

# СПРАВОЧНОЕ РУКОВОДСТВО ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И АСТРОДИНАМИКЕ

М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976864 стр.

Настоящее издание является справочным руководством по классической и прикладной небесной механике. Оно существенно отличается от первого издания, увидевшего свет в 1971 году. В данном издании введена новая часть (часть IX), посвященная движению небесных тел около центра масс. Другие разделы небесной механики, охватывающие теорию невозмущенного и возмущенного движений небесных тел, аналитические, численные и качественные методы, значительно расширены и дополнены.

В новом изложении представлена часть VI, посвященная теории движения искусственных спутников Земли и теории гравитационного поля Земли, теория движения Луны и качественная небесная механика, составляющая содержание части X.

Предисловие ко второму изданию	17
Предисловие к первому изданию	19
Часть I. СФЕРИЧЕСКАЯ И ЭФЕМЕРИДНАЯ АСТРОНОМИЯ.	21
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ (АБАЛАКИН В.К.)	
<b>Глава 1. Системы координат</b>	<b>21</b>
§ 1.01. Небесная сфера	21
§ 1.02. Главные круги, линии и точки небесной сферы	22
§ 1.03. Горизонтальная система координат	24
§ 1.04. Экваториальные системы координат	25
§ 1.05. Эклиптическая система координат	27
§ 1.06. Галактическая система координат	28
§ 1.07. Основные формулы сферической тригонометрии	29
§ 1.08. Соотношения между различными астрономическими координатами	34
§ 1.09. Прямоугольные системы координат	37
§ 1.10. Системы географических координат	45
§ 1.11. Соотношения между астрономическими и геодезическими координатами	50
§ 1.12. Планетоцентрические системы координат	58
§ 1.13. Марсоцентрическая и ареографическая системы координат	64
§ 1.14. Юпитероцентрическая и зенографическая системы координат	68
§ 1.15. Сатурноцентрическая система координат	70
§ 1.16. Системы координат, определяемые осевым вращением Солнца, Венеры, Урана и Нептуна	70
§ 1.17. Луноцентрическая и селенографическая системы координат	72
§ 1.18. Орбитальная система координат	82
§ 1.19. Объектоцентрическая система координат	80
<b>Глава 2. Редукционные вычисления</b>	<b>85</b>
§ 2.01. Прецессия	85

§ 2.02. Редукция звездных положений с учетом прецессии и собственного движения	89
§ 2.03. Нутация	91
§ 2.04. Годичная абберрация	97
§ 2.05. Сводка основных формул редукции звездных положений	101
§ 2.06. Учет влияния членов второго порядка	103
§ 2.07. Годичный параллакс	103
§ 2.08. Точные формулы для учета прецессии	104
§ 2.09. Формулы учета прецессии в прямоугольных экваториальных координатах	105
§ 2.10. Формула учета прецессии в прямоугольных эклиптических координатах	107
§ 2.11. Совместный учет прецессии и нутации в прямоугольных экваториальных координатах	109
§ 2.12. Формулы учета прецессии в координатах и элементах орбит при умеренных и малых разностях эпох	111
§ 2.13. Абберрация света	114
§ 2.14. Приведение звезды на видимое место в прямоугольных координатах	118
§ 2.15. Об учете орбитального движения компонент двойных звезд	121
§ 2.16. Параллакс	123
§ 2.17. Учет суточного параллакса в горизонтальной системе	125
§ 2.18. Формулы учета суточного параллакса в экваториальной системе координат	126
§ 2.19. Формулы учета суточного параллакса в координатах Солнца и планет	128
§ 2.20. Формулы учета суточного параллакса в системе эклиптических координат	130
§ 2.21. Астрономическая рефракция	131
§ 2.22. Формулы учета рефракции в координатах небесных объектов	136
§ 2.23. Рефракция при наблюдении небесных объектов, расположенных на конечных расстояниях от Земли	137
§ 2.24. Дифференциальная прецессия и нутация. Дифференциальная абберрация и дифференциальный параллакс	139
§ 2.25. Сравнение теории с наблюдениями	140
§ 2.26. Каталоги звездных положений	143
§ 2.27. Геоцентрические координаты нуля-пункта селенографической системы отсчета	145
§ 2.28. Вычисление топоцентрических расстояний до точек лунной поверхности	146
<b>Глава 3. Время и его измерение</b>	<b>149</b>
§ 3.01. Основные понятия и определения	149
§ 3.02. Звездное и солнечное время. Всемирное время	152
§ 3.03. Квазиравномерное всемирное время	156

§ 3.04. Связь между всемирным временем и звездным гринвичским временем	157
§ 3.05. Эфемеридное время	161
§ 3.06. Поправка за эфемеридное время	165
§ 3.07. Атомное время	167
§ 3.08. Юлианский период. Юлианские дни	174
<b>Глава 4. Астрономические постоянные</b>	<b>176</b>
§ 4.01. Новая система астрономических постоянных (система астрономических постоянных МАС 1964)	177
§ 4.02. Задачи астродинамики и астрономические постоянные	184
§ 4.03. Результаты радиолокационных определений астрономической единицы в км.	185
§ 4.04. Значения масс больших планет	185
§ 4.05. Астродинамические характеристики тел Солнечной системы	188
§ 4.06. Астродинамические постоянные, связанные с Землей	195
§ 4.07. Астродинамические постоянные, связанные с Луной	198
§ 4.08. Либрация Луны	203
Литература к части I	208
Часть II. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ (АКСЕНОВ Е.П.)	211
<b>Глава 1. Общая теория невозмущенного кемеровского движения</b>	<b>211</b>
§ 1.01. Постановка задачи. Различные формы дифференциальных уравнений движения	211
§ 1.02. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения	214
§ 1.03. Типы невозмущенного кеплеровского движения	216
§ 1.04. Элементы орбиты	218
§ 1.05. Формулы, связывающие постоянные интегрирования и элементы орбиты	220
<b>Глава 2. Основные формулы невозмущенного кеплеровского движения</b>	<b>221</b>
§ 2.01. Эллиптическое движение	221
§ 2.02. Круговое движение	224
§ 2.03. Гиперболическое движение	225
§ 2.04. Параболическое движение	227
§ 2.05. Прямолинейное движение	229
§ 2.06. Вычисление эфемерид планет и комет	230
<b>Глава 3. Разложение координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды</b>	<b>231</b>
§ 3.01. Разложение функций эксцентрической аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии	231
§ 3.02. Разложение функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии	234
§ 3.03. Первые члены рядов по кратным средней аномалии для некоторых функций	235

§ 3.04. Формула Лагранжа	236
§ 3.05. Ряды по степеням эксцентриситета	237
§ 3.06. Тригонометрические ряды по кратным эксцентриситетной аномалии	239
§ 3.07. Ряды по кратным истинной аномалии	241
§ 3.08. Разложения координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды по степеням времени	242
§ 3.09. Степенные ряды в случае эллиптического движения	244
Литература к части II	245
Часть III. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТ (РЯБОВ Ю.А.)	247
<b>Глава 1. Вычисление координат невозмущенного кеплеровского движения по элементам орбиты</b>	<b>247</b>
§ 1.01. Вычисление орбитальных координат в случае эллиптической или гиперболической орбит	247
§ 1.02. Вычисление орбитальных координат в случае параболической орбиты	248
§ 1.03. Вычисление орбитальных координат в случае орбит, эксцентриситет которых близок к единице	248
§ 1.04. Вычисление гелиоцентрических прямоугольных эклиптических и экваториальных координат	249
<b>Глава 2. Определение орбит</b>	<b>250</b>
§ 2.01. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит	250
§ 2.02. Особые случаи, встречающиеся при вычислении гелиоцентрических координат	254
§ 2.03. Определение гелиоцентрических положений по четырем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит	255
§ 2.04. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае параболической орбиты	257
§ 2.05. Вычисление элементов эллиптической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	260
§ 2.06. Определение элементов гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	262
§ 2.07. Определение элементов параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	263
§ 2.08. Уравнения Ламберта и Эйлера	264
§ 2.09. Определение элементов эллиптической или гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям с помощью уравнения Ламберта	265
§ 2.10. Определение элементов круговой орбиты по двум наблюдениям	268
§ 2.11. Вычисление элементов гелиоцентрической орбиты по положению и скорости в начальный момент	270



<b>Глава 3. Улучшение первоначальной орбиты</b>	<b>273</b>
§ 3.01. Дифференциальное исправление орбит. Постановка, задачи	273
§ 3.02. Выражения для производных от координат по элементам (или по функциям элементов)	275
§ 3.03. Условные уравнения, составляемые по наблюдениям долготы и широты небесного тела	281
<b>Глава 4. Определение и улучшение элементов орбит искусственных спутников Земли</b>	<b>283</b>
§ 4.01. Определение элементов орбит ИСЗ по положению и скорости в момент выхода на орбиту	283
§ 4.02. Определение предварительных элементов орбиты ИСЗ по наблюдениям	285
§ 4.03. Улучшение орбит ИСЗ	287
Литература к части III	287
<b>Часть IV. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ (ГРЕБЕНИКОВ Е. Д., РЯБОВ Ю. А.)</b>	<b>288</b>
<b>Глава 1. Дифференциальные уравнения движения задачи л тел в координатах</b>	<b>288</b>
§ 1.01. Уравнения абсолютного движения	288
§ 1.02. Уравнение Лагранжа—Якоби	290
§ 1.03. Уравнения движения в барицентрических прямоугольных координатах	291
§ 1.04. Уравнения движения в координатах Якоби	292
§ 1.05. Уравнения относительного движения в прямоугольных координатах	293
§ 1.06. Уравнения движения в идеальных прямоугольных координатах Ганзена	295
§ 1.07. Уравнения абсолютного движения в цилиндрических координатах	297
§ 1.08. Уравнения относительного движения в цилиндрических координатах	299
§ 1.09. Уравнения абсолютного движения в сферических координатах	301
§ 1.10. Уравнения относительного движения в сферических координатах	302
§ 1.11. Уравнения движения в полярных координатах Ганзена	305
§ 1.12. Уравнения Клеро—Лапласа	306
§ 1.13. Общее правило составления канонических уравнений	307
§ 1.14. Первая каноническая форма уравнений абсолютного движения	309
§ 1.15. Вторая каноническая форма уравнений абсолютного движения	310
§ 1.16. Третья каноническая форма уравнений абсолютного движения	312
§ 1.17. Первая каноническая форма уравнений относительного движения	313
§ 1.18. Вторая каноническая форма уравнений относительного движения	314
§ 1.19. Третья каноническая форма уравнений относительного движения	316
§ 1.20. Уравнение Гамильтона—Якоби. Метод Гамильтона—Якоби	318
§ 1.21. Уравнения движения системы в векторной форме	319
<b>Глава 2. Дифференциальные уравнения поступательно-</b>	<b>321</b>

<b>вращательного движения небесных тел</b>	
§ 2.01. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера	321
§ 2.02. Силовая функция системы тел	323
§ 2.03. Разложение силовой функции двух тел	324
§ 2.04. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в абсолютной прямоугольной системе координат	326
§ 2.05. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в относительной прямоугольной системе координат	328
§ 2.06. Каноническая форма уравнений поступательно-вращательного движения системы тел	330
<b>Глава 3. Дифференциальные уравнения возмущенного движения тела для различных систем оскулирующих элементов</b>	<b>332</b>
§ 3.01. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных	332
§ 3.02. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай)	334
§ 3.03. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов	336
§ 3.04. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай)	337
§ 3.05. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов	338
§ 3.06. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Якоби	339
§ 3.07. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Делоне	340
§ 3.08. Две системы канонических элементов Пуанкаре	340
§ 3.09. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов	342
§ 3.10. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов	343
§ 3.11. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай)	344
§ 3.12. Связь между прямоугольными координатами движущейся точки и различными системами канонических элементов	345
<b>Глава 4. Дифференциальные уравнения возмущенного движения задачи n тел для различных систем оскулирующих элементов</b>	<b>347</b>
§ 4.01. Уравнения Ньютона для кемеровских оскулирующих элементов (общий случай)	347
§ 4.02. Уравнения Ньютона для эллиптических кемеровских оскулирующих элементов	349
§ 4.03. Уравнения Лагранжа для кемеровских оскулирующих элементов (общий случай)	350
§ 4.04. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов	350
§ 4.05. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах	351

Якоби	
§ 4.06. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах Делоне	353
§ 4.07. Две системы канонических элементов Пуанкаре	353
§ 4.08. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов	355
§ 4.09. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов	356
§ 4.10. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай)	357
<b>Глава 5. Специальные функции</b>	<b>359</b>
§ 5.01. Эллиптические интегралы и эллиптические функции	359
§ 5.02. Гипергеометрический ряд и гипергеометрическая функция	366
§ 5.03. Полиномы Лежандра. Функции Лежандра	368
§ 5.04. Присоединенные функции Лежандра	371
§ 5.05. Сферические функции	373
§ 5.06. Цилиндрические функции. Функции Бесселя	375
§ 5.07. Функции Ламе	379
§ 5.08. Полиномы Гегенбауэра. Коэффициенты Лапласа	380
§ 5.09. Числа Коши	384
<b>Глава 6. Разложение возмущающей функции</b>	<b>385</b>
§ 6.01. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай круговых орбит)	385
§ 6.02. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай малых эксцентриситетов и взаимного наклона)	390
§ 6.03. Разложение возмущающей функции в случае произвольного взаимного наклона	400
§ 6.04. Вековая часть возмущающей функции в двухпланетной задаче	402
§ 6.05. Численные методы разложения возмущающей функции	404
§ 6.06. Полуаналитический метод Брауэра—Клеменса разложения возмущающей функции	405
<b>Глава 7. Аналитические методы вычисления возмущений координат</b>	<b>408</b>
§ 7.01. Метод Хилла	408
§ 7.02. Метод Ганзена	412
§ 7.03. Метод Брауэра	415
§ 7.04. Метод Лапласа—Ньюкома	419
<b>Глава 8. Аналитические методы вычисления возмущений элементов</b>	<b>421</b>
§ 8.01. Общий вид. возмущений элементов. Порядок, степень, ранг и класс возмущений	421
§ 8.02. Метод Гаусса вычисления вековых возмущений первого порядка	422
§ 8.03. Метод Лагранжа определения вековых возмущений в двухпланетной задаче	424
§ 8.04. Основы метода Делоне	426
§ 8.05. Связь между возмущениями координат и возмущениями элементов	430

<b>Глава 9. Методы теории возмущений, основанные на схемах осреднения</b>	<b>432</b>
§ 9.01. Основные схемы осреднения возмущающей функции в двухпланетной задаче	432
§ 9.02. Уравнения осредненных схем ограниченной круговой задачи трех тел, определяющие промежуточную орбиту (нулевое приближение). Их первые интегралы	436
§ 9.03. Разложение возмущающей функции для схем осреднения	440
§ 9.04. Основы метода теории возмущений	442
<b>Глава 10. Теория движения Луны</b>	<b>443</b>
§ 10.01. Уравнения основной проблемы в теории движения Луны	444
§ 10.02. Разложение возмущающей функции в основной проблеме теории движения Луны	445
§ 10.03. Решение Делоне основной проблемы в теории движения Луны	447
§ 10.04. Основные этапы построения теории Хилла — Брауна движения Луны	458
§ 10.05. Промежуточная орбита в теории Хилла — Брауна	462
§ 10.06. Общее решение уравнений основной проблемы в теории Хилла — Брауна	465
§ 10.07. Переход к сферическим координатам	467
§ 10.08. Численные значения постоянных интегрирования и параметров в теории Хилла—Брауна	468
§ 10.09. Окончательные выражения для долготы $V$ , широты $\beta$ и синуса параллакса $\sin p_L$ , соответствующие решению основной проблемы	470
§ 10.10. Возмущения Луны, обусловленные притяжением планет, фигурами Земли и Луны	477
§ 10.11. Уточнение теории движений Луны Хилла — Брауна	481
<b>Глава 11. Теория движения больших планет</b>	<b>484</b>
§ 11.01. Внутренние планеты	487
§ 11.02. Внешние планеты	493
§ 11.03. Полиномиальное представление оскулирующих элементов орбит внешних планет	498
§ 11.04. Полиномичльное представление прямоугольных гелиоцентрических координат Юпитера и Сатурна	501
§ 11.05. Тригонометрическая теория вековых возмущений орбит больших планет	504
<b>Глава 12. Движение малых тел Солнечной системы</b>	<b>508</b>
§ 12.01. Невозмущенное движение спутников	509
§ 12.02. Возмущения оскулирующих элементов орбит спутников, вызываемые сжатием планеты	510
§ 12.03. Возмущения в движении спутников, вызываемые притяжением Солнца	513
§ 12.04. Общие сведения о характере движения малых планет	513

§ 12.05. Возмущенное движение малых планет	514
§ 12.06. Общие сведения о движении комет	517
§ 12.07. Возмущенное движение комет	518
Литература к части IV	519
Часть V. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ (ГРЕБЕНИКОВ Е. А.)	524
<b>Глава 1. Неограниченная задача трех тел</b>	<b>524</b>
§ 1.01. Различные формы дифференциальных уравнений движения задачи трех тел	524
§ 1.02. Лагранжевы решения. Точки либрации	527
<b>Глава 2. Ограниченная круговая задача трех тел</b>	<b>533</b>
§ 2.01. Дифференциальные уравнения движения. Интеграл Якоби	533
§ 2.02. Поверхность нулевой относительной скорости	534
§ 2.03. Лагранжевы решения ограниченной круговой задачи трех тел. Точки либрации	535
§ 2.04. Различные гравитационные сферы	536
§ 2.05. Периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел	539
§ 2.06. Критерий Тиссерана	542
§ 2.07. Уравнения ограниченной круговой задачи в эллипсоидальных переменных	542
§ 2.08. Уравнение Гамильтона — Якоби в эллипсоидальных переменных	546
§ 2.09. Понижение порядка системы уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел	547
<b>Глава 3. Другие ограниченные задачи трех тел</b>	<b>548</b>
§ 3.01. Общий случай ограниченной задачи трех тел	548
§ 3.02. Задача двух неподвижных центров	549
§ 3.03. Задача Хилла	551
Литература к части V	552
Часть VI. ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ (АКСЕНОВ Е. П.)	554
<b>Глава 1. Гравитационное поле Земли. Дифференциальные уравнения движения искусственного спутника</b>	<b>555</b>
§ 1.01. Потенциал притяжения Земли	555
§ 1.02. Стандартная Земля	559
§ 1.03. Дифференциальные уравнения движения спутника	562
§ 1.04. Элементы орбиты ИСЗ. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов	563
<b>Глава 2. Возмущения, вызываемые второй зональной гармоникой геопотенциала</b>	<b>565</b>
§ 2.01. Возмущения от второй зональной гармоники как функции средней аномалии	565
§ 2.02. Возмущения от второй зональной гармоники как функции истинной аномалии	570
§ 2.03. Случай орбит с малыми эксцентриситетами	573
<b>Глава 3. Теория промежуточных орбит ИСЗ</b>	<b>577</b>

§ 3.01. Задачи Штерна, Гарфинкеля и Акснеса	577
§ 3.02. Задачи Баррара, Винти и Кислика	581
§ 3.03. Обобщенная задача двух неподвижных центров	584
§ 3.04. Промежуточная орбита, основанная на обобщенной задаче двух неподвижных центров	588
§ 3.05. Дифференциальные уравнения для элементов промежуточной орбиты	591
<b>Глава 4. Возмущения гравитационной природы</b>	<b>593</b>
§ 4.01. Возмущения от зональных гармоник высших порядков	593
§ 4.02. Возмущения от зональной гармонике произвольного порядка	597
§ 4.03. Возмущения от тессеральных и секториальных гармоник	601
§ 4.04. Лунно-солнечные возмущения	603
§ 4.05. Определение постоянных интегрирования	607
§ 4.06. Вычисление возмущенных координат спутника	608
<b>Глава 5. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы и световым давлением</b>	<b>609</b>
§ 5.01. Плотность атмосферы	609
§ 5.02. Стандартная атмосфера	612
§ 5.03. Сила сопротивления атмосферы	612
§ 5.04. Основные возмущения от сопротивления атмосферы	613
§ 5.05. Продолжительность жизни спутника	614
§ 5.06. Эволюция орбиты на больших промежутках времени	616
§ 5.07. Сила светового давления	617
§ 5.08. Возмущения от светового давления (без учета тени)	618
§ 5.09. Возмущения от светового давления (с учетом тени)	620
§ 5.10. Теневая функция	622
<b>Глава 6. Другие возмущения в движении ИСЗ</b>	<b>625</b>
§ 6.01. Возмущения, вызываемые прецессией и нутацией Экваториальной плоскости Земли	625
§ 6.02. Возмущения, вызываемые приливной деформацией Земли	628
§ 6.03. Релятивистские эффекты. Влияние электромагнитных сил и притяжения атмосферы	630
Литература к части VI	632
Часть VII. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ (РЯБОВ Ю. А.)	635
<b>Глава 1. Интерполирование и приближение функций</b>	<b>635</b>
§ 1.01. Таблица разностей функции	635
§ 1.02. Интерполяционные формулы	637
§ 1.03. Остаточные члены интерполяционных формул	639
§ 1.04. Обратное интерполирование	642
§ 1.05. Интерполирование функции двух переменных	643
§ 1.06. Приближение функций с помощью сплайнов	644
§ 1.07. Среднеквадратичные приближения функций	645
§ 1.08. Сглаживание табличных значений функции	647
§ 1.09. Равномерные приближения	648

§ 1.10. Аппроксимация периодических функций с известным периодом тригонометрическими полиномами по методу наименьших квадратов	649
§ 1.11. Аппроксимация условно-периодических функций с известными частотами полиномом Фурье по методу наименьших квадратов	650
§ 1.12. Определение неизвестных частот периодической или условнопериодической функции по совокупности табличных данных	651
§ 1.13. Выделение «вековой части» функции по совокупности табличных значений	653
<b>Глава 2. Численное дифференцирование и интегрирование</b>	<b>655</b>
§ 2.01. Численное дифференцирование с помощью интерполяционных формул	655
§ 2.02. Другие формулы численного дифференцирования	657
§ 2.03. Численное интегрирование функции по таблице ее значений с постоянным шагом	658
§ 2.04. Квадратурные формулы Гаусса	660
§ 2.05. Численное интегрирование сильно осциллирующих функций	663
§ 2.06. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул	664
§ 2.07. Квадратурные формулы для несобственных интегралов	665
<b>Глава 3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений</b>	<b>667</b>
§ 3.01. Метод Рунге—Кутты	668
§ 3.02. Метод Адамса	670
§ 3.03. Метод Коуэлла	672
§ 3.04. Метод Штермера (для уравнений второго порядка)	673
§ 3.05. Метод Коуэлла (1-й вариант)	674
§ 3.06. Метод Коуэлла (2-й вариант)	675
§ 3.07. Накопление погрешностей при численном интегрировании	676
§ 3.08. Метод Энке численного интегрирования уравнений возмущенного движения	676
§ 3.09. Общая постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай линейной краевой задачи	678
§ 3.10. Метод стрельбы при нахождении решения линейной двухточечной краевой задачи	679
§ 3.11. Краевая задача для квазилинейной системы с линейными краевыми условиями	682
§ 3.12. Краевая задача для системы, близкой к нелинейной невозмущенной системе	683
§ 3.13. Применение метода градиентного спуска для решения нелинейной краевой задачи общего вида	684
§ 3.14. Разностный метод решений краевых задач	687
<b>Глава 4. Метод наименьших квадратов решения алгебраических и</b>	<b>689</b>

<b>трансцендентных уравнений</b>	
§ 4.01. Постановка задачи	689
§ 4.02. Линейные и равноточные условные уравнения	690
§ 4.03. Вероятностные оценки погрешности решения	691
§ 4.04. Неравноточные условные уравнения	691
§ 4.05. Линеаризация условных уравнений общего вида	692
Литература к части VII	693
<b>Часть VIII. ОПТИМАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ</b>	
<b>АСТРОДИНАМИКИ (ГРЕБЕНИКОВ Е. Л.)</b>	
<b>Глава I. Сведения из вариационного исчисления и математической теории оптимальных процессов</b>	<b>694</b>
§ 1.01. Понятие функционала	696
§ 1.02. Задача Лагранжа. Множители Лагранжа. Уравнения Эйлера	698
§ 1.03. Первая формулировка задачи Майера	699
§ 1.04. Вторая формулировка задачи Майера	699
§ 1.05. Изопериметрическая задача	700
§ 1.06. Задача Больца	700
§ 1.07. Третья формулировка задачи Майера. Обобщение теоремы Лагранжа. Характеристические уравнения (обобщенные уравнения Эйлера—Лагранжа)	701
§ 1.08. Свойство множителей Лагранжа на ломаных экстремальных. Условие Вейерштрасса — Эрдмана	703
§ 1.09. Принцип максимума Понтрягина	704
§ 1.10. Принцип оптимальности Беллмана	706
<b>Глава 2. Основные уравнения динамики тел переменной массы</b>	<b>707</b>
§ 2.01. Основное уравнение динамики точки переменной массы (уравнение Мещерского)	707
§ 2.02. Обобщенное уравнение Мещерского	708
§ 2.03. Уравнения движения тела переменной массы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)	709
§ 2.04. Канонические уравнения движения тела переменной массы	709
<b>Глава 3. Некоторые оптимальные задачи динамики полета в околоземном пространстве</b>	<b>711</b>
§ 3.01. Уравнения движения ракеты. Формула Циолковского	711
§ 3.02. Развернутая форма характеристических уравнений для задачи о движении ракеты	714
§ 3.03. Определение базис-вектора и $p$ -траектории. Определение функций переключения	715
§ 3.04. Определение импульсной тяги. Точки соединения на оптимальных траекториях	717
§ 3.05. Максимизация высоты вертикального подъема ракеты в однородном поле тяжести	717
§ 3.06. Максимизация горизонтальной дальности полета ракеты в однородном поле тяжести при заданной программе расхода	720



топлива	
§ 3.07. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести	722
§ 3.08. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести при наличии аэродинамического сопротивления	723
§ 3.09. Определение оптимальной программы тяги при вертикальном подъеме ракеты в неоднородном поле тяготения в сопротивляющейся атмосфере	725
§ 3.10. Задача о максимизации полной энергии космического аппарата	726
§ 3.11. Задача о минимизации характеристической скорости маневра	728
<b>Глава 4. Межорбитальные перелеты</b>	<b>729</b>
§ 4.01. Простейшая краевая задача	729
§ 4.02. Уравнение для базиса-вектора на участке нулевой тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения	730
§ 4.03. Уравнение для базиса-вектора на участке промежуточной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения	732
§ 4.04. Уравнение для базиса-вектора на участке максимальной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения	733
§ 4.05. Метод $p$ -траекторий. Структура оптимальной траектории	733
§ 4.06. Связь между величиной импульса и элементами эллиптической орбиты	734
§ 4.07. Оптимальный $n$ -импульсный переход между двумя заданными компланарными эллиптическими орбитами	735
§ 4.08. Оптимальный переход между двумя компланарными круговыми орбитами	737
§ 4.09. Оптимальный переход между двумя соосными орбитами	738
§ 4.10. Другие траектории перелета в случае компланарных орбит планет старта и назначения	738
§ 4.11. Траектории полета вблизи нескольких планет	740
§ 4.12. Начальный этап (запуск и уход) межпланетной траектории	743
§ 4.13. Полеты к Луне	744
Литература к части VIII	748
Часть IX. ДВИЖЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС (ДЕМИН В.Г.)	751
<b>Глава 1. Дифференциальные уравнения движения небесных тел относительно центра масс</b>	<b>751</b>
§ 1.01. Вращение Земли относительно центра масс	751
§ 1.02. Канонические уравнения вращательного движения небесных тел	754
§ 1.03. Астродинамические дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника относительно центра масс	759
§ 1.04. Моменты сил, действующих на спутник	762
§ 1.05. Движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском поле	764
§ 1.06. Задача о поступательно-вращательном движении двух	768

гравитирующих динамически симметричных тел	
§ 1.07. Вращение Луны	770
§ 1.08. Дифференциальные уравнения движения деформируемого небесного тела	771
§ 1.09. Теория фигур небесных тел	772
<b>Глава 2. Устойчивость и стабилизация вращательного движения искусственных небесных тел</b>	<b>777</b>
§ 2.01. Устойчивость движения спутников в гравитационном поле сил	777
§ 2.02. Устойчивость движения спутников под действием моментов сил различной природы	781
§ 2.03. Стабилизация движения спутников и космических аппаратов	784
Литература к части IX	786
Часть X. КАЧЕСТВЕННАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА (ГРЕБЕНИКОВ Е. А.)	788
<b>Глава 1. Периодические и условно-периодические решения. Финальные движения</b>	<b>788</b>
§ 1.01. Метод малого параметра Пуанкаре	788
§ 1.02. Метод Ляпунова	790
§ 1.03. Периодические решения, полученные методом Пуанкаре	792
§ 1.04. Периодические решения, полученные методом Ляпунова	795
§ 1.05. Периодические решения, полученные качественными методами	797
§ 1.06. Почти-периодические функции и их свойства. Условно-периодические функции	798
§ 1.07. Теорема Арнольда о существовании условно-периодических решений гамильтоновых систем	831
§ 1.08. Условно-периодические решения в небесной механике. Геометрическая интерпретация	803
§ 1.09. Финальные движения в задаче трех тел. Захват и обмен в задаче трех тел	808
<b>Глава 2. Проблема интегрируемости и сходимости рядов в небесной механике</b>	<b>811</b>
§ 2.01. Теорема Пуассона об интеграле гамильтоновой системы	812
§ 2.02. Теорема Брунса о несуществовании алгебраических первых интегралов задачи трех тел, отличных от классических	813
§ 2.03. Теорема Пуанкаре о несуществовании однозначных аналитических первых интегралов гамильтоновой системы	814
§ 2.04. Случаи интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных	815
§ 2.05. Теорема о неприводимости уравнения Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной круговой задачи трех тел к уравнению типа Штеккеля	817
§ 2.06. Соударения	817
§ 2.07. Решение задачи трех тел в виде рядов, сходящихся для всех вещественных значений времени. Теорема Зундмана	820

§ 2.08. Сходимость рядов Хилла в основной проблеме теории движения Луны	821
§ 2.09. Характер сходимости рядов классической теории возмущений	822
§ 2.10. Теоремы Пуанкаре о ранге и классе возмущений	825
§ 2.11. Поиск частных, первых и общих интегралов заданной аналитической структуры обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ. Приложение к ограниченной задаче трех тел	826
§ 2.12. Поиск решений уравнения Гамильтона—Якоби на ЭВМ. Приложение к ограниченной задаче трех тел	827
<b>Глава 3. Проблема устойчивости в небесной механике</b>	<b>829</b>
§ 3.01. Определение устойчивости по Ляпунову	829
§ 3.02. Определение орбитальной устойчивости	831
§ 3.03. Другие определения устойчивости	832
§ 3.04. Знакопостоянные и знакоопределенные функции. Полная производная в силу системы	834
§ 3.05. Теоремы Ляпунова об устойчивости	835
§ 3.06. Устойчивость по отношению к части переменных. Теорема В.В. Румянцева	836
§ 3.07. Связка первых интегралов. Способ Н.Г.Четаева	837
§ 3.08. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема И.Г.Малкина	838
§ 3.09. Теоремы Лапласа — Лагранжа и Пуассона об отсутствии вековых возмущении больших полуосей	839
§ 3.10. Теоремы об устойчивости планетных орбит	839
§ 3.11. Теоремы Арнольда об устойчивости решения гамильтоновой системы в общем эллиптическом случае	841
§ 3.12. Устойчивость лагранжевых равновесных решений задачи трех тел	843
§ 3.13. Устойчивость других решений задачи трех тел	846
§ 3.14. Устойчивость орбитальных движений искусственных	847
Литература к части X	848
Предметный указатель	853

### Предметный указатель

Аберрация 114	Амплитуда 362
- годовая 97	Аналогии Непера 34
- дифференциальная 139	Аномалия истинная 217, 222, 226, 234, 263
- звездная 115	- средняя 222, 261
- планетная 116	- - в эпоху 221, 224
- суточная 116	- эксцентрическая 81, 222, 232, 237, 261
- эллиптическая часть 117	
«Авангард- 1», 620	
Азимут 24, 25	Апекс 115
- геодезический 50, 52	Апогей 217, 564
Альмукантарат 24	Апоцентр 217
Амальтея 510	Аппроксимация 649

- Аргумент перицентра 219, 221
- широты 222, 226
- Ариэль 510
- Астрономическая единица 185
- - световая 115, 185
- Астрономические постоянные 176
- - новая система 177
- Афелий 217
- Базис-вектор 715, 730—733
- Базис частотный 800
- Барицентр системы «Земля—Луна» 491
- Бюро времени международное 167
- Вариационная кривая Хилла 464
- Вариация 455
- аргумента 696
- первая 698
- Вектор Лапласа 216
- Венера 72, 186, 188—190, 488, 489, 504—507, 538, 539
- Вертикал 23
- первый 23
- Вертикаль 22
- астрономическая 46
- геодезическая 48
- местная 47
- Веса неизвестных 691
- условных уравнений 692
- Весовая функция 661
- Веста 514, 516, 517
- Високосы задержанные 151
- Возмущающая функция 385, 433, 440, 447
- - весовая часть 402
- - главная часть 386, 402
- - дополнительная часть 392, 398
- - задачи п тел 294
- - нерезонансная часть 344
- - от сжатия планеты 510
- - резонансная часть 344
- Возмущения в движении ИСЗ от прецессии и нутации экваториальной плоскости Земли 625
- - - - от приливной деформации Земли 628
- - - - от притяжения атмосферы 632
- - - - релятивистские 630
- - - - электромагнитные 631
- вековые 566, 571
- - го, порядка, 1, 571
- долгопериодические 569, 571
- класс 422
- короткопериодические 566, 572
- лунно-солнечные 569
- Луны 477
- периодические 422
- порядок 422
- смешанные 422
- солнечные спутников 513
- степень 422
- Возмущения элементов 441, 574
- - орбиты ИСЗ вековые 593, 599, 604
- - - - долгопериодические 594, 599, 600, 604
- - - - лунно-солнечные 603, 606
- - - - от высших гармоник
- - - - от светового давления 618, 620
- - - - от сопротивления атмосферы 609, 613
- - - - с периодом около суток 601
- Время атомное 167—169
- всемирное 149, 155—157, 163
- - квазиравномерное 156
- звездное 149, 152, 153, 158
- - гриничское 158
- - истинное 160
- - квазиистинное 158
- - среднее 159
- - эфемеридное 163
- солнечное 155
- среднее 154
- эфемеридное 149, 150, 157, 161, 163, 165, 177
- Высота 24
- ортометрическая 54
- Гамма-функция 366
- Ганимед 508, 510

Гармоники зональные 566  
- секториальные 556, 562, 603  
- тессеральные 556, 562, 603  
Гармония 516  
Гекуба 514, 517  
Географос 517  
Гестия 514, 516, 517  
Гидальго 513, 517  
Гильда 517  
Гиперион 510  
Главный эллиптический член в  
долготе 451  
- - - в широте 451  
Год аномалистический 151  
- бесселев 87, 151  
- високосный 151  
- драконический 151  
- звездный 150  
- сидерический 150, 457  
- тропический 151  
Горизонт астрономический 23  
- геодезический 50  
- местный 82  
Град 26  
Группа типа Гильды 513  
Дальность горизонтальная 720  
- наклонная 25—27  
Дата юлианская 175  
Движение гиперболическое 244  
- кеплеровское 211  
- круговое 243, 244  
- поступательно-вращательное 321—  
331  
- промежуточное 588—502  
- прямолинейное 229  
- собственное 85  
- спутника либрационное 765—767  
- - лимитационное 765  
- - орбитальное 847, 848  
- - ротационное 765  
- среднее 221, 224  
- эллиптическое 243, 244  
Движения лагранжевы в планетной  
задаче 840

- финальные 808, 809  
Девиация 81  
Деймос 510  
Диона 510  
Дифференциальный метод  
исправления элементов орбит  
273, 285  
Дифференцирование численное 655,  
657  
Долгота астрономическая 47  
- галактическая 28  
- геодезическая 49, 52  
- геоцентрическая 52  
- перицентра 222, 226  
- планетоцентрическая 59  
- селенографическая 73  
- узла 219, 221, 224, 227, 262  
- - в эпоху 224  
- эклиптическая 28  
- эфемеридная 162  
Европа 508, 510  
Задача Акссесса 580, 581  
- Баррара 581, 582  
- Больца 700  
- вариационная общая 719  
- - простейшая 718  
- - с подвижными концами 700  
- Винти и Кислика 581, 584  
- Гарфинкеля 579  
- двух неподвижных центров 549,  
550, 584  
- - - обобщённая 551, 588, 848  
- - тел 211  
- изопериметрическая 700  
- краевая 678—684  
Задача Лагранжа 698  
- Майера 699, 701  
- n тел 288  
- - - двухпланетная 385, 400  
- - - планетная 385, 405, 839, 840  
- Стерна 578  
- трех тел 792—795, 806, 808, 811,  
819, 823  
- - - неограниченная 524—542

- - - ограниченная 548  
- - - - гиперболическая 549  
- - - - круговая 533, 542, 546—548  
- - - - плоская 534, 817, 845  
- - - - параболическая 549  
- - - - планетная 815  
- - - - эллиптическая 549  
- - - Хилла 551, 552  
Задачи вариационные традиционные  
695  
- интегрируемые 811  
- модельные 577  
- экстремальные 694  
Законы Кассини 203, 770  
Захват 809, 810  
Звезды двойные 121  
Земля 186, 188—192, 457, 488, 489,  
504—507, 538, 539, 753  
Зенит 23, 25  
- геодезический 48  
Знаменатели малые 429  
Зонды космические 200  
Изменения вековые 90  
- годовые 90  
Икар 517  
Интеграл адельфический 813  
- алгебраический 813  
- движения центра масс 289, 298, 302,  
310, 328  
- живых сил 290, 293, 295, 299, 300,  
302, 303, 310, 328  
- площадей 289, 293, 295, 300, 302,  
303, 310, 328  
- полный 318, 757  
- рефракции 133  
- Якоби 534  
Интегралы Лапласа 215  
- Якоби 661  
Интегрирование численное 658  
Интегрируемость 812, 815  
Интерполирование 635  
- обратное 642  
Ио 508, 510  
Ирис 516

Календарь григорианский 151  
- юлианский 151  
Каллисто 508, 510  
Каталоги звездные 143—145  
Колнор равноденствий 24  
- солнцестояний 24  
Комета Вольфа 1, 519  
- Лексея 518  
- Отерма 3 519  
Кометы гиперболические 517  
- долгопериодические 517  
- короткопериодические 517  
- параболические 517  
Координаты астрономические 46  
- барицентрические 291, 294  
- видимые 62  
- галактические 28  
- Ганзена идеальные 295, 305  
- - полярные 305  
- географические 55  
- геодезические 46, 48  
- геоцентрические 52  
- дифференциальные 41  
- небесные 45  
- обобщенные 214  
- орбитальные 216, 223, 226, 228, 233  
- - относительные 40, 41  
- - полярные 216  
- - цилиндрические 294  
- сферические 213, 295  
- центра масс 210  
- цилиндрические 211  
- экваториальные 37  
- эклиптические 37, 38  
- Якоби 292  
Коэффициенты Ганзена 235  
- Лапласа 381—383  
- Ньюкома 383  
- Фурье 800  
Кривая Хилла 535, 545  
Критерий Тиссерана 542  
- Уиттекера 797  
Круг большой 23  
- равных высот 24

- склонений 52
- широт 28
- Летиция 516
- Либрация Луны 203—207
  - - оптическая 75, 204
  - - параллактическая 204
  - - суточная 204
  - - физическая 74—77, 205
- Линия апсид 217
  - геодезическая 50
- Линия отвеса 22
  - полуденная 23
  - узлов 219
- Луна 74—78, 93, 138, 186, 192, 194, 198, 199, 538, 539, 770, 822
- «Лунар орбитер I, III, IV» 200, 201
- Лунация 150
- Люки 514
- «Маринер- 2, 4, 5, 6, 7, 9», 65, 200
- Марс 64, 65, 186, 188—192, 488, 492, 504—507, 538, 539
- Масконы 203
- Матрица ориентации экваториальная 81
- Международное условное начало 56
- Мельпомена 516
- Меридиан астрономический 47
  - геодезический 48
  - лунный 59
  - местный 46
  - небесный 23
  - нулевой 46
  - основной 39
  - селенографический 58
  - центральный 57
  - эфемеридный 162
- Меркурий 186, 188—190, 192, 194, 487, 489, 504—507, 538, 539
- Место видимое 103
  - истинное 103
  - наблюдения фиктивное 103
  - нормальное 142
  - среднее 103
- Месяц аномалистический 152, 482
  - драконический 152, 492
  - сидерический 457, 482
  - синодический 150, 152
  - тропический 152
  - эфемеридный 150
- Метод Адамса 670
  - Болина 515
  - Брауэра 415
  - Брауэра — Клеменса 405
  - Бренделя 515
  - Ганзена 412, 514
  - Гаусса 690
  - градиентного спуска 685, 695
  - Делоне 447
  - Делоне — Цейпеля 426
  - Коуэлла 481, 671, 674, 675
  - Лагранжа 333
  - Лагранжа—Шарпи 547
  - Лапласа—Ньюкома 419
  - Линдштедта 824
  - Ляпунова 790
  - малого параметра 789
- Метод наименьших квадратов 689
  - разностный 687
  - Рунге — Кутта 668
  - скорейшего спуска 685, 695
  - стрельбы 679
  - улучшения орбит ИСЗ 287
  - Хилла 408, 514
  - Штермера 673
  - Энке 675
- Методы осреднения 432
  - - Боголюбова 442
- Мимас 510
- Минималь 697
- Минута 26
  - десятичная 26
  - звездная 161
  - средняя 160
  - Миранда 510
- Многочлены сферические 373
- Множители параллактические 129
- Момент прохождения через перигелий 219, 222, 225, 227

Моменты сил аэродинамических 763  
- - магнитного взаимодействия 763  
- - от ньютоновского поля тяготения 762  
- - от сжатия планеты 762  
- - светового давления 764  
Надир 23, 25  
Наклон 219, 221, 224, 225, 227, 262  
- критический 597  
- лунно-солнечный 86  
- орбиты 219  
- - к экватору 61  
- - к эклиптике 61  
- средний 86  
- эклиптики к экватору 24  
Накопление погрешности 676  
Невязки остаточные 691  
Нептун 72, 157—191, 193, 194, 494—498, 500, 504—507, 538, 667  
Неравенство 454  
- годовое 455  
- паралактическое 455  
Нереида 510  
Нутация 91—94  
- в долготе 75  
- в наклоне 75  
- дифференциальная 139  
Оберон 510  
Область притяжения положения равновесия 830  
- сплошной устойчивости по Лагранжу 832  
Ода 513  
Операция основная 43  
Орбита гиперболическая 219, 247, 267, 271  
- круговая 217, 268  
- невозмущенная 211  
- оскулирующая 334  
- параболическая 217, 248, 266, 271  
- первоначальная 273  
- предварительная 279  
- промежуточная 462  
- - ИСЗ 577

- прямолинейная 218  
- эллиптическая 217, 247, 260, 266, 270, 275, 277  
Оси средние 771  
Остаточные разности 141  
Остаточный член 639, 659  
Ось мира 23  
- основная 22, 25  
Отклонение среднее квадратичное 695  
Паллада 516, 517  
Параллакс 123  
- годичный 103, 124  
- горизонтальный экваториальный 125  
- - - средний 125, 128  
- Луны 74  
- рефракционный 138  
- Солнца 179  
- суточный 124—127, 130  
Параллель 47  
- геодезическая 47  
- небесная 25  
- суточная 25  
Параметр 217, 219, 221, 227, 260  
Параметры прецессии Ньюкома 108, 109  
Партенона 516  
Перегрузка 713  
Перелеты межорбитальные 729  
- многоимпульсные 735  
- - одноимпульсные 736  
- - траектории 739, 740—743  
- - моноэллиптические 740, 741  
- - полиэллиптические 740, 741  
Переменные Клеро—Лапласа 306  
- Лагранжа 342—344  
Перигей 217, 564, 614  
Перигелий 217  
Период обращения 226, 271  
- юлианский 174, 175  
- - модифицированный 175  
Перицентр 217  
Планеты малые 513



Плоскость Лапласа неизменяемая  
290, 756  
- основная 22, 25  
Плотность воздуха 610—612  
Плутон 187—190, 193, 494—498, 500,  
538, 539  
Поверхность относимости  
фундаментальная 43, 46  
- Хилла 534, 545  
Показатели Фурье 800  
Полеты к Луне 744  
Полином Лагранжа 639  
Полиномы Гегенбауэра 380  
- интерполяционные 637  
- Лежандра 368, 372, 555  
- Ньюкома операторные 401  
Политика оптимальная 706  
Положение географическое 46  
Полуось большая 221, 260  
- действительная 225  
Полюс большого круга 29  
- галактический 29  
- географический 46  
- геодезический 48  
- истинный 57, 85  
- мира 23  
- - северный 23  
- - южный 23  
- орбиты 23  
- средний 57, 85  
- эклиптики северный 24  
- - южный 24  
Полярное расстояние 26  
Постоянная аберрации 98  
- - суточной 116, 179  
- гравитационная гауссова 180  
- - гелиоцентрическая 179  
- - геоцентрическая 197, 283  
- - луноцентрическая 199, 200  
- - планетоцентрическая 194  
- живых сил 214  
- либрации физической 74  
- лунного неравенства 179  
- нутации 91, 178

- параллактического неравенства 179  
- площадей 215  
- синуса параллакса Луны 179  
- тяготения 179  
- энергии 214  
Постоянные астродинамические  
195—203  
- астрономические 176  
- Гайна 74, 76  
- Лапласа 215  
- редуccionные 92  
Почти-период 798  
Правило Непера 32  
- Рунге 664  
Предел Лапласа 232  
Представления интегральные 369,  
376  
Прецессия 85, 104—114  
- годовичная 88  
- дифференциальная 139  
- лунно-солнечная 86  
- матрица 92  
- общая 105  
- от планет 87  
- по прямому восхождению 88  
- по склонению 89  
Приближение наилучшее  
среднеквадратичное 645  
Принцип максимума Понтрягина 695,  
704  
- оптимальности Беллмана 696, 706  
Программа оптимальная 725  
Программирование динамическое  
706  
Продолжительность жизни спутника  
615  
Прямое восхождение 27  
- - планетоцентрическое 59  
- - траектории 715  
Пункты Лапласа 52  
Пятиугольник Непера 32  
Равноденствие среднее 62  
Разложение радиуса-вектора 233  
Разности вторые 636

- первые 635
- центральные 636
- Ракета 711
- Расстояние зенитное 25
- перигейное 221
- перигелийное 221
- - - го, сорта, 1, 539, 541, 542, 792
- - - го, сорта, 2, 539, 541, 542
- - - го, сорта, 3, 539, 541, 793
- - Шварцшильда 542
- равновесные 527
- частные Лагранжа 527, 540, 541, 549
- - - гомографические 528, 532
- - - коллинеарные 528—530, 535
- - - круговые 528
- - - треугольные 535, 843—846
- Рея 510
- Ряд гипергеометрический 367
- Фурье почти-периодической функции 800
- Ряды Зундмана 821
- Линдштета 825
- Ляпунова 821
- Хилла 821, 822
- Сатурн 187—191, 193—195, 493—498, 501—507, 538, 539, 667
- Сближения комет с большими планетами 518
- Световое давление 617
- Свободный период Эйлера 753
- Сгущения орбит малых планет 513
- Секунда атомная 167
- десятичная 26
- звездная 26
- средняя 160
- эфемеридная 150
- Семейства комет 517, 519
- Силовая функция двух тел 324
- - задачи двух неподвижных центров 586
- - - n тел 289, 301
- - - трех тел 524, 526
- - притяжения Земли 195, 555, 561
- - - Луны 198—202
- - системы тел 323
- Силы аэродинамические 612
- Символ Аппеля 366
- Система алгебраическая
  - редукционных величин 95
- астрогеодезическая мировая 197
- геодезических данных 50
- координат ареографическая 64
- - афродитографическая 71
- - барицентрическая 22
- - галактическая 28, 36
- - гелиографическая 70
- - геоэкваториальная 59
- - горизонтальная 24, 34
- - йовицентрическая 68
- - луноцентрическая 73
- - марсоцентрическая 64
- - нештуоцентрическая 72
- - объектоцентрическая 82
- - орбитальная 80, 764
- - перигейная 760
- - сатурноцентрическая 70
- - селенографическая 73
- - селеноцентрическая 22, 73
- - селеноэкваториальная 72
- - топоцентрическая 22
- - ураноцентрическая 72
- - экваториальная вторая 27, 35, 36
- - - первая 26, 34
- - эклиптическая 27, 35
- - юпитероцентрическая 68
- Ляпунова 791
- отсчета 21
- постоянных МАС 178, 185
- тригонометрическая редукционных величин 95
- юлианская 152
- Системы координат
  - гелиоцентрические 22
- - зенографические 69, 69
- - планетоцентрические 58
- - прямоугольные 37
- Склонение 26, 27
- планетоцентрическое 59

Скобка Пуассона 812  
Скорость космическая вторая 218  
- - первая 218  
- света 253  
- характеристическая 712, 728  
Служба времени 173  
- широт международная 57  
Соизмеримость средних движений 432  
Солнце 189, 190  
- среднее экваториальное 150  
- - эфемеридное 162  
Соударения 817—819  
Спектр функции 800  
Сплайн 644  
Спутник Юпитера VI 508, 510  
- - VII 508, 510  
- - VIII 509, 510  
- - IX 510  
- - X 510  
- - XI 510  
- - XII 510  
Спутники галилеевы 508  
- гиостаты 778, 779, 783, 786  
- Земли искусственные 554  
- Луны искусственные 200  
- планет 508—510  
- Сатурна 796  
Среднее равноденствие даты 161  
Стабилизация вращательная движения 786  
- - - гироскопическая 778  
- - - оптимальная 785  
Стандартная атмосфера 612  
- Земля 559  
Сутки звездные 149, 150, 154  
- истинные солнечные 149  
- квазиистинные 150, 158  
- средние 150  
- - солнечные 150  
Сфера влияния 538  
- гравитационная Хилла 538, 539  
- действия 537  
- небесная 22

- тяготения 537  
Сферический избыток 33  
Сфероид 48  
стандартный относимости 49, 50  
Схемы осреднения 432, 433  
- - Гаусса 433, 434, 436, 440  
- - Делоне — Хилла 433, 435, 439, 440  
- - Моисеева 433, 434, 438, 440  
- - Фату 433, 434, 436, 440  
Счет времени гражданский 156  
Таблица Куммера 368  
- Кэли 234  
Таблицы рефракции Пулковские 135  
- Эккерта 495  
Теневая функция 622—624  
Теорема Арнольда об условно-периодических движениях 801  
- - об устойчивости планетных орбит 840  
- Брунса о существовании интегралов 813, 814  
- - о сходимости 823  
- Вейерштрасса—Слудского-Зундмана 819  
- Гамильтона—Якоби 318  
Теорема Зундмана о рядах 820  
- - о соударениях 819  
- Крудели 774  
- Лагранжа 699  
- - обобщение 702, 703  
- Лапласа 839  
- Лапласа — Лагранжа 839  
- Ляпунова о голоморфном интеграле 791  
- - о периодических решениях  
- Малкина 838  
- о неподвижной точке 798  
- Пуанкаре о несуществовании первых интегралов 814  
- - о существовании периодического решения 789  
- Пуассона 812  
- - об устойчивости 839  
- Румянцева 837

- синусов 30
- Теоремы Арнольда об устойчивости решения гамильтоновой системы 841, 842
- Ляпунова об устойчивости 835, 836
- Пуанкаре о равновесии вращающихся жидкостей 773, 774
- - о ранге и классе возмущений 825
- Теория возмущений 432, 442
- движения больших планет 484
- - - - Клеменса 485
- - - - Леверье 444
- - - - Ньюкома 484—487
- - - - Хилла 486
- - - - Шараф 486
- - Луны 443, 457
- - аргументы фундаментальные 452
- - - основная проблема 444, 482
- Хилла — Брауна 458—470, 481
- Тетис 510
- Тефия 510
- Титан 510
- Титания 510
- Точка весеннего равноденствия 24, 150
- - - для планеты 59
- - - истинная 150
- - - квазиистинная 150
- - - средняя 150
- весны 24
- запада 23
- зимнего солнцестояния 24
- зимы 24
- лета 24
- Точка летнего солнцестояния 24
- осени 24
- осеннего равноденствия 24
- севера 23
- соединения 717
- юга 23
- Точки либрации 541
- - коллинеарные 531, 536
- - треугольные 529, 536

- равноденственные 23
- угловые 703
- Траектории межпланетные 743
- Траектория облетная 747
- оптимальная 733, 734
- Треугольник параллактический 34
- сферический 29
- - присоединенный 32
- Тритон 510
- Троянцы 513
- Туле 513
- Тэта-функции 365
- Тяга импульсная 717
- Углы Эйлера 321, 757
- Угол вертикали 52
- возвышения 24
- места 24
- наклона траектории 82
- поворота траектории 83
- позиционный 40
- скоростного курса 83
- часовой 26
- - эфемеридный 162
- эксцентриситета 222
- Узел восходящий 219
- нисходящий 219
- Узлы таблицы 635
- - равноотстоящие 646
- Уклонение абсолютное 50
- астрономо-геодезическое 50
- отвеса 50, 51
- относительное 48
- Умбриель 510
- Управление оптимальное 702
- Уравнение Бесселя 376
- Вавра 774
- времени 155
- Гамильтона — Якоби 318
- Гаусса 367
- гипергеометрическое 367
- Кеплера 222, 223
- Лагранжа 236
- Лагранжа — Якоби 290
- Ламберта 264

- Ламе 379
- Лапласа 52
- Уравнение Лежандра 370
- Мещерского 707
- - обобщенное 708
- параболической орбиты 265
- порождающее 788
- световое 115
- типа Штеккеля 817
- Хилла 766
- центра 234, 241
- Уравнения Беллмана 706
- Брауэра 416
- в вариациях 540
- в форме Клеро — Лапласа 213
- Клеро — Лапласа 306
- Лагранжа для оскулирующих элементов 338, 350
- нормальные 690
- Ньютона для оскулирующих элементов 335, 336, 345, 349
- условные 275, 282, 689, 692
- - неравноточные 691
- характеристические движения ракеты 715
- Эйлера кинематические 323
- Эйлера—Лагранжа 724
- - - обобщенные 701
- Уран 72, 187—191, 193—195, 494—499, 504—507, 538, 667
- Условие Вейерштрасса — Эрдмана 703
- Устойчивость асимптотическая 830
- - в целом 830
- вероятность 841
- вращательного движения 775
- лагранжевых решений 843
- орбитальная 831, 847, 848
- по Лагранжу 832, 839
- по Ляпунову 830
- по Пуассону 832, 846
- по Хиллу 832, 846
- по Якоби 833
- равномерная 830

- Участок активный 711
- максимальной тяги 720
- нулевой тяги 720
- пассивный 701
- Феба 510
- Фигуры равновесия небесных тел 773
- Фобос 510
- Формула Баррара 587
- Бесселя 638, 640
- Брунса 775
- Лагранжа 236
- - интерполяционная 638, 640
- - обобщенная 237
- Формула квадратурная 665
- Лапласа для рефракции 137
- Льюийе 34
- Пицетти — Сомильяна 776
- Родрига 369
- Стирлинга 637, 640
- Циолковского 712
- Эверетта 638, 640
- Эрмита 662, 665
- Формулы Андуайе—Ньюкома 112
- Борда 33
- Брауэра 573
- Гаусса квадратурные 660
- Деламбра 33
- Каньоли 32
- Леверье 390
- Михайлова 59
- Ньютона — Котеса 659
- Ньютона интерполяционные 637, 640
- обобщенные трапеций 659
- пяти элементов 31
- Чебышева 662
- Функции Бесселя 375—379
- - от мнимого аргумента 378
- Ганкеля 379
- Крампфа — Радо 135
- Ламе 379
- Лежандра 371
- - присоединенные 371, 372, 553
- наклона 598

- Неймана 379
- почти-периодические 798
- сферические 373
- - зональные 373
- - секториальные 373
- - тессеральные 373
- условно-периодические 660, 800
- цилиндрические 379
- - эксцентриситета 597
- эллиптические
- - Вейерштрасса 364
- - Якоби 363, 366
- Функционал 696, 697
- Функция возмущающая 294, 337
- гипергеометрическая 367
- дохода 706
- переключения 715, 717, 723, 725
- производящая 371, 375
- спектральная 800
- Уиттекера 797
- Церера 514—517, 667
- Час 26
- звездный 161
- средний 161
- Числа Коши 384
- Крюгера 105
- Число Циолковского 713
- Шаг интегрирования 668
- таблицы 635
- Широта астрономическая 47
- галактическая 29
- геодезическая 49
- геоцентрическая 52
- планетоцентрическая 59
- приведение 52
- приведенная 52
- селенографическая 73
- эклиптическая 28
- Шкала высот 609
- Эвекция 455
- Эдда 517
- Экватор астрономический 47
- галактический 28
- географический 46, 47

- геодезический 48
- Земли средний 78
- Луны истинный 78
- - средний 78
- небесный 23
- Эклиптика 23
- Экстремаль 697
- Эксцентриситет 217, 219, 221, 225, 260
- эллипсоида относимости 52
- Элементы канонические Делоне 340, 345, 563
- Пуанкаре 340, 341, 344, 346, 354
- - Якоби 339, 345, 352
- Кэррингтона 70
- Элементы Лагранжа 338
- орбиты 218
- - векторные экваториальные 249, 261, 263, 269
- - кеплеровские 219
- - оскулирующие 334
- - эклиптические 219
- средние 410
- Эллипс гемановский 737
- Эллипсоид общий земной 48
- Эллипсоиды Маклорена 775
- Якоби 775
- Эллиптические интегралы, второго рода 360
- - первого рода 358
- - полные 360
- - третьего рода 360
- Энергия барицентрическая 290
- Энцелад 510
- Эпоха 25, 222
- Эрос 517
- Эфемерида 230
- астрометрическая 141
- геоцентрическая 142
- Луны 481
- Эфемериды 140
- больших планет 487, 491
- для физических наблюдений 59
- малых планет 667

«Эхо- 1», 620

Юнона 516, 517

Юпитер 187—192, 194, 195, 493—  
499, 501—507, 538, 539, 667

Янус 510

Япет 510

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

После выхода в свет первого издания «Справочного руководства» интерес к небесной механике и астродинамике не только не уменьшился, а, наоборот, увеличился и, стало быть, необходимость в подобной справочной литературе возросла. По этой причине первое издание быстро разошлось. Мы отдавали себе отчет в том, что в первом издании не все вопросы небесной механики и астродинамики были достаточно подробно изложены, а некоторые вовсе не излагались. В связи с этим возникла необходимость в переработке и дополнении многих разделов справочника.

Во второе издание добавлена новая часть, девятая, «Движение естественных и искусственных небесных тел относительно центра масс», написанная В. Г. Деминим.

Существенной переработке подверглись все части «Справочного руководства», за исключением первых трех.

В части IV добавлена новая глава, посвященная применению методов осреднения в небесной механике. Добавлены теоремы о канонических уравнениях и преобразованиях, уравнения в переменных Лагранжа, приведено более полное (с точностью до четвертых степеней малых величин) разложение в форме Леверье возмущающей функции, разложение возмущающей функции, пригодное для любых наклонов. Полностью переработано изложение теории движения Луны (глава 10), добавлены новые данные об эфемеридах больших планет на следующее десятилетие.

В части V добавлены уравнения движения ограниченной задачи трех тел в эллипсоидальных и эллиптических переменных, уравнение Гамильтона — Якоби в этих переменных, изложен метод понижения порядка системы.

Значительно расширена часть VI, посвященная движению ИСЗ. Добавлены две новые главы, в которых достаточно подробно изложена теория промежуточных орбит ИСЗ и теория возмущений, вызываемых прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли, приливной деформацией Земли. Рассмотрено влияние электромагнитных сил и релятивистских



поправок. Более подробно изложена теория возмущений от сопротивления атмосферы и светового давления. Приведены также новые данные о гравитационном поле Земли и структуре земной атмосферы.

В большой степени переработана и дополнена часть VII. Добавлены новые параграфы по теории приближений функций, в частности, аппроксимация функций с помощью сплайнов, аппроксимация периодических и условно-периодических функций тригонометрическими многочленами, выделение вековой части функции по совокупности табличных значений. Расширена глава, посвященная численным методам решения дифференциальных уравнений.

В части VIII значительно расширена глава 4 «Межорбитальные перелеты».

Подверглась также большой переработке часть X «Качественная небесная механика». В ней расширена теория устойчивости движения, в частности, приведены формулировки теорем Ляпунова, включены новые параграфы, посвященные методу разделения переменных, намного подробнее изложена теория периодических и условно-периодических решений в приложении к задачам небесной механики, добавлены новые результаты по устойчивости лагранжевых решений задачи трех тел.

Сделаны некоторые дополнения и в других частях справочника. Мы внесли также все исправления, любезно присланные нам пользователями, за что выражаем им искреннюю благодарность.

*Декабрь 1974 г.*

*Авторы*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В последние годы появилось довольно много отечественных и переводных изданий, предназначенных для широкого круга научных и инженерно-технических работников, занимающихся классической и современной небесной механикой и астродинамикой, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этих научных направлениях. Читателя, желающего приобрести глубокие и систематические знания в этой области науки, мы отсылаем прежде всего к двухтомному изданию Г. Н. Дубошина «Небесная механика», посмертно изданному сочинению М. Ф. Субботина «Введение в теоретическую астрономию», «Аналитическим и численным методом небесной механики» Г. А. Чеботарева, а также к переведенным на русский язык «Методам небесной механики» Д. Брауэра и Дж. Клеменса, «Аналитическим основам небесной механики» А. Уинтнера и другим работам.

Предлагаемый справочник преследует иную цель. По замыслу авторов он должен выполнять функции «оперативного помощника» в практической повседневной работе уже сложившегося специалиста. Именно эта идея и была положена в основу справочника; поэтому его содержание составляют основные уравнения движения небесных тел для различных систем координат и оскулирующих элементов, методы и результаты небесной механики и астродинамики, приведенные без подробных выкладок и выводов. Мы ограничивались только минимальным количеством необходимых пояснений и комментариев.

Мы сочли необходимым включить в настоящее издание не относящиеся по традиции к небесной механике основные соотношения и формулы сферической и эфемеридной астрономии, необходимые в расчетах по небесной механике и астродинамике, новую систему астрономических постоянных, утвержденную Международным Астрономическим союзом в 1964 г., различные системы счета времени, а также основы вариационного исчисления и математической теории оптимальных процессов, на которых базируются методы решения астродинамических задач. Эти вопросы составляют содержание частей I и VIII.

Остальные части Справочника посвящены традиционным аналитическим, численным и качественным методам классической и современной небесной механики.

Мы разделили работу между собой следующим образом: В. К. Абалакиным написаны часть I и § 10.02 из части IV, Е. П. Аксеновым — части II и VI, Е. А. Гребениковым — главы 1 — 8 из части IV, части V, VIII, IX, Ю. А. Рябовым — части III и VII, а также главы 9 — 11 из части IV (за исключением § 10.02).

В каждой части введена трехступенчатая нумерация формул. В номере формулы первое число соответствует части, второе — главе, третье — порядковому номеру формулы внутри главы. В ссылке на параграф из данной части указывается лишь его номер; если же делается ссылка на параграф из другой части, то указывается и номер части. Каждая часть сопровождается библиографией.

Авторы заранее приносят благодарность читателям, которые сообщат критические соображения и замечания.

В заключение мы благодарим профессора Г. Н. Дубошина за многочисленные обсуждения содержания и стиля изложения справочника, оказавшиеся для нас весьма полезными.

*Январь 1970 г.*

*Авторы*

# СФЕРИЧЕСКАЯ И ЭФЕМЕРИДНАЯ АСТРОНОМИЯ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Изучение движения небесных объектов в Солнечной системе связано в той или иной степени с двумя проблемами астрономии — проблемой точного предвычисления положения небесного объекта в определенной *системе координат* на заданный момент времени и проблемой обработки наблюдений этого объекта. Для правильного решения этих проблем необходимо знать не только закон движения небесного объекта, но и законы изменения ориентировки в пространстве систем координат, относительно которых происходит рассматриваемое движение, необходимо уметь найти путем подходящего *преобразования координат* такую систему отсчета, в которой уравнения движения имеют наиболее выгодную для поставленных целей форму.

С необходимостью учета изменений положения основных элементов координатных систем во времени связана также задача сравнения наблюденных положений объекта с теоретически предвычисленными, особенно при больших промежутках времени наблюдения. К ней тесно примыкают вопросы фиксации физических моментов наблюдений в различных *системах измерения* времени и перехода от одной системы к другой.

Наконец, совершенствование теории движения небесного объекта, сопутствующее повышению точности наблюдений, требует улучшения числовых значений параметров теории, к которым относятся *астрономические постоянные* — универсальные величины, соотношения между которыми следуют из основных законов механики неба.

Изложению этих вопросов с конечной целью дать читателю возможность применения рабочих формул в конкретных случаях посвящена эта часть настоящего «Справочного руководства».

## Глава I

### СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

#### § 1.01. Небесная сфера

Наблюдения и предвычисления положений небесных тел, а также изучение их движения, всегда связаны с определенной *системой отсчета* (системой координат и системой измерения времени).

Все системы астрономических (и астеродинамических) координат строятся по одному и тому же принципу: всегда выбирают *основную (фундаментальную) плоскость* и указывают направление *основной (главной) оси* системы координат.

За начало координат принимают обычно либо точку наблюдения на земной поверхности, либо центр Земли, Солнца или планеты и т. д.

В основу сферической астрономии положено понятие *небесной сферы*, центр которой совпадает с началом рассматриваемой системы отсчета, а радиус может быть выбран совершенно произвольным (обычно его полагают равным единице). Таким образом, вводится понятие *топоцентрической* небесной сферы с центром в *точке наблюдения* (в *топоцентре*), *геоцентрической* небесной сферы с центром, совпадающим с *центром масс Земли*, *гелиоцентрической* небесной сферы с центром в *центре масс Солнца*, *планетоцентрической* небесной сферы с центром в *центре масс планеты*. Аналогично вводятся соответствующие различные системы координат: *топоцентрическая*, *геоцентрическая*, *гелиоцентрическая*, *планетоцентрическая* и т. д. Иногда вводят *барицентрическую* систему координат, начало которой совпадает с центром масс (барицентром) системы нескольких небесных тел (например, системы Солнце + внутренние планеты).

Необходимо всегда иметь в виду, что термином «планетоцентрическая (селено-, или луноцентрическая) система координат» обозначается система, основная плоскость которой параллельна плоскости небесного экватора для Земли, и проводить четкое различие между этим термином и термином «планетографическая (селенографическая) система координат», относящимся к системам, основной плоскостью которых является плоскость экватора собственного осевого вращения планеты (Луны). В случае планетографических систем координат латинское название небесного тела заменяется в наименовании координат соответствующим греческим эквивалентом (например, юпитероцентрические координаты, но зенографические координаты, марсоцентрические координаты, но ареографические координаты и т. д.). Планетографические системы координат применяются большей частью для определения положений точек и деталей поверхности соответствующих планет [1].

### § 1.02. Главные круги, линии и точки небесной сферы

В любой точке земной поверхности существует основное направление, которое в первом приближении можно считать неизменным: это — направление *линии отвеса*, или *вертикали*, совпадающее с направлением *линии действия силы тяжести* в данном топоцентре.

Прямая, проведенная через центр  $T$  небесной сферы, параллельно местной линии отвеса, пересекает небесную сферу в точке  $Z$ , расположенной над головой наблюдателя и называемой *зенитом* места наблюдения. Диаметрально противоположная точка пересечения  $N$  называется *надиром* (рис. 1). Плоскость, проведенная через центр  $T$  перпендикулярно к вертикали  $ZNa$ , пересекает небесную сферу по большому кругу, называемому *математическим*, или *астрономическим горизонтом*. Прямая, проведенная через центр  $T$  параллельно оси суточного вращения Земли, называется *осью мира* и пересекает небесную сферу в *полюсах мира*. Полюс мира  $P_N$ , расположенный ближе всего к проекции Полярной звезды на небесной сфере, называется *северным полюсом мира*, а другой полюс мира  $P_S$  — *южным*.

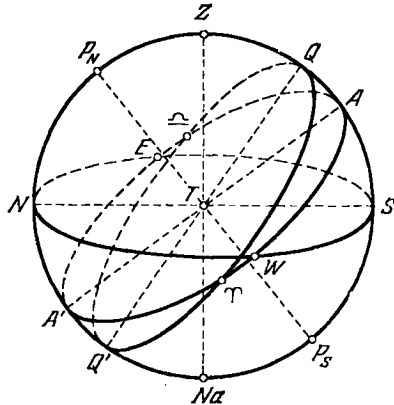


Рис. 1. Небесная сфера.

Сечение небесной сферы плоскостью, проходящей через центр  $T$  перпендикулярно к оси мира  $P_N P_S$ , определяет большой круг  $AWA'$  — *небесный экватор*. Плоскость, проведенная через ось мира  $P_N P_S$  и вертикаль  $ZNa$ , называется *плоскостью небесного меридиана* и в сечении с небесной сферой дает большой круг — *небесный меридиан*. Пересечение плоскостей небесного меридиана и астрономического горизонта определяет *полуденную линию*  $NS$ . Точкой *севера*  $N$  называется точка пересечения полуденной линии с небесной сферой, ближайшая к северному полюсу мира  $P_N$ ; диаметрально противоположная точка  $S$  есть *точка юга*. Линия пересечения (линия узлов) плоскостей математического горизонта и небесного экватора пересекает небесную сферу в *точке востока*  $E$ , расположенной слева для наблюдателя, обращенного лицом к точке юга  $S$ , и в *точке запада*  $W$ . Точки  $N$ ,  $S$ ,  $E$ ,  $W$  определяют главные стороны (румбы) горизонта. Сечение небесной сферы любой плоскостью, проходящей через отвесную линию, определяет большой круг — *вертикал*. Вертикал, проходящий через точки востока  $E$  и запада  $W$ , называется *первым вертикалом*.

Пересечение небесной сферы с плоскостью, параллельной плоскости годового движения Солнца и проходящей через центр  $T$ , представляет собой большой круг  $QQ'$  — *эклиптику*, пересекающую небесный экватор в двух *равноденственных точках*.

Равноденственная точка, в которой Солнце при своем движении по эклиптике переходит из южного полушария в северное (относительно экватора), называется *точкой весеннего равноденствия* (*точкой весны*) и обозначается знаком зодиакального созвездия Овна  $\Upsilon$ . Вторая равноденственная точка, в которой Солнце переходит из северного полушария небесной сферы в южное, называется *точкой осеннего равноденствия* (*точкой осени*) и обозначается знаком зодиакального созвездия Весов  $\text{♎}$ .

Небесный меридиан пересекается с эклиптикой в *точке летнего солнцестояния* (*точке лета*), отстоящей от точки весны  $\Upsilon$  на  $90^\circ$  по эклиптике в направлении движения Солнца, и в диаметрально противоположной ей *точке зимнего солнцестояния* (*точке зимы*). В своем годовом движении Солнце проходит точку весеннего равноденствия 20—22 марта, точку летнего солнцестояния 21—23 июня, точку осеннего равноденствия 23—24 сентября, точку зимнего солнцестояния 21—22 декабря.

Большой круг небесной сферы, проходящий через полюсы мира  $P_N$  и  $P_S$  и точки весны  $\Upsilon$  и осени  $\text{♎}$ , называется *колюром равноденствий*; большой круг, проведенный через полюсы мира и точки лета и зимы, называется *колюром солнцестояний*.

Острый угол, под которым пересекаются плоскости эклиптики и экватора, называется *наклоном эклиптики к экватору* и обозначается символом  $\epsilon$ ; приближенно он равен  $23^\circ 26'$ .

Ось, проходящая через начало координат и перпендикулярная к плоскости эклиптики, пересекает небесную сферу в полюсах эклиптики. Полюс эклиптики, расположенный в северном полушарии, называется *северным*, а противоположный полюс — *южным*.

### § 1.03. Горизонтальная система координат

Основная плоскость — плоскость астрономического горизонта, основное направление — направление, параллельное отвесной линии (вертикали).

Направление  $T\Sigma$  на светило  $\Sigma$  из точки наблюдения  $T$  (рис. 2) определяется дугой горизонта  $S\Sigma' = A$ , измеряемой двугранным углом между плоскостями небесного меридиана и вертикала, проходящего через  $\Sigma$ , и дугой вертикала  $\Sigma'\Sigma = h$ , измеряемой от горизонта до малого круга, проведенного параллельно плоскости горизонта через  $\Sigma$  и называемого *альмукулантаром*, или *кругом равных высот*.

Основные координаты, определяющие положение светила  $\Sigma$  на небесной сфере: *азимут*  $A$ , отсчитываемый от точки юга  $S$  в сторону точки запада  $W$  по дуге горизонта до вертикала светила  $\Sigma$ , и *высота*  $h$  (*угол возвышения, угол места*), отсчитываемая по дуге вертикала  $\Sigma$ .

Азимут  $A$  отсчитывается от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , высота  $h$  — от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$  (высота зенита  $Z$  равна  $+90^\circ$ , высота надира  $Na$  равна  $-90^\circ$ ).

Вместо высоты  $h$  можно ввести ее дополнение до  $90^\circ$ , называемое *зенитным расстоянием*  $z$  и отсчитываемое по дуге вертикала  $\Sigma$  от точки зенита  $Z$  до альмукантарата  $\Sigma'$ . Зенитное расстояние  $z$  меняется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , так что всегда

$$z + h = 90^\circ. \quad (1.1.001)$$

Иногда азимут  $A$  отсчитывается от точки юга  $S$  в обе стороны от  $0^\circ$  до  $\pm 180^\circ$ ; тогда различают западные (положительные) и восточные (отрицательные) азимуты. При решении геодезических и навигационных задач принято вести отсчеты азимутов  $A$  от точки севера  $N$ . Расстояние от наблюдателя  $T$  до объекта  $\Sigma$  по прямой  $T\Sigma$  называют *наклонной дальностью* и обозначают символом  $\rho$  (иногда  $\rho_h$ ).

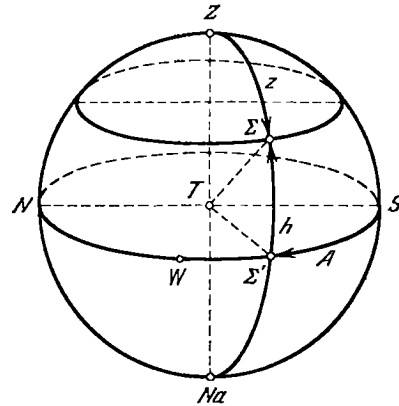


Рис. 2. Горизонтальная система сферических координат.

### § 1.04. Экваториальные системы координат

**1. Первая экваториальная система координат.** Основная плоскость — плоскость небесного экватора\*), основное направление — направление оси, проведенной из начала координат в южную точку экватора. Большой круг, проходящий через ось мира  $P_N P_S$  и светило  $\Sigma$  (рис. 3), называется *часовым кругом*, или *кругом склонений*. Направление  $T\Sigma$  из точки  $T$  — центра небесной сферы, например, топоцентрической — на  $\Sigma$  определяется дугой  $A\Sigma' = t$  экватора, измеряемой двугранным углом между плоскостями небесного меридиана и круга склонений, и дугой  $\Sigma'\Sigma = \delta$  круга склонений, измеряемой от экватора до малого круга, проведенного через  $\Sigma$  параллельно плоскости небесного экватора и называемого *суточной (небесной) параллелью* светила  $\Sigma$ .

\*) Положение в пространстве плоскости экватора с течением времени изменяется; поэтому всегда указывается эпоха — момент времени, которому соответствует принятое в системе координат положение плоскости экватора. В настоящее время широко распространена система координат с экватором и равноденствием эпохи 1950,0 (см. § 2.02).



Таким образом, положение светила  $\Sigma$  на небесной сфере определяется *часовым углом*  $t$ , отсчитываемым от южной точки экватора  $A$  в сторону точки запада  $W$  по дуге экватора до круга склонений светила  $\Sigma$ , и *склонением*  $\delta$ , отсчитываемым по дуге круга склонений от экватора до суточной параллели.

Часовой угол  $t$  отсчитывается от  $0^h$  до  $24^h$  (т. е. от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  \*), склонение  $\delta$  — от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$ ; склонение северного полюса мира  $P_N$  равно  $+90^\circ$ , склонение южного полюса мира  $P_S$  равно  $-90^\circ$ . Вместо склонения  $\delta$  иногда вводят его дополнение до  $90^\circ$ , называемое *полярным расстоянием*  $p$ , отсчитываемое по дуге круга склонений от северного полюса мира  $P_N$  до суточной параллели светила  $\Sigma$ . Полярное расстояние  $p$  изменяется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , так что всегда

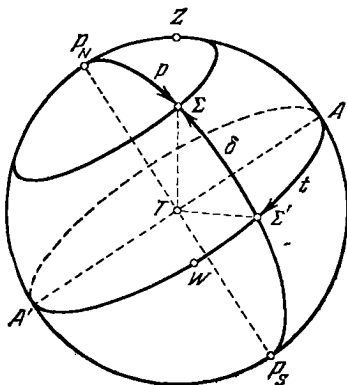


Рис. 3. Первая экваториальная система сферических координат.

Угловые величины  $t$ ,  $\delta$  ( $t$ ,  $p$ ) составляют *первую экваториальную систему координат*. Расстояние по прямой  $T\Sigma$  от начала координат  $T$  до объекта  $\Sigma$  называется *радиусом-вектором* объекта  $\Sigma$  и обозначается через  $r$ . В топоцентрической системе координат радиус-вектор и наклонная дальность совпадают.

В старой астрономической литературе можно встретить также обозначение  $NPD$ , относящееся к этой же величине  $p$  и

\*) Наряду с радианной и градусной мерой дуг и углов в астрономии принята временная (часовая) мера, т. е. некоторые угловые величины измеряются в часах (h), минутах (m), секундах времени (s). Указанные системы измерения углов и дуг связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} 24^h &= 360^\circ = 2\pi \text{ рад.}, \\ 1^h &= 15^\circ = \pi/12, & 1^\circ &= 4^m = \pi/180, \\ 1^m &= 15' = \pi/720, & 1' &= 4^s = \pi/10800, \\ 1^s &= 15'' = \pi/43200, & 1'' &= 0^s,666 \dots = \pi/648000. \end{aligned}$$

Кроме того, можно встретить десятичное подразделение полной окружности на 400 равных частей, каждая из которых носит название *града* (g). Каждый градус в свою очередь подразделяется на 100 *десятичных минут* (' или c), каждая десятичная минута — на 100 *десятичных секунд* ("" или cc).

В некоторых работах углы выражаются в долях полной окружности — в *оборотах* (r), т. е.  $1^r = 360^\circ$ .

означающее *северное* полярное расстояние (North Polar Distance).

**2. Вторая экваториальная система координат.** Основная плоскость — плоскость небесного экватора, основное направление — направление оси, проведенной из начала координат в точку весеннего равноденствия ( $\Upsilon^*$ ); таким образом, точка весны  $\Upsilon$  является началом отсчета углов по дуге экватора. Направление  $T\Sigma$  определяется дугой экватора  $\Upsilon\Sigma'$ , отсчитываемой от точки весны  $\Upsilon$  до круга склонений светила  $\Sigma$  в направлении, противоположном суточному вращению небесной сферы, и дугой круга склонений  $\Sigma'\Sigma$ , т. е. *склонением*  $\delta$  светила  $\Sigma$ . Дуга экватора  $\Upsilon\Sigma'$  называется *прямым восхождением* светила  $\Sigma$  и обозначается  $\alpha$  (рис. 4).

Прямое восхождение  $\alpha$  измеряется двугранным углом между плоскостями кругов склонений точки весны  $\Upsilon$  и светила  $\Sigma$  и отсчитывается по дуге экватора против часовой стрелки, если смотреть на небесную сферу с северного полюса, от  $0^h$  до  $24^h$ .

Угловые величины  $\alpha$ ,  $\delta$  ( $\alpha$ ,  $\rho$ ) составляют вторую экваториальную систему координат, которая не зависит от суточного вращения небесной сферы.

Расстояние по прямой  $T\Sigma$  от начала координат  $T$  до светила  $\Sigma$  называется *радиусом-вектором* объекта  $\Sigma$  и обозначается  $r$ . В топоцентрической системе координат радиус-вектор совпадает с наклонной дальностью.

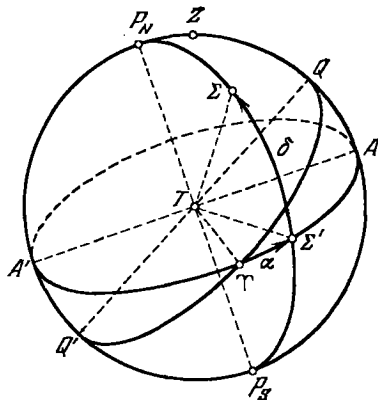


Рис. 4. Вторая экваториальная система сферических координат.

### § 1.05. Эклиптическая система координат

Основная плоскость — плоскость эклиптики, основная ось отсчета — прямая, проведенная из начала координат в точку весеннего равноденствия ( $\Upsilon^{**}$ ). Начало эклиптической

\*) Следует иметь в виду, что положения плоскости экватора и точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$  с течением времени меняются. Поэтому для определенности всегда указывают *эпоху* (момент времени), которой соответствуют принятые положения плоскости экватора и точки весеннего равноденствия (например, экватор и равноденствие эпохи 1950,0).

\*\*) Положение плоскости эклиптики и точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$  с течением времени меняется. Поэтому всегда указывают *эпоху* (момент времени), которой соответствуют принятые положения эклиптики и точки весны (например, эклиптика и равноденствие эпохи 1950,0).

ской системы координат обычно помещают в центр масс Солнца  $S$  (рис. 5), или в центр масс Земли.

Большой круг, проведенный через полюсы эклиптики  $\Pi$  и  $\Pi'$  и светило  $\Sigma$ , называется *кругом широт*.

Направление  $S\Sigma$  в эклиптической системе координат определяется дугой эклиптики  $\Upsilon\Sigma' = \lambda$ , отсчитываемой от точки

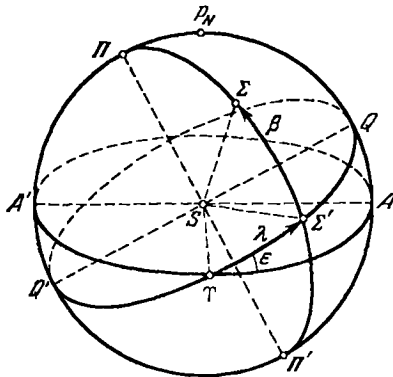


Рис. 5. Эклиптическая система сферических координат.

весны  $\Upsilon$  против часовой стрелки (для наблюдателя на северном полюсе эклиптики  $\Pi$ ) до круга широт светила  $\Sigma$ , и дугой круга широт  $\Sigma'\Sigma = \beta$ , отсчитываемой от эклиптики до  $\Sigma$ . Дуга эклиптики  $\Upsilon\Sigma'$  определяет *долготу*, или *эклиптическую долготу*  $\lambda$  светила  $\Sigma$ , отсчитываемую в указанном направлении от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  (иногда обозначается  $L, l$ ); дуга круга широт  $\Sigma'\Sigma$  определяет *эклиптическую широту*, или *широту*  $\beta$ , отсчитываемую от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$  (положительна в сторону северного полюса эклиптики  $\Pi$ ), обозначаемую иногда  $B, b$ . Расстояние  $S\Sigma$  называется *радиусом-вектором* объекта  $\Sigma$  (*гелиоцентрическим* или *геоцентрическим* в зависимости от того, принят ли в качестве начала координат центр масс Солнца или центр масс Земли).

Эклиптическая система координат удобна при рассмотрении движения тел Солнечной системы. Геоцентрические эклиптические координаты применяются в настоящее время для Солнца и Луны.

### § 1.06. Галактическая система координат

Основная плоскость — плоскость Галактики (Млечного Пути), называемая *плоскостью галактического экватора*. Положение галактического экватора (на рис. 6 он обозначен через  $MM'$ ) определяется долготой восходящего узла  $N$  и наклоном к экватору  $I$  и известно лишь приближенно; поэтому галактические координаты светил определяются с точностью до  $\pm 0^\circ,01$ .

Рис. 6. Галактическая система сферических координат.

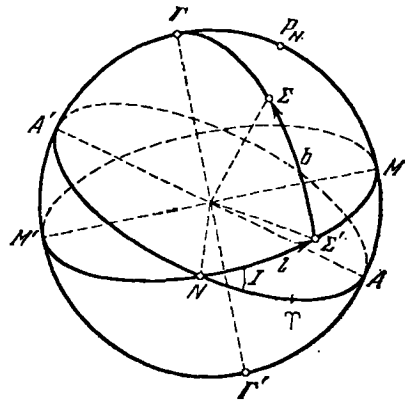


Рис. 6. Галактическая система сферических координат.

За основную точку отсчета *галактических долгот*  $l$  принимают точку с координатами

$$\alpha = 18^{\text{h}} 40^{\text{m}}, \quad \delta = 0^{\circ}$$

в созвездии Орла. Координаты северного полюса Галактики, т. е. точки небесной сферы, отстоящей от галактического экватора на  $90^{\circ}$ , равны [2], [3]

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0 = 12^{\text{h}} 49^{\text{m}}, \\ \delta_0 = +27^{\circ},4 \end{array} \right\} 1950,0. \quad (1.1.003)$$

Принципы отсчета галактической долготы  $l$  и галактической широты  $b$  те же, что и в эклиптической системе координат (рис. 6).

### § 1.07. Основные формулы сферической тригонометрии

*Сферический треугольник* — часть поверхности небесной сферы, ограниченная тремя дугами больших кругов (рис. 7).

Дуги, образующие сферический треугольник, пересекают друг друга только в его вершинах, и называются *сторонами* сферического треугольника; они измеряются соответствующими центральными углами. Углы сферического треугольника измеряются двугранными углами, образованными плоскостями соответствующих больших кругов; они равны углам между касательными в вершинах, проведенными к соответствующим сторонам сферического треугольника. Обычно углы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, C, \dots$ , стороны — строчными буквами  $a, b, c, \dots$ , причем сторона  $a$  всегда лежит против угла (вершины)  $A$  и т. д.

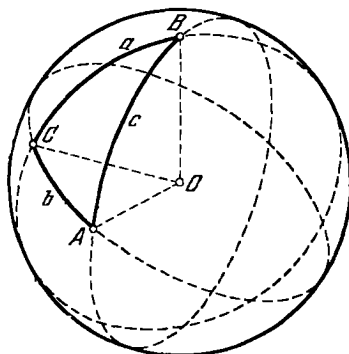


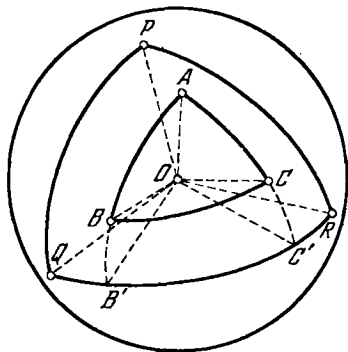
Рис. 7. Сферический треугольник.

Сферический треугольник, все стороны которого меньше  $180^{\circ}$ , называется *простым*.

Сферический треугольник называется *прямоугольным*, если один из углов его — прямой, и *четвертным* (*квadrантным*), если одна из его сторон заключает  $90^{\circ}$ .

Назовем *полюсом* большого круга точку на поверхности сферы, лежащую на угловом расстоянии  $90^{\circ}$  от любой точки окружности этого большого круга. Тогда сферический треуголь-

ник, образованный полюсами больших кругов, дуги которых ограничивают данный сферический треугольник  $ABC$  (при условии расположения полюсов сторон этого треугольника в направлении соответствующих вершин), называется *полярным данному*.



Связь между элементами сферического треугольника  $ABC$  и полярного ему  $PQR$  (рис. 8) дается следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} p &= 180^\circ - A, & P &= 180^\circ - a, \\ q &= 180^\circ - B, & Q &= 180^\circ - b, \\ r &= 180^\circ - C, & R &= 180^\circ - c. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.004)$$

Рис. 8. Полярный треугольник.

Если дано соотношение вида

$$f(A, B, C; a, b, c) = 0,$$

то для сферического треугольника, полярного данному, имеем

$$f(P, Q, R; p, q, r) = 0,$$

т. е. выполняется соотношение

$$f(180^\circ - a, 180^\circ - b, 180^\circ - c; 180^\circ - A, 180^\circ - B, 180^\circ - C) = 0.$$

Такое преобразование называется *корреляцией* [4].

**1. Основные системы соотношений, связывающих различные элементы сферического треугольника.** Система I. Соотношения между тремя сторонами и одним углом (*теорема косинусов*):

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.005)$$

Система II. Соотношения между двумя сторонами и двумя противолежащими углами (*теорема синусов*):

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B, \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.006)$$

или

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad (1.1.007)$$

Система III. Соотношения между тремя сторонами и двумя углами (*формулы пяти элементов*):

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C. \end{aligned} \right\} (1.1.008)$$

Система IV. Соотношения между двумя сторонами и двумя углами:

$$\left. \begin{aligned} \cos a \cos B &= \sin a \operatorname{ctg} c - \sin B \operatorname{ctg} C, \\ \cos a \cos C &= \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B, \\ \cos b \cos C &= \sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A, \\ \cos b \cos A &= \sin b \operatorname{ctg} c - \sin A \operatorname{ctg} C, \\ \cos c \cos A &= \sin c \operatorname{ctg} b - \sin A \operatorname{ctg} B, \\ \cos c \cos B &= \sin c \operatorname{ctg} a - \sin B \operatorname{ctg} A. \end{aligned} \right\} (1.1.009)$$

Корреляция соотношений (1.1.005) дает:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned} \right\} (1.1.010)$$

Каждое из соотношений (1.1.010) связывает три угла и одну сторону.

При помощи корреляции соотношений (1.1.008) получаем соотношения между тремя углами и двумя сторонами:

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c. \end{aligned} \right\} (1.1.011)$$

Система V. Соотношения между шестью элементами (формулы Каньоли):

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B &= \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b, \\ \sin b \sin a + \cos b \cos a \cos C &= \sin B \sin A - \cos B \cos A \cos c, \\ \sin c \sin b + \cos c \cos b \cos A &= \sin C \sin B - \cos C \cos B \cos a. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.012)$$

В случае прямоугольного сферического треугольника ( $A = 90^\circ$ ) справедливы соотношения (рис. 9):

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \\ \sin b &= \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C, \\ \sin c &= \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B, \\ \cos B &= \cos b \sin C = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} a, \\ \cos C &= \cos c \sin B = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.013)$$

Формулы (1.1.013) можно получить, воспользовавшись *правилом Непера*, основанным на *пятиугольнике Непера* (рис. 10) при указанном порядке обозначения сторон этого пятиугольника.

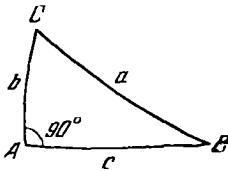


Рис. 9. Прямоугольный сферический треугольник.

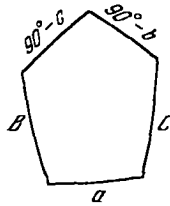


Рис. 10. Первая схема для правила Непера.

Косинус стороны пятиугольника Непера равен: 1) произведению синусов противолежащих сторон; 2) произведению котангентов прилежащих сторон [4].

## 2. Квадрантный (четвертной) сферический треугольник.

При помощи корреляции формул (1.1.013) получаются формулы для квадрантного сферического треугольника ( $a = 90^\circ$ ):

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c, \\ \sin B &= \sin A \sin b = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} c, \\ \sin C &= \sin A \sin c = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} b, \\ \cos b &= \cos B \sin c = -\operatorname{tg} C \operatorname{ctg} A, \\ \cos c &= \cos C \sin b = -\operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.014)$$

Формулы (1.1.014) можно вывести из общих соотношений, полагая в них  $a = 90^\circ$  или по правилу Непера (рис. 11).

С четвертным сферическим треугольником  $ABC$  можно связать *присоединенный* сферический треугольник  $AA'C$  (рис. 12), сторона  $c'$  которого является продолжением стороны  $c$  и дополняет ее до  $90^\circ$ . Тогда в сферическом треугольнике  $BA'C$  две

стороны равны по  $90^\circ$ , угол  $A = 90^\circ$ . В присоединенном сферическом треугольнике  $AA'C$ :

$B' = 180^\circ - A$ ,  $a' = b$ ,  $c' = 90^\circ - c$ ,  $C' = 90^\circ - C$ ,  $b' = B$ , поэтому применение к нему формул (1.1.013) дает формулы (1.1.014).

Кроме того, имеют место:

а) формулы Борда:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.015)$$

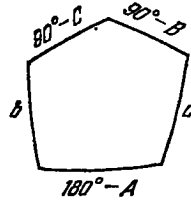


Рис. 11. Вторая схема для правила Непера.

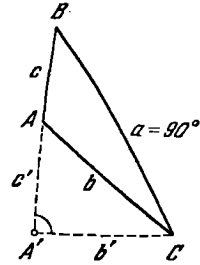


Рис. 12. Четвертной сферический треугольник и присоединенный сферический треугольник.

где  $a + b + c = 2p$ .

Определяя сферический избыток  $\sigma$  следующей формулой:

$$\sigma = A + B + C - 180^\circ \quad (1.1.016)$$

и применяя корреляцию к формулам (1.1.015), находим формулы Борда:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left( A - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left( B - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left( C - \frac{\sigma}{2} \right)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left( B - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left( A - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left( C - \frac{\sigma}{2} \right)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left( C - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left( A - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left( B - \frac{\sigma}{2} \right)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.017)$$

б) формулы Деламбра:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} &= \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, & \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} &= \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \\ \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} &= \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, & \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} &= \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.018)$$



Восемь аналогичных соотношений получаются круговой перестановкой букв  $a, b, c; A, B, C$ .

в) *Аналогии Непера*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}, & \operatorname{tg} \frac{b-c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}}, & \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}}. \end{aligned} \right\} (1.1.019)$$

Другие восемь аналогий Непера получаются круговой перестановкой букв.

г) *Формула Льюише*:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\sigma}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}. \quad (1.1.020)$$

Приведенные формулы позволяют определить любые три элемента сферического треугольника, если известны остальные три.

Основные практические приемы вычисления, а также приближенные формулы в случае малых углов могут быть найдены в руководствах по сферической астрономии [1], [4] — [9].

Значения тригонометрических функций для аргументов — углов, выраженных в различных мерах, берутся из соответствующих таблиц [10] — [20].

Полные сведения о таблицах натуральных значений (и логарифмов) тригонометрических функций и других математических таблицах, которые могут оказаться полезными вычислителю, содержатся в специальных справочных руководствах [21] — [23].

## § 1.08. Соотношения между различными астрономическими координатами

1. Связь между горизонтальной и первой экваториальной системами координат. Рассмотрим *астрономический* или *параллактический* треугольник  $P_N Z \Sigma$  (рис. 13). Применение к нему основных соотношений сферической тригонометрии дает

формулы

$$\begin{aligned}
 \cos h \sin A &= \cos \delta \sin t & &= \sin z \sin A, \\
 \cos h \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t & &= \sin z \cos A, \\
 \sin h &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t & &= \cos z, \\
 \cos \delta \sin t &= \cos h \sin A & &= \sin z \sin A, \\
 \cos \delta \cos t &= \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A & &= \\
 &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\
 \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A & &= \\
 &= \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A,
 \end{aligned}
 \tag{1.1.021}$$

где  $\varphi$  — астрономическая широта места наблюдения (см. § 1.10),  $A$  — азимут, отсчитываемый от точки юга к западу от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

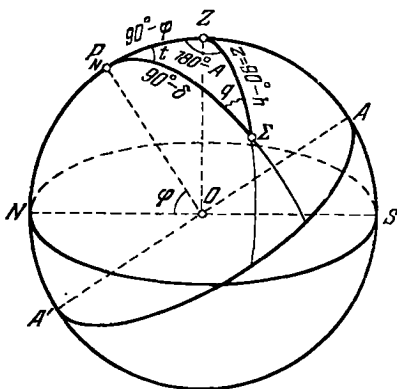


Рис. 13. Параллактический треугольник.

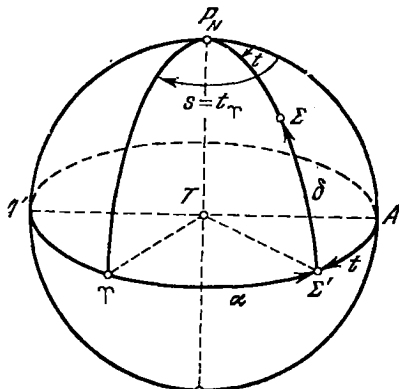


Рис. 14. Связь между экваториальными системами сферических координат.

**2. Связь между первой и второй экваториальными системами координат.** Обе системы координат отличаются друг от друга только началом отсчета и направлением отсчета часовых углов  $t$  и прямых восхождений  $\alpha$ . Угловые величины  $t$  и  $\alpha$  связаны соотношением (рис. 14)

$$\alpha + t = s, \tag{1.1.022}$$

где  $s$  — местное звездное время, измеряемое часовым углом  $t_{\Gamma}$  точки весеннего равноденствия  $\Gamma$  относительно местного меридиана (см. § 3.02).

Координата  $\delta$  является общей для обеих систем координат.

**3. Связь между второй экваториальной и эклиптической системами координат.** Из сферического треугольника, образованного полюсом мира  $P_N$ , полюсом эклиптики  $\Pi$  и светилом  $\Sigma$

(рис. 15), находим

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon, \\ \sin \delta &= \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon, \end{aligned} \right\} (1.1.023)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon, \\ \sin \beta &= -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon, \end{aligned} \right\} (1.1.024)$$

где  $\epsilon$  — наклон эклиптики к экватору, отнесенный к осям координат той же эпохи, что и  $\alpha$ ,  $\delta$ ;  $\lambda$ ,  $\beta$ .

4. Связь между второй экваториальной и галактической системами координат. Вывод формул связи основан на применении основных соотношений сфери-

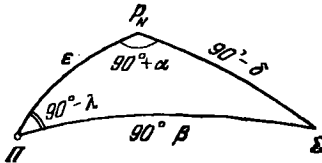


Рис. 15. Связь между второй экваториальной и эклиптической системами сферических координат.

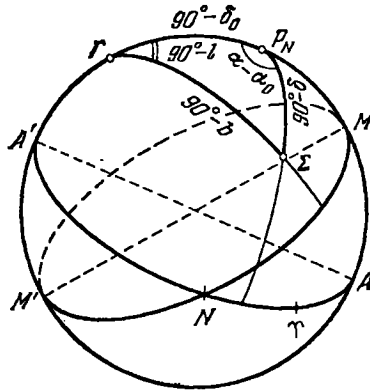


Рис. 16. Связь между второй экваториальной и галактической системами сферических координат.

ческой тригонометрии к сферическому треугольнику, образованному полюсом мира  $P_N$ , северным полюсом Галактики  $\Gamma$  и светилом  $\Sigma$  (рис. 16):

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0), \\ \cos b \cos l &= \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0), \\ \cos b \sin l &= \cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0), \end{aligned} \right\} (1.1.025)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \sin b \sin \delta_0 + \cos b \cos \delta_0 \sin l, \\ \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0) &= \cos b \cos l, \\ \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0) &= \sin b \cos \delta_0 - \cos b \sin \delta_0 \sin l. \end{aligned} \right\} (1.1.026)$$

Здесь  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$  обозначают прямое восхождение и склонение полюса Галактики  $\Gamma$  (см. формулу (1.1.003)).

На практике перевод экваториальных координат  $\alpha$ ,  $\delta$  в галактические  $l$ ,  $b$  выполняется при помощи сетки Вульфа или специальных таблиц [3], [24].

§ 1.09. Прямоугольные системы координат

За основную координатную плоскость берется плоскость эклиптики или экватора, основная ось отсчета  $OX$  направлена из начала  $O$  координат в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , ось  $OY$  — под углом  $90^\circ$  к оси  $OX$ , ось  $OZ$  дополняет систему до правой (рис. 17).

1. Связь между экваториальной и эклиптической прямоугольными системами координат. Если основная плоскость  $OXY$  — плоскость экватора, а начало  $O$  выбрано в центре небесной сферы, то прямоугольная система координат  $OXYZ$  называется экваториальной.

Экваториальные сферические координаты  $r, \alpha, \delta$  любой точки  $P$  связаны с экваториальными прямоугольными координатами этой же точки  $x, y, z$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= r \sin \delta \end{aligned} \right\} (1.1.027)$$

Если основная плоскость эклиптической системы сферических координат — плоскость эклиптики — совпадает с плоскостью  $OX'Y'$  прямоугольной системы координат  $OX'Y'Z'$ , начало которой, как и прежде, лежит в центре небесной сферы, а ось  $OX'$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , то система координат  $OX'Y'Z'$  называется эклиптической (рис. 17).

Эклиптические сферические координаты  $r, \lambda, \beta$  точки  $P$  выражаются через эклиптические прямоугольные координаты  $x', y', z'$  этой же точки посредством формул

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \beta \cos \lambda, \\ y' &= r \cos \beta \sin \lambda, \\ z' &= r \sin \beta. \end{aligned} \right\} (1.1.028)$$

Переход от прямоугольных экваториальных координат  $x, y, z$  точки  $P$  к эклиптическим прямоугольным координатам  $x', y', z'$  этой же точки выполняется по следующим формулам преобра-

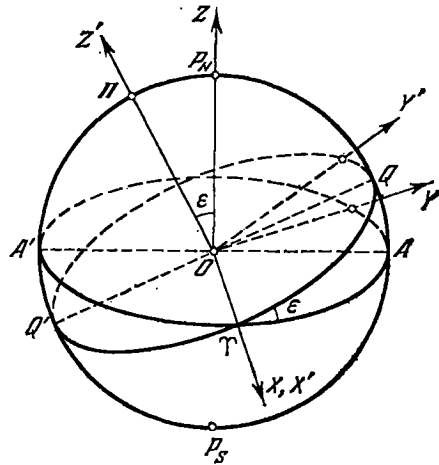


Рис. 17. Связь между экваториальной и эклиптической системами прямоугольных координат.

зования экваториальных прямоугольных координат в эклиптические:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= z \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon, \\ z' &= z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.029)$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon, \\ z &= y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.030)$$

Формулы перехода от сферических эклиптических координат к прямоугольным экваториальным координатам (с тем же началом) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda, \\ y &= r \cos \beta (\cos \varepsilon \sin \lambda - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta), \\ z &= r \cos \beta (\sin \varepsilon \sin \lambda + \cos \varepsilon \operatorname{tg} \beta). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.031)$$

Формулы перехода от сферических экваториальных координат к прямоугольным эклиптическим имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \delta \cos \alpha, \\ y' &= r \cos \delta (\sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta + \cos \varepsilon \sin \alpha), \\ z' &= r \cos \delta (\cos \varepsilon \operatorname{tg} \delta - \sin \varepsilon \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.032)$$

**2. Связь между гелиоцентрической и геоцентрической системами координат.** Если начало одной системы координат не совпадает с началом другой, то для преобразования координат, кроме возможных поворотов осей координат, необходим еще и параллельный перенос осей координат в новое начало отсчета (рис. 18).

Если  $x, y, z$  — координаты точки  $P$  в гелиоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат  $SXYZ$ ,  $X_{\odot}, Y_{\odot}, Z_{\odot}$  — координаты Солнца в геоцентрической экваториальной прямоугольной системе координат  $TENZ$ , то прямоугольные координаты  $\xi, \eta, \zeta$  точки  $P$  в системе  $TENZ$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + X_{\odot}, \\ \eta &= y + Y_{\odot}, \\ \zeta &= z + Z_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.033)$$

Если ввести геоцентрические экваториальные сферические координаты  $\rho, \alpha, \delta$  точки  $P$  (геоцентрическое расстояние  $\rho$  обозначается иногда символом  $\Delta$ ), то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x + X_{\odot}, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y + Y_{\odot}, \\ \rho \sin \delta &= z + Z_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.034)$$

**З а м е ч а н и е.** Очевидно, гелиоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Земли  $X_T, Y_T, Z_T$  равны геоцентрическим прямоугольным экваториальным координатам Солнца, взятым с обратными знаками, т. е.  $-X_{\odot}, -Y_{\odot}, -Z_{\odot}$ .

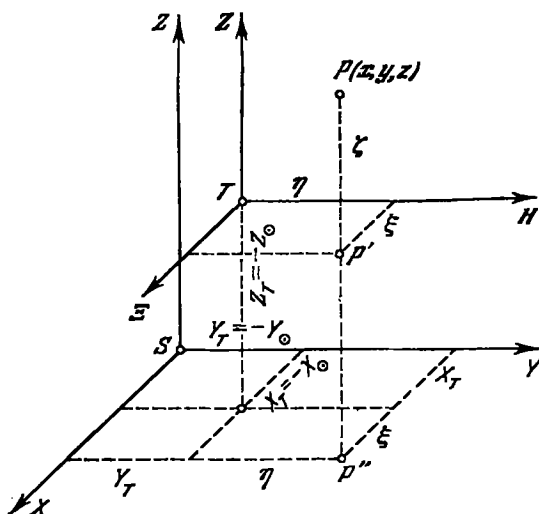


Рис. 18. Переход от гелиоцентрической системы координат к геоцентрической системе координат.

Для перехода от гелиоцентрических эклиптических сферических координат  $r, l, b$  к геоцентрическим эклиптическим сферическим координатам  $\rho, \lambda, \beta$  можно применить формулы

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos \lambda &= R_{\odot} \cos \beta_{\odot} \cos \lambda_{\odot} + r \cos b \cos l, \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &= R_{\odot} \cos \beta_{\odot} \sin \lambda_{\odot} + r \cos b \sin l, \\ \rho \sin \beta &= R_{\odot} \sin \beta_{\odot} + r \sin b, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.035)$$

где  $R_{\odot}, \lambda_{\odot}, \beta_{\odot}$  — геоцентрические эклиптические координаты (радиус-вектор, долгота и широта) Солнца.

Нередко широтой Солнца  $\beta_{\odot}$  можно пренебречь и положить  $\sin \beta_{\odot} = 0$ ,  $\cos \beta_{\odot} = 1$ . Тогда формулы (1.1.035) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos \lambda &\approx R_{\odot} \cos \lambda_{\odot} + r \cos b \cos l, \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &\approx R_{\odot} \sin \lambda_{\odot} + r \cos b \sin l, \\ \rho \sin \beta &\approx r \sin b. \end{aligned} \right\} (1.1.036)$$

Преобразование *гелиоцентрических эклиптических сферических координат*  $r, l, b$  точки  $P$  в *геоцентрические экваториальные сферические координаты*  $\rho, \alpha, \delta$  осуществляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= r \cos b \cos l + X_{\odot}, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= r \cos b (\sin l \cos \varepsilon - \operatorname{tg} b \sin \varepsilon) + Y_{\odot}, \\ \rho \sin \delta &= r \cos b (\sin l \sin \varepsilon + \operatorname{tg} b \cos \varepsilon) + Z_{\odot}. \end{aligned} \right\} (1.1.037)$$

Если вместо прямоугольных экваториальных координат Солнца  $X_{\odot}, Y_{\odot}, Z_{\odot}$  заданы его эклиптические координаты  $R_{\odot}, \lambda_{\odot}, \beta_{\odot}$ , то геоцентрические экваториальные координаты  $\rho, \alpha, \delta$  небесного объекта вычисляются по таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= r \cos b \cos l + R_{\odot} \cos \beta_{\odot} \cos \lambda_{\odot}, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= r \cos b (\sin l \cos \varepsilon - \operatorname{tg} b \sin \varepsilon) + \\ &\quad + R_{\odot} \cos \beta_{\odot} (\sin \lambda_{\odot} \cos \varepsilon - \operatorname{tg} \beta_{\odot} \sin \varepsilon), \\ \rho \sin \delta &= r \cos b (\sin l \sin \varepsilon + \operatorname{tg} b \cos \varepsilon) + \\ &\quad + R_{\odot} \cos \beta_{\odot} (\sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon + \operatorname{tg} \beta_{\odot} \cos \varepsilon). \end{aligned} \right\} (1.1.038)$$

Наклон  $\varepsilon$  эклиптики к экватору должен быть отнесен к системе координат той же эпохи, что и величины  $r, l, b, R_{\odot}, \lambda_{\odot}, \beta_{\odot}$ .

**3. Относительные координаты.** В экваториальной геоцентрической системе координат  $\alpha, \delta$  находят применение также две другие координаты (рис. 19):

1) *Угловое расстояние*  $s$  объекта  $\Sigma$  относительно *опорного* объекта  $\Sigma_0$ , измеряемое дугой большого круга  $\Sigma_0\Sigma$  на небесной сфере;

2) *Позиционный угол*, или *угол положения*  $p$ , отсчитываемый от круга склонений опорного объекта  $\Sigma_0$  до дуги  $s = \Sigma_0\Sigma$  против часовой стрелки, если смотреть на небесную сферу *снаружи*.

Координаты  $s, p$  называются *относительными координатами*; их можно выразить через экваториальные координаты  $\alpha_0, \delta_0$  опорного объекта  $\Sigma_0$  и  $\alpha, \delta$  объекта  $\Sigma$  следующими формулами (см. треугольник  $P_N\Sigma\Sigma_0$  на рис. 19):

$$\left. \begin{aligned} \cos p \sin s &= \cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0), \\ \sin p \sin s &= \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0), \\ \cos s &= \sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0). \end{aligned} \right\} (1.1.039)$$

На практике часто можно пренебречь величинами порядка  $(\Delta\alpha)^2$  и  $(\Delta\delta)^3$  и применять *приближенные формулы*

$$\left. \begin{aligned} s \cos p &= \delta - \delta_0 = \Delta\delta, \\ s \sin p &= (\alpha - \alpha_0) \cos \delta = \Delta\alpha \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.040)$$

**4. Дифференциальные координаты.** Положение объекта  $\Sigma$  относительно объекта  $\Sigma_0$  в экваториальной системе координат определяется разностями  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$  и  $\Delta\delta = \delta - \delta_0$ ; эти

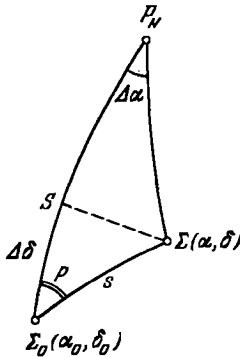


Рис. 19. Относительные сферические координаты.

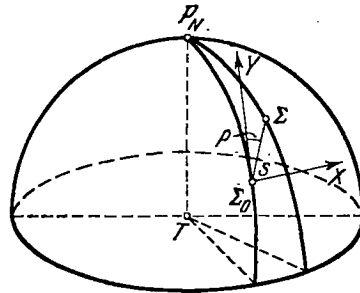


Рис. 20. Относительные прямоугольные координаты.

разности выражаются через относительные координаты  $s$  и  $p$  при помощи равенств (1.1.040)

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= s \sin p \sec \delta, \\ \delta - \delta_0 &= s \cos p. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.041)$$

Разности  $\alpha - \alpha_0$ ,  $\delta - \delta_0$  называются *дифференциальными экваториальными координатами*.

Величины  $x$ ,  $y$ , определяемые равенствами (рис. 20)

$$\left. \begin{aligned} x &= s \sin p, \\ y &= s \cos p, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.042)$$

называются *прямоугольными координатами* объекта  $\Sigma$  относительно объекта  $\Sigma_0$ .

Разности прямых восхождений  $\Delta\alpha$  и склонений  $\Delta\delta$  можно выразить через разности эклиптических долгот  $\Delta\lambda$  и широт  $\Delta\beta$  (*дифференциальные эклиптические координаты*) и, наоборот,



при помощи следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha \cos \delta &= \cos \eta \cos \beta \Delta\lambda - \sin \eta \Delta\beta - \sin \delta \cos \alpha \Delta\epsilon, \\ \Delta\delta &= \sin \eta \cos \beta \Delta\lambda + \cos \eta \Delta\beta + \sin \alpha \Delta\epsilon, \end{aligned} \right\} (1.1.043)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\lambda \cos \beta &= \cos \eta \cos \delta \Delta\alpha + \sin \eta \Delta\delta + \sin \beta \cos \lambda \Delta\epsilon, \\ \Delta\beta &= -\sin \eta \cos \delta \Delta\alpha + \cos \eta \Delta\delta - \sin \lambda \Delta\epsilon. \end{aligned} \right\} (1.1.044)$$

Вспомогательный угол  $\eta$  вычисляется по формулам

$$\sin \eta = \cos \lambda \sec \delta \sin \epsilon = \cos \alpha \sec \beta \sin \epsilon, \quad (1.1.045)$$

причем

$$-90^\circ \leq \eta \leq +90^\circ.$$

**5. Дифференциальные изменения координат.** Малые изменения координат объекта на небесной сфере с достаточной степенью точности могут быть выражены дифференциальными формулами, которые выводятся из основных соотношений, связывающих сферические координаты с положением объекта в пространстве. Формулы (1.1.027) дают

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{x}{r} dr - z \cos \alpha d\delta - y d\alpha, \\ dy &= \frac{y}{r} dr - z \sin \alpha d\delta + x d\alpha, \\ dz &= \frac{z}{r} dr + r \cos \delta d\delta, \end{aligned} \right\} (1.1.046)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta d\alpha &= \cos \alpha \frac{dy}{r} - \sin \alpha \frac{dx}{r}, \\ d\delta &= -\sin \delta \cos \alpha \frac{dx}{r} - \sin \delta \sin \alpha \frac{dy}{r} + \cos \delta \frac{dz}{r}, \\ dr &= \cos \delta \cos \alpha dx + \cos \delta \sin \alpha dy + \sin \delta dz. \end{aligned} \right\} (1.1.047)$$

Заменой  $\alpha$  на  $\lambda$  и  $\delta$  на  $\beta$  получим формулы дифференциальных изменений координат в эклиптической системе:

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \frac{x'}{r} dr - z' \cos \lambda d\beta - y' d\lambda, \\ dy' &= \frac{y'}{r} dr - z' \sin \lambda d\beta + x' d\lambda, \\ dz' &= \frac{z'}{r} dr + r \cos \beta d\beta; \end{aligned} \right\} (1.1.048)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta d\lambda &= \frac{1}{r} (\cos \lambda dy' - \sin \lambda dx'), \\ d\beta &= \frac{1}{r} (-\sin \beta \cos \lambda dx' - \sin \beta \sin \lambda dy' + \cos \beta dz'), \\ dr &= \cos \beta \cos \lambda dx' + \cos \beta \sin \lambda dy' + \sin \beta dz'. \end{aligned} \right\} (1.1.049)$$

**б. Основная операция.** Если в прямоугольной экваториальной системе координат  $TXYZ$  (ось  $TX$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ ) объект  $\Sigma$  из положения, определяемого радиусом-вектором  $r = r(x, y, z) = r(r_x, r_y, r_z)$ , сместился на  $\Delta r$  и занял положение  $\Sigma'$ , определяемое радиусом-вектором  $r' = r'(x', y', z') = r'(r'_x, r'_y, r'_z)$ , то (рис. 21)

$$\begin{aligned} r' &= r + \Delta r, & r' &= r + \Delta r, \\ r'_x &= r_x + \Delta r_x, & \alpha' &= \alpha + \Delta \alpha, \\ r'_y &= r_y + \Delta r_y, & \delta' &= \delta + \Delta \delta. \\ r'_z &= r_z + \Delta r_z, \end{aligned}$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_x &= \Delta r \cos \alpha \cos \delta - r \sin \alpha \cos \delta \Delta \alpha - r \cos \alpha \sin \delta \Delta \delta, \\ \Delta r_y &= \Delta r \sin \alpha \cos \delta + r \cos \alpha \cos \delta \Delta \alpha - r \sin \alpha \sin \delta \Delta \delta, \\ \Delta r_z &= \Delta r \sin \delta + r \cos \delta \Delta \delta; \end{aligned} \right\} \quad (1.1.050)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= -\sec \delta \sin \alpha \frac{\Delta r_x}{r} + \sec \delta \cos \alpha \frac{\Delta r_y}{r}, \\ \Delta \delta &= -\sin \delta \cos \alpha \frac{\Delta r_x}{r} - \sin \delta \sin \alpha \frac{\Delta r_y}{r} + \cos \delta \frac{\Delta r_z}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.051)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sec \delta \sin \alpha & + \sec \delta \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r^{-1} \Delta r_x \\ r^{-1} \Delta r_y \\ r^{-1} \Delta r_z \end{Bmatrix}.$$

Соотношения (1.1.051) для приращений  $\Delta \alpha$  и  $\Delta \delta$ , обусловленных малым перемещением объекта на  $\Delta r$ , определяют *основную операцию* [60].

Если

$$r' = r + v \Delta t,$$

где  $v$  — вектор скорости объекта  $\Sigma$ ,  $v = v(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = v(v_x, v_y, v_z)$ , то при  $\Delta t \rightarrow 0$  основная операция (1.1.051) дает

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\delta}{dt} \end{Bmatrix} = K(\alpha, \delta) \begin{Bmatrix} r^{-1} v_x \\ r^{-1} v_y \\ r^{-1} v_z \end{Bmatrix}, \quad (1.1.052)$$

где матрица  $K(\alpha, \delta)$  — оператор основной операции

$$K(\alpha, \delta) = \begin{Bmatrix} -\sec \delta \sin \alpha & + \sec \delta \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \end{Bmatrix}. \quad (1.1.053)$$

Основную операцию можно выполнить и в других системах координат при помощи соответствующей оператор-матрицы  $\mathbf{K}$  (например,  $\mathbf{K}(\lambda, \beta)$ ).

7. Преобразование координат при помощи матриц [61]. Применение прямоугольных координат в сочетании с матрицами-операторами поворота  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ , определяемыми равенствами:

$$\mathbf{p}(\theta) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}(\theta) = \begin{Bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{Bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

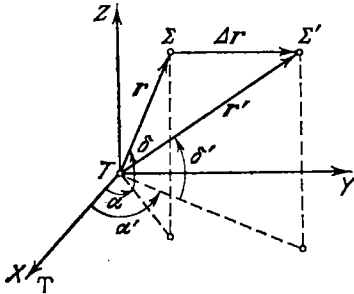
где  $\theta$  — произвольный угол поворота, позволяет выразить формулы преобразования координат, приведенные выше, в компактном, удобном для машинных вычислений виде. Так, с учетом соотношений (1.1.027) и (1.1.028) формулы (1.1.023) и (1.1.029) связи экваториальных и эклиптических координат записываются в виде

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(\epsilon) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (1.1.029a)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(-\epsilon) \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}. \quad (1.1.030a)$$

Рис. 21. Связь между приращениями радиуса-вектора объекта и приращениями сферических координат.



Если  $(x, y, z)_{t, \delta}$  означает радиус-вектор небесного объекта, координаты которого заданы в первой экваториальной системе

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{t, \delta} = \mathbf{r} \begin{Bmatrix} \cos t \cos \delta \\ \sin t \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix},$$

то переход ко второй экваториальной системе можно выполнить по формуле

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\alpha, \delta} = \mathbf{r}(-s) \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{t, \delta}, \quad (1.1.022a)$$

где  $s$  означает местное звездное время, связанное с прямым восхождением  $\alpha$  и часовым углом  $t$  небесного объекта соотношением (1.1.022).

Сохраняя прежний принцип отсчета азимута  $A$  от точки юга к западу от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , получим формулы (1.1.021a), связывающие горизонтальные координаты  $x_H, y_H, z_H$  объекта с его экваториальными координатами  $(x, y, z)_{t, \delta}$ , в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{t, \delta} &= q[-(90^\circ - \varphi)] \begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix}, \\ r \begin{Bmatrix} \cos A \cos h \\ \sin A \cos h \\ \sin h \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} = q(90^\circ - \varphi) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{t, \delta}. \end{aligned} \right\} (1.1.021a)$$

Обращаясь к формулам (1.1.022a), получаем соотношения между горизонтальными координатами объекта и его координатами, отнесенными ко второй экваториальной системе:

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{a, \delta} &= r(-s) \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} q(\varphi - 90^\circ) \begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} &= q(90^\circ - \varphi) \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} r(s) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{a, \delta}. \end{aligned} \right\} (1.1.022b)$$

При отсчете азимутов  $A$  от точки севера к востоку от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  соответствующие горизонтальные координаты объекта  $x'_H, y'_H, z'_H$  связаны с его координатами  $x_H, y_H, z_H$  соотношениями

$$\begin{Bmatrix} x'_H \\ y'_H \\ z'_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix}.$$

Аналогичным образом можно выразить в матрично-векторной форме и соотношения (1.1.035), (1.1.037), (1.1.038). Например, формула (1.1.037) принимает вид

$$\rho \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix} = p(-\varepsilon) r \begin{Bmatrix} \cos l \cos b \\ \sin l \cos b \\ \sin b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_\odot \\ Y_\odot \\ Z_\odot \end{Bmatrix}.$$

## § 1.10. Системы географических координат

Положения точек на поверхности Земли могут быть отнесены к двум системам координат: либо к системе *астрономических*, или *небесных*, координат, не зависящей ни от формы, ни от размеров Земли и полностью определяемой направлением

силы тяжести в данной точке, т. е. зависящим от него направлением *астрономической вертикали*, или *отвесной линии*, либо к системе *геодезических* координат, вычисляемых на основе определенной математической поверхности (например, эллипсоида вращения), аппроксимирующей реальную физическую поверхность Земли и называемой *фундаментальной поверхностью относимости* (см. ниже *общий земной эллипсоид*, или *сфероид*, и *референц-эллипсоид*).

Обе эти системы и представляют системы географических координат; положение точки земной поверхности, отнесенное к любой из них, называется *географическим положением* этой точки. Обычно географические координаты точки в этих двух различных системах не отличаются более чем на несколько секунд дуги, однако всегда следует точно указывать, о какой системе географических координат идет речь.

**1. Астрономические координаты.** В системе астрономических координат, к которой относятся положения точек земной поверхности, полюсы Земли определяются как точки пересечения поверхности Земли осью вращения и называются *географическими полюсами*. Плоскость, проведенная перпендикулярно к земной оси вращения через центр масс Земли, пересекает земную поверхность по *географическому экватору*.

Так как реальная форма Земли отклоняется от сферической, то астрономические координаты не могут быть выражены через угловые расстояния точек, измеренные на поверхности и отнесенные непосредственно к географическим полюсам и экватору, как это было в случае экваториальной системы на небесной сфере. Необходимо определить систему астрономических координат через углы в пространстве, фиксирующие направление *местной* астрономической вертикали относительно основных наблюдаемых направлений, измерив, например, астрономическими способами угол между направлением вертикали и направлением на северный полюс мира. Этот угол определит положение вертикали в плоскости *местного* меридиана, т. е. в направлении *север — юг*.

Установив далее положение плоскости местного небесного меридиана относительно общепринятого *основного*, или *нулевого*, меридиана, мы фиксируем положение вертикали в направлении *восток — запад*.

При определении системы координат точек земной поверхности через углы, фиксирующие направление вертикали, необходимо учитывать влияние местных аномалий на направление силы тяжести, определяющее астрономическую вертикаль. Так как местная вертикаль вообще не пересекает ось вращения Земли, плоскость небесного меридиана, проходящая через вертикаль и ось небесной сферы, направленную от наблюдателя

к северному полюсу мира, не проходит через ось вращения Земли, а параллельна ей и пересекает поверхность Земли по кривой, не проходящей, вообще говоря, через географические полюсы.

Тем не менее в обычном геометрическом смысле с углом между вертикалью и осью вращения Земли отождествляют угол в плоскости местного меридиана, заключенный между вертикалью и осью небесной сферы в данной точке земной поверхности. Таким образом, положение этой точки фиксируется относительно точки, в которой этот угол равен нулю, т. е. полюсу мира находится в зените, и измеряется дугой небесного меридиана, заключенной между полюсом и зенитом.

Дополнение до  $90^\circ$  *острого* угла между астрономической вертикалью и осью вращения Земли называется *астрономической широтой*  $\varphi_a$ . Геометрическое место точек на поверхности Земли с астрономической широтой, равной  $0^\circ$ , называется *астрономическим экватором*, геометрические места точек с другими фиксированными частными значениями астрономической широты называются *параллелями*. Принято считать широты точек в северном полушарии положительными, в южном — отрицательными. Экватор и параллели являются кривыми двойкой кривизны, мало отличающимися от плоских кривых. Астрономический экватор не совпадает с географическим экватором — экватором вращения, но все вертикали в точках астрономического экватора перпендикулярны к оси вращения Земли и, следовательно, параллельны плоскости географического экватора и пересекают небесную сферу по небесному экватору. Широты географических полюсов необязательно равны точно  $90^\circ$ , однако можно считать, что точки с астрономической широтой в  $90^\circ$  являются *астрономически определенными* географическими полюсами.

Двугранный угол, заключенный между плоскостями меридиана данной точки и местного меридиана общепринятой точки отсчета на поверхности Земли, называется *астрономической долготой* данной точки  $\lambda_a$ .

За основную плоскость отсчета принята плоскость меридиана, проходящего через Гриничскую обсерваторию. Астрономические долготы отсчитываются к западу (положительные) и к востоку (отрицательные) от Гринича от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  (или в часовой мере от  $0^h$  до  $12^h$ ).

Геометрическое место точек земной поверхности с одной и той же астрономической долготой называется *астрономическим меридианом*. Вследствие отклонений в направлении вертикали от точки к точке поверхности Земли плоскости местных меридианов в различных точках с одинаковой астрономической долготой, вообще говоря, не совпадают, а параллельны друг другу. Таким образом, астрономические меридианы на поверхности

Земли являются кривыми двойкой кривизны. Пересечение поверхности Земли плоскостью местного небесного меридиана определяет кривую, не проходящую через географические полюсы; она совпадает с астрономическим местным меридианом только в данной точке.

Таким образом, из-за влияния аномалий силы тяжести на положение астрономической вертикали и на вид и свойства меридианов и параллелей *астрономическая* система географических координат непригодна для точного выражения геометрических соотношений на поверхности Земли; поэтому обращаются к географической системе *геодезических* координат.

**2. Геодезические координаты.** Основу географической системы геодезических координат составляет поверхность эллипсоида вращения, аппроксимирующая реальную поверхность Земли. Параметры этой фундаментальной поверхности относимости являются частью системы астрономических постоянных (см. § 4.01). Необходимо иметь в виду, что непосредственные результаты астрономо-геодезических измерений на местности всегда дают куски урванной поверхности, которые нельзя точно «расстелить» на эллипсоиде вращения. Поэтому за математическую поверхность Земли принимают урванную поверхность, совпадающую при определенных условиях со средней поверхностью воды спокойного океана. Эта поверхность называется «геоидом». Наиболее близкий к геоиду эллипсоид, наилучшим образом представляющий фигуру и гравитационное поле всей Земли в целом, называется *общим земным эллипсоидом*, или *сфероидом*; однако используемые в различных странах для обработки отдельных рядов геодезических измерений *референц-эллипсоиды* не совпадают, как правило, с общим земным сфероидом. В систему астрономо-геодезических постоянных включают параметры (экваториальный радиус  $a_e$  и сжатие  $\alpha$ ) общего земного сфероида, принятого во всем мире для астрономических и геодезических работ. Положение любой точки поверхности Земли относительно такого стандартного сфероида определяется расстоянием по нормали от поверхности сфероида и положением основания этой нормали на поверхности сфероида.

*Геодезическими полюсами* называются точки пересечения оси вращения сфероида с его поверхностью; плоскость, образуемая большей полуосью производящего эллипса, называется *плоскостью геодезического экватора*. *Геодезическая вертикаль* в любой точке земной поверхности совпадает с нормалью к стандартному сфероиду, проходящей через эту точку; таким образом, *геодезический зенит* представляет точку  $Z_g$  пересечения небесной сферы с геодезической вертикалью.

Систему *геодезических меридианов* образуют эллипсы, по которым плоскости, проведенные через ось вращения сфероида,

пересекают его поверхность, *геодезические параллели* — это круги пересечения плоскостей, перпендикулярных к оси вращения, с поверхностью сфероида. Геодезическая вертикаль любой точки лежит в плоскости геодезического меридиана и пересекает, следовательно, ось вращения сфероида; однако геодезическая вертикаль вообще не проходит через центр сфероида.

*Геодезическая широта*  $\varphi_g$  измеряется углом между геодезической вертикалью и плоскостью геодезического экватора. *Геодезическая долгота*  $\lambda_g$  измеряется двугранным углом между плоскостями геодезических меридианов, проходящих через данную точку и общепринятую начальную точку отсчета.

Геодезические координаты определяются относительно направления геодезической вертикали, которое нельзя получить непосредственно из наблюдений. Поэтому геодезические координаты *непосредственно измерить* нельзя — их можно *вычислить* по измерениям расстояний и углов на поверхности Земли, т. е. по результатам геодезических съемок. Эти вычисления производятся на основе определенного общепринятого земного сфероида — *стандартного референц-эллипсоида*, определяемого конкретными числовыми значениями большой полуоси производящего эллипса и сжатия — параметра, характеризующего отклонение от сферы. Поэтому координаты в геодезической системе относятся, как правило, к этому принятому земному сфероиду (см. табл. 1 элементов земных эллипсоидов, принятых в различных геодезических системах).

Таблица 1

Авторитет Элемент	Бессель (1841)	Кларк (1880)	Гельмерт (1907)	Хэйфорд (1909)	Красовский. Изотова (1940)
Экваториальная полуось $a_e$ , м	6 377 397	6 378 249	6 378 200	6 378 388	6 378 245
Полярная полуось $b$ , м	6 356 079	6 356 515	6 356 818	6 356 912	6 356 863
Обратная величина сжатия $\alpha^{-1}$	299,15	293,47	298,25 *)	297,0	298,3

\*) По Рудзскому.

Положение стандартного сфероида относимости относительно Земли фиксируется принятыми значениями геодезической широты и долготы определенного исходного пункта, на котором определены астрономические долгота и широта, а также *принятым* значением геодезического азимута геодезической линии избранного направления, проходящей через этот пункт. Эта



система принятых параметров называется *геодезической системой данных* (системой исходных геодезических дат), а пункт, для которого приняты определенные значения геодезических координат, называется *начальным*.

Линия кратчайшего расстояния, лежащая всеми своими точками на стандартном сфероиде относимости, называется *геодезической линией*, или просто *геодезической*. *Геодезический азимут* есть угол между геодезическим меридианом наблюдателя и касательной к геодезической в точке наблюдения, измеряемый в плоскости, касательной к сфероиду в точке наблюдателя. *Геодезический горизонт* определяется плоскостью, проведенной перпендикулярно к геодезической вертикали в точке наблюдения.

### § 1.11. Соотношения между астрономическими и геодезическими координатами

Астрономическая и геодезическая системы географических координат не зависят друг от друга; разности между соответствующими координатами  $\lambda_a, \varphi_a$  и  $\lambda_g, \varphi_g$  одной и той же точки можно обнаружить только из наблюдений (рис. 22). Эти разности обусловлены главным образом неправильными изменениями в направлении силы тяжести при переходе от точки к точке земной поверхности, несовпадением оси вращения Земли с осью вращения эллипсоида относимости и центра этого эллипсоида с центром масс Земли. Поэтому астрономическая вертикаль образует с геодезической вертикалью угол, который называется *укло-*

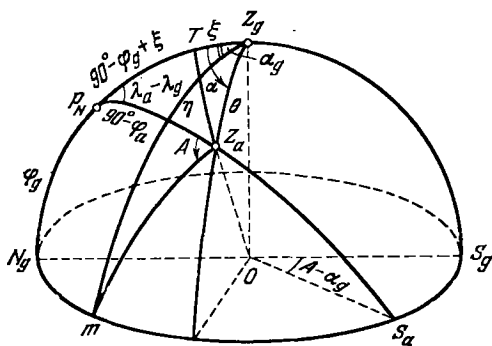


Рис. 22. Астрономические и геодезические координаты.

*нием отвеса*. Различают *абсолютное* уклонение отвеса, измеряемое углом  $\theta_{абс}$  между астрономической вертикалью и нормалью к общему земному эллипсоиду, и *относительное* (астрономо-геодезическое) уклонение отвеса, равное углу, заключенному между астрономической вертикалью и нормалью к принятому референц-эллипсоиду.

Уклонение отвеса  $\theta$  можно разложить на две составляющие — меридиональную составляющую  $\xi$  с положительным направлением отсчета от геодезического зенита  $Z_g$  к северному полюсу мира  $P_N$  и составляющую по дуге первого вертикала  $\eta$

ности обусловлены главным образом неправильными изменениями в направлении силы тяжести при переходе от точки к точке земной поверхности, несовпадением оси вращения Земли с осью вращения эллипсоида относимости и центра этого эллипсоида с центром масс Земли. Поэтому астрономическая вертикаль образует с геодезической вертикалью угол, который называется *укло-*

с положительным направлением отсчета от геодезического зенита к точке востока (рис. 23).

Уклонение отвеса может быть найдено из гравиметрических измерений как угол между градиентами потенциала Земли  $U$  (геоида  $G$ ) и потенциала  $V$ , соответствующего данному эллипсоиду относимости  $E$  (например, нормального потенциала общего земного эллипсоида), которые вычисляются в соответственных точках  $r, r_e, \varphi, \lambda$ , т. е.

$$\theta = \arccos \frac{\text{grad } U \cdot \text{grad } V}{|\text{grad } U| |\text{grad } V|}.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \theta \cos \alpha, \\ \eta &= \theta \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.054)$$

где  $\alpha$  — геодезический азимут направления полного уклонения отвеса  $\theta$ , определяемый формулой

$$\cos \alpha = - \frac{[\text{grad } V, \text{grad } U] \cdot [\text{grad } V, e_z]}{||[\text{grad } V, \text{grad } U]|| |[\text{grad } V, e_z]|},$$

в которой  $e_z$  — единичный вектор, направленный по оси вращения Земли.

Для  $\theta, \xi, \eta$  имеются приближенные формулы

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \sqrt{\left(\frac{1}{r_e} \frac{dr_e}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}, \\ \xi &= \frac{1}{r_e} \frac{dr_e}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}, \\ \eta &= - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{dr}{d\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.055)$$

где

$$\frac{dr_e}{d\varphi} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}{\frac{\partial V}{\partial r_e}}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi}}{\frac{\partial U}{\partial r}}, \quad \frac{dr}{d\lambda} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial \lambda}}{\frac{\partial U}{\partial r}}. \quad (1.1.056)$$

Из сферического прямоугольного треугольника  $P_N Z_a T$  (см. рис. 22) имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos(\lambda_a - \lambda_g) &= \text{tg } \varphi_a \text{ ctg } (\varphi_g + \xi), \\ \sin(\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_a &= \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.057)$$

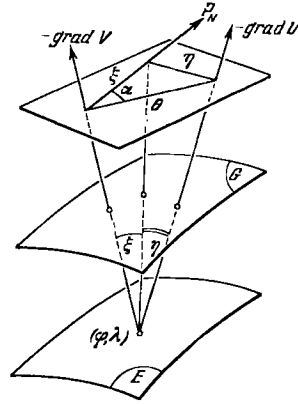


Рис. 23. Связь между уклонением отвеса  $\theta$  и его составляющими  $\xi$  и  $\eta$ .

или, приближенно,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a - \varphi_g &= \xi, \\ (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_a &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.058)$$

Астрономический азимут  $A$  и геодезический азимут  $\alpha_g$  измеряются в различных плоскостях; однако относительная погрешность измерения обоих азимутов в плоскости астрономического горизонта не превышает величины порядка  $10^{-8}$ . Поэтому в сферическом треугольнике  $S_g S_a P_N$  можно принять  $S_a P_N = 180^\circ - \varphi_a$ ; тогда, с той же степенью точности,

$$A - \alpha_g = (\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi_a = \eta \operatorname{tg} \varphi_a. \quad (1.1.059)$$

Соотношение (1.1.059) называется *уравнением Лапласа*; оно дает возможность вычисления геодезического азимута для тех триангуляционных пунктов, на которых, кроме астрономического азимута  $A$ , из наблюдений определяется и астрономическая долгота  $\lambda_a$  (*пункты Лапласа*).

Разности между астрономическими и геодезическими координатами часто достигают  $5'' - 10''$ , иногда  $20''$ ; отклонения отвеса в  $30'' - 40''$  чрезвычайно редки (уклонению в  $1''$  по долготе на широте  $\varphi = 45^\circ$  соответствует  $22$  м на поверхности Земли в направлении параллели).

**1. Геоцентрические координаты.** Кроме координатных систем на *поверхности Земли* необходима еще система координат, определяющая положение точек земной поверхности относительно центра принятого эллипсоида относимости (который, как можно считать с определенной степенью приближения, совпадает с центром масс Земли).

С этой целью вводят расстояние  $\rho$  от центра эллипсоида относимости, называемое *геоцентрическим радиусом-вектором*, *геоцентрическую широту*  $\varphi'$  — угол между радиусом-вектором  $\rho$  и плоскостью геодезического экватора, и *геоцентрическую долготу*, совпадающую с геодезической долготой  $\lambda$ ; *геоцентрическим зенитом* называется точка пересечения продолжения радиуса-вектора  $\rho$  с геоцентрической небесной сферой (рис. 24, а).

Угол  $\varphi - \varphi'$  между радиусом-вектором  $\rho$  и нормалью к эллипсоиду называется *углом вертикали*, или *приведением широты*. В астрономии геоцентрическую широту  $\varphi'$  иногда называют *приведенной широтой*.

Зависимость между геодезической широтой  $\varphi$  и геоцентрической широтой  $\varphi'$  имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.1.060)$$

где  $e$  означает эксцентриситет эллипсоида относимости, соответствующий сжатию  $\alpha$  этого эллипсоида. Если  $a_e$  и  $b$  — соответ-

ственно большая полуось (экваториальный радиус) и малая (полярная) полуось эллипсоида относимости, то

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\sqrt{a_e^2 - b^2}}{a_e}, & \alpha &= \frac{a_e - b}{a_e}, \\ e &= \sqrt{2\alpha - \alpha^2}, & \alpha &= 1 - \sqrt{1 - e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.061)$$

Положение точки  $O$  на поверхности Земли можно определить высотой  $H$  этой точки по нормали к эллипсоиду относимости и прямоугольными координатами  $x, y$  точки  $O'$  пересечения этой нормали с поверхностью эллипсоида, отнесенными к системе координат  $XU$ , лежащей в плоскости геодезического меридиана

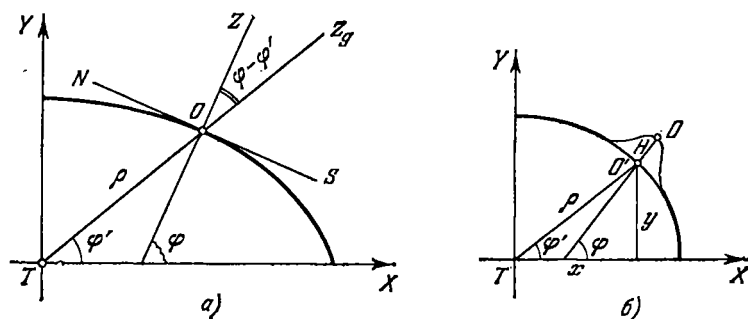


Рис. 24. а) Геоцентрическая и астрономическая широта. б) Прямоугольные координаты точки земной поверхности

точки  $O$ , причем ось  $TX$  направлена в точку пересечения меридиана с экватором, ось  $TU$  — в северный геодезический полюс  $P'_N$  (рис. 24, б). Для прямоугольных координат  $x, y$  точки  $O$  имеем

$$x = C \cos \varphi, \quad y = S \sin \varphi \quad (1.1.062)$$

и

$$\rho = C \sqrt{1 - e^2(2 - e^2)\sin^2 \varphi}, \quad (1.1.063)$$

где

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad S = (1 - e^2)C. \quad (1.1.064)$$

Угол вертикали  $\varphi - \varphi'$  можно определить по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') &= \frac{q \sin 2\varphi}{1 + q \cos 2\varphi}, \\ \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') &= \frac{q \sin 2\varphi'}{1 - q \cos 2\varphi'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.065)$$

где

$$q = \frac{e^2}{2 - e^2}.$$

Таблица значений функций  $C$  и  $S$  по аргументу  $\varphi$  для эллипсоида МАС опубликована в «Приложениях к Астрономическому Ежегоднику СССР» на 1968—1971 гг.

Функции  $C$  и  $S$ , а также геоцентрический радиус-вектор  $\rho$  (в единицах экваториального радиуса  $a_e$  земного эллипсоида) и угол вертикали  $\varphi - \varphi'$  можно вычислить, воспользовавшись разложениями

$$\left. \begin{aligned} S &= 0,99497418 - 0,00167082 \cos 2\varphi + 0,00000210 \cos 4\varphi, \\ C &= 1,00167997 - 0,00168208 \cos 2\varphi + 0,00000212 \cos 4\varphi, \\ \rho &= 0,99832707 + 0,00167644 \cos 2\varphi - 0,00000352 \cos 4\varphi, \\ \varphi - \varphi' &= 692'',743 \sin 2\varphi - 1'',163 \sin 4\varphi + 0'',003 \sin 6\varphi, \end{aligned} \right\} (1.1.066)$$

полученными для элементов земного сфероида МАС (см. гл. 4):

$$a_e = 6\,378\,160 \text{ м}, \quad \alpha = 1/298,25.$$

Высота  $H$  точки наблюдения  $O$  над эллипсоидом относимо-сти учитывается следующими поправками к координатам  $x, y$  точки  $O'$ :

$$\Delta x = H \cos \varphi, \quad \Delta y = H \sin \varphi.$$

Поэтому полные координаты  $X, Y$  точки наблюдения  $O$  равны

$$X = C' \cos \varphi, \quad Y = S' \sin \varphi,$$

где

$$C' = a_e C + H, \quad S' = a_e S + H.$$

*Ортометрическая высота*  $h$  точки наблюдения  $O$  над геоидом (уровнем моря), не совпадающая, вообще говоря, с  $H$ , может быть учтена с некоторой степенью приближения, если рассматривать  $h$  как приращение геоцентрического радиуса-вектора  $\rho$ , по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin \varphi' &= (S + 1,568h \cdot 10^{-7}) \sin \varphi, \\ \rho \cos \varphi' &= (C + 1,568h \cdot 10^{-7}) \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= (0,993305 + 0,011h \cdot 10^{-7}) \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} (1.1.067)$$

где  $h$  — в метрах.

Так как формулы (1.1.067) применяются к широте  $\varphi$ , приведенной к уровню моря, то при больших высотах  $h$  необходимо пользоваться более точными формулами А. А. Михайлова:

$$\left. \begin{aligned} (\rho + \Delta\rho) \sin \varphi' &= \\ &= [S + (1,5678 - 0,0136 \cos^2 \varphi) h \cdot 10^{-7}] \sin \varphi, \\ (\rho + \Delta\rho) \cos \varphi' &= \\ &= [C + (1,5678 + 0,0136 \cos^2 \varphi) h \cdot 10^{-7}] \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (1.1.068)$$

Прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$  точки  $O$  можно выразить через приведенную широту \*)  $u$ , называемую также *параметрической* или *геометрической широтой*.

Если продолжить перпендикуляр (рис. 25), опущенный на плоскость геодезического экватора из точки  $O$ , до пересечения с описанной вокруг земного сфероида сферой (радиуса  $a_e$  и центром в  $T$ ), то угол  $u$  между радиусом  $TP$  и плоскостью геодезического экватора называется *приведенной широтой*.

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} x &= a_e \cos u, \\ y &= a_e \sqrt{1 - e^2} \sin u = a_e (1 - \alpha) \sin u. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.069)$$

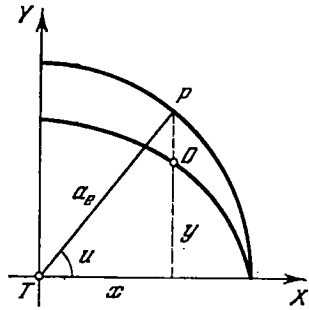


Рис. 25. Приведенная широта.

Приведенная широта  $u$  связана с геодезической широтой  $\varphi$  и геоцентрической широтой  $\varphi'$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} u &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{tg} \varphi', \\ &= (1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1 - \alpha} \operatorname{tg} \varphi', \\ (\varphi - u)'' &= \frac{1}{\sin 1''} \left( \frac{1}{4} e^2 \sin 2\varphi + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.070)$$

**2. Изменения географических координат.** Местная система отсчета, состоящая из системы горизонтальных координат и астрономической системы географических координат, зависит от положений астрономической вертикали и оси вращения Земли. Географические координаты, зависящие от направления вертикали относительно оси вращения Земли, подвержены влиянию изменений как в положении вертикали, так и в положении оси вращения внутри Земли.

На горизонтальные координаты оказывают влияние как изменения в направлении вертикали относительно Земли, так и перемещения вертикали в пространстве, обусловленные движением Земли вокруг центра масс, движущегося в свою очередь относительно ее оси вращения.

Наблюдениями была обнаружена изменяемость астрономических широт и долгот земной поверхности, в которой основную роль играет движение географических полюсов по поверхности

\*) Не следует смешивать с геоцентрической широтой  $\varphi'$ , иногда встречающейся под этим же названием.

Земли. Для непрерывного наблюдения за положением истинного географического полюса в 1895 г. была учреждена Международная служба широт (МСШ), объединявшая пять обсерваторий мира, лежащих под широтой  $39^{\circ}08'$ , но под различными долготами. С 1960 года МСШ была заменена Международной службой движения полюсов (МСДП) с центром в Мидзусаве (Япония). В ее работе, кроме обсерваторий МСШ, принимают участие еще около 50 обсерваторий и станций.

Таблица 2

Обсерватория МСШ	Долгота от Гринича	Широта
Карлофорте, Италия	$8^{\circ}18'44''$	$39^{\circ}08'08'',941$
Гейтерсбург, США	77 11 57	13,202
Китаб, СССР	66 52 51	01,850
Мидзусавы, Япония	141 07 51	03,602
Юкайя, США	123 12 35	12,096

Основная задача МСДП (International Polar Motion Service) состоит в систематическом определении по широтным наблюдениям прямоугольных координат  $x$  и  $y$  истинного географического полюса Земли в избранной для этой цели системе отсчета.

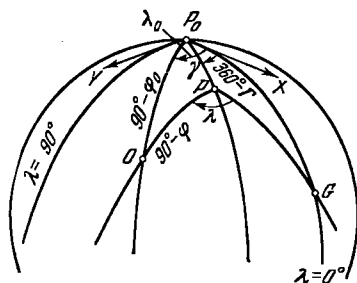


Рис. 26. Координаты истинного полюса относительно среднего полюса.

Начало этой системы координат, называемое *Международным условным началом* (МУН) (CIO, the Conventional International Origin), лежит в точке  $P_0$ , определяемой номинальными значениями географических широт, приписанными пяти обсерваториям МСШ и приведенными в табл. 2. Оси  $P_0X$  и  $P_0Y$  этой системы направлены по касательным соответственно к среднему меридиану Гринича и к меридиану под западной долготой  $90^{\circ}$  от него (рис. 26). Международное условное начало (МУН) было введено в практику обработки широтных наблюдений и определений времени с 1 января 1968 г. Оно фактически совпадает со средним положением истинного полюса Земли в течение периода 1900—1905 гг. (иногда неправильно называемым средним полюсом эпохи 1903,0), относительно которого изучалось перемещение истинного полюса до 1955 г. С 1955 по 1959 г. в качестве начала отсчета положений истинного полюса служило среднее положение, выведенное проф. Чеккини из наблюдений за период с 1949 по 1958 гг.,

а с 1959 по 1967 гг. — так называемый средний полюс эпохи. На этих началах отсчета были основаны работы Международного Бюро времени (Париж, Франция) по вычислению координат  $x$ ,  $y$  истинного полюса Земли. Если угол  $\gamma$  измеряется дугой среднего меридиана истинного полюса  $P$ , заключенной между истинным положением полюса  $P$  и МУН  $P_0$ , а  $\Gamma$  есть угол при среднем полюсе  $P_0$ , отсчитываемый к востоку от среднего меридиана точки наблюдения  $O$  до дуги  $P_0P$  (см. рис. 26), то координаты  $x$  и  $y$  истинного полюса  $P$  можно выразить через углы  $\gamma$  и  $\Gamma$  соотношениями

$$x = \gamma \cos \Gamma, \quad y = \gamma \sin \Gamma.$$

Если  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  — средние значения астрономической широты и долготы точки земной поверхности, отнесенные к среднему полюсу  $P_0$ , то истинные (мгновенные) координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$  этой точки  $O$ , отнесенные к мгновенному полюсу  $P$ , определяются через прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$  полюса  $P$  формулами (рис. 27)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - (x \cos \lambda_0 + y \sin \lambda_0), \\ \lambda &= \lambda_0 + (x \sin \lambda_0 - y \cos \lambda_0) \operatorname{tg} \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.071)$$

Значения координат  $x$ ,  $y$  мгновенного полюса периодически публикуются в *Circulaires ВИН*, издаваемых в Париже Международным Бюро времени (ВИН), причем циркуляры *Circulaire В* и *Circulaire D* содержат наблюдаемые значения координат, а *Circulaire С* — их экстраполированные значения. До 1 декабря 1967 г. эти данные публиковались в *Bulletin Horaire*.

Необходимо иметь в виду, что координаты МУН на 1 января 1968 г. в старой системе равны

$$x_{c10} = +0'',007, \quad y_{c10} = +0'',233.$$

Соответствующие поправки к координатам истинного полюса и моментам времени в системах  $UT1$  и  $UT2$ , обусловленные выбором различных начал отсчета при определении положений истинного полюса, сведены в табл. 3 [61].

В 1970 г. организованная Военно-морской лабораторией вооружения США Служба определения движения полюсов Земли (*Dahlgren Polar Monitoring Service*) начала определение

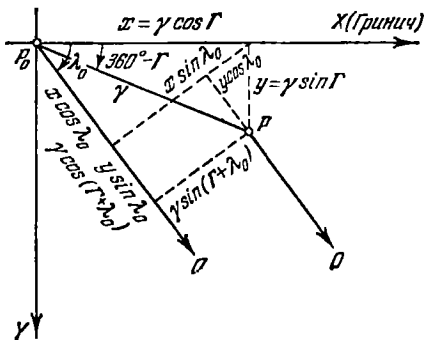


Рис. 27. Связь между истинными и средними географическими координатами.



Таблица 3

Год	Поправки к			Примечания	
	$x_{C10} - x_{MBB}$	$y_{C10} - y_{MBB}$	UT1 или UT2		
1955	+0,048	+0,043	+0,0025	} Переход от полюса Чеккини к среднему полюсу эпохи	
1956	+0,048	+0,043	24		
1957	+0,048	+0,043	24		
1958,65	50	62	15		
1959,10	68	173	-0,0028		
1959,95	70	173	28		
1960	68	183	32		
1961	62	194	37		
1962	55	203	+0,0004		} Принятие FK4 и новых значений долгот
1963	47	211	03		
1964	40	218	04		
1965	31	224	05		
1966	22	229	34	} Принятие МУН, новых значений долгот и нового значения постоянной абберации	
1967,45	12	232	20		
1967,95	7	233	20		
1968	0	0	0		

координат истинного полюса на основе анализа доплеровых наблюдений ИСЗ [62], [63] и публикует значения  $x$ ,  $y$  с точностью до 0,01 м, охватывая также наблюдения прошлых лет. Средняя квадратичная ошибка этих определений порядка 1 м. Результаты, получаемые службами IPMS и DPMS, обрабатываются Международным Бюро времени совместно с результатами наблюдений на обсерваториях, сотрудничающих с МБВ.

Координаты истинного полюса в системе МУН за период с 1899 по 1968 г. были определены и опубликованы Висенте и Юми [64].

### § 1.12. Планетоцентрические системы координат [25]

В первой планетоцентрической экваториальной системе координат за основную плоскость принимается плоскость экватора планеты, за основную точку отсчета — нисходящий узел  $\Omega_{пл}$  гелиоцентрической орбиты планеты на ее экваторе, т. е. *точка весеннего равноденствия для планеты*.

Положение проекции любой точки пространства на небесную сферу в такой планетоцентрической системе координат определяется угловым расстоянием  $D$  этой точки от экватора планеты, отсчитываемым по кругу склонения, проходящему через полюсы мира планеты  $P_{пл}$ ,  $P'_{пл}$ , и дугой экватора планеты от

точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{пл}$  до круга склонения, проходящего через данную точку (рис. 28). Величина  $D$  называется *планетоцентрическим склонением* и считается положительной к северу от экватора планеты,  $A$  — *планетоцентрическое прямое восхождение* и отсчитывается от точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{пл}$  к востоку.

Вторая планетоцентрическая система координат использует в качестве основной плоскости и основной точки отсчета соответственно плоскость гелиоцентрической орбиты планеты и точку весеннего равноденствия  $\Upsilon_{пл}$ . Эта система является аналогом геоцентрической эклиптической системы координат.

Положение точки на планетоцентрической небесной сфере в такой системе координат определяется *планетоцентрической широтой*  $b$ , отсчитываемой от плоскости орбиты по планетоцентрическому кругу широт (большой круг планетоцентрической небесной сферы, проходящий через полюс гелиоцентрической орбиты планеты  $P_{пл}$  и данную точку), и *планетоцентрической долготой*  $l$ , измеряемой дугой орбиты планеты между точкой весеннего равноденствия планеты  $\Upsilon_{пл}$  и кругом широт данной точки.

Выбором в качестве основной плоскости и основной точки отсчета соответственно плоскости небесного экватора и точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$  Земли определяется третий вид планетоцентрической системы координат — *геоэкваториальной*.

Планетоцентрические системы координат применяются при вычислениях величин, характеризующих геометрическую картину поверхности вращающейся планеты при наблюдениях с Земли и дающих возможность построить *планетографическую систему координат* на поверхности планеты, аналогичную географической координатной сетке на Земле. Таблицы числовых значений этих величин, вычисленных для ряда равноотстоящих дат, называются *эфемеридами для физических наблюдений* соответствующей планеты (Марса, Юпитера, Сатурна) и публикуются в астрономических ежегодниках.

Вид диска планеты зависит от положений Земли и Солнца на планетоцентрической небесной сфере; при этом видимое планетоцентрическое положение Земли диаметрально противоположно геоцентрическому положению планеты. В геоэкватори-

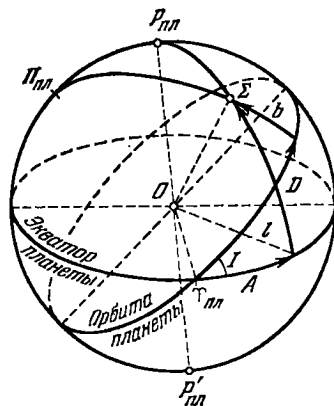


Рис. 28. Планетоцентрическая система сферических координат.

альной планетоцентрической системе координат планетоцентрическое склонение  $D_{\oplus}$  Земли равно по величине и противоположно по знаку геоцентрическому склонению  $\delta$  планеты, а разность планетоцентрического прямого восхождения  $A_{\oplus}$  Земли и геоцентрического прямого восхождения  $\alpha$  планеты равна  $\pm 180^\circ$ .

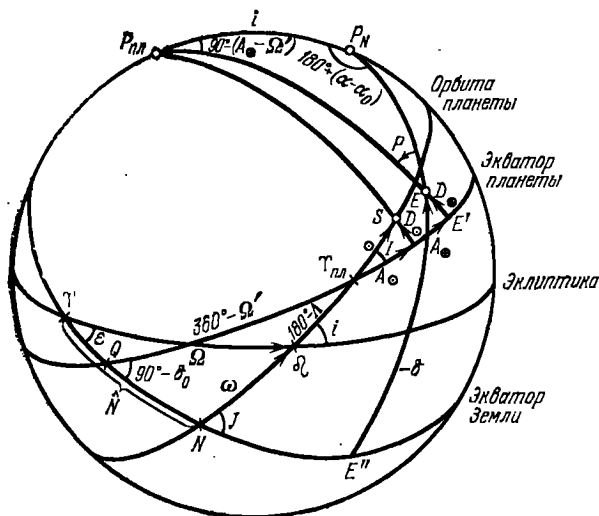


Рис. 29. Планетоцентрическая небесная сфера. Связь между геоцентрическими и планетоцентрическими сферическими координатами.

То же справедливо и для планетоцентрических координат  $A_{\oplus}$ ,  $D_{\oplus}$  Солнца, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A_{\oplus} &= \alpha \pm 12^h, & D_{\oplus} &= -\delta, \\ A_{\odot} &= \alpha_{\odot} \pm 12^h, & D_{\odot} &= -\delta_{\odot}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.072)$$

Вычисление планетоцентрических координат Земли, отнесенных к плоскости экватора и точке весеннего равноденствия  $T_{пл}$  планеты, выполняется при помощи следующих трех групп формул (рис. 29):

$$\left. \begin{aligned} \sin J \sin \hat{N} &= \sin i \sin \Omega, \\ \sin J \cos \hat{N} &= \cos i \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon \cos \Omega, \\ \cos J &= \cos i \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \cos \Omega, \\ \sin J \sin \omega &= \sin \epsilon \sin \Omega, \\ \sin J \cos \omega &= \sin i \cos \epsilon + \cos i \sin \epsilon \cos \Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.1.073)$$

(сферический треугольник  $\Upsilon \Omega N$ );

$$\left. \begin{aligned} \sin I \sin \Omega' &= \sin J \cos (\hat{N} - \alpha_0), \\ \sin I \cos \Omega' &= -\cos J \cos \delta_0 + \sin J \sin \delta_0 \sin (\hat{N} - \alpha_0), \\ \cos I &= \cos J \sin \delta_0 + \sin J \cos \delta_0 \sin (\hat{N} - \alpha_0), \\ \sin I \sin (\Lambda - \omega) &= -\cos \delta_0 \cos (\hat{N} - \alpha_0), \\ \sin I \cos (\Lambda - \omega) &= -\sin J \sin \delta_0 + \cos J \cos \delta_0 \sin (\hat{N} - \alpha_0) \end{aligned} \right\} (1.1.074)$$

(сферический треугольник  $\Upsilon_{пл}NQ$ );

$$\left. \begin{aligned} \cos D_{\oplus} \cos (A_{\oplus} - \Omega') &= \cos \delta \sin (\alpha_0 - \alpha), \\ \cos D_{\oplus} \sin (A_{\oplus} - \Omega') &= -\cos \delta_0 \sin \delta + \sin \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha_0 - \alpha), \\ \sin D_{\oplus} &= -\sin \delta_0 \sin \delta - \cos \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha_0 - \alpha), \\ \cos D_{\oplus} \sin P &= \cos \delta_0 \sin (\alpha_0 - \alpha), \\ \cos D_{\oplus} \cos P &= \sin \delta_0 \cos \delta - \cos \delta_0 \sin \delta \cos (\alpha_0 - \alpha) \end{aligned} \right\} (1.1.075)$$

(сферический треугольник  $P_{пл}EP_N$ ).

В формулах (1.1.073)—(1.1.075) введены следующие обозначения (см. рис. 29):

$\alpha_0, \delta_0$  — геоцентрические экваториальные координаты северного полюса экватора планеты  $P_{пл}$ ,

$\hat{N} = \Upsilon N$  — угловое расстояние от точки весеннего равноденствия до восходящего узла орбиты планеты на экваторе Земли,

$I$  — наклон орбиты планеты к экватору Земли,

$\omega$  — угловое расстояние между восходящими узлами орбиты планеты на экваторе Земли и на эклиптике,

$\Omega'$  — планетоцентрическое прямое восхождение восходящего узла экватора планеты на экваторе Земли,

$I$  — наклон орбиты планеты к экватору планеты,

$\Lambda$  — планетоцентрическая долгота восходящего узла орбиты планеты на эклиптике, измененная на  $\pm 180^\circ$ ,

$\Omega$  — геоцентрическая долгота восходящего узла орбиты планеты на эклиптике,

$i$  — наклон орбиты планеты к эклиптике,

$\epsilon$  — наклон эклиптики к экватору,

$P$  — угол положения оси вращения планеты на геоцентрической небесной сфере, отсчитываемый при центре планеты от направления на северный полюс мира к востоку,

$E, S$  — положения Земли и Солнца на планетоцентрической небесной сфере,

$\odot$  — планетоцентрическая долгота Солнца.

При этом *видимые координаты*  $\alpha$ ,  $\delta$  планеты (см. § 2.05), публикуемые в «Астрономическом Ежегоднике», приводим к *среднему равноденствию и экватору* даты (§ 2.01) вычитанием *нутаии* (§ 2.03):

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha^s &= \frac{\Delta\psi}{15} (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) - \frac{\Delta\varepsilon}{15} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha, \\ \Delta\delta'' &= \sin \varepsilon \cos \alpha \Delta\psi + \sin \alpha \Delta\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.076)$$

Планетоцентрическую долготу Солнца  $\odot$  находим по формуле

$$\operatorname{tg} (\odot - \Lambda) = \operatorname{tg} (l - \Omega) \sec i, \quad (1.1.077)$$

где  $l$  — гелиоцентрическая долгота планеты.

Планетоцентрические координаты  $A_{\odot}$ ,  $D_{\odot}$  Солнца вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A_{\odot} &= \operatorname{tg} \odot \cos I, \\ \sin D_{\odot} &= \sin \odot \sin I. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.078)$$

Если  $V$  означает часовой угол точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{\text{пл}}$  планеты (нисходящего узла орбиты планеты на ее экваторе) относительно нулевого меридиана планетографической системы, то планетоцентрический часовой угол Земли относительно этого же меридиана равен  $V - A_{\oplus}$ . При наблюдениях с Земли планетоцентрическое звездное время на нулевом меридиане  $V$  следует уменьшить на величину поворота планеты за абберационное время  $\tau_{\text{AR}}$ , т. е. на  $\mu\tau_{\text{AR}}$ , где  $\mu$  есть средняя суточная скорость осевого вращения планеты,  $\mu = 360^\circ/P$ ,  $P$  — период осевого вращения, определяемый из наблюдений. Тогда долгота центрального меридиана планеты  $l_p$ , т. е. планетографического меридиана, проходящего через центр Земли, определяется формулой

$$l_p = V - A_{\oplus} - \mu\tau_{\text{AR}}. \quad (1.1.078a)$$

Для вычисления величины  $V$  в момент времени  $t$  служит формула

$$V_t = V_{t_0} + \mu(t - t_0), \quad (1.1.078б)$$

в которой  $V_{t_0}$  есть значение  $V$  в некоторый начальный момент  $t_0$ , для которого из наблюдений известна долгота центрального меридиана  $l_p^{(0)}$ , а также величина  $A_{\oplus}$ , таким образом,

$$V_{t_0} = l_p^{(0)} + A_{\oplus} + \mu\tau_{\text{AR}0}, \quad (1.1.078в)$$

где  $\rho_0$  — геоцентрическое расстояние планеты в момент  $t_0$ .

Формулы перехода от геоэквиаториальных координат небесного объекта к его планетоэквиаториальным координатам приобретают удобный и компактный вид, если воспользоваться прямоугольными системами отсчета и матрицами-операторами поворота  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ .

Если  $(x, y, z)$  означает планетоцентрический геоэквиаториальный радиус-вектор объекта,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{r} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix},$$

а  $(\xi, \eta, \zeta)$  — планетоцентрический планетоэквиаториальный радиус-вектор этого же объекта,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \mathbf{r} \begin{Bmatrix} \cos A \cos D \\ \sin A \cos D \\ \sin D \end{Bmatrix},$$

то переход от геоэквиаториального положения к планетоэквиаториальному положению объекта можно выполнить по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} &= \mathbf{p}(-I) \mathbf{r}(180^\circ - \Lambda) \mathbf{p}(l) \mathbf{r}(\Omega) \mathbf{p}(e) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \\ &= \mathbf{p}(I) \mathbf{r}(360^\circ - \Omega') \mathbf{p}(90^\circ - \delta_0) \mathbf{r}(90^\circ + \alpha_0) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \\ &= \mathbf{p}(-I) \mathbf{r}(180^\circ - \Lambda + \omega) \mathbf{p}(J) \mathbf{r}(\hat{N}) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

где угловые величины  $I, \Lambda, \Omega', J, \hat{N}, \omega$  — аргументы матриц-операторов — вычисляются по формулам (1.1.073) и (1.1.074).

Необходимые при решении некоторых задач значения планетографической долготы  $l_\odot$  подсолнечной точки  $S$  (рис. 30) можно вычислить по формуле

$$l_\odot = 360^\circ - V + A_\odot.$$

Для вычисления планетографической долготы утреннего терминатора, т. е. границы ночи и дня, планеты можно воспользоваться формулой

$$l_t^{(M)} = 360^\circ - V - \widehat{r}_{\text{пл}}$$

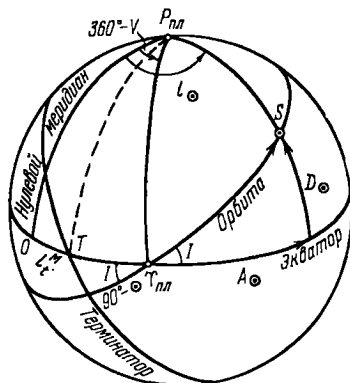


Рис. 30. Связь планетографических и планетоцентрических (планетоэквиаториальных) координат.

где дуга  $\widehat{T\Upsilon}_{\text{пл}}$  определена соотношением

$$\operatorname{tg} [\widehat{T\Upsilon}_{\text{пл}}] = \operatorname{ctg} \odot \operatorname{sec} I.$$

Планетографическая долгота вечернего терминатора  $l_i^{(E)}$  получается изменением  $l_i^{(M)}$  на  $180^\circ$  \*). На рис. 30  $l_i^{(M)}$  есть дуга  $OT$ .

### § 1.13. Марсоцентрическая и ареографическая системы координат

*Марсоцентрическая система координат* основана на средних экваториальных координатах северного полюса Марса, определяемых с учетом прецессии формулами Вокулера [26]

$$\alpha_0 = 316^\circ,844 + 0^\circ,6533 T_1, \quad \delta_0 = +53^\circ,009 + 0^\circ,3542 T_1, \quad (1.1.079)$$

и средних элементах орбиты, данных с учетом прецессии Ньюкомом с поправками Росса (ч. IV, гл. 10)

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 49^\circ 10' 18'',97 + 2775'',491 T_1 - 0'',033 T_1^2, \\ i &= 1^\circ 51' 00'',00 - 2'',385 T_1 + 0'',045 T_1^2. \end{aligned} \right\} (1.1.080)$$

Интервал  $T_1$  отсчитывается от эпохи 1950,0 до заданного момента в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток и вычисляется по формуле (1.1.081) (см. гл. 3).

Для привязки деталей, наблюдаемых на поверхности Марса, строится *ареографическая система координат*, состоящая из меридианов и параллелей. При этом долгота центрального меридиана, проходящего через центр Земли на планетоцентрической сфере, отсчитывается относительно нулевого меридиана к западу; нулевой меридиан проходит вблизи Meridiani Sinus в окрестности Sinus Sabaeus; его положение определяется долготой центрального меридиана  $l_p = 344^\circ,41$  в средний гриничский полдень января 15, 1909 года. Период вращения Марса относительно его точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_\sigma$  равен [27]  $24^{\text{h}} 37^{\text{m}} 22^{\text{s}},6689$ , среднее суточное движение нулевого меридиана равно  $350^\circ,891962$ .

