорема этого параграфа (теорема 5) доказана в монографии А. Н. Колмогорова [7] (для семейства случайных величин). Доказательство теоремы 6 можно найти, например, в книгах П. Халмоша [1], Ж. Невё [1].

**§ 3.** Теория условных вероятностей и условных математических ожиданий построена А. Н. Колмогоровым [7]. Дальнейшие усовершенствования принадлежат Дж. Л. Дубу [1].

**§ 4.** Общий закон «0 или 1» открыт А. Н. Колмогоровым [7].

## Глава III

**§ 1.** Мартингалы рассматривались разными авторами, но их систематическая теория многим обязана Дж. Л. Дубу [1]. Ему принадлежат основные неравенства для мартингалов, теорема о существовании предела, понятие полумартингала и другие результаты. Больше сведений о мартингалах можно найти в монографиях Дж. Л. Дуба [1], Мейера [1], Ж. Невё [2].

**§ 2.** Основные идеи и результаты этого параграфа принадлежат А. Н. Колмогорову и А. Я. Хинчину [1] и А. Н. Колмогорову [1]. Более подробно ряды независимых случайных величин рассмотрены в монографиях Дж. Л. Дуба [1], М. Лоэва [1], А. В. Скорохода [6].

**§ 3.** Возникновение эргодической теоремы связано с проблемами статистической механики. См. по этому поводу книгу А. Я. Хинчина [5]. Первые эргодические теоремы Дж. Неймана и Дж. Биркхофа послужили началом интенсивного развития теории. Обзор первого периода развития эргодической теории содержится в монографии Е. Хопфа [1]. Простое доказательство теоремы Биркхофа — Хинчина предложено А. Н. Колмогоровым [9]. Дальнейшее развитие эргодической теории освещено в книгах П. Халмоша [2], П. Биллингслея [1].

**§ 4.** Задачи теории восстановления неоднократно обсуждались в теоретичесих и прикладных теоретико-вероятностных работах. См. В. Феллер [6].

**§ 5.** Цепи Маркова с конечным числом состояний были введены (1906 г.) и изучены А. А. Марковым [1]. Общее определение цепи и процесса Маркова принадлежит А. Н. Колмогорову [8].

**§ 6.** Цепи Маркова со счетным числом состояний впервые изучались в работах А. Н. Колмогорова [6] и в дальнейшем многими авторами. См. В. Феллер [3], Чжун Кай-лай [1], Дж. Дж. Кемени, Дж. Л. Снелл, А. Кнапп [1].

## Глава IV

**§§ 1—3.** Возможность построения случайного процесса, стохастически эквивалентного данному, выборочные функции которого удовлетворяют определенным условиям регулярности, впервые рассматривали Е. Е. Слуцкий и А. Н. Колмогоров (см. работу Е. Е. Слуцкого [2]). В дальнейшей разработке возникающих здесь вопросов и разных вариантов аксиоматического определения случайной функции много существенных результатов принадлежит Дж. Л. Дубу. Ссылки на первоначальные работы содержатся в его монографии [1]. Основные идеи и теоремы §§ 2, 3 принадлежат Дж. Л. Дубу.

**§ 4.** Теорема 1 в несколько более слабой формулировке была доказана Н. Н. Ченцовым [1], теорема 2 — Дж. Кинни [1] (для марковских процессов). Отсутствие разрывов второго рода у стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями установил П. Леви [1].

**§ 5.** Теорема 2 доказана независимо Е. Б. Дынкиным [1] и Дж. Кинни [1] (для марковских процессов). Несколько более слабый вариант теоремы 6 принадлежит А. Н. Колмогорову и впервые опубликован в работе Е. Е. Слуцкого [2]; по поводу локальных свойств гауссовых процессов см. монографию Г. Крамера и М. Лидбеттера [1] и помещенный в ней обзор Ю. К. Беляева.

**§ 6.** Свойства выборочных функций полумартингалов рассматривал Дж. Л. Дуб [1].

## Глава V

**§ 1.** Введение в теорию гильбертова пространства можно найти в книге А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], более полное изложение — в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1].

**§ 2.** См. Е. Е. Слуцкий [1], М. Лоэв [1], [2].

**§ 3.** Теорию стохастических интегралов предложил Г. Крамер [1]; А. Н. Колмогоров впервые выяснил связь стохастических интегралов и теории спектральных представлений случайных функций с теорией гильбертова пространства [10], [11], [12].