Величина  $V$  для любой даты JD определяется в соответствии с формулой (1.1.078в) соотношением

$$V + 180^\circ = 329^\circ,479 + 350^\circ,891962 (JD + \Delta T' - 2418322,0). \quad (1.1.080a)$$

\*) Приведенные здесь формулы преобразования планетографических координат справедливы в случае отсчета планетографической долготы в направлении прямого осевого вращения планеты, т. е. к востоку. Если планетографическая долгота отсчитывается к западу — например, в случае ареографической системы координат, — то при использовании этих формул ее следует считать отрицательной.

Для долготы центрального меридиана  $l_p$  имеем

$$l_p = V + 180^\circ - (A_\oplus + 180^\circ) - 2^\circ,0266 p. \quad (1.1.0806)$$

Исследования Вокулера, Дэйвиса и Стармза [65], основанные на обработке результатов, полученных при полете космического зонда «Маринер-9», дали следующие новые значения для параметров вращения Марса, которые будут положены в основу вычисления эфемерид для астрофизических наблюдений Марса после 1979 г. в соответствии с рекомендацией XV Генеральной ассамблеи МАС (Сидней, август 1973 г.).

Координаты северного полюса вращения Марса, отнесенные к экватору и равноденствию эпохи 1950,0, определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 317^\circ,32 - 0^\circ,1011T, \\ \delta_0 &= + 52^\circ,68 - 0^\circ,0570T. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.079a)$$

Наклон экватора Марса к плоскости его орбиты  $I$  вычисляется по формуле

$$I = 25^\circ,19969 + 0^\circ,01219T + 0^\circ,00006T^2. \quad (1.1.0796)$$

Для вычисления углового расстояния  $\Omega'$  восходящего узла экватора Марса на среднем геоэкваторе эпохи 1950,0 от точки весны  $\Upsilon_\oplus$  Марса, отсчитываемого по марсианскому экватору, служит соотношение

$$\Omega' + 180^\circ = 222^\circ,93538 - 0^\circ,09040T - 0^\circ,00010T^2. \quad (1.1.079b)$$

Символом  $T$  обозначен промежуток времени в юлианских столетиях от эпохи JD 2433282,5 до заданного момента  $t$ , т. е.

$$T = \frac{JD - 2433282,5}{36525}.$$

Величина звездного времени на нулевом меридиане Марса  $V$ , измененная на  $180^\circ$ , определяется формулой

$$V + 180^\circ = 328^\circ,24 + 350^\circ,892017 (JD - 2433282,5), \quad (1.1.079g)$$

где свободный член  $V + 180^\circ = 328^\circ,24$  соответствует новому начальному меридиану ареографической системы координат, проходящему через марсианский кратер Эри-0.

**Преобразование прямоугольных геоцентрических координат в прямоугольные марсоцентрические координаты [28].** Если известны радиус-вектор  $r = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$  и скорость  $v = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$  объекта  $P$



в момент  $t$  относительно геоцентрической экваториальной системы координат, то преобразование этих величин в марсоцентрические

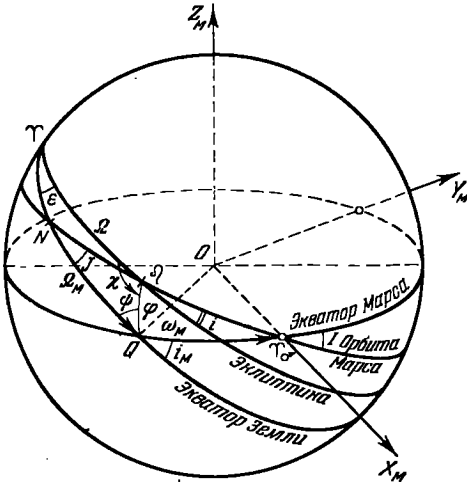


Рис. 31. Связь между геоцентрическими и марсоцентрическими прямоугольными координатами.

$$\mathbf{r}_M = \begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_M = \begin{Bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{z}_M \end{Bmatrix}$$

выполняется следующим образом (рис. 31).

1) По формулам (1.1.079) вычисляют  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$  в момент  $t$ , предварительно определив

$$T_1 = \frac{JD(t) - 2433282,4234}{36524,22}, \quad (1.1.081)$$

где  $JD(t)$  — юлианская дата (см. § 3.08).

2) Определяют элементы орбиты Марса  $\Omega$  и  $i$  по формулам (1.1.080) с  $T_1$  или по формулам (см. ч. IV, гл. 11)

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 48^\circ,78644167 + 0^\circ,77099167 T - 0^\circ,13888889 \cdot 10^{-5} T^2, \\ i &= 1^\circ,85033333 - 0^\circ,67500000 \cdot 10^{-3} T + 0^\circ,12611111 \cdot 10^{-4} T^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.082)$$

где наклон  $\epsilon$  эклиптики к экватору равен

$$\epsilon = 23^\circ,45229444 - 0^\circ,13012500 \cdot 10^{-1} T - 0^\circ,16388889 \cdot 10^{-5} T^2 + 0^\circ,50277778 \cdot 10^{-6} T^3. \quad (1.1.083)$$

Здесь  $T$  означает время в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток, отсчитываемое от эпохи 1900, янв. 0,5 эфемеридного времени =  $JD\ 2415020,0$  до момента  $t$ :

$$T = \frac{JD(t) - 2415020,0}{36\ 525}. \quad (1.1.084)$$

3) Находят наклон  $I$  орбиты Марса к его экватору:

$$\left. \begin{aligned} \cos I &= \cos(\chi - i) \sin(\psi - \delta_0) + \\ &\quad + \sin(\chi - i) \cos(\psi - \delta_0) \cos \varphi, \\ \sin I &= \sqrt{1 - \cos^2 I}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.085)$$

где вспомогательные углы  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ , вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi \cos \chi &= -\cos \Omega \cos \alpha_0 \cos \varepsilon - \sin \Omega \sin \alpha_0, \\ \sin \varphi \sin \chi &= \sin \varepsilon \cos \alpha_0, \\ \cos \varphi &= \sin \Omega \cos \alpha_0 \cos \varepsilon - \cos \Omega \sin \alpha_0, \\ \sin \varphi \cos \psi &= \sin \Omega \sin \alpha_0 \cos \varepsilon + \cos \Omega \cos \alpha_0, \\ \sin \varphi \sin \psi &= \sin \Omega \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} (1.1.086)$$

4) Вычисляют углы  $\omega_M$  и  $\Omega_M$ , определяющие направление основной оси отсчета  $OX_M$ , направленной в точку весеннего равноденствия Марса  $\Upsilon_\sigma$ . Угол  $\omega_M$  составлен осью  $OX_M$  с линией узлов экваториальных плоскостей Земли и Марса,  $\Omega_M$  определяет угловое расстояние от земной точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_\tau$  до восходящего узла экватора Марса на экваторе Земли:

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega_M \sin I &= \sin \varphi \sin (\chi - i), \\ \cos \omega_M \sin I &= \sin (\chi - i) \sin (\psi - \delta_0) \cos \varphi - \cos (\chi - i) \cos (\psi - \delta_0), \end{aligned} \right\} (1.1.087)$$

$$\Omega_M = \alpha_0 + 90^\circ. \quad (1.1.088)$$

Находят  $i_M$  — взаимный наклон экваториальных плоскостей Марса и Земли (рис. 31):

$$i_M = 90^\circ - \delta_0.$$

5) Вычисляют элементы матрицы преобразования  $\bar{T}$ :

$$\left. \begin{aligned} P_x^{(e)} &= \cos \omega_M \cos \Omega_M - \sin \omega_M \sin \Omega_M \cos i_M, \\ P_y^{(e)} &= \cos \omega_M \sin \Omega_M + \sin \omega_M \cos \Omega_M \cos i_M, \\ P_z^{(e)} &= \sin \omega_M \sin i_M, \\ Q_x^{(e)} &= -\sin \omega_M \cos \Omega_M - \cos \omega_M \sin \Omega_M \cos i_M, \\ Q_y^{(e)} &= -\sin \omega_M \sin \Omega_M + \cos \omega_M \cos \Omega_M \cos i_M, \\ Q_z^{(e)} &= \cos \omega_M \sin i_M, \\ R_x^{(e)} &= \sin \Omega_M \sin i_M, \\ R_y^{(e)} &= -\cos \Omega_M \sin i_M, \\ R_z^{(e)} &= \cos i_M. \end{aligned} \right\} (1.1.089)$$

Если геоцентрический радиус-вектор Марса есть  $\rho$ , то определяют

$$\hat{r} = r - \rho, \quad \hat{r}' = r - \rho. \quad (1.1.090)$$

Тогда

$$\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{Bmatrix} = \bar{T} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{z}_M \end{Bmatrix} = \bar{T} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (1.1.091)$$

где матрица преобразования  $\bar{T}$  имеет вид

$$\bar{T} = \begin{Bmatrix} P_x^{(e)} & P_y^{(e)} & P_z^{(e)} \\ Q_x^{(e)} & Q_y^{(e)} & Q_z^{(e)} \\ R_x^{(e)} & R_y^{(e)} & R_z^{(e)} \end{Bmatrix}. \quad (1.1.092)$$

Аналогично решается и обратная задача.

### § 1.14. Юпитероцентрическая и зенографическая системы координат

Система координат, начало которой совпадает с центром масс Юпитера, основная плоскость — с экватором Юпитера и основная точка отсчета — с точкой весеннего равноденствия Юпитера  $\Upsilon_4$ , называется юпитероцентрической. Она лежит в основе вычислений эфемериды для физических наблюдений Юпитера. Положение *юпитероцентрической* (*йовицентрической*) *системы координат* определяется средними экваториальными (геоцентрическими) координатами северного полюса экватора Юпитера [25]

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 17^{\text{h}}52^{\text{m}}10^{\text{s}},72 + 24^{\text{s}},7 T_1, \\ \delta_0 &= +64^{\circ}33'10'',6 - 60'' T_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.093)$$

и средними элементами орбиты Юпитера (см. ч. IV, гл. 11)

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 99^{\circ}56'36'',00 + 3639'',075 T_1 + 1'',222 T_1^2, \\ i &= 1^{\circ}18'21'',30 - 20'',492 T_1 + 0'',014 T_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.094)$$

$T_1$  вычисляется по формуле (1.1.081).

В связи с различием в скоростях вращения экваториальной зоны Юпитера, широты точек которой заключены между  $+10^{\circ}$  и  $-10^{\circ}$ , и других зон его поверхности на средних широтах введены две *зенографические* системы координат — система I и система II; положение нулевого меридиана — начала отсчета зенографических долгот — определяется значениями долготы центрального меридиана в системе I и системе II в эпоху 1897, июль 14,5 UT (JD 2414120,0), равными соответственно  $47^{\circ},31$  и

96°,58 (см. гл. 3). Принятые в обеих системах суточные движения нулевого меридиана относительно точки весеннего равноденствия Юпитера  $\Upsilon_{\text{J}}$  и соответствующие им периоды равны:

$$\text{система I } 877^{\circ},90, \quad 9^{\text{h}}50^{\text{m}}30^{\text{s}},003,$$

$$\text{система II } 870^{\circ},27, \quad 9^{\text{h}}55^{\text{m}}40^{\text{s}},632.$$

Эти системы введены Мартом и носят условный характер, как и гелиографическая система Кэррингтона координат точек поверхности Солнца [25].

Соответствующие значения величины  $V$  в обеих этих системах отсчета определены следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} (V + 180^{\circ})_{\text{I}} &= 101^{\circ},00 + 877^{\circ},90 (\text{JD} - 2414120,0), \\ (V + 180^{\circ})_{\text{II}} &= 150^{\circ},00 + 870^{\circ},27 (\text{JD} - 2414120,0). \end{aligned} \right\} (1.1.093a)$$

Долготы центрального меридиана вычисляются посредством соотношений

$$\left. \begin{aligned} l_{\text{I}} &= (V + 180^{\circ})_{\text{I}} - (A_{\oplus} + 180^{\circ}) - 5^{\circ},070\rho, \\ l_{\text{II}} &= (V + 180^{\circ})_{\text{II}} - (A_{\oplus} + 180^{\circ}) - 5^{\circ},026\rho. \end{aligned} \right\} (1.1.093б)$$

Следует заметить, что, строго говоря, в формулах (1.1.093a), как, впрочем, и в аналогичных формулах для других планет, необходимо учесть переход ко всемирному времени введением поправок  $\Delta T$  в начальную и рассматриваемую эпохи, так как вычисление эфемериды основано на величинах, отнесенных к эфемеридному времени. (См., например, формулу (1.1.080a), в которой величина  $\Delta T'$  равна  $\Delta T - 0^{\text{d}},000096$ .)

Для радиоастрономических наблюдений Юпитера введена специальная система зенографических координат — система III, нулевой меридиан которой совпадает с нулевым меридианом системы II в эпоху 1957, янв. 1,0 UT (JD 2435839,5). Нулевой меридиан системы III совершает полный оборот за  $9^{\text{h}}55^{\text{m}}28^{\text{s}},8$ .

Соответствующая эфемерида для определения долгот наблюдаемых источников радиоизлучения на поверхности Юпитера вычислена Б. Моррисон на основании следующих элементов системы III:

$$\text{эпоха: } 1957, \text{ янв. } 1,0 \text{ UT} = \text{JD } 2435839,5,$$

$$\text{период: } 9^{\text{h}}55^{\text{m}}29^{\text{s}},37,$$

$$\text{долгота центрального меридиана в эпоху: } 108^{\circ},02,$$

$$\text{суточное движение: } 870^{\circ},544$$

и опубликована в [29].

### § 1.15. Сатурноцентрическая система координат

Сатурноцентрическая система координат определяется средними экваториальными координатами северного полюса Сатурна [25]

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 2^h 33^m 39^s,93 + 1015^s,20 T_1 + 56^s,18 T_1^2 + 2^s,55 T_1^3, \\ \delta_0 &= + 83^\circ 18' 37'',3 + 1570'',4 T_1 - 46'',3 T_1^2 - 3'',1 T_1^3 \end{aligned} \right\} (1.1.095)$$

и средними элементами орбиты Сатурна (см. ч. IV, гл. 11)

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 113^\circ 13' 14'',84 + 3142'',902 T_1 - 0'',519 T_1^2, \\ i &= 2^\circ 29' 25'',15 - 14'',164 T_1 - 0'',055 T_1^2, \end{aligned} \right\} (1.1.096)$$

где  $T_1$  вычисляется по формуле (1.1.081).

Аналога географической системы координат — хронографической системы — не существует.

### § 1.16. Системы координат, определяемые осевым вращением Солнца, Венеры, Урана и Нептуна

1. Гелиографическая система координат. Осевое вращение Солнца определяется так называемыми элементами Кэррингтона:

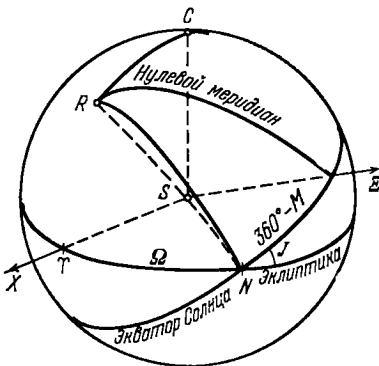


Рис. 32. Связь эклиптических координат с гелиографическими.

наклоном солнечного экватора к эклиптике  $J$  (рис. 32), равным  $7^\circ 15'$ , и

долготой восходящего узла экватора Солнца на эклиптике  $\Omega$ , заданной соотношением

$$\Omega = 73^\circ 40' + 50'',25 (t - 1850,0).$$

Система элементов Кэррингтона эквивалентна следующей системе параметров вращения Солнца, аналогичной системам параметров вращения, принятым для Марса, Юпитера и других планет:

координаты северного полюса вращения Солнца, отнесенные к геоэкватору и равноденствию даты, определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 285^\circ,82 + 0^\circ,001993 (t - 1850,0), \\ \delta_0 &= + 63^\circ,62 + 0^\circ,001518 (t - 1850,0), \end{aligned} \right.$$

звездное время на начальном гелиографическом меридиане дано соотношением

$$V = 180^\circ + 14^\circ,18439716 (\text{JD} - 2398220,0).$$

За начальный меридиан в гелиографической системе координат принят гелиографический меридиан, который прошел через восходящий узел экватора Солнца на эклиптике в средний гриничский полдень 1 января 1854 года, т. е. в эпоху JD 2398220,0. Среднее суточное изменение гелиографической долготы соответствует периоду вращения Солнца  $P = 25,38$  суток. Средний синодический период вращения Солнца равен 27,2753 суток. Моменты начала синодических оборотов Солнца, в которые гелиографическая долгота центрального меридиана обращается в нуль, образуют так называемый ряд Кэррингтона и приводятся в специальной таблице в «Астрономическом Ежегоднике СССР».

В некоторых случаях могут понадобиться координаты небесных объектов в гелиографической системе отсчета. Если исходными являются гелиоцентрические эклиптические прямоугольные координаты объекта  $x, y, z$ , отнесенные к эклиптике и среднему равноденствию даты, то преобразование к гелиографическим координатам  $r, L, B$  можно выполнить по формулам

$$r \begin{Bmatrix} \cos L \cos B \\ \sin L \cos B \\ \sin B \end{Bmatrix} = r(360^\circ - M) p(J) r(\Omega) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix},$$

где  $M$  есть гелиографическая долгота восходящего узла экватора Солнца на эклиптике, определяемая соотношением

$$M = 360^\circ - \frac{360^\circ}{25,38} (JD - 2398220,0).$$

При задании положения объекта координатами, отнесенными к средней геоэкваториальной системе отсчета рассматриваемой даты JD, формулы преобразования имеют следующий вид:

$$r \begin{Bmatrix} \cos L \cos B \\ \sin L \cos B \\ \sin B \end{Bmatrix} = \\ = r(360^\circ - M) p(J) r(\Omega) p(\epsilon) \left[ \rho \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_\odot \\ Y_\odot \\ Z_\odot \end{Bmatrix} \right],$$

где  $X_\odot, Y_\odot, Z_\odot$  — средние прямоугольные экваториальные координаты Солнца в геоцентрической системе отсчета приводятся в специальной таблице в «Астрономическом Ежегоднике СССР».

**2. Афродитографическая система координат.** С осевым вращением Венеры связана афродитографическая система координат, определяемая следующей системой параметров, найденных

на основе радиолокационных наблюдений Венеры:

$$\alpha_0 = 98^\circ - 0^\circ,0015551 (t - 1964,5),$$

$$\delta_0 = -69^\circ - 0^\circ,0007748 (t - 1964,5),$$

$$V = 238^\circ,75 + 1^\circ,483924 (JD - 2438566,5).$$

Период вращения Венеры равен 242,6 суток.

**3. Ураноцентрическая система координат.** Эта система определяется средними координатами северного полюса вращения Урана, отнесенными к среднему геоэквиатору и равноденствию даты:

$$\alpha_0 = 76^\circ,051 + 0^\circ,0142 (t - 1900,0),$$

$$\delta_0 = + 14^\circ,855 + 0^\circ,0013 (t - 1900,0)$$

и средними элементами орбиты Урана

$$\Omega = 73^\circ 29' 23'',65 + 1838'',25 T,$$

$$i = 0^\circ 46' 21'',80 + 2'',00 T,$$

где  $T$  — промежуток времени в юлианских столетиях по 36 525 суток от фундаментальной эпохи JD 2415020,0 до рассматриваемого момента  $t$ . Период вращения Урана равен  $10^{\text{h}}49^{\text{m}}$ .

**4. Нептуоцентрическая система координат.** Эта система определена средними координатами северного полюса вращения Нептуна

$$\alpha_0 = 295^\circ,153 + 0^\circ,008364 (t - 1900,0),$$

$$\delta_0 = + 41^\circ,348 + 0^\circ,002367 (t - 1900,0)$$

и средними элементами его орбиты

$$\Omega = 130^\circ 41' 43'',27 + 3966'',54 T,$$

$$i = 1^\circ 46' 45'',30 - 33'',00 T.$$

Звездный период вращения Нептуна равен  $14^{\text{h}}$ .

Заметим, что для Урана и Нептуна, как и для Сатурна, системы координат, аналогичные географической, не установлены.

### § 1.17. Луноцентрическая и селенографическая системы координат

Положение и скорость объекта относительно Луны удобно определяется в подвижной системе координат, оси которой вращаются вместе с Луной; эта подвижная координатная система называется *селеноэквиаториальной луноцентрической системой координат*. Основной координатной плоскостью является плоскость истинного экватора Луны; за основную точку отсчета

принята точка пересечения *первого радиуса* с лунным экватором (рис. 33). Первый радиус определяется пересечением плоскости лунного меридиана, проведенной через центр масс Земли, с плоскостью лунного экватора в момент времени, когда средняя долгота Луны равна средней долготе ее восходящего узла  $\Omega$ , и направлен в сторону Земли.

Для точек на поверхности Луны селеноэкваториальная луноцентрическая система координат совпадает с селенографической

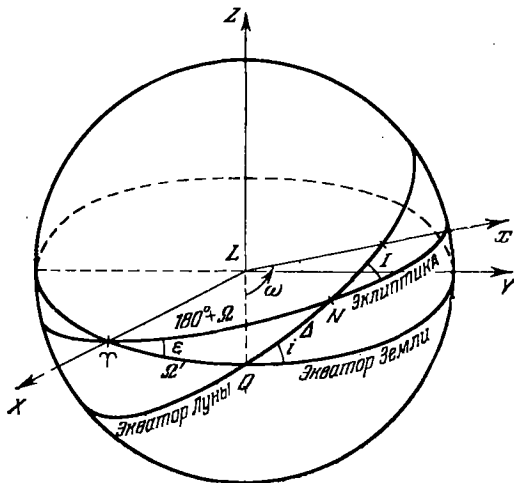


Рис. 33. Луноцентрическая система координат.

системой, введенной специально для целей привязки деталей лунной поверхности к лунному экватору и направлению первого радиуса.

В обеих системах — селеноэкваториальной луноцентрической и селенографической \*) — селенографические долготы  $\lambda$  отсчитываются по лунному экватору от основной точки (точки пересечения нулевого селенографического меридиана, проходящего через первый радиус, с лунным экватором) к востоку (на геоцентрической небесной сфере — к западу); *селенографические широты*  $\beta$  — острые углы между луноцентрическим радиусом-вектором и плоскостью лунного экватора, как обычно, отсчитываются от экватора Луны по лунным меридианам; таким образом, селенографические долготы  $\lambda$  возрастают в направлении к Морю Кризисов, селенографические широты  $\beta$  считаются

\*) Очевидно, что направления на небесный объект в обеих системах совпадают; поэтому в литературе обе системы часто называются селенографическими.



положительными к северу от лунного экватора, т. е. в полушарии Луны, содержащем Море Ясности.

Положение нуля-пункта (начала отсчета) системы селенографических координат можно определить прямоугольными экваториальными геоцентрическими координатами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , вычисляемыми по формулам (см. § 2.28):

$$x_0 = R_{\zeta} (\cos \psi \cos \Omega' - \sin \psi \sin \Omega' \cos i) + x_{\zeta},$$

$$y_0 = R_{\zeta} (\cos \psi \sin \Omega' + \sin \psi \cos \Omega' \cos i) + y_{\zeta},$$

$$z_0 = R_{\zeta} \sin \psi \sin i + z_{\zeta},$$

где  $R_{\zeta}$ ,  $x_{\zeta}$ ,  $y_{\zeta}$ ,  $z_{\zeta}$  — соответственно радиус Луны и геоцентрические координаты Луны, выраженные в единицах экваториального радиуса Земли  $a_e$ ,

$$\psi = \Delta + (\zeta - \Omega),$$

причем  $i$  — взаимный наклон плоскостей среднего лунного экватора и истинного (или среднего) экватора Земли,  $\Omega'$  — прямое восхождение восходящего узла среднего лунного экватора на истинном (среднем) экваторе Земли,  $\Delta$  — угловое расстояние между восходящими узлами среднего лунного экватора на истинном (среднем) экваторе Земли и на эклиптике (см. рис. 33). Величины  $i$ ,  $\Omega'$ ,  $\Delta$  определяются формулами (1.1.104). В случае истинного экватора Луны необходим учет физической либрации (см. § 4.08).

Определение положения нулевого меридиана селенографической системы координат на практике довольно затруднительно (его долгота от нисходящего узла лунного экватора на эклиптике равна  $\zeta - \Omega$ ); поэтому проще производить микрометрическую привязку к детали лунной поверхности с известными селенографическими координатами  $\lambda_0$ ,  $\beta_0$ . Таким репером на Луне выбран небольшой кратер Mösting A, положения которого в геоцентрической экваториальной системе координат  $\alpha$ ,  $\delta$  публикуются в специальной эфемериде в «Астрономическом Ежегоднике СССР»; эфемерида лунного кратера Mösting A вычисляется на основании *постоянных Гайна* [25]:

$$\lambda_0 = -5^{\circ}10'07'', \quad h = 15'33'',4,$$

$$\beta_0 = -3^{\circ}11'02'', \quad J = 1^{\circ}32'20'', \quad f = 0,73,$$

где  $\lambda_0$ ,  $\beta_0$  — селенографические координаты кратера Mösting A относительно истинного экватора Луны,  $h$  — луноцентрический радиус-вектор кратера, соответствующий среднему параллаксу Луны,  $\pi_{\zeta} = 57'02'',608$ ,  $J$  — постоянный наклон лунного экватора к эклиптике;  $f$  — функция трех моментов инерции Луны, известная под названием *постоянной физической либрации*.

Условия освещенности кратера Mösting A Солнцем, т. е. его видимости, определяются неравенством

$$|(180^\circ + \zeta + \lambda_0) - L_\odot| < 90^\circ,$$

где  $L_\odot$  — средняя геоцентрическая долгота Солнца.

Положение объектов в селенографической системе координат свободно от влияния *оптической (геометрической)* и физической либрации Луны (см. § 4.08). При переходе, например, к *геоэкуваториальной луноцентрической (селенографической)* системе координат, получаемой параллельным переносом осей геоцентрической экваториальной системы координат в новое начало — центр масс Луны, в уравнениях движения объекта необходимо учесть *физическую либрацию Луны в долготе  $\tau$ , в наклоне лунного экватора на эклиптике  $\rho$  и в долготе восходящего узла лунного экватора к эклиптике  $\sigma$* ; разложения компонент физической либрации даны в формулах (1.1.103).

**1. Преобразование прямоугольных экваториальных координат в прямоугольные селеноэкуваториальные луноцентрические координаты.** Если положение объекта в момент времени  $t$  в прямоугольной геоцентрической системе экваториальных координат  $X'Y'Z'$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x', y', z')$ , то переход к положению этого объекта в селеноэкуваториальной луноцентрической системе координат  $\Xi\mathcal{N}Z$ , определяемому луноцентрическим радиусом-вектором  $\Delta = \Delta(\xi, \eta, \zeta)$ , выполняется следующим образом.

1. Вычисляют аргументы физической либрации Луны; для этого находят среднюю долготу перигея Солнца  $\Gamma$ :

$$\Gamma = 281^\circ,2208333 + 1^\circ,7191750 T + \\ + 0^\circ,4527778 \cdot 10^{-3} T^2 + 0^\circ,3333333 \cdot 10^{-5} T^3, \quad (1.1.097)$$

среднюю долготу Солнца  $L_\odot$ :

$$L_\odot = 279^\circ,6966778 + 36000^\circ,768925 T + \\ + 0^\circ,3025000 \cdot 10^{-3} T^2, \quad (1.1.098)$$

среднюю долготу восходящего узла  $\Omega$  орбиты Луны:

$$\Omega = 259^\circ,1832750 - 1934^\circ,1420083 T + \\ + 0^\circ,20777778 \cdot 10^{-2} T^2 + 0^\circ,2222222 \cdot 10^{-5} T^3, \quad (1.1.099)$$

среднюю геоцентрическую долготу Луны  $\zeta$ :

$$\zeta = 270^\circ,4341639 + 481267^\circ,8831417 T - \\ - 0^\circ,11333333 \cdot 10^{-2} T^2 + 0^\circ,18888889 \cdot 10^{-5} T^3 \quad (1.1.100)$$



инерции Луны

$$\beta = 0,0006276, \quad \gamma = 0,0002303.$$

Эти значения близки к принятым в современной теории физической либрации Луны [67]

$$\beta = 0,00063065, \quad \gamma = 0,000226,$$

которые входят также в теорию движения Луны LURE-1 (Lunar Ranging Experiment) [68]. Параметры этой теории уточнены по лазерным измерениям топцентрических расстояний до Луны. Поэтому можно считать более точными разложения компонент  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ , коэффициенты которых заданы табл. 4 [78]. Кроме того, разложение  $\tau$  дополняется членом  $+7''{,}6 \sin \Omega$ .

Таблица 4

	Фундаментальные аргументы				Коэффициенты
	$l$	$l'$	$F$	$D$	
$\tau$ (sin)	0	0	2	-2	17,7
	0	1	0	0	91,7
	1	-1	0	-1	-1,2
	1	0	0	-2	4,2
	1	0	0	-1	-3,5
	1	0	0	0	-16,9
	2	-1	0	-2	1,0
	2	0	-2	0	15,3
	2	0	0	-2	10,0
$\sigma \sin J$ (sin)	0	0	2	-2	-3''{,}2
	0	0	2	0	-10,6
	1	0	-2	0	-23,8
	1	0	0	-2	2,5
	1	0	0	0	-100,7
$\rho$ (cos)	0	0	2	-2	-3''{,}2
	0	0	2	0	-11,0
	1	0	-2	0	23,9
	1	0	0	-2	-1,9
	1	0	0	0	-98,5

Фундаментальные аргументы, входящие под знаками  $\sin$  и  $\cos$ , имеют следующий смысл:  $l = M_{\zeta}$  — средняя аномалия Луны,  $l' = M_{\odot}$  — средняя аномалия Солнца,  $F$  — средний аргумент широты Луны,  $D$  — средняя элонгация Луны от Солнца

и определяются разложениями [см. также формулы (4.10.57)]

$$\begin{aligned}\Omega &= 259^{\circ}10'59'',79 - 1934^{\circ}08'31'',23 T + 7'',48 T^2 + 0'',0080 T^3, \\ l &= 296^{\circ}06'16'',59 + 477198^{\circ}50'56'',79 T + 33'',09 T^2 + 0'',0518 T^3, \\ l' &= 358^{\circ}28'33'',00 + 35999^{\circ}02'59'',10 T - 0'',54 T^2 - 0'',0120 T^3, \\ F &= 11^{\circ}15'03'',20 + 483202^{\circ}01'30'',54 T - 11'',56 T^2 - 0'',0012 T^3, \\ D &= 350^{\circ}44'14'',95 + 445267^{\circ}06'51'',18 T - 5'',17 T^2 + 0'',0068 T^3.\end{aligned}$$

Связь фундаментальных аргументов Брауна  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$ , по которым проведены разложения координат Луны в его Lunar Theory, с фундаментальными аргументами Ганзена  $g$ ,  $g'$ ,  $\omega$ ,  $\omega'$  может быть представлена следующим векторно-матричным соотношением:

$$\begin{pmatrix} l \\ l' \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \\ \omega' \\ \omega \end{pmatrix},$$

где  $\omega$  и  $\omega'$  означают угловые расстояния перигеев лунной и солнечной орбит от восходящего узла орбиты Луны на эклиптике,  $g$  и  $g'$  — средние аномалии Луны и Солнца.

2. Вычисляют углы  $i$ ,  $\Omega'$  поворотов осей координат и вспомогательный угол  $\Delta$  по формулам

$$\left. \begin{aligned}\sin i \cos \Omega' &= \cos u \sin v - \sin u \cos v \cos \omega, \\ \sin i \sin \Omega' &= -\sin u \sin \omega, \\ \cos i &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \cos \omega, \\ \sin i \cos \Delta &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \cos \omega, \\ \sin i \sin \Delta &= -\sin v \sin \omega,\end{aligned}\right\} \quad (1.1.104)$$

в которых

$$u = J, \quad v = e, \quad \omega = \Omega \quad (1.1.105)$$

в случае перехода от среднего земного экватора к *среднему* экватору Луны, или

$$u = J + \rho, \quad v = e, \quad \omega = \Omega + \sigma \quad (1.1.106)$$

при переходе от среднего экватора Земли к *истинному* (т. е. с учетом физической либрации) экватору Луны.

При переходе от *истинного* экватора Земли необходимо в  $\Omega$  ввести нутацию в долготу  $\Delta\psi$  (см. § 2.03).

Далее вычисляют угол  $\psi$  по формуле

$$\psi = \Delta + (\zeta - \Omega \text{ (средний экватор Луны)}) \quad (1.1.107)$$

или

$$\psi = \Delta + ((\zeta + \tau) - (\Omega + \sigma) \text{ (истинный экватор Луны)}) \quad (1.1.108)$$

3. Вычисляют элементы матрицы поворота осей  $\bar{\mathbf{P}}\{P_{ij}\}$ :

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= \cos \Omega' \cos \psi - \sin \Omega' \sin \psi \cos i, \\ P_{12} &= \sin \Omega' \cos \psi + \cos \Omega' \sin \psi \cos i, \\ P_{13} &= \sin \psi \sin i, \\ P_{21} &= -\cos \Omega' \sin \psi - \sin \Omega' \cos \psi \cos i, \\ P_{22} &= -\sin \Omega' \sin \psi + \cos \Omega' \cos \psi \cos i, \\ P_{23} &= \cos \psi \sin i, \\ P_{31} &= \sin \Omega' \sin i, \\ P_{32} &= -\cos \Omega' \sin i, \\ P_{33} &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.109)$$

4. Если  $x'_{\zeta}$ ,  $y'_{\zeta}$ ,  $z'_{\zeta}$  — геоцентрические экваториальные координаты Луны, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}' &= x' - x'_{\zeta}, \\ \bar{y}' &= y' - y'_{\zeta}, \\ \bar{z}' &= z' - z'_{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.110)$$

Тогда прямоугольные селеноэкваториальные луноцентрические координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  объекта находят по формуле

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{P}} \begin{Bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{Bmatrix}. \quad (1.1.111)$$

Обратное преобразование выполняется по аналогичным формулам.

**З а м е ч а н и е.** Координаты объекта  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  и Луны  $x'_{\zeta}$ ,  $y'_{\zeta}$ ,  $z'_{\zeta}$  должны быть отнесены до начала вычислений к одному и тому же экватору и равноденствию (например, эпохи 1950,0).

**2. Преобразование прямоугольных геоцентрических эклиптических координат в прямоугольные селеноэкваториальные луноцентрические координаты.** Если положения объекта и Луны в момент времени  $t$  заданы в геоцентрической эклиптической системе прямоугольных координат  $XYZ$  радиусами-векторами  $\mathbf{r}_G = = \mathbf{r}_G(x, y, z)$  и  $\mathbf{r}_{\zeta} = \mathbf{r}_{\zeta}(x_{\zeta}, y_{\zeta}, z_{\zeta})$  соответственно, то положение объекта в луноцентрической селеноэкваториальной системе

прямоугольных координат  $\Xi\eta\zeta$ , определяемое радиусом-вектором  $r_L$ ,  $r_L = r_L(\xi, \eta, \zeta)$ , можно получить при помощи следующих уравнений:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \mathbf{r} [180^\circ + ((\tau) - (\Omega + \sigma))] \mathbf{p} [-(J + \rho)] \mathbf{r} (\Omega + \sigma) \cdot \begin{Bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{Bmatrix},$$

в которых символы  $(\Omega, J; \tau, \rho, \sigma)$  имеют смысл, указанный на стр. 74—75, а матрицы поворота,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  определяются формулами [28] (см. также стр. 44)

$$\mathbf{p}(\varphi) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Аналогичным образом определяются соответствующие компоненты вектора скорости объекта в указанной системе координат. Как и в предыдущем случае, необходимо до начала вычислений привести координаты и компоненты скоростей Луны и объекта к эклиптике и равноденствию одной и той же эпохи (например, даты).

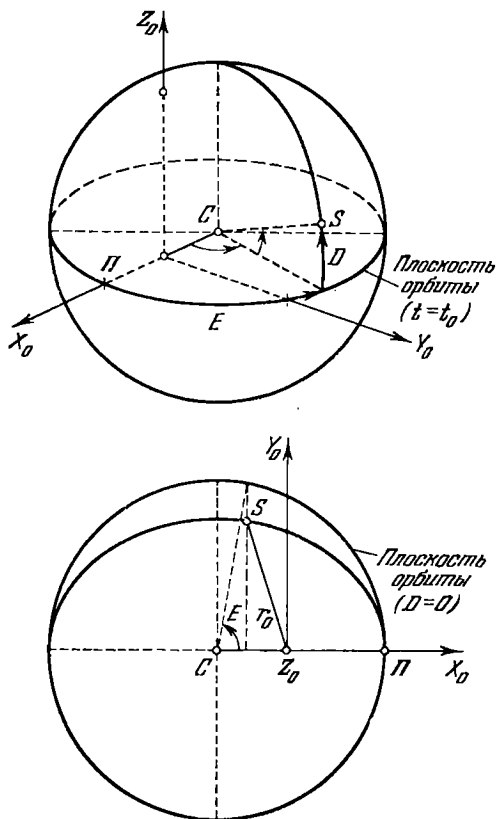


Рис. 34. Орбитальная система координат.

### § 1.18. Орбитальная система координат

При изучении движения ИСЗ удобной оказывается система координат, начало которой совпадает с центром масс Земли, а основная плоскость параллельна плоскости орбиты объекта в некоторую определенную эпоху  $t = t_0$ ; основная ось отсчета направлена в перигей (рис. 34). Эта система отсчета называется *орбитальной системой координат*. Под влиянием

*возмущений* основная плоскость системы, плоскость орбиты, движется в инерциальном пространстве, непрерывно меняя положение относительно выбранной системы отсчета.

Положение объекта определяется в системе орбитальных координат *эксцентрисической аномалией*  $E$  (см. ч. II, гл. 2)\*), *девиацией*  $D$  и *радиальным расстоянием*  $r_0$ . Девиация  $D$  измеряется в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты в момент времени  $t = t_0$ , углом между плоскостью орбиты в этот момент и геоцентрическим направлением на объект. Радиальное расстояние  $r_0$  измеряется от центра масс Земли до положения объекта в момент  $t = t_0$ . Эксцентрисическая аномалия  $E$  отсчитывается в плоскости орбиты от перигея  $\Pi$  в направлении движения объекта от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , девиация  $D$  положительна над основной плоскостью и меняется от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$ . Обычно  $D$  полагают равным нулю.

**1. Преобразование прямоугольных экваториальных координат в прямоугольные орбитальные координаты.** Если в момент времени  $t$  положение объекта в геоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат определено радиусом-вектором  $\mathbf{r}(x, y, z)$ , а скорость его — вектором  $\mathbf{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , то при известных значениях экваториальных элементов ориентации орбиты объекта  $\Omega', \omega', i'$  (см. ч. II, гл. 2) положение  $\mathbf{r}_0 = r_0(x_0, y_0, z_0)$  и скорость  $\mathbf{v}_0 = v_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  в орбитальной системе координат определяются следующим преобразованием.

1. Вычисляются элементы *экваториальной матрицы ориентации* (проективные коэффициенты):

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega' \cos \Omega' - \sin \omega' \sin \Omega' \cos i', \\ P_y &= \cos \omega' \sin \Omega' + \sin \omega' \cos \Omega' \cos i', \\ P_z &= \sin \omega' \sin i', \\ Q_x &= -\sin \omega' \cos \Omega' - \cos \omega' \sin \Omega' \cos i', \\ Q_y &= -\sin \omega' \sin \Omega' + \cos \omega' \cos \Omega' \cos i', \\ Q_z &= \cos \omega' \sin i', \\ R_x &= \sin \Omega' \sin i', \\ R_y &= -\cos \Omega' \sin i', \\ R_z &= \cos i'. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.112)$$

Если заданы значения эклиптических элементов ориентации орбиты объекта  $\Omega, \omega, i$ , то проективные коэффициенты

---

\*) Следует иметь в виду, что начало координат не совпадает с геометрическим центром орбиты.



вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\
 P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \\
 &\quad - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\
 P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon + \\
 &\quad + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\
 Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \\
 &\quad - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\
 Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon + \\
 &\quad + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon, \\
 R_x &= \sin \Omega \sin i, \\
 R_y &= -\cos \Omega \sin i \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon, \\
 R_z &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \cos \Omega \sin \varepsilon.
 \end{aligned} \right\} (1.1.113)$$

2. Преобразование имеет вид

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (1.1.114)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}. \quad (1.1.115)$$

### § 1.19. Объектоцентрическая система координат \*)

Ориентировка космического аппарата обычно определяется системой относительных координат, связанной с движущимся объектом. Начало этой системы координат помещено в центр инерции объекта, основная плоскость совпадает с *плоскостью местного горизонта*, т. е. перпендикулярна к направлению радиального расстояния  $r_0$  объекта. Основная ось отсчета направлена обычно в точку юга  $S$ .

Ориентировка объекта в пространстве относительно радиального расстояния определяется *углом наклона траектории*  $\theta$  к плоскости местного горизонта, т. е. углом между вектором скорости  $v$  объекта и плоскостью местного горизонта, и азимутом  $A$ , отсчитываемым в плоскости местного горизонта от точки севера  $N$  до проекции вектора скорости  $v$  на эту плоскость. Угол на-

\*) В литературе встречаются также обозначения «ЛА-центрическая» и «КЛА-центрическая».

клона траектории  $\theta$  меняется в пределах  $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ , азимут  $A$  положителен при отсчете к востоку и меняется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Азимут можно заменить *углом поворота траектории*  $\psi_c$ , называемым также *углом скоростного курса* и отсчитываемым в плоскости местного горизонта от точки юга  $S$  в сторону запада от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Как и в случае орбитальной системы координат (§ 1.18), расстояние от центра масс Земли до объекта называется *радиальным (геоцентрическим) расстоянием*  $r_0(r)$ .

1. Преобразование объектоцентрических координат в геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты. Если в момент времени  $t$  определены скорость  $v$  и геоцентрическое расстояние  $r$  объекта, его склонение  $\delta$ , угол наклона траектории  $\theta$  и азимут  $A$ , а также географическая долгота  $\lambda$  подспутниковой точки (рис. 35), то переход от координат в объектоцентрической системе к геоцентрическому положению  $r(x, y, z)$  и геоцентрической скорости  $v(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  выполняется следующим образом.

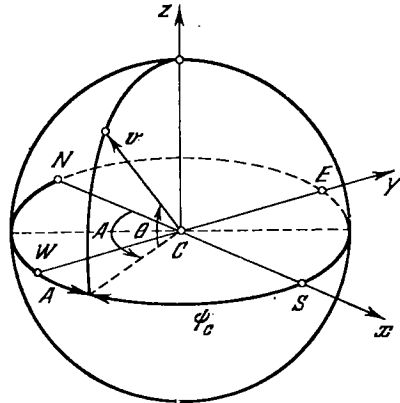


Рис. 35. Объектоцентрическая система координат.

Вычисляем местное звездное время  $s$  по формулам (см. гл. 3, § 3.02)

$$\left. \begin{aligned} s &= S_0 + m + \mu(m + \lambda), \\ S_0 &= 6^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}},836 + 236^{\text{s}},55536049 d + 0^{\text{s}},0929 T^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.116)$$

где  $m$  — местное среднее время в момент  $t$ ,  $\mu = 0,0027379093$  (редукция средних единиц времени к звездным),  $d = \text{JD} - 2415020,0$  (JD — юлианский день в  $0^{\text{h}}$  даты наблюдения),  $T = \frac{d}{36525}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos s, \\ y &= r \cos \delta \sin s, \\ z &= r \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.117)$$

Далее находим проекции вектора скорости  $v$  на направления основных румбов  $S$  и  $E$  и геоцентрического расстояния  $r$ :

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v \sin \theta, \\ v_S &= -v \cos \theta \cos A, \\ v_E &= v \cos \theta \sin A \end{aligned} \right\} \quad (1.1.118)$$

и компоненты вектора скорости  $v$  по осям координат:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \delta \cos s - \sin s \cos \delta \cos s \\ \sin \delta \sin s \cos s \cos \delta \sin s \\ -\cos \delta & 0 & \sin \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_S \\ v_E \\ v_r \end{Bmatrix}. \quad (1.1.119)$$

**2. Обратное преобразование.** Обратное преобразование осуществляется при помощи формул

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}, \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ.$$

Квадрант  $\alpha$  определяется по знакам  $y$  и  $x$ :

$$y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad y \leq 0, \quad x \leq 0, \quad 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ,$$

$$y \geq 0, \quad x \leq 0, \quad 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ, \quad y \leq 0, \quad x \geq 0, \quad 270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ,$$

$$\delta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad -90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ,$$

$$\lambda = \alpha - s, \quad 0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\beta = \arccos \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{rv}, \quad 0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ,$$

$$\theta = 90^\circ - \beta, \quad -90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ,$$

$$A = \arctg \frac{r(x\dot{y} - \dot{x}y)}{y(\dot{z}y - z\dot{y}) - x(\dot{x}z - x\dot{z})}, \quad 0^\circ \leq A \leq 360^\circ.$$

При определении квадранта  $A$  необходимо принимать во внимание знаки числителя и знаменателя соответствующей формулы, подобно тому как это делается в случае для  $\alpha$ .

## Глава 2

### РЕДУКЦИОННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Основные плоскости и оси координатных систем, к которым отнесены наблюдаемые или вычисленные положения и скорости небесных объектов, не сохраняют свои направления в пространстве неизменными с течением времени. Поэтому наблюдения небесных объектов, произведенные в различные моменты времени, относятся, вообще говоря, к различным системам координат и нуждаются в *редукции*, или *приведении*, к одной и той же системе координат, соответствующей определенной *эпохе* — фиксированному моменту времени. Различие в положении наблюдателя относительно центра Земли или центра Солнца, перемещение наблюдателя в пространстве из-за осевого вращения Земли и ее движения по гелиоцентрической орбите и т. п. обуславливают необходимость введения соответствующих поправок в наблюдения. Наконец, при распространении в атмосфере Земли луча света от небесного объекта или радиолуча, отраженного от его поверхности, их направления испытывают изменения, которые также необходимо учесть при обработке и анализе наблюдений.

Таким образом, редуccionные вычисления определяют поправки к наблюдениям, учитывающие:

- 1) прецессию оси вращения Земли,
- 2) нутацию оси вращения Земли,
- 3) параллакс,
- 4) аберрацию,
- 5) рефракцию.

#### § 2.01. Прецессия

Сложное перемещение полюсов мира  $P_N$  и  $P_S$  по небесной сфере, обусловленное притяжением экваториального избытка массы Земли со стороны Луны и Солнца, состоит из *равномерного* движения *среднего полюса*  $P_m$  по малому кругу радиуса  $\varrho = 23^\circ 27'$  с центром в полюсе эклиптики  $\Pi$  и *колебательного* движения *истинного полюса*  $P_v$  относительно среднего  $P_m$ .

Первое движение, совершаемое с периодом 25 725 лет, называется *лунно-солнечной прецессией*, второе движение — *нугацией*; главные члены нугации имеют период около 19 лет.

На лунно-солнечную прецессию накладывается *прецессия от планет*, обусловленная вековым движением плоскости эклиптики под действием возмущений в движении Земли от планет. Это движение плоскости эклиптики представляет собой вращение с угловой скоростью  $\pi$  относительно оси, ориентированной определенным образом и лежащей в самой плоскости эклиптики.

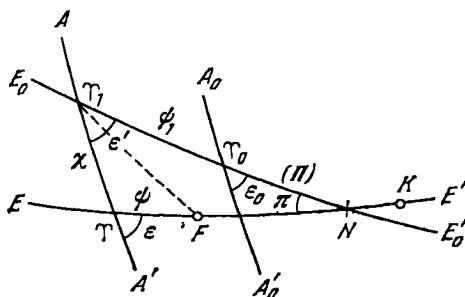


Рис. 36. Положения дуг подвижных экватора и эклиптики относительно неподвижных экватора и эклиптики. Общая прецессия, лунно-солнечная прецессия, прецессия от планет.

Если на рис. 36  $E_0E'_0$  и  $A_0A'_0$  означают положения дуг *неподвижных* эклиптики и экватора на небесной сфере в *фундаментальную эпоху отсчета*  $t_0$ ,  $EE'$  и  $AA'$  — положения подвижных эклиптики и экватора на небесной сфере в эпоху

$t_1$ ,  $N$  — *восходящий узел подвижной эклиптики*  $EE'$  на неподвижной  $E_0E'_0$  и  $K$  — точку пересечения мгновенной оси вращения плоскости эклиптики с небесной сферой (при определении положительного направления вращения против часовой стрелки), то полученные таким образом дуги и углы имеют следующий смысл:

$\angle T_1T_0 = \psi_1$  — лунно-солнечная прецессия,

$\angle T_1T = \chi$  — прецессия от планет,

$\angle TF = \psi$  — общая прецессия по долготе, причем точка  $F$  такова, что  $NF = N\angle T_0$ ,

$\epsilon_0$  — средний наклон эклиптики к экватору в фундаментальную эпоху  $t_0$ ,

$\epsilon'$  — наклон среднего подвижного экватора к неподвижной эклиптике, называемый *лунно-солнечным наклоном*,

$\epsilon$  — наклон среднего подвижного экватора к подвижной эклиптике, называемый просто *средним наклоном*,

$\angle T_0N = (\Pi)$  — долгота восходящего узла  $N$ , отсчитываемая по неподвижной эклиптике  $E_0E'_0$  от средней точки весеннего равноденствия  $T_0$  фундаментальной эпохи  $t_0$ ,

$\angle TN = (\Pi) + \psi$  — долгота восходящего узла  $N$ , отсчитываемая по подвижной эклиптике  $EE'$  от средней точки весеннего равноденствия  $T$  эпохи (даты)  $t$ ,

$\pi$  — наклон подвижной эклиптики к неподвижной,

$\angle TK = \Pi$  — долгота мгновенной оси вращения плоскости эклиптики  $EE'$ .

Если  $p_1$  — годовая лунно-солнечная прецессия ( $p_1 = \frac{d\psi_1}{dt}$  — производная, отнесенная к тропическому году как единице времени),  $q_1 = \frac{d\chi}{dt}$  — годовая прецессия от планет,  $p = \frac{d\psi}{dt}$  — годовая (полная) прецессия по долготе,  $\pi = \frac{d(\pi)}{dt}$  — годовая угловая скорость вращения плоскости эклиптики, то, согласно Ньюкому [8], имеем

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 50'',37084 + 0'',00493 T, \\ \pi &= 0'',47107 - 0'',00068 T, \\ \Pi &= 173^\circ 57' 03'' + 3287'' T + 0'',6 T^2, \\ e_3 &= 23^\circ 27' 08'',26. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.01)$$

Здесь время  $T$  отсчитывается в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток от фундаментальной эпохи 1900,0 = JD 2415020,3134 до рассматриваемого момента  $t$  [юлианской даты JD( $t$ )]:

$$T = \frac{\text{JD}(t) - 2415020,3134}{36524,22}. \quad (1.2.02)$$

Обозначение 1900,0 относится к началу *бесселева года* 1900, совпадающему с эпохой 1900, янв. 0,8134 эфемеридного времени \*).

Экваториальная геоцентрическая система прямоугольных координат  $OXYZ$  (рис. 37) вращается относительно оси  $O\bar{Z}$  эклиптической геоцентрической прямоугольной системы координат  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  с угловой скоростью  $p_1$ ; эклиптическая система  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  вращается относительно оси  $OK$  с угловой скоростью  $\pi$ , проекции которой на оси эклиптической системы координат равны

$$\pi_{\bar{x}} = \pi \cos \Pi, \quad \pi_{\bar{y}} = \pi \sin \Pi, \quad \pi_{\bar{z}} = 0.$$

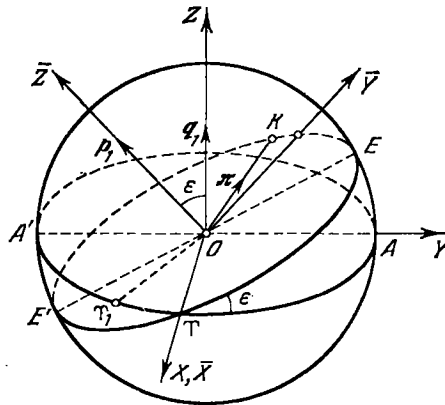


Рис. 37. Прецессионные величины  $\pi$ ,  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $\Pi$ .

\*) Эпоха 1900,0 означает момент времени вблизи начала 1900 г., когда средняя долгота Солнца, уменьшенная на постоянную аберрацию, была равна  $280^\circ$ ; этот момент приходится на дату 1900, янв. 0,8134 эфемеридного времени. [См. ниже бесселев год, тропический год.]

Так как компонента  $\pi_x$  изменяет средний наклон  $\epsilon$ , то

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \pi \cos \Pi. \quad (1.2.03)$$

Компонента  $\pi_y$  вращает плоскость эклиптики в *отрицательном* (т. е. по часовой стрелке) направлении, смещая точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ ; поэтому экваториальная система координат  $OXYZ$  вращается относительно оси  $OZ$  с угловой скоростью  $q_1$ , определяемой формулой

$$q_1 \sin \epsilon = \pi \sin \Pi. \quad (1.2.04)$$

Вектор абсолютной угловой скорости вращения экваториальной системы координат  $OXYZ$  равен

$$\omega = p_1 - q_1$$

с проекциями на оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0, \\ \omega_y &= -p_1 \sin \epsilon = -n, \\ \omega_z &= p_1 \cos \epsilon - q_1 = m. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.05)$$

Величины  $m$  и  $n$  называются *годовой прецессией по прямому восхождению* и *годовой прецессией по склонению* (praecessio apud).

Проекция вектора  $p_1$  на направление  $O\Upsilon_1$  определяет скорость изменения наклона  $\epsilon'$ :

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = p_1 \sin \epsilon \sin \chi. \quad (1.2.06)$$

Аналогичное рассмотрение вращения эклиптической системы координат  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  показывает, что проекция вектора угловой скорости  $\omega$  на ось  $O\bar{Z}$  определяет полную скорость смещения по эклиптике точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$ :

$$p = p_1 - q_1 \cos \epsilon. \quad (1.2.07)$$

Вектор абсолютной угловой скорости вращения эклиптической системы равен

$$\omega' = p - \pi. \quad (1.2.08)$$

Для среднего наклона  $\epsilon$  эклиптики к экватору имеем

$$\epsilon = 23^\circ 27' 08'',26 - 46'',846 T - 0'',0059 T^2. \quad (1.2.09)$$

Согласно Ньюкому [31] имеем следующие формулы для прецессионных величин  $q_1$ ,  $p$ ,  $m$ ,  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 0'',12473 - 0'',01887 T, \\ p &= 50'',25641 + 0'',02223 T, \\ m'' &= 46'',08506 + 0'',02794 T, \\ m^s &= 3^s,072337 + 0^s,0018627 T, \\ n'' &= 20'',04685 - 0'',00853 T, \\ n^s &= 1^s,336457 - 0^s,0005687 T \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10)$$

и для лунно-солнечного наклона  $\epsilon'$ :

$$\epsilon' = 23^\circ 27'08'',26 + 0'',0606 T^2 - 0'',00773 T^3. \quad (1.2.11)$$

### § 2.02. Редукция звездных положений с учетом прецессии и собственного движения

Скорость точки, определяемой радиусом-вектором  $r$  в прямоугольной экваториальной системе координат  $OXYZ$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega = p_1 - q_1$ , равна

$$v = [\omega, r]. \quad (1.2.12)$$

Через промежуток времени  $\Delta t$  точка переходит в новое положение относительно системы отсчета  $OXYZ$ , определяемое радиусом-вектором  $r'$ ,

$$r' = r + [\omega, r] \Delta t. \quad (1.2.13)$$

Это обстоятельство приводит к изменению экваториальных координат  $\alpha$ ,  $\delta$  точки, производные которых определяются формулами, получаемыми применением основной операции (1.1.051) к уравнению (1.2.13):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha = p_\alpha, \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha = p_\delta. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.14)$$

Величины  $p_\alpha$  и  $p_\delta$  определяют скорости прецессионного изменения экваториальных координат  $\alpha$ ,  $\delta$  звезды. Специальные таблицы [32], [33] дают возможность по заданным значениям  $\alpha$ ,  $\delta$  найти  $p_\alpha$  и  $p_\delta$ .

Изменение координат  $\alpha$ ,  $\delta$  некоторых звезд обусловлено их собственными движениями  $\mu_\alpha$  и  $\mu_\delta$  ( $\mu_\alpha$  — собственное движение



звезды по прямому восхождению,  $\mu_\delta$  — по склонению). Тогда полные первые производные экваториальных сферических координат  $\alpha$ ,  $\delta$  звезды по времени, отнесенные к тропическому году как к единице времени, будут

$$\frac{D\alpha}{Dt} = p_\alpha + \mu_\alpha, \quad \frac{D\delta}{Dt} = p_\delta + \mu_\delta. \quad (1.2.15)$$

Величины  $\frac{D\alpha}{Dt}$  и  $\frac{D\delta}{Dt}$  называются *годовыми изменениями* (variatio annua) и обозначаются  $(VA)_\alpha$ ,  $(VA)_\delta$ :

$$(VA)_\alpha = p_\alpha + \mu_\alpha, \quad (VA)_\delta = p_\delta + \mu_\delta. \quad (1.2.16)$$

Для полных вторых производных по времени от экваториальных сферических координат  $\alpha$ ,  $\delta$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{D^2\alpha}{Dt^2} &= \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + n \operatorname{tg} \delta \cos \alpha (p_\alpha + 2\mu_\alpha) + \\ &\quad + n \sec^2 \delta \sin \alpha (p_\delta + 2\mu_\delta) + 2 \operatorname{tg} \delta \cdot \mu_\alpha \mu_\delta, \\ \frac{D^2\delta}{Dt^2} &= \frac{dn}{dt} \cos \alpha - n \sin \alpha (p_\alpha + 2\mu_\alpha) - \sin \delta \cos \delta \cdot \mu_\alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.17)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{D^2\alpha}{Dt^2} &= \frac{1}{100} (VS)_\alpha, \\ \frac{D^2\delta}{Dt^2} &= \frac{1}{100} (VS)_\delta, \end{aligned}$$

где величины  $(VS)_\alpha$  и  $(VS)_\delta$  отнесены к тропическому столетию и называются *вековыми изменениями* (variatio saecularis).

Если обозначить изменения собственных движений  $\mu_\alpha$  и  $\mu_\delta$  за сто лет через  $\Delta\mu_\alpha$  и  $\Delta\mu_\delta$ , то для полных изменений собственных движений можно написать следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\mu_\alpha}{Dt} &= \frac{1}{100} \Delta\mu_\alpha = n \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot \mu_\alpha + n \sec^2 \delta \sin \alpha \cdot \mu_\delta + 2 \operatorname{tg} \delta \cdot \mu_\alpha \mu_\delta, \\ \frac{D\mu_\delta}{Dt} &= \frac{1}{100} \Delta\mu_\delta = -n \sin \alpha \cdot \mu_\alpha - \sin \delta \cos \delta \cdot \mu_\alpha^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.18)$$

Числовые значения полных третьих производных экваториальных сферических координат по времени  $\frac{D^3\alpha}{Dt^3}$  и  $\frac{D^3\delta}{Dt^3}$  определяются путем сопоставления значений вторых производных  $\frac{D^2\alpha}{Dt^2}$  и  $\frac{D^2\delta}{Dt^2}$ , найденных в различные эпохи  $t_1$  и  $t_2$ . Если *разность*

эпох равна  $\tau_1$  ( $\tau_1 = t_2 - t_1$ ), то с точностью до третьих разностей вторых производных имеем

$$\frac{D^3\alpha}{Dt^3} = \frac{1}{\tau_1} \left[ \left( \frac{D^2\alpha}{Dt^2} \right)_{t=t_2} - \left( \frac{D^2\alpha}{Dt^2} \right)_{t=t_1} \right],$$

$$\frac{D^3\delta}{Dt^3} = \frac{1}{\tau_1} \left[ \left( \frac{D^2\delta}{Dt^2} \right)_{t=t_2} - \left( \frac{D^2\delta}{Dt^2} \right)_{t=t_1} \right].$$

Для перевода экваториальных сферических координат звезды эпохи  $t_0$  ( $\alpha_0, \delta_0$ ) на эпоху  $t$  служат следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 + (VA)_\alpha(t - t_0) + (VS)_\alpha \frac{(t - t_0)^2}{200} + III_\alpha \left[ \frac{t - t_0}{100} \right]^3, \\ \delta(t) &= \delta_0 + (VA)_\delta(t - t_0) + (VS)_\delta \frac{(t - t_0)^2}{200} + III_\delta \left[ \frac{t - t_0}{100} \right]^3, \end{aligned} \right\} (1.2.19)$$

где третьи члены прецессии  $III_\alpha$  и  $III_\delta$  имеют вид

$$III_\alpha = \frac{100^3}{6} \frac{D^3\alpha}{Dt^3}, \quad III_\delta = \frac{100^3}{6} \frac{D^3\delta}{Dt^3}$$

и разность эпох  $\tau = t - t_0$  выражена в тропических годах.

Начальные значения координат звезд в эпоху  $t_0$  определяются из наблюдений и публикуются в специальных *каталогах звездных положений*, в которых приводятся также значения всех необходимых для редукций производных и собственных движений вместе с их вековыми вариациями ( $VS$ ) (см. § 2.26).

### § 2.03. Нутация

Нутация представляет собой часть общего движения полюса, зависящую от периодических движений Луны и Солнца по геоцентрическим орбитам. Явление нутации заключается в периодических колебаниях истинного полюса относительно среднего полюса экватора. Главный член нутации зависит от долготы восходящего узла орбиты Луны и имеет период 6798 суток или 18,6 года. Амплитуда этого члена, равная  $9''{,}210$ , известна как *постоянная нутации*. Остальные члены нутации зависят от средних долгот и средних аномалий Луны и Солнца и их линейных комбинаций с долготой восходящего узла лунной орбиты. Смещение истинного полюса относительно среднего можно разложить на *нутацию в долготе*  $\Delta\psi$ , изменяющую положение точки весны  $\Upsilon$ , и *нутацию в наклоне*  $\Delta\epsilon$ , изменяющую наклон  $\epsilon$  эклиптики к экватору. Теория вращения несферичной Земли в поле тяготения Солнца и Луны, разработанная подробно Вулардом [34], дает разложения компонент нутации в ряды по косинусам и синусам указанных выше аргументов, позволяющие вычислить нутацию на любой момент времени.

Очевидно, смещение среднего полюса экватора из положения  $P_m$ , занимаемого в момент времени  $t$ , в положение истинного полюса экватора  $P_v$  можно выполнить двумя поворотами системы координат  $OXYZ$ , связанной со *средним* экватором: сначала на угол  $\Delta\psi_s$  (*нутация по долготе*) относительно оси

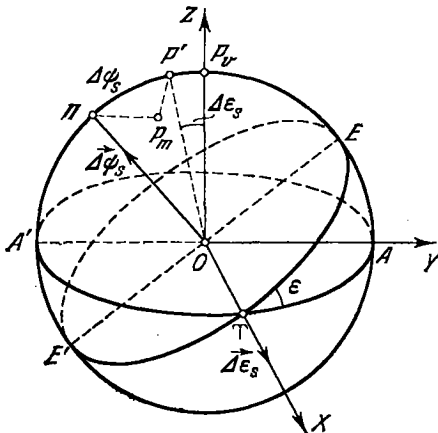


Рис. 38. Нутация.

ОП (рис. 38), проходящей через положение полюса эклиптики П в момент времени  $t$ , а затем на угол  $\Delta\varepsilon_s$  (*нутация в наклоне*) относительно прямой  $O\Upsilon$ .

Тогда суммарный элементарный поворот системы координат  $OXYZ$ , определяемый вектором

$$\Delta\omega = \Delta\psi_s + \Delta\varepsilon_s,$$

переместит неподвижную точку пространства относительно этой системы отсчета на

$$\Delta r = [\Delta\omega, r]$$

и прежний радиус-вектор  $r$  будет связан с новым  $r'$  равенством

$$r' = r + \Delta r = r + [\Delta\omega, r].$$

Изменения координат  $\alpha$ ,  $\delta$ , обусловленные нутацией, выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= (\cos \varepsilon + \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \sin \varepsilon) \Delta\psi_s - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot \Delta\varepsilon_s, \\ \Delta\delta &= \sin \varepsilon \cos \alpha \cdot \Delta\psi_s + \sin \alpha \cdot \Delta\varepsilon_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.20)$$

Таким образом, полные изменения координат  $\alpha$ ,  $\delta$  звезды, обусловленные совместным влиянием прецессии и собственного движения в течение времени, выражаемого в долях тропического года  $\tau$ , и влиянием нутации, можно учесть, применяя следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= (m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) \tau + \mu_\alpha \tau + \\ &\quad + (\cos \varepsilon + \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \sin \varepsilon) \Delta\psi_s - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot \Delta\varepsilon_s, \\ \Delta\delta &= n \tau \cos \alpha + \mu_\delta \tau + \sin \varepsilon \cos \alpha \cdot \Delta\psi_s + \sin \alpha \cdot \Delta\varepsilon_s, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.21)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= (m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) \left( \tau + \frac{\Delta\psi_s}{\rho_1} \right) - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot \Delta\varepsilon_s + \frac{q_1}{\rho_1} \Delta\psi_s + \mu_\alpha \tau, \\ \Delta\delta &= n \cos \alpha \left( \tau + \frac{\Delta\psi_s}{\rho_1} \right) + \sin \alpha \cdot \Delta\varepsilon_s + \mu_\delta \tau. \end{aligned}$$

В «Астрономическом Ежегоднике СССР», как и в других основных астрономических ежегодниках, до выпусков на 1960 г. была принята следующая система обозначений:

$$\left. \begin{aligned} A &= \tau + \frac{\Delta\psi}{\rho_1}, & B &= -\Delta\varepsilon, & E &= \frac{q_1}{\rho_1} \frac{\Delta\psi}{15}, \\ A' &= \frac{d\psi}{\rho_1}, & B' &= -d\varepsilon, & E' &= \frac{q_1}{\rho_1} \frac{d\psi}{15} \approx 0, \end{aligned} \right\} (1.2.22)$$

где  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  — долгопериодические компоненты нутации в долготе и в наклоне,  $d\psi$  и  $d\varepsilon$  — короткопериодические компоненты нутации в долготе и наклоне, так что

$$\Delta\psi_s = \Delta\psi + d\psi, \quad \Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon + d\varepsilon.$$

Разложения компонент нутации  $\Delta\psi_s$  и  $\Delta\varepsilon_s$  в тригонометрические ряды по фундаментальным аргументам теории движения Луны были получены Вулардом [34] и приведены в табл. 5, 6.

Таблица 5

Период (в сутках)	$\Omega$	Аргументы					Нутация по долготе $\Delta\psi$ . Коэффициенты при синусах аргумента	Нутация наклона $\Delta\varepsilon$ . Коэффициенты при косинусах аргумента
		$l$	$l'$	$F$	$D$			
6798	+1	0	0	0	0	$-17''{,}2327 - 0''{,}01737 T$	$+9''{,}2100 + 0''{,}00091 T$	
183	+2	0	0	+2	-2	$-1{,}2729 - 0{,}00013 T$	$+0{,}5522 - 0{,}00029 T$	
3399	+2	0	0	0	0	$+0{,}2088 + 0{,}00002 T$	$-0{,}0904 + 0{,}00004 T$	
365	0	0	+1	0	0	$+0{,}1261 - 0{,}00031 T$		
122	+2	0	+1	+2	-2	$-0{,}0497 + 0{,}00012 T$	$+0{,}0216 - 0{,}00006 T$	
365	+2	0	-1	+2	-2	$+0{,}0214 - 0{,}00005 T$	$-0{,}0093 + 0{,}00003 T$	
178	+1	0	0	+2	-2	$+0{,}0124 + 0{,}00001 T$	$-0{,}0066$	
183	0	0	+2	0	0	$+0{,}0016 - 0{,}00001 T$		
91	+2	0	+2	+2	-2	$-0{,}0015 + 0{,}00001 T$	$+0{,}0007$	
1305	+1	-2	0	+2	0	$+0{,}0045$	$-0{,}0024$	
206	0	+2	0	0	-2	$+0{,}0045$		
173	0	0	0	+2	-2	$-0{,}0021$		
386	+1	0	+1	0	0	$-0{,}0015$	$+0{,}0008$	
347	+1	0	-1	0	0	$-0{,}0010$	$+0{,}0005$	
1095	0	+2	0	-2	0	$+0{,}0010$		
200	+1	-2	0	0	+2	$-0{,}0005$	$+0{,}0003$	
347	+1	0	-1	+2	-2	$-0{,}0005$	$+0{,}0003$	
6786	+1	0	-2	+2	-2	$-0{,}0004$	$+0{,}0002$	
212	+1	+2	0	0	-2	$+0{,}0004$	$-0{,}0002$	
120	+1	0	+1	+2	-2	$+0{,}0003$	$-0{,}0002$	
1616	+2	-2	0	+2	0	$-0{,}0003$	$+0{,}0002$	
412	0	+1	0	0	-1	$-0{,}0003$		
3233	0	+1	-1	0	-1	$-0{,}0002$		

Таблица 6

Период (в сутках)	Аргументы					Нутация по долготе $d\phi$ . Коэффициенты при синусах аргумента	Нутация наклона $de$ . Коэффициенты при косинусах аргумента
	$\Omega$	$l$	$l'$	$F$	$D$		
13,7	+2	0	0	+2	0	-0",2037-0",00002 T	+0",0884-0",00005 T
27,6	0	+1	0	0	0	+0,0675+0,00001 T	-
13,6	+1	0	0	+2	0	-0,0342-0,00004 T	+0,0183
9,1	+2	+1	0	+2	0	-0,0261	+0,0113-0,00001 T
31,8	0	+1	0	0	-2	-0,0149	-
27,1	+2	-1	0	+2	0	+0,0114	-0,0050
14,8	0	0	0	0	+2	+0,0060	-
27,7	+1	+1	0	0	0	+0,0058	-0,0031
27,4	+1	-1	0	0	0	-0,0057	+0,0030
9,6	+2	-1	0	+2	+2	-0,0052	+0,0022
9,1	+1	+1	0	+2	0	-0,0044	+0,0023
7,1	+2	0	0	+2	+2	-0,0032	+0,0014
13,8	0	+2	0	0	0	+0,0028	-
23,9	+2	+1	0	+2	-2	+0,0026	-0,0011
6,9	+2	+2	0	+2	0	-0,0026	+0,0011
13,6	0	0	0	+2	0	+0,0025	-
27,0	+1	-1	0	+2	0	+0,0019	-0,0010
32,0	+1	-1	0	0	+2	+0,0014	-0,0007
31,7	+1	+1	0	0	-2	-0,0013	+0,0007
9,5	+1	-1	0	+2	+2	-0,0009	+0,0005
13,2	+2	0	+1	+2	0	+0,0007	-0,0003
34,8	0	+1	+1	0	-2	-0,0007	-
14,2	+2	0	-1	+2	0	-0,0006	+0,0003
5,6	+2	+1	0	+2	+2	-0,0006	+0,0003
12,8	+2	+2	0	+2	-2	+0,0006	-0,0002
14,8	+1	0	0	0	+2	-0,0006	+0,0003
9,6	0	+1	0	0	+2	+0,0006	-
23,9	+1	+1	0	+2	-2	+0,0005	-0,0003
14,7	+1	0	0	0	-2	-0,0005	+0,0003
7,1	+1	0	0	+2	+2	-0,0005	+0,0003
6,9	+1	+2	0	+2	0	-0,0004	+0,0002
29,8	0	+1	-1	0	0	+0,0004	
15,4	0	0	+1	0	-2	-0,0004	
29,5	0	0	0	0	+1	-0,0004	
26,9	0	+1	0	-2	0	+0,0004	
9,1	0	+1	0	+2	0	+0,0003	
25,6	0	+1	+1	0	0	-0,0003	
9,4	+2	+1	-1	+2	0	-0,0003	
13,7	+1	-2	0	0	0	-0,0002	
32,6	+1	-1	0	+2	-2	-0,0002	
13,8	+1	+2	0	0	0	+0,0002	
9,8	+2	-1	-1	+2	+2	-0,0002	
7,2	+2	0	-1	+2	+2	-0,0002	
27,8	+2	+1	0	0	0	-0,0002	
5,5	+2	+3	0	+2	0	-0,0002	
8,9	+2	+1	+1	+2	0	+0,0002	

В системе обозначений (1.2.22) формулы редукции принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= Aa + Bb + \mu_\alpha\tau + E + [A'a + B'b], \\ \Delta\delta &= Aa' + Bb' + \mu_\delta\tau + [A'a' + B'b']^*), \end{aligned} \right\} \quad (1.2.23)$$

где величины  $a, b, a', b'$ , называемые *редукционными постоянными*, определялись ранее выражениями

$$\begin{aligned} a &= m^s + n^s \operatorname{tg} \delta \sin \alpha, & b &= \frac{1}{15} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha, \\ a' &= n'' \cos \alpha, & b' &= -\sin \alpha. \end{aligned}$$

*Редукционные величины*  $A, A', B, B', E$  составляют так называемую *алгебраическую систему*.

Наряду с алгебраической системой редукционных величин вводится еще *тригонометрическая система*  $f, f', g, g', G, G'$ , которая до 1960 г. определялась формулами

$$\begin{aligned} m^s A + E &= f, & n'' A &= g \cos G, & B &= g \sin G, \\ m^s A' &= f', & n'' A' &= g' \cos G', & B' &= g' \sin G'. \end{aligned}$$

В этих обозначениях формулы редукции имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= f + \frac{1}{15} g \operatorname{tg} \delta \sin (G + \alpha) + \mu_\alpha\tau + \left[ f' + \frac{1}{15} g' \operatorname{tg} \delta \sin (G' + \alpha) \right], \\ \Delta\delta &= g \cos (G + \alpha) + \mu_\delta\tau + [g' \cos (G' + \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.24)$$

Согласно рекомендациям МАС в астрономических ежегодниках, начиная с 1960 г., принято учитывать прецессию от начала ближайшего к рассматриваемому моменту бесселева года, т. е. для первой половины календарного года (январь 1 — июль 1) прецессия учитывается от начала бесселева года, соответствующего данному календарному году, а для второй половины календарного года (июль 1 — декабрь 31) прецессия учитывается от начала бесселева года, соответствующего *следующему* календарному году.

В соответствии с этими решениями МАС, направленными на ослабление влияния членов второго порядка, в настоящее время, т. е. в ежегодниках на 1960 г. и последующие годы, принята следующая система соотношений, определяющих редукционные величины алгебраической и тригонометрической систем:

$$\begin{aligned} A + A' &= n\tau + (\Delta\psi + d\psi) \sin \epsilon, & f &= \frac{1}{15} [m\tau + (\Delta\psi + d\psi) \cos \epsilon], \\ B + B' &= -(\Delta\epsilon + d\epsilon), & g \cos G &= A + A', \\ E &= \frac{q_1}{p_1} (\Delta\psi + d\psi), & g \sin G &= B + B', \end{aligned}$$

\*) Выражения в квадратных скобках представляют собой выделенные совокупности короткопериодических членов.

причем редуccionные постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  (так называемые «малые буквы») вычисляются по формулам

$$a = \frac{1}{15} \left( \frac{m}{n} + \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \right), \quad a' = \cos \alpha,$$

$$b = \frac{1}{15} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha, \quad b' = -\sin \alpha.$$

Принятые в приведенных соотношениях обозначения имеют следующий смысл:  $\tau$  — часть тропического года от рассматриваемого момента времени до начала ближайшего к нему бесселева года, числовые значения  $\tau$  публикуются для  $0^h$  эфемеридного и звездного времени каждого дня года в астрономических ежегодниках,  $\varepsilon$  — истинный наклон эклиптики к экватору.

Дробную часть тропического года  $\tau$  можно вычислить непосредственно по формуле [25]

$$\tau = \tau_0 + 0,00273791 d,$$

в которой  $\tau_0$  — промежуток времени от начала бесселева года до начала соответствующего календарного года (январь, 0), выраженный в долях тропического года \*),  $d$  — промежуток времени в эфемеридных сутках от заданного момента до начала календарного года (январь, 0). Для вычисления величины  $\tau_0$  для любого года  $N$  ( $N > 1900$ ) можно воспользоваться формулой [25]

$$\tau_0 = -\frac{1}{365,2422} \left[ 0,8134 - 0,0312 \frac{N_0 - 1900}{4} + 0,2422x + y \right],$$

где  $N = N_0 + x$ , если  $N_0$  — ближайший високосный год, предшествующий году  $N$ , причем  $y = 1$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$  при  $x \neq 0$ .

Значения прецессионных величин  $m$ ,  $n$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  берутся для начала бесселева года, ближайшего к рассматриваемому моменту времени: если, например, данный момент попадает в первую половину календарного года (январь 0 — июль 1), то для начала бесселева года, соответствующего этому году, если во вторую половину (июль 1 — дек. 31), то для начала следующего бесселева года.

Если воспользоваться прямоугольными экваториальными координатами, в которых положение звезды определяется вектором

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\alpha, \delta} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix},$$

\*) Величину  $\tau_0$  (dies reductus) можно вычислить, пользуясь специальной таблицей в [35].

и матрицами-операторами поворота  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ , то приведение звезды на истинное место в эпоху  $T$  со среднего места начала бесселева года  $T_0$  можно выполнить по формуле

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{(T)} = \mathbf{r}(-f) \mathbf{q} (A + A') \mathbf{p} (B + B') \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{(T_0)}, \quad (1.2.24a)$$

рекомендуемой при редукциях за прецессию и нутацию в пределах одного года.

### § 2.04. Годичная абберация

*Абберационным смещением* звезды называется *видимое* изменение направления луча света от этой звезды, обусловленное конечной скоростью распространения света и собственным относительным движением наблюдателя.

При редукции звездных положений необходим учет *годовой абберации*, возникающей из-за движения наблюдателя вместе с Землей по гелиоцентрической орбите.

Если начало экваториальной системы координат  $XYZ$  поместить в точку наблюдения  $O$  (рис. 39), и через  $O'$  обозначить центр объектива телескопа, через  $\overline{O'A}$  — вектор скорости света с обратным знаком ( $-c$ ),  $\overline{OA}$  — вектор скорости Земли ( $v$ ), то истинное направление на звезду  $\Sigma$  будет определено прямой  $A\Sigma$ .

Построим в точке  $O'$  два равных и противоположных вектора  $v$  и  $-v$ ; тогда *относительное движение* наблюдателя и световой волны не зависит от скоростей  $O'B$  и  $OA$ , и точку  $O$  можно считать неподвижной в системе координат, движущейся со скоростью  $v$ ; следовательно, световая волна в этой системе распространяется со скоростью

$$w = c + v.$$

Изменения  $\alpha$  и  $\delta$  звезды, обусловленные годичной абберацией после применения основной операции (1.1.051), даются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= Cc + Dd, \\ \Delta\delta &= Cc' + Dd', \end{aligned} \right\} \quad (1.2.25)$$

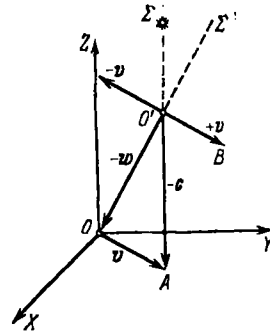


Рис. 39. Годичная абберация.



в которых абберационные редуccionные величины  $C$  и  $D$  определяются равенствами \*)

$$\left. \begin{aligned} C &= -\kappa \cos \odot \cos \varepsilon, \\ D &= -\kappa \sin \odot, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.26)$$

а их числовые значения публикуются в астрономических ежегодниках на 0<sup>h</sup> каждого дня года.

Величина  $\kappa$  называется *постоянной абберации* и определяется формулой

$$\kappa = \frac{n'' a_e}{86400 \pi_{\odot} \sin 1'' C \sqrt{1 - e^2}} = 20'',496. \quad (1.2.27)$$

Здесь  $C = 299792,5$  км/сек,  $a_e = 6\,378\,160$  м,  $\pi_{\odot} = 8'',794$ ,  $n''$  — среднее суточное движение Земли,  $e$  — эксцентриситет земной орбиты,  $\odot$  — истинная геоцентрическая долгота Солнца.

Редуccionные постоянные  $c, c', d, d'$  из (1.2.25) равны

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{1}{15} \sec \delta \cos \alpha, & c' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha, \\ d &= \frac{1}{15} \sec \delta \sin \alpha, & d' &= \sin \delta \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.28)$$

Начиная с 1960 г. публикуемые в астрономических ежегодниках абберационные редуccionные величины  $C, D$  вычисляются непосредственно по скорости движения Земли относительно барицентра Солнечной системы [25]:

$$\left. \begin{aligned} C &= +1191'',303 \dot{Y} + 20'',496 e \cos \varepsilon \cos \Gamma = \\ &= +1191'',303 (\dot{Y} + 0,000051448 + 0,000007658 T), \\ D &= -1191'',303 \dot{X} + 20'',496 e \sin \Gamma = \\ &= -1191'',303 (\dot{X} + 0,000282687 - 0,000002388 T), \\ i &= C \cdot \operatorname{tg} \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.29)$$

Они относятся к равноденствию и экватору начала ближайшего бесселева года. Компоненты скорости Земли  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  находятся численным дифференцированием прямоугольных

\*) Компоненты вектора  $v$  гелиоцентрической скорости Земли содержат члены, пропорциональные эксцентриситету земной орбиты; их совокупность называется *эллиптической частью абберации*, или *E-членами*. Учет эллиптической абберации необходим только при вычислениях особо высокой точности (см. стр. 118).

Таблица 7

Коэффициенты			Аргумент
в $C$ при $\cos$	в $D$ при $\sin$	в $i$ при $\cos$	
-18",7974	-20",4901	-8",1547	$0^{\circ},776935216 + 100^{\circ},002135903 T +$ $+ 0^{\circ},000000841 T^2$
-0,00187 $T$		+0,00427 $T$	
+0,3150	+0,3433	+0,1366	$0^{\circ},781168981 + 0^{\circ},004775486 T$
-0,00076 $T$	-0,00086 $T$	-0,00041 $T$	
-0,3149	-0,3432	-0,1366	$0^{\circ},772701420 + 199^{\circ},999496319 T$
+0,00076 $T$	+0,00086 $T$	+0,00041 $T$	
-0,0078	-0,0085	-0,0034	$0^{\circ},751206 + 1336^{\circ},855231 T$
-0,0076	-0,0084	-0,0033	$0^{\circ},625778 + 8^{\circ},429397 T$
+0,00005 $T$	+0,00006 $T$		
-0,0059	-0,0065	-0,0026	$0^{\circ},768468 + 299^{\circ},996857 T$
-0,0018	-0,0019	-0,0007	$0^{\circ},737778 + 3^{\circ},393872 T$
-0,0018	-0,0019	-0,0006	$0^{\circ},875778 + 8^{\circ},429397 T$
-0,00021 $T$	-0,00023 $T$	-0,00009 $T$	
+0,0007	-0,0007	+0,0003	$0^{\circ},214597 + 99^{\circ},992585 T$
-0,0004	-0,0005	-0,0002	$0^{\circ},573719 + 2662^{\circ},407590 T$
-0,0004	-0,0004	-0,0002	$0^{\circ},251556 + 16^{\circ},858794 T$
+0,0003		-0,0007	$0^{\circ},031252 + 1342^{\circ},227848 T$
+0,0003	+0,0004	+0,0001	$0^{\circ},396924 + 191^{\circ},570099 T$
-0,0003	-0,0003	-0,0001	$0^{\circ},877235 + 2485^{\circ},009062 T$
-0,0002	-0,0003	-0,0001	$0^{\circ},371308 + 162^{\circ},553367 T$
+0,0002	+0,0003	+0,0001	$0^{\circ},018315 + 100^{\circ},057325 T$
-0,0002	-0,0003	-0,0001	$0^{\circ},535556 + 99^{\circ},946947 T$
+0,0002	+0,0002	+0,0001	$0^{\circ},215681 + 225^{\circ},104598 T$
+0,0002	+0,0002	+0,0001	$0^{\circ},201158 + 1^{\circ},189942 T$
+0,0002	-0,0002	+0,0001	$0^{\circ},963042 + 83^{\circ},133790 T$
-0,0002	-0,0002	-0,0001	$0^{\circ},268315 + 100^{\circ},057325 T$
-0,0002	-0,0002	-0,0001	$0^{\circ},785556 + 99^{\circ},946947 T$
-0,0001	-0,0001	-0,0001	$0^{\circ},621308 + 162^{\circ},553367 T$
+0,0001	+0,0001	+0,0001	$0^{\circ},402713 + 108^{\circ},431533 T$
+0,0001	+0,0001	+0,0001	$0^{\circ},965681 + 225^{\circ},104598 T$
-0,0001	-0,0001	-0,0001	$0^{\circ},699748 + 3810^{\circ},561421 T$
-0,0001	-0,0001	-0,0001	$0^{\circ},764234 + 399^{\circ},994217 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},354808 + 0^{\circ},606836 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},104808 + 0^{\circ},606836 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},151157 + 91^{\circ},572739 T$
+0,0001	+0,0001		$0^{\circ},516912 + 283^{\circ},138062 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},222556 + 6^{\circ},787744 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},219914 + 125^{\circ},107238 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},243023 + 193^{\circ},663651 T$
+0,0001	+0,0001		$0^{\circ},182563 + 37^{\circ},450905 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},969914 + 125^{\circ},107238 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},501556 + 16^{\circ},858794 T$
+0,0001	-0,0001		$0^{\circ},661810 + 25^{\circ},100327 T$
+0,0001	+0,0001		$0^{\circ},247257 + 93^{\circ},666291 T$
+0,0001	+0,0001		$0^{\circ},806619 + 106^{\circ},337981 T$
-0,0001	-0,0001		$0^{\circ},833956 + 74^{\circ},897034 T$
+0,0001	+0,0001		$0^{\circ},521146 + 183^{\circ},140702 T$

Продолжение табл. 7

Коэффициенты			Аргумент
в $C$ при $\cos$	в $D$ при $\sin$	в $t$ при $\cos$	
-0",0001	-0",0001		0',814287 + 187',658469 $T$
+0,0001	+0,0001		0',583956 + 74',897034 $T$
+0,0001	+0,0001		0',553086 + 100',412638 $T$
-0,0001	-0,0001		0',000785 + 99',591634 $T$
-0,0001	-0,0001		0',803086 + 100',412638 $T$
-0,0001	-0,0001		0',250785 + 99',591634 $T$
+0,00006 $T$	+0,00006 $T$		0',487778 + 3',393872 $T$
-0,0001	+0,0001		0',197336 + 1136',850959 $T$
+0,0001	-0,0001		0',411810 + 25',100327 $T$
-0,0001	-0,0001		0',432563 + 37',450905 $T$

экваatorialных барицентрических координат Земли  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , определяемых формулами

$$X = - \left[ X_{\odot} + \frac{\sum_i m_i x_i}{1 + \sum_i m_i} \right],$$

$$Y = - \left[ Y_{\odot} + \frac{\sum_i m_i y_i}{1 + \sum_i m_i} \right],$$

$$Z = - \left[ Z_{\odot} + \frac{\sum_i m_i z_i}{1 + \sum_i m_i} \right],$$

где  $X_{\odot}$ ,  $Y_{\odot}$ ,  $Z_{\odot}$  — прямоугольные экваториальные геоцентрические координаты Солнца,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  — прямоугольные экваториальные гелиоцентрические координаты  $i$ -й планеты, масса которой  $m_i$  выражена в единицах массы Солнца.

При вычислениях принимаются во внимание Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. Коэффициент 1191",303 в формулах (1.2.29) соответствует постоянной абберации  $\kappa = 20",496$  и скорости Земли, выраженной в астрономических единицах за эфемеридные сутки.

Для перевода редуционных величин  $C$ ,  $D$  с эпохи  $t_0$  на эпоху  $t$  служат формулы

$$C_t = C_{t_0} - 0,0002235 D_{t_0} (t - t_0),$$

$$D_t = D_{t_0} + 0,0002656 C_{t_0} (t - t_0),$$

где разность эпох  $t - t_0$  выражена в тропических годах.

В. С. Губановым недавно были выведены разложения абerrационных редукионных величин  $C$  и  $D$ , а также  $i$ , отнесенных к экватору и равноденстию даты [70] (см. табл. 7).

Следует предостеречь от «экономии» за счет отбрасывания, казалось бы, несущественных, т. е. с малыми коэффициентами, членов, так как влияние долгопериодических членов с амплитудами  $0''{,}0001$  взаимно не уничтожается. Заметим, что аргументы разложений выражены в частях полной окружности, т. е.  $1^r = 360^\circ$ .

Еще один метод вычисления абerrационных редукионных величин  $C$  и  $D$  предложен Аткинсоном [71].

### § 2.05. Сводка основных формул редукии звездных положений

Главными видами редукии звездных положений являются приведение звезды со *среднего места* на *истинное место* и со *среднего места* на *видимое место*, а также обратное приведение.

*Средним местом* звезды называется ее гелиоцентрическое положение, отнесенное к среднему экватору и равноденстию определенной эпохи, выбираемой обычно совпадающей с моментом начала определенного бесселева года.

Для приведения звезды со среднего места эпохи  $t_0$  на среднее место эпохи  $t$  служат формулы (1.2.19):

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (VA)_\alpha(t - t_0) + (VS)_\alpha \frac{(t - t_0)^2}{200} + III_\alpha \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3,$$

$$\delta(t) = \delta(t_0) + (VA)_\delta(t - t_0) + (VS)_\delta \frac{(t - t_0)^2}{200} + III_\delta \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3.$$

Если эпоха  $t$  совпадает с моментом начала определенного бесселева года, то формулы (1.2.19) дают *среднее место* звезды  $\alpha(t)$ ,  $\delta(t)$  на *начало* этого года; если эпоха  $t$  совпадает с некоторой данной датой, то эти формулы определяют *среднее место* звезды на *дату*.

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{ист}} &= \alpha_{\text{сред}} + Aa + Bb + \mu_a \tau + E + [A'a + B'b], \\ \delta_{\text{ист}} &= \delta_{\text{сред}} + Aa' + Bb' + \mu_b \tau + [A'a' + B'b'] \end{aligned} \right\} \quad (1.2.30)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{ист}} &= \alpha_{\text{сред}} + f + \frac{1}{15} g \operatorname{tg} \delta_0 \sin(G + \alpha_0) + \mu_a \tau + \\ &\quad + \left[ f' + \frac{1}{15} g' \operatorname{tg} \delta_0 \sin(G' + \alpha_0) \right], \\ \delta_{\text{ист}} &= \delta_{\text{сред}} + g \cos(G + \alpha_0) + \mu_b \tau + [g' \cos(G' + \alpha_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.31)$$

Формулы (1.2.30) и (1.2.31), принятые в астрономических ежегодниках до 1960 г., дают совместный учет прецессии, нутации и собственного движения звезды от момента начала данного бесселева года  $t$  до рассматриваемой даты  $t + \tau$ , где доля тропического года  $\tau$  равна  $d/36524,22$  а  $d$  означает число дней от момента  $t$  до этой даты. Они определяют *истинное место* звезды в эпоху  $t + \tau$ .

В астрономических ежегодниках начиная с 1960 г. приняты *полные* формулы редукции звездных положений, *включающие* влияние короткопериодических членов нутации, а именно:

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{ист}} &= \alpha_{\text{сред}} + (A + A')a + (B + B')b + E + \mu_{\alpha}\tau = \\ &= \alpha_{\text{сред}} + f + \frac{1}{15}g \sin(G + \alpha_0) \operatorname{tg} \delta_0 + \mu_{\alpha}\tau, \\ \delta_{\text{ист}} &= \delta_{\text{сред}} + (A + A')a' + (B + B')b' + \mu_{\delta}\tau = \\ &= \delta_{\text{сред}} + g \cos(G + \alpha_0) + \mu_{\delta}\tau.\end{aligned}$$

Для приведения звезды на *видимое место* необходимо к *истинному месту*  $\alpha_{\text{ист}}$ ,  $\delta_{\text{ист}}$  прибавить поправки  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  за *абerrацию (звездную, или годовую)*, вычисляемые по формулам (1.2.25). Кроме того, при точных вычислениях необходимо ввести поправки за влияние членов *второго* порядка, за *годовой параллакс* и, в случае редукции положений компонент двойных звезд, за *орбитальное движение*. Выражения для этих поправок приведены ниже.

В каталогах положения двойных звезд отнесены чаще всего к центру масс двойной системы. Поправки  $\Delta\alpha_g^s$  и  $\Delta\delta_g''$  за орбитальное движение при редукции координат компонент двойных звездных систем от центра масс к яркой (главной) звезде  $A$  выражаются через относительные координаты  $s''$ ,  $p$  звезды-спутника  $B$ , относительно главной звезды и вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned}\Delta\alpha_g^s &= -\frac{1}{1+q} \frac{s''}{15} \sec \delta \sin(p + \Delta p), \\ \Delta\delta_g'' &= -\frac{1}{1+q} s'' \cos(p + \Delta p),\end{aligned} \right\} \quad (1.2.32)$$

где

$$\Delta p = -0^{\circ},0056 \sec \delta \sin \alpha (t - t_0),$$

$$q = m_A/m_B.$$

Разность эпох  $t - t_0$  выражена здесь в тропических годах.

### § 2.06. Учет влияния членов второго порядка

Наиболее существенные члены второго порядка, пропорциональные  $\text{tg}^2 \delta$  в редукции  $\Delta\alpha$  и  $\text{tg} \delta$  в редукции  $\Delta\delta$ , учитываются при помощи поправок

$$\Delta\alpha = J_\alpha \text{tg}^2 \delta, \quad \Delta\delta = J_\delta \text{tg} \delta,$$

прибавляемых к редукциям (1.2.32).

Коэффициенты  $J_\alpha$  и  $J_\delta$  публикуются в астрономических ежегодниках для северных ( $\delta > 0$ ) и южных ( $\delta < 0$ ) склонений.

### § 2.07. Годичный параллакс

Вследствие движения наблюдателя вместе с Землей по гелиоцентрической орбите возникает кажущееся перемещение проекций звезд по небесной сфере, называемое *параллактическим смещением*, или *параллаксом* (*годовым параллаксом*) звезд. При вычислении *видимых мест* звезд необходимо перейти от *гелиоцентрических средних мест* звезд, данных в каталогах звездных положений, к *геоцентрическим* координатам.

Если  $\Sigma''$  — положение звезды  $\Sigma$  в гелиоцентрической экваториальной прямоугольной системе координат  $SXYZ$  (рис. 40),  $T$  — положение Земли,  $R$  и  $r$  — гелиоцентрические радиусы-векторы Земли и звезды,  $r'$  — геоцентрический радиус-вектор звезды,  $S\Sigma''$  и  $T\Sigma'$  — направления на звезду от центра Солнца и центра Земли, которые определяют соответствующие проекции на небесной сфере, то

$$r' = r - R.$$

Применив к последнему уравнению основную операцию (1.1.051), найдем, что изменения  $\alpha$  и  $\delta$ , вызванные годичным параллаксом звезды  $\pi''$ , выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha_\pi &= \frac{1}{15} \pi'' (-X_\odot \sec \delta \sin \alpha + Y_\odot \sec \delta \cos \alpha), \\ \Delta\delta_\pi &= \pi'' (-X_\odot \sin \delta \cos \alpha - Y_\odot \sin \delta \sin \alpha + Z_\odot \cos \delta). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.33)$$

На практике используются формулы

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha_\pi &= C \Delta c + D \Delta d, \\ \Delta\delta_\pi &= C \Delta c' + D \Delta d', \end{aligned} \right\} \quad (1.2.34)$$

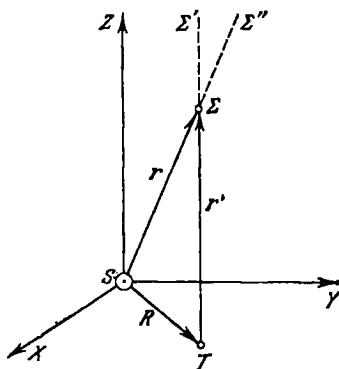


Рис. 40. Годичный параллакс.

где  $C$  и  $D$  — абберационные редуccionные величины, определяемые формулами (1.2.26) и (1.2.29). Величины  $\Delta c$ ,  $\Delta c'$ ,  $\Delta d$ ,  $\Delta d'$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta c &= 0,0532 \pi'' d, & \Delta c' &= 0,0532 \pi'' d', \\ \Delta d &= -0,0448 \pi'' c, & \Delta d' &= -0,0448 \pi'' c'. \end{aligned}$$

Таким образом, для учета годичного параллакса звезды достаточно к редуccionным постоянным этой звезды  $c$ ,  $c'$ ,  $d$ ,  $d'$  прибавить поправки  $\Delta c$ ,  $\Delta c'$ ,  $\Delta d$ ,  $\Delta d'$ .

### § 2.08. Точные формулы для учета прецессии

Если звезда близка к полюсу мира или промежуток времени между эпохами  $t_0$  и  $t$  велик, то дифференциальные приближенные формулы учета прецессии становятся неточными и их применение нежелательно. В этом случае преобразование координат выполняется при помощи прецессионных величин Ньюкома (углов Эйлера)  $\zeta_0$ ,  $z$ ,  $\theta$  ( $\zeta_0 = \psi$ ,  $z = \varphi$ ,  $\theta = \theta$ ).

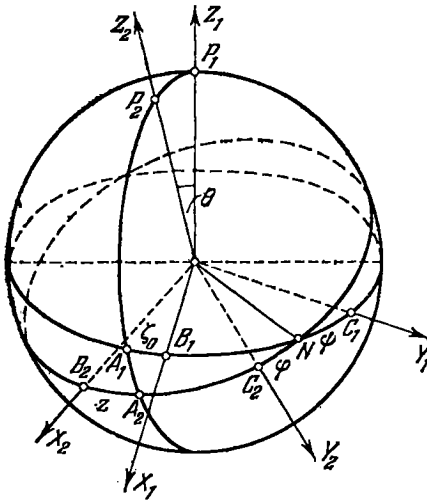


Рис. 41. Прецессионные величины Ньюкома  $\zeta_0$ ,  $z$ ,  $\psi$ .

Пусть  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$  — координаты звезды в прямоугольной экваториальной системе координат  $X_1Y_1Z_1$ , отнесенной к среднему экватору и равноденствию эпохи  $t_1 = 1900,0 + T_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\delta_2$  — координаты этой же звезды в системе координат  $X_2Y_2Z_2$ , отнесенной к среднему экватору и равноденствию эпохи  $t_2 = 1900,0 + T_2$  ( $T_1$  и  $T_2$  выражены в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток).

Положение системы  $X_2Y_2Z_2$  относительно системы  $X_1Y_1Z_1$  определим углами, стягиваемыми дугами

$$NC_1 = \zeta_0 = A_1X_1, \quad C_2N = A_2X_2 = z, \quad P_1P_2 = \theta$$

(рис. 41). Тогда преобразование координат  $(\alpha_1, \delta_1)$  в координаты  $(\alpha_2, \delta_2)$  осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \cos \delta_2 \sin (\alpha_2 - z) &= \cos \delta_1 \sin (\alpha_1 + \zeta_0), \\ \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - z) &= \cos \delta_1 \cos (\alpha_1 + \zeta_0) \cos \theta - \sin \delta_1 \sin \theta, \\ \sin \delta_2 &= \cos \delta_1 \cos (\alpha_1 + \zeta_0) \sin \theta + \sin \delta_1 \cos \theta. \end{aligned}$$

Величины прецессионных параметров Ньюкома  $\zeta_0$ ,  $z$ ,  $\theta$  определяются разложениями Ньюкома — Андуайе:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= (2304'',253 + 1'',3973 T_1 + 0'',00006 T_1^2) \tau + \\ &\quad + (0'',3023 - 0'',00027 T_1) \tau^2 + 0'',01800 \tau^3, \\ z &= (2304'',253 + 1'',3973 T_1 + 0'',00006 T_1^2) \tau + \\ &\quad + (1'',0950 + 0'',00039 T_1) \tau^2 + 0'',01832 \tau^3, \\ \theta &= (2004'',685 - 0'',8533 T_1 - 0'',00037 T_1^2) \tau - \\ &\quad - (0'',4267 + 0'',00037 T_1) \tau^2 - 0'',04180 \tau^3, \end{aligned} \right\} (1.2.35)$$

где

$$\tau = T_2 - T_1.$$

Величина  $\zeta_0 + z = M$  называется *общей*, или *полной прецессией по прямому восхождению* и определяется разложением

$$M = (4608'',506 + 2'',7946 T_1 + 0'',00012 T_1^2) \tau + \\ + (1'',3973 + 0'',00012 T_1) \tau^2 + 0'',03632 \tau^3. \quad (1.2.36)$$

Величины  $M$  и  $N = \theta$  часто называются *числами Крюгера*.

### § 2.09. Формулы учета прецессии в прямоугольных экваториальных координатах

Если положение объекта в некоторый момент времени  $t$  относительно геоцентрической прямоугольной экваториальной системы  $X_1 Y_1 Z_1$  определено координатами  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , то положение этого же объекта в геоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат  $X_2 Y_2 Z_2$ , ориентация которой относительно системы координат  $X_1 Y_1 Z_1$  задана эйлеровыми углами  $\zeta_0$ ,  $z$ ,  $\theta$ , в этот же момент  $t$  определяется следующей формулой преобразования:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{P}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad (1.2.37)$$

где матрица прецессии  $\bar{\mathbf{P}}$  имеет вид

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{Bmatrix}. \quad (1.2.38)$$



Здесь

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \cos \zeta_0 \cos z \cos \theta - \sin \zeta_0 \sin z, \\ Y_x &= -\sin \zeta_0 \cos z \cos \theta - \cos \zeta_0 \sin z, \\ Z_x &= -\cos z \sin \theta, \\ X_y &= \cos \zeta_0 \sin z \cos \theta + \sin \zeta_0 \cos z, \\ Y_y &= -\sin \zeta_0 \sin z \cos \theta + \cos \zeta_0 \cos z, \\ Z_y &= -\sin z \sin \theta, \\ X_z &= \cos \zeta_0 \sin \theta, \\ Y_z &= -\sin \zeta_0 \sin \theta, \\ Z_z &= \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.39)$$

Если положения систем координат  $X_1 Y_1 Z_1$  и  $X_2 Y_2 Z_2$  отнесены соответственно к эпохам  $1900,0 + T_1$  и  $1900,0 + T_2$ , то для вычисления  $X_x, Y_x, \dots, Z_x$  следует применить формулы (1.2.35) и (1.2.39).

Для элементов  $X_x, \dots, Z_x$  матрицы прецессии  $\bar{P}$  имеются также разложения по степеням времени [36], выведенные для различных начальных эпох. Эти разложения существенно облегчают процесс вычислений при приведении координат на определенную стандартную эпоху, например, на эпоху 1950,0, и при обратном переходе.

Применение матриц-операторов поворота  $p, q, r$ , элементы которых являются функциями параметров прецессии  $z, \theta, \zeta_0$  Ньюкома, определяемых разложениями (1.2.35), дает возможность получить удобные и компактные формулы для учета прецессии в прямоугольных экваториальных координатах в системе экватора даты. Если  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  суть положения небесного объекта, отнесенные к прямоугольным средним экваториальным системам отсчета эпох  $1900,0 + T_1$  и  $1900,0 + T_2$ , то точные формулы преобразования имеют вид

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = r(-z) q(\theta) r(-\zeta_0) \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}. \quad (1.2.37a)$$

В некоторых случаях возникает необходимость учесть прецессию в координатах небесного объекта за промежуток времени между заданной эпохой  $1900,0 + T_2 = t$  и стандартной эпохой 1950,0 (или 1960,0, 1975,0, 2000,0). Прецессионные параметры Ньюкома  $\zeta_0, z, \theta$  можно вычислить, воспользовавшись следующими разложениями, в которых  $T$  означает промежуток времени в юлианских столетиях.

Стандартная эпоха 1950,0:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= 2305'',001 T + 0'',302 T^2 + 0'',018 T^3, \\ z &= 2305'',001 T + 1'',095 T^2 + 0'',018 T^3, \\ \theta &= 2004'',338 T - 0'',427 T^2 - 0'',042 T^3, \\ T &= \frac{[\text{JD}(t) - 2433282,4234]}{36\,525}.\end{aligned}$$

Стандартная эпоха 1960,0:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= 2305'',140 T + 0'',302 T^2 + 0'',018 T^3, \\ z &= 2305'',140 T + 1'',095 T^2 + 0'',018 T^3, \\ \theta &= 2004'',216 T - 0'',427 T^2 - 0'',042 T^3, \\ T &= \frac{[\text{JD}(t) - 2436934,8453]}{36\,525}.\end{aligned}$$

Стандартная эпоха 1975,0:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= 2305'',350 T + 0'',302 T^2 + 0'',018 T^3, \\ z &= 2305'',350 T + 1'',095 T^2 + 0'',018 T^3, \\ \theta &= 2004'',088 T - 0'',427 T^2 - 0'',042 T^3, \\ T &= \frac{[\text{JD}(t) - 2442413,4782]}{36\,525}.\end{aligned}$$

Стандартная эпоха 2000,0:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= 2305'',699 T + 0'',302 T^2 + 0'',018 T^3, \\ z &= 2305'',699 T + 1'',095 T^2 + 0'',018 T^3, \\ \theta &= 2003'',874 T - 0'',427 T^2 - 0'',042 T^3, \\ T &= \frac{[\text{JD}(t) - 2451544,5331]}{36\,525}.\end{aligned}$$

### § 2.10. Формулы учета прецессии в прямоугольных эклиптических координатах

Если положение объекта определено прямоугольными *экваториальными* координатами  $x_t$ ,  $y_t$ ,  $z_t$ , отнесенными к среднему экватору и равноденствию эпохи  $t$ , то положение этого объекта в прямоугольной эклиптической системе  $X'Y'Z'$  эпохи 1950,0 определяется координатами  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , вычисляемыми по формуле

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}_{\substack{\text{экл. и равнод.} \\ \text{эпохи 1950,0}}} = \mathbf{P}_1 \{x, y, z\}_{\substack{\text{эkv. и равнод.} \\ \text{даты } t}}, \quad (1.2.40)$$

где матрица преобразования  $\mathbf{P}_1$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} X_x, Y_x \cos \varepsilon_{1950} + Z_x \sin \varepsilon_{1950}, & -Y_x \sin \varepsilon_{1950} + Z_x \cos \varepsilon_{1950}, \\ X_y, Y_y \cos \varepsilon_{1950} + Z_y \sin \varepsilon_{1950}, & -Y_y \sin \varepsilon_{1950} + Z_y \cos \varepsilon_{1950}, \\ X_z, Y_z \cos \varepsilon_{1950} + Z_z \sin \varepsilon_{1950}, & -Y_z \sin \varepsilon_{1950} + Z_z \cos \varepsilon_{1950} \end{Bmatrix}. \quad (1.2.41)$$

Величины  $X_x, X_y, \dots$  вычисляются по формулам (1.2.35) и (1.2.39), в которые следует подставить значение  $T_1 = 0,5$  (время в тропических столетиях, прошедшее от эпохи 1900,0 до эпохи 1950,0),  $\epsilon_{1950}$  — средний наклон эклиптики 1950,0

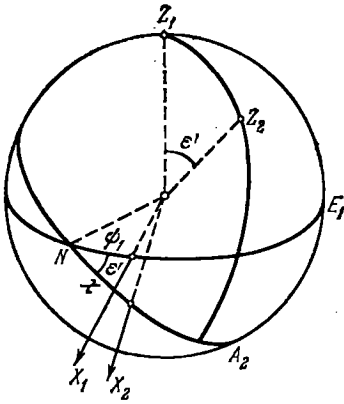


Рис. 42. Прецессионные параметры Ньюкома  $\psi_1, \epsilon', \chi$ .  $E_1$  — неподвижная эклиптика.  $A_2$  — подвижный экватор.

$$(\epsilon_{1950} = 23^\circ 26' 44'',84,$$

$$\sin \epsilon_{1950} = 0,39788118,$$

$$\cos \epsilon_{1950} = 0,91743695).$$

Для преобразования прямоугольных эклиптических координат объекта  $x', y', z'$ , отнесенных к среднему равноденствию и эклиптике эпохи  $t$ , в прямоугольные экваториальные координаты этого объекта  $x, y, z$ , отнесенные к среднему экватору и равноденствию стандартной эпохи 1950,0 можно применить формулу

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\text{эkv. и равнод. эпохи 1950,0}} = P_2 \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}_{\text{экл. и равнод. даты } t},$$

в которой матрица преобразования  $P_2$  имеет вид

$$P_2 = \begin{Bmatrix} X_x & X_y \cos \epsilon_t + X_z \sin \epsilon_t & -X_y \sin \epsilon_t + X_z \cos \epsilon_t \\ Y_x & Y_y \cos \epsilon_t + Y_z \sin \epsilon_t & -Y_y \sin \epsilon_t + Y_z \cos \epsilon_t \\ Z_x & Z_y \cos \epsilon_t + Z_z \sin \epsilon_t & -Z_y \sin \epsilon_t + Z_z \cos \epsilon_t \end{Bmatrix},$$

где  $\epsilon_t$  означает средний наклон эклиптики эпохи  $t$ , а величины  $X_x, \dots, Z_z$  вычисляются по формуле (1.2.39).

Обратные преобразования выполняются при помощи соответствующих транспонированных матриц  $\tilde{P}_1$  и  $\tilde{P}_2$ .

Введение параметров прецессии Ньюкома в системе неподвижной, т. е. отнесенной к фиксированной эпохе, эклиптики и подвижного экватора (среднего экватора даты)  $\psi_1, \chi, \epsilon'$  (рис. 42), определяемых разложениями

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= (5037'',084 + 0'',493 T_1) \tau - 1'',072 \tau^2, \\ \chi &= (12'',473 - 1'',887 T_1) \tau - 2'',381 \tau^2, \\ \epsilon' &= \epsilon + (9'',0606 - 0'',0092 T_1) \tau^2 - 0'',00773 \tau^3, \end{aligned} \right\} (1.2.35a)$$

где

$$\epsilon = 23^\circ 27' 08'',26 - 46'',845 T_1 - 0'',0059 T_1^2 + 0'',00181 T_1^3,$$

и применение матриц  $p, q, r$  от этих аргументов позволяет точно учесть прецессию за интервал  $\tau = T_2 - T_1$  в прямоугольных координатах с одновременным преобразованием средних эклиптических координат объекта  $x', y', z'$  эпохи  $1900,0 + T_1$  в средние экваториальные координаты  $x, y, z$  эпохи  $1900,0 + T_2$ . Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\alpha, \delta}^{(T_2)} = r(x) p(-\epsilon') r(-\psi) \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}_{\lambda, \beta}^{(T_1)}. \quad (1.2.40a)$$

Учет прецессии в системе подвижной эклиптики основан на применении параметров прецессии Ньюкома ( $\Pi$ ),  $\psi$ , ( $\pi$ ) (рис. 43), определяемых посредством разложений

$$\left. \begin{aligned} (\Pi) &= 173^\circ 57' 03'' + 3287'' T_1 + 0'',6 T_1^2 - (869'' + 0'',6 T_1) \tau, \\ \psi &= (5025'',641 + 2'',223 T_1) \tau + 1'',112 \tau^2, \\ (\pi) &= (47'',107 - 0'',0675 T_1) \tau - 0'',034 \tau^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.35b)$$

и являющихся аргументами элементов матриц-операторов поворота относительно осей  $X, Y, Z$ . Переход от средних эклиптических координат объекта эпохи  $1900,0 + T_1$  к средним эклиптическим координатам эпохи  $1900,0 + T_2$  выполняется по формулам

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}_{\lambda, \beta}^{(T_2)} = r[-(\Pi) - \psi] p[(\pi)] \times \times r[(\Pi)] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}_{\lambda, \beta}^{(T_1)}. \quad (1.2.40b)$$

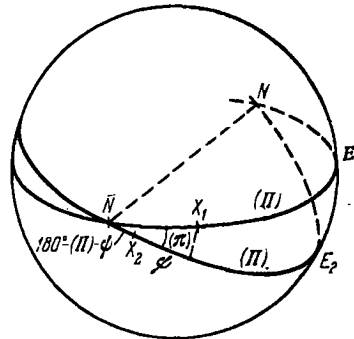


Рис. 43. Прецессионные параметры Ньюкома ( $\Pi$ ), ( $\pi$ ),  $\psi$ .  $E_1$  — неподвижная эклиптика,  $E_2$  — подвижная эклиптика.

Напомним, что время  $T_1$  и  $T_2$  выражено в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток. Формулы (1.2.40б) могут быть применены также при решении задач, связанных с преобразованиями селенографических координат небесных объектов, отнесенных к системам отсчета различных эпох.

### § 2.11. Совместный учет прецессии и нутации в прямоугольных экваториальных координатах

Приведение прямоугольных экваториальных координат объекта  $x_0, y_0, z_0$ , отнесенных к среднему экватору и равноденствию эпохи  $t_0$ , к истинному экватору и равноденствию даты  $t$

можно выполнить, применяя формулу

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\substack{\text{ист. экв.} \\ \text{и равнод.} \\ \text{даты } t}} = M_{pn} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}_{\substack{\text{средн. экв.} \\ \text{и равнод.} \\ \text{эпохи } t_0}}$$

где

$$M_{pn} = \begin{Bmatrix} X_x - X_y \Delta\psi_s \cos \epsilon - & Y_x - Y_y \Delta\psi_s \cos \epsilon - & Z_x - Z_y \Delta\psi_s \cos \epsilon - \\ & - X_z \Delta\psi_s \sin \epsilon, & - Y_z \Delta\psi_s \sin \epsilon, & - Z_z \Delta\psi_s \sin \epsilon \\ X_x \Delta\psi_s \cos \epsilon + & Y_x \Delta\psi_s \cos \epsilon + & Z_x \Delta\psi_s \cos \epsilon + \\ & + X_y - X_z \Delta\epsilon_s, & + Y_y - Y_z \Delta\epsilon_s, & + Z_y - Z_z \Delta\epsilon_s \\ X_x \Delta\psi_s \sin \epsilon + & Y_x \Delta\psi_s \sin \epsilon + & Z_x \Delta\psi_s \sin \epsilon + \\ & + X_y \Delta\epsilon_s + X_z, & + Y_y \Delta\epsilon_s + Y_z, & + Z_y \Delta\epsilon_s + Z_z \end{Bmatrix}, \quad (1.2.42)$$

причем  $\Delta\psi_s = \Delta\psi + d\psi$  — нутация в долготе,  $\Delta\epsilon_s = \Delta\epsilon + d\epsilon$  — нутация в наклоне,  $\epsilon$  — истинный наклон эклиптики к экватору. Все эти величины берутся из «Астрономического Ежегодника СССР» на заданную дату  $t$ , или вычисляются (см. стр. 93).

Аналогично решается обратная задача.

**З а м е ч а н и е.** Совместный учет прецессии и нутации в прямоугольных эклиптических координатах производится по формулам

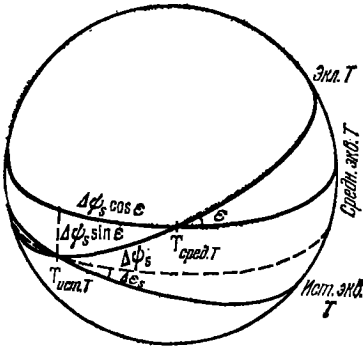


Рис. 44. Компоненты нутации  $\Delta\psi_s$  и  $\Delta\epsilon_s$ .

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\substack{\text{ист. экл.} \\ \text{и равнод.} \\ \text{даты } t}} = E M_{pn} \tilde{E}_0 \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\substack{\text{средн. экл.} \\ \text{и равнод.} \\ \text{эпохи } t_0}},$$

где матрицы  $E$  и  $\tilde{E}_0$  определены равенствами

$$E = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{Bmatrix} = \bar{p}(\epsilon), \quad \tilde{E}_0 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_{t_0} & -\sin \epsilon_{t_0} \\ 0 & \sin \epsilon_{t_0} & \cos \epsilon_{t_0} \end{Bmatrix} = \bar{p}(-\epsilon_{t_0}).$$

Применение матриц  $p$ ,  $q$ ,  $r$  к преобразованию средних прямоугольных экваториальных координат небесного объекта даты  $T$  в истинные координаты дает следующие формулы точного учета нутации (рис. 44):

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\text{ист.}}^{(T)} = p(-\epsilon - \Delta\epsilon_s) r(-\Delta\psi_s) p(\epsilon) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\text{средн.}}^{(T)}, \quad (1.2.42a)$$

где  $\Delta\psi_s = \Delta\psi + d\psi$  и  $\Delta\epsilon_s = \Delta\epsilon + d\epsilon$  означают компоненты нутации по долготе и в наклоне, определяемые разложениями Вулларда, аргументы и коэффициенты которых приведены в таблице на стр. 93, а  $\epsilon$  — средний наклон эклиптики к экватору даты  $T$ .

Для совместного учета прецессии между эпохами  $1900,0 + T_1$  и  $1900,0 + T_2$ , т. е. за интервал  $\tau = T_2 - T_1$ , и нутации в прямоугольных экваториальных координатах можно воспользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\}_{ист}^{(T_2)} &= \mathbf{p}(-\epsilon_{T_1} - \Delta\epsilon_s) \mathbf{r}(-\Delta\psi_s) \mathbf{p}(\epsilon_{T_1}) \times \\ &\quad \times \mathbf{r}(-z) \mathbf{q}(\theta) \mathbf{r}(-\zeta_0) \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\}_{среди}^{(T_1)}. \end{aligned} \quad (1.2.42б)$$

В случае эклиптических координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right\}_{ист}^{(T_2)} = \mathbf{r}[-(\Pi) - \psi - \Delta\psi_s] \mathbf{p}[(\pi)] \mathbf{r}[(\Pi)] \left\{ \begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right\}_{среди}^{(T_1)}. \quad (1.2.42в)$$

### § 2.12. Формулы учета прецессии в координатах и элементах орбит при умеренных и малых разностях эпох

Если начальная эпоха  $t_0$  и конечная эпоха  $t$  разделены сравнительно небольшим промежутком времени  $t - t_0$ , не превышающим нескольких десятков лет, то преобразование сферических координат (или элементов ориентации орбиты) объекта может быть выполнено следующим образом.

Вычисляются:

а) общая прецессия по прямому восхождению

$$M = \zeta_0 + z = \bar{m}(t - t_0),$$

б) прецессия по склонению

$$N = \theta = \bar{n}(t - t_0),$$

в) общая прецессия по долготе

$$a = \bar{p}(t - t_0),$$

г) взаимный наклон плоскостей эклиптики эпох  $t$  и  $t_0$

$$b = \bar{\pi}(t - t_0),$$

д) величины  $c$  и  $c'$

$$c = 180^\circ + \frac{1}{2}a - \bar{\Pi},$$

$$c' = 180^\circ - \frac{1}{2}a - \bar{\Pi}.$$

Годичные прецессионные величины  $\bar{m}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\pi}$  и долгота оси вращения эклиптики  $\bar{\Pi}$  вычисляются на среднюю эпоху  $\bar{t} = \frac{1}{2}(t + t_0)$  по формулам Ньюкома — Андуайе [31]:

$$\begin{aligned} m &= 3^s,07234 + 0^s,00186 T_1 = 46'',0851 + 0'',0279 T_1, \\ n &= 1^s,33646 - 0^s,00057 T_1 = 20'',0468 - 0'',0085 T_1, \\ p &= 50'',2564 + 0'',0222 T_1, \\ \pi &= 0'',4711 - 0'',0007 T_1, \\ \Pi &= 173^\circ 57',06 + 54',77 T_1, \end{aligned}$$

в которых  $T_1$  — время в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток, отсчитываемое от эпохи 1900,0 (JD 2415029,3134) до рассматриваемого момента (в данном случае до  $\bar{t}$ ).

1. Формулы редукции экваториальных координат  $\alpha$ ,  $\delta$  от  $t_0$  к  $t$  и обратно имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= M + N \sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta_0), \\ \delta - \delta_0 &= N \cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0). \end{aligned}$$

Правые части этих формул вычисляются итерационным методом (начиная с  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\delta = \delta_0$ ) до получения постоянных значений  $\alpha - \alpha_0$ ,  $\delta - \delta_0$ .

2. Предыдущие формулы можно заменить следующими:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + (\bar{m} + \bar{n} \sin \bar{\alpha} \operatorname{tg} \bar{\delta})(t - t_0), \\ \delta &= \delta_0 + \bar{n} \cos \bar{\alpha}(t - t_0). \end{aligned}$$

3. Формулы редукции за прецессию эклиптических координат от эпохи  $t_0$  на эпоху  $t$  имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + a - b \cos(\lambda_0 + c) \operatorname{tg} \beta, \\ \beta &= \beta_0 + b \sin(\lambda_0 + c). \end{aligned}$$

Редукция от эпохи  $t$  на эпоху  $t_0$  выполняется по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda - a + b \cos(\lambda + c') \operatorname{tg} \beta_0, \\ \beta_0 &= \beta - b \sin(\lambda + c'). \end{aligned}$$

4. Преобразование эклиптических элементов \*) ориентации орбиты объекта  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$ ,  $\bar{\omega}$  осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + a - b \sin(\Omega_0 + c) \operatorname{ctg} i, \\ \omega &= \omega_0 + b \sin(\Omega_0 + c) \operatorname{cosec} i, \\ i &= i_0 + b \cos(\Omega_0 + c), \\ \bar{\omega} &= \bar{\omega}_0 + a + b \sin(\Omega_0 + c) \operatorname{tg} \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

\*) Относительно элементов орбиты небесного объекта см. ч. II, § 1.04.

Для обратного преобразования от эпохи  $t$  на эпоху  $t_0$  служат формулы

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \Omega - a + b \sin(\Omega + c') \operatorname{ctg} i_0, \\ \omega_0 &= \omega - b \sin(\Omega + c') \operatorname{cosec} i_0, \\ i_0 &= i - b \cos(\Omega + c'), \\ \tilde{\omega}_0 &= \tilde{\omega} - a - b \sin(\Omega + c') \operatorname{tg} \frac{i_0}{2}.\end{aligned}$$

5. Преобразование экваториальных элементов ориентации орбиты объекта  $\Omega'$ ,  $\omega'$ ,  $i'$ ,  $\tilde{\omega}'$  от эпохи  $t_0$  на эпоху  $t$  выполняется по формулам

$$\begin{aligned}\Omega' &= \Omega'_0 + M - N \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(i' + i'_0) \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0), \\ \omega' &= \omega'_0 + N \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(i' + i'_0) \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0), \\ i' &= i'_0 - N \sin \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0), \\ \tilde{\omega}' &= \tilde{\omega}'_0 + M + N \operatorname{tg} \frac{1}{4}(i' + i'_0) \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0)\end{aligned}$$

и от эпохи  $t$  на эпоху  $t_0$  — по формулам

$$\begin{aligned}\Omega'_0 &= \Omega' - M + N \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(i' + i'_0) \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0), \\ \omega'_0 &= \omega' - N \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(i' + i'_0) \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0), \\ i'_0 &= i' + N \sin \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0), \\ \tilde{\omega}'_0 &= \tilde{\omega}' - M - N \operatorname{tg} \frac{1}{4}(i' + i'_0) \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_0).\end{aligned}$$

6. Компоненты векторных экваториальных элементов орбит

$$\mathbf{P}(P_x, P_y, P_z), \quad \mathbf{Q}(Q_x, Q_y, Q_z), \quad \mathbf{R}(R_x, R_y, R_z)$$

преобразуются с учетом прецессии по формулам преобразования, применяемым в случае прямоугольных экваториальных координат — по формулам (1.2.37).

Формулы преобразования эклиптических прямоугольных координат применимы для редукции за прецессию эклиптических векторных элементов  $\mathbf{P}^{(e)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(e)}$ ,  $\mathbf{R}^{(e)}$ .

7. Приведем также формулы учета прецессии оси вращения Луны в селеноэкваториальных координатах. При рассмотрении положений небесных объектов в системе отсчета, основной плоскостью которой является плоскость среднего экватора Луны, а основная ось отсчета направлена в нисходящий узел геоцентрической орбиты Луны на лунном экваторе, соответствующие



координаты небесных объектов изменяются со временем из-за попятного движения линии лунных узлов по эклиптике. Это движение аналогично явлению прецессии земной оси вращения и подчиняется законам Кассини (см. § 4.08).

Если положение небесного объекта отнесено к прямоугольным селеноэквиаториальным системам отсчета  $\Sigma_1 N_1 Z_1$  и  $\Sigma_2 N_2 Z_2$  эпох  $1900,0 + T_1$  и  $1900,0 + T_2$  (рис. 45), то переход от одной

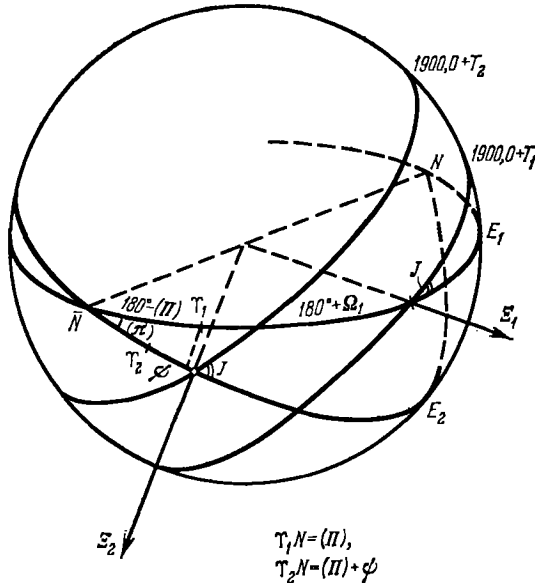


Рис. 45. Редукция селенографических координат в системе подвижной эклиптики.

системы к другой легко выполняется посредством формул, основанных на соотношениях (1.2.40б) учета прецессии в системе подвижной эклиптики, а именно,

$$\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(J) \mathbf{r}(360^\circ - \Omega_2 - (\Pi) - \psi) \mathbf{p}(-(\pi)) \mathbf{r}(\Omega_1 + (\Pi)) \mathbf{p}(-J) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix},$$

так как, согласно законам Кассини, экватор Луны сохраняет постоянный наклон  $J$  к эклиптике той же даты.

### § 2.13. Аберрация света

*Аберрация* — явление, заключающееся в кажущемся повороте светового луча, обусловленном как движением объекта, так и движением наблюдателя относительно одной и той же инерциальной системы отсчета. Эффект собственного движения не-

бесного объекта, не зависящий от движения наблюдателя, учитывается *поправкой за абберационное время*, определяющей изменения в координатах объекта за промежуток времени распространения света от небесного объекта до наблюдателя — за *световой промежуток*  $\tau$ . Влияние перемещения наблюдателя известно под названием *звездной абберации* (суточной, годовой, вековой). Суммарный эффект называется *планетной абберацией*.

Общие законы абберационного смещения светил могут быть сформулированы в следующей форме.

1. *Абберационное смещение объекта на небесной сфере происходит по дуге большого круга, проведенного через истинное (геометрическое) положение этого объекта и апекс\*) движения наблюдателя.*

2. *Абберационное смещение приближает объект к апексу движения наблюдателя.*

3. *С точностью до малых величин первого порядка величина абберационного смещения пропорциональна синусу углового расстояния объекта от апекса движения наблюдателя.*

1. **Поправка за абберационное время.** Если  $P(t)$  и  $T(t)$  — геометрические положения небесного объекта (планеты) и Земли в момент времени  $t$ ,  $P(t - \tau)$  — геометрическое положение объекта в момент, *предшествующий* моменту  $t$  на величину *светового промежутка*  $\tau$ , то направление прямой, соединяющей положения  $T(t)$  и  $P(t - \tau)$ , определяет *видимое* направление объекта  $P$  в момент  $t$ , т. е. видимое направление в момент  $t$  на небесный объект, обладающий собственным движением, совпадает с геометрическим (истинным) направлением на этот объект в момент  $t - \tau$ .

Если геоцентрическое расстояние объекта  $P$  в момент времени  $t$  равно  $\rho$  а. е., то световой промежуток  $\tau$  определяется формулой [37]

$$\tau = \tau_A \rho, \quad \tau_A = 499^s, 012,$$

$\tau_A$  — *световое уравнение*, или *световая астрономическая единица*.

Все поправки за абберационное время  $\tau$  в общем случае могут быть изображены формулой вида

Видимое положение =

$$= \text{истинному положению} - (\text{суточное движение}) \times \tau_A \rho, \\ \tau_A = 0^d, 0057756.$$

Эти же поправки за абберационное время применяют при редукции положений точек, расположенных на поверхности

\*) *Апексом* движения называют точку пересечения оси вектора мгновенной скорости (наблюдателя) с небесной сферой в направлении движения.

вращающейся планеты и отнесенных к определенной детали ее поверхности.

**2. Планетная абберация.** Движение Земли в течение абберационного времени  $\tau$  можно считать прямолинейным и равномерным. В треугольнике  $PT_0T$  (рис. 46)

$$PT = c\tau, \quad T_0T = v\tau,$$

где  $c$  — скорость света,  $v$  — скорость Земли, обуславливающая годовую звездную абберацию. В неподвижной системе координат, связанной с Солнцем, наблюдатель видел бы объект  $P$  в истинном направлении  $TP$ , в геоцентрической подвижной системе объект наблюдается в видимом направлении  $TP'$ , которое совпадает с направлением вектора — суммы скоростей  $c$  и  $-v$ . Так как  $MT = c$ ,  $NT = v$ , то видимое направление  $TP'$  на объект параллельно направлению  $MN$  и, следовательно, параллельно истинному направлению. Таким образом, видимое направление на объект в момент  $t$  совпадает с истинным направлением на этот объект в момент  $t - \tau$  (первая теорема Гаусса о планетной абберации).

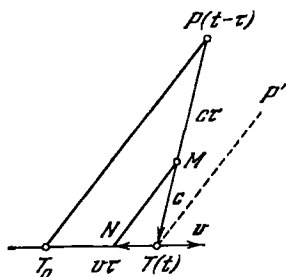


Рис. 46. Планетная абберация.

При исправлении видимого направления  $TP'$  на объект  $P$  за звездную абберацию (*aberratio fixarum*) получается направление  $TP$ , т. е. истинное направление на объект в момент  $t$  совпадает с направлением прямой, соединяющей положение Земли в момент  $t$  с положением объекта в момент  $t - \tau$  (вторая теорема Гаусса о планетной абберации).

Обе теоремы о планетной абберации применяются при сравнении наблюдаемых положений объектов с предвычисленными (см. § 2.25) [38].

**3. Суточная абберация.** Вопросы учета годичной абберации в положениях звезд изложены в § 2.04.

С явлением суточного вращения Земли связана *суточная абберация светил*.

Если наблюдатель расположен в точке  $L$  с геоцентрическими координатами  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi'$ , то радиус его параллели равен  $\rho \cos \varphi'$ , а линейная скорость вращения есть (рис. 47)

$$v = \rho \cos \varphi' \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{\rho}{a_e} \cos \varphi',$$

где  $s$  — местное звездное время,  $v_0$  — линейная скорость точки на экваторе,  $v_0 = 0,465 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Отношение  $v_0/c$  называется *постоянной суточной абберации* ( $c$  — скорость света).

Учет суточной aberrации в  $\alpha$  и  $\delta$  дается формулами

$$\Delta\alpha^s = [\alpha_{\text{вид}} - \alpha_{\text{ист}}]^s = \frac{0^s,02132}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \cos t \sec \delta.$$

$$\Delta\delta'' = [\delta_{\text{вид}} - \delta_{\text{ист}}]'' = \frac{0'',3198}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin t \sin \delta,$$

где  $t = s - \alpha$  — часовой угол наблюдаемого объекта с координатами  $\alpha, \delta$ ;  $\varphi$  — геодезическая широта места наблюдения, связанная с геоцентрической широтой места  $\varphi'$  формулой (1.1.067) или

$$\rho \cos \varphi' = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi,$$

в которой  $a_e$  и  $e_0$  — соответственно большая полуось экваториального сечения и эксцентриситет меридионального сечения земного сфероида.

Поправки за суточную aberrацию в азимуте  $A$  и высоте  $h$  объекта (при отсчете  $A$  от точки юга  $S$  к востоку) определены формулами

$$\Delta A = A_{\text{вид}} - A_{\text{ист}} = + \frac{0'',3198}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sec h \cos A,$$

$$\Delta h = h_{\text{вид}} - h_{\text{ист}} = - \frac{0'',3198}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin h \sin A.$$

Поправки за суточную aberrацию в часовом угле  $t$  и склонении  $\delta$  объекта равны

$$t_{\text{вид}} - t_{\text{ист}} = - \frac{0'',3198}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sec \delta \cos t =$$

$$= - \frac{0^s,02132}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sec \delta \cos t,$$

$$\delta_{\text{вид}} - \delta_{\text{ист}} = \frac{0'',3198}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin \delta \sin t.$$

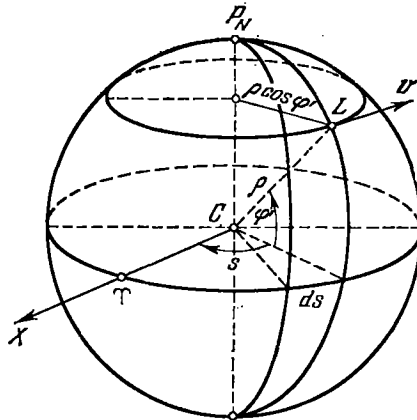


Рис. 47. Суточная aberrация.

4. **Замечание о вычислении эллиптической aberrации.** При необходимости особо точной редукции средних мест близполюсных звезд в случае большой разности эпох  $T$  нельзя пренебрегать изменением эллиптической части aberrации ( $E$ -членов):  $E$ -члены следует исключить из координат звезды, отнесенных к экватору и равноденствию начальной эпохи  $t_0$ , и прибавить их новые значения после редукции среднего места звезды на новую эпоху  $t = t_0 + T$ .

Ф. Скотт [39] предложил следующие формулы редукции средних мест близполюсных звезд от эпохи 1950,0 на эпоху  $t = 1950,0 + T$  с учетом  $E$ -членов aberrации в прямоугольных координатах звезды  $x, y, z$  ( $x = \cos \alpha \cos \delta$ ,  $y = \sin \alpha \cos \delta$ ,  $z = \sin \delta$ ):

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_T = \bar{P} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{1950,0} + \begin{Bmatrix} 6,04 & -0,46 \\ -7,65 & -0,09 \\ -3,20 & -0,04 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ T^2 \end{Bmatrix} 10^{-9},$$

где  $\bar{P}$  — известная матрица прецессии (1.2.38).

Если координаты звезды уже редуцированы за прецессию, то влияние изменений в членах эллиптической aberrации учитывается поправками

$$\begin{aligned} \Delta \alpha'' &= 13751'' (\Delta y \cos \alpha - \Delta x \sin \alpha) \sec \delta, \\ \Delta \delta'' &= 206265'' [\Delta z \cos \delta - (\Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha) \sin \delta], \end{aligned}$$

где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  вычисляются по формулам

$$\begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}_T = \begin{Bmatrix} 6,04 & -0,46 \\ -7,65 & -0,09 \\ -3,20 & -0,04 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ T^2 \end{Bmatrix} 10^{-9}.$$

### § 2.14. Приведение звезды на видимое место в прямоугольных координатах

Применение матриц-операторов поворота  $p, q, r$  дает возможность получить точные и удобные формулы приведения среднего положения небесного объекта на видимое место, если воспользоваться прямоугольными координатами.

1. **Экваториальные координаты.** Если на эпоху  $1900,0 + T_1$  заданы сферические экваториальные координаты  $\alpha_1, \delta_1$  небесного объекта и компоненты его собственного движения  $\mu_\alpha^{(1)}, \mu_\delta^{(1)}$ , то сначала необходимо учесть эффект собственного перемещения объекта, переводя его положение только собственным движением от эпохи  $1900,0 + T_1$  к эпохе  $1900,0 + T_2$ , т. е. относя положение объекта к эпохе  $1900,0 + T_2$  и равноденствию  $1900,0 + T_1$ .

Для этого можно применить формулы

$$\left. \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}_{1900,0+T_2}^{1900,0+T_1} = \mathbf{r}(-\alpha_1) \mathbf{q}(\delta_1 - 90^\circ) \mathbf{r}(\psi_0) \mathbf{q}(\mu\tau) \mathbf{r}(-\psi_0) \times \\ \times \mathbf{q}(90^\circ - \delta_1) \mathbf{r}(\alpha_1) \left. \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}_{1900,0+T_1}^{1900,0+T_2},$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{(\mu_\alpha \cos \delta_1)^2 + (\mu_\delta)^2}, \\ \mu_\alpha &= \mu_\alpha^{(1)} + \operatorname{tg} \delta_1 \mu_\alpha^{(1)} \mu_\delta^{(1)} \tau, \\ \mu_\delta &= \mu_\delta^{(1)} - \frac{1}{4} \sin 2\delta_1 (\mu_\alpha^{(1)})^2 \tau, \\ \sin \psi_0 &= \frac{\mu_\alpha \cos \delta_1}{\mu}, \quad \cos \psi_0 = \frac{\mu_\delta}{\mu}, \quad \tau = T_2 - T_1. \end{aligned}$$

После вычисления параметров Ньюкома  $\xi_0$ ,  $z$ ,  $\theta$  для учета прецессии за интервал  $\tau = T_2 - T_1$ , а также компонент нутации по долготе  $\Delta\psi_s$  и в наклоне  $\Delta\epsilon_s$ , абберационных редуccionных величин  $C$ ,  $D$ , получаем окончательно

$$\left. \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}_{\text{внх}}^{(T_2)} = \left. \begin{matrix} -D \\ +C \\ +C \operatorname{tg}(\epsilon + \Delta\epsilon_s) \end{matrix} \right\} + \\ + \mathbf{p}(-\epsilon - \Delta\epsilon_s) \mathbf{r}(-\Delta\psi_s) \mathbf{p}(\epsilon) \mathbf{r}(-z) \mathbf{q}(\theta) \mathbf{r}(-\xi_0) \left. \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}_{1900,0+T_1}^{1900,0+T_2}. \quad (*)$$

Если известно значение параллакса звезды  $\pi$ , то формулу (\*) следует дополнить слагаемым вида

$$- \frac{\pi}{\kappa} \left. \begin{matrix} C \sec(\epsilon + \Delta\epsilon_s) \\ D \cos(\epsilon + \Delta\epsilon_s) \\ D \sin(\epsilon + \Delta\epsilon_s) \end{matrix} \right\},$$

где  $\kappa$  означает постоянную абберации,  $\kappa = 20'',496$ .

Необходимо помнить, что величины  $C$  и  $D$  должны быть отнесены к равноденствию эпохи  $1900,0 + T_2$  соответствующим преобразованием за прецессию и нутацию, так как обычно они относятся к системе отсчета, связанной с началом ближайшего бесселева года.

Переход к сферическим экваториальным координатам  $\alpha$ ,  $\delta$  объекта осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{x \cos \alpha + y \sin \alpha}. \end{aligned}$$

при этом квадрант  $\alpha$  определяется знаками  $y$  и  $x$ , а знак  $\delta$  — знаком  $z$ .

**2. Эклиптические координаты.** Можно также рекомендовать вычисление видимых мест звезд в прямоугольных координатах, используя в качестве промежуточного этапа преобразование в прямоугольной эклиптической системе отсчета, с переходом в конце вычислений к сферическим экваториальным координатам звезды [72].

Если заданы исходные сферические координаты  $\alpha_1, \delta_1$  и компоненты собственного движения  $\mu_\alpha^{(1)}, \mu_\delta^{(1)}$  на эпоху  $1900,0 + T_1$ , то соответствующие векторы положения звезды  $(x_1, y_1, z_1)$  и ее собственного движения  $(\mu_x^{(1)}, \mu_y^{(1)}, \mu_z^{(1)})$  в прямоугольных экваториальных координатах вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \cos \delta_1 \\ \sin \alpha_1 \cos \delta_1 \\ \sin \delta_1 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \mu_x^{(1)} \\ \mu_y^{(1)} \\ \mu_z^{(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\sin \alpha_1 \cos \delta_1 & -\cos \alpha_1 \sin \delta_1 \\ +\cos \alpha_1 \cos \delta_1 & -\sin \alpha_1 \sin \delta_1 \\ 0 & \cos \delta_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_\alpha^{(1)} \\ \mu_\delta^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Компоненты вектора  $(\dot{\mu}_x^{(1)}, \dot{\mu}_y^{(1)}, \dot{\mu}_z^{(1)})$ , необходимого в дальнейшем для точного приведения координат за собственное движение в течение интервала  $\tau = T_2 - T_1$  на эпоху  $1900,0 + T_2$ , определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_x^{(1)} &= -\cos \alpha_1 \cos \delta_1 \{[\mu_\alpha^{(1)}]^2 + [\mu_\delta^{(1)}]^2\} + \frac{1}{2} \sin 2\delta_1 \cos \delta_1 \sin \alpha_1 [\mu_\alpha^{(1)}]^2, \\ \dot{\mu}_y^{(1)} &= -\sin \alpha_1 \cos \delta_1 \{[\mu_\alpha^{(1)}]^2 + [\mu_\delta^{(1)}]^2\} + \frac{1}{2} \sin 2\delta_1 \sin \delta_1 \sin \alpha_1 [\mu_\alpha^{(1)}]^2, \\ \dot{\mu}_z^{(1)} &= -\sin \delta_1 [\mu_\delta^{(1)}]^2 - \frac{1}{2} \sin 2\delta_1 \cos \delta_1 [\mu_\alpha^{(1)}]^2. \end{aligned}$$

Если  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  есть средняя эпоха, то

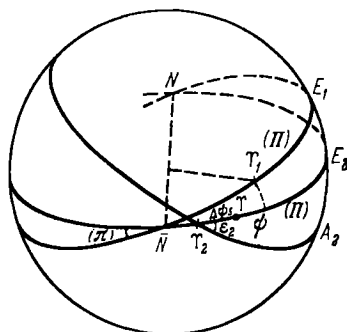
$$\begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{Bmatrix}_{(\bar{T})} = \begin{Bmatrix} \mu_x^{(1)} \\ \mu_y^{(1)} \\ \mu_z^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\mu}_x^{(1)} \\ \dot{\mu}_y^{(1)} \\ \dot{\mu}_z^{(1)} \end{Bmatrix} (\bar{T} - T_1),$$

и средние эклиптические прямоугольные координаты звезды на эпоху  $1900,0 + T_2$  и равноденствие  $1900,0 + T_1$  вычисляются по формуле

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}_{T_1}^{(T_2)} = \mathbf{p}(\mathbf{e}_1) \left[ \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{T_1}^{(T_1)} + \begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{Bmatrix}_{(\bar{T})} \tau \right].$$

Истинные координаты в эклиптической системе отсчета эпохи и равноденствия 1900,0 +  $T_2$  с учетом прецессии за интервал  $\tau$  получаются по формуле (1.2.42в). Для перехода к видимому месту в эклиптических координатах необходимо учесть аберрацию и параллакс; это выполняется при помощи следующих соотношений (рис. 48):

$$\left\{ \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\}_{T_2}^{(T_2)} = \mathbf{r} [-(\Pi) - \psi - \Delta\psi_s] \mathbf{p} [(\pi)] \mathbf{r} [(\Pi)] \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\}_{T_1}^{(T_2)} + \kappa \begin{Bmatrix} \sin \odot \\ -\cos \odot \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ + \pi \begin{Bmatrix} \cos \odot \\ \sin \odot \\ 0 \end{Bmatrix},$$



$$\begin{aligned} \kappa T_1 &= (\Pi), & \varepsilon_2 &= \varepsilon + \Delta\varepsilon_s \\ \kappa T &= (\Pi) + \psi, \\ \kappa T_2 &= \Delta\psi_s \end{aligned}$$

Рис. 48. Приведение на истинное место в прямоугольных эклиптических координатах.

где  $\odot$  означает истинную долготу Солнца. Переход к видимому положению звезды в экваториальной системе координат основан на соотношении

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}_{T_2}^{(T_2)} = \mathbf{p} (-\varepsilon - \Delta\varepsilon_s) \left\{ \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\}_{T_2}^{(T_2)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

### § 2.15. Об учете орбитального движения компонент двойных звезд

Для двойных звезд в каталогах звездных положений обычно дают средние координаты центра масс двойной системы. Поэтому при вычислении видимых мест необходимо определить видимые координаты одной из компонент двойной звезды (чаще всего дают видимое место более яркой составляющей  $A$ ).

Орбита звезды-спутника  $B$  относительно главной звезды  $A$  определяется семью элементами — шестью элементами кеплера движения  $a, e = \sin \varphi, T, i, \omega, \Omega$  и суммой масс  $m_A + m_B$  компонент системы. Вместо суммы масс можно взять период



обращения  $P$ , связанный с  $m_A + m_B$  соотношением

$$P = \left\{ \frac{a^3}{\pi^3 (m_A + m_B)} \right\}^{1/3},$$

где  $\pi$  — параллакс двойной звезды.

Элементы  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  фиксируют положение истинной орбиты двойной звезды  $B$  в пространстве и определяются следующим образом. Если ввести в рассмотрение картинную плоскость, т. е. плоскость, перпендикулярную к лучу зрения (рис. 49), то проекция истинной орбиты на эту

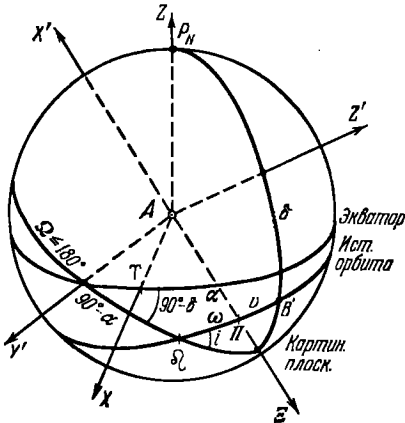


Рис. 49. Переход от барицентра двойной звездной системы к одной из компонент.

плоскость есть видимая орбита звезды  $B$ . Угол наклона плоскости истинной орбиты к картинной плоскости есть  $i$ . Связывая с картинной плоскостью правую систему прямоугольных координат  $X'Y'Z'$  с началом в центральной звезде  $A$  с осью  $AX'$ , направленной к северному полюсу мира, и осью  $AZ'$  — к наблюдателю, можно ввести элемент  $\Omega$  как позиционный угол узла  $\Omega$  видимой орбиты на истинной орбите, причем  $\Omega \leq 180^\circ$ . Наконеч, угловое расстояние  $\omega$  периастра  $\Pi$  от узла  $\Omega$ , отсчитываемое в направлении дви-

жения звезды  $B$  от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , является последним элементом, определяющим ориентацию орбиты.

Если теперь рассмотреть обычную орбитальную систему координат  $EN$ , ось  $E$  которой направлена в периастр  $\Pi$  орбиты, а ось  $N$  — в точку  $\nu = 90^\circ$ , то координаты звезды-спутника  $\xi$ ,  $\eta$  в момент  $t$  определяются формулами

$$\xi = r \cos \nu = a(\cos E - \sin \varphi) = aX,$$

$$\eta = r \sin \nu = a \sin E \cos \varphi = aY,$$

где величины  $X$ ,  $Y$  могут быть взяты из таблиц Иннеса [73]. Для вычисления  $r$ ,  $E$ ,  $\nu$  можно воспользоваться формулами [см. также формулы (2.2.06) — (2.2.13)]

$$n = 360^\circ/P, \quad M = n(t - T), \quad E - e \sin E = M,$$

$$r = a(1 - e \cos E), \quad \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Далее, в системе координат  $X'Y'Z'$ , связанной с картинной плоскостью, имеем

$$\begin{Bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{Bmatrix} = \mathbf{r}(-\Omega) \mathbf{p}(-i) \mathbf{r}(-\omega) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{Bmatrix};$$

для перехода к геоэкватору (той же эпохи каталога) можно применить формулы

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} = \mathbf{r}(180^\circ - \alpha) \mathbf{q}(90^\circ - \delta) \begin{Bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, если на эпоху  $T$  заданы средние координаты  $\alpha_g, \delta_g$  центра масс двойной звезды (в этих случаях числовые значения координат сопровождаются сокращением с. г., означающим *centrum gravitatis*) и функция масс  $f = m_B / (m_A + m_B)$ , то, вычислив вектор  $(x_B, y_B, z_B)$  и вектор

$$\begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_g \cos \delta_g \\ \sin \alpha_g \cos \delta_g \\ \sin \delta_g \end{Bmatrix}.$$

найдем вектор положения звезды  $A$  в соответствии с определением координат центра масс по формуле

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-f} \left[ \begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{Bmatrix} - f \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} \right],$$

приводя в дальнейшем средние координаты  $(x_A, y_A, z_A)$  звезды  $A$  эпохи  $T$  на видимое место, воспользовавшись соотношениями § 2.14.

### § 2.16. Параллакс

*Параллаксом* небесного объекта называется угол между двумя лучами, исходящими из центра небесного объекта и проведенными через две точки наблюдения в один и тот же момент времени.

На практике термин *параллакс* эквивалентен величине смещения положения небесного объекта, видимого в некоторый момент времени из определенной точки наблюдения, относительно положения этого объекта в тот же момент времени, определяемого направлением на объект из принятой стандартной точки отсчета. В качестве такой точки отсчета при наблюдении небес-

ных объектов в Солнечной системе принимают центр масс Земли, при наблюдениях звезд — центр масс Солнца. В первом случае угловое расстояние на небесной сфере между проекциями небесного объекта, равное разности направлений на этот объект из центра масс Земли и из точки на поверхности Земли, называется *геоцентрическим*, или *суточным параллаксом*. Разность направлений на звезду, проведенных из центра Солнца и центра Земли, называется *гелиоцентрическим*, или *годовым параллаксом* (см. § 2.07).

При сравнении теоретических (вычисленных) положений небесного объекта, отнесенных к центру масс Земли, с наблюдаемыми (топоцентрическими) положениями необходимо редуцировать топоцентрическое положение к центру масс Земли введением поправки за параллакс. Для Солнца и планет эти поправки малы и на практике их квадратами можно пренебречь. В случае наблюдений Луны параллакс достигает большой величины, и при редукации необходимо учитывать в общих формулах поправок члены третьего порядка; для ИСЗ параллакс настолько значителен, что необходимо применять точные формулы учета параллакса, основанные на знании истинного положения наблюдателя относительно центра масс Земли.

**Геоцентрический (суточный) параллакс.** При вычислении поправки за параллакс принимают

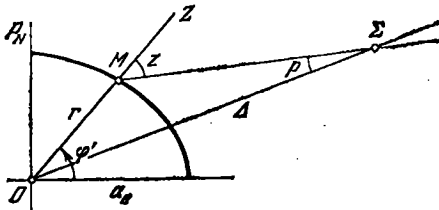


Рис. 50. Суточный параллакс.

элементы — экваториальный радиус  $a_e$  и сжатие  $\alpha$  — определенного земного сфероида (например, земного сфероида Ф. Н. Красовского, характеризующегося элементами  $a_e = 6378245$  м,  $\alpha = 1/298,3$ ).

Если  $M\Sigma$  и  $O\Sigma$  — соответственно топоцентрическое и геоцентрическое на-

правления на объект  $\Sigma$  (рис. 50), то из треугольника  $OM\Sigma$  имеем

$$\sin p = \frac{r}{a_e} \frac{a_e}{\Delta} \sin z = \rho \frac{a_e}{\Delta} \sin z,$$

где  $z$  — зенитное расстояние объекта  $\Sigma$  относительно геоцентрического зенита точки наблюдения,  $\Delta$  — геоцентрическое расстояние объекта  $\Sigma$ ,  $r/a_e = \rho \leq 1$ .

Для точек экватора  $\rho = 1$ , и потому

$$\sin p = \frac{a_e}{\Delta} \sin z.$$

Максимальное значение параллакса,  $p_{\max} = p$ , достигается при  $z = 90^\circ$ , когда объект находится на горизонте места наблю-

дения. Это значение  $\pi$  называется *горизонтальным экваториальным параллаксом* и измеряется углом, под которым из центра небесного объекта, лежащего на горизонте точки экватора, виден экваториальный радиус Земли  $a_e$ . Имеем

$$\sin \pi = \frac{a_e}{\Delta}.$$

Таким образом,

$$\sin p = \rho \sin \pi \sin z. \tag{1.2.43}$$

Если ввести *средний экваториальный горизонтальный параллакс* объекта  $\pi_0$  на *среднем* геоцентрическом расстоянии этого объекта  $\Delta_0$  формулой

$$\sin \pi_0 = \frac{a_e}{\Delta_0},$$

то для  $p$  получим

$$\sin p = \rho \frac{\Delta_0}{\Delta} \sin \pi_0 \sin z. \tag{1.2.44}$$

**§ 2.17. Учет суточного параллакса в горизонтальной системе координат**

Координаты  $x_0, y_0, z_0$  места наблюдения  $O$  — начала топоцентрической горизонтальной системы координат  $OX'Y'Z'$  — относительно *геоцентрической* горизонтальной системы координат  $CXYZ_g$  (рис. 51) равны

$$\begin{aligned} x_0 &= r \sin(\varphi - \varphi'), \\ y_0 &= 0, \\ z_0 &= r \cos(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

*Топоцентрические* горизонтальные координаты  $\Delta', z', A'$  небесного объекта связаны с *геоцентрическими* координатами следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \sin z' \cos A' &= \Delta \sin z \cos A - r \sin(\varphi - \varphi'), \\ \Delta' \sin z' \sin A' &= \Delta \sin z \sin A, \\ \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z - r \cos(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \right\} \tag{1.2.45}$$

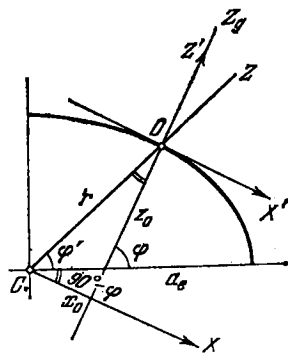


Рис. 51. Учет суточного параллакса в горизонтальных координатах.

Если известны  $\Delta, z, A, r, \varphi$ , то из формул (1.2.45) однозначно определяются  $\Delta', z', A'$ . Аналогично решается и обратная задача.

Можно также использовать и следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(A' - A) &= \frac{m \sin A}{1 - m \cos A}, \\ \operatorname{tg}(z' - z) &= \frac{n \sin(z - \gamma)}{1 - n \cos(z - \gamma)}, \\ \Delta' - \Delta &= \Delta \frac{\sin(z - \gamma) - \sin(z' - \gamma)}{\sin(z' - \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\rho \sin \pi \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z}, \\ n &= \frac{\rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.47)$$

Угол  $\gamma$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') \cos \frac{A + A'}{2} \operatorname{sec} \frac{A - A'}{2}. \quad (1.2.48)$$

При вычислении разности  $z' - z$  в первом приближении следует положить

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A' = (\varphi - \varphi') \cos A.$$

Точные формулы (1.2.45) — (1.2.48) применяются при редукции наблюдений Луны и объектов, движущихся на небольших геоцентрических расстояниях.

Для достаточно удаленных от Земли небесных тел (больших и малых планет, комет) учет суточного параллакса осуществляется по приближенным формулам

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= (\varphi - \varphi') \cos A, \\ A' - A &= \rho \pi \sin(\varphi - \varphi') \sin A \operatorname{cosec} z = \rho \pi \sin(\varphi - \varphi') \sin A \sec h, \\ z' - z &= h - h' = \rho \pi \sin(z - \gamma) = \rho \pi \cos(h + \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (1.2.49)$$

или

$$\left. \begin{aligned} A' - A &= \rho \pi \sin(\varphi - \varphi') \sin A' \operatorname{cosec} z' = \rho \pi \sin(\varphi - \varphi') \sin A' \sec h', \\ z' - z &= h - h' = \rho \pi \sin(z' - \gamma) = \rho \pi \cos(h' + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.50)$$

### § 2.18. Формулы учета суточного параллакса в экваториальной системе координат

Координаты  $X_0, Y_0, Z_0$  точки наблюдения  $O$  в прямоугольной геоцентрической экваториальной системе координат  $CXYZ$  (ось  $CX$  которой направлена в точку запада  $W$ , ось  $CY$  — на  $90^\circ$  к югу, ось  $CZ$  — в северный полюс мира  $P_N$ ; рис. 52) могут быть



Если известны геоцентрические экваториальные координаты объекта  $\alpha, \delta, \Delta$ , то

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{\rho \cos \varphi' \sin \pi \sin(s - \alpha)}{\cos \delta - \rho \cos \varphi' \sin \pi \cos(s - \alpha)}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sec \left[ s - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') \right], \end{aligned} \right\} (1.2.54)$$

а уравнение для  $\delta' - \delta$  не изменяется.

Приведение топоцентрических координат  $\alpha', \delta'$  к геоцентрическим  $\alpha, \delta$  удобно выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha - \alpha') &= \rho \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta \sin(s - \alpha'), \\ \sin(\delta - \delta') &= \rho \sin \pi \sin \varphi' \operatorname{cosec} \gamma \sin(\gamma - \delta'), \end{aligned} \right\} (1.2.55)$$

где вспомогательный угол  $\gamma$  определяется по формуле (1.2.54).

Как уже было отмечено выше, приведенные формулы предназначены для точного учета суточного параллакса в координатах Луны и ИСЗ, движущихся на небольших геоцентрических расстояниях.

### § 2.19. Формулы учета суточного параллакса в координатах Солнца и планет

В случаях редукции за суточный параллакс наблюдений Солнца, больших и малых планет, комет формулы приведения, указанные в предыдущих параграфах, можно существенно упростить, ограничиваясь членами первого порядка.

Для экваториальных координат  $\alpha, \delta$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \pi \rho \cos \varphi' \sin t' \sec \delta', \\ \delta - \delta' &= \pi (\rho \sin \varphi' \cos \delta' - \rho \cos \varphi' \sin \delta' \cos t'), \\ \Delta - \Delta' &= \rho \sin \varphi' \sin \delta' + \rho \cos \varphi' \cos \delta' \cos t'. \end{aligned} \right\} (1.2.56)$$

В формулах (1.2.56) топоцентрические координаты небесного объекта можно заменить геоцентрическими координатами.

Горизонтальный экваториальный параллакс  $\pi$  небесного объекта на геоцентрическом расстоянии  $\Delta$  можно выразить через *средний горизонтальный экваториальный параллакс Солнца*  $\pi_{\odot}$  соотношением

$$\pi = \frac{\pi_{\odot}}{\Delta}, \quad (1.2.57)$$

где геоцентрическое расстояние  $\Delta$  выражено в а. е., а горизонтальный экваториальный параллакс Солнца  $\pi_{\odot}$  определяется формулой

$$\sin \pi_{\odot} = \frac{a_e}{A} \quad (A = 1 \text{ а. е.}). \quad (1.2.58)$$

Если принять (XII Генеральная ассамблея МАС, 1964)

$$a_e = 6\,378\,160 \text{ м},$$

$$A = 149,6 \cdot 10^9 \text{ м},$$

то [37]

$$\pi_{\odot} = 8'',794.$$

Если геоцентрическое расстояние  $\Delta$  небесного объекта неизвестно, как это часто бывает на первых этапах работы по определению орбит малых планет и комет, то для каждого наблюдения вычисляют *параллактические множители*  $\rho_{\alpha}\Delta$  и  $\rho_{\delta}\Delta$ , применяя формулы

$$\rho_{\alpha}\Delta = 8'',794\rho \cos \varphi' \sin t \sec \delta = 0^s,5863\rho \cos \varphi' \sin t \sec \delta,$$

$$\rho_{\delta}\Delta = 8'',794 (\rho \sin \varphi' \cos \delta - \rho \cos \varphi' \sin \delta \cos t),$$

где

$$t = s - \alpha = S_0 + (1 + \mu)T_{\text{УТ}} - \lambda - \alpha.$$

$S_0$  означает звездное гриничское время в  $0^{\text{h}}$  всемирного времени даты наблюдения,  $T_{\text{УТ}}$  — момент наблюдения по всемирному времени,  $\lambda$  — долготу наблюдения, положительную к западу от Гринича,

$$1 + \mu = 1,0027379093.$$

Величины  $\rho \cos \varphi'$  и  $\rho \sin \varphi'$  можно вычислить по формулам (1.1.067).

После определения геоцентрического расстояния объекта  $\Delta$  поправки за параллакс вычисляются по формулам

$$\Delta\alpha = \frac{(\rho_{\alpha}\Delta)}{\Delta}, \quad \Delta\delta = \frac{(\rho_{\delta}\Delta)}{\Delta}.$$

Второй способ введения поправок за параллакс в прямоугольные геоцентрические координаты объекта заключается в редукции геоцентрических координат Солнца  $X_{\odot}$ ,  $Y_{\odot}$ ,  $Z_{\odot}$  к месту наблюдения; для этого вычисляют

$$\Delta X_{\odot} = -a_e \rho \cos \varphi' \cos s = \Delta_{xy} \cos s,$$

$$\Delta Y_{\odot} = -a_e \rho \cos \varphi' \sin s = \Delta_{xy} \sin s,$$

$$\Delta Z_{\odot} = -a_e \rho \sin \varphi' = \Delta Z,$$

где экваториальный радиус Земли  $a_e = 426,64 \cdot 10^{-7}$  а. е.

Величины  $\Delta_{xy}$  и  $\Delta Z$  опубликованы в «Астрономическом Ежегоднике СССР на 1941 год» для 216 обсерваторий мира (по элементам земного сфероида Хэйфорда) и в «Астрономическом Ежегоднике СССР на 1954 год» для 312 обсерваторий (элементы земного сфероида Ф. Н. Красовского). Эти же величины, а также значения  $\rho \cos \varphi'$ ,  $\rho \sin \varphi'$  можно найти в выпусках



ежегодников «Astronomical Ephemeris», «American Ephemeris & Nautical Almanac», «Connaissance des Temps».

Вычислив геоцентрические координаты Солнца  $X_{\odot}$ ,  $Y_{\odot}$ ,  $Z_{\odot}$  на момент наблюдения  $T_{\text{UT}} + \Delta T$ , где  $\Delta T$  — поправка за эфемеридное время, находим значения топоцентрических координат Солнца по формулам

$$X'_{\odot} = X_{\odot} + \Delta X_{\odot},$$

$$Y'_{\odot} = Y_{\odot} + \Delta Y_{\odot},$$

$$Z'_{\odot} = Z_{\odot} + \Delta Z_{\odot}.$$

Так как прямоугольные координаты Солнца  $X_{\odot}$ ,  $Y_{\odot}$ ,  $Z_{\odot}$  относятся обычно к системе отсчета, связанной со средним равноденствием и экватором стандартной эпохи 1950,0, то прямоугольные экваториальные координаты места наблюдения  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  необходимо привести к той же системе отсчета поворотом системы координат  $CXYZ$  вокруг оси  $CZ$  на угол  $6^{\text{h}} - s$  (ось  $CX$  проходит через точку весны  $\Upsilon_{1950,0}$ ) и учетом прецессии в сферических координатах  $\varphi'$ ,  $s$  от эпохи 1950,0 до момента наблюдения  $t$ . Для этого можно применить следующие приближенные формулы:

$$x_{0, 1950,0} = \rho \cos \varphi' \cos [s - \bar{m}(t - 1950,0)] + \bar{n}(t - 1950,0) \rho \sin \varphi',$$

$$y_{0, 1950,0} = \rho \cos \varphi' \sin [s - \bar{m}(t - 1950,0)],$$

$$z_{0, 1950,0} = \rho \sin \varphi' - \bar{n}(t - 1950,0) \rho \cos \varphi' \cos s.$$

Промежуток времени  $t - 1950,0$  необходимо выразить в тропических годах по формуле

$$[t - 1950,0]_{\text{троп. год}} = \frac{\text{JD}(t) - 2433282,4234}{365,2422};$$

прецессионные величины  $\bar{m}$  и  $\bar{n}$  вычисляются по формулам Ньюкома (1.2.10) на среднюю эпоху  $\bar{t} = \frac{1}{2}(t + 1950,0)$ , т. е. в этих формулах время  $T$  необходимо вычислять по формуле

$$T = \frac{\text{JD}(t) - 2396758,2034}{78048,44},$$

где  $\text{JD}(t)$  — юлианская дата наблюдения.

### § 2.20. Формулы учета суточного параллакса в системе эклиптических координат

Формулы поправок за суточный параллакс к эклиптическим геоцентрическим координатам  $\Delta$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  получаются заменой в формулах поправок к экваториальным координатам величин  $\alpha$ ,  $\delta$  на  $\lambda$ ,  $\beta$  и выражением экваториальных координат места наблюде-

ния  $\rho$ ,  $\varphi'$ ,  $s$  через эллиптические координаты  $\rho$ ,  $\Phi$ ,  $\Sigma$  посредством формул

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' \cos s &= \cos \Phi \cos \Sigma, \\ \cos \varphi' \sin s &= \cos \Phi \sin \Sigma \cos \varepsilon - \sin \Phi \sin \varepsilon, \\ \sin \varphi' &= \cos \Phi \sin \Sigma \sin \varepsilon + \sin \Phi \cos \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.59)$$

где  $\varepsilon$  означает истинный или средний наклон эклиптики к экватору.

Таким образом, с учетом (1.2.59) имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\lambda - \lambda') &= \frac{\rho \cos \Phi \sin \pi \sin(\Sigma - \lambda)}{\cos \beta - \rho \cos \Phi \sin \pi \cos(\Sigma - \lambda)}, \\ \operatorname{tg}(\beta - \beta') &= \frac{\rho \sin \pi \sin \Phi \operatorname{cosec} \gamma \sin(\beta - \gamma)}{1 - \rho \sin \pi \sin \Phi \operatorname{cosec} \gamma \cos(\beta - \gamma)}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \Phi \cos \frac{1}{2}(\lambda - \lambda') \sec \left[ \Sigma - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda') \right], \\ \frac{\Delta'}{\Delta} &= \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta' - \gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.60)$$

Для обратного приведения (от топоцентрических координат объекта к геоцентрическим) служат формулы

$$\begin{aligned} \sin(\lambda - \lambda') &= \rho \sin \pi \cos \Phi \sec \beta \sin(\Sigma - \lambda'), \\ \sin(\beta - \beta') &= \rho \sin \pi \sin \Phi \operatorname{cosec} \gamma \sin(\gamma - \beta'). \end{aligned}$$

Соответствующие приближенные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda' &= \frac{\rho \pi \cos \Phi}{\Delta' \cos \beta'} \sin(\Sigma - \lambda'), \\ \beta - \beta' &= -\frac{\rho \pi \cos \Phi}{\Delta'} \sin \beta' \cos(\Sigma - \lambda') + \frac{\rho \pi}{\Delta'} \sin \Phi \cos \beta', \\ \Delta - \Delta' &= \rho \pi \sin 1'' \cos \Phi \cos \beta' \cos(\Sigma - \lambda') + \rho \pi \sin 1'' \sin \Phi \sin \beta'. \end{aligned}$$

Если геоцентрическое расстояние  $\Delta$  небесного объекта неизвестно, то точный учет суточного параллакса в эллиптических координатах можно произвести при помощи приема Гаусса — *перехода к фиктивному месту наблюдения* [40].

Учет годовичного параллакса рассмотрен в § 2.07.

## § 2.21. Астрономическая рефракция

*Астрономической рефракцией* называется явление преломления в атмосфере Земли светового луча, идущего от небесного объекта, расположенного вне пределов земной атмосферы. Астрономическая рефракция обуславливает отклонение

видимого направления на объект  $O\Sigma'$  от истинного направления на этот объект  $O\Sigma$ , измеряемое углом  $R$ , который называется *углом рефракции*, или просто *рефракцией* (рис. 53).

Атмосферной рефракцией  $r$  называется аналогичное явление, наблюдаемое в случае нахождения небесного объекта  $\sigma$  в пределах эффективной атмосферы Земли. Разность между астрономической и атмосферной рефракциями называют *дифференциальной рефракцией* \*)  $\rho$ .

Дифференциальная рефракция  $\rho$  равна (рис. 53)

$$\rho = R - r.$$

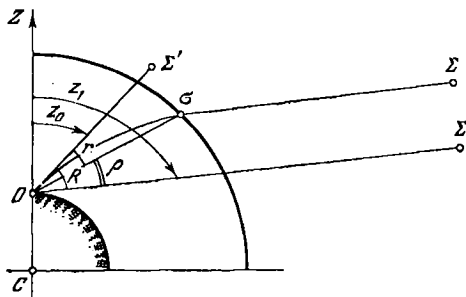


Рис. 53. Астрономическая рефракция, атмосферная и дифференциальная рефракция.

Предельный случай атмосферной рефракции — при наблюдении земного предмета на *видимом* го-

ризонте — называется *геодезической* рефракцией.

Наблюдения небесных объектов при помощи радиотехнических средств измерения отягощены влиянием *ионосферной*, или *электронной* рефракции, обусловленной изменениями направления при распространении радиоволн в атмосфере и ионосфере Земли.

Ионосферная рефракция радиолуча вычисляется на основе эмпирической модели ионосферы Земли, соответствующей определенной системе геомагнитных координат (координаты северного геомагнитного полюса  $\lambda = 291^\circ$ ,  $\varphi = 79^\circ$ ). При радиолокации небесных объектов поправка к расстоянию в  $m$   $\Delta\rho$  при различных высотах  $h$  (углах возвышения) для модели ионосферы, принятой в Лаборатории реактивного движения JPL (США), может быть задана таблицей 8.

Т а б л и ц а 8

$h$	$\Delta\rho$	$h$	$\Delta\rho$	$h$	$\Delta\rho$
$0^\circ$	23,435	$40^\circ$	9,090	$70^\circ$	6,423
10	19,608	50	7,816	80	6,008
20	14,462	60	7,001	90	6,008
30	11,129				

\*) Она отличается от дифференциальной рефракции в астрометрическом смысле.

Если  $z_0$  — *наблюдаемое* зенитное расстояние небесного объекта  $\Sigma$ ,  $z_1$  — его *истинное* зенитное расстояние, то астрономическая рефракция  $R$  в точке наблюдения  $O$  на поверхности Земли (см. рис. 53) равна

$$R = z_1 - z_0. \quad (1.2.61)$$

Таким образом, для приведения *видимого* зенитного расстояния  $z_0$  к *истинному*  $z_1$  необходимо *прибавить* рефракцию  $R$ :

$$z_1 = z_0 + R. \quad (1.2.62)$$

Для рефракции  $R$  выведена приближенная формула

$$R = 60'',343 \frac{B}{760} \cdot \frac{273}{t^\circ + 273} \operatorname{tg} z_0, \quad (1.2.63)$$

дающая хорошее приближение при умеренных зенитных расстояниях  $z_0 \leq 60^\circ$ , но непригодная для редукции наблюдений, произведенных вблизи горизонта.  $B$  — давление в мм ртутного столба.

Формула (1.2.63) выведена в предположении о плоском раслоении атмосферы Земли и соответствует закону Гладстона

$$n - 1 = c\delta,$$

где

$$c = \frac{n_0 - 1}{\delta_0} = 0,2260,$$

$\delta$  — плотность воздуха в слое с показателем преломления  $n$ ,  $\delta_0$  и  $n_0$  — соответственно плотность и показатель преломления воздуха в приземном слое.

В теории астрономической рефракции второго приближения, учитывающей сферичность слоев воздуха равной плотности, выводится *интеграл рефракции* (рис. 54):

$$R = \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{\frac{dn}{n}}{\sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z_0}}, \quad (1.2.64)$$

где  $r_0 = 6371$  км — средний радиус Земли,  $n_0$  — показатель преломления воздуха в приземном слое на уровне места наблюдения  $O$ ,  $r$  — геоцентрический радиус сферической границы раздела слоя воздуха с показателем преломления  $n$ .

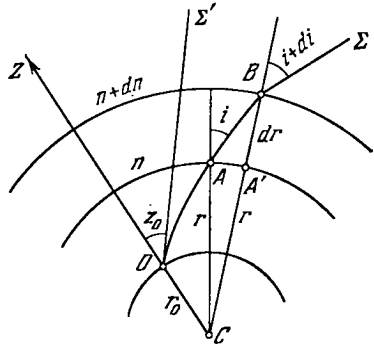


Рис. 54. Астрономическая рефракция.

С точностью до малых величин второго порядка имеет место формула Лапласа

$$R = R_0(1 - \beta_0) \operatorname{tg} z_0 - R_0 \left( \beta_0 - \frac{1}{2} R_0 \right) \operatorname{tg}^3 z_0, \quad (1.2.65)$$

где  $\beta_0$  — высота однородной атмосферы плотности  $\delta_0$ , выраженная в средних радиусах  $r_0$  Земли

$$\beta_0 = \frac{H_0}{r_0}. \quad (1.2.66)$$

При нормальных условиях  $P = 1033,3 \text{ г/см}^2$ ;  $\delta_0 = 0,0012932 \text{ г/см}^3$  (\*),  $H_0 = 7990 \text{ км}$ :

$$R_0^\circ \text{ с. } 760 \text{ мм рт. ст.} = 60'',27 \operatorname{tg} z_0 - 0'',0669 \operatorname{tg}^3 z_0. \quad (1.2.67)$$

На основании формулы (1.2.67) составлена таблица значений нормальной рефракции для ряда значений наблюдаемого зенитного расстояния  $z_0$  [4] (табл. 9).

Таблица 9

$z_0$ , град.	$R_0^\circ$ , 760 мм	$z_0$ , град.	$R_0^\circ$ , 760 мм	$z_0$ , град.	$R_0^\circ$ , 760 мм
0	0'',00	30	0'34'',78	60	1'44'',05
10	10,63	40	50,53	70	2'44,24
20	21,93	50	1'11,69	75	3'41,61

Коэффициенты формулы Лапласа  $R_0(1 - \beta_0)$  и  $R_0 \left( \beta_0 - \frac{1}{2} R_0 \right)$  определяются как функции длины волны  $\lambda$  излучения (табл. 10).

Таблица 10

$\lambda$ , м.мк	$R_0(1 - \beta_0)$	$R_0 \left( \beta_0 - \frac{1}{2} R_0 \right)$	$\lambda$ , м.мк	$R_0(1 - \beta_0)$	$R_0 \left( \beta_0 - \frac{1}{2} R_0 \right)$
400	61'',43	0'',0680	600	60'',18	0'',0668
450	60,95	0,0675	650	60,04	0,0666
500	60,61	0,0672	700	59,92	0,0665
550	60,37	0,0670			

Астрономическая рефракция меняется в зависимости от длины волны  $\lambda$  излучения светил в области фотографических лучей

\*) Согласно исследованиям Реньо в Париже ( $\varphi = 48^\circ 50'$ ). Чтобы перейти к значению  $\delta_0$  в Пулково при тех же метеоусловиях, необходимо умножить эту величину на отношение  $981,90/980,97$ , что дает  $\delta_0 = 0,0012944 \text{ г/см}^3$ .

быстрее, чем в визуальной области. При наблюдении на одинаковом зенитном расстоянии  $z_0$  двух звезд, эффективные длины волн излучения которых отличаются на 5 мкм, разности рефракций в фотографических лучах ( $\lambda = 430$  мкм) и визуальных лучах ( $\lambda = 575$  мкм) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 430 \text{ мкм}, \quad \Delta R &= -0'',0452 \operatorname{tg} z_0 + 0'',000043 \operatorname{tg}^3 z_0, \\ \lambda = 575 \text{ мкм}, \quad \Delta R &= -0'',0183 \operatorname{tg} z_0 + 0'',000018 \operatorname{tg}^3 z_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.68)$$

Разности  $\Delta z_1$  между исправленными зенитными расстояниями двух звезд, наблюдаемых на одинаковом зенитном расстоянии  $z_0$ , при различии эффективных длин волн на 5 мкм в зависимости от  $z_0$ , приведены в табл. 11.

Таблица 11

$z_0$ , град	$\Delta z_1$ (фот)	$\Delta z_1$ (виз)	$z_0$ , град	$\Delta z_1$ (фот)	$\Delta z_1$ (виз)
30	0'',026	0'',010	75	0'',167	0'',068
60	0,078	0,032	80	0,249	0,104
70	0,124	0,051			

Приведенной таблицей можно воспользоваться для оценки порядка величины погрешности, допускаемой при фотографических методах определения положения небесных объектов, например малых планет и ИСЗ, из-за отличия их цветовых характеристик от известных характеристик звезд сравнения.

Применение формул, выведенных в теории астрономической рефракции для больших  $z_0$  ( $z_0 > 70^\circ$ ) и основанных на функциях Крампа — Радо  $\Psi$  и  $\Phi$  (см. [1], [7], [41] — [43]), позволяет продолжить таблицу значений нормальной рефракции  $R_{0^\circ, 760 \text{ мкм}}$  для зенитных расстояний  $z_0 > 75^\circ$  (см. табл. 12).

Таблица 12

$z_0$	$R_{0^\circ, 760 \text{ мкм}}$	$z_0$	$R_{0^\circ, 760 \text{ мкм}}$	$z_0$	$R_{0^\circ, 760 \text{ мкм}}$
78°	4' 37'',1	85°	10' 16'',0	88,5	22' 15'',4 ( $\lambda = 5750 \text{ \AA}$ )
80	5 30,8	86	12 15,5	89,0	26 03,8
82	6 48,1	87	15 04,9	89,5	31 04,9
84	8 48,0	88	19 18,2	90	37 52

В практических расчетах широкое распространение получили «Пулковские таблицы рефракции» [44], основанные на теории Гюльдена.

### § 2.22. Формулы учета рефракции в координатах небесных объектов

Астрономическая рефракция влияет только на зенитное расстояние  $z$  небесного объекта, азимут  $A$  остается неизменным. Поэтому

$$z_1 = z_0 + R, \quad A_1 = A_0. \quad (1.2.69)$$

Влияние астрономической рефракции на экваториальные координаты  $\alpha$ ,  $\delta$  небесного объекта учитывается по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 - \delta_0 &= \mp R \cos q, \\ (\alpha_1 - \alpha_0) \cos \delta &= \mp R \sin q, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.70)$$

где  $q$  — параллактический угол. Для  $\Delta\delta$  верхний знак берут для северных широт ( $\varphi > 0$ ), нижний — для южных широт ( $\varphi < 0$ ); в формуле для  $\Delta\alpha \cos \delta$  верхний знак соответствует условию  $0^h < t < 12^h$ , нижний — условию  $12^h < t < 24^h$ , где  $t$  — часовой угол объекта.

Рефракция в параллактическом угле  $q$  вычисляется по формуле

$$q_1 - q_0 = \mp R \sin q \operatorname{tg} \delta \quad (1.2.71)$$

(знак минус для  $\varphi > 0$ , плюс — для  $\varphi < 0$ ).

Если разности *истинных* координат  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  объектов, расположенных достаточно близко на небесной сфере, суть  $\Delta z$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$ , а разности *наблюдаемых* координат  $z'$ ,  $\alpha'$ ,  $\delta'$ , суть  $\Delta z'$ ,  $\Delta\alpha'$ ,  $\Delta\delta'$ , то с точностью до малых первого порядка имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= \Delta z' (1 + k \sec^2 z'), \\ \Delta\alpha &= \Delta\alpha' + P_\alpha \Delta\alpha' + Q_\alpha \Delta\delta', \\ \Delta\delta &= \Delta\delta' + P_\delta \Delta\alpha' + Q_\delta \Delta\delta', \end{aligned} \right\} \quad (1.2.72)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_\alpha &= k(1 - \operatorname{tg} z' \cos q \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg}^2 z' \sin^2 q), \\ Q_\alpha &= k(\operatorname{tg}^2 z' \sin q \cos q - \operatorname{tg} z' \sin q \operatorname{tg} \delta') \sec \delta', \\ P_\delta &= k(\operatorname{tg}^2 z' \sin q \cos q \cos \delta' + \operatorname{tg} z' \sin q \sin \delta'), \\ Q_\delta &= k(1 + \operatorname{tg}^2 z' \cos^2 q), \quad k = k_0 \frac{B}{760} \frac{273^\circ}{t^\circ + 273^\circ}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.73)$$

Влияние рефракции на угловое расстояние  $s$  и позиционный угол  $p_1$  учитывается поправками, вычисляемыми по формулам

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= -k \operatorname{tg} s \frac{1 + \operatorname{tg}^2 z_1 \cos^2(p_1 - q)}{1 + \operatorname{tg} s \operatorname{tg} z_1 \cos(p_1 - q)}, \\ \Delta p_1 &= k \left[ \sin(p_1 - q) \operatorname{tg} z_1 \frac{\operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} s} + \operatorname{tg} \delta \sin q \operatorname{tg} z_1 \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.2.74)$$

где

$$\operatorname{tg} \sigma = \cos(p_1 - q) \operatorname{tg} z_1, \quad R = k \operatorname{tg} z_1,$$

а величина  $k$  определяется соотношением

$$k = k_0 \frac{B}{760} \cdot \frac{273}{t^\circ + 273},$$

в котором  $B$  — атмосферное давление в мм рт. ст.,  $t^\circ$  — температура воздуха в  $^\circ\text{C}$ .

Величина  $k_0$  табулирована и ее значения приведены в табл. 13.

Таблица 13

$z_0$	$k_0$		$z_0$	$k_0$		$z_0$	$k_0$	
	сек. дуги	рад.		сек. дуги	рад.		сек. дуги	рад.
0°	60,23	0,0002920	45°	60,17	0,0002917	70°	59,74	0,0002896
10	60,23	2920	60	60,04	2911	75	59,34	2877
20	60,22	2920	65	59,93	2906	80	58,27	2825
30	60,21	2919						

Дифференциальные изменения в прямом восхождении и склонении можно выразить через  $\Delta s$  и  $\Delta p_1$ , пользуясь формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 &= \sin p_1 \Delta s + s \cos p_1 \Delta p_1, \\ \Delta(\delta_2 - \delta_1) &= \cos p_1 \Delta s - s \sin p_1 \Delta p_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.75)$$

Для исправления за рефракцию *наблюдаемого* углового расстояния  $s'$  между двумя небесными объектами  $P_1$  и  $P_2$ , широко разделенными на небесной сфере, можно воспользоваться формулой

$$(s - s') \sin s = R_2 (\cos z_1 \operatorname{cosec} z_2 - \cos s \operatorname{ctg} z_2) + \\ + R_1 (\cos z_2 \operatorname{cosec} z_1 - \cos s \operatorname{ctg} z_1), \quad (1.2.76)$$

в которой  $R_1 = z_1 - z'_1$ ,  $R_2 = z_2 - z'_2$ ,  $s$  — истинное, не искаженное рефракцией  $R$ , угловое расстояние.

### § 2.23. Рефракция при наблюдении небесных объектов, расположенных на конечных расстояниях от Земли

Исправленное за рефракцию  $R$  зенитное расстояние  $z_1$  равно  $z_1 = z_0 + R$ . Однако истинное геометрическое зенитное расстояние  $z$  небесного объекта, движущегося в непосредственной



близости от Земли (Луна, ИСЗ), отличается от исправленного за рефракцию  $R$  зенитного расстояния  $z_1$  (рис. 55).

Истинное зенитное расстояние  $z$  объекта  $L$  равно углу  $ZOL$ . Разность  $\zeta = z_1 - z$  равна внутреннему углу  $O'LO$  треугольника  $LO'O$ , определяющему

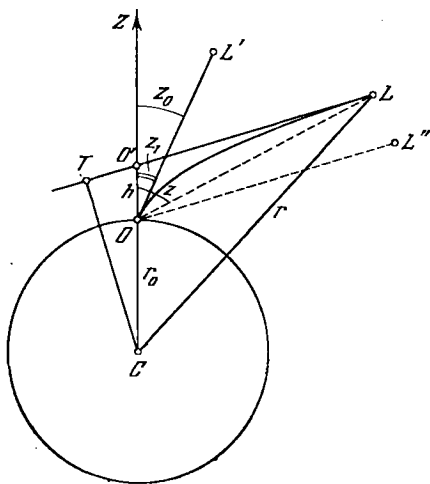


Рис. 55. Рефракционный параллакс.

параллактическое изменение зенитного расстояния  $z$  небесного объекта  $L$  при перемещении наблюдателя из точки  $O$  в точку  $O'$ , т. е. при его подъеме на высоту  $h$ . Величина  $h$  для различных зенитных расстояний  $z_0$  может быть задана таблицей (табл. 14), составленной для нормальных условий ( $t^\circ = 0^\circ \text{С}$ ,  $B = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ) и для  $\lambda = 575 \text{ мкм}$  (виз.) [4], [7].

Величина  $\zeta$  называется *рефракционным параллаксом*, или *параллактической рефракцией*.

Если объект движется на расстоянии  $\Delta$  от точки наблюдения, то рефракционный параллакс  $\zeta$  можно вычислить по формуле

$$\sin \zeta = \frac{r_0}{\Delta} (n_0 \sin z_0 - \sin z_1) = \pi (n_0 \sin z_0 - \sin z_1), \quad (1.2.77)$$

где  $\pi$  — горизонтальный экваториальный параллакс объекта,  $n_0 = 1,000283$  — показатель преломления воздуха при  $t^\circ = +10^\circ \text{С}$  и  $B = 762 \text{ мм рт. ст.}$

Величина  $\zeta$  для Луны ( $\pi_\zeta = 57'03''$ ) достигает  $\sim 1'',2$ .

Таблица 14

$z_0$	$h$ (м)	$z_0$	$h$ (м)	$z_0$	$h$ (м)	$z_0$	$h$ (м)
$0^\circ$	2,3	$70^\circ$	20,0	$83^\circ$	132	$88^\circ$	715
30	3,1	75	34,9	84	171	88,5	917
40	4,0	78	51	85	228	89	1204
50	5,7	80	71	86	316	89,5	1622
60	9,4	82	105	87	461	90	2251

Для вычисления  $\zeta$  в случае ИСЗ удобна формула Карского [45]

$$\zeta'' = \frac{206264'',8 (n_0 - 1) \sin z_0 - R'' \cos z_0 + \frac{R''^2}{206265} \frac{1}{2} \sin z_0}{\sqrt{\cos^2 z_1 + \sigma} - \cos z_1}, \quad (1.2.78)$$

где

$$\sigma = \left( \frac{r_0 + H}{r_0} \right)^2 - 1.$$

Здесь  $H$  означает высоту объекта над поверхностью Земли. Рефракция  $R''$  вычисляется для условий ( $t^\circ$  С и  $B$ ) в момент наблюдения, показатель преломления воздуха  $n_0$  для этих же условий находится по формуле

$$n_0 - 1 = (n_{0^\circ \text{С, } 760 \text{ мм}} - 1) \frac{B}{273^\circ + t^\circ} = 1,05 \cdot 10^{-4} \frac{B}{273^\circ + t^\circ}. \quad (1.2.79)$$

## § 2.24. Дифференциальная прецессия и нутация.

### Дифференциальная абберация и дифференциальный параллакс

Поворот осей системы координат, обусловленный прецессией (и нутацией), изменяет *относительные* координаты двух близких точек на небесной сфере. В частности, изменяются позиционные углы звезды, измеренные относительно других звезд, лежащих в ее окрестности.

Если  $t$  — эпоха наблюдений,  $t_0$  — эпоха, к которой необходимо отнести наблюдаемое значение позиционного угла  $\rho$ , то соответствующая поправка равна

$$\Delta \rho = -n \sec \delta \sin \alpha \cdot (t - t_0), \quad (1.2.80)$$

где  $t - t_0$  выражается в тропических годах,  $n = 0^\circ,0056$ .

В малой области небесной сферы поправки за прецессию и нутацию к координатам объектов, обладающих собственным движением, мало отличаются от поправок к координатам соседних звезд. Так как координаты звезд даны в системе среднего экватора и равноденствия эпохи 1950,0 или начала другого бесселева года, то координаты объекта с собственным движением, отнесенные к этой же системе, получают исправлением за *дифференциальную прецессию и нутацию* поправками:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\Delta\alpha) &= g \cos(G + \bar{\alpha}) \operatorname{tg} \bar{\delta} \Delta\alpha + g \sin(G + \bar{\alpha}) \sec^2 \bar{\delta} \Delta\delta, \\ \Delta(\Delta\delta) &= -g \sin(G + \bar{\alpha}) \Delta\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.80a)$$

Дифференциальные координаты небесного объекта, движущегося относительно звезды сравнения, отягощены влиянием *дифференциальной абберации*. Ее учет производится *прибавле-*

нием к наблюдаемым разностям координат  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  (в смысле «объект минус звезда») следующих поправок:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\Delta\alpha) &= -h \cos(H + \alpha) \sec \delta \Delta\alpha - h \sin(H + \alpha) \sec \delta \operatorname{tg} \delta \Delta\delta, \\ \Delta(\Delta\delta) &= h \sin(H + \alpha) \sin \delta \Delta\alpha - h \cos(H + \alpha) \cos \delta \Delta\delta. \end{aligned} \right\} (1.2.81)$$

Для редукиции *наблюдаемого* топоцентрического углового расстояния  $s'$  между двумя небесными объектами к *геоцентрическому* угловому расстоянию  $s$  между ними применяется формула

$$\cos s = \cos(z_2 - z_1) - [\cos(z'_2 - z'_1) - \cos s'] \frac{\sin z_1 \sin z_2}{\sin z'_1 \sin z'_2}, \quad (1.2.82)$$

где  $z_1, z_2$  — геоцентрические зенитные расстояния объектов,  $z'_1, z'_2$  — топоцентрические зенитные расстояния.

Для небесных объектов, проекции которых на небесной сфере расположены очень близко друг к другу, дифференциальный параллакс в прямом восхождении  $\alpha$ , склонении  $\delta$  и геоцентрическом расстоянии  $\Delta$  определяется равенствами

$$\left. \begin{aligned} d(\alpha - \alpha') &= -\frac{\alpha - \alpha'}{206265} \left[ \operatorname{ctg} \delta' (\alpha - \alpha') - \operatorname{tg} \delta' (\delta - \delta') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{206265}{\Delta'} (\Delta - \Delta') \right], \\ d(\delta - \delta') &= -\left[ 2(\delta - \delta') \frac{\Delta - \Delta'}{\Delta'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\delta' (\alpha - \alpha')^2 \frac{1}{206265} \right], \\ \frac{d(\Delta - \Delta')}{\Delta'} &= \frac{1}{(206265)^2} [(\delta - \delta')^2 + \cos^2 \delta' (\alpha - \alpha')^2]. \end{aligned} \right\} (1.2.83)$$

## § 2.25. Сравнение теории с наблюдениями

Главное назначение эфемерид Солнца, Луны и больших планет, публикуемых в астрономических ежегодниках, состоит в том, что они составляют основу сравнения соответствующих теорий движения с наблюдениями. С точностью до ограничений, налагаемых методами, положенными в основу разработки теории движения, эфемеридные положения планет *систематически* отличаются от действительных их положений из-за ошибок параметров теории (числовых значений астрономических постоянных, элементов орбит и масс планет). Точность вычисления эфемерид такова, что случайные ошибки округления на различных этапах вычислительной работы пренебрежимо малы по сравнению со случайными ошибками наблюдений.

Основные эфемериды астрономических ежегодников вообще дают *видимые* положения планет, отнесенные к *истинному* рав-

ноденствию даты, непосредственно сравнимые, таким образом, с наблюдениями. Поэтому достаточно ввести все необходимые редукции в *наблюденное* положение небесного объекта и сравнить его с *эфемеридным* положением этого объекта, полученным интерполированием в эфемериде на момент наблюдения, выраженный в эфемеридном времени (точнее, в шкале всемирного времени UT, исправленного введением *приближенной* поправки за эфемеридное время  $\Delta T$ , см. §§ 3.05 и 3.06). В случае *меридианных* наблюдений эти редукции слагаются из поправок за инструментальные погрешности, рефракцию, параллакс, фазу, суточную aberrацию, изменяемость широты места наблюдения (если последняя поправка не включена в поправку за параллакс).

Наблюденные положения *слабых* объектов определяются дифференциальными методами, основанными на измерении разностей между соответствующими координатами объекта и координатами звезд, лежащих в его непосредственной окрестности. При редукции фотографических наблюдений влияние дифференциальной рефракции и aberrации учитывается в *постоянных пластинки*, координаты наблюдаемого объекта получаются в том же виде, что и координаты *опорных* звезд, и отнесены к тому же равноденствию и экватору. Положения опорных звезд являются обычно *средними местами*, взятыми из некоторого фундаментального каталога (§ 2.26), поэтому *наблюденное* положение является *астрометрическим положением*, и при редукции к стандартному равноденствию эпохи 1950,0 оно непосредственно сравнимо с *астрометрической эфемеридой*. Дифференциальная прецессия и нутация *не входят* в редукцию фотографического наблюдения, однако следует учесть поправку за параллакс.

Микрометрические измерения (привязки) наблюдаемого объекта относительно соседних звезд иногда производятся визуально и определяют положение объекта, сравнимое с астрометрической эфемеридой. В этом случае необходимо, строго говоря, учесть поправки за дифференциальные различия в рефракции, aberrации, прецессии и нутации между положениями опорной звезды и объекта. Эти поправки прибавляются к положению звезды сравнения вместе с соответствующими разностями координат. Однако в большинстве практических случаев эти поправки пренебрежимо малы.

Аргументом теорий движения небесных тел, на основе которых вычисляются их эфемериды, является эфемеридное время; моменты наблюдения фиксируются при этом по всемирному времени. Вообще говоря, поправка за эфемеридное время  $\Delta T = ET - UT$  должна быть включена в число неизвестных поправок к параметрам, определяемых путем анализа остаточных

разностей в смысле «наблюденное минус вычисленное» (O—C, *observatum minus calculatum*).

Разности между вычисленным и наблюдаемым положениями объекта обычно выражены как остаточные разности в указанном выше смысле вида  $\Delta\alpha \cos \delta$  и  $\Delta\delta$ . Остаточные разности, вычисленные на промежутке времени, на котором влияние погрешностей принятых значений постоянных параметров меняется *линейно* со временем, могут быть объединены в *среднюю остаточную разность*, относящуюся к *среднему моменту наблюдения* (в *нормальное место*). Приравняв каждую из них линейной комбинации неизвестных поправок к параметрам с соответствующими коэффициентами, получим *условное уравнение*; из таких условных уравнений с соответствующими весами (вес нормального места определяется обычно числом объединенных наблюдений) образуют *систему нормальных уравнений*, решение которой определяет неизвестные поправки к параметрам (см. ч. VII, гл. 4).

При сравнении наблюдений объекта с его *геометрической* эфемеридой (при отсутствии эфемериды видимых или астрометрических положений) исправляют геометрическое положение поправкой за световой промежуток  $\tau$  (см. § 2.05), интерполируя координаты из эфемериды на момент  $t - \tau + \Delta T$ , если  $t$  — момент наблюдения по всемирному времени UT.

При сравнении с наблюдениями геоцентрических эфемерид остаточные разности O—C образуются согласно правилам, иллюстрируемым табл. 15 [36].

Таблица 15

Наблюдаемое положение в момент $t$ UT	Необходимые поправки	Эфемеридное положение	Интерполирование на момент ET
видимое	—	видимое	$t + \Delta T$
видимое	— (прецессия, нутация, годичная аберрация)	астрометрическое	$t + \Delta T$
видимое	— (прецессия, нутация)	геометрическое	$t - \tau + \Delta T$
астрометрическое	+ (прецессия, нутация, годичная аберрация)	видимое	$t + \Delta T$
астрометрическое	—	астрометрическое	$t + \Delta T$
астрометрическое	+ (годичная аберрация)	геометрическое	$t - \tau + \Delta T$

При отсутствии *геоцентрической* эфемериды можно поступить следующим образом: экваториальные прямоугольные координаты

наты Солнца  $X_{\odot}$ ,  $Y_{\odot}$ ,  $Z_{\odot}$ , вычисленные на момент  $t + \Delta T$ , складываются с эфемеридными гелиоцентрическими прямоугольными координатами объекта  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , вычисленными на момент  $t - \tau + \Delta T$ . Определяемые формулами

$$\begin{aligned}\rho \cos \alpha \cos \delta &= x + X_{\odot}, \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= y + Y_{\odot}, \\ \rho \sin \delta &= z + Z_{\odot}\end{aligned}$$

прямые восхождения  $\alpha$  и склонения  $\delta$  отличаются от соответствующих астрометрических эфемеридных значений этих координат на члены эллиптической части абберации ( $E$ -члены) и поэтому не могут быть непосредственно сравнены с наблюдаемыми астрометрическими положениями; даже если они приведены к истинному равноденствию даты, их нельзя непосредственно сравнивать с наблюдаемыми видимыми положениями.

В этом случае образование остаточных разностей следует правилу:

$$\begin{aligned}& \text{(Наблюдаемое астрометрическое положение в момент } t) \\ & \text{минус} \\ & \left( \begin{array}{l} \text{эфемеридное геоцентрическое положение, вычисленное по} \\ X_{\odot}(t + \Delta T), Y_{\odot}(t + \Delta T), Z_{\odot}(t + \Delta T) \text{ и} \\ x(t - \tau + \Delta T), y(t - \tau + \Delta T), z(t - \tau + \Delta T), \end{array} \right) \\ & \text{минус} \\ & \text{(} E \text{-члены)}.\end{aligned}$$

$E$ -члены абберации можно приближенно вычислить по формулам [36]:

в прямом восхождении

$$-0^{\text{s}},02273 \sin(11^{\text{h}} 15^{\text{m}} + \alpha) \sec \delta = -0^{\text{s}},341 \sin(11^{\text{h}} 15^{\text{m}} + \alpha) \sec \delta,$$

в склонении

$$-0^{\text{s}},341 \cos(11^{\text{h}} 15^{\text{m}} + \alpha) \sin \delta - 0^{\text{s}},029 \cos \delta.$$

## § 2.26. Каталоги звездных положений

Основная астрономическая система отсчета определяется совокупностью точных положений и собственных движений звезд; звездные положения и компоненты собственных движений вместе с другими величинами для определенной эпохи даются в специальных списках — *каталогах звездных положений*, или *звездных каталогах*. Положение звезды обычно определяется

заданием средних экваториальных координат — прямого восхождения  $\alpha$  и склонения  $\delta$ , отнесенных к началу некоторого бesselова года, одного и того же для всех звезд каталога и называемого *эпохой*, или *равноденствием каталога*. Учет влияния прецессии позволяет перейти от заданного равноденствия каталога к любому другому. *Средней эпохой* наблюдений звездного каталога называется средняя дата всех наблюдений звезд, положенных в основу при его составлении.

Собственные движения звезд в виде годовых собственных движений по прямому восхождению  $\mu_\alpha$  и по склонению  $\mu_\delta$  отнесены либо к средней эпохе, либо к равноденствию каталога.

Каталоги содержат также величину годичной прецессии и вековое изменение VS или сумму годичной прецессии и годичного собственного движения,  $\mu$  — годичное изменение VA, название звезды, номер по другим каталогам, видимые звездные величины и другие характеристики.

В зависимости от точности координат звезд звездные каталоги могут быть разделены на *звездные обзоры* и *точные каталоги*.

*Точные каталоги*, дающие координаты звезд с максимальной возможной точностью, могут быть разделены в зависимости от метода составления на три основных класса:

1) *абсолютные* каталоги, содержащие положения звезд, полученные абсолютными методами наблюдения;

2) *дифференциальные* каталоги, положения звезд в которых также получены из наблюдений, но *относительными*, или *дифференциальными* методами. Если они содержат звезды некоторой избранной области неба в виде сферического пояса (зоны) в  $5-15^\circ$  по  $\delta$ , то их называют также *зонными* каталогами;

3) *фундаментальные* каталоги, содержащие точные положения звезд, полученные в результате обработки координат звезд по нескольким абсолютным каталогам.

Средние разности координат звезд двух каталогов,  $K_1$  и  $K_2$ , меняющиеся по определенному закону вместе с изменениями координат звезд, называются *систематическими разностями*  $K_1 - K_2$ . Систематические разности обусловлены систематическими ошибками наблюдений. Фундаментальные каталоги предназначены для того, чтобы систематические (и случайные) ошибки положений звезд были сведены к минимуму. Соответствующая система данных называется *нормальной*, или *фундаментальной системой* каталога.

В настоящее время основными являются фундаментальные системы каталогов Ньюкома (Catalogue of Fundamental Stars for the Epochs 1875,0 and 1900,0 Reduced to an Absolute System, Astron. Pap. Vol. VIII, 1898), Ауверса (Fundamental-Catalog für die Zonenbeobachtungen am nördlichen Himmel für die Epoche

1875,0, Publ. der Astr. Ges. XIV, 1879) и Босса (General Catalogue of 33324 Stars for the Epoch 1950,0, 1937). Положения и собственные движения звезд в «Астрономическом Ежегоднике СССР» даны в системе каталога FK4 (Fourth Fundamental Catalogue), полученного в Астрономическом вычислительном институте в Гейдельберге (ФРГ) в результате переработки каталога FK3 (Dritter Fundamentalkatalog des BAJ); этот каталог содержит средние места и собственные движения 1535 звезд на эпохи 1950,0 и 1975,0.

Основные формулы редукций звездных положений даны в самих каталогах. Для редукции фотографических наблюдений небесных объектов можно воспользоваться каталогами Астрономической обсерватории Йельского университета (Йельские каталоги, публикуемые И. Барней в Transactions of the Astr. Obs. Yale Univ.), охватывающими зону по  $\delta$  от  $+60^\circ$  до  $-30^\circ$ .

В 1959 г. для целей обработки наблюдений искусственных спутников Земли в Смитсоновской астрофизической обсерватории был создан каталог положений и собственных движений 258 997 звезд [The SAO Star Catalog, SAO Special Report, No. 151].

### § 2.27. Геоцентрические координаты нуль-пункта селенографической системы отсчета

При решении астродинамических задач, связанных с Луной, часто возникает необходимость определения координат начала селенографической системы отсчета в геоэкваatorialной (либо эклиптической) системе. Такую задачу можно рассматривать как более частный случай задачи о предвычислении на любой момент времени положений точек лунной поверхности в геоцентрической системе координат заданной фундаментальной эпохи и равноденствия.

При пользовании «Астрономическим Ежегодником СССР» геоцентрические эклиптические прямоугольные координаты  $X^e$ ,  $Y^e$ ,  $Z^e$  точки  $R$  на лунной поверхности, отнесенные к эклиптике и равноденствию стандартной эпохи  $T_0$ , можно вычислить на основе эфемериды видимых координат Луны  $\alpha'_\zeta$ ,  $\delta'_\zeta$ ,  $\sin \pi'_\zeta$  даты  $T$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X^e \\ Y^e \\ Z^e \end{Bmatrix}^{(T_0)} &= \frac{a_e}{\sin \pi_\zeta} \mathbf{p}(\bar{\mathbf{e}}_{T_0}) \mathbf{p}(-\bar{\mathbf{e}}_T) \mathbf{r}(\Delta\psi_s) \mathbf{p}(\bar{\mathbf{e}}_T + \Lambda \mathbf{e}_s) \mathbf{r}(\xi_0) \mathbf{q}(-\theta) \times \\ &\times \mathbf{r}(z) \begin{Bmatrix} \cos \alpha_\zeta \cos \delta_\zeta \\ \sin \alpha_\zeta \cos \delta_\zeta \\ \sin \delta_\zeta \end{Bmatrix} + \mathbf{p}(\bar{\mathbf{e}}_{T_0}) \mathbf{r}(\xi_0) \mathbf{q}(-\theta) \mathbf{r}(z) \mathbf{p}(-\bar{\mathbf{e}}_T) \begin{Bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



где

$$\begin{Bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{Bmatrix} = \mathbf{r}(-\Omega - \sigma) \mathbf{p}(J + \rho) \mathbf{r}(180^\circ - \zeta - \tau + \Omega + \sigma) \begin{Bmatrix} \zeta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix},$$

а  $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  означают селенографические прямоугольные координаты точки  $R$ , определяемые соотношениями

$$\begin{Bmatrix} \zeta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = R_{\zeta} \begin{Bmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix}.$$

В геоэквиаториальной системе отсчета соответствующие координаты точки  $R$  вычисляются по формулам

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}^{(T_s)} = \frac{a_e}{\sin \pi_{\zeta}} \mathbf{p}(-\bar{e}_T) \mathbf{r}(\Delta\psi_s) \mathbf{p}(\bar{e}_T + \Delta e_s) \mathbf{r}(\zeta_0) \mathbf{q}(-\theta) \mathbf{r}(z) \times \\ \times \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \\ \sin \alpha_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \\ \sin \delta_{\zeta} \end{Bmatrix} + \mathbf{r}(\zeta_0) \mathbf{q}(-\theta) \mathbf{r}(z) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix},$$

где

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(-\bar{e}_T) \mathbf{r}(-\Omega - \sigma) \mathbf{p}(J + \rho) \mathbf{r}(180^\circ + \Omega + \sigma - \zeta - \tau) \begin{Bmatrix} \zeta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix}.$$

Заметим, что в эти формулы входят истинные координаты Луны  $\alpha_{\zeta}$ ,  $\delta_{\zeta}$ ,  $\sin \pi_{\zeta}$  на дату  $T$ , которые получаются из видимых координат путем прибавления к ним поправок за аберрацию, вычисляемых как произведение скорости изменения соответствующих координат на аберрационный промежуток  $\tau$ . Символом  $\bar{e}_T$  обозначено значение среднего наклона эклиптики к экватору в эпоху  $T$ . Чтобы найти координаты нуль-пункта селенографических координат, достаточно в предыдущих формулах положить [74]

$$\begin{Bmatrix} \zeta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = R_{\zeta} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

### § 2.28. Вычисление топоцентрических расстояний до точек лунной поверхности

В случаях подготовки эфемерид для проведения сеансов радиолокации или светолокации (лазерной локации) Луны из наземных пунктов необходимо вычислять топоцентрические значения расстояний от данной обсерватории  $O$  до точки лунной поверхности  $R$  с определенными селенографическими координатами.

тами  $R_{\zeta}$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ . Для этой цели можно применить следующие формулы [75].

Селеноцентрические геоэкваториальные координаты точки  $R$ , отнесенные к истинному равноденствию и экватору даты  $T$ , вычисляются при помощи следующих соотношений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_{\zeta} p(-e) r(-\Omega - \sigma - \Delta\psi_s) p(J + \rho) \times \\ \times r(180^\circ - (\zeta - \tau + \Omega + \sigma + \Delta\psi_s)) \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить соответствующие геоцентрические экваториальные координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  точки  $R$ , необходимо к координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  прибавить геоцентрические экваториальные координаты Луны  $x_{\zeta}$ ,  $y_{\zeta}$ ,  $z_{\zeta}$ , вычисляемые на основе эфемериды видимых сферических лунных координат  $\alpha_{\zeta}$ ,  $\delta_{\zeta}$ ,  $\sin \pi_{\zeta}$ :

$$\begin{pmatrix} x_{\zeta} \\ y_{\zeta} \\ z_{\zeta} \end{pmatrix} = \frac{a_e}{\sin \pi_{\zeta}} \begin{pmatrix} \cos \alpha_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \\ \sin \alpha_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \\ \sin \delta_{\zeta} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_{\zeta} \\ y + y_{\zeta} \\ z + z_{\zeta} \end{pmatrix}.$$

Если известны геоцентрические координаты  $\rho_0$ ,  $\varphi'$ ,  $l$  обсерватории  $O$ , то ее прямоугольные координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  определяются формулами

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos s \cos \varphi' \\ \sin s \cos \varphi' \\ \sin \varphi' \end{pmatrix},$$

где  $s$  — истинное местное звездное время. Таким образом, окончательно находим

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{топоцентр}} = \begin{pmatrix} x_{\zeta} + x - x_0 \\ y_{\zeta} + y - y_0 \\ z_{\zeta} + z - z_0 \end{pmatrix},$$

и искомое топоцентрическое расстояние  $D$  вычисляем как

$$D = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}.$$

Предыдущие формулы могут быть с успехом применены и к вычислению геоцентрических сферических геоэкуаториальных координат точек лунной поверхности, например, лунного кратера Mösting A. Действительно,

$$\begin{aligned}\sin \alpha_k &= \frac{Y}{D_1}, & \cos \alpha_k &= \frac{X}{D_1}, \\ \sin \delta_k &= \frac{Z}{D}, & \cos \delta_k &= \frac{D_1}{D},\end{aligned}$$

где

$$D_1 = (X^2 + Y^2)^{1/2} = (D^2 - Z^2)^{1/2}.$$

В случае кратера Mösting A  $R_{\zeta} = 1739,5$  км.

Синус параллакса кратера Mösting A вычисляется по формуле

$$\sin p_k = \frac{a_e}{D}, \quad a_e = 6378,160 \text{ км},$$

если  $D$  выражено в километрах.

## ВРЕМЯ И ЕГО ИЗМЕРЕНИЕ

Исторически в современной астрономии сложились три системы измерения времени, из которых две — *всемирное время* и *звездное время* — связаны с вращением Земли вокруг оси, а система *эфемеридного времени* основана на движении Земли, Луны и планет Солнечной системы по их орбитам (гелиоцентрическим в случае планет и геоцентрической для Луны).

Кроме того, в настоящее время введена система *атомного времени*, основанная на электромагнитных колебаниях, поглощаемых или излучаемых при квантовых переходах атомов (и молекул) на различные энергетические уровни, например, цезия или водорода. Все эти вопросы и рассматриваются в настоящей главе.

### § 3.01. Основные понятия и определения

Естественными единицами измерения звездного времени и солнечного времени являются соответственно *звездные сутки* и *истинные солнечные сутки*.

Течение звездного времени определяется суточным движением по небесной сфере звезд или точки весеннего равноденствия; за точку, определяющую своим суточным движением по небесной сфере истинное солнечное время, принимают центр видимого диска Солнца. Однако на практике применение истинного солнечного времени затруднено тем, что изменения часового угла центра истинного Солнца непропорциональны углам поворота Земли вокруг оси, так как Солнце движется не по экватору, а по эклиптике, и притом неравномерно. Поэтому вводят среднее экваториальное Солнце — фиктивную точку, равномерно движущуюся по экватору таким образом, чтобы в каждый момент времени  $t$  ее прямое восхождение  $A$  было равно средней долготе Солнца  $L$ , т. е. чтобы было  $A = L_0 + n(t - t_0)$ , где  $L_0$  — средняя долгота Солнца в начальную эпоху  $t_0$ .

Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$  на одном и том же меридиане называется *звездными сутками*.

В зависимости от того, какую точку весеннего равноденствия рассматривают — *истинную* (учитывается прецессия и полная нутация), *квазиистинную* (прецессия + долгопериодическая нутация) или *среднюю* (только прецессия) — различают *истинные*, *квазиистинные* или *средние* звездные сутки.

Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями *истинного* (*среднего экваториального*) Солнца на одном и том же меридиане называется *истинными* (*средними*) сутками.

Вращение небесной сферы происходит неравномерно, поэтому последовательные кульминации точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$  происходят через неравные промежутки времени, и продолжительность звездных суток как основной единицы измерения времени, а также секунды — основной физической единицы времени, определяемой как  $1/86400$  часть суток, непостоянна. По этой причине была введена *равномерная* шкала времени, не связанная с вращением Земли и основанная на гравитационной теории движения небесных тел: независимая переменная, входящая в дифференциальные уравнения движения, определяет *эфемеридное время* — равномерное время ньютоновой механики. Длительность *эфемеридной* секунды установлена заранее. Ее принимают равной  $1/31556925,9747$  части тропического года, равного  $365,24219879$  эфемеридных суток, в фундаментальную эпоху ньютоновых «Таблиц движения Солнца», т. е. 1900, янв. 0,  $12^h$ , когда геометрическая средняя долгота Солнца была равна  $279^\circ 41' 48'',04$  (см. § 3.05).

Для измерения более продолжительных промежутков времени в качестве единицы вводят период одного обращения Луны вокруг Земли — *синодический месяц* (*лунация*).

С видимым движением Солнца относительно Земли по эклиптике связана еще одна единица измерения времени — *год*. Принимаются три годовых периода различной продолжительности.

Промежуток времени, измеряемый продолжительностью одного полного обращения Солнца вокруг Земли относительно направления на одну и ту же звезду, называется *сидерическим*, или звездным годом. Его продолжительность в средних солнечных сутках  $d$  определяется формулой

$$\text{сидерический год} = 365^d,25636042 + 0^d,000000117 *).$$

Промежуток времени между двумя последовательными прохождением центра истинного Солнца через среднюю точку

---

\*)  $T$  в этом соотношении, как и в соотношениях, встречающихся ниже, означает время, протекшее от фундаментальной эпохи 1900, янв. 0,  $12^h$  эфемеридного времени до рассматриваемого момента и отсчитываемое в юлианских столетиях по  $36\,525$  эфемеридных суток,

весеннего равноденствия называется *тропическим годом*:

$$\text{тропический год} = 365^{\text{д}},24219879 - 0^{\text{д}},00000614 \text{ Т.}$$

Начало тропического года совпадает с моментом начала *бесселева (фиктивного) года*, за который принимают момент времени, когда долгота среднего эклиптического Солнца \*), уменьшенная на величину постоянной аберрации и отсчитываемая относительно средней точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{\text{ср}}$ , равна  $280^{\circ}$ . Бесселев год на  $0^{\text{д}},148 \text{ Т}$  короче тропического года. Момент начала бесселева года обозначается номером соответствующего календарного года, сопровождаемым нулем десятых (например, 1950,0; в данном случае этот момент совпадает с датой 1950, янв. 0,9234).

Продолжительность бесселева года определяется формулой

$$\text{бесселев год} = 365^{\text{д}},24219879 - 0^{\text{д}},00000785 \text{ Т.}$$

Промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через перигей его видимой геоцентрической орбиты называется *аномалистическим годом*:

$$\text{аномалистический год} = 365^{\text{д}},25964134 + 0^{\text{д}},00000304 \text{ Т.}$$

Наконец, *драконический год* равен промежутку времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через восходящий узел орбиты Луны на эклиптике:

$$\text{драконический год} = 346^{\text{д}},620031 + 0^{\text{д}},000032 \text{ Т.}$$

Поскольку при летосчислении календарный год должен быть близок к тропическому году и содержать целое число суток, любой солнечный календарь состоит из годов по 365 и 366 суток.

*Юлианский календарь*, дающий летосчисление *по старому стилю*, содержит последовательно три года по 365 суток, за которыми идет один год в 366 суток, называемый *високосным*. В системе юлианского календаря високосным годом считается год, номер которого делится на 4. Таким образом, средняя продолжительность юлианского года равна 365,25 суток, юлианского столетия — 36 525 суток. Юлианский год на  $0^{\text{д}},0078$  длиннее тропического года, что дает ошибку в одни сутки за 128 лет.

В системе григорианского календаря (новый стиль), введенной в 1582 г., существенное повышение точности календаря достигнуто *задержанными високосами* — високосными годами считаются только те столетние годы (1600, 1700, . . . , 2000, . . .), число сотен в номере которых делится на 4. Таким образом, средняя продолжительность григорианского календарного года

---

\*) То есть средняя долгота Солнца. *Средним эклиптическим Солнцем* называется фиктивная точка, равномерно движущаяся по эклиптике со средней угловой скоростью истинного Солнца.

равна 365,2425 суток, что дает накопление ошибки в одни сутки за 3333 года.

В основу лунных и лунно-солнечных календарей положен синодический месяц, определяемый как промежуток времени между последовательными одноименными фазами Луны:

$$\text{синодический месяц} = 29^{\text{д}},5305887 + 0^{\text{д}},0000002 \text{ Т.}$$

Кроме того, рассматриваются *сидерический*, *тропический*, *аномалистический* и *драконический* месяцы.

Сидерический месяц измеряется продолжительностью одного полного обращения Луны по геоцентрической орбите относительно направления на одну и ту же звезду:

$$\text{сидерический месяц} = 27^{\text{д}},3216614 + 0^{\text{д}},0000002 \text{ Т.}$$

Тропический месяц равен промежутку времени между двумя последовательными прохождениями центра Луны через среднюю точку весеннего равноденствия:

$$\text{тропический месяц} = 27^{\text{д}},3215821 + 0^{\text{д}},0000001 \text{ Т.}$$

Аномалистический месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Луны через перигей ее орбиты:

$$\text{аномалистический месяц} = 27^{\text{д}},5545509 - 0^{\text{д}},0000011 \text{ Т.}$$

Драконический месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через восходящий узел ее орбиты на эклиптике:

$$\text{драконический месяц} = 27^{\text{д}},2122204 + 0^{\text{д}},0000004 \text{ Т.}$$

Свободные члены приведенных соотношений дают среднюю продолжительность указанных лунных периодов в эпоху 1900,0 и соответствуют фундаментальным аргументам Брауна теории движения Луны.

В астрономии принята также система непрерывного счета суток, день за днем, начиная с определенной, весьма удаленной в прошлое даты — *юлианский период*, или *юлианская система*, введенная в XVI в. (см. § 3.08).

Подробное рассмотрение вопросов, связанных с измерением времени, можно найти в [46] — [48].

### § 3.02. Звездное и солнечное время. Всемирное время

*Звездное время* на меридиане места наблюдения (местное звездное время)  $s$  определяется и измеряется часовым углом точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$  (рис. 56). Местное звездное время основного (гриничского) меридиана называется

гриничским звездным временем  $S$ . Имеем соотношение

$$s = S - l, \quad (1.3.01)$$

где  $l$  — долгота места наблюдения (считается положительной к западу от Гринича и отрицательной к востоку).

Как уже было указано выше, положение плоскости меридиана истинной точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{\text{ист}}$  не остается неизменным, так как точка весны  $\Upsilon_{\text{ист}}$  участвует в сложном движении: она движется в плоскости эклиптики со скоростью  $50'',25$  в год (общая прецессия по долготе — см. гл. 2). На общую прецессию в долготу накладываются периодические колебания (*нутация*). Соответствующее истинной точке весны  $\Upsilon_{\text{ист}}$  звездное время называется *истинным звездным временем*.

Истинную точку весеннего равноденствия  $\Upsilon_{\text{ист}}$  можно заменить *средней* точкой весны  $\Upsilon_{\text{сред}}$ , которая обладает *только* прецессионным движением и определяет *среднее равноденствие даты*. Звездное время, измеряемое часовым углом средней точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{\text{сред}}$ , называется *средним звездным временем* и отличается от истинного звездного времени на величину полной нутации по прямому восхождению

$$\frac{1}{15} (\Delta\psi + d\psi) \cos \epsilon.$$

Звездное время  $s$  легко измеримо: оно равно прямому восхождению  $\alpha$  в момент прохождения звезды через местный меридиан

$$s = \alpha \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Гриничское звездное время в этот момент равно

$$S = \alpha + l.$$

Следует помнить, что для каждой звезды существует критическая дата, в которую происходят две верхние кульминации этой звезды: одна не позже  $3^{\text{m}}56^{\text{s}}$  после начала даты, другая — не ранее  $3^{\text{m}}56^{\text{s}}$  до начала следующей даты, вследствие того, что звездные сутки на  $3^{\text{m}}56^{\text{s}}$  короче средних солнечных (см. стр. 160, 161).

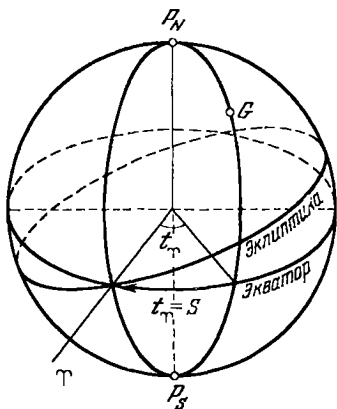


Рис. 56. Местное звездное время.



Прямые восхождения звезд при определениях времени берутся из фундаментальных каталогов звездных положений с учетом движения точки весеннего равноденствия (§ 2.26). По решению XI Генеральной ассамблеи МАС (Беркли, США; 1961) для этой цели рекомендован «The Fourth Fundamental Catalogue» (FK4).

При определении звездного времени, кроме прецессии и нутации точки весеннего равноденствия, учитывают также изменение положения плоскости местного меридиана вследствие *движения полюсов Земли и короткопериодических неравенств в угловой скорости ее вращения.*

Период вращения Земли в эфемеридных секундах можно представить формулой

$$P = 86161,10087 + 0,001635 T + 1,816 \Delta B'',$$

где  $T$  — время в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток от эпохи 1900, янв. 0,5 ET,  $\Delta B''$  — суточное изменение флуктуации долготы Луны  $B''$ , входящей в выражение редукции  $\Delta T$  для перехода от всемирного времени UT к эфемеридному ET:

$$\Delta T = + 24^s,349 + 72^s,318 T + 29^s,950 T^2 + 1,82144 B''$$

(см. § 3.06).

Из-за прецессии *средние звездные сутки* продолжительностью в  $24^h$  среднего звездного времени на  $0^s,0084$  *короче* действительного периода вращения Земли. *Истинные звездные сутки* отличаются от периода вращения Земли на переменную величину, зависящую от нутации земной оси вращения.

Истинное звездное время из-за своей неравномерности непригодно для измерения *промежутков* времени и применяется только для определения *моментов* времени (*эпох*).

Выражение часового угла истинной точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{\text{ист}}$  относительно мгновенного местного меридиана можно представить в виде

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t \omega dt + p \cos \epsilon^0 - a + \Delta\psi \cos \epsilon_0 - \frac{1}{2} \Delta\psi \Delta\epsilon \sin \epsilon_0 - \Delta l + \delta l, \quad (1.3.02)$$

где  $t$  — равномерно меняющееся время ньютоновой механики,  $(p \cos \epsilon^0 - a)$  — общая прецессия по прямому восхождению,  $(\Delta\psi \cos \epsilon_0 - \frac{1}{2} \Delta\psi \Delta\epsilon \sin \epsilon_0)$  — нутация по прямому восхождению,  $(-\Delta l + \delta l)$  — изменение положения плоскости местного меридиана из-за движения полюсов и изменения направления верти-

кали,  $\epsilon^0$  — средний наклон эклиптики в фундаментальную эпоху 1900, янв. 0,5,  $\epsilon_0$  — средний наклон эклиптики даты.

*Истинное солнечное время* ( $v$ ) — часовой угол центра истинного Солнца относительно местного меридиана с долготой  $l$  от Гринича, измененный на  $12^h$ .

*Среднее солнечное время* ( $t$ ) — часовой угол центра среднего экваториального Солнца относительно местного меридиана с долготой  $l$  от Гринича, измененный на  $12^h$ .

Разность  $E = v - t$  называется *уравнением времени* и выражается приближенным равенством

$$E = 460^s \sin g - 592^s \sin 2(\Gamma + g),$$

где  $g$  — средняя аномалия истинного Солнца,  $\Gamma$  — средняя долгота перигея солнечной орбиты. График уравнения времени  $E$  представлен на рис. 57.

Значение величины «уравнение времени  $E + 12^h$ » на начало каждых суток года приводится в астрономических ежегодниках.

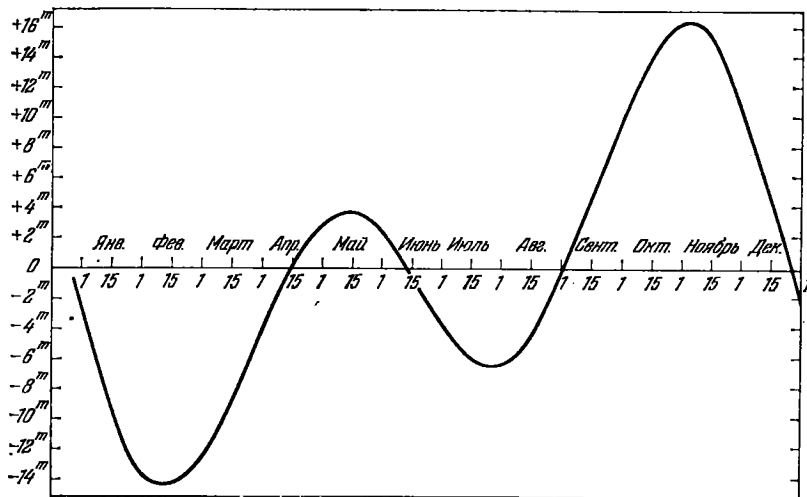


Рис. 57. График уравнения времени.

*Всемирное время* ( $M$ ) — это местное среднее солнечное время на гриничском меридиане. Соответствующая система измерения времени — система всемирного времени, обозначаемая UT (Universal Time) [или TU (Temps Universel), или WZ (Weltzeit)], применяется для фиксации моментов наблюдения небесных объектов и астрономических явлений и до 1960 г. применялась как система основного аргумента всех астрономических эфемерид. Астрономические эфемериды после 1960 г. публикуются по

аргументу «эфемеридное время», за исключением эфемерид для физических наблюдений Солнца, Луны и планет. Необходимо иметь в виду, что аргумент основных эфемерид Солнца и планет, основанных на гравитационных теориях движения, выражен как до, так и после 1960 г. фактически в системе эфемеридного времени, так как в этом случае старое название аргумента «всемирное время» лишь формально заменено новым названием «эфемеридное время». [См. § 3.05.]

До 1 января 1925 г. астрономическая система счета времени обозначалась GMT (Greenwich Mean Time) и означала время в средних солнечных сутках, которое отсчитывалось от среднего гриничского полудня соответствующей даты, начинавшейся по гражданскому счету времени в среднюю гриничскую полночь, т. е. на  $12^h$  раньше.

После 1 января 1925 г. в астрономической практике повсеместно введена система *гражданского счета времени*, обозначаемая теперь через UT. Обозначение UT всегда относится к времени, отсчитываемому от средней гриничской полуночи, *даже для моментов времени и дат до 1925 г.*

Для юлианской системы сплошного счета суток прежний принцип счета суток от среднего гриничского полудня, следующего за гриничской полуночью, определяющей момент начала рассматриваемой календарной даты, сохранился и после 1 января 1925 г.

Таким образом,

$$\text{до 1 января 1925 г. } v = t_{\odot},$$

$$\text{после 1 января 1925 г. } v = 12^h + t_{\odot},$$

где  $t_{\odot}$  — часовой угол центра истинного Солнца.

### § 3.03. Квазиравномерное всемирное время

Неравномерность суточного вращения Земли обуславливает неравномерность системы (или *шкалы*) всемирного времени UT. Поэтому все численные выражения, определяющие звездное и всемирное время, должны содержать члены, учитывающие неравномерность вращения Земли.

Неравномерность суточного вращения Земли вызвана следующими причинами:

1. Непредвидимым изменением положения оси вращения Земли, проявляющимся как движение земных полюсов. Оно носит неправильный характер и может быть определено по данным наблюдений Международной службы движения полюсов Земли (МСДП), ранее называвшейся Международной службой широт.

2. Сезонными вариациями угловой скорости вращения Земли, обусловленными метеорологическими причинами и повторяющимися более или менее регулярно из года в год.

3. Вековым замедлением вращения, обусловленным рассеянием энергии вращательного движения Земли из-за приливного трения.

4. Флуктуациями в угловой скорости вращения Земли, связанными, по-видимому, с солнечной активностью.

Из наблюдений непосредственно получается всемирное время УТО.

Обсерватории, объединенные в МСДП, определяют две поправки:  $\Delta\lambda$  — поправку к УТО, обусловленную отклонением мгновенного полюса относительно среднего положения, и  $\Delta T_s$  — поправку, вызванную сезонными вариациями, вычисляемую путем экстраполяции прежних наблюдений.

Таким образом, получают еще две системы всемирного времени:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad UT1 &= UT0 + \Delta\lambda, \\ 2. \quad UT2 &= UT1 + \Delta T_s = UT0 + \Delta\lambda + \Delta T_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.03)$$

UT2 — квазиравномерное всемирное время представляет наилучшее возможное приближение к равномерной шкале времени, которое можно получить из наблюдений суточных движений звезд.

Поправки  $\Delta\lambda$  и  $\Delta T_s$  систематически публикуются в циркулярах *Circulaires du Bureau de l'Heure* и годовых отчетах *Rapports Annuels*, издаваемых Международным Бюро времени, для редукции моментов подачи радиосигналов времени к шкале UT2.

Радиосигналы в системе всемирного времени UT2 немедленно дают *относительно* равномерную временную шкалу, пригодную для практических применений на промежутках времени до одного года. Однако для получения абсолютно равномерной шкалы времени необходимо перейти к системе *эфемеридного* времени (§§ 3.05 и 3.06).

### § 3.04. Связь между всемирным временем и звездным гриничским временем

Если местное среднее солнечное время и местное звездное время на меридиане места наблюдения с долготой  $l$  от Гринича суть соответственно  $m$  и  $s$ , то всемирное время  $M$  и гриничское звездное время  $S$  в этот же физический момент времени определяются формулами

$$M = m + l, \quad S = s + l, \quad (1.3.04)$$

где долготу  $l$  считают положительной к западу от Гринича.

Всемирное время  $M$  и гриничское звездное время  $S$  связаны следующим соотношением:

$$S = 12^{\text{h}} + M + \alpha(M) + N_{\alpha}, \quad (1.3.05)$$

где  $N_{\alpha}$  — нутация по прямому восхождению,  $\alpha(M)$  — прямое восхождение среднего экваториального Солнца.

Прямое восхождение среднего экваториального Солнца, отсчитываемое от средней точки весеннего равноденствия рассматриваемой даты  $t = t_0 + M$ , определяется формулой

$$\alpha(M) = 18^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}},836 + 236^{\text{s}},55536049 (d + M) + 0^{\text{s}},0929 \left( \frac{d + M}{36525} \right)^2, \quad (1.3.06)$$

в которой  $d$  — число суток от эпохи 1900, янв. 0,  $12^{\text{h}}$  (JD 2415020,0) до гриничской полуночи — момента начала рассматриваемой даты  $t_0$  (JD( $t_0$ )).

Если ввести истинное звездное время в  $0^{\text{h}}$  UT (в гриничскую полночь),  $S_0$ , определяемое соотношением

$$\begin{aligned} S_0 &= 6^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}},836 + 8640184^{\text{s}},542 T + 0^{\text{s}},0929 T^2 + N_{\alpha} = \\ &= 6^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}},836 + 236^{\text{s}},55536049 d + 0^{\text{s}},0929 T^2 + N_{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.3.07)$$

то истинное звездное время  $S$  в момент  $M$  всемирного времени равно

$$S = S_0 + M + \mu M, \quad (1.3.08)$$

где  $\mu = 0,0027379093$  — редукция среднего времени к звездному.

При отбрасывании полной нутации в прямом восхождении

$$N_{\alpha} = \frac{1}{15} (\Delta\psi + d\psi) \cos \varepsilon$$

соотношение (1.3.07) определяет *среднее звездное время*  $S_m^0$  в  $0^{\text{h}}$  UT, при исключении из рассмотрения короткопериодической части нутации по прямому восхождению  $\frac{1}{15} d\psi \cos \varepsilon$  формула (1.3.07) определяет *квазиистинное звездное время* в  $0^{\text{h}}$  UT. В соответствии с этим формула (1.3.08) определит либо *среднее звездное время*  $S_m$ , либо *квазиистинное звездное время*  $S$  в момент  $M$  всемирного времени.

Величины истинного звездного времени  $S_0$  и среднего звездного времени  $S_m^0$  в  $0^{\text{h}}$  UT публикуются в «Астрономическом Ежегоднике СССР» вместе со значениями нутации по прямому восхождению.

Для вычисления среднего звездного времени  $S_m^0$  в  $0^h$  UT можно воспользоваться также формулами

$$\begin{aligned} S_m^0 &= 99^{\circ},6909833 + 36000^{\circ},76892500 T + 0^{\circ},3870833 \cdot 10^{-3} T^2 = \\ &= 99^{\circ},6909833 + 0^{\circ},985647335375 d + 0^{\circ},3870833 \cdot 10^{-3} T^2 = \\ &= 0^r,276919398 + 100^r,0021359028 T + 0^r,1075231 \cdot 10^{-5} T^2 = \\ &= 0^r,276919398 + 0^r,00273790926493 d + 0^r,1075231 \cdot 10^{-5} T^2, \end{aligned} \quad (1.3.09)$$

в которых

$$d = \text{JD}(t_0) - \text{JD } 2415020,0, \quad T = d/36525.$$

Если в качестве основной эпохи выбрать дату 1950, янв. 1,0 = JD 2433282,5, то среднее звездное время  $S_m^0$  в  $0^h$  UT можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} S_m^0 &= 6^h 40^m 18^s,130 + 8640184^s,635 T' + 0^s,0929 T'^2 = \\ &= 6^h 40^m 18^s,130 + 236^s,5553630039 d' + 0^s,0929 T'^2 = \\ &= 100^{\circ},0755417 + 36000^{\circ},769312083 T' + 0^{\circ},387083 \cdot 10^{-3} T'^2 = \\ &= 100^{\circ},0755417 + 0^{\circ},98564734598 d' + 0^{\circ},387083 \cdot 10^{-3} T'^2 = \\ &= 0^r,2779876158 + 100^r,002136978009 T' + 0^r,1075231 \cdot 10^{-5} T'^2 = \\ &= 0^r,2779876158 + 0^r,0027379092944 d' + 0^r,1075231 \cdot 10^{-5} T'^2, \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

в которых

$$d' = \text{JD}(t_0) - \text{JD } 2433282,5, \quad T' = d'/36525.$$

При отсчете времени от неподвижной точки весеннего равноденствия  $\Upsilon_{1950,0}$  стандартной эпохи 1950,0 для вычисления звездного среднего времени  $S_m^0$  в  $0^h$  UT можно применить формулы

$$\begin{aligned} S_m^0 &= 6^h 40^m + 8639877^s,302 T_1 - 0^s,0002 T_1^2 = \\ &= 6^h 40^m + 236^s,5469487064 d_1 - 0^s,0002 T_1^2 = \\ &= 100^{\circ} + 35999^{\circ},488756250 T_1 - 0^{\circ},83333 \cdot 10^{-6} T_1^2 = \\ &= 100^{\circ} + 0^{\circ},985612286277 d_1 - 0^{\circ},83333 \cdot 10^{-6} T_1^2 = \\ &= 0^r,2777777778 + 99^r,99857987847 T_1 - 0^r,23148 \cdot 10^{-8} T_1^2 = \\ &= 0^r,2777777778 + 0^r,0027378119063 d_1 - 0^r,23148 \cdot 10^{-8} T_1^2, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

где  $d_1 = \text{JD}(t_0) - \text{JD } 2433282,4234, \quad T_1 = d_1/36525.$

Если достаточно знать время с точностью до  $\pm 0^s,013$  ( $\pm 0^o,00006$ ), то истинное гриничское звездное время  $S$  можно вычислить по формуле

$$S = 100^o,0755417 + 360^o,98564734598 d' + 0^o,387083 \cdot 10^{-3} T'^2 - \\ - 4^o,3339 \cdot 10^{-3} \sin(12^o,11279 - 0^o,052954 d') + \\ + 0^o,0532 \cdot 10^{-3} \sin 2(12^o,11279 - 0^o,052954 d') - \\ - 0^o,519 \cdot 10^{-3} \sin 2(64^o,37545 + 13^o,176396 d') - \\ - 0^o,3244 \cdot 10^{-3} \sin 2(280^o,08122 + 0^o,985647 d'). \quad (1.3.12)$$

Если задано гриничское (среднее или истинное) время  $S$ , то соответствующее всемирное время  $M$  определяется по формуле

$$M = S - S_0 - v(S - S_0), \quad (1.3.13)$$

где  $v = 0,0027304336$  — редукция звездного времени к среднему солнечному.

Из формул (1.3.04) непосредственно следуют соотношения между местным средним временем  $m$  и местным звездным временем  $s$  на меридиане с долготой  $l$  от Гринича:

$$s = S_0 + m + \mu(m + l), \\ m = s - S_0 - v(s - S_0 + l).$$

Вычисление редукций  $\mu(m + l)$  и  $v(s - S_0 + l)$  производится при помощи специальных таблиц (см. на стр. 161).

**Перевод среднего времени в звездное и наоборот.** Так как тропический год содержит

$$365,24219879 \text{ сред. солн. суток} = 366,24219879 \text{ звездн. суток},$$

то

$$\text{средние солнечные сутки} = (1 + \mu) \text{ звездн. суток},$$

где

$$\mu = \frac{1}{365,24219879} = 0,0027379093.$$

Поэтому

$$1 \text{ средние сутки} = 24^h 03^m 56^s,55536 \text{ звездного времени},$$

$$1 \text{ средний час} = 1^h 00^m 09^s,85647 \quad \gg \quad \gg \quad ,$$

$$1 \text{ средняя минута} = 1^m 00^s,16427 \quad \gg \quad \gg \quad ,$$

$$1 \text{ средняя секунда} = 1^s,00274 \quad \gg \quad \gg \quad .$$

Любой промежуток  $m$  среднего времени между двумя физическими моментами  $t_2$  и  $t_1$  ( $t_2 \geq t_1$ ) в одной и той же временной

системе содержит  $m(1 + \mu)$  единиц звездного времени, составляющих промежутков  $s$  звездного времени между теми же физическими моментами времени  $t_2$  и  $t_1$ , т. е.

$$s = (1 + \mu) m. \quad (1.3.14)$$

Обратные соотношения дают

1 средние звездные сутки =  $(1 - \nu)$  средн. солнечн. суток,  
где

$$\nu = \frac{1}{366,24219879} = 0,0027304336.$$

Поэтому

1 звездные сутки =  $23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}},09054$  среднего времени,

1 звездный час =  $59^{\text{m}} 50^{\text{s}},17044$  » » ,

1 звездная минута =  $59^{\text{s}},83617$  » » ,

1 звездная секунда =  $0^{\text{s}},99727$  » » .

Таким образом,

$$m = (1 - \nu) s. \quad (1.3.15)$$

*Промежуток  $t$  среднего времени ( $s$  звездного времени) равен промежутку в  $m$  единиц звездного времени ( $s$  единиц среднего времени) плюс (минус) редукция  $\mu t(\nu s)$ .*

Величина редукции  $\mu t(\nu s)$  дается в таблицах IIa — IIb, IIIa — IIIb перевода среднего времени в звездное (и обратно), публикуемых в «Астрономическом Ежегоднике СССР».

### § 3.05. Эфемеридное время

Неравномерность шкалы всемирного времени привела к необходимости введения новой временной шкалы, определяемой орбитальными движениями тел Солнечной системы и представляющей шкалу изменения независимой переменной дифференциальных уравнений ньютоновой механики, положенных в основу теорий движения этих небесных тел.

Для удобства рассматривается геоцентрическое движение Солнца, а в качестве основного параметра, определяющего новую равномерную временную шкалу, берется *долгота Солнца  $L$ , отнесенная к среднему равноденствию даты*. Эта новая временная шкала получила название шкалы *эфемеридного времени*. Согласно теории движения Земли Ньюкома определяющий параметр имеет следующее выражение:

$$L = 279^{\circ} 41' 48'',04 + 129602768'',13 T + 1'',089 T^2 + \Sigma L_p. \quad (1.3.16)$$

Здесь  $T$  измеряется в юлианских столетиях по 36525 эфемеридных суток и отсчитывается от эпохи 1900, янв. 0,  $12^{\text{h}}$  ET,  $\Sigma L_p$



означает совокупность периодических возмущений средней долготы.

Эпоха 1900, янв. 0,5 ET выбрана в качестве нуля-пункта шкалы эфемеридного времени и соответствует моменту эфемеридного времени вблизи начала календарного года 1900, когда средняя геометрическая долгота Солнца, отнесенная к среднему равноденствию даты, была равна  $279^{\circ} 41' 48'',04$ .

Основной единицей измерения эфемеридного времени является тропический год в фундаментальную эпоху 1900, янв. 0,5 ET продолжительностью в 365,24219879 эфемеридных суток. Мера этой единицы времени определяется числовым коэффициентом при  $T$  в формуле (1.3.16). Поэтому тропический год в фундаментальную эпоху 1900, янв., 0,5 ET содержит 31556925,9747 эфемеридных секунд. В соответствии с этим в 1956 г. было установлено следующее определение эфемеридной секунды.

*Секунда есть 1/31556925,9747 часть тропического года в фундаментальную эпоху 1900, янв. 0,12<sup>b</sup> эфемеридного времени.*

Система эфемеридного времени обозначается через ET (Ephemeris Time); соответствующие юлианские даты сопровождаются обозначением JED (Julian Ephemeris Date).

**Эфемеридный меридиан.** Эфемеридный меридиан занимает в пространстве такое положение, которое занимал бы гриничский меридиан при условии *равномерного* вращения Земли с угловой скоростью, соответствующей определению эфемеридного времени, а именно, один полный оборот за одни эфемеридные сутки. Эфемеридный меридиан проходит *восточнее* гриничского меридиана на угловом расстоянии  $1,002738 \dots \Delta T$ , где

$$\Delta T = ET - UT \quad (1.3.17)$$

— поправка за эфемеридное время.

С эфемеридным меридианом связываются *эфемеридная долгота*  $l^*$  и *эфемеридный часовой угол*  $t^*$ . Поэтому все вычисления, связанные с астрономическими явлениями, зависящими от вращения Земли, выполняются в системе эфемеридного времени относительно эфемеридного меридиана, подобно тому как это имело место в случае системы всемирного времени относительно гриничского меридиана.

Необходимо всегда иметь в виду, что введение системы эфемеридного времени не внесло никаких изменений ни в измерение, ни в определение всемирного времени. Поэтому в формуле прямого восхождения среднего Солнца  $\alpha_{\odot}$  аргумент  $T$  может быть выражен как в системе всемирного времени, так и в системе эфемеридного времени, и во втором случае эта формула определит прямое восхождение *среднего эфемеридного Солнца*

$\alpha_{\odot \text{эф}}$  для  $0^{\text{h}}$  ET; соответствующая формула для  $S_0$  определит, таким образом, в этом случае *эфемеридное звездное время*  $S_0^{\circ}$  в  $0^{\text{h}}$  ET (в эфемеридную полночь).

Введение эфемеридного меридиана позволяет сформулировать следующие точные определения:

1) *эфемеридное время* есть часовой угол эфемеридного среднего Солнца относительно эфемеридного меридиана, измененный на  $12^{\text{h}}$ ;

2) *всемирное время*, или *гриничское среднее время*, есть часовой угол среднего Солнца относительно гриничского меридиана, измененный на  $12^{\text{h}}$ ;

3) *эфемеридное звездное время* есть часовой угол точки весеннего равноденствия относительно эфемеридного меридиана;

4) *гриничское звездное время* есть часовой угол точки весеннего равноденствия относительно гриничского меридиана.

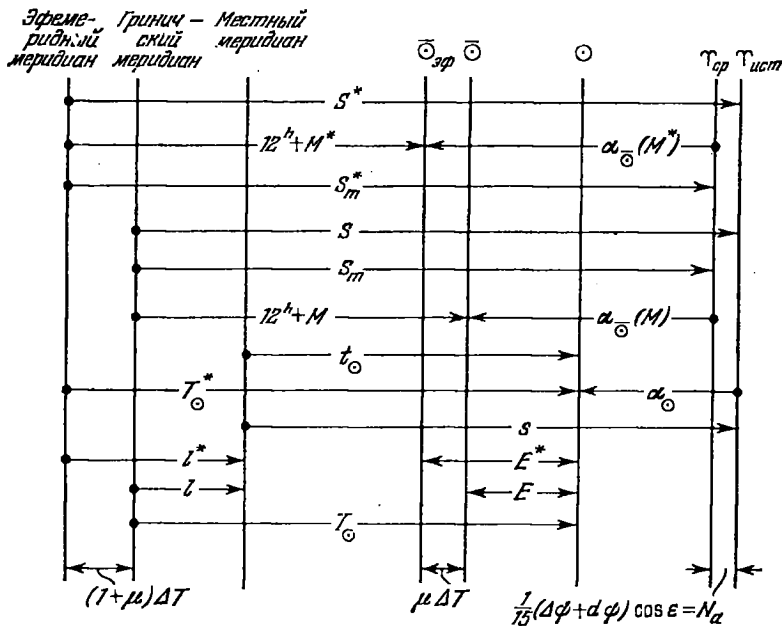


Рис. 58. Звездное время, всемирное время, эфемеридное время.

Таким образом, между тремя системами измерения времени — всемирного времени UT, звездного времени S и эфемеридного времени ET — имеют место следующие соотношения (рис. 58).

Всемирное время  
 $UT = M$

Гриничское звездное время  
 $S = 12^h + M + \alpha_{\odot}(M) = S_0 + (1 + \mu)M$

Часовой угол среднего Солнца  
 $T_{\odot}$  относительно гриничского меридиана

$$T_{\odot} = 12^h + M = S - \alpha_{\odot}(M)$$

Гриничский часовой угол светила с координатами  $\alpha, \delta$

$$T = S - \alpha$$

Местный часовой угол светила

$$t = S - \alpha - l = T - l,$$

Эфемеридное время

$$ET = UT + \Delta T = M^* = M + \Delta T$$

(Относительно поправки  $\Delta T$  за эфемеридное время см. § 3.06.)

Эфемеридное звездное время

$$S^* = 12^h + M^* + \alpha_{\odot^*}(M^*) = S_0^* + (1 + \mu)M^*$$

Часовой угол среднего эфемеридного Солнца относительно эфемеридного меридиана  $T_{\odot^*}$

$$T_{\odot^*} = 12^h + ET = 12^h + M^* = S^* - \alpha_{\odot^*}(M^*)$$

Эфемеридный часовой угол светила с координатами  $\alpha, \delta$

$$T^* = S^* - \alpha$$

Местный часовой угол светила

$$t^* = S^* - \alpha - l^* = T^* - l^*,$$

$$l^* = l + (1 + \mu)\Delta T.$$

При кульминации на гриничском меридиане

$$T = 0^h \text{ (верхняя)}$$

$$T = 12^h \text{ (нижняя)}$$

или

$$S = \alpha \text{ (верхняя)}$$

$$S = \alpha + 12^h \text{ (нижняя)}$$

При кульминации на эфемеридном меридиане

$$T^* = 0^h \text{ (верхняя)}$$

$$T^* = 12^h \text{ (нижняя)}$$

или

$$S^* = \alpha \text{ (верхняя)}$$

$$S^* = \alpha + 12^h \text{ (нижняя)}$$

При кульминации на местном меридиане

$$T = l \text{ (верхняя)}$$

$$T = l + 12^h \text{ (нижняя)}$$

или

$$S - l = \alpha \text{ (верхняя)}$$

$$S - l = \alpha + 12^h \text{ (нижняя)}$$

$$T^* = l^* \text{ (верхняя)}$$

$$T^* = l^* + 12^h \text{ (нижняя)}$$

или

$$S^* - l^* = \alpha \text{ (верхняя)}$$

$$S^* - l^* = \alpha + 12^h \text{ (нижняя)}$$

Символы  $\odot$ ,  $\odot^*$  и  $\odot_{\text{эф}}$  означают соответственно истинное Солнце, среднее Солнце и среднее эфемеридное Солнце.

### § 3.06. Поправка за эфемеридное время

Наблюдения Луны дают возможность удобно и точно определить величину расхождений между всемирным временем UT и эфемеридным временем ET в моменты наблюдений. Сущность методики такого определения состоит в сравнении эфемеридных положений Луны, вычисленных на основе исправленной лунной теории Брауна по аргументу, выраженному в системе эфемеридного времени, с ее наблюдаемыми положениями, моменты определения которых фиксируются по всемирному времени.

Точнее говоря, определяют флуктуацию долготы Луны  $B''$  как разность между наблюденной долготой Луны  $\lambda_{\text{набл}}$  и значением  $\lambda_{\text{выч}}$  долготы Луны, вычисленной на основе лунной теории, а затем применяют формулу

$$\Delta T = + 24^s,349 + 72^s,318 T + 29^s,950 T^2 + 1,82144 B''.$$

Так как для обработки наблюдений Луны необходимо определенное время, то, очевидно, точные значения поправки за эфемеридное время  $\Delta T$  могут быть найдены с некоторым запаздыванием только для *прошедших* промежутков времени. Таким образом, были получены значения  $\Delta T$ , приводимые в табл. 16.

При определении величины поправки  $\Delta T$  по наблюдениям Луны необходимо иметь в виду различие между эфемеридным временем ET и его приближением  $UT + \Delta T$ ; это различие обусловлено недостатками теории Луны.

Согласно решениям XIII Генеральной ассамблеи МАС каждая различаемая (по своей теоретической основе) эфемерида Луны обозначается специальным индексом  $j$ . В настоящее время различают следующие эфемериды Луны:

$j = 0$  — улучшенная эфемерида Луны, УЭЛ (Improved Lunar Ephemeris),

$j = 1$  — УЭЛ, в которой осуществлен переход на новую систему астрономических постоянных МАС и исправлена ошибка в коэффициенте члена № 182 разложений теории Брауна,

$j = 2$  — эфемерида Луны  $j = 1$ , в которой учтены уточнения солнечных возмущений по Эккерту; эта эфемерида Луны публикуется в ежегодниках, начиная с выпусков на 1972 г.

В соответствии с этим введены обозначения  $ET_j$  и  $\Delta T_j = ET_j - UT$ ; таким образом, эфемеридное время, определяемое сравнением наблюдений Луны в системе каталога FK4 с эфемеридными положениями из УЭЛ ( $j = 0$ ), обозначается через  $ET_0$ , а разность  $ET_0 - UT_2$  — через  $\Delta T_0$ ;

Т а б л и ц а 16

Год	$\Delta T_0$	$\Delta T_1$	Год	$\Delta T_0$	$\Delta T_1$
1900,5	<sup>s</sup> -3,662	<sup>s</sup> -4,228	1940,5	<sup>s</sup> +24,371	<sup>s</sup> +24,027
01,5	-2,359	-2,869	41,5	24,889	24,502
02,5	-0,801	-1,385	42,5	25,126	25,018
03,5	+0,434	+0,121	43,5	25,561	25,540
04,5	1,800	1,600	44,5	26,152	26,045
1905,5	+3,288	+3,036	1945,5	+26,449	+26,546
06,5	4,455	4,459	46,5	26,969	27,055
07,5	5,820	5,886	47,5	27,690	27,580
08,5	7,397	7,330	48,5	28,112	28,097
09,5	8,691	8,773	1949,5	28,704	28,580
1910,5	+10,137	+10,174	1950,5	+29,409	+29,015
11,5	11,690	11,487	51,5	29,758	29,418
12,5	12,827	12,685	52,5	30,259	29,805
13,5	14,046	13,787	53,5	30,874	30,183
14,5	15,350	14,817	54,5	31,116	30,545
1915,5	+16,266	+15,799	1955,5	+31,506	+30,912
16,5	17,256	16,711	56,5	31,899	31,177
17,5	18,287	17,542	57,5	32,081	31,591
18,5	18,878	18,296	58,5	32,527	32,115
19,5	19,578	19,027	59,5	33,042	32,584
1920,5	+20,397	+19,756	1960,5	+33,227	+33,053
21,5	20,847	20,468	61,5	33,543	33,463
22,5	21,385	21,112	62,5	34,057	33,910
23,5	21,979	21,661	63,5	34,316	34,397
1924,5	22,162	22,114	64,5	34,980	35,069
1925,5	+22,433	+22,461	1965,5	+35,897	+35,817
26,5	22,176	22,696	66,5	36,636	36,671
27,5	22,724	22,824	67,5	37,619	37,552
28,5	22,823	22,891	68,5	38,747	38,424
29,5	23,095	22,944	69,5	39,647	39,379
1930,5	+23,082	+23,007	1970,5	+40,774	+40,379
31,5	23,254	23,063	71,5	42,002	41,357
32,5	23,557	23,093	72,5	43,011	42,468
33,5	23,492	23,085	73,5	44,052	43,498
34,5	23,564	23,058	74,5	45,358	44,615
1935,5	+23,762	+23,037	75,5	+46,417	+45,886
36,5	23,645	23,061	76,5	47,753	47,281
37,5	23,734	23,155	1977,5	49,288	48,762
38,5	24,030	23,343			
39,5	24,073	23,634			

аналогично сравнение наблюдений Луны с эфемеридой Луны  $j = 1$  дает  $ET_1$  и  $\Delta T_1 = ET_1 - UT_2$ . Эти значения поправок за эфемеридное время публикуются в «Астрономическом Ежегоднике СССР на 1972 г.».

### § 3.07. Атомное время

Шкала *атомного* времени  $AT$  основана на применении высокостабильных молекулярных и атомных эталонов частоты для регулировки кварцевых часов. Она отличается почти совершенной равномерностью и не зависит от вращения Земли. Шкала времени, основанная на нескольких атомных часах, может считаться равномерной с точностью до  $10^{-11}$ , тогда как единица времени, определяемая по гелиоцентрическому движению Земли, точна до  $10^{-9}$ . Начало шкалы атомного времени может быть принято произвольным.

За 1 *атомную* секунду принят промежуток времени, в течение которого происходит 9 192 631 770 колебаний атома цезия; этот интервал соответствует одной *эфемеридной* секунде с точностью до  $\pm 2 \cdot 10^{-9}$ . Точнее, за величину атомной секунды принята продолжительность 9 192 631 770 колебаний излучения, соответствующего резонансной частоте перехода  $F = 4$ ,  $M = 0 \rightleftharpoons F = 3$ ,  $M = 0$  между энергетическими уровнями сверхтонкой структуры основного состояния  $^2S_{1/2}$  атома цезия-133 при отсутствии возмущений от внешних полей.

В настоящее время с Международным Бюро времени (ВН) сотрудничают около 30 научно-исследовательских институтов и лабораторий, располагающих атомными эталонами времени и частоты:

DHI — Германский гидрографический институт (Гамбург, ФРГ),

F — Национальная комиссия времени (Париж, Франция),

FOA — Научно-исследовательский институт национальной обороны (Стокгольм, Швеция),

IEN — Национальный электротехнический институт (Турин, Италия),

IGMA — Военно-географический институт (Буэнос-Айрес, Аргентина),

ILOM — Международная широтная обсерватория (Мидзусава, Япония),

MSO — Обсерватория Маунт-Стромло (Канберра, Австралия),

NBS — Национальное Бюро стандартов (Боулдер, США),

NIS — Национальный институт стандартов (Каир, ОАР, Египет),

NPL — Национальная физическая лаборатория (Теддингтон, Англия),

NPRL — Национальная лаборатория физических исследований (Претория, ЮАР),

NRC — Национальный научно-исследовательский совет (Оттава, Канада),

OMSF — Морская обсерватория (Сан-Фернандо, Испания),

ON — Невшательская обсерватория (Невшатель, Швейцария),

ONBA — Морская обсерватория (Буэнос-Айрес, Аргентина),

ONRI — Национальная обсерватория (Рио-де-Жанейро, Бразилия),

OP — Парижская обсерватория (Париж, Франция),

ORB — Бельгийская обсерватория (Брюссель, Бельгия),

PTB — Физико-технический институт (Брауншвейг, ФРГ),

PTCH — Генеральная почтовая дирекция (Берн, Швейцария),

RGO — Гриничская обсерватория (Херстмонсо, Англия),

RRL — Научно-исследовательские радиолaborатории (Токио, Япония),

TAO — Токиоская астрономическая обсерватория (Токио, Япония),

TCL — Лаборатории телесвязи (остров Тайвань),

URE — Институт радиотехники и электроники (Прага, ЧССР),

URSS — Государственная лаборатория эталона времени и частоты (Москва, СССР),

USNO — Морская обсерватория США (Вашингтон, США),

ZIPE — Центральный институт физики Земли (Потсдам, ГДР).

Существует несколько независимых шкал системы атомного времени АТ.

Шкала А1 — основная шкала США, определяемая осреднением показаний атомных часов, регулируемых 16 цезиевыми эталонами частоты, расположенными в Морской обсерватории США и Морской научно-исследовательской лаборатории (Вашингтон, Ричмонд), в Национальном Бюро стандартов США, в Национальной физической лаборатории (Теддингтон) и Лаборатории CNET (Банье, Франция). Нуль-пункт шкалы А1 совпадает с моментом 1958, янв. 1, 0<sup>h</sup> UT2.

Шкала NBS-A строится в Национальном Бюро стандартов США.

Шкала А3 (старая) — основная шкала, созданная осреднением показаний атомных часов в Боулдере (США), Невшателе (Швейцария), Теддингтоне (Великобритания). За начало шкалы А3 принят момент 1958, янв. 1, 0<sup>h</sup> UT.

Шкала АМ — средняя шкала атомного времени, полученная осреднением всех функционирующих атомных часов. Нуль-

пункт шкалы АМ совпадает с тем же моментом 1958, янв. 1, 0<sup>h</sup> UT. В последнее время она больше не строится.

*Шкала АЗ (новая)* введена с 1 января 1966 г. как средне-взвешенная шкала, вычисленная по показаниям всех атомных часов, связанных с ВИН; при этом веса всех атомных часов приняты равными единице, кроме NBS, для которых вес принят равным пяти.

*Шкала атомного времени ТА-1* принята в СССР и основана на двух кварцевых часах, регулируемых цезиевым эталоном частоты. Нуль-пункт шкалы ТА-1 совпадает с моментом 1964, янв. 1, 12<sup>h</sup> UT<sub>2</sub>, т. е. в этот момент ТА-1 = UT<sub>2</sub>. Разности шкал UT<sub>2</sub> — ТА-1 публикуются в Бюллетене «Эталонное время» с 1965 г. Необходимо отметить, что время UT<sub>2</sub>, отнесенное к системе советских служб времени, отличается от системы сводных моментов UT<sub>2</sub> def, публикуемой Бюро ВИН, на несколько мсек.

Шкала всемирного согласованного времени UTC введена для передачи несогласующихся между собой систем времени АТ и UT<sub>2</sub> при помощи одних и тех же радиосигналов времени. Выполнение соотношений

$$\text{UTC} = \left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu}\right) \text{AT} + B,$$

$$|\text{UT}_2 - \text{UTC}| < 100 \text{ мсек}$$

(*B* означает величину скачка в моментах подачи сигналов,  $\Delta\nu/\nu = 5 \cdot 10^{-10} n$  — относительное изменение частоты  $\nu$  атомного эталона) обеспечивает наиболее точное представление квази-равномерного времени UT<sub>2</sub> шкалой UTC.

*Шкала атомного времени со скачками (ступенчатая шкала)* TAS связана со шкалой атомного времени АТ соотношением вида

$$\text{TAS} = \text{AT} + B,$$

где величина скачка *B* может быть кратной  $\pm 100$  мсек и выбирается так, чтобы время шкалы TAS было как можно ближе к времени UT<sub>2</sub>.

В соответствии с рекомендациями XIV Генеральной конференции мер и весов, принятыми в октябре 1971 г., в настоящее время введено Международное атомное время IAT, определяемое как «...координата временной ориентировки, установленная Международным Бюро времени на основе показаний часов атомных, функционирующих в различных учреждениях в соответствии с определением секунды SI — единицы времени Международной системы единиц».

Связь системы атомного времени IAT с системой эфемеридного времени ET определяется через посредство системы



всемирного времени UT1 соотношением

$$\Delta T(A) = \text{IAT} + 32^{\text{s}},18 - \text{UT1}.$$

Числовые значения поправки  $\Delta T(A)$  даны в табл. 17—19. Здесь же приведены значения разности  $\text{UT1} - \text{UTC} = \Delta \text{UT1}$ , о коде передачи которой по радио см. ниже. Величина  $\Delta T(A)$  дает первое приближение к поправке  $\Delta T$  за эфемеридное время,  $\Delta T = \text{ET} - \text{UT}$ . Отметим, что при необходимости отнесения положений Луны к системе фундаментального каталога FK4 следует до интерполирования лунной эфемериды, вычисленной на основе теории движения Луны  $j = 2$ , уменьшить величину  $\Delta T(A)$  на  $1^{\text{s}},34$ .

Естервинтер и Коген в работе, связанной с выводом новых элементов орбит больших планет и Луны, определили экстраполированные значения разностей  $\text{ET0} - \text{UT2}$ ,  $\text{AT} - \text{UT}$ ,  $\text{AT} - \text{ET}$ , которые приводятся в табл. 20.

В соответствии с решениями Международного консультативного комитета по радиосвязи CCIR начиная с эпохи 1972, янв. 1,0 в системе координированного всемирного времени UTC в качестве единицы принята секунда SI, т. е. секунда системы атомного времени IAT. При этом разность показаний часов, функционирующих в системах UTC и UT1, не должна превышать 700 мсек. В связи с важностью для целей навигации и геодезии системы времени UT1 комиссия 31 МАС на XIV Генеральной ассамблее МАС (август 1970 г., Брайтон, Англия) рекомендовала передавать поправки к радиосигналам времени в форме разности  $\text{UT1} - \text{UTC}$ . Таким образом, система UTC должна быть близкой к UT1. Если разность  $\text{UT1} - \text{UTC}$  превосходит по абсолютной величине 0,7 сек, то в системе UTC делается скачок в 1 сек, т. е. пропускается или вводится лишняя секунда в серии секундных сигналов в зависимости от знака этой разности. Связь систем времени IAT и UTC определяется соотношением вида

$$\text{IAT} - \text{UTC} = A_1 + B_1(\text{JD} - T_0),$$

где  $A_1$ ,  $B_1$  — числовые коэффициенты,  $T_0$  — некоторая начальная эпоха. Например, для интервала 1968, дек. 1 — 1972, янв. 1

$$\text{IAT} - \text{UTC} = 4^{\text{s}},2131700 + 0^{\text{s}},002592(\text{JD} - 2439126,5),$$

где счет юлианских суток JD ведется в системе UT.

С целью получения разности  $\text{IAT} - \text{UTC}$  до целых 10 сек в систему UTC был введен скачок в  $-0^{\text{s}},1077580$ . Таким образом, до момента 1971, дек. 31,  $23^{\text{h}} 59^{\text{m}} 60^{\text{s}},107\dots$  в старой системе UTC соотношение между системами IAT и UTC содержало

Таблица 17

Дата	$\Delta T (A)$	$\Delta UT_1$	Дата	$\Delta T (A)$	$\Delta UT_1$	Дата	$\Delta T (A)$	$\Delta UT_1$
1956			1958			1961		
Янв. 1	<sup>s</sup> +31,34	<sup>s</sup> -0,08	Янв. 1	<sup>s</sup> +32,17	<sup>s</sup> -0,04	Янв. 1	<sup>s</sup> +33,58	<sup>s</sup> +0,02
Янв. 4		-0,08	Апр. 1	32,32	-0,05	Апр. 1	33,70	+0,02
Янв. 5		-0,02	Июль 1	32,45	-0,06	Июль 1	33,80	+0,04
Апр. 1	31,43	-0,04	Окт. 1	32,52	-0,01	Июль 31		+0,06
Июль 1	31,52	-0,07	1959			Авг. 1		+0,01
Окт. 1	31,56	-0,01	Янв. 1	+32,67	-0,03	Окт. 1	33,86	+0,04
			Апр. 1	32,80	-0,03			
1957			Июль 1	+32,91	-0,06	1962		
Янв. 1	+31,66	-0,04	Окт. 1	33,00	0,00	Янв. 1	+33,99	+0,04
Апр. 1	31,79	-0,06	1960			Апр. 1	34,12	+0,01
Июль 1	31,92	-0,07	Янв. 1	+33,15	-0,01	Июль 1	34,23	0,00
Окт. 1	32,00	-0,02	Апр. 1	33,28	-0,03	Окт. 1	34,31	+0,02
			Июль 1	33,39	-0,02			
			Окт. 1	33,45	+0,03			

Таблица 18

Дата	$\Delta T (A)$	$\Delta UT_1$	Дата	$\Delta T (A)$	$\Delta UT_1$	Дата	$\Delta T (A)$	$\Delta UT_1$
1963			1966			1970		
Янв. 1	<sup>s</sup> +34,47	<sup>s</sup> -0,03	Янв. 1	<sup>s</sup> +36,54	<sup>s</sup> -0,05	Янв. 1	<sup>s</sup> +40,18	<sup>s</sup> 0,00
Апр. 1	34,58	-0,05	Апр. 1	36,76	-0,03	Апр. 1	40,45	-0,03
Июль 1	34,73	-0,09	Июль 1	36,99	-0,02	Июль 1	40,70	-0,05
Окт. 1	34,83	-0,09	Окт. 1	37,18	+0,02	Окт. 1	40,89	-0,01
Окт. 31		-0,12				1971		
Нояб. 1		-0,02	1967			Янв. 1	+41,16	-0,04
1964			Янв. 1	+37,43	+0,01	Апр. 1	41,41	-0,05
Янв. 1	+35,03	-0,08	Апр. 1	37,65	+0,02	Июль 1	41,68	-0,08
Март 31	35,22	-0,15	Июль 1	37,87	+0,04	Окт. 1	41,92	-0,09
Апр. 1	35,22	-0,05	Окт. 1	38,04	+0,10	Дек. 31	42,22	-0,15
Июль 1	35,40	-0,11				1972		
Авг. 31		-0,11	1968			Янв. 1	+42,22	-0,04
Сент. 1		-0,01	Янв. 1	+38,29	+0,09	Апр. 1	42,52	-0,34
Окт. 1	35,52	-0,02	Янв. 31		+0,09	Июнь 30		-0,64
Дек. 31		-0,11	Февр. 1		-0,01	Июль 1	42,82	+0,36
1965			Апр. 1	38,52	0,00	Окт. 1	43,07	+0,11
Янв. 1	+35,73	-0,01	Июль 1	38,75	+0,01	Дек. 31		-0,19
Февр. 28		-0,06	Окт. 1	38,95	+0,04	1973		
Март 1		+0,04				Янв. 1	+43,37	+0,81
Апр. 1	35,94	0,00	1969			Апр. 1	43,67	+0,51
Июнь 30		-0,08	Янв. 1	+39,20	+0,03	Июль 1	43,96	+0,22
Июль 1	36,14	+0,02	Апр. 1	39,45	+0,02	Окт. 1	44,19	-0,01
Авг. 31		-0,01	Июль 1	39,70	+0,01	Дек. 31		-0,30
Сент. 1		+0,09	Окт. 1	39,91	+0,03	1974		
Окт. 1	36,31	+0,06				Янв. 1	+44,48	+0,70

Таблица 19

Дата	$\Delta T$ (A)	Дата	$\Delta T$ (A)	Дата	$\Delta T$ (A)
1974	s	1975	s	1976	s
Янв. 1	+44,48	Янв. 1	+45,6	Янв. 1	+46,7
Апр. 1	44,8	Апр. 1	45,9	Апр. 1	47,0
Июль 1	45,1	Июль 1	46,2	Июль 1	47,3
Окт. 1	45,3	Окт. 1	46,4	Окт. 1	47,5
				1977	
				Янв. 1	+47,8

Таблица 20

Дата	ЭТО—УТ2	АТ—УТ	АТ—ЕТ	Дата	ЭТО—УТ2	АТ—УТ	АТ—ЕТ
1912,5	s	s	s	1934,5	s	s	s
1913,5	13,0	18,8	5,8	1935,5	23,6	26,3	2,7
1914,5	14,2	20,1	5,9	1936,5	23,6	26,1	2,5
1915,5	15,3	21,4	6,1	1937,5	23,6	26,0	2,4
1916,5	16,4	22,7	6,3	1938,5	23,8	26,2	2,4
1917,5	17,4	24,0	6,6	1939,5	24,0	26,3	2,3
1918,5	18,3	24,6	6,3	1940,5	24,3	26,6	2,3
1919,5	19,1	25,1	6,0	1941,5	24,7	26,9	2,2
1920,5	19,8	25,5	5,7	1942,5	25,2	27,3	2,1
1921,5	20,5	25,8	5,3	1943,5	25,6	27,7	2,1
1922,5	21,1	26,5	5,4	1944,5	26,1	28,2	2,1
1923,5	21,6	27,0	5,4	1945,5	26,6	28,6	2,0
1924,5	22,0	27,5	5,5	1946,5	27,1	29,0	1,9
1925,5	22,3	27,9	5,6	1947,5	27,6	29,4	1,8
1926,5	22,6	28,1	5,5	1948,5	27,6	29,8	1,6
1927,5	22,7	28,1	5,4	1949,5	28,2	30,1	1,2
1928,5	22,8	28,0	5,2	1950,5	28,9	30,3	0,9
1929,5	22,9	27,9	5,0	1951,5	29,4	30,6	0,9
1930,5	23,0	27,6	4,6	1952,5	29,7	30,8	0,5
1931,5	23,2	27,3	4,1	1953,5	30,3	30,9	-0,1
1932,5	23,3	27,0	3,7	1954,5	31,0	31,1	0,0
1933,5	23,5	26,7	3,2				
	23,6	26,5	2,9				

смещение частоты  $\Delta\nu/\nu$  (см. выше; например, 1 фев. 1968 г.  $\Delta\nu/\nu = -300 \cdot 10^{-10}$  и  $B = +0^s,100$ ), а с момента 1972, янв. 1, 0<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> 0<sup>s</sup> в новой системе UTC разность между IAT и UTC выражается целым числом секунд (1 янв. 1973 г. она равна 12<sup>s</sup> в соответствии с Отчетом CCIR) [76, 63].

Как уже было сказано ранее, положительный знак разности UT1 — UTC (в случае превышения 0<sup>s</sup>,7 по абсолютной величине) определяет скачок в одну дополнительную (положительную) секунду, при отрицательном знаке этой разности делается пропуск в одну (отрицательную) секунду. Решения CCIR предусма-

тривают введение скачка (или пропуска) в  $1^{\text{s}}$  в системе UTC в последнюю секунду 31 декабря или 30 июня (а в случае необходимости — в обе эти даты, как это было в 1972 г.). Таким образом, положительная секунда начинается в  $23^{\text{h}} 59^{\text{m}} 60^{\text{s}}$  UTC и оканчивается в  $0^{\text{h}} 0^{\text{m}} 0^{\text{s}}$  UTC первых суток следующего месяца. В случае отрицательной секунды после момента  $23^{\text{h}} 59^{\text{m}} 58^{\text{s}}$  UTC через одну секунду следует момент  $0^{\text{h}} 0^{\text{m}} 0^{\text{s}}$  первых суток следующего месяца.

Поэтому если событие произошло в момент  $t$  в системе UT1, то в случае «лишней» положительной секунды момент события, указанного стрелкой, есть  $23^{\text{h}} 59^{\text{m}} 60^{\text{s},4}$  UTC (рис. 59, а), а в случае отрицательной секунды момент события есть 30 июня,  $23^{\text{h}} 59^{\text{m}} 58^{\text{s},6}$  UTC (рис. 59, б).

Согласно рекомендациям CCIR радиосигналами времени в системе UTC сообщается также приближенная величина разности  $UT1 - UTC = DUT1$  как кратное  $0^{\text{s}},1$ . При этом величина и знак поправки  $DUT1$  определяются числом выделяемых «окрашенных» секунд сигналов и положением группы этих сигналов относительного минутного импульса, отсутствие «окраски» секундных сигналов означает, что  $DUT1 = 0$ . Таким образом, положительное значение  $DUT1$  указывается выделением соответствующего числа  $n$  последовательных секунд сигналов, следующих за минутным сигналом, где  $n$  — целое, меняющееся от 1 до 7 (рис. 60, а):

$$DUT1 = 0^{\text{s}},1 \times n.$$

Отрицательная поправка  $DUT1$  указывается «окраской»  $m$  последовательных секунд сигналов, следующих за девятым секундным сигналом до секундного сигнала  $8 + m$  включительно (рис. 60, б),  $DUT1 = -0^{\text{s}},1 \times m$ .

Необходимо отметить, что советские радиостанции Службы времени в дополнение к информации, передаваемой иностран-

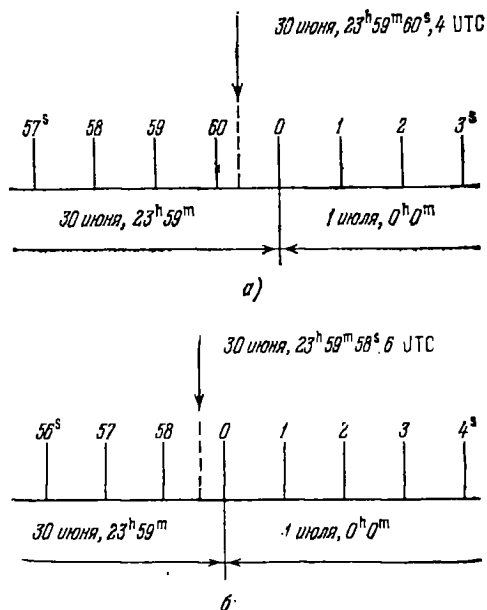


Рис. 59. а) Положительная «дополнительная» секунда. б) Отрицательная «дополнительная» секунда.

ными радиостанциями, работающими в системе координированного времени UTC, передают уточнения к величинам поправок DUT1, кратные  $0^s,02$ , посредством выделения  $p$  секундных

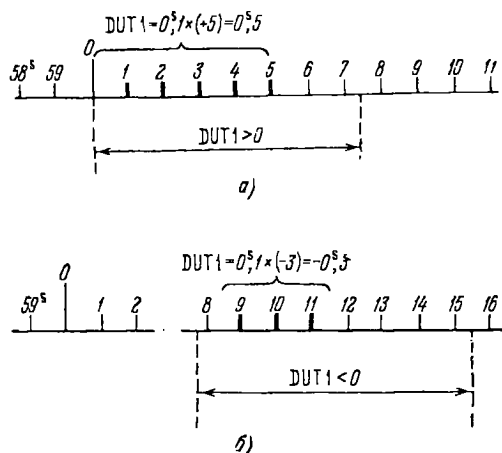


Рис. 60. а) «Окраска» радиосигналов времени при  $DUT1 > 0$ . б) «Окраска» радиосигналов времени при  $DUT1 < 0$ .

сигналов в интервале от 21-й до 24-й секунды для положительной поправки и  $q$  секундных сигналов в интервале от 31-й до 34-й секунды для отрицательной поправки.

### § 3.08. Юлианский период. Юлианские дни

Наряду с общепринятой календарной системой счета суток широкое применение в астрономии нашла система сплошного счета суток (без подразделения на месяцы и годы), предложенная в XVI в. Скалигером и названная им *юлианской*, или *юлианским периодом*. Юлианский период охватывает 7980 лет и начинается в средний гриничский полдень 1 января 4713 г. до н. э.

При помощи юлианского периода решается часто встречающаяся в астрономии задача о числе  $d$  суток, прошедших между двумя заданными датами  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ).

Для этого по таблицам дней юлианского периода (см., например, «Астрономический Ежегодник СССР») находят юлианские даты  $JD(t_1)$ ,  $JD(t_2)$ , соответствующие заданным календарным датам  $t_1$  и  $t_2$  и вычитают более раннюю юлианскую дату  $JD(t_1)$  из поздней  $JD(t_2)$ :

$$d = JD(t_2) - JD(t_1).$$

При этом необходимо иметь в виду, что юлианские даты сохранили свое начало по старому астрономическому счету в гриничский полдень и после 1925 г. Поэтому юлианская дата, соответствующая некоторому моменту определенной календарной даты, будет выражена номером юлианского дня, соответствующим гриничскому полдню этой календарной даты и сопровождаемым долей суток, протекшей после этого полдня. Например, моменту времени (дате)  $t = 1970$  май, 5,725 UT соответствует юлианская дата JD 2440712,225.

В зависимости от системы измерения времени юлианский день и юлианская дата могут относиться как к моментам всемирного времени UT, так и к моментам эфемеридного времени ET. В последнем случае *юлианская эфемеридная дата* JED отличается от *юлианской даты* JD, выраженной в системе всемирного времени UT, на величину  $\Delta T$  — поправки на эфемеридное время.

Юлианский эфемеридный день в этом случае представляет число эфемеридных суток, прошедшее от даты — 4712, янв. 1, 12<sup>h</sup> ET до 12<sup>h</sup> ET времени заданной календарной даты.

Напомним, что фундаментальной эпохе ньюкомовых планетных теорий 1900, янв. 0,12<sup>h</sup> ET соответствует юлианская эфемеридная дата JED 2415020,0.

Для непрерывного счета звездных суток введены аналогичные понятия — *юлианский звездный день* и *юлианская звездная дата*.

Юлианская звездная дата определяется как промежуток звездного времени, протекший от начала юлианского периода до рассматриваемого момента и выраженный в звездных сутках, причем целая часть равна номеру юлианского звездного дня JSD, а дробная часть — гриничскому звездному времени (в звездных сутках). Эти понятия относятся равным образом к истинному и среднему звездному времени.

Юлианская дата JD и юлианская звездная дата JSD связаны соотношениями вида [36]

$$\begin{aligned} \text{JSD} &= + 0,671 + 1,0027379093\text{JD}, \\ \text{JD} &= - 0,669 + 0,9971695664\text{JSD}. \end{aligned}$$

В работах Смитсоновской астрофизической обсерватории введен *модифицированный юлианский период* — система непрерывного счета суток, за начало которой выбрана дата 1858, ноябрь, 17,0 UT = JD 2400000,5; таким образом, модифицированная юлианская дата MJD связана с юлианской датой JD соотношением [49]

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2400000,5.$$

## Глава 4

### АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Под *системой астрономических постоянных* понимают сравнительно небольшую группу параметров, определяющих динамику Солнечной системы, необходимую для предвычисления положений небесных объектов и для редукции и интерпретации их наблюдений. В систему астрономических постоянных включены также *геодезические постоянные*, связанные с Землей. Таким образом, система астрономических постоянных составляет численную основу всех редукционных вычислений в астрономии (см. гл. 2). Так как позиционные наблюдения небесных объектов производятся с поверхности Земли и дают *топоцентрические* положения небесных объектов, то для перехода от точки наблюдения (топоцентра) к центру масс Земли в систему астрономических постоянных включены параметры, характеризующие фигуру и размеры, вращение и гравитационное поле Земли (точнее говоря, земного сфероида, аппроксимирующего с определенной степенью точности реальную Землю). Дальнейшие редукции состоят в переходе к барицентру системы Земля + Луна и к центру масс Солнца, поэтому в систему астрономических постоянных включены параметры геоцентрического движения Луны и гелиоцентрического движения Земли.

Астрономические постоянные составляют совокупность числовых параметров, часть которых определяется из обширных рядов наблюдений (*фундаментальные*, или *основные постоянные*), а значения остальных могут быть выведены из них при помощи определенных теоретических соотношений (*производные постоянные*).

Требование *согласованности* всех принятых числовых значений, постоянных в пределах погрешностей их определения и их *совместности* в смысле точного удовлетворения основных теоретических соотношений, является главным требованием, предъявляемым к системе астрономических постоянных. При этом для астрономических исследований важно сохранение системы астрономических постоянных неизменной в течение возможно более длительного времени. Это необходимо, чтобы

обеспечить единую однородную основу для сравнения теорий движения Солнца, Луны и планет с наблюдениями и последующего анализа расхождений в смысле О—С, цель которого в уточнении всех или по меньшей мере части параметров, лежащих в основе соответствующей теории движения. Поэтому в общепринятой системе астрономических постоянных, независимо от новых определений и уточнений, могут сохраниться старые числовые значения некоторых постоянных.

Подробные сведения об астрономических постоянных можно найти в [37], [50] — [54].

#### **§ 4.01. Новая система астрономических постоянных (система астрономических постоянных МАС 1964)**

Недостатки старой системы астрономических постоянных (принятой в Париже в 1896 г.) в отношении точности числовых значений некоторых постоянных (например, постоянной аберрации  $\kappa$ ) и удовлетворения требованию внутренней согласованности системы привели к необходимости ее ревизии и переопределения.

Попытка построения совершенной системы астрономических постоянных была предпринята де Ситтером [55], который создал внутренне согласованную систему, содержащую 40 постоянных вместе с их вековыми изменениями. Завершил эту работу американский астроном Д. Брауэр. Система де Ситтера — Брауэра отличалась от старой системы астрономических постоянных тем, что в ней были приведены также дифференциальные зависимости между основными и производными постоянными, существенно облегчающие возможность уточнения числовых значений последних при уточнении значений основных постоянных.

Однако некоторые недостатки этой системы, как, например, несоответствие принятого значения постоянной нутации, вычисленного в рамках гипотезы о гидростатическом равновесии Земли, наблюдаемому значению этой постоянной помешали введению системы де Ситтера — Брауэра вместо общепринятой системы 1896 г.

Система де Ситтера — Брауэра была пересмотрена в 1948 г. Клеменсом, построившим новую систему астрономических постоянных и указавшим пути ее введения в практику. Исследования Клеменса имеют огромное значение, так как в них впервые рассмотрены вопросы введения равномерного (ньютонова) времени, названного впоследствии *эфемеридным временем* (см. § 3.05).

Во время работы симпозиума МАС № 21 по проблеме «Астрономические постоянные» (Париж, 1963) для подготовки проекта новой системы астрономических постоянных была



создана специальная рабочая группа, в задачи которой входило назначение числовых величин основных астрономических постоянных: астрономической единицы в метрах, скорости света в километрах в секунду, экваториального радиуса Земли, динамического коэффициента формы Земли, геоцентрической гравитационной постоянной, массы Луны, среднего сидерического движения Луны. Симпозиум рекомендовал сохранить прежние числовые значения постоянных прецессии и нутации [54].

Рабочая группа подготовила проект новой системы астрономических постоянных, которая под названием «Система астрономических постоянных МАС» была принята и утверждена на XII Генеральной ассамблее МАС (Гамбург, 1964). Ниже приводится выдержка из отчета Исполкому МАС рабочей группы, содержащая систему астрономических постоянных МАС с подробными комментариями [37].

### 1. Система астрономических постоянных МАС.

#### *Определяющие постоянные*

1. Число эфемеридных секунд в одном тропическом году (1900) . . . . .  $s = 31556925,9747$
2. Гауссова гравитационная постоянная, определяющая астрономическую единицу (а. е.) . . . . .  $k = 0,01720209895$

#### *Основные постоянные*

3. Мера (длина) 1 а. е. в м .  $A = 149600 \cdot 10^6$
4. Скорость света (м/сек) . .  $c = 299792,5 \cdot 10^3$
5. Экваториальный радиус Земли, м . . . . .  $a_e = 6\,378\,160$
6. Динамический коэффициент формы Земли . . .  $J_2 = 0,0010827$
7. Геоцентрическая гравитационная постоянная ( $\text{м}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ ) . . . . .  $fE = 398\,603 \cdot 10^9$
8. Отношение масс Луны и Земли . . . . .  $\mu = 1/81,30$
9. Сидерическое среднее движение Луны (рад/сек) (1900) . . . . .  $n_{\zeta}^* = 2,661699489 \cdot 10^{-6}$
10. Общая прецессия в долготе за тропическое столетие (1900) . . . . .  $p = 5025'',64$
11. Наклон эклиптики (1900) .  $\varepsilon = 23^\circ 27' 08'',26$
12. Постоянная нутации (1900)  $N = 9'',210$

*Вспомогательные постоянные и коэффициенты*

Постоянная $k/86\,400$ , употребляемая, когда за единицу времени принята 1 сек . . .	$k' = 1,990983675 \cdot 10^{-7}$
Число секунд дуги в одном радиане . . . . .	206 264",806
Коэффициент для постоянной aberrации (прим. 15) . . .	$F_1 = 1,000142$
Коэффициент для среднего расстояния Луны (прим. 20)	$F_2 = 0,999093142$
Коэффициент для параллактического неравенства (прим. 23) . . . . .	$F_3 = 49853",2$

*Производные постоянные*

13. Параллакс Солнца . . .	$\arcsin(a_e/A) = \pi_{\odot} =$ $= 8",79405 (8",794)$
14. Световой промежуток для единичного расстояния (световое уравнение) . .	$A/c = \tau_A = 499^s,012 =$ $= 1^s/0,00200396$
15. Постоянная aberrации . .	$F_1 k' \tau_A = \kappa = 20",4958 (20",496)$
16. Сжатие Земли . . . . .	$\alpha = 0,0033529 = 1/298,25$
17. Гелиоцентрическая гравитационная постоянная ( $m^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ ) . . . . .	$A^3 k'^2 = fS = 132718 \cdot 10^{15}$
18. Отношение масс Солнца и Земли	$(fS)/(fE) = S/E = 332\,958$
19. Отношение масс Солнца и системы Земли + Луна . .	$S/E(1 + \mu) = 328\,912$
20. Возмущенное среднее расстояние Луны ( $m$ ) . . . .	$F_2 \{fE(1 + \mu)/n_{\zeta}^{*2}\}^{1/3} = a_{\zeta} =$ $= 384\,400 \cdot 10^3$
21. Постоянная синуса параллакса Луны . . . . .	$a_e/a_{\zeta} = \sin \pi_{\zeta} = 3422",451$
22. Постоянная лунного неравенства . . . . .	$\frac{\mu}{1 + \mu} \frac{a_{\zeta}}{A} = L =$ $= 6",43987 (6",440)$
23. Постоянная параллактического неравенства . . . . .	$F_3 \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{a_{\zeta}}{A} = P_{\zeta} = 124",986$

## Система планетных масс

(обратные значения масс)

24. Меркурий	6 000 000	Юпитер	1 047,355
Венера	408 000	Сатурн	3 501,6
Земля + Луна	329 390	Уран	22 869
Марс	3 093 500	Нептун	19 314
		Плутон	360 000

## 2. Примечания к постоянным

1. Значение, данное числу эфемеридных секунд в тропическом году эпохи 1900, заимствовано из определения эфемеридной секунды, которое было принято Международным Комитетом мер и весов [55]. Оно фактически выведено из коэффициента при  $T$ , отсчитываемом в юлианских столетиях по 36 525 суток, в ньюкомовом выражении для геометрической средней долготы Солнца, отнесенной к среднему равноденствию даты. В списке «1900» относится надлежащим образом или к фундаментальной эпохе эфемеридного времени, а именно 1900, янв. 0, 12<sup>h</sup> ET, или к 1900,0; значения постоянных 20—23 относятся также к фундаментальной эпохе. Всюду в отчете под термином «секунда» надлежит понимать «эфемеридную секунду».

2. Значение гауссовой гравитационной постоянной  $k^*$ ) совпадает со значением, принятым МАС в 1938 г., и служит для определения астрономической единицы длины (а. е.), коль скоро уже определены соответствующие (астрономические) единицы массы и времени.

Единицей массы является масса Солнца, а единицей времени — эфемеридные сутки, равные 86 400 эфемеридным секундам. Единицы  $k : (\text{а. е.})^{3/2}$  (эфемеридные сутки)<sup>-1</sup> (масса Солнца)<sup>-1/2</sup>. Для упрощения приводимых ниже уравнений введена вспомогательная постоянная  $k'$ , определяемая как  $k/86400$ , и в списке дано ее округленное значение.

3. Значение меры астрономической единицы в метрах является округленным значением из последних радарных определений.

4. Значение скорости света рекомендовано Международным физическим союзом в сентябре 1963 г.

5. Термин «экваториальный радиус Земли» относится к экваториальному радиусу эллипсоида вращения, аппроксимирующего геоид (см. также прим. 16).

\*) С гауссовой гравитационной постоянной  $k$  связана постоянная тяготения Кавендиша  $f : f = k^2$ . Современные определения дают для  $f$  в системе CGS значение  $f = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-8}$ . Наряду с указанным обозначением принято обозначение  $G$ .

6. Термин «динамический коэффициент формы Земли» относится к коэффициенту второй гармоники в выражении гравитационного потенциала Земли, принятом Комиссией № 7 МАС в 1961 г. (см. также прим. 16).

7. Геоцентрическая гравитационная постоянная  $fE$  предназначена для применения в случае геоцентрических орбит, когда единицами длины и времени являются метр и секунда;  $E$  означает массу Земли, включая ее атмосферу.

Третий закон Кеплера для тела массы  $M$ , движущегося по невозмущенной эллиптической орбите вокруг Земли, можно записать в виде

$$fE \left(1 + \frac{M}{E}\right) = n^2 a^3,$$

где  $n$  — сидерическое среднее движение в радианах в секунду,  $a$  — среднее расстояние в метрах. Значение  $fE$  основано на измерениях силы тяжести и наблюдениях ИСЗ.

8. Снова в массу Земли включена масса атмосферы. Обратное значение числа 81,30 равно 0,0123001.

9. Это значение для сидерического среднего движения Луны согласуется со значением тропического среднего движения, используемым в The Improved Lunar Ephemeris, уменьшенным на величину общей прецессии в долготе.

10—12. Значения главных постоянных, определяющих относительные положения и движения экватора и эклиптики, являются общепринятыми, используемыми в настоящее время. Векорые члены и производные величины уже табулированы в других местах.

13. Для параллакса Солнца следует применять округленное значение  $8'',794$ , кроме тех случаев, когда требуются дополнительные знаки, чтобы обеспечить численную согласованность.

14. Значение светового промежутка для единичного расстояния численно равно числу световых секунд в одной астрономической единице. Его обратная величина равна скорости света в астрономических единицах в секунду.

15. С точностью до коэффициента  $F_1$  постоянная аберрации равна отношению скорости некоторой фиктивной планеты пренебрежимо малой массы, движущейся по круговой орбите единичного радиуса, к скорости света; она обычно выражается в секундах дуги умножением на число секунд в одном радиане. Коэффициент  $F_1$  равен отношению средней скорости Земли к скорости фиктивной планеты и задан формулой

$$F_1 = \frac{n_{\odot}}{k'} \frac{a_{\odot}}{(1 - e^2)^{1/2}},$$

где  $n_{\odot}$  — сидерическое среднее движение Солнца в радианах в секунду,  $a_{\odot}$  — возмущенное среднее расстояние Солнца в астрономических единицах и  $e$  — средний эксцентриситет орбиты Земли.

Ньюкомовы значения для  $n_{\odot}$ ,  $a_{\odot}$  и  $e$  достаточно точны для этой цели. Значения коэффициента  $F_1$  и постоянной аберрации  $\kappa$  даны в табл. 21.

Следует применять округленное значение  $20''{,}496$ , за исключением тех случаев, когда требуются дополнительные знаки, чтобы обеспечить численную согласованность.

Таблица 21

Эпоха	$F_1$	$\kappa$
1800	1,0001427	$20''{,}49583$
1900	1,0001420	$20,49582$
2000	1,0001413	$20,49581$

16. Из условия, что референц-эллипсоид вращения для Земли должен быть уровенной поверхностью, вытекает, что для определения ее геометрической формы и внешнего гравитационного поля достаточно трех

параметров, если известны угловая скорость вращения ( $\omega$ ) Земли и относительная масса атмосферы ( $\mu_a$ ). Переменностью скорости вращения Земли можно пренебречь; значение имеет только масса атмосферы. Необходимые числовые величины —

$$\omega = 0,000072921 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad \mu_a = 0,000001.$$

Выражения для сжатия  $\alpha$  и наблюдаемого значения ускорения силы тяжести на экваторе  $g_e$  в терминах основных постоянных с точностью до второго порядка имеют вид

$$\alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m + \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{15}{28} J_2 m - \frac{39}{56} m^2,$$

$$g_e = (fE/a_e^2) \left( 1 - \mu_a + \frac{3}{2} J_2 - m + \frac{27}{8} J_2^2 - \frac{6}{7} J_2 m + \frac{47}{56} m^2 \right),$$

где  $m = a_e \omega^2 / g_e$  получается последовательными приближениями. Новое значение  $\alpha$  дано здесь только для астрономических поправок (поправки за параллакс и т. д.).

17. Гелиоцентрическая гравитационная постоянная соответствует  $fS$ , но предназначена для гелиоцентрических орбит, когда единицами являются метр и секунда.

18—19. Производные значения масс Земли и системы Земля + Луна отличаются от общепринятых в настоящее время, но они не будут введены до тех пор, пока не будет пересмотрена вся система планетных масс в целом (см. прим. 24).

20. Возмущенное среднее расстояние Луны равно большой полуоси вариационной орбиты Хилла и отличается от большой

полуоси, вычисленной по закону Кеплера, коэффициентом  $F_2$ , который зависит от хорошо определенного отношения средних движений Солнца и Луны [56].

21. Постоянная синуса параллакса для Луны обычно выражается в секундах дуги умножением на число секунд дуги в одном радиане. Соответствующее значение самого  $\pi_{\zeta}$  равно  $3422''{,}608$ .

22. Постоянная лунного неравенства определяется данной формулой и обычно выражается в секундах дуги.

23. Постоянная параллактического неравенства определяется данным выражением; коэффициент  $F_3$  согласуется с соответствующими величинами в «Таблицах» Брауна.

24. Система планетных масс является принятой в текущих эфемеридах, и значения, данные для обратных величин масс, включают массы атмосфер и спутников. Значение для Нептуна равно принятому в численном интегрировании уравнений движения внешних планет; значение, используемое в ньютонических теориях внутренних планет, равно 19 700. В планетной теории принятое отношение массы Земли к массе Луны равно 81,45 (тогда как в лунной теории 81,53) и отношение массы Солнца к массе одной только Земли равно 333 432. Эта система масс должна быть пересмотрена в течение нескольких ближайших лет, когда будут получены улучшенные значения для масс внутренних планет, основанные на анализе движения космических зондов.

3. Поправочные коэффициенты и пределы. С точностью до первого порядка относительные погрешности производных постоянных заданы формулами

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \pi_{\odot}}{\pi_{\odot}} &= \frac{\Delta a_e}{a_e} - \frac{\Delta A}{A}, & \frac{\Delta \tau_A}{\tau_A} &= \frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta c}{c}, \\ \frac{\Delta \kappa}{\kappa} &= \frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta \tau_A}{\tau_A}, & \frac{\Delta \alpha}{\alpha} &= \frac{\Delta J_2}{J_2}, \\ \frac{\Delta(fS)}{fS} &= \frac{3 \Delta A}{A}, & \frac{\Delta\left(\frac{S}{E}\right)}{\frac{S}{E}} &= -\frac{\Delta(fE)}{fE} + \frac{3 \Delta A}{A}, \\ \frac{\Delta\left(\frac{S}{E(1+\mu)}\right)}{\frac{S}{E(1+\mu)}} &= \frac{3 \Delta A}{A} - \frac{\Delta(fE)}{fE} - \frac{\Delta \mu}{1+\mu}, \\ \frac{\Delta a_{\zeta}}{a_{\zeta}} &= \frac{1}{3} \frac{\Delta(fE)}{fE} - \frac{2}{3} \frac{\Delta n_{\zeta}^2}{n_{\zeta}^2} + \frac{1}{3} \frac{\Delta \mu}{1+\mu}, & \frac{\Delta \sin \pi_{\zeta}}{\sin \pi_{\zeta}} &= \frac{\Delta a_e}{a_e} - \frac{\Delta a_{\zeta}}{a_{\zeta}}, \\ \frac{\Delta L}{L} &= \frac{\Delta \mu}{\mu(1+\mu)} + \frac{\Delta a_{\zeta}}{a_{\zeta}} - \frac{\Delta A}{A}, & \frac{\Delta P_{\zeta}}{P_{\zeta}} &= -\frac{2 \Delta \mu}{1-\mu^2} + \frac{\Delta a_{\zeta}}{a_{\zeta}} - \frac{\Delta A}{A}. \end{aligned}$$

Предполагается, что истинные значения основных постоянных заключены в следующих пределах:

$A (149\,597 + 149\,601) \cdot 10^6 \text{ м}$	$\mu^{-1} 181,29 + 81,31$
$c (299\,792 + 299\,793) \cdot 10^3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$	$n_{\zeta}^*$ верно с точностью до приведенных знаков
$a_e 6\,378\,080 + 6\,378\,249 \text{ м}$	$p 5026'',40 + 5026'',90$
$I_2 0,0010824 + 0,0010829$	$e 23^{\circ}27'08'',16 + \dots 08'',36$
$fE (398\,600 + 398\,606) \cdot 10^9 \text{ м}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$	$N 9'',200 + 9'',210$

Соответственно пределы для производных постоянных равны:

$\pi_{\odot} 8'',79388 + 8'',79434$	$\alpha^{-1} 298,33 + 298,20$
$\tau_A 499^s,001 + 499^s,016$	$a_{\zeta} (384\,399 + 384\,401) \cdot 10^3 \text{ м}$
$\kappa 20'',4954 + 20'',4960$	$\sin \pi_{\zeta} 3422'',397 + 3422'',502$
$fS (132710 + 132721) \cdot 10^{15} \text{ м}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$	
$S/E 332\,935 + 332\,968$	$L 6'',4390 + 6'',4408$
$S/E (1 + \mu) 328\,890 + 328\,922$	$P_{\zeta} 124'',984 + 124'',989$

Система астрономических постоянных МАС вводится во все основные астрономические ежегодники (кроме французского ежегодника «*Connaissance des Temps*»), начиная с выпусков на 1968 г. Переход к новым значениям постоянных осуществляется при этом непосредственно перевычислением эфемерид с новыми значениями соответствующих постоянных, табуляцией значений соответствующих дифференциальных поправок к Луне, опубликованным эфемеридным величинам, указанием аналитических формул для вычисления этих поправок. Этой цели служат, в частности, «Приложения к Астрономическому Ежегоднику СССР», опубликованные к выпуску Ежегодника на 1968—1971 гг.

#### § 4.02. Задачи астродинамики и астрономические постоянные

Требования, предъявляемые астрономией и астродинамикой к системе астрономических постоянных, качественно различны. При астрономических исследованиях необходима система строго согласованных и совместных значений астрономических постоянных, пригодная для вычисления эфемерид и редукции наблюдений небесных тел в течение многих десятилетий. При решении задач астродинамики необходимо знать с максимальной точностью значения всех тех астрономических постоянных, с которыми связано проведение определенного «космического» эксперимента, даже если они не согласуются со значениями остальных применяемых постоянных. Поэтому для астродинамики важное значение имеет непрерывное улучшение и уточнение постоянных, их соответствие современным наблюдениям. Таким образом, значе-

ние одной и той же астрономической постоянной, применяемое в классической эфемеридной астрономии, может существенно отличаться от значений этой же постоянной, применяемых в астродинамике.

Кроме того, для решения задач астродинамики необходимы основные параметры планет, характеризующие их сферы гравитационного действия, время перелета между орбитами и т. п.

### § 4.03. Результаты радиолокационных определений астрономической единицы в км

Развитие радиоастрономических методов наблюдения дало интересные и важные результаты в области определения точных расстояний до ближайших небесных тел непосредственно в километрах по измерениям времени запаздывания отраженного сигнала относительно момента посылки начального импульса.

Ниже приведена сводка некоторых определений астрономической единицы на крупнейших радиоастрономических обсерваториях мира ( $c = 299792,5$  км/сек)

1960, Мак Гуайр, Моррисон, Уонг . . . . .	149 540 000 ± 13 600
1961, СССР, ИРЭ, Котельников . . . . .	149 599 500 ± 800
1961, Манчестерский университет, Джодрелл Бэнк	149 601 000 ± 5 000
1961, MIT, Лаборатория им. Линкольна, Миллстоун	149 597 850 ± 400
1961, JPL, Голдстоун . . . . .	149 598 845 ± 250
1962, NBS, Джикамарка . . . . .	149 597 400 ± 600
1962, Манчестерский университет, Джодрелл Бэнк	149 596 600 ± 900
1962, JPL, Голдстоун . . . . .	149 598 900 ± 670
1964, СССР, ИРЭ, Котельников . . . . .	149 598 000 ± 130
1964, JPL, Голдстоун . . . . .	149 598 388 ± 500
1969 Мельбури, Малхолланд, Сегрен, Стариз . . . .	149 597 892,6 ± 200

В результате обработки 5-летнего ряда радиолокационных наблюдений Меркурия и Венеры сотрудники Лаборатории им. Линкольна (Массачусетский технологический институт, США) под руководством И. Шапиро получили следующее значение световой астрономической единицы  $\tau_A$ :

$$\tau_A = 499^s,004780 \pm 0^s,000001.$$

### § 4.04. Значения масс больших планет

В Системе астрономических постоянных МАС 1964 г. времени приняты старые значения масс больших планет, определенные Хиллом и Ньюкомом. Однако исследования последних лет дают разнообразные новые значения, основанные на анализе траекторных измерений при полетах космических зондов, а также на обработке наблюдений малых планет и спутников. Эти значения частично приведены в табл. 22.



Т а б л и ц а 22

Планета	$m^{-1}$	Исследователи
Меркурий	6 120 000±43 000	Рабе, 1949
	5 970 000±460 000	Данком, 1956
	6 480 000±350 000	Брауэр, 1950
	5 980 000±170 000	Бохан и Маковер, 1961
	6 110 000±40 000	Клеменс, 1967
	6 021 000±53 000	} Эш, Шапиро, Смит, 1967
	[6 029 000±53 000] *)	
	5 983 000±10 000	Мелбурн, 1968
	6 039 000±15 000	1969
	5 931 000±65 000	Лизке и Налл, 1969
	5 941 000±9 600	} Эш, Шапиро, Смит, 1971
	6 025 000±15 000	
	6 020 000±3 000	Эш и др., 1971
	409 300±1 400	Клеменс, 1943
406 645±208	Рабе, 1949	
408 539,5±12,0	Эндерсон, Налл, Торнтон, 1963	
408 539±12	Клеменс, 1964	
408 250±120	} Эш, Шапиро, Смит, 1967	
[408 450±120] *)		
408 526±30	} Мелбурн, 1968 (Маринер-2)	
408 508±6		
408 522±5	} Эндерсон, Эфрон, Мелбурн, 1968 (Маринер-5)	
408 521,8±1,0		
408 522,7±2,0	Данком, 1965	
408 945±300	Эндерсон, Моттингер	
408 523,5±1,0	Рабе, 1949	
328 452±43	} Рабе, 1967	
328 890±16		
328 900±15	} Рабе и Фрэнсис, 1967	
328 939±40		
328 898±3 **)	Рабе и Фрэнсис, 1968	
328 900±1	Сёгрен, 1966	
328 900,2±0,4	Мелбурн, 1968	
328 915±4	Лизке, 1968	
328 900±60	} Эш, Шапиро, Смит, 1967	
[328 950±60] *)		
3 110 000±7 700	Рабе, 1949	
3 079 000±5 700	Юри, 1952	
3 111 000±9 000	} Эш, Шапиро, Смит, 1967	
[3 107 000±9 000] *)		
3 094 000±3 000	Уилкинз, 1967	
3 098 600±600	} Налл, 1969 (Маринер-4)	
3 098 700±100		
3 098 714±5	} (Маринер-9)	
3 098 720±70		
3 098 697±100	Эндерсон, Эфрон, Уонг, 1970	

Продолжение табл. 22

Планета	$m^{-1}$	Исследователи
Юпитер	1 047,378 ± 0,121	Хилл, 1898
	1 047,57 ± 0,06	Остен, 1928
	1 047,41 ± 0,40	Д. К. Куликов, 1950
	1 047,39 ± 0,03	Брауэр и Клеменс, 1961
	1 047,41 ± 0,20	Клеменс, 1964
	1 047,381 ± 0,013	
	1 047,445 ± 0,043	Клепчинский, 1964
	1 047,387 ± 0,008	О'Хэндли, 1968
	1 047,381 ± 0,020	Клепчинский, 1967
	1 047,387 ± 0,004	О'Хэндли, 1968
	1 047,375 ± 0,050	Хергет, 1968
	1 047,3908	Мелбурн, 1968
	1 047,386 ± 0,041	Анник Бек, 1969
	1 047,341 ± 0,011	Яничек, 1971
	1 047,314 ± 0,031	Черных, 1970
1 047,352 ± 0,003	Полявьева и Эдельман, 1972	
Сатурн	3 497,64 ± 0,27	Герц, 1953
	3 494,8 ± 2,0	Джеффриз, 1954
	3 499,7 ± 0,4	Клеменс, 1960
	3 498,7 ± 0,2	Клепчинский, 1970
	3 501,47 ± 1,75	Гарсиа, 1972
Уран	23 239 ± 89	Хилл, 1898
	22 802 ± 101	Фан ден Босх, 1927
	22 934 ± 6	Гаррис, 1950
	22 930 ± 6	Клеменс, 1964
	22 692 ± 33	Клепчинский, 1970
	22 945 ± 10	Данхэм, 1971
Нептун	19314	Клеменс, 1953
	19 094 ± 22	Гайо, 1910
	18 889 ± 62	Фан Бизбрук, 1957
	19 070 ± 21	Клеменс, 1964
	19 296 ± 9	Гилл и Гаулт, 1968
Плутон	19 343 ± 23	Клепчинский, 1970
	307 000	Койпер, 1950
	400 000 ± 40 000	Брауэр, 1955
	1 812 000 ± 50 000	Данком и др., 1969
	3 000 000 ± 500 000	Зайдельманн, 1971
	4 000 000 ± 2 000 000	Эш, Шапиро, Смит, 1971

\*) Значения  $m^{-1}$  в квадратных скобках получены из обработки наблюдений с учетом эффектов теории относительности.  
 \*\*) Обратное значение массы системы Земля + Луна соответствует  $fE = -398\ 601,2\ \text{км}^3/\text{сек}^2$ ,  $fM_{\oplus} = 4902,64\ \text{км}^3/\text{сек}^2$ ,  $a_{\oplus} = 384\ 400,2\ \text{км}$  и  $\tau_A = 499^{\circ}004788 \pm 0^{\circ}000015$  (секунды шкалы А.1).

### § 4.05. Астродинамические характеристики тел Солнечной системы

При движении объекта в пределах Солнечной системы по гелиоцентрической орбите главной силой, определяющей это движение, является сила тяготения Солнца, а притяжение планет вызывает возмущения, обуславливающие отклонение реального движения от кеплерова, или невозмущенного, движения. Однако при сближении с какой-либо планетой рассматриваемый объект попадает в *область притяжения* этой планеты, в каждой точке которой планета притягивает объект сильнее Солнца. Границей области притяжения является сфера радиуса  $R_G$ . Значения радиусов сфер — областей притяжения (*гравитационных сфер*) для планет приведены в табл. 23 (по Г. А. Чеботареву и М. Д. Кислику) [58].

Т а б л и ц а 23

Планета	$R_G$ , а. е.	$R_G$ (Чеботарев), млн. км	$R_G$ (Кислик), млн. км
Меркурий	0,00213	0,32	0,36
Венера	0,00972	1,45	1,70
Земля	0,01444	2,16	2,50
Марс	0,01044	1,56	1,80
Юпитер	0,50042	75,0	88,0
Сатурн	0,61845	93,0	108,0
Уран	0,67056	100,0	116,0
Нептун	1,11104	166,0	194,0
Плутон	0,55371	83,0	—

На границе гравитационной сферы притяжения Солнца и соответствующей планеты равны.

При рассмотрении движения объекта, проходящего вблизи планеты  $P$ , всегда можно сравнить величины отношений «возмущающего» ускорения от Солнца  $a_S$  к «основному» ускорению  $a_P$  от планеты в гелиоцентрической и планетоцентрической системах координат, т. е. величины  $[a_S/a_P]_{\text{гел.}}$  и  $[a_S/a_P]_{\text{пл.}}$ . Область пространства, окружающего планету  $P$ , в каждой точке которой имеет место неравенство

$$[a_S/a_P]_{\text{пл.}} < [a_S/a_P]_{\text{гел.}}$$

называется *областью действия* планеты  $P$ , а ограничивающая ее сфера — *сферой действия* планеты. Радиусы сфер действия планет Солнечной системы приведены в табл. 24.

Т а б л и ц а 24

Планета	$R_A \cdot 10^6 \text{ км}$	$R_A \text{ а. е.}$	$R_A$
Меркурий	0,112	0,000747	0,00193
Венера	0,615	0,00411	0,00569
Земля	0,925	0,00619	0,00619
Марс	0,579	0,00387	0,00254
Юпитер	48,1	0,322	0,0619
Сатурн	54,6	0,365	0,0382
Уран	52,0	0,348	0,0181
Нептун	86,9	0,581	0,0193
Плутон	34,0	0,227	0,00574

Числа в последнем столбце дают значения радиусов сфер действия, выраженных в единицах большой полуоси орбиты.

Если объект движется внутри сферы действия планеты  $P$ , то в большинстве случаев выгоднее считать планету центральным телом, а Солнце — возмущающим. В уравнении движения необходимо заменить гелиоцентрическую гравитационную постоянную  $fS$  планетоцентрической гравитационной постоянной  $fm_i$ , где  $m_i$  — масса планеты  $P_i$  в единицах массы Солнца. Значения планетоцентрических гравитационных постоянных  $fm_i$  даны в табл. 25 вместе с соответствующими массами и экваториальными радиусами планет.

Т а б л и ц а 25

Планета	$1/m$	$a_e \text{ км}$	$fm \text{ а. е.}^2/\text{сутки}^2$	$fm \text{ км}^2/\text{сек}^2$
Солнце	1	695 992	$2,959122083 \cdot 10^{-4}$	$1,32715445 \cdot 10^{11}$
Меркурий	6 120 000	2 424	$4,835167 \cdot 10^{-11}$	$2,168553 \cdot 10^4$
Венера	408 539,5	6 100	$7,2431725 \cdot 10^{-10}$	$3,2485340 \cdot 10^5$
Земля	332 951,3	6 378,15	$8,887552 \cdot 10^{-10}$	$3,986032 \cdot 10^5$
Марс	3 088 000	3 412	$9,582649 \cdot 10^{-11}$	$4,297780 \cdot 10^4$
Юпитер	$1\ 047,39$	71 420	$2,825234 \cdot 10^{-7}$	$1,267106 \cdot 10^9$
Сатурн	3 500	60 440	$8,454635 \cdot 10^{-8}$	$3,791870 \cdot 10^7$
Уран	22 869	24 860	$1,293945 \cdot 10^{-8}$	$5,803292 \cdot 10^6$
Нептун	18 889	26 500	$1,566585 \cdot 10^{-8}$	$7,026072 \cdot 10^6$
Плутон	430 000	7 250	$7,397895 \cdot 10^{-10}$	$3,317886 \cdot 10^5$

В работах Лаборатории реактивного движения (США) приняты значения экваториальных радиусов и масс больших планет (и Солнца), приведенные в табл. 26.

В табл. 27, 28 приведены параметры гравитационных полей Марса и Венеры («Маринер-9» и «Маринер-5») соответственно. Табл. 29 содержит параметры, характеризующие форму и размеры планет.

Таблица 26

Планета	$a_e$ , км	$1/m$
Солнце	695 992,0	1
Меркурий	$2\,435,0 \pm 3$	$5\,983\,000 \pm 25\,000$
Венера	$6\,052,0 \pm 3$	$408\,522 \pm 3$
Земля *)	6 378,16	$328\,900,1 \pm 0,3$
Марс	$3\,393,4 \pm 4$	$3\,098\,700 \pm 100$
Юпитер	71 372,0	$1\,047,3908 \pm 0,0074$
Сатурн	60 401,0	$3\,499,2 \pm 0,4$
Уран	23 535,0	$22\,930 \pm 6$
Нептун	22 324,0	$19\,260 \pm 100$
Плутон	7 016,0	$1\,812\,000 \pm 40\,000$

\*) В таблице указано значение  $1/m$  для системы Земля+Луна.

Таблица 27

	Значения коэффициентов $\times 10^6$		Значения коэффициентов $\times 10^6$
$J_2$	$196,4 \pm 0,6$	$S_{31}$	$2,6 \pm 0,5$
$C_{22}$	$-5,5 \pm 0,1$	$C_{32}$	$-0,6 \pm 0,2$
$S_{22}$	$3,1 \pm 0,2$	$S_{32}$	$0,3 \pm 0,2$
$J_3$	$3,6 \pm 2,0$	$C_{33}$	$0,48 \pm 0,03$
$C_{31}$	$0,5 \pm 0,4$	$S_{33}$	$0,35 \pm 0,03$

Таблица 28

	Значения коэффициентов $\times 10^6$
$J_2$	$2,7 \pm 0,9$
$C_{22}$	$-0,1 \pm 0,6$
$S_{22}$	$0,5 \pm 0,7$

Таблица 29

	$a_e$ (км)	$a$
Меркурий	$2\,432 \pm 7$	...
Венера	$6\,052 \pm 6$	...
Марс	$3\,402 \pm 8$	$0,0103 \pm 0,0033$
Юпитер	$70\,850 \pm 100$	$0,0607 \pm 0,0020$
Сатурн	$60\,000 \pm 240$	$0,1092 \pm 0,0057$
Уран	$25\,400 \pm 280$	$0,028 \pm 0,016$
Нептун	$24\,300 \pm 450$	...

Гравитационное поле и фигуру планеты можно характеризовать следующими параметрами: динамическим сжатием  $J_2$ , сжатием эквивалентной (в смысле объема) эллипсоидальной поверхности равного потенциала  $\alpha$ , экваториальным радиусом  $a_e$ , геометрическим сжатием  $\alpha_g \equiv (a_e - b)/a_e$ . Их числовые значения для некоторых больших планет приведены в табл. 30 [77].

Таблица 30

Планета	$J_2$	$\alpha^{-1}$	$a_e$ (км)	$\alpha_g^{-1}$
Земля	$(1\ 082,65 \pm 0,01) \cdot 10^{-6}$	298,247	$6\ 378,16 \pm 0,02$	$298,25 \pm 0,05$
Марс	$(1\ 948 \pm 2) \cdot 10^{-6}$	$191,2 \pm 0,7$	$3\ 402 \pm 8$	$97 \pm 25$
Юпитер	$(14,71 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$	$15,6 \pm 0,1$	$70\ 850 \pm 100$	$16,5 \pm 0,4$
Сатурн	$(16,67 \pm 0,03) \cdot 10^{-3}$	$9,8 \pm 0,1$	$60\ 000 \pm 240$	$10,9 \pm 0,4$
Уран	$(13 \pm 1) \cdot 10^{-3}$	$21 \pm 2$	$25\ 400 \pm 280$	$40 \pm 15$
Нептун	$(50 \pm 4) \cdot 10^{-3}$	$49 \pm 3$	$24\ 300 \pm 450$	$49 \pm 9$

Для вычисления гелиоцентрической эфемериды больших планет Солнечной системы в прямоугольных координатах, отнесенных к экватору и равноденствию эпохи  $1950,0 = \text{JD } 2433282,4234$ , можно применить метод численного интегрирования дифференциальных уравнений движения этих планет, воспользовавшись для этой цели начальными значениями координат и компонент скорости в эпоху 1949, дек. 30, 0 ET = JED 2433280,5; эти значения вместе с приводимыми в табл. 31 оскулирующими элементами планетных орбит определяют эфемериду DE 19, применяемую в Лаборатории реактивного движения (JPL, США). Значения  $x, y, z$ ,  $a$  выражены в астрономических единицах,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  — в астрономических единицах в эфемеридные сутки,  $e, i, \Omega, \omega, M_0$  — в радианах,  $n$  — в радианах за эфемеридные сутки. Справа от числового значения указан его порядок (например,  $-02$  соответствует множителю  $10^{-2}$ ).

Необходимо иметь в виду, что эфемерида DE 19 вычисляется при значениях планетных масс, принятых в Системе астрономических постоянных МАС 1964 г. [78].

При вычислении эфемерид малых планет и комет методом совместного численного интегрирования дифференциальных уравнений движения рассматриваемых малых планет (или комет) и возмущающих тел (больших планет Солнечной системы) целесообразно воспользоваться начальными значениями координат и компонент скорости больших планет от Венеры до Плутона, приведенными в табл. 32. Они отнесены к прямоугольной системе отсчета, связанной с экватором и равноденствием эпохи 1950,0, с началом в барицентре Солнца и Меркурия. За эпоху

Таблица 31

Экваториальные прямоугольные координаты		Эклиптические элементы	
<b>Меркурий</b>			
$x = 0,3439\ 2628\ 2595\ 0512$	00	$a = 0,3870\ 9767\ 6143\ 4659$	00
$y = 0,4561\ 2086\ 7296\ 2349$	-01	$n = 0,7142\ 5062\ 8941\ 1173$	-01
$z = -0,1092\ 5237\ 7672\ 6325$	-01	$e = 0,2056\ 2139\ 2696\ 1776$	00
$\dot{x} = -0,8466\ 3252\ 4718\ 1976$	-02	$i = 0,1222\ 3790\ 4101\ 3027$	00
$\dot{y} = 0,2561\ 4777\ 7129\ 3402$	-01	$\Omega = 0,8331\ 9221\ 2035\ 1764$	00
$\dot{z} = 0,1458\ 6762\ 7826\ 5551$	-01	$\omega = 0,5051\ 7122\ 8386\ 4736$	00
		$M_0 = 0,5416\ 5385\ 1667\ 6136$	01
<b>Венера</b>			
$x = 0,1429\ 7052\ 9471\ 8901$	00	$a = 0,7233\ 3519\ 4140\ 1882$	00
$y = 0,6470\ 0406\ 9944\ 5343$	00	$n = 0,2796\ 2279\ 9327\ 9817$	-01
$z = 0,2824\ 8152\ 5073\ 4543$	00	$e = 0,6810\ 9366\ 0405\ 9934$	-02
$\dot{x} = -0,1989\ 3793\ 1396\ 6423$	-01	$i = 0,5923\ 9147\ 6374\ 4428$	-01
$\dot{y} = 0,3113\ 2345\ 4293\ 3853$	-02	$\Omega = 0,1330\ 5193\ 1376\ 6087$	01
$\dot{z} = 0,2659\ 4964\ 8941\ 4391$	-02	$\omega = 0,9562\ 7719\ 8582\ 3581$	00
		$M_0 = 0,5378\ 2134\ 9887\ 7672$	01
<b>Барицентр системы Земля + Луна</b>			
$x = -0,1363\ 6133\ 0110\ 0869$	00	$a = 0,1000\ 0078\ 7236\ 0544$	01
$y = 0,8933\ 9775\ 6948\ 9210$	00	$n = 0,1720\ 1921\ 9320\ 3717$	-01
$z = 0,3874\ 5843\ 1572\ 1408$	00	$e = 0,1675\ 0114\ 1626\ 6023$	-01
$\dot{x} = -0,1732\ 0015\ 4902\ 0189$	-01	$i = 0,3019\ 5435\ 1067\ 9661$	-05
$\dot{y} = -0,2244\ 2676\ 7908\ 6503$	-02	$\Omega = 0,5866\ 9905\ 6919\ 3158$	01
$\dot{z} = -0,9733\ 4185\ 6786\ 7504$	-03	$\omega = 0,2198\ 0752\ 5929\ 5807$	01
		$M_0 = 0,6213\ 6054\ 9876\ 8146$	01
<b>Марс</b>			
$x = -0,1369\ 8312\ 5671\ 4650$	01	$a = 0,1523\ 7494\ 5726\ 3805$	01
$y = 0,8431\ 3716\ 1771\ 0496$	00	$n = 0,9145\ 5781\ 6237\ 8094$	-02
$z = 0,4238\ 3609\ 4908\ 1033$	00	$e = 0,9326\ 0810\ 2118\ 8317$	-01
$\dot{x} = -0,7384\ 5892\ 9362\ 9874$	-02	$i = 0,3228\ 8222\ 5779\ 1756$	-01
$\dot{y} = -0,9477\ 3446\ 0757\ 8137$	-02	$\Omega = 0,8581\ 8453\ 5514\ 8757$	00
$\dot{z} = -0,4151\ 6538\ 4773\ 5353$	-02	$\omega = 0,4991\ 5092\ 0674\ 7051$	01
		$M_0 = 0,2938\ 8519\ 6401\ 7474$	01
<b>Юпитер</b>			
$x = 0,3349\ 3566\ 4461\ 7624$	01	$a = 0,5202\ 6553\ 8209\ 9465$	01
$y = -0,3473\ 7659\ 9386\ 1919$	01	$n = 0,1450\ 2774\ 0969\ 2968$	-02
$z = -0,1572\ 1612\ 0308\ 8752$	01	$e = 0,4891\ 0755\ 7695\ 3513$	-01
$\dot{x} = 0,5585\ 6549\ 6410\ 6917$	-02	$i = 0,2281\ 0075\ 4232\ 1975$	-01
$\dot{y} = 0,4962\ 2486\ 5918\ 9390$	-02	$\Omega = 0,1744\ 6738\ 0279\ 8027$	01
$\dot{z} = 0,1992\ 2660\ 7644\ 6181$	-02	$\omega = 0,4777\ 3851\ 4538\ 7904$	01
		$M_0 = 0,5279\ 6468\ 2494\ 4107$	01

Продолжение табл. 31

Экваториальные прямоугольные координаты		Эклиптические элементы	
Сатурн			
$x = -0,8972\ 4944\ 5632\ 1996$	01	$a = 0,9522\ 6887\ 3876\ 7056$	01
$y = 0,2279\ 7122\ 9499\ 0131$	01	$n = 0,5854\ 6921\ 3211\ 8279$	-03
$z = 0,1330\ 3683\ 2124\ 4373$	01	$e = 0,5349\ 2699\ 3422\ 3929$	-01
$\dot{x} = -0,1858\ 2755\ 1290\ 4143$	-02	$i = 0,4345\ 2611\ 3823\ 3223$	-01
$\dot{y} = -0,4983\ 8513\ 7862\ 8318$	-02	$\Omega = 0,1976\ 5298\ 1653\ 3096$	01
$\dot{z} = -0,1980\ 2491\ 2780\ 6463$	-02	$\omega = 0,5883\ 0963\ 5241\ 1480$	01
		$M_0 = 0,1180\ 0954\ 0981\ 9556$	01
Уран			
$x = -0,1002\ 9132\ 6963\ 7378$	01	$a = 0,1916\ 3718\ 8923\ 4575$	02
$y = 0,1732\ 3491\ 9404\ 7683$	02	$n = 0,2050\ 5541\ 8127\ 4017$	-03
$z = 0,7604\ 8360\ 5654\ 0355$	01	$e = 0,4620\ 9970\ 2713\ 5565$	-01
$\dot{x} = -0,3955\ 2571\ 5130\ 4471$	-02	$i = 0,1347\ 3849\ 5921\ 9508$	-01
$\dot{y} = -0,3759\ 0074\ 7195\ 8835$	-03	$\Omega = 0,1287\ 3633\ 3315\ 9055$	01
$\dot{z} = -0,1088\ 4370\ 6981\ 7871$	-03	$\omega = 0,1703\ 6263\ 2661\ 5070$	01
		$M_0 = 0,5005\ 8317\ 3611\ 7874$	01
Нептун			
$x = -0,2919\ 4267\ 7427\ 1409$	02	$a = 0,3006\ 8940\ 4016\ 5808$	02
$y = -0,7719\ 2336\ 0132\ 2025$	01	$n = 0,1043\ 3151\ 1142\ 8949$	-03
$z = -0,2427\ 2492\ 8084\ 7945$	01	$e = 0,7942\ 6832\ 7095\ 8694$	-02
$\dot{x} = 0,8207\ 8983\ 1005\ 6175$	-03	$i = 0,3098\ 3362\ 6924\ 2442$	-01
$\dot{y} = -0,2772\ 0922\ 4647\ 0526$	-02	$\Omega = 0,2291\ 3580\ 3446\ 3485$	01
$\dot{z} = -0,1156\ 1171\ 1628\ 3100$	-02	$\omega = 0,4587\ 6871\ 3081\ 3981$	01
		$M_0 = 0,2809\ 7734\ 6432\ 2865$	01
Плутон			
$x = -0,2623\ 1756\ 1603\ 1849$	02	$a = 0,3937\ 3641\ 3530\ 0176$	02
$y = 0,2056\ 1529\ 7781\ 2375$	02	$n = 0,6962\ 6357\ 0829\ 8997$	-04
$z = 0,1444\ 3690\ 2947\ 7839$	02	$e = 0,2488\ 0330\ 5362\ 3924$	00
$\dot{x} = -0,1315\ 7218\ 4319\ 3501$	-02	$i = 0,2996\ 7069\ 7085\ 9694$	00
$\dot{y} = -0,2619\ 8366\ 1853\ 7051$	-02	$\Omega = 0,1914\ 3375\ 5010\ 2258$	01
$\dot{z} = -0,4270\ 5125\ 4357\ 5085$	-03	$\omega = 0,1995\ 5817\ 5268\ 9690$	01
		$M_0 = 0,5265\ 3021\ 0022\ 1278$	01

оскуляции выбран момент JED 2430000,5 (1941, янв. 6, 0 ET), координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выражены в астрономических единицах, компоненты скорости  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  — в астрономических единицах за 40 эфемеридных суток. Множители  $\mu_h$ , зависящие от масс  $m_h$  планет и интервала интегрирования  $\omega$  и определяемые формулой

$$\mu_h = \omega^2 k^2 \frac{m_h}{m_\odot}, \quad k = 0,0172020989500 \dots,$$

заданы в табл. 33 [79].



Таблица 32

Венера	$x-0,51139\ 42959$ $y-0,47809\ 76854$ $z-0,18308\ 74810$ $\dot{x}+0,56637\ 68182$ $\dot{y}-0,51208\ 71589$ $\dot{z}-0,26649\ 78745$	Сатурн	$x+6,64145\ 3441$ $y+5,97156\ 9844$ $z+2,18231\ 5015$ $\dot{x}-0,16622\ 88590$ $\dot{y}+0,14627\ 12350$ $\dot{z}+0,06765\ 63647\ 0$
Земля+Луна	$x-0,26149\ 89917$ $y+0,86962\ 37687$ $z+0,37716\ 52157$ $\dot{x}-0,67465\ 73183$ $\dot{y}-0,17009\ 48008$ $\dot{z}-0,07377\ 43192\ 0$	Уран	$x+11,26304\ 125$ $y+14,69525\ 888$ $z+6,27960\ 5833$ $\dot{x}-0,13013\ 08165$ $\dot{y}+0,07588\ 05177\ 9$ $\dot{z}+0,03508\ 96779\ 2$
Марс	$x-1,29547\ 7589$ $y-0,84141\ 36141$ $z-0,35135\ 13446$ $\dot{x}+0,34400\ 42605$ $\dot{y}-0,36966\ 74843$ $\dot{z}-0,17893\ 73952$	Нептун	$x-30,15522\ 934$ $y+1,65700\ 0860$ $z+1,43785\ 8110$ $\dot{x}-0,00961\ 95989\ 84$ $\dot{y}-0,11506\ 57040$ $\dot{z}-0,04688\ 87522\ 6$
Юпитер	$x+3,42947\ 2643$ $y+3,35386\ 9719$ $z+1,35494\ 8917$ $\dot{x}-0,22286\ 47739$ $\dot{y}+0,20227\ 68826$ $\dot{z}+0,09223\ 05178\ 0$	Плутон	$x-21,12383\ 780$ $y+28,44651\ 101$ $z+15,38826\ 655$ $\dot{x}-0,07074\ 48500\ 7$ $\dot{y}-0,08655\ 92722\ 0$ $\dot{z}-0,00594\ 68507\ 13$

Таблица 33

Планеты	$m_{\odot}/m$	$\mu=40^2 k^2 m/m_{\odot}$
Меркурий	6 000 000	
Венера	408 000	1,16044 00324 925—06
Земля + Луна	329 390	1,43738 28387 533—06
Марс	3 093 500	1,53049 79255 114—07
Юпитер	1 047,355	4,52052 58318 044—04
Сатурн	3 501,6	1,35212 34100 324—04
Уран	22 869	2,07031 14839 169—05
Нептун	19 314	2,45138 00002 948—05
Плутон	360 000	1,31516 53701 582—06

Начальные значения прямоугольных координат и компонент скорости для совместного численного интегрирования дифференциальных уравнений движения внешних планет Солнечной

системы Юпитер — Плутон в экваториальной системе отсчета с началом в барицентре Солнца и внутренних планет (Меркурий — Марс) заданы в табл. 34. В ней координаты выражены

Таблица 34

Юпитер	$x+3,42947\ 41518\ 908$ $y+3,35386\ 95971\ 068$ $z+1,35494\ 90171\ 466$ $\dot{x}-0,22286\ 42281\ 7945$ $\dot{y}+0,20227\ 87133\ 1527$ $\dot{z}+0,09223\ 14175\ 6018$	Уран	$\dot{x}-0,13013\ 02676\ 6296$ $\dot{y}+0,07588\ 24087\ 8556$ $\dot{z}+0,03509\ 06129\ 1124$
		Нептун	$x-30,15522\ 68759\ 35$ $y+1,65699\ 96640\ 44$ $z+1,43785\ 75272\ 05$ $\dot{x}-0,00961\ 90501\ 6700$ $\dot{y}-0,11506\ 38130\ 4315$ $\dot{z}-0,04688\ 78172\ 6993$
Сатурн	$x+6,64145\ 54254\ 92$ $y+5,97156\ 95787\ 84$ $z+2,18231\ 49972\ 76$ $\dot{x}-0,16622\ 83105\ 3739$ $\dot{y}+0,14627\ 30891\ 2448$ $\dot{z}+0,06765\ 72853\ 1701$	Плутон	$x-21,12383\ 53379\ 49$ $y+28,44650\ 98142\ 06$ $z+15,38826\ 59679\ 25$ $\dot{x}-0,07074\ 43012\ 4870$ $\dot{y}-0,08655\ 73812\ 1042$ $\dot{z}-0,00594\ 59157\ 2372$
			Уран

в астрономических единицах, а компоненты скорости в астрономических единицах за 40 эфемеридных суток. При этом масса Солнца  $m_{\odot}$  увеличена на сумму масс внутренних планет, так что

$$m = 1,00000597682,$$

т. е.  $\mu = 0,47346236303935$ . Начальная эпоха: JED 2430000,5.

В случае совместного численного интегрирования уравнений движения больших планет от Венеры до Плутона масса Солнца увеличена на величину массы Меркурия; поэтому  $\mu = 0,47345961216687$ .

#### § 4.06. Астродинамические постоянные, связанные с Землей

Внешний гравитационный потенциал Земли  $U$  может быть представлен в следующем виде (см. ч. VI, гл. 1):

$$U = -\frac{fE}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi') (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right] \quad (1.4.01)$$

согласно рекомендации МАС [37].

Часто потенциал  $U$  записывают в другой форме, выделяя *зональные гармоники*  $J_n = -C_{n0}$ :

$$U = -\frac{fE}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \varphi') + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi') (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]. \quad (1.4.02)$$

В формулах (1.4.01) и (1.4.02)  $r$  означает геоцентрический радиус-вектор объекта,  $\lambda$  и  $\varphi'$  — его географическую долготу и геоцентрическую широту,  $a_e$  — экваториальный радиус земного сфероида,  $fE$  — геоцентрическую гравитационную постоянную. Коэффициенты  $P_{nm}$  и  $P_n$  — *присоединенные функции Лежандра и полиномы Лежандра* (см. ч. VI, гл. 1 и ч. IV, гл. 5). Коэффициенты разложений (1.4.01) и (1.4.02) потенциала  $U$  определяются по результатам обработки и анализа наблюдений ИСЗ. Их численные значения приведены в ч. VI, гл. 1.

В настоящее время для характеристики формы Земли принят референц-эллипсоид МАС, заменивший международный земной сфероид Хэйфорда; параметры референц-эллипсоида МАС в сочетании с коэффициентом формы Земли (коэффициентом второй гармоники  $J_2$ ) и значением угловой скорости вращения Земли образуют международную *систему относимости 1967 года*, утвержденную на XIV Генеральной ассамблее Международного геодезического и геофизического союза (МГГС) в Люцерне:

$$\begin{aligned} a_e &= 6\,378\,160 \text{ м}, \\ J_2 &= 10\,827 \cdot 10^{-7}, \\ fE &= 398\,603 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \cdot \text{сек}^{-2}, \\ \omega &= 7,2921151467 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1} \end{aligned}$$

(см. § 4.02).

Отсюда вытекают следующие значения производных параметров:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= 298,2471671, \\ b &= 6\,356\,774,516 \text{ м}, \\ e^2 &= 0,006694605336, \\ e'^2 &= 0,006739725136, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  — сжатие земного сфероида,  $b$  — полярная полуось,  $e$  и  $e'$  — соответственно эксцентриситет меридианного сечения и второй эксцентриситет.

Ускорения силы тяжести на экваторе  $g_e$  и на полюсе  $g_p$  равны

$$g_e = 978,0318455 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \quad g_p = 983,2177280 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Значение ускорения силы тяжести  $g$  в точке с астрономической широтой  $\varphi$  определяется формулой

$$g = g_e (1 + 0,00530236578 \sin^2 \varphi - 0,00000584988 \sin^2 2\varphi + \\ + 0,00000003180 \sin^2 \varphi \sin^2 2\varphi).$$

Анализ результатов обработки наблюдений ИСЗ и космических зондов, проведенный различными исследователями в разное время, дал следующие числовые значения геоцентрической гравитационной постоянной  $fE$  в  $\text{км}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ :

398 603,20 ± 4,0	398 601,22 ± 0,4
398 600,49 ± 4,1	398 601,27 ± 0,8
398 601,87 ± 13,3	398 601,11 ± 0,8
398 599,20 ± 13,2	398 601,19 ± 1,0
398 600,61 ± 1,1	398 601,83 ± 1,4
398 601,28 ± 1,5	398 601,49 ± 0,4
398 601,14 ± 0,7	398 601,86 ± 1,8
398 601,42 ± 0,6	

Первое из приведенных значений определено В. М. Каула в 1961 г., последующие значения были получены по наблюдениям космических зондов серий «Рейнджер», «Сервейор» и «Маринер», а также ИСЛ серии «Лунар Орбитер», запущенных в 1962—1970 гг.

В работах некоторых исследователей в основу обработки наблюдений ИСЗ положена установленная Иреной Фишер (США) астрогеодезическая мировая система, в которой

$$a_e = 6\,378\,166 \text{ м}, \quad \alpha = 1/298,3.$$

Другие определения дают для экваториального радиуса  $a_e$  Земли и ее сжатия  $\alpha$  следующие значения:

$a_e$	$\alpha^{-1}$	
6 378 270 ± 100		Херрик и др., 1958
6 378 175 ± 20		Иепли и др., 1958
6 378 163 ± 21		Каула, 1961
6 378 160	298,25	Каула, 1964
6 378 150	298,3	И. Фишер, 1968
6 378 142	298,255	Вейс, 1967

При радиолокации небесных объектов считают скорость распространения радиоволн совпадающей со скоростью света

в вакууме, которая, по определениям Фрума, равна

$$c = 299\,792,5 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

По новейшим определениям, выполненным Ивенсоном (K. L. Evenson) при помощи гелиево-неодимиевого лазера, скорость света в вакууме равна

$$c = (299\,792\,456,2 \pm 1,1) \text{ м/сек} \text{ [80]}.$$

Скорость суточного вращения Земли  $\omega$  определяется формулой

$$\omega = \frac{360}{86164,09892 + 0,00164T} \text{ град} \cdot \text{сек}^{-1},$$

где  $T$  — промежуток времени от основной эпохи 1900, янв. 0,5 ET = JD 2415020,0 до рассматриваемого момента времени  $t$ , выраженный в юлианских столетиях.