**§ 4.** Теорема 1 принадлежит К. Карунену [1], теорема 2 — Г. Крамеру [1]. Более подробно о спектральной теории стационарных процессов см. монографии Е. Хеннана [1] и Г. Дженкинса и Д. Ваттса [1].

**§ 5.** Более общую теорию линейных преобразований случайных процессов можно построить с помощью теории обобщенных случайных процессов, предложенной И. М. Гельфандом и К. Ито (см. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин [1], К. Ито [5]).

**§ 6.** Основные результаты для стационарных последовательностей получены А. Н. Колмогоровым [12], для процессов — К. Каруненом [2].

## Глава VI

**§ 1.** Общая теория случайных блужданий изложена в книге Ф. Спицера [2], там же можно найти и указания на первоисточники. Условия ограниченности случайного блуждания и формулы для распределения максимума найдены Ф. Спицером [1]. Распределение величины и момента перескока изучалось Б. А. Рогозиным [1].

**§ 2.** Обобщенный процесс Пуассона был введен А. Я. Хинчиным [1]. Распределение величины и момента перескока через некоторый уровень изучалось в работах Б. А. Рогозина [2], Д. В. Гусака [1].

**§ 3.** Строгое построение винеровского процесса и изучение свойств его выборочных функций было проведено Н. Винером [1]. Условие непрерывности процесса с независимыми приращениями принадлежит А. Я. Хинчину [1], гл. I. Результаты теорем 2 и 3 вытекают из общих результатов И. Г. Петровского [1].

**§ 4.** Разложение процесса на непрерывную и скачкообразную составляющие проведено П. Леви [1]. Там получен и вывод общей формулы для характеристической функции процесса с независимыми приращениями. В частных случаях эта формула была получена Б. Финетти [1], А. Н. Колмогоровым [4]. Использованный в книге метод изучения процесса с помощью меры, построенной по скачкам, принадлежит К. Ито [1, 7].

**§ 5.** Рост однородных процессов с независимыми приращениями изучали А. Я. Хинчин [4], Б. В. Гнеденко [1], [2]. Закон повторного логарифма для винеровского процесса доказан А. Я. Хинчиным [1], гл. V.

## Глава VII

**§ 1.** Основой общей теории марковских процессов послужила работа А. Н. Колмогорова [8]. Дальнейший анализ определения марковского процесса проведен Дж. Л. Дубом [1]. Наиболее общее определение этого понятия приведено в книге Е. Б. Дынкина [4]. Понятие строгой марковости изучалось Дж. Л. Дубом [1], Е. Б. Дынкиным [5], Е. Б. Дынкиным и А. А. Юшкевичем [1]. Достаточное условие строгой марковости получено Е. Б. Дынкиным и А. А. Юшкевичем [1].

**§ 2.** Скачкообразные процессы с произвольным фазовым пространством изучены Дж. Л. Дубом, изложение его результатов имеется в его же книге [1].

**§ 3.** Процессы со счетным числом состояний, в том числе вывод уравнений Колмогорова — см. А. Н. Колмогоров [8]. Дифференцируемость вероятностей перехода установлена А. Н. Колмогоровым [13]. Теоремы существования решений уравнений А. Н. Колмогорова изучались В. Феллером [1], [2]. Общей теории однородных процессов со счетным множеством состояний посвящена книга К. Л. Чжуна [1].

**§ 4.** Многочисленные естественнонаучные примеры процессов Маркова, в том числе процессов рождения и гибели, можно найти в книге В. Феллера [3].

§ 5. Ветвящиеся процессы с дискретным временем впервые рассматривались в работе Г. Ватсона и В. Гальтона [1]. Общее определение ветвящегося процесса дано в статье А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева [1]. Для настоящего параграфа использована обзорная статья Б. А. Севастьянова [1].

## Глава VIII

Вероятностная трактовка явления диффузии рассмотрена А. Я. Хинчиным [1], гл. III. Стохастические дифференциальные уравнения для случайных процессов рассматривались С. Н. Бернштейном [1], И. И. Гихманом [1], [2], К. Ито [3], [4]. Здесь используется в основном терминология и обозначения К. Ито. Более общее изложение теории стохастических дифференциальных уравнений — в книге И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [1].

§ 1. Основные результаты этого параграфа принадлежат К. Ито [2], [6].