#### § 4.07. Астродинамические постоянные, связанные с Луной

Движение объектов в поле тяготения Луны определяется силовой функцией притяжения Луны, имеющей следующее выражение в луноцентрической селеноэкваториальной системе координат:

$$U_{\zeta} = U(r_L, \lambda, \beta) = \frac{fM_{\zeta}}{r_L} \left( 1 + \frac{A + B + C - 3I}{2M_{\zeta} r_L^2} \right). \quad (1.4.03)$$

Формулу (1.4.03) представляют также в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(r_L, \lambda, \beta) = \\ = \frac{fM_{\zeta}}{r_L} \left[ 1 + J \left( \frac{R_{\zeta}}{r_L} \right)^2 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \beta \right) + L \left( \frac{R_{\zeta}}{r_L} \right)^2 \cos^2 \beta \cos 2\lambda \right]. \end{aligned} \quad (1.4.04)$$

Здесь  $r_L$  означает луноцентрический радиус-вектор объекта (искусственного спутника Луны, ИСЛ),  $\lambda$  и  $\beta$  — селенографическую долготу и широту подспутниковой точки,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные центральные моменты инерции Луны, с которыми связан момент инерции Луны относительно направления луноцентрического радиуса  $r_L$  ИСЛ, а именно:

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2. \quad (1.4.05)$$

Направляющие косинусы  $l$ ,  $m$ ,  $n$  луноцентрического радиуса-вектора  $r_L$  могут быть выражены через экваториальные эле-

менты  $i$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  орбиты ИСЛ и через аргумент широты  $u$  ИСЛ посредством формул

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ m &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ n &= \sin u \sin i, \\ u &= v + \omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.06)$$

Луноцентрическая гравитационная постоянная  $fM_{\zeta}$  связана с геоцентрической гравитационной постоянной  $fE$  соотношением

$$fM_{\zeta} = \mu fE, \quad \mu^{-1} = 81,30. \quad (1.4.07)$$

Если принять  $\mu^{-1} = 81,3015 \pm 0,0033$ ,  $fM_{\zeta} = 4,9027779 \times 10^3 \text{ км}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ , массу Земли  $E = 5,975 \cdot 10^{27} \text{ г}$  и средний радиус Луны  $R_{\zeta} = 1738,09 \text{ км}$ , то при значениях  $a$ ,  $b$ ,  $c$  полуосей эллипсоида Луны  $a = 1738,57 \text{ км}$ ,  $b = 1738,21 \text{ км}$ ,  $c = 1737,49 \text{ км}$  формулы

$$A = \frac{1}{5} M_{\zeta} (b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5} M_{\zeta} (c^2 + a^2), \quad C = \frac{1}{5} M_{\zeta} (a^2 + b^2) \quad (1.4.08)$$

дают следующие значения главных центральных моментов инерции Луны:

$$\begin{aligned} A &= 0,88781798 \cdot 10^{35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & B &= 0,88800195 \cdot 10^{35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ C &= 0,88836978 \cdot 10^{35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $J$  и  $L$  определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{3}{4} \frac{2C - A - B}{M_{\zeta} R_{\zeta}^2} = \frac{3}{20} \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{R_{\zeta}^2}, \\ L &= \frac{3}{4} \frac{B - A}{M_{\zeta} R_{\zeta}^2} = \frac{3}{20} \frac{a^2 - b^2}{R_{\zeta}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.09)$$

и равны

$$J = 0,00031066, \quad L = 0,000062148.$$

Современные определения числовых значений селеноцентрической гравитационной постоянной  $fM_{\zeta}$  и отношения масс Земли и Луны  $\mu$ , выполненные на основе анализа траекторных измерений космических зондов и искусственных спутников Луны, представлены в табл. 35 [81].

Среднее геоцентрическое расстояние Луны по радиолокационным измерениям Йепли и др. равно

$$a_{\zeta} = 384400,2 \pm 1,1 \text{ км}.$$

Т а б л и ц а 35

Космический зонд		$fM_{\zeta}$ (км <sup>3</sup> /сек <sup>2</sup> )	$\mu^{-1}$
Рейнджер	6 7 8 9 6—9	4902,66±0,19 4902,54±0,17 4902,63±0,12 4902,71±0,30 4902,63±0,07	81,3030 81,3050 81,3035 81,3022 81,3035
Сервейор	1 3 4 5 6 7	4902,65±0,24 4902,64±0,25 4902,63±0,25 4902,63±0,24 4902,64±0,24 4902,64±0,24	81,3032 81,3034 81,3035 81,3035 81,3034 81,3034
Лунар Орбитер	1 1—5 1—5 1—5	4902,66±0,19 4902,64±0,11 4902,73 4902,78±0,05	81,3030
Маринер	2 4 5		81,3001±0,0013 81,3015±0,0017 81,3013±0,0017
Пионер	6 7 6,7	4902,75±0,12	81,3005±0,0007 81,3021±0,0004 81,3016±0,0020
Маринер	6 7		81,3005±0,0002 81,3005±0,0002
Пионер	8 9		81,3008±0,0001 81,3020±0,0020
Венера	4—7 4 5 6 7 5,6 5 6	4902,716±0,10 4902,806 4902,702 4902,638 4902,808 4902,682 4902,717 4902,642	81,3005 81,3006 81,3022 81,3033 81,3002 81,3026 81,3018 81,3033

А. Шапиро из Военно-морской лаборатории NRL (США) получил для радиуса Луны, направленного в сторону Земли, значение

$$R_{\zeta} = 1737\,930 \pm 150 \text{ м.}$$

Для выражения в км геоцентрических расстояний Луны, публикуемых в эфемеридах Луны и вычисленных на основании улучшенной эфемериды Луны ( $j = 0$ , см. стр. 165), необходимо умножить их значения из ежегодников на величину

$$q = 86,315745 (fE + fM_{\zeta})^{1/3} = 6378,3255 \text{ км.}$$

Силую функцию притяжения Луны можно представить также в следующем виде:

$$U_{\zeta} = \frac{fM_{\zeta}}{r_L} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_{\zeta}}{r_L} \right)^n P_{nm}(\sin \beta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

в соответствии с рекомендациями МАС [37].

При обработке наблюдений искусственных спутников Луны Lunar Orbiter I, III и IV, выполненной в США Толсоном и Гапцынским [59], были приняты  $fM_{\zeta} = 4902,64 \text{ км}^3/\text{сек}^2$ ,  $R_{\zeta} = 1738,09 \text{ км}$  и для коэффициентов  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  разложения  $U_{\zeta}$  получены числовые значения, приведенные в табл. 36 вместе с их вероятными ошибками.

Таблица 36

$n$	$m$	$C_{nm} \cdot 10^4$	$S_{nm} \cdot 10^4$
2	0	$-2,0596 \pm 0,141$	—
	1	$-0,1661 \pm 0,051$	$0,0080 \pm 0,039$
	2	$0,2042 \pm 0,029$	$-0,0342 \pm 0,025$
3	0	$-0,3773 \pm 0,180$	—
	1	$0,3012 \pm 0,048$	$0,1762 \pm 0,053$
	2	$0,1294 \pm 0,028$	$-0,0147 \pm 0,033$
	3	$0,0317 \pm 0,015$	$-0,0043 \pm 0,018$
4	0	$0,0798 \pm 0,128$	—
	1	$-0,1560 \pm 0,036$	$0,0391 \pm 0,028$
	2	$0,0011 \pm 0,010$	$0,0072 \pm 0,013$
	3	$-0,0082 \pm 0,008$	$-0,0001 \pm 0,006$
	4	$-0,0007 \pm 0,003$	$0,0011 \pm 0,003$
5	0	$-0,5505 \pm 0,171$	—
	1	$-0,0385 \pm 0,037$	$0,0829 \pm 0,031$
	2	$0,0342 \pm 0,009$	$-0,0203 \pm 0,008$
	3	$-0,0071 \pm 0,002$	$-0,0008 \pm 0,002$
	4	$-0,0008 \pm 0,001$	$-0,0013 \pm 0,001$
	5	$-0,0003 \pm 0,0002$	$0,0003 \pm 0,0002$



По данным траекторных измерений всех ИСЛ серии Лунар Орбитер (Lunar Orbiter I — V) Лорелл построил несколько моделей разложения гравитационного поля Луны по сферическим гармоникам, полагая  $\mu M_{\odot} = 4902,78$  для различных комбинаций этих данных. Значения  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$ , а также нормированных коэффициентов  $\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$ , связанных с ненормированными  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  соотношением вида

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}} \left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right., \quad \delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m \geq 1, \end{cases}$$

даны в табл. 37 [82].

Таблица 37

$\times 10^4$	Ненормированные значения				Нормированные значения		
	LaRC	JPL-1	JPL-2	JPL-3	JPL-1	JPL-2	JPL-3
$C_{20}$	-2,0480	-2,0263	-1,9189	-1,9564	-0,9062	-0,8582	-0,8749
$S_{21}$	-0,0651	0,0150	0,0221	0,1290	0,0116	0,0171	0,0999
$C_{21}$	-0,1398	-0,0878	0,0430	-0,1279	-0,0680	0,0333	-0,0990
$S_{22}$	-0,0375	0,1310	-0,0596	0,1014	0,2030	-0,0923	0,1571
$C_{22}$	0,2445	0,2191	0,1123	0,1587	0,3394	0,1739	0,2458
$C_{30}$	0,9049	-0,2223	-0,1483	-0,1299	-0,0840	-0,0560	-0,0491
$S_{31}$	0,1555	0,0740	0,1036	0,0948	0,0685	0,0959	0,0877
$C_{31}$	0,2358	0,3636	0,3449	0,3493	0,3366	0,3193	0,3233
$S_{32}$	0,1339	-0,0200	0,0277	0,0283	-0,0585	0,0810	0,0829
$C_{32}$	-0,0384	-0,0257	0,0003	0,0076	-0,0753	0,0008	0,0221
$S_{33}$	-0,0073	-0,0496	-0,0308	-0,0447	-0,3558	-0,2209	-0,3205
$C_{33}$	0,0189	-0,0265	0,0353	0,0284	-0,1899	0,2533	0,2040
$C_{40}$	0,2055	0,0941	0,1703	0,1230	0,0314	0,0568	0,0410
$S_{41}$	-0,0930	0,0564	0,0755	0,1099	0,0595	0,0796	0,1159
$C_{41}$	-0,0714	-0,1237	-0,1063	-0,1607	-0,1303	-0,1120	-0,1694
$S_{42}$	0,0293	0,0051	0,0009	0,0012	0,0227	0,0042	0,0054
$C_{42}$	0,0223	0,0361	0,0353	0,0265	0,1615	-0,1580	0,1185
$S_{43}$	0,0065	-0,0277	-0,0009	0,0148	-0,4626	-0,0153	0,2480
$C_{43}$	0,0107	0,0164	0,0232	0,0027	0,2736	0,3890	0,0458
$S_{44}$	-0,0034	0,0079	-0,0031	0,0001	0,0332	-0,0132	0,0002
$C_{44}$	-0,0002	0,0091	-0,0058	0,0039	0,0383	-0,0246	0,0163
$C_{50}$		-0,1614	-0,0123	-0,0365	-0,0487	-0,0037	-0,0110
$C_{60}$		-0,1089	-0,0808	-0,0978	-0,0302	-0,0224	-0,0271
$C_{70}$		0,1734	0,3178	0,2603	0,0448	0,0821	0,0672
$C_{80}$		-0,2011	-0,1475	-0,0905	-0,0488	-0,0358	-0,0219

Значения коэффициентов  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$ , помещенные в столбце LaRC, получены по наблюдениям первых четырех ИСЛ Lunar Orbiter в Научно-исследовательском центре НАСА в Лэнгли.

Анализ отклонений лучевых скоростей ИСЛ Lunar Orbiter от вычисленных значений, полученных с учетом возмущений от

Земли, Солнца, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна в предположении трехосности фигуры Луны, позволил выделить локальные аномалии гравитационного поля Луны, связанные с определенными областями лунной поверхности. Предполагается, что эти (положительные) аномалии обусловлены концентрациями масс малой протяженности, сосредоточенными в слоях Луны на глубине от 25 до 125 км и получившими название «масконов». Селенографические координаты масконов, а также значения аномалий  $\Delta g'$  силы тяжести с оценками избытка массы  $\Delta m$  приведены в табл. 38 [81].

Таблица 38

Маскон	Координаты центра		Аномалия $\Delta g'$ , см/сек <sup>2</sup>	Избыток массы $\Delta m$ , 10 <sup>21</sup> г
	$\beta$	$\lambda$		
Mare Imbrinum	38°	—18°	0,17	1,50
Mare Serenitatis	28	18	0,17	1,50
Mare Crisium	16	58	0,10	0,75
Mare Nectaris	—16	34	0,09	0,70
Sinus Aestum	10	— 8	0,06	0,45
Mare Humorum	—25	—40	0,05	0,35
Mare Humboldtianum	57	82	0,04	0,30
Mare Orientale	—20	—95	0,04	0,30
Mare Smythii	— 4	85	0,04	0,30
Без названия	— 7	27	0,04	0,30
Без названия	—17	70	0,03	0,22
Grimaldi	— 6	—68	0,02	0,15
Sinus Iridum	45	—31	0,07	—0,50

### § 4.08. Либрация Луны

Вращение Луны в первом приближении описывается тремя эмпирическими законами, открытыми в 1693 г. и носящими имя Кассини. Законы Кассини можно сформулировать следующим образом.

1. *Луна вращается равномерно вокруг оси, остающейся неподвижной в теле Луны, причем период вращения Луны совпадает с периодом ее обращения по орбите вокруг Земли.*

2. *Плоскость экватора Луны сохраняет постоянный наклон к эклиптике.*

3. *Восходящий узел экватора Луны на эклиптике всегда совпадает с нисходящим узлом орбиты Луны на эклиптике.*

Экватор Луны, о котором идет речь в законах Кассини, называется *средним экватором Луны*. Экватор Луны, в положении которого учтена физическая либрация в наклоне и узле, называется *истинным экватором Луны*.

Осевое вращение Луны с равномерной угловой скоростью и неравномерное, согласно закону площадей, движение Луны по геоцентрической орбите определяют для земного наблюдателя кажущиеся колебания Луны в восточно-западном направлении. Это явление называется *оптической (геометрической) либрацией Луны по долготе*. Вследствие наклона экватора Луны к лунной орбите возникают кажущиеся колебания Луны в северно-южном направлении; эти колебания называются *оптической (геометрической) либрацией Луны по широте*. Оптическая либрация по широте равна селенографической широте земного наблюдателя, отсчитываемой от среднего экватора Луны; ее геоцентрическое значение равно  $b$ , топоцентрическое значение —  $b'$ . Если оптическая либрация по долготе есть  $l$  (геоцентрическое значение, отличное от топоцентрического  $l'$ ), то селенографическая долгота земного наблюдателя равна  $l$ . Геоцентрическая оптическая либрация по широте  $b$  обращается в нуль, когда Луна проходит через узлы орбиты; поэтому период этой либрации равен драконическому месяцу в  $27^d,21222$ , амплитуда  $6^\circ 40'$ . Геоцентрическая либрация по долготе  $l$  обращается в нуль, когда Луна находится в окрестности перигея и апогея (в сизигиях); ее средний период равен аномалистическому месяцу в  $27^d,55455$  и амплитуда колеблется от  $4^\circ,8$  до  $8^\circ,1$  вследствие изменений элементов орбиты Луны.

Если  $\lambda'$ ,  $\beta'$  — истинные топоцентрические эклиптические координаты Луны, то топоцентрическая оптическая либрация по долготе  $l'$  и по широте  $b'$  может быть вычислена по точным формулам

$$\left. \begin{aligned} \cos (\zeta - \Omega + l') \cos b' &= \cos (\lambda' - \Omega - N) \cos \beta', \\ \sin (\zeta - \Omega + l') \cos b' &= \\ &= \sin (\lambda' - \Omega - N) \cos \beta' \cos J - \sin \beta' \sin J, \\ \sin b' &= -\sin (\lambda' - \Omega - N) \cos \beta' \sin J - \sin \beta' \cos J, \end{aligned} \right\} (1.4.10)$$

в которых  $N = \Delta\psi + d\psi$  — нутация в долготе,  $\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты Луны на эклиптике,  $J$  — наклон экватора Луны к эклиптике.

Если взять геоцентрические эклиптические координаты Луны  $\lambda$ ,  $\beta$ , то формулы (1.4.10) дадут геоцентрическую оптическую либрацию по долготе  $l$  и по широте  $b$ . Приближенные формулы для оптической либрации Луны могут быть выведены из (1.4.10); они приведены в астрономических ежегодниках (см. например, [25]).

Перемещение земного наблюдателя, обусловленное суточным вращением Земли, вызывает весьма малую *суточную*, или *параллактическую либрацию Луны*.

Отклонение реального вращательного движения Луны от вращения, характеризуемого законами Кассини, обусловлено явлением, порожденным колебаниями Луны относительно некоторого среднего положения и называемым *физической либрацией Луны*. Амплитуда наибольшего члена физической либрации не превосходит нескольких дуговых минут.

Если рассмотреть вращение Луны как движение системы прямоугольных координат  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ , ось  $L\bar{X}$  которой направлена по первому радиусу Луны, ось  $L\bar{Y}$  — к востоку от  $L\bar{X}$  на  $90^\circ$  и ось  $L\bar{Z}$  — в северный полюс Луны, относительно системы эклиптических прямоугольных координат  $XYZ$ , то взаимное расположение обеих систем в каждый момент времени можно определить углами Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , имеющими следующий смысл:

$\varphi$  — угловое расстояние положительного направления оси  $L\bar{X}$  от нисходящего узла экватора Луны на эклиптике,

$\theta$  — наклон экватора Луны к эклиптике,

$\psi$  — долгота нисходящего узла экватора Луны на эклиптике.

Законы Кассини можно математически выразить через углы Эйлера в форме

$$\varphi = 180^\circ + \zeta - \psi, \quad \theta = J, \quad \psi = \Omega. \quad (1.4.11)$$

Действительное вращение Луны описывается «возмущенными» углами Эйлера, т. е. для точного описания реального движения необходимо ввести возмущения — функции времени  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ; тогда

$$\varphi = 180^\circ + \zeta + \tau - \psi - \sigma, \quad \theta = J + \rho, \quad \psi = \Omega + \sigma \quad (1.4.12)$$

суть выражения для «возмущенных» углов Эйлера.

Величина  $\tau$  называется *физической либрацией Луны по долготе*,  $\rho$  — *физической либрацией наклона*,  $\sigma$  — *физической либрацией в узле*.

Решение уравнений Эйлера, составленных в предположении, что Луна есть абсолютно твердое тело и величины  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  — малые первого порядка, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} + \alpha q r &= 3M_{\oplus} \alpha R^{-5} y z, \\ \dot{q} - \beta p r &= -3M_{\oplus} \beta R^{-5} x z, \\ \dot{r} + \gamma p q &= 3M_{\oplus} \gamma R^{-5} x y, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.13)$$

в которых  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — компоненты вектора угловой скорости вращения Луны по осям  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — функции главных моментов инерции относительно осей  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $M_{\oplus}$  — масса Земли,  $R$  — геоцентрическое расстояние Луны,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — луноцентрические геоэкваториальные координаты Земли, дает выражения для  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  в виде разложений в ряды периодических членов,

аргументы которых построены в виде комбинаций фундаментальных аргументов теории Луны Брауна.

Таким образом, эти разложения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \sum_i a_i \sin h_i, \\ \rho &= \sum_i b_i \cos h_i \\ \sigma \sin J &= \sum_i c_i \sin h_i, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.14)$$

где аргументы  $h_i$  определяются равенствами типа

$$\begin{aligned} h_i &= kl + k'l' + mF + nD \\ (k, k', m, n, &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

а коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  зависят от *постоянной физической либрации*  $f$ , равной отношению величин  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{B}{A} \cdot \frac{C-B}{C-A}. \quad (1.4.16)$$

В «Астрономическом Ежегоднике СССР» принято значение  $f = 0,73$ ; если принять  $f = 0,633$  и наклон  $J = 1^\circ 32' 04''$ , то для  $\alpha, \beta, \gamma$  получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (C - B)/A = 0,0003984, \\ \beta &= (C - A)/B = 0,0006294, \\ \gamma &= (B - A)/C = 0,0002310, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.17)$$

что соответствует значениям главных моментов инерции Луны  $B$  и  $C$ :

$$B = 1,0002311A \quad \text{и} \quad C = 1,0006295A.$$

В последние годы обработка результатов лазерной локации Луны, полученных при помощи лазерных уголкового отражателей, установленных на лунной поверхности экипажами космических кораблей серии «Аполлон» (США), привела к необходимости уточнения ряда параметров фигуры и вращательного движения, т. е. физической либрации Луны. Некоторые из этих параметров, а также коэффициенты гармоник третьего и четвертого порядков разложения гравитационного поля Луны, определенные на основе анализа траекторных измерений искусственных спутников Луны типа Lunar Orbiter, приведены в табл. 39 [67]. Коэффициенты разложений компонент физической либрации Луны и аргументы, соответствующие указанным значениям  $\beta$  и  $\gamma$  и учету влияния вторых гармоник в фигуре Луны, заданы табл. 40 [67].

Таблица 39

Величина	Значение	Величина	Значение $\times 10^6$	Примечание
$C/M_{\odot} R^2$	0,40	$C_{30}$	3,9	Значения гармоник $C_{20}, C_{21}, S_{21}, \dots$ см. в табл. 36 (стр. 201)
$\mu^{-1}$	81,30	$C_{31}, S_{31}$	28,6    8,8	
$\beta$	0,0006306	$C_{32}, S_{32}$	6,0    1,8	
$\gamma$	0,0002264	$C_{33}, S_{33}$	2,7    -1,4	
		$C_{40}$	23,3	
		$C_{41}, S_{41}$	-11,1    -2,61	
		$C_{42}, S_{42}$	-2,48    -3,28	
		$C_{43}, S_{43}$	-0,17    -0,45	
		$C_{44}, S_{44}$	-0,25    0,27	

Таблица 40

Аргументы				Коэффициенты		
$I$	$I'$	$F$	$D$	$\rho$ (cos)	$\sigma \sin I$ (sin)	$\tau$ (sin)
				"	"	"
1	0	-2	0	17,88	-17,89	-0,33
0	0	2	0	-11,03	-11,06	-0,03
2	0	-2	0	0,03	-0,04	-38,61
0	0	2	-2	-2,64	-2,39	2,01
1	0	2	-2	0,54	0,54	0,01
1	0	-2	-2	-0,13	0,13	0,00
1	0	0	0	-90,43	-92,39	-16,55
0	1	-2	1	0,12	-0,12	0,00
1	0	2	0	-0,64	-0,64	0,00
2	0	0	0	0,10	0,03	-0,44
2	0	0	-2	-0,09	-0,46	8,89
1	0	0	-2	-1,86	2,45	4,07
1	1	0	-2	-0,05	0,07	0,22
0	1	0	0	0,17	0,09	90,30
0	0	0	1	0,10	0,11	0,08
1	1	0	0	-0,12	-0,11	0,10
1	-1	0	0	-0,10	-0,12	-0,15
0	1	0	1	-0,17	-0,17	0,00
1	0	0	-1	0,00	0,00	-3,39
0	0	0	2	-0,05	-0,20	-0,50
0	2	0	0	0,00	0,00	0,23
2	-1	0	-2			0,60
1	-1	0	-1			-1,21
2	-2	0	-2			0,44

Учет гармоник третьего и четвертого порядков в разложении гравитационного потенциала Луны дает следующие члены в разложениях компонент физической либрации Луны [67] (табл. 41).

Таблица 41

Аргументы				Коэффициенты					
l	l'	F	D	$\rho$		$\sigma \sin J$		$\tau$	
				(cos)	(sin)	(cos)	(sin)	(cos)	(sin)
				"	"	"	"	"	"
1	0	-1	0	-0,03	-0,03	-0,03	0,03	-10,41	-1,55
0	0	1	0	0,25	-74,72	74,72	0,25		-0,01
1	0	-2	0	-0,24			0,24		
2	0	-2	0					0,91	0,90
1	0	0	0	0,48	0,23	-0,22	0,49	-0,04	-0,08
0	1	0	0					0,02	0,50
0	0	1	0		0,26	-0,26			

## ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ I

1. Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, изд. 2-е, Гостехиздат, 1954.
2. Pecker L., Tabulky galaktických směrových kosinů, Astron. Ústav CSAV, Publikace č. 48, Praha, 1964.
3. Torgård Ingrid, Lund Observatory Table for the Conversion of Equatorial into Galactic Coordinates Based on the Galactic Pole R. A. 12<sup>h</sup>49<sup>m</sup>, Decl. +27°4 (1950,0), Ann. Observ. of Lund, Nos. 15, 16, 17, 1961.
4. Danjon A., Astronomie Générale, Sennac. Paris, 1952.
5. Вентцель М. К., Сферическая астрономия, М., 1952.
6. Загребин Д. В., Введение в астрометрию, М., 1966.
7. Казаков С. А., Курс сферической астрономии, М., 1940.
8. Newcomb S. A., A Compendium on Spherical Astronomy, Washington, 1906.
9. Woolard E. W., Clemence G. M., Spherical Astronomy, Academic Press, New York, 1966.
10. Ангелов С. А., Шестизначные таблицы тригонометрических функций с аргументом, выраженным в часовой мере [0<sup>h</sup>(1<sup>s</sup>)12<sup>h</sup>], М., 1957.
11. Жонголович И. Д., Сабанина Т. Б., Таблицы натуральных значений  $\operatorname{tg}(x/2)$  и  $\operatorname{tg}^2(x/2)$  с пятью значащими цифрами, Изд-во АН СССР, Л., 1963.
12. Загребин Д. В., Семизначные таблицы натуральных значений тригонометрических функций для каждой сотой града, М., 1966.
13. Хренов Л. С., Семизначные таблицы тригонометрических функций [0<sup>s</sup>(10<sup>m</sup>)360<sup>s</sup>], М., 1956.
14. Хренов Л. С., Восьмизначные таблицы тригонометрических функций, М., 1967.
15. Comrie L. N., Seven-Figure Trigonometric Tables for Every Second of Time, London, 1939.
16. Natural Sines and Cosines to Eight Decimal Places, U. S. Coast and Geodetic Survey. Spec. Publication, No. 231, 1942.
17. Peters J., Siebenstellige Werte der trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Neugrades, Berlin, 1941.
18. Peters J., Achtstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten, Berlin, 1939.

19. Roussilhe H., Brandicourt M., Tables à 8 décimales des valeurs naturelles des sinus, cosinus et tangentes dans le système décimal de centigrade en centigrade de 0 à 100 grades, Paris, 1933.
20. Salzer H. E., Levine N., Tables of Sines and Cosines to Ten Decimal Places at Thousandths of a Degree, Pergamon Press, New York, 1962.
21. Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам. Дополнение № 1, М., 1959.
22. Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956.
23. Davies H. T., Fisher Vera, A Bibliography and Index of Mathematical Tables, Evanston, Ill., 1949.
24. Ohlsson J., Lund Observatory Tables for the Conversion of Equatorial Coordinates into Galactic Coordinates Based on the Galactic Pole R. A.  $12^h40^m$ , Decl.  $+28^\circ$  (1900,0), Ann. Observ. of Lund, 3, 1932.
25. Астрономический Ежегодник СССР. Объяснение.
26. Vaucouleurs de G., Icarus 3, 236, 1964.
27. Ashbrook J., Astron. J. 58, 145, 1953.
28. Escobal P. R., Methods of Orbit Determination, Wiley & Sons, London, 1965.
29. Morrison Berenice L., U. S. Naval Observ. Circular, Nos. 92, 94, Washington, 1964.
30. Чиканов Ю. А., Тр. Городск. астрон. обсерв. Казанск. ун-та 35, 1968.
31. Идельсон Н. И., Редукционные вычисления в астрономии. Приложение к Астрономическому Ежегоднику СССР на 1941 год.
32. Peters J., Präzessionstafeln für das Äquinoktium 1950,0, Veröff. des Astron. Rechen-Inst. zu Berlin-Dahlem, Nr. 50, 1934.
33. Peters J., Tafeln zur Berechnung der jährlichen Präzession in Rectascension für Äquinoktium 1950,0, Veröff. des Astron. Rechen-Inst. zu Berlin-Dahlem, Nr., 51, 1934.
34. Woolard E. W., Theory of the Rotation of the Earth Around Its Center of Mass, Astron. Papers 15, part I, Washington, 1953 [есть русский перевод: Э. Вулард, Теория вращения Земли вокруг центра масс, М., 1963].
35. Vauschinger J., Tafeln zur theoretischen Astronomie, 2. Auflage, Leipzig, 1934.
36. Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris & Nautical Almanac, London, 1961.
37. Trans. of the I. A. U., vol. XII B, 591, 1966.
38. Куликов Д. К., Об учете аберрации планет, Астрон. ж. 36, 2, 340, 1959.
39. Scott F. P., Astron. J., 69, 372, 1964.
40. Дубяго А. Д., Определение орбит, Гостехиздат, 1949.
41. Dinulescu N. I., Refracția astronomică, București, 1967.
42. Garfinkel B., Astron. J. 50, 169, 1944.
43. Крамп С., Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Strasbourg, 1799.
44. Таблицы рефракции Пулковской обсерватории, Л., 1956.
45. Karský G., Бюлл. астрон. ин-тов Чехословакии 10, 1, 32, 1959.
46. Бакулин П. И., Блинов Н. С., Служба точного времени, «Наука», 1968.
47. Kovalevsky J., Metrologia 1, 4, 169, 1965.
48. Sadler D. H., Ephemeris Time. Occasional Notes Roy. Astron. Soc. 3, 17, 103, 1954.
49. Veis G., Spec. Rept. Smithsonian Inst. Astrophys. Observ. No. 123, 1963.
50. Идельсон Н. И., Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии, Астрономический Ежегодник СССР на 1942 год, 409, 1941.
51. Куликов К. А., Новая система астрономических постоянных, «Наука», 1969.
52. Lederle T., Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 41, 3, 643, 1965.



53. Makemson Maud W., Baker R. M. L. Jr., Westrom G. B., *Astronaut. Sci.* 8, No. 1, 1, 1961.
54. I. A. U. Symposium No. 21: The System of Astronomical Constants, *Bull. astron.* 25, ff. I—III, 1965.
55. Kovalevsky J., *L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'An 1966*, B. 1—V. 24, 1965.
56. *Procès Verbaux des séances, deuxième série* 25, 77, 1957.
57. Brown E. W., *Mem. Roy. Astron. Soc.* 53, 89, 1897.
58. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
59. Dollfus A., Ed., *Moon and Planets. II*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
60. Куликов Д. К., Теория эфемерид пар Цингера, М.—Л., 1951.
61. Mueller I. I., *Spherical & Practical Astronomy As Applied to Geodesy*, Ungar Publ. Comp., New York, 1969.
62. U. S. Naval Weapon Lab. Techn. Report TR-2734, 1972.
63. Bureau International de l'Heure: Rapport annuel pour 1972, Paris, 1973.
64. Yumi S., Vicente R. O., *Publ. Int. Lat. Obs. Mizusawa* 7, No. 1, Mizusawa, 1969.
65. Vaucouleurs G. de, Davies M. E., Sturms F. M., *Journ. Geophys. Research*, 1972.
66. Koziel K., *Measure of the Moon*, D. Reidel Publ. Comp., 1967.
67. Kaula W. M., Баха Р., *The Moon*, 8, No. 3, 1973.
68. Bender P. L., Currie D. G., Dicke R. H., Eckhardt D. H., Faller J. E., Kaula W. M., Mulholland J. D., Plotkin H. H., Poulitney S. K., Silverberg E. C., Wilkinson D. T., Williams J. G., Alley C. O., *Science* 182, 229, 1973.
69. Eckhardt D. H., *Measure of the Moon*, 1973.
70. Губанов В. С., *Астрон. ж.* 49, 5, 1972.
71. Atkinson R. d'E., *Astron. J.* 77, No. 6, 1972.
72. Dufour H.-M., Fontaine A., *Bull. astron.* 23, f. 2, 1959.
73. Innes R. T. A., *Tables of X & Y. App. Union Obs. Circ.*, No. 71, 1927.
74. Абалакин В. К., *Бюлл. ИТА АН СССР* 13, № 1 (144), стр. 13, 1971.
75. Абалакин В. К., *Бюлл. ИТА АН СССР* 13, № 1 (144), стр. 17, 1971.
76. Сб. «Время и частота», М., 1973.
77. Kovalevsky J., *Phys. Earth and Planet. Interiors* 6, 26, 1972.
78. Jet Propulsion Lab. Techn. Report 32-1306, 1968.
79. *Veröff. des Astr. Rechen-Inst. zu Heidelberg*, Nr. 18, 1966.
80. Evenson K. M., *Phys. Rev. Letters* 129, 1346, 1972; *Proc. XVII Gen. Assembly of URSI*, Warszawa, 1972.
81. Сб. «Исследования космического пространства» 5, М., 1973.
82. Lorell J., *JPL Techn. Report* 32-1387, 1969.

# Часть II

## ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

### Глава I

#### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В этой главе приводятся основные сведения о задаче двух тел, в частности, различные формы дифференциальных уравнений и их первых интегралов. Выводы и дополнительные подробности можно найти в [1] — [5].

#### § 1.01. Постановка задачи. Различные формы дифференциальных уравнений движения

Пусть в пространстве имеется изолированная система двух тел  $P_0$  и  $P$ , с массами  $m_0$  и  $m$ , и пусть эти тела притягиваются друг к другу как материальные точки согласно закону всемирного тяготения Ньютона \*). Требуется изучить движение одного тела относительно другого. Движение, получаемое на основе задачи двух тел, называется *невозмущенным кеплеровским движением*.

**1. Дифференциальные уравнения движения в абсолютной системе координат.** Возьмем абсолютную систему координат  $O\xi\eta\zeta$  и обозначим через  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  координаты центра масс тела  $P_0$ , а через  $\xi, \eta, \zeta$  — координаты центра масс тела  $P$ . Тогда дифференциальные уравнения движения тел  $P_0$  и  $P$  запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= f m \frac{\xi - \xi_0}{r^3}, & \frac{d^2\xi}{dt^2} &= f m_0 \frac{\xi_0 - \xi}{r^3}, \\ \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= f m \frac{\eta - \eta_0}{r^3}, & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= f m_0 \frac{\eta_0 - \eta}{r^3}, \\ \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= f m \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3}, & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= f m_0 \frac{\zeta_0 - \zeta}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.01)$$

---

\*) Это строго справедливо для тел сферической структуры и приближенно — для тел, размеры которых малы по сравнению с разделяющим их расстоянием.

где  $f$  — постоянная тяготения, а

$$r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2} \quad (2.1.02)$$

есть расстояние между телами  $P_0$  и  $P$ .

Абсолютная система координат  $O\xi\eta\zeta$  на практике не является удобной. Поэтому приходится пользоваться другими системами координат.

**2. Дифференциальные уравнения относительного движения.** Возьмем прямоугольную систему координат  $P_0xyz$  с началом в центре масс тела  $P_0$ , с осями  $P_0x$ ,  $P_0y$ ,  $P_0z$ , соответственно параллельными осям  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ . Тогда формулы преобразования координат имеют вид

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \quad \zeta = \zeta_0 + z. \quad (2.1.03)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения тела  $P$  запишутся следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (2.1.04)$$

где

$$\mu = f(m_0 + m), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.1.05)$$

Дифференциальные уравнения (2.1.04) описывают невозмущенное кеплеровское движение планеты относительно Солнца, невозмущенное движение спутника относительно планеты, невозмущенное движение искусственного спутника относительно Земли и т. д.

**3. Дифференциальные уравнения относительного движения в цилиндрических координатах.** Введем цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $z$  по формулам

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda, \quad z = z. \quad (2.1.06)$$

Тогда дифференциальные уравнения движения тела  $P$  относительно  $P_0$  будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 &= -\frac{\mu\rho}{r^3}, \\ \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.07)$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

а  $\mu$  определяется формулой (2.1.05).

**4. Дифференциальные уравнения относительного движения в сферических координатах.** Пусть  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  — сферические координаты, определяемые формулами

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi. \quad (2.1.08)$$

Тогда движение тела  $P$  относительно  $P_0$  описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \cos^2 \varphi &= -\frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) + r^2 \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\lambda}{dt} \cos^2 \varphi \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.09)$$

где  $\mu$  дается формулой (2.1.05).

**5. Дифференциальные уравнения относительного движения в форме Клеро — Лапласа.** Из второго уравнения (2.1.07) находим интеграл площадей

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = c, \quad (2.1.10)$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Если в начальный момент  $t = t_0$

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}_0,$$

то  $c = \rho_0^2 \dot{\lambda}_0$ .

Введем переменные  $u$  и  $s$  по формулам

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho}. \quad (2.1.11)$$

Тогда, приняв за независимую переменную долготу  $\lambda$ , уравнения (2.1.07) можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u &= \frac{\mu}{c^2} (1 + s^2)^{-3/2}, \\ \frac{d^2 s}{d\lambda^2} + s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

После того как из уравнений (2.1.12) переменные  $u$  и  $s$  будут найдены как функции  $\lambda$ , уравнение (2.1.10) позволит связать долготу  $\lambda$  со временем  $t$ .

Дифференциальные уравнения в форме Клеро — Лапласа были использованы Лапласом в теории движения Луны.

**6. Каноническая форма уравнений относительного движения.** Уравнения (2.1.04) можно записать в канонической форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}. \quad (2.1.14)$$

Примем теперь за обобщенные координаты  $q_1, q_2, q_3$  сферические координаты

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \lambda. \quad (2.1.15)$$

Тогда обобщенные импульсы  $p_1, p_2, p_3$  определяются формулами

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2 \dot{\varphi}, \quad p_3 = r^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}, \quad (2.1.16)$$

а канонические уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1.17)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + \frac{p_3^2}{q_1^2 \cos^2 q_2} \right) - \frac{\mu}{q_1} \quad (2.1.18)$$

есть функция Гамильтона в новых переменных.

### § 1.02. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения

Дифференциальные уравнения (2.1.04) допускают следующие первые интегралы.

Интегралы площадей:

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.19)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные постоянные (*постоянные площадей*).

Интеграл энергии (живой силы):

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (2.1.20)$$

где  $h$  — произвольная постоянная (*постоянная энергии или постоянная живой силы*).

Если через  $V$  обозначить скорость тела  $P$  относительно  $P_0$ , то интеграл энергии можно записать в виде

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \quad (2.1.21)$$

Интегралы Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= \lambda_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= \lambda_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= \lambda_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.22)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — произвольные постоянные (*постоянные Лапласа*).

Интегралы Лапласа можно также записать в виде

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}c_3 - \dot{z}c_2 &= \lambda_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}c_1 - \dot{x}c_3 &= \lambda_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}c_2 - \dot{y}c_1 &= \lambda_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.23)$$

Между постоянными интегрирования имеют место две следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - h(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) &= \mu^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.24)$$

Поэтому из семи приведенных здесь интегралов только пять являются независимыми.

Вектор момента количества движения и вектор Лапласа. Равенства (2.1.19) показывают, что постоянные  $c_1, c_2, c_3$  суть проекции вектора момента количества движения (на единицу массы) тела  $P$  на координатные оси. Модуль этого вектора (в дальнейшем будем его называть *постоянной площадью*) равен

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

а его направляющие косинусы относительно осей  $x, y, z$  будут

$$\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c}.$$

Рассмотрим вектор  $\lambda$ , проекции которого на координатные оси равны  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Этот вектор, модуль которого

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2},$$

а направляющие косинусы суть

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \frac{\lambda_3}{\lambda},$$

называется *вектором Лапласа*.

Из равенства (2.1.24) следует, что вектор момента количества движения и вектор Лапласа перпендикулярны друг к другу.

### § 1.03. Типы невозмущенного кеплеровского движения

Из интегралов площадей (2.1.19) и интегралов Лапласа (2.1.22) находим

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \quad (2.1.25)$$

$$\mu r + \lambda_1x + \lambda_2y + \lambda_3z = c^2. \quad (2.1.26)$$

Уравнение (2.1.25) показывает, что движение тела  $P$  происходит в плоскости, проходящей через точку  $P_0$  перпендикулярно к вектору момента количества движения. Поскольку уравнение (2.1.26) определяет поверхность второго порядка, то траектория тела  $P$  есть *кривая второго порядка — коническое сечение*.

**1. Орбитальные координаты.** Возьмем новую систему координат  $P_0\xi\eta\zeta$ , ось  $P_0\xi$  которой направлена по вектору Лапласа, ось  $P_0\zeta$  — по вектору момента количества движения, а ось  $P_0\eta$  дополняет систему до правой. Тогда формулы преобразования координат будут иметь вид

$$\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda}x + \frac{\lambda_2}{\lambda}y + \frac{\lambda_3}{\lambda}z,$$

$$\eta = \frac{c_2\lambda_3 - c_3\lambda_2}{c\lambda}x + \frac{c_3\lambda_1 - c_1\lambda_3}{c\lambda}y + \frac{c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1}{c\lambda}z,$$

$$\zeta = \frac{c_1}{c}x + \frac{c_2}{c}y + \frac{c_3}{c}z,$$

в силу чего уравнения (2.1.25) и (2.1.26) преобразуются к виду

$$\zeta = 0, \quad \mu r + \lambda\xi = c^2. \quad (2.1.27)$$

Переменные  $\xi$  и  $\eta$  называются *орбитальными координатами*.

**2. Уравнение орбиты в полярных координатах.** Пусть

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v. \quad (2.1.28)$$

Тогда из (2.1.27) находим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (2.1.29)$$

где

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.1.30)$$

Уравнение (2.1.29) есть полярное уравнение конического сечения, фокус которого находится в начале координат (точке  $P_0$ ). Величина  $p$  называется (фокальным) *параметром* конического сечения,  $e$  — *эксцентриситетом*, полярный угол  $v$  — *истинной аномалией*.

Из уравнения (2.1.29) следует, что минимальное значение радиуса-вектора  $r$  достигается при  $v = 0$ ; соответствующая этому значению  $r$  точка орбиты называется *перигелием*. В случае движения тела относительно Солнца перигелий называют *перигелием*, в случае движения тела относительно Земли — *перигеем* и т. д. Поскольку эта точка лежит на оси  $P_0\xi$ , вектор Лапласа направлен в перигелий орбиты. Для ограниченных в пространстве движений при  $v = \pi$  радиус-вектор  $r$  достигает максимального значения. Соответствующая ему точка орбиты называется *апоцентром*. В случае движения тела относительно Солнца она называется *афелием*, а в случае движения тела относительно Земли — *апогеем*. Прямая, соединяющая апоцентр и перигелий, носит название *линии апсид*.

**3. Классификация орбит в задаче двух тел.** Из равенств (2.1.24) и (2.1.30) находим формулу

$$h = \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1), \quad (2.1.31)$$

связывающую постоянные  $h$ ,  $c$  и  $e$ , а из интеграла энергии имеем

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} + h, \quad (2.1.32)$$

где  $r_0$  и  $V_0$  — значения радиуса-вектора и скорости в начальный момент времени.

В зависимости от начальных условий или постоянных интегрирования будем иметь следующие типы орбит:

а) эллиптическая орбита

$$c \neq 0, \quad 0 < e < 1, \quad h < 0, \quad V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \lambda < \mu; \quad (2.1.33)$$

б) круговая орбита\*)

$$c \neq 0, \quad e = 0, \quad h = -\frac{\mu}{r_0} < 0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad \lambda = 0; \quad (2.1.34)$$

в) параболическая орбита

$$c \neq 0, \quad e = 1, \quad h = 0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \lambda = \mu; \quad (2.1.35)$$

---

\*) Круговая орбита может рассматриваться также как частный случай эллиптической ( $e = 0$ ).



г) гиперболическая орбита

$$c \neq 0, \quad e > 1, \quad h > 0, \quad V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \lambda > \mu; \quad (2.1.36)$$

д) прямолинейная траектория

$$c = 0. \quad (2.1.37)$$

Условия (2.1.33)—(2.1.37) легко вытекают из формул (2.1.29)—(2.1.32).

Следует заметить, что при  $c = 0$  и  $h < 0$  движение будет происходить по отрезку прямой, при  $c = 0$  и  $h = 0$  — вдоль луча и, наконец, при  $c = 0$ ,  $h > 0$  — вдоль всей прямой. Таким образом, если  $h < 0$ , то невозмущенное движение будет происходить в ограниченном пространстве, а если  $h \geq 0$ , то мы будем иметь неограниченное в пространстве движение.

**4. Первая и вторая космические скорости.** Наименьшая начальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли (ИСЗ), называется *первой космической скоростью*. Она равна скорости кругового движения (*круговой скорости*) на данной высоте, т. е.

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad (2.1.38)$$

где  $\mu$  есть произведение постоянной тяготения на массу Земли (массой ИСЗ можно пренебречь), а  $r_0$  — геоцентрическое расстояние ИСЗ. На поверхности Земли первая космическая скорость составляет около 7,91 км/сек.

*Второй космической скоростью* называется наименьшая начальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно, начав движение вблизи поверхности Земли, преодолело земное притяжение. Очевидно, она равна скорости параболического движения на данной высоте (*параболической скорости*)

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}. \quad (2.1.39)$$

Эта скорость, так же как и  $V_c$ , меняется с высотой. Будучи приведенной к поверхности Земли, она составляет около 11,2 км/сек.

## § 1.04. Элементы орбиты

*Элементами орбиты называются величины, характеризующие положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму, а также положение небесного тела на орбите.* Элементы, характеризующие положение плоскости орбиты и ориентацию орбиты в этой плоскости, вводятся следующим образом. Пусть движение небесного тела рассматривается в системе координат  $P_0xyz$

(рис. 61) с началом в центре масс центрального тела  $P_0$ , и пусть оси  $P_0x$ ,  $P_0y$ ,  $P_0z$  пересекают небесную сферу в точках  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Будем рассматривать плоскость большого круга  $XU$  как основную плоскость, а точку  $X$  — как основную точку на этом круге. Предположим, что плоскость орбиты пересекает небесную сферу по большому кругу  $NAM$ , а радиус-вектор перигелия пересекает небесную сферу в точке  $A$ . Тогда прямая  $N'P_0N$ , по которой плоскость орбиты пересекает основную плоскость, называется *линией узлов*. Когда

движение небесного тела происходит против часовой стрелки, если смотреть из полюса орбиты  $S$ , точка  $N$  называется *восходящим узлом*, а точка  $N'$  — *нисходящим узлом*. Дуга  $XN$ , обозначаемая через  $\Omega$ , называется *долготой восходящего узла* или просто *долготой узла*. Угол  $MNY$ , обозначаемый через  $i$ , под которым плоскость орбиты пересекает основную плоскость, называется *наклоном орбиты*; наклон орбиты — это также дуга большого круга  $ZC$ . Дуга  $NA$ , обозначаемая через  $\omega$ , называется *угловым расстоянием перигелия от узла* (*аргумент перигелия*). Величины  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  составляют первую группу элементов орбиты; первые два из них характеризуют положение плоскости орбиты, а третий — ориентацию орбиты в этой плоскости. При этом очевидно, что

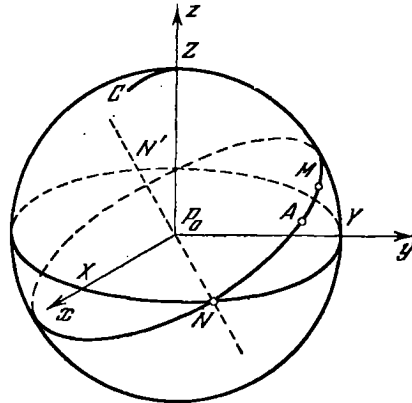


Рис. 61. Элементы орбиты.

$$0^\circ \leq i \leq 180^\circ, \quad 0^\circ \leq \Omega < 360^\circ, \quad 0^\circ \leq \omega < 330^\circ.$$

В случае движения планет за основную плоскость чаще всего принимают плоскость эклиптики, а за основную точку — точку весеннего равноденствия. В теории движения ИСЗ в качестве основной плоскости обычно берут плоскость экватора, а за основную точку — точку весеннего равноденствия. В первом случае элементы орбиты называются *эклиптическими*, во втором — *экваториальными*.

Элементы, характеризующие размеры и форму орбиты, — это *параметр  $p$*  и *эксцентриситет  $e$* .

Последним, шестым элементом является  $\tau$  — *момент прохождения через перигелий*. Этот элемент определяет положение небесного тела на орбите.

Элементы  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  называются *кеплеровскими элементами*. Они определяют орбиту независимо от ее типа. Различие

будет лишь в том, что для эллиптической орбиты  $e < 1$ , для параболической  $e = 1$  и для гиперболической  $e > 1$ . Различные модификации элементов  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ , часто встречающиеся в литературе, подробно рассматриваются в §§ 2.01—2.04.

### § 1.05. Формулы, связывающие постоянные интегрирования и элементы орбиты

Формулы, связывающие семь постоянных интегрирования  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ;  $h$  и пять независимых элементов орбиты  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\mu p} \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -\sqrt{\mu p} \sin i \cos \Omega, \\ c_3 &= \sqrt{\mu p} \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \mu e (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i), \\ \lambda_2 &= \mu e (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i), \\ \lambda_3 &= \mu e \sin \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.41)$$

$$c = \sqrt{\mu p}, \quad \lambda = e\mu, \quad h = -\frac{\mu}{p}(1 - e^2). \quad (2.1.42)$$

Шестой элемент  $\tau$  является постоянной интегрирования, возникающей при решении дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad (2.1.43)$$

связывающего истинную аномалию  $v$  с временем  $t$ .

## Глава 2

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ НЕВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В главе 2 приводится общее решение задачи двух тел для различных типов движения (эллиптического, гиперболического, параболического и прямолинейного). Подробное освещение этих вопросов можно найти в [1] — [5].

#### § 2.01. Эллиптическое движение

Эллиптическое движение определяется следующими условиями:

$$c \neq 0, \quad h < 0, \quad V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad (2.2.01)$$

где  $h$  — постоянная энергии,  $r_0$  и  $V_0$  — значения модулей радиуса-вектора и скорости в начальный момент времени.

1. **Элементы орбиты.** Эллиптическая орбита характеризуется следующей основной системой элементов:  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклон,  $\Omega$  — долгота восходящего узла,  $\omega$  — угловое расстояние перицентра от узла,  $M_0$  — средняя аномалия в эпоху (см. § 1.04). В литературе часто встречаются различные модификации элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M_0$ . Так, вместо элемента  $a$  можно рассматривать параметр орбиты  $p$ , элемент  $q$ , среднее движение  $n$ , период обращения  $T$ , которые связаны с  $a$  формулами

$$p = a(1 - e^2), \quad q = a(1 + e), \quad (2.2.02)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad T = \frac{2\pi}{n}. \quad (2.2.03)$$

В случае движения относительно Солнца  $q$  называется *перигелийным расстоянием*, в случае движения относительно Земли  $q$  называется *перигейным расстоянием* и т. д.

Вместо  $e$  иногда рассматривают элемент  $\varphi$ , определяемый формулой

$$e = \sin \varphi$$

и называемый *углом эксцентриситета*.

Вместо  $\omega$  часто вводят элемент  $\pi$ :

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (2.2.04)$$

называемый *долготой перицентра*.

Вместо  $M_0$  можно рассматривать *момент прохождения через перицентр*  $\tau$  и *среднюю долготу в эпоху*  $\epsilon$ , связанные с  $M_0$  равенствами

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad \epsilon = \Omega + \omega + M_0, \quad (2.2.05)$$

где  $t_0$  — *начальный момент времени* (эпоха).

**2. Вычисление прямоугольных координат.** Пусть, как и раньше (см. § 1.01), движение тела  $P$  рассматривается в системе координат  $P_0xyz$ . Тогда для вычисления  $x, y, z$  могут служить следующие формулы:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (2.2.06)$$

$$E - e \sin E = M, \quad (2.2.07)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (2.2.08)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad (2.2.09)$$

$$u = v + \omega, \quad (2.2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

Здесь  $M$  называется *средней аномалией*,  $E$  — *эксцентрической аномалией*,  $v$  — *истинной аномалией*,  $u$  — *аргументом широты*, а уравнение (2.2.07) — *уравнением Кеплера*.

Формулы (2.2.06)–(2.2.11) позволяют вычислить прямоугольные координаты  $x, y, z$  для любого момента времени  $t$ , если известны элементы  $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ . Действительно, вычислив по первой формуле (2.2.03)  $n$ , мы для любого момента  $t$  по формуле (2.2.06) находим  $M$ . Решив далее уравнение Кеплера (2.2.07), находим  $E$ , после чего по формулам (2.2.08)–(2.2.10) вычисляем последовательно  $v, r, u$ , а затем по формулам (2.2.11)  $x, y, z$ .

Для решения уравнения Кеплера обычно используется метод последовательных приближений. При этом в качестве первого

приближения для  $E$  принимается  $M$  или некоторая величина, для которой в зависимости от  $M$  и  $e$  построены специальные таблицы. Для значений эксцентриситета, близких к единице, приведенные выше формулы малопригодны. Модификация формул для этого случая дана в § 1.03 ч. III.

Достаточно полный обзор работ, посвященных способам решения уравнения Кеплера, содержит статья [6]. Вспомогательные таблицы приводятся в [7] — [11]. Кроме того, можно указать также таблицы для значений  $v - M$  в зависимости от  $M$  [12] — [15]. Для вычисления положений ИСЗ И. Д. Жонголовичем и В. М. Амелиным составлены таблицы, дающие  $v - M$  с точностью до  $0^{\circ},01$  [16].

Радиус-вектор  $r$  и прямоугольные координаты  $x, y, z$  можно вычислять и по другим формулам, не требующим знания истинной аномалии  $v$ . Эти формулы имеют вид

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (2.2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \xi + Q_x \eta, \\ y &= P_y \xi + Q_y \eta, \\ z &= P_z \xi + Q_z \eta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — орбитальные координаты, а направляющие косинусы  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  определяются через элементы  $\Omega, \omega, i$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)$$

Для контроля вычислений используют равенства

$$\left. \begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 &= 1, \\ Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 &= 1, \\ P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.17)$$

При массовых вычислениях формулы (2.2.12) — (2.2.16) имеют преимущество по сравнению с формулами (2.2.08) — (2.2.11), ибо величины  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  не зависят от времени и

для каждого момента нужно вычислять лишь  $E$ ,  $\cos E$  и  $\sin E$ , после чего легко находятся  $r$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , а затем и  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**3. Скорость в эллиптическом движении.** Пусть  $V$  — скорость,  $V_r$  — радиальная скорость и  $V_n$  — трансверсальная скорость. Тогда

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (2.2.18)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \quad (2.2.19)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (2.2.20)$$

Дифференцируя по времени формулы (2.2.11), найдем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i \cdot V_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

Эти формулы позволяют вычислить проекции скорости на оси координат. Для вычисления  $V$  имеем формулу

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (2.2.22)$$

которую можно использовать для контроля.

### § 2.02. Круговое движение

Круговое движение имеет место, когда

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad c \neq 0, \quad (2.2.23)$$

где  $\mu = f(m_0 + m)$ ,  $r_0$  и  $V_0$  — начальные значения модулей радиуса-вектора и скорости.

**1. Элементы орбиты.** Поскольку  $e=0$ , положение перигентра не определено. Поэтому можно положить  $\omega=0$  и круговая орбита будет характеризоваться следующими элементами:  $a$  — радиус,  $i$  — наклон,  $\Omega$  — долгота узла,  $M_0$  — средняя аномалия в эпоху (см. § 2.01). Вместо  $M_0$  можно рассматривать среднюю долготу в эпоху  $\epsilon$ , определяемую формулой (2.2.05). Вместо  $a$  можно ввести среднее движение  $n$  или период обращения  $T$  по формулам (2.2.03).

**2. Вычисление прямоугольных координат.** Все формулы кругового движения можно получить из формул эллиптического

движения, если в них положить  $e = 0$ ,  $\omega = 0$ . В случае кругового движения имеем

$$u = v = E = M.$$

Поэтому формулы (2.2.06)—(2.2.11) переходят в следующие:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (2.2.24)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos M \cos \Omega - \sin M \sin \Omega \cos i), \\ y &= a(\cos M \sin \Omega + \sin M \cos \Omega \cos i), \\ z &= a \sin M \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.25)$$

Вместо формул (2.2.13), (2.2.14) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x &= aP_x \cos M + aQ_x \sin M, \\ y &= aP_y \cos M + aQ_y \sin M, \\ z &= aP_z \cos M + aQ_z \sin M, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.26)$$

так как

$$\xi = a \cos M, \quad \eta = a \sin M. \quad (2.2.27)$$

Здесь  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  определяются формулами (2.2.15) и (2.2.16).

**3. Скорость в круговом движении.** Дифференцируя формулы (2.2.25) по времени, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= an(-\sin M \cos \Omega - \cos M \sin \Omega \cos i), \\ \dot{y} &= an(-\sin M \sin \Omega + \cos M \cos \Omega \cos i), \\ \dot{z} &= an \cos M \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.28)$$

Скорость  $V$  найдется по формуле

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{\mu}{a}. \quad (2.2.29)$$

### § 2.03. Гиперболическое движение

Гиперболическое движение имеет место, когда

$$h > 0, \quad V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \quad c \neq 0, \quad (2.2.30)$$

где  $h$  — постоянная энергии,  $r_0$  и  $V_0$  — начальные значения модулей радиуса-вектора и скорости.

**1. Элементы орбиты.** Гиперболическая орбита характеризуется следующими элементами:  $a$  — действительная полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклон,  $\Omega$  — долгота узла,  $\omega$  — угловое расстояние перигентра от узла,  $\tau$  — момент прохождения через перигентр (см. § 1.04). Иногда рассматривают модификации



этих элементов. Так, вместо  $a$  вводят *параметр орбиты*  $p$  или элемент  $q$  по формулам

$$p = a(e^2 - 1), \quad q = a(e - 1). \quad (2.2.31)$$

Вместо элемента  $\omega$  часто рассматривают элемент

$$\pi = \Omega + \omega,$$

называемый *долготой перицентра*.

**2. Вычисление прямоугольных координат.** Пусть движение тела  $P$  рассматривается в относительной системе координат  $P_0xyz$ . Тогда для вычисления прямоугольных координат  $x, y, z$  могут служить следующие формулы:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (2.2.32)$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (2.2.33)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, \quad (2.2.34)$$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos v}, \quad (2.2.35)$$

$$u = v + \omega, \quad (2.2.36)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.37)$$

Здесь  $v$  — *истинная аномалия*,  $u$  — *аргумент широты*.

Для решения уравнения (2.2.33) пользуются методом последовательных приближений.

Приведенные формулы требуют вычисления истинной аномалии. Можно, однако, воспользоваться формулами, по которым радиус-вектор и прямоугольные координаты вычисляются без предварительного определения  $v$ . Эти формулы имеют такой вид:

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1), \quad (2.2.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(e - \operatorname{ch} H), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.39)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \xi + Q_x \eta, \\ y &= P_y \xi + Q_y \eta, \\ z &= P_z \xi + Q_z \eta, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.40)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — *орбитальные координаты*, а направляющие косинусы  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  определяются формулами (2.2.15) и (2.2.16).

**З а м е ч а н и е.** Если в формулах эллиптического движения заменить  $a$  на  $-a$  и  $\sqrt{-1} E$  на  $H$ , то мы получим соответствующие формулы гиперболического движения.

**3. Скорость в гиперболическом движении.** Для вычисления проекций скорости на координатные оси нужно воспользоваться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i \cdot V_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.41)$$

где радиальная  $V_r$  и трансверсальная  $V_n$  составляющие скорости определяются уравнениями

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \quad (2.2.42)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (2.2.43)$$

Скорость  $V$  находится из формулы

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

При этом для контроля можно пользоваться интегралом энергии

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (2.2.44)$$

### § 2.04. Параболическое движение

Параболическое движение имеет место, когда

$$h = 0, \quad V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}, \quad c \neq 0, \quad e = 1, \quad (2.2.45)$$

где  $h$  — постоянная энергии,  $r_0$  и  $V_0$  — начальные значения модулей радиуса-вектора и скорости.

**1. Элементы орбиты.** Параболическая орбита характеризуется следующими пятью элементами:  $p$  — параметр орбиты,  $i$  — наклон,  $\Omega$  — долгота узла,  $\omega$  — угловое расстояние перигелия от узла,  $\tau$  — момент прохождения через перигелий (см. § 1.04). Часто вместо параметра вводят элемент

$$q = \frac{p}{2}. \quad (2.2.46)$$

В случае движения относительно Солнца  $q$  называется *перигелийным расстоянием*, а при движении относительно Земли — *перигейным расстоянием*.

Вместо элемента  $\omega$  иногда рассматривают *долготу перицентра*  $\pi = \Omega + \omega$ .

**2. Вычисление прямоугольных координат.** Пусть движение тела  $P$  рассматривается в относительной системе координат  $P_0xyz$ . Тогда прямоугольные координаты  $x, y, z$  могут быть вычислены по формулам

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}. \quad (2.2.47)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = n(t - \tau), \quad (2.2.48)$$

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2}, \quad (2.2.49)$$

$$u = v + \omega, \quad (2.2.50)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.51)$$

Кубическое уравнение (2.2.48), называемое иногда *уравнением Баркера*, всегда имеет единственный действительный корень. Вспомогательные таблицы можно найти в [7] — [11].

Вместо формул (2.2.48) — (2.2.51) можно также воспользоваться следующими формулами:

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = n(t - \tau), \quad (2.2.52)$$

$$r = q(1 + \sigma^2), \quad (2.2.53)$$

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad \eta = 2q\sigma, \quad (2.2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \xi + Q_x \eta, \\ y &= P_y \xi + Q_y \eta, \\ z &= P_z \xi + Q_z \eta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.55)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — *орбитальные координаты*  $\sigma = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$ , а  $P_x, P_y, \dots, Q_z$  даются уравнениями (2.2.15) и (2.2.16).

**3. Скорость в параболическом движении.** Для вычисления проекций скорости на координатные оси имеем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i \cdot V_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.56)$$

где радиальная  $V_r$  и трансверсальная  $V_n$  составляющие скорости определяются уравнениями

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + \cos v). \quad (2.2.57)$$

Для вычисления скорости  $V$  могут служить формулы

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V_r^2 + V_n^2, \\ V^2 = \frac{2\mu}{r}. \quad (2.2.58)$$

Последней формулой следует воспользоваться для контроля.

### § 2.05. Прямолинейное движение

Прямолинейное движение имеет место, когда

$$c = 0, \quad (2.2.59)$$

где  $c$  — постоянная площадей.

Положение прямой в пространстве можно задать тремя направляющими косинусами  $P_x, P_y, P_z$  (см. (2.2.15)), между которыми существует соотношение

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1. \quad (2.2.60)$$

Для прямоугольных координат  $x, y, z$  будем иметь следующие формулы:

$$x = P_x r, \quad y = P_y r, \quad z = P_z r, \quad (2.2.61)$$

где  $r$  — радиус-вектор.

1. Случай  $h = 0$ . Здесь

$$r = \left[ r_0^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} (t - t_0) \right]^{2/3}, \quad (2.2.62)$$

где  $\mu = f(m_0 + m)$ , а  $r_0$  — значение радиуса-вектора в начальный момент  $t = t_0$ . Знак «+» нужно брать тогда, когда начальная скорость  $V_0$  направлена от тела  $P_0$ , и знак «-», когда  $V_0$  направлена к телу  $P_0$ .

2. Случай  $h < 0$ . Для радиуса-вектора имеем

$$r = a(1 - \cos E), \quad (2.2.63)$$

где  $E$  определяется из уравнений Кеплера при  $e = 1$ ,

$$E - \sin E = n(t - \tau), \quad (2.2.64)$$

причем

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

$a$  и  $\tau$  — постоянные интегрирования;  $a$  характеризует наибольшее удаление тела  $P$  от  $P_0$ ,  $\tau$  — момент времени, когда  $r = 0$ .

3. Случай  $h > 0$ . Радиус-вектор задается формулой

$$r = a(\operatorname{ch} H - 1), \quad (2.2.65)$$

где  $H$  определяется из уравнения

$$\operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (2.2.66)$$

причем  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ ,  $a$  и  $\tau$  — постоянные интегрирования.

З а м е ч а н и е. Приведенные формулы показывают, что прямолинейные движения при  $h \neq 0$  можно рассматривать как вырожденное эллиптическое ( $h < 0$ ) и вырожденное гиперболическое движение ( $h > 0$ ), когда  $e = 1$ .

### § 2.06. Вычисление эфемерид планет и комет

*Эфемеридой* называется совокупность геоцентрических положений небесного тела для ряда равноотстоящих моментов времени.

В случае гелиоцентрического движения за основную плоскость принимают плоскость эклиптики, а за основное направление — направление на точку весеннего равноденствия. Поэтому элементы  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  будут отнесены к плоскости эклиптики и точке весеннего равноденствия.

Обозначим через  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  соответственно *геоцентрическое расстояние* небесного тела, *прямое восхождение* и *склонение* небесного тела. Для вычисления этих величин будем иметь следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= A_x \xi + B_x \eta + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= A_y \xi + B_y \eta + Y, \\ \rho \sin \delta &= A_z \xi + B_z \eta + Z. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.67)$$

Здесь  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — *геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Солнца*,  $\xi$  и  $\eta$  — *орбитальные координаты* небесного тела,

$$\left. \begin{aligned} A_x &= P_x, \\ A_y &= P_y \cos \varepsilon - P_z \sin \varepsilon, \\ A_z &= P_y \sin \varepsilon + P_z \cos \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.68)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x &= Q_x, \\ B_y &= Q_y \cos \varepsilon - Q_z \sin \varepsilon, \\ B_z &= Q_y \sin \varepsilon + Q_z \cos \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.69)$$

где  $\varepsilon$  — *наклон эклиптики к экватору*, а  $P_x$ ,  $P_y$ , ...,  $Q_z$  даются формулами (2.2.15) и (2.2.16).

Значения  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  приводятся в ежегодниках, а формулы для вычисления орбитальных координат  $\xi$  и  $\eta$  в случае эллиптического, гиперболического и параболического движений были рассмотрены в §§ 2.01—2.04.

## Глава 3

### РАЗЛОЖЕНИЕ КООРДИНАТ НЕВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В РЯДЫ

При рассмотрении невозмущенного кеплеровского движения, а также в теории возмущений (ч. IV, гл. 6) возникает необходимость в явных выражениях координат невозмущенного движения (а также различных функций от координат) через время, истинную, эксцентрическую и среднюю аномалии. В подавляющем большинстве случаев этого удастся добиться только при помощи различного рода разложений в ряды (в первую очередь тригонометрические). Способы разложения в ряды описаны во многих курсах небесной механики, например, в [1]—[5]. Коэффициенты наиболее употребительных рядов табулированы [17], [18].

Ниже приводятся основные разложения, чаще всего используемые на практике.

#### § 3.01. Разложение функций эксцентрической аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии

Общее решение задачи двух тел (см. формулы гл. 2) дает координаты тела  $P$  в виде неявных функций времени. Приведенные в главе 2 формулы позволяют достаточно просто вычислять координаты и составляющие скорости для всех типов невозмущенного движения. Однако в некоторых случаях необходимо иметь выражения для координат в виде явных функций времени. Поскольку связь между координатами и временем устанавливается через посредство вспомогательных переменных типа эксцентрической аномалии  $E$ , связанных со временем  $t$  при помощи трансцендентных уравнений, такие выражения могут быть получены только в виде рядов\*).

В небесной механике известны два вида разложений координат эллиптического движения, пригодных для исследования движения на всем бесконечном промежутке времени.

---

\*) Явные выражения для координат в конечном виде можно получить только в некоторых частных случаях, таких, например, как круговое движение и прямолинейное движение «параболического» класса,

а) Разложения в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии  $M$ . Коэффициентами этих рядов являются некоторые функции эксцентриситета  $e$ . Эти ряды сходятся (но не абсолютно!) для всех  $M$  при  $0 \leq e < 1$  и для всех  $M$  при  $0 \leq e < e^*$  (абсолютно), где

$$e^* = 0,6627434193492\dots$$

называется *пределом Лапласа*.

б) Разложение в ряды по степеням эксцентриситета. Коэффициенты этих рядов суть некоторые периодические функции  $M$ . Ряды эти абсолютно сходятся для всех  $M$  и для всех  $e$ , не превосходящих предела Лапласа.

Коэффициенты тригонометрических рядов только в редких случаях могут быть выражены через элементарные функции. В общем случае они довольно просто выражаются через функции Бесселя. На практике, однако, как правило, приходится разлагать функции Бесселя в ряды по степеням эксцентриситета и пользоваться только их первыми членами.

Приведем разложения наиболее часто употребляемых функций эксцентрической аномалии в ряды Фурье по кратным средней аномалии.

1) Разложение для эксцентрической аномалии:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (2.3.01)$$

2) Разложение для  $\cos E$  и  $\sin E$ :

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \quad (2.3.02)$$

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (2.3.03)$$

3) Разложение для  $\cos mE$  и  $\sin mE$ :

$$\cos mE = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \cos kM, \quad (2.3.04)$$

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)] \sin kM, \quad (2.3.05)$$

где  $m$  — целое число, большее единицы.

4) Разложение для радиуса-вектора  $r$ :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)}{k} \cos kM. \quad (2.3.06)$$

5) Разложение для обратной величины радиуса-вектора:

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM. \quad (2.3.07)$$

6) Разложения для орбитальных координат  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\frac{\xi}{a} = \frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \quad (2.3.08)$$

$$\frac{\eta}{a} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (2.3.09)$$

В приведенных разложениях функции Бесселя  $J_k(ke)$  даются следующей формулой:

$$J_k(ke) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k+2n}. \quad (2.3.10)$$

Приведем явные выражения для некоторых первых коэффициентов  $J_k(ke)$ :

$$\left. \begin{aligned} J_1(e) &= \frac{e}{2} \left( 1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \dots \right), \\ J_2(2e) &= \frac{e^2}{2} \left( 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \frac{e^6}{360} + \dots \right), \\ J_3(3e) &= \frac{9e^3}{16} \left( 1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \dots \right), \\ J_4(4e) &= \frac{2e^4}{3} \left( 1 - \frac{4e^2}{5} + \frac{4e^4}{15} - \dots \right), \\ J_5(5e) &= \frac{625e^5}{768} \left( 1 - \frac{25e^2}{24} + \frac{625e^4}{1344} - \dots \right), \\ J_6(6e) &= \frac{81e^6}{80} \left( 1 - \frac{9e^2}{7} + \frac{81e^4}{112} - \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.11)$$

Для вычисления функций Бесселя при других значениях  $k$  полезно иметь в виду рекуррентные формулы (4.5.35) и (4.5.36).



### § 3.02. Разложение функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии

1) Разложения для  $\cos v$  и  $\sin v$ :

$$\cos v = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad (2.3.12)$$

$$\sin v = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM. \quad (2.3.13)$$

2) Уравнение центра:

$$v - M = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \sin kM, \quad (2.3.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 4 \left(\frac{e}{2}\right) - 2 \left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{107}{36} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots, \\ H_2 &= 5 \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{17}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \dots, \\ H_3 &= \frac{26}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{95}{4} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots, \\ H_4 &= \frac{103}{6} \left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{902}{15} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \dots, \\ H_5 &= \frac{1097}{30} \left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{5957}{36} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots, \\ H_6 &= \frac{1223}{15} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \dots, \\ H_7 &= \frac{47\,273}{252} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

3) Разложения величин  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv$  и  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n,m} \cos kM, \quad (2.3.16)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{n,m} \sin kM. \quad (2.3.17)$$

Явные выражения коэффициентов  $C_k^{n,m}$  и  $S_k^{n,m}$  с точностью до  $e^7$  включительно для  $n = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$  и  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  содержатся в таблицах Кэли [17]. Выражения для этих и некоторых других коэффициентов с точностью до  $e^{20}$  опубликованы в работе [18].

4) Коэффициенты Ганзена. Коэффициентами Ганзена  $X_k^{n,m}$  называются коэффициенты разложения функции

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , в ряд вида

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \sum_{-\infty}^{\infty} X_k^{n,m} \exp ikM. \quad (2.3.18)$$

Выражения коэффициентов Ганзена с точностью до  $e^{20}$  можно найти в работе [18].

Общее выражение для  $X_k^{n,m}$  имеет вид

$$X_k^{n,m} = (1 + \beta^2)^{-n-1} \sum_{-\infty}^{\infty} E_{k-p}^{n,m} J_p(ke), \quad (2.3.19)$$

где

$$E_{k-p}^{n,m} = (-\beta)^{k-p-m} \binom{n-m+1}{k-p-m} \times \\ \times F(k-p-n-1, -m-n-1, k-p-m+1; \beta^2), \quad (2.3.20)$$

причем

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad (2.3.21)$$

а через  $F(a, b, c; x)$  обозначена гипергеометрическая функция.

### § 3.03. Первые члены рядов по кратным средней аномалии для некоторых функций

Приведем явные выражения для наиболее часто употребляемых функций эллиптического движения с точностью до  $e^3$  включительно:

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3}{8} e^3 \sin 3M, \quad (2.3.22)$$

$$v = M + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^3 \sin 3M, \quad (2.3.23)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \left(-e + \frac{3}{8} e^3\right) \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M - \frac{3}{8} e^3 \cos 3M, \quad (2.3.24)$$

$$\frac{a}{r} = 1 + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M, \quad (2.3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{a} = & -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos M + \left(\frac{e}{2} - \frac{e^3}{3}\right)\cos 2M + \\ & + \frac{3}{8}e^2\cos 3M + \frac{e^3}{3}\cos 4M, \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{a} = & \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right)\sin M + \left(\frac{e}{2} - \frac{5}{12}e^3\right)\sin 2M + \\ & + \frac{3}{8}e^2\sin 3M + \frac{e^3}{3}\sin 4M, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \left(-2e + \frac{e^3}{4}\right)\cos M - \frac{e^2}{2}\cos 2M - \frac{e^3}{4}\cos 3M, \quad (2.3.28)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \left(2e + \frac{3}{4}e^3\right)\cos M + \frac{5}{2}e^2\cos 2M + \frac{13}{4}e^3\cos 3M, \quad (2.3.29)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)\cos v = & -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos M + \\ & + \frac{e^3}{3}\cos 4M + \left(\frac{e}{2} - \frac{e^3}{3}\right)\cos 2M + \frac{3}{8}e^2\cos 3M, \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)\sin v = & \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right)\sin M + \left(\frac{e}{2} - \frac{5}{12}e^3\right)\sin 2M + \\ & + \frac{3}{8}e^2\sin 3M + \frac{e^3}{3}\sin 4M. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — орбитальные координаты.

### § 3.04. Формула Лагранжа

Уравнение вида

$$z - a - \alpha f(z) = 0,$$

где  $z$ ,  $a$  и параметр  $\alpha$  — комплексные величины, а  $f(z)$  — заданная функция, голоморфная внутри некоторого контура  $S$ , содержащего точку  $a$ , называется *уравнением Лагранжа*.

Если на контуре  $S$

$$|\alpha f(z)| < |z - a|,$$

то уравнение Лагранжа имеет внутри контура  $S$  единственный корень, являющийся голоморфной функцией  $\alpha$  и обращающийся в  $a$  при  $\alpha = 0$ .

Этот корень может быть найден при помощи *формулы Лагранжа*, которая имеет вид

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f^n(a)].$$

Рассмотрим теперь некоторую заданную и голоморфную внутри контура  $S$  функцию  $\Phi(z)$ . Тогда разложение этой функции от корня уравнения Лагранжа дается формулой

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} [\Phi'(a) f^n(a)],$$

которую можно назвать *обобщенной формулой Лагранжа*.

Приведенные здесь разложения для  $z$  и  $\Phi(z)$  абсолютно сходятся для любого значения  $a$  в области, ограниченной контуром  $S$ , и параметра  $\alpha$ , удовлетворяющего условию

$$|\alpha| < \left| \frac{z-a}{f(z)} \right|.$$

Формула Лагранжа и ее обобщение играют весьма важную роль в небесной механике. Действительно, поскольку уравнение Кеплера можно рассматривать как частный случай уравнения Лагранжа, то они позволяют достаточно просто построить ряды по степеням эксцентриситета  $e$  для эксцентрической аномалии  $E$  и различных функций  $E$ .

### § 3.05. Ряды по степеням эксцентриситета

Применительно к уравнению Кеплера формула Лагранжа и ее обобщение дают

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^n M),$$

$$\Phi(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} [\Phi'(M) \sin^n M].$$

Первая из этих формул позволяет написать разложение эксцентрической аномалии в ряд по степеням эксцентриситета, а вторая дает возможность получить соответствующие разложения для различных функций эксцентрической аномалии.

Разложение для  $E$ :

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} e^n E_n(M),$$

где

$$E_n(M) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^n M).$$

Разложение для  $\cos E$ :

$$\cos E = \sum_{n=0}^{\infty} e^n C_n(M),$$

где

$$C_n(M) = -\frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^{n+1} M)}{dM^{n-1}}.$$

Разложение для  $\sin E$ :

$$\sin E = \sum_{n=0}^{\infty} e^n S_n(M),$$

где

$$S_n(M) = -\frac{1}{(n+1)!} \frac{d^n(\sin^{n+2} M)}{dM^n},$$

или

$$S_n(M) = C_{n+1}(M).$$

Разложение для  $r$ :

$$\frac{r}{a} = \sum_{n=0}^{\infty} e^n R_n(M),$$

где

$$R_0(M) = 1, \quad R_n(M) = -C_{n-1}(M) \quad (n \neq 0).$$

Разложение для  $\xi = r \cos v$ :

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{n=0}^{\infty} e^n A_n(M),$$

где

$$A_1(M) = -1 + C_1(M), \quad A_n(M) = C_n(M) \quad (n \neq 0).$$

Разложение для  $\eta = r \sin v$ :

$$\frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^n S_n(M).$$

Разложение для  $\frac{a}{r}$ :

$$\frac{a}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} e^n B_n(M),$$

где

$$B_n(M) = \frac{dE_n(M)}{dM}.$$

Коэффициенты  $E_n$ ,  $C_n$ ,  $S_n$ ,  $R_n$ ,  $A_n$  и  $B_n$  можно представить в виде тригонометрических полиномов по синусам или косинусам кратных  $M$ . Для этого нужно воспользоваться следующими

формулами:

$$\sin^{2k} M = \frac{1}{2^{2k}} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} 2C_i^{2k} \cos 2(k-i)M + C_k^{2k} \right\},$$

$$\sin^{2k-1} M = \frac{1}{2^{2k-2}} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i-1} C_i^{2k-1} \sin(2k-2i-1)M,$$

где

$$C_i^l = \frac{l!}{i!(l-i)!}$$

суть биномиальные коэффициенты.

Так, например, для  $E_n(M)$  имеем

$$E_n(M) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\bar{n}} (-1)^i \frac{(n-2i)^{n-1}}{i!(n-i)!} \sin(n-2i)M,$$

где  $\bar{n}$  есть наибольшее целое число, содержащееся в  $n/2$ .

Приведенные здесь ряды, как и другие разложения в теории кеплеровского эллиптического движения, сходятся абсолютно для всех  $e$  от 0 до предела Лапласа.

### § 3.06. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии

Приведем разложения некоторых функций эллиптического движения в тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии  $E$ . Ряды по кратным  $E$  представляют интерес, особенно в тех случаях, когда при решении уравнений возмущенного движения (см. ч. IV, гл. 3, 4) в качестве независимой переменной принимается эксцентрическая аномалия.

1) Общие разложения для  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv$  и  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = A_0^{n,m} \cos mE + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{n,m} \cos(m+k)E + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{n,m} \cos(m-k)E, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = A_0^{n,m} \sin mE + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{n,m} \sin(m+k)E + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{n,m} \sin(m-k)E, \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

где

$$\begin{aligned} A_0^{n,m} &= (1 - e^2)^{n/2} (1 - \beta^2)^m T_0(n, m), \\ A_k^{n,m} &= (-\beta)^k C_k^{n-m} (1 - e^2)^{n/2} (1 - \beta^2)^m T_k(n, m), \\ B_k^{n,m} &= (-\beta)^k C_k^{n+m} (1 - e^2)^{n/2} (1 - \beta^2)^m T_k(n, -m), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \\ C_k^q &= \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-k+1)}{k!}, \\ T_k(n, m) &= F\left(-n-m, n-m+1, k+1; -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right), \end{aligned}$$

а  $F(a, b, c; x)$  — гипергеометрическая функция (см. ч. IV, § 5.02).

2) Разложение для  $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = A_0^{n,0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{n,0} \cos kE, \quad (2.3.34)$$

где

$$\begin{aligned} A_0^{n,0} &= (1 - e^2)^{n/2} F\left(-n, n+1, 1; -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right), \\ A_k^{n,0} &= (-\beta)^k C_k^n (1 - e^2)^{n/2} F\left(-n, n+1, k+1; -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right). \end{aligned}$$

3) Разложение для  $\frac{a}{r}$ :

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \cos kE\right). \quad (2.3.35)$$

4) Разложение для  $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = (1 - e^2)^{-1/2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + k \sqrt{1 - e^2}) \beta^k \cos kE\right]. \quad (2.3.36)$$

5) Разложение для  $\cos v$  и  $\sin v$ :

$$\cos v = -\beta + (1 - \beta^2) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} \cos kE, \quad (2.3.37)$$

$$\sin v = (1 - \beta^2) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} \sin kE. \quad (2.3.38)$$

6) Разложение для истинной аномалии:

$$v = E + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \sin kE, \quad (2.3.39)$$

где  $\beta$  определяется формулой (2.3.21).

### § 3.07. Ряды по кратным истинной аномалии

Приводимые ниже разложения некоторых функций в тригонометрические ряды по кратным  $v$  особенно полезны в тех случаях, когда при интегрировании дифференциальных уравнений возмущенного движения за независимую переменную принимается истинная аномалия (см. ч. IV, гл. 3, 4).

1) Разложение для  $M$  (уравнение центра):

$$M = v + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} + \sqrt{1 - e^2} \right) (-\beta)^k \sin kv. \quad (2.3.40)$$

2) Разложение для  $E$ :

$$E = v + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k} \sin kv. \quad (2.3.41)$$

3) Разложения для  $\cos E$  и  $\sin E$ :

$$\cos E = \beta + (1 - \beta^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta)^{k-1} \cos kv, \quad (2.3.42)$$

$$\sin E = (1 - \beta^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta)^{k-1} \sin kv. \quad (2.3.43)$$

4) Разложение для  $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = (1 - e^2)^{-n/2} \left[ T_0(n, 0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^n \beta^k T_k(n, 0) \cos kv \right]. \quad (2.3.44)$$



5) Приближенная формула для  $M$ :

$$M = v - 2e \sin v + \left( \frac{3}{4} e^2 + \frac{e^4}{8} \right) \sin 2v - \frac{e^3}{3} \sin 3v + \frac{5}{32} e^4 \sin 4v. \quad (2.3.45)$$

### § 3.08. Разложения координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды по степеням времени

Рассмотрим частное решение дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (2.3.46)$$

удовлетворяющего начальным условиям при  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0, & y &= y_0, & z &= z_0, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0, & \dot{y} &= \dot{y}_0, & \dot{z} &= \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Если исключить случай прямолинейных движений, то на основании теоремы Коши о существовании решений системы дифференциальных уравнений решение уравнений можно представить в виде рядов по степеням  $t - t_0$ , сходящихся во всяком случае при достаточно малых значениях  $t - t_0$ .

Пусть

$$x = x_0 F + \dot{x}_0 G, \quad y = y_0 F + \dot{y}_0 G, \quad z = z_0 F + \dot{z}_0 G; \quad (2.3.47)$$

тогда  $F$  и  $G$  будут частными решениями уравнений

$$\ddot{F} + \frac{\mu}{r^3} F = 0, \quad \ddot{G} + \frac{\mu}{r^3} G = 0, \quad (2.3.48)$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$F(t_0) = 1, \quad G(t_0) = 0, \quad \dot{F}(t_0) = 0, \quad \dot{G}(t_0) = 1. \quad (2.3.49)$$

Подставляя в уравнения (2.3.48) ряды

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k, \quad G = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t - t_0)^k \quad (2.3.50)$$

и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $t - t_0$ , мы можем последовательно найти коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , удовлетворяющие условиям (2.3.49).

В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= 1, \quad a_1 = 0, \\
 a_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\mu}{r_0^3}, \quad a_3 = \frac{1}{2} \frac{\mu}{r_0^4} \dot{r}_0, \\
 a_4 &= \frac{1}{8} \frac{\mu}{r_0^5} h - \frac{5}{8} \frac{\mu}{r_0^5} \dot{r}_0^2 + \frac{1}{6} \frac{\mu^2}{r_0^6}, \\
 a_5 &= -\frac{3}{8} \frac{\mu}{r_0^6} \dot{r}_0 h + \frac{7}{8} \frac{\mu}{r_0^6} \dot{r}_0^3 - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{r_0^7} \dot{r}_0, \\
 a_6 &= -\frac{1}{16} \frac{\mu}{r_0^7} h^2 + \frac{7}{8} \frac{\mu}{r_0^7} \dot{r}_0^2 h - \frac{21}{16} \frac{\mu}{r_0^7} \dot{r}_0^4 - \frac{19}{120} \frac{\mu^2}{r_0^8} h + \\
 &\quad + \frac{7}{6} \frac{\mu^2}{r_0^8} \dot{r}_0^2 - \frac{7}{72} \frac{\mu^3}{r_0^9}, \\
 \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.51)$$

$$\left. \begin{aligned}
 b_0 &= 0, \quad b_1 = 1, \\
 b_2 &= 0, \quad b_3 = -\frac{1}{6} \frac{\mu}{r_0^3}, \\
 b_4 &= \frac{1}{4} \frac{\mu}{r_0^4} \dot{r}_0, \\
 b_5 &= \frac{3}{40} \frac{\mu}{r_0^5} h - \frac{3}{8} \frac{\mu}{r_0^5} \dot{r}_0^2 + \frac{1}{12} \frac{\mu^2}{r_0^6}, \\
 b_6 &= -\frac{1}{4} \frac{\mu}{r_0^6} \dot{r}_0 h + \frac{7}{72} \frac{\mu}{r_0^6} \dot{r}_0^3 - \frac{7}{24} \frac{\mu^2}{r_0^7} \dot{r}_0, \\
 \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.52)$$

где  $\dot{r}_0$  — значение  $\dot{r}$  при  $t = t_0$  и

$$h = (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) - \frac{2\mu}{r_0}. \quad (2.3.53)$$

Полученные разложения сходятся в случае кругового движения при

$$|t - t_0| < \infty, \quad (2.3.54)$$

в случае эллиптического движения для всех  $t_0$  при

$$|t - t_0| < \frac{1}{n} \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} - \sqrt{1 - e^2} \right], \quad (2.3.55)$$

в случае параболического движения для всех  $t_0$  при

$$|t - t_0| < \frac{(2q)^{3/2}}{3\sqrt{\mu}} \quad (2.3.56)$$

и в случае гиперболического движения для всех  $t_0$  при

$$|t - t_0| < \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}], \quad (2.3.57)$$

где  $n$  — среднее движение,  $q$  — перигелийное расстояние,  $e$  — эксцентриситет,  $a$  — действительная полуось гиперболы.

Следует заметить, что радиус сходимости существенным образом зависит от момента  $t_0$  (здесь мы привели минимальные значения радиуса сходимости, которые достигаются при  $t_0 = \tau$ , где  $\tau$  — момент прохождения через перигентр).

### § 3.09. Степенные ряды в случае эллиптического движения

В случае эллиптического движения формулы предыдущего параграфа можно заметным образом упростить. Если положить

$$\theta = n(t - t_0) = M - M_0, \quad (2.3.58)$$

$$\bar{p} = \frac{a}{r_0}, \quad \bar{q} = \frac{r_0}{an}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (2.3.59)$$

то для  $F$  и  $G$  найдем

$$\begin{aligned} F = & 1 - \frac{1}{2} \bar{p}^3 \theta^2 + \frac{1}{2} \bar{p}^4 \bar{q} \theta^3 + \left[ -\frac{1}{8} \bar{p}^5 (1 + 5\bar{q}^2) + \frac{1}{6} \bar{p}^6 \right] \theta^4 + \\ & + \left[ \frac{1}{8} \bar{p}^6 \bar{q} (3 + 7\bar{q}^2) - \frac{1}{2} \bar{p}^7 \bar{q} \right] \theta^5 + \left[ -\frac{1}{16} \bar{p}^7 (1 + 14\bar{q}^2 + 21\bar{q}^4) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{120} \bar{p}^8 (19 + 140\bar{q}^2) - \frac{7}{72} \bar{p}^9 \right] \theta^6 + \dots, \quad (2.3.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = & \theta - \frac{1}{16} \bar{p}^3 \theta^3 + \frac{1}{4} \bar{p}^4 \bar{q} \theta^4 + \left[ -\frac{3}{40} \bar{p}^5 (1 + 5\bar{q}^2) + \frac{1}{12} \bar{p}^6 \right] \theta^5 + \\ & + \left[ \frac{1}{12} \bar{p}^6 \bar{q} (3 + 7\bar{q}^2) - \frac{7}{24} \bar{p}^7 \bar{q} \right] \theta^6 + \dots \quad (2.3.61) \end{aligned}$$

Прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будут определяться формулами (2.3.47).

Для кругового движения

$$\bar{p} = 1, \quad \bar{q} = 0$$

и правые части (2.3.60) и (2.3.61) представляют собой разложения  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  в степенные ряды, сходящиеся на всем бесконечном промежутке времени.

## ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ II

1. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968, 1975.
2. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
3. Орлов А. Я. и Орлов Б. А., Курс теоретической астрономии, Гостехиздат, 1940.
4. Сمارт У. М., Небесная механика, «Мир», 1965.
5. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, «Мир», 1964.
6. Wood H., J. and Proceed of the Roy. Soc. of New South Wales 83, 150, 1950.
7. Субботин М. Ф., Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид, Ташкент, 1929.
8. Субботин М. Ф., Таблицы и формулы. Вспомогательные таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Приложение к «Курсу небесной механики», т. 1, М., 1941.
9. Stumpf K., Himmelsmechanik, Bd. 1, Berlin, 1959.
10. Дубяго А. Д., Определение орбит, Гостехиздат, 1949.
11. Bauschinger J., Tafeln zur theoretischen Astronomie, 2 Auflage, neu bearb. von G. Stracke, 1934.
12. Fietjen F., Veröff d. Astr. Recheninstituts 1, Berlin, 1892.
13. Peters J., Veröff d. Astr. Recheninstituts 41, Berlin, 2-te Aufl., 1933.
14. Schlesinger F., Udick S., Publ. of the Allegheny Obs. 17, 1912.
15. Boiquet F., Tables du mouvement képlérien, Paris, 1920.
16. Жонголович И. Д., Амелин В. М., Сборник таблиц и номограмм для обработки наблюдений искусственных спутников Земли, Изд-во АН СССР, 1970.
17. Cayley A., Mem. Roy. Astron. Soc. 29, 1861.
18. Jagnagin M. P., Astron. Papers 18, 1965.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
И УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТ

Под методами определения орбит подразумеваются методы вычисления элементов орбиты небесного тела по наименьшему числу наблюдений в предположении, что движение этого небесного тела является невозмущенным кеплеровским (эллиптическим, гиперболическим или параболическим). Эти методы применяются вообще для определения предварительной орбиты вновь открываемого небесного тела, например, малой планеты или кометы. Они могут применяться также при теоретическом анализе движений естественных или искусственных небесных тел.

Методы улучшения орбит преследуют цель уточнения элементов предварительной невозмущенной орбиты по большому числу наблюдений или определения по этим наблюдениям более точных элементов оскулирующей орбиты небесного тела, отнесенной к тому или иному моменту времени (см. ч. IV, гл. 3).

В эту часть мы включаем также главу о вычислениях координат небесных тел по элементам их орбит, поскольку такие вычисления используются при определении орбит

Все формулы в этой части написаны в предположении, что центральным телом, вокруг которого происходит движение, является Солнце. Масса Солнца принимается равной единице, а масса небесного тела, движущегося вокруг Солнца, пренебрежимо мала. За единицу расстояния принимается астрономическая единица, а за единицу времени средние солнечные сутки. Если массой  $m$  этого небесного тела пренебречь нельзя, то надо заменить ниже во всех соответствующих формулах постоянную тяготения  $k^2$  на  $k^2(1 + m)$ . Если в качестве центрального тела рассматривается Земля, то  $k^2$  надо заменить на  $k^2M$ , где  $M$  — масса Земли. Подробное изложение методов определения орбит дано в работах [1]—[4]. Обзор методов содержится в [5].

Глава I

**ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ НЕВОЗМУЩЕННОГО  
КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ  
ОРБИТЫ**

**§ 1.01. Вычисление орбитальных координат  
в случае эллиптической или гиперболической орбит**

Даны элементы орбиты (см. ч. II, § 1.04)  $a$ ,  $e$  и  $M_0$  (средняя аномалия в эпоху  $t_0$  в случае эллиптической орбиты) или  $\tau$  (момент прохождения через перигелий в случае гиперболической орбиты). Задача состоит в вычислении прямоугольных  $\xi$ ,  $\eta$  и полярных  $r$ ,  $v$  орбитальных координат небесного тела, движущегося по такой орбите, на некоторый момент  $t$ . Начало системы координат  $\xi\eta$  совпадает с Солнцем  $S$  ось  $S\xi$  направлена на перигелий, ось  $S\eta$  повернута по отношению к оси  $S\xi$  на  $90^\circ$  по ходу движения небесного тела. Угол  $v$  представляет собой истинную аномалию.

Формулы для вычислений  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $r$ ,  $v$  в случае эллиптической орбиты следующие [см. формулы (2.2 12), (2.2.13)].

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (3.1.01)$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{\eta}{\xi}, \quad r = a(1 - e \cos E) \quad (3.1.02)$$

( $\eta$  и  $\xi$  имеют знаки синуса и косинуса  $v$  соответственно), причем эксцентрисическая аномалия  $E$  вычисляется из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M, \quad (3.1.03)$$

где

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad n = \frac{k}{\sqrt{a^3}}, \quad (3.1.04)$$

$$k = 0^\circ,98560767, \quad e^\circ = 57^\circ,295780e$$

(в градусной мере).

В случае гиперболической орбиты используют следующие формулы [см. формулы (2.2.38), (2.2.39) ч. II]:

$$\xi = a(e - \operatorname{ch} H), \quad \eta = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \quad (3.1.05)$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{\eta}{\xi}, \quad r = a(e \operatorname{ch} H - 1),$$

причем величина  $H$  находится из уравнения [формула (2.2.33)]

$$e \operatorname{sh} H - H = ka^{-1/2}(t - \tau). \quad (3.1.06)$$

### § 1.02. Вычисление орбитальных координат в случае параболической орбиты

Вычисление  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $r$ ,  $v$  по элементам параболической орбиты  $\tau$ ,  $p$  или  $q$  производится с помощью формул [см. формулы (2.2.53), (2.2.54)]

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= 2q\sigma \left( q = \frac{p}{2} \right), \\ r &= q(1 + \sigma^2), \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.07)$$

где  $\sigma$  находится из уравнения [см. формулы (2.2.47) и (2.2.48)]

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{kq^{-3/2}}{\sqrt{2}} (t - \tau). \quad (3.1.08)$$

### § 1.03. Вычисление орбитальных координат в случае орбит, эксцентриситет которых близок к единице

Если эксцентриситет  $e$  близок к единице, то формулы § 1.01 малопригодны для вычислений. Тогда  $\xi$  и  $\eta$  как для эллиптической, так и для гиперболической орбиты вычисляются по формулам

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad \eta = kq\sigma \sqrt{2(1 - e)} U(\xi), \quad (3.1.09)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(1 - e), \quad q = a(1 - e), \\ U(\xi) &= \frac{\sqrt{2}}{k} \left( 1 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\xi^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\xi^3 - \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

а  $\sigma$  и  $\xi$  находятся из уравнений

$$\xi = e\sigma^2, \quad \sigma U(\xi) + \sigma^3 V(\xi) = B, \quad (3.1.11)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} B &= q^{-3/2}(t - \tau), \\ V(\xi) &= \frac{\sqrt{2}}{k} \left( \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 2}\xi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{7 \cdot 2 \cdot 4}\xi^2 + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.12)$$

(Для эллиптической орбиты  $e > 0$ ,  $\xi > 0$ , для гиперболической  $e < 0$ ,  $\xi < 0$ .)

Уравнения (3.1.11) решаются методом последовательных приближений. В первом приближении полагают  $\xi = 0$ ,  $\sigma U(0) + \sigma^3 V(0) = B$ .

**§ 1.04. Вычисление гелиоцентрических прямоугольных эклиптических и экваториальных координат**

Для вычисления этих координат требуются также угловые элементы орбиты, например,  $\Omega$  (долгота узла),  $i$  (наклон),  $\omega$  (угловое расстояние перигелия от узла). Предположим, что даны эклиптические элементы.

Гелиоцентрические прямоугольные эклиптические координаты  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  вычисляются для всех трех типов орбит по формулам (подробнее см. ч. II, гл. 2)

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ \bar{y} &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ \bar{z} &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.13)$$

где  $u = \omega + v$ ,  $r = p/(1 + e \cos v)$ ,

Гелиоцентрические прямоугольные экваториальные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \xi + Q_x \eta, \\ y &= P_y \xi + Q_y \eta, \\ z &= P_z \xi + Q_z \eta, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.14)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$  — орбитальные координаты,

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos e - \sin \omega \sin i \sin e, \\ P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin e + \sin \omega \sin i \cos e, \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos e - \cos \omega \sin i \sin e, \\ Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin e + \cos \omega \sin i \cos e. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.15)$$

Векторы  $P(P_x, P_y, P_z)$ ,  $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$  называются *векторными экваториальными элементами* орбиты. Компоненты этих векторов равны косинусам углов, образуемых осями  $S\xi$ ,  $S\eta$  орбитальной системы координат с осями  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$  экваториальной системы координат соответственно.



## Глава 2

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ

Для определения элементов невозмущенной кеплеровской орбиты небесного тела относительно Солнца достаточно вообще трех наблюдений с Земли, произведенных в различные моменты и дающих на каждый момент прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$  наблюдаемого объекта.

Первый этап в этой задаче состоит в определении двух гелиоцентрических положений небесного тела на крайние моменты наблюдений, второй этап — в непосредственном вычислении элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и третий этап — в вычислении по полученным элементам геоцентрических координат небесного тела на средний момент (для контроля). В данной главе будут приведены формулы и уравнения, позволяющие провести все эти вычисления.

Кроме того, мы приведем формулы, позволяющие вычислить элементы орбиты по начальным положению и скорости (гелиоцентрическим).

Основные методы определения орбит изложены в работах [1] — [3]. См. также [6].

#### § 2.01. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит

Пусть даны три пары наблюденных геоцентрических координат  $\alpha_k, \delta_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) небесного тела на моменты времени  $t_1, t_0, t_2$  соответственно. (Такая нумерация наблюдений принимается для удобства обозначений при записи дальнейших формул.) Требуется найти прямоугольные гелиоцентрические экваториальные координаты  $(x_k, y_k, z_k)$  ( $k = 1, 2$ ) этого небесного тела на моменты  $t_1, t_2$  соответственно. Одновременно находятся также и координаты  $x_0, y_0, z_0$  на средний момент  $t_0$ .

Последовательность вычислений следующая.

а) Вычисляем величины

$$\lambda_k = \cos \delta_k \cos \alpha_k, \quad \mu_k = \cos \delta_k \sin \alpha_k, \quad \nu_k = \sin \delta_k \quad (3.2.01)$$

(направляющие косинусы геоцентрических радиусов-векторов  $\rho_1, \rho_0, \rho_2$ ),

$$R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2, \quad C = -(\lambda_0 X_0 + \mu_0 Y_0 + \nu_0 Z_0)$$

и определители

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \quad U_k = \begin{vmatrix} X_k & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_k & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_k & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \quad (k = 1, 0, 2), \quad (3.2.02)$$

где  $X_k, Y_k, Z_k$  — прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца на моменты  $t_1, t_0, t_2$  соответственно.

Все эти величины остаются постоянными при дальнейших вычислениях.

Соотношение для контроля:

$$\mathcal{W} = D + U_1 + U_0 + U_2, \quad (3.2.03)$$

где  $\mathcal{W}$  — определитель, получаемый из  $D$  путем замены элементов первого столбца величинами  $L, M, N$  соответственно, причем

$$L = \lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_2 + X_1 + X_0 + X_2, \quad M = \mu_1 + \mu_0 + \mu_2 + Y_1 + Y_0 + Y_2$$

$$N = \nu_1 + \nu_0 + \nu_2 + Z_1 + Z_0 + Z_2.$$

б) Вычисляем величины

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= k(t_2 - t_0), \quad \tau_2 = k(t_0 - t_1), \quad \tau_0 = k(t_2 - t_1), \\ k &= 0,01720210, \\ n_i^0 &= \frac{\tau_i}{\tau_0}, \quad A_i = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_i^0) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \right\} (3.2.04)$$

в) Из уравнений

$$D\rho_0 = U_0 - n_1 U_1 - n_2 U_2, \quad r_0^2 = \rho_0^2 + 2C\rho_0 + R_0^2, \quad (3.2.05)$$

где

$$n_i = n_i^0 + A_i r_0^{-3} \quad (i = 1, 2), \quad (3.2.06)$$

определяем геоцентрическое расстояние  $\rho_0$  и гелиоцентрическое расстояние  $r_0$  на момент  $t_0$ .

Обычно эти уравнения записывают в виде

$$\rho_0 = P - Qr_0^{-3}, \quad r_0^2 = (\rho_0 + C)^2 + S^2, \quad (3.2.07)$$

где

$$P = \frac{1}{D}(U_0 - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2), \quad Q = \frac{1}{D}(A_1 U_1 + A_2 U_2), \quad S^2 = R_0^2 - C^2,$$

и решают методом последовательных приближений.

Можно также использовать вместо (3.2.06) более точные формулы для  $n_1, n_2$ :

$$\left. \begin{aligned} n_i &= n_i^0 + A_i r_0^{-3} (1 + B_i r_0^{-3}), \\ B_i &= \frac{7\tau_0^2 - 3v_i^2}{60} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.08)$$

и вместо первого из уравнений (3.2.07) более точное соотношение

$$\rho_0 = P - Q r_0^{-3} - Q' r_0^{-6}, \quad (3.2.09)$$

где

$$Q' = \frac{1}{D} (A_1 B_1 U_1 + A_2 B_2 U_2). \quad (3.2.10)$$

г) Используя полученные значения  $\rho_0$  и  $r_0$ , а также  $n_1$  и  $n_2$ , вычисленные по формулам (3.2.06) или (3.2.08), находим геоцентрические расстояния  $\rho_1, \rho_2$  на моменты  $t_1, t_2$  соответственно по двум из трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= \rho_0 \lambda_0 + n_1 X_1 - X_0 + n_2 X_2, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 + \rho_2 n_2 \mu_2 &= \rho_0 \mu_0 + n_1 Y_1 - Y_0 + n_2 Y_2, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 + \rho_2 n_2 \nu_2 &= \rho_0 \nu_0 + n_1 Z_1 - Z_0 + n_2 Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

причем выбираем непосредственно для вычислений такие два уравнения, для которых определитель коэффициентов левых частей наибольший.

Эти уравнения отражают точную зависимость между  $\rho_k$  при условии, что  $n_1, n_2$  суть точные отношения площадей треугольников

$$\frac{[r_0 r_2]}{[r_1 r_2]}, \quad \frac{[r_1 r_0]}{[r_1 r_2]},$$

образованных соответствующими гелиоцентрическими радиусами-векторами  $r_1, r_0, r_2$ . Формулы (3.2.06) или (3.2.08) дают приближенные значения  $n_1, n_2$ .

д) Вычисляем гелиоцентрические координаты  $x_k, y_k, z_k$  и гелиоцентрические расстояния  $r_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \lambda_k \rho_k - X_k, \\ y_k &= \mu_k \rho_k - Y_k, \\ z_k &= \nu_k \rho_k - Z_k, \\ r_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.12)$$

Соотношения для контроля:

1)  $(r_0) = r_0$ , где  $(r_0)$  — значение, полученное при решении уравнений (3.2.05);

$$2) \quad x_0 = n_1 x_1 + n_2 x_2, \quad y_0 = n_1 y_1 + n_2 y_2, \quad z_0 = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

е) Исправляем моменты наблюдений  $t_1, t_0, t_2$ , учитывая скорость света (вводя поправку за абберационное время) по формуле (ч. I, § 2.13)

$$t_k^0 = t_k - \frac{1}{c} \rho_k \quad (k = 1, 0, 2), \quad (3.2.13)$$

где  $c$  — скорость света; в принятых единицах измерения  $1/c = 0,0057756$ .

Вычисления, указанные в пунктах б) — д), дают нам геоцентрические расстояния и гелиоцентрические координаты в первом приближении.

Второе приближение для этих величин получим следующим образом.

а) Перевычисляем величины  $\tau_1, \tau_0, \tau_2, n_1^0, n_2^0$ , беря моменты  $t_1^0, t_0^0, t_2^0$ , исправленные за абберацию.

б) Исходя из значений гелиоцентрических расстояний, полученных в первом приближении, находим величины  $\eta_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ), представляющие отношения площадей секторов к соответствующим площадям треугольников:

$$\eta_1 = \frac{(r_0 r_2)}{[r_0 r_2]}, \quad \eta_0 = \frac{(r_1 r_2)}{[r_1 r_2]}, \quad \eta_2 = \frac{(r_1 r_0)}{[r_1 r_0]}.$$

Рассмотрим, например, формулы для вычисления  $\eta_0$ . Эта величина может быть представлена непрерывной дробью

$$\eta_0 = 1 + \frac{10}{11} \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \dots}}}, \quad (3.2.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{11}{9} h, \quad h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}, \quad m = \frac{\tau_0^2}{\chi^3}, \\ l &= \frac{r_1 + r_2}{2\chi} - \frac{1}{2}, \quad \chi^2 = 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \end{aligned} \right\} (3.2.15)$$

$$\xi = \left[ \frac{2}{35} x^2 + \frac{48}{35} x^3 + s \left( x - \frac{5}{6} \right) \right] \left( 1 + \frac{6}{5} x + \frac{48}{35} x^2 + s \right)^{-1}, \quad (3.2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9} x^3 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} x^4 + \dots, \\ x &= \frac{m}{\eta_0^2} - l, \end{aligned} \right\} (3.2.17)$$

и вычислена с помощью итераций. В первом приближении полагают

$$\xi = 0, \quad h = \frac{m}{5/6 + l}$$

и находят по формуле (3.2.14) первое приближение для  $\eta_0$ . Затем вычисляют последовательно  $x$ ,  $\xi$ ,  $h$  по формулам (3.2.17), (3.2.16), (3.2.15) и с новым значением  $h$  уточняют  $\eta_0$  и т. д.

в) Вычисляем более точные значения величин  $n_1$ ,  $n_2$  по формулам  $n_i = n_i^{(0)}\eta_0/\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) и с этими значениями  $n_1$ ,  $n_2$  находим уточненные значения  $\rho_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_2$  непосредственно из уравнений (3.2.11).

г) По формулам (3.2.12) вычисляем второе приближение для  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$ ,  $r_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ).

Точно так же можно получить дальнейшие приближения, но обычно они не требуются.

Случаи эллиптической и гиперболической орбит отличаются друг от друга тем, что при вычислении  $\eta_0$  в первом случае  $x > 0$ , а во втором  $x < 0$ .

### § 2.02. Особые случаи, встречающиеся при вычислении гелиоцентрических координат

Вычисление гелиоцентрических положений указанным выше путем оказывается непосредственно невозможным, если определитель  $D$  [коэффициент при  $\rho_0$  в уравнении (3.2.05)] равен нулю. Это будет тогда, когда все три наблюдаемые геоцентрические положения лежат на одном большом круге небесной сферы. Возможны при этом следующие случаи.

1) Определители  $U_1$ ,  $U_0$ ,  $U_2$  не все равны нулю.

Тогда первое из уравнений (3.2.05) после подстановки в него выражений (3.2.06) для  $n_1$ ,  $n_2$  приведет к виду

$$-n_1^0 U_1 + U_0 - n_2^0 U_2 - (A_1 U_1 + A_2 U_2) r_0^{-3} = 0, \quad (3.2.18)$$

из которого можно найти  $r_0$ . Второе из уравнений (3.2.05) позволит найти  $\rho_0$ . Дальнейшие вычисления выполняются так же, как указано выше.

2)  $U_1 = U_0 = U_2 = 0$ , но не все миноры

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \quad (3.2.19)$$

определятеля  $D$  равны нулю.

Это будет иметь место, если все три наблюдаемые положения небесного тела лежат на эклиптике. Найти из уравнений (3.2.05)  $\rho_0$  и  $r_0$  в этом случае нельзя. Для определения элементов орбиты требуется тогда не три, а четыре наблюдения.

3)  $U_1 = U_0 = U_2 = 0$ , все миноры (3.2.19) равны нулю, так что  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$  (видимые положения небесного

тела для крайних моментов  $t_1$  и  $t_2$  совпадают), но миноры

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \nu_0 & \nu_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \nu_0 & \nu_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix} \quad (3.2.20)$$

не все равны нулю.

Тогда составляется уравнение, аналогичное (3.2.18),

$$-n_1^0 U_1' + U_0' - n_2^0 U_2' - (A_1 U_1' + A_2 U_2') r_1^{-3} = 0, \quad (3.2.21)$$

где

$$U_k' = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & X_k \\ \mu_0 & \mu_1 & Y_k \\ \nu_0 & \nu_1 & Z_k \end{vmatrix} \quad (k = 1, 0, 2),$$

из которого определяется  $r_1$ . (Если не все наблюдаемые положения лежат на эклиптике, то не все  $U_1'$ ,  $U_0'$ ,  $U_2'$  обращаются в нуль.)

Из уравнения

$$r_1^2 = \rho_1^2 + 2C_1 \rho_1 + R_1^2,$$

где

$$C_1 = -(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1), \quad R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2,$$

находится  $\rho_1$ . Из основных уравнений (3.2.11) находится далее  $\rho_2$  и т. д.

4) Если  $U_1 = U_0 = U_2 = 0$  и все миноры (3.2.19), (3.2.20) равны нулю, то все наблюдаемые геоцентрические положения небесного тела совпадают друг с другом. Элементы орбиты определить нельзя.

### § 2.03. Определение гелиоцентрических положений по четырем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит

Пусть даны четыре пары наблюдаемых геоцентрических экваториальных координат  $\alpha_k, \delta_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) и  $\alpha'_0, \delta'_0$  на моменты  $t_1, t_0; t'_0, t_2$  соответственно (при этом  $t_1 < t_0 < t'_0 < t_2$ ).

Обозначим через  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ),  $\lambda'_0, \mu'_0, \nu'_0$  направляющие косинусы геоцентрических радиусов-векторов  $\rho_1, \rho_0, \rho'_0, \rho_2$ , вычисляемых по формулам, аналогичным (3.2.01).

К использованию четырех наблюдений прибегать тогда, когда все наблюдаемые положения небесного тела или лежат точно на эклиптике или достаточно близки к ней. Определение гелиоцентрических положений выполняется следующим образом.

Рассматриваем уравнения (3.2.11) для геоцентрических расстояний  $\rho_1, \rho_0, \rho_2$ , записав их в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \lambda_0 - \rho_2 n_2 \lambda_2 &= \rho_1 n_1 \lambda_1 - n_1 X_1 + X_0 - n_2 X_2, \\ \rho_0 \mu_0 - \rho_2 n_2 \mu_2 &= \rho_1 n_1 \mu_1 - n_1 Y_1 + Y_0 - n_2 Y_2, \\ \rho_0 \nu_0 - \rho_2 n_2 \nu_2 &= \rho_1 n_1 \nu_1 - n_1 Z_1 + Z_0 - n_2 Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.22)$$

Выбрав два из этих уравнений, для которых определитель коэффициентов левых частей наибольший, выразим  $\rho_2$  через  $\rho_1$ :

$$\rho_2 = K \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3, \quad (3.2.23)$$

где величины  $K, L_1, L_2, L_3$  выражены через

$$\lambda_k, \mu_k, \nu_k, X_k, Y_k, Z_k \quad (k = 1, 0, 2).$$

Рассмотрим аналогичные уравнения для геоцентрических расстояний  $\rho_1, \rho'_0, \rho_2$ , из которых также выразим  $\rho_2$  через  $\rho_1$ :

$$\rho_2 = K' \frac{n'_1}{n'_2} \rho_1 + L'_1 \frac{n'_1}{n'_2} + L'_2 \frac{1}{n'_2} + L'_3. \quad (3.2.24)$$

Коэффициенты  $K', L'_1, L'_2, L'_3$  вычисляются по

$$\lambda_k, \mu_k, \nu_k, X_k, Y_k, Z_k \quad (k = 1, 2) \text{ и } \lambda'_0, \mu'_0, \nu'_0, X'_0, Y'_0, Z'_0.$$

Величины  $n_1, n_2, n'_1, n'_2$  представляют собой отношения площадей треугольников, образованных соответствующими радиусами-векторами. Приближенно полагают

$$n_i = \frac{\tau_i}{\tau_0}, \quad n'_i = \frac{\tau'_i}{\tau_0} \quad (i = 1, 2), \quad (3.2.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= k(t_2 - t_0), & \tau_0 &= k(t_2 - t_1), & \tau_2 &= k(t_0 - t_1), \\ \tau'_1 &= k(t_2 - t'_0), & \tau'_2 &= k(t'_0 - t_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.26)$$

Подставив эти значения  $n_1, n_2, n'_1, n'_2$  в (3.2.23) и (3.2.24), получим два уравнения для нахождения в первом приближении значений  $\rho_1, \rho_2$ . Приближенные значения гелиоцентрических координат на моменты  $t_1, t_2$  вычислим далее по формулам

$$x_i = \lambda_i \rho_i - X_i, \quad y_i = \mu_i \rho_i - Y_i, \quad z_i = \nu_i \rho_i - Z_i \quad (i = 1, 2). \quad (3.2.27)$$

Дальнейшее уточнение гелиоцентрических координат можно выполнить принципиально так же, как было указано в предыдущем параграфе, а именно:

1. С помощью уравнений (3.2.22) находим  $\rho_0$ , исходя из полученных значений  $\rho_1, \rho_2$ , а из соответствующих уравнений для  $\rho_1, \rho'_0, \rho_2$  находим  $\rho'_0$ .

Затем по формулам, аналогичным (3.2.27), находим гелиоцентрические координаты на моменты  $t$ ,  $t'_0$ .

2. Моменты  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $t'_0$ ,  $t_2$  исправляем за абберационное время.

3. По полученным приближенным значениям гелиоцентрических координат на моменты  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $t'_0$ ,  $t_2$  находим величины  $\eta_1$ ,  $\eta_0$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta'_1$ ,  $\eta'_0$ ,  $\eta'_2$  — отношения площадей соответствующих секторов и треугольников и уточняем значения  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n'_1$ ,  $n'_2$  по формулам

$$n_i = \frac{\tau_i}{\tau_0} \frac{\eta_0}{\eta_i}, \quad n'_i = \frac{\tau'_i}{\tau_0} \frac{\eta'_0}{\eta'_i} \quad (i = 1, 2).$$

С этими значениями  $n_1$ ,  $\dots$ ,  $n'_2$  снова решаем уравнения (3.2.23) и (3.2.24) относительно  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и т. д.

### § 2.04. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае параболической орбиты

Обозначим опять через  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) три пары наблюдаемых геоцентрических координат на моменты  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $t_2$ , через  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  — соответствующие геоцентрические координаты Солнца, а через  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$ ,  $\nu_k$  — направляющие косинусы геоцентрических радиусов-векторов, вычисляемые по формулам (3.2.01).

Применение общего метода, изложенного в § 2.01, оказывается невозможным, так как определитель  $D$  весьма мало отличается от нуля.

Рассмотрим уравнения относительно геоцентрических расстояний  $\rho_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_2$ , записанных в виде (3.2.22). Выбрав два из этих уравнений с наибольшим определителем, выражаем  $\rho_2$  через  $\rho_1$ :

$$\rho_2 = K \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3, \quad (3.2.28)$$

где  $K$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  — величины, вычисляемые по

$$\lambda_k, \mu_k, \nu_k, X_k, Y_k, Z_k \quad (k = 1, 0, 2).$$

В первом приближении полагаем

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau_0},$$

где  $\tau_1$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_2$  определяются по формулам (3.2.26). После этого (3.2.28) запишется в виде

$$\rho_2 = M\rho_1 + m, \quad (3.2.29)$$

где  $M$ ,  $m$  — известные числа.



Вместе с (3.2.29) рассмотрим соотношение

$$18\tau_0^2 - R(2R + 3\chi)^2 = 0, \quad (3.2.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R &= r_1 + r_2 - \chi, & \chi^2 &= 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \\ x_k &= \lambda_k \rho_k - X_k, & y_k &= \mu_k \rho_k - Y_k, \\ z_k &= \nu_k \rho_k - Z_k, & r_k^2 &= x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.31)$$

Это соотношение, в котором  $R$ ,  $\chi$  предполагается выраженным через  $\rho_1$  с помощью (3.2.29), (3.2.31), рассматривается как уравнение относительно  $\rho_1$ .

Путем вариации значений  $\rho_1$  и последующего интерполирования находим такое  $\rho_1$  (в пределах нескольких значащих цифр), что левая часть этого уравнения, обозначаемая через  $f(\rho_1)$ , обращается в нуль. Далее по формулам (3.2.29), (3.2.31) находим  $\rho_2$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , заканчивая этим вычисление гелиоцентрических положений в первом приближении.

Переходя ко второму приближению, вычисляем по тем же двум из уравнений (3.2.22) значение  $\rho_0$ , соответствующее первому приближению для  $\rho_1$ , а затем  $r_0$  по формуле

$$r_0^2 = \rho_0^2 + 2C_0 \rho_0 + R_0^2, \quad (3.2.32)$$

где

$$C_0 = -(\lambda_0 X_0 + \mu_0 Y_0 + \nu_0 Z_0), \quad R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2.$$

Исправляем далее моменты  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $t_2$  за абберационное время и перевычисляем величины  $\tau_1$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_2$ . Вычисляем более точные значения величин  $n_1$ ,  $n_2$  по формулам (3.2.06) или (3.2.08) и заново решаем уравнение (3.2.30), находя уточненные значения  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ .

В третьем приближении (если оно требуется) сначала вычисляем значения  $\rho_0$ ,  $r_0$ , соответствующие второму приближению для  $\rho_1$ , а также  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  по формулам, аналогичным (3.2.31), (3.2.32). Далее с имеющимися значениями  $\rho_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_2$  уточняем поправки моментов  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $t_2$  за абберационное время. Используя полученное второе приближение для гелиоцентрических положений на эти моменты, вычисляем величины  $\eta_1$ ,  $\eta_0$ ,  $\eta_2$  — отношения площадей соответствующих секторов и треугольников по формулам

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{s_{12}^2}{(r_1 + r_2)^2} \right]^{-1/2}, \\ \eta_1 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{s_{02}^2}{(r_0 + r_2)^2} \right]^{-1/2}, \\ \eta_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{s_{01}^2}{(r_0 + r_1)^2} \right]^{-1/2}, \end{aligned} \right\}$$

где

$$s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2.$$

После этого находим более точные значения  $n_1$  и  $n_2$ :

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0} \frac{\eta_0}{\eta_1}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau_0} \frac{\eta_0}{\eta_2},$$

и опять возвращаемся к решению уравнения (3.2.30) относительно  $\rho_1$  и т. д.

Уравнение (3.2.30) обладает, как правило, одним положительным корнем  $\rho_1$ . Однако в некоторых, хотя и в очень редких, случаях это уравнение имеет три положительных корня. Тогда мы получим три системы элементов, т. е. три разные параболические орбиты, отвечающие трем использованным наблюдениям. Вопрос о том, какая из орбит соответствует фактическому движению данного небесного тела, выясняется только после привлечения четвертого наблюдения, если такое, разумеется, выполнено. Вычисляя три варианта теоретического положения небесного тела на момент четвертого наблюдения и сравнивая с фактическими наблюдательными данными на этот момент, нетрудно произвести правильный выбор.

Ответ на вопрос о количестве положительных корней уравнения (3.2.30) сравнительно легко получить при анализе более простого уравнения, имеющего то же самое количество положительных корней. Это более простое уравнение получается из уравнения Эйлера (3.2.61) (см. ниже § 2.08) при  $\theta_0 = 1$ ,  $r_1 + r_2 = 2r$  и записывается в виде

$$r\sigma^2 = c^2, \quad (3.2.34)$$

где

$$r = \sqrt{(\rho + C_0)^2 + R_0^2 - C_0^2}, \quad \sigma^2 = (\rho + \Gamma)^2 + \Sigma^2,$$

$$c^2 = \frac{k^2 (t_2 - t_1)^2 (1 + M)^2}{2(1 - EM + M^2)},$$

$$\Sigma^2 = \frac{H(1 + M)^2}{4(1 - EM + M^2)} - \Gamma^2, \quad \Gamma = \frac{(1 + M)(F_1 + F_2M)}{2(1 - EM + M^2)},$$

$$H = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - 2(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2),$$

$$E = 2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2),$$

$$F_1 = \lambda_1(X_2 - X_1) + \mu_1(Y_2 - Y_1) + \nu_1(Z_2 - Z_1),$$

$F_2$  получается из  $F_1$  после замены всех индексов (1) на (2) и наоборот, а  $M$ ,  $C_0$ ,  $R_0$  — величины, выписанные в (3.2.29), (3.2.32) соответственно.

В уравнении (3.2.34) неизвестной является величина  $\rho$ , связанная с геоцентрическими расстояниями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  формулами

$$\rho_1 = \frac{2\rho}{1+M}, \quad \rho_2 = \frac{2M\rho}{1+M}.$$

Все остальные величины  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $C_0$ ,  $R_0$ ,  $c^2$  известны.

Количество положительных корней уравнения (3.2.34) относительно  $\rho$  и их приближенные значения можно определить графическим путем. Для этого достаточно построить графики, нанося по оси абсцисс значения  $\rho$ , а по оси ординат значения величин  $r$ ,  $\sigma^2$  и  $r\sigma^2$ . По формуле  $\rho_1 = 2\rho/(1+M)$  получим соответствующие приближенные значения корней  $\rho_1$  исходного уравнения (3.2.30). Уточнение этих значений проводится с помощью варьирования и интерполирования.

### § 2.05. Вычисление элементов эллиптической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

Выше было указано, каким образом по трем или четырем наблюдениям небесного тела в моменты  $t_1, t_0, t_2$  или  $t_1, t_0, t_0, t_2$  можно найти его гелиоцентрические координаты на эти моменты. Для непосредственного определения элементов орбиты достаточно знать гелиоцентрические координаты на два момента, за которые принимают  $t_1$  и  $t_2$ .

Таким образом, пусть даны гелиоцентрические координаты  $x_k, y_k, z_k, r_k$  ( $k = 1, 2$ ) на два момента  $t_1, t_2$ . Элементы эллиптической орбиты вычисляются следующим образом.

1. Вычисляется параметр орбиты  $p$  по формуле

$$p = B^2 \left( \frac{\eta}{\tau} \right)^2, \quad (3.2.35)$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$

$$B^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \quad (3.2.36)$$

и  $\eta$  — отношение площадей сектора и треугольника, образованных радиусами-векторами  $r_1, r_2$ , т. е.

$$\eta = \frac{(r_1 r_2)}{[r_1 r_2]}.$$

Способ вычисления этой величины был указан в § 2.01.

2. Вычисляется эксцентриситет  $e$  по формулам

$$e^2 = \frac{f_1^2 + g_1^2}{r_1^2} \quad \text{или} \quad e^2 = \frac{f_2^2 + g_2^2}{r_2^2}, \quad (3.2.37)$$

где

$$g_1 = \frac{f_1 I - f_2 r_1^2}{B}, \quad g_2 = \frac{f_1 r_2^2 - f_2 I}{B},$$

$$f_1 = p - r_1, \quad f_2 = p - r_2, \quad I = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

и  $B$  определяется согласно (3.2.36).

Совпадение значений  $e$ , находимых по обеим формулам (3.2.37), является контролем вычислений.

3. Определяется большая полуось орбиты  $a$ :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (3.2.38)$$

4. Вычисляются эксцентрические аномалии  $E_1, E_2$  и средние аномалии  $M_1, M_2$  на моменты  $t_1, t_2$  соответственно:

$$\operatorname{tg} E_k = \frac{g_k}{(a - r_k) \sqrt{1 - e^2}} \quad (k = 1, 2), \quad (3.2.39)$$

причем числитель и знаменатель в этой формуле имеют знаки  $\sin E_k$  и  $\cos E_k$  соответственно (отсюда определяются четверти, в которых расположены углы  $E_1, E_2$ );

$$M_k = E_k - e \sin E_k \quad (k = 1, 2). \quad (3.2.40)$$

5. Вычисляется среднее движение  $n$ :

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} \quad \text{или} \quad n = k a^{-3/2}. \quad (3.2.41)$$

Совпадение обоих значений  $n$  является контролем всех вычислений в пунктах 2—4.

6. Вычисляются экваториальные векторные элементы орбиты  $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_x &= x_1 C - K_x S, & Q_x &= x_1 S - K_x C, \\ P_y &= y_1 C - K_y S, & Q_y &= y_1 S - K_y C, \\ P_z &= z_1 C - K_z S, & Q_z &= z_1 S - K_z C, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{f_1}{r_1^2 e}, & S &= \frac{g_1}{r_1^2 e}, \\ K_x &= \frac{r_1^2 - x_1 I}{B}, & K_y &= \frac{r_1^2 - y_1 I}{B}, & K_z &= \frac{r_1^2 - z_1 I}{B}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.43)$$

Контроль:

$$\left. \begin{aligned} K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 &= r_1^2, & Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 &= 1, & P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 &= 1, \\ r_1^2 (C^2 + S^2) &= 1, & P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.44)$$

7. Вычисляются направляющие косинусы перпендикуляра к орбите в экваториальной системе координат:

$$R_x = \frac{y_1 z_1 - y_2 z_1}{B}, \quad R_y = \frac{z_1 x_2 - z_2 x_1}{B}, \quad R_z = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{B}. \quad (3.2.45)$$

Контроль:

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 1.$$

8. Вычисляются направляющие косинусы перпендикуляра к орбите в эклиптической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_x &= R_x, \\ \bar{R}_y &= R_y \cos \varepsilon + R_z \sin \varepsilon, \\ \bar{R}_z &= R_z \cos \varepsilon - R_y \sin \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.46)$$

где  $\varepsilon$  — наклон эклиптики к экватору.

9. Вычисляются долгота восходящего узла  $\Omega$ , наклон  $i$  и угловое расстояние перигелия от узла  $\omega$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \bar{R}_x, \quad \sin i \cos \Omega = -\bar{R}_y, \quad \cos i = \bar{R}_z, \\ \sin i \sin \omega &= P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\ \sin i \cos \omega &= Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.47)$$

Контроль:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{P_y \sec \varepsilon - P_x \operatorname{tg} \Omega}{Q_y \sec \varepsilon - Q_x \operatorname{tg} \Omega}. \quad (3.2.48)$$

На этом вычисление элементов заканчивается. Для контроля надо вычислить по этим элементам и по формулам (3.1.01), (3.1.14), (1.1.034) координаты  $\alpha$ ,  $\delta$  на средний момент  $t_0$  (в случае трех наблюдений) или на средние моменты  $t_0$ ,  $t'_0$  (в случае четырех наблюдений).

Отсутствие хорошего совпадения может указывать не только на ошибки вычислений, но и на то, что фактическое движение данного небесного тела плохо описывается на данном интервале времени невозмущенной кеплеровской орбитой.

Такое сравнение вычисляемых по элементам и наблюдаемых координат на средний момент выполняется также в случае определения элементов гиперболической и параболической орбиты.

### § 2.06. Определение элементов гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

Вычисление параметра орбиты  $p$ , эксцентриситета  $e$ , действительной полуоси  $a$ , а также элементов  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  выполняется так же, как и в случае эллиптической орбиты. При этом мы получим  $e > 1$ .

Вместо средней аномалии в эпоху принимают в качестве шестого элемента момент  $\tau$  прохождения через перигелий. Формулы для вычисления  $\tau$  следующие (см. ч. II, § 2.03):

$$\operatorname{ch} H_k = \frac{r_k + a}{ae}, \quad \operatorname{sh} H_k = \frac{g_k}{ea\sqrt{e^2-1}} \quad (k=1, 2), \quad (3.2.49)$$

$$ka^{-3/2}(t_k - \tau) = e \operatorname{sh} H_k - H_k \quad (k=1, 2), \quad (3.2.50)$$

где  $g_k$  ( $k=1, 2$ ) вычисляются согласно (3.2.37).

Для контроля вычисляется

$$a^{-3/2} = \frac{e \operatorname{sh} H_2 - e \operatorname{sh} H_1 + H_1 - H_2}{k(t_2 - t_1)}. \quad (3.2.51)$$

Это значение  $a$  должно совпадать по абсолютной величине с вычисляемым по формуле (3.2.38).

### § 2.07. Определение элементов параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

1. Вычисляются истинные аномалии  $v_1, v_2$  на моменты  $t_1, t_2$  и перигелийное расстояние  $q$  по формулам (см. ч. II, § 2.04)

$$\operatorname{tg} \frac{v_1}{2} = \frac{\sqrt{(r_1+r_2)^2 - s^2} - 2r_1}{\sqrt{s^2 - (r_2-r_1)^2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} = \frac{2r_2 - \sqrt{(r_1+r_2)^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - (r_1+r_2)^2}}, \quad (3.2.52)$$

$$q = \frac{r_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}, \quad q = \frac{r_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_2}{2}}, \quad (3.2.53)$$

где

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Значения  $q$ , вычисленные по обеим формулам (3.2.53), должны совпадать.

2. Вычисляется момент  $\tau$  прохождения через перигелий:

$$\tau = t_i - q^{3/2} \left( \operatorname{tg} \frac{v_i}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v_i}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{k} \quad (i=1, 2). \quad (3.2.54)$$

Оба значения  $\tau$  должны совпадать друг с другом.

3. Компоненты векторных элементов  $P_x, Q_x$  можно найти по формулам

$$P_x = \frac{\frac{x_1}{r_1} \sin v_2 - \frac{x_2}{r_2} \sin v_1}{\sin 2(v_2 - v_1)}, \quad Q_x = \frac{\frac{x_2}{r_2} \cos v_1 - \frac{x_1}{r_1} \cos v_2}{\sin 2(v_2 - v_1)}, \quad (3.2.55)$$

а компоненты векторных элементов  $P_y, Q_y, P_z, Q_z$  по аналогичным формулам, в которых  $x_k$  заменяются на  $y_k$  и  $z_k$  соответственно.

Для перехода к элементам  $\Omega, \omega, i$  служат формулы (3.2.42) — (3.2.47).

### § 2.08. Уравнения Ламберта и Эйлера

В задачах определения и исследования орбит важное значение имеют уравнения Ламберта и Эйлера, связывающие два положения небесного тела на невозмущенной кеплеровской орбите.

Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — гелиоцентрические радиусы-векторы небесного тела в моменты  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, а  $s$  — расстояние между концами векторов  $r_1$ ,  $r_2$ , т. е. хорда, соединяющая два положения небесного тела на орбите в моменты  $t_1$ ,  $t_2$ . Тогда в случае эллиптического движения имеет место соотношение

$$k(t_2 - t_1) = a^{3/2} [\varepsilon - \sin \varepsilon \mp (\delta - \sin \delta)], \quad (3.2.56)$$

где  $k$  — постоянная тяготения,  $a$  — большая полуось орбиты,  $\varepsilon$  и  $\delta$  — углы, изменяющиеся в пределах от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  и определяющиеся однозначно по формулам

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}, \quad (3.2.57)$$

$$|r_1| = r_1, \quad |r_2| = r_2.$$

Верхний знак минус в правой части (3.2.56) берется, если угол между радиусами-векторами  $r_1$ ,  $r_2$  меньше  $180^\circ$ , а нижний знак плюс, если этот угол больше  $180^\circ$ .

Соотношение (3.2.56) и называется *уравнением Ламберта*. Оно остается справедливым также для гиперболического движения, если считать, что  $a < 0$  и  $|a|$  равно действительной полуоси гиперболической орбиты, а величины  $\varepsilon$  и  $\delta$  полагать чисто мнимыми ( $\varepsilon = i\varepsilon_1$ ,  $\delta = i\delta_1$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ).

Уравнение Ламберта записывается также в ином виде после представления углов  $\varepsilon$  и  $\delta$  в виде рядов по степеням величин

$$\sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}.$$

Если обозначить

$$m_1 = \frac{1}{2} \sqrt{r_1 + r_2 + s}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \sqrt{r_1 + r_2 - s}, \quad (3.2.58)$$

то получим вместо (3.2.56) уравнение

$$k(t_2 - t_1) = 4 \left[ \frac{1}{3} (m_1^3 \mp m_2^3) + \frac{1}{5a} \frac{1}{2} (m_1^5 \mp m_2^5) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7a^2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (m_1^7 \mp m_2^7) + \frac{1}{9a^3} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (m_1^9 \mp m_2^9) + \dots \right], \quad (3.2.59)$$

удобное в равной мере для эллиптических ( $a > 0$ ) и для гиперболических ( $a < 0$ ) орбит. В обоих случаях правая часть этого уравнения не содержит мнимых величин.

В пределе при  $|a| \rightarrow \infty$  мы получим так называемое уравнение Эйлера для параболической орбиты

$$k(t_2 - t_1) = \frac{1}{6} [(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}]. \quad (3.2.60)$$

Если угол между радиусами-векторами  $r_1$  и  $r_2$  меньше  $180^\circ$ , так что надо брать в правой части данного уравнения знак минус, и если  $s$  значительно меньше, чем  $r_1 + r_2$ , то правая часть представляет собой разность двух близких чисел и вычисляется весьма неточно. Тогда используют обычно следующую форму уравнения Эйлера:

$$\theta_0 \cdot 4k^2(t_2 - t_1)^2 = s^2(r_1 + r_2), \quad (3.2.61)$$

(где

$$\theta_0 = \frac{9 \sec^2 \frac{\gamma}{2}}{\left[3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \gamma\right]^2}, \quad c = \left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^2, \quad \sin \gamma = \sqrt{c}, \quad (3.2.62)$$

или

$$\theta_0 = 1 + \frac{1}{12} c + \frac{1}{48} c^2 + \frac{7}{864} c^3 + \frac{83}{20736} c^4 + \frac{95}{41472} c^5 + \\ + \frac{1363}{746496} c^6 + \dots \quad (3.2.63)$$

Уравнение (3.2.30), используемое при определении гелиоцентрических положений в случае параболической орбиты (см. § 2.04), представляет собой некоторый аналог уравнения Эйлера.

### § 2.09. Определение элементов эллиптической или гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям с помощью уравнения Ламберта

Пусть даны гелиоцентрические (экваториальные или эклиптические) прямоугольные координаты  $x_k, y_k, z_k$  ( $k = 1, 2$ ) и соответствующие радиусы-векторы  $r_1, r_2$  небесного тела на моменты времени  $t_1, t_2$  соответственно.

Вычисляем длину хорды  $s$ , равную

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

и величины  $m_1, m_2$  по формулам (3.2.58). Уравнение (3.2.59) переписываем в следующем виде:

$$\frac{1}{10a} (m_1^5 - m_2^5) = \\ = Q - \frac{1}{7a^2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (m_1^7 - m_2^7) - \frac{1}{9a^3} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (m_1^9 - m_2^9) + \dots \quad (3.2.64)$$



где

$$Q = \frac{1}{4} k (t_2 - t_1) - \frac{1}{3} (m_1^3 - m_2^3).$$

В качестве неизвестной величины принимается  $\frac{1}{a}$ . Если  $Q = 0$ , то  $\frac{1}{a} = 0$ ,  $a = \infty$  (параболическая орбита). Если  $Q \neq 0$ , то  $\frac{1}{a}$  находится методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимается

$$\left(\frac{1}{a}\right)_0 = \frac{10Q}{m_1^5 - m_2^5}. \quad (3.2.65)$$

При этом, если  $Q > 0$ , то получим положительное решение  $\frac{1}{a}$  уравнения (3.2.64) и  $a$  равно большой полуоси эллиптической орбиты. Если же  $Q < 0$ , то решение уравнения (3.2.64) отрицательное и  $|a|$  равно действительной полуоси гиперболической орбиты.

Эксцентриситет  $e$  эллиптической орбиты находится на основании того, что углы  $\varepsilon$  и  $\delta$ , определяемые согласно (3.2.57), удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon - \delta = E_2 - E_1, \quad (3.2.66)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — эксцентрические аномалии небесного тела в моменты  $t_1$  и  $t_2$  соответственно. С помощью же соотношения  $r = a(1 - e \cos E)$  могут быть выведены формулы

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= \frac{1}{4a^2} \left[ \frac{(r_2 - r_1)^2}{\sin^2 \frac{\varepsilon - \delta}{2}} + \frac{(2a - r_1 - r_2)^2}{\cos^2 \frac{\varepsilon - \delta}{2}} \right], \\ \operatorname{tg} \frac{E_1 + E_2}{2} &= \frac{(r_2 - r_1) \operatorname{cosec} \frac{\varepsilon - \delta}{2}}{(2a - r_1 - r_2) \sec \frac{\varepsilon - \delta}{2}}, \\ |r_1| &= r_1, \quad |r_2| = r_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.67)$$

причем знаки синуса и косинуса угла  $(E_1 + E_2)/2$  совпадают со знаками числителя и знаменателя правой части последней формулы соответственно. По формулам (3.2.67) находим эксцентриситет  $e$  и угол  $E_1 + E_2$ , а затем с помощью (3.2.66) находим эксцентрические аномалии  $E_1, E_2$ .

По формулам (3.2.40) и (3.2.41) вычисляем далее средние аномалии  $M_1, M_2$  на моменты  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, а также

среднее угловое движение  $n$ . Вторая из формул (3.2.41) служит при этом для контроля предыдущих вычислений.

В случае гиперболической орбиты (тогда мы получим при решении уравнения (3.2.64)  $a < 0$ ) эксцентриситет орбиты и момент прохождения через перигелий находятся следующим образом.

Вычисляем величины  $e_1$  и  $\delta_1$  на основании формул

$$\operatorname{sh}^2 \frac{e_1}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4|a|}, \quad \operatorname{sh}^2 \frac{\delta_1}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4|a|}. \quad (3.2.68)$$

Эти величины таковы, что

$$e_1 - \delta_1 = H_2 - H_1, \quad (3.2.69)$$

а  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют (3.1.05), (3.1.06) при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  соответственно и представляют собой аналоги эксцентрических аномалий в случае гиперболического движения.

С помощью соотношения  $r = a(1 - e \operatorname{ch} H)$  ( $a < 0$ ), рассматриваемого при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , можно вывести формулы, аналогичные (3.2.67):

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= \frac{1}{4a^2} \left[ \frac{(2|a| + r_1 + r_2)^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{e_1 - \delta_1}{2}} - \frac{(r_1 - r_2)^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{e_1 - \delta_1}{2}} \right], \\ \operatorname{th} \frac{H_1 + H_2}{2} &= \frac{r_2 - r_1}{2|a| + r_1 + r_2} \operatorname{cth} \frac{e_1 - \delta_1}{2}. \end{aligned} \right\} (3.2.70)$$

По этим формулам находим  $e$ ,  $H_1 + H_2$ , а затем  $H_1$  и  $H_2$  с помощью (3.2.68). Контролем вычислений служит формула (3.2.51).

С помощью (3.2.50) находим далее момент  $\tau$  прохождения небесного тела через перигелий орбиты.

Вычисление элементов  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  производится одинаково для эллиптической и гиперболической орбит по формулам (3.2.42) — (3.2.47). При этом следует иметь в виду, что указанные формулы предполагают использование экваториальных гелиоцентрических координат  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  ( $k = 1, 2$ ). Если же  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  — эклиптические координаты, то нет необходимости в преобразованиях, указанных в § 2.05, п. 8. Тогда мы получим вместо (3.2.47) формулы

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= R_x, & \sin i \sin \omega &= P_z, \\ \sin i \cos \Omega &= -R_y, & \sin i \cos \omega &= Q_z, \\ \cos i &= R_z, \end{aligned} \right\} (3.2.71)$$

где  $R_x, \dots, Q_z$  определяются согласно (3.2.42), (3.2.43), (3.2.45).

### § 2.10. Определение элементов круговой орбиты по двум наблюдениям

Пусть небесное тело наблюдалось только два раза в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , и пусть  $\alpha_k, \delta_k$  ( $k = 1, 2$ ) — две пары зафиксированных в эти моменты геоцентрических экваториальных координат. Для определения эллиптической орбиты двух наблюдений недостаточно, но возможно определить элементы круговой орбиты, соответствующей этим двум наблюдениям. Такая орбита может служить неплохим первым приближением для описания фактического движения небесного тела, если, разумеется, фактическая орбита имеет не слишком большой эксцентриситет.

Круговая орбита определяется четырьмя элементами:  $a$  (радиус орбиты),  $\Omega$  (долгота восходящего узла),  $i$  (наклон),  $l_0$  (долгота планеты в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$ ). Вычисление этих элементов производится следующим образом.

1. Вычисляются направляющие косинусы  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  ( $k = 1, 2$ ) геоцентрических радиусов-векторов  $\rho_1, \rho_2$  по формулам (3.2.01), а также прямоугольные геоцентрические координаты Солнца  $X_k, Y_k, Z_k$  на моменты  $t_k$  ( $k = 1, 2$ ).

2. Вычисляются величины

$$\left. \begin{aligned} C_k &= -(\lambda_k X_k + \mu_k Y_k + \nu_k Z_k), \\ R_k^2 &= X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2, & S_k^2 &= R_k^2 - C_k^2 \quad (k = 1, 2), \\ A &= -(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2), & B &= \lambda_1 X_2 + \mu_1 Y_2 + \nu_1 Z_2, \\ C &= \lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 + \nu_2 Z_1, & D &= -(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.72)$$

3. Составляются соотношения для геоцентрических расстояний  $\rho_1, \rho_2$  и для гелиоцентрических прямоугольных координат

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \lambda_k \rho_k - X_k, \\ y_k &= \mu_k \rho_k - Y_k, \\ z_k &= \nu_k \rho_k - Z_k, \end{aligned} \right\} \rho_k = \sqrt{a^2 - S_k^2} - C_k^2 \quad (k = 1, 2), \quad (3.2.73)$$

а также для угла  $2f$  между гелиоцентрическими радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1), \mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$a^2 \cos 2f = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (3.2.74)$$

или

$$\sin^2 f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} (A\rho_1\rho_2 + B\rho_1 + C\rho_2 + D). \quad (3.2.75)$$

Последние две формулы, выведенные из геометрических соображений, определяют так называемое геометрическое значение  $f_{\text{геом}}$  угла  $f$ . Вместе с тем, поскольку небесное тело движется по круговой орбите радиуса  $a$  равномерно с угловой скоростью  $n = ka^{-3/2}$ , то за время  $t_2 - t_1$  гелиоцентрический радиус-вектор опишет угол  $n(t_2 - t_1)$ . Следовательно,

$$f = \frac{k(t_2 - t_1)}{2} a^{-3/2}, \quad k = 0^\circ, 98560767. \quad (3.2.76)$$

Последняя формула определяет так называемое динамическое значение  $f_{\text{дин}}$  угла  $f$ .

Соотношения (3.2.75) и (3.2.76) образуют систему двух уравнений относительно двух неизвестных  $a$  и  $f$ . Ее нетрудно решить, например, путем варьирования значений  $a$  и последующего интерполирования. При каждом заданном  $a$  можно вычислить непосредственно динамическое значение  $f_{\text{дин}}$  согласно (3.2.76), затем по формулам (3.2.73)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и далее геометрическое значение  $f_{\text{геом}}$  согласно (3.2.75). Искомое  $a$  должно быть таким, что  $f_{\text{геом}} = f_{\text{дин}}$ .

4. Ось  $S\xi$  орбитальной системы координат принимается направленной в ту точку круговой орбиты, в которой небесное тело, движущееся по этой орбите, должно находиться в момент  $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ . Ось  $S\eta$  повернута по отношению к оси  $S\xi$ , как обычно, на  $90^\circ$  в плоскости орбиты по направлению движения небесного тела.

Векторные экваториальные элементы орбиты  $P_x, \dots, Q_z$  (см. (3.1.15)) вычисляются при таком выборе орбитальной системы координат по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_x &= q_1(x_1 + x_2), & Q_x &= q_2(x_2 - x_1), \\ P_y &= q_1(y_1 + y_2), & Q_y &= q_2(y_2 - y_1), \\ P_z &= q_1(z_1 + z_2), & Q_z &= q_2(z_2 - z_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.77)$$

где

$$q_1 = \frac{1}{2a \cos f}, \quad q_2 = \frac{1}{2a \sin f}.$$

При этом надо иметь в виду, что угол  $\omega$ , выписанный в (3.1.15), представляет собой в данном случае угловое расстояние между восходящим узлом орбиты и точкой, в которой небесное тело находится в момент  $t_0$ , т. е. аргумент широты в этот момент. Этот угол обозначается через  $u_0$ .

5. Вычисляем по формулам (3.2.45), (3.2.46) направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты в эклиптической

системе координат  $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ . После этого из формул, аналогичных (3.2.47),

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \bar{R}_x, & \sin i \cos \Omega &= -\bar{R}_y, & \cos i &= \bar{R}_z, \\ \sin i \sin u_0 &= P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\ \sin i \cos u_0 &= Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (3.2.78)$$

можно вычислить  $i, \Omega$  и  $u_0$ .

Искомая долгота  $l_0$  в момент  $t_0$  равна сумме  $\Omega + u_0$  и представляет собой так называемую долготу в орбите.

Для контроля вычисления служит формула (3.2.48), в которой следует заменить  $\omega$  на  $u_0$ .

На этом определение всех четырех элементов круговой орбиты  $a, i, \Omega, l_0$  заканчивается. Дальнейшее сравнение полученной орбиты с наблюдениями сопровождается вычислением гелиоцентрических экваториальных прямоугольных координат на любой момент времени. Такие вычисления производятся по формулам (3.1.14), в которых следует положить

$$\xi = a \cos n(t - t_0), \quad \eta = a \sin n(t - t_0). \quad (3.2.79)$$

### § 2.11. Вычисление элементов гелиоцентрической орбиты по положению и скорости в начальный момент

Пусть известны в начальный момент  $t_0$  прямоугольные координаты (экваториальные)  $x_0, y_0, z_0$  и компоненты скорости  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  небесного тела. Укажем, как вычисляются элементы невозмущенной орбиты, соответствующей этим значениям.

1. Вычисляется величина

$$\frac{1}{a} = \left| \frac{2}{r_0} - \frac{V_0^2}{k^2} \right|, \quad (3.2.80)$$

где

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2. \quad (3.2.81)$$

Положительному значению выражения, стоящего в (3.2.80) под знаком модуля, соответствует эллиптическая, отрицательному значению — гиперболическая и нулевому значению — параболическая орбиты.

2. В случае эллиптической орбиты вычисляются эксцентриситет  $e$  и эксцентрисическая аномалия  $E_0$  на момент  $t_0$  из соотношений

$$e \sin E_0 = \frac{s}{k \sqrt{a}}, \quad e \cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a}, \quad (3.2.82)$$

где  $s = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0$ .

Затем с помощью уравнения Кеплера

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0 \quad (3.2.83)$$

вычисляется средняя аномалия в эпоху  $t_0$ .

В случае гиперболической орбиты формулы для вычисления эксцентриситета, аналога эксцентрической аномалии  $H_0$  и момента  $\tau$  прохождения через перигелий следующие:

$$e \operatorname{sh} H_0 = \frac{s}{k \sqrt{a}}, \quad e \operatorname{ch} H_0 = \frac{r}{a} + 1, \quad (3.2.84)$$

$$e \operatorname{sh} H_0 - H_0 = ka^{-1/2}(t_0 - \tau). \quad (3.2.85)$$

В случае параболической орбиты достаточно вычислить параметр орбиты  $p$  и момент  $\tau$  прохождения через перигелий. Формулы для вычислений следующие:

$$p = 2r_0 - \frac{s^2}{k^2}, \quad \tau = t_0 - \frac{1}{2k} p^{3/2} \left( \sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 \right), \quad (3.2.86)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{s}{k \sqrt{p}}, \quad s = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0. \quad (3.2.87)$$

3. Из соотношений

$$\left. \begin{aligned} k \sqrt{p} \sin i' \sin \Omega' &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ k \sqrt{p} \sin i' \cos \Omega' &= x_0 \dot{z}_0 - y_0 \dot{x}_0, \\ k \sqrt{p} \cos i' &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.88)$$

находятся элементы  $i'$ ,  $\Omega'$ , отнесенные к экватору, а также параметр  $p$ . В случае параболической орбиты это значение  $p$  должно совпадать с тем, которое находилось согласно (3.2.86). В случае эллиптической или гиперболической орбит следует для контроля проверить соотношения

$$p = a(1 - e^2), \quad p = a(e^2 - 1), \quad (3.2.89)$$

используя найденные значения  $a$ ,  $e$ .

4. Экваториальный элемент  $\omega'$  находится по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} v_0 &= \frac{\sqrt{p} s}{k(p - r_0)}, \quad \operatorname{tg} u'_0 = \frac{z_0 \operatorname{cosec} i'}{x_0 \cos \Omega' + y_0 \sin \Omega'}, \\ \omega' &= u'_0 - v_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.90)$$

причем числители и знаменатели выписанных формул имеют знаки синуса и косинуса углов  $v_0$ ,  $u'_0$  соответственно.

5. Переход к эклиптическим элементам выполняется по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \sin i' \sin \Omega', \\ \sin i \cos \Omega &= -\cos i' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon \cos \Omega', \\ \cos i &= \cos i' \cos \varepsilon + \sin i' \sin \varepsilon \cos \Omega', \\ \sin i \sin d &= \sin \varepsilon \sin \Omega', \\ \sin i \cos d &= \sin i' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon \cos \Omega', \\ \omega &= \omega' - d. \end{aligned} \right\} (3.2.91)$$

В заключение заметим, что все формулы, приведенные выше в главах 1 и 2, рассчитаны прежде всего на применение современной вычислительной техники. Формулы, где встречаются ряды, выписаны так, что очевидна структура общего члена и можно проводить вычисления с необходимой точностью.

Для облегчения некоторых вычислений, например, при определении среднего углового движения  $n$  по заданной большой полуоси орбиты  $a$  и наоборот, при решении уравнения Кеплера и т. д. можно рекомендовать специальные таблицы, имеющиеся в [1], [3].

## Глава 3

### УЛУЧШЕНИЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ОРБИТЫ

Способы, изложенные в предыдущей главе, позволяют получить лишь предварительную орбиту. Ошибки элементов такой орбиты обусловлены недостаточной точностью наблюдений, потерей точности при вычислениях. Кроме того, поскольку фактическая орбита любого небесного тела не является невозмущенной (кеплеровой), элементы предварительной орбиты представляют собой, по существу, некоторые средние элементы кеплеровой орбиты, приближенно представляющей возмущенное движение, наблюдаемое на данном интервале времени.

Методы улучшения первоначальной орбиты небесного тела преследуют цель или уточнения предварительных элементов кеплеровой орбиты в предположении, что движение остается невозмущенным, или нахождения как можно более точных значений оскулирующих элементов орбиты на тот или иной момент времени в предположении, что имеет место возмущенное движение.

Наряду с учебными пособиями [1], [2] для более подробного ознакомления со способами улучшения орбит можно рекомендовать [7], [8].

#### § 3.01. Дифференциальное исправление орбит.

##### Постановка задачи

В настоящее время для улучшения первоначальной орбиты наиболее эффективным является так называемый *дифференциальный метод исправления элементов орбиты*, рассчитанный на применение современной вычислительной техники и позволяющий использовать всю совокупность наблюдений данного небесного тела.

Пусть имеются наблюденные значения геоцентрических экваториальных координат  $\alpha_i^{(n)}$ ,  $\delta_i^{(n)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) на моменты  $t_1, \dots, t_n$ . Пусть имеется таблица значений  $\alpha_i^{(s)}$ ,  $\delta_i^{(s)}$ , геоцентрических расстояний  $\rho_i^{(s)}$ , а также прямоугольных экваториальных гелиоцентрических координат  $x_i^{(s)}$ ,  $y_i^{(s)}$ ,  $z_i^{(s)}$ , вычисленных на эти



же моменты по элементам предварительной орбиты, отнесенной к моменту  $t_0$ .

Обозначим через  $\Delta\alpha_i$ ,  $\Delta\delta_i$ ,  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta z_i$  ошибки вычисленных координат, так что

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_i &= \alpha_i^{(H)} - \alpha_i^{(B)}, & \Delta\delta_i &= \delta_i^{(H)} - \delta_i^{(B)}, \\ \Delta x_i &= x_i^* - x_i^{(B)}, & \Delta y_i &= y_i^* - y_i^{(B)}, & \Delta z_i &= z_i^* - z_i^{(B)},\end{aligned}$$

где  $x_i^*$ ,  $y_i^*$ ,  $z_i^*$  — значения  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , точно соответствующие наблюдаемым  $\alpha_i^{(H)}$ ,  $\delta_i^{(H)}$ . Предполагается, что ошибки  $\Delta\alpha_i$ , ...,  $\Delta z_i$  малы и зависят только от погрешностей элементов предварительной орбиты на момент  $t_0$ .

Зависимость  $\Delta\alpha_i$ ,  $\Delta\delta_i$  от  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta z_i$  выражается с точностью до членов первого порядка формулами

$$\left. \begin{aligned}\cos \delta_i \cdot \Delta\alpha_i &= -\frac{1}{\rho_i} \sin \alpha_i \cdot \Delta x_i + \frac{1}{\rho_i} \cos \alpha_i \cdot \Delta y_i, \\ \Delta\delta_i &= -\frac{1}{\rho_i} \sin \delta_i \cos \alpha_i \cdot \Delta x_i - \frac{1}{\rho_i} \sin \delta_i \sin \alpha_i \cdot \Delta y_i + \\ &\quad + \frac{1}{\rho_i} \cos \delta_i \cdot \Delta z_i,\end{aligned}\right\} \quad (3.3.01)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\delta_i$ ,  $\rho_i$  — вычисленные значения (индекс «в» для сокращения записи опускаем).

В свою очередь зависимость  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta z_i$  от поправок к элементам предварительной орбиты выражается с точностью до членов первого порядка формулами

$$\left. \begin{aligned}\Delta x_i &= \sum_1^6 \left( \frac{\partial x}{\partial E_k} \right)_i \Delta E_k, \\ \Delta y_i &= \sum_1^6 \left( \frac{\partial y}{\partial E_k} \right)_i \Delta E_k, \\ \Delta z_i &= \sum_1^6 \left( \frac{\partial z}{\partial E_k} \right)_i \Delta E_k\end{aligned}\right\} \quad (3.3.02)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

где  $E_1, \dots, E_6$  — элементы орбиты, а  $\left( \frac{\partial x}{\partial E_k} \right)_i, \dots$  — значения частных производных  $x, y, z$  по  $E_k$  на момент  $t_i$ . Членами порядка выше первого в формулах (3.3.01), (3.3.02) относительно  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и  $\Delta E_k$  пренебрегают. В формулах (3.3.02) часто для

удобства вычислений в качестве  $E_1, \dots, E_6$  принимают некоторые функции элементов.

Вычисление координат  $\alpha_i^{(s)}, \delta_i^{(s)}, x_i^{(s)}, y_i^{(s)}, z_i^{(s)}$  может производиться по формулам невозмущенного движения. Тогда ошибки  $\Delta\alpha_i, \Delta\delta_i, \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$  обусловлены отклонением фактического движения от невозмущенного, и  $\Delta E_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) надо рассматривать как поправки к элементам (или функциям от элементов) невозмущенной орбиты, учет которых позволит получить невозмущенную орбиту, достаточно хорошо описывающую фактическое движение. Однако чаще всего координаты  $\alpha^{(s)}, \delta^{(s)}, x^{(s)}, y^{(s)}, z^{(s)}$  вычисляются с учетом возмущений. Тогда  $\Delta E_k$  рассматривают как погрешности начальных значений элементов (или функций элементов) оскулирующей орбиты на момент  $t_0$ , учет которых позволит вычислить более точно возмущения. Члены, обусловленные изменениями  $E_k$  с течением времени и неточностью метода вычисления возмущений, считаются имеющими более высокий порядок малости и при составлении соотношений (3.3.02) не учитываются.

После нахождения численных значений производных  $\left(\frac{\partial x}{\partial E_k}\right)_i, \dots$  подставляют выражения (3.3.02) для  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$  в (3.3.01) и получают соотношения вида

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(i)} \Delta E_1 + \dots + a_6^{(i)} \Delta E_6 &= \cos \delta_i \cdot \Delta \alpha_i, \\ b_1^{(i)} \Delta E_1 + \dots + b_6^{(i)} \Delta E_6 &= \Delta \delta_i, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.03)$$

где  $a_k^{(i)}, b_k^{(i)}$  — численные коэффициенты. Эти соотношения представляют собой так называемые *условные уравнения* относительно  $\Delta E_1, \dots, \Delta E_6$ , решаемые по способу наименьших квадратов (с применением ЭВМ, если число наблюдений достаточно велико). См. ч. VII, гл. 4.

### § 3.02. Выражения для производных от координат по элементам (или по функциям элементов)

Укажем формулы для производных  $\frac{\partial x}{\partial E_k}, \frac{\partial y}{\partial E_k}, \frac{\partial z}{\partial E_k}$ , принимая в качестве  $E_1, \dots, E_6$  несколько наиболее употребляемых в этой задаче систем параметров (элементов или функций элементов) для орбит различных типов.

1. В случае эллиптических орбит с довольно значительным эксцентриситетом  $e$ , но не близким к единице, принимают

$$E_i = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad E_4 = \ln a, \quad E_5 = e, \quad E_6 = M_0, \quad (3.3.04)$$

так что

$$\Delta E_i = \Delta \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Delta E_4 = \frac{\Delta a}{a}, \quad \Delta E_5 = \Delta e, \quad \Delta E_6 = \Delta M_0.$$

Параметры  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  эквивалентны элементам  $\Omega, i, \omega$  и представляют собой углы поворота плоскости орбиты вокруг осей  $x, y, z$  соответственно,  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $M_0$  — средняя аномалия в эпоху  $t_0$ .

Приведем таблицу выражений для производных  $x, y, z$  по  $E_1, \dots, E_6$  (табл. 42), где  $n$  — среднее движение,

$$H = \frac{r - a(1 + e^2)}{ea(1 - e^2)}, \quad K = \frac{as}{k^2e} \left( 1 + \frac{r}{a(1 - e^2)} \right), \quad (3.3.05)$$

$$s = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}.$$

В каждом столбце выписаны производные координат  $x, y, z$  по соответствующему элементу: во втором столбце по  $E_1$ , в третьем столбце по  $E_2$  и т. д.

Таблица 42

$E_k$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$\frac{\partial x}{\partial E_k}$	0	$z$	$-y$	$x - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{x}$	$Hx + K\dot{x}$	$\frac{\dot{x}}{n}$
$\frac{\partial y}{\partial E_k}$	$-z$	0	$x$	$y - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{y}$	$Hy + K\dot{y}$	$\frac{\dot{y}}{n}$
$\frac{\partial z}{\partial E_k}$	$y$	$-x$	0	$z - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{z}$	$Hx + K\dot{z}$	$\frac{\dot{z}}{n}$

Эта таблица является одновременно таблицей коэффициентов в формулах (3.3.02) при соответствующих  $\Delta E_1, \dots, \Delta E_6$ . Например, строка производных  $\partial x / \partial E_k$  позволяет записать первую из формул (3.3.02) в виде (индекс  $i$  опускаем)

$$\Delta x = z \Delta E_2 - y \Delta E_3 + \left[ x - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{x} \right] \Delta E_4 + (Hx + K\dot{x}) \Delta E_5 + \frac{\dot{x}}{n} \Delta E_6.$$

После вычисления поправок  $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3$  можно найти поправки к значениям обычных элементов  $\Omega, i, \omega$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega \sin i &= \Delta\bar{\psi}_1 \sin \Omega - \Delta\bar{\psi}_2 \cos \Omega, \\ \Delta i &= \Delta\bar{\psi}_1 \cos \Omega + \Delta\bar{\psi}_2 \sin \Omega, \\ \Delta\Omega &= \Delta\bar{\psi}_3 - \Delta\omega \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.06)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{\psi}_1 &= \Delta\psi_1, \\ \Delta\bar{\psi}_2 &= \Delta\psi_2 \cos \varepsilon + \Delta\psi_3 \sin \varepsilon, \\ \Delta\bar{\psi}_3 &= -\Delta\psi_2 \sin \varepsilon + \Delta\psi_3 \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.07)$$

(Величины  $\Delta\bar{\psi}_1, \Delta\bar{\psi}_2, \Delta\bar{\psi}_3$  суть поправки углов поворота плоскости орбиты вокруг осей  $O\bar{x}, O\bar{y}, O\bar{z}$  эклиптической системы координат.)

Значения  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  находятся проще всего с помощью интерполяционных формул (см. ч. VII, гл. 1) по таблицам прямоугольных координат, вычисленных для равноотстоящих моментов времени.

2. В случае эллиптических орбит с малыми эксцентриситетами используются параметры

$$\begin{aligned} E_i = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad E_4 = \ln a, \quad E_5 = e, \\ E_6 = M_0 + \psi_3, \end{aligned} \quad (3.3.08)$$

так что

$$\begin{aligned} \Delta E_i = \Delta\psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Delta E_4 = \frac{\Delta a}{a}, \\ \Delta E_5 = \Delta e, \quad \Delta E_6 = \Delta M_0 + \Delta\psi_3. \end{aligned}$$

Таблица для производных координат  $x, y, z$  по  $E_1, \dots, E_6$  или же для коэффициентов формул (3.2.02) отличается от табл. 42 только одним столбцом, соответствующим  $E_3 = \psi_3$  и приведенным в табл. 43.

Таблица 43

3. При произвольных эксцентриситетах и наклонах эллиптических орбит могут быть использованы параметры

$$\begin{aligned} E_1 = p, \quad E_2 = q, \quad E_3 = r, \quad E_4 = \ln a, \\ E_5 = e, \quad E_6 = M_0 + r, \end{aligned} \quad (3.3.09)$$

где  $p, q, r$  — компоненты вектора  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  в системе координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , плоскость  $\bar{x}\bar{y}$  которой совпадает с плоскостью орбиты, а ось  $\bar{x}$  направлена в перигелий.

Соотношения между  $\Delta p, \Delta q, \Delta r$  и приращениями элементов  $\Delta\Omega, \Delta i, \Delta\omega$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} \Delta i &= \Delta p \cos \omega - \Delta q \sin \omega, \\ \sin i \Delta\Omega &= \Delta p \sin \omega + \Delta q \cos \omega, \\ \Delta\omega + \cos i \Delta\Omega &= \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.10)$$

Производные  $\frac{\partial x}{\partial E_k}, \dots$  даются в табл. 44.

	$E_3$
$\frac{\partial x}{\partial E_3}$	$-\frac{\dot{x}}{n} - y$
$\frac{\partial y}{\partial E_3}$	$-\frac{\dot{y}}{n} + x$
$\frac{\partial z}{\partial E_3}$	$-\frac{\dot{z}}{n}$

Таблица 44

$E_k$	$E_6$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
$\frac{\partial x}{\partial E_k}$	$\frac{\dot{x}}{n}$	$P_{yz} - P_{zy}$	$Q_{yz} - Q_{zy}$	$-\frac{\dot{x}}{n} + R_{yz} - R_{zy}$	$x - \frac{3}{2}(t-t_0)\dot{x}$	$Hx + K\dot{x}$
$\frac{\partial y}{\partial E_k}$	$\frac{\dot{y}}{n}$	$P_{zx} - P_{xz}$	$Q_{zx} - Q_{xz}$	$-\frac{\dot{y}}{n} + R_{zx} - R_{xz}$	$y - \frac{3}{2}(t-t_0)\dot{y}$	$Hy + K\dot{y}$
$\frac{\partial z}{\partial E_k}$	$\frac{\dot{z}}{n}$	$P_{xy} - P_{yx}$	$Q_{xy} - Q_{yx}$	$-\frac{\dot{z}}{n} + R_{xy} - R_{yx}$	$z - \frac{3}{2}(t-t_0)\dot{z}$	$Hx + K\dot{x}$

где  $P_x, \dots, Q_z$  — компоненты векторных элементов орбиты (см. § 1.04) и  $R_x, R_y, R_z$  — направляющие косинусы перпендикуляра к орбите в экваториальной системе координат. Соотношения

Таблица 45

$E_k$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$\frac{\partial x}{\partial E_k}$	$-\dot{x}$	$Qx + Q'\dot{x}$	$Hx + H'\dot{x}$
$\frac{\partial y}{\partial E_k}$	$-\dot{y}$	$Qy + Q'\dot{y}$	$Hy + H'\dot{y}$
$\frac{\partial z}{\partial E_k}$	$-\dot{z}$	$Qz + Q'\dot{z}$	$Hx + H'\dot{x}$

между  $P_x, \dots, R_z$  и  $\omega, i, \Omega$  выражаются формулами (3.1.15), (3.2.46), (3.2.47).

4. При улучшении эллиптических или гиперболических орбит с эксцентриситетом, близким к единице, используются параметры

$$E_1 = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad E_4 = \tau, \\ E_5 = q, \quad E_6 = h = -\frac{1}{a}, \quad (3.3.11)$$

где  $\tau$  — момент прохождения через перигелий,  $q = a(1 - e)$  — перигелийное расстояние и  $a$  — большая или действительная полуось. Величина  $h$  представляет собой с точностью до множителя  $k^2$  постоянную энергии (для гиперболы принимаем здесь  $a < 0$ ).

Производные от  $x, y, z$  по  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) те же, что и в табл. 42. Производные по  $E_4, E_5, E_6$  даются в табл. 45, где

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{1 + e^2 + hr}{ep}, & Q' &= -\frac{r\dot{r}(r+p)}{k^2 ep}, \\ H &= \frac{r-q}{e(1+e)}, & H' &= -\frac{3}{2}a(t-\tau) - aqQ', \end{aligned} \right\} (3.3.12)$$

$p$  — параметр орбиты,  $r$  — гелиоцентрическое расстояние,  $k^2$  — произведение постоянной тяготения на массу Солнца.

Так как  $e = 1 + qh$ ,  $h = -\frac{1}{a}$ , то после нахождения  $\Delta q$ ,  $\Delta h$  получим исправленные значения  $a$ ,  $e$  по формулам

$$e = 1 + (q + \Delta q)(h + \Delta h), \quad \Delta a = a^2 \Delta h.$$

5. Если предварительная орбита является параболической, а уточненная орбита может быть как эллиптической, так и гиперболической, то принимаются или те же параметры, что и в пункте 4, т. е.

$$E_i = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad E_4 = \tau, \quad E_5 = q, \quad E_6 = h, \quad (3.3.13)$$

или

$$E_i = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad E_4 = \tau, \quad E_5 = q, \quad E_6 = e, \quad (3.3.14)$$

с учетом, что для предварительной орбиты  $h = 0$ ,  $e = 1$ .

После определения поправок  $\Delta q$ ,  $\Delta h$  при использовании параметров (3.3.13) находят  $e$  по формуле

$$e = 1 + (q + \Delta q) \Delta h, \quad (3.3.15)$$

так что при  $\Delta h < 0$  уточненная орбита будет эллиптической, а при  $\Delta h > 0$  — гиперболической.

Значение  $a$  находят по формуле

$$a = -\frac{1}{\Delta h}. \quad (3.3.16)$$

Выражения для производных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по  $\tau$ ,  $q$ ,  $h$  записываются в том же виде, что и в табл. 45, а величины  $Q$ ,  $Q'$ ,  $H$ ,  $H'$  вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{1}{q}, \quad Q' = -2m\sigma \sqrt{q} \left(1 + \frac{r}{p}\right), \\ H &= \frac{1}{2}(r - q), \quad H' = \frac{1}{2}m\sigma q^2 \left(1 - \sigma^2 - \frac{4}{5}\sigma^4\right), \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2k}} = 41,1058431, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.17)$$

причем  $\sigma$  находится из уравнения

$$\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} q^{-1/2} (t - \tau). \quad (3.3.18)$$

Если используется система параметров (3.3.14), то производные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по  $q$ ,  $e$  следует взять из табл. 46 (остальные производные по  $E_i = \psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $E_4 = \tau$  те же, что и в табл. 42, 45 соответственно).

Т а б л и ц а 46

$E_k$	$q$	$e$
$\frac{\partial x}{\partial E_k}$	$\frac{1}{q} \left[ x - \frac{3}{2} (t - \tau) \dot{x} \right]$	$Lx - K \left[ x - \frac{3}{2} (t - \tau) \dot{x} \right]$
$\frac{\partial y}{\partial E_k}$	$\frac{1}{q} \left[ y - \frac{3}{2} (t - \tau) \dot{y} \right]$	$Ly - K \left[ y - \frac{3}{2} (t - \tau) \dot{y} \right]$
$\frac{\partial z}{\partial E_k}$	$\frac{1}{q} \left[ z - \frac{3}{2} (t - \tau) \dot{z} \right]$	$Lz - K \left[ z - \frac{3}{2} (t - \tau) \dot{z} \right]$

где

$$L = \frac{\sigma^4 + 10\sigma^2 + 5}{10\sigma^2 + 30}, \quad K = \frac{4\sigma^4 + 5\sigma^2 - 5}{10\sigma^2 + 30}. \quad (3.3.19)$$

6. Вместо параметров  $\psi_i$  или  $p, q, r$  во всех приведенных выше системах можно ввести сами элементы  $\Omega, \omega, i$ . Если заменить этими элементами параметры  $\psi_i$  в системах (3.3.04), (3.3.11), (3.3.13), то следует воспользоваться значениями производных от  $x, y, z$  по  $\Omega, \omega, i$  из табл. 47,

Т а б л и ц а 47

$E_k$	$\Omega$	$\omega$	$i$
$\frac{\partial x}{\partial E_k}$	$-z \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon$	$R_y z - R_z y$	$N_y z - N_z y$
$\frac{\partial y}{\partial E_k}$	$x \cos \varepsilon$	$R_z x - R_x z$	$N_z x - N_x z$
$\frac{\partial z}{\partial E_k}$	$x \sin \varepsilon$	$R_x y - R_y x$	$N_x y - N_y x$

где  $\varepsilon$  — наклон эклиптики к экватору,

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \cos \Omega, & R_x &= \sin i \sin \Omega, \\ N_y &= \sin \Omega \cos \varepsilon, & R_y &= -\sin i \cos \Omega \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon, \\ N_z &= \cos \Omega \sin \varepsilon, & R_z &= -\sin i \cos \Omega \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} (3.3.20)$$

Если ввести элементы  $\Omega, \omega, i$  вместо  $\psi_i$  в систему (3.3.08) или вместо  $p, q, r$  в систему (3.3.09), то будем иметь

$$E_1 = \Omega, E_2 = \omega, E_3 = i, E_4 = \ln a, E_5 = e, E_6 = M_0 + \omega. (3.3.21)$$

Производные от  $x, y, z$  по  $\Omega, i$  останутся такими же, как и в табл. 47, а производные по  $\omega$  представлены в табл. 48.

Если элементы  $\Omega, \omega, i$  отнесены к экватору, то в формулах следует положить  $\varepsilon = 0$ .

Таблица 48

	$\omega$
$\frac{\partial x}{\partial \omega}$	$-\frac{\dot{x}}{n} + R_y z - R_z y$
$\frac{\partial y}{\partial \omega}$	$-\frac{\dot{y}}{n} + R_z x - R_x z$
$\frac{\partial z}{\partial \omega}$	$-\frac{\dot{z}}{n} + R_x y - R_y x$

### § 3.03. Условные уравнения, составляемые по наблюдениям долготы и широты небесного тела

Если движение данного небесного тела происходит по орбите, имеющей малый наклон к эклиптике, то при улучшении элементов эллиптической орбиты часто используют расхождения между наблюдаемыми эклиптической долготой  $\lambda$  и эклиптической широтой  $\beta$ . Величины  $\Delta\lambda = \lambda^{(n)} - \lambda^{(v)}$  и  $\Delta\beta = \beta^{(n)} - \beta^{(v)}$ , где индексом (н) отмечены наблюдаемые значения координат и индексом (в) — вычисленные, выражают обычно через поправки к следующим элементам орбиты:  $n$  (среднее угловое движение),  $\varepsilon$  (средняя долгота в орбите в эпоху — см. ч. IV, § 3.03),  $\pi$  (долгота перигелия),  $\Omega$  (долгота узла),  $e$  (эксцентриситет),  $i$  (наклон орбиты). Вместо поправки к наклону  $i$  рассматривают при этом поправку к величине  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ .

С помощью, например, (4.10.14) из ч. IV можно вывести следующие выражения, связывающие  $\Delta\lambda$  и  $\Delta\beta$  с поправками  $\Delta n, \Delta\varepsilon, \Delta\pi, \dots$ , к указанному элементу орбиты:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & \left[ 1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M - \gamma^2 \cos(2\omega + M) \right] [\Delta\varepsilon + \Delta n (t - t_0)] + \\ & + \left[ 2 \sin M + \frac{5}{2} e \sin 2M - \frac{3}{4} e^2 \sin M + \frac{13}{4} e^2 \sin 3M + \right. \\ & \left. + 2\gamma^2 \sin(2\omega + M) - 2\gamma^2 \sin(2\omega + 3M) \right] \Delta\varepsilon + \\ & + \left[ -2 \cos M + \frac{5}{2} e \cos 2M \right] e \Delta\pi + 4\gamma^2 \cos(2\omega + M) \Delta\Omega + \\ & + [-2\gamma \sin(2\omega + 2M) - 4\gamma e \sin(2\omega + 3M) + 4\gamma e \sin(2\omega + M)] \Delta\gamma, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta\beta = & [2 \sin(\omega + M) + 2e \sin(\omega + 2M) - 2e \sin \omega] \Delta\gamma + \\ & + [-2\gamma \sin(\omega + 2M) - 2\gamma \sin \omega] \Delta\varepsilon + \\ & + 2\gamma \cos(\omega + M) [\Delta\varepsilon + \Delta n (t - t_0) - \Delta\Omega], \end{aligned} \quad (3.3.23)$$



где коэффициенты в (3.3.22) выписаны с точностью до членов второго порядка, а в (3.3.23) — с точностью до членов первого порядка относительно  $e$  и  $\gamma$ .

Приведенные выражения служат для составления условных уравнений, соответствующих зафиксированным на различные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) расхождениям  $\Delta\lambda_k$ ,  $\Delta\beta_k$ . В качестве неизвестных принимаются искомые поправки  $\Delta n$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta\Omega$  к известным первоначальным значениям величин  $n$ ,  $e$ ,  $\lambda$ ,  $e$ ,  $\gamma$ ,  $\Omega$ .

При малых  $e$  и  $\gamma$  обычно используют в качестве неизвестных  $e\Delta n$  и  $\gamma\Delta\Omega$  вместо  $\Delta n$  и  $\Delta\Omega$  соответственно, чтобы коэффициенты при всех неизвестных в условных уравнениях имели один и тот же порядок величины.

Погрешности элементов орбиты сказываются сильнее всего на долготе  $\lambda$ , особенно если проводится сравнение теории и наблюдений на большом промежутке времени. Поэтому часто наклоном орбиты и расхождениями  $\Delta\beta$  в широте пренебрегают и составляют условные уравнения для  $\Delta n$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta e$ ,  $e\Delta\lambda$  только на основании зафиксированных расхождений  $\Delta\lambda$ .

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ И УЛУЧШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Запуск любого искусственного спутника Земли производится так, чтобы он совершал движение по заранее намеченной орбите. (Эта орбита выбирается в соответствии с преследуемыми при запуске целями.) Программа автоматического управления ракетой-носителем на активном участке движения составляется так, чтобы к моменту выхода на орбиту, т. е. к моменту окончания работы реактивных двигателей, космический аппарат находился в заранее намеченной точке пространства над Землей и имел заранее намеченную скорость, соответствующую выбранной орбите. В этой главе изложены основные способы определения орбит ИСЗ. Ряд дополнительных сведений читатель найдет в монографии [8] и статьях [9] — [11].

### § 4.01. Определение элементов орбит ИСЗ по положению и скорости в момент выхода на орбиту

Выберем прямоугольную систему координат  $x y z$ , начало которой  $O$  совпадает с центром Земли, плоскость  $x y$  — с плоскостью экватора, а ось  $Oz$  направлена к северному полюсу. Пусть в момент  $t_0$  ИСЗ находится в точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$  и имеет скорость  $V_0$  с компонентами  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ .

1) Большая полуось  $a$  геоцентрической эллиптической орбиты вычисляется по формуле

$$a = \frac{r_0}{2 - \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2}, \quad V_0 = |V_0|, \quad (3.4.01)$$

где  $r_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}$  — геоцентрическое расстояние ИСЗ,

$$V_c^2 = \frac{fM_T}{r_0}, \quad (3.4.02)$$

$fM_T$  — так называемая геоцентрическая гравитационная постоянная (см. ч. I, § 4.06), а  $V_c$  — круговая скорость на расстоянии  $r_0$  от центра Земли (см. ч. II, § 1.03).

2) Эксцентриситет  $e$  выражается по формулам

$$e^2 = \left[ \left( \frac{V_0}{V_c} \right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{r_0}{a} \left( \frac{V_0}{V_c} \right)^2 \cos^2 \varphi_0, \quad (3.4.03)$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0 V_0}, \quad (3.4.04)$$

где  $\varphi_0$  — угол между радиусом-вектором  $r_0$  и вектором скорости  $V_0$ .

В частности, если  $V_0 \perp r_0$  ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ), то

$$e = \left| \left( \frac{V_0}{V_c} \right)^2 - 1 \right|. \quad (3.4.05)$$

Формулу (3.4.03) можно записать также в виде

$$e^2 = e_0^2 + (1 - e_0^2) \cos^2 \varphi_0, \quad (3.4.06)$$

где  $e_0$  вычисляется по формуле (3.4.05) и представляет собой значение эксцентриситета орбиты в том случае, если  $r_0 \perp V_0$ .

3) Истинная аномалия  $v$  в момент  $t_0$  находится по формуле

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{p - r_0} \sqrt{\frac{p}{fM_T}}, \quad (3.4.07)$$

где

$$p = a(1 - e^2) = r_0 \left( \frac{V_0}{V_c} \right)^2 \sin^2 \varphi.$$

Числитель и знаменатель в формуле (3.4.07) имеют знаки синуса и косинуса  $v_0$  соответственно. Формулу (3.4.07) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0 - \left( \frac{V_0}{V_c} \right)^2}, \quad (3.4.08)$$

где угол  $\varphi_0$  определяется по формуле (3.4.04). При  $\cos \varphi_0 > 0$  ( $\varphi_0 < 90^\circ$ ) имеем  $0 < v_0 < 180^\circ$ , при  $\cos \varphi_0 < 0$  ( $\varphi_0 > 90^\circ$ ) имеем  $180^\circ < v_0 < 360^\circ$ , причем  $v_0$  отсчитывается от направления на перигей  $\Pi$  орбиты до  $r_0$  в направлении движения ИСЗ. В частности, если  $\varphi_0 = 90^\circ$ , то  $v_0 = 0$ , т. е. радиус-вектор  $r_0$  совпадает в момент выхода на орбиту с направлением на перигей.

4) Долгота восходящего узла орбиты  $\Omega$  и наклон  $i$  определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha \sin i \sin \Omega &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ \alpha \sin i \cos \Omega &= -(z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0), \\ \alpha \cos i &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.09)$$

где

$$\alpha = \sqrt{fM_T p}.$$

5) Угловое расстояние  $\omega$  перигея от узла орбиты находится по формуле

$$\omega = u_0 - v_0, \quad (3.4.10)$$

где

$$u_0 = \operatorname{arctg} \frac{z_0 \operatorname{cosec} i}{x_0 \cos \Omega + y_0 \sin \Omega}, \quad (3.4.11)$$

причем числитель и знаменатель в этой формуле имеют знаки синуса и косинуса  $u_0$  соответственно.

Фактическое положение ИСЗ в момент выхода на орбиту, а также величина и направление скорости всегда отклоняются от расчетных. Поэтому обязательно возникает задача об уточнении элементов орбиты ИСЗ по наблюдениям, для решения которой применяют обычно *метод дифференциального исправления орбит*.

#### § 4.02. Определение предварительных элементов орбиты ИСЗ по наблюдениям

Для вычисления элементов невозмущенной орбиты ИСЗ вообще достаточно трех наблюдений.

Пусть  $\alpha_k, \delta_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) — наблюдаемые топоцентрические экваториальные координаты спутника на моменты  $t_1, t_0, t_2$  соответственно. Пусть  $X_k, Y_k, Z_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) — известные геоцентрические экваториальные координаты пунктов наблюдения и  $\rho_k$  — неизвестные топоцентрические расстояния (от пункта наблюдения до спутника) на моменты  $t_1, t_0, t_2$  соответственно. Предполагается, что промежутки между моментами наблюдений малы по сравнению с периодом обращения спутника.

Вычисления можно выполнить по схеме, аналогичной той, которая указана в § 2.01, сохраняя те же обозначения.

Рассматриваются уравнения относительно топоцентрических расстояний,

$$\left. \begin{aligned} n_1 \lambda_1 \rho_1 - \lambda_0 \rho_0 + n_2 \lambda_2 \rho_2 &= -(n_1 X_1 - X_0 + n_2 X_2), \\ n_1 \mu_1 \rho_1 - \mu_0 \rho_0 + n_2 \mu_2 \rho_2 &= -(n_1 Y_1 - Y_0 - n_2 Y_2), \\ n_1 \nu_1 \rho_1 - \nu_0 \rho_0 + n_2 \nu_2 \rho_2 &= -(n_1 Z_1 - Z_0 + n_2 Z_2), \end{aligned} \right\} \quad (3.4.12)$$

где  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  — направляющие косинусы топоцентрических радиусов-векторов:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \cos \alpha_k \cos \delta_k, \quad \mu_k = \sin \alpha_k \cos \delta_k, \quad \nu_k = \sin \delta_k, \\ n_1 &= n_1^0 \chi_1, \quad n_2 = n_2^0 \chi_2, \quad n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \\ \chi_1 &= 1 + \frac{u_0}{6} (\tau_2^2 + 2\tau_1 \tau_2), \quad \chi_2 = 1 + \frac{u_0}{6} (\tau_1^2 + 2\tau_1 \tau_2), \\ u_0 &= r_0^{-3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.13)$$

$r_0$  — геоцентрическое расстояние спутника в момент  $t_0$ .

Уравнения (3.4.12) решаются методом последовательных приближений.

В первом приближении полагают  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ ,  $n_k = n_k^0$  и находят из уравнений (3.4.12) значения  $\rho_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_2$ . После этого находят в первом приближении геоцентрические координаты  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  и геоцентрические расстояния  $r_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ) по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \rho_k \lambda_k + X_k, \\ y_k &= \rho_k \mu_k + Y_k, \\ z_k &= \rho_k \nu_k + Z_k, \\ r_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.14)$$

Во втором приближении вычисляют  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  с полученным значением  $r_0$ , затем уточняют  $n_1$ ,  $n_2$  и снова решают уравнения (3.4.12) относительно  $\rho_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_2$ .

В следующем приближении можно вычислить  $n_1$ ,  $n_2$  по точным формулам

$$n_1 = n_1^0 \frac{\eta_0}{\eta_1}, \quad n_2 = n_2^0 \frac{\eta_0}{\eta_2},$$

где  $\eta_1$ ,  $\eta_0$ ,  $\eta_2$  — соответствующие отношения площадей эллиптических секторов и треугольников, заключенных между геоцентрическими радиусами-векторами  $r_1$ ,  $r_0$ ,  $r_2$  (см. § 2.01) и т. д.

После того как найдены достаточно точные значения топоцентрических расстояний, а также геоцентрических координат  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  ( $k = 1, 0, 2$ ), вычисляют элементы орбиты по двум геоцентрическим положениям (см. § 2.05)

Элементы предварительной орбиты спутника вычисляются, как правило, не вполне точно из-за ошибок наблюдений и из-за больших отклонений истинного движения спутника от невозможного эллиптического.

Наблюдения ИСЗ отличаются той особенностью, что моменты наблюдений фиксируются неточно (из-за быстрого видимого движения спутников на небесной сфере). В работе [11] рассматривается вопрос об определении орбиты по четырем и большему числу наблюдений с грубо известными моментами. В работе [9] рассматривается вопрос об определении элементов оскулирующей орбиты с одновременным учетом части возмущений.

Если проводятся радиолокационные наблюдения, позволяющие определить не только угловые координаты, но и расстояния (топоцентрические) до спутника, то можно вычислить геоцентрические координаты по формулам (3.4.14) и, следовательно, для вычисления элементов орбиты в принципе достаточно двух наблюдений.

### § 4.03. Улучшение орбит ИСЗ

Метод улучшения орбит ИСЗ применяется не только для того, чтобы уточнить элементы предварительной орбиты, но также для того, чтобы определить как можно более точные значения элементов оскулирующей орбиты на различные моменты времени. Как правило, применяют метод дифференциального исправления орбит (см. гл. 3). При этом используются, например, следующие системы элементов:

$$\Omega, \omega, i, \ln a, e, M_0, \quad (3.4.15)$$

$$\Omega, \omega, i, \ln a, e, M_0 + \omega, \quad (3.4.16)$$

$$\Omega, \omega, i, \tau, q, h = -\frac{1}{a}. \quad (3.4.17)$$

Система элементов (3.4.15) используется, если орбита имеет заметный, но не близкий к единице эксцентриситет; система (3.4.16) — если орбита имеет малый эксцентриситет; система (3.4.17) — если эксцентриситет орбиты близок к единице.

Производные от координат  $x, y, z$  по выписанным параметрам, с помощью которых составляются условные уравнения, приведены в § 3.02. В работе [10] рассматривается вопрос о составлении условных уравнений с учетом неточности фиксации моментов наблюдений.

Ввиду довольно значительных вековых возмущений элементов  $\Omega$  и  $\omega$  (см. ч. IV, § 8.01) целесообразно положить в условных уравнениях

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_0 + \Omega't, \quad \Delta\omega = \Delta\omega_0 + \omega't,$$

где  $\Omega', \omega'$  — вековые возмущения элементов  $\Omega, \omega$ , и рассматривать  $\Omega'$  и  $\omega'$  как неизвестные, подлежащие определению из условных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ III

1. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
2. Дубяго А. Д., Определение орбит, Гостехиздат, 1949.
3. Орлов А. Я., Орлов Б. А., Курс теоретической астрономии, Гостехиздат, 1940.
4. Strasske G., Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Berlin, 1929.
5. Баженов Г. М., Уч. зап. Харьковского ун-та 42, 17, 1952.
6. Crawford R. T., Determination of orbits of comets and asteroids, New-York, 1930.
7. Самойлова-Яхонтова Н. С., Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР, № 53, 447, 1944.
8. Escobal P. R., Methods of Orbit determination, Wiley and Sons, 1965.
9. Briggs R. E., Slowey J. W., Spec. Rept. Smithsonian Inst. Astroph. Obs. № 27, 1—8, 1959.
10. Куликов Д. К., Батраков Ю. В., Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР 7, 554, 1960.
11. Батраков Ю. В., Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР 7, 570, 1960.

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

## Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ  
ЗАДАЧИ  $n$  ТЕЛ В КООРДИНАТАХ

В этой главе приводятся различные формы дифференциальных уравнений движения задачи  $n$  тел, рассматриваемых как материальные точки, а также их первые интегралы. Подробные выводы можно найти в учебниках и монографиях [1] — [8].

## § 1.01. Уравнения абсолютного движения

Пусть имеется  $n$  материальных точек  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  с массами  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  соответственно, взаимно притягивающихся по закону всемирного тяготения. *Задача  $n$  тел состоит в нахождении и изучении всевозможных движений этой системы материальных точек.*

Если  $O\xi\eta\zeta$  — абсолютная прямоугольная система координат с началом в произвольно выбранной точке  $O$  и с неизменными направлениями осей,  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  — координаты точки  $P_i$ , а взаимное расстояние точек  $P_i$  и  $P_j$  есть

$$\Delta_{ij} = [(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2]^{1/2} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1),$$

то дифференциальные уравнения движения системы точек имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.01)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Функция  $U$  называется *силовой функцией* и выражается формулой

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (4.1.02)$$

где  $f$  — постоянная тяготения. В (4.1.02)  $i \neq j$ , на что указывает штрих при знаке суммы.

Уравнения (4.1.01) в развернутой форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= f \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= f \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= f \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.03)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1, j \neq i).$

Система (4.1.01) имеет порядок  $6n$ , поэтому для нахождения ее общего решения необходимо знать  $6n$  независимых первых интегралов. Известны 10 первых интегралов системы (4.1.01), содержащих алгебраические функции координат и их производных.

*Интегралы движения центра масс:*

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\eta}_i &= a_2, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i &= a_3, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \xi_i &= a_1 t + b_1, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \eta_i &= a_2 t + b_2, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \zeta_i &= a_3 t + b_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.04)$$

*Интегралы площадей:*

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= c_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.05)$$



*Интеграл живых сил* (интеграл энергии)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h; \quad (4.1.06)$$

в интегралах (4.1.04) — (4.1.06) величины  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, h$  — произвольные постоянные.

Интегралы (4.1.04) указывают на то, что центр масс системы движется прямолинейно и равномерно относительно абсолютной системы координат. Из (4.1.05) следует, что момент количества движения системы постоянен и по величине и по направлению. Интеграл (4.1.06) выражает постоянство полной энергии системы, так как функция  $(-U)$  — потенциальная энергия системы, а левая часть равенства представляет собой кинетическую энергию системы. Более подробно вопрос о существовании первых интегралов изложен в главе 2 части X.

Знание 10 первых интегралов позволяет понизить порядок системы (4.1.01) на 10 единиц, после чего получится система порядка  $6n - 10$ . Возможно понизить порядок системы еще на две единицы благодаря тому, что в уравнения движения время не входит явным образом и применима теорема Якоби о последнем множителе [10].

*Неизменяемая плоскость Лапласа* — это плоскость, перпендикулярная к моменту количества движения. Ее уравнение имеет вид

$$c_1 (\xi - \xi_0) + c_2 (\eta - \eta_0) + c_3 (\zeta - \zeta_0) = 0.$$

$\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  — координаты произвольной точки пространства (в качестве таковой можно взять центр масс системы).

### § 1.02. Уравнение Лагранжа — Якоби

В качественных исследованиях часто используется соотношение (см. [3])

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h^*, \quad (4.1.07)$$

называемое *уравнением Лагранжа — Якоби*. Здесь

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_i m_j \Delta_{ij}^2$$

есть момент инерции системы относительно центра масс,

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i, \quad h^* = h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2m};$$

$h^*$  называется *внутренней* или *барицентрической* энергией.

Имеет место следующий вывод об устойчивости движений механической системы. Если  $h^* > 0$ , то по крайней мере одно из взаимных расстояний между телами  $\Delta_{ij}$  неограниченно возрастает при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно, движения механической системы неустойчивы в смысле Лагранжа (см. ч. X, § 3.03). Если  $h^* \leq 0$ , то возможны как устойчивые, так и неустойчивые в смысле Лагранжа движения механической системы. Если система устойчива в смысле Лагранжа, то ее потенциальная энергия на бесконечном промежутке времени принимает бесконечное число раз значения, сколь угодно близкие к  $2h^*$ .

### § 1.03. Уравнения движения в барицентрических прямоугольных координатах

Пусть  $G$  — центр масс материальной системы, состоящей из  $n$  материальных точек  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ , а  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  — его прямоугольные координаты в абсолютной системе  $O\xi\eta\zeta$ , являющиеся линейными функциями времени  $t$ . Пусть  $\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i$  — барицентрические координаты точки  $P_i$ . Тогда дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi'_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad m_i \frac{d^2 \eta'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad m_i \frac{d^2 \zeta'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i} \\ &(i = 0, 1, \dots, n-1), \\ U &= \frac{1}{2} \int \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \\ \Delta_{ij} &= \sqrt{(\xi'_i - \xi'_j)^2 + (\eta'_i - \eta'_j)^2 + (\zeta'_i - \zeta'_j)^2}. \end{aligned} \right\} (4.1.08)$$

Очевидно, что интегралы движения центра масс удовлетворяются тождественно, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \xi'_i &= 0, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \eta'_i &= 0, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \zeta'_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\xi}'_i &= 0, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\eta}'_i &= 0, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\zeta}'_i &= 0. \end{aligned}$$

Интегралы площадей и живых сил имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\eta'_i \dot{\zeta}'_i - \zeta'_i \dot{\eta}'_i) &= c'_1, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\zeta'_i \dot{\xi}'_i - \xi'_i \dot{\zeta}'_i) &= c'_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\xi'_i \dot{\eta}'_i - \eta'_i \dot{\xi}'_i) &= c'_3, & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i [(\dot{\xi}'_i)^2 + (\dot{\eta}'_i)^2 + (\dot{\zeta}'_i)^2] &= U + h', \end{aligned}$$

но следует учесть, что координаты точек и их производные

связаны приведенными соотношениями. Другая форма интегралов уравнений движения в барицентрических координатах, полученная в результате понижения порядка системы на шесть единиц, дана в книге [1].

### § 1.04. Уравнения движения в координатах Якоби

Выберем следующим образом относительную систему координат:

1) проведем через точку  $P_0$  оси координат, параллельные абсолютным осям, и определим положение точки  $P_1$  в этой системе координатами  $x'_1, y'_1, z'_1$ ;

2) проведем через центр масс  $G_1$  точек  $P_0$  и  $P_1$  оси координат, параллельные предыдущим, и определим положение точки  $P_2$  относительно этой системы координат координатами  $x'_2, y'_2, z'_2$ ; и вообще,

3) определим положение точки  $P_k$  координатами  $x'_k, y'_k, z'_k$ , отсчитываемыми в прямоугольной системе координат с осями, параллельными предыдущим и проходящими через центр масс точек  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ) — точку  $G_{k-1}$ . Ради симметрии обозначений координаты точки  $P_0$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$  обозначим через  $x'_0, y'_0, z'_0$ .

Выбранные таким образом прямоугольные координаты называются *координатами Якоби* (см. [1], [3], [5]).

Введем величины  $\mu_i, \sigma_i$ , имеющие размерности массы и определяемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= m_0, \quad \mu_k = \frac{m_k \sigma_{k-1}}{\sigma_k}, \\ \sigma_k &= \sum_{j=0}^k m_j, \\ (k &= 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.09)$$

$\mu_i$  называются «приведенными массами».

Дифференциальные уравнения движения системы в координатах Якоби записываются в форме

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \frac{d^2 x'_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 y'_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 z'_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z'_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.10)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Силовая функция  $U$  выражается формулой (4.1.02), но взаимные расстояния  $\Delta_{ij}$  должны быть выражены через координаты Якоби.

Взаимное расстояние  $\Delta_{ij}$  при  $j > i$  выражается через координаты Якоби с помощью формулы

$$\Delta_{ij}^2 = \left( x_j' - x_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k x_k'}{\sigma_k} \right)^2 + \left( y_j' - y_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k y_k'}{\sigma_k} \right)^2 + \left( z_j' - z_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k z_k'}{\sigma_k} \right)^2 \quad (j > i). \quad (4.1.11)$$

Система (4.1.10) имеет четыре первых интеграла (интегралы площадей и интеграл энергии):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (y_i' z_i' - z_i' y_i') &= c_1', \\ \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (z_i' x_i' - x_i' z_i') &= c_2', \\ \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (x_i' y_i' - y_i' x_i') &= c_3', \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) &= U + h', \end{aligned} \right\} \quad (4.1.12)$$

где  $c_1'$ ,  $c_2'$ ,  $c_3'$ ,  $h'$  — произвольные постоянные интегрирования.

### § 1.05. Уравнения относительного движения в прямоугольных координатах

Пусть выбрана прямоугольная система координат  $P_0 xyz$  с началом в точке  $P_0$  и с осями, параллельными осям системы  $G\xi'\eta'\zeta'$  (§ 1.03). Такая система не имеет общего названия, однако если точка  $P_0$  изображает Солнце, то система называется *гелиоцентрической*. Аналогично можно говорить о *геоцентрической*, *сатурноцентрической* и вообще о планетоцентрической системах. (Подробнее см. ч. I, гл. 1.)

Пусть координаты точки  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) в выбранной системе суть  $x_i, y_i, z_i$ . Новые координаты выражаются через барицентрические координаты с помощью равенств

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i' - \xi_0', & y_i &= \eta_i' - \eta_0', & z_i &= \zeta_i' - \zeta_0' \\ & (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

В этих переменных уравнения движения точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i) x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i) y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i) z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.14)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Функции  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) называются *возмущающими* или *пертурбационными функциями*:

$$\left. \begin{aligned} R_i &= f \sum_{j=1}^{n-1} m_j R_{ij}, \quad j \neq i, \\ R_{ij} &= \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}, \\ \Delta_{ij}^2 &= (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2, \\ r_j^2 &= x_j^2 + y_j^2 + z_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.15)$$

Формулы перехода от координат  $x, y, z$  к барицентрическим координатам  $\xi', \eta', \zeta'$  имеют такой вид:

$$\xi'_i = x_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n-1} m_j x_j,$$

$$\eta'_i = y_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n-1} m_j y_j,$$

$$\zeta'_i = z_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n-1} m_j z_j$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i.$$

Известные интегралы уравнений (4.1.14) имеют вид:

*интегралы площадей:*

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i y_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i - \sum_{i=1}^{n-1} m_i z_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{y}_i \right] = c'_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i z_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{x}_i - \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i \right] = c'_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{y}_i - \sum_{i=1}^{n-1} m_i y_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{x}_i \right] = c'_3;$$

*интеграл живых сил:*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) -$$

$$- \frac{1}{2m} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{x}_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{y}_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i \right)^2 \right] = U + h'.$$

### § 1.06. Уравнения движения в идеальных прямоугольных координатах Ганзена

Пусть материальная точка  $P$  движется под действием ньютоновского притяжения материальной точки  $P_0$  и возмущающего ускорения, порождаемого возмущающей функцией  $R$ .

Тогда в прямоугольной системе координат  $P_0xyz$  уравнения движения точки  $P$  имеют вид (4.1.14) (опущен индекс « $i$ »)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\dot{f}(m_0 + m)x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\dot{f}(m_0 + m)y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\dot{f}(m_0 + m)z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

*Идеальными координатами точки  $P_0$  по Ганзену называются* прямоугольные координаты  $X, Y, Z$ , связанные с прежними прямоугольными координатами  $x, y, z$  формулами

$$X = \alpha(t)x + \alpha_1(t)y + \alpha_2(t)z,$$

$$Y = \beta(t)x + \beta_1(t)y + \beta_2(t)z,$$

$$Z = \gamma(t)x + \gamma_1(t)y + \gamma_2(t)z,$$

а их производные — аналогичными равенствами

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha(t) \dot{x} + \alpha_1(t) \dot{y} + \alpha_2(t) \dot{z}, \\ \dot{Y} &= \beta(t) \dot{x} + \beta_1(t) \dot{y} + \beta_2(t) \dot{z}, \\ \dot{Z} &= \gamma(t) \dot{x} + \gamma_1(t) \dot{y} + \gamma_2(t) \dot{z}.\end{aligned}$$

Направляющие косинусы  $\alpha, \dots, \gamma_2$  удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1, & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0, \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 1, & \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 &= 0, \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0\end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, & \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, & \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (4.1.16)$$

Систем идеальных координат — бесконечное множество, поэтому для выбора определенной системы необходимо наложить дополнительное условие. В качестве такого условия Ганзен взял равенство

$$\gamma(t)x + \gamma_1(t)y + \gamma_2(t)z \equiv 0, \quad (4.1.17)$$

т. е.

$$Z \equiv 0.$$

Координаты  $X, Y, 0$  называются *ганзеновскими*. Очевидно, что во все время движения точки  $P$  плоскость  $P_0XY$  проходит через радиус-вектор  $r$  точки  $P$ .

В координатах Ганзена уравнения движения имеют вид (см. [3])

$$\left. \begin{aligned}\ddot{X} + \frac{l(m_0 + m)X}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial X}, \\ \ddot{Y} + \frac{l(m_0 + m)Y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial Y}, \\ r^2 &= X^2 + Y^2,\end{aligned} \right\} \quad (4.1.18)$$

$$\left. \begin{aligned}(X\dot{Y} - Y\dot{X}) \frac{\dot{\alpha}_2}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}} &= -Y \frac{\partial R}{\partial Z}, \\ (X\dot{Y} - Y\dot{X}) \frac{\dot{\beta}_2}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}} &= X \frac{\partial R}{\partial Z}.\end{aligned} \right\} \quad (4.1.19)$$

Возмущающая функция  $R$  должна быть выражена в виде явной функции координат  $X$  и  $Y$ .

Эти уравнения определяют  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_2(t)$ , после чего можно найти  $\gamma_2(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\beta_1(t)$ .

Переход к первоначальным координатам осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha(t) X(t) + \beta(t) Y(t), \\y(t) &= \alpha_1(t) X(t) + \beta_1(t) Y(t), \\z(t) &= \alpha_2(t) X(t) + \beta_2(t) Y(t).\end{aligned}$$

Как видно из условия (4.1.17), координатная плоскость  $P_0XY$  совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты точки  $P$  (см. § 3.02).

В принципе можно ввести идеальные координаты и в задаче  $n$  ( $n > 2$ ) тел, однако практически это малоцелесообразно.

### § 1.07. Уравнения абсолютного движения в цилиндрических координатах

Пусть цилиндрические координаты точки  $P_i$  суть  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Формулы перехода от цилиндрических к абсолютным координатам  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  имеют вид

$$\xi_i = \rho_i \cos \lambda_i, \quad \eta_i = \rho_i \sin \lambda_i, \quad \zeta_i = \xi_i.$$

Здесь  $\rho_i$  — проекция радиуса-вектора  $r_i$  точки  $P_i$  на координатную плоскость  $O\xi\eta$ ,  $\lambda_i$  — долгота точки  $P_i$ , т. е. угол между положительным направлением оси  $O\xi$  и  $\rho_i$ .

Уравнения движения в абсолютных цилиндрических координатах имеют вид

$$\left. \begin{aligned}m_i (\ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\lambda}_i^2) &= \frac{\partial U}{\partial \rho_i}, \\m_i \frac{d}{dt} (\rho_i^2 \dot{\lambda}_i) &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_i}, \\m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\(i = 0, 1, \dots, n-1), \\U &= \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \\ \Delta_{ij}^2 &= \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\lambda_j - \lambda_i) + (\xi_j - \xi_i)^2.\end{aligned} \right\} (4.1.20)$$



В развернутом виде правые части уравнений (4.1.20) выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho_i} &= f m_i \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\rho_j \cos(\lambda_j - \lambda_i) - \rho_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} &= f m_i \rho_i \sum_{j=0}^{n-1} m_j \rho_j \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_i)}{\Delta_{ij}^3}, \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} &= f m_i \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.21)$$

( $j \neq i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Система (4.1.20) написана в абсолютных координатах, поэтому допускает 10 известных первых интегралов.

*Интегралы движения центра масс:*

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \cos \lambda_i - \rho_i \dot{\lambda}_i \sin \lambda_i) &= a_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \sin \lambda_i + \rho_i \dot{\lambda}_i \cos \lambda_i) &= a_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i &= a_3, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \rho_i \cos \lambda_i &= a_1 t + b_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \rho_i \sin \lambda_i &= a_2 t + b_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \zeta_i &= a_3 t + b_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.22)$$

*Интегралы площадей:*

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i [\rho_i \dot{\zeta}_i \sin \lambda_i - \zeta_i (\dot{\rho}_i \sin \lambda_i + \rho_i \dot{\lambda}_i \cos \lambda_i)] &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i [\zeta_i (\dot{\rho}_i \cos \lambda_i - \rho_i \dot{\lambda}_i \sin \lambda_i) - \rho_i \dot{\zeta}_i \cos \lambda_i] &= c_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \rho_i^2 \dot{\lambda}_i &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.23)$$

Интеграл энергии:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\lambda}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h. \quad (4.1.24)$$

### § 1.08. Уравнения относительного движения в цилиндрических координатах

Формулы перехода от относительных прямоугольных координат  $x_i, y_i, z_i$  к относительным цилиндрическим координатам  $\rho_i, \lambda_i, z_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \lambda_i, & y_i &= \rho_i \sin \lambda_i, & z_i &= z_i \\ (i &= 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Уравнения движения точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  относительно точки  $P_0$  записываются следующим образом (см. [1]):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\lambda}_i^2 &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d}{dt} (\rho_i^2 \dot{\lambda}_i) &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i}, \\ \ddot{z}_i &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.25)$$

где

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + R_i, \quad (4.1.26)$$

$$R_i = f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left[ \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\rho_i \rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + z_i z_j}{(\rho_i^2 + z_i^2)^{3/2}} \right], \quad (4.1.27)$$

$$r_i^2 = \rho_i^2 + z_i^2, \quad (4.1.28)$$

$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (z_i - z_j)^2. \quad (4.1.29)$$

*Интегралы площадей* в относительных цилиндрических оор-  
динатах:

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n-1} m_i [\rho_i \dot{z}_i \sin \lambda_i - z_i (\dot{\rho}_i \sin \lambda_i + \rho_i \dot{\lambda}_i \cos \lambda_i)] - \\
 & \quad - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i \rho_i \sin \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} m_i z_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \sin \lambda_i + \rho_i \dot{\lambda}_i \cos \lambda_i) \right] = c'_1, \\
 & \sum_{i=1}^{n-1} m_i [z_i (\dot{\rho}_i \cos \lambda_i - \rho_i \dot{\lambda}_i \sin \lambda_i) - \rho_i \dot{z}_i \cos \lambda_i] - \\
 & \quad - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i z_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \cos \lambda_i - \rho_i \dot{\lambda}_i \sin \lambda_i) - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \rho_i \cos \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i \right] = c'_2, \\
 & \sum_{i=1}^{n-1} m_i \rho_i^2 \dot{\lambda}_i - \\
 & \quad - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i \rho_i \cos \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \sin \lambda_i + \rho_i \dot{\lambda}_i \cos \lambda_i) - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \rho_i \sin \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \cos \lambda_i - \rho_i \dot{\lambda}_i \sin \lambda_i) \right] = c'_3,
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.30)$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i.$$

*Интеграл живых сил:*

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\lambda}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \frac{1}{2m} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \cos \lambda_i - \rho_i \dot{\lambda}_i \sin \lambda_i) \right]^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{\rho}_i \sin \lambda_i + \rho_i \dot{\lambda}_i \cos \lambda_i) \right]^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i \right)^2 \right\} = U + h',
 \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

где  $c'_1$ ,  $c'_2$ ,  $c'_3$ ,  $h'$  — произвольные постоянные.

### § 1.09. Уравнения абсолютного движения в сферических координатах

Перейдем от абсолютных прямоугольных координат  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  к сферическим координатам по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \\ \eta_i &= r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \\ \zeta_i &= r_i \sin \varphi_i \\ (i &= 0, 1, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.32)$$

где  $r_i$  — радиус-вектор точки  $P_i$ ,  $\lambda_i$  — долгота точки  $P_i$ ,  $\varphi_i$  — угол между радиусом-вектором  $r_i$  и плоскостью  $O\xi\eta$ .

В абсолютных сферических координатах уравнения движения системы имеют такой вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} m_i(\ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 - r_i\dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i) &= \frac{\partial U}{\partial r_i}, \\ m_i \left[ \frac{d}{dt}(r_i^2 \dot{\varphi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i^2 \sin \varphi_i \cos \varphi_i \right] &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \\ m_i \frac{d}{dt}(r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \\ (i &= 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.33)$$

Силовая функция равна

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

где

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \gamma_{ij}, \quad (4.1.34)$$

$$\cos \gamma_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j), \quad (4.1.35)$$

а  $\gamma_{ij}$  — угол, образованный радиусами-векторами  $r_i$  и  $r_j$ .

Система дифференциальных уравнений движения  $n$  тел (4.1.33) имеет 10 известных первых интегралов.

*Интегралы движения центра масс:*

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \cos \lambda_i - r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i) &= a_1, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \sin \lambda_i + r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i) &= a_2, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i (r_i \sin \varphi_i + r_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i) &= a_3, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i &= a_1 t + b_1, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i &= a_2 t + b_2, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i \sin \varphi_i &= a_3 t + b_3.
 \end{aligned} \right\} (4.1.36)$$

*Интегралы площадей:*

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i^2 (\dot{\varphi}_i \sin \lambda_i - \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \lambda_i) &= c_1, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i^2 (\dot{\varphi}_i \cos \lambda_i + \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \sin \lambda_i) &= -c_2, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i &= c_3.
 \end{aligned} \right\} (4.1.37)$$

*Интеграл энергии:*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + r_i^2 \dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i) = U + h. \quad (4.1.38)$$

Как и раньше,  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, h$  — произвольные постоянные.

### § 1.10. Уравнения относительного движения в сферических координатах

Пусть точка  $P_0$  является началом системы координат  $P_0xyz$ . Введем сферические координаты  $r_i, \lambda_i, \varphi_i$  ( $r_i$  — расстояние точки  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) от точки  $P_0$ ,  $\lambda_i$  — долгота точки  $P_i$ , т. е. угол, образованный положительным направлением оси  $P_0x$

и проекцией  $r_i$  на плоскость  $P_0xy$ ,  $\varphi_i$  — угол между  $r_i$  и плоскостью  $P_0xy$ ).

Формулы преобразования координат будут

$$\left. \begin{aligned} x_i &= r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \\ y_i &= r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \\ z_i &= r_i \sin \varphi_i \\ (i &= 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.39)$$

Уравнения движения точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  относительно точки  $P_0$  в координатах  $r, \varphi, \lambda$  имеют следующий вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 - r_i \dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial r_i}, \\ \frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\varphi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi_i}, \\ \frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i} \\ (i &= 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cos \varphi_{ij}}{r_j^2} \right), \\ \Delta_{ij}^2 &= r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \varphi_{ij}, \\ \cos \varphi_{ij} &= \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.41)$$

Четыре первых интеграла системы (4.1.40) (три интеграла площадей и интеграл энергии) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i^2 (\dot{\varphi}_i \sin \lambda_i - \dot{\lambda}_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i) - \\ - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \sin \varphi_i + r_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i \sin \varphi_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i - \right. \\ \left. - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \sin \lambda_i + r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i) \right] = c'_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.42)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i^2 (\dot{\varphi}_i \cos \lambda_i + \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \sin \lambda_i) + \\
& \quad + \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i \sin \varphi_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i - \right. \\
& \quad \left. - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \cos \lambda_i - r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \sin \varphi_i + r_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i) \right] = -c'_2, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i - \\
& \quad - \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i - \right. \\
& \quad \left. - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \sin \lambda_i + r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i - \right. \\
& \quad \left. - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \cos \lambda_i - r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i) \right] = c'_3, \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + r_i^2 \dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i) - \\
& \quad - \frac{1}{2m} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \cos \lambda_i - r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i) \right]^2 + \right. \\
& \quad + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i - r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \sin \lambda_i + \right. \\
& \quad \left. + r_i \dot{\lambda}_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i) \right]^2 + \\
& \quad \left. + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\dot{r}_i \sin \varphi_i + r_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i) \right]^2 \right\} = U + h',
\end{aligned} \tag{4.1.42}$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i.$$

### § 1.11. Уравнения движения в полярных координатах Ганзена

Назовем полярные координаты  $r$  и  $\omega$  в плоскости оскулирующей орбиты точки  $P$  полярными координатами Ганзена (рис. 62).

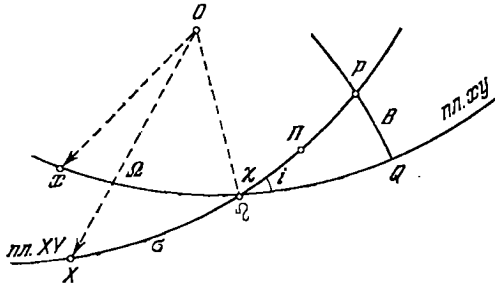


Рис. 62. Идеальные координаты Ганзена. Пл.  $xy$ —основная координатная плоскость; пл.  $XY$ —плоскость оскулирующей орбиты;  $\Pi$ —перигентр оскулирующей орбиты;  $x\Omega = \Omega$ ;  $X\Omega = \sigma$ ;  $X\Pi = \chi$ ;  $i$ —наклон;  $XP = \omega$ —долгота точки  $P$  в плоскости  $XY$ ;  $xQ = L$ —долгота точки  $P$  в плоскости  $xy$ ;  $PQ = B$ —широта точки  $P$ ;  $O\Omega$ —линия узлов.

Связь между идеальными (см. § 1.06) и полярными координатами Ганзена дается формулами

$$X = r \cos \omega, \quad Y = r \sin \omega.$$

В полярных координатах  $r$  и  $\omega$  уравнения движения точки  $P$  имеют вид [3]

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\omega}^2 + \frac{f(m_0 + m)}{r^2} &= \frac{\partial R}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\omega}) &= \frac{\partial R}{\partial \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.43)$$

Если обозначить через

$$h = r^2\dot{\omega} \doteq XY - Y\dot{X},$$

то второе уравнение (4.1.43) запишется следующим образом:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \omega}.$$

Если  $R \equiv 0$ , то уравнения (4.1.43) описывают невозмущенное кеплеровское движение и их общее решение известно (см. ч. II).



Направляющие косинусы ганзеновской системы координат относительно первоначальной системы  $P_0xyz$  находятся из уравнений

$$\frac{\dot{\alpha}_2}{\gamma_2} = -\frac{Y}{h} \frac{\partial R}{\partial Z},$$

$$\frac{\dot{\beta}_2}{\gamma_2} = \frac{X}{h} \frac{\partial R}{\partial Z},$$

а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  определяются из соотношений (4.1.16).

Окончательные формулы для гелиоцентрических прямоугольных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  планеты  $P$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha r \cos \omega + \beta r \sin \omega, \\ y &= \alpha_1 r \cos \omega + \beta_1 r \sin \omega, \\ z &= \alpha_2 r \cos \omega + \beta_2 r \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.44)$$

Формулы (4.1.44) содержат семь произвольных постоянных, но две из них характеризуют положение оси  $P_0X$  в плоскости оскулирующей орбиты  $P_0XY$ , поэтому одной из них можно придать фиксированное значение.

### § 1.12. Уравнения Клеро — Лапласа

Введем вместо относительных цилиндрических координат  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $z_i$  новые переменные  $u_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $s_i$  (переменные Клеро — Лапласа) по формулам

$$u_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad \lambda_i = \lambda_i, \quad s_i = \frac{z_i}{\rho_i}.$$

Если в качестве независимой переменной взята одна из долгот  $\lambda_k$ , то уравнения движения системы в переменных Клеро — Лапласа будут иметь вид (см. [1], [3])

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_i}{d\lambda_k^2} + \left( \frac{d\lambda_i}{d\lambda_k} \right)^2 u_i &= U_i, \\ \frac{d^2 s_i}{d\lambda_k^2} + \left( \frac{d\lambda_i}{d\lambda_k} \right)^2 s_i &= S_i, \\ \frac{d^2 \lambda_i}{d\lambda_k^2} &= L_i \end{aligned} \right\} \quad (4.1.45)$$

( $i \neq k$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Для функций  $U_i$ ,  $S_i$ ,  $L_i$  Клеро и Лапласом выведены формулы

$$\left. \begin{aligned} U_i &= -\frac{u_i^2}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ P_i + u_k^2 \left[ \frac{\Lambda_k}{u_i^2} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda_k} \left( \frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{du_i}{d\lambda_k} \right\}, \\ S_i &= -\frac{u_i}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ P_i s_i - Z_i + u_k^2 \left[ \frac{\Lambda_k}{u_i} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda_k} \left( \frac{u_k^2}{u_i} \right) \right] \frac{ds_i}{d\lambda_k} \right\}, \\ L_i &= \frac{u_i^2}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ \Lambda_i - u_k^2 \left[ \frac{\Lambda_k}{u_i^2} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda_k} \left( \frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{d\lambda_i}{d\lambda_k} \right\} \quad (i \neq k). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.46)$$

Вспомогательная функция  $\Gamma_k$  определяется дифференциальным уравнением

$$\Gamma_k \frac{d\Gamma_k}{d\lambda_k} = \frac{\Lambda_k}{u_k^2}.$$

Функции  $P_i$ ,  $\Lambda_i$ ,  $Z_i$ , входящие в соотношения (4.1.46), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_i &= -\frac{f(m_0 + m_i) u_i^2}{(1 + s_i^2)^{3/2}} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left[ \frac{u_i \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{u_i u_j \Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^2 \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right], \\ Z_i &= -\frac{f(m_0 + m_i) s_i u_i^2}{(1 + s_i^2)^{3/2}} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left[ \frac{u_i s_j - u_j s_i}{u_i u_j \Delta_{ij}^3} - \frac{s_j u_j^2}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right], \\ \Lambda_i &= -\frac{f}{u_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{u_j} \left[ \frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^3}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right] \sin(\lambda_i - \lambda_j), \\ \Delta_{ij}^2 &= \frac{u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (u_i s_j - u_j s_i)^2}{u_i^2 u_j^2}. \end{aligned}$$

Если уравнения (4.1.45) проинтегрированы, т. е.  $u_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $s_i$  известны как функции долготы  $\lambda_k$ , то для нахождения их зависимости от времени  $t$  следует найти  $\lambda_k(t)$  из уравнения

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = u_k^2 \Gamma_k. \quad (4.1.47)$$

### § 1.13. Общее правило составления канонических уравнений

Пусть механическая система, имеющая  $k$  степеней свободы, движется в потенциальном поле с силовой функцией  $U$ . Тогда ее движения описываются  $k$  обобщенными (лагранжевыми) координатами  $q_1, q_2, \dots, q_k$  и уравнения Лагранжа второго рода [9]

для этой механической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (4.1.48)$$

где  $T$  — кинетическая энергия механической системы,  $U$  зависит от  $q_1, q_2, \dots, q_k, t$ .

Система (4.1.48) представляет собой систему  $k$  дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. ее общий порядок равен  $2k$ . Различными способами ее можно привести к системе  $2k$  дифференциальных уравнений первого порядка, но наиболее удобной и полезной формой является так называемая *каноническая* или *гамильтонова* форма:

Изложим правило составления канонических уравнений.

Наряду с  $k$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_k$  введем в рассмотрение  $k$  обобщенных импульсов  $p_1, p_2, \dots, p_k$  по формулам

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (4.1.49)$$

Переменные  $q_1, q_2, \dots, q_k; p_1, p_2, \dots, p_k$  называются *каноническими*.

Разрешая уравнения (4.1.49) относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , получим последние в виде функций обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени  $t$ :

$$\dot{q}_i = \Psi_i(q_1, q_2, \dots, q_k; p_1, p_2, \dots, p_k; t). \quad (4.1.50)$$

Составим характеристическую функцию (*функцию Гамильтона*)  $H$ , равную

$$H(q_1, q_2, \dots, q_k; p_1, p_2, \dots, p_k; t) = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - T - U, \quad (4.1.51)$$

в которой обобщенные скорости  $\dot{q}_i$ , входящие в первую сумму и в выражение для кинетической энергии, заменены с помощью (4.1.50).

Определение. *Канонической, или гамильтоновой, системой дифференциальных уравнений* называется система

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (4.1.52)$$

Каноническая система дифференциальных уравнений имеет порядок  $2k$  и эквивалентна системе уравнений Лагранжа

(4.1.48). Если  $H$  не зависит явно от времени  $t$ , то система (4.1.52) имеет первый интеграл

$$H(q_1, q_2, \dots, q_k; p_1, p_2, \dots, p_k) = h, \quad (4.1.53)$$

называемый *интегралом энергии*. В этом случае  $H$  представляет собой полную энергию механической системы,  $h$  — произвольная постоянная.

Из изложенного правила следует, что движение механической системы может быть описано бесконечным множеством канонических уравнений вида (4.1.52). Все определяется выбором лагранжевых координат  $q_1, q_2, \dots, q_k$ .

### § 1.14. Первая каноническая форма уравнений абсолютного движения

Примем абсолютные прямоугольные координаты  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) в качестве лагранжевых координат  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 3n$ ), положив

$$\xi_i = q_{3i+1}, \quad \eta_i = q_{3i+2}, \quad \zeta_i = q_{3i+3} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

а для масс точек  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  введем обозначения

$$m_i = m_{3i+1}^* = m_{3i+2}^* = m_{3i+3}^* \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

В этих обозначениях кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j^* \dot{q}_j^2.$$

Обобщенные импульсы даются равенствами

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = m_j^* \dot{q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3n).$$

В канонических переменных  $p_j$  и  $q_j$  (мы их называем абсолютными, так как они связаны с абсолютными прямоугольными координатами) уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, 3n),$$

где гамильтониан равен

$$H(p_1, \dots, p_{3n}; q_1, \dots, q_{3n}) = T(p_1, \dots, p_{3n}) - U(q_1, \dots, q_{3n}), \quad (4.1.54)$$

причём

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} \frac{p_j^2}{m_j}, \quad U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

$$\Delta_{ij}^2 = (q_{3i+1} - q_{3i+1})^2 + (q_{3i+2} - q_{3i+2})^2 + (q_{3i+3} - q_{3i+3})^2 \\ (i, j=0, 1, \dots, n-1).$$

Система канонических уравнений имеет 10 известных первых интегралов.

*Интегралы движения центра масс:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{3i+1} = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} (m_{3i+1}^* q_{3i+1} - t p_{3i+1}) = b_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} p_{3i+2} = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n-1} (m_{3i+2}^* q_{3i+2} - t p_{3i+2}) = b_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} p_{3i+3} = a_3, \quad \sum_{i=0}^{n-1} (m_{3i+3}^* q_{3i+3} - t p_{3i+3}) = b_3.$$

*Интегралы площадей:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (q_{3i+2} p_{3i+3} - q_{3i+3} p_{3i+2}) = c_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} (q_{3i+3} p_{3i+1} - q_{3i+1} p_{3i+3}) = c_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} (q_{3i+1} p_{3i+2} - q_{3i+2} p_{3i+1}) = c_3.$$

*Интеграл энергии:*

$$H = h.$$

### § 1.15. Вторая каноническая форма уравнений абсолютного движения

Примем абсолютные цилиндрические координаты  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\zeta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) в качестве лагранжевых координат. Тогда соответствующие им обобщенные импульсы  $P_i$ ,  $\Lambda_i$ ,  $Z_i$  выражаются формулами

$$P_i = m_i \dot{\rho}_i, \quad \Lambda_i = m_i \rho_i^2 \dot{\lambda}_i, \quad Z_i = m_i \dot{\zeta}_i \quad (4.1.55) \\ (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

В новых переменных уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_i}, & \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda_i}, & \frac{d\Lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial Z_i}, & \frac{dZ_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.56)$$

$$(i=0, 1, \dots, n-1),$$

где

$$\begin{aligned} H &= T - U, \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{m_i} \left[ P_i^2 + \frac{\Lambda_i^2}{\rho_i^2} + Z_i^2 \right], \\ U &= \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \\ \Delta_{ij}^2 &= \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (\xi_i - \xi_j)^2. \end{aligned}$$

Известные десять первых интегралов системы (4.1.56) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \left( P_i \cos \lambda_i - \frac{\sin \lambda_i}{\rho_i} \Lambda_i \right) &= a_1, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \rho_i \cos \lambda_i &= a_1 t + b_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left( P_i \sin \lambda_i + \frac{\cos \lambda_i}{\rho_i} \Lambda_i \right) &= a_2, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \rho_i \sin \lambda_i &= a_2 t + b_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} Z_i &= a_3, & \sum_{i=0}^{n-1} m_i \xi_i &= a_3 t + b_3, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \rho_i Z_i \sin \lambda_i - \xi_i \left( P_i \sin \lambda_i + \frac{\cos \lambda_i}{\rho_i} \Lambda_i \right) \right] &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \xi_i \left( P_i \cos \lambda_i - \frac{\sin \lambda_i}{\rho_i} \Lambda_i \right) - \rho_i Z_i \cos \lambda_i \right] &= c_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i &= c_3, \end{aligned}$$

$$H(P, \Lambda, Z; \rho, \lambda, \xi) = h.$$

### § 1.16. Третья каноническая форма уравнений абсолютного движения

Рассмотрим в качестве лагранжевых координат абсолютные сферические координаты  $r_i, \lambda_i, \varphi_i$  [см. формулы (4.1.32)]. Тогда соответствующие им обобщенные импульсы  $R_i, \Lambda_i, \Phi_i$  выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i, \\ \Lambda_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i} = m_i r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i, \\ \Phi_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i \end{aligned} \right\} \quad (4.1.57)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1).$

В этих переменных дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial R_i}, & \frac{dR_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda_i}, & \frac{d\Lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Phi_i}, & \frac{d\Phi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.58)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1).$

Гамильтониан задается равенствами

$$H = T - U,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{m_i} \left( R_i^2 + \frac{\Lambda_i^2}{r_i^2 \cos^2 \varphi_i} + \frac{\Phi_i^2}{r_i^2} \right),$$

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \gamma_{ij},$$

$$\cos \gamma_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j).$$

Так как дифференциальные уравнения (4.1.58) описывают абсолютное движение системы материальных точек, то она имеет

десять известных первых интегралов:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \left( R_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i - \frac{\sin \varphi_i \cos \lambda_i}{r_i} \Phi_i - \frac{\sin \lambda_i}{r_i \cos \varphi_i} \Lambda_i \right) &= a_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left( R_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i - \frac{\sin \varphi_i \sin \lambda_i}{r_i} \Phi_i + \frac{\cos \lambda_i}{r_i \cos \varphi_i} \Lambda_i \right) &= a_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left( R_i \sin \varphi_i + \frac{\cos \varphi_i}{r_i} \Phi_i \right) &= a_3; \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i &= a_1 t + b_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i &= a_2 t + b_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i r_i \sin \varphi_i &= a_3 t + b_3, \\ \sum_{i=0}^{n-1} (\Phi_i \sin \lambda_i - \Lambda_i \operatorname{tg} \varphi_i \cos \lambda_i) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} (\Phi_i \cos \lambda_i + \Lambda_i \operatorname{tg} \varphi_i \cos \lambda_i) &= -c_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i &= c_3, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{m_i} \left( R_i^2 + \frac{\Phi_i^2}{r_i^2} + \frac{\Lambda_i^2}{r_i^2 \cos^2 \varphi_i} \right) &= U + h. \end{aligned}$$

### § 1.17. Первая каноническая форма уравнений относительного движения

Примем координаты Якоби  $x'_i, y'_i, z'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) (см. § 1.04) в качестве лагранжевых координат  $q'_j$  и введем обозначения

$$x'_i = q'_{3i-2}, \quad y'_i = q'_{3i-1}, \quad z'_i = q'_{3i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.1.59)$$

а величины  $\mu_i$  [см. (4.1.09)] обозначим следующим образом:

$$\mu_i = \mu_{3i-2}^* = \mu_{3i-1}^* = \mu_{3i}^* \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Тогда кинетическая энергия системы будет равна

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n-3} \mu_j^* \dot{q}'_j{}^2,$$



поэтому обобщенные импульсы будут равны

$$p'_j = \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}'_j} = \mu_j^* \dot{q}'_j.$$

В канонических переменных  $p'_j$  и  $q'_j$  дифференциальные уравнения относительного движения имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq'_j}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p'_j}, \\ \frac{dp'_j}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q'_j} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.60)$$

( $j = 1, 2, \dots, 3n - 3$ );

$$\begin{aligned} H'(p'_1, p'_2, \dots, p'_{3n-3}; q'_1, q'_2, \dots, q'_{3n-3}) &= \\ &= T'(p'_1, p'_2, \dots, p'_{3n-3}) - U(q'_1, q'_2, \dots, q'_{3n-3}); \end{aligned}$$

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n-3} \frac{p_j'^2}{\mu_j^*}, \quad U = \frac{1}{2} \int \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^2 &= \left( q'_{3j-2} - q'_{3i-2} + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k q'_{3k-2}}{\sigma_k} \right)^2 + \\ &+ \left( q'_{3j-1} - q'_{3i-1} + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k q'_{3k-1}}{\sigma_k} \right)^2 + \left( q'_{3j} - q'_{3i} + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k q'_{3k}}{\sigma_k} \right)^2. \end{aligned}$$

( $j > i$ ).

Четыре известных первых интеграла системы (4.1.56) выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (q'_{3i-1} p'_{3i} - q'_{3i} p'_{3i-1}) &= c'_1, \\ \sum_{i=1}^{n-1} (q'_{3i} p'_{3i-2} - q'_{3i-2} p'_{3i}) &= c'_2, \\ \sum_{i=1}^{n-1} (q'_{3i-2} p'_{3i-1} - q'_{3i-1} p'_{3i-2}) &= c'_3, \\ H' &= h'. \end{aligned}$$

### § 1.18. Вторая каноническая форма уравнений относительного движения

Вместо прямоугольных координат Якоби  $x'_i, y'_i, z'_i$  (§ 1.04) введем цилиндрические координаты  $\rho'_i, \lambda'_i, \zeta'_i$  по формулам

$$x'_i = \rho'_i \cos \lambda'_i, \quad y'_i = \rho'_i \sin \lambda'_i, \quad z'_i = \zeta'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.1.61)$$

и примем их за лагранжевы координаты. В этих переменных кинетическая энергия системы  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  определяется равенством

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\dot{\rho}'_i{}^2 + \rho_i'^2 \dot{\lambda}'_i{}^2 + \dot{\zeta}'_i{}^2). \quad (4.1.62)$$

Введем обобщенные импульсы  $P'_i, \Lambda'_i, Z'_i$ :

$$\left. \begin{aligned} P'_i &= \frac{\partial T'}{\partial \dot{\rho}'_i} = \mu_i \dot{\rho}'_i, \\ \Lambda'_i &= \frac{\partial T'}{\partial \dot{\lambda}'_i} = \mu_i \rho_i'^2 \dot{\lambda}'_i, \\ Z'_i &= \frac{\partial T'}{\partial \dot{\zeta}'_i} = \mu_i \dot{\zeta}'_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.63)$$

В этих переменных уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial P'_i}, & \frac{dP'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \rho'_i}, \\ \frac{d\lambda'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \Lambda'_i}, & \frac{d\Lambda'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \lambda'_i}, \\ \frac{d\zeta'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial Z'_i}, & \frac{dZ'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \zeta'_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.64)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),

причем

$$H' = T' - U,$$

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} \left( P_i'^2 + \frac{\Lambda_i'^2}{\rho_i'^2} + Z_i'^2 \right),$$

$$U = \frac{1}{2} \int \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^2 &= \left( \rho'_j \cos \lambda'_j - \rho'_i \cos \lambda'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k \rho'_k \cos \lambda'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \\ &+ \left( \rho'_j \sin \lambda'_j - \rho'_i \sin \lambda'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k \rho'_k \sin \lambda'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left( \zeta'_j - \zeta'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k \zeta'_k}{\sigma_k} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i.$$

Четыре известных первых интеграла системы (4.1.64) даются соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \rho'_i Z'_i \sin \lambda'_i - \zeta'_i \left( P'_i \sin \lambda'_i + \frac{\Lambda'_i}{\rho'_i} \cos \lambda'_i \right) \right] &= c'_1, \\ \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \zeta'_i \left( P'_i \cos \lambda'_i - \frac{\sin \lambda'_i}{\rho'_i} \Lambda'_i \right) - \rho'_i Z'_i \cos \lambda'_i \right] &= c'_2, \\ \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \rho'_i \cos \lambda'_i \left( P'_i \sin \lambda'_i + \frac{\cos \lambda'_i}{\rho'_i} \Lambda'_i \right) - \right. \\ &\quad \left. - \rho'_i \sin \lambda'_i \left( P'_i \cos \lambda'_i - \frac{\sin \lambda'_i}{\rho'_i} \Lambda'_i \right) \right] = c'_3, \\ &H' = h'. \end{aligned}$$

### § 1.19. Третья каноническая форма уравнений относительного движения

Рассмотрим в качестве лагранжевых координат сферические координаты  $r'_i, \lambda'_i, \varphi'_i$ , связанные с относительными координатами Якоби  $x'_i, y'_i, z'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) формулами

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= r'_i \cos \varphi'_i \cos \lambda'_i, \\ y'_i &= r'_i \cos \varphi'_i \sin \lambda'_i, \\ z'_i &= r'_i \sin \varphi'_i \end{aligned} \right\} \quad (4.1.65)$$

$(i = 1, 2, \dots, n-1).$

Кинетическая энергия системы точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  определяется равенством

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\dot{r}'_i{}^2 + r_i'^2 \dot{\varphi}'_i{}^2 + r_i'^2 \dot{\lambda}'_i{}^2 \cos^2 \varphi'_i),$$

поэтому обобщенные импульсы равны

$$\begin{aligned} R'_i &= \frac{\partial T'}{\partial \dot{r}'_i} = \mu_i \dot{r}'_i, \\ \Phi'_i &= \frac{\partial T'}{\partial \dot{\varphi}'_i} = \mu_i r_i'^2 \dot{\varphi}'_i, \\ \Lambda'_i &= \frac{\partial T'}{\partial \dot{\lambda}'_i} = \mu_i r_i'^2 \dot{\lambda}'_i \cos^2 \varphi'_i \\ &(i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

В этих переменных канонические уравнения относительного движения записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial R'_i}, & \frac{dR'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial r'_i}, \\ \frac{d\varphi'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \Phi'_i}, & \frac{d\Phi'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \varphi'_i}, \\ \frac{d\lambda'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \Lambda'_i}, & \frac{d\Lambda'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \lambda'_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.66)$$

$(i = 1, 2, \dots, n-1),$

где

$$H' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} \left( R_i'^2 + \frac{\Phi_i'^2}{r_i'^2} + \frac{\Lambda_i'^2}{r_i'^2 \cos^2 \varphi_i'} \right) - U,$$

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^2 &= \left( r_j' \cos \varphi_j' \cos \lambda_j' - r_i' \cos \varphi_i' \cos \lambda_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k r_k' \cos \varphi_k' \cos \lambda_k'}{\sigma_k} \right)^2 + \\ &+ \left( r_j' \cos \varphi_j' \sin \lambda_j' - r_i' \cos \varphi_i' \sin \lambda_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k r_k' \cos \varphi_k' \sin \lambda_k'}{\sigma_k} \right)^2 + \\ &+ \left( r_j' \sin \varphi_j' - r_i' \sin \varphi_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k r_k' \sin \varphi_k'}{\sigma_k} \right)^2 \quad (j > i). \end{aligned}$$

Четыре известных первых интеграла системы (4.1.66) выражаются соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\Phi_i' \sin \lambda_i' - \Lambda_i' \operatorname{tg} \varphi_i' \cos \lambda_i') = c_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\Phi_i' \cos \lambda_i' + \Lambda_i' \operatorname{tg} \varphi_i' \sin \lambda_i') = -c_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i' = c_3,$$

$$H' = h'.$$

## § 1.20. Уравнение Гамильтона — Якоби.

### Метод Гамильтона — Якоби

В §§ 1.13—1.19 были приведены канонические формы уравнений абсолютного и относительного движения задачи  $n$  тел. Интегрирование канонических уравнений движения механической схемы с  $k$  степенями свободы тесно связано с интегрированием одного уравнения в частных производных, называемого *уравнением Гамильтона — Якоби*. Оно имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_k; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0. \quad (4.1.67)$$

Правило его составления следующее: обобщенные импульсы  $p_i$ , входящие в функцию Гамильтона  $H$  (4.1.51), заменяются частными производными  $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  некоторой неизвестной функции  $S(t, q_1, q_2, \dots, q_k)$ , после чего записывается уравнение (4.1.67).

Если функция Гамильтона  $H$  не зависит явно от  $t$ , то вместо уравнения (4.1.67) обычно записывается уравнение

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_k; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h \quad (4.1.68)$$

с неизвестной функцией  $W(q_1, q_2, \dots, q_k)$ . Переход от уравнения (4.1.68) к уравнению (4.1.67) осуществляется заменой

$$S = -ht + W. \quad (4.1.69)$$

**Определение.** *Полным интегралом* уравнения в частных производных первого порядка называется такое его решение, в котором число неаддитивных (существенно различных) произвольных постоянных равно числу независимых переменных.

Если в уравнение в частных производных не входит сама функция  $S$ , как это имеет место в уравнении Гамильтона — Якоби, то число существенно различных произвольных постоянных на единицу меньше [10].

Якоби доказал [10], что нахождение общего интеграла канонической системы (4.1.52) эквивалентно нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби (4.1.67). Это утверждение известно под названием теоремы Гамильтона — Якоби.

**Теорема Гамильтона — Якоби.** *Если известен полный интеграл  $S(t, q_1, q_2, \dots, q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  уравнения Гамильтона — Якоби (4.1.67), то общий интеграл канонической системы (4.1.52) дается равенствами*

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \\ \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (4.1.70)$$

Первые  $k$  уравнений определяют обобщенные координаты  $q_i$  как функции  $t$  и  $2k$  произвольных постоянных  $\alpha_i, \beta_i$ . Подставляя  $q_i = q_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  во вторую группу уравнений (4.1.70), находим обобщенные импульсы  $p_i$  как функции  $t$  и  $2k$  произвольных постоянных  $\alpha_i, \beta_i$ .

Если известно общее решение канонической системы уравнений (4.1.52)

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k), \\ p_i &= p_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.71)$$

$(i = 1, 2, \dots, k),$

то методом Якоби [10] можно построить полный интеграл  $S(t, q_1, \dots, q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  уравнения (4.1.67).

Имеем дифференциальное равенство

$$dS = -H dt + \sum_{i=1}^k p_i dq_i. \quad (4.1.72)$$

Найдем из первых  $k$  равенств (4.1.71) величины  $\beta_i = \beta_i(t, q_1, q_2, \dots, q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  и подставим их в другие  $k$  соотношений. Получим

$$p_i = P_i(t, q_1, q_2, \dots, q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k).$$

Если в равенстве (4.1.72) заменить  $p_i$  на  $P_i$ , то, согласно методу Якоби, оно будет полным дифференциалом функции  $S$ . Его интегрирование дает нам полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, так как найденная функция  $S$  зависит от  $t, q_1, q_2, \dots, q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Если  $W(q_1, q_2, \dots, q_k; h, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби (4.1.68), то общий интеграл канонической системы (4.1.52) выражается равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t + \beta, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} &= \beta_i, & \frac{\partial W}{\partial q_j} &= p_j \end{aligned} \quad (4.1.73)$$

$(i = 2, 3, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k).$

### § 1.21. Уравнения движения системы в векторной форме

Пусть  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор точки  $P_i$  в некоторой системе координат, а  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{g}_i$  — скорость и ускорение точки  $P_i$  в выбранной системе координат. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \mathbf{g}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i.$$

Если  $\mathbf{R}_i$  — равнодействующая всех сил, приложенных к точке  $P_i$ , то можно написать дифференциальные уравнения движения

системы в векторной форме:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{R}_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Различные формы уравнений движения системы будут отличаться друг от друга видом записи вектора  $\mathbf{R}_i$ .

Например, в абсолютной прямоугольной системе координат имеем

$$\mathbf{R}_i = f \sum_{j=0}^{n-1} m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ij}^3} \quad (i=0, 1, \dots, n-1, i \neq j).$$

Проекция вектора  $\mathbf{R}_i$  суть

$$R_{ix} = f \sum_{j=0}^{n-1} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3},$$

$$R_{iy} = f \sum_{j=0}^{n-1} m_i m_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3},$$

$$R_{iz} = f \sum_{j=0}^{n-1} m_i m_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3}.$$

Для прямоугольной относительной системы координат с началом в точке  $P_0$  имеем

$$\frac{1}{m_i} \mathbf{R}_i = -\frac{f(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right),$$

$$\frac{1}{m_i} R_{ix} = -\frac{f(m_0 + m_i) x_i}{r_i^3} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right),$$

$$\frac{1}{m_i} R_{iy} = -\frac{f(m_0 + m_i) y_i}{r_i^3} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right),$$

$$\frac{1}{m_i} R_{iz} = -\frac{f(m_0 + m_i) z_i}{r_i^3} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right)$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1).$$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В этой главе приводятся различные формы дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения  $n$  взаимно притягивающихся абсолютно твердых тел. Эта задача представляет большой практический интерес. Достаточно упомянуть две проблемы: задачу о поступательно-вращательном движении системы «Земля — Луна» и задачу о поступательно-вращательном движении искусственных спутников Земли. Подробные выводы можно найти в работах [8], [9], [11], [12].

### § 2.01. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера

Пусть имеется система свободных, абсолютно твердых тел  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ . Известно, что положение и ориентация каждого тела  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) относительно абсолютной прямоугольной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  с центром в произвольной точке  $O$  полностью задается координатами  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  центра инерции  $G_i$  тела  $M_i$  в системе  $O\xi\eta\zeta$  и направляющими косинусами  $a_{ks}^{(i)}$  собственных осей  $G_i\xi'_i, G_i\eta'_i, G_i\zeta'_i$ , неизменно связанных с телом  $M_i$ , в системе  $O\xi\eta\zeta$ . Индексы направляющих косинусов  $a_{ks}^{(i)}$  характеризуются табл. 49.

Таблица 49

	$\xi'_i$	$\eta'_i$	$\zeta'_i$
$\xi$	$a_{11}^{(i)}$	$a_{12}^{(i)}$	$a_{13}^{(i)}$
$\eta$	$a_{21}^{(i)}$	$a_{22}^{(i)}$	$a_{23}^{(i)}$
$\zeta$	$a_{31}^{(i)}$	$a_{32}^{(i)}$	$a_{33}^{(i)}$

Направляющие косинусы для каждого значения  $i$  связаны шестью известными соотношениями, поэтому можно выбрать три независимых угла, которые однозначно определяют направляющие косинусы каждого тела.

Чаще всего выбираются *углы Эйлера*: *угол прецессии*  $\psi_i$ , образуемый линией пересечения плоскостей  $O\xi\eta$  и  $G_i\xi'_i\eta'_i$



с положительным направлением оси  $O\xi$  (рис. 63); *угол собственного вращения*  $\varphi_i$ , образуемый положительным направлением оси  $G_i\xi'_i$  с линией пересечения  $G_iN$ ; *угол нутации*  $\theta_i$ , образуемый положительными направлениями осей  $O\xi$  и  $G_i\xi'_i$ .

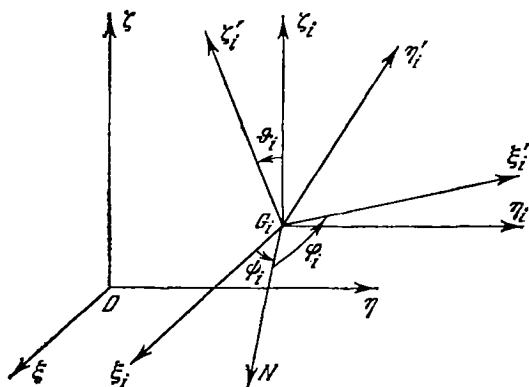


Рис. 63. Системы координат для описания поступательно-вращательного движения небесного тела.  $O\xi\eta\zeta$  — абсолютная система координат;  $G_i\xi_i\eta_i\zeta_i$  — барицентрическая система координат с осями, параллельными осям системы  $O\xi\eta\zeta$ ;  $G_i\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$  — собственная для тела  $M_i$  система координат.

Направляющие косинусы выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений [8], [9]:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos \varphi_i \cos \psi_i - \sin \varphi_i \sin \psi_i \cos \theta_i, \\ a_{21}^{(i)} &= \cos \varphi_i \sin \psi_i + \sin \varphi_i \cos \psi_i \cos \theta_i, \\ a_{31}^{(i)} &= \sin \varphi_i \sin \theta_i, \\ a_{12}^{(i)} &= -\sin \varphi_i \cos \psi_i - \cos \varphi_i \sin \psi_i \cos \theta_i, \\ a_{22}^{(i)} &= -\sin \varphi_i \sin \psi_i + \cos \varphi_i \cos \psi_i \cos \theta_i, \\ a_{32}^{(i)} &= \cos \varphi_i \sin \theta_i, \\ a_{13}^{(i)} &= \sin \psi_i \sin \theta_i, \\ a_{23}^{(i)} &= -\cos \psi_i \sin \theta_i, \\ a_{33}^{(i)} &= \cos \theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.01)$$

Пусть  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$  — проекции абсолютной угловой скорости вращения тела  $M_i$  на оси координат  $\xi'_i$ ,  $\eta'_i$ ,  $\zeta'_i$ . Величины

$p_i, q_i, r_i$  связаны с углами Эйлера кинематическими уравнениями Эйлера

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin \varphi_i \sin \vartheta_i + \dot{\vartheta}_i \cos \varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \cos \varphi_i \sin \vartheta_i - \dot{\vartheta}_i \sin \varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos \vartheta_i + \dot{\varphi}_i \\ &(i=0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (4.2.02)$$

### § 2.02. Силовая функция системы тел

Обозначим через  $U_{ij}$  силовую функцию взаимного притяжения (или взаимный потенциал) тел  $M_i$  и  $M_j$ . Из теории потенциала известно [10], что

$$U_{ij} = f \iint_{(M_i)(M_j)} \frac{dm_i dm_j}{\Delta_{ij}}. \quad (4.2.03)$$

Здесь  $\Delta_{ij}$  — взаимное расстояние между частицами тел  $M_i$  и  $M_j$ , отличное от нуля, если тела  $M_i$  и  $M_j$  не имеют общей части. Силовая функция  $U_{ij}$  является функцией 12 переменных:  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \xi_j, \eta_j, \zeta_j, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_j, \varphi_j, \vartheta_j$ .

Для фактического выражения  $U_{ij}$  в виде явной функции этих 12 переменных приходится пользоваться разложением в ряд

$$\left. \begin{aligned} U_{ij} &= f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{2k+1}}, \\ R_{ij}^2 &= (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.04)$$

Коэффициенты разложения  $U_{ij}^{(k)}$  суть целые многочлены относительно разностей координат центров масс  $G_i$  и  $G_j$  с коэффициентами, зависящими от углов Эйлера.

В частности,

$$\left. \begin{aligned} U_{ij}^{(0)} &= m_i m_j, \quad U_{ij}^{(1)} = 0, \\ U_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2} R_{ij}^2 [m_i (A_i + B_i + C_i - 3J_i^{(i, i)}) + \\ &\quad + m_j (A_j + B_j + C_j - 3J_j^{(j, j)})] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.05)$$

( $m_i$  — масса тела  $M_i$ ,  $m_j$  — масса тела  $M_j$ ), если тела  $M_i$  и  $M_j$  обладают тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, а оси симметрии, являющиеся одновременно главными центральными осями инерции, приняты за оси собственных систем координат. В формуле (4.2.05)  $A_s, B_s, C_s$  ( $s = i, j$ ) —

главные, центральные моменты инерции тел, а  $J_s^{(i, l)}$  — момент инерции тела  $M_s$  относительно прямой, проходящей через центры масс  $G_i$  и  $G_j$ .

Силовая функция системы тел представляется формулой [11]

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n-1} U_{ij}. \quad (4.2.06)$$

Она зависит от  $6n$  переменных:  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \psi_i, \varphi_i, \theta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

### § 2.03. Разложение силовой функции двух тел

Г. Н. Дубошиным получена [1] явная форма разложения силовой функции двух тел  $M_1$  и  $M_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Силовая функция (4.2.03) для случая двух тел может быть написана в виде

$$U = f \iint_{(M_1)(M_2)} \frac{dm_1 dm_2}{\Delta}, \quad (4.2.07)$$

где  $\Delta$  — взаимное расстояние между частицами тел  $M_1$  и  $M_2$ .

Имеет место следующее разложение:

$$U = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k}{R^{2k+1}}, \quad (4.2.08)$$

$$U_k = \sum_{k_1+k_2+k_3=k} U_k^{(k_1, k_2, k_3)} \times (\xi_2 - \xi_1)^{k_1} (\eta_2 - \eta_1)^{k_2} (\zeta_2 - \zeta_1)^{k_3}, \quad (4.2.09)$$

$$U_k^{(k_1, k_2, k_3)} = \sum_{s_1+s_2+s_3=k} A_k^{(k_1, k_2, k_3; s_1, s_2, s_3)} \times \mathcal{G}_k^{(s_1, s_2, s_3)}, \quad (4.2.10)$$

$$\mathcal{G}_k^{(s_1, s_2, s_3)} = \iint_{(M_1)(M_2)} (x'_1 - x'_2)^{s_1} (y'_1 - y'_2)^{s_2} (z'_1 - z'_2)^{s_3} dm_1 dm_2. \quad (4.2.11)$$

Функция  $U_k$  является гармоническим многочленом относительно разностей координат.

В формулах (4.2.08)—(4.2.11) использованы следующие обозначения.

1)  $R$  — расстояние между центрами масс тел  $M_1$  и  $M_2$ , точками  $G_1$  и  $G_2$  с прямоугольными координатами  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  и  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  соответственно в неподвижной прямоугольной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ .

2)  $A_k^{(k_1, k_2, k_3; s_1, s_2, s_3)}$  — численные коэффициенты, зависящие в конечном счете от коэффициентов полиномов Лежандра и коэффициентов биномиальных выражений,

3) Переменные  $x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2, z'_1 - z'_2$  выражаются через координаты элемента  $dm_i (x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2$ ) в собственной системе координат тела  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) с началом в  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) и через  $a_{sk}^{(i)}$  — косинусы углов, образуемых собственными осями тел с осями системы  $O\xi\eta\zeta$  по формулам

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= (a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}y_1 + a_{13}^{(1)}z_1) - (a_{11}^{(2)}x_2 + a_{12}^{(2)}y_2 + a_{13}^{(2)}z_2), \\ y'_1 - y'_2 &= (a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}y_1 + a_{23}^{(1)}z_1) - (a_{21}^{(2)}x_2 + a_{22}^{(2)}y_2 + a_{23}^{(2)}z_2), \\ z'_1 - z'_2 &= (a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}y_1 + a_{33}^{(1)}z_1) - (a_{31}^{(2)}x_2 + a_{32}^{(2)}y_2 + a_{33}^{(2)}z_2). \end{aligned}$$

Ряд (4.2.08) сходится абсолютно и равномерно, если  $R > R_1 + R_2$ , где  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) — максимальное из расстояний от центра масс тела  $M_i$ , точки  $G_i$  до его поверхности.

Вычисление величин (4.2.11) сводится к вычислению интегралов вида

$$\mathcal{J}_{k,i}^{(s_1, s_2, s_3)} = \int_{(M_i)} x_i^{s_1} y_i^{s_2} z_i^{s_3} dm_i, \quad (4.2.12)$$

представляющих постоянные параметры для тела  $M_i$ .

Если тело  $M_i$  имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся в центре масс  $G_i$ , то линии пересечения этих плоскостей суть его главные оси инерции и всякий интеграл (4.2.12) равен нулю, если хотя бы одно из чисел  $s_1, s_2, s_3$  является нечетным. Если оба тела обладают такой симметрией, то тогда  $U_{2k+1} = 0$  и разложение (4.2.08) принимает вид

$$U = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{2k}}{R^{4k+1}}, \quad (4.2.13)$$

где однородный многочлен  $U_{2k}$  относительно  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  степени  $2k$  содержит только четные степени этих переменных.

Предположим, что собственные оси координат тела  $M_i$  совпадают с главными осями инерции. Тогда первые три коэффициента разложения (4.2.08) выражаются формулами

$$U_0 = m_1 m_2,$$

$$U_1 = 0,$$

$$U_2 = \frac{m_1 R^2}{2} (A_2 + B_2 + C_2 - 3\mathcal{J}_2) + \frac{m_2 R^2}{2} (A_1 + B_1 + C_1 - 3\mathcal{J}_1),$$

где  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 1, 2$ ) — главные, центральные моменты инерции тела  $M_i$ ,  $\mathcal{J}_i$  — момент инерции тела  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) относительно прямой  $G_1 G_2$ :

$$\mathcal{J}_i = A_i \alpha_i^2 + B_i \beta_i^2 + C_i \gamma_i^2 \quad (i = 1, 2),$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — косинусы углов, образуемых прямой  $G_1G_2$  с направлениями собственных осей тела:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= a_{11}^{(i)} \frac{\xi_2 - \xi_1}{R} + a_{21}^{(i)} \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + a_{31}^{(i)} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R}, \\ \beta_i &= a_{12}^{(i)} \frac{\xi_2 - \xi_1}{R} + a_{22}^{(i)} \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + a_{32}^{(i)} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R}, \\ \gamma_i &= a_{13}^{(i)} \frac{\xi_2 - \xi_1}{R} + a_{23}^{(i)} \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + a_{33}^{(i)} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R} \\ &\quad (i = 1, 2).\end{aligned}$$

Приближенное выражение для силовой функции двух тел следующее:

$$U \approx \frac{fm_1m_2}{R} + fm_1 \frac{A_2 + B_2 + C_2 - 3\mathcal{Y}_2}{2R^3} + fm_2 \frac{A_1 + B_1 + C_1 - 3\mathcal{Y}_1}{2R^3}. \quad (4.2.14)$$

Если  $A_i = B_i$ , то

$$U \approx \frac{fm_1m_2}{R} + fm_1 (C_2 - A_2) \frac{1 - 3\gamma_2^2}{2R^3} + fm_2 (C_1 - A_1) \frac{1 - 3\gamma_1^2}{2R^3}. \quad (4.2.15)$$

#### § 2.04. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в абсолютной прямоугольной системе координат

Если направление осей собственной для тела  $M_i$  системы координат  $G_i\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$  совпадает с главными центральными осями инерции этого тела, то полная система дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых тел  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  имеет вид [12]

$$\left. \begin{aligned}m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \\ A_i \frac{dp_i}{dt} - (B_i - C_i) q_i r_i &= \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \Phi_i} \right) \frac{\sin \varphi_i}{\sin \vartheta_i} + \\ &\quad + \cos \varphi_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \\ B_i \frac{dq_i}{dt} - (C_i - A_i) r_i p_i &= \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \Phi_i} \right) \frac{\cos \varphi_i}{\sin \vartheta_i} - \\ &\quad - \sin \varphi_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \\ C_i \frac{dr_i}{dt} - (A_i - B_i) p_i q_i &= \frac{\partial U}{\partial \Phi_i} \\ &\quad (i = 0, 1, \dots, n-1).\end{aligned} \right\} \quad (4.2.16)$$

Система (4.2.16) имеет порядок  $12n$ , так как каждое из уравнений второй группы также является дифференциальным уравнением второго порядка относительно углов Эйлера.

Действительно, если воспользоваться кинематическими уравнениями Эйлера, уравнениям поступательно-вращательного движения системы в абсолютных осях можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} m_l \frac{d^2 \xi_l}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi_l}, & \frac{d^2 \psi_l}{dt^2} &= \Psi_l, \\ m_l \frac{d^2 \eta_l}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \eta_l}, & \frac{d^2 \varphi_l}{dt^2} &= \Phi_l, \\ m_l \frac{d^2 \zeta_l}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_l}, & \frac{d^2 \theta_l}{dt^2} &= \Theta_l \end{aligned} \right\} \quad (4.2.17)$$

( $l = 0, 1, \dots, n-1$ ),

где

$$\begin{aligned} \Psi_l \sin \theta_l &= \dot{\theta}_l \dot{\phi}_l - \dot{\theta}_l \dot{\psi}_l \cos \theta_l + \left( \frac{1}{A_l} - \frac{1}{B_l} \right) \sin \varphi_l \cos \varphi_l \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta_l} + \\ &+ \operatorname{cosec} \theta_l \left( \frac{\sin^2 \varphi_l}{A_l} + \frac{\cos^2 \varphi_l}{B_l} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial \psi_l} - \cos \theta_l \frac{\partial U}{\partial \varphi_l} \right) + \\ &+ (\dot{\psi}_l \cos \theta_l + \dot{\phi}_l) \left[ \left( \frac{B_l - C_l}{A_l} + \frac{C_l - A_l}{B_l} \right) \dot{\psi}_l \sin \varphi_l \cos \varphi_l \sin \theta_l + \right. \\ &\left. + \left( \frac{C_l - A_l}{B_l} \cos^2 \varphi_l - \frac{B_l - C_l}{A_l} \sin^2 \varphi_l \right) \dot{\theta}_l \right], \quad (4.2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_l &= \frac{1}{C_l} \frac{\partial U}{\partial \varphi_l} - \dot{\theta}_l \dot{\psi}_l \operatorname{cosec} \theta_l - \Psi_l \operatorname{ctg} \theta_l + \\ &+ \frac{A_l - B_l}{C_l} (\dot{\psi}_l \sin \varphi_l \sin \theta_l + \dot{\theta}_l \cos \varphi_l) (\dot{\psi}_l \cos \varphi_l \sin \theta_l - \dot{\theta}_l \sin \varphi_l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_l &= -\dot{\psi}_l \dot{\phi}_l \sin \theta_l + \left( \frac{\cos^2 \varphi_l}{A_l} + \frac{\sin^2 \varphi_l}{B_l} \right) \frac{\partial U}{\partial \theta_l} + \\ &+ \left( \frac{1}{A_l} - \frac{1}{B_l} \right) \frac{\sin \varphi_l \cos \varphi_l}{\sin \theta_l} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi_l} - \cos \theta_l \frac{\partial U}{\partial \varphi_l} \right) + \\ &+ (\dot{\psi}_l \cos \theta_l + \dot{\phi}_l) \left[ \left( \frac{B_l - C_l}{A_l} \cos^2 \varphi_l - \frac{C_l - A_l}{B_l} \sin^2 \varphi_l \right) \dot{\psi}_l \sin \theta_l + \right. \\ &\left. + \left( \frac{C_l - B_l}{A_l} + \frac{A_l - C_l}{B_l} \right) \dot{\theta}_l \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right]. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения (4.2.16) или (4.2.17) имеют только десять известных первых интегралов, вытекающих из основных теорем механики.

*Интегралы движения центра масс системы:*

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{a_1}{m}, & \dot{\eta}_i &= \frac{a_2}{m}, & \dot{\zeta}_i &= \frac{a_3}{m}, \\ \xi_i &= \frac{a_1}{m} t + \frac{b_1}{m}, & \eta_i &= \frac{a_2}{m} t + \frac{b_2}{m}, & \zeta_i &= \frac{a_3}{m} t + \frac{b_3}{m}. \end{aligned} \right\} (4.2.19)$$

В формулах (4.2.19)  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  — координаты центра масс системы материальных тел  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ ,  $m$  — общая масса системы,  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  — произвольные постоянные.

*Интегралы площадей:*

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \{m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) + A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)}\} &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \{m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) + A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)}\} &= c_2, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \{m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) + A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)}\} &= c_3, \end{aligned} \right\} (4.2.20)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные постоянные,  $a_{ks}^{(i)}$  — направляющие косинусы собственных осей тела  $M_i$ , выражаемые через углы Эйлера по формулам (4.2.01).

*Интеграл энергии:*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2\} = U + h, \quad (4.2.21)$$

где  $h$  — произвольная постоянная.

### § 2.05. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в относительной прямоугольной системе координат

Возьмем начало координат новой системы в центре масс  $G_0$  тела  $M_0$ , оставляя направления осей координат параллельными соответствующим осям абсолютной системы. Обозначим относительные прямоугольные координаты центра масс  $G_i$  тела  $M_i$  через  $x_i, y_i, z_i$ , так что

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i - \xi_0, & y_i &= \eta_i - \eta_0, & z_i &= \zeta_i - \zeta_0 \\ & (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Очевидно, это преобразование не влияет на углы Эйлера. Таким образом, состояние движения системы материальных тел

относительно центра масс  $G_0$  определяется переменными

$$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1};$$

$$\psi_0, \varphi_0, \theta_0; \psi_1, \varphi_1, \theta_1; \psi_2, \varphi_2, \theta_2; \dots; \psi_{n-1}, \varphi_{n-1}, \theta_{n-1}.$$

Уравнения движения тел  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  относительно центра масс  $G_0$  и вращательного движения тела  $M_0$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, & \frac{d^2 \psi_s}{dt^2} &= \Psi_s, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, & \frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} &= \Phi_s, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z_i}, & \frac{d^2 \theta_s}{dt^2} &= \Theta_s \end{aligned} \right\} \quad (4.2.23)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1, s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Здесь  $U_{i0}$  — взаимный потенциал тел  $M_i$  и  $M_0$ ,

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \left[ \frac{1}{m_i} U_{ij} + \frac{1}{m_0} \left( x_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial U_{j0}}{\partial y_j} + z_j \frac{\partial U_{j0}}{\partial z_j} \right) \right],$$

функции  $\Psi_s, \Theta_s, \Phi_s$  выражаются формулами (4.2.18). Порядок системы (4.2.23) равен  $12n - 6$ .

Система (4.2.23) имеет четыре первых интеграла (три интеграла площадей и интеграл энергии), которые можно получить, если в равенствах (4.2.20) и (4.2.21) сделать замену (4.2.22):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \{ m_i [(y_i + \eta_0)(\dot{z}_i + \dot{\zeta}_0) - (z_i + \zeta_0)(\dot{y}_i + \dot{\eta}_0)] +$$

$$+ A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)} \} = c_1,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \{ m_i [(z_i + \zeta_0)(\dot{x}_i + \dot{\xi}_0) - (x_i + \xi_0)(\dot{z}_i + \dot{\zeta}_0)] +$$

$$+ A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)} \} = c_2,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \{ m_i [(x_i + \xi_0)(\dot{y}_i + \dot{\eta}_0) - (y_i + \eta_0)(\dot{x}_i + \dot{\xi}_0)] +$$

$$+ A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)} \} = c_3,$$

$$\frac{1}{2} \sum \{ m_i [(\dot{x}_i + \dot{\xi}_0)^2 + (\dot{y}_i + \dot{\eta}_0)^2 + (\dot{z}_i + \dot{\zeta}_0)^2] +$$

$$+ A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2 \} = U + h.$$



### § 2.06. Каноническая форма уравнений поступательно-вращательного движения системы тел

Рассмотрим в качестве обобщенных координат абсолютные прямоугольные координаты  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  центров масс  $G_i$  и эйлеровы углы системы  $\psi_i, \varphi_i, \theta_i$ . Принимая во внимание, что кинетическая энергия системы тел в абсолютной системе координат выражается равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2], \quad (4.2.24)$$

введем соответствующие обобщенные импульсы  $\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*$  и  $\psi_i^*, \varphi_i^*, \theta_i^*$  с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \xi_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} = m_i \dot{\xi}_i, & \eta_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} = m_i \dot{\eta}_i, & \zeta_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_i} = m_i \dot{\zeta}_i, \\ \psi_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} = A_i p_i \sin \varphi_i \sin \theta_i + B_i q_i \cos \varphi_i \sin \theta_i + C_i r_i \cos \theta_i, \\ \varphi_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = C_i r_i, \\ \theta_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} = A_i p_i \cos \varphi_i - B_i q_i \sin \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (4.2.25)$$

( $i=0, 1, \dots, n-1$ ).

В этих переменных уравнения поступательно-вращательного движения системы  $n$  тел  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i^*}, & \frac{d\xi_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_i^*}, & \frac{d\eta_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \\ \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta_i^*}, & \frac{d\zeta_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i^*}, & \frac{d\psi_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_i^*}, & \frac{d\varphi_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_i^*}, & \frac{d\theta_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.26)$$

( $i=0, 1, \dots, n-1$ ),

где гамильтониан

$$H = T - U,$$

причем кинетическая энергия  $T$  выражается через импульсы формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{m_i} (\xi_i^{*2} + \eta_i^{*2} + \zeta_i^{*2}) + \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta_i}{A_i} (\psi_i^* \sin \varphi_i - \varphi_i^* \cos \varphi_i \cos \vartheta_i + \vartheta_i^* \cos \varphi_i \sin \vartheta_i)^2 + \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta_i}{B_i} (\psi_i^* \cos \varphi_i - \varphi_i^* \cos \varphi_i \cos \vartheta_i - \vartheta_i^* \sin \varphi_i \sin \vartheta_i)^2 + \frac{1}{C_i} \varphi_i^{*2} \right].$$

Система уравнений (4.2.26) имеет десять первых интегралов, которые можно получить из (4.2.19) — (4.2.21) заменой скоростей импульсами по формулам

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{1}{m_i} \xi_i^*, & \dot{\eta}_i &= \frac{1}{m_i} \eta_i^*, & \dot{\zeta}_i &= \frac{1}{m_i} \zeta_i^*, \\ p_i &= \frac{\operatorname{cosec} \vartheta_i}{A_i} (\psi_i^* \sin \varphi_i - \varphi_i^* \sin \varphi_i \cos \vartheta_i + \vartheta_i^* \cos \varphi_i \sin \vartheta_i), \\ q_i &= \frac{\operatorname{cosec} \vartheta_i}{B_i} (\psi_i^* \cos \varphi_i - \varphi_i^* \cos \varphi_i \cos \vartheta_i - \vartheta_i^* \sin \varphi_i \sin \vartheta_i), \\ r_i &= \frac{1}{C_i} \varphi_i^* \end{aligned} \right\} (4.2.27)$$

$(i = 0, 1, \dots, n - 1).$

Аналогично можно написать в канонической форме и дифференциальные уравнения поступательно-вращательного относительного движения системы  $n$  тел.

## Глава 3

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В главе 3 рассматриваются дифференциальные уравнения возмущенного движения одного тела, получающиеся методом вариации произвольных постоянных. Приводятся различные формы уравнений для различных систем оскулирующих элементов. Рассмотрены случаи потенциальных и непотенциальных возмущающих сил. Приведены канонические формы уравнений возмущенного движения. Приведенные формы уравнений движения используются как в классической небесной механике, так и в астродинамике. Различные способы выводов этих уравнений даются в [1] — [7].

#### § 3.01. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Пусть точка  $P$  движется в пространстве под действием притяжения некоторого центрального тела  $P_0$  и добавочной *возмущающей силы*, являющейся произвольной функцией времени, положения и скорости движущейся точки. Обозначим через  $x, y, z$  прямоугольные координаты точки  $P$  в системе координат  $P_0xyz$  с неизменными направлениями осей, через  $X_0, Y_0, Z_0$  — проекции ускорения, вызываемого действием силы притяжения точки  $P$  центральным телом  $P_0$ , через  $X, Y, Z$  — проекции возмущающего ускорения.

Тогда дифференциальные уравнения движения точки в выбранной системе координат имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X_0 + X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y_0 + Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z_0 + Z. \quad (4.3.01)$$

Если  $P_0$  — материальная точка или шар со сферическим распределением плотностей, то

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= -\frac{\mu x}{r^3}, & Y_0 &= -\frac{\mu y}{r^3}, & Z_0 &= -\frac{\mu z}{r^3}, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, & \mu &= f(m + m_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.3.02)$$

где  $f$  — постоянная тяготения,  $m$  — масса точки  $P$ ,  $m_0$  — масса тела  $P_0$ .

Если положить  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$ , то система (4.3.01) обращается в систему уравнений невозмущенного кеплеровского движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (4.3.03)$$

общее решение которой выражается равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= r\alpha, & \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[ \alpha e \sin v + \frac{d\alpha}{du} (1 + e \cos v) \right], \\ y &= r\beta, & \frac{dy}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[ \beta e \sin v + \frac{d\beta}{du} (1 + e \cos v) \right], \\ z &= r\gamma, & \frac{dz}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[ \gamma e \sin v + \frac{d\gamma}{du} (1 + e \cos v) \right], \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos v}, \\ \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \gamma &= \sin u \sin i, & u &= v + \omega, \\ t - \tau &= \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^2}. \end{aligned} \right\} (4.3.04)$$

Общее решение (4.3.04) уравнений невозмущенного движения зависит от шести произвольных постоянных, например,  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $a$  (или  $p$ ),  $e$ ,  $\tau$  (или  $M_0$ ) для эллиптического движения (см. ч. II, гл. 1, 2).

Согласно методу Лагранжа решение уравнений (4.3.01) отыскивается в том же виде (4.3.04), что и решение невозмущенной системы, лишь с той разницей, что  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\tau$  рассматриваются в формулах (4.3.04) не как постоянные, а как функции времени, определяемые таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения возмущенного движения (4.3.01).

Следовательно, формулы (4.3.04) можно рассматривать как формулы перехода от старых переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  к новым переменным  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $p(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\tau(t)$ .

Если такую замену осуществить, то вместо дифференциальных уравнений возмущенного движения (4.3.01) будем иметь

новую систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= F_1, & \frac{dp}{dt} &= F_4, \\ \frac{di}{dt} &= F_2, & \frac{de}{dt} &= F_5, \\ \frac{d\omega}{dt} &= F_3, & \frac{d\tau}{dt} &= F_6, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.05)$$

где

$$F_i = F_i(t, \Omega, i, \omega, p, e, \tau) \quad (i = 1, \dots, 6),$$

равносильную системе (4.3.01).

Траектория возмущенного движения в каждый момент времени соприкасается с траекторией невозмущенного движения для этого же момента и представляет собой *огibaющую* семейства траекторий невозмущенных движений.

Траектории семейства невозмущенных движений называются *оскулирующими орбитами*, а их элементы — *оскулирующими элементами*. Система дифференциальных уравнений (4.3.05) может быть названа *системой уравнений для оскулирующих элементов*. Возмущенное движение может рассматриваться как непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а возмущенная орбита — как непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита.

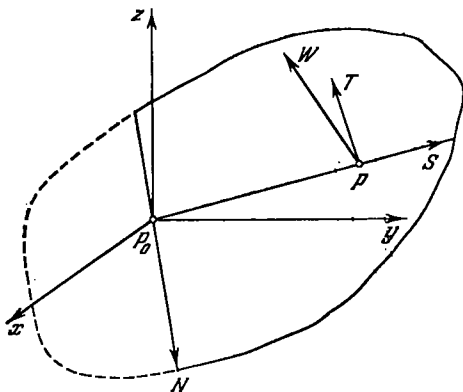


Рис. 64. Проекции возмущающего ускорения.  $S$  — проекция на радиус-вектор точки  $P$ ,  $T$  — на трансверсаль,  $W$  — на бинормаль оскулирующей орбиты.

### § 3.02. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай)

Назовем *оскулирующей плоскостью* плоскость, проходящую через радиус-вектор  $r$  точки  $P$  и ее вектор скорости  $V$ . Введем подвижную прямоугольную систему координат  $PSTW$  следующим образом (рис. 64): ось  $PS$  направим по радиусу-вектору  $r$  точки  $P$ , ось  $PT$  выберем в оскулирующей плоскости перпендикулярно к  $PS$  и направим ее так, чтобы при совмещении  $PS$  с  $P_0x$  ось  $PT$  можно было бы совместить с осью  $P_0y$ ; ось  $PW$  направим перпендикулярно к оскулирующей плоскости таким образом, чтобы выбранные оси составляли правую систему.

Направляющие косинусы новых осей в системе координат  $P_0xyz$  выражаются формулами [1]:

$$\left. \begin{aligned} \cos(S, x) &= \alpha = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \cos(S, y) &= \beta = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \cos(S, z) &= \gamma = \sin u \sin i, \\ \cos(T, x) &= \alpha' = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i, \\ \cos(T, y) &= \beta' = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i, \\ \cos(T, z) &= \gamma' = \cos u \sin i, \\ \cos(W, x) &= \alpha'' = \sin \Omega \sin i, \\ \cos(W, y) &= \beta'' = -\cos \Omega \sin i, \\ \cos(W, z) &= \gamma'' = \cos i. \end{aligned} \right\} (4.3.06)$$

Обозначим проекции возмущающего ускорения на три новые координатные оси через  $S, T, W$  соответственно. Тогда, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} S &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ T &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ W &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned} \right\} (4.3.07)$$

и

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' W, \\ Y &= \beta S + \beta' T + \beta'' W, \\ Z &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' W. \end{aligned} \right\} (4.3.08)$$

Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов, которые могут быть названы *уравнениями Ньютона\**), имеют вид [1], [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\ \frac{de}{dt} &= \sin v \cdot \tilde{S} + \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ (eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2}, \end{aligned} \right\} (4.3.09)$$

\*) М. Ф. Субботин называет эти уравнения «уравнениями Эйлера» [3].

где

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W,$$

$$u = v + \omega, \quad r = p(1 + e \cos v)^{-1},$$

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^v \frac{\cos \lambda \, d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^3}.$$

Истинная аномалия  $v$  связана со временем  $t$  уравнением

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^2}.$$

### § 3.03. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов

Уравнения Ньютона (4.3.09) пригодны для описания возмущенных движений любого типа, однако для движений эллиптического типа \*) удобнее рассматривать оскулирующие элементы  $\Omega, i, a, e, \pi, \epsilon$  (см. ч. II, § 2.01).

Заметим, что в возмущенном движении средняя долгота в эпоху  $\epsilon$  и долгота перигея  $\pi$  определяются равенствами

$$\epsilon = \pi + \bar{M}_0, \quad \pi = \Omega + \omega, \quad (4.3.10)$$

где  $\bar{M}_0$  — средняя аномалия в эпоху, определяемая формулой

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{dn}{dt}, \quad (4.3.11)$$

а  $n$  — оскулирующее среднее движение.

Средняя аномалия возмущенного движения определяется формулой

$$M = \bar{M}_0 + \int_{t_0}^t n(t) \, dt. \quad (4.3.12)$$

---

\*) Движение точки  $P$  будем относить к эллиптическому типу, если всегда или по меньшей мере в течение некоторого промежутка времени выполняется неравенство  $V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0$ , где  $V$  — скорость точки  $P$  в системе  $P_0xyz$ .

Уравнения Ньютона имеют в этих элементах вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2ea^2 \sin v}{p} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}, \\
 \frac{de}{dt} &= \sin v \cdot \tilde{S} + (\cos v + \cos E) \tilde{T}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}, \\
 \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \cdot \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot \tilde{T} + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot \tilde{W}, \\
 \frac{de}{dt} &= -2 \frac{r}{p} \sqrt{1-e^2} \cdot \tilde{S} + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot \tilde{W} + \\
 &\quad + \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}} \left[ -\cos v \cdot \tilde{S} + \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot \tilde{T} \right].
 \end{aligned} \right\} (4.3.13)$$

### § 3.04. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай)

Пусть существует такая *возмущающая (пертурбационная)* функция  $R(x, y, z, t)$ , что проекции возмущающего ускорения  $X, Y, Z$  определяются формулами

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В этом случае проекции возмущающего ускорения  $S, T, W$  в уравнениях Ньютона (4.3.09) могут быть выражены через частные производные функции  $R$  по элементам, и мы получаем [1]

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}, \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \varphi}.
 \end{aligned} \right\} (4.3.14)$$



Естественно, в уравнениях (4.3.14), называемых *уравнениями Лагранжа*, возмущающая функция  $R$  должна быть представлена как явная функция элементов  $\Omega$ ,  $i$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  (см. гл. 6).

З а м е ч а н и е. При  $i = 0$  третье и четвертое уравнения системы (4.3.14) имеют особенность. Для ее устранения вместо наклона  $i$  вводят новую переменную  $I = \cos i$ , а частную производную  $\frac{\partial R}{\partial i}$  заменяют по формуле  $\frac{\partial R}{\partial i} = -\frac{\partial R}{\partial I} \sin i$ .

### § 3.05. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов

Если в качестве оскулирующих элементов принять  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\pi$ ,  $\varepsilon$ , причем во все время движения эксцентриситет  $e(t) < 1$ , то для них дифференциальные уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \right\} (4.3.15)$$

Иногда вместо первых двух уравнений системы (4.3.15) рассматриваются уравнения для среднего движения  $n$  и параметра  $p$  орбиты:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right). \end{aligned}$$

Вторым из этих уравнений можно также заменить либо первое, либо второе уравнения системы (4.3.15).

Уравнение для элемента  $e$  можно заменить уравнением, определяющим среднюю аномалию в эпоху  $\bar{M}_0$ :

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}.$$

Если вместо элементов  $\bar{M}_0$  или  $e$  берется средняя аномалия  $M$  или средняя долгота  $l$ , то следует пользоваться одним из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \right\} (4.3.16)$$

В формулах (4.3.15)–(4.3.16) возмущающую функцию следует выразить через используемые в уравнениях оскулирующие элементы. Замечание из § 3.04 относится также и к уравнениям (4.3.15).

### § 3.06. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Якоби

Если движение точки происходит под действием притяжения центрального тела и потенциальной возмущающей силы, то помимо оскулирующих элементов  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$  часто пользуются каноническими элементами Якоби  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ , связанными с первыми элементами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\mu(e^2-1)}{2p}, & \alpha_2 &= \sqrt{\mu p}, & \alpha_3 &= \sqrt{\mu p} \cos i, \\ \beta_1 &= -\tau, & \beta_2 &= \omega, & \beta_3 &= \Omega. \end{aligned} \right\} (4.3.17)$$

Формулы обратного перехода имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\alpha_2^2}{\mu}, & e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, & \cos i &= \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \\ \tau &= -\beta_1, & \omega &= \beta_2, & \Omega &= \beta_3. \end{aligned} \right\} (4.3.18)$$

Частные производные возмущающей функции  $R$  по элементам выражаются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \frac{\mu \alpha_1}{\alpha_2^2} + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \frac{\mu}{2\alpha_2} + \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} \frac{\mu \alpha_3}{2\alpha_2^2}, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \frac{\mu^2}{\alpha_2^2} \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, & \frac{\partial R}{\partial i} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3} \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}, \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_2}, & \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_3}, & \frac{\partial R}{\partial \tau} &= -\frac{\partial R}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \right\} (4.3.19)$$

В элементах Якоби уравнения движения точки имеют канонический вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \right\} (4.3.20)$$

В конкретной задаче необходимо представить  $R$  в виде функции элементов Якоби. Заметим, кроме того, что если  $R \equiv 0$  (в невозмущенном движении), то элементы Якоби являются произвольными постоянными, появляющимися при интегрировании задачи двух тел методом Гамильтона — Якоби.

### § 3.07. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Делоне

Делоне предложил ввести систему канонических элементов:

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & G &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, & H &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i, \\ l &= n(t - \tau), & g &= \pi - \Omega, & h &= \Omega. \end{aligned} \right\} (4.3.21)$$

Переменные (4.3.21) называются *каноническими элементами Делоне*.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения точки в элементах Делоне имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial H}, \\ R^* &= \frac{\mu^2}{2L^2} + R, \end{aligned} \right\} (4.3.22)$$

$R$  — возмущающая функция.

Элементы Делоне можно использовать только для описания движений эллиптического типа.

### § 3.08. Две системы канонических элементов Пуанкаре

*Первая система канонических элементов Пуанкаре:*

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & \lambda &= l + \pi = nt + \varepsilon, \\ \rho_1 &= \sqrt{\mu a} (1 - \sqrt{1 - e^2}), & \omega_1 &= -\pi, \\ \rho_2 &= \sqrt{\mu a} (1 - e^2) (1 - \cos i), & \omega_2 &= -\Omega. \end{aligned} \right\} (4.3.23)$$

В элементах (4.3.23) уравнения возмущенного движения точки имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial \lambda}, & \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial \omega_1}, & \frac{d\rho_2}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial \omega_2}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial L}, & \frac{d\omega_1}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \rho_1}, & \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \rho_2}. \end{aligned} \right\} (4.3.24)$$

*Вторая система канонических элементов Пуанкаре:*

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & \lambda &= l + \pi, \\ \xi_1 &= \sqrt{2\rho_1} \cos \omega_1, & \eta_1 &= \sqrt{2\rho_1} \sin \omega_1, \\ \xi_2 &= \sqrt{2\rho_2} \cos \omega_2, & \eta_2 &= \sqrt{2\rho_2} \sin \omega_2. \end{aligned} \right\} (4.3.25)$$

В элементах (4.3.25) уравнения возмущенного движения точки имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial \lambda}, & \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial \eta_1}, & \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial \eta_2}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial L}, & \frac{d\eta_1}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \xi_1}, & \frac{d\eta_2}{dt} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \right\} (4.3.26)$$

В уравнениях (4.3.24) и (4.3.26) функция  $R^*$  выражается равенством (4.3.22), с той лишь разницей, что возмущающую функцию  $R$  необходимо в одном случае выразить через элементы первой системы Пуанкаре, а во втором случае — через элементы второй системы Пуанкаре.

**З а м е ч а н и е 1.** Канонические элементы Пуанкаре могут применяться только для описания движений эллиптического типа.

**З а м е ч а н и е 2.** Элементы Делоне и первая система Пуанкаре обладают некоторой однородностью: элементы  $L, G, H; L, \rho_1, \rho_2$  имеют размерность секториальной скорости, а элементы  $l, g, h, \lambda, \omega_1, \omega_2$  являются угловыми переменными. Другими словами, эти канонические элементы принадлежат к так называемым каноническим переменным «действие — угол».

**З а м е ч а н и е 3.** Элементы  $\xi_1, \eta_1$  имеют величину порядка оскулирующего эксцентриситета (для малых эксцентриситетов), а переменные  $\xi_2, \eta_2$  — величину порядка наклона оскулирующей орбиты (для малых наклонов), поэтому вторая система канонических элементов Пуанкаре удобна для получения явного разложения возмущающей функции в задачах астрономии.

**З а м е ч а н и е 4.** В некоторых работах применялись и другие системы канонических элементов (Леви-Чивита, Хилл, Де Ситтер, Андуайе и др.), но они не получили большого распространения в небесной механике (см. [3] — [4]).

### § 3.09. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов

Второе и пятое уравнения системы (4.3.15) имеют особенность при  $e = 0$ , поэтому их использование в случае эксцентриситетов, близких к нулю, затруднительно. Для устранения этой особенности Лагранж предложил ввести вместо оскулирующих элементов  $e$  и  $\pi$  новые переменные  $h$  и  $k$  по формулам

$$h = e \sin \pi, \quad k = e \cos \pi. \quad (4.3.27)$$

Назовем  $h$  и  $k$  переменными Лагранжа.

Введем вместо эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов  $a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon$  новую систему оскулирующих элементов  $a, h, i, \Omega, k, \epsilon$ . В элементах  $a, h, i, \Omega, k, \epsilon$  уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) + \\ &\quad + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \left( k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dk}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial h} + \frac{k}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) - \\ &\quad - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{de}{dt} &= - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-h^2-k^2})} \left( h \frac{\partial R}{\partial h} + k \frac{\partial R}{\partial k} \right). \end{aligned} \right\} (4.3.28)$$

В уравнениях (4.3.28) возмущающая функция  $R$  должна быть выражена в виде функции переменных  $a, h, i, \Omega, k, \epsilon$  и  $t$ . Уравнения (4.3.28), в отличие от системы (4.3.15), не имеют особенность при  $e = 0$ .

### § 3.10. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов

Устранение особенности  $i = 0$  в третьем и четвертом уравнениях систем (4.3.14) и (4.3.15) может быть осуществлено либо с помощью замены  $I = \cos i$ , как было указано в замечании из § 3.04, либо введением новых переменных  $p$  и  $q$  вместо  $i$  и  $\Omega$ , как предложил Лагранж. Связь между переменными Лагранжа  $p$  и  $q$  и оскулирующими элементами  $i$  и  $\Omega$  дается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} p &= \operatorname{tg} i \sin \Omega, \\ q &= \operatorname{tg} i \cos \Omega. \end{aligned} \right\}^* \quad (4.3.29)$$

В переменных  $a, e, p, q, \pi, \varepsilon$  уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e \sqrt{1-e^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{(1+p^2+q^2)^{3/2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \\ &\quad - \frac{p(1+p^2+q^2)}{na^2 \sqrt{1-e^2} (1+\sqrt{1+p^2+q^2})} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{(1+p^2+q^2)^{3/2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \\ &\quad - \frac{q(1+p^2+q^2)}{na^2 \sqrt{1-e^2} (1+\sqrt{1+p^2+q^2})} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{1+p^2+q^2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1+p^2+q^2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \times \\ &\quad \times \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.30)$$

В уравнениях (4.3.30) возмущающая функция  $R$ , разумеется, должна быть выражена в виде функции переменных  $a, e, p, q, \pi, \varepsilon$  и  $t$ .

\* Не следует путать переменную Лагранжа  $p$  с фокальным параметром конического сечения, который также обозначается буквой  $p$ .

### § 3.11. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай)

Для случая малых эксцентриситетов ( $e \approx 0$ ) и малых наклонов ( $i \approx 0$ ) удобнее рассматривать вместо оскулирующих элементов  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\pi$  переменные Лагранжа  $h$ ,  $k$ ,  $p$ ,  $q$ . Тогда уравнения возмущенного движения в переменных  $a$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $k$ ,  $e$  представляются равенствами

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) + \\
 &\quad + \frac{k(1+p^2+q^2)}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right), \\
 \frac{dp}{dt} &= \frac{(1+p^2+q^2)^{1/2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \\
 &\quad - \frac{p(1+p^2+q^2)}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2} (1+\sqrt{1+p^2+q^2})} \left( k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\
 \frac{dq}{dt} &= - \frac{(1+p^2+q^2)^{1/2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \\
 &\quad - \frac{q(1+p^2+q^2)}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2} (1+\sqrt{1+p^2+q^2})} \left( k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\
 \frac{dk}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial h} + \frac{k}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) - \\
 &\quad - \frac{h(1+p^2+q^2)}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right), \\
 \frac{de}{dt} &= - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \\
 &\quad + \frac{1+p^2+q^2}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2 (1+\sqrt{1-h^2-k^2})} \left( h \frac{\partial R}{\partial h} + k \frac{\partial R}{\partial k} \right).
 \end{aligned} \tag{4.3.31}$$

В уравнениях (4.3.31) необходимо выразить возмущающую функцию  $R$  как функцию переменных  $a$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $k$ ,  $e$  и  $t$ . Эти уравнения не имеют особенностей при  $e = 0$  и  $i = 0$ .

В заключение укажем на связь между переменными Лагранжа  $h$ ,  $k$ ,  $p$ ,  $q$  и каноническими элементами Пуанкаре (4.3.23) и (4.3.25). С точностью до первых степеней эксцентриситета  $e$

и наклона  $i$  (точнее, с точностью до  $2 \sin \frac{i}{2} \approx \operatorname{tg} i$ ) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &\approx \sqrt[4]{\mu a} e \cos \pi = \sqrt[4]{\mu a} k, \\ \eta_1 &\approx -\sqrt[4]{\mu a} e \sin \pi = -\sqrt[4]{\mu a} h, \\ \xi_2 &= \sqrt[4]{\mu p_0} 2 \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \approx \sqrt[4]{\mu p_0} \operatorname{tg} i \cos \Omega = \sqrt[4]{\mu p_0} q, \\ \eta_2 &= -\sqrt[4]{\mu p_0} 2 \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \approx -\sqrt[4]{\mu p_0} \operatorname{tg} i \sin \Omega = \\ &= -\sqrt[4]{\mu p_0} p. \end{aligned} \right\} (4.3.32)$$

В соотношениях (4.3.32)  $p_0$  — фокальный параметр (этот символ мы ввели, чтобы отличить его от переменной Лагранжа  $p$ ).

### § 3.12. Связь между прямоугольными координатами движущейся точки и различными системами канонических элементов

Прямоугольные координаты точки связаны с каноническими элементами Якоби равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\alpha_2^2}{\mu(1+e \cos v)} \left[ \cos(v + \beta_2) \cos \beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sin(v + \beta_2) \sin \beta_3 \right], \\ y &= \frac{\alpha_2^2}{\mu(1+e \cos v)} \left[ \cos(v + \beta_2) \sin \beta_3 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sin(v + \beta_2) \cos \beta_3 \right], \\ z &= \frac{\alpha_2}{\mu(1+e \cos v)} \sin(v + \beta_2) \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}, \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1 \alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad t + \beta_1 = \frac{\alpha_2^3}{\mu^2} \int_0^v \frac{dv}{(1+e \cos v)^2}. \end{aligned} \right\} (4.3.33)$$

Связь между  $(x, y, z)$  и каноническими элементами Делоне имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{G^2}{\mu(1+e \cos v)} \left[ \cos(v + g) \cos h - \sin(v + g) \sin h \frac{H}{G} \right], \\ y &= \frac{G^2}{\mu(1+e \cos v)} \left[ \cos(v + g) \sin h + \sin(v + g) \cos h \frac{H}{G} \right], \\ z &= \frac{G}{\mu(1+e \cos v)} \sin(v + g) \sqrt{G^2 - H^2}, \\ e &= \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad l = \frac{G^3}{L^3} \int_0^v \frac{d\omega}{(1+e \cos \omega)^2}. \end{aligned} \right\} (4.3.34)$$



Связь между  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и каноническими элементами первой системы Пуанкаре имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(L - \rho_1)^2}{\mu (1 + e \cos v)} \left[ \cos(v + \omega_2 - \omega_1) \cos \omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + \sin(v + \omega_2 - \omega_1) \sin \omega_2 \frac{L - \rho_1 - \rho_2}{L - \rho_1} \right], \\ y &= \frac{(L - \rho_1)^2}{\mu (1 + e \cos v)} \left[ -\cos(v + \omega_2 - \omega_1) \sin \omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + \sin(v + \omega_2 - \omega_1) \cos \omega_2 \frac{L - \rho_1 - \rho_2}{L - \rho_1} \right], \\ z &= \frac{(L - \rho_1)}{\mu (1 + e \cos v)} \sin(v + \omega_2 - \omega_1) \sqrt{2\rho_2(L - \rho_1) - \rho_2^2}, \\ e &= \sqrt{\frac{\rho_1}{L} \left(2 - \frac{\rho_1}{L}\right)}, \quad \lambda + \omega_1 = \left(1 - \frac{\rho_1}{L}\right)^3 \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}. \end{aligned} \right\} (4.3.35)$$

Связь между координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и каноническими элементами второй системы Пуанкаре имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{[2L - (\xi_1^2 + \eta_1^2)]^2}{4\mu (1 + e \cos v) \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \left\{ \xi_2 \cos(v + \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_2 \sin(v + \omega) \left[ 1 - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2L - (\xi_1^2 + \eta_1^2)} \right] \right\}, \\ y &= \frac{[2L - (\xi_1^2 + \eta_1^2)]^2}{4\mu (1 + e \cos v) \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \left\{ -\eta_2 \cos(v + \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \xi_2 \sin(v + \omega) \left[ 1 - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2L - (\xi_1^2 + \eta_1^2)} \right] \right\}, \\ z &= \frac{[2L - (\xi_1^2 + \eta_1^2)]}{4\mu (1 + e \cos v)} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \sin(v + \omega) \times \\ &\quad \times \sqrt{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2)}, \\ e &= \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\sqrt{L}} \left[ 1 - \frac{1}{4L} (\xi_1^2 + \eta_1^2) \right]^{1/4}, \\ \cos \omega &= \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2)}}, \quad \sin \omega = \frac{\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2}{\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2)}}, \\ \lambda - \Omega - \omega &= \left(1 - \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{L \sqrt{2}}\right)^3 \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}. \end{aligned} \right\} (4.3.36)$$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ $n$ ТЕЛ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этой главе приводится сводка уравнений, которые наиболее часто встречаются в теории движения больших планет Солнечной системы. Некоторые практические рекомендации можно найти в главе 3. Способы применения этих уравнений в астрономических задачах подробно изложены в монографиях [2] — [7].

### § 4.01. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай)

В главе 3 приведены уравнения Ньютона для оскулирующих кеплеровских элементов орбиты одного тела, движущегося под действием притягивающего центра и возмущающей силы. Если материальная точка  $P_0$  притягивает каждую из материальных точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  в соответствии с законом всемирного тяготения и в этой механической модели действуют еще какие-либо возмущающие силы [например, силы взаимного притяжения тел  $P_i$  и  $P_j$  ( $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n-1$ ), сопротивление среды и др.], то возмущенное движение тел  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  можно описать дифференциальными уравнениями Ньютона [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= 2r_k \tilde{T}_k, \\ \frac{de_k}{dt} &= \sin v_k \cdot \tilde{S}_k + \left[ \cos v_k + (\cos v_k + e_k) \frac{r_k}{p_k} \right] \tilde{T}_k, \\ \frac{di_k}{dt} &= \frac{r_k}{p_k} \cos u_k \cdot \tilde{W}_k, \\ \frac{d\Omega_k}{dt} &= \frac{r_k}{p_k} \sin u_k \operatorname{cosec} i_k \cdot \tilde{W}_k, \end{aligned} \right\} (4.4.01)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\omega_k}{dt} &= -\frac{\cos v_k}{e_k} \tilde{S}_k + \frac{\sin v_k}{e_k} \left(1 + \frac{r_k}{p_k}\right) \tilde{T}_k - \frac{r_k}{p_k} \sin u_k \operatorname{ctg} i_k \cdot \tilde{W}_k, \\
 \frac{d\tau_k}{dt} &= \frac{p_k}{e_k} \sqrt{\frac{p_k}{\mu_k}} \left[ (e_k N_k \sin v_k - \cos v_k) \tilde{S}_k + \frac{p_k}{r_k} N_k \tilde{T}_k \right] \frac{r_k^2}{p_k^2}, \\
 \tilde{S}_k &= \sqrt{\frac{p_k}{\mu_k}} S_k, \quad \tilde{T}_k = \sqrt{\frac{p_k}{\mu_k}} T_k, \\
 \tilde{W}_k &= \sqrt{\frac{p_k}{\mu_k}} W_k, \quad \mu_k = f(m_0 + m_k) \\
 &(k = 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned} \right\} (4.4.01)$$

Оскулирующими элементами орбиты точки  $P_k$  являются  $p_k$ ,  $e_k$ ,  $i_k$ ,  $\Omega_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\tau_k$ ; при этом начало основной системы координат  $P_0xyz$  совпадает с притягивающим центром  $P_0$ ;  $S_k$ ,  $T_k$ ,  $W_k$  — суть проекции возмущающего ускорения для точки  $P_k$  на подвижные оси координатной системы, отнесенные к плоскости оскулирующей орбиты точки  $P_k$ .

Величина  $N_k$  определяется равенством

$$N_k = 2 \frac{p_k^2}{r_k^2} \int_0^{v_k} \frac{\cos v_k dv_k}{(1 + e_k \cos v_k)^3}. \quad (4.4.02)$$

Если система уравнений Ньютона проинтегрирована, то положение точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  в системе координат  $P_0xyz$  для любого момента времени определяется равенствами

$$\left. \begin{aligned}
 x_k &= r_k (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k), \\
 y_k &= r_k (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k), \\
 z_k &= r_k \sin u_k \sin i_k, \\
 u_k &= v_k + \omega_k, \\
 r_k &= \frac{p_k}{1 + e_k \cos v_k}, \\
 t - \tau_k &= \frac{p_k^{3/2}}{\sqrt{\mu_k}} \int_0^{v_k} \frac{dv_k}{(1 + e_k \cos v_k)^2} \\
 &(k = 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned} \right\} (4.4.03)$$

**§ 4.02. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов**

Для движений эллиптического типа удобнее рассматривать оскулирующие элементы орбиты  $P_k$ :  $a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \pi_k, e_k$ .

В этих элементах уравнения Ньютона имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \frac{2e_k a_k^2 \sin v_k}{p_k} \tilde{S}_k + \frac{2a_k^2}{r_k} \tilde{T}_k, \\ \frac{de_k}{dt} &= \sin v_k \cdot \tilde{S}_k + (\cos v_k + \cos E_k) \tilde{T}_k, \\ \frac{di_k}{dt} &= \frac{r_k}{p_k} \cos u_k \cdot \tilde{W}_k, \\ \frac{d\Omega_k}{dt} &= \frac{r_k}{p_k} \sin u_k \operatorname{cosec} i_k \cdot \tilde{W}_k, \\ \frac{d\pi_k}{dt} &= -\frac{\cos v_k}{e_k} \tilde{S}_k + \frac{\sin v_k}{e_k} \left(1 + \frac{r_k}{p_k}\right) \tilde{T}_k + \frac{r_k}{p_k} \sin u_k \operatorname{tg} \frac{i_k}{2} \cdot \tilde{W}_k, \\ \frac{de_k}{dt} &= -2 \frac{r_k}{p_k} \sqrt{1 - e_k^2} \tilde{S}_k + \frac{r_k}{p_k} \sin u_k \operatorname{tg} \frac{i_k}{2} \cdot \tilde{W}_k + \\ &+ \frac{e_k}{1 + \sqrt{1 - e_k^2}} \left[ -\cos v_k \cdot \tilde{S}_k + \sin v_k \left(1 + \frac{r_k}{p_k}\right) \tilde{T}_k \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.04)$$

$(k = 1, 2, \dots, n - 1),$

$$\left. \begin{aligned} p_k &= a_k (1 - e_k^2), \quad e_k = \pi_k + \bar{M}_{0k}, \\ \pi_k &= \Omega_k + \omega_k, \\ M_k &= e_k - \pi_k + \int_{t_0}^t n_k dt, \\ \frac{d\bar{M}_{0k}}{dt} &= \frac{dM_{0k}}{dt} + (t - t_0) \frac{dn_k}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.05)$$

Здесь  $\bar{M}_{0k}$  — средняя аномалия точки  $P_k$  в эпоху,  $M_k$  — возмущенная средняя аномалия точки  $P_k$ .

З а м е ч а н и е. Может встретиться случай, когда движение одних тел принадлежит к эллиптическому типу, а движение других не принадлежит к этому типу. В таком случае возможно сочетание уравнений (4.4.01) и (4.4.04). К такого типа движениям относятся межпланетные полеты, а также движения в некоторых кратных звездных системах,

### § 4.03. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай)

Если возмущающие силы потенциальны, т. е.

$$X_k = \frac{\partial R_k}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial R_k}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial R_k}{\partial z_k},$$

то вместо уравнений Ньютона (4.4.01) обычно используются уравнения Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= \frac{2\sqrt{p_k}}{\sqrt{\mu_k}} \frac{\partial R_k}{\partial \omega_k}, \\ \frac{de_k}{dt} &= -\frac{1-e_k^2}{e_k \sqrt{\mu_k p_k}} \frac{\partial R_k}{\partial \omega_k} - \frac{p_k}{\mu_k e_k} \frac{\partial R_k}{\partial \tau_k}, \\ \frac{di_k}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu_k p_k} \sin i_k} \frac{\partial R_k}{\partial \Omega_k} + \frac{\cos i_k}{\sqrt{\mu_k p_k} \sin i_k} \frac{\partial R_k}{\partial \omega_k}, \\ \frac{d\Omega_k}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu_k p_k} \sin i_k} \frac{\partial R_k}{\partial i_k}, \\ \frac{d\omega_k}{dt} &= -\frac{\cos i_k}{\sqrt{\mu_k p_k} \sin i_k} \frac{\partial R_k}{\partial i_k} - \frac{2\sqrt{p_k}}{\sqrt{\mu_k}} \frac{\partial R_k}{\partial p_k} + \frac{1-e_k^2}{e_k \sqrt{\mu_k p_k}} \frac{\partial R_k}{\partial e_k}, \\ \frac{d\tau_k}{dt} &= \frac{p}{\mu_k e_k} \frac{\partial R_k}{\partial e_k} \end{aligned} \right\} (4.4.06)$$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Связь между оскулирующими элементами и относительными прямоугольными координатами точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  выражается формулами (4.4.03).

### § 4.04. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов

Для исследования движений эллиптического типа при наличии возмущающих функций удобнее пользоваться следующими уравнениями Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \frac{2}{n_k a_k} \frac{\partial R_k}{\partial e_k}, \\ \frac{de_k}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e_k^2}}{n_k a_k^2 e_k} \frac{\partial R_k}{\partial \pi_k} - \frac{e_k \sqrt{1-e_k^2}}{n_k a_k^2 (1+\sqrt{1-e_k^2})} \frac{\partial R_k}{\partial e_k}, \end{aligned} \right\} (4.4.07)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{di_k}{dt} &= - \frac{1}{n_k a_k^2 \sqrt{1-e_k^2} \sin i_k} \frac{\partial R_k}{\partial \Omega_k} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i_k}{2}}{n_k a_k^2 \sqrt{1-e_k^2}} \left( \frac{\partial R_k}{\partial \pi_k} + \frac{\partial R_k}{\partial e_k} \right), \\
 \frac{d\Omega_k}{dt} &= \frac{1}{n_k a_k^2 \sqrt{1-e_k^2} \sin i_k} \frac{\partial R_k}{\partial i_k}, \\
 \frac{d\pi_k}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i_k}{2}}{n_k a_k^2 \sqrt{1-e_k^2}} \frac{\partial R_k}{\partial i_k} + \frac{\sqrt{1-e_k^2}}{n_k a_k^2 e_k} \frac{\partial R_k}{\partial e_k}, \\
 \frac{de_k}{dt} &= - \frac{2}{n_k a_k} \frac{\partial R_k}{\partial a_k} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i_k}{2}}{n_k a_k^2 \sqrt{1-e_k^2}} \frac{\partial R_k}{\partial i_k} + \\
 &\quad + \frac{e_k \sqrt{1-e_k^2}}{n_k a_k^2 (1 + \sqrt{1-e_k^2})} \frac{\partial R_k}{\partial e_k}
 \end{aligned} \right\} (4.4.07)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1),$

дополненными соотношениями (4.4.05), если необходимо найти другие характеристики оскулирующей орбиты.

Заметим, что оскулирующие элементы, определяемые уравнениями (4.4.07), отнесены к системе координат  $P_0xyz$ . Как и в предыдущих параграфах, возмущающие функции  $R_k$  должны быть представлены в виде явных функций элементов  $a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \pi_k, e_h$ .

Если движение тела  $P_0$  в пространстве известно, то с помощью формул (4.4.03), дающих относительные прямоугольные координаты тел  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , и с помощью формул преобразования координат можно найти положение всех  $P_k$  ( $k=0, 1, \dots, \dots, n-1$ ) тел системы в абсолютной системе координат.

### § 4.05. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах Якоби

В § 3.06 приведены дифференциальные уравнения относительного возмущенного движения одного тела, записанные в канонических элементах Якоби. Аналогично можно написать канонические уравнения возмущенного движения тел  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  относительно тела  $P_0$ , используя канонические элементы Якоби (см. § 3.06)  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_{3k}, \beta_{1k}, \beta_{2k}, \beta_{3k}$  тела  $P_k$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ).

Эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_{1k}}{dt} &= \frac{\partial U^*}{\partial \beta_{1k}}, & \frac{d\alpha_{2k}}{dt} &= \frac{\partial U^*}{\partial \beta_{2k}}, & \frac{d\alpha_{3k}}{dt} &= \frac{\partial U^*}{\partial \beta_{3k}}, \\ \frac{d\beta_{1k}}{dt} &= -\frac{\partial U^*}{\partial \alpha_{1k}}, & \frac{d\beta_{2k}}{dt} &= -\frac{\partial U^*}{\partial \alpha_{2k}}, & \frac{d\beta_{3k}}{dt} &= -\frac{\partial U^*}{\partial \alpha_{3k}} \end{aligned} \right\} (4.4.08)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1),$$

где возмущающая функция  $U^*$  (при наличии сил взаимного ньютоновского притяжения) выражается через прямоугольные якобиевы координаты формулой

$$U^* = f \sum_{k=1}^{n-1} m_0 m_k \left( \frac{1}{\Delta_{0k}} - \frac{1}{r'_k} \right) + \frac{1}{2} f \sum_{\substack{j, s=1 \\ j \neq s}}^{n-1} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}. \quad (4.4.09)$$

Взаимные расстояния  $\Delta_{0k}$  и  $\Delta_{sj}$  выражаются формулами (4.1.10) и

$$r'_k{}^2 = x'_k{}^2 + y'_k{}^2 + z'_k{}^2. \quad (4.4.10)$$

Связь между каноническими элементами Якоби и кеплеровскими элементами относительного движения (начало координат основной координатной системы совпадает с точкой  $P_0$ ) дается равенствами

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1k} &= \frac{\mu_k^* (e_k^2 - 1)}{2\mu_k^* p_k}, & \alpha_{2k} &= \sqrt{\mu_k^* p_k}, & \alpha_{3k} &= \sqrt{\mu_k^* p_k} \cos i_k, \\ \beta_{1k} &= -\tau_k, & \beta_{2k} &= \omega_k, & \beta_{3k} &= \Omega_k, \\ \mu_k^* &= f m_0 m_k \mu_k, & \mu_k &= \frac{m_k \sigma_{k-1}}{\sigma_k}, & \sigma_k &= \sum_{l=0}^k m_l \end{aligned} \right\} (4.4.11)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Для движений эллиптического типа удобнее воспользоваться соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1k} &= -\frac{\mu_k^*}{2\mu_k^* a_k}, & \beta_{1k} &= -t_0 + \frac{e_k - \pi_k}{n_k}, \\ \alpha_{2k} &= \sqrt{\mu_k^* a_k (1 - e_k^2)}, & \beta_{2k} &= \pi_k - \Omega_k, \\ \alpha_{3k} &= \sqrt{\mu_k^* a_k (1 - e_k^2)} \cos i_k, & \beta_{3k} &= \Omega_k, \\ n_k &= \frac{1}{\mu_k} \sqrt{\frac{\mu_k^*}{a_k^3}} \end{aligned} \right\} (4.4.12)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1).$$

**§ 4.06. Уравнения возмущенного движения  
в канонических элементах Делоне**

Для описания относительного движения точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  (см. § 4.05) можно использовать также канонические элементы Делоне  $L_k, G_k, H_k, l_k, g_k, h_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) (см. § 3.07):

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \sqrt{\mu_k^* a_k}, \\ G_k &= \sqrt{\mu_k^* a_k (1 - e_k^2)}, & g_k &= \pi_k - \Omega_k, \\ H_k &= \sqrt{\mu_k^* a_k (1 - e_k^2)} \cos i_k, & h_k &= \Omega_k, \\ l_k &= n_k (t - \tau_k), & n_k &= \frac{\mu_k^{*2}}{\mu_k L_k^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.13)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1).$

Введем гамильтониан

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_k^{*2}}{2\mu_k L_k^2} + U^*, \quad (4.4.14)$$

где возмущающая функция  $U^*$  выражается равенством (4.4.09).

Тогда уравнения для элементов Делоне примут канонический вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_k}, & \frac{dG_k}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_k}, & \frac{dH_k}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_k}, \\ \frac{dl_k}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_k}, & \frac{dg_k}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_k}, & \frac{dh_k}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_k} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.15)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1).$

Эти уравнения описывают относительные движения, поскольку кеплеровские оскулирующие элементы отнесены к координатной системе  $P_0xyz$ .

**§ 4.07. Две системы канонических элементов Пуанкаре**

Наряду с каноническими элементами Якоби и Делоне в задачах небесной механики (при малых эксцентриситетах и наклонах) применяются канонические элементы Пуанкаре.



Первая система канонических элементов Пуанкаре:

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \sqrt{\mu_k^* a_k}, \\ \rho_{1,k} &= \sqrt{\mu_k^* a_k} (1 - \sqrt{1 - e_k^2}), \\ \rho_{2,k} &= \sqrt{\mu_k^* a_k} (1 - e_k^2) (1 - \cos i_k), \\ \lambda_k &= n_k (t - \tau_k) + \pi_k, \\ \omega_{1,k} &= -\pi_k, \\ \omega_{2,k} &= -\Omega_k, \quad n_k = \frac{\mu_k^{*2}}{\mu_k L_k^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.16)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1).$

Вторая система канонических элементов Пуанкаре:

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \sqrt{\mu_k^* a_k}, \\ \lambda_k &= n_k (t - \tau_k) + \pi_k, \\ \xi_{1,k} &= \sqrt{2\rho_{1,k}} \cos \omega_{1,k}, \\ \eta_{1,k} &= \sqrt{2\rho_{1,k}} \sin \omega_{1,k}, \\ \xi_{2,k} &= \sqrt{2\rho_{2,k}} \cos \omega_{2,k}, \\ \eta_{2,k} &= \sqrt{2\rho_{2,k}} \sin \omega_{2,k}, \\ n_k &= \frac{\mu_k^{*2}}{\mu_k L_k^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1).$

Формулы (4.4.17) выражают элементы второй системы Пуанкаре через элементы первой системы. Связь между элементами второй системы Пуанкаре и кеплеровскими оскулирующими элементами относительного движения дается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \sqrt{\mu_k^* a_k}, \\ \xi_{1,k} &= \sqrt{2 \sqrt{\mu_k^* a_k} (1 - \sqrt{1 - e_k^2})} \cos \pi_k, \\ \xi_{2,k} &= \sqrt{2 \sqrt{\mu_k^* a_k} (1 - e_k^2) (1 - \cos i_k)} \cos \Omega_k, \\ \lambda_k &= n_k (t - \tau_k) + \pi_k, \\ \eta_{1,k} &= -\sqrt{2 \sqrt{\mu_k^* a_k} (1 - \sqrt{1 - e_k^2})} \sin \pi_k, \\ \eta_{2,k} &= -\sqrt{2 \sqrt{\mu_k^* a_k} (1 - e_k^2) (1 - \cos i_k)} \sin \Omega_k \end{aligned} \right\} \quad (4.4.18)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1).$

С помощью элементов (4.4.16) и (4.4.17) уравнения возмущенного движения точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}, & \frac{d\rho_{1,k}}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \omega_{1,k}}, & \frac{d\rho_{2,k}}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \omega_{2,k}}, \\ \frac{d\lambda_k}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_k}, & \frac{d\omega_{1,k}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \rho_{1,k}}, & \frac{d\omega_{2,k}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \rho_{2,k}} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.19)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1);$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}, & \frac{d\xi_{1,k}}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_{1,k}}, & \frac{d\xi_{2,k}}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_{2,k}}, \\ \frac{d\lambda_k}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_k}, & \frac{d\eta_{1,k}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi_{1,k}}, & \frac{d\eta_{2,k}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi_{2,k}} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.20)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1),$

где гамильтониан  $F$  выражается соотношением (4.4.14).

Канонические системы уравнений (4.4.08), (4.4.15), (4.4.19), (4.4.20) имеют порядок  $6n - 6$  и определяют (если воспользоваться формулами § 3.09) положение точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  в координатной системе  $P_0xyz$ . Если движение точки  $P_0$  в абсолютной системе известно, то легко определяется абсолютное движение всей системы  $n$  материальных точек.

#### § 4.08. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов

Второе и пятое уравнения системы (4.4.06) имеют особенности при  $e_s = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ), поэтому их использование в случае эксцентриситетов, близких к нулю, затруднительно. Для устранения этих особенностей Лагранж предложил вместо оскулирующих элементов  $e_s, \pi_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ) ввести переменные  $h_s, k_s$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} h_s &= e_s \sin \pi_s, \\ k_s &= e_s \cos \pi_s \end{aligned} \right\} \quad (4.4.21)$$

$(s = 1, 2, \dots, n-1)$

Введем теперь вместо систем эллиптических кеплеровских элементов  $a_s, e_s, i_s, \Omega_s, \pi_s, \varepsilon_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ) новые системы оскулирующих элементов  $a_s, h_s, i_s, \Omega_s, k_s, \varepsilon_s$ . В этих элементах уравнения возмущенного движения системы материаль-

ных точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  относительно  $P_0$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{da_s}{dt} &= \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \\
 \frac{dh_s}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}}{n_s a_s^2} \left( \frac{\partial R_s}{\partial k_s} - \frac{h_s}{1+\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial e_s} \right) + \\
 &\quad + \frac{k_s \operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial i_s}, \\
 \frac{di_s}{dt} &= - \frac{1}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2} \sin i_s} \frac{\partial R_s}{\partial \Omega_s} - \\
 &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \left( k_s \frac{\partial R_s}{\partial h_s} - h_s \frac{\partial R_s}{\partial k_s} + \frac{\partial R_s}{\partial e_s} \right), \\
 \frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{1}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2} \sin i_s} \frac{\partial R_s}{\partial i_s}, \\
 \frac{dk_s}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}}{n_s a_s^2} \left( \frac{\partial R_s}{\partial h_s} + \frac{k_s}{1+\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial e_s} \right) - \\
 &\quad - \frac{h_s \operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial i_s}, \\
 \frac{de_s}{dt} &= - \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}}{n_s a_s^2 (1+\sqrt{1-h_s^2-k_s^2})} \left( h_s \frac{\partial R_s}{\partial h_s} + k_s \frac{\partial R_s}{\partial k_s} \right).
 \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

В уравнениях (4.4.22) возмущающие функции  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ) должны быть выражены в виде функций переменных  $a_s, h_s, i_s, \Omega_s, k_s, e_s$  и  $t$ .

#### § 4.09. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов

Устранить особенности  $i_s = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ) в третьем и четвертом уравнениях системы (4.4.06) можно при помощи введения переменных Лагранжа  $p_s, q_s$  по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 p_s &= \operatorname{tg} i_s \sin \Omega_s, \\
 q_s &= \operatorname{tg} i_s \cos \Omega_s.
 \end{aligned} \right\} \tag{4.4.23}$$

( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ).

В новых переменных  $a_s, e_s, p_s, q_s, \pi_s, e_s$  уравнения возмущенного

движения системы материальных точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  относительно  $P_0$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{da_s}{dt} &= \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \\
 \frac{de_s}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s} \frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} - \frac{e_s \sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 (1+\sqrt{1-e_s^2})} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \\
 \frac{dp_s}{dt} &= \frac{(1+p_s^2+q_s^2)^{3/2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial q_s} - \\
 &\quad - \frac{p_s (1+p_s^2+q_s^2)}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2} (1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2})} \left( \frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} + \frac{\partial R_s}{\partial e_s} \right), \\
 \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{(1+p_s^2+q_s^2)^{3/2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial p_s} - \\
 &\quad - \frac{q_s (1+p_s^2+q_s^2)}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2} (1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2})} \left( \frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} + \frac{\partial R_s}{\partial e_s} \right), \\
 \frac{d\pi_s}{dt} &= \frac{1+p_s^2+q_s^2}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}} \left( p_s \frac{\partial R_s}{\partial p_s} + q_s \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \\
 \frac{de_s}{dt} &= -\frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \frac{1+p_s^2+q_s^2}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}} \times \\
 &\quad \times \left( p_s \frac{\partial R_s}{\partial p_s} + q_s \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \right) + \frac{e_s \sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 (1+\sqrt{1-e_s^2})} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}
 \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Как и в случае (4.3.29), не следует путать переменные Лагранжа  $p_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ) с фокальными параметрами конических сечений. В уравнениях (4.4.24) возмущающие функции  $R_s$  должны быть выражены в виде функций переменных  $a_s, e_s, p_s, q_s, \pi_s, e_s$  и  $t$ .

#### § 4.10. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай)

Для случая малых эксцентриситетов и малых наклонов ( $e_s \approx 0, i_s \approx 0, s = 1, 2, \dots, n-1$ ) удобнее рассматривать вместо оскулирующих элементов  $e_s, i_s, \Omega_s, \pi_s$  переменные Лагранжа  $h_s, k_s, p_s, q_s$ . Тогда уравнения возмущенного движения системы материальных точек  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  относительно  $P_0$

в переменных  $a_s, h_s, p_s, q_s, k_s, \epsilon_s$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{da_s}{dt} &= \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial \epsilon_s}, \\
 \frac{dh_s}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}}{n_s a_s^2} \left( \frac{\partial R_s}{\partial k_s} - \frac{h_s}{1+\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial \epsilon_s} \right) + \\
 &+ \frac{k_s(1+p_s^2+q_s^2)}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}} \left( p_s \frac{\partial R_s}{\partial p_s} + q_s \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \right), \\
 \frac{dp_s}{dt} &= \frac{(1+p_s^2+q_s^2)^{3/2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial q_s} - \\
 &- \frac{p_s(1+p_s^2+q_s^2)}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2} (1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2})} \left( k_s \frac{\partial R_s}{\partial h_s} - h_s \frac{\partial R_s}{\partial k_s} + \frac{\partial R_s}{\partial \epsilon_s} \right), \\
 \frac{dq_s}{dt} &= - \frac{(1+p_s^2+q_s^2)^{3/2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial p_s} - \\
 &- \frac{q_s(1+p_s^2+q_s^2)}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2} (1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2})} \left( k_s \frac{\partial R_s}{\partial h_s} - h_s \frac{\partial R_s}{\partial k_s} + \frac{\partial R_s}{\partial \epsilon_s} \right), \\
 \frac{dk_s}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}}{n_s a_s^2} \left( \frac{\partial R_s}{\partial h_s} + \frac{k_s}{1+\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial \epsilon_s} \right) - \\
 &- \frac{h_s(1+p_s^2+q_s^2)}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}} \left( p_s \frac{\partial R_s}{\partial p_s} + q_s \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \right), \\
 \frac{d\epsilon_s}{dt} &= - \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \\
 &+ \frac{1+p_s^2+q_s^2}{n_s a_s^2 \sqrt{1-h_s^2-k_s^2}} \frac{1}{1+\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}} \left( p_s \frac{\partial R_s}{\partial p_s} + q_s \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \right) + \\
 &+ \frac{\sqrt{1-h_s^2-k_s^2}}{n_s a_s^2 (1+\sqrt{1-h_s^2-k_s^2})} \left( h_s \frac{\partial R_s}{\partial h_s} + k_s \frac{\partial R_s}{\partial k_s} \right) \\
 &\quad (s = 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

В уравнениях (4.4.25) необходимо выразить возмущающие функции  $R_s$  через  $a_s, h_s, p_s, q_s, k_s, \epsilon_s$  и  $t$ .

В заключение укажем, что и в случае многих материальных точек связь между каноническими элементами Пуанкаре (4.4.16) и (4.4.17) и переменными Лагранжа  $h_s, k_s, p_s, q_s$  выражается приближенными равенствами (4.3.32).

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В задачах небесной механики и динамики космического полета весьма часто приходится пользоваться *специальными функциями*. К их числу относятся *эллиптические функции Якоби, функции Бесселя, сферические функции, гипергеометрические функции* и т. д.

Функции Бесселя нашли применение в разложениях координат невозмущенного кеплеровского движения (см. ч. II, гл. 3), в теории движения ИСЗ в сопротивляющейся среде (см. ч. VI, гл. 2). Сферические функции и, в частности, *полиномы Лежандра* используются в теории притяжения (см. ч. VI, гл. 1). Большие удобства дает применение гипергеометрической функции при разложении возмущающей функции в классических задачах небесной механики (см. гл. 6). Через эллиптические функции Якоби выражается решение задачи о движении ИСЗ с учетом возмущений от фигуры Земли [19].

В этой главе содержатся основные сведения из теории специальных функций. Дополнительные сведения можно найти в учебных пособиях и монографиях [13]—[16]. Кроме того, можно рекомендовать таблицы и справочные руководства И. С. Градштейна и И. М. Рыжика [17], А. М. Журавского [18], Е. Янке и Ф. Эмде [19].

### § 5.01. Эллиптические интегралы и эллиптические функции

**Определение.** *Эллиптическим интегралом 1-го рода* называется функция

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \quad (4.5.01)$$

Величина  $k$  называется *модулем* эллиптического интеграла. Величина  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  называется *дополнительным модулем*. Целесообразно рассматривать лишь  $0 \leq k < 1$  и  $0 \leq k' < 1$ .

Определение. *Эллиптическим интегралом 2-го рода* называется функция

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} \, d\lambda = \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx. \quad (4.5.02)$$

Определение. *Эллиптическим интегралом 3-го рода* называется функция

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi, n, k) &= \int_0^{\varphi} \frac{d\lambda}{(1 + n \sin^2 \lambda) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} = \\ &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \end{aligned} \quad (4.5.03)$$

Величина  $n$  — *параметр* эллиптического интеграла 3-го рода. *Полный эллиптический интеграл 1-го рода*:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}. \quad (4.5.04)$$

*Полный эллиптический интеграл 2-го рода*:

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} \, d\lambda. \quad (4.5.05)$$

*Полный эллиптический интеграл 3-го рода*:

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{(1 + n \sin^2 \lambda) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}. \quad (4.5.06)$$

Функциональные соотношения для эллиптических интегралов:

$$\left. \begin{aligned}
 F(-\varphi, k) &= -F(\varphi, k), \\
 E(-\varphi, k) &= -E(\varphi, k), \\
 F(n\pi \pm \varphi, k) &= 2nK(k) \pm F(\varphi, k), \\
 E(n\pi \pm \varphi, k) &= 2nE(k) \pm E(\varphi, k), \\
 \frac{\partial F(\varphi, k)}{\partial k} &= \frac{1}{k'^2} \left( \frac{E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k)}{k} - \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right), \\
 \frac{dK(k)}{dk} &= \frac{E(k)}{kk'^2} - \frac{K(k)}{k}, \\
 \frac{\partial E(\varphi, k)}{\partial k} &= \frac{E(\varphi, k) - F(\varphi, k)}{k}, \\
 \frac{dE(k)}{dk} &= \frac{E(k) - K(k)}{k}.
 \end{aligned} \right\} (4.5.07)$$

В приложениях часто используются следующие тригонометрические и степенные разложения:

$$\left. \begin{aligned}
 F(\varphi, k) &= \frac{2}{\pi} K(k) \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left( a_0 + \frac{2}{3} a_1 \sin^2 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \sin^4 \varphi + \dots \right), \\
 a_0 &= \frac{2}{\pi} K(k) - 1, \quad a_n = a_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n}, \\
 E(\varphi, k) &= \frac{2}{\pi} E(k) \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left( b_0 + \frac{2}{3} b_1 \sin^2 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b_2 \sin^4 \varphi + \dots \right), \\
 b_0 &= 1 - \frac{2}{\pi} E(k), \quad b_n = b_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}.
 \end{aligned} \right\} (4.5.08)$$

При  $k$  близком к 1 удобнее пользоваться разложениями

$$\left. \begin{aligned}
 F(\varphi, k) &= \frac{2}{\pi} K(k') \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \\
 &\quad - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left( c_0 - \frac{2}{3} c_1 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} c_2 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots \right), \\
 c_0 &= \frac{2}{\pi} K(k') - 1, \quad c_n = c_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k'^{2n}, \\
 E(\varphi, k) &= \frac{2}{\pi} E(k') \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \\
 &\quad + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left( d_0 - \frac{2}{3} d_1 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} d_2 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots \right), \\
 d_0 &= \frac{2}{\pi} E(k') - 1, \quad d_n = d_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k'^{2n}}{2n-1}, \\
 (2n-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1).
 \end{aligned} \right\} (4.5.09)$$



Для полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода имеются разложения

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n} \right\},$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\},$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + k_n), \quad k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}, \quad k_0 = k.$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} L_n(x) &= \int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ H_m(x) &= \int \frac{dx}{(x^2-a)^m \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.10)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$ ).

Функции  $L_n(x)$  и  $H_m(x)$  удовлетворяют *рекуррентным соотношениям*

$$\left. \begin{aligned} (2n-1)k^2L_n - (2n-2)(k^2+1)L_{n-1} + (2n-3)L_{n-2} &= \\ &= x^{2n-3} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \\ (2m-2)[-a + (k^2+1)a^2 - k^2a^3]H_m - \\ - (2m-3)[1 - 2a(k^2+1) + 3k^2a^2]H_{m-1} + \\ + (2m-4)[(k^2+1) - 3k^2a]H_{m-2} - (2m-5)k^2H_{m-3} &= \\ &= \frac{x}{(x^2-a)^{m-1}} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.11)$$

Из рекуррентных соотношений (4.5.11) следует, что все  $L_n$  и  $H_m$  при  $n \geq 2$  и  $m \geq 2$  выражаются через  $L_0, L_1, H_1$ , которые представляют собой эллиптические интегралы 1-, 2- и 3-го рода.

**О п р е д е л е н и е.** Функция, являющаяся результатом обращения эллиптического интеграла 1-го рода, называется *амплитудой*. Другими словами, если

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}},$$

то

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (4.5.12)$$

Амплитуда — бесконечнозначная функция своего аргумента с периодом  $4iK(k)$ .

*Эллиптические функции Якоби:*

$$\left. \begin{aligned} \text{эллиптический синус} \quad \operatorname{sn} u &= \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u, \\ \text{эллиптический косинус} \quad \operatorname{cn} u &= \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u, \\ \text{дельта-амплитуда} \quad \operatorname{dn} u &= \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} (4.5.13)$$

Функции Якоби — двоякопериодические с периодами:

$$\operatorname{sn} u \text{ имеет периоды } 4K \text{ и } 2K'i, \quad K' = K(k'),$$

$$\operatorname{cn} u \text{ имеет периоды } 4K \text{ и } 2(K + K'i),$$

$$\operatorname{dn} u \text{ имеет периоды } 2K \text{ и } 4K'i.$$

Эллиптические функции удовлетворяют следующим основным тождествам:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1. \end{aligned} \right\} (4.5.14)$$

Основные степенные разложения для эллиптических функций:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{am} u &= u - \frac{k^2}{3!} u^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{5!} u^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{7!} u^7 + \dots, \\ \operatorname{sn} u &= u - \frac{1+k^2}{3!} u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!} u^5 - \\ &\quad - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!} u^7 + \dots, \\ \operatorname{cn} u &= 1 - \frac{1}{2!} u^2 + \frac{1+4k^2}{4!} u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!} u^6 + \dots, \\ \operatorname{dn} u &= 1 - \frac{k^2}{2!} u^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{4!} u^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!} u^6 + \dots \end{aligned} \right\} (4.5.15)$$

Эти ряды сходятся при  $|u| < \min\{|K'|, |2K + iK'|, |2K - iK'|\}$ .

Основные тригонометрические разложения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{am} u &= \frac{\pi u}{2K} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K}, \\ \operatorname{sn} u &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin (2n-1) \frac{\pi u}{2K}, \\ \operatorname{cn} u &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos (2n-1) \frac{\pi u}{2K}, \\ \operatorname{dn} u &= \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{K}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5.16)$$

где  $q = e^{-\frac{\pi K(k')}{K(k)}}$ .

Эллиптические функции Якоби удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)}, \\ \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\sqrt{(1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u)}, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -\sqrt{(1 - \operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2)}. \end{aligned}$$

Дифференцирование эллиптических функций выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.17)$$

Эллиптической функцией Вейерштрасса называется решение дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{du} = \sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}, \quad (4.5.18)$$

где

$$\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}, \\ g_3 &= 140 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6}, \end{aligned}$$

причем штрих в суммах означает, что  $m$  и  $n$  одновременно не обращаются в нуль,  $\omega_1, \omega_2$  — любые комплексные числа, отношение которых не является вещественным числом.

Функция Вейерштрасса обозначается символом  $\wp(u)$  и одно из ее разложений вблизи  $u = 0$  имеет вид

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right\}. \quad (4.5.19)$$

Числа  $2\omega_1$  и  $2\omega_2$  являются периодами функции  $\wp(u)$ .

Основные соотношения для функции Вейерштрасса:

$$\left. \begin{aligned} \wp(-u) &= \wp(u), \quad \wp'(u) = -\wp'(-u), \\ \wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{4 \cdot 5} + \frac{g_3 u^4}{4 \cdot 7} + \frac{g_2^2 u^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} + \frac{3g_2 g_3 u^8}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} + \dots, \\ \wp\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) &= e_1 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{cn}^2(u, k)}{\operatorname{sn}^2(u, k)} = \\ &= e_2 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{dn}^2(u, k)}{\operatorname{sn}^2(u, k)} = e_3 + (e_1 - e_3) \frac{1}{\operatorname{sn}^2(u, k)}, \\ k &= \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}, \quad \omega_1 = \frac{K(k)}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_2 = \frac{iK(k')}{\sqrt{e_1 - e_3}}; \end{aligned} \right\} \quad (4.5.20)$$

$e_1 > e_2 > e_3$  — вещественные корни уравнения  $4w^3 - g_2 w - g_3 = 0$  (если  $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ ).

*Тэта-функции* определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(u) &= \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)u} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n-1)u, \\ \vartheta_2(u) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)u} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n-1)u, \\ \vartheta_3(u) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2ni u} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nu, \\ \vartheta_4(u) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2ni u} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nu. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.21)$$

Связь между тэта-функциями и эллиптическими функциями Якоби дается равенствами

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}, \\ \operatorname{cn} u &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}, \\ \operatorname{dn} u &= \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.22)$$

Представление функций Якоби через тэта-функции является одним из наиболее эффективных способов вычисления их значений, поскольку разложения тэта-функций обладают очень быстрой сходимостью ( $n$ -й член имеет порядок  $q^{n^2}$ ).

В настоящее время издано много таблиц, содержащих численные значения эллиптических интегралов и эллиптических функций [20] — [23].

### § 5.02. Гипергеометрический ряд и гипергеометрическая функция

Введем для целых неотрицательных значений  $n$  обозначение

$$(\alpha, n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (4.5.23)$$

называемое *символом Аппеля*, где  $\Gamma(\alpha)$  — *гамма-функция* (функция Эйлера), определяемая несобственным интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \quad (4.5.24)$$

Так как  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$ ,  $(\alpha, 0) = 1$ , то

$$\left. \begin{aligned} (\alpha, n) &= \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1), \quad n > 0, \\ (1, n) &= n! \\ \frac{(-\alpha, n)}{(1, n)} &= (-1)^n \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} = (-1)^n C_n^\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.25)$$

Определение. Ряд, определяемый равенством

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} z^n, \quad (4.5.26)$$

называется *гипергеометрическим рядом*. Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $z$  называются соответственно 1-м, 2-м, 3-м и 4-м элементами ряда. Гипергеометрический ряд является целым рядом относительно комплексного переменного  $z$ , рядом многочленов относительно  $\alpha$  и  $\beta$ .

При любых комплексных числах  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (за исключением двух случаев: а)  $\gamma$  — нуль или целое отрицательное число; б)  $\gamma$  и  $\alpha$  или  $\gamma$  и  $\beta$  — нули или целые отрицательные числа) ряд (4.5.26) абсолютно сходится внутри единичного круга  $|z| < 1$ . На границе единичного круга  $|z| = 1$  ряд (4.5.26) абсолютно сходится, если  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ , условно сходится (за исключением точки  $z = 1$ ), если  $-1 < \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) \leq 0$ , и расходится, если  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) < -1$ .

Определение. Многозначная функция комплексного переменного  $z$ , обозначаемая  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , являющаяся аналитическим продолжением ряда (4.5.26); называется *гипергеометрической функцией* [15].

Гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0, \quad (4.5.27)$$

которое называется *дифференциальным уравнением Гаусса*, или *гипергеометрическим уравнением*.

Решение гипергеометрического уравнения (4.5.27) голоморфно на всей плоскости  $z$ , за исключением, быть может, точек  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = \infty$ , которые являются регулярными особыми точками. Если ни одно из чисел  $\gamma$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $\gamma - \alpha - \beta$  не является нулем или целым числом, то в окрестности каждой из особых точек существуют два линейно независимых регулярных решения.

Разложения этих решений в окрестности особой точки  $z = 0$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} w_1(z) &= F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ w_2(z) &= z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; z). \end{aligned} \right\} (4.5.28)$$

В окрестности особой точки  $z = 1$  решения гипергеометрического уравнения (4.5.27) представляются гипергеометрическими рядами

$$\left. \begin{aligned} w_3(z) &= F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma; 1 - z), \\ w_4(z) &= (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta; 1 - z). \end{aligned} \right\} (4.5.29)$$

Согласно сказанному ряды (4.5.28) и (4.5.29) абсолютно сходятся внутри кругов  $|z| < 1$  и  $|z - 1| < 1$  соответственно.

В окрестности особой точки  $z = \infty$  имеем следующие два регулярных решения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_5(z) &= z^{-\alpha} F\left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{z}\right), \\ \omega_6(z) &= z^{-\beta} F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha; \frac{1}{z}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.5.30)$$

абсолютно сходящиеся при  $|z| > 1$ . Все известные 24 решения гипергеометрического уравнения (таблица Куммера) можно найти в книге [15].

Приведем выражения некоторых элементарных функций через гипергеометрический ряд [17]:

$$\left. \begin{aligned} (1-z)^{-\alpha} &= F(\alpha, \beta, \beta; z), \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= F(1, 1, 1; z), \\ \ln \frac{1}{1-z} &= zF(1, 1, 2, z), \\ \arcsin z &= zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right), \\ \operatorname{arctg} z &= zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right), \\ \cos(k \arcsin z) &= F\left(\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right), \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right), \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi &= \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.5.31)$$

В небесной механике и астродинамике чаще всего встречается гипергеометрический ряд с вещественным аргументом, который в дальнейшем будем обозначать буквой  $x$ .

### § 5.03. Полиномы Лежандра. Функции Лежандра

**О п р е д е л е н и е.** Полиномами Лежандра называются многочлены  $n$ -й степени

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (4.5.32)$$

Весьма распространено следующее представление для полиномов Лежандра (*формула Родрига*):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (4.5.33)$$

Из предыдущей формулы имеем, в частности:

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3x), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \right\} \quad (4.5.34)$$

Если  $x = \cos \theta$ , то получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left[ \cos n\theta + \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right],$$

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1), \quad P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta),$$

$$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9),$$

$$P_5(\cos \theta) = \frac{1}{128}(63 \cos 5\theta + 36 \cos 3\theta + 30 \cos \theta).$$

Кроме того, применяется *интегральное представление Лапласа*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi, \quad (4.5.35)$$

*интегральные представления Мейера*

$$\left. \begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2}(\cos \varphi - \cos \theta)} d\varphi, \\ P_n(\cos \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2}(\cos \theta - \cos \varphi)} d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.5.36)$$



а также

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \bar{P}_{nk} \cos(n-2k)\theta,$$

$$\bar{P}_{nk} = \frac{2}{\delta_{n-2k}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!},$$

$$\delta_0 = 2, \quad \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 1.$$

Соотношения ортогональности полиномов Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases} \\ \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx &= 0 \quad \text{при } k=0, 1, \dots, n-1, \\ \int_0^1 x^k P_n(x) dx &= \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\dots(k-n+3)}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos \theta) d\theta &= \left(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n+1}(\cos \theta) \cos \theta d\theta &= \frac{C_{2n}^n C_{2n+2}^{n+1}}{2^{4n+2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.37)$$

Определение. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \alpha(\alpha+1)w = 0 \quad (4.5.38)$$

называется *дифференциальным уравнением Лежандра*. Оно имеет два независимых решения.

Первое решение — *функция Лежандра 1-го рода*, выражаемая с помощью гипергеометрического ряда

$$P_\alpha(z) = F\left(-\alpha, \alpha+1, 1; \frac{1-z}{2}\right), \quad (4.5.39)$$

абсолютно сходящегося в круге  $|z-1| < 2$ .

Второе решение — *функция Лежандра 2-го рода*

$$Q_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} x^{-\alpha-1} F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha+2}{2}, \alpha+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right). \quad (4.5.40)$$

Ряд (4.5.40) абсолютно сходится при  $|z| > 1$ . Функции Лежандра удовлетворяют оценкам

$$|P_\alpha(\cos \theta)| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi \sin \theta}}, \quad |Q_\alpha(\cos \theta)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha \sin \theta}}. \quad (4.5.41)$$

Имеют место следующие *рекуррентные соотношения*:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + 1)P_{\alpha+1}(z) - (2\alpha + 1)zP_\alpha(z) + \alpha P_{\alpha-1}(z) &= 0, \\ (z^2 - 1)\frac{dP_\alpha(z)}{dz} &= \alpha z P_\alpha(z) - \alpha P_{\alpha-1}(z), \\ \frac{dP_{\alpha+1}(z)}{dz} - z\frac{dP_\alpha(z)}{dz} &= (\alpha + 1)P_\alpha(z). \end{aligned} \right\} \quad (4.5.42)$$

При  $\alpha = n$  (где  $n$  — целое неотрицательное число) функция Лежандра 1-го рода обращается в *полином Лежандра  $n$ -й степени* (4.5.32).

Полиномы Лежандра можно определить как коэффициенты разложений

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2tz + t^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n, \\ (1 - 2tz + t^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{1}{t^{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.43)$$

Первое разложение сходится при  $|t| < \min |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$ , второе — при  $|t| > \max |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$ . Функция  $(1 - 2tz + t^2)^{-1/2}$  называется *производящей функцией* полиномов Лежандра.

### § 5.04. Присоединенные функции Лежандра

*Определение. Присоединенной функцией Лежандра 1-го рода* называется следующая функция комплексного переменного:

$$P_{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{\beta}{2}} F\left(-\alpha, \alpha+1, 1-\beta; \frac{1-z}{2}\right). \quad (4.5.44)$$

Присоединенную функцию Лежандра 1-го рода можно определить также с помощью соотношения (для целых  $\beta$ )

$$P_{\alpha m}(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\alpha(z)}{dz^m}. \quad (4.5.45)$$

Присоединенная функция Лежандра является одним из линейно независимых решений дифференциального уравнения

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[ \alpha(\alpha + 1) - \frac{\beta^2}{1 - z^2} \right] w = 0, \quad (4.5.46)$$

рассматриваемого в комплексной области, если  $\alpha + \beta \neq -n < 0$ .