§ 2. Уравнения в такой форме рассматривал К. Ито [3], [4]; им доказана теорема существования и единственности, а также то, что решение будет процессом Маркова.

§ 3. Дифференцируемость решений стохастических уравнений по начальным данным установил И. И. Гихман [2].

§ 4. Идея вывода уравнений Колмогорова, используя дифференцируемость решения стохастического уравнения по начальным данным, принадлежит И. И. Гихману [2]. Вывод уравнений для распределения аддитивного функционала от процесса броуновского движения принадлежит М. Кацу [1], [2], а в общем случае — Е. Б. Дынкину [3].

§ 5. Применение дифференциальных уравнений к случайным блужданиям в ограниченной области предложено И. Г. Петровским [1]. Диффузионные процессы в ограниченных областях рассматривал А. Я. Хинчин [1], гл. III, IV. Распределения функционалов, связанных с временем достижения границ одномерным диффузионным процессом, изучал Р. З. Хасьминский [1]. Одномерные диффузионные процессы рассмотрены в книге И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [1].

§ 6. Условия абсолютной непрерывности мер и вид плотности для диффузионных процессов изучались И. В. Гирсановым [1] и А. В. Скороходом [4].

## Глава IX

Предельные теоремы для вероятностей событий, зависящих от всей траектории процесса (вероятностей того, что процесс остается в криволинейной полосе), рассматривали впервые А. Н. Колмогоров [3], [5], И. Г. Петровский [1] и А. Я. Хинчин [1]. Первая общая предельная теорема для произвольных непрерывных в метрике $\mathscr{C}$ функционалов получена М. Донскером [1] (в случае сходимости сумм одинаково распределенных независимых случайных величин к процессу броуновского движения).

§ 1. Вопросы слабой сходимости мер в метрических пространствах изучал Ю. В. Прохоров [1], [3].

**§ 2.** Общая предельная теорема для непрерывных процессов получена Ю. В. Прохоровым [1], [3].

**§ 3.** Предельные теоремы для различных частных случаев рассматривались А. Н. Колмогоровым [3], [5], М. Кацем и П. Эрдешем [1], [2]. Общая теорема принадлежит Ю. В. Прохорову [1], [3]. Частный случай (следствие) получен ранее М. Донскером [1].

**§ 4.** Конкретные случаи сходимости к диффузионным процессам рассматривал С. Н. Бернштейн [1], [3], А. Я. Хинчин [1], И. И. Гихман [4], [5], теоремы для $\mathscr{C}$-непрерывных функционалов — Г. Маруяма [1], Ю. В. Прохоров [2], А. В. Скороход [4], [5].

**§ 5.** Сходимость, рассмотренная в этом параграфе, введена А. В. Скороходом [1]. Интересная предельная теорема для процессов без разрывов второго рода получена Н. Н. Ченцовым [1].

**§ 6.** Предельная теорема для вероятности того, что последовательность сумм лежит в криволинейной полосе, получена И. И. Гихманом [3]. Общие теоремы для функционалов рассматривали А. В. Скороход [2], Ю. В. Прохоров [3].

# ЛИТЕРАТУРА


Ахиезер Н. И., Глазман И. М.
[1] Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.

Башелье Л. (Bachelier L.)
[1] Théorie de la spéculation, Ann. Sci. École Norm. Sup. 3 (1900), 21—86.

Бернштейн С. Н.
[1] Principes de la théorie des équations différentiales stochastiques, Труды Физ.-матем. ин-та им. Стеклова 5 (1934), 95—124.
[2] Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук 10 (1944), 65—114.
[3] Теория вероятностей, изд. 4, Гостехиздат, 1946.

Биллингслей П. (Billingsley P.)
[1] Эргодическая теория и информация, «Мир», 1969.

Боголюбов Н. Н.
[1] О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945.

Бохнер (Bochner S.)
[1] Harmonic analysis and the theorie of probability, Berkeley and Los Angelos, 1955.

Ватсон, Гальтон (Watson H. M., Galton W.)
[1] On the probability of the extinction of families, J. Antropol. Inst. 4 (1874), 138—144.

Винер (Wiener N.)
[1] Differential space, J. Math. Phys. Mass. Techn. 2 (1923), 131—174.
[2] Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949.

Гельфанд И. М.
[1] Обобщенные случайные процессы, Докл. АН СССР 100 (1955), 853—856.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.
[1] Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, 1961.