Если  $\alpha = n$ ,  $\beta = m$ , где  $n$  — натуральное, а  $m = 0, 1, \dots, n$ ,  $z = x$ , то гипергеометрический ряд, входящий в выражение присоединенной функции Лежандра 1-го рода, обращается в обобщенный полином

$$P_{nm}(x) = \frac{(-1)^m (2n)!}{2^n n! (n-m)!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} x^{n-m} F\left(\frac{m-n}{2}, \frac{m-n+1}{2}, \frac{1}{2} - n; \frac{1}{x^2}\right). \quad (4.5.47)$$

Присоединенные функции Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_{nm}(x) P_{nk}(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & m = k, \end{cases} \quad (4.5.48)$$

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi e^{\pm im\varphi} e^{\mp ik\varphi} P_{nm}(\cos \theta) P_{nk}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0; & m \neq k \\ \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & m = k. \end{cases} \quad (4.5.49)$$

Важное свойство полиномов Лежандра выражается соотношением

$$P_n(\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta_1) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_1). \quad (4.5.50)$$

Равенство (4.5.50) представляет собой теорему сложения для полиномов Лежандра.

Рекуррентные соотношения, интегральные представления и асимптотические разложения для присоединенных функций Лежандра можно найти в [13], [15].

### § 5.05. Сферические функции

Пусть задано уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (4.5.51)$$

**Определение.** Сферическими многочленами  $P_n(x, y, z)$  называются однородные многочлены переменных  $x, y, z$  степени  $n$ , являющиеся решениями уравнения Лапласа (4.5.51).

Уравнение (4.5.51) имеет  $2n + 1$  линейно независимых решения  $P_n(x, y, z)$ . В сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  ( $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ ) сферические многочлены имеют вид

$$P_n(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (4.5.52)$$

**Определение.** Функции  $Y_n(\theta, \varphi)$  называются сферическими функциями Лапласа, или сферическими функциями  $n$ -го порядка.

Функция  $Y_n(\theta, \varphi)$  является решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0. \quad (4.5.53)$$

Сферическая функция  $n$ -го порядка  $Y_n(\theta, \varphi)$  выражается формулой

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_{nm}(\cos \theta), \quad (4.5.54)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  — постоянные коэффициенты.

**Определение.** Функции  $Y_{n0} = P_n(\cos \theta)$  называются зональными сферическими функциями, или зональными гармониками. Функции  $Y_{nn}(\theta, \varphi) = P_{nn}(\cos \theta) \cos n\varphi$  и  $Y_{nn}^*(\theta, \varphi) = P_{nn}(\cos \theta) \sin n\varphi$  называются секториальными сферическими функциями, или секториальными гармониками, а функции

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_{nm}(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad Y_{nm}^*(\theta, \varphi) = P_{nm}(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (0 < m < n)$$

называются тессеральными гармониками. Зональные гармоники обращаются в нуль на множестве параллелей, разделяющих единичную сферу на зоны: секториальные гармоники обращаются в нуль на множестве меридианов, разделяющих сферу на  $n$  секторов, а тессеральные гармоники равны нулю и на множестве параллелей и на множестве меридианов.

*Свойства ортогональности* сферических функций на единичной сфере выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n0}(\theta) Y_{k0}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{4\pi}{2n+1}, & n = k, \end{cases} \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nn}(\theta, \varphi) Y_{kk}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2\pi}{2n+1}, & n = k, \end{cases} \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nn}^*(\theta, \varphi) Y_{kk}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2\pi \cdot (2n)!}{2n+k}, & n = k, \end{cases} \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{ks}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi &= 0, \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{ks}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nk} \delta_{ms}, \end{aligned} \right\} (4.5.55)$$

где  $\delta_{nk}$  — символ Кронекера [14],

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}^*(\theta, \varphi) Y_{ks}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nk} \delta_{ms}, \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n(\theta, \varphi) Y_p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi &= \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq p, \\ \frac{2\pi}{2n+1} \left[ 2a_0^2 + \sum_{m=1}^n (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right], & n = p. \end{cases} \end{aligned} \right\} (4.5.56)$$

*Теорема. Всякая непрерывная и дважды дифференцируемая с непрерывными производными функция  $f(\theta, \varphi)$ , определенная на единичной сфере, разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям.*

Другими словами,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_{nm}(\cos \theta) \right], \quad (4.5.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \\ A_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_{nm}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \\ B_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_{nm}(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.58)$$

### § 5.06. Цилиндрические функции. Функции Бесселя

Определение. *Функцией Бесселя*  $I_\lambda(z)$  порядка  $\lambda$  называется функция

$$I_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2n} \quad (4.5.59)$$

$I_\lambda(z)$  является аналитической функцией  $z$  при всех комплексных значениях  $z$  (кроме, быть может,  $z=0$ ) и аналитической функцией  $\lambda$  для всех  $\lambda$ . Функция Бесселя  $I_\lambda(z)$  называется также *цилиндрической функцией 1-го рода*.

Если  $\lambda$  — натуральное число, то вместо (4.5.59) будем иметь

$$I_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\lambda)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\lambda}, \quad |z| < \infty. \quad (4.5.60)$$

При  $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{2}$  справедливо соотношение

$$I_\lambda(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{tz \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta \, d\theta. \quad (4.5.61)$$

Если  $\lambda = n$  — натуральное число, то функция Бесселя  $I_n(z)$  является коэффициентом разложения

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) t^n. \quad (4.5.62)$$

Функция  $e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$  называется *производящей функцией* для функций Бесселя.

Простейшие функции Бесселя суть

$$I_0(z) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots, \quad (4.5.63)$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \left[ 1 - \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{3! 4!} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots \right]. \quad (4.5.64)$$

Через эти две функции можно выразить функции Бесселя всех других целых порядков. Для этой цели следует воспользоваться *рекуррентными соотношениями*, связывающими функции Бесселя:

$$I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} I_n(z) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (4.5.65)$$

$$I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = 2I'_n(z) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.5.66)$$

Кроме того, справедлива формула

$$I_{-n}(z) = (-1)^n I_n(z). \quad (4.5.67)$$

Для функций Бесселя имеют место следующие *интегральные представления*:

$$\left. \begin{aligned} I_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi, \\ I_{2n}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \varphi) \cos 2n\varphi d\varphi, \\ I_{2n+1}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \varphi) \sin(2n+1)\varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.68)$$

Функция Бесселя  $I_\lambda(z)$  является частным решением *уравнения Бесселя*

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) w = 0, \quad (4.5.69)$$

а функция Бесселя  $I_\lambda(kz)$  есть частное решение уравнения (также называемого *уравнением Бесселя*)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) w = 0. \quad (4.5.70)$$

Свойство ортогональности: если вещественное число  $\lambda > -1$ , то

$$\int_0^1 z I_\lambda(k_1 z) I_\lambda(k_2 z) dz = 0. \quad (4.5.71)$$

Для вещественных  $\lambda > -1$  функция Бесселя  $I_\lambda(z)$  имеет бесчисленное множество вещественных корней. Если  $z = k_1$ ,  $z = k_2$  — два различных положительных корня уравнения  $I_\lambda(z) = 0$ , то получаем второе свойство ортогональности функций Бесселя

$$\int_0^1 z I_\lambda(k_1 z) I_\lambda(k_2 z) dz = 0. \quad (4.5.72)$$

Пусть  $W_\lambda(z)$  — общее решение уравнения Бесселя (4.5.69). Тогда имеют место рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^\lambda W_\lambda(z)] &= z^\lambda W_{\lambda-1}(z), & \frac{d}{dz} [z^{-\lambda} W_\lambda(z)] &= -z^{-\lambda} W_{\lambda+1}(z), \\ W_{\lambda-1}(z) + W_{\lambda+1}(z) &= \frac{2\lambda}{z} W_\lambda(z), & W_{\lambda-1}(z) - W_{\lambda+1}(z) &= 2 \frac{dW_\lambda(z)}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.73)$$

В частности,

$$W_1(z) = \frac{dW_0(z)}{dz}.$$

Теоремы сложения и умножения для функций Бесселя:

$$W_0(\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi}) = W_0(R) I_0(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n(R) I_n(r) \cos n\varphi,$$

в частности,

$$I_0(\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi}) = I_0(R) I_0(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(R) I_n(r) \cos n\varphi. \quad (4.5.74)$$

При  $|z| < |t|$  имеем

$$W_\lambda(z+t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{\lambda-n}(t) I_n(z), \quad W_\lambda(z-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{\lambda+n}(t) I_n(z),$$

$$e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) i^n I_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos \theta).$$



Наиболее употребляемые в приложениях *асимптотические представления* для функций Бесселя:

$$I_{\lambda}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (4.5.75)$$

или

$$I_{\lambda}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \cos\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1}) \right]. \quad (4.5.76)$$

В теории движения ИСЗ с учетом возмущений от сопротивления атмосферы используются *функции Бесселя от мнимого аргумента* (или модифицированной функции Бесселя). Они могут быть определены с помощью формулы

$$I_{\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2n}, \quad |z| < \infty, |\arg z| < \pi. \quad (4.5.77)$$

Функция  $I_{\lambda}(z)$  связана с функциями Бесселя от аргумента  $ze^{\frac{\pi i}{2}}$ :

$$I_{\lambda}(z) = e^{-\frac{\pi\lambda i}{2}} I_{\lambda}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right). \quad (4.5.78)$$

Функции Бесселя от мнимого аргумента удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{\lambda^2}{z^2}\right) w = 0. \quad (4.5.79)$$

Для них справедливы следующие *рекуррентные* соотношения:

$$I_{\lambda-1}(z) - I_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} I_{\lambda}(z), \quad (4.5.80)$$

$$I_{\lambda-1}(z) + I_{\lambda+1}(z) = 2I'_{\lambda}(z), \quad (4.5.81)$$

$$I_{-\lambda}(z) = I_{\lambda}(z), \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.5.82)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{\lambda} I_{\lambda}(z)] = z^{\lambda} I_{\lambda-1}(z). \quad (4.5.83)$$

*Интегральное представление* для функции Бесселя от мнимого аргумента имеет вид

$$I_{\lambda}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda-1/2} \operatorname{ch} tz dt. \quad (4.5.84)$$

Можно также пользоваться *асимптотическим представлением* этих функций

$$I_{\lambda}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[ e^{-z - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\pi i} + e^z \right] [1 + O(z^{-1})]. \quad (4.5.85)$$

Функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного числа, выражаются через элементарные функции. В частности,

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}},$$

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( -\frac{\cos z}{\sqrt{z}} + \frac{\sin z}{z\sqrt{z}} \right), \quad I_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( -\frac{\sin z}{\sqrt{z}} - \frac{\cos z}{z\sqrt{z}} \right).$$

Кроме функций Бесселя к цилиндрическим функциям относят функции Неймана (или функции Бесселя 2-го рода) и функции Ганкеля.

Функцией Неймана порядка  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ) называется функция

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{\sin \lambda \pi} [I_\lambda(z) \cos \lambda \pi - I_{-\lambda}(z)],$$

а функциями Ганкеля 1-го и 2-го рода называются соответственно комбинации

$$H_\lambda^{(1)}(z) = I_\lambda(z) + iN_\lambda(z),$$

$$H_\lambda^{(2)}(z) = I_\lambda(z) - iN_\lambda(z).$$

Описание других свойств цилиндрических функций вообще и функций Бесселя, в частности, можно найти в [13] — [16].

### § 5.07. Функции Ламе

О п р е д е л е н и е. Уравнением Ламе в форме Вейерштрасса называется уравнение

$$\frac{d^2 \Lambda}{dz^2} + [-n(n+1)\wp(z) + B]\Lambda = 0, \quad (4.5.86)$$

где  $\wp(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса,  $n$  — целое неотрицательное число,  $B$  — некоторая постоянная.

Существует  $2n + 1$  значение постоянной  $B$ , для которых решение уравнения Ламе имеет вид либо многочлена относительно  $\wp(z)$ , либо произведения такого многочлена на множители вида

$$\sqrt{\wp(z) - e_1}, \quad \sqrt{\wp(z) - e_2}, \quad \sqrt{\wp(z) - e_3}.$$

Итак, для заданного  $n$  существует  $2n + 1$  решение уравнения Ламе указанного вида, которые называются функциями Ламе  $n$ -й степени 1-го разряда.

Если  $e_1, e_2, e_3$  (см. § 5.01) вещественны ( $e_1 > e_2 > e_3$ ), то при четном  $n$  имеется  $\frac{n}{2} + 1$  вещественных и различных значений  $B$ , для которых уравнение (4.5.86) имеет решение вида

$$\Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_k (\varphi(z) - e_2)^{\frac{n}{2}-k}. \quad (4.5.87)$$

Для нечетного  $n$  имеется  $(n+1)/2$  вещественных и различных значений  $B$ , для которых решение уравнения Ламе имеет вид

$$\Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} b_k (\varphi(z) - e_2)^{\frac{n}{2}-k}. \quad (4.5.88)$$

Коэффициенты  $b_k$  выражаются через  $B$  с помощью равенства

$$b_k = \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s B^s}{(2s)!! (2n-1)(2n-3) \dots (2n-2s+1)} \quad (k \leq n). \quad (4.5.89)$$

Для того чтобы уравнение Ламе (4.5.86) имело решения в конечном виде (4.5.87) и (4.5.88) относительно  $\varphi(z)$ , необходимо определять постоянную  $B$  из уравнений:

для четного  $n$  из условия

$$b_{\frac{n}{2}+1} = 0,$$

для нечетного  $n$  из условия

$$b_{\frac{n+1}{2}} = 0.$$

С помощью функций Ламе выражаются так называемые *эллипсоидальные функции*, являющиеся решениями уравнения Лапласа, преобразованного к эллипсоидальным координатам. Более подробно о функциях Ламе см. книги [16].

### § 5.08. Полиномы Гегенбауэра. Коэффициенты Лапласа

О п р е д е л е н и е. *Полиномами Гегенбауэра* называются коэффициенты  $C_n^\lambda(t)$  разложения

$$(1 - 2t\alpha + \alpha^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(t) \alpha^n. \quad (4.5.90)$$

С помощью гипергеометрического ряда они представляются формулой

$$C_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)} F\left(2\lambda + n; -n; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-t}{2}\right). \quad (4.5.91)$$

Основные рекуррентные соотношения для полиномов Гегенбауэра:

$$\left. \begin{aligned} (n+2)C_{n+2}^\lambda(t) &= 2(\lambda+n+1)tC_{n+1}^\lambda(t) - (2\lambda+n)C_n^\lambda(t), \\ nC_n^\lambda(t) &= 2\lambda[tC_{n-1}^{\lambda+1}(t) - C_{n-2}^{\lambda+1}(t)], \\ (2\lambda+n)C_n^\lambda(t) &= 2\lambda[C_n^{\lambda+1}(t) - tC_{n-1}^{\lambda+1}(t)], \\ nC_n^\lambda(t) &= (2\lambda+n-1)tC_{n-1}^\lambda(t) - 2\lambda(1-t^2)C_{n-2}^{\lambda-1}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.5.92)$$

Тригонометрическое представление для  $C_n^\lambda(t)$ :

$$C_n^\lambda(\cos \varphi) = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\lambda+k)\Gamma(\lambda+n-k)}{k!(n-k)![\Gamma(\lambda)]^2} \cos(2k-n)\varphi.$$

Кроме того, отметим, что полиномы Гегенбауэра ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ .

**О п р е д е л е н и е.** Коэффициенты  $b_n^{(k)}$  разложения

$$(1+z^2-2z\cos\lambda)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_n^{(k)} \cos k\lambda \quad (4.5.93)$$

$$(b_n^{(k)} = b_n^{(-k)})$$

называются *коэффициентами Лапласа*. Они выражаются через гипергеометрический ряд с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} b_n^{(k)} &= \frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)}{(1, k)} z^k F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k, k+1; z^2\right), \\ b_n^{(k)} &= \frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)}{(1, k)} z^k (1-z^2)^{-\frac{n}{2}} F\left(\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, k+1; \frac{-z^2}{1-z^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.5.94)$$

где  $\left(\frac{n}{2}; k\right)$  — символ Аппеля (4.5.23).

Первый из рядов (4.5.94) сходится (см. § 5.01) при  $|z| < 1$ , а второй — при  $|z| < 2^{-1/2}$ . Для больших значений  $k$  применение первого ряда (4.5.94) более выгодно, поскольку в этом случае его коэффициенты быстро стремятся к нулю. Если  $|z| > 2^{-1/2}$ , то второй ряд (4.5.94) расходится, но для любого конечного  $k$  им можно пользоваться, так как он является асимптотическим.

В развернутом виде ряды (4.5.94) имеют вид

$$\begin{aligned}
 b_n^{(k)} &= \frac{2n \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{n}{2} + k - 1\right)}{k!} z^k \left[ 1 + \frac{n}{2} \frac{\frac{n}{2} + k}{k + 1} z^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n}{2} \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + k\right) \left(\frac{n}{2} + k + 1\right)}{2! (k + 1)(k + 2)} z^4 + \dots \right], \\
 b_n^{(k)} &= \frac{2n \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{n}{2} + k - 1\right)}{k!} z^k (1 - z^2)^{-\frac{n}{2}} \left[ 1 + \frac{n}{2} \frac{\frac{n}{2} - 1}{k + 1} p + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n}{2} \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right)}{(k + 1)(k + 2)} p^2 + \dots \right], \quad p = \frac{z^2}{1 - z^2}.
 \end{aligned} \tag{4.5.95}$$

В частности,

$$b_n^{(0)} = 2 \left[ 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 z^2 + \left(\frac{n(n+2)}{2 \cdot 4}\right)^2 z^4 + \dots \right].$$

Основные рекуррентные соотношения для коэффициентов Лапласа:

$$\left. \begin{aligned}
 b_n^{(k+1)} &= \frac{2k}{2k - n + 2} (z + z^{-1}) b_n^{(k)} - \frac{2k + n - 2}{2k - n + 2} b_n^{(k-1)}, \\
 k b_n^{(k)} &= \frac{n}{2} z (b_{n+2}^{(k-1)} - b_{n+2}^{(k+1)}), \\
 b_n^{(k)} &= (1 + z^2) b_{n+2}^{(k)} - z (b_{n+2}^{(k-1)} + b_{n+2}^{(k+1)}), \\
 n(1 - z^2) (b_{n+2}^{(k)} + b_{n+2}^{(k+1)}) &= (2k + n) b_n^{(k)} - (2k - n + 2) b_n^{(k+1)}, \\
 n(1 - z^2) (b_{n+2}^{(k)} - b_{n+2}^{(k+1)}) &= (2k + n) b_n^{(k)} + (2k - n + 2) b_n^{(k+1)}, \\
 \frac{d b_n^{(k)}}{dz} &= \frac{n}{2} (b_{n+2}^{(k-1)} + b_{n+2}^{(k+1)} - 2z b_{n+2}^{(k)}).
 \end{aligned} \right\} \tag{4.5.96}$$

Соотношения (4.5.96) позволяют определить все коэффициенты Лапласа, если известны коэффициенты  $b_1^{(0)}$  и  $b_1^{(1)}$ .

Интегральные представления для коэффициентов Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} b_n^{(k)} &= \frac{n(n+2)\dots(n+2k-2)}{(2k-1)!} \frac{2}{\pi} z^k \times \\ &\quad \times \int_0^\pi \left\{ \frac{z \cos \lambda + \sqrt{1-z^2 \sin^2 \lambda}}{1-z^2} \right\}^{n-1} \frac{\sin^{2k} \lambda \, d\lambda}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \lambda}}, \\ b_1^{(k)} &= \frac{4}{\pi} z^k \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} \lambda \, d\lambda}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \lambda}}, \\ b_1^{(0)} &= \frac{4}{\pi} K(z), \\ b_1^{(1)} &= \frac{4}{\pi z} [K(z) - E(z)], \end{aligned} \right\} (4.5.97)$$

где  $K(z)$  и  $E(z)$  — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Наряду с последним рекуррентным соотношением (4.5.96) применяется другое соотношение, выведенное Ньюкомом.

Введем величины

$$\left. \begin{aligned} c_n^{(k)} &= z^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(k)}, \quad D^s c_n^{(k)} = \frac{d^s c_n^{(k)}}{(d \ln z)^s}, \\ c_n^{(k,r)} &= 2^{r+1} \left( \frac{n}{2}, r \right) \frac{\left( \frac{n}{2}, k+r \right)}{(1, k+r)} z^{\frac{1}{2}(n+2k+4r-1)} \times \\ &\quad \times F\left( \frac{n}{2} + r, \frac{n}{2} + k+r, k+r+1; z^2 \right), \end{aligned} \right\} (4.5.98)$$

которые называются коэффициентами Ньюкома и функцией Ньюкома соответственно. Очевидно, что

$$c_n^{(k)} = c_n^{(k,0)}, \quad c_n^{(-k)} = c_n^{(k)}.$$

Для «логарифмических производных» функций Ньюкома имеется рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} D^{s+1} c_n^{(k,r)} &= \frac{1}{2} (n+2k+4r-1) D^s c_n^{(k,r)} + D^s c_n^{(k,r+1)} \\ &\quad (n=1, 3, 5, \dots; k, r, s=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

В аналитических выкладках использование  $c_n^{(k)}$  иногда оказывается более удобным, чем использование коэффициентов Лапласа.

### § 5.09. Числа Коши

Пусть имеется выражение

$$I = x^{-p} \left(x + \frac{1}{x}\right)^l \left(x - \frac{1}{x}\right)^q,$$

где  $p$  — произвольное целое число,  $j, q$  — целые неотрицательные числа.

*Определение.* Числами Коши называются члены, не зависящие от  $x$  в разложении  $I$  по степеням  $x$ . Для них принято обозначение  $N_{-p, j, q}$ .

Для вычисления чисел Коши имеются следующие формулы и рекуррентные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} N_{-p, l, q} &= \begin{cases} 1, & \text{если } j + q - p = 0, \\ 0, & \text{если сумма } j + q - p \text{ отрицательна} \\ & \text{или нечетна,} \end{cases} \\ N_{p, l, q} &= (-1)^q N_{-p, l, q}, \\ N_{-p, 0, q} &= (-1)^{\frac{q-p}{2}} \frac{q!}{\left(\frac{q+p}{2}\right)! \left(\frac{q-p}{2}\right)!}, \\ N_{-p, l+1, q} &= N_{-p+1, l, q} + N_{-p-1, l, q}, \end{aligned} \right\} (4.5.99)$$

и, в частности,

$$N_{-p, l, q} = N_{-p+1, 0, q} + N_{-p-1, 0, q}.$$

## РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В задаче трех и большего числа материальных точек при аналитическом приближенном ее решении приходится иметь дело с разложением возмущающей функции в кратные ряды Фурье. Этот необходимый этап в теории возмущенного движения связан с трудоемкими вычислениями. Для многих практических задач можно использовать разложения, приводимые в этой главе. Наряду с разложениями, включенными в главу 6, в небесной механике применяются разложения с использованием канонических оскулирующих элементов. Их можно найти в ряде пособий, например, [5] — [7].

### § 6.01. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай круговых орбит)

*Определение. Планетной задачей  $n$  тел* назовем задачу о движении  $n - 1$  тел (планет)  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  с массами  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  соответственно относительно центрального тела  $P_0$  с массой  $m_0$  под действием сил взаимного тяготения, причем будем считать, что  $m_k \ll m_0$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Таким образом, планетный вариант задачи трех тел — это задача о движении двух планет  $P_1$  и  $P_2$ , с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно относительно центрального тела  $P_0$  с массой  $m_0$  ( $m_1 \ll m_0, m_2 \ll m_0$ ).

При решении задачи можно воспользоваться различными формами уравнений движения, приведенными в главе 1. Однако при интегрировании дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов необходимо иметь явное выражение для возмущающей функции через оскулирующие элементы.

В двухпланетной задаче в уравнениях движения планеты  $P_1$  относительно центрального тела  $P_0$  в качестве возмущающей функции фигурирует функция

$$R_2 = fm^2 \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_2^3} \right), \quad (4.6.01)$$



а в уравнениях движения планеты  $P_2$  фигурирует возмущающая функция

$$R_1 = f m_1 \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^3} \right), \quad (4.6.02)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

или

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\widehat{r_1, r_2})},$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \quad (i = 1, 2)$$

( $x_1, y_1, z_1$  — прямоугольные координаты планеты  $P_1$  в системе  $P_0xyz$ ,  $x_2, y_2, z_2$  — координаты планеты  $P_2$  в той же системе).

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} R_1^* &= \Delta^{-1} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^3} = \Delta^{-1} - R_{1,1}^* \\ R_2^* &= \Delta^{-1} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} = \Delta^{-1} - R_{2,2}^* \end{aligned} \right\} \quad (4.6.03)$$

Величина  $\Delta^{-1}$  называется *главной частью* возмущающей функции и ее разложение представляет наибольшие затруднения. Выражения  $R_{1,1}^*$  и  $R_{2,2}^*$  называются *дополнительной частью* возмущающей функции.

Из рис. 65 имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 + \omega_1 + \Omega_1, & \lambda_2 &= \nu_2 + \omega_2 + \Omega_2, \\ \lambda_1 &= \Lambda_1 + \tau_1, & \lambda_2 &= \Lambda_2 + \tau_2 \end{aligned}$$

и

$$\cos(\widehat{r_1, r_2}) = \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 + \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos J \quad (4.6.04)$$

или

$$\cos(\widehat{r_1, r_2}) = \cos(\Lambda_1 - \Lambda_2) - 2\sigma^2 \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2,$$

где

$$\sigma = \sin \frac{J}{2}.$$

Взаимный наклон  $J$  и углы  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \sin \frac{(\tau_1 - \Omega_1) + (\tau_2 - \Omega_2)}{2} &= \sin \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \sin \frac{i_2 + i_1}{2}, \\ \sin \frac{J}{2} \cos \frac{(\tau_1 - \Omega_1) + (\tau_2 - \Omega_2)}{2} &= \cos \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \sin \frac{i_2 - i_1}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{(\tau_1 - \Omega_1) - (\tau_2 - \Omega_2)}{2} &= \sin \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \cos \frac{i_2 + i_1}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{(\tau_1 - \Omega_1) - (\tau_2 - \Omega_2)}{2} &= \cos \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \cos \frac{i_2 - i_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.05)$$

Существуют три метода разложения возмущающей функции: *аналитический, численный и полуаналитический.*

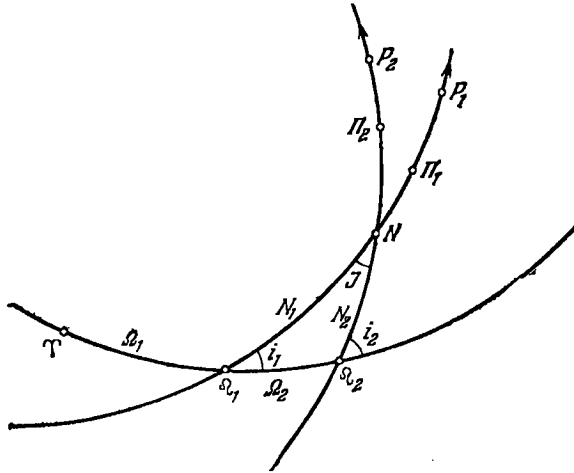


Рис. 65. Определение вспомогательных величин.  $\Upsilon \Omega_1 = \Omega_1$  — долгота восходящего узла орбиты планеты  $P_1$ ;  $i_1, i_2$  — наклоны орбит;  $\Pi_1, \Pi_2$  — перигелии орбит;  $\Omega_1 \Pi_1 = \omega_1, \Omega_2 \Pi_2 = \omega_2$  — аргументы перигелиев;  $\Pi_1 P_1 = v_1, \Pi_2 P_2 = v_2$  — истинные аномалии планет  $P_1, P_2$ ;  $\Omega_1 P_1 = u_1, \Omega_2 P_2 = u_2$  — аргументы широты;  $S$  — взаимный наклон;  $\Upsilon \Omega_1 P_1 = \lambda_1, \Upsilon \Omega_2 P_2 = \lambda_2$  — истинные долготы планет в орбите;  $NP_1 = \Lambda_1, NP_2 = \Lambda_2$  — истинные долготы планет в орбите, отсчитываемые от точки  $N$ ;  $\Omega_1 N = N_1; \Omega_2 N = N_2$ ;  $\Omega_1 + N_1 = \tau_1; \Omega_2 + N_2 = \tau_2$ .

Сначала мы приведем основные формулы для аналитического разложения возмущающей функции в планетной и лунной теориях.

Введем обозначение

$$\Delta_0 = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_2)]^{1/2}.$$

Тогда очевидно, что

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} \left\{ 1 + \frac{4\sigma^2 r_1 r_2 \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2}{\Delta_0^2} \right\}^{-1/2}$$

или

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}, k\right)}{(1, k)} (4r_1 r_2 \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2)^k \left(\frac{\sigma}{\Delta_0}\right)^{2k} \right\}, \quad (4.6.06)$$

где  $\left(-\frac{1}{2}, k\right)$  — символ Аппеля [см. (4.5.23)].

Ряд (4.6.06) сходится абсолютно, если

$$\sigma^2 < \frac{(r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2}. \quad (4.6.07)$$

Для больших планет Солнечной системы условие (4.6.07) всегда выполняется.

Разложение (4.6.06) не является окончательным, так как оно представляет величину  $\Delta^{-1}$  в виде явной функции  $\sigma^2$ , а для окончательного разложения необходимо выразить  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  также в виде явных функций оскулирующих элементов.

Для дополнительной части возмущающих функций  $R_{1,1}^*$  и  $R_{2,2}^*$  как явных функций  $\sigma^2$  имеем следующие представления:

$$\left. \begin{aligned} R_{1,1}^* &= \frac{r_2}{r_1^2} [\cos(\Lambda_1 - \Lambda_2) - \sigma^2 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_2) + \sigma^2 \cos(\Lambda_1 + \Lambda_2)], \\ R_{2,2}^* &= \frac{r_1}{r_2^2} [\cos(\Lambda_1 - \Lambda_2) - \sigma^2 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_2) + \sigma^2 \cos(\Lambda_1 + \Lambda_2)]. \end{aligned} \right\} (4.6.08)$$

Рассмотрим простейший случай круговых орбит ( $e_1 = e_2 = 0$ ), в котором

$$r_1 = a_1 = \text{const}, \quad r_2 = a_2 = \text{const}, \quad \lambda_1 = l_1, \quad \lambda_2 = l_2, \quad (4.6.09)$$

где  $l_1$ ,  $l_2$  — средние долготы планет  $P_1$  и  $P_2$  в орбите.

Для этого случая разложение (4.6.06) принимает вид

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}, k\right)}{(1, k)} (4a_1 a_2 \sin L_1 \sin L_2)^k \frac{\sigma^{2k}}{\Delta_0^{2k+1}}, \quad (4.6.10)$$

где

$$L_1 = l_1 - \tau_1, \quad L_2 = l_2 - \tau_2.$$

Пользуясь коэффициентами Ньюкома  $c_n^{(k)}$  [см. (4.5.98)], будем иметь

$$\left. \begin{aligned} (a_1 a_2)^{\frac{m-1}{2}} \Delta_0^{-m} &= \frac{1}{2} a_2^{-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_m^{(s)} \cos s(L_1 - L_2) = \\ &= a_2^{-1} \left[ \frac{c_m^{(0)}}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} c_m^{(s)} \cos s(L_1 - L_2) \right], \\ c_m^{(s)} &= \alpha \frac{m-1}{2} b_m^{(s)}, \quad \alpha = \frac{a_1}{a_2} \quad (a_1 < a_2) \\ &(m = 1, 3, 5, 7, \dots), \end{aligned} \right\} (4.6.11)$$

где  $b_m^{(s)}$  — коэффициенты Лапласа [см. (4.5.93)].

Подставляя выражения (4.6.11) в (4.6.10), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} = & \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} A_s^{(0)} \cos (sL_2 - sL_1) + \\ & + \sigma^2 \sum_{s=0}^{\infty} A_s^{(1)} \cos [(s+1)L_2 - (s-1)L_1] + \\ & + \sigma^4 \sum_{s=0}^{\infty} A_s^{(2)} \cos [(s+2)L_2 - (s-2)L_1] + \\ & + \sigma^6 \sum_{s=0}^{\infty} A_s^{(3)} \cos [(s+3)L_2 - (s-3)L_1] + \\ & + \sigma^8 \sum_{s=0}^{\infty} A_s^{(4)} \cos [(s+4)L_2 - (s-4)L_1] + \dots \quad (4.6.12) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_s^{(0)}, \dots, A_s^{(4)}$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} a_2 A_s^{(0)} = & c_1^{(s)} - \sigma^2 c_3^{(s-1)} + \frac{3}{4} \sigma^4 (c_5^{(s-2)} + 2c_5^{(s)}) - \\ & - \frac{5}{8} \sigma^6 (c_7^{(s-3)} + 9c_7^{(s-1)}) + \frac{35}{64} \sigma^8 (c_9^{(s-4)} + 16c_9^{(s-2)} + 18c_9^{(s)}) - \dots, \\ a_2 A_s^{(1)} = & \frac{1}{2} c_3^{(s)} - \frac{3}{4} \sigma^2 (c_5^{(s-1)} + c_5^{(s+1)}) + \frac{15}{16} \sigma^4 (c_7^{(s-2)} + 3c_7^{(s)} + c_7^{(s+2)}) - \\ & - \frac{35}{32} \sigma^6 (c_9^{(s-3)} + 6c_9^{(s-1)} + 6c_9^{(s+1)} + c_9^{(s+3)}) + \dots, \\ a_2 A_s^{(2)} = & \frac{3}{8} c_5^{(s)} - \frac{15}{16} \sigma^2 (c_7^{(s-1)} + c_7^{(s+1)}) + \\ & + \frac{35}{64} \sigma^4 (3c_9^{(s-2)} + 8c_9^{(s)} + 3c_9^{(s+2)}) - \dots, \\ a_2 A_s^{(3)} = & \frac{5}{16} c_7^{(s)} - \frac{35}{32} \sigma^2 (c_9^{(s-1)} + c_9^{(s+1)}) + \dots, \\ a_2 A_s^{(4)} = & \frac{35}{128} c_9^{(s)} - \dots \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Формулы (4.6.13) позволяют выписать в явном виде разложение основной части возмущающей функции с точностью до  $\sigma^8$  включительно.

Дополнительные части возмущающих функций  $R_{1,1}^*$  и  $R_{2,2}^*$  выражаются конечными формулами

$$\left. \begin{aligned} R_{1,1}^* &= \frac{a_2}{a_1^2} [(1 - \sigma^2) \cos(L_1 - L_2) + \sigma^2 \cos(L_1 + L_2)], \\ R_{2,2}^* &= \frac{a_1}{a_2^2} [(1 - \sigma^2) \cos(L_1 - L_2) + \sigma^2 \cos(L_1 + L_2)]. \end{aligned} \right\} (4.6.14)$$

**§ 6.02. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай малых эксцентриситетов и взаимного наклона)**

Леверье построил разложение возмущающей функции [25] для двухпланетной задачи с точностью до седьмых степеней эксцентриситетов орбит и синуса половины взаимного наклона орбит включительно. Привести полные формулы Леверье здесь не представляется возможным и заинтересованного читателя мы отсылаем к трудам [25]. В 1885 г. Боке [26] получил разложение основной части возмущающей функции  $\Delta^{-1}$  с точностью до восьмых степеней малых параметров включительно.

Ниже мы приводим разложение возмущающей функции в двухпланетной задаче с точностью до *четвертых степеней малых величин* (малыми величинами являются эксцентриситеты орбит планет  $e_1$  и  $e_2$  и  $\sigma = \sin \frac{\gamma}{2}$ ). Для многих задач небесной механики такая точность вполне достаточна. Математические соотношения и пояснения, необходимые при использовании разложения возмущающей функции, можно найти в первом томе трактата Тиссерана [7].

Будем считать, что изучается движение планеты  $P_2$ . В таком случае она является возмущаемой точкой, а планета  $P_1$  является возмущающей точкой. Тогда возмущающей функцией задачи является функция  $R_1$  (4.6.02).

С вышеуказанной точностью разложение  $R_1$  по Леверье имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R_1 = f m_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{ & [(1)^{(i)} + (2)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (3)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 + (4)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^4 + \\ & + (5)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (6)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^4 + (11)^{(i)} \sigma^2 + (12)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 + \\ & + (13)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 + (17)^{(i)} \sigma^4] \cos(i l_1 - i \lambda_2) + [(21)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) + \\ & + (22)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 + (23)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^3 \left(\frac{e_2}{2}\right) + (27)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2] \times \\ & \times \cos[(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - (i+1) \lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (31)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \cos [(i+2) l_1 - 2\omega_1 - 2\Omega_1 - (i+2) \lambda_2 + 2\omega_2 + 2\Omega_2] + \\
& + (36)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos [i l_1 - 2\Omega_1 - 2N_1 - i \lambda_2 + 2\omega_2 + 2\Omega_2] + \\
& + (40)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos [(i-1) l_1 + \omega_1 - \Omega_1 - 2N_1 - (i-1) \lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2] + \\
& + (44)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos [(i-2) l_1 + 2\omega_1 - 2N_1 - (i-2) \lambda_2] + \\
& + \left[ (50)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right) + (51)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 + (52)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right) + (60)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \right] \times \\
& \times \cos [i l_1 - (i-1) \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2] + \\
& + \left[ (70)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) + (71)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (72)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^3 + (80)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \sigma^2 \right] \times \\
& \times \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - i \lambda_2] + \\
& + (90)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - (i+2) \lambda_2 + 2\omega_2 + 2\Omega_2] + \\
& + (100)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right) \cos [(i+2) l_1 - 2\omega_1 - 2\Omega_1 - (i+1) \lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2] + \\
& + (120)^{(i)} \frac{e_2}{2} \sigma^2 \cos [i l_1 - 2\Omega_1 - 2N_1 - (i-1) \lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2] + \\
& + (130)^{(i)} \frac{e_1}{2} \sigma^2 \cos [(i-1) l_1 + \omega_1 - \Omega_1 - 2N_1 - (i-2) \lambda_2] + \\
& + \left[ (172)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (173)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^4 + (174)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (178)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 \right] \times \\
& \times \cos [i l_1 - (i-2) \lambda_2 - 2\omega_2 - 2\Omega_2] + \\
& + \left[ (182)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) + (183)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 + (184)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^3 \left(\frac{e_2}{2}\right) \right] \times \\
& \times \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - (i-1) \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2] + \\
& + \left[ (192)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 + (193)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (194)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^4 + (198)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 \right] \times \\
& \times \cos [(i+2) l_1 - 2\omega_1 - 2\Omega_1 - i \lambda_2] + \\
& + (200)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - (i+3) \lambda_2 + 3\omega_2 + 3\Omega_2] + \\
& + (206)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^3 \left(\frac{e_2}{2}\right) \cos [(i+3) l_1 - 3\omega_1 - 3\Omega_1 - (i+1) \lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2] + \\
& + \left[ (212)^{(i)} \sigma^2 + (213)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 + (214)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 + (218)^{(i)} \sigma^4 \right] \times \\
& \times \cos [i l_1 - 2\omega_1 - 2N_1 - (i-2) \lambda_2] + \\
& + (222)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - 3\Omega_1 - 2N_1 - (i-1) \lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (226)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos [(i-1) l_1 + \omega_1 - \Omega_1 - 2N_1 - (i-3) \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2] + \\
& + (240)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 \cos [il_1 - (i-3) \lambda_2 - 3\omega_2 - 3\Omega_2] + \\
& + (250)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - (i-2) \lambda_2 - 2\omega_2 - 2\Omega_2] + \\
& + (260)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right) \cos [(i+2) l_1 - 2\omega_1 - 2\Omega_1 - (i-1) \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2] + \\
& + (270)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^3 \cos [(i+4) l_1 - 3\Omega_1 - 3\omega_1 - 3\lambda_2] + \\
& + (290)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos [il_1 - 2\omega_1 - 2N_1 - (i-3) \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2] + \\
& + (300)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \sigma^2 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - 3\Omega_1 - 2N_1 - (i-2) \lambda_2] + \\
& + (336)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^4 \cos [il_1 - (i-4) \lambda_2 - 4\omega_2 - 4\Omega_2] + \\
& + (340)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - \Omega_1 - (i-3) \lambda_2 - 3\omega_2 - 3\Omega_2] + \\
& + (344)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \cos [(i+2) l_1 - 2\omega_1 - 2\Omega_1 - (i-2) \lambda_2 - 2\omega_2 - 2\Omega_2] + \\
& + (352)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^4 \cos [(i+4) l_1 - 4\omega_1 - 4\Omega_1 - i\lambda_2] + \\
& + (358)^{(i)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos [il_1 - 2\Omega_1 - 2N_1 - (i-4) \lambda_2 - 2\omega_2 - 2\Omega_2] + \\
& + (362)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - 2N_1 - (i-3) \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2] + \\
& + (366)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos [(i+2) l_1 - 2\omega_1 - 4\Omega_1 - 2N_1 - (i-2) \lambda_2] + \\
& + (372)^{(i)} \sigma^4 \cos [il_1 - 4\Omega_1 - 4N_1 - (i-4) \lambda_2] + \\
& + (376)^{(i)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos [(i+1) l_1 - \omega_1 - 5\Omega_1 - 4N_1 - (i-3) \lambda_2 + \\
& \quad + \omega_2 + \Omega_2] \} + fm_1 R_{1,1}^*, \quad (4.6.15)
\end{aligned}$$

где  $fm_1 R_{1,1}^*$  — дополнительная часть возмущающей функции, разложение которой приведено ниже,  $\omega_1, \Omega_1, N_1, \omega_2, \Omega_2$  — углы, изображенные на рис. 65,  $l_1, l_2$  — средние долготы планет  $P_1$  и  $P_2$  в эпоху:

$$\left. \begin{aligned}
l_1 &= n_1 t + \varepsilon_1, & \varepsilon_1 &= M_{10} + \omega_1 + \Omega_1, \\
l_2 &= n_2 t + \varepsilon_2, & \varepsilon_2 &= M_{20} + \omega_2 + \Omega_2, \\
\lambda_2 &= l_2 + \Omega_1 + N_1 - \Omega_2 - N_2,
\end{aligned} \right\} \quad (4.6.16)$$

$n_1, n_2$  — средние движения планет  $P_1$  и  $P_2$ ,  $M_{10}, M_{20}$  — значения средних аномалий в момент  $t = 0$ .

Разложение (4.6.15) является точным относительно  $\alpha$  — отношения больших полуосей орбит возмущаемой и возмущающей точек ( $\alpha = \frac{a_2}{a_1} < 1$ ), на что указывает суммирование по индексу  $i$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . На практике, в зависимости от заданной точности, ограничиваются той или иной степенью  $\alpha$ . Если необходимо сохранить в разложении (4.6.15) члены до  $s$ -й степени включительно относительно  $\alpha$ , то необходимо произвести суммирование по  $i$  от  $-s$  до  $+s$ . Соответственно нужно обрывать разложения для коэффициентов Лапласа и их производных по степеням  $\alpha$ , входящих в коэффициенты (1)<sup>(i)</sup>, (2)<sup>(i)</sup> и т. д. следующим образом:

$$(1)^{(i)} = \frac{1}{2} A^{(i)},$$

$$(2)^{(i)} = (3)^{(i)} = -2i^2 A^{(i)} + a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2},$$

$$(4)^{(i)} = \frac{-33i^2 + 16i^4}{8} A^{(i)} + (3 - 3i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + (9 - 2i^2) \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \\ + \frac{3}{2} a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{8} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(5)^{(i)} = 8i^4 A^{(i)} + (2 - 8i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + (7 - 4i^2) a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \\ + 4a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(6)^{(i)} = \frac{-9i^2 + 16i^4}{8} A^{(i)} - i^2 a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} - i^2 a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \\ + \frac{a_1^4}{8} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4}$$

$$(11)^{(i)} = -\frac{1}{2} E^{(i)},$$

$$(12)^{(i)} = (13)^{(i)} = 2i^2 E^{(i)} - a_1 \frac{dE^{(i)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 E^{(i)}}{da_1^2},$$

$$(17)^{(i)} = \frac{1}{2} G^{(i)},$$

$$(21)^{(i)} = (2i + 4i^2) A^{(i)} - 2a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} - a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2},$$



$$(22)^{(i)} = (-i - 50i^2 - 14i^3 - 8i^4) A^{(i)} + (-3 + 9i + 10i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (-9 + 9i + 8i^2) \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - 5a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(23)^{(i)} = (-i - 7i^2 - 14i^3 - 8i^4) A^{(i)} + (3 + 9i - i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (-3 + 9i + 8i^2) \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - 3a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(27)^{(i)} = -(2i + 4i^2) E^{(i)} + 2a_1 \frac{dE^{(i)}}{da_1} + a_1^2 \frac{d^2 E^{(i)}}{da_1^2},$$

$$(31)^{(i)} = \frac{20i + 61i^2 + 56i^3 + 16i^4}{4} A^{(i)} + (-5 - 9i - 4i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{1 - 9i - 4i^2}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + 2a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{4} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(36)^{(i)} = \frac{2 - 7i + 4i^2}{4} B^{(i-1)} + \frac{-1 + 2i}{2} a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(40)^{(i)} = (3i - 2i^2) B^{(i-1)} + (1 - 2i) a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(44)^{(i)} = \frac{-5i + 4i^2}{4} B^{(i-1)} + \frac{-1 + 2i}{2} a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(50)^{(i)} = (1 - 2i) A^{(i)} + a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1},$$

$$(51)^{(i)} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i - 7i^2 - 4i^3\right) A^{(i)} + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i - 2i^2\right) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{7 - 2i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(52)^{(i)} = (-4i^2 + 8i^3) A^{(i)} + (4 - 4i - 4i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + (5 - 2i) a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \\ + a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(60)^{(i)} = (-1 + 2i) E^{(i)} - a_1 \frac{dE^{(i)}}{da_1},$$

$$(70)^{(i)} = 2iA^{(i)} - a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1},$$

$$(71)^{(i)} = -8i^3 A^{(i)} + (-2 + 4i + 4i^2) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (-4 + 2i) a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(72)^{(i)} = (-i - 5i^2 - 4i^3) A^{(i)} + \frac{3 + 7i + 4i^2}{3} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{5 + 4i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(80)^{(i)} = -2iE^{(i)} + a_1 \frac{dE^{(i)}}{da_1},$$

$$(90)^{(i)} = (8i + 9i^2) A^{(i)} + \frac{-10 - i + 4i^2}{2} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (-4 - i) a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(100)^{(i)} = (2i + 7i^2 + 4i^3) A^{(i)} + \frac{-4 - 7i - 4i^2}{2} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{1 - 2i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(120)^{(i)} = \frac{-3 + 2i}{2} B^{(i-1)} + \frac{a_1}{2} \frac{dB^{(i-1)}}{da_1},$$

$$(130)^{(i)} = -iB^{(i-1)} - \frac{a_1}{2} \frac{dB^{(i-1)}}{da_1},$$

$$(172)^{(i)} = \frac{4 - 9i + 4i^2}{2} A^{(i)} + (3 - 2i) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2},$$

$$(173)^{(i)} = \frac{-8 + 31i - 56i^2 + 38i^3 - 8i^4}{3} A^{(i)} + \frac{16 + 5i - 24i^2 + 8i^3}{3} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{20 - 9i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{8 - 2i}{3} a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{6} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(174)^{(i)} = (-8i^2 + 18i^3 - 8i^4) A^{(i)} + (10 - 13i - 8i^2 + 8i^3) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{34 - 25i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + (6 - 2i) a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(178)^{(i)} = \frac{-2 + 9i - 4i^2}{2} E^{(i)} + (-3 + 2i) a_1 \frac{dE^{(i)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 E^{(i)}}{da_1^2},$$

$$(182)^{(i)} = (2i - 4i^2) A^{(i)} + (-2 + 4i) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} - a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2},$$

$$(183)^{(t)} = (-i - 40i^2 - 14i^3) A^{(t)} + (-3 + 5i + 8i^2 - 8i^3) a_1 \frac{dA^{(t)}}{da_1} + \\ + \frac{-21 + 19i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(t)}}{da_1^2} + (-5 + 2i) a_1^3 \frac{d^3 A^{(t)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(t)}}{da_1^4},$$

$$(184)^{(t)} = (-15i - 3i^2 + 6i^3 + 8i^4) A^{(t)} + (3 - 39i - 8i^2 - 8i^3) a_1 \frac{dA^{(t)}}{da_1} + \\ + \frac{-3 - 25i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(t)}}{da_1^2} + \frac{-9 - i}{3} a_1^3 \frac{d^3 A^{(t)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(t)}}{da_1^4},$$

$$(192)^{(t)} = \frac{5i + 4i^2}{2} A^{(t)} + (-1 - 2i) a_1 \frac{dA^{(t)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(t)}}{da_1^2},$$

$$(193)^{(t)} = (-10i^3 - 8i^4) A^{(t)} + (-2 + i + 8i^2 + 8i^3) a_1 \frac{dA^{(t)}}{da_1} + \\ + \frac{-2 - 11i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(t)}}{da_1^2} + (2 - 2i) a_1^3 \frac{d^3 A^{(t)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(t)}}{da_1^4},$$

$$(194)^{(t)} = \frac{-11i - 32i^2 - 30i^3 - 8i^4}{3} A^{(t)} + \frac{8 + 23i + 24i^2 + 8i^3}{3} a_1 \frac{dA^{(t)}}{da_1} + \\ + (-4 - 3i) \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(t)}}{da_1^2} - \frac{2i}{3} a_1^3 \frac{d^3 A^{(t)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{6} \frac{d^4 A^{(t)}}{da_1^4},$$

$$(198)^{(t)} = \frac{-5i - 4i^2}{2} E^{(t)} + (-1 + 2i) a_1 \frac{dE^{(t)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 E^{(t)}}{da_1^2},$$

$$(200)^{(t)} = \frac{11i + 32i^2 + 30i^3 + 8i^4}{3} E^{(t)} - \frac{8 + 23i + 24i^2 + 8i^3}{3} a_1 \frac{dE^{(t)}}{da_1} + \\ + \frac{4 + 3i}{2} a_1^2 \frac{d^2 E^{(t)}}{da_1^2} + \frac{2i}{3} a_1^3 \frac{d^3 E^{(t)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{6} \frac{d^4 E^{(t)}}{da_1^4},$$

$$(206)^{(t)} = \frac{13i + 41i^2 + 34i^3 + 8i^4}{3} A^{(t)} + \frac{-9 - 23i - 24i^2 - 8i^3}{3} a_1 \frac{dA^{(t)}}{da_1} + \\ + \frac{3 + i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(t)}}{da_1^2} + \frac{1 + 2i}{3} a_1^3 \frac{d^3 A^{(t)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{6} \frac{d^4 A^{(t)}}{da_1^4},$$

$$(212)^{(t)} = \frac{1}{2} B^{(t-1)},$$

$$(213)^{(t)} = -2(i-2)^2 B^{(t-1)} + a_1 \frac{dB^{(t-1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(t-1)}}{da_1^2},$$

$$(214)^{(t)} = -2i^2 B^{(t-1)} + a_1 \frac{dB^{(t-1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(t-1)}}{da_1^2},$$

$$(218)^{(i)} = -L^{(i)},$$

$$(222)^{(i)} = (-3i + 2i^2) B^{(i-1)} + a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(226)^{(i)} = (5i - 2i^2) B^{(i-1)} + (-3 + 2i) a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(240)^{(i)} = \left(\frac{9}{2} - \frac{65}{6}i + 7i^2 - \frac{4}{3}i^3\right) A^{(i)} + \left(\frac{17}{2} - \frac{17}{2}i + 2i^2\right) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{5-2i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{a_1^3}{6} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(250)^{(i)} = (4i - 9i^2 + 4i^3) A^{(i)} + \frac{-10 + 25i - 12i^2}{2} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (-4 + 3i) a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(260)^{(i)} = \frac{5i - 6i^2 - 8i^3}{2} A^{(i)} + \frac{-4 + i + 12i^2}{2} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{1-6i}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(270)^{(i)} = \frac{13i + 15i^2 + 4i^3}{3} A^{(i)} + \frac{-3 - 9i - 4i^2}{2} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (1 + i) a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} - \frac{a_1^3}{24} \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3},$$

$$(290)^{(i)} = \frac{5-2i}{2} B^{(i-1)} + \frac{a_1}{2} \frac{dB^{(i-1)}}{da_1},$$

$$(300)^{(i)} = iB^{(i-1)} - \frac{a_1}{2} \frac{dB^{(i-1)}}{da_1},$$

$$(336)^{(i)} = \left[\frac{32}{3} - \frac{323}{12}i + \frac{499}{24}i^2 - \frac{19}{3}i^3 + \frac{2}{3}i^4\right] A^{(i)} + \\ + \left[\frac{71}{3} - \frac{173}{6}i + 11i^2 - \frac{4}{3}i^3\right] a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \left[19 - \frac{25}{2}i + 2i^2\right] \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{7-2i}{6} a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{24} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(340)^{(i)} = \frac{27i - 65i^2 + 42i^3}{3} A^{(i)} + \frac{-39 + 109i - 78i^2 + 16i^3}{3} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + (-27 + 31i - 8i^2) \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{-9 + 4i}{3} a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{6} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(344)^{(i)} = \frac{20i - 29i^2 - 16i^3 + 16i^4}{4} A^{(i)} + (-5 + 4i + 12i^2 - 8i^3) a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{1 - 18i + 12i^2}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + (2 - 2i) a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{4} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(352)^{(i)} = \frac{206i - 187i^2 + 120i^3}{24} A^{(i)} + \frac{-16 - 59i - 18i^2 - 8i^3}{6} a_1 \frac{dA^{(i)}}{da_1} + \\ + \frac{8 + 13i + 4i^2}{4} a_1^2 \frac{d^2 A^{(i)}}{da_1^2} + \frac{-3 - 2i}{6} a_1^3 \frac{d^3 A^{(i)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{24} \frac{d^4 A^{(i)}}{da_1^4},$$

$$(358)^{(i)} = \frac{38 - 25i + 4i^2}{4} B^{(i-1)} + \frac{7 - 2i}{2} a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(362)^{(i)} = (5i - 2i^2) B^{(i-1)} + (-3 + 2i) a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(366)^{(i)} = \frac{5i + 4i^2}{4} B^{(i-1)} + \frac{-1 - 2i}{2} a_1 \frac{dB^{(i-1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 B^{(i-1)}}{da_1^2},$$

$$(372)^{(i)} = \frac{3}{8} C^{(i-1)},$$

$$(376)^{(i)} = \frac{-21i + 6i^2}{4} C^{(i-2)} + \frac{9}{4} a_1 \frac{dC^{(i-2)}}{da_1} - \frac{3}{8} a_1^2 \frac{d^2 C^{(i-2)}}{da_1^2}.$$

Величины  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$ ,  $C^{(i)}$ ,  $E^{(i)}$ ,  $G^{(i)}$ ,  $L^{(i)}$  выражаются через коэффициенты Лапласа  $b_1^{(i)}$ ,  $b_3^{(i)}$ ,  $b_5^{(i)}$  (см. § 5.08) и даются формулами

$$\left. \begin{aligned} A^{(i)} &= \frac{b_1^{(i)}}{a_1}, & E^{(i)} &= \frac{1}{2} [B^{(i-1)} + B^{(i+1)}], \\ B^{(i)} &= \frac{b_3^{(i)}}{a_1}, & G^{(i)} &= \frac{3}{8} [C^{(i-2)} + 4C^{(i)} + C^{(i+2)}], \\ C^{(i)} &= \frac{b_5^{(i)}}{a_1}, & L^{(i)} &= \frac{3}{4} [C^{(i-2)} + C^{(i)}] \end{aligned} \right\} \quad (4.6.17)$$

( $a_2 < a_1$ ).

Для отрицательных значений индекса  $i$  имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} A^{(-i)} &= A^{(i)}, & E^{(-i)} &= E^{(i)}, \\ B^{(-i)} &= B^{(i)}, & G^{(-i)} &= G^{(i)}, \\ C^{(-i)} &= C^{(i)}, & L^{(-i+2)} &= L^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.18)$$

В разложение (4.6.15) входит также дополнительная часть возмущающей функции  $\hat{f} m_1 R_{i,1}^*$ . Ее полное разложение имеет

ВИД

$$\begin{aligned}
 R_{i,1} = & \frac{a_2}{2a_1^2} \cos(\omega - \bar{\omega}_1) \times \\
 & \times \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} - B_{k_1}^{(1)} B_{k_2}^{(2)}) \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \\
 & + (A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} + B_{k_1}^{(1)} B_{k_2}^{(2)}) \cos(k_1 M_1 - k_2 M_2)] - \\
 & - \frac{a_2}{2a_1^2} \sin(\omega - \bar{\omega}_1) \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [(A_{k_1}^{(1)} B_{k_2}^{(2)} - B_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)}) \sin(k_1 M_1 + k_1 M_2) - \\
 & - (A_{k_1}^{(1)} B_{k_2}^{(2)} + B_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)}) \sin(k_1 M_1 - k_2 M_2)] - \\
 & - \frac{a_2 \sigma^2}{a_1^2} \left\{ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [\sin(\omega - \tau_1) \sin(\bar{\omega}_1 - \tau_1) A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} - \right. \\
 & - \cos(\omega - \tau_1) \cos(\bar{\omega}_1 - \tau_1) B_{k_1}^{(1)} B_{k_2}^{(2)}] \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \\
 & + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [\sin(\omega - \tau_1) \sin(\bar{\omega}_1 - \tau_1) A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} + \\
 & + \cos(\omega - \tau_1) \cos(\bar{\omega}_1 - \tau_1) B_{k_1}^{(1)} B_{k_2}^{(2)}] \cos(k_1 M_1 - k_2 M_2) + \\
 & + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [\sin(\omega - \tau_1) \cos(\bar{\omega}_1 - \tau_1) A_{k_2}^{(2)} B_{k_1}^{(1)} + \\
 & + \cos(\omega - \tau_1) \sin(\bar{\omega}_1 - \tau_1) B_{k_2}^{(2)} A_{k_1}^{(1)}] \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \\
 & + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [\sin(\omega - \tau_1) \cos(\bar{\omega}_1 - \tau_1) A_{k_2}^{(2)} B_{k_1}^{(1)} - \\
 & \left. - \cos(\omega - \tau_1) \sin(\bar{\omega}_1 - \tau_1) B_{k_2}^{(2)} A_{k_1}^{(1)}] \sin(k_1 M_1 - k_2 M_2) \right\}, \quad (4.6.19)
 \end{aligned}$$

причем

$$\bar{\omega}_1 = l_1 - M_1, \quad \bar{\omega}_2 = l_2 - M_2, \quad \omega = \bar{\omega}_2 + \tau_1 - \tau_2, \quad (4.6.20)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — средние аномалии планет  $P_1$  и  $P_2$ . Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 A_{k_1}^{(1)} &= k_1 I_{k_1-1}(k_1 e_1), & A_0^{(1)} &= 0, \\
 A_{k_2}^{(2)} &= \frac{I_{k_2-1}(k_2 e_2)}{k_2}, & A_0^{(2)} &= -\frac{3}{2} e_2, \\
 B_{k_1}^{(1)} &= k_1 \sqrt{1 - e_1^2} I_{k_1-1}(k_1 e_1), \\
 B_{k_2}^{(2)} &= \sqrt{1 - e_2^2} \frac{I_{k_2-1}(k_2 e_2)}{k_2} \quad (k_2 \neq 0), \\
 B_0^{(2)} &= -\frac{3}{2} e_2 \sqrt{1 - e_2^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.21)$$

В формулах (4.6.21)  $e_1$  и  $e_2$  — эксцентриситеты орбит,  $I_{k_1-1}$ ,  $I_{k_2-1}$  — функции Бесселя.

Чтобы получить разложение  $R_{1,1}^*$  с точностью до четвертых степеней малых величин, необходимо, пользуясь разложениями для функций Бесселя (4.5.60) с точностью до  $z^4$ , вычислить

$$A_{-3}^{(1)}, \dots, A_4^{(1)}, A_{-3}^{(2)}, \dots, A_4^{(2)}, B_{-3}^{(1)}, \dots, B_4^{(1)}, B_{-3}^{(2)}, \dots, B_4^{(2)}$$

и подставить их выражения в (4.6.19). Все остальные слагаемые в (4.6.19) должны быть отброшены, так же как должны быть отброшены все слагаемые, порядок которых больше четырех, получающиеся в произведениях  $A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)}$  и т. д.

Чтобы получить разложение дополнительной части возмущающей функции  $R_{2,2}^*$  для планеты  $P_1$ , необходимо в разложении (4.6.19) для  $R_{1,1}^*$  заменить все индексы «1» на «2» и, наоборот, «2» на «1».

**З а м е ч а н и е.** Если необходимо иметь разложение возмущающей функции в других элементах, для соответствующих преобразований следует воспользоваться либо формулами (4.3.17), либо (4.3.21), либо (4.3.23), либо (4.3.25).

### § 6.03. Разложение возмущающей функции в случае произвольного взаимного наклона

Разложение Леверье, приведенное в § 6.02, выведено при условии, что  $\sigma = \sin \frac{\sigma}{2}$  — малая величина. Для произвольного наклона ( $0 \leq \sigma \leq 1$ ) разложение возмущающей функции двухпланетной задачи получено Р. А. Ляхом [126] (случай круговых планетных орбит  $e_1 = e_2 = 0$ ) и Б. К. Мартыненко [127] (случай малых эксцентриситетов).

Разложение Б. К. Мартыненко для возмущающей функции  $R_1$  (4.6.02) дается соотношениями

$$R_1 = \frac{fm_1}{a} \sum_{m=2}^{\infty} \alpha^m \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2 \neq 0}^{\infty} e_1^{s_1} e_2^{s_2} \sum_{i=0(1)}^m \sum_{j=-m}^{m_1} \sum_{k_1=-s_1}^{s_1} \sum_{k_2=-s_2}^{s_2} A_{i, j, k_1, k_2}^{m, s_1, s_2}(\nu, \mu) \cos(iL_1 + jL_2 + k_1M_1 + k_2M_2),$$

$$i = |j| = m \pmod{2}, \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1} < 1,$$

$$\nu = \sigma^2, \quad \mu = 1 - \sigma^2.$$

(4.6.22)

Суммирование по  $i$  начинается с нуля, если  $m$  — четное число, и с единицы, если  $m$  — нечетное.

В (4.6.22)  $M_1, M_2, L_1, L_2$ , как и раньше, — средние аномалии и долготы возмущающей и возмущаемой планет,  $a_1$  — большая

полуось орбиты возмущающей планеты. Долготы отсчитываются от точки пересечения орбит.

Для коэффициентов разложения (4.6.22) имеются соотношения

$$A_{i, j, k_1, k_2}^{m, s_1, s_2}(\nu, \mu) = \beta_{i, j, k_1, k_2}^{m, s_1, s_2} a_{\frac{m-l}{2}, \frac{m-l}{2}}^{(m)}(\nu, \mu), \quad (4.6.23)$$

где

$$a_{k_1, k_2}^{(m)}(\nu, \mu) = \beta_{k_1, k_2}^{(m)} \bar{a}_{k_1, k_2}^{(m)}(\nu, \mu), \quad (4.6.24)$$

$$\beta_{k_1}^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ при } k_1 \neq \frac{m}{2}, \\ \frac{1}{2} \text{ при } k_1 = \frac{m}{2}, \end{array} \right\}$$

$$\bar{a}_{k_1, k_2}^{(m)}(\nu, \mu) = \sum_{p_1=0}^{k_1} \frac{(-1)^{p_1} (2m-2p_1)!}{2^{2m-2p_1-1} p_1! (m-p_1)!} \times$$

$$\times \sum_{p_2=0}^{k-p_1} \frac{\nu^{m-2p_1-2p_2-k_2+k_1} \mu^{2p_2+k_2-k_1}}{(p_2+k_2-k_1)! (m-k_2-p_1-p_2)! p_2! (k_1-p_1+p_2)!}. \quad (4.6.25)$$

Семиндексный параметр  $\beta_{i, j, k_1, k_2}^{m, s_1, s_2}$  выражается через операторные полиномы Ньютона по формулам

$$\beta_{i, j, k_1, k_2}^{m, s_1, s_2} = \prod_{k_1}^{s_2} (l, -m-1) \prod_{k_2}^{s_1} (j, m), \quad (4.6.26)$$

где

$$\prod_n^k (s, l) = \frac{1}{\alpha^l} \prod_n^k (s, D) \alpha^l,$$

$$\prod_n^k (s, D) = \sum_{k_1=0}^k \left( \sum_{l=0}^{k-k_1} p_{i, k_1}^{k, n} s^l \right) D^{k_1},$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial \ln \alpha}.$$

$p_{i, k_1}^{k, n}$  — численные коэффициенты полиномов Ньюкома.

Так как выражения (4.6.26) являются алгебраическими полиномами, а не рядами относительно  $\sigma$ , разложение (4.6.22) сходится при любых  $0 \leq \sigma \leq 1$ , лишь бы  $\alpha < 1$  и эксцентриситеты  $e_1, e_2$ , были достаточно малы.

**З а м е ч а н и е.** В §§ 6.01—6.03 приводились разложения возмущающей функции для двухпланетной задачи. В задаче о движении  $n$  планет ( $n > 2$ ) можно пользоваться теми же разложениями, так как полная возмущающая функция для любой из планет складывается из нескольких возмущающих функций для соответствующих двухпланетных задач.



### § 6.04. Вековая часть возмущающей функции в двухпланетной задаче

*Вековая часть возмущающей функции* — это часть разложения возмущающей функции, не содержащая периодических членов, аргументы которых суть средние долготы или средние аномалии. Можно доказать, что дополнительная часть возмущающей функции ( $R_{1,1}^*$  или  $R_{2,2}^*$ ) не содержит вековую часть. Таким образом, вековая часть возмущающей функции появляется в результате разложения в ряд *главной части* возмущающей функции  $\Delta^{-1}$ . Полное выражение для вековой части возмущающей функции имеет труднообозримый вид, хотя с помощью гипергеометрического ряда и разложений Кэли [27] принципиально может быть выписано. У Леверье [25] выписана в явном виде вековая часть с точностью до седьмых степеней эксцентриситетов и величины  $\sigma = \sin \frac{f}{2}$ .

Ниже приведено разложение вековой части возмущающей функции с точностью до четвертых степеней малых величин

$$\begin{aligned}
 R_{1, \text{век}} = f m_1 \{ & (1)^{(0)} + (2)^{(0)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (3)^{(0)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 + (4)^{(0)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^4 + \\
 & + (5)^{(0)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (6)^{(0)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^4 + (11)^{(0)} \sigma^2 + (12)^{(0)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 + \\
 & + (13)^{(0)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 + (17)^{(0)} \sigma^4 + \left[ (21)^{(-1)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) + (22)^{(-1)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right)^3 + \right. \\
 & + (23)^{(-1)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^3 \left(\frac{e_2}{2}\right) + (27)^{(-1)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \left. \right] \cos (\omega_2 + \Omega_2 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
 & + (31)^{(-2)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \cos (2\omega_2 + 2\Omega_2 - 2\omega_1 - 2\Omega_1) + \\
 & + (36)^{(0)} \left(\frac{e_2}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos (2\omega_2 + 2\Omega_2 - 2\Omega_1 - 2N_1) + \\
 & + (40)^{(1)} \left(\frac{e_1}{2}\right) \left(\frac{e_2}{2}\right) \sigma^2 \cos (\omega_1 - \Omega_1 - 2N_1 + \omega_2 + \Omega_2) + \\
 & \left. + (44)^{(2)} \left(\frac{e_1}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos (2\omega_1 - 2N_1) \right\}.
 \end{aligned}$$

Как и раньше, нижний индекс  $_2$  относится к элементам возмущаемой планеты, а индекс  $_1$  — к возмущающей.

Коэффициенты предыдущей формулы даются соотношениями

$$\begin{aligned}
 (1)^{(0)} &= \frac{A^{(0)}}{2}, \\
 (2)^{(0)} &= (3)^{(0)} = a_1 \frac{dA^{(0)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2A^{(0)}}{da_1^2},
 \end{aligned}$$

$$(4)^{(0)} = 3a_1 \frac{dA^{(0)}}{da_1} + \frac{9}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da_1^2} + \frac{3}{2} a_1^3 \frac{d^3 A^{(0)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{8} \frac{d^4 A^{(0)}}{da_1^4},$$

$$(5)^{(0)} = 2a_1 \frac{dA^{(0)}}{da_1} + 7a_1^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da_1^2} + 4a_1^3 \frac{d^3 A^{(0)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(0)}}{da_1^4},$$

$$(6)^{(0)} = \frac{a_1^3}{2} \frac{d^3 A^{(0)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{8} \frac{d^4 A^{(0)}}{da_1^4},$$

$$(11)^{(0)} = -\frac{B^{(1)}}{2},$$

$$(12)^{(0)} = (13)^{(0)} = -a_1 \frac{dB^{(1)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(1)}}{da_1^2},$$

$$(17)^{(0)} = \frac{3}{8} [2C^{(0)} + C^{(2)}],$$

$$(21)^{(-1)} = 2A^{(1)} - 2a_1 \frac{dA^{(1)}}{da_1} - a_1^2 \frac{d^2 A^{(1)}}{da_1^2},$$

$$(22)^{(-1)} = -43A^{(1)} - 2a_1 \frac{dA^{(1)}}{da_1} - 5a_1^2 \frac{d^2 A^{(1)}}{da_1^2} - 5a_1^3 \frac{d^3 A^{(1)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(1)}}{da_1^4},$$

$$(23)^{(-1)} = -7a_1 \frac{dA^{(1)}}{da_1} - 5a_1^2 \frac{d^2 A^{(1)}}{da_1^2} - 3a_1^3 \frac{d^3 A^{(1)}}{da_1^3} - \frac{a_1^4}{2} \frac{d^4 A^{(1)}}{da_1^4},$$

$$(27)^{(-1)} = -[B^{(0)} + B^{(2)}] + a_1 \frac{d[B^{(0)} + B^{(2)}]}{da_1} + \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 [B^{(0)} + B^{(2)}]}{da_1^2},$$

$$(31)^{(-2)} = -2A^{(2)} - 3a_1 \frac{dA^{(2)}}{da_1} + \frac{3}{2} a_1^2 \frac{d^2 A^{(2)}}{da_1^2} + 2a_1^3 \frac{d^3 A^{(2)}}{da_1^3} + \frac{a_1^4}{4} \frac{d^4 A^{(2)}}{da_1^4},$$

$$(36)^{(0)} = \frac{B^{(1)}}{2} - \frac{a_1}{2} \frac{dB^{(1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 B^{(1)}}{da_1^2},$$

$$(40)^{(1)} = B^{(0)} - a_1 \frac{dB^{(0)}}{da_1} - \frac{a_1^2}{2} \frac{d^2 B^{(0)}}{da_1^2},$$

$$(44)^{(2)} = \frac{3}{2} B^{(1)} + \frac{3}{2} a_1 \frac{dB^{(1)}}{da_1} + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 B^{(1)}}{da_1^2}.$$

Приведенные формулы выражаются в конечном счете через коэффициенты Лапласа, так как

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \frac{b_1^{(0)}}{a_1}, & A^{(1)} &= \frac{b_1^{(1)}}{a_1}, & A^{(2)} &= \frac{b_1^{(2)}}{a_1}, \\ B^{(0)} &= \frac{b_3^{(0)}}{a_1}, & B^{(1)} &= \frac{b_3^{(1)}}{a_1}, & B^{(2)} &= \frac{b_3^{(2)}}{a_1}, \\ C^{(0)} &= \frac{b_5^{(0)}}{a_1}, & C^{(2)} &= \frac{b_5^{(2)}}{a_1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты Лапласа  $b_n^{(k)}$  зависят от  $\alpha = \frac{a_2}{a_1} < 1$  и выражаются формулами (4.5.94) — (4.5.96).

С точностью до вторых степеней малых величин  $e_1, e_2, \sigma$  вековая часть возмущающей функции (с точностью до множителя  $f_{m_1}$ ) выражается равенством

$$\begin{aligned} [\Delta^{-1}]_{\text{век}} &= \frac{1}{2} A_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 B_1 + \frac{e_1^2 + e_2^2}{8} (2A_0^{(1)} + A_0^{(2)}) + \\ &+ \frac{1}{4} e_1 e_2 (2A_1 - 2A_1^{(1)} - A_1^{(2)}) \cos(\Pi_1 - \Pi_2). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (4.6.17), можно выразить вековую часть возмущающей функции через коэффициенты Лапласа:

$$\begin{aligned} [\Delta^{-1}]_{\text{век}} &= \frac{1}{2} \frac{b_1^{(0)}}{a_2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\alpha}{a_2} b_3^{(1)} + \frac{e_1^2 + e_2^2}{8} \left( 2 \frac{\alpha}{a_2} \frac{db_1^{(0)}}{d\alpha} + \frac{\alpha^2}{a_2} \frac{d^2 b_1^{(0)}}{d\alpha^2} \right) + \\ &+ \frac{e_1 e_2}{4} \left( \frac{2b_1^{(1)}}{a_2} - 2 \frac{\alpha}{a_2} \frac{db_1^{(1)}}{d\alpha} - \frac{\alpha^2}{a_2} \frac{d^2 b_1^{(1)}}{d\alpha^2} \right) \cos(\Pi_1 - \Pi_2). \quad (4.6.27) \end{aligned}$$

Лагранж показал (см. § 8.03), что уравнения для оскулирующих элементов, в которых возмущающая функция заменена основными членами вековой части (4.6.27), легко интегрируются.

### § 6.05. Численные методы разложения возмущающей функции

Хотя аналитические методы разложения возмущающей функции и наиболее общи, они, как правило, весьма громоздки. Особенно трудоемким делом является использование аналитического разложения возмущающей функции при достаточно больших значениях отношения  $a_2/a_1$  (например, в случае «Земля — Марс»  $\alpha \approx 0,6$ ). В таких случаях целесообразнее строить разложения возмущающей функции *численными методами* (методами гармонического анализа).

Если известны числовые значения элементов орбит двух планет в планетном варианте задачи трех тел, то возмущающую функцию  $R$  [см. формулы (4.6.01) и (4.6.02)] при некоторых общих предположениях можно представить двойным рядом Фурье по кратным средним аномалий  $M_1$  и  $M_2$  или по кратным средним долгот  $l_1$  и  $l_2$ :

$$R = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} [A_{k_1, k_2} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + B_{k_1, k_2} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2)], \quad (4.6.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{k_1, k_2} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) dM_1 dM_2, \\ B_{k_1, k_2} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) dM_1 dM_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.29)$$

Точность представления возмущающей функции разложением (4.6.28) зависит от точности вычисления коэффициентов  $A_{k_1, k_2}$ ,  $B_{k_1, k_2}$  по формулам (4.6.29). Как указывают Брауэр и Клеменс [2], для вычисления возмущений в движении Марса, обусловленных притяжением Земли, с восемью десятичными знаками необходимо знать 8000 значений  $R$ . Такие вычисления возможны лишь на ЭВМ.

**З а м е ч а н и е.** В дифференциальные уравнения движения входит не возмущающая функция  $R$ , а ее частные производные по координатам либо по элементам. Разложение этих производных в виде (4.6.28) производится аналогичным образом.

### § 6.06. Полуаналитический метод Брауэра — Клеменса разложения возмущающей функции

Существуют различные способы разложения возмущающей функции, основанные на сочетании аналитических и численных методов. Здесь мы излагаем метод Брауэра — Клеменса [2].

Имеем

$$\left(\frac{a_1}{\Delta}\right)^s = N^s [1 - 2a \cos(E_1 - Q) + a^2]^{-\frac{s}{2}} [1 - 2b \cos(E_1 + Q) + b^2]^{-\frac{s}{2}}, \quad (4.6.30)$$

где  $\Delta$  — взаимное расстояние между планетами  $P_1$  и  $P_2$ ,  $a_1$  — большая полуось орбиты планеты  $P_1$  ( $a_2 < a_1$ , поэтому

планету  $P_1$  называют внешней),

$$a = \frac{C - \sqrt{C^2 - q^2}}{q}, \quad b = \frac{q - \sqrt{q^2 - \gamma_2^2}}{\gamma_2}, \quad N = \frac{2}{C + \sqrt{C^2 - q^2}}, \quad (4.6.31)$$

$$C = \gamma_0 + \frac{\gamma_2}{q^2} (q \sin Q)^2, \quad q \sin Q = \frac{f \sin F}{1 - \frac{\gamma_2 C}{q^2}}, \quad q \cos Q = \frac{f \cos F}{1 + \frac{\gamma_2 C}{q^2}}, \quad (4.6.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2e_2^2 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2e_1 \cos E_1 + e_1^2 \cos^2 E_1 + e_2 f \cos F, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 e_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.33)$$

$$\left. \begin{aligned} f \cos F &= 2 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 e_2 - 2\kappa_1 e_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cos K_2 + \\ &+ 2\kappa_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cos K_2 \cos E_1 - 2\kappa_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \sqrt{1 - e_1^2} \sin K_2 \sin E_1, \\ f \sin F &= -2\kappa_2 e_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \sqrt{1 - e_2^2} \sin K_1 + \\ &+ 2\kappa_2 \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \sqrt{1 - e_2^2} \sin K_1 \cos E_1 + \\ &+ 2\kappa_2 \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \sqrt{(1 - e_1^2)(1 - e_2^2)} \cos K_1 \sin E_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.34)$$

Здесь  $E_1, E_2$  — эксцентрисические аномалии планет  $P_1$  и  $P_2$ ,  $e_1, e_2$  — эксцентриситеты их орбит.

Вспомогательные величины  $\kappa_1, \kappa_2, K_1, K_2$  определяются из равенств (см. рис. 65)

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 \cos(\omega_1 - N_1 - K_2) &= \cos(\omega_2 - N_2), \\ \kappa_1 \sin(\omega_1 - N_1 - K_2) &= \cos J \sin(\omega_2 - N_2), \\ \kappa_2 \cos(\omega_1 - N_1 - K_1) &= \cos J \cos(\omega_2 - N_2), \\ \kappa_2 \sin(\omega_1 - N_1 - K_1) &= \sin(\omega_2 - N_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.6.35)$$

Формулы (4.6.31) — (4.6.35) дают возможность вычислить величину (4.6.30) для любого момента времени по следующей схеме: если заданы элементы орбит планет  $P_1$  и  $P_2$ , то по формулам (4.6.05) вычисляем  $N_1, N_2, J$ . Для заданного момента времени решаем уравнения Кеплера

$$E_{1,2} - e_{1,2} \sin E_{1,2} = M_{1,2}$$

и находим эксцентрисические аномалии  $E_1, E_2$ . Далее, используя равенства (4.6.34), вычисляем  $f \sin F$  и  $f \cos F$ . Имея эти величины, определяем сначала  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$ , а далее  $C, q, Q$ , после чего из

(4.6.31) определяем  $a$ ,  $b$ ,  $N$ . Окончательно равенство (4.6.30) дает  $(a_1/\Delta)^s$ .

Однако для определения величины  $a_1/\Delta$  целесообразнее применять метод Брауэра — Клеменса [2], который заключается в следующем.

Рассмотрим случай внешней планеты  $P_1$ . Разделим отрезок  $[M_1, M_1 + 2\pi]$  на  $2n$  равных частей и для каждого из частных значений средней аномалии  $M_1$  решаем соответствующее уравнение Кеплера, в результате чего находим  $2n$  значений эксцентрисической аномалии  $E_1$ . Далее по схеме, описанной выше, находим  $\gamma_0$ ,  $\gamma_2$ ,  $C$ ,  $q$ ,  $Q$ ,  $N$ ,  $a$ ,  $b$ . Для каждой пары значений  $Q$  и  $b$  разлагаем в ряд Фурье по кратным  $E_2$  выражение  $[1 - 2b \cos(E_2 + Q) + b^2]^{-s/2}$ . Для вычисления коэффициентов Фурье используем метод гармонического анализа.

Первая квадратная скобка в соотношении (4.6.30),  $[1 - 2a \cos(E_2 - Q) + a^2]^{-s/2}$  разлагается в ряд Фурье по кратным аргумента  $E_2 - Q$  при помощи коэффициентов Лапласа. Далее в этот ряд подставляется  $2n$  значений величины  $Q$ , в результате чего получается  $2n$  рядов, которые должны быть преобразованы в  $2n$  рядов Фурье по кратным эксцентрисической аномалии  $E_2$ .

Перемножая  $2n$  значений величины  $N^s$  соответственно на  $2n$  рядов Фурье для  $[1 - 2a \cos(E_2 - Q) + a^2]^{-s/2}$  и на  $2n$  рядов Фурье для  $[1 - 2b \cos(E_2 + Q) + b^2]^{-s/2}$ , получим  $2n$  рядов для  $(a_1/\Delta)^s$ . Имея  $2n$  тригонометрических рядов по  $\cos jE_2$  и  $\sin jE_2$  для  $(a_1/\Delta)^s$ , мы можем с помощью гармонического анализа представить  $(a_1/\Delta)^s$  в виде двойного ряда Фурье по кратным эксцентрисической аномалии внутренней планеты  $E_2$  и средней аномалии внешней планеты  $M_1$ . Коэффициенты этого ряда находятся методами гармонического анализа и вычисляются на основании ранее полученных коэффициентов.

Используя разложения для эллиптического движения и функции Бесселя (см. ч. II, § 3.01), можно представить выражение  $(a_1/\Delta)^s$  в виде двойного ряда Фурье по кратным средним аномалий  $M_1$  и  $M_2$ .

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ КООРДИНАТ

Так как подавляющее большинство задач небесной механики не относится к интегрируемым в квадратурах, для их решения разработаны различные варианты метода последовательных приближений. В настоящей главе будут приведены основные формулы для вычисления возмущений координат в задаче о движении двух планет, причем ради определенности центральное тело будем называть Солнцем. Аналитические методы вычисления возмущений координат излагаются в [1]—[7].

### § 7.01. Метод Хилла

Дифференциальные уравнения для возмущений прямоугольных гелиоцентрических координат ( $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ,  $\delta r$ ) и цилиндрических ( $\delta r$ ,  $\delta \lambda$ ,  $\delta z$ ), использовавшихся Хиллом [2], [4], имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta x &= Q_x, \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta y &= Q_y, \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta z &= Q_z, \\ \frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} (r_0 \delta r) &= Q_r, \end{aligned} \right\} (4.7.01)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} (r_0 \delta r) &= Q_r, \\ (r^2 - z^2) \frac{d(\delta \lambda)}{dt} &= \int Q_\lambda dt + h \left( 1 - \frac{r^2 - z^2}{r_0^2 - z_0^2} \right), \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta z &= Q_z, \end{aligned} \right\} (4.7.02)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial R}{\partial x} + \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu x, \\ Q_y &= \frac{\partial R}{\partial y} + \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu y, \\ Q_z &= \frac{\partial R}{\partial z} + \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu z, \\ Q_r &= 2 \int d'R + r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{d^2 (\delta r)^2}{dt^2} + \frac{\mu (\delta r)^2}{r_0^2 r}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.03)$$

$$\left. \begin{aligned} d'R &= \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz, \\ Q_\lambda &= x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \mu &= f(m_0 + m_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.7.04)$$

Здесь  $R$  — возмущающая функция,  $f$  — постоянная тяготения,  $m_0$  — масса Солнца,  $m$  — масса возмущаемой планеты  $P_1$ ,  $r_0$ ,  $z_0$  — невозмущенные величины.

Интегрирование уравнений (4.7.01) по методу Хилла дает для возмущений прямоугольных гелиоцентрических координат следующие интегральные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r_0 \delta r &= q_2 \int q_1 Q_r dt - q_1 \int q_2 Q_r dt, \\ \delta x &= q_2 \int q_1 Q_x dt - q_1 \int q_2 Q_x dt, \\ \delta y &= q_2 \int q_1 Q_y dt - q_1 \int q_2 Q_y dt, \\ \delta z &= q_2 \int q_1 Q_z dt - q_1 \int q_2 Q_z dt, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.05)$$

где  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  — два линейно независимых частных решения уравнения

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3(t)} q = 0. \quad (4.7.06)$$

Интегральные соотношения (4.7.05) для  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  содержат шесть произвольных постоянных (они входят в интегралы  $\int q_1 Q_x dt, \dots, \int q_2 Q_z dt$ ). Возмущение  $r_0 \delta r$  содержит три произвольные постоянные. Однако имеется только шесть независимых



произвольных постоянных, так как возмущения  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ,  $\delta r$  связаны тождествами

$$r_0 \delta r \equiv x_0 \delta x + y_0 \delta y + z_0 \delta z + \frac{1}{2} (\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - \frac{1}{2r_0^2} (r_0 \delta r)^2, \quad (4.7.07)$$

$$\frac{dx_0}{dt} \frac{d(\delta x)}{dt} + \frac{dy_0}{dt} \frac{d(\delta y)}{dt} + \frac{dz_0}{dt} \frac{d(\delta z)}{dt} + \frac{\mu}{r_0^2} (r_0 \delta r) + \\ + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d(\delta x)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(\delta y)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(\delta z)}{dt} \right)^2 \right] \equiv \int d'R. \quad (4.7.08)$$

Произвольные постоянные интегрирования могут быть определены различными способами. Например, они могут быть определены из условия выбора оскулирующих элементов:

$$\left. \begin{aligned} (\delta x)_{t=0} &= 0, & (\delta y)_{t=0} &= 0, & (\delta z)_{t=0} &= 0, \\ (\delta \dot{x})_{t=0} &= 0, & (\delta \dot{y})_{t=0} &= 0, & (\delta \dot{z})_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.09)$$

Ганзен предложил определять произвольные постоянные интегрирования не из условия «оскуляции» (в начальный момент возмущения координат и скоростей или возмущения элементов равны нулю), а из условия, что в формулах возмущенной теории могут отсутствовать те или иные возмущения. Например, в методе Хилла возмущение долготы имеет вид

$$\delta \lambda = C_1 + C_2 v + F(\sin v, \cos v),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные интегрирования,  $v$  — невозмущенная истинная аномалия,  $F$  — некоторый тригонометрический многочлен относительно  $v$ .

Если бы  $C_1$  и  $C_2$  определялись из условия оскулирующих элементов, то следовало бы написать для них уравнения

$$(\delta \lambda)_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad (\delta \dot{\lambda})_{t=0} = 0.$$

Если же  $C_1$  и  $C_2$  определяются по Ганзену, то лучше всего положить  $C_1 = C_2 = 0$ . Тогда возмущение  $\delta \lambda$  периодически зависит от  $v$ .

Очевидно, что в этом случае элементы возмущенной орбиты, хотя и определяются уравнениями для оскулирующих элементов, на самом деле не являются оскулирующими. Ганзен предложил назвать эти элементы *средними элементами*. Средние элементы получили большое распространение в аналитической небесной механике, так как они очень часто представляют астрономические наблюдения на больших промежутках времени лучше, чем оскулирующие элементы. Математический аспект введения «средних» элементов в аналитические теории движения небесных тел изучен в монографии [36]

Если в качестве  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  взяты частные решения

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \sqrt{\frac{an}{\mu}} r_0 \cos v, \\ q_2(t) &= \sqrt{\frac{a^2n}{\mu p}} r_0 \sin v, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.10)$$

то возмущениям координат можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{\mu p} \int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv, \\ \delta x &= \frac{r_0}{\mu p} \int Q_x r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv, \\ \delta y &= \frac{r_0}{\mu p} \int Q_y r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv, \\ \delta z &= \frac{z_0}{\mu p} \int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.11)$$

где  $n$  — среднее движение возмущаемой планеты  $P_1$ ,  $a$  — большая полуось ее орбиты,  $p$  — параметр,  $v$  — истинная аномалия,  $\bar{v}$  — постоянная величина под знаком интеграла, которую после интегрирования надо положить равной  $v$ .

Возмущения цилиндрических координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{\mu p} \int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv, \\ \delta \lambda &= \int \left\{ \int \frac{r_0^3}{\mu p} Q_\lambda dv - \cos i \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} \right\} \frac{r_0^2}{r^2 - z^2} dv, \\ \delta z &= \frac{r_0}{\mu p} \int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.12)$$

Интегральные соотношения (4.7.11) и (4.7.12) являются точными. Для определения возмущений по этим формулам применяется метод последовательных приближений.

Для определения лишней произвольной постоянной следует воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} r_0^2 \frac{d\lambda_0}{dt} \frac{d(\delta\lambda)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr_0}{dt} \delta r + 2r_0 \frac{d(\delta r)}{dt} \right) - \\ &- 3 \int d'R - 2r \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2} - \frac{\mu(\delta r)^2}{r_0^2 r} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 ((\delta r)^2 - (\delta z)^2) - \frac{1}{2} r_0 \delta r \frac{d(\delta\lambda)}{dt} \left( \frac{d\lambda}{dt} + 2 \frac{d\lambda_0}{dt} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{r^4}{r^2 - (\delta z)^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta z}{r} \right). \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

Для получения возмущений первого порядка необходимо подставить в (4.7.12) невозмущенные значения координат и элементов (на это указывает нижний индекс «0»)

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 r &= \int \left[ X_0 + 2r_0^3 \int r_0^{-2} \left( \frac{e_0}{p_0} \sin v_0 X_0 + Y_0 \right) dv_0 \right] \sin(\bar{v}_0 - v_0) dv_0, \\ \delta_1 \lambda &= \int \left[ \int Y_0 dv_0 - 2 \frac{\delta_1 r}{r_0} \right] dv_0, \\ \delta_1 z &= \int Z_0 \sin(\bar{v}_0 - v_0) dv_0, \end{aligned} \right\} (4.7.14)$$

где

$$X_0 = \frac{r_0^4}{\mu p} \frac{\partial R_0}{\partial r_0}, \quad Y_0 = \frac{r_0^2}{\mu p} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_0}, \quad Z_0 = \frac{r_0^3}{\mu p} \frac{\partial R_0}{\partial z_0}. \quad (4.7.15)$$

Формулы для возмущений первого порядка (4.7.14) написаны при условии, что за основную координатную плоскость выбрана плоскость невозмущенной орбиты ( $i = 0^\circ$ ,  $z_0 = 0$ ).

Подробные рекомендации, необходимые для использования метода Хилла, можно найти в [2], [28].

**З а м е ч а н и е.** В качестве переменной интегрирования можно принять не только истинную аномалию возмущаемой планеты  $v$ , но и другие переменные, например, время  $t$  или эксцентрискую аномалию  $E$ .

### § 7.02. Метод Ганзена

Основная идея метода Ганзена состоит в том, что рассмотрение возмущенного движения планеты  $P$  разделяется на следующие этапы: сначала интегрировать уравнения в прямоугольных координатах Ганзена (4.1.18) или в полярных координатах Ганзена (4.1.43), т. е. сначала можно изучить возмущенное движение точки  $P$  в плоскости оскулирующей орбиты  $XU$  (см. рис. 62). Затем можно рассмотреть уравнения, определяющие положение плоскости оскулирующей орбиты  $XU$  относительно плоскости  $xy$ ; далее в долготу (см. рис. 63) необходимо внести поправки, обусловленные движением оскулирующей плоскости. Для планет Солнечной системы эти поправки достаточно малы.

Существо метода Ганзена состоит в следующем (подробности см. в [2]).

Связь между сферическими координатами  $r$ ,  $L$ ,  $B$  и координатами Ганзена  $r$ ,  $\omega$  выражается формулами (см. рис. 62)

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos(L - \Omega) &= \cos(\omega - \sigma), \\ \cos B \sin(L - \Omega) &= \cos i \sin(\omega - \sigma), \\ \sin B &= \sin i \sin(\omega - \sigma). \end{aligned} \right\} (4.7.16)$$

Если вместо  $i$  и  $\Omega$  подставить  $i_0 = i(t_0)$  и  $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ , то равенства (4.7.16) нарушатся, но это «нарушение» будет порядка возмущающих масс. Обозначим через  $s$ ,  $sA \sin \varphi$ ,  $-sA \cos \varphi$  поправки к правым частям соответствующих формул (4.7.16), ликвидирующие нарушение равенств, а через  $\Gamma$  — поправку к  $\Omega_0$ , которая вообще является функцией  $i$  и  $\Omega$ . Кроме того, положим  $\sigma_0 = \Omega_0$ .

Тогда будем иметь строгие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \cos b \cos(L - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos(\omega - \Omega_0) + sA \sin \varphi, \\ \cos B \sin(L - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(\omega - \Omega_0) - sA \cos \varphi, \\ \sin B &= \sin i_0 \sin(\omega - \Omega_0) + s. \end{aligned} \right\} (4.7.17)$$

Обозначим через  $z$  и  $v$  поправки к величинам, характеризующим некоторый *вспомогательный эллипс*, лежащий в плоскости оскулирующей орбиты, и введем их, согласно Ганзену, с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} n_0 z &= E_0 - e_0 \sin E_0, \\ r_0 \cos v_0 &= a_0 (\cos E_0 - e_0), \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E_0. \end{aligned} \right\} (4.7.18)$$

$$r = r_0(1 + v). \quad (4.7.19)$$

Здесь  $a_0$ ,  $n_0$ ,  $e_0$  — постоянные величины, параметры вспомогательного эллипса,  $v_0$ ,  $E_0$  — истинная и эксцентрическая аномалии,  $r_0$  — радиус-вектор вспомогательного эллипса,  $n_0 z$  — возмущенная средняя аномалия.

Вспомогательный эллипс выбирается таким образом, чтобы точка с истинной аномалией  $v_0$  лежала на возмущенном радиус-векторе  $r$ . Тогда  $\omega$  — долгота планеты  $P$ , отсчитываемая от начальной точки, а  $r_0$  и  $v_0$  — радиус-вектор и истинная аномалия той точки вспомогательного эллипса, в которой возмущенный радиус-вектор  $r$  пересекает этот эллипс.

Таким образом, для полного решения возмущенной задачи по методу Ганзена необходимо определить  $v$ ,  $z$ ,  $s$ ,  $A$ ,  $\varphi$  как функции времени, а также выяснить смысл величин  $n_0$ ,  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $\pi_0$  (долгота перигелия вспомогательного эллипса) и постоянных, появляющихся в процессе интегрирования.

Для определения возмущенной средней аномалии  $n_0 z$  и величины  $v$  имеются интегральные соотношения

$$n_0 z = n_0 t + C_0 + \int \frac{\overline{W} + v^2}{1 - v^2} n_0 dt, \quad (4.7.20)$$

$$v = C - \frac{1}{2} \int \left( \frac{d\overline{W}}{dt} \right) dt, \quad (4.7.21)$$

где  $C_0, C$  — произвольные постоянные,

$$\overline{W} = -1 + 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h}{h_0} \frac{r_0}{a_0} \xi \cos v_0 + 2 \frac{h}{h_0} \frac{r_0}{a_0} \eta \sin v_0, \quad (4.7.22)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{f(m_0 + m)}{r_0^2 \dot{v}_0} = \frac{f(m_0 + m)}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2}}, & h &= \frac{f(m_0 + m)}{r^2 \dot{v}} = \frac{f(m_0 + m)}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}}, \\ \xi &= \frac{e \cos(\chi - \pi_0) - e_0}{1 - e_0^2}, & \eta &= \frac{e \sin(\chi - \pi_0)}{1 - e_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.23)$$

Величины  $h, \xi, \eta$  можно рассматривать как некоторую систему оскулирующих элементов. Величина  $\chi$  (см. рис. 62) представляет долготу мгновенного перигелия, отсчитываемую от оси  $X$ .

Выясним смысл величины  $\left(\frac{d\overline{W}}{d\zeta}\right)$ , входящей в равенство (4.7.21). Функция  $\overline{W}$  зависит от времени  $t$  двояким образом: через посредство параметров  $r_0$  и  $v_0$  вспомогательного эллипса и через посредство оскулирующих элементов. Обозначим «первое время» через  $\tau$ , а для «второго времени» сохраним прежнее обозначение  $t$ . Символом  $\left(\frac{d\overline{W}}{d\tau}\right)$  будем обозначать производную по  $\tau$  функции  $\overline{W}(t) = \overline{W}(\tau, t)$ , рассматриваемой как функция двух переменных  $\tau$  и  $t$ , в которой после дифференцирования  $\tau$  снова заменено на  $t$ .

Обозначим  $r, v, z$  и  $v$ , рассматриваемые как функции  $\tau$ , соответственно через  $\rho, \omega, \zeta$  и  $\vartheta$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \overline{W}(r, v, z, v) &= \overline{W}(\rho, \omega, \zeta, \vartheta) = \\ &= 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \frac{\rho_0}{a_0} \xi \cos \omega_0 + 2 \frac{h}{h_0} \frac{\rho_0}{a_0} \eta \sin \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.24)$$

В (4.7.24)  $\rho_0$  и  $\omega_0$  — те же самые функции от  $\zeta$ , что и  $r_0$  и  $v_0$  от  $z$ .

В (4.7.21) величина  $\left(\frac{d\overline{W}}{d\zeta}\right)$  означает производную  $\overline{W}$  по  $\zeta$ , в которой после дифференцирования  $\zeta$  заменено на  $z$ .

Решение интегральных уравнений (4.7.20) и (4.7.21) возможно получить методом последовательных приближений. В первом приближении  $z$  и  $v$  определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} n_0 z &= n_0 t + C_0 + \int \overline{W}_0 n_0 dt, \\ v &= C - \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\overline{W}_0}{d\tau}\right) dt, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.25)$$

где

$$\overline{W}_0 = -1 + 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h}{h_0} \frac{\rho}{a_0} \xi \cos \omega + 2 \frac{h}{h_0} \frac{\rho}{a_0} \eta \sin \omega. \quad (4.7.26)$$

Здесь  $\rho$  и  $\omega$  — эллиптические значения, зависящие от невозмущенной средней аномалии.

**З а м е ч а н и е.** Вычисление возмущений высшего порядка в  $z$  и  $v$  подробно рассмотрено в [2]. Для решения этой задачи необходимо прежде всего выразить функцию  $W$  через компоненты возмущающих сил, далее необходимо получить явное выражение для  $W$  как функции оскулирующих элементов и параметров вспомогательного эллипса и, наконец, выбрать удачную независимую переменную интегрирования. Чаще всего — это время или эксцентрическая аномалия возмущаемого тела. Как и в методе Хилла, важно установить зависимость между постоянными интегрирования.

Неизвестные величины  $s$ ,  $A$ ,  $\varphi$  определяются из равенств

$$\left. \begin{aligned} s &= q \sin(\omega - \Omega_0) - p \cos(\omega - \Omega_0), \\ A \sin \varphi &= \frac{p}{\kappa}, \\ A \cos \varphi &= \operatorname{tg} i_0 + \frac{q}{\kappa \cos i_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.27)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \sin i \sin(\sigma - \Omega_0), & q &= \sin i \cos(\sigma - \Omega_0) - \sin i_0, \\ \kappa &= 1 + \cos i_0 \cos i - \sin i_0 \sin i \cos(\sigma - \Omega_0). \end{aligned}$$

Вспомогательная величина  $\Gamma$  определяется из соотношения

$$\Gamma = \int_0^t \frac{rs}{\kappa \sqrt{\rho} \sqrt{f(m_0 + m)}} W^* dt,$$

в котором  $W^*$  — компонента возмущающей силы, перпендикулярной к плоскости оскулирующей орбиты.

### § 7.03. Метод Брауэра

Пусть основная координатная плоскость  $P_0xy$  совпадает с плоскостью невозмущенной эллиптической орбиты, причем ось  $P_0x$  направлена в неподвижный перигелий, ось  $P_0y$  направлена под прямым углом к  $P_0x$  в направлении движения возмущаемой планеты  $P$ , ось  $P_0z$  дополняет оси  $P_0x$  и  $P_0y$  до правой тройки. Следуя Брауэру [2], обозначим через  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{z}_0$  ( $z_0 = 0$ ,  $\dot{z}_0 = 0$ ) невозмущенные прямоугольные координаты и компоненты скорости возмущаемой планеты  $P$ . Они зависят от времени и элементов орбиты. Тогда возмущенные координаты и скорости представляются равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \delta x, & y &= y_0 + \delta y, & z &= \delta z, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0 + \delta \dot{x}, & \dot{y} &= \dot{y}_0 + \delta \dot{y}, & \dot{z} &= \delta \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad 4.7.28)$$

Уравнения для возмущений прямоугольных координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{\mu(x_0 + \delta x)}{r^3} - \frac{\mu x_0}{r_0^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + \frac{\mu(y_0 + \delta y)}{r^3} - \frac{\mu y_0}{r_0^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \frac{\mu \delta z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.7.29)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{\mu \delta x}{r_0^3} - \frac{3\mu x_0}{r_0^5}(x_0 \delta x + y_0 \delta y) &= G_x, \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + \frac{\mu \delta y}{r_0^3} - \frac{3\mu y_0}{r_0^5}(x_0 \delta x + y_0 \delta y) &= G_y, \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \frac{\mu \delta z}{r_0^3} &= G_z \end{aligned} \right\} \quad (4.7.30)$$

которые будем называть *уравнениями Брауэра*. Функции  $G_x$ ,  $G_y$  и  $G_z$  в (4.7.30) равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{\partial R}{\partial x} + \mu \left[ \left( \frac{9}{2} \frac{x_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{x_0^3}{r_0^7} \right) (\delta x)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( 3 \frac{y_0}{r_0^5} - 15 \frac{x_0^2 y_0}{r_0^7} \right) \delta x \delta y + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3}{2} \frac{x_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{x_0 y_0^2}{r_0^7} \right) (\delta y)^2 + \frac{3}{2} \frac{x_0}{r_0^5} (\delta z)^2 + \dots \right], \\ G_y &= \frac{\partial R}{\partial y} + \mu \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{y_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{x_0^2 y_0}{r_0^7} \right) (\delta x)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( 3 \frac{x_0}{r_0^5} - 15 \frac{x_0 y_0^2}{r_0^7} \right) \delta x \delta y + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3}{2} \frac{y_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{y_0^3}{r_0^7} \right) (\delta y)^2 + \frac{3}{2} \frac{y_0}{r_0^5} (\delta z)^2 + \dots \right], \\ G_z &= \frac{\partial R}{\partial z} + \mu \delta z \left[ \frac{3(x_0 \delta x + y_0 \delta y)}{r_0^5} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.31)$$

Рассмотрим однородную систему, соответствующую первым двум уравнениям Брауэра:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{\mu \delta x}{r_0^3} - \frac{3\mu x_0(x_0 \delta x + y_0 \delta y)}{r_0^5} &= 0, \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + \frac{\mu \delta y}{r_0^3} - \frac{3\mu y_0(x_0 \delta x + y_0 \delta y)}{r_0^5} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.32)$$

Третье уравнение системы Брауэра принципиально не отличается от третьего уравнения в методе Хилла, поэтому вычисление возмущений  $\delta z$  можно вести по четвертой формуле (4.7.11).

Общее решение системы (4.7.32) имеет вид [2]

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= C_1 \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, \\ \delta y &= C_1 \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial y_0}{\partial c_4}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.33)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — любые четыре элемента, определяющие движение в плоскости эллиптической орбиты,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные. Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x} &= C_1 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}, \\ \delta \dot{y} &= C_1 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.34)$$

Для интегрирования уравнений (4.7.30) Брауэр применяет метод вариации произвольных постоянных. В результате получается

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_1} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{31} + \frac{G_y}{J} A_{41} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial x_0}{\partial c_2} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{32} + \frac{G_y}{J} A_{42} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial x_0}{\partial c_3} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{33} + \frac{G_y}{J} A_{43} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial x_0}{\partial c_4} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{34} + \frac{G_y}{J} A_{44} \right) dt, \\ \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_1} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{31} + \frac{G_y}{J} A_{41} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial y_0}{\partial c_2} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{32} + \frac{G_y}{J} A_{42} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial y_0}{\partial c_3} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{33} + \frac{G_y}{J} A_{43} \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial y_0}{\partial c_4} \int \left( \frac{G_x}{J} A_{34} + \frac{G_y}{J} A_{44} \right) dt, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.35)$$



где якобиан  $J$  равен

$$J = \frac{\partial (x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)}{\partial (c_1, c_2, c_3, c_4)}, \quad (4.7.36)$$

а  $A_{sk}$  — алгебраическое дополнение элемента якобиана с индексами  $s$  и  $k$ .

Для вычисления  $\delta \dot{x}$  и  $\delta \dot{y}$  необходимо заменить  $x_0$  и  $y_0$  через  $\dot{x}_0$  и  $\dot{y}_0$  в производных, стоящих перед интегралами в (4.7.35).

В качестве элементов эллиптической орбиты  $c_1, c_2, c_3, c_4$  можно, например, взять

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= n_0 t + e_0 = n_0 t + c_1, \\ c_1 &= e_0, \quad c_2 = L_0, \quad c_3 = \eta_{10}, \quad c_4 = \xi_{10}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.37)$$

где  $L_0, \xi_{10}, \eta_{10}, \lambda_0$  — невозмущенные значения канонических элементов второй системы Пуанкаре [см. (4.3.23) и (4.3.25)],  $e_0 = \pi_0 + M_0$ . При таком выборе  $c_i$  якобиан  $J = 1$ .

Встречающиеся выше алгебраические дополнения равны

$$\left. \begin{aligned} A_{31} &= -\frac{\partial x_0}{\partial L_0} + \frac{3\mu^2}{L_0^4} t \frac{\partial x_0}{\partial \lambda_0}, \quad A_{32} = \frac{\partial x_0}{\partial \lambda_0}, \\ A_{33} &= -\frac{\partial x_0}{\partial \xi_{10}}, \quad A_{34} = \frac{\partial x_0}{\partial \eta_{10}}, \\ A_{41} &= -\frac{\partial y_0}{\partial L_0} + \frac{3\mu^2}{L_0^4} t \frac{\partial y_0}{\partial \lambda_0}, \quad A_{42} = \frac{\partial y_0}{\partial \lambda_0}, \\ A_{43} &= -\frac{\partial y_0}{\partial \xi_{10}}, \quad A_{44} = \frac{\partial y_0}{\partial \eta_{10}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.38)$$

где

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{[2L_0 - (\xi_{10}^2 + \eta_{10}^2)]^2}{4\mu(1 + e_0 \cos v_0)} \cos v_0, \\ y_0 &= \frac{[2L_0 - (\xi_{10}^2 + \eta_{10}^2)]^2}{4\mu(1 + e_0 \cos v_0)} \sin v_0, \\ e_0 &= \frac{\sqrt{\xi_{10}^2 + \eta_{10}^2}}{\sqrt{L_0}} \left[ 1 - \frac{1}{4L_0} (\xi_{10}^2 + \eta_{10}^2) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

$\mu = f(m_0 + m)$ ,  $v_0$  — невозмущенная истинная аномалия.

Заметим, что в выбранной системе координат  $P_0xy$  — угловое расстояние перигелия  $\omega_0 = 0$ .

Четыре произвольные постоянные интегрирования определяются чаще всего из условия «средних элементов» (см. § 7.01).

### § 7.04. Метод Лапласа — Ньюкома

Из уравнений возмущенного движения, записанных в полярных координатах Ганзена (4.1.43), имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = r^{-2} \left( C + \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right), \quad (4.7.39)$$

где  $\omega$  — возмущенная истинная долгота возмущаемой планеты  $P$ , отсчитываемая в плоскости ее оскулирующей орбиты. Если принять

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \delta\omega, \\ \frac{d\omega_0}{dt} &= \frac{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2}}{r_0^2}, \\ C &= n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.40)$$

то для возмущения  $\delta\omega$  будем иметь уравнение

$$\frac{d(\delta\omega)}{dt} = \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} + \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt, \quad (4.7.41)$$

откуда

$$\delta\omega = C_1 + \int \left[ \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} + \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] dt. \quad (4.7.42)$$

Здесь  $C_1$  — произвольная постоянная. В (4.7.42) входит возмущенный радиус-вектор  $r$ , поэтому для определения  $\delta\omega$  необходимо сначала вычислить возмущение радиуса-вектора  $r$ . Лаплас разработал метод определения возмущения радиуса-вектора  $r$ , а Ньюком получил возмущение натурального логарифма радиуса-вектора

$$\rho = \ln r, \quad \rho_0 = \ln r_0, \quad \delta\rho = \rho - \rho_0 = \ln \frac{r}{r_0}. \quad (4.7.43)$$

Уравнение для  $\delta\rho$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(r_0^2 \delta\rho)}{dt^2} + \frac{\mu(r_0 \delta\rho)}{r_0^3} &= 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho} - \\ &- \frac{d^2}{dt^2} \left[ r_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (\delta\rho)^n}{n!} \right] + \frac{\mu}{r_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (\delta\rho)^n}{n!}, \\ d'R &= \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.44)$$

Уравнение (4.7.44) имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\mu q}{r_0^3(t)} = Q, \quad (4.7.45)$$

а соответствующее ему однородное уравнение имеет вид (4.7.06). Интегрирование уравнения вида (4.7.45) рассмотрено в § 7.01. Можно написать, что

$$\delta p = \frac{q_2(t)}{nr_0^2} \int q_1 Q dt - \frac{q_1(t)}{nr_0^2} \int q_2 Q dt. \quad (4.7.46)$$

Функции  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  даны в § 7.01.

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

Наряду с методами вычисления возмущений в координатах в небесной механике и астродинамике широко используются различные способы вычисления возмущений в оскулирующих элементах путем приближенного интегрирования уравнений для оскулирующих элементов (см. гл. 3 и 4). Некоторые из этих методов излагаются в главе 8. Другие способы можно найти в [1]—[7].

### § 8.01. Общий вид возмущений элементов. Порядок, степень, ранг и класс возмущений

В главе 3 приведены дифференциальные уравнения возмущенного движения, записанные для различных систем элементов. Интегрирование этих уравнений выполняется либо методом последовательных приближений, либо при помощи рядов.

Пусть  $\xi$  — один из возмущенных элементов. Если обозначить через  $\xi_0$  его невозмущенное значение, а через  $\delta\xi$  — возмущение, то

$$\xi = \xi_0 + \delta\xi. \quad (4.8.01)$$

Если  $\delta\xi$  определяется с помощью метода рядов, то будем иметь

$$\delta\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi. \quad (4.8.02)$$

**Определение.** Величина  $\delta_k \xi$ , пропорциональная произведению степеней возмущающих масс, сумма показателей которых равна  $k$ , называется *возмущением  $k$ -го порядка*.

Множитель при произведении степеней масс в возмущении  $\delta_R \xi$  в общем случае состоит из слагаемых вида

$$A \mathfrak{M}_0 \frac{t^p \cos [(s, n) t + \alpha_0]}{(s_1, n)^{k_1} (s_2, n)^{k_2} \dots (s_q, n)^{k_q}}, \quad (4.8.03)$$

где

$$(s, n) = \sum_{i=1}^m s^{(i)} n_i, \quad (s_1, n) = \sum_{i=1}^m s_1^{(i)} n_i, \quad \dots, \quad (s_q, n) = \sum_{i=1}^m s_q^{(i)} n_i,$$

причем  $A$  — постоянный коэффициент,  $n_1, \dots, n_m$  — невозмущенные средние движения взаимодействующих тел,  $p, k_1, k_2, \dots, k_q$  — целые неотрицательные числа,  $\mathfrak{M}_0$  — одночлен, целый относительно невозмущенных эксцентриситетов и синуса половины взаимного наклона,  $s^{(i)}, s_1^{(i)}, \dots, s_q^{(i)}$  — целые числа.

Определение. Степень одночлена  $\mathfrak{M}_0$  называется *степенью возмущения*  $\delta_R \xi$ .

Определение. Разность  $k - p$  называется *рангом возмущения*  $\delta_R \xi$ .

Определение. Число  $k - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p$ , где  $q$  — сумма всех встречающихся в данном слагаемом чисел  $k_1, \dots, k_q$ , называется *классом возмущения*  $\delta_R \xi$ .

Возмущения можно разделить на *вековые, смешанные* и *периодические*.

Возмущение называется *вековым*, если оно содержит время  $t$  лишь в виде степенных функций. Если некоторое возмущение содержит произведение степенных и тригонометрических функций времени  $t$ , то оно называется *смешанным*. Наконец, если возмущение состоит только из тригонометрических функций, то оно называется *периодическим*. Более подробно об этом можно почитать в [6].

### § 8.02. Метод Гаусса вычисления вековых возмущений первого порядка

При построении аналитических теорий движения небесных тел коэффициенты вековых возмущений должны вычисляться с большей точностью, так как влияние этих возмущений пропорционально различным степеням времени  $t$ . Для вычисления *вековых возмущений первого порядка* Гаусс разработал метод, пригодный для любых орбит эллиптического типа [4].

Этот метод обладает двумя достоинствами: а) вековые возмущения вычисляются *независимо* от других возмущений;

б) в процессе вычисления не используется разложение возмущающей функции.

Пусть оскулирующие элементы  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$  определяются из дифференциальных уравнений Ньютона (4.3.09) для двухпланетной задачи. Обозначим через  $a_p, a_e, a_i, a_\Omega, a_\omega, a_\tau$  коэффициенты вековых возмущений первого порядка элементов  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$  соответственно (см. (4.8.03)).

Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned}
 a_p &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2r \tilde{T} dM dM_1, \\
 a_e &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sin v \cdot \tilde{S} + \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T} \right\} dM dM_1, \\
 a_i &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W} dM dM_1, \\
 a_\Omega &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W} dM dM_1, \\
 a_\omega &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W} \right] dM dM_1, \\
 a_\tau &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ (eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2} dM dM_1.
 \end{aligned} \right\} (4.8.04)$$

Здесь  $M, M_1$  — невозмущенные средние аномалии возмущаемого и возмущающего тел. Под знаком интегралов в (4.8.04) оскулирующие элементы принимают невозмущенные значения.

Точность вычисления коэффициентов вековых возмущений  $a_p, \dots, a_\tau$  определяется точностью вычисления определенных интегралов, входящих в формулы (4.8.04). Эта точность может быть сколь угодно высокой. На современных вычислительных машинах подобные вычисления не вызывают никаких трудностей.

### § 8.03. Метод Лагранжа определения вековых возмущений в двухпланетной задаче

Введем вместо оскулирующих элементов  $e_1, e_2, \Pi_1, \Pi_2, i_1, i_2, \Omega_1, \Omega_2$  планет  $P_1$  и  $P_2$  новые элементы:

$$\left. \begin{aligned} h_s &= e_s \sin \Pi_s, & p_s &= \operatorname{tg} i_s \sin \Omega_s, \\ k_s &= e_s \cos \Pi_s, & q_s &= \operatorname{tg} i_s \cos \Omega_s, \end{aligned} \right\} \quad (4.8.05) \quad (s = 1, 2),$$

которые часто называются *элементами Лагранжа*.

Для этих элементов, используя вековую часть возмущающей функции (4.6.27), выписанную с точностью до вторых степеней  $\sigma, e_1, e_2$ , можно написать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{2fm_2\bar{N}}{n_1 a_1^2} k_1 - \frac{2fm_2\bar{P}}{n_1 a_1^2} k_2, \\ \frac{dk_1}{dt} &= -\frac{2fm_2\bar{N}}{n_1 a_1^2} h_1 + \frac{2fm_2\bar{P}}{n_1 a_1^2} h_2, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{2fm_2\bar{N}}{n_1 a_1^2} q_1 + \frac{2fm_2\bar{N}}{n_1 a_1^2} q_2, \\ \frac{dq_1}{dt} &= \frac{2fm_2\bar{N}}{n_1 a_1^2} p_1 - \frac{2fm_2\bar{N}}{n_1 a_1^2} p_2, \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{2fm_1\bar{P}}{n_2 a_2^2} k_1 + \frac{2fm_1\bar{N}}{n_2 a_2^2} k_2, \\ \frac{dk_2}{dt} &= \frac{2fm_1\bar{P}}{n_2 a_2^2} h_1 - \frac{2fm_1\bar{N}}{n_2 a_2^2} h_2, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{2fm_1\bar{N}}{n_2 a_2^2} q_1 - \frac{2fm_1\bar{N}}{n_2 a_2^2} q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{2fm_1\bar{N}}{n_2 a_2^2} p_1 + \frac{2fm_1\bar{N}}{n_2 a_2^2} p_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.8.06)$$

где

$$\bar{N} = \frac{1}{8} \frac{a_1}{a_2^2} b_3^{(1)}, \quad \bar{P} = \frac{1}{8} \frac{a_1}{a_2^2} b_3^{(2)}, \quad (4.8.07)$$

а  $a_1 < a_2, b_3^{(1)}, b_3^{(2)}$  — коэффициенты Лапласа.

Система (4.8.06) является линейной системой с постоянными коэффициентами, и ее общее решение можно написать в виде [2]

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{a_1 \sqrt{m_1 n_1}} [M_1^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + M_1^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2)], \\ k_1 &= \frac{1}{a_1 \sqrt{m_1 n_1}} [M_1^{(1)} \cos(\lambda_1 t + \beta_1) + M_1^{(2)} \cos(\lambda_2 t + \beta_2)], \\ h_2 &= \frac{1}{a_2 \sqrt{m_2 n_2}} [M_2^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + M_2^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2)], \\ k_2 &= \frac{1}{a_2 \sqrt{m_2 n_2}} [M_2^{(1)} \cos(\lambda_1 t + \beta_1) + M_2^{(2)} \cos(\lambda_2 t + \beta_2)], \\ p_1 &= \frac{1}{a_1 \sqrt{m_1 n_1}} [L_1^{(1)} \sin \gamma_1 + L_1^{(2)} \sin(\kappa_2 t + \gamma_2)], \\ q_1 &= \frac{1}{a_1 \sqrt{m_1 n_1}} [L_1^{(1)} \cos \gamma_1 + L_1^{(2)} \cos(\kappa_2 t + \gamma_2)], \\ p_2 &= \frac{1}{a_2 \sqrt{m_2 n_2}} [L_2^{(1)} \sin \gamma_1 + L_2^{(2)} \sin(\kappa_2 t + \gamma_2)], \\ q_2 &= \frac{1}{a_2 \sqrt{m_2 n_2}} [L_2^{(1)} \cos \gamma_1 + L_2^{(2)} \cos(\kappa_2 t + \gamma_2)], \end{aligned} \right\} (4.8.08)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \kappa_1 = 0, \kappa_2$  — корни вековых (характеристических) уравнений

$$\lambda^2 - 2f\bar{N} \left( \frac{m_1}{n_2 a_2^2} + \frac{m_2}{n_1 a_1^2} \right) \lambda + \frac{4f^2 m_1 m_2}{n_1 n_2 a_1^2 a_2^2} (\bar{N}^2 - \bar{P}^2) = 0, \quad (4.8.09)$$

$$\kappa^2 + 2f\bar{N} \left( \frac{m_1}{n_2 a_2^2} + \frac{m_2}{n_1 a_1^2} \right) \kappa = 0. \quad (4.8.10)$$

Произвольными постоянными в общем решении (4.8.08) можно считать  $\beta_1, \beta_2, M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \gamma_1, \gamma_2, L_1^{(1)}, L_1^{(2)}$ , а остальные величины определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} M_2^{(1)} &= M_1^{(1)} \frac{2f\bar{P}}{a_1 a_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}}, & M_2^{(2)} &= M_1^{(2)} \frac{2f\bar{P}}{a_1 a_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}}, \\ & \frac{2f\bar{N} m_1}{n_2 a_2^2} - \lambda_1 & & \frac{2f\bar{N} m_1}{n_2 a_2^2} - \lambda_2 \\ L_2^{(1)} &= L_1^{(1)} \frac{a_2 \sqrt{m_2 n_2}}{a_1 \sqrt{m_1 n_1}}, & L_2^{(2)} &= L_1^{(2)} \frac{\frac{2f\bar{N} m_2}{n_1 a_1^2} + \kappa_2}{\frac{2f\bar{N}}{a_1 a_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}}}. \end{aligned} \right\} (4.8.11)$$

Из условия  $\kappa_1 = 0$  следует, что в двухпланетной задаче существует решение, при котором плоскости орбит планет совпадают ( $i_1 = i_2, \Omega_1 = \Omega_2$ ). Заметим, что  $\kappa_2 < 0$ .



**З а м е ч а н и е 1.** Изложенный метод решения дифференциальных уравнений для элементов Лагранжа (4.8.06) получил в специальной литературе название «метода Лагранжа вычисления вековых возмущений», хотя, как видно из общего решения (4.8.08), элементы Лагранжа изменяются периодическим образом. Это объясняется тем, что в уравнениях для элементов сохранена лишь вековая часть возмущающей функции с точностью до вторых степеней малых величин.

**З а м е ч а н и е 2.** Метод Лагранжа допускает простое обобщение на случай  $n$ -планетной задачи, и изложение этого вопроса можно найти в книге [2]. Можно показать, что для всех планет Солнечной системы, кроме Плутона, все корни  $\lambda$  положительны и различны, а все корни  $\mu$  отрицательны и различны, кроме одного, равного нулю.

### § 8.04. Основы метода Делоне

Для решения основной проблемы (см. гл. 10) теории Луны Делоне [2], [29] разработал метод решения канонических уравнений движения, получивший в литературе название «метода Делоне». Метод Делоне был видоизменен Цейпелем, и здесь мы изложим основные формулы «метода Делоне — Цейпеля» [2], [30].

Пусть уравнения движения небесного тела записаны с помощью канонических переменных Делоне (4.3.21) и имеют вид (4.3.22). Гамильтониан системы  $R^*$  выражается через возмущающую функцию  $R$  (см. § 3.07).

В основной проблеме теории движения Луны разложение возмущающей функции  $R$  в виде явной функции элементов Делоне представляется четырехкратным рядом вида

$$R = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \sum_{p_3=-\infty}^{\infty} \sum_{p_4=-\infty}^{\infty} A_{p_1, p_2, p_3, p_4} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k), \quad (4.8.12)$$

где  $l, g$  — элементы Делоне, а через  $h$  обозначена разность элемента Делоне и долготы перигея орбиты Солнца,  $k$  — средняя аномалия Солнца. Функция  $R$  зависит явно от времени посредством средней аномалии Солнца  $k$ , поэтому вместо канонической системы шестого порядка (4.3.22) Делоне и Цейпель рассматривали каноническую систему восьмого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial K}, \end{aligned} \right\} \quad (4.8.13)$$

где

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} - \nu K + R, \quad (4.8.14)$$

$$\nu = \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial K}. \quad (4.8.15)$$

$\nu$  — среднее движение Солнца.

Уравнения (4.8.13) отличаются от (4.3.22) тем, что их гамильтониан  $F$  не зависит явно от времени.

Основная идея метода Делоне заключается в том, что с помощью некоторого канонического преобразования переменных из канонических уравнений исключаются наиболее влиятельные члены. Заменим гамильтониан  $F$  в уравнениях (4.8.13) приближенным значением  $\bar{F}$ :

$$\bar{F} = \frac{\mu^2}{2L^2} - \nu K + A_{0,0,0,0} + Q_1 \cos \theta, \quad (4.8.16)$$

где

$$\theta = p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k.$$

Гамильтониан (4.8.16) отличается от (4.8.14) тем, что в (4.8.16) сохранены лишь два члена разложения возмущающей функции (4.8.12) с коэффициентами  $A_{0,0,0,0}$  и  $Q_1 = A_{p_1, p_2, p_3, p_4}$ , где  $p_1, p_2, p_3, p_4$  принимают конкретные значения. Оставленный единственный периодический член в гамильтониане (4.8.16) имеет относительно больший коэффициент, чем все другие отброшенные периодические члены из (4.8.12).

Ради симметрии введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} L_1 = L, \quad L_2 = G, \quad L_3 = H, \quad L_4 = K, \\ l_1 = l, \quad l_2 = g, \quad l_3 = h, \quad l_4 = k, \end{aligned} \right\} \quad (4.8.17)$$

$$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1, \quad \bar{F}_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} - \nu L_4, \quad \bar{F}_1 = A_{0,0,0,0} + Q_1 \cos \theta. \quad (4.8.18)$$

Тогда вместо системы (4.8.13) рассмотрим уравнения

$$\frac{dL_k}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l_k}, \quad \frac{dl_k}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial L_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (4.8.19)$$

Вместо прежних канонических переменных  $(L_k, l_k)$  с помощью производящей функции  $S(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}; l_1, l_2, l_3, l_4)$  введем такие новые канонические переменные  $L_k^{(1)}, l_k^{(1)}$ , чтобы в преобразованных уравнениях гамильтониан был бы функцией только  $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}$ .

В теории движения Луны функция  $F_1$  имеет множителем малый параметр  $\lambda = \nu^2/n^2$  (отношение квадратов средних

движений Солнца и Луны  $\sim 0,006$ ), поэтому производящую функцию  $S(L_k^{(1)}; l_k)$  будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\lambda$ :

$$S(L_k^{(1)}; l_k) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(L_k^{(1)}; l_k), \quad (4.8.20)$$

в котором член  $S_j$  пропорционален  $\lambda^j$ . Новый гамильтониан можно также представить рядом

$$\bar{F}^*(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_j^*(L_k^{(1)}).$$

С точностью до членов второго порядка относительно  $\lambda$  включительно новый гамильтониан и производящая функция выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= L_1^{(1)} l_1 + L_2^{(1)} l_2 + L_3^{(1)} l_3 + L_4^{(1)} l_4, \\ S_1 &= \frac{Q_1^{(1)}}{p_1 n^{(1)} + p_4 v} \sin \theta, \\ S_2 &= \frac{Q_1^{(1)}}{(p_1 n^{(1)} + p_4 v)^2} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial A_{0,0,0,0}}{\partial L_j^{(1)}} \sin \theta + \\ &+ \left[ \frac{3}{8} \frac{n^{(1)}}{L_1^{(1)}} \frac{p_1^2 Q_1^{(1)2}}{(p_1 n^{(1)} + p_4 v)^3} + \frac{1}{4} \frac{Q_1^{(1)}}{(p_1 n^{(1)} + p_4 v)^2} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial Q_1}{\partial L_j^{(1)}} \right] \sin 2\theta, \\ n^{(1)} &= \frac{\mu^2}{L_1^{(1)3}}, \quad Q_1^{(1)} = Q_1(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}), \\ \frac{\partial A_{0,0,0,0}}{\partial L_j^{(1)}} &= \frac{\partial A_{0,0,0,0}}{\partial L_j} \Big|_{\substack{L_1=L_1^{(1)} \\ \vdots \\ L_4=L_4^{(1)}}}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial L_j^{(1)}} = \frac{\partial Q_1}{\partial L_j} \Big|_{\substack{L_1=L_1^{(1)} \\ \vdots \\ L_4=L_4^{(1)}}}, \\ \bar{F}_0^* &= \frac{\mu^2}{2L_1^{(1)2}} - vL_4^{(1)}, \\ \bar{F}_1^* &= A_{0,0,0,0}(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}), \\ \bar{F}_2^* &= \frac{3}{4} \frac{n^{(1)}}{L_1^{(1)}} \frac{p_1^2 Q_1^{(1)2}}{(p_1 n^{(1)} + p_4 v)^2} + \frac{1}{2} \frac{Q_1^{(1)}}{p_1 n^{(1)} + p_4 v} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial Q_1}{\partial L_j^{(1)}}. \end{aligned} \right\} (4.8.21)$$

По аналогичным формулам можно вычислить и приближения более высоких порядков. Для этого необходимо воспользоваться

основным уравнением метода Делоне — Цейпеля:

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 \left( L_1^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_1}, L_2^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_2}, L_3^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_3}, L_4^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_4} \right) + \\ + \bar{F}_1 \left( L_1^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_1}, L_2^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_2}, L_3^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_3}, \theta \right) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_j^* (L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}). \quad (4.8.22) \end{aligned}$$

Соответствующие приближения получаются из (4.8.22), если разложить левую часть в ряд Тейлора и приравнять величины одинакового порядка малости. Связь между старыми и новыми каноническими переменными выражается равенствами

$$\left. \begin{aligned} L_k &= L_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial l_k} & (k = 1, 2, 3, 4), \\ l_k^{(1)} &= l_k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial S_j}{\partial L_k^{(1)}} & (k = 1, 2, 3), \\ l_4^{(1)} &= l_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.23)$$

С помощью теоремы о неявных функциях из (4.8.23) получим  $L_k, l_k$  в виде функций  $L_k^{(1)}, \theta^{(1)} = p_1 l_1^{(1)} + p_2 l_2^{(1)} + p_3 l_3^{(1)} + p_4 l_4^{(1)}$ . Величины  $L_k, l_k$  являются некоторым приближением для точных элементов Делоне, так как мы рассматривали приближенные уравнения движения (4.8.19) вместо точных уравнений (4.8.13). Указанный метод позволяет, в сущности, исключить из уравнений член, содержащий  $\cos \theta$ . Если в конкретной задаче требуется исключить другие члены, аргументы которых кратны  $\theta$ , то можно повторить преобразование Делоне — Цейпеля, однако здесь встречаются трудности, связанные с появлением *малых знаменателей* [см. формулы (4.8.21)]. Влияние малых знаменателей различно в различных задачах небесной механики, но, как показали Делоне и Цейпель, в теории движения Луны эти трудности преодолимы. Следует, однако, сказать, что строгого математического обоснования метода Делоне не получено (имеется в виду доказательство сходимости использованных рядов).

Брауэр [2] модифицировал метод Делоне применительно к задаче о движении искусственного спутника.

### § 8.05. Связь между возмущениями координат и возмущениями элементов

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — некоторая система координат, а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  — некоторая система элементов. Обозначим полное возмущение координаты  $x_i$  через  $\delta x_i$ , а полное возмущение элемента  $\alpha_i$  — через  $\delta \alpha_i$ . Согласно (4.8.02)

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k x_i, \quad \delta \alpha_l = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \alpha_l. \quad (4.8.24)$$

Пусть координаты и элементы связаны соотношениями

$$x_i = f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (4.8.25)$$

Тогда полные возмущения координат выражаются через полные возмущения элементов с помощью ряда

$$\delta x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_s=n} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_s!} \times \\ \times \left( \frac{\partial^n f_i}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_s^{k_s}} \right)_0 (\delta \alpha_1)^{k_1} \dots (\delta \alpha_s)^{k_s}. \quad (4.8.26)$$

Для возмущений первого и второго порядка имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 x_i &= \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} \right)_0 \delta_1 \alpha_1 + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_2} \right)_0 \delta_1 \alpha_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right)_0 \delta_1 \alpha_s, \\ \delta_2 x_i &= \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} \right)_0 \delta_2 \alpha_1 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right)_0 \delta_2 \alpha_s + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_1^2} \right)_0 (\delta_1 \alpha_1)^2 + \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_2^2} \right)_0 (\delta_1 \alpha_2)^2 + \dots + \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_s^2} \right)_0 (\delta_1 \alpha_s)^2 + \right. \\ &\left. + 2 \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right)_0 (\delta_1 \alpha_1) (\delta_1 \alpha_2) + \dots + 2 \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{s-1} \partial \alpha_s} \right)_0 (\delta_1 \alpha_{s-1}) (\delta_1 \alpha_s) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.27)$$

В формулах (4.8.26) и (4.8.27) индекс «0» означает, что в частных производных элементы заменены своими невозмущенными значениями.

В частности, для возмущений первого порядка полярных координат Ганзена (см. § 1.11) имеем

$$\delta_1 \omega = \delta_1 l + [H_1 \cos M + 2H_2 \cos 2M + 3H_3 \cos 3M + \dots] \delta_1 l - \\ - [H_1 \cos M + 2H_2 \cos 2M + 3H_3 \cos 3M + \dots] \delta_1 \pi + \\ + \left[ \frac{dH_1}{de} \sin M + \frac{dH_2}{de} \sin 2M + \dots \right] \delta_1 e, \quad (4.8.28)$$

$$\delta_1 r = \left( \frac{r}{a} \right)_0 \delta_1 a + \left[ - \left( \frac{r^2 \cos v}{p} \right)_0 - \left( \frac{2aer}{p} \right)_0 \right] \delta_1 e + \left( \frac{r^2 e \sin v}{p} \right)_0 [\delta_1 \omega - \delta_1 \pi]. \quad (4.8.29)$$

Здесь  $\delta_1 l$ ,  $\delta_1 \pi$ ,  $\delta_1 e$  — возмущения первого порядка средней долготы, долготы перицентра, эксцентриситета,  $M$  — средняя аномалия,  $H_k$  — коэффициенты уравнения центра [см. формулы (2.3.14) — (2.3.15)].

Для выражения возмущений прямоугольных координат через возмущения канонических элементов следует воспользоваться соотношениями § 3.09. Выражения возмущений элементов через возмущения координат можно получить аналогичным образом.

## Глава 9

### МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА СХЕМАХ ОСРЕДНЕНИЯ

Большинство методов, изложенных в главах 7 и 8, основано на использовании кеплеровского эллипса в качестве нулевого приближения для построения теории возмущений. Такой подход целесообразен в следующих случаях:

- 1) возмущения достаточно малы;
- 2) промежуток времени, на котором используется возмущенная теория, невелик;
- 3) имеют место одновременно случаи 1) и 2).

Если не имеют места случаи 1) — 3), тогда целесообразно строить варианты теории возмущений, основанные на применении асимптотических методов [32].

К таким задачам относятся так называемые «резонансные задачи», для которых характерна соизмеримость средних движений планет, приводящая к появлению малых знаменателей в процессе построения классических вариантов теории возмущений.

Сущность излагаемых методов состоит в том, что в качестве нулевого приближения (или промежуточной орбиты) для решения уравнений динамики берется не решение задачи двух тел, а решение одного из упрощенных вариантов ограниченной круговой задачи трех тел, чаще всего получаемых с помощью методов осреднения. Далее, теория возмущений строится с помощью метода Н. Н. Боголюбова [32] и его вариантов, разработанных для задач с быстрыми и медленными переменными [33] и специально для планетных задач [34] — [36].

#### § 9.01. Основные схемы осреднения возмущающей функции в двухпланетной задаче

Все схемы осреднения возмущающей функции  $R$  (4.6.02) делятся на две группы.

- 1) Схемы осреднения, не учитывающие соизмеримость или почти соизмеримость средних движений возмущающей и воз-

мущаемой планет. К ним относятся схемы К. Гаусса, П. Фату и Н. Д. Моисеева [31].

2) Схемы осреднения, учитывающие это свойств К таковым относятся прежде всего схемы Делоне — Хилла [31].

Пусть разложение возмущающей функции  $R$  для ограниченной круговой задачи трех тел имеет вид

$$R = f m_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, k_3}(a, p, i) \times \\ \times \cos(k_1 M - k_2 M_1 + k_2 \Omega + k_3 \omega), \quad (4.9.01)$$

где  $f$  — постоянная тяготения,  $m_1$  — масса возмущающей планеты (обычно Юпитера),  $a, p, i, M, \Omega, \omega$  — кеплеровские элементы орбиты возмущаемой планеты,  $M_1$  — средняя аномалия возмущающей планеты.

Удобно рассматривать разложение (4.9.01) в виде суммы трех функций:

$$R_B = f m_1 C_{0, 0, 0}(a, p, i), \quad (4.9.02)$$

$$R_D = f m_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, k_3}(a, p, i) \times \\ \times \cos(k_1 M - k_2 M_1 + k_2 \Omega + k_3 \omega), \quad (4.9.03) \\ |k_1 n + k_2 n_1| \leq O(m_1),$$

кроме  $k_1 = k = 0$ ;

$$R_H = f m_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, k_3}(a, p, i) \times \\ \times \cos(k_1 M - k_2 M_1 + k_2 \Omega + k_3 \omega), \quad (4.9.04) \\ |k_1 n + k_2 n_1| > O(m_1).$$

Функции  $R_B, R_D, R_H$  называются соответственно *вековой*, *резонансной (долгопериодической)* и *нерезонансной (короткопериодической)* частями возмущающей функции  $R$ .

Отличие между разложениями (4.9.03) и (4.9.04) состоит в том, что суммирование в (4.9.03) ведется только по тем значениям индексов  $k_1$  и  $k_2$ , которые удовлетворяют условию

$$|k_1 n + k_2 n_1| \leq O(m_1),$$

а в (4.9.04) выполняется противоположное неравенство. При использовании классических методов теории возмущений функция  $R_D$  порождает «малые знаменатели» в теории возмущений, или долгопериодические неравенства.



Действительно, если  $M = nt + M_0$ ,  $M_1 = n_1t + M_{1,0}$ , то

$$\int R_p dt = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} \frac{C_{k_1, k_2, k_3}(a, p, i)}{k_1n + k_2n_1} \sin(k_1nt - k_2n_1t + A),$$

где  $A$  — величина, не зависящая от времени. При условии  $|k_1n + k_2n_1| \leq O(m_1)$  коэффициенты при тригонометрических функциях могут достигать сколь угодно больших величин.

**1. Схема К. Гаусса.** Будем обозначать осредненную возмущающую функцию во всех схемах через  $\bar{R}_i$ . Согласно схеме Гаусса

$$\bar{R}_1(a, p, i, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(a, p, i, M, \Omega, \omega) dM dM_1, \quad (4.9.05)$$

или

$$\bar{R}_1(a, p, i, \omega) = fm_1 \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{0, 0, k_3}(a, p, i) \cos k_3\omega. \quad (4.9.06)$$

## 2. Схема П. Фату:

$$\bar{R}_2(a, p, i, M, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(a, p, i, M, \Omega, \omega) dM_1, \quad (4.9.07)$$

или

$$\bar{R}_2(a, p, i, M, \omega) = fm_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, 0, k_3}(a, p, i) \cos(k_1M + k_3\omega). \quad (4.9.08)$$

Для плоского варианта схемы Фату имеем [34]

$$\bar{R}_2^{(0)}(a, p, M) = fm_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} C_{k_1, 0}(a, p) \cos k_1M. \quad (4.9.09)$$

## 3. Схема Н. Д. Моисеева:

$$\bar{R}_3(a, p, i, \Omega, \omega, M_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(a, p, i, M, \Omega, \omega, M_1) dM, \quad (4.9.10)$$

или

$$\bar{R}_3(a, p, i, \Omega, \omega, M_1) = fm_1 \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{0, k_2, k_3}(a, p, i) \times \\ \times \cos[k_2(\Omega - M_1) + k_3\omega]. \quad (4.9.11)$$

Для плоского варианта схемы Н. Д. Моисеева имеем [34]

$$\bar{R}_3^{(0)}(a, p, \omega, M_1) = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} C_{0, k_2}(a, p) \cos k_2(\Omega - M_1). \quad (4.9.12)$$

4. Первая схема Делоне — Хилла. Введем аномалию Делоне  $D$  по формуле

$$D = \bar{k}_1 M + \bar{k}_2 (\Omega - M_1), \quad (4.9.13)$$

где  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  — некоторые известные положительные числа и такие, что  $\bar{k}_1 n - \bar{k}_2 n_1 = 0$ .

С помощью (4.9.13) исключим из разложения (4.9.01) величину  $\Omega - M_1$ . Получим

$$R_4(a, p, i, M, \omega, D) = f m_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, k_3}(a, p, i) \times \\ \times \cos \left[ \left( k_1 - k_2 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right) M + \frac{k_2}{\bar{k}_2} D + k_3 \omega \right]. \quad (4.9.14)$$

В результате осреднения разложения (4.9.14) по  $M$  получаем

$$\bar{R}_4(a, p, i, \omega, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(a, p, i, M, \omega, D) dM, \quad (4.9.15)$$

или

$$\bar{R}_4(a, p, i, \omega, D) = f m_1 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{s\bar{k}_1, s\bar{k}_2, k_3}(a, p, i) \cos(sD + k_3\omega). \quad (4.9.16)$$

Для плоского варианта первой схемы Делоне — Хилла имеем [31]

$$\bar{R}_4^{(0)}(a, p, D) = f m_1 \sum_{s=0}^{\infty} C_{s\bar{k}_1, s\bar{k}_2}(a, p) \cos sD. \quad (4.9.17)$$

В плоском варианте аномалия Делоне  $D$  выражается соотношением

$$D = \bar{k}_1 M + \bar{k}_2 (\omega - M_1). \quad (4.9.18)$$

5. Вторая схема Делоне — Хилла. Введем обобщенную аномалию Делоне  $\tilde{D}$  по формуле

$$\tilde{D} = \frac{n_1}{n} M + \Omega - M_1 \quad (4.9.19)$$

и исключим из разложения (4.9.01) разность  $\Omega - M_1$ . Будем иметь

$$R_5(a, p, i, M, \omega, \tilde{D}) = f m_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, k_3}(a, p, i) \times \\ \times \cos \left[ \frac{k_1 n - k_2 n_1}{n} M + k_2 \tilde{D} + k_3 \omega \right]. \quad (4.9.20)$$

Осредненная возмущающая функция  $\bar{R}_5$  вычисляется по формуле

$$\bar{R}_5(a, p, i, \omega, \tilde{D}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(a, p, i, M, \omega, \tilde{D}) dM. \quad (4.9.21)$$

Для плоского случая

$$\tilde{D} = \frac{n_1}{n} M + \omega - M_1. \quad (4.9.22)$$

Более подробные сведения о приведенных схемах можно найти в [31].

### § 9.02. Уравнения осредненных схем ограниченной круговой задачи трех тел, определяющие промежуточную орбиту (нулевое приближение). Их первые интегралы

Для получения уравнений промежуточного движения возмущаемого тела необходимо заменить возмущающую функцию  $R$  в уравнениях Лагранжа (4.3.15) тем или иным осредненным значением. Будем обозначать значения осредненных оскулирующих элементов через  $\bar{a}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{i}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{\omega}$ .

1. Схема К. Гаусса. Уравнения для схемы Гаусса имеют вид [36]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{i}}{dt} &= \frac{\text{ctg } \bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -n_1 + \frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}} \sin i} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{i}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{p}} - \frac{\text{ctg } \bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{i}}, \\ \bar{\Omega} &= \bar{\Omega} - M_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.9.23)$$

В (4.9.23)  $m$  — масса Солнца.

Система (4.9.23) является интегрируемой [36].

2. Схема П. Фату. Уравнения для схемы Фату имеют вид [36]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{M}}, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{i}}{dt} &= \frac{\text{ctg } \bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -n_1 + \frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}} \sin \bar{i}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{i}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{p}} - \frac{\text{ctg } \bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{i}}. \end{aligned} \right\} (4.9.24)$$

Система (4.9.24) имеет два известных первых интеграла [31], [36], однако ее общий интеграл неизвестен.

В плоском случае уравнения для схемы Фату имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2^{(0)}}{\partial \bar{M}}, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2^{(0)}}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -n_1 - 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2^{(0)}}{\partial \bar{p}}, \\ \bar{\bar{\omega}} &= \bar{\omega} - M_1. \end{aligned} \right\} (4.9.25)$$

Известен общий интеграл системы (4.9.25):

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= c_1, \\ \frac{fm}{2\bar{a}} + \sqrt{fm\bar{p}} n_1 + \bar{R}_2^{(0)} &= c_2, \\ t - t_0 &= \int_{\bar{M}_0}^{\bar{M}} \frac{d\bar{M}}{\frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2^{(0)}}{\partial \bar{a}}}, \\ \bar{\omega} - \bar{\omega}_0 &= -2 \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_2^{(0)}}{\partial \bar{p}} dt. \end{aligned} \right\} (4.9.26)$$

В равенствах (4.9.26) функция  $\bar{R}_2^{(0)}$  выражается соотношением (4.9.09).

3. Схема Н. Д. Моисеева. Уравнения для схемы Н. Д. Моисеева имеют вид [36]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{l}}{dt} &= \frac{\text{ctg } \bar{l}}{\sqrt{fm\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{\omega}} - \frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}} \sin \bar{l}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{\Omega}}, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{p}} - \frac{\text{ctg } \bar{l}}{\sqrt{fm\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{l}}, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -n_1 + \frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}} \sin \bar{l}} \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial \bar{l}}. \end{aligned} \right\} (4.9.27)$$

Известны [31], [36] два первых интеграла системы (4.9.27), однако ее общий интеграл неизвестен.

Плоский вариант осредненной модели Н. Д. Моисеева относится к интегрируемым задачам [31]. Уравнения для этого случая выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3^{(0)}}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3^{(0)}}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -n_1 - 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3^{(0)}}{\partial \bar{p}}. \end{aligned} \right\} (4.9.28)$$

Ее общий интеграл:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= c_1, \\ \sqrt{fm\bar{p}} n_1 + \bar{R}_3^{(0)} &= c_2, \\ t - t_0 &= \int_{\bar{\omega}_0}^{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{-n_1 - \frac{2\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3^{(0)}}{\partial \bar{p}}}, \\ M - M_0 &= \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}_3^{(0)}}{\partial \bar{a}} \right] dt. \end{aligned} \right\} (4.9.29)$$

**4. Первая схема Делоне — Хилла.** Уравнения для первой схемы Делоне — Хилла имеют вид [36]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 2\bar{k}_1 \sqrt{\frac{\bar{a}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial D}, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\bar{i}}{dt} &= \frac{\text{ctg } \bar{i}}{\sqrt{f\bar{m}\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{f\bar{m}\bar{p}} \sin \bar{i}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial D}, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{f\bar{m}}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial \bar{p}} - \frac{\text{ctg } \bar{i}}{\sqrt{f\bar{m}\bar{p}}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial \bar{i}}, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -n_1 + \frac{1}{\sqrt{f\bar{m}\bar{p}} \sin \bar{i}} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial \bar{i}}. \end{aligned} \right\} (4.9.30)$$

Известны [36] два первых интеграла системы (4.9.30), которых, однако, недостаточно, чтобы выписать ее общий интеграл.

Уравнения плоского варианта

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= 2\bar{k}_1 \sqrt{\frac{\bar{a}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial D}, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2\bar{k}_2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial D}, \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{f\bar{m}}{\bar{a}}} - 2 \sqrt{\frac{\bar{a}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial \bar{a}}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -n_1 - 2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial \bar{p}}. \end{aligned} \right\} (4.9.31)$$

имеют известный общий интеграл

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\bar{a}} - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \sqrt{\bar{p}} &= c_1, \\ \frac{f\bar{m}}{2\bar{a}} + \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} n_1 \sqrt{f\bar{m}\bar{a}} + \bar{R}_4^{(0)} &= c_2, \\ t - t_0 &= \\ &= \int_{D_0}^D \frac{dD}{\left( \frac{\bar{k}_1}{\bar{a}} \sqrt{\frac{f\bar{m}}{\bar{a}}} - \bar{k}_2 n_1 \right) - 2\bar{k}_1 \sqrt{\frac{\bar{a}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial \bar{a}} - 2\bar{k}_2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial \bar{p}}}, \\ \bar{\omega} - \bar{\omega}_0 &= -2 \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\bar{p}}{f\bar{m}}} \frac{\partial \bar{R}_4^{(0)}}{\partial \bar{p}} dt. \end{aligned} \right\} (4.9.32)$$

### § 9.03. Разложение возмущающей функции для схем осреднения

В уравнения (4.9.23) — (4.9.25), (4.9.27), (4.9.28), (4.9.30), (4.9.31) входит осредненное значение возмущающей функции  $\bar{R}$ , полученное каким-либо способом, изложенным в § 9.01. Для получения конкретных зависимостей элементов промежуточной орбиты от времени необходимо иметь явный вид разложения  $\bar{R}$  как функции элементов промежуточной орбиты  $\bar{a}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{i}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{\omega}$ .

Ниже выписаны разложения для осредненного значения возмущающей функции  $\bar{R}$  ограниченной круговой задачи трех тел для различных схем осреднения с точностью до четвертых степеней эксцентриситета орбиты возмущаемой планеты и синуса половины взаимного наклона (для краткости черточки сверху, указывающие на то, что разложение зависит от элементов промежуточной орбиты, опущены). Считается, что плоскость орбиты возмущающего тела совпадает с плоскостью эклиптики. Все разложения взяты из трудов Леверье [25].

#### 1. Схема К. Гаусса:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 = f m_1 \left[ (1)^{(0)} + (2)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + (4)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + (11)^{(0)} \sigma^2 + \right. \\ \left. + (12)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \sigma^2 + (17)^{(0)} \sigma^4 + (36)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos 2\omega \right]. \quad (4.9.33) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $(1)^{(0)}$ ,  $(2)^{(0)}$ ,  $(4)^{(0)}$ ,  $(11)^{(0)}$ ,  $(12)^{(0)}$ ,  $(17)^{(0)}$ ,  $(36)^{(0)}$  приведены в § 6.04.

#### 2. Схема П. Фату:

$$\begin{aligned} \bar{R}_2 = \bar{R}_1 + \\ + f m_1 \left\{ \left[ (50)^{(0)} \frac{e}{2} + (51)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^3 + (60)^{(0)} \frac{e}{2} \sigma^2 \right] \cos(l - \omega - \Omega) + \right. \\ \left. + (120)^{(0)} \frac{e}{2} \sigma^2 \cos(l + \omega - \Omega) + \right. \\ \left. + \left[ (172)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + (173)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + (178)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \sigma^2 \right] \cos(2l - 2\omega - 2\Omega) + \right. \\ \left. + \left[ (212)^{(0)} \sigma^2 + (213)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \sigma^2 \right] \cos(2l - 2\Omega) + \right. \\ \left. + (240)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^3 \cos(3l - 3\omega - 3\Omega) + \right. \\ \left. + (290)^{(0)} \frac{e}{2} \sigma^2 \cos(3l - \omega - 3\Omega) + (336)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^4 \cos(4l - 4\omega - 4\Omega) + \right. \\ \left. + (358)^{(0)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \sigma^2 \cos(4l - 2\omega - 4\Omega) + (372)^{(0)} \sigma^4 \cos(4l + 4\omega) \right\}. \quad (4.9.34) \end{aligned}$$

В разложении (4.9.34) функция  $\bar{R}_1$  дается равенством (4.9.33). Величины  $\omega$ ,  $\Omega$  суть кеплеровские элементы (угловое

расстояние перигелия от узла и долгота восходящего узла),  $l$  — средняя долгота возмущаемого тела, равная

$$l = nt + \varepsilon = M + \omega + \Omega. \quad (4.9.35)$$

Коэффициенты  $(50)^{(0)}$ ,  $(51)^{(0)}$ , ...,  $(372)^{(0)}$  даны в § 6.02.

### 3. Схема Н. Д. Моисеева:

$$\begin{aligned} \bar{R}_3 = & \bar{R}_1 + \\ & + fm_1 \left\{ \left[ (50)^{(1)} \frac{e}{2} + (51)^{(1)} \left( \frac{e}{2} \right)^3 + (60)^{(1)} \frac{e}{2} \sigma^2 \right] \cos(l_1 - \omega - \Omega) + \right. \\ & \quad \left. + (120)^{(1)} \frac{e}{2} \sigma^2 \cos(l_1 + \omega - \Omega) + \right. \\ & + \left[ (172)^{(2)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 + (173)^{(2)} \left( \frac{e}{2} \right)^4 + (178)^{(2)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 \sigma^2 \right] \cos(2l_1 - 2\omega - 2\Omega) + \\ & \quad + \left[ (212)^{(2)} \sigma^2 + (213)^{(2)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 \sigma^2 \right] \cos(2l_1 - 2\Omega) + \\ & + (240)^{(3)} \left( \frac{e}{2} \right)^3 \cos(3l_1 - 3\omega - 3\Omega) + (290)^{(3)} \frac{e}{2} \sigma^2 \cos(3l_1 - \omega - 3\Omega) + \\ & \quad + (336)^{(4)} \left( \frac{e}{2} \right)^4 \cos(4l_1 - 4\omega - 4\Omega) + \\ & \quad \left. + (358)^{(4)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 \sigma^2 \cos(4l_1 - 2\omega - 4\Omega) + (372)^{(4)} \sigma^4 \cos(4l_1 - 4\Omega) \right\}; \end{aligned} \quad (4.9.36)$$

$l_1$  — средняя долгота возмущающего тела, равная

$$l_1 = n_1 t + \varepsilon_1 = M_1 + \omega_1 + \Omega_1. \quad (4.9.37)$$

Коэффициенты  $(50)^{(1)}$ ,  $(51)^{(1)}$ , ...,  $(372)^{(4)}$  приведены в § 6.02.

4. Первая схема Делоне — Хилла для соизмеримости  $n_1 : n = 1 : 2$ . В данном случае аналитическая структура осредненного значения возмущающей функции существенно зависит от отношения  $n_1 : n$  (см. (4.9.14) — (4.9.16)).

В частности, для отношения  $n_1 : n = 1 : 2$  будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{R}_4 = & \bar{R}_1 + fm_1 \left\{ \left[ (50)^{(2)} \frac{e}{2} + (51)^{(2)} \left( \frac{e}{2} \right)^3 + (60)^{(2)} \frac{e}{2} \sigma^2 \right] \cos(D + 2\omega) + \right. \\ & \quad \left. + (120)^{(2)} \frac{e}{2} \sigma^2 \cos D + \right. \\ & + \left[ (172)^{(4)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 + (173)^{(4)} \left( \frac{e}{2} \right)^4 + (178)^{(4)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 \sigma^2 \right] \cos(2D + 4\omega) + \\ & \quad + \left[ (212)^{(4)} \sigma^2 + (213)^{(4)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 \sigma^2 \right] \cos(2D + 2\omega) + \\ & + (240)^{(6)} \left( \frac{e}{2} \right)^3 \cos(3D + 6\omega) + (290)^{(6)} \frac{e}{2} \sigma^2 \cos(3D + 4\omega) + \\ & + (336)^{(8)} \left( \frac{e}{2} \right)^4 \cos(4D + 8\omega) + (358)^{(8)} \left( \frac{e}{2} \right)^2 \sigma^2 \cos(4D + 6\omega) + \\ & \quad \left. + (372)^{(8)} \sigma^4 \cos(4D + 4\omega) \right\}. \end{aligned} \quad (4.9.38)$$

Коэффициенты  $(50)^{(2)}$ ,  $(51)^{(2)}$ , ...,  $(372)^{(8)}$  приведены в § 6.02.





## ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

Первые теории движения Луны, основывающиеся на интегрировании дифференциальных уравнений движения задачи трех тел, принадлежат Клеро, Даламберу и Эйлеру. Развитием работ Клеро и Даламбера является теория Лапласа, который составил таблицы положений Луны с точностью до 0',5. Подобные теории и таблицы движения Луны строились Дамуазо, Планá, Понтекуланом, Ганзенем, Делоне и другими авторами.

Наиболее совершенной с практической точки зрения явилась теория Ганзена; таблицы, составленные Ганзенем в 1857 г., использовались для вычисления эфемериды Луны в астрономических ежегодниках с 1862 по 1923 г. С 1883 г. в таблицы Ганзена вводятся поправки Ньюкома, так как эти таблицы в своем первоначальном виде стали плохо представлять наблюдения; расхождения, составлявшие 1"—2" в период 1750—1850 гг., достигли 5" в 1870 г., 10" в 1880 г. и 18" в 1889 г. Аналитическое (буквенное) решение основной проблемы в теории движения Луны построено Делоне (окончательные результаты опубликованы в 1867 г. [41]).

Работы Хилла (см. [43]), опубликованные в 1878 и 1886 гг., послужили основой для полной теории движения Луны, которая была построена в 1904—1909 гг. Брауном [44]—[48]. В 1919 г. им опубликованы таблицы, которые стали использоваться с 1923 г. для вычисления эфемериды Луны. С 1960 г. эфемерида Луны для астрономических ежегодников вычисляется непосредственно по тригонометрическим рядам Брауна без помощи его таблиц (с точностью 0<sup>s</sup>,001 по  $\alpha$  и 0<sup>s</sup>,01 по  $\delta$ ).

Теория Хилла — Брауна с учетом внесенных в нее поправок (см. [49], [50]) наиболее полно учитывает в пределах точности, принятой при вычислениях, гравитационные эффекты в движении Луны. В этой главе мы изложим результаты теории Делоне и теории Хилла — Брауна.

### § 10.01. Уравнения основной проблемы в теории движения Луны

*Основной проблемой* в теории движения Луны называется задача о движении Луны под действием притяжения Земли и Солнца при условии, что все три тела рассматриваются как материальные точки, а Земля (или, точнее говоря, центр масс системы Земля—Луна) движется относительно Солнца по эллиптической орбите. Поскольку центральным телом в этой задаче

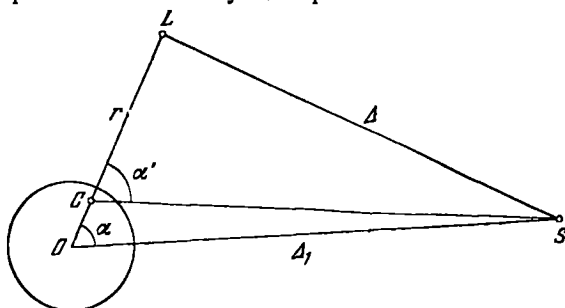


Рис. 66. Система Земля—Луна—Солнце. С—центр масс Земли и Луны; О—центр Земли; L—Луна; S—Солнце.

является Земля, то принимают, что Солнце описывает вокруг центра масс Земли и Луны эллиптическую орбиту.

Пусть  $OXYZ$  — неподвижная прямоугольная геоцентрическая система координат, причем плоскость  $XU$  совпадает с плоскостью эклиптики, ось  $OX$  направлена к точке весеннего равноденствия, ось  $OZ$  — к северному полюсу эклиптики. Обозначим через  $m_T$  и  $m_S$  массы Земли и Солнца соответственно. Если пренебречь массой Луны, то ее движение в рамках основной проблемы описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{X}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial X}, & \frac{d^2Y}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{Y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Y}, \\ \frac{d^2Z}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{Z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.01)$$

где возмущающая функция записывается в виде

$$R = k^2 m_S \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{XX_S + YY_S}{r_s^3} \right), \quad (4.10.02)$$

причем  $X_S, Y_S, Z_S = 0$  — координаты Солнца в выбранной системе координат,  $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  — расстояние от Земли до Луны,  $r_s = \sqrt{X_S^2 + Y_S^2}$  — расстояние от Земли до Солнца,  $\Delta = \sqrt{(X - X_S)^2 + (Y - Y_S)^2 + Z^2}$  — расстояние от Луны до Солнца.

Если масса Луны учитывается, то при составлении уравнений движения Луны в рамках основной проблемы используют систему координат Якоби (см. § 1.04).

Координаты Луны  $X, Y, Z$  отнесены к системе  $OXYZ$ , рассмотренной выше. Координаты Солнца  $X', Y', Z'$  отнесены к системе  $SX'Y'Z'$ , начало которой совпадает с центром масс  $S$  Земли и Луны и оси которой параллельны осям системы  $OXYZ$  (рис. 66).

Уравнения движения Луны записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= -k^2 (m_T + m_L) \frac{X}{r^3} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial X}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= -k^2 (m_T + m_L) \frac{Y}{r^3} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial Y}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -k^2 (m_T + m_L) \frac{Z}{r^3} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial Z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.03)$$

где  $m_L$  — масса Луны,  $\bar{R}$  — возмущающая функция, определяемая формулой

$$\bar{R} = k^2 m_S \frac{m_T + m_L}{m_T m_L} \left( \frac{m_T}{r_S} + \frac{m_L}{\Delta} \right), \quad (4.10.04)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 &= \left( X' - \frac{m_T}{m_T + m_L} X \right)^2 + \left( Y' - \frac{m_T}{m_T + m_L} Y \right)^2 + \left( Z' - \frac{m_T}{m_T + m_L} Z \right)^2, \\ r_S^2 &= \left( X' + \frac{m_L}{m_T + m_L} X \right)^2 + \left( Y' + \frac{m_L}{m_T + m_L} Y \right)^2 + \left( Z' + \frac{m_L}{m_T + m_L} Z \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.10.05)$$

[ $\Delta_1$  на рис. 66 совпадает с  $r_S$ ]. Если  $a'$  — большая полуось орбиты Солнца относительно центра масс  $S$  Земли и Луны и  $n'$  — среднее суточное движение Солнца, то

$$k^2 (m_T + m_L + m_S) = n'^2 a'^3. \quad (4.10.06)$$

### § 10.02. Разложение возмущающей функции в основной проблеме теории движения Луны

Возмущающую функцию  $R$ , используемую в уравнениях (4.10.01) и определяемую формулой (4.10.02), можно записать в виде

$$R = \frac{k^2 m_S}{r_S} \sum_{\sigma=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_S} \right)^{\sigma} P_{\sigma}(\cos \alpha), \quad (4.10.07)$$

где  $P_{\sigma}(\cos \alpha)$  — полиномы Лежандра [см. формулы (4.5.34)],  $\alpha$  —

угол между геоцентрическими направлениями  $OS$ ,  $OL$  на Солнце и Луну соответственно (см. рис. 66).

Так как согласно (4.10.06)

$$k^2 m_S = \frac{n'^2 a'^3}{1 + \frac{m_T + m_L}{m_S}} \quad (4.10.08)$$

и  $(m_T + m_L)/m_S \approx 1/330000$ , то обычно заменяют  $k^2 m_S$  в (4.10.07) на  $n'^2 a'^3$ .

Функцию  $R$  можно разложить в ряд по элементам орбит Луны и Солнца. В качестве таких элементов орбиты Луны используются эксцентриситет  $e$ , долгота перигея  $\pi$ , долгота восходящего узла  $\Omega$ , средняя долгота в орбите  $\lambda$ , наклон к эклиптике  $i$  [точнее говоря,  $\sin i$  или  $\sin(i/2)$ ]. В качестве элементов орбиты Солнца берутся эксцентриситет  $e'$ , долгота перигея  $\pi'$ , средняя долгота в орбите  $\lambda'$ .

Разложение функции  $R$  с точностью до членов порядка  $e^2$ ,  $e'^2$ ,  $\gamma^2 = \sin^2 \frac{i}{2}$ ,  $\frac{a}{a'}$  записывается в виде

$$\begin{aligned} R = n'^2 a^2 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 + \right. \\ + \left( \frac{3}{4} - \frac{15}{8} e^2 - \frac{15}{8} e'^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 \right) \cos(2\lambda - 2\lambda') + \\ + e \left[ \frac{3}{4} \cos(3\lambda - 2\lambda' - \pi) - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \pi) - \frac{9}{4} \cos(\lambda - 2\lambda' + \pi) \right] + \\ + e' \left[ \frac{21}{8} \cos(2\lambda - 3\lambda' + \pi') + \frac{3}{4} \cos(\lambda' - \pi') - \frac{3}{8} \cos(2\lambda - \lambda' - \pi') \right] + \\ + e^2 \left[ \frac{15}{8} \cos(2\lambda' - 2\pi) + \frac{3}{4} \cos(4\lambda - 2\lambda' - 2\pi) - \frac{1}{8} \cos(2\lambda - 2\pi) \right] + \\ + ee' \left[ \frac{9}{8} \cos(\lambda - \lambda' + \pi - \pi') - \frac{3}{4} \cos(\lambda - \lambda' - \pi + \pi') - \right. \\ - \frac{3}{4} \cos(\lambda + \lambda' - \pi - \pi') + \frac{21}{8} \cos(3\lambda - 3\lambda' - \pi + \pi') - \\ \left. - \frac{3}{8} \cos(3\lambda - \lambda' - \pi - \pi') - \frac{63}{8} \cos(\lambda - 3\lambda' + \pi + \pi') \right] + \\ + e'^2 \left[ \frac{9}{8} \cos(2\lambda' - 2\pi') + \frac{51}{8} \cos(2\lambda - 4\lambda' + 2\pi') \right] + \\ + \gamma^2 \left[ \frac{3}{2} \cos(2\lambda - 2\Omega) + \frac{3}{2} \cos(2\lambda' - 2\Omega) \right] + \\ \left. + \frac{a}{a'} \left[ \frac{3}{8} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{5}{8} \cos(3\lambda - 3\lambda') \right] \right\}. \quad (4.10.09) \end{aligned}$$

Наиболее полное разложение возмущающей функции с точностью до членов шестого порядка относительно  $e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$  и третьего относительно  $a/a'$ , содержащее 324 члена, имеется в [51].

Разложение по полиномам Лежандра возмущающей функции, используемой в уравнениях (4.10.03), записывается с точностью до членов пятого порядка в виде

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \frac{k^2 m_S}{r'} \left[ \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos \alpha') + \frac{m_T - m_L}{m_T + m_L} \left( \frac{r}{r'} \right)^3 P_3(\cos \alpha') + \right. \\ & + \frac{m_T^2 - m_T m_L + m_L^2}{(m_T + m_L)^2} \left( \frac{r}{r'} \right)^4 P_4(\cos \alpha') + \\ & \left. + \frac{m_T^3 - m_T^2 m_L + m_T m_L^2 - m_L^3}{(m_T + m_L)^3} \left( \frac{r}{r'} \right)^5 P_5(\cos \alpha') \right], \quad (4.10.10) \end{aligned}$$

где  $\alpha'$  — угол между направлениями  $CS$  и  $CL$  (см. рис. 66).

При решении основной проблемы функцию  $\bar{R}$  заменяют функцией  $R$ , а  $k^2 m_S$  — величиной  $n'^2 a'^3$  и используют разложение вида (4.10.09). После нахождения окончательных формул для возмущений в них вносят поправки, обусловленные такой заменой.

### § 10.03. Решение Делоне основной проблемы в теории движения Луны

Исследования Делоне содержатся полностью в [51]. Изложение математических основ метода, применявшегося Делоне, имеется, например, в [7], [41], [42].

Делоне рассматривает в качестве исходных канонические уравнения движения вида (4.3.22) относительно переменных  $L, G, H, l, g, h$ . Эти переменные связаны с оскулирующими элементами орбиты Луны вокруг Земли: большой полуосью  $a$ , эксцентриситетом  $e$ , наклоном  $i$ , долготой перигея  $\pi$ , долготой восходящего узла  $\Omega$ , средней долготой в орбите  $\lambda$  по формулам (4.3.21), так что

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= l + g + h, \quad \pi = g + h, \quad \Omega = h, \\ a &= \frac{L^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad \sin \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{H}{2G}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.11)$$

где  $\mu = k^2(m_T + m_L)$ .

Выше мы кратко указали (см. § 8.04) на принцип метода Делоне. В соответствии с этим принципом Делоне выполнил 497 последовательных канонических замен переменных

$$(L, \dots, h) \rightarrow (L^{(1)}, \dots, h^{(1)}) \rightarrow (L^{(2)}, \dots, h^{(2)}) \rightarrow \dots,$$

а также сопутствующих замен переменных  $a$ ,  $e$  и  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ ,

$$(a, e, \gamma) \rightarrow (a^{(1)}, e^{(1)}, \gamma^{(1)}) \rightarrow (a^{(2)}, e^{(2)}, \gamma^{(2)}) \rightarrow \dots,$$

называя эти замены операциями. Параллельно производились преобразования возмущающей функции  $R$ , выражающейся непосредственно через  $a, e, \gamma, l, g, h$ . Для простоты записи все переменные при этих преобразованиях обозначаются у Делоне одинаково, т. е. верхние индексы отсутствуют. В процессе выполнения операций переменные  $a, e, \gamma$  теряют свой смысл оскулирующих большой полуоси, эксцентриситета, синуса половины наклона орбиты, но все же остаются близкими к ним. Точно так же получаемые последовательно переменные  $l, g, h$  не выражаются через оскулирующие элементы  $\lambda, \pi, \Omega$  по формулам (4.10.11), но в среднем отражают поведение этих элементов в соответствии с (4.10.11). Связь между переменными  $a, e, \gamma$  и  $L, G, H$ , получаемая в ходе преобразований, становится отличной от (4.10.11). Все формулы Делоне располагает по степеням переменных  $e, \gamma$ , отношений  $a/a', n'/n$ , а также  $e'$ , причем  $n$  связано с  $a$  формулой

$$n^2 = k^2 (m_T + m_L) / a^3$$

и представляет собой аналог среднего движения Луны.

В конце концов Делоне приходит к таким окончательным переменным, что соответствующая возмущающая функция  $R$  содержит лишь малые члены выше шестого или седьмого порядка относительно  $e, e', \gamma, \sqrt{a/a'}, n'/n$ . Полагая ее равной нулю, Делоне получает уравнения

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\partial R_0}{\partial L}, \dots,$$

где  $R_0$  — невозмущенная часть гамильтониана (см. 4.3.21), выраженная через окончательные переменные. При этом  $R_0$  не зависит от угловых переменных  $l, g, h$ .

Окончательные уравнения Делоне для  $l, g, h$  в явном виде, если ограничиться членами пятого порядка относительно  $e, e', \gamma, n'/n, a/a'$ , следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{dt} = n \left\{ 1 - \left( \frac{7}{4} - \frac{21}{2} \gamma^2 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{21}{8} e'^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^2 - \right. \\ - \left( \frac{225}{32} - \frac{81}{4} \gamma^2 + \frac{675}{64} e^2 + \frac{825}{32} e'^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^3 - \\ - \frac{3265}{128} \left( \frac{n'}{n} \right)^4 - \frac{243925}{2048} \left( \frac{n'}{n} \right)^5 - \\ \left. - \left[ \frac{81}{32} \left( \frac{n'}{n} \right)^2 + \frac{2475}{128} \left( \frac{n'}{n} \right)^3 \right] \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.12)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dg}{dt} &= n \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{15}{2} \gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{9}{4} e'^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^2 + \right. \\
 &\quad + \left( \frac{27}{4} - \frac{351}{16} \gamma^2 - \frac{297}{64} e^2 + \frac{401}{16} e'^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^3 + \\
 &\quad + \frac{1995}{64} \left( \frac{n'}{n} \right)^4 + \frac{17709}{128} \left( \frac{n'}{n} \right)^5 + \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{45}{16} \left( \frac{n'}{n} \right)^2 + \frac{585}{32} \left( \frac{n'}{n} \right)^3 \right] \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \right\}, \\
 \frac{dh}{dt} &= -n \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{9}{8} e'^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^2 - \right. \\
 &\quad - \left( \frac{9}{32} - \frac{27}{16} \gamma^2 - \frac{189}{32} e^2 + \frac{23}{32} e'^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^3 - \\
 &\quad - \frac{177}{128} \left( \frac{n'}{n} \right)^4 - \frac{10949}{2048} \left( \frac{n'}{n} \right)^5 + \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{45}{32} \left( \frac{n'}{n} \right)^2 + \frac{1935}{512} \left( \frac{n'}{n} \right)^3 \right] \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.10.12}$$

Решение этих уравнений вида

$$l = \omega_1 t + \text{const},$$

.....

при постоянных  $a, e, \gamma, n$  вместе с выражениями для  $L, G, H$  через  $a, e, \gamma, n$  рассматривается как общее решение исходной задачи, но представленное не исходными переменными, а другими, связанными с исходными переменными последовательностью преобразований.

Формулы Делоне для  $L, G, H$ , если ограничиться в них членами не выше пятого порядка, следующие:

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{a\mu} \left\{ 1 + \frac{13}{64} \left( \frac{n'}{n} \right)^4 + \frac{79}{16} \left( \frac{n'}{n} \right)^5 \right\}, \\
 G &= \sqrt{a\mu} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 + \frac{25}{4} \gamma^2 e^2 + \frac{225}{64} e^2 \left( \frac{n'}{n} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{675}{128} e^2 \left( \frac{n'}{n} \right)^3 + \frac{13}{64} \left( \frac{n'}{n} \right)^4 + \frac{79}{16} \left( \frac{n'}{n} \right)^5 \right\}, \\
 H &= \sqrt{a\mu} \left\{ 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2} e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8} e^4 + \right. \\
 &\quad + \left( \frac{9}{16} \gamma^2 + \frac{225}{64} e^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^2 - \left( \frac{27}{32} \gamma^2 - \frac{675}{128} e^2 \right) \left( \frac{n'}{n} \right)^3 + \\
 &\quad \left. + \frac{13}{64} \left( \frac{n'}{n} \right)^4 + \frac{79}{16} \left( \frac{n'}{n} \right)^5 \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.10.13}$$

Если были бы выведены формулы, непосредственно связывающие окончательные переменные  $L, G, \dots, \gamma$ , выписанные в (4.10.12), (4.10.13), с первоначальными переменными  $L, G, \dots, \gamma$  (по Делоне они обозначаются, как мы уже отмечали



одинаково), то можно было бы получить решение исходных уравнений движения в явном виде. Делоне не рассматривает подобные формулы. Его цель — получить формулы для сферических координат Луны: истинной эклиптической долготы  $V$ , эклиптической широты  $\beta$  и синуса горизонтального параллакса Луны  $\sin p_L$ .

Формулы, связывающие  $V$ ,  $\beta$ ,  $\sin p_L$  с элементами орбиты Луны в невозмущенном движении, т. е. с первоначальными переменными  $a$ ,  $e$ ,  $\gamma$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$ , следующие (коэффициент при  $\sin l$  в выражении для  $V$  и коэффициент при  $\sin(g+l)$  в выражении для  $\beta$  выписаны по Делоне полностью, а остальные коэффициенты с точностью до членов четвертого порядка относительно  $\gamma$ ,  $e$ ):

$$\begin{aligned} \beta = & \left( 2\gamma - 2\gamma e^2 - \frac{1}{4}\gamma^5 + \frac{7}{32}\gamma e^4 + \frac{1}{4}\gamma^5 e^2 - \frac{5}{144}\gamma e^6 \right) \times \\ & \times \sin(g+l) + \left( 2\gamma e - \frac{5}{2}\gamma e^3 \right) \sin(g+2l) - \\ & - 2\gamma e \sin g + \frac{9}{4}\gamma e^2 \sin(g+3l) - \\ & - \frac{1}{4}\gamma e^2 \sin(g-l) + \frac{8}{3}\gamma e^3 \sin(g+4l) - \\ & - \frac{1}{6}\gamma e^3 \sin(g-2l) - \frac{1}{3}\gamma^3 \sin(3g+3l) - \\ & - \gamma^3 e \sin(3g+4l) + \gamma^3 e \sin(3g+2l), \\ \frac{1}{r} = & \frac{1}{a} \left\{ 1 + \left( e - \frac{1}{8}e^3 \right) \cos l + \left( e^2 - \frac{1}{3}e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ & \left. + \frac{9}{8}e^3 \cos 3l + \frac{4}{3}e^4 \cos 4l \right\}, \end{aligned} \quad (4.10.14)$$

$$\sin p_L = \frac{a_T}{r},$$

$$\begin{aligned} V = & \lambda + \left( 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 \right) \sin l + \\ & + \left( \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 \right) \sin 2l + \frac{13}{12}e^3 \sin 3l + \\ & + \frac{103}{96}e^4 \sin 4l + (-\gamma^2 - \gamma^4 + 4\gamma^2 e^2) \sin(2g+2l) + \\ & + (-2\gamma^2 e) \sin(2g+3l) + 2\gamma^2 e \sin(2g+l) - \\ & - \frac{13}{4}\gamma^2 e^2 \sin(2g+4l) - \frac{3}{4}\gamma^2 e^2 \sin 2g + \\ & + \frac{1}{2}\gamma^4 \sin(4g+4l), \end{aligned}$$

где  $a_T$  — экваториальный радиус Земли.

В соответствии со своими 497 операциями Делоне преобразовывает эти выражения и получает формулы зависимости  $V$ ,  $\beta$  от окончательных переменных в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} V &= l + g + h + \sum A(a, e, \gamma, n) \sin(k_1 l + k_2 g + k_3 h + q), \\ \beta &= \sum B(a, e, \gamma, n) \sin(k_1 l + k_2 g + k_3 h + q) \end{aligned} \right\} (4.10.15)$$

и для  $1/r$  аналогичное разложение по косинусам, где  $q$  зависит от угловых элементов орбиты Солнца.

Члены  $A \sin l$  и  $B \sin(g + l)$  в этих рядах для  $V$  и  $\beta$  называются *главным эллиптическим членом в долготе* и *главным членом в широте* соответственно, а их коэффициенты  $A$ ,  $B$  обозначаются соответственно через  $V_l$ ,  $\beta_F$ .

Далее Делоне выполняет еще одну замену переменных  $a$ ,  $e$ ,  $\gamma$ , чтобы в новых переменных (обозначаемых снова через  $a$ ,  $e$  и  $\gamma$ )

1) коэффициенты  $V_l$  и  $\beta_F$ , т. е. коэффициенты при  $\sin l$  и  $\sin(g + l)$  в рядах для  $V$ ,  $\beta$ , соответственно имели тот же вид, что и в формулах (4.10.14) невозмущенного движения;

2) сумма  $l + g + h$ , определяемая с помощью уравнений (4.10.12), выражалась так же, как в невозмущенном движении

$$l + g + h = nt + \text{const}, \quad n^2 = \frac{k^2 (m_T + m_L)}{a^3}.$$

Формулы Делоне такой замены переменных, если ограничиться в них наиболее существенными членами, запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} a &\rightarrow a \left\{ 1 - \left( \frac{2}{3} - 3\gamma^2 + \frac{3}{4} e^2 + e'^2 \right) m^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{9}{4} \gamma^2 + \frac{225}{16} e^2 \right) m^3 + \frac{1705}{288} m^4 \right\}, \\ e &\rightarrow e \left\{ 1 + \left( \frac{81}{128} - \frac{67}{16} \gamma^2 + \frac{341}{128} e^2 + \frac{991}{128} e'^2 \right) m^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2595}{296} + \frac{129}{128} \gamma^2 - \frac{7395}{128} e^2 \right) m^3 - \frac{224041}{32768} m^4 \right\}, \\ \gamma &\rightarrow \gamma \left\{ 1 + \left( \frac{57}{128} - \frac{293}{128} \gamma^2 + \frac{991}{256} e^2 + \frac{103}{128} e'^2 \right) m^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{129}{255} - \frac{777}{256} \gamma^2 - \frac{14865}{512} e^2 \right) m^3 - \frac{22457}{32768} m^4 \right\}. \end{aligned} \right\} (4.10.16)$$

где  $m = n'/n$ . (Если обозначить новые переменные справа другими символами и написать вместо  $\rightarrow$  знак равенства, то мы получили бы обычные формулы замены переменных.)

Сумма  $l + g + h$  рассматривается как осредненная средняя долгота Луны  $\bar{\lambda}$ , а  $n$  в выражении для этой суммы как некоторое среднее значение среднего углового движения Луны.

Выраженные согласно (4.10.12) переменные  $l, g, h$  рассматриваются как осредненные значения или вековые части соответствующих исходных переменных. При этом  $g, h$  определяют осредненные значения  $\bar{\pi}, \bar{\Omega}$  оскулирующих долгот перигея и узла лунной орбиты

$$\bar{\Omega} = h, \quad \bar{\pi} = g + h,$$

а  $l = \bar{\lambda} - \bar{\pi}$  — осредненная средняя аномалия.

В качестве аргументов синусов и косинусов в окончательных выражениях для  $V, \beta, 1/r$  Делоне использует переменные  $l, l'$  (среднюю аномалию Солнца),  $D$  и  $F$ , равные

$$D = \bar{\lambda} - \lambda', \quad F = l + g = \bar{\lambda} - \bar{\Omega},$$

где  $\lambda'$  — средняя долгота Солнца. Эти переменные носят название *основных* или *фундаментальных* аргументов в теории движения Луны.

Окончательные выражения для  $V, \beta$  и  $\sin p_L$  следующие (мы полностью выписываем коэффициенты главного эллиптического члена в долготе и главного члена в широте, все члены до третьего порядка относительно  $e, e', \gamma, \sqrt{a/a'}, m$ , а также наибольшие в случае Луны члены 4-, 5- и 6-го порядков):

$$\begin{aligned} V = & \bar{\lambda} + \left[ \left( -3e' + \frac{27}{2} \gamma^2 e' \right) m - \frac{2925}{32} e^2 e' \cdot m^2 + \right. \\ & + \frac{735}{16} e' \cdot m^3 + \frac{1261}{4} e' \cdot m^4 \left. \right] \sin l' + \left[ 2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{95} e^5 \right] \sin l + \\ & + \left[ ee' \left( \frac{21}{4} m + \frac{1233}{32} m^2 + \frac{14913}{64} m^3 + \frac{2792109}{2048} m^4 \right) \right] \sin (l - l') + \\ & + \left[ ee' \left( -\frac{21}{4} m - \frac{717}{32} m^2 - \frac{3089}{32} m^3 \right) \right] \sin (l + l') + \\ & + \frac{5}{4} e^2 \sin 2l + e^2 e' \frac{105}{16} m \sin (2l - l') - e^2 e' \frac{105}{16} m \sin (2l + l') + \\ & + \left[ \frac{13}{12} e^3 \right] \sin 3l + \left[ -\gamma^2 + \frac{11}{4} \gamma^2 m^2 \right] \sin 2F + \\ & + [-2\gamma^2 e] \sin (2F + l) + \left[ \gamma^2 e \left( -3 + \frac{135}{8} m \right) \right] \sin (2F - l) + \\ & + \left[ \left( -\frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{75}{16} e^2 \right) m + \left( \frac{11}{8} - \frac{47}{16} \gamma^2 + \frac{1101}{64} e^2 \right) m^2 + \right. \\ & + \left. \left( \frac{59}{12} + \frac{64271}{1024} e^2 \right) m^3 + \frac{893}{72} m^4 + \frac{2855}{108} m^5 \right] \sin 2D + \\ & + \left[ \frac{175}{16} e^2 e' m + \frac{77}{16} e' m^2 + \frac{479}{16} e' m^3 + \frac{7551}{64} e' m^4 \right] \sin (2D - l') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ e' \left( -\frac{11}{16} m^2 - \frac{257}{48} m^3 \right) \right] \sin(2D + l') + \\
& + \left[ e \left( \frac{17}{8} m^2 + \frac{169}{24} m^3 + \frac{9577}{576} m^4 \right) + e^3 \frac{195}{32} m \right] \sin(2D + l) + \\
& + ee' \frac{119}{16} m^2 \sin(2D + l - l') + e^2 \frac{95}{32} m^2 \sin(2D + 2l) + \\
& + \left[ \left( \frac{15}{4} e - 6\gamma^2 e \right) m + \left( \frac{263}{16} e - \frac{359}{8} \gamma^2 e \right) m^2 + \right. \\
& + \left. \frac{48217}{768} em^3 + \frac{1880537}{9216} em^4 + \frac{130463405}{221184} em^5 \right] \sin(2D - l) * + \\
& + \left[ ee' \left( \frac{35}{4} m + \frac{1801}{32} m^2 + \frac{31589}{128} m^3 \right) \right] \sin(2D - l - l') + \\
& + \left[ ee' \left( -\frac{15}{4} m - \frac{173}{32} m^2 + \frac{50125}{384} m^3 + \frac{29217241}{18432} m^4 \right) \right] \sin(2D - l + l') + \\
& + \left[ e^2 \left( \frac{45}{16} m + \frac{53}{4} m^2 + \frac{263089}{3072} m^3 + \frac{7700107}{18432} m^4 \right) \right] \sin(2D - 2l) + \\
& + \left[ -\frac{15}{4} \gamma^2 em \right] \sin(2D + 2F - l) + \frac{105}{16} e^2 e' m \sin(2D - 2l - l') + \\
& + \left[ \gamma^2 \left( \frac{9}{4} m - \frac{11}{2} m^2 \right) \right] \sin(2D - 2F) + \frac{105}{32} e^3 m \sin(2D - 3l) + \\
& + \left[ -\frac{33}{8} \gamma^2 em \right] \sin(2D - 2F + l) + \frac{201}{256} m^4 \sin 4D + \\
& + \left[ e \left( \frac{255}{64} m^3 + \frac{7701}{256} m^4 \right) \right] \sin(4D - l) + \\
& + \left[ e^2 \left( \frac{1125}{256} m^2 + \frac{18495}{512} m^3 \right) \right] \sin(4D - 2l) + \\
& + \left[ -\frac{15}{8} m - \frac{93}{8} m^2 - \frac{6887}{128} m^3 \right] \frac{a}{a'} \sin D * + \\
& + \left[ e' \left( \frac{5}{2} - \frac{45}{4} m \right) \right] \frac{a}{a'} \sin(D + l') - \frac{75}{32} e \cdot m \frac{a}{a'} \sin(D + l) - \\
& \quad - e \frac{165}{32} m \frac{a}{a'} \sin(D - l), \quad (4.10.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = & \left[ 2\gamma - 2\gamma e^2 - \frac{1}{4} \gamma^5 + \frac{7}{32} \gamma e^4 + \frac{1}{4} \gamma^5 e^2 - \frac{5}{144} \gamma e^6 \right] \sin F + \\
& + \frac{3}{4} \gamma e' m \sin(F - l') - \frac{3}{4} \gamma e' m \sin(F + l') + 2\gamma e \sin(F + l) + \\
& + \frac{9}{4} \gamma e^2 \sin(F + 2l) + \left[ -2\gamma e - 5\gamma^3 e + \frac{189}{32} \gamma em^2 \right] \sin(F - l) + \\
& + \left[ -\frac{3}{2} \gamma e^2 + \frac{135}{32} \gamma e^2 m \right] \sin(F - 2l) - \frac{1}{3} \gamma^3 \sin 3F + \\
& + \left[ \frac{135}{16} \gamma e^2 m + \frac{11}{8} \gamma m^2 + \frac{59}{12} \gamma m^3 \right] \sin(2D + F) - 4\gamma^3 e \cdot \sin(3F - l) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{77}{16} \gamma e' m^2 \sin(2D + F - l') + \frac{7}{2} \gamma e m^2 \sin(2D + F + l) + \\
& + \left[ \gamma e \left( \frac{15}{4} m + \frac{241}{16} m^2 + \frac{43721}{768} m^3 \right) \right] \sin(2D + F - l) + \\
& + \frac{35}{4} \gamma e e' m \sin(2D + F - l - l') + \\
& + \left[ \gamma \left( \frac{3}{4} m + \frac{25}{16} m^2 + \frac{2957}{768} m^3 \right) \right] \sin(2D - F) + \\
& + \left[ \gamma e' \left( \frac{7}{4} m + \frac{255}{32} m^2 \right) \right] \sin(2D - F - l') - \\
& - \frac{3}{4} \gamma e' m \sin(2D - F + l') + \frac{3}{4} \gamma e m \sin(2D - F + l) + \\
& + \left[ \gamma e \left( 3m + \frac{105}{8} m^2 + \frac{3681}{64} m^3 \right) \right] \sin(2D - F - l) + \\
& + \frac{147}{32} \gamma e^2 m \sin(2D - F - 2l) - \\
& - \frac{15}{8} \gamma m \frac{a}{a'} \sin(D + F) - \frac{15}{8} \gamma m \frac{a}{a'} \sin(D - F), \quad (4.10.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin p_L = & \frac{a_T}{a} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} e'^2 \right) m^2 - \frac{179}{288} m^4 - \frac{97}{48} m^4 \right] + \right. \\
& + \left[ e \left( 1 - \frac{1}{8} e^2 - \frac{7}{12} m^2 \right) \right] \cos l - \frac{3}{2} e' m^2 \cos l' + \\
& + \frac{21}{8} e e' \cdot m [\cos(l - l') - \cos(l + l')] + e^2 \cos 2l + \frac{9}{8} e^3 \cos 3l - \\
& - \frac{5}{2} \gamma^2 e \cos(2F - l) + \left[ \frac{15}{4} e^2 m + m^2 + \frac{19}{6} m^3 + \frac{131}{18} m^4 \right] \cos 2D + \\
& + \frac{7}{2} e' m^2 \cos(2D - l') - \frac{1}{2} e' m^2 \cos(2D + l') + \\
& + \frac{33}{16} e m^2 \cos(2D + l) + \\
& + \left[ e \left( \frac{15}{8} m + \frac{187}{32} m^2 + \frac{29513}{1536} m^3 \right) \right] \cos(2D - l) + \\
& + \frac{35}{8} e e' m \cos(2D - l - l') - \frac{15}{8} e e' m \cos(2D - l + l') - \\
& \left. - \frac{15}{6} m \frac{a}{a'} \cos D \right\}. \quad (4.10.19)
\end{aligned}$$

Полное выражение для  $V$ , выписанное у Делоне [51], содержит 479 гармоник, коэффициенты которых выписаны с точностью до членов шестого порядка относительно  $e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$ ,  $\sqrt{a/a'}$  и восьмого-девятого порядка относительно  $m$ . Каждая гармоника носит название *неравенства*, так что  $V$  представляется

в виде суммы правильной части  $\bar{\lambda}$  (соответствующей равномерному движению по круговой орбите) и совокупности неравенств.

Неравенства с аргументами  $2D$ ,  $2D - l$ ,  $l$ ,  $D$  (отмеченные звездочкой) носят название *вариации*, *эвекции* *годового неравенства* и *параллактического неравенства* соответственно.

Полные выражения для  $\beta$  и  $\sin p_L$  у Делоне содержат 436 и 100 гармоник соответственно.

Поправки, вводимые в формулы для  $V$ ,  $\beta$ ,  $\sin p_L$  вследствие замены возмущающей функции  $\bar{R}$  [см. (4.10.10)] ее разложением вида (4.10.09), заключаются в следующем:

1) все члены, соответствующие возмущениям от Солнца (зависящие от  $m$ ), умножаются на

$$\frac{1}{1 + \frac{m_T + m_L}{m_S}} \approx 1 - \frac{m_L + m_F}{m_S};$$

2) отношение  $a/a'$  заменяется на

$$\frac{a}{a'} \frac{m_T - m_L}{m_T + m_L}.$$

Приведем также грубые формулы для оскулирующих элементов орбиты Луны  $a$ ,  $e$ ,  $\pi$ ,  $i$  и средней долготы Луны  $\lambda$ , которые могут быть полезными при приближенном анализе особенностей движения Луны:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \frac{3}{2} a_0 m^2 \cos 2D, \\ e &= e_0 + \frac{9}{4} m^2 \cos(2D - l) + \frac{1}{4} m^2 \cos(2D + l) + \\ &\quad + \frac{15}{8} m e_0 \cos(2D - 2l) - \frac{15}{16} m \frac{a_0}{a'} \cos(D - l) - \\ &\quad - \frac{1}{2} m^2 \cos l + \frac{5}{4} \frac{a_0}{a'} e' \cos(D - l - l'), \\ \gamma &= \gamma_0 + \frac{3}{8} m \gamma_0 \cos(2D - 2F), \\ \pi &= \bar{\pi} - \frac{9}{4} \frac{m^2}{e_0} \sin(2D - l) + \frac{1}{4} \frac{m^2}{e_0} \sin(2D + l) - \\ &\quad - \frac{15}{8} m \sin(2D - 2l) + \frac{15}{16} \frac{m}{e_0} \frac{a_0}{a'} \sin(D - l) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{m^2}{e_0} \sin l - \frac{5}{4} \frac{a_0}{a'} \frac{e'}{e_0} \sin(D - l + l'), \\ \Omega &= \bar{\Omega} - \frac{3}{8} m \sin(2D - 2F), \\ \lambda &= \bar{\lambda} - \frac{9}{8} m^2 \sin 2D, \end{aligned} \right\} (4.10.20)$$

где  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ , а в качестве  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $\gamma_0$ , могут быть приняты или постоянные Делоне, или соответствующие начальные значения элементов  $a$ ,  $e$  и  $\sin \frac{i}{2}$ .

Формулы (4.10.17)—(4.10.19) и выражения для  $l$ ,  $g$ ,  $h$ , получающиеся из (4.10.12), дают искомое решение основной проблемы в теории движения Луны в буквенном виде, содержащее постоянные интегрирования, роль которых играют  $a$ ,  $e$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $m$ , а также начальные значения  $l$ ,  $D$ ,  $F$ , причем  $a$ ,  $n$ ,  $m$  связаны друг с другом, так что независимых постоянных интегрирования шесть. Это буквенное решение можно использовать при построении теории движения не только Луны, но и других спутников планет. Однако при этом надо иметь в виду следующее.

Решение Делоне не дает возможности прогнозировать движение по начальным значениям оскулирующих элементов орбиты или координат небесного тела, так как зависимость постоянных интегрирования Делоне от начальных значений исходных переменных задачи неизвестна. Вместе с тем в случае небесных тел, в частности Луны, движение которых изучалось длительное время, значения постоянных интегрирования возможно определить по эмпирическим характеристикам движения, полученным из наблюдений, и построить таким образом конкретную теорию движения этих небесных тел.

Методика определения постоянных  $a$ ,  $e$ ,  $\gamma$ ,  $n$  в случае Луны следующая.

1. Исходными являются эмпирические значения многолетнего среднего движения Луны  $n$ , коэффициента главного эллиптического члена в долготе  $V_l$ , коэффициента главного члена в широте  $\beta_F$ , а также постоянного члена  $(\sin p_L)_0$  в представлении синуса параллакса Луны. Эти значения определяются при анализе данных многолетних наблюдений.

2. При принятых  $n'$  (среднее движение Земли),  $e'$  (эксцентриситет орбиты Земли) вычисляется  $m = \frac{n'}{n}$ , а затем  $e$  и  $\gamma$  так, чтобы коэффициенты  $V_l$  и  $\beta_F$  в выражениях для  $V$  и  $\beta$  (имеющие тот же вид, что и для невозмущенного движения) были равны своим эмпирическим значениям. В силу такого выбора постоянные  $e$  и  $\gamma$  могут служить некоторым эквивалентом среднего эксцентриситета лунной орбиты и синуса половины среднего наклона этой орбиты.

3. Постоянная  $a$  определяется так, чтобы свободный член в формуле для  $\sin p_L$  был равен эмпирическому значению  $(\sin p_L)_0$ . Затем вычисляется  $a/a'$  при принятом значении синуса параллакса Солнца, равного  $a_T/a'$ .

Такое независимое друг от друга определение  $n$  и  $a$  противоречит, строго говоря, принятому соотношению в теории Делоне между этими величинами.

Делоне принял в [51] для средней многолетней продолжительности сидерического месяца  $P_L$ , сидерического года  $P_T$ , для величин  $V_I$ ,  $\beta_F$ ,  $(\sin p_L)_0$ , для синуса горизонтального параллакса Солнца  $\sin p_\odot$ , для эксцентриситета орбиты Земли  $e'$  следующие значения:

$$\begin{aligned} P_L &= 27^d,321661, & P_T &= 365^d,25637, \\ V_I &= 22639,06, & \beta_F &= 18535,55, & e' &= 0,01677106, \\ (\sin p_L)_0 &= 3422'',7, & \sin p_\odot &= 8'',75 \end{aligned}$$

и получил, считая экваториальный радиус Земли единицей длины,

$$\begin{aligned} m &= 0,07480133, & e &= 0,05489930, & \gamma &= 0,04488663, \\ a &= 60,31854, & a/a' &= 0,00255878. \end{aligned}$$

Выражения для основных аргументов  $l$ ,  $D$ ,  $F$  Делоне не приводит. Их общий вид

$$l = \omega_1 t + l_0, \quad D = \omega_2 t + D_0, \quad F = \omega_3 t + F_0,$$

где коэффициенты при  $t$  вычисляются по правым частям (4.10.12) и формулам (4.10.16) с помощью численных значений  $e$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $a$ ,  $e'$ ,  $n'$ , а  $l_0$ ,  $D_0$ ,  $F_0$  — постоянные (начальные значения), которые определяются по данным наблюдений.

Значения  $n - \omega_1$  и  $n - \omega_3$  равны средним многолетним вековым движениям перигея  $\pi_t$  и восходящего узла  $\Omega_t$  лунной орбиты.

Полные формулы Делоне (4.10.12) содержат члены до седьмого порядка относительно  $m$ . Этого недостаточно для получения достаточно точных коэффициентов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  в аргументах  $l$ ,  $D$ ,  $F$  ввиду медленной сходимости разложений по  $m$ . Ошибка значения векового движения перигея, определяемого по формулам Делоне, составляет около  $300''$  (в год).

Теория Делоне была усовершенствована для целей практики Радо и Андуйе [128]. В 1915—1926 гг. вычисления эфемериды Луны, публиковавшейся во французском астрономическом ежегоднике, основывались на этой теории.

В [129] рассматривается вопрос о перестройке теории Делоне с помощью применения ЭВМ для реализации аналитических выкладок. Излагается методика исследований и некоторые окончательные численные результаты. Сообщается, что получены буквенные выражения (непосредственно они не приводятся) для среднего движения по долготе, вековых движений перигея и



узла орбиты с точностью до членов 19-го порядка относительно  $m$ , что дает удовлетворительную точность. Ошибка численных значений последних по сравнению со значениями, получаемыми по теории Брауна (см. ниже (4.10.69)), около  $0'',27$  и  $0'',17$  в год соответственно. Высказывается мнение о положительных перспективах построения таким путем точной буквенной теории движения Луны.

### § 10.04. Основные этапы построения теории Хилла—Брауна движения Луны

1. Основные результаты и применяемая методика изложены подробно в [44]—[48]. Исходными являются уравнения движения Луны в прямоугольной вращающейся системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\xi^2} - 2m \frac{dy}{d\xi} - m^2x &= -\chi \frac{x}{r^3} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} + 2m \frac{dx}{d\xi} - m^2y &= -\chi \frac{y}{r^3} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{d\xi^2} &= -\chi \frac{z}{r^3} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.21)$$

где

$$m = \frac{n'}{n - n'}, \quad \chi = \frac{\mu}{(n - n')^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

возмущающая функция  $\Omega$  равна

$$\Omega = \frac{1}{(n - n')^2} \bar{R}. \quad (4.10.22)$$

Функция  $\bar{R}$  определяется согласно (4.10.04). При этом

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r'^2 - 2 \frac{m_T}{m_T + m_L} r r' \cos \alpha' + \left( \frac{m_T}{m_T + m_L} \right)^2 r^2, \\ r_S^2 &= r'^2 + 2 \frac{m_L}{m_T + m_L} r r' \cos \alpha' + \left( \frac{m_L}{m_T + m_L} \right)^2 r^2, \end{aligned}$$

$r'$  — расстояние от центра масс  $C$  до Солнца и  $\alpha'$  — угол между направлениями из  $C$  на Солнце и Луну.

Координаты Луны  $x, y, z$  отнесены к системе  $Oxyz$  с началом  $O$  в центре Земли, вращающейся с угловой скоростью  $n'$  вокруг оси  $Oz$ , причем плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью эклиптики, ось  $Oz$  направлена к северному полюсу эклиптики, ось  $Ox$  параллельна направлению из  $C$  на среднее положение Солнца. Координаты Солнца  $x', y', z'$  отнесены к системе  $Cx'y'z'$  с началом в центре масс  $C$  и осями, параллельными осям системы  $Oxyz$ .

Вместо времени  $t$  в качестве аргумента используется переменная  $\xi$ , связанная с  $t$  формулой

$$\xi = (n - n')(t - t_0),$$

где  $t_0$  — начальный момент,  $n$  — среднее движение Луны по своей орбите относительно Земли. Между  $n$  и оскулирующей большой полуосью  $a$  орбиты Луны имеет место соотношение

$$a^3 n^2 = \mu,$$

где  $\mu = k^2(m_T + m_L)$ .

Если выделить в  $\Omega$  главную часть

$$\Omega_0 = m^2 \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} r^2 \right), \quad (4.10.23)$$

то уравнения (4.9.21) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\xi^2} - 2m \frac{dy}{d\xi} - 3m^2 x &= -\chi \frac{x}{r^3} + \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} + 2m \frac{dx}{d\xi} &= -\chi \frac{y}{r^3} + \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{d\xi^2} + m^2 z &= -\chi \frac{z}{r^3} + \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.24)$$

где  $\bar{\Omega} = \Omega - \Omega_0$ .

Далее вводятся комплексные переменные

$$u = x + iy, \quad s = x - iy, \quad z = z \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Уравнения относительно  $u, s, z$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} D^2 u + 2m Du + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \chi \frac{u}{r^3} &= -\frac{\partial W}{\partial u}, \\ D^2 s - 2m Ds + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \chi \frac{s}{r^3} &= -\frac{\partial W}{\partial s}, \\ D^2 z + m^2 z - \chi \frac{z}{r^3} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.25)$$

где  $r^2 = us + z^2$ ,  $W = 2\bar{\Omega}$  и  $D$  — оператор:

$$D = \bar{\zeta} \frac{d}{d\xi}, \quad \bar{\zeta} = e^{i\xi} = \exp(i\xi).$$

Именно решение этих уравнений непосредственно и строится в теории Хилла — Брауна.

2. При построении решения уравнений движения используется упрощенное выражение для возмущающей функции  $\Omega$ ,

$$\Omega = m^2 \frac{a'^3}{r'} \sum_{\sigma=2}^5 \left( \frac{r}{r'} \right)^\sigma P_\sigma(\cos \alpha'), \quad (4.10.26)$$

получающееся, если в (4.10.10) заменить  $k^2 m_s$  на  $n'^2 a'^2$  и все множители, зависящие от  $m_T$ ,  $m_L$  при  $(r/r')^\sigma$ , — на единицу. Выделяемая из этого выражения для  $\Omega$  главная часть  $\Omega_0$  остается такой же, как (4.10.23), т. е.

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= m^2 r^2 P_2(\alpha) = m^2 \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) = \\ &= m^2 \left( x^2 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} z^2 \right). \end{aligned} \quad (4.10.27)$$

Эта функция получается из (4.10.26), если пренебречь эксцентриситетом  $e'$  орбиты Солнца и членами порядка  $(r/r')^3$  и выше. Тогда (4.10.26) переписывается в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \bar{\Omega}, \quad (4.10.28)$$

где  $\bar{\Omega} = \Omega_2 + \dots + \Omega_5$ , причем

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2 &= m^2 \left[ \left( \frac{a}{a'} \right)^3 r^2 P_2(\alpha') - x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 \right], \\ \Omega_k &= m^2 \frac{a'^3}{r'} \left( \frac{r}{r'} \right)^k P_k(\cos \alpha') \quad (k = 3, 4, 5). \end{aligned} \right\} \quad (4.10.29)$$

Разложение возмущающей функции  $W = 2\bar{\Omega}$  в уравнениях (4.10.25), используемое Брауном, имеет вид

$$W = \sum_{k=2}^5 W_k, \quad (4.10.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= m^2 \left[ \frac{3}{4} (u^2 a_2 + s^2 \bar{a}_2) + \frac{1}{2} u s b_2 - z^2 b_2 \right], \\ W_3 &= \frac{m^2}{a'} \left[ \frac{5}{8} (u^3 a_3 + s^3 \bar{a}_3) + \frac{3}{8} (u^2 s c_3 + u s^2 \bar{c}_3) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} u z^2 c_3 - \frac{3}{2} s z^2 \bar{c}_3 \right], \\ W_4 &= \frac{m^2}{a'^2} \left[ \frac{35}{64} (u^4 a_4 + s^4 \bar{a}_4) + \frac{5}{16} (u^3 s c_4 + u s^3 \bar{c}_4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{32} u^2 s^2 b_4 - z^2 \left( \frac{15}{8} u^2 c_4 + \frac{15}{8} s^2 \bar{c}_4 + \frac{9}{4} u s b_4 \right) \right], \\ W_5 &= \frac{m^2}{a'^3} \left[ \frac{63}{128} (u^5 + s^5) + \frac{35}{128} (u^4 s + u s^4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{64} (u^3 s^2 + u^2 s^3) \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.10.31)$$

$$a_2 = -\frac{5}{2} e'^2 + \frac{13}{16} e'^4 + \left(-\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 - \frac{5}{384} e'^5\right) \xi + \\ + \left(\frac{7}{2} e' - \frac{123}{16} e'^3 + \frac{489}{128} e'^5\right) \xi^{-1} + \left(\frac{17}{2} e'^2 - \frac{115}{6} e'^4\right) \xi^{-2} + \\ + \left(\frac{1}{48} e'^3 + \frac{11}{768} e'^5\right) \xi^3 + \left(\frac{845}{48} e'^3 - \frac{32525}{768} e'^5\right) \xi^{-3} + \\ + \frac{1}{24} e'^4 \xi^4 + \frac{533}{16} e'^4 \xi^{-4} + \frac{81}{1280} e'^5 \xi^5 + \frac{228347}{3840} e'^5 \xi^{-5},$$

$$b_2 = \frac{3}{2} e'^2 + \frac{15}{8} e'^4 + \left(\frac{3}{2} e' + \frac{27}{16} e'^3 + \frac{261}{128} e'^5\right) (\xi + \xi^{-1}) + \\ + \left(\frac{9}{4} e'^2 + \frac{7}{4} e'^4\right) (\xi^2 + \xi^{-2}) + \left(\frac{53}{16} e'^3 + \frac{393}{256} e'^5\right) (\xi^3 + \xi^{-3}) + \\ + \frac{77}{16} e'^4 (\xi^4 + \xi^{-4}) + \frac{1773}{256} e'^5 (\xi^5 + \xi^{-5}),$$

$$a_3 = 1 - 6e'^2 + \left(-e' + \frac{5}{4} e'^3\right) \xi + (5e' - 22e'^3) \xi^{-1} + \\ + \frac{1}{8} e'^2 \xi^2 + \frac{127}{8} e'^2 \xi^{-2} + 0 \cdot e'^3 \xi^3 + \frac{163}{4} e'^3 \xi^{-3},$$

$$c_3 = 1 + 2e'^2 + \left(e' + \frac{5}{2} e'^3\right) \xi + \left(3e' + \frac{11}{4} e'^3\right) \xi^{-1} + \\ + \frac{11}{8} e'^2 \xi^2 + \frac{53}{8} e'^2 \xi^{-2} + \frac{23}{12} e'^3 \xi^3 + \frac{77}{6} e'^3 \xi^{-3},$$

$$a_4 = 1 - \frac{3}{2} e' \xi + \frac{13}{2} e' \xi^{-1}, \quad b_4 = 1 + \frac{5}{2} e' (\xi + \xi^{-1}),$$

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2} e' \xi + \frac{9}{2} e' \xi^{-1}, \quad \xi = \exp(\sqrt{-1} l');$$

$l'$  — средняя аномалия Солнца,  $\bar{a}_h$ ,  $\bar{c}_h$  являются комплексно сопряженными с  $a_h$ ,  $c_h$ . Поправки, вводимые Брауном в полученные формулы для решения основной проблемы и обусловленные использованием упрощенного выражения (4.10.26) для возмущающей функции, такие же, как и в теории Делоне (см. § 10.03).

3. Метод решения уравнений (4.10.25) заключается в том, что сначала строится промежуточная орбита, соответствующая периодическому решению этих уравнений при  $\mathcal{W} = z = 0$ . Переменные  $u$ ,  $s$  для этой орбиты представляются в виде тригонометрических рядов в комплексной форме с аргументом  $\xi$ , коэффициенты которых в свою очередь представляют ряды по степеням параметра  $\mu$ .

Методом последовательных приближений ищется далее общее решение уравнений (4.10.25) в виде совокупности членов различного порядка относительно некоторых параметров  $e$ ,  $k$ ,  $\alpha$

и эксцентриситета  $e'$  геоцентрической орбиты Солнца. Параметры  $e, k, \alpha$  играют роль постоянных интегрирования, значения которых близки к постоянным  $e, \gamma, a/a'$  теории Делоне соответственно. Для параметра  $m$  фиксируется численное значение, соответствующее значениям средних движений  $n, n'$ , определенных по многолетним наблюдениям. Члены любого порядка в выражениях для переменных  $u, s, z$  представляются в виде кратных тригонометрических полиномов в конечной форме по аргументам Делоне  $D, l, F, l'$ .

Осуществляется переход от координат  $u, s, z$  к сферическим координатам  $r, V, \beta$  и находятся тригонометрические ряды для долготы  $V$ , широты  $\beta$  и горизонтального параллакса Луны  $\sin p_L$ .

Определяются численные значения постоянных интегрирования путем сопоставления полученных аналитических формул для  $V, \beta, \sin p_L$  с данными многолетних наблюдений Луны.

Выписываются окончательные таблицы численных значений коэффициентов тригонометрических полиномов для  $V, \beta, \sin p_L$  и выражения для основных аргументов, что дает решение основной проблемы. Коэффициенты в полиномах для  $V$  и  $\beta$  выписываются с точностью до  $0'',001$  и для  $\sin p_L$  — с точностью до  $0'',0001$ .

Находятся прямые и косвенные возмущения от планет, а также от формы Земли, Луны. Эти возмущения выражаются с помощью малых вековых и периодических членов, которые следует добавить к выражениям для  $V, \beta, \sin p_L$ , полученным при решении основной проблемы и к основным аргументам  $D, l, F, l'$ .

Для облегчения вычислений эфемериды Луны Браун составил специальные таблицы (опубликованные в 1919 г.). С 1952 г. координаты Луны  $V, \beta$  и  $\sin p_L$  вычисляются с помощью ЭВМ по тригонометрическим рядам Брауна для этих величин. Кроме того, в настоящее время в теорию Брауна внесены некоторые уточнения (см. [49], [50]).

### § 10.05. Промежуточная орбита в теории Хилла — Брауна

Периодическое решение уравнений (4.10.25) при  $W = z = 0$  было найдено Хиллом [43] в виде тригонометрических рядов

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \exp [i(2j+1)\xi], \\ s &= a \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \exp [-i(2j+1)\xi], \end{aligned} \right\} \quad (4.10.32)$$

где  $a$  — так называемый масштабный множитель (играющий роль постоянной интегрирования). Коэффициенты  $a_j$  суть ряды по степеням параметра  $m$ .

Хилл нашел коэффициенты  $a_j$  при  $j = 0, \pm 1, \dots, \pm 6$  с точностью до  $m^9$ . Выпишем первые семь коэффициентов с точностью до  $m^6$ :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 - \frac{30749}{2^{12} \cdot 3^3} m^6, \\ a_{-1} &= -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{36} m^4 - \frac{14}{27} m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4} m^6, \\ a_2 &= \frac{25}{256} m^4 + \frac{803}{1920} m^5 + \frac{6109}{7200} m^6, \\ a_{-2} &= \frac{23}{640} m^5 + \frac{299}{2400} m^6, \\ a_3 &= \frac{833}{3 \cdot 2^{12}} m^6, \\ a_{-3} &= \frac{1}{192} m^6. \end{aligned} \right\} (4.10.33)$$

Масштабный множитель  $a$  (его еще называют возмущенной большой полуосью лунной орбиты) связан с  $m$  и с некоторым средним значением  $a$  оскулирующей большой полуоси орбиты Луны соотношением

$$a = a \left( 1 - \frac{1}{6} m^6 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2304} m^4 - \frac{67}{288} m^5 - \frac{45293}{41472} m^6 + \dots \right). \quad (4.10.34)$$

В свою очередь  $a$  связано со средним движением  $n$  соотношением  $a^3 n^2 = k^2 (m_T + m_L)$ .

Прямоугольные координаты  $x, y$  выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{u+s}{2} = a [(a_0 + a_{-1}) \cos \xi + (a_1 + a_{-2}) \cos 3\xi + \\ &\quad + (a_2 + a_{-3}) \cos 5\xi + \dots], \\ y &= \frac{u-s}{2i} = a [(a_0 - a_{-1}) \sin \xi + (a_1 - a_{-2}) \sin 3\xi + \\ &\quad + (a_2 - a_{-3}) \sin 5\xi + \dots]. \end{aligned} \right\} (4.10.35)$$

Приближенно имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= a \left[ \left( 1 - \frac{19}{16} m^2 \right) \cos \xi + \frac{3}{16} m^2 \cos 3\xi \right], \\ y &= a \left[ \left( 1 + \frac{19}{16} m^2 \right) \sin \xi + \frac{3}{16} m^2 \sin 3\xi \right]. \end{aligned} \right\} (4.10.36)$$

Последние формулы определяют так называемую *вариационную кривую Хилла* на плоскости  $xу$ , зависящую от двух произвольных постоянных  $n, t_0$ , входящих в выражение аргумента  $\xi = (n - n')(t - t_0)$ . Формулы (4.10.32) — (4.10.35), определяющие промежуточную орбиту, могут быть использованы в любой другой спутниковой задаче, если спутник достаточно далек, т. е. если отношение  $n'/n$  малó.

Для постоянных  $n', n$ , определяющих аргумент  $\xi$  и параметр  $m$ , принимаются их многолетние средние годовые значения

$$n = 17325594'',06085, \quad n' = 1295977'',41516 \quad (4.10.37)$$

(единица времени — юлианский год). Этим значениям  $n, n'$  соответствует значение

$$m = 0,080848933808312. \quad (4.10.38)$$

При таком  $m$

$$\begin{array}{l} a_0 = 1, \\ a_1 = + 0,00151 57074 79563, \\ a_{-1} = - 869 57469 61540, \\ a_2 = + 58786 55578, \\ a_{-2} = + 1637 90486, \\ a_3 = + 300 31632, \\ a_{-3} = + 24 60393, \\ a_4 = + 1 75268, \\ a_{-4} = + 12284, \\ a_5 = + 1107, \\ a_{-5} = + 64, \\ a_6 = + 7, \\ a_{-6} = + 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{x}{a} = 0,99130 42530 38460 \cos \xi + \\ + 151 58712 70049 \cos 3\xi + \\ + 58811 16971 \cos 5\xi + \\ + 300 43916 \cos 7\xi + \\ + 1 75332 \cos 9\xi + \\ + 1107 \cos 11\xi + \\ + 7 \cos 13\xi, \\ \frac{y}{a} = 1,00869 57469 61540 \sin \xi + \\ + 151 55436 89077 \sin 3\xi + \\ + 58761 96185 \sin 5\xi + \\ + 300 19348 \sin 7\xi + \\ + 1 75204 \sin 9\xi + \\ + 1107 \sin 11\xi + \\ + 7 \sin 13\xi. \end{array}$$

Формула (4.10.34) для  $a$  переписывается в виде

$$\frac{a}{a} = 0,999093141975298 \quad (4.10.39)$$

или

$$a = 1,00090768 a.$$

### § 10.06. Общее решение уравнений основной проблемы в теории Хилла — Брауна

Общее решение уравнений (4.10.25) строится в виде рядов. Общий член ряда для  $u$  представляет собой совокупность членов вида

$$a (A_{prq}^{p'r'q's'})_j e^{p+2p'} e^{r'+2r'} k^{q+2q'} \alpha^{s'} \exp i [(2j+1)D \pm pl \pm r'l' \pm qF], \quad (4.10.40)$$

где  $(A_{prq}^{p'r'q's'})_j$  — постоянный коэффициент,  $e'$  — эксцентриситет орбиты Солнца; числа  $2j, p, \dots, s'$  могут принимать значения  $2j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, p, q, r, p', q', r', s' = 0, 1, 2, 3, \dots$  и  $\alpha = a/a'$ ,  $e, k$  — параметры, играющие роль постоянных интегрирования и вводимые искусственно (правые части исходных уравнений (4.10.25) их не содержат).

Переменная  $s$  является комплексно сопряженной по отношению к  $u$ . Ряд для  $z$  отличается от (4.10.40) тем, что аргумент под знаком  $\exp$  имеет вид

$$i(2jD \pm pl \pm r'l' \pm qF),$$

причем  $q \geq 1$ . Последнее означает, что выражение для  $z$  имеет общий множитель  $k$ .

Сумма степеней параметров  $e, e', k, \alpha$  называется *порядком*, а сам множитель  $e^{p+2p'} \dots \alpha^{s'}$  называется *характеристикой*, обозначаемой через  $\lambda$ .

Совокупности членов в выражениях для  $u, s, z$  с характеристикой  $\lambda$  обозначаются через  $u_\lambda, s_\lambda$  и  $z_\lambda$  соответственно.

Основные аргументы  $D, l, l', F$  выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} D &= \xi = (n - n')(t - t_0) = \bar{\lambda} - \lambda', \\ l &= c(n - n')(t - t_1) = \bar{\lambda} - \bar{\pi}, \\ l' &= m(n - n')(t - t_3) = \lambda' - \pi', \\ F &= g(n - n')(t - t_2) = \bar{\lambda} - \bar{\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.41)$$

где постоянные  $t_1, t_2, t_0$  играют роль постоянных интегрирования, постоянная  $m$  та же, что и выше, а постоянные  $c, g$  находятся как функции параметра  $m$  в ходе построения рядов для  $u, s, z$ .

Через  $\bar{\lambda}, \bar{\pi}, \bar{\Omega}$  обозначены осредненные, т. е. освобожденные от периодических возмущений, средняя долгота Луны в орбите, долгота перигея и долгота восходящего узла лунной орбиты соответственно. Через  $\lambda'$  и  $\pi'$  обозначены одноименные долготы, относящиеся к Солнцу.



Члены нулевого порядка относительно  $e$ ,  $e'$ ,  $k$ ,  $\alpha$  в этом решении для  $u$ ,  $s$  соответствуют промежуточной орбите Хилла.

Браун находит непосредственно члены этих рядов (т. е. численные значения коэффициентов  $(A)_j$ ) для  $|j| \leq 8$  и до шестого порядка относительно  $e$ ,  $k$ , причем  $e'^2$  считается эквивалентным по порядку малости  $e^3$ ,  $k^3$ , а  $\alpha$  считается эквивалентным  $e^2$ ,  $k^2$ . Численное значение постоянной  $m$  фиксируется. Остальные параметры  $e$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $e'$  остаются произвольными, т. е. входят буквенно, так что решение зависит от шести произвольных постоянных  $\alpha$ ,  $k$ ,  $e$ ,  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ .

Для постоянных  $c$ ,  $g$  получены следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} c &= c_0 + 0,00268571e^2 + 0,03465e'^2 + 0,05385595k^2 - \\ &\quad - 0,022126\alpha^2 + 0,00023e^4 + 0,0181e^2e'^2 + \\ &\quad + 0,00145e^2k^2 + 0,1770e'^2k^2 + 0,07657k^4, \\ g &= g_0 + 0,003186183e^2 - 0,008066255k^2 + \\ &\quad + 0,005646535e'^2 + 0,0111058\alpha^2 + 0,00027e^4 + \\ &\quad + 0,0104e^2e'^2 + 0,00875e^2k^2 - 0,0090e'^2k^2 - 0,00883k^4, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.42)$$

где  $c_0$ ,  $g_0$  зависят только от  $m$  и находятся с помощью специально разработанного Хиллом метода. Если ограничиться небольшой точностью, то

$$\left. \begin{aligned} c_0 &\approx 1 + m - \frac{3}{4} m^2 - \frac{249}{32} m^3 - \frac{5163}{128} m^4, \\ g_0 &\approx 1 + m + \frac{3}{4} m^2 - \frac{15}{32} m^3 - \frac{213}{128} m^4. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.43)$$

Численные значения  $c_0$  и  $g_0$  следующие:

$$c_0 = 1,071583277416012, \quad g_0 = 1,085171426558189.$$

Постоянные  $c$  и  $g$  определяют вековые движения перигея и восходящего узла, так как

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda_0 + nt, \quad \bar{\pi} = \left(1 - \frac{c}{1+m}\right)nt + \pi_0, \\ \bar{\Omega} &= \left(1 - \frac{g}{1+m}\right)nt + \Omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.44)$$

Эти вековые движения при  $c = c_0$  и  $g = g_0$  равны  $148524''{,}92$  и  $-69287''{,}90$  соответственно в юлианский год.

### § 10.07. Переход к сферическим координатам

Переход от переменных  $u$ ,  $s$ ,  $z$  к истинной эклиптической долготе  $V$ , эклиптической широте  $\beta$  и синусу горизонтального параллакса  $\sin p_L$  осуществляется с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{u+s}{2} = \rho \cos(V-l'), & \rho^2 = x^2 + y^2 = us, \\ y &= \frac{u-s}{2i} = \rho \sin(V-l'), \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{z}{\rho}, & \sin p_L = \frac{a_T}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.45)$$

Если

$$u = u_0 + u_\lambda, \quad s = s_0 + s_\lambda,$$

где  $u_0$ ,  $s_0$  соответствуют промежуточной орбите, и через  $u_\lambda$ ,  $s_\lambda$  сокращенно обозначаются совокупности всех остальных членов в выражениях для  $u$ ,  $s$  с различными характеристиками  $\lambda$ , то

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 + \delta V, \\ \beta &= \frac{z}{\rho} - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{\rho} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z}{\rho} \right)^5, \\ \sin p_L &= \frac{a_T}{a} \frac{\rho_0}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.46)$$

где  $a_T$  — экваториальный радиус Земли, принимаемый за единицу,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} V_0 &= \frac{1}{i} \frac{u_0 e^{-iD} - s_0 e^{iD}}{u_0 e^{-iD} + s_0 e^{iD}}, \\ 2i \delta V &= \ln \left( 1 + \frac{u_\lambda}{u_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{s_\lambda}{s_0} \right) = \left( \frac{u_\lambda}{u_0} - \frac{s_\lambda}{s_0} \right) + \dots, \\ \frac{z}{\rho} &= \frac{z}{\rho_0} \left[ 1 + \frac{u_\lambda}{u_0} + \frac{s_\lambda}{s_0} + \frac{u_\lambda s_\lambda}{u_0 s_0} \right]^{-1/2}, \\ \frac{\rho_0}{r} &= \left[ 1 + \frac{u_\lambda}{u_0} + \frac{s_\lambda}{s_0} + \frac{u_\lambda s_\lambda}{u_0 s_0} + \left( \frac{z}{\rho_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, & \rho_0^2 = u_0 s_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.47)$$

Величины  $1/u_0$ ,  $1/s_0$ ,  $1/\rho_0$  разлагаются в ряды по степеням параметра  $m$ , преобразуемые в тригонометрические ряды того же вида, что ряды для  $u_0$ ,  $s_0$ ,  $\rho_0$ .

Постоянная  $a$  входит лишь как множитель в выражения для  $u$ ,  $s$ ,  $z$ ,  $r$ ,  $\rho$ ,  $\rho_0$ . Поэтому при построении формул для  $V$  и  $\beta$  эта постоянная сокращается. Она остается лишь в знаменателе общего множителя  $a_T/a$  для  $\sin p_L$ . После представления  $\sin p_L$  в виде ряда (4.10.40) свободный член этого ряда равен именно  $a_T/a$ .

### § 10.08. Численные значения постоянных интегрирования и параметров в теории Хилла — Брауна

Параметры  $n$ ,  $n'$ ,  $m$  полагаются равными значениям (4.10.37) и (4.10.38), полученным по результатам анализа многолетних наблюдений Луны и Солнца.

Величина  $a_T/a$  равна постоянному члену  $(\sin p_L)_0$  в выражении для синуса параллакса Луны  $\sin p_L$  в виде тригонометрического ряда. Эта величина также определяется эмпирически по многолетним наблюдениям.

Постоянные  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  или же постоянные члены в выражениях для основных аргументов  $D$ ,  $l$ ,  $F$  находятся на основании значений долготы узла, долготы перигея и средней долготы в орбите, принятых для Луны в начальную эпоху.

Параметр  $\alpha$ , равный  $a/a'$ , непосредственно не требуется. Дело в том, что при построении решения задачи была использована упрощенная возмущающая функция (4.10.26). Поэтому для уточнения этого решения следует заменить во всех формулах (см. §§ 10.03 и 10.04, п. 2) отношение  $a/a'$  на величину  $\alpha_1$ , равную

$$\alpha_1 = \frac{a}{a'} \frac{m_T - m_L}{m_T + m_L}, \quad (4.10.48)$$

что эквивалентно замене  $\alpha$  на  $(a/a)\alpha_1$ . При этом значение отношения  $a/a$  принимается равным 0,9990931420 в соответствии с (4.10.39), а значение отношения  $a/a'$  находится по формуле

$$\frac{a}{a'} = \frac{a_T}{a'} : \left( \frac{a_T}{a} \frac{a}{a'} \right), \quad (4.10.49)$$

где  $a_T/a'$  и  $a_T/a$  — принятые значения солнечного параллакса и постоянной части синуса параллакса Луны. Параметр  $\alpha_1$  вычисляется затем по формуле (4.10.48) в зависимости от принятого отношения масс  $m_T/m_L$  Земли и Луны.

Чтобы определить значения постоянных  $e$ ,  $k$ , Браун связывает их с параметрами  $e$ ,  $\gamma$  теории Делоне. А именно, он находит с помощью формул (4.10.46), (4.10.47) и рядов для  $u$ ,  $s$ ,  $z$  коэффициент  $V_l$  главного эллиптического члена в долготе и коэффициент  $\beta_F$  главного члена в широте (т. е. коэффициенты при  $\sin l$  и  $\sin F$  в рядах для  $V$  и  $\beta$  соответственно), выраженные буквенно через параметры  $e$ ,  $k$ ,  $\alpha_1$ . Он получает выражения вида

$$\left. \begin{aligned} V_l &= 99\,972\,871e + 0,0145776e^3 - 0,02435ee' + \dots, \\ \beta_F &= 1,99974473k + 0,991675k^3 - 0,250242ke^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.10.50)$$

с точностью до членов пятого порядка. Согласно же теории

Делоне

$$V_I = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5, \quad \beta_F = 2\gamma - 2\gamma e^2 - \frac{1}{4}\gamma^5 + \frac{7}{32}\gamma e^4.$$

Браун приравнивает эти выражения и получает формулы

$$\left. \begin{aligned} e &= 2,00054273e - 0,3668152e^3 + 0,04873ee'^2 - \\ &\quad - 2,011602e\gamma^2 - 0,0342e\alpha_1^2 + 0,049e^5 + 0,35e^3e'^2 - \\ &\quad \quad \quad - 0,246e^3\gamma^2 - 0,56ee'^2\gamma^2 + 0,911e\gamma^4, \\ k &= 1,00012765\gamma - 0,496091\gamma^3 - 0,499243\gamma e^2 - \\ &\quad - 0,0037\gamma e'^2 + 0,0049\gamma\alpha_1^2 - 0,128\gamma^5 + 1,07\gamma^3e^2 - \\ &\quad \quad \quad - 0,095\gamma e^4 + 0,12\gamma e^2e'^2, \end{aligned} \right\} (4.10.51)$$

позволяющие вычислить  $e$ ,  $k$  по заданным значениям  $e$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $e'$ .

Браун использовал при построении окончательных формул три различные системы значений исходных постоянных

$$V_I, \beta_F, a_T/a', (\sin p_L)_0, m_T/m_L, e'$$

и соответствующих значений  $e$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ , указанных в табл. 50. Там же приведена система значений ( $e$ ), использовавшаяся Эккертом и др. [49], [50] при уточнении теории Брауна.

Таблица 50

	(b)	(c)	(d)	(e)
$V_I$	22639",580	22639",500	22639",550	22639",550
$\beta_F$	18461,480	18461,350	18461,400	18461,400
$(\sin p_L)_0$	3422,700	3422,700	3422,540	3422,452
$m_T/m_L$	81,500	81,530	81,530	81,30
$a_T/a'$	8,7800	8,80549	8,80549	8,80549
$e'$	0,01677191	0,01675104	0,01675104	0,01675104
$e$	0,05490056	0,0549003678	0,0549004891	0,0549004891
$\gamma$	0,04488716	0,0448868447	0,0448869669	0,0448869669
$\alpha_1$	0,00250532	0,00251287	0,00251273	0,002509351

(b) — Браун [46], [47], (c), (d) — Браун [48], (d), (e) — Эккерт и др. [49], [50].

Значения постоянных  $c$ ,  $g$  вычисляются по формулам (4.10.51), (4.10.42) при заданных  $e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ , а вековые движения  $\pi_i$ ,  $\Omega_i$  перигея и узла — по формулам (4.10.44). В случае

системы постоянных (*b*) Браун получил

$$\left. \begin{aligned} c &= 1,0717079217, & g &= 1,0851953910, \\ \pi_t &= 146426'',92, & \Omega_t &= -69672'',04 \end{aligned} \right\} \quad (4.10.52)$$

(в юлианский год).

Выражения для основных аргументов  $D$ ,  $l$ ,  $l'$ ,  $F$  и для  $\bar{\lambda}$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} D &= 350^\circ 44' 23'',67 + 16029616'',64569t, \\ l &= 296^\circ 6' 25'',31 + 17179167'',14t, \\ l' &= 358^\circ 28' 33'',00 + 1295965'',7910t, \\ F &= 11^\circ 15' 11'',92 + 17395266'',10t, \\ \bar{\lambda} &= 270^\circ 26' 11'',71 + 17325594'',06085t, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.53)$$

где  $t$  отсчитывается в юлианских годах от эпохи 1900,0. Коэффициенты при  $t$  в этих формулах для  $D$ ,  $l$ ,  $F$  равны  $n - n'$ ,  $n - \pi_t$ ,  $n - \Omega_t$  соответственно.

### § 10.09. Окончательные выражения для долготы $V$ , широты $\beta$ и синуса параллакса $\sin p_L$ , соответствующие решению основной проблемы

Для переменных  $u$ ,  $s$ ,  $z$  и, таким образом, для прямоугольных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеются выражения в виде рядов (4.10.40) с коэффициентами, выраженными буквенно через параметры  $e$ ,  $k$ ,  $e'$ ,  $\alpha_1$ . Исходя из формул (4.10.51) и (4.10.46), можно было бы с помощью операций над рядами вывести формулы, представляющие  $V$ ,  $\beta$  и  $\sin p_L$  в виде аналогичных рядов

$$V = \bar{\lambda} + \sum c_k \sin \psi_k, \quad \beta = \sum c_k \sin \psi_k, \quad \sin p_L = \sum c_k \cos \psi_k, \quad (4.10.54)$$

где  $\psi_k$  — различные комбинации четырех основных аргументов  $D$ ,  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ , а  $c_k$  — коэффициенты, выраженные буквенно через параметры  $e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ . Однако такие операции с рядами, имеющими сложные буквенные коэффициенты (полиномы по степеням параметров), вполне доступные при использовании больших электронно-вычислительных машин, необозримо трудоемки при ручных выкладках. Поэтому Браун выполняет преобразования, задаваясь с самого начала численными значениями параметров  $e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  и оперируя, таким образом, с рядами, имеющими численные коэффициенты. Почти не приводя выкладок (колоссальных и при таком упрощении), Браун получает ряды (4.10.54) с численными коэффициентами  $c_k$ . Значения последних, в секундах и их долях, соответствующие различ-

Таблица 51

Долгота V

Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	
1	0	0 0	6	+	0",127	$e\alpha_1$	1	0 0	1	-	8,466
			4	+	13,902 <sup>(1)</sup>				-1	+	18,609
			2	+	2369,902				-3	+	3,215
			0	+	,23				-5	+	,014
e	1	0 0	6	+	,23	$e'\alpha_1$	0	1 0	3	+	,150
			4	+	1,919				1	+	18,023
			2	+	191,953				-1	+	,560
			0	+	22639,500				-3	-	,066
e'	0	1 0	4	-	4586,426 <sup>(2)</sup>	$e^3$	3	0 0	4	+	,021
			-4	-	38,428				2	+	1,060
			-6	-	,393				0	+	36,124
			4	-	,289				-2	-	13,193
$\alpha_1$	0	0 0	3	+	24,420	$e^2e'$	2	1 0	2	-	1,187
			0	-	668,111 <sup>(3)</sup>				-6	-	,293
			-2	-	165,145				0	-	,290
			-4	-	1,877				0	-	8,627
e <sup>2</sup>	2	0 0	4	+	,024	$ee'^2$	1	2 0	2	-	2,740
			2	+	,403				-6	-	,091
			0	-	125,154 <sup>(4)</sup>				4	+	,033
			4	+	,213				2	+	1,181
ee'	1	1 0	4	+	14,387	$e^3$	0	3 0	0	+	9,703
			2	+	769,016				-2	-	2,494
			0	-	211,656				-4	+	,360
			-4	-	30,773				-6	+	,014
e <sup>2</sup> e'	1	1 0	4	-	,570	$e\gamma^2$	1	0 2	4	-	,014
			2	-	,051				0	-	1,167
			0	-	2,921				-2	-	7,412
			-2	-	109,667				-4	-	311
e' <sup>2</sup>	0	2 0	2	-	205,962	$e'^3$	0	3 0	0	+	,024
			-4	-	4,391				2	+	,757
			-6	-	,072				0	+	2,580
			4	+	,283				-2	+	2,533
e' <sup>2</sup>	0	2 0	2	+	14,577	$e\gamma^2$	1	0 2	4	-	,022
			0	+	147,693				-4	+	,022
			-2	+	28,475				0	-	,103
			-4	+	,636				-2	-	,344
e' <sup>2</sup>	0	2 0	2	+	,011	$e\gamma^2$	1	0 2	4	-	,010
			0	-	,189				2	-	,018
			-2	-	7,486				2	-	,992
			-4	-	8,096				0	-	45,099
e' <sup>2</sup>	0	2 0	2	-	,151	$\gamma^2$	1	0 -2	4	-	,179
			0	-	,085				-4	-	,301
			-2	-	5,741				4	-	,067
			-4	-	411,608				2	-	6,382
e' <sup>2</sup>	0	2 0	2	-	55,173	$\gamma^2$	1	0 -2	4	0	39,532
			0	-	,025				0	+	9,366
			-2	-					-2	+	
			-4	+					-4	+	,202

(1) — вариация, (2) — эфекия, (3) — годовое неравенство, (4) — параллактическое неравенство.

Продолжение табл. 51

Характеристика	Кратности аргумента				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$		
$e'\gamma^2$	0	1	2	2	+ ,066	$e^2\gamma^2$	2	0	2	2	- ,123	
				0	+ ,415					0	-3,996	
				-2	-2,152					-2	+ ,557	
	0	1	-2	2	-1,440			2	0	-2	4	- ,459
				0	+ ,076					2	2	- ,459
$e^2\alpha_1$				-2	+ ,384				0	-1,298		
				-4	+ ,011		2	0	-2	-2	+ ,538	
	2	0	0	1	- ,586				-4	+ ,173		
				-1	+1,750	$ee'\gamma^2$	1	1	2	2	+ ,012	
				-3	+1,225					0	+ ,263	
			-5	+ ,059					-2	+ ,059		
1	1	0	3	+ ,023					-4	- ,024		
			1	+1,267			1	1	-2	2	+ ,083	
$ee'\alpha_1$				-1	+ ,137				0	+ ,083		
				-3	+ ,233				-2	+ ,426		
	1	-1	0	1	- ,122				-4	+ ,019		
				-1	-1,089		1	-1	2	2	- ,064	
				-3	- ,276				0	- ,304		
$e'^2\alpha_1$	0	2	0	1	- ,039				-4	+ ,018		
				-1	- ,042		1	-1	-2	2	- ,372	
	0	0	2	1	+ ,255				0	+ ,083		
$\gamma^2\alpha_1$				-1	+ ,584				-2	- ,065		
				-3	+ ,254	$e'^2\gamma^2$	0	2	2	-2	- ,066	
				-3	+ ,254			0	2	-2	2	- ,025
4	0	0	2	+ ,070					-2	+ ,016		
$e^t$				0	+1,938	$\gamma^1$	0	0	4	2	+ ,014	
				-2	+ ,952					0	+ ,418	
				-6	- ,014					-2	+ ,074	
$e^3e'$	3	1	0	2	- ,025	$e^3\alpha_1$	3	0	0	1	- ,042	
				0	- ,551					-1	+ ,130	
				-2	- ,482					-3	+ ,045	
				-4	- ,100					-5	+ ,016	
				-6	- ,039		$e^2e'\alpha_1$	2	1	0	1	+ ,092
3	-1	0	2	+ ,088					-3	+ ,084		
			0	+ ,681		2		-1	0	1	- ,014	
			-2	- ,183					-1	- ,352		
			-4	- ,029					-3	+ ,042		
$e^2e'^2$	2	2	0	0	- ,067	$ee'^2\alpha_1$	1	2	0	-3	+ ,012	
				-2	- ,297		$e\gamma^2\alpha_1$	1	0	2	1	+ ,045
				-4	- ,161						-1	+ ,024
	2	-2	0	2	+ ,062						-3	+ ,030
				0	+ ,197				1	0	-2	3
			-2	+ ,254					1	- ,041		
$ee'^3$				-4	+ ,036				-1	- ,016		
	1	3	0	0	- ,018	$e'\gamma^2\alpha_1$	0	1	2	1	- ,011	
				-2	- ,250					-3	- ,035	
				-4	- ,016					-1	+ ,013	
	1	-3	0	2	+ ,032					-3	+ ,020	
			0	+ ,051	$e^5$		5	0	0	0	+ ,113	
0	4	0	-2	- ,013					-2	- ,069		
2	1	0	0	-7,649								

Продолжение табл. 51

Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	
$e^1 e'$	4	1	0	0	-,040	$e^2 e' \gamma^2$			-2	+ ,022	
				-2	-,030				-4	+ ,016	
$e^3 e'^2$	3	2	0	-2	-,016		2	-1	2	0	-,053
	3	-2	0	0	+ ,016		2	-1	-2	2	-,029
				-2	+ ,011					0	-,024
$e^2 e'^3$	2	3	0	-2	-,010	$ee'^2 \gamma^2$	1	2	-2	-2	+ ,015
				-2	-,011			1	-2	-2	2
$e^3 \gamma^2$	3	0	2	2	-,330	$e \gamma^4$	1	0	4	0	+ ,090
$e^3 \gamma^2$	3	0	2	-2	+ ,092			1	0	-4	0
				2	-,033					-2	-,019
				0	-,055	$e^4 \alpha_1$	4	0	0	-1	+ ,010
$e^2 e' \gamma^2$	2	1	2	0	+ ,043		$e^3 e' \alpha_1$	3	-1	0	-1
				-2	+ ,028	$e^4 \gamma^2$		4	0	2	0
				0	+ ,026					-2	+ ,010
$e^4 e'$	4	-1	0	0	+ ,048	$e^2 \gamma^4$	2	0	4	0	+ ,011
				-2	-,019						

Таблица 52

Широта  $\beta$ 

Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$		
$\gamma$	0	0	1	6	+ 0",015	$\gamma e'$				2	+ 8,001	
				4	+ 1,192						0	+ 4,863
				2	+ 117,262						-2	+ 12,140
				0	+ 18461,480						-4	+ ,113
				-2	- 623,658		$\gamma \alpha_1$	0	0	1	3	-
			-4	- 3,675						1	- 5,357	
			-6	- ,037						-1	+ 4,795	
$\gamma e$	1	0	1	4	+ ,213						-3	+ ,350
				2	+ 15,122	$\gamma^3$		0	0	3	2	-
				0	+ 1010,180						0	- 6,299
				-2	- 166,577						-2	- 2,185
				-4	- 6,580						-4	- ,063
			-6	- ,095	$\gamma e^2$		2	0	1	4	+ ,028	
			6	+ ,042						2	+ 1,523	
			4	+ 3,000						0	+ 61,913	
			2	+ 199,485						-2	- 15,565	
			0	- 999,695						-4	- ,635	
$\gamma e'$	-1	0	1	6	- 33,359					-6	- ,081	
				4	- ,475	$\gamma e^2$	-2	0	1	6	+ ,060	
				4	- ,024						4	+ 2,413
				2	- 1,269						2	- 1,624
				0	- 6,492						0	- 31,763
				-2	- 29,689						-2	- 2,146
				-4	- ,418						-4	- ,048
			0	- 11	4		+ ,154					



Продолжение табл. 52

Характеристика	Кратности аргументов			$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов			$c_k$				
	$k_1$	$k_2$	$k_3$			$k_1$	$k_2$	$k_3$		$k_4$			
$\gamma e e'$	1	11	2	— ,239	$\gamma^3 e'$	0	13	0	+ ,011				
			0	—5,331				—2	— ,093				
			—2	—7,463		0	—13	—2	+	,056			
			—4	— ,600					3	01	2	+	,139
			—6	— ,015		0	+	3,984					
	—1	—11	4	+		,341	—2			—	1,516		
				2		+8,902	—3	01	6	+	,031		
			0	+5,096							4	+	,021
			—2	+ ,826				2	+	,255			
			—4	+ ,017				0	—	1,585			
	1	—11	4	+		,030	—2	2	11	2	—	,147	
				2		+1,141					—	,027	
			0	+6,756				0	—	,644			
			—2	+ ,795				—2	—	,657			
			—4	+ ,171				—4	—	,053			
	—1	11	4	—		,051			—6	—	,011		
				2		—1,323	2	—11	4	+	,217		
		0	—5,655			2				—	,063		
		—2	—1,773			0	+	,314					
		—4	— ,058			—2	+	,063					
$\gamma e'^2$	0	21	2	— ,016	2	—11	2	+	,114				
			0	— ,056				0	+	,809			
			—2	—1,096			—2	—	,084				
			—4	— ,029	—2	11	4	—	,029				
	0	—21	4	+				,013			2	+	,056
				2	+ ,387			0	—	,303			
			0	+ ,019			—2	—	,129				
		—2	+ ,136	$\gamma e e'^2$	1	21	0	—	,055				
1	01	1	—					,666			—2	—	,272
			—1					+ ,429			—4	—	,034
		—3	+ ,306							—1	—21	4	+
		—5	+ ,012			2	+	,319					
$\gamma e \alpha_1$	—1	01	3	— ,208			0	+	,062				
			1	+ ,139			1	—21	2	+	,054		
			—1	+ ,591			0	+	,117				
			—3	+ ,035			—2	+	,107				
	0	11	3	+	,014	—1	21	2	—	,115			
1				+ ,804						0	—	,096	
		—1	+ ,013			—2	—	,069					
		—3	+ ,026	$\gamma e'^3$	0	31	—2	—	,037				
0	—11	1	—					,018			0	—31	2
					—1	— ,806	0	03	—1	+	,032		
		—3	— ,034			—3				+	,010		
$\gamma^3 e$	1	03	2	— ,031	2	01	1	—	,065				
			0	—1,021						—1	+	,112	
			—2	— ,329			—3	+	,039				
	—1	03	2	—	,244	—2	01	3	—	,049			
				0	—2,814						1	—	,078
		—2	+ ,292			—1	+	,036					

Продолжение табл. 52

Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$		
$\gamma e e' \alpha_1$	1	11	1		+ ,101	$\gamma e^3 e'$	3	11	0		- ,063	
			-1		- ,011					-2		- ,056
			-3		+ ,021			-3	-11	2		+ ,010
		-1	-11	3	- ,013					0		+ ,024
			-1		- ,034			3	-11	2		+ ,011
		1	-11	-3	- ,013					0		+ ,076
		-1	11	3	+ ,022			3	-11	-2		- ,019
				1	- ,056			-3	11	0		- ,024
				-1	+ ,020					-2		- ,010
				0	- ,116			2	21	-2		- ,023
$\gamma^3 e^2$	2	03	0		- ,022	$\gamma e^2 e'^2$	-2	-21	4		+ ,013	
			-2		- ,066			2	-21	0		+ ,016
	-2	03	2		+ ,130					-2		+ ,013
$\gamma^3 e e'$			0		+ ,010	$\gamma e^3 \alpha_1$ $\gamma e^2 e' \alpha_1$	3	01	-1		+ ,013	
	1	13	-2		- ,011			2	11	1		+ ,010
	-1	-13	2		- ,011			2	-11	-1		- ,016
	-1	13	-2		+ ,017			-2	11	1		+ ,017
$\gamma e^4$	4	01	2		+ ,011	$\gamma^3 e^3$ $\gamma e^5$	3	03	0		- ,014	
			0		+ ,266			5	01	0		+ ,018
			-2		- ,135					-2		- ,012
	-4	01	2		+ ,025							
			0		- ,091							
		-2		- ,010								

Таблица 53

Синус параллакса

Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	
1	0	0	0	6	+ 0",0032	$e^2$	2	0	0	4	+ ,0054
				4	+ ,2607					2	+ ,2833
				2	+ 28,2333					0	+ 10,1657
				0	+ 3422,7000					-2	- ,3039
e	1	0	0	4	+ ,0433	ee'	1	1	0	4	+ ,3722
				2	+ 3,0861					-6	+ ,0109
				0	+ 186,5398					2	- ,0012
			-2		+ 34,3117					0	+ ,0484
			-4		+ ,6008					0	- ,9490
e'	0	1	0	4	+ ,0086				-2	+ 1,4437	
				2	- ,0053				-4	+ ,0673	
				0	- ,3000				-6	+ ,0015	
			0		- ,3997		1	-1	0	4	+ ,0060
			-2		+ 1,9178				2	+ ,2302	
$\alpha_1$	0	0	0	3	+ ,0339				0	+ 1,1528	
				1	+ ,0023				-2	- ,2257	
					- ,9781				-4	- ,0102	

Продолжение табл. 53

Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$	Характеристика	Кратности аргументов				$c_k$			
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$				
$e'^2$	0	2	0	2	-,0028	$e'\gamma^2$	0	1	2	0	+,0013			
				0	-,0086					-2		-,0066		
				-2	+,0918			0	1	-2	2	+,0014		
				-4	+,0028						0	+,0017		
$\gamma^2$	0	0	2	0	-,0124	$e^2\alpha_1$	2	0	0	1	-,0100			
				-2	-,1052					-1		+,0155		
				-4	+,0031					-3		-,0088		
				0	-,1093			1	1	0	1	+,0164		
$e\alpha_1$	1	0	0	1	+,0118	$ee'\alpha_1$				-3	-,0025			
				-1	-,0386			1	-1	0	1	-,0014		
				-3	+,0027					-3		+,0036		
				1	+,1494		$\gamma^3\alpha_1$	0	0	2	-1		+,0071	
$e'\alpha_1$	0	1	0	3	-,0037					-3		-,0017		
				-1	+,0243	$e^4$		4	0	0	2		+,0018	
				0	+,6215				4	0	0	0	+,0401	
				-2	-,1187					-2		-,0130		
			-4	+,0074	$e^3e'$		3	1	0	0		-,0097		
$e^3$	3	0	0	2		+,0046				-2		-,0045		
				0		-,0051		3	-1	0	2	+,0017		
				-2		-,1038				0		+,0115		
				-4	+,0324				-2		-,0017			
$e^2e'$	2	1	0	2	+,0017	$e^2e'^2$	2	2	0	-4		+,0020		
				0	+,0213			2	-2	0	2	+,0013		
				-2	+,1268					0		+,0024		
				-4	-,0017		$ee'^3$	1	3	0	-2		+,0014	
$ee'^2$	2	-1	0	2	-,0043	$e^2\gamma^2$		2	0	2	-2		-,0090	
				0	-,0106				2	0	-2	2	-,0053	
				-2	+,0484						-2		-,0141	
				-4	+,0044		$ee'\gamma^2$	1	1	2	-2		-,0032	
$e^2e'^2$	1	2	0	0	+,0112			1	1	-2	0	+,0024		
				0	+,0196			1	-1	-2	2	-,0027		
				-2	-,0212					0		-,0029		
				0	+,0036	$e^3\alpha_1$	3	0	0	-1		+,0017		
$e^2e'^3$	0	3	0	-2	-,0010		$e^2e'\alpha_1$	2	1	0	1		+,0015	
	$e\gamma^2$	1	0	2	0			-,0833		2	-1	0	-1	-,0028
					-2			+,0014	$e^2\gamma^2\alpha_1$	1	0	2	-1	
					-4	-,0481		$e^5$		5	0	0	0	
		1	0	-2	2						-2		-,0012	
			0	-,7136										
$e^2e'$	2	1	0	-2	+,0,192									

ным  $\psi_k$ , собраны в таблицах (см. [47], [48]), где они выписаны с точностью до  $0'',001$  для  $V$ ,  $\beta$  и с точностью до  $0'',001$  для  $\sin p_L$ . Всего эти таблицы содержат 312, 349 и 185 коэффициентов  $c_k$  соответственно. Браун указывает в таблицах также главную характеристику каждого коэффициента  $c_k$ , т. е. множитель из параметров  $e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  младшего порядка, который бы присутствовал в буквенном выражении для  $c_k$  через эти параметры.

Приведем эти таблицы в сокращенном виде, ограничиваясь коэффициентами  $c_k$ , равными или превышающими по абсолют-

ной величине  $0'',01$  в случае долготы (табл. 51), а также широты (табл. 52) и  $0'',001$  в случае синуса параллакса Луны (табл. 53). Подразумевается, что выражение для  $\psi_k$  имеет вид

$$\psi_k = k_1 l + k_2 l' + k_3 F + k_4 D.$$

В соответствующих столбцах таблиц выписаны кратности аргументов  $k_1, k_2, k_3, k_4$  со знаком плюс или минус. При этом повторяющиеся кратности  $k_1, k_2, k_3$  опускаются. Например, в первых трех строках табл. 51 имеем  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , но непосредственно выписаны эти значения лишь в первой строке. Повторяющиеся характеристики также опускаются.

Табл. 51—53 вместе с формулами (4.10.53) для основных аргументов представляют собой окончательный результат Брауна, полученный им при решении основной проблемы в теории движения Луны. При этом долготы  $F, \bar{\lambda}$  и сферические координаты  $V, \beta$  измеряются в координатной системе, определяемой неизменными эклипстикой и средней точкой весеннего равноденствия эпохи 1900,0. (В условиях основной проблемы эклиптика не меняет своего положения в пространстве.)

### § 10.10. Возмущения Луны, обусловленные притяжением планет, фигурами Земли и Луны

Таблицы для  $V, \beta, \sin p_L$ , приведенные в предыдущем параграфе, учитывают возмущения Луны от Солнца в рамках основной проблемы. Но, кроме того, в теории Брауна находятся также возмущения (см. [47]) в координатах  $V, \beta$  и в синусе параллакса, обусловленные:

- 1) прямым действием планет на Луну,
- 2) косвенным действием планет (т. е. отклонениями в движении Солнца от эллиптической орбиты вокруг центра масс системы «Земля — Луна» вследствие действия планет на Землю),
- 3) фигурой Земли,
- 4) фигурой Луны.

Найденные возмущения выражаются:

а) тригонометрическими членами, добавляемыми непосредственно к  $V, \beta, \sin p_L$  [совокупности этих членов обозначаются через  $\delta V, \delta \beta, \delta(\sin p_L)$ ];

б) вековыми и тригонометрическими членами, добавляемыми к основным аргументам  $D, l, l', F$ , а также к параметрам  $e', \gamma$ .

Численные значения соответствующих коэффициентов находятся на основании известных данных о движении планет и о форме Земли и Луны.

Если ограничиться наиболее существенными членами, то  $\delta V$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta(\sin p_L)$  представляются с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \delta V = & 0'',822 \sin(T - V_1) + \\ & + 0'',307 \sin(2T - 2V_1 + 179^\circ,8) + 0'',348 \sin(3T - 2V_1 + 272^\circ,9) + \\ & + 0'',176 \sin(4T - 3V_1 + 271^\circ,7) + 0'',136 \sin(2D + 2T - 2V_1 + 179^\circ,5) + \\ & + 0'',129 \sin(l - T + V_1 + 180^\circ,0) + 0'',152 \sin(l + T - V_1) + \\ & + 0'',127 \sin(l + 3T - 3V_1 + 180^\circ,0) + \\ & + 0'',658 \sin(2D - l - 3T + 3V_1 + 180^\circ,0) + \\ & + 0'',137 \sin(2D - l - 2T + 2V_1) + 0'',133 \sin(2D - l + T - V_1) + \\ & + 0'',157 \sin(2D - l + 2T - 2V_1 + 179^\circ,6) + \\ & + 0'',195 \sin(2M - 2T + 180^\circ,2) + \\ & + 0'',327 \sin(2M - T + 224^\circ,4) + 0'',643 \sin(I - T + 178^\circ,8) + \\ & + 0'',187 \sin(2I - 2T + 359^\circ,6) + 0'',165 \sin(2I - T + 241^\circ,5) + \\ & + 0'',167 \sin(2D + I - T + 178^\circ,5) + 0'',144 \sin(l - I + T + 1^\circ,0) + \\ & + 0'',158 \sin(l + I - T + 179^\circ,0) + 0'',190 \sin(l + 2I - 2T + 180^\circ,0) + \\ & + 1'',137 \sin(2D - l - 2I + 2T + 180^\circ,3) + \\ & + 0'',211 \sin(2D - l + I - T + 178^\circ,4) + \\ & + 0'',436 \sin(2D - l - 3I + 2T + 7^\circ,5) + \\ & + 0'',240 \sin(2I - 2D + 2I - 2T + 179^\circ,9) + \\ & + 0'',284 \sin(2I - 2D + 3I - 2T + 172^\circ,5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\beta = & 0'',068 \sin(-F + 2D - 6T + 5V_1 + 270^\circ,0) + \\ & + 0'',077 \sin(\bar{\lambda} + 5T - 3V_1 + 215^\circ,6) + \\ & + 0,074 \sin(\bar{\lambda} - 5T + 3V_1 + 51^\circ,6) + 0'',083 \sin(F + 2\bar{\Omega}), \quad (4.10.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\sin p_L) = & 0'',0095 \cos(2D - l - 2I + 2T + 180^\circ,3) + \\ & + 0'',0055 \cos(2D - l - 3T + 3V_1 + 180^\circ,0) + \\ & + 0'',0036 \cos(2D - l - 3I + 2T + 7^\circ,5). \quad (4.10.56) \end{aligned}$$

Полные формулы для  $\delta V$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta(\sin p_L)$  содержат 414, 117 и 67 членов соответственно. В этих формулах через  $T(=\lambda' + 180^\circ)$ ,  $V_1$ ,  $M$ ,  $I$  обозначены средние эклиптические долготы Земли, Венеры, Марса и Юпитера соответственно.

Для них, а также для основных аргументов и  $\bar{\lambda}$ ,  $\Omega$ ,  $\pi$  получены с учетом рассматриваемых возмущений выражения

$$\left. \begin{aligned} D &= 350^\circ 44' 23'',67 + 16029616'',3793 t + 6'',05 t_c^2 + 0'',0068 t_c^3 + \delta D, \\ l &= 296^\circ 06' 25'',31 + 17179158'',8354 t + 44'',31 t_c^2 + 0'',0518 t_c^3 + \delta l, \\ l' &= 358^\circ 28' 33'',00 + 1295965'',7910 t - 0'',54 t_c^2 - 0'',0120 t_c^3 + \delta l', \\ F &= 11^\circ 15' 11'',92 + 17395273'',1729 t - 0'',34 t_c^2 - 0'',0012 t_c^3 + \delta F, \\ \bar{\lambda} &= 270^\circ 26' 11'',71 + 17325644'',0606 t + 7'',14 t_c^2 + 0'',0068 t_c^3 + \delta \bar{\lambda}, \\ T &= 99^\circ 41' 48'',04 + 1296027'',6813 t + 1'',090 t_c^2 + \delta T, \\ V_1 &= 342^\circ 46' 1'',39 + 2106691'',6288 t, \\ M &= 293^\circ 44' 51'',36 + 689101'',1762 t, \\ l &= 238^\circ 3' 0'',88 + 109306'',9152 + \delta l, \\ \Omega &= 259^\circ 10' 59'',79 - 69629'',1123 t + 7'',48 t_c^2 + 0'',008 t_c^3 + \delta \Omega, \\ \pi &= 334^\circ 19' 46'',40 + 146485'',2252 t - 37'',17 t_c^2 - 0'',045 t_c^3 + \delta \pi, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.57)$$

где

$$\delta D = \delta \bar{\lambda} - \delta l', \quad \delta l = \delta \bar{\lambda} - \delta \pi, \quad \delta T = \delta l', \quad \delta F = \delta \bar{\lambda} - \delta \Omega, \quad (4.10.58)$$

причем  $t$  отсчитывается в юлианских годах от эпохи 1900,0, а  $t_c$  — в юлианских столетиях от той же эпохи, и (если ограничиться наиболее существенными членами)

$$\begin{aligned} \delta \bar{\lambda} &= 14'',27 \sin(l + 16T - 18V_1 - 1^\circ,0(t_c - 18,5) + 151^\circ,1) + \\ &+ 7'',261 \sin \Omega + \\ &+ 0'',84 \sin[20^\circ,2(t_c - 18,5) + 41^\circ,1] + \\ &+ 0'',31 \sin[l + 3T - 10V_1 - 2^\circ,6(t_c - 18,5) + 33^\circ] + \\ &+ 0'',282 \sin[\Omega - 2^\circ,3(t_c - 18,5) + 276^\circ,2] + \\ &+ 0'',237 \sin(13T - 8V_1 + 313^\circ,9) + \\ &+ 0'',108 \sin(l + 29T - 26V_1 + 112^\circ,0) + \\ &+ 0'',126 \sin(2D - l + 21T - 20V_1 + 273^\circ,0), \quad (4.10.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \pi &= -2'',076 \sin \Omega - \\ &- 2'',10 \sin[20^\circ,2(t_c - 18,5) + 41^\circ,1] - \\ &- 0'',118 \sin(l + 16T - 18V_1 - 1^\circ,0(t_c - 18,5) + 151^\circ,1) - \\ &- 0'',10 \sin[119^\circ,0(t_c - 18,5) + 152^\circ] - \\ &- 0'',840 \sin[\Omega - 2^\circ,3(t_c - 18,5) + 276^\circ,2] - \\ &- 0'',593 \sin(13T - 8V_1 + 313^\circ,9), \quad (4.10.60) \end{aligned}$$

$$\delta\Omega = 95'',96 \sin \Omega + 15'',58 \sin (\Omega - 2^\circ,3 (t_c - 18,5) + 276^\circ,2) + \\ + 1'',86 \sin (\Omega - 0^\circ,9 (t_c - 18,5) + 290^\circ,1), \quad (4.10.61)$$

$$\delta\lambda' = -1'',89 \sin (13T - 8V_1 + 313^\circ,9) - \\ - 6'',40 \sin [20^\circ,2 (t_c - 18,5) + 41^\circ,1], \quad (4.10.62)$$

$$\delta I = 0^\circ,33 \sin [38^\circ,51 (t_c - 18,5) + 115^\circ]. \quad (4.10.63)$$

Основные возмущения параметров  $\gamma$  и  $e'$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} \delta\gamma &= -4'',318 \cos \Omega - 0'',698 \cos [\Omega - 2^\circ,3 (t_c - 18,5) + 276^\circ,2], \\ e' &= -0,00004180 t_c. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.64)$$

При выводе указанных формул для  $D, l, F, \bar{\lambda}, l'$  Брауном приняты уточненные значения средних движений  $n$  и  $n'$ :

$$n = 17325593'',8031, \quad n' = 1295977'',4238 \\ (\text{в юлианский год}).$$

Если пренебречь в (4.10.57) периодическими возмущениями  $\delta D, \delta l, \dots, \delta \pi$ , то получим средние значения соответствующих углов  $D, l, \dots, \pi$ . При вычислениях  $\delta \bar{\lambda}, \delta \pi, \delta \Omega, \dots$  по формулам (4.10.59)—(4.10.64) подставляют в правые части этих формул именно средние значения углов  $D, l, \dots, \pi$ .

Учет планетных возмущений Луны состоит также в том, что координаты Луны  $V, \beta$  относятся к мгновенной эклиптике, которая изменяет свое положение вследствие действия планет на Землю. Поэтому все долготы  $\bar{\lambda}, \Omega, \pi$ , а также  $T, V_1, M, I$  в (4.10.57) выражены с учетом изменений за счет прецессии. Формулы (4.10.54) и таблицы 51, 52, если использовать для основных аргументов и  $\bar{\lambda}$  выражения из (4.10.57) вместо (4.10.53), определяют координаты  $V, \beta$  в указанной системе отсчета.

Изменение эклиптической долготы за счет прецессии составляет  $50'',2575t + 1'',11t_c^2$  за юлианский год. Соответствующие изменения долгот  $\bar{\lambda}, F$  и др. определяются в соответствии с изложенным в ч. I, гл. 2.

В выражениях для  $\bar{\lambda}, \pi, \Omega$ , а следовательно, и для  $F, D, l$  учтены вековые ускорения, т. е. члены, пропорциональные  $t^2$ , обусловленные вековым изменением эксцентриситета  $e'$  орбиты Земли. Для них Браун получил в [47] следующие величины:

$$\delta \bar{\lambda} = 5'',8t_c^2, \quad \delta \pi = -38'',3t_c^2, \quad \delta \Omega = 6'',5t_c^2.$$

Окончательные значения вековых движений перигея и узла лунной орбиты (не зависящих от прецессии) равны по Брауну [47]

$$\pi_i = 146435'',21, \quad \Omega_i = -69679'',36 \quad (\text{в юлианский год}).$$

При этом основная доля изменений по сравнению со значениями (4.10.52) приходится на прямое действие планет ( $2'',69$  для перигея и  $-1'',42$  для узла) и влияние фигуры Земли ( $6'',41$  для перигея и  $-6'',00$  для узла).

В выражение для средней долготы  $\bar{\lambda}$  Браун вводит дополнительно так называемый эмпирический член, равный

$$\Delta\bar{\lambda} = 10'',71 \sin [140^\circ,0(t_c - 18^\circ,5) + 170^\circ,7]. \quad (4.10.65)$$

Он не вытекает из каких-либо гравитационных возмущений Луны, и Браун его подобрал эмпирическим путем так, чтобы таблицы движения Луны, составленные на основании всех полученных формул при дополнительном учете (4.10.65), представляли наблюдаемые положения Луны с точностью  $0'',1$  между 1720 и 1930 гг. и с точностью  $0'',6$  между 1625 и 1720 гг.

### § 10.11. Уточнение теории движения Луны Хилла — Брауна

Уточнения теории Хилла — Брауна, указанные в [49], сводятся к следующему.

1. Эмпирический член исключен и заменен поправкой к средней долготе

$$\Delta\lambda = -8'',72 - 26'',75 t_c - 11'',22 t_c^2, \quad (4.10.66)$$

соответствующей переходу к *эфемеридному времени* (см. ч. I, гл. 3). Эта поправка вносится в выражения для  $\bar{\lambda}$  и основных аргументов  $D, l, F$ .

2. При построении таблиц коэффициентов тригонометрических рядов для  $V, \beta, \sin p_L$  используется только система ( $d$ ) табл. 50 численных значений параметров. Эти таблицы перевычислены заново. Поправки к коэффициентам Брауна незначительны (не более нескольких сотых долей секунды для  $V, \beta$  и нескольких тысячных — для  $\sin p_L$ ).

3. Вычисление эфемерид производится не по таблицам Брауна, а непосредственно с помощью тригонометрических рядов Брауна для координат. Это позволило увеличить точность эфемерид до  $0'',001$  по  $\alpha$  и до  $0'',01$  по  $\delta$ .

Рекомендация к вычислению эфемериды Луны с учетом этих уточнений принята на VIII съезде МАС в 1952 г. Эфемериды Луны, вычисленная таким путем, приводится с 1960 г. в астрономических ежегодниках, а на 1952—1954 гг. дана в [43].

В работе [50] рассматривается вопрос о существенной перестройке теории Хилла — Брауна.

1. Заново выполняется переход от возмущений в прямоугольных координатах к выражениям для сферических координат (с помощью вычислений на ЭВМ). При этом обнаружены расхождения с результатами Брауна.



2. Используются новые значения параметров (значения  $(e)$  табл. 50), соответствующие системе фундаментальных астрономических постоянных, принятой на XII Генеральной ассамблее МАС в Гамбурге в 1964 г., и современным наблюдательным данным. Исправленные значения  $m$ ,  $n$ ,  $n'$  равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} n &= 17325593,5356 - 10'',38 t_c, \\ n' &= 1295977'',4238 - 0'',04 t_c, \\ m &= 0,08084893679. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.67)$$

3. Даны таблицы поправок к соответствующим коэффициентам в выражениях для  $V$ ,  $\sin p_L$ , приведенных Брауном и в [49]. Поправки даны с точностью  $0'',0001$  в случае  $V$  и  $0'',00001$  в случае  $\sin p_L$ . Приведена исправленная таблица коэффициентов выражения для  $\beta$  и указаны поправки по сравнению с таблицей Брауна [46]. Коэффициенты даны с точностью до  $0'',0001$ . Для средних значений основных аргументов  $D$ ,  $I$ ,  $F$  и для  $\bar{\lambda}$  приняты формулы:

$$\left. \begin{aligned} D &= 350^\circ 44' 14'',95 + 1602961611'',18 T - 5'',17 T^2 + 0'',0068 T^3, \\ I &= 296^\circ 06' 16'',59 + 1717915856'',79 T + 33'',09 T^2 + 0'',0518 T^3, \\ F &= 11^\circ 15' 03'',20 + 1739527290'',54 T - 11'',56 T^2 - 0'',0012 T^3, \\ \bar{\lambda} &= 270^\circ 26' 02'',99 + 1732564379'',31 T - 4'',08 T^2 + 0'',0068 T^3, \end{aligned} \right\} \quad (4.10.68)$$

где время  $T$  измеряется в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток от фундаментальной эпохи 1900, январь 0, 12 ET.

Формулы для средних значений  $\Omega$ ,  $\pi$ ,  $I'$ , на которые переход к эфемеридному времени не влияет, оставлены без изменений по сравнению с теми, которые получаются непосредственно из выписанных в (4.10.57), если пренебречь  $\delta\Omega$ ,  $\delta\pi$ ,  $\delta I'$  и заменить  $t$  и  $t_c$  на  $100 T$  и  $T$  соответственно.

Коэффициенты при  $T$  в выражениях для  $\bar{\lambda}$ ,  $I$ ,  $F$  (точнее, производные по  $T$ ) определяют продолжительность синодического, аномалистического и драконического месяцев соответственно (см. ч. I, гл. 3), в течение которых  $\bar{\lambda}$ ,  $I$  и  $F$  изменяются на  $360^\circ$ . Через эти промежутки времени «средняя» Луна — без учета ее периодических возмущений — возвращается в среднюю точку весеннего равноденствия, в перигей своей орбиты и в восходящий узел своей орбиты на эклиптике соответственно.

Продолжительность сидерического месяца определяется принятым значением среднего движения  $n$  (см. (4.10.67)).

Уточненные по сравнению с (4.10.52) значения вековых движений перигея и восходящего узла лунной орбиты в основной

проблеме движения Луны следующие:

$$\pi_t = 146426'',97490, \quad \Omega_t = -69672'',03245. \quad (4.10.69)$$

Сравнение теории движения Луны, полученной после всех уточнений, с наблюдательными данными, а также с результатами численного интегрирования показывает [49], [50], что с принятой точностью эта теория учитывает все гравитационные эффекты. Расхождения между эфемеридой Луны, вычисляемой на основании такой теории, и точными наблюдениями служат сейчас для определения разности между всемирным и эфемеридным временем (см. ч. I, § 3.05).

## ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ

Первая теория движения Юпитера и Сатурна, основанная на вычислении возмущений по дифференциальным уравнениям движения, принадлежит Эйлеру (1748).

Фундаментальные теории движения всех больших планет (кроме Плутона), мало уступающие по точности современным теориям, были созданы Леверье [52].

Леверье опирался на дифференциальные уравнения вида (4.3.15) для оскулирующих элементов. С помощью метода последовательных приближений он получил решение уравнений с точностью до членов второго и частично третьего порядков относительно возмущающих масс. Сначала он построил формулы для возмущений оскулирующих элементов, а затем составил соответствующие выражения для долгот, широт и радиусов-векторов планет. Значения постоянных интегрирования (элементов исходной эллиптической орбиты) Леверье находил с помощью сравнения своих теорий с данными всех имеющихся наблюдений, применяя методы улучшения орбит (см. ч. III, гл. 3).

Теории Леверье использовались с 1880 до 1901 г. для составления эфемерид планет во всех астрономических ежегодниках. Во французском астрономическом ежегоднике теории Леверье для внутренних планет (Меркурия, Венеры, Земли и Марса) используются до сих пор. Что касается внешних планет (Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна), то после 1915 г. французский ежегодник перешел на теории Гайо, построенные по методике Леверье, но с более точными значениями масс планет и постоянных интегрирования.

В 1895—1898 гг. теории движения внутренних планет (Меркурия, Венеры, Земли, Марса), а также Урана и Нептуна были опубликованы Ньюкомом [56]—[58]. Ньюком использовал метод Лапласа (см. § 7.04), внося в него ряд изменений.

С 1901 г. все астрономические ежегодники, кроме французского, переходят на теории Ньюкома движения планет. В случае Меркурия, Венеры, Земли эти теории используются в ежегод-

никах до настоящего времени. В случае Марса к 1912 г. обнаружилось, что расхождения между наблюдаемыми геоцентрическими положениями планеты в оппозиции и вычисляемыми по теории Ньюкома достигают  $4''$ . На основании сравнения теории и наблюдений Росс получил в 1917 г. новые значения элементов исходной орбиты и вывел эмпирические поправки к их вековым движениям. С тех пор и по настоящее время астрономические ежегодники основывают эфемериду Марса на теории движения Ньюкома с поправками Росса. Ввиду присутствия эмпирических вековых поправок эта теория не является чисто гравитационной. Расхождения теории с наблюдениями остаются все же заметными: до  $2''$  по долготе и до  $0'',1$  по широте.

Теории Ньюкома не являются строго обоснованными, так как в их основе лежит не закон всемирного притяжения Ньютона, а закон силы, обратно пропорциональной величине  $r^{2+\delta}$ , где  $\delta = 0,0000001612$ . При таком законе теоретическое вековое движение перигелиев орбит планет увеличивается дополнительно на  $\frac{1}{2} \delta \cdot n$ , где  $n$  — среднее движение планеты.

Расхождения теорий Ньюкома и наблюдений для Меркурия, Венеры, Солнца составляют в настоящее время около  $0'',1$  по долготе и по широте.

Клеменс построил с помощью метода Ганзена новую теорию движения Марса, опубликовав первую часть в 1949 г. и вторую часть в 1961 г. [65].

Был выполнен ряд работ по уточнению теорий Ньюкома. Морган и Скотт вывели [130] по данным большого ряда наблюдений Солнца поправки к начальным значениям элементов в теории движения Земли. Клеменс сравнил теорию Ньюкома для Меркурия с наблюдениями планеты в 1765—1937 гг., что позволило уточнить постоянные интегрирования [131]. Данком уточнил [132] постоянные в теории движения Венеры на основании данных наблюдений в 1750—1949 гг. Клеменс и Данком [133] сравнили теорию Ньюкома для Земли с данными численного интегрирования уравнений движения Земли на период 1920—2000 гг. Сравнение показало ошибки теории Ньюкома в представлении широты.

Поправки к начальным элементам эллиптических орбит планеты обнаруживаются потому, что для уточнения теорий движения привлекаются современные точные наблюдения. Исправление вековых членов в формулах для элементов орбит связано с уточнениями системы масс планет по сравнению с той, которую использовал Ньюком, а также уточнением постоянной прецессии.

В настоящее время появились новые возможности для уточнения параметров гравитационного поля Земли, масс внутрен-

них планет с помощью анализа движения искусственных спутников Земли и космических аппаратов, запускаемых к планетам. Радарная и лазерная техника позволяет получить качественно новые данные наблюдений, включающие непосредственное определение расстояний до планет. Однако переход на новые теории движения планет является сложным мероприятием и его нельзя осуществить немедленно.

Комиссия № 4 (Эфемериды) Международного Астрономического Союза приняла на съезде в Брайтоне в 1970 г. решение, чтобы национальные астрономические ежегодники продолжали до 1978 г. публиковать эфемериды планет, основывающиеся на прежних теориях. Это аргументируется следующими обстоятельствами.

1. Новая система планетных масс должна быть принята одновременно с новыми значениями постоянных прецессии и нутации и должна быть приурочена к выпуску нового фундаментального звездного каталога. Это необходимо для того, чтобы планетные эфемериды строились на единой системе отсчета, общей для видимых положений планет и звезд.

Теории Ньюкома обладают тем важным преимуществом, что основывающиеся на них эфемериды представляют собой однородный материал, позволяющий связать различные наблюдения в единую систему.

2. Уточнение геоцентрических эфемерид Марса и Венеры следует отложить до построения новой теории движения Земли.

3. Формула для нутации должна быть уточнена с учетом более реальной модели Земли и в соответствии с новыми данными о приливных факторах.

4. Выпуск нового фундаментального каталога звезд требует значительного времени. Его публикация будет осуществлена не ранее 1978 г., после чего в конце 1978 г. будет опубликован международный «Астрономический Ежегодник» с новыми эфемеридами на 1980 г.

Имеются основания полагать [134], что новая теория Клеменса для Марса позволит уменьшить расхождения между эфемеридой и наблюдениями Марса до  $0'',02$  —  $0'',03$  и по долготе и по широте. Определение постоянных теории Клеменса уже почти закончено, но на публикацию окончательных результатов потребуется ещё некоторое время.

Новые теории Меркурия, Венеры и Земли, опирающиеся на новую систему планетных масс, позволяют также значительно уменьшить расхождения между эфемеридами и наблюдениями.

Ситуация в отношении внешних планет следующая.

В 1890 и в 1898 гг. Хиллом опубликована [59], [60] теория движения Юпитера и Сатурна, построенная с помощью метода

Ганзена (см. § 7.02). В 1955 и в 1964 гг. опубликована теория движения Плутона, построенная Ш. Г. Шараф [61], [62].

Эфемериды Юпитера и Сатурна в астрономических ежегодниках (кроме французского) основывались с 1901 до 1960 г. на теориях Хилла, а эфемериды Урана и Нептуна — на теориях Ньюкома.

После 1960 г. эфемериды всех пяти внешних планет (включая Плутон) в ежегодниках вычисляются по таблицам их прямоугольных координат, полученных Эккертом, Брауэром и Клеменсом с помощью численного интегрирования [64].

В Морской обсерватории США была проведена большая работа по обработке всех имеющихся наблюдений внешних планет и по соответствующему уточнению их масс и элементов орбит, служащих исходными при построении их теорий движения [135], [136]. Выявлены расхождения между эфемеридами и наблюдениями, достигающие около 1". Подробнее об этом см. ниже в § 11.02.

### § 11.01. Внутренние планеты

Важное значение в теории движения планет имеют так называемые средние элементы эллиптической орбиты, получающиеся, если принять во внимание только их вековые возмущения. В теориях Ньюкома для средних элементов  $L$  (средняя долгота в орбите),  $\pi$  (долгота перигелия),  $\Omega$  (долгота восходящего узла),  $i$  (наклон к эклиптике),  $e$  (эксцентриситет),  $n$  (среднее движение, получаемое из наблюдений, т. е. включающее вековое возмущение средней долготы),  $a_1$  (большая полуось, находимая по  $n$  на основании третьего закона Кеплера),  $a$  (большая полуось, освобожденная от влияния упомянутых вековых возмущений) приняты следующие выражения [120]:

Меркурий

$$\left. \begin{aligned} L &= 178^\circ 10' 44'',68 + 538106654'',80 T + 1'',084 T^2, \\ \pi &= 75^\circ 53' 58'',91 + 5599'',76 T + 1'',061 T^2, \\ \Omega &= 47^\circ 08' 45'',00 + 4266'',75 T + 0'',626 T^2, \\ i &= 7^\circ 00' 10'',37 + 6'',699 T - 0'',066 T^2, \\ e &= 0,20561421 + 0,00002046 T - 0,000000030 T^2, \\ n &= 14732'',4197380 - 0'',000001355 T, \\ a &= 0,38709860, \quad a_1 = 0,38709867. \end{aligned} \right\} (4.11.01)$$

## Венера

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 342^\circ 46' 01'',39 + 210669162'',88 T + 1'',1148 T^2, \\
 \pi &= 130^\circ 09' 49'',8 + 5068'',99 T - 3'',515 T^2, \\
 \Omega &= 75^\circ 46' 46'',73 + 3239'',46 T + 1'',476 T^2, \\
 i &= 3^\circ 23' 37'',07 + 3'',621 T - 0'',0035 T^2, \\
 e &= 0,00682069 - 0,00004774 T + 0,000000091 T^2, \\
 n &= 5767'',6697692 + 0'',0000002628 T, \\
 a &= 0,72333162, \quad a_1 = 0,72333222.
 \end{aligned} \right\} (4.11.02)$$

## Земля

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 99^\circ 41' 48'',04 + 129602768'',13 T + 1'',089 T^2, \\
 \pi &= 101^\circ 13' 15'',0 + 6189'',03 T + 1'',63 T^2 + 0'',012 T^3, \\
 e &= 0,01675104 - 0,00004180 T - 0,000000126 T^2, \\
 n &= 3548'',1928323 - 0'',000001103 T, \\
 a &= 1,00000023, \quad a_1 = 1,00000030.
 \end{aligned} \right\} (4.11.03)$$

## Марс (с уточнениями Росса)

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 293^\circ 44' 51'',46 + 68910103'',83 T + 1'',1184 T^2, \\
 \pi &= 334^\circ 13' 05'',53 + 6626'',73 T + 0'',4675 T^2 - 0'',0043 T^3, \\
 \Omega &= 48^\circ 47' 11'',19 + 2775'',57 T - 0'',005 T^2 - 0'',0192 T^3, \\
 i &= 1^\circ 51' 01'',20 - 2'',430 T + 0'',0454 T^2, \\
 e &= 0,09331290 + 0,000092064 T - 0,000000077 T^2, \\
 n &= 1886'',5186207 + 0'',000000463 T, \\
 a &= 1,52368840, \quad a_1 = 1,52369146.
 \end{aligned} \right\} (4.11.04)$$

В этих формулах  $T$  — время, отсчитываемое в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток от фундаментальной эпохи 1900, январь, 12<sup>h</sup> ET.

Долготы  $L$ ,  $\pi$ ,  $\Omega$  отнесены к мгновенной эклиптике и средней точке равноденствия текущего момента, так что выписанные формулы для этих долгот включают изменения за счет прецессии. Для Земли всегда  $i = 0$ .

Если ограничиться упрощенной формой теории Ньюкома, то для вычисления периодических возмущений могут быть применены формулы, выведенные в [68]. Эти формулы позволяют вычислять небесные координаты планет с точностью до  $0',1$ .

Гелиоцентрические экваториальные координаты планет в прямоугольной системе  $XYZ$  определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} g &= L - \pi, \\ E &= g + e \sin E, \\ r_0 \sin v &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad l = v + \pi + \delta l, \\ r_0 \cos v &= a (\cos E - e), \quad \lambda = l + R, \\ r_0 &= a (1 - e \cos E), \quad \sin \beta = \sin i \sin u, \\ r &= r_0 + \delta r, \quad u = l - \Omega, \\ x &= r \cos \lambda \cos \beta, \\ y &= r (\sin \lambda \cos \beta \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon), \\ z &= r (\sin \lambda \cos \beta \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon). \end{aligned} \right\} (4.11.05)$$

Здесь  $L$  означает среднюю долготу и  $l$  — истинную долготу планеты в орбите,  $g$  — среднюю аномалию планеты,  $u$  — аргумент широты,  $\beta$  — эклиптическую широту,  $\lambda$  — эклиптическую истинную долготу,  $\delta l$  — периодические возмущения в долготе,  $\delta r$  — периодические возмущения в радиусе-векторе,  $a$ ,  $e$  — большую полуось и эксцентриситет орбиты планеты,  $R$  — приведение к эклиптике.

Периодическими возмущениями  $\delta \beta$  в широте всюду пренебрегаем.

Меркурий. Суммы периодических возмущений в долготу  $\delta l$  и широте  $\delta \beta$  не превосходят соответственно  $30''$  и  $1''$ . Для получения  $\lambda$  и  $\beta$  с точностью до  $1'$  достаточно воспользоваться средними элементами орбиты по Ньюкому. Прямоугольные экваториальные координаты Меркурия с точностью до  $\pm 2 \cdot 10^{-5}$  а. е. могут быть получены с помощью этих средних элементов и следующих формул для  $\delta l$ ,  $R$  ( $\delta r = \delta \beta = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \delta l &= -1'',6 \sin(5g_2 - 2g_1) + 7'',2 \cos(5g_2 - 2g_1) + \\ &\quad + 2,0 \sin(2g_5 - g_1) + 2,6 \cos(2g_5 - g_1) - \\ &\quad - 3,5 \cos(2g_2 - g_1) - 2,0 \cos(2g_2 - 2g_1) + \\ &\quad \quad \quad + 2,8 \cos(5g_2 - 3g_1), \\ R &= -772'',6 \sin 2u + 1'',4 \sin 4u, \\ g_2 &= 212^\circ,5 + 58517^\circ,66 T, \\ g_5 &= 225^\circ,4 + 3034^\circ,74 T. \end{aligned} \right\} (4.11.06)$$

При вычислении эфемерид с точностью до  $\pm 0',1$  возмущениями широты  $\delta \beta$  можно также пренебречь, а в долготу учесть возмущения  $\delta l$ , заданные табл. 54.



Таблица 54

Аргумент	cos	sin	Аргумент	cos	sin
$g_2 - g_1$	0",579	0",413	$5g_2$	0",366	0",000
$g_2$	0,238		$g_3 - g_1$		0,196
$2g_2 - 3g_1$	-0,522	0,178	$2g_3 - 2g_1$	-0,199	
$2g_2 - 2g_1$	-1,988	0,679	$2g_3 - g_1$	-0,347	-0,276
$2g_2 - g_1$	-3,514	1,231	$4g_3 - 2g_1$	-0,337	
$2g_2$	-0,684	0,252	$4g_3 - g_1$	-0,669	0,453
$3g_2 - 3g_1$		0,416	$g_5 - 2g_1$	-0,179	
$3g_2 - 2g_1$	-0,339	1,284	$g_5 - g_1$	-0,697	
$3g_2 - g_1$		-0,532	$g_5$	-0,315	-0,480
$4g_2 - 3g_1$	-0,194	-0,221	$2g_5 - 3g_1$	0,202	
$4g_2 - 2g_1$	-0,334	-0,351	$2g_5 - 2g_1$	0,749	0,564
$5g_2 - 5g_1$	0,182		$2g_5 - g_1$	2,615	1,971
$5g_2 - 4g_1$	0,674		$2g_5$	0,424	0,264
$5g_2 - 3g_1$	2,766	-0,494	$3g_5 - g_1$	0,318	
$5g_2 - 2g_1$	7,190	-1,557	$2g_5 - g_1$	-0,191	-0,329
$5g_2 - g_1$	1,437	-0,313			

Венера. Суммы периодических возмущений в долготе  $\delta l$  и широте  $\delta\beta$  не превосходят соответственно  $30''$  и  $2''$ . Для вычисления долготы  $\lambda$  и широты  $\beta$  с точностью до  $1'$  можно воспользоваться средними элементами орбиты по Ньюкому.

Прямоугольные экваториальные координаты Венеры с точностью до  $\pm 2 \cdot 10^{-5}$  а. е. можно вычислить при помощи этих средних элементов и следующих формул для  $\delta l$ ,  $\delta r$  ( $\delta\beta = 0$ ):

$$\begin{aligned} \delta l = & -2'',4 \cos(g_3 - g_2) + 4'',3 \sin(g_3 - g_2) - \\ & - 9,6 \cos(2g_3 - 2g_2) + 5,9 \sin(2g_3 - 2g_2) + \\ & + 7,1 \cos(3g_3 - 3g_2) - 2,5 \cos(3g_3 - 2g_2) + 2,4 \sin(3g_3 - 2g_2) - \\ & - 1,5 \cos(5g_3 - 4g_2) - 2,6 \cos(g_5 - g_2) - 1,4 \sin(g_5 - g_2) - \\ & - 1,6 \sin g_5 + 2,8 \sin(237^\circ,24 + 150^\circ,27 T), \quad (4.11.07) \end{aligned}$$

$$10^7 \delta \lg r = 51 \cos(2g_3 - 2g_2) + 83 \sin(2g_3 - g_2) - 83 \sin(3g_3 - 3g_2), \quad (4.11.08)$$

$$R = -181'',0 \sin 2u,$$

$$g_3 = 358^\circ,63 + 35999^\circ,36 T,$$

$$g_5 = 225^\circ,43 + 3034^\circ,89 T,$$

При вычислении эфемериды с точностью до  $0',1$  необходимо учесть возмущения в долготе  $\delta l$ , приведенные в табл. 55.

Т а б л и ц а 55

Аргумент	cos	sin	Аргумент	cos	sin
$g_1 - 2g_2$	0",250	0,000	$6g_3 - 6g_2$	0",000	0",142
$2g_1 - 5g_2$	-0,353		$6g_3 - 5g_2$	0,147	0,142
$g_3 - g_2$	-2,378	4,272	$6g_3 - 4g_2$	-0,169	
$2g_3 - 2g_2$	-9,573	5,930	$8g_3 - 5g_2$	-0,231	
$3g_3 - 3g_2$	7,121	-0,319	$g_5 - g_2$	-2,617	-1,397
$3g_3 - 2g_2$	-2,475	2,398	$g_5$		-1,562
$4g_3 - 4g_2$	0,926	0,462	$2g_5 - 2g_2$	-0,730	0,508
$4g_3 - 3g_2$	-0,654	0,171	$2g_5 - g_2$	-0,474	
$5g_3 - 5g_2$	0,180	0,276	$3g_4 - 2g_2$	-0,503	-0,447
$5g_3 - 4g_2$	-1,529	-0,379	$3g_4 - g_2$	-0,648	-1,020
$5g_3 - 3g_2$	-1,077	0,954	$g_6$		-0,208

Земля. Суммы периодических возмущений в долготе и широте не превосходят соответственно 30" и 1",5. Эфемериду с точностью до 1' можно вычислить на основании выражений для средних элементов орбиты по Ньюкому, приведенных выше.

Прямоугольные экваториальные координаты барицентра системы «Земля + Луна» с точностью до  $\pm 2 \cdot 10^{-5}$  а. е. вычисляются по средним элементам и следующим формулам для  $\delta l$ ,  $\delta r$ :

$$\begin{aligned} \delta l = & 2",3 \cos(g_2 - g_3) + 4",2 \sin(g_2 - g_3) + \\ & - 4,7 \cos(2g_2 - 2g_3) - 2,9 \sin(2g_2 - 2g_3) + \\ & + 1,8 \cos(2g_2 - 3g_3) + 1,7 \sin(2g_2 - 3g_3) - 0,7 \cos(3g_2 - 3g_3) + \\ & + 1,5 \cos(3g_2 - 4g_3) + 0,8 \cos(3g_2 - 5g_3) + 0,7 \sin(3g_2 - 5g_3) + \\ & + 2,0 \cos(2g_4 - 2g_3) - 1,7 \cos(2g_4 - g_3) - 0,6 \sin(2g_4 - g_3) - \\ & - 7,2 \cos(g_5 - g_3) - 2,6 \sin g_5 + 1,5 \sin(2g_5 - g_3) + \\ & - 1,9 \sin(57^\circ,24 + 150^\circ,27 T) + 6,4 \sin(231^\circ,19 + 20^\circ,20 T), \quad (4.11.09) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^7 \delta \lg r = & - 21 \cos(g_2 - g_3) - 36 \cos(2g_2 - 2g_3) - 58 \sin(2g_2 - 2g_3) - \\ & - 20 \sin(2g_4 - 2g_3) + 71 \sin(g_5 - g_3) + 40 \cos(2g_5 - 2g_3), \quad (4.11.10) \end{aligned}$$

$$g_2 = 212^\circ,44 + 58517^\circ,49 T,$$

$$g_4 = 319,58 + 19139,98 T,$$

$$g_5 = 225,28 + 3034,58 T,$$

При вычислении эфемериды Земли с точностью до 0',1 необходимо сохранить в долготе члены долгого периода

$$1",882 \sin(57^\circ,24 + 150^\circ,27 T) + 6",400 \sin(231^\circ,19 + 20^\circ,20 T)$$

и учесть периодические возмущения долготы, приведенные в табл. 56.

Таблица 56

Аргумент	cos	sin	Аргумент	cos	sin
$g_2 - g_3$	2",353	4",228	$4g_4 - 3g_3$		0",483
$2g_2 - 2g_3$	-4,702	-2,903	$4g_4 - 2g_3$	0",526	
$2g_2 - 3g_3$	1,795	1,737	$g_5 - g_3$	-7,208	
$3g_2 - 3g_3$	-0,666		$g_5$		-2,582
$3g_2 - 4g_3$	1,508	0,397	$2g_5 - 2g_3$		2,728
$3g_2 - 5g_3$	0,763	0,684	$2g_5 - g_3$	-0,537	1,518
$2g_4 - 2g_3$	1,963	-0,567	$3g_5 - 2g_3$		0,551
$2g_4 - g_3$	-1,659	-0,617	$g_5 - g_3$		0,412

Марс. Суммы периодических возмущений в долготе и широте Марса не превосходят соответственно 132" и 2".

При вычислении эфемериды Марса с точностью до 1' в долготе следует учесть следующие периодические возмущения:

$$\begin{aligned} \delta l = & + 7",002 \cos(g_3 - g_4) + 13,082 \cos(g_3 - 2g_4) - \\ & - 6,848 \cos(2g_3 - 3g_4) + 16,667 \cos(g_5 - g_4) + 19",146 \sin(g_5 - g_4) - \\ & - 15,691 \cos(2g_5 - 2g_4) - 21,637 \cos(2g_5 - g_4) + \\ & + 52,490 \sin(47^\circ,48 + 19^\circ,771 T). \quad (4.11.11) \end{aligned}$$

Прямоугольные экваториальные координаты Марса с точностью до  $\pm 2 \cdot 10^{-5}$  а. е. можно вычислить с помощью средних элементов Ньюкома и следующих формул для  $\delta l$ ,  $\delta r$ :

$$\begin{aligned} \delta l = & + 0",6 \sin(g_2 - 2g_4) + 3",4 \cos(g_2 - 3g_4) - 5",4 \sin(g_2 - 3g_4) + \\ & + 0",7 \cos g_3 + 7",0 \cos(g_3 - g_4) - 4",9 \sin(g_3 - g_4) + \\ & + 13",1 \cos(g_3 - 2g_4) - 4",9 \sin(g_3 - 2g_4) + 1",4 \cos(g_3 - 3g_4) - \\ & - 0",6 \sin(g_3 - 3g_4) - 6",8 \cos(2g_3 - 3g_4) - \\ & - 2",7 \sin(2g_3 - 3g_4) - 4",4 \cos(2g_3 - 4g_4) - \\ & - 2",1 \sin(2g_3 - 4g_4) + 2",6 \sin(3g_3 - 5g_4) + \\ & + 1",0 \sin(3g_3 - 6g_4) + 0",9 \cos(4g_3 - 7g_4) - \\ & - 0",6 \cos(5g_3 - 9g_4) - 1",5 \cos(8g_3 - 15g_4) + \\ & + 2",2 \cos(g_5 - 2g_4) - 2",3 \sin(g_5 - 2g_4) + \\ & + 16",7 \cos(g_5 - g_4) + 19",1 \sin(g_5 - g_4) + 3",6 \cos g_5 - \\ & - 1",1 \sin g_5 - 2",1 \cos(2g_5 - 3g_4) - 15",7 \cos(2g_5 - 2g_4) - \\ & - 3",3 \sin(2g_5 - 2g_4) - 21",6 \cos(2g_5 - g_4) - 3",2 \sin(2g_5 - g_4) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1'',4 \cos 2g_5 - 1'',3 \cos (3g_5 - 3g_4) - 1'',7 \cos (3g_5 - 2g_4) - \\
& \quad - 2'',0 \sin (3g_5 - 2g_4) - 2'',8 \cos (3g_5 - g_4) - \\
& - 1'',5 \sin (3g_5 - g_4) + 1'',1 \cos (g_6 - g_4) - 0'',8 \sin (g_6 - g_4) - \\
& - 0'',8 \sin g_6 + 0'',5 \cos (2g_6 - 2g_4) + 1'',5 \cos (2g_6 - g_4) + \\
& + 1'',0 \sin (2g_6 - g_4) + 52'',5 \sin (47^\circ,48 + 197^\circ,71 T) + \\
& \quad + 0'',6 \sin (212^\circ,87 + 1190^\circ,51 T), \quad (4.11.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^7 \delta l g r = & + 39 \cos (g_3 - g_4) + 57 \sin (g_3 - g_4) - 11 \cos (g_3 - 2g_4) - \\
& - 26 \sin (g_3 - 2g_4) - 15 \sin (g_3 - 3g_4) + 23 \cos (2g_3 - 3g_4) - \\
& - 60 \sin (2g_3 - 3g_4) + 18 \sin (2g_3 - 4g_4) - 20 \cos (3g_3 - 5g_4) + \\
& + 28 \cos (g_5 - 2g_4) - 27 \sin (g_5 - 2g_4) + 174 \cos (g_5 - g_4) + \\
& - 152 \sin (g_5 - g_4) + 13 \sin g_5 + 30 \sin (2g_5 - 3g_4) - \\
& - 46 \cos (2g_5 - 2g_4) + 217 \sin (2g_5 - 2g_4) - 24 \cos (2g_5 - g_4) + \\
& + 164 \sin (2g_5 - g_4) - 15 \sin 2g_5 + 21 \sin (3g_5 - 3g_4) - \\
& - 26 \cos (3g_5 - 2g_4) + 22 \sin (3g_5 - 2g_4) + 17 \sin (3g_5 - g_4) - \\
& \quad - 11 \sin (g_6 - g_4) - 14 \sin (2g_6 - g_4), \quad (4.11.13)
\end{aligned}$$

$$g_2 = 212^\circ,33 + 58517^\circ,37 T,$$

$$g_3 = 358^\circ,42 + 35998^\circ,93 T,$$

$$g_5 = 225^\circ,21 + 3034^\circ,46 T,$$

$$g_6 = 175^\circ,53 + 1221^\circ,67 T.$$

Во всех формулах, приведенных выше,  $T$  означает время, отсчитываемое от фундаментальной эпохи 1900, янв. 0, 12<sup>h</sup> ET в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток.

## § 11.02. Внешние планеты

1. Имеются следующие выражения для средних элементов орбит внешних планет [137], полученные на основании анализа большого ряда наблюдательных данных и включающие эмпирические поправки.

Ю п и т е р

$$\left. \begin{aligned}
L &= 238^\circ 02' 57'',32 + 10930687'',148 T + 1'',20486 T^2 - 0,005936 T^3, \\
\pi &= 12^\circ 43' 15'',34 + 5795'',862 T + 3'',80258 T^2 - 0'',91236 T^3, \\
\Omega &= 99^\circ 26' 36'',19 + 3637'',908 T + 1'',2680 T^2 - 0'',03064 T^3, \\
e &= 0,04833475 + 0,000164180 T - 0,0000004676 T^2 - \\
& \quad - 0,0000000017 T^3, \\
i &= 1^\circ 18' 31'',45 - 20'',506 T + 0'',014 T^2, \\
a &= 5,202561.
\end{aligned} \right\}$$

(4.11.14)

## С а т у р н

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 266^{\circ} 33' 51'',76 + 4404635'',5810 T + 1'',16835 T^2 - 0'',021 T^3, \\
 \pi &= 91^{\circ} 05' 53'',38 + 7050'',297 T + 2'',9749 T^2 + 0'',0166 T^3, \\
 \Omega &= 112^{\circ} 47' 25'',40 + 3143'',5025 T - 0'',54785 T^2 - 0'',0191 T^3, \\
 e &= 0,05589232 - 0,00034550 T - 0,000000728 T^2 + \\
 &\quad + 0,0000000074 T^3, \\
 i &= 2^{\circ} 29' 33'',07'' - 14'',108 T - 0'',05576 T^2 + 0'',00016 T^3, \\
 a &= 9,554747.
 \end{aligned} \right\} (4.11.15)$$

## У р а н

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 244^{\circ} 11' 50'',89 + 1547508'',765 T + 1'',13774 T^2 - 0,002176 T^3, \\
 \pi &= 171^{\circ} 32' 55'',14 + 5343'',958 T + 0'',8539 T^2 - 0'',00218 T^3, \\
 \Omega &= 73^{\circ} 28' 37'',55 + 1795'',204 T + 4'',722 T^2, \\
 e &= 0,0463444 - 0,00002658 T + 0,000000077 T^2, \\
 i &= 0^{\circ} 46' 20'',87 + 2'',251 T + 0'',1422 T^2, \\
 a &= 19,21814.
 \end{aligned} \right\} (4.11.16)$$

## Н е п т у н

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 84^{\circ} 27' 28'',78 + 791589'',291 T + 1'',15374 T^2 - 0'',2176 T^3, \\
 \pi &= 46^{\circ} 43' 38'',37 + 5128'',468 T + 1'',40694 T^2 - 0'',002176 T^3, \\
 \Omega &= 130^{\circ} 40' 52'',89 + 3956'',166 T + 0'',89952 T^2 - 0'',016984 T^3, \\
 e &= 0,00899704 + 0,000006330 T - 0,000000002 T^2, \\
 i &= 1^{\circ} 46' 45'',27 - 34'',357 T - 0'',0328 T^2, \\
 a &= 30,10957.
 \end{aligned} \right\} (4.11.17)$$

Аргумент  $T$  тот же, что и в аналогичных формулах для средних элементов внутренних планет. В выражения для угловых переменных также включена прецессия.

Для Плутона в качестве средних принимаются постоянные элементы

$$\left. \begin{aligned}
 \tau &= 1989, \text{ октябрь, } 0,0344, & e &= 0,2486438, \\
 \pi &= 113^{\circ} 31' 17'',72, & i &= 17^{\circ} 8' 48'',40, \\
 \Omega &= 108^{\circ} 57' 16'',18, & a &= 39,517738,
 \end{aligned} \right\} (4.11.18)$$

где  $\tau$  — момент прохождения через перигелий орбиты. Угловые элементы отнесены к фундаментальной эпохе 1900, январь 0,5 (юлианская дата JD 2415020,0).

2. Значения элементов орбит на юлианскую дату 2430000,5, которые соответствуют начальным данным для численного интегрирования уравнений движения внешних планет, выполненного Эккертом и др. [64], следующие (угловые элементы отнесены к эклиптике и равноденствию эпохи 1950,0):

Юпитер

$$\left. \begin{aligned} g &= 29^\circ 5' 0'',096, & i &= 1^\circ 18' 27'',115, \\ \omega &= 274^\circ 35' 34'',956, & e &= 0,490137305, \\ \Omega &= 99^\circ 57' 2'',186, & a &= 5,2043041446. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.19)$$

Сатурн

$$\left. \begin{aligned} g &= 318^\circ 29' 31'',276, & i &= 2^\circ 29' 13'',115, \\ \omega &= 336^\circ 27' 3'',205, & e &= 0,0562631702, \\ \Omega &= 113^\circ 14' 42'',242, & a &= 9,5836692762. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.20)$$

Уран

$$\left. \begin{aligned} g &= 256^\circ 41' 33'',515, & i &= 0^\circ 46' 23'',706, \\ \omega &= 89^\circ 14' 38'',424, & e &= 0,0447360290, \\ \Omega &= 73^\circ 48' 17'',521, & a &= 19,3160573025. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.21)$$

Нептун

$$\left. \begin{aligned} g &= 133^\circ 46' 57'',978, & i &= 1^\circ 46' 33'',407, \\ \omega &= 270^\circ 0' 43'',841, & e &= 0,0118545587, \\ \Omega &= 131^\circ 16' 44'',491, & a &= 29,9867909509. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.22)$$

Плутон

$$\left. \begin{aligned} g &= 289^\circ 16' 47'',700, & i &= 17^\circ 7' 21'',357, \\ \omega &= 113^\circ 20' 31'',719, & e &= 0,2459387823, \\ \Omega &= 109^\circ 36' 24'',672, & a &= 39,5181761979. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.23)$$

В этих формулах  $g$  — средняя аномалия и  $\omega$  — угловое расстояние перигелия от узла.

Таблицы Эккерта и др. были сравнены с наблюдениями Юпитера и Сатурна за 1913—1968 гг., Урана — за 1830—1968 гг., Нептуна — за 1846—1968 гг. [138], [139]. Средние ошибки начальных элементов, а также средней долготы в орбите  $\Delta L$  и средней широты  $\Delta B$  оказались следующими (указаны также отклонения положений планет в км, соответствующие ошибкам  $\Delta a$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta B$ ):

## Юпитер

$$\begin{array}{ll}
 \Delta g = \pm 0'',240, & \Delta i = \pm 0'',023, \\
 \Delta \omega = \pm 0'',996, & \Delta e = \pm 0,0000000538, \\
 \Delta \Omega = \pm 0'',967, & \Delta a = \pm 0,0000000327 \text{ а. е. } (\pm 5 \text{ км}), \\
 \Delta L = \pm 0,016 (\pm 60 \text{ км}), & \Delta B = \pm 0,032 (\pm 120 \text{ км}).
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta g \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \\ \Delta L \end{array}} \right\} (4.11.24)$$

## Сатурн

$$\begin{array}{ll}
 \Delta g = \pm 0'',231, & \Delta i = \pm 0'',025, \\
 \Delta \omega = \pm 0'',625, & \Delta e = \pm 0,0000000664, \\
 \Delta \Omega = \pm 0'',582, & \Delta a = \pm 0,0000001812 \text{ а. е. } (\pm 27 \text{ км}), \\
 \Delta L = \pm 0'',018 (\pm 125 \text{ км}), & \Delta B = \pm 0'',032 (\pm 222 \text{ км}).
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta g \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \\ \Delta L \end{array}} \right\} (4.11.25)$$

## Уран

$$\begin{array}{ll}
 \Delta g = \pm 0'',409, & \Delta i = \pm 0'',036, \\
 \Delta \omega = \pm 2'',903, & \Delta e = \pm 0,0000000979, \\
 \Delta \Omega = \pm 2'',875, & \Delta a = \pm 0,0000006719 (\pm 100 \text{ км}), \\
 \Delta L = \pm 0'',033 (\pm 462 \text{ км}), & \Delta B = \pm 0'',047 (\pm 659 \text{ км}).
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta g \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \\ \Delta L \end{array}} \right\} (4.11.26)$$

## Нептун

$$\begin{array}{ll}
 \Delta g = \pm 2'',289, & \Delta i = \pm 0'',021, \\
 \Delta \omega = \pm 2'',422, & \Delta e = \pm 0,0000001216, \\
 \Delta \Omega = \pm 0'',795, & \Delta a = \pm 0,0000007826 (\pm 565 \text{ км}), \\
 \Delta L = \pm 0'',059 (\pm 1282 \text{ км}), & \Delta B = \pm 0'',003 (\pm 65 \text{ км}).
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta g \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \\ \Delta L \end{array}} \right\} (4.11.27)$$

## Плутон

$$\begin{array}{ll}
 \Delta g = \pm 59'',941, & \Delta i = \pm 0'',516, \\
 \Delta \omega = \pm 59'',478, & \Delta e = \pm 0,0000199257, \\
 \Delta \Omega = \pm 0'',906, & \Delta a = \pm 0,0040007226 (\pm 598 \text{ 108 км}), \\
 \Delta L = \pm 7'',486 (\pm 214 \text{ 400 км}), & \Delta B = \pm 1'',107 (\pm 31 \text{ 700 км}).
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta g \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \\ \Delta L \end{array}} \right\} (4.11.28)$$

Расхождения между эфемеридами и наблюдениями Нептуна систематические и составляли к 1968 г. около  $4''$ . Расхождения для остальных внешних планет достигают  $1'',5$ . На основании этого сравнения теории и наблюдений Данкомом и др. (см. [134]) получена новая система значений масс внешних планет и по-

строены новые таблицы движения и эфемериды (Данком называет их поисковыми).

Новые массы (обратные значения)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Юпитер } 1\,047,355, \quad \text{Нептун } 19\,349 \pm 28, \\ \text{Сатурн } 3\,498,7 \pm 0,2, \quad \text{Плутон } 3\,000\,000 \pm 500\,000. \\ \text{Уран } 22\,692 \pm 33, \end{array} \right\} (4.11.29)$$

Элементы орбит на эпоху JD 2430000,5, лежащие в основе этих «поисковых» эфемерид, а также их ошибки и средние ошибки  $\Delta L$ ,  $\Delta B$  вместе с соответствующими отклонениями положений в км, следующие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Юпитер} \\ g = 29^\circ 4' 57'',592 \quad i = 1^\circ 18' 26'',726 \\ \quad \pm 0'',189, \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',018, \\ \omega = 274^\circ 35' 26'',412 \quad e = 0,0490143422 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0,0000000423, \\ \Omega = 99^\circ 57' 13'',050 \quad a = 5,2043055494 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0,0000000257 (\pm 4 \text{ км}), \\ \Delta L = \pm 0'',013 (\pm 49 \text{ км}), \quad \Delta B = \pm 0'',025 (\pm 94 \text{ км}). \end{array} \right\} (4.11.30)$$

Сатурн

$$\left. \begin{array}{l} g = 318^\circ 29' 32'',032 \quad i = 2^\circ 29' 12'',716 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',192, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',021, \\ \omega = 336^\circ 26' 58'',466 \quad e = 0,0562636509 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',516, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0,0000000548, \\ \Omega = 113^\circ 14' 46'',475 \quad a = 9,5836743386 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',480, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0,0000001496 (\pm 22 \text{ км}), \\ \Delta L = \pm 0'',015 (\pm 104 \text{ км}), \quad \Delta B = \pm 0'',027 (\pm 187 \text{ км}). \end{array} \right\} (4.11.31)$$

Уран

$$\left. \begin{array}{l} g = 256^\circ 41' 41'',245 \quad i = 0^\circ 46' 23'',578 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',357, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0'',031, \\ \omega = 89^\circ 14' 24'',497 \quad e = 0,0447344038 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 2'',535, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0,0000000855, \\ \Omega = 73^\circ 48' 23'',532 \quad a = 19,3161021827 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 2'',510, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \pm 0,0000005886 (\pm 88 \text{ км}), \\ \Delta L = \pm 0,028 (\pm 392 \text{ км}), \quad \Delta B = \pm 0'',041 (\pm 574 \text{ км}). \end{array} \right\} (4.11.32)$$



Нептун

$$\begin{array}{ll}
 g = 133^{\circ} 44' 55'',031 & i = 1^{\circ} 46' 33'',796 \\
 \pm 2'',082, & \pm 0'',019, \\
 \omega = 270^{\circ} 3' 39'',032 & e = 0,0118574023 \\
 \pm 2'',204, & \pm 0,0000001109, \\
 \Omega = 131^{\circ} 16' 38'',320 & a = 29,9871269920 \\
 \pm 0'',723, & \pm 0,0000034442 (\pm 515 \text{ км}), \\
 \Delta L = \pm 0'',053 (\pm 1151 \text{ км}), & \Delta B = \pm 0'',003 (\pm 65 \text{ км}).
 \end{array}$$

(4.11.33)

Плутон

$$\begin{array}{ll}
 g = 289^{\circ} 21' 5'',510 & i = 17^{\circ} 7' 22'',464 \\
 \pm 15'',563, & \pm 0'',134, \\
 \omega = 113^{\circ} 16' 38'',202 & e = 0,2460004277 \\
 \pm 15'',442, & \pm 0,0000051949, \\
 \Omega = 109^{\circ} 36' 23'',321 & a = 39,5326598084 \\
 \pm 0'',235, & \pm 0,0010398701 \\
 \Delta L = \pm 1'',944 (\pm 55\,766 \text{ км}), & (\pm 157\,538 \text{ км}), \\
 & \Delta B = \pm 0'',200 (\pm 5\,728 \text{ км}).
 \end{array}$$

(4.11.34)

Новые таблицы движения внешних планет обнаруживают лучшее согласие с наблюдениями, но все же расхождения остаются, и они достигают около  $1''$  для первых четырех планет для наблюдений в указанные выше периоды. Остается неясной причина большого расхождения эфемериды с наблюдением Нептуна в 1795 г. (составляющего около  $8''$ ). В случае Плутона расхождения гораздо более заметны.

### § 11.03. Полиномиальное представление оскулирующих элементов орбит внешних планет

Приближенные выражения для оскулирующих элементов орбит внешних планет даются в [69] в виде полиномов по целым положительным степеням величины  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\text{JD} - 2439000,5}{1000}.$$

JD означает юлианскую дату, соответствующую данному моменту эфемеридного времени, 2439000,5 JD отвечает календарной дате 1965, авг. 28,0 ET, лежащей в середине интервала

Т а б л и ц а 57

	$E_0 \cdot 10^{-\mu}$	$\mu$	$E_1 \cdot 10^{-\mu}$	$\mu$	$E_2 \cdot 10^{-\mu}$	$\mu$
Ю п и т е р						
$\Omega$	9,9971228	+1	5,8526026	-4	8,3809330	-5
$i$	1,3065898	0	1,4084863	-5	2,3259666	-6
$e$	4,8214465	-2	5,6035467	-5	-6,1529060	-7
$\omega$	-8,6736669	+1	1,0291983	-2	1,0791798	-3
$a$	5,2022448	0	8,1415574	-4	-1,3423825	-4
$T$	3,8299871	+4	9,6409740	-2	8,4590520	-3
$\mu$	3,3104861	-2	-1,9504958	-5	3,2162619	-6
$\Omega$	5,9708000	-5	7,9243872	-4	-1,1028318	-4
$i$	2,6773133	-5	1,0887924	-5	-6,6570452	-6
$e$	-1,3093000	-7	-8,1917619	-5	1,2330581	-5
$\omega$	8,4037740	-2	3,6835043	-2	-1,1107278	-2
$a$	4,6300583	-4	-5,2980909	-4	1,0634678	-4
$T$	8,9052590	-1	4,0286662	-1	1,1383794	-1
$\mu$	-1,1091990	-5	1,2690885	-5	-2,2471905	-6
С а т у р н						
$\Omega$	1,1322723	+2	-9,8621384	-3	7,3792433	-4
$i$	2,4894499	0	-6,0737447	-4	1,3827719	-4
$e$	5,5010095	-2	-1,5768445	-3	2,1192353	-4
$\omega$	-2,3159373	+1	7,7311179	-1	-2,3954780	-2
$a$	9,5549738	0	-2,6142078	-3	1,1823079	-4
$T$	4,2015986	+4	2,7005950	+1	-1,0486151	0
$\mu$	3,3375185	-2	1,4206969	-5	-7,0838820	-7
$\Omega$	2,9041366	-2	-1,5404362	-2	1,9924624	-3
$i$	1,2017440	-3	-3,8974352	-4	6,3687835	-5
$e$	1,2670837	-3	-2,9029529	-4	3,0406136	-5
$\omega$	3,4785001	0	-1,2911143	0	1,3182603	-1
$a$	-3,3410097	-2	7,3610456	-3	-8,0531459	-4
$T$	8,8090919	+1	-3,6198248	+1	3,6759985	0
$\mu$	1,7501589	-4	-3,8417567	-5	4,1924464	-6
У р а н						
$\Omega$	7,3792593	+1	-4,7157638	-2	8,4437073	-3
$i$	7,7211961	-1	-1,2683946	-4	3,9767404	-5
$e$	4,7381701	-2	1,2444339	-4	4,4195098	-5
$\omega$	-2,6553996	+2	2,6783701	0	-4,1491180	-1
$a$	1,9194488	+1	-1,0717839	-3	1,4194056	-3
$T$	3,9262107	+4	2,0462688	+2	-3,1830210	+1
$\mu$	1,1720659	-2	1,3667035	-6	-1,3982915	-6
$\Omega$	1,2972192	-1	-3,9291655	-2	3,7841020	-3
$i$	-3,2789710	-6	6,5986652	-5	-1,1427062	-5
$e$	5,3797195	-3	-1,7974709	-3	1,7248491	-4
$\omega$	-6,4696332	-1	4,4682210	-2	2,6639683	-2
$a$	1,0904281	-1	-3,1012181	-2	2,6308812	-3
$T$	-4,1078603	+1	8,7867100	-1	2,3250942	0
$\mu$	-9,9930353	-5	2,8477759	-5	-2,4237710	-6

Продолжение табл. 57

	$E_1 \cdot 10^{-n}$	$n$	$E_1 \cdot 10^{-n}$	$n$	$E_2 \cdot 10^{-n}$	$n$
Нептун						
$\Omega$	1,3125211	+2	-1,4389207	-2	1,2043223	-3
$i$	1,7744829	0	1,4980346	-4	-4,5233433	-5
$e$	1,1953667	-2	-3,8362489	-3	4,4843677	-4
$\omega$	-8,2281724	+1	-4,1361421	0	-5,7381766	-1
$a$	2,9964526	+1	+1,1874865	-1	-1,3609559	-2
$T$	6,8937422	+4	-5,2990118	+2	-1,1669699	+2
$\mu$	6,0090224	-3	-3,5517281	-5	4,1008893	-6
$\Omega$	-9,2332616	-2	3,6636380	-2	-3,5015901	-3
$i$	3,7414187	-4	-1,0022367	-4	5,4642314	-6
$e$	-2,5288780	-3	1,0386231	-3	-9,3646316	-5
$\omega$	1,4905778	+1	-1,5609076	0	-5,7094577	-1
$a$	7,3727068	-2	-3,4333701	-2	3,8695990	-3
$T$	2,6353047	+3	-3,1370253	+2	-9,1341500	+1
$\mu$	-2,2099442	-5	1,0359883	-5	-1,1782808	-6
Плутон						
$\Omega$	1,0956031	+2	8,0163039	-2	-1,1596170	-2
$i$	1,7131458	+1	1,6666745	-2	-2,6930298	-3
$e$	2,4705844	-1	2,4326182	-3	-2,9743430	-4
$\omega$	-2,4639753	+2	2,1539400	-1	-4,9302680	-2
$a$	3,9432792	+1	6,0788361	-2	-4,2607542	-3
$T$	4,7796562	+4	2,5791747	+1	-6,6738206	0
$\mu$	3,9803868	-3	-8,9271504	-6	5,7471550	-7
$\Omega$	-9,6850316	-2	3,0756727	-2	-2,5935616	-3
$i$	-1,8603325	-2	3,9915053	-3	-1,9823210	-4
$e$	4,4858849	-3	-1,6766899	-3	1,6966414	-4
$\omega$	-1,2956666	0	4,5184181	-1	-4,2252037	-2
$a$	3,5324969	-1	-1,2035217	-1	1,1159043	-2
$T$	-2,1296835	+2	7,6948567	+1	-7,4136227	0
$\mu$	-5,3477245	-5	1,8374508	-5	-1,7268376	-6

1960—1970 гг., для которого вычислены числовые значения коэффициентов  $E_k$  аппроксимирующего полинома вида

$$E(\Delta) = \sum_{k=0}^5 E_k \Delta^k.$$

Эти коэффициенты определяются таблицей, дающей полиномиальное представление элементов орбит  $\Omega$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $T$ ,  $\mu$  всех пяти внешних планет — Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона;  $\Omega$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $a$  означают соответственно долготу восходящего узла на эклиптике, наклон к эклиптике, эксцентриситет, аргумент перигелия и большую полуось орбиты планеты,  $T$  —

время в эфемеридных сутках от 2439000,5 JD до момента прохождения через перигелий,  $\mu$  — среднее суточное движение планеты (в градусах). С помощью табл. 57 прямоугольные координаты планет, отнесенные к системе отсчета стандартной эпохи 1950,0, вычисляются с точностью до  $\pm 5 \cdot 10^{-4}$  а. е.

#### § 11.04. Полиномиальное представление прямоугольных гелиоцентрических координат Юпитера и Сатурна

Для вычисления прямоугольных гелиоцентрических координат Юпитера и Сатурна в системе отсчета стандартной эпохи 1950,0 можно воспользоваться их представлением в виде полиномов, полученных в [68]. При этом обеспечивается точность  $1 \cdot 10^{-5}$  а. е. на интервале 1975—1985 гг. За начальный момент времени выбрана дата 1974, ноябрь 9,0 ET = JED 2442360,5. Эти аппроксимирующие полиномы имеют вид

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^m A_k P_{k,n}(t), \quad (4.11.35)$$

где

$$P_{k,n}(t) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} \binom{k+l}{l} \frac{t^{(l)}}{n^{(l)}}$$

и отношения факториал-полиномов  $t^{(l)}/n^{(l)}$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \frac{t^{(l)}}{n^{(l)}} &= \frac{t(t-1)(t-2) \dots (t-l+1)}{n(n-1)(n-2) \dots (n-l+1)}, \\ \binom{k}{l} &= \frac{k^{(l)}}{l!}, \quad \binom{k+l}{l} = \frac{(k+l)^{(l)}}{l!}, \\ A_k &= \frac{(2k+1)n^{(k)}}{(k+n+1)(k+n)^{(k)}} \sum_{t=0}^n f(t) P_{k,n}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.11.36)$$

Здесь  $f(t)$  — аппроксимируемая функция,  $n$  — число узлов. Ортогональные полиномы даны в табл. 58. Следует учесть, что

$$P_{0,20} = 1, \quad P_{1,20} = 1 - \frac{t}{2000}.$$

$$P_{k+1,20} = \frac{-2(2k+1) \left( \frac{t}{200} - 10 \right)}{(k+1)(20-k)} P_{k,20} - \frac{k(21+k)}{(k+1)(20-k)} P_{k-1,20},$$

где  $t$  — время в эфемеридных сутках, отсчитываемое от момента 1974, Ноябрь 9,0 ET, т. е. от даты JED 2442360,5.

Таблица 58

$P_{m,n}$	$x$	$y$	$z$
Юпитер			
$P_{0,20}$	-0,5189 2628	-0,2601 6222 · 10 <sup>-1</sup>	0,1570 7985 · 10 <sup>-2</sup>
$P_{1,20}$	0,2039 5601 · 10 <sup>1</sup>	0,4302 3396 · 10 <sup>1</sup>	0,1795 7737 · 10 <sup>1</sup>
$P_{2,20}$	0,6242 1579 · 10 <sup>1</sup>	-0,2420 2482 · 10 <sup>1</sup>	-0,1190 8266 · 10 <sup>1</sup>
$P_{3,20}$	-0,1592 3438 · 10 <sup>1</sup>	-0,3553 8980 · 10 <sup>1</sup>	-0,1485 6831 · 10 <sup>1</sup>
$P_{4,20}$	-0,1459 2072 · 10 <sup>1</sup>	0,4759 6364	0,2398 2821
$P_{5,20}$	0,8876 3537 · 10 <sup>-1</sup>	0,3410 2135	0,1441 3524
$P_{6,20}$	0,6066 2588 · 10 <sup>-1</sup>	0,7443 6918 · 10 <sup>-2</sup>	0,1713 6468 · 10 <sup>-2</sup>
$P_{7,20}$	0,9466 8362 · 10 <sup>-2</sup>	-0,3421 7351 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1700 9921 · 10 <sup>-2</sup>
$P_{8,20}$	0,1247 3486 · 10 <sup>-2</sup>	-0,2769 1932 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1218 5987 · 10 <sup>-2</sup>
$P_{9,20}$	-0,5480 7640 · 10 <sup>-3</sup>	-0,4876 5036 · 10 <sup>-3</sup>	-0,1955 6998 · 10 <sup>-3</sup>
$P_{10,20}$	-0,1130 9745 · 10 <sup>-3</sup>	0,3600 0700 · 10 <sup>-4</sup>	0,1819 5625 · 10 <sup>-4</sup>
$P_{11,20}$	-0,7192 7346 · 10 <sup>-5</sup>	0,1452 8590 · 10 <sup>-4</sup>	0,6383 1438 · 10 <sup>-5</sup>
$P_{12,20}$	-0,1094 1184 · 10 <sup>-5</sup>	0,2836 1805 · 10 <sup>-5</sup>	0,1194 0562 · 10 <sup>-5</sup>
$P_{13,20}$	0,4869 8828 · 10 <sup>-6</sup>	0,7127 0814 · 10 <sup>-7</sup>	
Сатурн			
$P_{0,20}$	-0,7167 6062 · 10 <sup>1</sup>	0,4351 0899	0,4896 9564
$P_{1,20}$	0,1574 2814 · 10 <sup>1</sup>	0,8798 3031 · 10 <sup>1</sup>	0,3570 3107 · 10 <sup>1</sup>
$P_{2,20}$	0,3739 7272 · 10 <sup>1</sup>	-0,3624 6259	-0,3116 5530
$P_{3,20}$	-0,2918 7350 · 10 <sup>-1</sup>	-0,7682 8612	-0,3164 6612
$P_{4,20}$	-0,1261 7801	-0,1829 2245 · 10 <sup>-1</sup>	-0,2101 2987 · 10 <sup>-2</sup>
$P_{5,20}$	-0,6455 9077 · 10 <sup>-2</sup>	0,1266 3525 · 10 <sup>-1</sup>	0,5505 6198 · 10 <sup>-2</sup>
$P_{6,20}$	0,1166 0395 · 10 <sup>-2</sup>	0,1391 9532 · 10 <sup>-2</sup>	0,5238 2746 · 10 <sup>-3</sup>
$P_{7,20}$	0,1645 5968 · 10 <sup>-3</sup>	-0,1484 9326 · 10 <sup>-4</sup>	-0,9549 2784 · 10 <sup>-5</sup>
$P_{8,20}$	0,3183 5251 · 10 <sup>-5</sup>	-0,3746 8500 · 10 <sup>-4</sup>	-0,1567 0728 · 10 <sup>-4</sup>
$P_{9,20}$	0,5517 5754 · 10 <sup>-5</sup>	-0,2070 4454 · 10 <sup>-5</sup>	-0,1659 5770 · 10 <sup>-5</sup>
$P_{10,20}$	-0,5155 1369 · 10 <sup>-6</sup>	0,1970 1806 · 10 <sup>-5</sup>	0,9038 0685 · 10 <sup>-6</sup>
$P_{11,20}$	-0,9240 6146 · 10 <sup>-6</sup>		

Получены также полиномы [70], позволяющие вычислять сферические координаты (радиуса-вектора  $r$ , долготы  $\lambda$  и широты  $\beta$ ) Юпитера и Сатурна, отнесенные к среднему равноденствию стандартной эпохи 1950,0. В форме полиномов представлены разности  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ,  $\Delta\beta = \beta - \beta_0$ ,  $\Delta r = r - r_0$ , где  $\lambda_0$ ,  $\beta_0$ ,  $r_0$  означают координаты, вычисленные по формулам эллиптического движения (см. ч. I, гл. II), исходя из систем оскулирующих элементов Юпитера и Сатурна.

Эпоха и оскуляция: 1970, май 14,0 ET = 2440720,5 JD

Юпитер	Сатурн
$M_0 = 3,5069377$	5,4687268
$\Omega = 1,7449153$	1,9758317
$i = 0,022805324$	0,043457748
$\omega = 4,7727731$	5,9401409
$a = 5,2032354$	9,5159417
$e = 0,048142337$	0,053389589
$n = 0,14500347 \cdot 10^{-2}$	$0,58609196 \cdot 10^{-3}$

$M_0, \Omega, i, \omega$  в радианах

В табл. 59 даны полиномы: для  $\Delta\lambda \cdot 10^2$  седьмого порядка, для  $\Delta\beta \cdot 10^2$  пятого порядка, для  $\Delta r \cdot 10^2$  восьмого порядка для Юпитера и Сатурна. Эти полиномы обеспечивают точность в прямоугольных гелиоцентрических координатах Юпитера по  $x, y, z$

Таблица 59

$P_{m, n}$	$\Delta\lambda \cdot 10^2$	$\Delta\beta \cdot 10^2$	$\Delta r \cdot 10^2$
Юпитер			
$P_{0,20}$	$-0,1624\ 5061 \cdot 10^{-2}$	$+0,2104\ 7443 \cdot 10^{-3}$	$+0,3588\ 5189 \cdot 10^{-3}$
$P_{1,20}$	$+0,1481\ 3382 \cdot 10^{-1}$	$+0,4887\ 9547 \cdot 10^{-4}$	$-0,1999\ 4794 \cdot 10^{-1}$
$P_{2,20}$	$-0,4658\ 0962 \cdot 10^{-2}$	$+0,2115\ 6797 \cdot 10^{-3}$	$-0,2565\ 9012 \cdot 10^{-1}$
$P_{3,20}$	$+0,2280\ 2035 \cdot 10^{-2}$	$+0,5666\ 7417 \cdot 10^{-4}$	$-0,6534\ 2745 \cdot 10^{-2}$
$P_{4,20}$	$-0,1513\ 6943 \cdot 10^{-2}$	$-0,1976\ 0004 \cdot 10^{-3}$	$-0,2250\ 2814 \cdot 10^{-1}$
$P_{5,20}$	$-0,2808\ 9460 \cdot 10^{-2}$		$+0,1907\ 2429 \cdot 10^{-2}$
$P_{6,20}$	$+0,1596\ 2009 \cdot 10^{-3}$		$+0,1745\ 9535 \cdot 10^{-2}$
$P_{7,20}$	$+0,9896\ 1400 \cdot 10^{-5}$		$-0,4248\ 1512 \cdot 10^{-4}$
$P_{8,20}$			$+0,6406\ 3920 \cdot 10^{-4}$
Сатурн			
$P_{0,20}$	$-0,1174\ 8823 \cdot 10^{-1}$	$+0,2984\ 7887 \cdot 10^{-3}$	$+0,5946\ 3406$
$P_{1,20}$	$+0,3673\ 0175 \cdot 10^{-1}$	$+0,9398\ 8570 \cdot 10^{-3}$	$+0,2743\ 4494 \cdot 10^{-1}$
$P_{2,20}$	$-0,1985\ 4078 \cdot 10^{-1}$	$-0,1965\ 7996 \cdot 10^{-3}$	$+0,1023\ 0257 \cdot 10^1$
$P_{3,20}$	$+0,1853\ 7151 \cdot 10^{-1}$	$+0,3923\ 6748 \cdot 10^{-3}$	$+0,1184\ 4904 \cdot 10^{-1}$
$P_{4,20}$	$+0,4119\ 2503 \cdot 10^{-3}$	$-0,6181\ 8906 \cdot 10^{-3}$	$-0,6903\ 3367 \cdot 10^{-2}$
$P_{5,20}$	$-0,1857\ 1455 \cdot 10^{-3}$	$-0,5032\ 1869 \cdot 10^{-4}$	$-0,1180\ 4022 \cdot 10^{-2}$
$P_{6,20}$	$-0,4467\ 9157 \cdot 10^{-5}$		$-0,2070\ 8533 \cdot 10^{-2}$
$P_{7,20}$	$+0,4193\ 0481 \cdot 10^{-4}$		$+0,9086\ 6225 \cdot 10^{-5}$
$P_{8,20}$			$+0,3027\ 8374 \cdot 10^{-4}$

соответственно  $0,4 \cdot 10^{-5}$ ,  $0,6 \cdot 10^{-5}$ ,  $0,3 \cdot 10^{-5}$  на интервале 1965—1975 г., а для Сатурна по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно  $0,7 \cdot 10^{-5}$ ,  $0,7 \cdot 10^{-5}$ ,  $0,6 \cdot 10^{-5}$  в астрономических единицах.

### § 11.05. Тригонометрическая теория вековых возмущений орбит больших планет

Рассматриваются дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбит больших полуосей  $a^{(k)}$ , эксцентриситетов  $e^{(k)}$ , наклонов  $i^{(k)}$ , долгот перигелиев  $\pi^{(k)}$ , долгот восходящих узлов  $\Omega^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна. Верхний индекс (1) приписывается элементам Меркурия, индекс (2) — элементам Венеры и т. д. Плутон не учитывается, так как его орбита обладает большим эксцентриситетом и захватывает часть орбиты Нептуна.

Вместо  $e^{(k)}$ ,  $i^{(k)}$ ,  $\pi^{(k)}$ ,  $\Omega^{(k)}$  вводятся переменные

$$\left. \begin{aligned} r^{(k)} &= e^{(k)} \cos \pi^{(k)}, & u^{(k)} &= \sin i^{(k)} \cos \Omega^{(k)}, \\ s^{(k)} &= e^{(k)} \sin \pi^{(k)}, & v^{(k)} &= \sin i^{(k)} \sin \Omega^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (4.11.37)$$

$(k = 1, \dots, 8).$

В возмущающей функции сохраняется лишь ее вековая часть, а в последней отбрасывают члены выше второго порядка относительно  $r^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$ . Тогда правые части уравнений относительно  $a^{(k)}$  обращаются в нуль, так что

$$a^{(k)} = a_0^{(k)} = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, 8), \quad (4.11.38)$$

а уравнения относительно  $r^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$  являются линейными с постоянными коэффициентами. При этом уравнения расщепляются на две независимые системы относительно  $r^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$  и  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$  соответственно. Впервые эти уравнения были рассмотрены Лагранжем [71], [72] (см. § 8.03).

Решение этих уравнений при конкретных значениях масс и больших полуосей орбит планет имеет чисто тригонометрическую форму

$$\left. \begin{aligned} r^{(k)} &= \sum_{j=1}^8 M_j^{(k)} \cos(s_j t + \beta_j), \\ s^{(k)} &= \sum_{j=1}^8 M_j^{(k)} \sin(s_j t + \beta_j), \end{aligned} \right\} \quad (4.11.39)$$

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)} &= \sum_{j=1}^7 N_j^{(k)} \cos(\sigma_j t + \delta_j) + \sin \gamma \cos \Pi, \\ v^{(k)} &= \sum_{j=1}^7 N_j^{(k)} \sin(\sigma_j t + \delta_j) + \sin \gamma \sin \Pi, \end{aligned} \right\} \quad (4.11.40)$$

где  $M_j^{(k)}$ ,  $N_j^{(k)}$ ,  $s_j$ ,  $\sigma_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\delta_j$ ,  $\gamma$ ,  $\Pi$  — постоянные. Постоянные  $s_j$ ,  $\sigma_j$  суть корни вековых уравнений (см. § 8.03) для систем относительно  $r^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$  и  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$  соответственно, а углы  $\gamma$ ,  $\Pi$  определяют положение неизменяемой плоскости Лапласа в планетной системе. Принятые значения для больших полуосей орбит, начальных значений эксцентриситетов, долгот перигелиев, наклонов и долгот восходящих узлов (элементы отнесены к эпохе 1900,0 и к эклиптике и равноденствию эпохи 1950,0) даны в табл. 60 (см. [72] — [74]).

Таблица 60

Планета	$a$	$e$	$i$	$\pi$	$\Omega$
1 Меркурий	0,3870987	0,2056142	7° 0' 24",4	76° 35' 52",4	47° 48' 5",0
2 Венера	0,7233323	0,0068207	3 23 40,4	130 51 42,0	76 12 8,5
3 Земля + + Луна	1,000000	0,01675101	0 0 23,6	109 55 8,5	173 57 6
4 Марс	1,5236878	0,0933089	1 51 14,8	334 55 0,1	49 19 5,9
5 Юпитер	5,202798	0,0483356	1 18 25,5	13 24 41,9	99 51 53,5
6 Сатурн	9,538852	0,0558847	2 29 21,2	91 47 20,0	113 21 10,6
7 Уран	19,183581	0,0463281	0 46 24,9	172 16 32,9	73 42 13,6
8 Нептун	30,03386	0,0089674	1 46 27,7	47 24 12,7	131 12 37,8

Для углов  $\gamma$ ,  $\Pi$  (наклона и долготы узла неизменяемой плоскости Лапласа относительно плоскости эклиптики эпохи 1850,0) Клеменс и Брауэр получили значения [75]

$$\gamma = 1^\circ 39' 13'',96 \quad \Pi = 107^\circ 13' 47'',6.$$

Если для масс взять наиболее надежные значения и учесть их ошибки, то для  $\gamma$  и  $\Pi$  получают следующие значения:

$$\gamma = 1^\circ 38' 49'' \pm 22'', \quad \Pi = 107^\circ 13',3 \pm 2',1.$$

Для наклонов  $i_0$  орбит планет к неизменяемой плоскости Стокуэлл получил значения, приведенные в табл. 61.

Таблица 61

Планета	$i_0$
Меркурий	6° 20' 58",08
Венера	2° 11' 13",57
Земля	1° 35' 19",376
Марс	1° 40' 43",70
Юпитер	0° 19' 59",674
Сатурн	0° 55' 30",924
Уран	1° 1' 45",27
Нептун	0° 43' 24",845

Таблица 62

$k$	$s_k$	$\sigma_k$
1	5",463	-5",202
2	7,345	-6,571
3	17,328	-18,744
4	18,002	-17,633
5	4,296	0
6	27,774	-25,733
7	2,719	-2,903
8	0,633	-0,678



Приближенные значения постоянных  $s_k$ ,  $\sigma_k$ ,  $M_j^{(k)}$ ,  $N_j^{(k)}$  указаны в табл. 62—64 (более точные значения даны в [73], [74], [76]).

Таблица 63

 $M_j^{(k)}$ 

$k \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,175	0,006	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-0,025	0,021	0,016	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,002	-0,013	0,010	0,030	0,000	0,000	0,000	0,000
4	-0,002	0,015	-0,015	0,072	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,036	0,019	0,018	0,019	0,045	0,033	-0,032	0,001
6	0,001	0,000	0,003	0,015	-0,015	0,049	-0,002	0,000
7	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,030	-0,003
8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,009

Из выражений (4.10.18), (4.10.19) вытекает, что эксцентриситеты  $e^{(k)}$  и наклоны  $i^{(k)}$  орбит всех планет обладают либрационным изменением, оставаясь заключенными между некоторыми пределами, а долготы перигелиев  $\pi^{(k)}$  и долготы восходящих узлов  $\Omega^{(k)}$  обладают медленным вековым движением.

Таблица 64

 $N_j^{(k)}$ 

$k \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,125	0,012	0,008	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-0,036	0,010	0,008	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,004	-0,027	0,024	-0,036	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,001	-0,007	0,005	0,050	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,003	0,010	-0,006	0,016	-0,001	0,000
6	-0,003	-0,002	-0,002	-0,001	-0,001	-0,001	0,018	-0,002
7	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	0,001	0,012

Приближенные пределы изменения эксцентриситетов и наклонов орбит по отношению к неизменяемой плоскости Лапласа и соответствующие значения вековых движений  $\pi_2^{(k)}$ ,  $\Omega_2^{(k)}$  даны в табл. 65.

Т а б л и ц а 65

Планета	$\min e^{(k)}$	$\max e^{(k)}$	$\min i_0^{(k)}$	$\max i_0^{(k)}$	$\pi_i^{(k)}$	$\Omega_i^{(k)}$
Меркурий	0,121	0,232	4° 44'	9° 11'	5'',46	-5'',20
Венера	0	0,071	0	3° 16'	9'',31	-8'',61
Земля	0	0,068	0	3° 6'	9'',48	-6'',87
Марс	0,018	0,140	0	5° 56'	18'',00	-15'',10
Юпитер	0,025	0,061	0° 14'	0° 29'	4'',30	-25'',73
Сатурн	0,012	0,084	0° 47'	1° 1'	27'',77	-25'',73
Уран	0,012	0,078	0° 54'	1° 7'	4'',00	-2'',90
Нептун	0,006	0,015	0° 34'	0° 47'	0'',633	-0'',68

Отрицательное значение  $\Omega_i^{(k)}$  указывает на попятное движение узла.

## ДВИЖЕНИЕ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Эта глава посвящена движению естественных спутников больших планет, малых планет и комет. В настоящее время известны всего 33 спутника: у Земли 1 спутник, у Марса — 2, у Юпитера — 13, у Сатурна — 10, у Урана — 5, у Нептуна — 2 спутника, причем 13-й спутник Юпитера открыт в 1974 г. \*).

Анализ и теория движения спутников Марса содержится в работах [77] — [82]. Учитываются сжатие Марса и возмущение Солнца. Теория движения этих спутников, основанная на интерпретации потенциала сфероида как потенциала в обобщенной задаче двух неподвижных центров, имеется в [83], [84] (см. ч. VI, § 3.03).

Теория движения четырех галилеевых спутников Юпитера (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто) была разработана еще Лапласом. Более современная теория, которая используется для астрономических ежегодников, принадлежит де Ситтеру [85]. Учитываются сжатие Юпитера, солнечные возмущения и взаимные возмущения спутников. Теория движения самого близкого V спутника Юпитера, на движение которого сильно влияет сжатие планеты, приводится в [86]. Теория движения VI спутника Юпитера, построенная с помощью формул теории движения Луны Делоне (см. гл. 10), изложена в [87]. Теория движения VII спутника Юпитера, основанная на методе Хилла — Брауна (см. гл. 10), имеется в [88]. Аналогичная теория движения VIII спутника Юпитера имеется в [89]. Полуаналитическая теория движения этого спутника в форме, соответствующей теории Делоне, построена в [90]. Эта теория является наиболее точной по сравнению с предыдущими и весьма перспективной, так как объединяет чисто аналитические методы и численные методы с использованием современных электронно-вычислительных машин. Дви-

---

\*) В печати имеется сообщение об открытии в 1975 г. еще одного, 14-го спутника Юпитера.

жение этого спутника изучалось также численными методами [91], [92].

Теория движения спутников Сатурна, основанная на классическом методе учета возмущений, была построена Г. Струве [93]. Теория движения этих спутников, основанная на методе А. М. Ляпунова, построена Г. Н. Дубошиным и А. И. Рыбаковым [94]—[100]. Учитываются сжатие Сатурна, притяжение кольца Сатурна, солнечные возмущения и взаимные возмущения спутников.

### § 12.01. Невозмущенное движение спутников

В первом приближении считают, что движение спутника планеты происходит по невозмущенной эллиптической орбите вокруг центра планеты (см. ч. II, гл. 1).

В качестве основной выбирается обычно система координат, начало которой помещено в центр планеты, плоскость  $xy$  совпадает с экваториальной плоскостью планеты, и оси сохраняют неизменное положение в пространстве, причем ось  $z$  направлена вдоль вектора угловой скорости вращения планеты.