Гирсанов И. В.
[1] О преобразованиях одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, Теория вероятн. и ее примен. 5 (1960), 314—330.

Гихман И. И.
[1] О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями, Укр. матем. журн. 2, № 3 (1950), 45—69.
[2] К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, Укр. матем. журн. 2, № 4 (1950), 37—63; 3 (1951), 317—339.

[3] Об одной теореме А. Н. Колмогорова, Научн. зап. Киевск. ун-та, Матем. сб. **7** (1958), 76—94.
[4] О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах статистики, Укр. матем. журн. **5** (1953), 413—433.
[5] Процессы Маркова в задачах математической статистики, Укр. матем. журн. **6** (1954), 28—36.

Гихман И. И., Скороход А. В.
[1] Стохастические дифференциальные уравнения, «Наукова думка», 1968.

Гнеденко Б. В.
[1] О росте однородных случайных процессов с независимыми приращениями, Изв. АН СССР, сер. матем., **7** (1943), 89—110.
[2] К теории роста однородных случайных процессов с независимыми приращениями, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР **10** (1948), 60—82.
[3] Курс теории вероятностей, изд. 3, Физматгиз, 1961.

Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.
[1] Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.

Гренандер, Сегё (Grenander W., Szegö G.)
[1] Теплицевы формы и их применения, ИЛ, 1961.

Гусак Д. В.
[1] О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями, Теория вероятн. и ее примен. **14** (1969), 15—23.

Дженкинс, Ваттс (Jenkins G. M., Watts D. G.)
[1] Спектральный анализ и его применения, вып. 1—2, «Мир», 1971.

Донскер (Donsker M.)
[1] An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1951), 1—12.
[2] Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogoroff — Smirnov theorems, Ann. Math. Stat. **23** (1952), 277—281.

Дуб Дж. Л. (Doob)
[1] Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.

Дынкин Е. Б.
[1] Критерий непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952), 563—572.
[2] Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955), 247—266.
[3] Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, Докл. АН СССР **104** (1955), 691—694.
[4] Основания теории марковских процессов, Физматгиз, 1959.
[5] Марковские процессы, Физматгиз, 1963.

Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.
[1] Строго марковские процессы, Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 149—155.

Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.
[1] Гауссовские случайные процессы, «Наука», 1970.

Иржина М.
[1] Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов, Чехосл. матем. журн. **7** (1957), 130—153.

Ито (Ito K.)
[1] On stochastic processes, Jap. J. Math. **18** (1942), 261—301.

[2] Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 519—524.
[3] On stochastic integral equation, Proc. Jap. Acad. 1—4 (1946), 32—35.
[4] On stochastic differential equation in a differentiable manifold, Nagoya Math. J. (1950), 35—47.
[5] Stationary random distribution, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto **28** (1954), 209—223.
[6] Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов, Математика (сб. переводов) **3,** № 5 (1959), 131—141.
[7] Вероятностные процессы, вып. 1, ИЛ, 1960, вып. 2, ИЛ, 1963.

Карунен (Karhunen K.)
[1] Ueber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, Math., Phys., **37** (1947), 3—79.
[2] Über die Structur stationären zufälliger Functionen, Ark. Math. **1** (1950), 141—160.

Кац (Kac M.)
[1] On distributions of certain functionals, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 1—13.
[2] О некоторых связях между теорией вероятностей, дифференциальными и интегральными уравнениями, Математика (сб. переводов) **1,** № 2 (1957), 95—124.

Кац, Эрдеш (Kac M., Erdös P.)
[1] On certain limit theorems of theory of probability, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1946), 292—302.
[2] On the number of positive sums of independent random variables, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1946), 1011—1020.

Кемени, Снелл, Кнапп (Kemeny J. G., Snell J. L., Knapp A. W.)
[1] Denumerable Markov chains, D. van Nostrand Co., 1966.

Кинни (Kinney J. H.)
[1] Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 280—302.

Колмогоров А. Н.
[1] Ueber die Summen durch den Zufall bestimmer unabhängiger Grössen, Math. Ann. **99** (1928), 309—319; **100** (1929), 484—488.
[2] Общая теория меры и исчисление вероятностей, Труды Комм. акад., разд. матем. **1** (1929), 8—21.
[3] Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes, Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук (1931), 959—962.
[4] Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, Atti Acad. Lincei **15** (1932), 805—808, 866—869.
[5] Ueber die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitrechnung, Известия АН СССР, отделение матем. и естеств. наук (1933), 363—372.
[6] Цепи Маркова со счетным числом состояний, Бюлл. МГУ **1,** № 3 (1937), 1—16.
[7] Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
[8] Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук **5** (1938), 5—41.
[9] Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина, Успехи матем. наук **5** (1938), 52—56.
[10] Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений, Докл. АН СССР **26** (1940), 6—9.
[11] Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве, Докл. АН СССР **26** (1940), 115—118.
[12] Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ **2,** № 6 (1941), 1—40.

[13] К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний, Учен. зап. МГУ, сер. матем., **4**, вып. 148 (1951), 53—59.

Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А.
[1] Ветвящиеся случайные процессы, Докл. АН СССР **56** (1947), 7—10.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
[1] Элементы теории функций и функционального анализа, изд. 3, «Наука», 1972.

Колмогоров А. Н., Хинчин А. Я.
[1] Ueber Konvergenz von Rhein deren Glieder durch den Zufalle bestimmet werden, Матем. сб. **32** (1952), 668—677.

Крамер (Cramer H.)
[1] On the theorie of random processes, Ann. Math. **41** (1940), 215—230.

Крамер, Лидбеттер (Cramer H., Lidbetter.)
[1] Стационарные случайные процессы, «Мир», 1969.

Крейн М. Г.
[1] Об одной интерполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, Докл. АН СССР **46** (1944), 306—309.
[2] Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов, Докл. АН СССР **94** (1954), 13—16.

Леви (Levy P.)
[1] Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoiries indépendentes, Ann. Scuola Norm. Pisa **2**, № 3 (1934), 337—366.
[2] Sur certain processes stochastiques homogenes, Comp. Math. 7 (1939), 283—339.
[3] Стохастические процессы и броуновское движение, «Наука», 1972.

Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.
[1] Статистика случайных процессов, «Наука», 1974.

Лоэв (Loeve M.)
[1] Fonctions aleatoires du second order (Добавление к книге П. Леви [3]).
[2] Теория вероятностей, ИЛ, 1962.

Марков А. А.
[1] Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга, Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанском ун-те (2) **15** (1906), 135—156.

Маруяма Г.
[1] Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения, Математика (сб. переводов) **1**, № 2 (1957), 125—159.

Мейер (Meyer Paul A.)
[1] Вероятность и потенциалы, «Мир», 1973.

Невё (Neveu J.)
[1] Математические основы теории вероятностей, «Мир», 1969.
[2] Martingales a temps discret, Masson et Co, Paris, 1972.

Острем К. (Ostrem C.)
[1] Введение в стохастическую теорию управления, «Мир», 1973.

Петров В. В.
[1] Суммы независимых случайных величин, «Наука», 1972.

Петровский И. Г.
[1] Ueber das Irrfahrproblem, Math. Ann **109** (1934), 425—444.

Привалов И. И.
[1] Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950.

П р о х о р о в Ю. В.
[1] Распределение вероятностей в функциональных пространствах, Успехи матем. наук 8, № 3 (1953), 165—167.
[2] Методы функционального анализа в предельных теоремах теории вероятностей, Вестн. Ленинград. ун-та 11 (1954), 44.
[3] Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятн. и ее примен. 1 (1956), 177—238.

П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А.
[1] Теория вероятностей, «Наука», 1973.

П у г а ч е в В. С.
[1] Теория случайных функций и ее применения к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.

Р е й т е р (Reuter G. E. H.)
[1] Denumerable Markov processes and the associated contraction semi-groups on L, Acta Math. 97 (1957), 1—46.

Р о г о з и н Б. А.
[1] Распределение величины первого перескока, Теория вероятн. и ее примен. 9 (1964), 498—515.
[2] О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями, Теория вероятн. и ее примен. 11 (1966), 656—670.

Р о з а н о в Ю. А.
[1] Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.

С е в а с т ь я н о в Б. А.
[1] Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук 6, № 6 (1951), 47—99.
[2] Ветвящиеся процессы, «Наука», 1971.

С к о р о х о д А. В.
[1] Предельные теоремы для случайных процессов, Теория вероятн. и ее примен. 1 (1956), 289—319.
[2] Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями, Теория вероятн. и ее примен. 2 (1957), 145—177.
[3] Предельные торемы для процессов Маркова, Теория вероятн. и ее примен. 3 (1958), 217—264.
[4] О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, Теория вероятн. и ее примен. 5 (1960), 45—53.
[5] Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киевск. ун-та, 1961.
[6] Случайные процессы с независимыми приращениями, Физматгиз, 1963.

С л у ц к и й Е. Е.
[1] Sur les fonctions éventelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastique, Comptes Rendus Acad. Sci. 187 (1928), 370—372.
[2] Несколько предложений к теории случайных функций, Труды Ср.-Аз. ун-та, сер. матем. (5), 31 (1949), 3—15.

С п и ц е р (Spitzer F.)
[1] A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 323—339.
[2] Принципы случайного блуждания, «Мир», 1969.

Ф е л л е р (Feller W.)
[1] Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann. 113 (1936), 113—160.
[2] On integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 488—515.
[3] Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, 1964.
[4] Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 1—31.

[5] The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Ann. Math. **60** (1954), 417—435.
[6] Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, «Мир», 1967.

Финетти (Finetti B.)
[1] Sulle funzioni a incremento aleatorio, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis.-Mat. Nat. (6), **10** (1929), 163—168.

Халмош (Halmos P.)
[1] Теория меры, ИЛ, 1953.
[2] Лекции по эргодической теории, ИЛ, 1959.

Харрис (Harris E. T.)
[1] Some mathematical models for branching processes, Proc. II Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab., 1951, 305—328.
[2] Теория ветвящихся случайных процессов, «Мир», 1966.

Хасьминский Р. З.
[1] Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа, Докл. АН СССР **104** (1955), 22—25.

Хеннан (Hannan E. J.)
[1] Многомерные временные ряды, «Мир», 1974.

Хеннекен, Тортра (Hennequin P., Tortrat A.)
[1] Теория вероятностей и некоторые ее применения, «Наука», 1974.

Хинчин А. Я.
[1] Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
[2] Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsetze, Матем. сб. **2** (1937), 79—120.
[3] Теория корреляции стационарных случайных процессов, Успехи матем. наук **5** (1938), 42—51.
[4] О локальном росте стохастических процессов без последействия, Изв. АН СССР, сер. матем., (1939), 487—508.
[5] Математические основания статистической механики, Гостехиздат, 1943.

Хопф (Hopf E.)
[1] Эргодическая теория, Успехи матем. наук **4**, № 1 (1949), 113—182.

Ченцов Н. Н.
[1] Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода, Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 154—161.

Чжун К. Л. (Chung K. L.)
[1] Однородные цепи Маркова, «Мир», 1964.

Шварц (Schwartz L.)
[1] Theorie des distributions, I, II, Paris, 1950, 1951.

Шенберг (Schönberg J. L.)
[1] Metric spaces and completely monotone functions, Ann. Math. **39** (1939), 811—841.

Эдвардс (Edwards)
[1] Функциональный анализ, «Мир», 1969.

Эйнштейн, Смолуховский (Einstein A., Smoluchowski M.)
[1] Броуновское движение, ОНТИ, 1936.

Яглом А. М.
[1] Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук **7**, № 5 (1955), 3—168.

# ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\forall x \in X$ — для всех $x \in X$,
$\exists x \in X$ — существует $x \in X$,
$\varnothing$ — пустое множество,
$A \subset B$ — $B$ включает $A$ (событие $A$ влечет событие $B$),
$\bigcup$ — объединение множеств (сумма событий),
$\bigcap$ — пересечение множеств (совмещение событий),
$A \setminus B$ — разность множеств $A$ и $B$,
$\overline{A}$ — дополнение множества $A$,
$\{x\colon A\}$ — множество элементов $x$, удовлетворяющих соотношению $A$,
$\chi_A$ или $\chi(A)$ — индикатор события (множества) $A$,
$\mathscr{R}^d$ — евклидово пространство размерности $d$,
$h \uparrow a$ $(h \downarrow a)$ — $h$ стремится к $a$, возрастая (убывая),
$(x, y)$ — скалярное произведение векторов $x$ и $y$,
$\delta_{ij}$ — равно 1 при $i = j$, равно 0 при $i \neq j$,
$a \vee b$ $(a \wedge b)$ — наибольшее (наименьшее) из чисел $a$ и $b$,
$\mathbf{P}\{A\}$ — вероятность события $A$,
$\mathbf{M}\xi$ — математическое ожидание величины $\xi$,
$\mathbf{D}\xi$ — дисперсия величины $\xi$.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

*Иосиф Ильич Гихман,*
*Анатолий Владимирович Скороход*

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