Невозмущенная эллиптическая орбита спутника определяется обычно следующими элементами (см. ч. II, § 1.04):  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклон,  $\Omega$  — долгота восходящего узла,  $\omega$  — угловое расстояние перицентра от узла,  $T$  — момент прохождения спутника через перицентр.

Вместо  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $T$  используют также элементы  $\pi = \Omega + \omega$  — долготу перицентра,  $M$  — среднюю аномалию,  $\lambda = \Omega + \omega + M$  — среднюю долготу.

Среднее движение спутника  $n$  и сидерический период обращения  $P$  определяются по формулам

$$n = \frac{\sqrt{(m_0 + m)f}}{a^{3/2}}, \quad P = \frac{2\pi}{n},$$

где  $f$  — постоянная тяготения,  $m_0$  — масса планеты,  $m$  — масса спутника.

Планетоцентрические координаты спутника  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вычисляются по элементам орбиты с помощью формул гл. 2 ч. II.

Приводим табл. 66 значений средних элементов орбит, а также масс спутников.

Значения большой полуоси  $a$  в тыс. км и сидерического периода  $P$  в средних солнечных сутках заимствованы из [137]. Значения эксцентриситета  $e$  и наклона  $i$  к экватору центральной планеты — из [140], значения масс  $m$  с вероятными ошибками в долях массы центральной планеты — из [134]. Звездочкой \* отмечены спутники, обладающие обратным движением.

Таблица 66

Спутник	Год откр.	$a$ , тыс. км	$P$ , ср. солн. сут.	$e$	$i$	$m$	
Марс	Фобос	1877	9,3	0,32	0,019	1°,1	$2,7 \cdot 10^{-8}$
	Деймос	1877	23,5	1,26	0,0031	1,8	$4,8 \cdot 10^{-9}$
Юпитер	Амальтея, V	1892	181,2	0,50	0,0028	0,4	$18 \cdot 10^{-10}$
	Ио	1610	421,2	1,77	0,0000	0,0	$(4,153 \pm 0,343) \cdot 10^{-5}$
	Европа	1610	670,3	3,55	0,0003	0,0	$(2,508 \pm 0,049) \cdot 10^{-5}$
	Ганимед	1610	1068,6	7,15	0,0015	0,0	$(8,079 \pm 0,011) \cdot 10^{-5}$
	Каллисто	1610	1881,0	16,69	0,0075	0,0	$(4,797 \pm 0,417) \cdot 10^{-5}$
	VI	1904	11445,4	250,57	0,1580	27,6	$8,5 \cdot 10^{-10}$
	VII	1905	11732,0	259,65	0,2073	24,8	$0,35 \cdot 10^{-10}$
	X	1938	11825	263,55	0,13	28,8	$0,010 \cdot 10^{-10}$
	XII *	1951	21206,0	631,1	0,17	146,7	$0,007 \cdot 10^{-10}$
	XI *	1938	22589,0	692,5	0,21	163,4	$0,020 \cdot 10^{-10}$
VIII *	1908	23490,0	738,9	0,41	149,1	$0,077 \cdot 10^{-10}$	
IX *	1914	23941,0	758,0	0,32	153,9	$0,015 \cdot 10^{-10}$	
Сатурн	Янус	1966	157,4	0,75	0,0	0,0	—
	Мимас	1789	185,0	0,94	0,0201	1,5	$(6,59 \pm 0,015) \cdot 10^{-6}$
	Энцелад	1789	238,3	1,37	0,0044	0,0	$(1,48 \pm 0,61) \cdot 10^{-7}$
	Тетис	1684	294,3	1,89	0,0000	1,1	$(1,095 \pm 0,22) \cdot 10^{-6}$
	Диона	1684	376,4	2,74	0,0020	0,0	$(2,39 \pm 0,053) \cdot 10^{-6}$
	Рея	1672	526,0	4,52	0,0010	0,3	$(3,2 \pm 5,6) \cdot 10^{-6}$
	Титан	1655	1221,0	15,97	0,0289	0,3	$(2,4619 \pm 0,0029) \cdot 10^{-4}$
	Гиперион	1848	1480,0	21,32	0,104	0,6	$2 \cdot 10^{-7}$
Юпитер	Япет	1671	3560,0	79,92	0,0284	14	$(3,94 \pm 1,93) \cdot 10^{-6}$
	Феба *	1898	12926,0	523,7	0,1659	150	—
	Миранда	1948	130,0	1,41	—	—	$1 \cdot 10^{-6}$
Уран	Ариэль	1851	190,6	2,52	0,007	0	$15 \cdot 10^{-6}$
	Умбриэль	1851	265,9	4,14	0,0081	0	$6 \cdot 10^{-6}$
	Титания	1787	437,6	8,71	0,0023	0	$50 \cdot 10^{-6}$
	Оберон	1787	585,7	13,46	0,0010	0	$29 \cdot 10^{-6}$
	Нептун	Тритон *	1846	354,0	5,88	0,0000	160
Нереида		1949	5575,0	362,0	0,75	5,0	—

### § 12.02. Возмущения оскулирующих элементов орбит спутников, вызываемые сжатием планеты

Укажем приближенные формулы для возмущений оскулирующих элементов.

Возмущающая функция  $R$  рассматривается обычно с точностью до первой степени сжатия (см. ч. VI, § 2.01)

$$R = \frac{1}{3} I \frac{k^2 m_0 \rho^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \delta), \quad (4.12.01)$$

где  $\rho$  — экваториальный радиус планеты,  $r$  — планетоцентрический радиус-вектор,  $\delta$  — склонение (планетоцентрическая широта) спутника,  $I$  — параметр, характеризующий сжатие планеты.

Разложение функции  $R$  (см. ч. VI, § 2.01) по степеням эксцентриситета  $e$  и по кратным средней аномалии  $M$  имеет вид (с точностью до  $e^4$ )

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{3} I k^2 m_0 \frac{\rho^2}{a^3} \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \right. \right. \\ + 3 \left( e + \frac{9}{8} e^3 \right) \cos M + \frac{9}{2} \left( e^2 + \frac{7}{9} e^4 \right) \cos 2M + \\ + \frac{53}{8} e^3 \cos 3M + \frac{77}{8} e^4 \cos 4M \left. \right] + \\ + \frac{3}{2} \sin^2 i \left[ \frac{1}{48} e^3 \cos (M - 2\omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos (2M - 2\omega) - \right. \\ - \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{8} e^3 \right) \cos (M + 2\omega) + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos (2M + 2\omega) + \\ + \frac{7}{2} \left( e - \frac{123}{56} e^3 \right) \cos (3M + 2\omega) + \frac{17}{2} \left( e^2 - \frac{115}{51} e^4 \right) \cos (4M + 2\omega) + \\ \left. \left. + \frac{845}{48} e^3 \cos (5M + 2\omega) + \frac{533}{16} e^4 \cos (6M + 2\omega) \right] \right\}. \quad (4.12.02) \end{aligned}$$

Выражения для возмущений первого порядка элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\pi$ ,  $v$  (долгота в начальную эпоху  $t_0$ ), получаемые непосредственно из уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов, имеют вид (с точностью до  $e^2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} = I \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \left\{ 2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ e \cos M + \frac{3}{2} e^2 \cos 2M \right] + \right. \\ + \sin^2 i \cdot \left[ -\frac{1}{2} e \cos (M + 2\omega) + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos (2M + 2\omega) + \right. \\ \left. \left. + \frac{7}{2} e \cos (3M + 2\omega) + \frac{17}{2} e^2 \cos (4M + 2\omega) \right] \right\}, \quad (4.12.03) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta e = I \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \left( 1 + \frac{1}{8} e^2 \right) \cos M + \frac{3}{2} e \cos 2M + \right. \right. \\ + \frac{53}{24} e^2 \cos 3M \left. \right] + \frac{1}{2} \sin^2 i \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{8} e^2 \right) \cos (M + 2\omega) + \right. \\ + \frac{1}{16} e^2 \cos (M - 2\omega) - \frac{1}{2} e \cos (2M + 2\omega) + \\ + \frac{7}{6} \left( 1 - \frac{235}{56} e^2 \right) \cos (3M + 2\omega) + \frac{17}{4} e \cos (4M + 2\omega) + \\ \left. \left. + \frac{169}{16} e^2 \cos (5M + 2\omega) \right] \right\}, \quad (4.12.04) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i = \frac{1}{2} I \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \sin i \cos i \cdot \left[ -e \cos (M + 2\omega) + (1 - 2e^2) \cos (2M + 2\omega) + \right. \\ + \frac{7}{3} e \cos (3M + 2\omega) + \frac{7}{3} e \cos (3M + 2\omega) + \frac{17}{4} e^2 \cos (4M + 2\omega) \left. \right], \quad (4.12.05) \end{aligned}$$

$$\delta\Omega = I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \cos i \cdot \left[ (1 + 2e^2)nt + 3e \sin M + \frac{9}{4}e^2 \sin 2M + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}e \sin(M + 2\omega) - \frac{1}{2}(1 - 2e^2) \sin(2M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{7}{6}e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8}e^2 \sin(4M + 2\omega) \right], \quad (4.12.06)$$

$$e \delta\pi = -I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 (\cos i - \cos^2 i) \left[ ent + 3e^2 \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}e \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{6}e^2 \sin(3M + 2\omega) \right] - \\ - I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right) \left[ ent + \left(1 + \frac{23}{8}e^2\right) \sin M + \frac{3}{2}e \sin 2M + \right. \\ \left. + \frac{53}{24}e^2 \sin 3M \right] - \frac{1}{4}I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \sin^2 i \left[ \left(1 - \frac{7}{8}e^2\right) \sin(M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}e^2 \sin(M - 2\omega) + 5e \sin(2M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{7}{3}\left(1 - \frac{397}{56}e^2\right) \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{2}e \sin(4M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{169}{8}e^2 \sin(5M + 2\omega) \right], \quad (4.12.07)$$

$$\delta e = I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \left\{ 2\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right) \left[ \left(1 + \frac{7}{4}e^2\right)nt + \frac{13}{4}e \sin M + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{21}{8}e^2 \sin 2M \right] + 3\sin^2 i \left[ -\frac{13}{24}e \sin(M + 2\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{35}{12}e^2\right) \sin(2M + 2\omega) + \frac{91}{72}e \sin(3M + 2\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{119}{48}e^2 \sin(4M + 2\omega) \right] - (\cos i - \cos^2 i) \left[ (1 + 2e^2)nt + \right. \right. \\ \left. \left. + 3e \sin M + \frac{9}{4}e^2 \sin 2M + \frac{1}{2}e \sin(M + 2\omega) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}(1 - 2e^2) \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{6}e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8}e^2 \sin(4M + 2\omega) \right] \right\}. \\ (4.12.08)$$

Для коэффициентов при вековых возмущениях первого порядка элементов  $\Omega$ ,  $\pi$ ,  $e$ , вычисленных без разложения по степеням  $e$ , справедливы следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} (\Omega)_t &= -I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} n, \\ (\pi)_t &= \frac{1}{2}I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 2 \cos i - 1}{(1 - e^2)^2} n, \\ (e)_t &= \frac{1}{2}I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{(5 + 3\sqrt{1 - e^2}) \cos^2 i - 2 \cos i - 1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 - (e^2)^2} n. \end{aligned} \right\} \quad (4.12.09)$$

### § 12.03. Возмущения в движении спутников, вызываемые притяжением Солнца

Солнечные возмущения спутников вычисляются по формулам, приведенным в гл. 10. Можно использовать непосредственно буквенные формулы теории Делоне (§ 10.03) или формулы для промежуточной орбиты Хилла (§ 10.05). Более точное вычисление возмущений по методу Хилла — Брауна выполняется так же, как и в случае Луны, но с учетом конкретных численных значений масс, средних движений и т. д.

### § 12.04. Общие сведения о характере движения малых планет

К настоящему времени зарегистрировано 1816 малых планет, для которых определены более или менее точные элементы орбиты. Эти планеты имеют свой номер и внесены в каталог малых планет.

В первом приближении считают, что малые планеты движутся по невозмущенным эллиптическим орбитам. В сборниках «Эфемериды малых планет» [101], издаваемых Институтом теоретической астрономии АН СССР, публикуются список зарегистрированных малых планет и элементы их эллиптических орбит, отнесенных к определенной эпохе. В этих сборниках публикуются ежегодно поисксовые эфемериды малых планет, вычисляемые в большинстве случаев с учетом возмущений.

Большинство зарегистрированных малых планет (97%) имеет большие полуоси орбит в интервале от 2,06 до 3,64 а. е. (средние суточные движения  $n$  от 1200'' до 510'' соответственно).

Малых планет, имеющих  $n > 1200''$  (т. е. находящихся ближе к Солнцу), зарегистрировано 21, а имеющих  $n < 510''$  (т. е. находящихся дальше от Солнца, чем основная масса) — 39. Из последних выделяются две группы: 14 так называемых «троянцев», со средним суточным движением около 300'', и 22 малые планеты со средним движением около 450'' (так называемая группа типа Гильды — первой открытой малой планеты с таким средним движением и зарегистрированной под № 153).

Средние движения «троянцев» относятся к среднему движению Юпитера приблизительно как 1 : 1 (случай соизмеримости 1/1), а средние движения малых планет типа Гильды — как 2 : 3. Три малые планеты: 487 Ода ( $n = 487''$ ), 279 Туле ( $n = 404''$ ), 944 Гидальго ( $n = 254''$ ) движутся изолированно.

Если рассматривать распределение основной массы малых планет по их среднему движению  $n$ , то обнаруживаются *сгущения* орбит вблизи некоторых значений  $n$  ( $n = 565''$ ,  $n = 640''$ ,  $n = 710 - 730''$  и др.) и резкие минимумы (так называемые



люки) вблизи значений  $n$ , соответствующих соизмеримости  $n$  со средним движением  $n'$  Юпитера вида  $\frac{n'}{n} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{5}$ , и др. Наиболее ярко выражены люки при

$$\left. \begin{aligned} \frac{n'}{n} &= \frac{1}{3} (n = 897'', 4), \\ \frac{n'}{n} &= \frac{1}{2} (n = 598, 3), \\ \frac{n'}{n} &= \frac{2}{5} (n = 747, 8). \end{aligned} \right\} \quad (4.12.10)$$

Первый люк называют по имени малой планеты 46 Гестии ( $n = 884'', 6$ ), второй — по имени малой планеты 108 Гекубы ( $n = 614'', 3$ ).

Эксцентриситеты орбит основной массы малых планет заключены между 0,02 и 0,42. Среднее значение эксцентриситета для всей совокупности орбит составляет около 0,15.

Наклоны орбит основной массы малых планет заключены между 0,5 и 30°. Среднее значение наклонов для всех совокупностей орбит — около 10°. Более подробно о распределениях элементов орбит малых планет см. в [102], [141].

### § 12.05. Возмущенное движение малых планет

Орбиты большинства малых планет отличаются от орбит больших планет значительными эксцентриситетами и наклонами. Кроме того, отношение больших полуосей орбит большинства малых планет к большой полуоси орбиты основной возмущающей планеты Юпитер мало отличается от единицы. Эти обстоятельства являются причиной трудностей при непосредственном применении к малым планетам аналитических методов учета возмущений, разработанных для больших планет.

Исключение составляет метод Ганзена (см. § 7.02), являющийся полуаналитическим и применимым к орбитам с большими эксцентриситетами и наклонами. Этим методом была построена [103] очень детальная теория движения малой планеты 4 Веста, учитывающая полностью все возмущения первого и второго порядка от всех больших планет. Эта теория близка по точности к аналитическим теориям больших планет (разности  $S-O$  не превышают по  $\alpha$  и  $\delta$  нескольких секунд дуги).

Теории, приближающиеся по точности к теории Весты, построены методом Ганзена для малых планет 29, 447, 13 в работах [104] — [106] соответственно.

С помощью метода Хилла построена теория движения Цереры с учетом возмущений первого порядка и разработана [107], [108] методика вычислений возмущений второго порядка.

Если ограничиться основными членами, то для Цереры возмущения радиуса-вектора  $r$ , долготы  $\lambda$  в оскулирующей орбите и широты  $\beta$  по отношению к плоскости невозмущенной орбиты могут быть представлены следующими формулами:

$$\begin{aligned} \delta r = & 0,00028159 + 0,00000663 v \cos v - 0,00008703 v \sin v - \\ & - 0,00112275 \sin(v - 2\omega) - 0,00389088 \sin(2v - 2\omega') + \\ & + 0,00230699 \sin(2v - 3\omega') - 0,00131026 \cos(3v - 5\omega'), \quad (4.12.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \lambda = & v[-41'',97999 - 13'',05433 \cos v - 0'',99541 \sin v - \\ & - 0'',25601 \cos 2v + 0'',05211 \sin 3v] - 146'',720 \cos(v - \omega') + \\ & + 163'',001 \sin(v - \omega') - 609'',928 \cos(v - 2\omega') - \\ & - 101'',209 \sin(v - 2\omega) + 514'',984 \cos(2v - 2\omega') + \\ & + 394'',398 \cos(2v - 3\omega') + 129'',916 \sin(2v - 3\omega') + \\ & + 189'',954 \cos(2v - 5\omega') + 321'',923 \sin(2v - 5\omega') + \\ & + 189'',432 \sin(3v - 5\omega'), \quad (4.12.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \beta = & 3'',29691 + v(2'',28354 \cos v - 6'',67905 \sin v) + \\ & + 11'',356 \cos \omega' - 10'',104 \sin 2\omega' - 13'',781 \sin(v - 2\omega') + \\ & + 29'',460 \sin(2v - 3\omega') - 24'',250 \cos(3v - 5\omega'), \quad (4.12.13) \end{aligned}$$

где  $v$  — истинная аномалия в невозмущенном движении  $\omega' = \psi - v$ ,

$$\psi = nv + M'_0 - nM_0,$$

$M_0$ ,  $M'_0$  — средние аномалии Цереры и Юпитера в начальную эпоху соответственно; единица расстояния — астрономическая единица.

Расхождения между теорией (с учетом лишь возмущений первого порядка) и наблюдениями в период  $\gamma$  с 1801 по 1946 г. довольно значительные: до  $180''$  по  $\alpha$  и до  $57''$  по  $\delta$ .

Теории движения, обладающие примерно такой же точностью или менее точные, были построены также для некоторых других малых планет (см. [105], [109], [110]).

К малым планетам, средние движения которых  $n$  соизмеримы со средними движениями Юпитера  $n'$ , все упомянутые аналитические методы неприменимы. Для приближенного учета возмущений (прежде всего вековых и долгопериодических) таких планет используются методы Болина и Бренделя (см. [109], [111] — [112]). Метод Бренделя пригоден также для учета возмущений обычных малых планет, средние движения которых несоизмеримы со средним движением Юпитера. Теории движения малых планет, построенные этими методами, могут использоваться главным образом для вычисления поисковых эфемерид

Для построения приближенной теории движения таких малых планет разработаны методы, основанные на применении теории периодических орбит [113]. Получено, например, что если для малых планет типа Гестии (соизмеримость 1 : 3) выбрать в качестве опорных периодическую орбиту Пуанкаре второго типа, то отклонения от нее выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} \delta a &= c_3 \operatorname{ch} at + c_4 \operatorname{sh} at - 0,0217c_1 t + 0,33443 \cdot 10^3 c_2, \\ \delta e &= 0,47987 (c_3 \operatorname{sh} at + c_4 \operatorname{ch} at) + 9,4864 \cdot 10^3 c_1, \\ \delta h &= 17,638 \delta e - 167,507 \cdot 10^3 c_1, \\ \delta l &= -10,799 \delta a - 0,2333c_1 t + 3,5916 \cdot 10^3 c_2, \\ \delta g &= -0,02972 \cdot 10^{-3} \delta a + 0,03161 \cdot 10^{-3} \delta l, \end{aligned} \right\} (4.12.14)$$

где  $c_1, \dots, c_4$  — постоянные интегрирования, определяемые по начальным значениям оскулирующих элементов малой планеты.

Для планеты Гестии эти формулы позволяют представить движение в интервале от 1857 по 1946 г. с точностью до  $0^\circ,20$  по долготе  $\lambda$  и до  $0^\circ,05$  по широте  $\beta$ .

Теория движения некоторых малых планет троянской группы была построена с помощью специально разработанной методики Брауном [114]. Промежуточная орбита в буквенном виде, учитывающая основные долгопериодические возмущения, построена для таких малых планет в [115].

В последнее время получают большое распространение методы усреднения и численно-аналитические методы, позволяющие реализовать новые пути построения теорий движения малых планет (см. подробнее об этом в гл. 9).

Широко используются численные методы интегрирования дифференциальных уравнений движения малых планет. Таким путем составлены довольно точные таблицы движения некоторых из так называемых астрометрических малых планет [117], [118], [142]; производится массовое вычисление элементов орбит и поисковых эфемерид для сборника «Эфемериды малых планет».

Большое внимание уделяется улучшению первоначальных элементов орбит малых планет по мере накопления для той или иной планеты наблюдательных данных (см. ч. III).

Десять из малых планет (1-Церера, 2-Паллада, 3-Юнона, 4-Веста, 7-Ирис, 11-Партенона, 18-Мельпомена, 39-Летиция, 40-Гармония) выбраны Международным Астрономическим Союзом для реализации международной программы по построению нового фундаментального каталога звезд. Точные теории движения этих малых планет требуются в рамках данной программы для целей уточнения системы отсчета (положения точки

равноденствия и экватора), к которой привязываются координаты звезд.

Важное практическое значение имеет в настоящее время изучение движения малых планет, подходящих близко к Земле и другим внутренним планетам (433 Эрос, 1566 Икар, 1620 Географос, 1685 Торо), которые используются для уточнения значения солнечного параллакса и масс внутренних планет.

Приведем список с элементами орбит  $a$ ,  $n$ ,  $e$ ,  $i$  для некоторых из упомянутых малых планет:

Планеты	$a$	$n$	$e$	$i$
Церера (1)	2,7674	770",719	0,0785	10°,610
Паллада (2)	2,7692	769,962	0,2352	34,831
Юнона (3)	2,6703	813,144	0,2556	12,990
Веста (4)	2,5779	857,254	0,1870	10,775
Гестия (46)	2,5245	884,572	0,1704	2,315
Гекуба (108)	3,2192	614,300	0,0842	4,385
Гильда (153)	3,9754	447,653	0,1536	7,845
Эйда (673)	2,8154	751,096	0,0127	2,856
Гидальго (944)	5,8201	252,701	0,6565	42,494
Эрос (433)	1,4581	2015,293	0,2229	10,828
Икар (1566)	1,0777	3171,343	0,8267	22,994
Географос (1620)	1,2440	2557,308	0,3353	13,328

### § 12.06. Общие сведения о движении комет

Наблюдавшихся к настоящему времени комет (точнее, появлений комет) насчитывается более 1650. Полагают, что в первом приближении они движутся относительно Солнца по невозмущенной (эллиптической, параболической или гиперболической) орбите. Элементы невозмущенной орбиты определены более или менее точно для комет в 763 появлениях. Из них около 600 раз отмечены кометы (см. [119]). Из этих комет можно выделить *параболические* и *гиперболические* (движущиеся в первом приближении по параболической или гиперболической орбите), *долгопериодические* (движущиеся по эллиптической орбите с эксцентриситетом, близким к единице, и очень большим периодом) и *короткопериодические*, наблюдавшиеся в нескольких и даже многих появлениях. Среди последних определенно выделяются четыре группы или, как говорят, семейства комет: семейства Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна. Орбиты комет, принадлежащих семействам какой-либо из этих планет, имеют афелийные расстояния, близкие к большой полуоси орбиты этой планеты, т. е. близкие к 5,2; 9,5; 19,2; 30,1 а. е. соответственно

Кроме того, имеется группа на 17—20 комет, афелийные расстояния которых близки к 52 а. е., а также кометы с очень большими афелийными расстояниями (от 300 а. е. и более). Последние приближаются по характеру своего движения к долгопериодическим кометам.

Эксцентриситеты кометных орбит (за исключением орбит четырех комет) находятся в пределах от 0,40 до 1,00 и среднее значение эксцентриситета для всей совокупности орбит составляет около 0,67, т. е. кометные орбиты значительно более вытянуты, чем орбиты малых планет.

Наклоны кометных орбит также в среднем больше, чем наклоны орбит малых планет (среднее значение наклона для комет семейства Юпитера равно  $13^{\circ},1$ ). Кроме того, имеются кометы с обратным движением, что не наблюдается ни для одной малой планеты.

Более подробно об орбитах комет см. в [121].

### § 12.07. Возмущенное движение комет

Изучение возмущений комет от больших планет Солнечной системы проводится почти исключительно с помощью численного интегрирования уравнений движения. Наибольшее внимание уделяется короткопериодическим кометам. Основным является при этом вопрос о влиянии на орбиты комет *тесных сближений* этих комет с большими планетами. Под тесным сближением кометы с большой планетой подразумевается прохождение кометы через сферу действия планеты. Подробный анализ этого вопроса содержится в [121]. Там же приводится обширный список литературы о движении комет. См. также [122].

Полученные результаты позволяют утверждать, что при тесных сближениях комет с большими планетами и прежде всего с Юпитером происходят очень существенные изменения орбит комет. Например, комета Лекселя перед сближением с Юпитером в 1767 г. имела большую полуось  $a = 5,1$  а. е. и перигелийное расстояние  $q = 2,96$  а. е. После сближения с Юпитером комета была «переброшена» на орбиту с  $a$  около 2,5 а. е. и  $q \approx 0,67$  а. е. После повторного сближения с Юпитером в 1779 г. комета больше не наблюдалась.

Согласно вычислениям Леверье [122] новая орбита кометы после этого сближения с Юпитером могла быть эллиптической с большими перигелийным  $q$ , афелийным  $Q$  расстояниями и периодом, или даже гиперболической в зависимости от точного значения большой полуоси  $a_0$  орбиты перед сближением. Таким образом, возмущения от Юпитера могли как превратить эту комету из коротко- в долгопериодическую, так и выбросить ее за пределы Солнечной системы по гиперболической орбите,

Комета Вольфа I имела три тесных сближения с Юпитером: в 1757, 1875 и 1922 гг.

Изменения элементов  $a$ ,  $e$ ,  $q$  и периода  $P$  иллюстрируются табл. 67.

Таблица 67

	$a$	$e$	$q$	$P$ лет
до 1756	3,39	0,630	1,26	6,25
1757—1875	4,09	0,408	2,42	8,27
1872—1922	3,61	0,555	1,61	6,85
1923—1959	4,11	0,404	2,45	8,33

Комета Отерма 3 до тесного сближения с Юпитером в 1937 г. имела  $a=8,053$  а. е.,  $q=5,4$  а. е.,  $Q=10,6$  а. е. и  $P=22,85$  года (она совершала движение за пределами орбиты Юпитера и не наблюдалась с Земли). После 1937 г. до 1962 г. комета имела элементы  $a=4,42$  а. е.,  $q=3,4$  а. е.,  $Q=4,5$  а. е.,  $P=9,30$  лет и наблюдалась во всех точках орбиты, расположенной между орбитами Марса и Юпитера. После сближения с Юпитером в 1963 г. комета была переброшена на орбиту  $q=5,4$  а. е. и  $Q=9,0$  а. е., т. е. комета до 1937 г. принадлежала семейству Сатурна, в период 1938—1963 гг. — семейству Юпитера, после 1963 г. — опять семейству Сатурна.

Исследования численными методами движения ряда наблюдавшихся долгопериодических комет имеются в [124], [125]. Получено, что возмущения больших планет превращают сильно вытянутые эллиптические орбиты большинства рассмотренных комет в гиперболические.

## ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ IV

1. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, изд. 3-е, «Наука», 1975.
2. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, «Мир», 1964.
3. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
4. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
5. Шарлье К., Небесная механика, «Наука», 1966.
6. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, «Наука», 1965.
7. Tisserand F., Traité de Mécanique céleste, t. I—IV, Paris, 1889—1896.
8. Некрасов А. И., Курс теоретической механики, т. 2, Гостехиздат, 1953.
9. Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.
10. Валле-Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, т. II, ИЛ, 1949.
11. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.

12. Дубошин Г. Н., *Астрон. ж.* 35, 2, 1958.
13. Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. III, ч. 2, т. IV, Гостехиздат, 1953.
14. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Гостехиздат, 1948.
15. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т., *Функции математической физики. Справочное руководство*, Физматгиз, 1963.
16. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., *Курс современного анализа*, изд. 2-е, т. I, Физматгиз, 1962; т. II, Физматгиз, 1963.
17. Градштейн И. С. и Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, 1962.
18. Журавский А. М., *Справочник по эллиптическим функциям*, Изд-во АН СССР, 1940.
19. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., *Специальные функции. Формулы, графики. Таблицы*, «Наука», 1968.
20. Шулер М., Гебелейн Х., *Таблицы эллиптических функций*, ВЦ АН СССР, вып. 13, 1961.
21. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., *Таблицы эллиптических интегралов*, т. I, Изд-во АН СССР, 1962.
22. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., *Таблицы эллиптических интегралов*, т. 2, Изд-во АН СССР, 1963.
23. Ломкаци Ц. Д., *Таблицы эллиптических функций Вейерштрасса*, ВЦ АН СССР, 1967.
24. Демин В. Г., *Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения*, «Наука», 1968.
25. Leveugnier U. I., *Ann. Obs. Paris* 1, 1855, 2, 1856.
26. Voquet F., *Ann. Obs. Paris* 19, 1885.
27. Sauley A., *Mem. Roy. Astron. Soc.* 29, 191, 1859.
28. Проскурин В. Ф., *Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР* 2, 3, 1952.
29. Delaunay C., *Théorie du mouvement de la Lune* 1, Paris, 1960.
30. Zeipel H., *Ark. Mat., Astron., Fysik.* 11, № 1, 7; 12, № 9; 13, № 3, 1901—1917.
31. Моисеев Н. Д., *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга*, т. XV, вып. 1, 1945.
32. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, 1963.
33. Волосов В. М., *Успехи матем. наук* 17, вып. 6, 1962.
34. Гребеников Е. А., *Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР* 11, № 5 (128), 293, 1968.
35. Гребеников Е. А., *Астрон. ж.* 47, вып. 2, 1970.
36. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., *Новые качественные методы в небесной механике*, «Наука», 1971.
37. Гребеников Е. А., Миронов С. В., Приходько В. А., *Астрон. ж.* 50, 6, 1973.
38. Приходько В. А., *Препринт ИТЭФ*, № 60, 1973.
39. Миронов С. В., *Препринт ИТЭФ*, № 90, 1973.
40. Гребеников Е. А., *Некоторые качественные исследования дифференциальных уравнений небесной механики*, докт. дисс., МГУ — ГАИШ, 1967.
41. Brown F. W., *An introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge, 1896, 1960.
42. Смарт У., *Небесная механика*, «Мир», 1965.
43. Hill G., *Collected Works*, vol. 1, 1905, Washington.
44. Brown E. W., *Mem. Roy. Astron. Soc.* 53, 39—116; 163—202, 1900.
45. Brown E. W., *Mem. Roy. Astron. Soc.* 54, 1, 1904.
46. Brown E. W., *Mem. Roy. Astron. Soc.* 57, 51, 1905.
47. Brown E. W., *Mem. Roy. Astron. Soc.* 59, 1, 1909.

48. Brown E. W., Tables of the motion of the Moon, London, 1919.
49. Improved Lunar Ephemeris, 1952—1959, USA, 1954.
50. Eckert W. I., Walker M. I., Eckert D., Astron. J. 71, № 5, 1966.
51. Delaunay C., Mem. Academ. Sci. Paris 28, 1860; 29, 1867.
52. Leverrier U. I., Recherches astronomiques, Ann. obs. Paris 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 1855—1877.
53. Gaillot A., Ann. Obs. Paris 24, 1904.
54. Gaillot A., Ann. Obs. Paris 28, 1910.
55. Gaillot A., Ann. Obs. Paris 31, 1913.
56. Newcomb S., Astron. Papers 5, part 4, 1895.
57. Newcomb S., Tables of the four inner planets, Astron. Papers 6, parts 1—4, 1895—1898.
58. Newcomb S., Tables of the heliocentric motion of Uranus and Neptune, Astron. Papers 7, parts 3, 4, 1898.
59. Hill G. W., A new theory of Jupiter and Saturn, Astron. Papers 4, 1890.
60. Hill G. W., Tables of Jupiter, Tables of Saturn, Astron. Papers 7, 1898.
61. Шараф Ш. Г., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 4, 1955.
62. Шараф Ш. Г., Будникова Н. А., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 10, 5, 1964; 11, 89, 1966.
63. Ross F. E., New elements of Mars and Tables for correcting the heliocentric positions derived from Astronomical Papers 6, part 4; Astron. Papers 9, part 2, 1917.
64. Brower D., Clemence G., Eckert W. I., Coordinates of five outer planetes, 1653—2060, Astron. Papers 12, 1951.
65. Clemence G., Theory of Mars, Astron. Papers 11, part 2, 1949; 16, part 2, 1961.
66. Clemence G., Theory of Mercury, Astron. Papers 11, part 1, 1943.
67. Duncomb R. L., Motion of Venus 1750—1949, Astron. Papers 16, part 1, 1958.
68. Доманская Н. С., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 10, 2, 1965.
69. Aldo Kranjc, Mem. Soc. Astron. Ital., Nuova ser. 34, № 3, 1963.
70. Фурсенко М. А., Методы вычисления эфемериды Луны, Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 10, № 4, 272, 1965.
71. Lagrange G., Oeuvres, 5, Paris, 1870.
72. Stockwell G., Smithsonian Contrib. Knowledge 18, 1870.
73. Brower D., van Woerkom A. G., The secular variations of the orbital elements of the principal Planets, Astron. Papers 13 part 2, 1950.
74. Шараф Ш. Г., Будникова Н. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 11, № 4, 231, 1967.
75. Clemence G., Brower D., Astron. J. 60, 118, 1955.
76. Скрипниченко В. И., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 11, № 7, 441, 1968.
77. Struve H., Astron. Nachr. 138, 219, 1895.
78. Burton H. E., Astron. J. 39, № 929, 1929.
79. Woolard E. W., Astron. J. 51, № 1150, 1944.
80. Косачевский М. П., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 24, 199—214, 1954.
81. Косачевский М. П., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 277, 1960.
82. Косачевский М. П., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 293, 1960.
83. Вашковьяк С. Н., Вестн. Моск. ун-та, физ., астрон., № 3, 35, 1968.
84. Вашковьяк С. Н., Вестн. Моск. ун-та, физ. астрон., № 1, 87, 1969.
85. De Sitter, Theory of Jupiter's satellites, Acad. Sci. Proc. Amsterdam 21, 22, 1919.
86. Van Woerkome A. G., Astron. Papers 13, part 1, 1950.



87. Проскурин В. Ф., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 6, № 1, 25, 1955.
88. Гокмалаева С. С., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 5, 3, 1956.
89. Проскурин В. Ф., Успехи астрон. наук 5, 245, 1950.
90. Kovalevsky J., Bull. Astron. 23, 1969.
91. Боева Н. Ф., Астрон. ж. 12, № 5, 476, 1935.
92. Куликов Д. К., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 4, № 7, 311, 1950.
93. Struve G., Veröff. Sternwarte Babelsberg VI, Heft 1, 1924; Heft 2, 1926; Heft 3, 1929; Heft 4, 1930; Heft 5, 1933.
94. Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 15, вып. 1, 158, 251, 1945.
95. Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 121, 1960.
96. Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 149, 1960.
97. Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 161, 1960.
98. Гребеников Е. А., Астрон. ж. 36, вып. 2, 361, 1959.
99. Рыбаков А. И., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 171, 1960.
100. Рыбаков А. И., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 249, 1960.
101. «Эфемериды малых планет», ежегод. сб., «Наука».
102. Путилин И. Н., Малые планеты, Гостехиздат, 1953.
103. Levaux G., Ann. Observ. Paris 15, 1880; 17, 1885; 20, 1892; 22, 1896; 25, 1908.
104. Osten H., Astron. Nachr. 4, № 6, 1923.
105. Newcomb S., Astron. Abh. Ergänzungshefte zu Astron. Nachr. 5, № 6 1928.
106. Osten H., Astron. Abh. Ergänzungshefte zu Astron. Nachr. 2, № 15, 1908.
107. Проскурин В. Ф., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 2, 3, 1952.
108. Проскурин В. Ф., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 9, 3, 1962.
109. Brendel M., Abh. Kön. Gesellschaft d. Wissenschaft Göttingen, 1, 2, 6, 7, 1898—1911.
110. Горшков П. М., Вестн. Всеросс. Астрон. союза, вып. 2, 50, 1919.
111. Wohlin K., Bihang till K. Svenska Vet. Ak. Hand. 14, № 5, 1888.
112. Wohlin K., Formeln und Tafeln zur Gruppenweise Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten, Upsala, 1896.
113. Чеботарев Г. А., Успехи астрон. наук 5, 1950.
114. Brown E. W., Trans. of the Astron. Observ. of Yale University 3, part 3, 1925.
115. Рябов Ю. А., Астрон. ж. 34, вып. 4, 1957.
116. Newcomb S., Astron. Nachr. 58, № 209, 1862.
117. Herget P., Clemence G. M., Hertz H., Astron. Papers 11, part 4, 1950.
118. Herget P., Astron. Papers 16, part 3, 1962.
119. Baldet F., Catalogue Générale des orbits de comètes de l'an 466 à 1952, Paris, 1952.
120. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
121. Казимирчак-Полонская Е. И., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 7, 1961.
122. Leverrier N. J., Ann. Observ. Paris 3, 1857.
123. Чеботарев Г. А., Божкова А. И., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 6, № 4, 1955.

124. Галибина И. В., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 9, № 7, 1964.
125. Маковер С. Г., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 9, № 8, 1964.
126. Лях Р. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 7, 6, 1959.
127. Мартыненко Б. К., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 10, 7, 1965, 457—506.
128. Andoyer H., Cours de Mecanique celeste, т. I (1923); т. II, Paris, 1926.
129. Делри А., Анрар Ж., Ром А., Бюлл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР 12, № 1, 1971.
130. Morgan H. R., Astron. J. 42, 1933.
131. Clemence G. M., Astron. Papers 11, ч. 2, 1943.
132. Duncombe R. L., Astron. Papers 16, ч. 1, 1958.
133. Clemence G. M., Duncombe R. L., Astron. J. 62, 1957.
134. Duncombe R. L., Recent advances in dynamical astronomy, edited by B. D. Tapley, V. Szebehely, D. Reidel publishing company, 1973.
135. Klepczynski W. Y., Seidelmann P. K., Duncombe R. L., Astron. J. 74, 1969; 75, 1970.
136. Seidelmann P. K., Duncombe R. L., Klepczynski W. Y., Jackson E. S., Astron. J. 76, 1971.
137. Эскобал П., Методы астродинамики, «Мир», 1971.
138. Wylic L. R., Publ. U. S. Naval Obs. 15, серия 2, ч. 3, 1947.
139. Cohen C. Y., Hubbard E. C., Oesterwinter C., Astron. J. 72, 1967.
140. Куликовский П. Г., Справочник любителя астрономии, «Наука», 1971.
141. Чеботарев Г. А., Шмакова М. Я., Бюлл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР 12, № 8, 1971.
142. Duncombe R. L., Astron. Papers 20, ч. 2, 1970.

## ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

## Глава 1

## НЕОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Ниже приводятся основные сведения о задаче трех тел. Даются некоторые формы дифференциальных уравнений движения. Рассмотрены частные ее решения. Дополнительные сведения можно найти в монографиях и учебных пособиях [1] — [5].

### § 1.01. Различные формы дифференциальных уравнений движения задачи трех тел

Пусть имеются три материальные точки  $P_0, P_1, P_2$  с массами  $m_0 \neq 0, m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$ , взаимно притягивающие друг друга по закону всемирного тяготения. *Неограниченная задача трех тел состоит в определении и изучении всевозможных движений материальных точек  $P_0, P_1, P_2$ .* Поскольку задача трех тел — частный случай задачи  $n$  тел, уравнения движения в различных системах координат могут быть получены из уравнений задачи  $n$  тел (ч. IV, гл. 1), если положить в них  $n = 2$ .

В частности, дифференциальные уравнения абсолютного движения получаются из уравнений (4.1.01) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.01)$$

( $i = 0, 1, 2$ ).

Силовая функция задачи  $U$  определяется формулой

$$U = f \left( \frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} \right), \quad (5.1.02)$$

где  $f$  — постоянная тяготения,  $\Delta_{01}$ ,  $\Delta_{02}$ ,  $\Delta_{12}$  — взаимные расстояния между точками  $P_0$  и  $P_1$ ,  $P_0$  и  $P_2$ ,  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, выражаемые формулами

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2 \quad (i, j = 0, 1, 2; i \neq j). \quad (5.1.03)$$

Уравнения (5.1.01) имеют 10 известных первых интегралов: шесть интегралов движения центра масс системы, три интеграла площадей и интеграл энергии. Эти интегралы получаются из (4.1.04) — (4.1.06), если в последних положить  $n = 2$ .

Порядок системы (5.1.01), равный 18, можно понизить на 12 единиц.

В развернутой форме уравнения (5.1.01) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= f m_1 \frac{\xi_1 - \xi_0}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\xi_2 - \xi_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} &= f m_1 \frac{\eta_1 - \eta_0}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\eta_2 - \eta_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} &= f m_1 \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= f m_0 \frac{\xi_0 - \xi_1}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} &= f m_0 \frac{\eta_0 - \eta_1}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\eta_2 - \eta_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= f m_0 \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} &= f m_0 \frac{\xi_0 - \xi_2}{\Delta_{02}^3} + f m_1 \frac{\xi_1 - \xi_2}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} &= f m_0 \frac{\eta_0 - \eta_2}{\Delta_{02}^3} + f m_1 \frac{\eta_1 - \eta_2}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} &= f m_0 \frac{\zeta_0 - \zeta_2}{\Delta_{02}^3} + f m_1 \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\Delta_{12}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.04)$$

Дифференциальные уравнения неограниченной задачи трех тел в других системах координат и в явном виде приведены в книгах [1] — [5].

В барицентрической равномерно вращающейся с некоторой постоянной угловой скоростью  $n$  прямоугольной декартовой системе координат  $Gxy$ , расположенной в плоскости начального

треугольника  $P_0P_1P_2$ , уравнения движения плоской задачи имеют вид [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2} - 2n \frac{dy_i}{dt} &= n^2x_i + \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2y_i}{dt^2} + 2n \frac{dx_i}{dt} &= n^2y_i + \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.05)$$

$(i = 0, 1, 2).$

Силсовая функция  $U$  выражается формулой (5.1.02), где

$$\Delta_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

Кроме того, координаты  $x_i, y_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, \\ m_0y_0 + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.06)$$

так как центр масс  $G$  принят за начало координат.

Если точка  $P_0$  изображает Солнце, то уравнения движения точек  $P_1$  и  $P_2$  в прямоугольной гелиоцентрической системе координат выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)x_1}{r_1^3} &= fm_2 \left[ \frac{x_2 - x_1}{\Delta_{12}^3} - \frac{x_2}{r_2^3} \right], \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)y_1}{r_1^3} &= fm_2 \left[ \frac{y_2 - y_1}{\Delta_{12}^3} - \frac{y_2}{r_2^3} \right], \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)z_1}{r_1^3} &= fm_2 \left[ \frac{z_2 - z_1}{\Delta_{12}^3} - \frac{z_2}{r_2^3} \right], \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_2)x_2}{r_2^3} &= fm_1 \left[ \frac{x_1 - x_2}{\Delta_{21}^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right], \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_2)y_2}{r_2^3} &= fm_1 \left[ \frac{y_1 - y_2}{\Delta_{21}^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right], \\ \frac{d^2z_2}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_2)z_2}{r_2^3} &= fm_1 \left[ \frac{z_1 - z_2}{\Delta_{21}^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.1.07)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — прямоугольные гелиоцентрические координаты точки  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ),

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{21}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Система имеет четыре известных первых интеграла (три интеграла площадей и интеграл энергии):

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{m} [(m_1 y_1 + m_2 y_2) (m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2) - \\ & \quad - (m_1 z_1 + m_2 z_2) (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2)] + m_1 (y_1 \dot{z}_1 - z_1 \dot{y}_1) + \\ & \quad \quad \quad + m_2 (y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2) = c_1, \\ & -\frac{1}{m} [(m_1 z_1 + m_2 z_2) (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) - \\ & \quad - (m_1 x_1 + m_2 x_2) (m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2)] + m_1 (z_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{z}_1) + \\ & \quad \quad \quad + m_2 (z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2) = c_2, \\ & -\frac{1}{m} [(m_1 x_1 + m_2 x_2) (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2) - \\ & \quad - (m_1 y_1 + m_2 y_2) (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2)] + m_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \\ & \quad \quad \quad + m_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) = c_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.08)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m} [(m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2)^2 + (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2)^2 + (m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2)^2] + \\ & \quad + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) = U + h', \end{aligned} \quad (5.1.09)$$

где  $m = m_0 + m_1 + m_2$ ;  $c_1, c_2, c_3, h$  — произвольные постоянные.

А. М. Ляпуновым выведены уравнения движения в задаче трех тел [1] в специальных переменных, особенно удобных для отыскания частных решений Лагранжа.

### § 1.02. Лагранжевы решения. Точки либрации

О п р е д е л е н и е. *Равновесным решением* некоторого векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F(y, x), \quad x \in X, \quad (5.1.10)$$

называется *постоянный вектор*  $y = a$ , удовлетворяющий уравнению (5.1.10).

Для того чтобы постоянный вектор  $y = a$  был частным решением уравнения (5.1.10), необходимо и достаточно, чтобы он был решением векторного функционального уравнения

$$F(y, x) = 0 \quad (5.1.11)$$

для любого  $x \in X$ . Чаще всего ищут равновесные решения в случае автономных систем дифференциальных уравнений ( $F$  зависит только от искомого вектора  $y$ ). Тогда равновесные решения определяются функциональным уравнением

$$F(y) = 0. \quad (5.1.12)$$

Если применить (5.1.12) к уравнениям (5.1.05), в которых уравнения для координат точки  $P_0$  заменены тождествами (5.1.06), то необходимое и достаточное условие существования равновесных решений (или положений равновесия) в задаче трех тел выражается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0, \\ -n^2 x_1 + f m_0 \frac{x_1 - x_0}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{x_1 - x_2}{\Delta_{12}^3} &= 0, \\ -n^2 x_2 + f m_1 \frac{x_2 - x_1}{\Delta_{12}^3} + f m_0 \frac{x_2 - x_0}{\Delta_{02}^3} &= 0, \\ m_0 y_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0, \\ -n^2 y_1 + f m_0 \frac{y_1 - y_0}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{y_1 - y_2}{\Delta_{12}^3} &= 0, \\ -n^2 y_2 + f m_1 \frac{y_2 - y_1}{\Delta_{12}^3} + f m_0 \frac{y_2 - y_0}{\Delta_{02}^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.13)$$

Система (5.1.13) состоит из шести уравнений с семью неизвестными:  $n, x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ .

Определение. *Лагранжевыми частными решениями* задачи трех тел называются вещественные решения системы (5.1.13).

Таковыми являются:

- а) *круговые лагранжевы решения;*
- б) *коллинеарные лагранжевы решения;*
- в) *гомографические лагранжевы решения.*

Решения а) и б) являются частным случаем решений в) и их выделение в отдельные группы объясняется методическими соображениями.

Круговые лагранжевы решения — это такие решения системы (5.1.13), для которых

$$\Delta_{01} = \Delta_{02} = \Delta_{12} = a, \quad (5.1.14)$$

$$n^2 = f \frac{m_0 + m_1 + m_2}{a^3} \quad (5.1.15)$$

( $a$  — произвольная постоянная) и среди неизвестных  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$  четыре считаются произвольными постоянными. Если, например, считать, что  $y_0 = y_1 = 0$ , а  $x_0$  и  $x_1$  — известные, отличные от нуля числа, то

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (x_1 - x_0).$$

Точка  $P_2$  с массой  $m_2$  занимает одно из двух положений  $L_4$  и  $L_5$  на рис. 67. Точки  $L_4$  и  $L_5$  называются *треугольными точками либрации*.

В системе координат  $Gxy$  точки  $P_0, P_1, P_2$  образуют неподвижный равно-сторонний треугольник со стороной  $a$ , ориентация которого определяется четырьмя произвольными постоянными. Отсюда следует, что при заданном  $a$  имеется четырехпараметрическое семейство круговых лагранжевых решений.

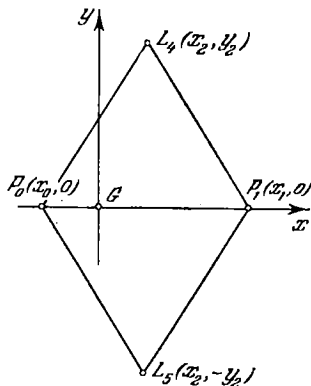


Рис. 67. Треугольные точки либрации.

В абсолютной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  центр масс треугольника  $P_0P_1P_2$  будет двигаться равномерно и прямолинейно, а точки  $P_0, P_1, P_2$  будут равномерно вращаться вокруг  $G$  с угловой скоростью  $n$ . Таким образом, равновесные решения в системе  $Gxy$  не будут таковыми в системе  $O\xi\eta\zeta$ .

Коллинеарные лагранжевы решения определяются из системы (5.1.13), если считать, что  $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ , а абсциссы

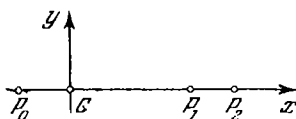


Рис. 68. Первое взаимное расположение точек  $P_0, P_1, P_2$ .

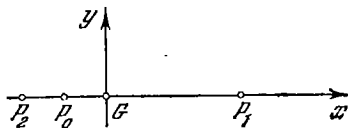


Рис. 69. Второе взаимное расположение точек  $P_0, P_1, P_2$ .

точек  $P_0, P_1, P_2$  определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, \\ -n^2x_1 + \frac{fm_0(x_1 - x_0)}{\Delta_{01}^3} + \frac{fm_2(x_1 - x_2)}{\Delta_{12}^3} &= 0, \\ -n^2x_2 + \frac{fm_1(x_2 - x_1)}{\Delta_{12}^3} + \frac{fm_0(x_2 - x_0)}{\Delta_{02}^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.16)$$

Возможны три расположения точек  $P_0, P_1, P_2$  на прямой:

- 1)  $x_0 < x_1 < x_2$  (рис. 68),
- 2)  $x_2 < x_0 < x_1$  (рис. 69),
- 3)  $x_0 < x_2 < x_1$  (рис. 70).



Решение системы (5.1.16) для случая 1) сводится к решению уравнения

$$(m_0 + m_1)z^5 + (3m_0 + 2m_1)z^4 + (3m_0 + m_1)z^3 - (m_1 + 3m_2)z^2 - (2m_1 + 3m_2)z - (m_1 + m_2) = 0, \quad (5.1.17)$$

где

$$z = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}. \quad (5.1.18)$$

Если считать  $x_1$  известным, то после решения (5.1.17)  $x_0$  и  $x_2$  определяются из равенств

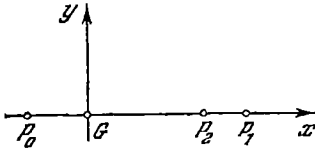
$$x_0 = x_1 \frac{m_2 z - (m_1 + m_2)}{m_2 z + m_0}, \quad (5.1.19)$$

$$x_2 = x_1 \frac{m_2 - (m_0 + m_1)z}{m_2 z + m_0}, \quad (5.1.20)$$

а угловая скорость  $n$  дается формулой

$$n^2 = \frac{f(m_0 z^2 - m_2)(m_2 z^2 + m_0)^2}{x_1^3 (m_0 + m_1 + m_2)^2 z^2}. \quad (5.1.21)$$

Рис. 70. Третье взаимное расположение точек  $P_0, P_1, P_2$ .



Существует однопараметрическое семейство частных решений типа 1), так как  $x_1$  — произвольный параметр.

Для случая 2) решение системы (5.1.16) сводится к решению алгебраического уравнения

$$(m_0 + m_1)z^5 + (2m_0 + 3m_1)z^4 + (m_0 + 3m_1)z^3 - (m_0 + 3m_2)z^2 - (2m_0 + 3m_2)z - (m_0 + m_2) = 0, \quad (5.1.22)$$

где

$$z = \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}. \quad (5.1.23)$$

Если  $x_0$  задано и уравнение (5.1.22) решено, то  $x_1, x_2$  и  $n$  определяются по формулам

$$x_1 = -x_0 \frac{m_2 z + (m_0 + m_2)}{m_1 - m_2 z}, \quad (5.1.24)$$

$$x_2 = x_0 \frac{m_1 + (m_0 + m_1)z}{m_1 - m_2 z}, \quad (5.1.25)$$

$$n^2 = -\frac{f(m_1 - m_2 z)^3 [m_0(z+1)^2 + m_2]}{x_0^3 (m_0 + m_1 + m_2)^2 (z+1)^2 [m_2 z + (m_0 + m_1)]}. \quad (5.1.26)$$

Так как  $x_0$  — произвольный параметр, то здесь также имеется однопараметрическое семейство коллинеарных лагранжевых решений.

Наконец, для случая 3) решение системы (5.1.16) сводится к решению уравнения

$$(m_0 + m_2) z^5 + (3m_0 + 2m_2) z^4 + (3m_0 + m_2) z^3 - (m_2 + 3m_1) z^2 - (2m_2 + 3m_1) z - (m_1 + m_2) = 0, \quad (5.1.27)$$

где

$$z = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_0}. \quad (5.1.28)$$

Считая  $x_2$  произвольным параметром, все остальные неизвестные находим из соотношений

$$x_0 = x_2 \frac{m_1 z - (m_1 + m_2)}{m_1 z + m_0}, \quad (5.1.29)$$

$$x_1 = x_2 \frac{m_1 - (m_0 + m_2) z}{m_1 z + m_0}, \quad (5.1.30)$$

$$n^2 = \frac{f(m_0 z^2 - m_1)(m_1 z^2 + m_0)^2}{x_2^3 (m_0 + m_1 + m_2)^2 z^2}. \quad (5.1.31)$$

Здесь также имеется однопараметрическое семейство коллинеарных лагранжевых решений.

Если  $m_0 > m_1 \gg m_2$ , то положение точки  $P_2$  в случае 1) называется *точкой либрации  $L_2$* , положение  $P_2$  в случае 2) называется *точкой либрации  $L_3$* , а положение  $P_2$  в случае 3) называется *точкой либрации  $L_1$* .

Замечание 1. Положение тел  $P_0, P_1, P_2$  неизменно лишь в системе координат  $Gxyz$ . В абсолютной системе  $O\xi\eta\zeta$  (рис. 71) вся система обладает поступательно-вращательным движением, так как центр масс  $G$  движется прямолинейно и равномерно относительно  $O\xi\eta\zeta$ , а прямая  $Gx$  вращается с постоянной угловой скоростью  $n$  в плоскости  $Gxy \parallel O\xi\eta$ .

Замечание 2. Нас интересуют лишь положительные корни уравнений (5.1.17), (5.1.22), (5.1.27). Согласно теореме Декарта [6], [7] каждое из этих уравнений имеет только один положительный корень.

В книгах [1]—[4] можно найти координаты точек либрации  $L_1, L_2, L_3$  для задачи трех тел: Солнце — большая планета — астероид.

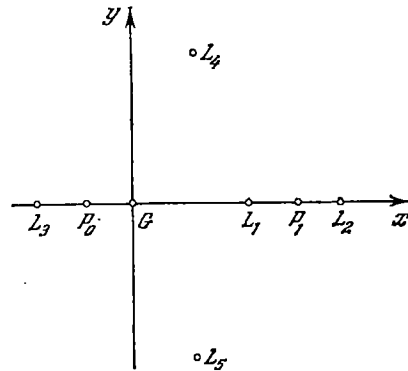


Рис. 71. Коллинеарные и треугольные точки либрации.

*Гомографические лагранжевы решения* — это частные решения уравнений (5.1.05), удовлетворяющие условиям

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ij}^{(0)}} = \rho(t), \quad (5.1.32)$$

где  $\rho(t)$  — некоторая функция времени,  $\Delta_{ij}^{(0)}$  — начальное значение взаимного расстояния  $\Delta_{ij}$ . Очевидно, что круговые лагранжевы решения и коллинеарные лагранжевы решения являются частным случаем гомографических решений, получаемых при  $\rho(t) \equiv 1$ . Доказательство существования гомографических коллинеарных и треугольных лагранжевых решений можно найти в книге Г. Н. Дубошина [3]. Полную теорию гомографических решений в задаче  $n$  тел, построенную Пицетти, можно найти в книге А. Уинтнера [8] (см также [9]).

*Примечание.* Используются и другие обозначения точек либрации.

## ОГРАНИЧЕННАЯ КРУГОВАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Эта глава посвящена важнейшей задаче небесной механики — ограниченной круговой задаче трех тел. Она нашла широкое применение как в классической небесной механике (теория движения Луны), так и в динамике космического полета (задача достижения Луны). Изложены сведения о либрационных решениях. Приведены сведения о сферах действия планет.

### § 2.01. Дифференциальные уравнения движения. Интеграл Якоби

*Ограниченная круговая задача трех тел* — это задача о движении материальной точки  $P_2 = P$  с нулевой массой  $m_2 = 0$ , притягиваемой по закону Ньютона двумя другими материальными точками  $P_0$  и  $P_1$ , имеющими отличные от нуля массы  $m_0$  и  $m_1$  и движущимися по круговым кеплеровским орбитам вокруг общего центра масс.

Ограниченная задача трех тел представляет собой предельный вариант неограниченной задачи трех тел, поэтому дифференциальные уравнения движения в различных системах координат могут быть получены из уравнений (5.1.01), если в них положить  $m_2 = 0$ .

Чаще всего для описания движения точки  $P$  используется барицентрическая прямоугольная система координат  $Gxyz$ , равномерно вращающаяся с угловой скоростью, равной среднему движению  $n$  точек  $P_0$  и  $P_1$ , причем плоскость  $Gxy$  совпадает с плоскостью орбит точек  $P_0$  и  $P_1$ , которые находятся на оси  $Gx$  (рис. 72). Координаты  $x, y, z$  точки  $P$  определяются из системы

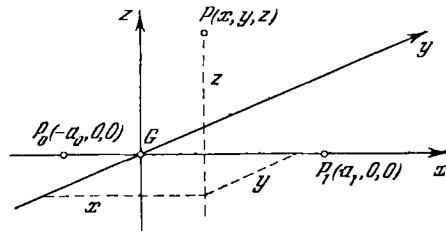


Рис. 72. Равномерно вращающаяся барицентрическая система координат.

дифференциальных уравнений [1], [3], [4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.01)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega(x, y, z) &= \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right), \\ r_0^2 &= (x + a_0)^2 + y^2 + z^2, \\ r_1^2 &= (x - a_1)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.02)$$

$f$  — постоянная тяготения.

Система (5.2.01) обладает первым интегралом

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C, \quad (5.2.03)$$

называемым *интегралом Якоби*.

*Плоская ограниченная круговая задача трех тел* описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.04)$$

для которых интеграл Якоби имеет вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C.$$

Другие первые интегралы систем (5.2.01) и (5.2.04) неизвестны, поэтому общее решение ограниченной круговой задачи трех тел до настоящего времени не найдено.

## § 2.02. Поверхность нулевой относительной скорости

Определение. *Поверхностью нулевой относительной скорости (поверхностью Хилла)* называется поверхность, определяемая уравнением

$$2\Omega = C, \quad (5.2.05)$$

или, в развернутом виде,

$$n^2(x^2 + y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{\sqrt{(x + a_0)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{(x - a_1)^2 + y^2 + z^2}}\right) = C. \quad (5.2.06)$$

В плоской ограниченной круговой задаче трех тел поверхности нулевой скорости соответствует *кривая нулевой скорости* (кривая Хилла)

$$n^2(x^2 + y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{\sqrt{(x+a_0)^2 + y^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + y^2}}\right) = C. \quad (5.2.07)$$

Из (5.2.06) видно, что поверхность нулевой скорости симметрична относительно координатных плоскостей  $Gxy$  и  $Gxz$ . Поверхность нулевой скорости разделяет пространство на области, в которых возможны реальные движения точки  $P$  (*области возможности движения*  $2\Omega \geq C$ ), и области, в которых ее реальные движения невозможны (*области невозможности движения*  $2\Omega < C$ ). Эти поверхности хорошо изучены [1] — [4], [10] — [13].

### § 2.03. Лагранжевы решения ограниченной круговой задачи трех тел. Точки либрации

Ограниченная круговая задача трех тел имеет известные частные решения: *треугольные лагранжевы решения* и *коллинеарные лагранжевы решения*. Гомографических лагранжевых решений нет, так как расстояние  $P_0P_1$  постоянно.

Как и в случае неограниченной задачи, координаты точек либрации  $L_4$  и  $L_5$  в системе  $Gxy$  даются равенствами

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_0). \quad (5.2.08)$$

Будем считать в дальнейшем, что  $P_0P_1 = 1$ . Тогда

$$y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.2.09)$$

Величина  $z$ , введенная для точки либрации  $L_1$  в § 1.02, равна

$$z = \frac{r}{1-r}, \quad r = |PP_1|. \quad (5.2.10)$$

Расстояние  $r$  определяется как положительный корень уравнения

$$(m_0 + m_1)r^5 - (3m_0 + 2m_1)r^4 + (3m_0 + m_1)r^3 - m_1r^2 + 2m_1r - m_1 = 0, \quad (5.2.11)$$

получаемого из уравнения (5.1.17), если заменить  $z$  через  $r$  и положить  $m_2 = 0$ .

Решение (5.2.11) можно представить в виде ряда по степеням малого параметра

$$v = \left(\frac{m_1}{3m_0}\right)^{1/3}, \quad (5.2.12)$$

если считать  $m_1 < m_0$ .

Для  $r$  имеем выражение

$$r = v - \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{9}v^3 - \dots \quad (5.2.13)$$

Для точки либрации  $L_2$  величина  $z$ , определяемая соотношением (5.1.18), равна

$$z = x_2 - x_1 = P_1 P_2 = r. \quad (5.2.14)$$

В этом случае  $r$  должно определяться как положительный корень уравнения

$$(m_0 + m_1)r^5 + (3m_0 + 2m_1)r^4 + (3m_0 + m_1)r^3 - m_1 r^2 - 2m_1 r - m_1 = 0, \quad (5.2.15)$$

получаемого из (5.1.17) при  $z = r$  и  $m_2 = 0$ .

Для точки либрации  $L_2$  имеем

$$r = v + \frac{1}{3}v - \frac{1}{9}v^2 + \dots \quad (5.2.16)$$

Наконец, для точки либрации  $L_3$  величина  $z$  равна

$$z = x_0 - x_2 = |P_0 P| = r_1. \quad (5.2.17)$$

Она определяется как положительный корень уравнения

$$(m_0 + m_1)r_1^5 + (2m_0 + 3m_1)r_1^4 + (m_0 + 3m_1)r_1^3 - m_1 r_1^2 - 2m_1 r_1 - m_1 = 0, \quad (5.2.18)$$

получаемого из (5.1.22), если положить  $z = r_1$  и  $m_2 = 0$ .

Решение уравнения (5.2.18) можно представить в виде ряда

$$r = 1 - \frac{7}{12}\mu + \frac{217}{288}\mu^2 + \dots, \quad (5.2.19)$$

где

$$\mu = \frac{m_1}{m_c}. \quad (5.2.20)$$

Решение уравнений (5.2.11), (5.2.15) и (5.2.18) можно искать и в виде других степенных рядов (см. [2], [3]).

Зная координаты точек либрации, можно определить значения постоянной Якоби  $C$  для лагранжевых решений. Численные значения постоянной Якоби для  $L_1, \dots, L_5$  можно найти, например, в [1] — [4].

## § 2.04. Различные гравитационные сферы

Для наглядности предположим, что одним притягивающим телом ( $P_0$ ) является Солнце, другим ( $P_1$ ) — большая планета, Луна или какой-либо спутник большой планеты, а точка с ну-

левой массой (притягиваемое тело)  $P$  — комета, астероид или искусственный небесный объект.

Пусть  $R_0$  — ускорение, сообщаемое нулевой массе  $P$  Солнцем, когда последнее принимается за центральное тело, а  $F_1$  — возмущающее ускорение, вызываемое притяжением планеты  $P_1$ . Пусть, далее,  $R_1$  — ускорение, сообщаемое нулевой массе  $P$  планетой  $P_1$ , когда планета принимается за центральное тело, а  $F_0$  — возмущающее ускорение, вызываемое притяжением Солнца  $P_0$ .

**О п р е д е л е н и е.** *Сферой тяготения планеты* называется область трехмерного пространства, в которой

$$R_1 > R_0. \quad (5.2.21)$$

Очевидно, граница сферы тяготения планеты определяется уравнением

$$R_1 = R_0. \quad (5.2.22)$$

Легко убедиться, что поверхность (5.2.22) не является сферой в строгом смысле. Приближенное значение радиуса сферы тяготения планеты определяется по формуле

$$\rho = r_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_0}}, \quad (5.2.23)$$

где  $r_1$  — расстояние планеты  $P_1$  от Солнца  $P_0$ .

**О п р е д е л е н и е.** *Сферой действия планеты  $P_1$*  называется область пространства, в которой

$$\frac{F_1}{R_0} > \frac{F_0}{R_1}. \quad (5.2.24)$$

Граница сферы действия планеты  $P_1$  определяется уравнением

$$\frac{F_1}{R_0} = \frac{F_0}{R_1}. \quad (5.2.25)$$

Приближенное значение радиуса сферы действия планеты определяется по формуле

$$\rho_1 = r_1 \sqrt[5]{\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2}. \quad (5.2.26)$$

Так как  $r_1$  для всех больших планет не постоянно, а колеблется в некоторых пределах, то отсюда следует, что  $\rho$  и  $\rho_1$  также колеблются в некоторых пределах. Подробности о гравитационных сферах можно найти в [14]. В табл. 68 приводятся радиусы сфер тяготения больших планет и Луны в а. е., а в табл. 69 — радиусы их сфер действия (а. е.).



Таблица 68

Планета	$\rho_{\min}$	$\rho_{\max}$
Меркурий	0,00013	0,00019
Венера	0,00112	0,00114
Земля	0,00171	0,00177
Марс	0,00078	0,00095
Юпитер	0,15298	0,16855
Сатурн	0,15222	0,17017
Уран	0,12091	0,13289
Нептун	0,21452	0,21823
Плутон	0,04959	0,08214
Луна — Земля	0,00027	0,00030
Луна — Солнце	0,00019	0,00019

Таблица 69

Планета	$\rho_1, \min$	$\rho_1, \max$
Меркурий	0,00060	0,00091
Венера	0,00409	0,00415
Земля	0,00610	0,00631
Марс	0,00350	0,00422
Юпитер	0,30665	0,33786
Сатурн	0,34428	0,38488
Уран	0,32991	0,36261
Нептун	0,57551	0,58547
Плутон	0,17825	0,29523
Луна — Земля	0,00042	0,00047
Луна — Солнце	0,00105	0,00108

Определение. *Сферой влияния планеты  $P_1$  относительно Солнца  $P_0$  называется сфера, центр которой совпадает с центром планеты и с радиусом*

$$\rho_2 = 1,15r_1 \sqrt[3]{\frac{m_1}{m_0}}, \quad (5.2.27)$$

где, как и раньше,

$$r_1 = |P_0P_1|. \quad (5.2.28)$$

М. Д. Кислик показал [15], что построение траекторий космического полета методом «склеивания» выгоднее, если вместо сфер действия рассматривать сферы влияния. В этом случае ошибки в параметрах траектории при переходе от одного притягивающего центра к другому в среднем минимальны. Средние радиусы сфер влияния больших планет относительно Солнца в а. е. даны в табл. 70.

Таблица 70

Планета	$\rho_2$	Планета	$\rho_2$	Планета	$\rho_2$
Меркурий	0,00241	Марс	0,01204	Уран	0,77592
Венера	0,01138	Юпитер	0,58863	Нептун	1,29766
Земля	0,01672	Сатурн	0,72241	Плутон	0,61885

Определение. *Гравитационной сферой Хилла [11] называется область пространства с центром в планете  $P_1$  и с радиусом  $r$ , равным расстоянию либрационной точки  $L_1$  от планеты  $P_1$ .*

Радиус сферы Хилла  $r$  определяется формулой (5.2.13) (см. § 2.03)

$$r \approx r_1 \left[ \left( \frac{m_1}{3m_0} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left( \frac{m_1}{3m_0} \right)^{2/3} - \frac{1}{9} \left( \frac{m_1}{3m_0} \right) \right]. \quad (5.2.29)$$

Значения радиусов сфер Хилла для больших планет и Луны даны в табл. 71.

Таблица 71

Планета	$r$	Планета	$r$	Планета	$r$
Меркурий	0,00148	Юпитер	0,34697	Плутон	0,38392
Венера	0,00674	Сатурн	0,42881	Луна — Земля	0,00039
Земля	0,01001	Уран	0,46494	Луна — Солнце	0,00234
Марс	0,00724	Нептун	0,77035		

Гравитационная сфера Хилла определяет область пространства, в которой движения точки  $P$  устойчивы в смысле Хилла (см. ч. X, § 3.03), т. е. точка  $P$  будет вечно спутником планеты.

В книге [14] можно найти определение и размеры гравитационных сфер Солнца относительно ядра Галактики.

### § 2.05. Периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел

Приведенные в § 2.03 лагранжевы решения ограниченной круговой задачи трех тел являются примером периодических орбит. Но этим не исчерпываются все известные периодические решения ограниченной круговой задачи.

Периодические орбиты можно было бы объединить в следующие классы:

а) периодические решения в окрестности точек либрации  $L_1, \dots, L_5$  (почти-либрационные решения);

б) периодические орбиты в окрестности одной из притягивающих масс (спутниковые орбиты);

в) периодические решения Пуанкаре первого сорта;

г) периодические решения Пуанкаре второго сорта;

д) периодические решения Пуанкаре третьего сорта;

е) периодические решения других сортов.

Классы а) и б) периодических орбит были в первом приближении получены без использования методов Ляпунова и Пуанкаре отыскания периодических решений и были известны задолго до Ляпунова и Пуанкаре.

Рассмотрим более подробно почти-либрационные решения в окрестности точки  $L_4$  (или  $L_5$ ).

Ради простоты положим  $f = 1$ ,  $n^2 = m_0 + m_1 = 1$ ,  $m_0 = 1 - \mu$ ,  $m_1 = \mu$ . Тогда лагранжево периодическое решение, изображаемое точкой  $L_4$ , дается формулами

$$x_{L_4} = \frac{1}{2} - \mu, \quad y_{L_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_{L_4} = 0. \quad (5.2.30)$$

Для исследования решений ограниченной круговой задачи трех тел введем новые переменные  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ :

$$\xi = x - x_{L_4}, \quad \eta = y - y_{L_4}, \quad \zeta = z. \quad (5.2.31)$$

Тогда вместо уравнений (5.2.01) будем иметь уравнения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\Omega'}{\partial\xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\Omega'}{\partial\eta}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial\Omega'}{\partial\zeta}, \quad (5.2.32)$$

где

$$\Omega'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}[\xi^2 + \eta^2 + \xi(1-2\mu) + \eta\sqrt{3}] + \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1}, \quad (5.2.33)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 + \xi + \eta\sqrt{3} + 1, \\ r_1^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 - \xi + \eta\sqrt{3} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.34)$$

Если разложить  $\frac{\partial\Omega'}{\partial\xi}$ ,  $\frac{\partial\Omega'}{\partial\eta}$ ,  $\frac{\partial\Omega'}{\partial\zeta}$  в ряды по степеням  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и сохранить в них лишь линейные члены, то получаем дифференциальные уравнения *первого приближения* \*). В частности, для плоского случая будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} &= \frac{3}{4}\xi + \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4}\eta, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} &= \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4}\xi + \frac{9}{4}\eta. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.35)$$

В переменных  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ , связанных с  $\xi$ ,  $\eta$  формулами преобразования

$$\xi_1 = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta, \quad \eta_1 = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \quad (5.2.36)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\sqrt{3}(1-2\mu), \quad (5.2.37)$$

уравнения (5.2.35) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi_1}{dt^2} - 2\frac{d\eta_1}{dt} &= \frac{3}{2}(1 + \sqrt{1-3\mu(1-\mu)})\xi_1, \\ \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + 2\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{3}{2}(1 - \sqrt{1-3\mu(1-\mu)})\eta_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.38)$$

\*) Уравнения первого приближения часто называются *уравнениями в вариациях*.

Общее решение системы (5.2.38) имеет вид [2]

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= C_1 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\lambda_2 t + \alpha_2), \\ \eta_1 &= q_1 C_1 \sin(\lambda_1 t + \alpha_1) + q_2 C_2 \sin(\lambda_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.39)$$

где  $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$  — произвольные постоянные, а

$$q_i = -\frac{2\lambda_i^2 + 3\sqrt{1-3\mu(1-\mu)}}{4\lambda_i} \quad (i = 1, 2),$$

если  $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$  являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \quad (5.2.40)$$

и

$$0 < \mu < \mu_0, \quad 1 - \mu_0 < \mu < 1, \quad (5.2.41)$$

причем

$$\mu_0 = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0,03852. \quad (5.2.42)$$

*Условия (5.2.41) и (5.2.42) указывают на то, что лагранжево треугольное решение  $L_4$  устойчиво в смысле Ляпунова в первом приближении (см. ч. X, гл. 3).*

Если  $\mu_0 < \mu < 1 - \mu_0$ , то общее решение уравнений (5.2.38) будет содержать неограниченные функции времени, поэтому в этом случае точка либрации  $L_4$  неустойчива в смысле Ляпунова (см. ч. X, гл. 3).

**Замечание 1.** Эти выводы в равной мере относятся и к точке либрации  $L_5$ .

**Замечание 2.** Точки либрации  $L_1, L_2, L_3$  неустойчивы в смысле Ляпунова даже в первом приближении [1].

Полученные Пуанкаре [16] периодические решения классов в), г) и д) характеризуются тем, что их периоды совпадают с периодом «порождающего» решения, т. е. решения уравнений движения при нулевом значении малого параметра.

Различия между ними следующие:

1) решения первого сорта — это плоские почти-круговые периодические решения;

2) решения второго сорта — плоские почти-эллиптические периодические решения;

3) решения третьего сорта — пространственные периодические решения.

Для решений первого сорта оскулирующий эксцентриситет пропорционален  $\mu$  [см. (5.2.40)] и поэтому обращается в нуль вместе с  $\mu$ , а для решений второго сорта  $e \neq 0$  при  $\mu = 0$ . Пуанкаре доказал, что такие периодические решения имеются и в неограниченной задаче трех тел.

К периодическим решениям класса е) можно отнести периодические орбиты с периодом, отличным от периода порождающего решения. Такими являются периодические решения Шварцшильда [17]. Эти вопросы подробно рассмотрены в фундаментальном сочинении Пуанкаре [16], а также в книгах Г. Н. Дубошина [3], Ф. Мультона [18], Г. А. Чеботарева [19] и К. Зигеля [20].

Кроме аналитических методов для отыскания периодических решений ограниченной круговой задачи трех тел применяются и численные методы. Эти результаты, сопровождаемые подробной библиографией, можно найти в монографии В. Себехея [21].

### § 2.06. Критерий Тиссерана

При близком прохождении кометы от большой планеты элементы ее орбиты могут заметно измениться, поэтому возникает вопрос об отождествлении комет с различными системами элементов.

*Необходимым условием тождественности двух комет является равенство значений постоянной Якоби  $C$  для различных систем элементов [22]. В литературе это утверждение получило название критерия Тиссерана.*

Аналитически критерий Тиссерана выражается равенством, вытекающим из интеграла Якоби

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{2n'}{k} \sqrt{a_1(1-e_1^2)} \cos i_1 &= \\ &= \frac{1}{a_2} + \frac{2n'}{k} \sqrt{a_2(1-e_2^2)} \cos i_2, \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

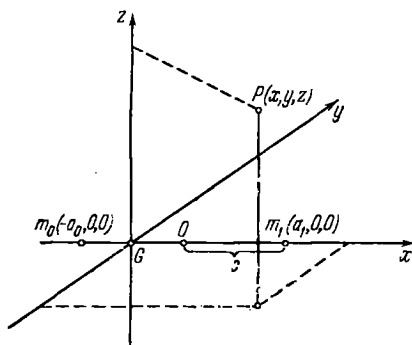


Рис. 73. Прямоугольные барицентрические координаты точки  $P$  с нулевой массой.  $G$  — центр масс точек  $m_0$  и  $m_1$ ,  $O$  — середина отрезка  $m_0m_1$ .

где  $n'$  — среднее движение возмущающей планеты,  $k$  — постоянная Гаусса.

### § 2.07. Уравнения ограниченной круговой задачи в эллипсоидальных переменных

Если ввести вместо прямоугольных барицентрических координат  $x, y, z$  точки  $P$  (см. рис. 73) эллипсоидальные координаты  $u, v, \omega$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a_1 - a_0}{2} - c \operatorname{sh} u \cos v, & y &= c \operatorname{sh} u \sin v \cos \omega, \\ z &= c \operatorname{sh} u \sin v \sin \omega, & c &= \frac{a_0 + a_1}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.44)$$

то тогда уравнения (5.2.01) принимают вид

$$\begin{aligned}
 & (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \ddot{u} + \frac{1}{2} \text{sh } 2u \cdot (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - \\
 & - \frac{1}{2} \text{sh } 2u \sin^2 v \cdot \dot{\omega}^2 + \sin 2v \cdot \dot{u} \dot{v} + \\
 & + 2n (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \cos \omega \cdot \dot{v} - n \text{sh}^2 u \sin 2v \sin \omega \cdot \dot{\omega} = \\
 & = - \frac{n^2 (a_1 - a_0)}{2c} \text{sh } u \cos v + \frac{n^2}{2} \text{sh } 2u (1 - \sin^2 v \sin^2 \omega) + \\
 & \quad + \frac{f}{c^3} \Psi_1 \text{sh } u \cos v - \frac{f}{2c^3} \Psi_2 \text{sh } 2u \sin^2 v, \\
 & (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \ddot{v} - \frac{1}{2} \sin 2v (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - \\
 & - \frac{1}{2} \text{sh}^2 u \sin 2v \cdot \dot{\omega}^2 + \text{sh } 2u \cdot \dot{u} \dot{v} - \\
 & - 2n (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \cos \omega \cdot \dot{u} + n \text{sh } 2u \sin^2 v \sin \omega \cdot \dot{\omega} = \\
 & = \frac{n^2 (a_1 - a_0)}{2c} \text{ch } u \sin v - \frac{n^2}{2} \sin 2v (1 + \text{sh}^2 u \sin^2 \omega) - \\
 & \quad - \frac{f}{c^3} \Psi_1 \text{ch } u \sin v - \frac{f}{2c^3} \Psi_2 \text{sh}^2 u \sin 2v, \\
 & \text{sh } u \sin v \cos \omega \cdot \ddot{\omega} + 2 \text{ch } u \sin v \cos \omega \cdot \dot{u} \dot{\omega} + \\
 & + 2 \text{sh } u \cos v \cos \omega \cdot \dot{v} \dot{\omega} + n \text{sh } u \cos v \sin 2\omega \cdot \dot{u} - \\
 & - n \text{ch } u \sin v \sin 2\omega \cdot \dot{v} = n^2 \text{sh } u \sin v \sin \omega \cos^2 \omega, \\
 & \Psi_1 = \frac{m_0 (1 - \text{ch } u \cos v)}{(\text{ch } u - \cos v)^3} - \frac{m_1 (1 + \text{ch } u \cos v)}{(\text{ch } u + \cos v)^3}, \\
 & \Psi_2 = \frac{m_0}{(\text{ch } u - \cos v)^3} + \frac{m_1}{(\text{ch } u + \cos v)^3}.
 \end{aligned} \tag{5.2.45}$$

Каноническая форма уравнений (5.2.45) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_u}, \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_v}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\omega}, \\
 \frac{dp_u}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial u}, \\
 \frac{dp_v}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial v}, \\
 \frac{dp_\omega}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial \omega}.
 \end{aligned} \right\} \tag{5.2.46}$$

В уравнениях (5.2.46) функция Гамильтона  $H$  дается равенством

$$\begin{aligned}
 H(u, v, \omega, p_u, p_v, p_\omega) = & \frac{p_u^2 + p_v^2}{2c^2 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} + \frac{p_\omega^2}{2c^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v} + \\
 & + \frac{(nc^2 \sin 2v - 2l \operatorname{ch} u \sin v) \cos \omega \cdot p_u}{2c^2 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} + \\
 & + \frac{(nc^2 \operatorname{sh} 2u - 2l \operatorname{sh} u \cos v) \cos \omega \cdot p_v}{2c^2 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} + \\
 & + \frac{(l - nc^2 \operatorname{ch} u \cos v) \operatorname{sh} u \sin v \sin \omega \cdot p_\omega}{c^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v} + \\
 & + \frac{\cos^2 \omega}{8c^2 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} [(nc^2 \sin 2v - 2l \operatorname{ch} u \sin v)^2 + \\
 & + (nc^2 \operatorname{sh} 2u - 2l \operatorname{sh} u \cos v)^2] + \\
 & + \frac{n^2 c^2}{2} (\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v - \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v \sin^2 \omega) - \\
 & - \frac{f[(m_0 + m_1) \operatorname{ch} u + (m_0 - m_1) \cos v]}{c (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)}, \\
 l = & \frac{nc(a_1 - a_0)}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.2.47}$$

Интеграл энергии:

$$H(u, v, \omega, p_u, p_v, p_\omega) = h. \tag{5.2.48}$$

Для плоского варианта ограниченной круговой задачи трех тел имеем следующие уравнения.

Уравнения движения в эллиптических переменных  $u, v$ :

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) \ddot{u} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2u (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + \sin 2v \cdot \dot{u} \dot{v} + \\
 + 2n (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) \dot{v} = \\
 = - \frac{n^2 (a_1 - a_0)}{2c} \operatorname{sh} u \cos v + \frac{n^2 \operatorname{sh} 2u}{2} + \\
 + \frac{f \operatorname{sh} u \cos v}{c^3} \left[ \frac{m_0 (1 - \operatorname{ch} u \cos v)}{(\operatorname{ch} u - \cos v)^3} - \frac{m_1 (1 + \operatorname{ch} u \cos v)}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^3} \right] - \\
 - \frac{f \operatorname{sh} 2u \sin^2 v}{2c^3} \left[ \frac{m_0}{(\operatorname{ch} u - \cos v)^3} + \frac{m_1}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^3} \right], \\
 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) \ddot{v} - \frac{\sin 2v}{2} (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + \operatorname{sh} 2u \cdot \dot{u} \dot{v} - \\
 - 2n (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) \dot{u} = \frac{n^2 (a_1 - a_0)}{2c} \operatorname{ch} u \sin v - \frac{n^2 \sin 2v}{2} - \\
 - \frac{f \operatorname{ch} u \sin v}{c^3} \left[ \frac{m_0 (1 - \operatorname{ch} u \cos v)}{(\operatorname{ch} u - \cos v)^3} - \frac{m_1 (1 + \operatorname{ch} u \cos v)}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^3} \right] - \\
 - \frac{f \sin 2v \cdot \operatorname{sh}^2 u}{2c^3} \left[ \frac{m_0}{(\operatorname{ch} u - \cos v)^3} + \frac{m_1}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^3} \right].
 \end{aligned} \tag{5.2.49}$$

Канонические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_u}, & \frac{dp_u}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial u}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_v}, & \frac{dp_v}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.50)$$

Функция Гамильтона:

$$\begin{aligned} H(u, v, p_u, p_v) &= \\ &= \frac{p_u^2 + p_v^2}{2c^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} + \frac{(nc^2 \sin 2v - 2l \operatorname{ch} u \sin v) p_u}{2c^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} + \\ &+ \frac{(nc^2 \operatorname{sh} 2u - 2l \operatorname{sh} u \cos v) p_v}{2c^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} + \frac{1}{8c^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)} \times \\ &\times [(nc^2 \sin 2v - 2l \operatorname{ch} u \sin v)^2 + (nc^2 \operatorname{sh} 2u - 2l \operatorname{sh} u \cos v)^2] + \\ &+ \frac{n^2 c^2 (\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)}{2} - \frac{f[(m_0 + m_1) \operatorname{ch} u + (m_0 - m_1) \cos v]}{c(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)}, \\ & \quad l = \frac{nc(a_1 - a_0)}{2}. \end{aligned} \quad (5.2.51)$$

Интеграл энергии:

$$H(u, v, p_u, p_v) = h. \quad (5.2.52)$$

Поверхность Хилла дается соотношением

$$\begin{aligned} n^2 c (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) \left[ \frac{(a_1 - a_0)^2}{4} - c(a_1 - a_0) \operatorname{ch} u \cos v + \right. \\ \left. + c^2 \operatorname{ch}^2 u \cos^2 v + c^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v \cos^2 v \right] + \\ + 2f[m_0(\operatorname{ch} u + \cos v) + m_1(\operatorname{ch} u - \cos v)] - \\ - cC(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

$C$  — постоянная, определяемая начальными условиями.

В плоском случае кривая Хилла имеет уравнение

$$\begin{aligned} n^2 c^3 \operatorname{ch}^4 u - n^2 c^2 (a_1 - a_0) \operatorname{ch}^3 u \cos v - c(n^2 a_0 a_1 + C)(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) + \\ + [2f(m_0 + m_1) + n^2 c^2 (a_1 - a_0) \cos^3 v] \operatorname{ch} u + \\ + 2f(m_0 - m_1) \cos v - n^2 c^3 \cos^4 v = 0. \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

В эллиптических переменных кривая Хилла имеет более простой вид, чем в прямоугольных координатах (5.2.07). Уравнение (5.2.54) разрешимо в явном виде относительно  $\operatorname{ch} u$  или  $\cos u$ , так как оно представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени относительно этих переменных.



Приближенные области возможности движения на плоскости  $Gxy$ , приведенные во многих книгах [2, 4], отображаются в заштрихованные области на рис. 74.

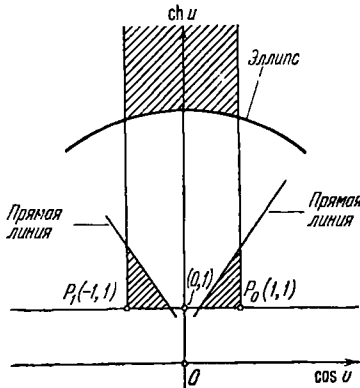


Рис. 74. Области возможности движения (заштрихованные части) на плоскости  $(\cos v, \text{ch } u)$ , где  $v, u$  — эллиптические координаты. Отмеченные прямые линии и эллипс изображают кривую Хилла на этой плоскости.

Вся плоскость  $Gxy$  отображается на плоскости  $(\cos v, \text{ch } u)$  в полосу  $\{\text{ch } u \geq 1, -1 \leq \cos v \leq 1\}$ , поэтому при достаточно больших положительных энергиях областью возможности движения на плоскости  $(\cos v, \text{ch } u)$  будет вся указанная полоса.

### § 2.08. Уравнение Гамильтона — Якоби в эллипсоидальных переменных

В эллипсоидальных координатах  $u, v, w$  уравнение Гамильтона — Якоби для ограниченной круговой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{sh}^2 u \sin^2 v \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 \right] + (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \left( \frac{\partial S}{\partial w} \right)^2 + \\ & + 2 \frac{\partial S}{\partial u} \left( \frac{nc^2}{2} \sin 2v - l \text{ch } u \sin v \right) \text{sh}^2 u \sin^2 v \cos w + \\ & + 2 \frac{\partial S}{\partial v} \left( \frac{nc^2}{2} \text{sh } 2u - l \text{sh } u \cos v \right) \text{sh}^2 u \sin^2 v \cos w + \\ & + 2 \frac{\partial S}{\partial w} (l - nc^2 \text{ch } u \cos v) (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \text{sh } u \sin w \cos w = \\ & = 2hc^2 (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) \text{sh}^2 u \sin^2 v + \\ & + 2fc [(m_0 + m_1) \text{ch } u + (m_0 - m_1) \cos v] \text{sh}^2 u \sin^2 v. \quad (5.2.55) \end{aligned}$$

В плоском варианте ( $w = 0, \dot{w} = 0, \frac{\partial S}{\partial w} = 0$ ) [32]:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 + 2 \frac{\partial S}{\partial u} \left( \frac{nc^2}{2} \sin 2v - l \text{ch } u \sin v \right) + \\ & + 2 \frac{\partial S}{\partial v} \left( \frac{nc^2}{2} \text{sh } 2u - l \text{sh } u \cos v \right) = 2hc^2 (\text{ch}^2 u - \cos^2 v) + \\ & + 2fc [(m_0 + m_1) \text{ch } u + (m_0 - m_1) \cos v]. \quad (5.2.56) \end{aligned}$$

### § 2.09. Понижение порядка системы уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел

Методом Лагранжа — Шарпи [33] уравнение Гамильтона — Якоби (5.2.56), которое является нелинейным уравнением в частных производных с двумя аргументами, можно привести к квазилинейному уравнению в частных производных, искомая функция в котором также зависит от двух аргументов. Это уравнение имеет вид [34]

$$\frac{1}{\sqrt{A_2 + 0,5A_3 + \varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{A_1 + 0,5A_3 - \varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = F(u, v, \varphi), \quad (5.2.57)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(u) &= \frac{n^2 c^4}{4} \operatorname{sh}^2 2u + \left[ hc^2 + \frac{n^2 c^2 (a_1 - a_0)^2}{8} \right] \operatorname{ch} 2u + \\ &\quad + 2fc(m_0 + m_1) \operatorname{ch} u + \alpha, \\ A_2(v) &= \frac{n^2 c^4}{4} \sin^2 2v - \left[ hc^2 + \frac{n^2 c^2 (a_1 - a_0)^2}{8} \right] \cos 2v + \\ &\quad + 2fc(m_0 - m_1) \cos v - \alpha, \\ A_3(u, v) &= \frac{n^2 c^3 (a_1 - a_0)}{4} (\operatorname{ch} u \cos 3v - \operatorname{ch} 3u \cos v), \\ F(u, v, \varphi) &= 2nc^2 (\operatorname{ch} 2u - \cos 2v) - \\ &\quad - \frac{n^2 c^3 (a_1 - a_0) (\operatorname{sh} u \cos 3v - 3 \operatorname{sh} 3u \cos v)}{8 \sqrt{A_2 + 0,5A_3 + \varphi}} + \\ &\quad + \frac{n^2 c^3 (a_1 - a_0) (\sin v \operatorname{ch} 3u - 3 \sin 3v \operatorname{ch} u)}{8 \sqrt{A_1 + 0,5A_3 - \varphi}}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.58)$$

$\alpha$  — произвольная постоянная.

Кроме того, интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби (5.2.56) сводится к нахождению одного первого интеграла обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [34]

$$\begin{aligned} &2[A_1(u) + A_2(v) + A_3(u, v)] \frac{d^2 u}{dv^2} + \\ &+ \frac{du}{dv} \left[ 1 + \left( \frac{du}{dv} \right)^2 \right] \left[ \frac{dA_2}{dv} + \frac{\partial A_3}{\partial v} \right] - \left[ 1 + \left( \frac{du}{dv} \right)^2 \right] \left[ \frac{dA_1}{du} + \frac{\partial A_3}{\partial u} \right] + \\ &+ 2nc^2 (\operatorname{ch} 2u - \cos 2v) \left[ 1 + \left( \frac{du}{dv} \right)^2 \right]^{1/2} [A_1(u) + A_2(v) + A_3(u, v)]^{1/2} = 0. \end{aligned} \quad (5.2.59)$$

Вопросы интегрируемости уравнений ограниченной круговой задачи трех тел рассматриваются в части X.

## ДРУГИЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

В целом ряде практических задач астрономии и динамики космического полета вместо рассмотрения задачи трех тел в строгой постановке вполне достаточно исходить из различных упрощенных ее вариантов, так называемых *ограниченных задач*. В этой главе излагаются ограниченные задачи, нашедшие наиболее широкие приложения на практике.

## § 3.01. Общий случай ограниченной задачи трех тел

Ограниченная задача трех тел — это задача о движении материальной точки  $P$  с нулевой массой, притягиваемой по закону Ньютона двумя другими материальными точками  $P_0$  и  $P_1$ , имеющими отличные от нуля массы  $1 - \mu$  и  $\mu$  и движущимися по кеплеровским орбитам вокруг общего центра масс. Ограниченная круговая задача трех тел является частным случаем этой задачи.

Дифференциальные уравнения движения задачи могут быть написаны в различных видах, однако наиболее удобная форма уравнений была дана Нехвиллом [23] и Н. Ф. Рейн [24]. Пусть  $Gxyz$  — барицентрическая прямоугольная неравномерно вращающаяся система координат, плоскость  $Gxy$  которой совпадает с плоскостью орбит конечных масс, а направление оси  $Gx$  совпадает с направлением  $P_0P_1$ . Дифференциальные уравнения движения точки  $P$  имеют вид [23]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2 \frac{dy}{dv} &= \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2 \frac{dx}{dv} &= \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dv^2} &= \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.01)$$

где  $v$  — истинная аномалия одной из возмущающих масс, а функция  $U$  выражается соотношением

$$U = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}ez^2 \cos v, \quad (5.3.02)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \\ \rho_2^2 &= (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.03)$$

Переход от истинной аномалии  $v$  к времени  $t$  осуществляется с помощью равенства

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(1 + e \cos v)^2}{p^{3/2}}, \quad (5.3.04)$$

$e, p$  — соответственно эксцентриситет и параметр конического сечения.

Системы единиц выбраны следующим образом:  $P_0 P_1 = 1$ , сумма масс возмущающих тел равна единице, постоянная тяготения  $f = 1$ .

Уравнения (5.3.01) имеют гомографические лагранжевы частные решения, рассмотренные в § 1.02. В выбранной системе координат гомографические решения изображаются неподвижными точками. Например, точка либрации  $L_4$  имеет координаты

$$x_4 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad y_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = 0. \quad (5.3.05)$$

В зависимости от значения эксцентриситета  $e$  можно различать три частных случая ограниченной задачи трех тел: ограниченная эллиптическая задача ( $0 < e < 1$ ), ограниченная параболическая задача ( $e = 1$ ), ограниченная гиперболическая задача ( $e > 1$ ). Некоторые варианты ограниченной задачи трех тел, когда все массы отличны от нуля, рассмотрены в работе Н. Д. Моисеева [25].

### § 3.02. Задача двух неподвижных центров

*Задача двух неподвижных центров* — это задача о движении материальной точки  $P$  с нулевой массой в ньютоновском поле притяжения, создаваемом двумя неподвижными в абсолютной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  притягивающими центрами  $P_0$  и  $P_1$  с массами  $m_0$  и  $m_1$  соответственно.

Если началом координат  $O$  выбрана середина отрезка  $P_0 P_1 = 2c$  и ось  $O\zeta$  направлена по прямой  $P_0 P_1$ , то уравнения

движения точки  $P$  имеют вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (5.3.06)$$

где

$$U = f \left( \frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1} \right), \quad (5.3.07)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= \xi^2 + \eta^2 + (\xi + c)^2, \\ r_1^2 &= \xi^2 + \eta^2 + (\xi - c)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.08)$$

Задача двух неподвижных центров относится к интегрируемым задачам небесной механики. Если перейти от координат  $\xi, \eta, \zeta$  к эллипсоидальным координатам  $\lambda, \mu, \omega$  с помощью соотношений [26]

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c\lambda\mu, \\ \eta &= c \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \sin \omega, \\ \zeta &= c \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (5.3.09)$$

и ввести новую независимую переменную [26]  $\tau$ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (5.3.10)$$

то система (5.3.06) приводится к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \sqrt{F_1(\lambda)}, \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= \sqrt{F_2(\mu)}, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= C_3 \left( \frac{1}{1 - \mu^2} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_1(\lambda) &= C_1\lambda^4 + \frac{f(m_0 + m_1)}{c^3} \lambda^3 + \\ &+ (C_2 - C_1)\lambda^2 - \frac{f(m_0 + m_1)}{c^3} \lambda - \frac{C_3^2}{2} - C_2, \\ F_2(\mu) &= C_1\mu^4 + \frac{f(m_0 - m_1)}{c^3} \mu^3 + \\ &+ (C_2 + C_1)\mu^2 - \frac{f(m_0 - m_1)}{c^3} \mu - \frac{C_3^2}{2} - C_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.12)$$

Интегрирование уравнений (5.3.11) дает общее решение задачи двух неподвижных центров, зависящее от шести произвольных

постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ . Качественному анализу задачи двух неподвижных центров посвящено много работ [4], [27]—[30]. Особое значение приобрела эта задача в связи с исследованием движения искусственных спутников планет. В этом случае потенциал сферoidalной планеты удается с высокой точностью аппроксимировать потенциалом так называемой *обобщенной задачи* двух неподвижных центров [26], [31].

В спутниковой теории массам неподвижных центров приписываются надлежащим образом выбранные комплексно-сопряженные значения, а сами центры располагаются на некотором минимом расстоянии. Развитая на основе обобщенной задачи теория движения ИСЗ изложена в ч. VI.

### § 3.03. Задача Хилла

*Задача Хилла* — это предельный вариант ограниченной эллиптической задачи трех тел  $P_0, P_1, P$ , получаемый из последней, если Солнце  $P_0$  удаляется на бесконечность таким образом, чтобы оставалось справедливим соотношение

$$n_0^2 a_0^3 = f(m_0 + m_1), \quad (5.3.13)$$

где  $a_0$  — большая полуось орбиты Солнца,  $n_0$  — среднее движение Солнца.

Из равенства (5.3.13) вытекает, что масса Солнца  $m_0$  неограниченно возрастает и, следовательно, возмущающее влияние Солнца на движение точки  $P$  в некоторой степени сохраняется.

Если ввести планетоцентрическую прямоугольную вращающуюся систему координат  $P_1xyz$ , ось  $P_1x$  которой проходит через Солнце  $P_0$ , то уравнения движения в задаче Хилла примут вид [1]—[3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + \frac{fm_1x}{r^3} - 3n_0^2x &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{fm_1y}{r^3} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{fm_1z}{r^3} + n_0^2z &= \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.14)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} n_0^2 \left[ 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x^2 - 3x^2 + r^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \right], \quad (5.3.15)$$

$r$  — планетоцентрическое расстояние точки  $P$ ,  $r_1$  — планетоцентрическое расстояние Солнца  $P_0$ .

Если эксцентриситет орбиты Солнца  $e_0 = 0$ , то  $\Omega = 0$  и уравнения Хилла (5.3.14) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + \frac{fm_1x}{r^3} - 3n_0^2x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{fm_1y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{fm_1z}{r^3} + n_0^2z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.16)$$

Уравнения (5.3.16) допускают интеграл Якоби

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 3n_0^2x^2 - n^2z^2 + \frac{2fm_1}{r} + 2h, \quad (5.3.17)$$

где  $h$  — произвольная постоянная.

Наконец, плоская круговая задача Хилла описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + \frac{fm_1x}{r^3} - 3n_0^2x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{fm_1y}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.18)$$

Уравнения Хилла служат основой для теории движения Луны Хилла — Брауна, изложенной в гл. 10 ч. IV.

#### ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ V

1. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
2. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
3. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
4. Шарлье К., Небесная механика, «Наука», 1966.
5. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, «Наука», 1965.
6. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, изд. 9-е, «Наука», 1968.
7. Сушкевич А. К., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1941.
8. Уинтнер А., Аналитические основы небесной механики, «Наука», 1967.
9. Брумберг В. А., Астрон. ж. 34, 1, 1957.
10. Мультион Ф., Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935.
11. Hill G., Amer. J. Math. 1, 1878.
12. Мойсеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 9, вып. 1, 7, 1939.
13. Рейн Н. Ф., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 9, вып. 1, 191, 1939.
14. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
15. Кислик М. Д., Косм. исследования 2, 6, 853, 1964.
16. Анри Пуанкаре, Избранные труды, т. I, «Наука», 1971; т. II, «Наука», 1972.
17. Schwarzschild K., Astron. Nachr. 147, № 3522, 287, 1898.
18. Moulton F. R., Periodic orbits, Washington, 1920.

19. Чеботарев Г. А., Успехи астрон. наук **5**, 176, 1950.
20. Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, ИЛ, 1959.
21. Szebehely V., Theory of orbits, Academic Press, New York and London, 1967.
22. Tisserand F., Traité de Mécanique céleste, t. I—IV, Paris, 1889—1896.
23. Nechvile V., Compt. Rend. **182**, 310, 1926.
24. Рейн Н. Ф., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга **14**, вып. 1, 127, 1940.
25. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга **21**, 3, 1952.
26. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения, «Наука», 1968.
27. Бадалян Г. К., Астрон. ж. **11**, 4, 346, 1934.
28. Tallqvist H., Acta Soc. Sci. Fennicae, nova серия A, 1, № 1, 1927.
29. Алексеев В. М., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР **10**, 4 (117), 241, 1965.
30. Иванов Ю. И., Тр. Астрофиз. ин-та АН Каз. ССР **7**, 32, 1966.
31. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Астрон. ж. **40**, 2, 363, 1963.
32. Гребеников Е. А., Киоса М. Н., ПММ **38**, 2, 364, 1974.
33. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1953.
34. Гребеников Е. А., Киоса М. Н., ДУ IX, 11, 2041, 1973.



## ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

На движение искусственных спутников Земли действует целый ряд возмущающих факторов, важнейшими из которых являются несферичность Земли, сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца и световое давление. Однако наибольшие возмущения в движении близких спутников обусловлены второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли. Поэтому, как и в теории Луны, здесь следует выделить *главную проблему*. Эта проблема заключается в решении дифференциальных уравнений движения, возмущающей функцией в которых является вторая зональная гармоника геопотенциала. Очень важно, чтобы главная проблема была решена с высокой степенью точности и по возможности строго в математическом отношении. Решение главной проблемы составляет первый этап в построении теории движения ИСЗ. Второй этап заключается в определении остальных возмущений.

Решение главной проблемы в теории движения ИСЗ может быть получено двумя путями: во-первых, с помощью методов классической теории возмущений и, во-вторых, путем построения промежуточных орбит с использованием некоторых аппроксимирующих выражений для потенциала притяжения Земли, допускающих интегрирование уравнений движения спутника в замкнутой форме. Результаты применения классических методов изложены в главе 2. Теория промежуточных орбит изложена в главе 3.

Определение возмущений гравитационной природы (возмущения от зональных, тессеральных и секториальных гармоник геопотенциала и возмущения от притяжения Луны и Солнца) не вызывает особых трудностей. В настоящее время теория этих возмущений разработана достаточно полно и с высокой точностью. Основные формулы для этих возмущений приведены в главе 4.

Серьезные трудности вызывает определение возмущений от сопротивления атмосферы и светового давления. В первом случае эти трудности лежат в области физики. Они обусловлены сложной структурой земной атмосферы. Во втором случае эти трудности находятся в области математики. Они связаны с раз-

рывностью возмущающей функции, обусловленной теневым эффектом. Тем не менее и здесь получены очень важные результаты. Некоторые из них изложены в главе 5.

Помимо несферичности Земли, сопротивления атмосферы, притяжения Луны и Солнца и светового давления, на движение ИСЗ оказывают влияние и другие факторы. К ним относятся прецессия и нутация экваториальной плоскости Земли, приливная деформация Земли, электромагнитные силы, притяжение атмосферы, а также релятивистские эффекты. Все эти факторы вызывают малые возмущения в движении ИСЗ. Однако и эти возмущения по крайней мере в некоторых случаях необходимо учитывать. Определение этих возмущений из наблюдений позволяет получить важные геофизические сведения. Все эти малые возмущения изложены в последней, шестой, главе.

## Глава I

### ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА

В этой главе даны формулы для потенциала земного притяжения. Приведены числовые значения параметров, характеризующих гравитационное поле Земли. Даны различные формы дифференциальных уравнений движения ИСЗ.

#### § 1.01. Потенциал притяжения Земли

Потенциал (силовая функция) притяжения Земли  $U$  во внешнем пространстве дается формулой [1]

$$U = \frac{fm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi') + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{nk}(\sin \varphi') (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right], \quad (6.1.01)$$

в которой  $f$  — постоянная тяготения,  $m$  и  $r_0$  — масса и средний экваториальный радиус Земли,  $r$ ,  $\varphi'$  и  $\lambda$  — геоцентрический радиус-вектор, геоцентрическая широта и долгота внешней точки (ч. I, § 1.10),  $P_n$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка,  $P_{nk}$  — присоединенная функция Лежандра,  $J_n$ ,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  — безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли [2]. Необходимые сведения о полиномах и присоединенных функциях Лежандра

приведены в §§ 5.03 и 5.04, ч. IV (формулы (4.5.33), (4.5.34), (4.5.45)).

Представление гравитационного потенциала  $U$  в форме (6.1.01) было рекомендовано Международным Астрономическим союзом. Однако в литературе широко распространены и другие формы записи разложения потенциала притяжения Земли по сферическим функциям. Приведем главнейшие из них. Прежде всего имеем

$$U = \frac{fm}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi') + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n I_{nk} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{nk}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \right], \quad (6.1.02)$$

где постоянные  $J_n$ ,  $I_{nk}$  и  $\lambda_{nk}$  связаны с постоянными  $J_n$ ,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  соотношениями

$$J_n = -I_n, \quad C_{nk} = I_{nk} \cos k\lambda_{nk}, \quad S_{nk} = I_{nk} \sin k\lambda_{nk}$$

или

$$I_n = -J_n, \quad I_{nk} = \sqrt{C_{nk}^2 + S_{nk}^2}, \quad \operatorname{tg} k\lambda_{nk} = \frac{S_{nk}}{C_{nk}}.$$

Пусть теперь

$$P_n^{(k)}(u) = \sqrt{\frac{2(n-k)!(2n+1)}{(n+k)!}} P_{nk}(u), \quad (6.1.03)$$

Тогда формулу (6.1.02) можно представить в виде

$$U = \frac{fm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi') + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi') (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) \right], \quad (6.1.04)$$

где

$$C_{nk} = A_{nk} \sqrt{\frac{2(n-k)!(2n+1)}{(n+k)!}}, \quad S_{nk} = B_{nk} \sqrt{\frac{2(n-k)!(2n+1)}{(n+k)!}}.$$

Первый член в формулах (6.1.01), (6.1.02) и (6.1.04) дает потенциал притяжения шарообразной Земли. Те члены в этих формулах, которые содержат  $P_n(\sin \varphi')$ , называются *зональными гармониками*. Члены, содержащие присоединенные функции Лежандра, при  $n \neq k$  называются *тессеральными гармониками*, а при  $n = k$  — *секториальными гармониками*. Поскольку тессеральные и секториальные гармоники зависят от долготы  $\lambda$ , они характеризуют отличие Земли от тела, динамически сим-

метричного относительно оси вращения. Нечетные зональные гармоники и долготные члены, для которых  $n + k$  нечетно, характеризуют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Числовые значения постоянных  $f_m$ ,  $r_0$ ,  $J_n$ ,  $C_{nh}$  и  $S_{nh}$  (или  $I_n$ ,  $I_{nh}$ ,  $\lambda_{nh}$ ,  $A_{nh}$  и  $B_{nh}$ ) определяются либо при помощи гравиметрических и геодезических измерений, либо по наблюдениям Луны и искусственных небесных тел. Числовые значения этих постоянных приводятся в табл. 72—77).

Таблица 72

Автор	$f_m$ , км <sup>3</sup> /сек <sup>3</sup>	$r_0$ , км
Хейфорд [3]	398625,0	6378,388
Гапошкин [4]	398603,2	6378,165
Андерле и Остервингер [5]	398588,9	6378,050
Гапошкин [3]	398601,3	6378,155
Брауэр и др. [3]	398603	6378,160

Таблица 73

Автор	$J_2 \cdot 10^8$
Кук [6]	1082,65 ± 0,10
Кинг-Хили и Кук [7]	1082,64 ± 0,02
Козаи [8]	1082,64 ± 0,01
Козаи [8]	1082,63 ± 0,01
Смит [9]	1082,64 ± 0,08

Таблица 74

$J_n \cdot 10^8$ $n$	Козаи [10]	Козаи [8]	Кинг-Хили и др. [11]
2	1082,47	1082,645 ± 0,006	
3	-2,57	-2,546 ± 0,020	-2,53 ± 0,02
4	-1,84	-1,649 ± 0,016	
5	-0,06	-0,210 ± 0,025	-0,22 ± 0,04
6	0,39	0,646 ± 0,030	
7	-0,47	-0,333 ± 0,039	-0,41 ± 0,06
8	-0,02	-0,270 ± 0,050	
9	0,11	-0,053 ± 0,060	0,09 ± 0,06
10		-0,054 ± 0,050	
11		0,302 ± 0,035	-0,14 ± 0,05
12		-0,357 ± 0,047	
13		-0,114 ± 0,084	0,29 ± 0,006
14		0,179 ± 0,063	
15			-0,40 ± 0,06

Числовые значения, приводимые в табл. 73—75, получены на основе спутниковых наблюдений. Чисто динамический метод был использован также Гапошкиным для определения постоянных  $A_{nh}$  и  $B_{nh}$  (табл. 76 и 77). Каула и Кенляйн при определении  $A_{nh}$  и  $B_{nh}$  (табл. 76 и 77) применяли метод, основанный на совместном использовании спутниковых и гравиметрических данных.

Таблица 75

Автор	Каула [12]		Козан [13]	
	$J_{nk} \cdot 10^8$	$\lambda_{nk}$	$J_{nk} \cdot 10^8$	$\lambda_{nk}$
2 1	0,07	62°,2	0	—
2 2	1,77	-14,6	2,32 ± 0,30	-37°,5 ± 5°,6
3 1	1,95	7,6	3,95 ± 0,36	22,0 ± 11,0
3 2	0,38	-20,8	0,41 ± 0,21	31,0 ± 14,0
3 3	0,22	22,8	1,91 ± 0,29	51,3 ± 2,9
4 1	0,66	216,9	2,64 ± 0,44	163,5 ± 6,5
4 2	0,15	28,8	0,17 ± 0,06	54,0 ± 11,0
4 3	0,06	-4,0	0,046 ± 0,035	-13,0 ± 19,0
4 4	0,007	24,3	0,056 ± 0,030	50,3 ± 6,0

Таблица 76

Автор	Гапошкин [4]		Каула [14], [15]		Кенляйн [16]	
	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$
2 2	2,38	-1,35	2,42	-1,39	2,47	-1,34
3 1	1,94	0,27	1,90	0,11	1,95	0,28
3 2	0,73	-0,54	0,69	-0,78	0,76	-0,56
3 3	0,56	1,62	0,55	1,29	0,51	1,59
4 1	-0,57	-0,47	-0,59	-0,48	-0,56	-0,46
4 2	0,33	0,66	0,28	0,69	0,40	0,66
4 3	0,85	-0,19	0,89	0,19	0,87	-0,21
4 4	-0,05	0,23	-0,32	0	-0,01	0,34
5 1	-0,08	-0,10	-0,01	0,02	-0,08	-0,09
5 2	0,63	-0,23	0,68	-0,25	0,62	-0,22
5 3	-0,52	0,01	-0,67	0,12	-0,57	-0,01
5 4	-0,26	0,06	0,08	0,37	0,30	0,07
5 5	0,16	-0,59	-0,45	-0,21	0,07	-0,62
6 1	-0,05	-0,03	-0,19	0,13	-0,03	-0,02
6 2	0,07	-0,37	0,08	-0,41	0,09	-0,34
6 3	-0,05	0,03	0,10	0,46	0	0,03
6 4	-0,04	-0,52	0,08	-0,43	-0,03	-0,45
6 5	-0,31	-0,46	-0,04	-0,38	-0,29	-0,44
6 6	-0,04	-0,16	0,15	-0,15	0,03	-0,43
7 1	0,20	0,16	0,06	0,06	0,22	0,20
7 2	0,36	0,16	0,31	0,26	0,37	0,17
7 3	0,25	0,02	-0,03	-0,32		
7 4	-0,15	-0,10	-0,41	0,15		
7 5	0,08	0,05	0,22	-0,31		
7 6	-0,21	0,06				
7 7	0,06	0,10				

Таблица 77

Автор	Гапошкин [4]		Каула [14, 15]		Кеняйн [16]	
	$A_{nk} \cdot 10^6$	$B_{nk} \cdot 10^6$	$A_{nk} \cdot 10^6$	$B_{nk} \cdot 10^6$	$A_{nk} \cdot 10^6$	$B_{nk} \cdot 10^6$
8 1	-0,08	0,07	-0,06	0,06	-0,07	0,08
8 2	0,03	0,04	0,08	-0,07	0,08	0,04
8 3	-0,04	0	0,08	0,22		
8 4	-0,21	-0,01	0,08	0,04	-0,16	0,09
8 5	-0,05	0,12	0,03	-0,34		
8 6	-0,02	0,32	0,10	0,12		
8 7	-0,01	0,03				
8 8	-0,25	0,10				
9 1	0,12	0,01	0	0,03	0,11	0,04
9 2	0	0,04	-0,09	-0,09		
10 1	0,11	-0,13	0,02	-0,01	0,11	-0,12
10 2	-0,11	-0,04	0,01	-0,04		
10 3	-0,07	0,03				
10 4	-0,07	-0,11				
11 1	-0,05	0,01	-0,13	-0,07	-0,04	0,06
12 1	-0,16	-0,07	-0,12	-0,01	-0,19	-0,05
12 2	-0,10	-0,01				
13 12	-0,06	0,05			-0,02	0,04
13 13	-0,08	0,01			-0,07	0,03
14 1	-0,02	0,01				
15 12	-0,06	0,06			-0,04	0,05
15 13	-0,06	-0,07			-0,06	-0,06
15 14	0,01	-0,02			0,01	-0,02

Приведенные таблицы показывают, что точность определения постоянных гравитационного поля Земли (особенно коэффициентов высших гармоник) все еще невелика. Определение этих постоянных остается одной из важнейших задач современной небесной механики и гравиметрии.

### § 1.02. Стандартная Земля

Под *Стандартной Землей* понимается совокупность коэффициентов разложения потенциала земного притяжения и геоцентрических координат нескольких пунктов на земной поверхности. *Стандартная Земля I* была опубликована в 1966 г. [17]\*). Она была получена на основе фотографических наблюдений специальных спутников, выполненных на 15 камерах Бейкера—Нанна. Коэффициенты геопотенциала, соответствующие Стандартной Земле I, приведены в табл. 76, 77.

В 1970 г. была опубликована *Стандартная Земля II* [19]. При ее выводе были использованы наблюдения 19 спутников,

\*) См. также русский перевод [18].

Таблица 78

$n$	$k$	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$	$n$	$k$	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$
2	2	241,29	-136,41	3	1	196,98	26,015
3	2	89,204	-63,468	3	3	68,630	143,04
4	1	-52,989	-48,765	4	2	33,024	70,633
4	3	98,943	-15,467	4	4	-7,9692	33,928
5	1	-5,3816	-9,7905	5	2	61,286	-35,087
5	3	-43,083	-8,6663	5	4	-26,693	8,3010
5	5	12,593	-59,910	6	1	-9,8984	3,7652
6	2	5,4825	-35,175	6	3	2,7873	4,4626
6	4	-0,040342	-40,388	6	5	-21,143	-52,264
6	6	8,8693	-7,4756	7	1	24,142	11,567
7	2	28,306	15,645	7	3	20,285	-23,448
7	4	-19,727	-11,390	7	5	-0,087024	9,8461
7	6	-25,847	10,209	7	7	15,916	-6,7710
8	1	3,1254	2,5696	8	2	4,8161	8,4140
8	3	-5,7444	1,8086	8	4	-15,378	7,5264
8	5	-5,6733	6,1636	8	6	-5,3903	25,930
8	7	3,4390	8,9168	8	8	-7,7364	6,7607
9	1	13,823	-1,6100	9	2	0,66741	-8,1733
9	3	-9,6463	-11,817	9	4	5,7125	11,183
9	5	-0,61435	0,33551	9	6	2,4186	22,028
9	7	-5,0450	-12,700	9	8	23,359	5,7239
9	9	-8,2490	9,2326	10	1	11,251	-10,167
10	2	-3,1225	-10,450	10	3	-2,3346	-14,137
10	4	-4,8185	-4,3248	10	5	-8,0004	-14,279
10	6	-3,2486	-20,153	10	7	5,4961	3,2003
10	8	7,3957	-7,9706	10	9	-0,68563	0,62498
10	10	12,377	-2,5885	11	1	0,43900	2,9751
11	2	4,8900	-9,1994	11	3	-6,3247	-13,109
11	4	-3,0193	5,4317	11	5	3,2523	13,215
11	6	3,7517	0,69005	11	7	4,5726	-1,3862
11	8	6,4546	-1,6993	11	9	11,750	-0,99451
11	10	-11,736	-1,8900	11	11	11,785	-4,0688
12	1	-4,5955	-3,1000	12	2	2,7481	7,5986
12	3	5,8386	5,4784	12	4	-4,3649	-2,2262
12	5	2,3375	4,2637	12	6	-2,3868	-0,06677
12	7	1,4507	9,9784	12	8	-0,57854	3,3752
12	9	-3,2232	4,2858	12	10	-1,8590	0,48382
12	11	-4,4921	-4,8206	12	12	-1,9407	-5,7771
13	1	-5,6042	2,6288	13	2	-4,7456	1,7367
13	3	2,3833	-2,8930	13	4	-1,9980	5,7030
13	5	9,6637	-4,7760	13	6	-8,3417	5,9782
13	7	-5,2217	-0,32562	13	8	-4,1759	-2,0231
13	9	-2,5623	10,767	13	10	8,6589	-1,0528
13	11	-3,3749	5,8541	13	12	-0,13229	8,2192
13	13	-7,0288	7,4643	14	1	-2,3090	4,9664
14	2	3,2120	-4,5289	14	3	1,9042	0,11919
14	4	0,78017	-3,7527	14	5	-2,5958	-2,3344
14	6	1,9140	-5,8721	14	7	1,1061	0,84132
14	8	-3,0273	-6,0838	14	9	4,9539	9,2345
14	10	5,3732	-4,3168	14	11	2,7833	-8,1637

Продолжение табл. 78

$n$	$k$	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$	$n$	$k$	$A_{nk} \cdot 10^8$	$B_{nk} \cdot 10^8$
14	12	1,2481	-5,7314	14	13	5,1554	4,5453
14	14	-5,2082	-1,2840	15	1	-0,35971	4,0142
15	2	-4,4833	-1,6056	15	3	0,83016	-0,57218
15	4	1,3916	6,6644	15	5	3,1684	0,18250
15	6	7,0020	-11,872	15	7	11,856	4,2690
15	8	-9,7657	-3,5710	15	9	2,2064	2,6632
15	10	-2,0648	0,053724	15	11	-3,2585	9,4052
15	12	1,0524	0,68726	15	13	-3,7348	0,40249
15	14	1,2193	-2,6786	15	15	0,14515	-1,4802
16	1	-2,3789	7,6413	16	2	2,1327	3,0669
16	3	-4,7358	3,2610	16	4	-1,1591	4,3001
16	5	-4,4201	3,2230	16	6	-5,8439	-4,2809
16	7	10,591	0,81008	16	8	-8,4738	-0,24677
16	9	0,90001	-10,628	16	10	-2,9849	-0,052467
16	11	0,68502	-7,0765	16	12	2,2834	-3,4087
16	13	3,5475	2,0683	16	14	-0,73590	-2,2626
16	15	-3,5485	0,084126	16	16	-2,9522	0,86217
17	12	8,3097	0,35424	17	13	3,2749	0,04292
17	14	-1,6058	2,7286	18	12	1,1662	0,84724
18	13	0,46903	-3,5547	18	14	-2,7446	-4,8376
19	12	6,7115	-0,82623	19	13	3,3201	-6,3128
19	14	-0,39779	-2,3817	20	13	5,8374	3,3320
20	14	1,1130	-1,6183	21	13	0,36928	-1,6288
21	14	5,2067	3,0801	22	14	-8,0549	2,6440

полученные камерами Бейкера — Нанна и лазерными установками. Использовались как обычные, так и синхронные наблюдения. Кроме того, были привлечены гравиметрические измерения и геодезические данные, а также наблюдения зондов. В результате были определены координаты многих наблюдательных станций и все коэффициенты разложения потенциала до 16-го порядка и некоторые более высокого порядка. Точность координат многих станций составляет 10 м или лучше.

Ниже приведены основные параметры, характеризующие гравитационное поле Земли. Для  $ft$  и  $r_0$  имеем

$$ft = 3,986013 \cdot 10^{20} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}, \quad r_0 = 6378,155 \text{ м.}$$

Коэффициенты  $J_n$  равны:

$$\begin{aligned} J_2 &= 1,082628 \cdot 10^{-3}, & J_3 &= -2,5380 \cdot 10^{-6}, \\ J_4 &= -1,5930 \cdot 10^{-6}, & J_5 &= -2,3000 \cdot 10^{-7}, \\ J_6 &= 5,0200 \cdot 10^{-7}, & J_7 &= -3,6200 \cdot 10^{-7}, \\ J_8 &= -1,1800 \cdot 10^{-7}, & J_9 &= -1,0000 \cdot 10^{-7}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 J_{10} &= -3,5400 \cdot 10^{-7}, & J_{11} &= 2,0200 \cdot 10^{-7}, \\
 J_{12} &= -4,2000 \cdot 10^{-8}, & J_{13} &= -1,2300 \cdot 10^{-7}, \\
 J_{14} &= -7,3000 \cdot 10^{-8}, & J_{15} &= -1,7400 \cdot 10^{-7}, \\
 J_{16} &= 1,8700 \cdot 10^{-7}, & J_{17} &= 8,500 \cdot 10^{-8}, \\
 J_{18} &= -2,3100 \cdot 10^{-7}, & J_{19} &= -2,1600 \cdot 10^{-7}, \\
 J_{20} &= -5,0000 \cdot 10^{-9}, & J_{21} &= 1,4400 \cdot 10^{-7}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник (полностью нормированные) приводятся в табл. 78.

### § 1.03. Дифференциальные уравнения движения спутника

Возьмем прямоугольную геоцентрическую систему координат  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой направлена к северному полюсу, плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью экватора Земли, а ось  $Ox$  направлена в точку весеннего равноденствия. Пусть далее  $r$ ,  $\varphi'$ ,  $\omega$  — геоцентрический радиус-вектор, геоцентрическая широта и прямое восхождение. Тогда

$$x = r \cos \varphi' \cos \omega, \quad y = r \cos \varphi' \sin \omega, \quad z = r \sin \varphi'. \quad (6.1.05)$$

Если обозначить через  $S$  звездное гриничское время (см. ч. I, § 3.02), то

$$\lambda = \omega + S. \quad (6.1.06)$$

Предположим, что на спутник действует только сила притяжения Земли. Тогда, полагая

$$U = \frac{\gamma m}{r} + R, \quad (6.1.07)$$

мы можем записать уравнения движения спутника в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma m x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\
 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma m y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\
 \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma m z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z},
 \end{aligned} \right\} \quad (6.1.08)$$

где функция  $R$  выражена посредством формул (6.1.05) — (6.1.07) и (6.1.01) (или (6.1.02), (6.1.04)) через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Если воспользоваться сферическими координатами  $r$ ,  $\varphi'$  и  $w$ , то уравнения движения спутника будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi'}{dt} \right)^2 - r \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 \cos^2 \varphi' + \frac{fm}{r^2} &= \frac{\partial R}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi'}{dt} \right) + r^2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 \sin \varphi' \cos \varphi' &= \frac{\partial R}{\partial \varphi'}, \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{dw}{dt} \cos^2 \varphi' \right) &= \frac{\partial R}{\partial w}, \end{aligned} \right\} \quad (6.1.09)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r} &= -\frac{fm}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) I_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi') - \\ &- \frac{fm}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n (n+1) I_{nk} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{nk}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda_{nk}), \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \varphi'} &= \frac{fm}{r} \cos \varphi' \sum_{n=2}^{\infty} I_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P'_n(\sin \varphi') + \\ &+ \frac{fm}{r} \cos \varphi' \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n I_{nk} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P'_{nk}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda_{nk}), \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial w} = -\frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n k I_{nk} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{nk}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \sin k(\lambda - \lambda_{nk}), \quad (6.1.12)$$

причем  $\lambda$  дается формулой (6.1.06), а  $P'_n(\sin \varphi')$  и  $P'_{nk}(\sin \varphi')$  — производные функций  $P_n(\sin \varphi')$  и  $P_{nk}(\sin \varphi')$  по  $\sin \varphi'$ .

Если в потенциале  $U$  нужно учитывать большое число членов, то при вычислении правых частей уравнений (6.1.09) полезно пользоваться рекуррентными формулами для полиномов и присоединенных функций Лежандра (см. ч. IV, §§ 5.03, 5.04).

### § 1.04. Элементы орбиты ИСЗ.

#### Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов

Орбита ИСЗ характеризуется шестью независимыми элементами. Это прежде всего *кеплеровские эллиптические элементы*: большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , наклон  $i$ , долгота узла  $\Omega$ , аргумент перигея  $\omega$  и средняя аномалия в эпоху  $M_0$  (см. ч. II, § 1.04). Дифференциальные уравнения для кеплеровских элементов приведены в §§ 3.03 и 3.04 ч. IV.

При построении теории движения ИСЗ часто используются *канонические элементы Делоне*. Они обозначаются через  $L$ ,  $G$ ,

$H$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$  и связаны с кеплеровскими элементами следующими формулами:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{fma}, & l &= n(t - t_0) + M_0, \\ G &= \sqrt{fma(1 - e^2)}, & g &= \omega, \\ H &= \sqrt{fma(1 - e^2)} \cos i, & h &= \Omega, \end{aligned}$$

где  $f$  — постоянная притяжения,  $m$  — масса Земли,  $n = \frac{\sqrt{fm}}{a^{3/2}}$  — среднее движение спутника. Дифференциальные уравнения для элементов Делонэ приведены в § 3.07 ч. IV.

В случае малых эксцентриситетов или малых наклонов, вместо элементов Делонэ, следует пользоваться каноническими элементами Пуанкаре. Первая система элементов Пуанкаре определяется формулами

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{fma}, & \lambda &= l + \Omega + \omega, \\ \rho_1 &= \sqrt{fma(1 - \sqrt{1 - e^2})}, & \omega_1 &= -(\Omega + \omega), \\ \rho_2 &= \sqrt{fma(1 - e^2)(1 - \cos i)}, & \omega_2 &= -\Omega, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L &= L, & \lambda &= l + g + h, \\ \rho_1 &= L - G, & \omega_1 &= -g - h, \\ \rho_2 &= G - H, & \omega_2 &= -h. \end{aligned}$$

Элементы второй системы Пуанкаре таковы:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{fma}, & \lambda &= l + g + h, \\ \xi_1 &= \sqrt{2\rho_1} \cos \omega_1, & \eta_1 &= \sqrt{2\rho_1} \sin \omega_1, \\ \xi_2 &= \sqrt{2\rho_2} \cos \omega_2, & \eta_2 &= \sqrt{2\rho_2} \sin \omega_2. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения для элементов Пуанкаре даны в § 3.08 ч. IV.

В случае малых эксцентриситетов можно также использовать элементы  $l$ ,  $h$  и  $\lambda_0$ :

$$l = e \cos \omega, \quad h = e \sin \omega, \quad \lambda_0 = M_0 + \omega$$

и  $a$ ,  $i$ ,  $\Omega$ .

В некоторых публикациях, вместо элементов  $a$  и  $e$ , используются параметры  $r_\pi$  и  $r_A$ :

$$r_\pi = a(1 - e), \quad r_A = a(1 + e),$$

называемые соответственно *перигейным расстоянием* и *апогейным расстоянием*. Часто также употребляются параметры  $h_\pi$  и  $h_A$ :

$$h_\pi = r_\pi - R, \quad h_A = r_A - R,$$

где  $R$  — радиус Земли. Эти параметры называются соответственно *высотой перигея* и *высотой апогея*.

## ВОЗМУЩЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ВТОРОЙ ЗОНАЛЬНОЙ ГАРМОНИКОЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

В этой главе даны различные формулы для вычисления возмущений элементов орбиты ИСЗ, обусловленных второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли.

### § 2.01. Возмущения от второй зональной гармоникой как функции средней аномалии

**1. Возмущающая функция.** Возмущающая функция, обусловленная второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли, дается формулой (см. (6.1.01))

$$R = -J_2 \frac{f m r_0^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi' - \frac{1}{2} \right). \quad (6.2.01)$$

Разложение функции  $R$  по степеням эксцентриситета  $e$  с точностью до  $e^6$  включительно имеет следующий вид [20]:

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} J_2 f m \frac{r_0^2}{a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} s^2 \right) \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \frac{35}{16} e^6 + \right. \\ & + 3 \left( e + \frac{9}{8} e^3 + \frac{87}{64} e^5 \right) \cos M + \frac{9}{2} \left( e^2 + \frac{7}{9} e^4 + \frac{47}{48} e^6 \right) \cos 2M + \\ & + \frac{53}{8} \left( e^3 + \frac{393}{848} e^5 \right) \cos 3M + \frac{77}{8} \left( e^4 + \frac{129}{770} e^6 \right) \cos 4M + \\ & \left. + \frac{1773}{128} e^5 \cos 5M + \frac{3167}{160} e^6 \cos 6M \right] + \\ & + \frac{3}{4} J_2 f m \frac{r_0^2}{a^3} s^2 \left[ \frac{1}{48} \left( e^3 + \frac{11}{16} e^5 \right) \cos (M - 2\omega) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \left( e^4 + \frac{7}{10} e^6 \right) \cos (2M - 2\omega) + \frac{81}{1280} e^5 \cos (3M - 2\omega) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{45} e^6 \cos(4M - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 \right) \cos(M + 2\omega) + \\
& + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 - \frac{35}{288} e^6 \right) \cos(2M + 2\omega) + \\
& + \frac{7}{2} \left( e - \frac{123}{56} e^3 + \frac{489}{448} e^5 \right) \cos(3M + 2\omega) + \\
& + \frac{17}{2} \left( e^2 - \frac{115}{51} e^4 + \frac{601}{408} e^6 \right) \cos(4M + 2\omega) + \\
& + \frac{845}{48} \left( e^3 - \frac{6505}{2704} e^5 \right) \cos(5M + 2\omega) + \\
& + \frac{533}{16} \left( e^4 - \frac{13827}{5330} e^6 \right) \cos(6M + 2\omega) + \\
& + \frac{228347}{3840} e^5 \cos(7M + 2\omega) + \frac{73369}{720} e^6 \cos(8M + 2\omega) \Big], \quad (6.2.02)
\end{aligned}$$

где через  $s$  обозначен синус наклона.

**2. Вековые возмущения.** Вековые возмущения содержатся только в угловых элементах  $\omega$ ,  $M_0$  (или  $\epsilon$ ) и долготе узла  $\Omega$ . Если обозначить через  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$  и  $\dot{M}_0$  коэффициенты при вековых возмущениях этих элементов, то будем иметь [20]

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i (1 - e^2)^{-2}, \quad (6.2.03)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^2}, \quad (6.2.04)$$

$$\dot{M}_0 = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (6.2.05)$$

где  $n$  — среднее движение спутника.

Вековые возмущения элементов  $\pi$  и  $\epsilon$  даются формулами

$$\dot{\pi} = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 2 \cos i - 1}{(1 - e^2)^2}, \quad (6.2.06)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{(5 + 3\sqrt{1 - e^2}) \cos^2 i - 2 \cos i - 1 - \sqrt{1 - e^2}}{(1 - e^2)^2}. \quad (6.2.07)$$

Формулы (6.2.03) — (6.2.07) справедливы при всех значениях наклона  $i$  и  $e < 1$ .

Вековое движение узла достигает максимума при  $i = 0^\circ, 180^\circ$  (экваториальные орбиты) и обращается в нуль при  $i = 90^\circ$  (полярные орбиты), а вековое движение перигентра достигает максимума при  $i = 0^\circ, 180^\circ$  и обращается в нуль при  $i = 63^\circ 26'$  (случай критического наклона).

**3. Короткопериодические возмущения.** Короткопериодические возмущения содержатся во всех элементах. С точностью до

членов первого порядка относительно  $J_2$  они имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} = & 3J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} s^2\right) \left[ \left(e + \frac{9}{8} e^3 + \frac{87}{64} e^5\right) \cos M + \right. \\ & + \frac{3}{2} \left(e^2 + \frac{7}{9} e^4\right) \cos 2M + \frac{53}{24} \left(e^3 + \frac{393}{848} e^5\right) \cos 3M + \\ & + \frac{77}{24} e^4 \cos 4M + \frac{591}{128} e^5 \cos 5M \left. \right] + \\ & + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 s^2 \left[ -\frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5\right) \cos (M + 2\omega) + \right. \\ & + \frac{1}{48} \left(e^3 + \frac{11}{16} e^5\right) \cos (M - 2\omega) + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4\right) \cos (2M + 2\omega) + \\ & + \frac{1}{24} e^4 \cos (2M - 2\omega) + \frac{7}{2} \left(e - \frac{123}{56} e^3 + \frac{489}{448} e^5\right) \cos (3M + 2\omega) + \\ & + \frac{81}{1280} e^5 \cos (3M - 2\omega) + \frac{17}{2} \left(e^2 - \frac{115}{51} e^4\right) \cos (4M + 2\omega) + \\ & + \frac{845}{48} \left(e^3 - \frac{6505}{2704} e^5\right) \cos (5M + 2\omega) + \\ & \left. + \frac{533}{16} e^4 \cos (6M + 2\omega) + \frac{228\ 347}{3840} e^5 \cos (7M + 2\omega) \right], \quad (6.2.08) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} s^2\right) \left[ \left(1 + \frac{1}{8} e^2 + \frac{15}{64} e^4\right) \cos M + \right. \\ & + \frac{3}{2} \left(e - \frac{2}{9} e^3 + \frac{29}{144} e^5\right) \cos 2M + \frac{53}{24} \left(e^2 - \frac{455}{848} e^4\right) \cos 3M + \\ & + \frac{77}{24} \left(e^3 - \frac{641}{770} e^5\right) \cos 4M + \frac{591}{128} e^4 \cos 5M + \frac{3167}{480} e^5 \cos 6M \left. \right] + \\ & + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 s^2 \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8} e^2 - \frac{43}{192} e^4\right) \cos (M + 2\omega) + \right. \\ & + \frac{1}{16} \left(e^2 + \frac{1}{48} e^4\right) \cos (M - 2\omega) + \frac{1}{12} \left(e^3 - \frac{1}{20} e^5\right) \cos (2M - 2\omega) - \\ & - \frac{1}{2} \left(e - \frac{11}{4} e^3 + \frac{21}{16} e^5\right) \cos (2M + 2\omega) + \\ & + \frac{7}{6} \left(1 - \frac{235}{56} e^2 + \frac{2569}{448} e^4\right) \cos (3M + 2\omega) + \frac{27}{256} e^4 \cos (3M - 2\omega) + \\ & + \frac{17}{4} \left(e - \frac{383}{102} e^3 + \frac{254}{51} e^5\right) \cos (4M + 2\omega) + \frac{2}{15} e^5 \cos (4M - 2\omega) + \\ & + \frac{169}{16} \left(e - \frac{30\ 331}{8112} e^4\right) \cos (5M + 2\omega) + \\ & + \frac{533}{24} \left(e^3 - \frac{40\ 979}{10\ 660} e^5\right) \cos (6M + 2\omega) + \frac{32\ 621}{768} e^4 \cos (7M + 2\omega) + \\ & \left. + \frac{73\ 369}{960} e^5 \cos (8M + 2\omega) \right], \quad (6.2.09) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i = & \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 s \cos i \left[ - \left( e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{65}{192} e^5 \right) \cos (M + 2\omega) - \right. \\ & - \frac{1}{24} \left( e^3 + \frac{19}{16} e^5 \right) \cos (M - 2\omega) + \left( 1 - 2e^2 - \frac{1}{16} e^4 \right) \cos (2M + 2\omega) - \\ & - \frac{1}{24} e^4 \cos (2M - 2\omega) + \frac{7}{3} \left( e - \frac{95}{56} e^3 + \frac{165}{448} e^5 \right) \cos (3M + 2\omega) - \\ & - \frac{27}{640} e^5 \cos (3M - 2\omega) + \frac{17}{4} \left( e^2 - \frac{179}{102} e^4 \right) \cos (4M + 2\omega) + \\ & + \frac{169}{24} \left( e^3 - \frac{5153}{2704} e^5 \right) \cos (5M + 2\omega) + \frac{533}{48} e^4 \cos (6M + 2\omega) + \\ & \left. + \frac{32621}{1920} e^5 \cos (7M + 2\omega) \right], \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega = & - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i \left[ 3 \left( e + \frac{13}{8} e^3 + \frac{147}{64} e^5 \right) \sin M + \right. \\ & + \frac{9}{4} \left( e^2 + \frac{23}{18} e^4 \right) \sin 2M + \frac{53}{24} \left( e^3 + \frac{817}{848} e^5 \right) \sin 3M + \\ & + \frac{77}{32} e^4 \sin 4M + \frac{1773}{640} e^5 \sin 5M + \frac{1}{2} \left( e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{65}{192} e^5 \right) \sin (M + 2\omega) - \\ & - \frac{1}{48} \left( e^3 + \frac{19}{16} e^5 \right) \sin (M - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( 1 - 2e^2 - \frac{1}{16} e^4 \right) \sin (2M + 2\omega) - \\ & - \frac{1}{48} e^4 \sin (2M - 2\omega) - \frac{7}{6} \left( e - \frac{95}{56} e^3 + \frac{165}{448} e^5 \right) \sin (3M + 2\omega) - \\ & - \frac{27}{1280} e^5 \sin (3M - 2\omega) - \frac{17}{8} \left( e^2 - \frac{179}{102} e^4 \right) \sin (4M + 2\omega) - \\ & - \frac{169}{48} \left( e^3 - \frac{5153}{2704} e^5 \right) \sin (5M + 2\omega) - \\ & \left. - \frac{533}{96} e^4 \sin (6M + 2\omega) - \frac{32621}{3840} e^5 \sin (7M + 2\omega) \right], \quad (6.2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \delta \pi = & - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 (\cos i - 1 + s^2) \left[ 3 \left( e^2 + \frac{13}{8} e^4 \right) \sin M + \right. \\ & + \frac{9}{4} \left( e^3 + \frac{23}{18} e^5 \right) \sin 2M + \frac{53}{24} e^4 \sin 3M + \frac{77}{32} e^5 \sin 4M + \\ & + \frac{1}{2} \left( e^2 + \frac{3}{8} e^4 \right) \sin (M + 2\omega) - \frac{1}{48} e^4 \sin (M - 2\omega) - \\ & - \frac{1}{2} \left( e - 2e^3 - \frac{1}{16} e^5 \right) \sin (2M + 2\omega) - \frac{1}{48} e^5 \sin (2M - 2\omega) - \\ & - \frac{7}{6} \left( e^2 - \frac{95}{56} e^4 \right) \sin (3M + 2\omega) - \frac{17}{8} \left( e^3 - \frac{179}{102} e^5 \right) \sin (4M + 2\omega) - \\ & - \frac{169}{48} e^4 \sin (5M + 2\omega) - \frac{533}{96} e^5 \sin (6M + 2\omega) \left. \right] + \\ & + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} s^2 \right) \left[ \left( 1 + \frac{23}{8} e^2 + \frac{319}{64} e^4 \right) \sin M + \right. \\ & + \frac{3}{2} \left( e + \frac{19}{18} e^3 + \frac{293}{144} e^5 \right) \sin 2M + \frac{53}{24} \left( e^2 + \frac{231}{848} e^4 \right) \sin 3M + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{77}{24} \left( e^3 - \frac{383}{1540} e^5 \right) \sin 4M + \frac{591}{128} e^4 \sin 5M + \frac{3167}{480} e^5 \sin 6M \Big] - \\
& \quad - \frac{3}{8} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 s^2 \left[ \left( 1 - \frac{7}{8} e^2 + \frac{37}{192} e^4 \right) \sin(M + 2\omega) - \right. \\
& - \frac{1}{8} \left( e^2 + \frac{31}{48} e^4 \right) \sin(M - 2\omega) + 5 \left( e - \frac{23}{20} e^3 + \frac{83}{240} e^5 \right) \sin(2M + 2\omega) - \\
& \quad - \frac{1}{6} \left( e^3 + \frac{11}{20} e^5 \right) \sin(2M - 2\omega) - \frac{27}{128} e^4 \sin(3M - 2\omega) - \\
& - \frac{7}{3} \left( 1 - \frac{397}{56} e^2 + \frac{3865}{448} e^4 \right) \sin(3M + 2\omega) - \frac{4}{15} e^5 \sin(4M - 2\omega) - \\
& \quad - \frac{17}{2} \left( e - \frac{511}{102} e^3 + \frac{334}{51} e^5 \right) \sin(4M + 2\omega) - \\
& \quad - \frac{169}{8} \left( e^2 - \frac{36581}{8112} e^4 \right) \sin(5M + 2\omega) - \\
& \quad - \frac{533}{12} \left( e^3 - \frac{46811}{10660} e^5 \right) \sin(6M + 2\omega) - \\
& \quad \left. - \frac{32621}{384} e^4 \sin(7M + 2\omega) - \frac{73369}{480} e^5 \sin(8M + 2\omega) \right], \quad (6.2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta e = & 3J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} s^2 \right) \left[ \frac{13}{4} \left( e + \frac{133}{104} e^3 + \frac{109}{64} e^5 \right) \sin M + \right. \\
& + \frac{21}{8} \left( e^2 + \frac{215}{522} e^4 \right) \sin 2M + \frac{265}{96} \left( e^3 + \frac{403}{848} e^5 \right) \sin 3M + \\
& + \frac{77}{24} e^4 \sin 4M + \frac{10047}{2560} e^5 \sin 5M \Big] + \frac{9}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 s^2 \left[ - \frac{13}{24} \left( e - \frac{17}{104} e^3 + \right. \right. \\
& + \frac{79}{2496} e^5 \Big) \sin(M + 2\omega) + \frac{5}{192} \left( e^3 + \frac{35}{48} e^5 \right) \sin(M - 2\omega) + \\
& + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{35}{12} e^2 + \frac{19}{16} e^4 \right) \sin(2M + 2\omega) + \frac{1}{36} e^4 \sin(2M - 2\omega) + \\
& + \frac{91}{72} \left( e - \frac{143}{56} e^3 + \frac{8995}{5824} e^5 \right) \sin(3M + 2\omega) + \frac{153}{5120} e^5 \sin(3M - 2\omega) + \\
& + \frac{119}{48} \left( e^2 - \frac{533}{204} e^4 \right) \sin(4M + 2\omega) + \frac{845}{192} \left( e^3 - \frac{112613}{40560} e^5 \right) \sin(5M + 2\omega) + \\
& \quad + \frac{533}{72} e^4 \sin(6M + 2\omega) + \frac{554}{46088} e^5 \sin(7M + 2\omega) \Big] - \\
& - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 (\cos i - 1 + s^2) \left[ 3 \left( e + \frac{13}{8} e^3 + \frac{147}{64} e^5 \right) \sin M + \right. \\
& \quad + \frac{9}{4} \left( e^2 + \frac{23}{18} e^4 \right) \sin 2M + \frac{53}{24} \left( e^3 + \frac{817}{848} e^5 \right) \sin 3M + \\
& + \frac{77}{32} e^4 \sin 4M + \frac{1773}{640} e^5 \sin 5M + \frac{1}{2} \left( e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{65}{192} e^5 \right) \sin(M + 2\omega) - \\
& - \frac{1}{48} \left( e^3 + \frac{19}{16} e^5 \right) \sin(M - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( 1 - 2e^2 - \frac{1}{16} e^4 \right) \sin(2M + 2\omega) - \\
& \quad \left. - \frac{1}{48} e^4 \sin(2M - 2\omega) - \frac{7}{8} \left( e - \frac{95}{56} e^3 + \frac{165}{448} e^5 \right) \sin(3M + 2\omega) - \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{27}{1280} e^5 \sin(3M - 2\omega) - \frac{17}{8} \left( e^2 - \frac{179}{102} e^4 \right) \sin(4M + 2\omega) - \\
& \quad - \frac{169}{48} \left( e^3 - \frac{5153}{2704} e^5 \right) \sin(5M + 2\omega) - \\
& \quad - \frac{533}{96} e^4 \sin(6M + 2\omega) - \frac{32621}{3840} e^5 \sin(7M + 2\omega) \Big], \quad (6.2.13)
\end{aligned}$$

где  $a$ ,  $e$ ,  $s$  должны быть заменены невозмущенными значениями.

Возмущенное значение средней аномалии  $M$  вычисляется по формуле

$$M = M_0 + (n_0 + \dot{e} - \dot{\pi})(t - t_0) + \delta e - \delta \pi - \frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int_{t_0}^t \delta a dt, \quad (6.2.14)$$

где индекс «0» относится к невозмущенным значениям элементов.

**4. Замечания.** Формулы этого параграфа можно использовать для изучения движения широкого класса искусственных спутников Земли. Однако нужно иметь в виду, что они дают только *возмущения первого порядка* относительно  $J_2$ . Для того чтобы эти формулы были применимы на больших промежутках времени, к ним нужно добавить вековые возмущения второго порядка и долгопериодические возмущения первого порядка относительно  $J_2$ . Поскольку в разложении возмущающей функции были отброшены члены порядка  $e^7$  и выше, формулы (6.2.08) — (6.2.13) непригодны при больших эксцентриситетах. Кроме того, они имеют особенность при  $e = 0$ .

Самыми значительными возмущениями от второй зональной гармоники являются вековые возмущения. Они могут достигать величины порядка нескольких градусов в сутки. Так, для третьего советского ИСЗ суточные изменения элементов  $\Omega$  и  $\omega$  составляли  $-2^\circ,67$  и  $0^\circ,44$  соответственно.

Наибольшие амплитуды периодических возмущений большой полуоси достигают порядка нескольких километров. Для третьего советского ИСЗ амплитуды периодических возмущений с аргументами  $(2M + 2\omega)$  и  $(3M + 2\omega)$  были равны 7,4 и 2,6 км. Наибольшие амплитуды периодических возмущений эксцентриситета составляют несколько единиц четвертого знака после запятой, что может вызывать отклонения в высоте перигея в несколько километров. Самые большие возмущения элементов  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  имеют порядок нескольких минут дуги.

### § 2.02. Возмущения от второй зональной гармоники как функции истинной аномалии

Использование истинной аномалии в качестве независимой переменной позволяет получить выражения для возмущений в замкнутой форме относительно эксцентриситета орбиты спут-

ника. Здесь мы приведем результаты Д. Брауэра [21]. Брауэр решал задачу в элементах Делоне методом Цейпеля (см. ч. IV, § 8.04).

**1. Вековые возмущения.** Обозначим через  $M''$ ,  $\omega''$  и  $\Omega''$  значения средней аномалии, углового расстояния перигея от узла и долготу узла с учетом только вековых возмущений от второй зональной гармоники потенциала притяжения Земли. Тогда

$$M'' = n_0 \left\{ 1 + \frac{3}{4} \gamma_2 \eta^{-3} (-1 + 3\theta^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{128} \gamma_2^2 \eta^{-7} [(-15 + 16\eta + 25\eta^2) + (30 - 96\eta - 90\eta^2)\theta^2 + \right. \\ \left. + (105 + 144\eta + 25\eta^2)\theta^4] \right\} (t - t_0) + M_0'', \quad (6.2.15)$$

$$\omega'' = n_0 \left\{ \frac{3}{4} \gamma_2 \eta^{-4} (-1 + 5\theta^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{128} \gamma_2^2 \eta^{-8} [(-35 + 24\eta + 25\eta^2) + (90 - 192\eta - 126\eta^2)\theta^2 + \right. \\ \left. + (385 + 360\eta + 45\eta^2)\theta^4] \right\} (t - t_0) + \omega_0'', \quad (6.2.16)$$

$$\Omega'' = n_0 \theta \left\{ -\frac{3}{2} \gamma_2 \eta^{-4} + \frac{3}{32} \gamma_2^2 \eta^{-8} [(-5 + 12\eta + 9\eta^2) + \right. \\ \left. + (-35 - 36\eta - 5\eta^2)\theta^2] \right\} (t - t_0) + \Omega_0'', \quad (6.2.17)$$

где

$$n_0 = \sqrt{\frac{\dot{m}}{a_0^3}}, \quad \gamma_2 = J_2 \left( \frac{r_0}{a_0} \right)^2, \quad (6.2.18)$$

$$\eta = \sqrt{1 - e_0^2}, \quad \theta = \cos i_0, \quad (6.2.19)$$

$t_0$  — начальный момент времени и  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$ ,  $M_0''$ ,  $\omega_0''$ ,  $\Omega_0''$  — постоянные интегрирования.

**2. Долгопериодические возмущения.** Обозначим через  $e'$ ,  $i'$ ,  $M'$ ,  $\omega'$  и  $\Omega'$  значения элементов с учетом вековых и долгопериодических возмущений. Тогда

$$e' = e_0 + \frac{1}{16} \gamma_2 e_0 \eta^2 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2\omega'', \quad (6.2.20)$$

$$i' = i_0 - e_0 \eta^{-2} \operatorname{ctg} i_0 (e' - e_0), \quad (6.2.21)$$

$$M' = M'' + \frac{1}{16} \gamma_2 \eta^{-1} [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \sin 2\omega'', \quad (6.2.22)$$

$$\omega' = \omega'' - \frac{1}{32} \gamma_2 \eta^{-4} (2 + e_0^2) - 11 (2 + 3e_0^2) \theta^2 - \\ - 40 (2 + 5e_0^2) \theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} - 400 e_0^2 \theta^6 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2\omega'', \quad (6.2.23)$$

$$\Omega' = \Omega'' - \frac{\eta^{-4}}{16} \gamma_2 e_0^2 \theta [11 + 80\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + \\ + 200\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2\omega'', \quad (6.2.24)$$

где  $M''$ ,  $\omega''$  и  $\Omega''$  определяются формулами (6.2.15) — (6.2.17).

**3. Короткопериодические возмущения.** С учетом вековых долгопериодических и короткопериодических возмущений формулы для элементов имеют такой вид:

$$a = a_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \gamma_2 \left[ (-1 + 3\theta^2) \left( \frac{a_0^3}{r'^3} - \eta^{-3} \right) + 3(1 - \theta^2) \frac{a_0^3}{r'^3} \cos(2v' + 2\omega') \right] \right\}, \quad (6.2.25)$$

$$e = e' + \frac{1}{4} \gamma_2 \frac{\eta^2}{e_0} \left[ (-1 + 3\theta^2) \left( \frac{a_0^3}{r'^3} - \eta^{-3} \right) + 3(1 - \theta^2) \left( \frac{a_0^3}{r'^3} - \eta^{-4} \right) \cos(2v' + 2\omega') \right], \quad (6.2.26)$$

$$i = i' + \frac{1}{4} \gamma_2 \theta (1 - \theta^2)^{1/2} [3 \cos(2v' + 2\omega') + 3e_0 \cos(v' + 2\omega') + e_0 \cos(3v' + 2\omega')], \quad (6.2.27)$$

$$M = M' - \frac{1}{8} \gamma_2 \frac{\eta^3}{e_0} \left\{ 2(-1 + 3\theta^2) \left( 1 + \frac{a_0}{r'} + \eta^2 \frac{a_0^2}{r'^2} \right) \sin v' + 3(1 - \theta^2) \left[ \left( 1 - \frac{a_0}{r'} - \eta^2 \frac{a_0^2}{r'^2} \right) \sin(v' + 2\omega') + \left( \frac{1}{3} + \frac{a_0}{r'} + \eta^2 \frac{a_0^2}{r'^2} \right) \sin(3v' + 2\omega') \right] \right\}, \quad (6.2.28)$$

$$\begin{aligned} \omega = \omega' + \frac{1}{8} \gamma_2 \frac{\eta^2}{e_0} \left\{ 2(-1 + 3\theta^2) \left( 1 + \frac{a_0}{r'} + \eta^2 \frac{a_0^2}{r'^2} \right) \sin v' + 3(1 - \theta^2) \left[ \left( 1 - \frac{a_0}{r'} - \eta^2 \frac{a_0^2}{r'^2} \right) \sin(v' + 2\omega') + \left( \frac{1}{3} + \frac{a_0}{r'} + \eta^2 \frac{a_0^2}{r'^2} \right) \sin(3v' + 2\omega') \right] \right\} + \\ + \frac{1}{8} \gamma_2 \{ 6(-1 + 5\theta^2)(v' - M' + e_0 \sin v') + (3 - 5\theta^2)[3 \sin(2v' + 2\omega') + 3e_0 \sin(v' + 2\omega') + e_0 \sin(3v' + 2\omega')] \}, \quad (6.2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega' - \frac{1}{4} \gamma_2 \theta [6(v' - M' + e_0 \sin v') - 3 \sin(2v' + 2\omega') - 3e_0 \sin(v' + 2\omega') - e_0 \sin(3v' + 2\omega')], \quad (6.2.30) \end{aligned}$$

где  $e'$ ,  $i'$ ,  $M'$ ,  $\omega'$  и  $\Omega'$  даются формулами (6.2.20) — (6.2.24), а  $v'$

и  $r'$  определяются из уравнений

$$E' - e_0 \sin E' = M', \quad (6.2.31)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v'}{2} = \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{E'}{2}, \quad (6.2.32)$$

$$r' = a_0(1 - e_0 \cos E'), \quad (6.2.33)$$

в которых  $a_0$  и  $e_0$  — постоянные.

**4. Замечания.** Формулы Д. Брауэра имеют весьма компактный вид. В вековых возмущениях сохранены все члены до второго порядка относительно  $J_2$  включительно. Долгопериодические и короткопериодические возмущения вычислены с точностью до первой степени  $J_2$ . При выводе этих формул не делалось разложений по степеням наклона  $i$  и эксцентриситета  $e$ . Поэтому они полностью учитывают наклон и эксцентриситет орбиты. Формулы, однако, имеют особенность при

$$e_0 = 0, \quad i_0 = 0, \quad i_0 \approx 63^\circ 26'. \quad (6.2.34)$$

Д. Брауэр [21] нашел также возмущения (вековые и долгопериодические) от третьей, четвертой и пятой зональных гармоник. И. Козаи [22] продолжил эту работу и получил формулы, учитывающие возмущения от всех гармоник до восьмого порядка включительно. Он также нашел вековые возмущения третьего порядка в элементах  $\Omega$  и  $\omega$ .

### § 2.03. Случай орбит с малыми эксцентриситетами

**1. Возмущающая функция.** В случае орбит с малыми эксцентриситетами правые части уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов  $e$  и  $\pi$  содержат малый делитель  $e$ . Эта трудность легко устраняется, если вместо элементов  $e$ ,  $\pi$  и  $\nu$  ввести переменные  $h$ ,  $l$  и  $\lambda$ :

$$h = e \sin(\pi - \Omega), \quad l = e \cos(\pi - \Omega), \quad \lambda = \nu - \Omega + \int_{t_0}^t n dt. \quad (6.2.35)$$

Возмущающая функция  $R$  определяется формулой (6.2.01). Будучи разложена в ряд по степеням малых  $h$  и  $l$ , она приобретает вид [23]

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{2} J_2 \frac{f m r_0^2}{a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) & \left[ 1 + 3l \cos \lambda + 3h \sin \lambda + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} (h^2 + l^2) + \frac{9}{2} (h^2 - l^2) \cos 2\lambda + 9hl \sin 2\lambda \right] + \\ & + \frac{3}{4} J_2 \frac{f m r_0^2}{a^3} \sin^2 i \left[ -\frac{1}{2} l \cos \lambda + \frac{1}{2} h \sin \lambda + \cos 2\lambda + \right. \\ & \left. + \frac{7}{2} l \cos 3\lambda + \frac{7}{2} h \sin 3\lambda - \frac{5}{2} (h^2 + l^2) \cos 2\lambda + \right. \\ & \left. + \frac{17}{2} (l^2 - h^2) \cos 4\lambda + 17hl \sin 4\lambda \right]. \quad (6.2.36) \end{aligned}$$

В формуле (6.2.36) сохранены все члены до второго порядка малости относительно  $e$  включительно.

**2. Возмущения элементов.** Решение уравнений для элементов  $a$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $\Omega$ ,  $i$  и  $\lambda$  позволяет найти выражения для возмущений в виде [23]

$$\begin{aligned} \delta a = & 3J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) (l \cos \lambda + h \sin \lambda) + \\ & + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin^2 i \left(-\frac{1}{2} l \cos \lambda + \frac{1}{2} h \sin \lambda + \cos 2\lambda + \right. \\ & \left. + \frac{7}{2} l \cos 3\lambda + \frac{7}{2} h \sin 3\lambda\right), \quad (6.2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta h = & \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[\ln(t - t_0) + \sin \lambda + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} l \sin 2\lambda - \frac{3}{2} h \cos 2\lambda\right] - \frac{3}{8} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin^2 i \left(\sin \lambda - \frac{7}{3} \sin 3\lambda + \right. \\ & \left. + 5l \sin 2\lambda + h \cos 2\lambda - \frac{17}{2} l \sin 4\lambda + \frac{17}{2} h \cos 4\lambda\right) + \\ & + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \cos^2 i \left[\ln(t - t_0) - \frac{1}{2} l \sin 2\lambda\right], \quad (6.2.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta l = & \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[-hn(t - t_0) + \cos \lambda + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} l \cos 2\lambda + \frac{3}{2} h \sin 2\lambda\right] - \frac{3}{8} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin^2 i \left(-\cos \lambda - \right. \\ & \left. - \frac{7}{3} \cos 3\lambda - 5h \sin 2\lambda - \frac{17}{2} l \cos 4\lambda - \frac{17}{2} h \sin 4\lambda + l \cos 2\lambda\right) + \\ & + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \cos^2 i \left[-hn(t - t_0) + \frac{h}{2} \sin 2\lambda\right], \quad (6.2.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Omega = & -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \cos i \left[n(t - t_0) + \frac{7}{2} l \sin \lambda - \frac{5}{2} h \cos \lambda - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin 2\lambda - \frac{7}{6} l \sin 3\lambda + \frac{7}{6} h \cos 3\lambda\right], \quad (6.2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i = & \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin i \cos i \left(-l \cos \lambda + h \sin \lambda + \right. \\ & \left. + \cos 2\lambda + \frac{7}{3} l \cos 3\lambda + \frac{7}{3} h \sin 3\lambda\right), \quad (6.2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \lambda = & 3J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[n(t - t_0) + \frac{7}{4} l \sin \lambda - \frac{7}{4} h \cos \lambda\right] + \\ & + \frac{9}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin^2 i \left(-\frac{7}{24} h \cos \lambda - \frac{7}{24} l \sin \lambda + \frac{1}{4} \sin 2\lambda - \right. \\ & \left. - \frac{49}{72} h \cos 3\lambda + \frac{49}{72} l \sin 3\lambda\right) + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \cos^2 i \left[n(t - t_0) + \right. \\ & \left. + \frac{7}{2} l \sin \lambda - \frac{5}{2} h \cos \lambda - \frac{1}{2} l \sin 2\lambda + \frac{7}{6} l \sin 3\lambda + \frac{7}{6} h \cos 3\lambda\right], \quad (6.2.42) \end{aligned}$$

где в правых частях нужно подставить невозмущенные значения элементов

$$\left. \begin{aligned} a = a_0, \quad n = n_0, \quad i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad h = h_0, \\ l = l_0, \quad \lambda = \lambda_0 + n_0(t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.43)$$

**3. Случай круговой орбиты.** Из формул (6.2.37) — (6.2.42) легко получить следующие выражения для возмущений элементов круговой орбиты:

$$\delta a = \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \sin^2 i \cos 2\lambda, \quad (6.2.44)$$

$$\begin{aligned} \delta h = \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sin \lambda - \\ - \frac{3}{8} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \sin^2 i \left( \sin \lambda - \frac{7}{3} \sin 3\lambda \right), \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

$$\begin{aligned} \delta l = \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \cos \lambda + \\ + \frac{3}{8} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \sin^2 i \left( \cos \lambda + \frac{7}{3} \cos 3\lambda \right), \end{aligned} \quad (6.2.46)$$

$$\delta i = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \sin i \cos i \cos 2\lambda, \quad (6.2.47)$$

$$\delta \Omega = -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i \left[ n(t - t_0) - \frac{1}{2} \sin 2\lambda \right], \quad (6.2.48)$$

$$\begin{aligned} \delta \lambda = 3J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) n(t - t_0) + \frac{9}{8} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \sin^2 i \sin 2\lambda - \\ - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \cos^2 i \left[ n(t - t_0) - \frac{1}{2} \sin 2\lambda \right], \end{aligned} \quad (6.2.49)$$

где в правых частях нужно заменить все элементы их невозмущенными значениями.

**4. Вычисление возмущенных координат.** Возмущенные прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.50)$$

где с точностью до вторых степеней  $h$  и  $l$

$$u = \lambda + 2(l \sin \lambda - h \cos \lambda) + \frac{5}{4}(l^2 - h^2) \sin 2\lambda - \frac{5}{2}hl \cos 2\lambda, \quad (6.2.51)$$

$$r = a \left( 1 - l \cos \lambda - h \sin \lambda + \frac{h^2 + l^2}{2} - \frac{l^2 - h^2}{2} \cos 2\lambda - hl \sin 2\lambda \right), \quad (6.2.52)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, & i &= i_0 + \delta i, & \Omega &= \Omega_0 + \delta \Omega, \\ h &= h_0 + \delta h, & l &= l_0 + \delta l, & \lambda &= \lambda_0 + n_0(t - t_0) + \delta l, \end{aligned} \right\} (6.2.53)$$

а  $\delta a, \delta i, \dots, \delta \lambda$  определяются формулами (6.2.37) — (6.2.42).

**5. Замечания.** Выведенные выше формулы имеют компактный вид и не содержат особенностей при  $e_0 = 0$ . Они удобны для исследования движения спутников с малыми эксцентриситетами. Однако, поскольку решение задачи было получено в *нетригонометрическом виде* и не были вычислены вековые члены порядка  $J_2^2$ , ими можно пользоваться только на небольших промежутках времени.

## ТЕОРИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТ ИСЗ

В этой главе изложена теория промежуточных орбит ИСЗ. Эти орбиты строятся на основе некоторых аппроксимирующих выражений для потенциала притяжения Земли, допускающих интегрирование дифференциальных уравнений движения спутника в квадратурах. Поскольку аппроксимирующие выражения включают в себя основную часть возмущающей функции, обусловленной несферичностью Земли, промежуточные орбиты оказываются более близкими к истинной орбите спутника, чем кеплеровский эллипс. В некоторых случаях метод промежуточных орбит позволяет математически строго решить главную проблему в теории движения ИСЗ.

## § 3.01. Задачи Штерна, Гарфинкеля и Акснеса

В этом параграфе рассмотрены модельные задачи Т. Штерна [24], Б. Гарфинкеля [25] и К. Акснеса [26], которые дают приближенные решения проблемы о движении спутника с учетом сжатия Земли. Эти решения определяют некоторые промежуточные орбиты, которые более близки к истинной орбите спутника, чем кеплеровская орбита, и могут рассматриваться как невозмущенные при построении полной теории движения спутника. Поскольку здесь вводятся формулы, которые аппроксимируют только первые два члена потенциала притяжения Земли, то для силовой функции  $U$  можно принять следующее упрощенное выражение:

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - J_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (6.3.01)$$

где  $f$  — постоянная притяжения,  $m$  и  $r_0$  — масса и средний экваториальный радиус Земли,  $J_2$  — безразмерная постоянная,  $r$  и  $\varphi$  — геоцентрический радиус-вектор и широта спутника. В формуле (6.3.01) отброшены члены, имеющие порядок  $J_2^2$  и выше.



**1. Задача Штерна.** Для аппроксимации силовой функции  $U$  Т. Штерн вводит функцию  $V$ , которая определяется следующей формулой:

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \frac{J_2}{2} \frac{r_0^2}{r^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{rp} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \right\}, \quad (6.3.02)$$

где  $p$  — параметр,  $i$  — наклон орбиты спутника. Эта формула и дает промежуточный потенциал или силовую функцию в задаче Штерна\*). Пусть

$$R = U - V$$

есть возмущающая функция. Тогда из (6.3.01) и (6.3.02) находим

$$R = -\frac{3}{2} fm J_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right). \quad (6.3.03)$$

Эта формула показывает, что для орбит с малым эксцентриситетом  $e$  функция  $R$  будет малой величиной. Поэтому можно считать, что для таких орбит функция  $V$  достаточно хорошо аппроксимирует силовую функцию  $U$ .

Дифференциальные уравнения движения спутника в силовом поле с потенциалом  $V$  строго интегрируются в квадратурах. Если воспользоваться сферическими координатами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , связанными с экваториальными геоцентрическими прямоугольными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.04)$$

и применить метод Гамильтона — Якоби, то полный интеграл уравнения Гамильтона запишется в виде

$$S = \alpha_3 \lambda + \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{L}}{r} dr + \int_0^\varphi \sqrt{M} d\varphi, \quad (6.3.05)$$

где

$$L = 2\alpha_1 r^2 + 2fmr - \alpha_2^2 + \frac{2fm}{r} B,$$

$$M = \alpha_2^2 \frac{3fmJ_2 r_0^2}{2p} \sin^2 i - \alpha_3^2 \sec^2 \varphi - \frac{3fmJ_2 r_0^2}{p},$$

\*) В книге [27] эта формула была ошибочно приписана Б. Гарфинкелю.

причем

$$B = \frac{J_2 r_0^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right),$$

а  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные постоянные.

Знание полного интеграла  $S$ , как известно, позволяет записать общий интеграл задачи. Мы не будем здесь выписывать общего решения, а приведем лишь три первых интеграла, которые легко находятся из (6.3.05). Они имеют следующий вид:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{L}}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{M}}{r^2}, \quad r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dt} = \alpha_3$$

и полностью решают задачу. Формулы, описывающие промежуточную орбиту, приводятся в уже указанной работе Т. Штерна [24] и его книге [28].

**2. Задача Гарфинкеля.** Б. Гарфинкель предложил следующую формулу промежуточного потенциала:

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{\rho^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{r\rho} (\sin^2 \varphi - \cos^2 i) \right\} \quad (6.3.06)$$

или

$$V = \frac{\mu}{r} - \frac{3}{2} fm J_2 \frac{r_0^2}{r^2 \rho} (\sin^2 \varphi - \cos^2 i), \quad (6.3.07)$$

где

$$\mu = fm \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{\rho^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \right\}. \quad (6.3.08)$$

Формулы (6.3.01) и (6.3.06) дают следующее выражение для возмущающей функции:

$$R = -\frac{J_2 fm}{r} \left\{ \frac{r_0^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) - \frac{r_0^2}{r\rho} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{\rho^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right\}. \quad (6.3.09)$$

Формула (6.3.06) была подобрана таким образом, чтобы промежуточная орбита учитывала все вековые возмущения первого порядка.

Как и в задаче Штерна, уравнения движения с силовой функцией, определяемой формулой (6.3.06), интегрируются методом Гамильтона — Якоби путем разделения переменных.

Первые интегралы задачи Гарфинкеля имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2) - V &= \alpha_1, \\ 2\mu r + 2\alpha_1 r^2 - r^2 \dot{r}^2 &= \alpha_2^2, \\ r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda} &= \alpha_3, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные постоянные. Формулы, описывающие промежуточное движение, приводятся в работе Б. Гарфинкеля [25].

**3. Задача К. Акнеса.** К. Акнес строит свою промежуточную орбиту на основе промежуточного потенциала  $V$ , определяемого формулой

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - J_2 \frac{r_0^2}{rp} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (6.3.10)$$

Формула для возмущающей функции  $R$  в этом случае имеет вид

$$R = fm J_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right). \quad (6.3.11)$$

Функция  $V$ , таким образом, мало отличается от  $U$ , если эксцентриситет орбиты спутника является малой величиной. Как и в задаче Гарфинкеля, она выбрана так, чтобы промежуточная орбита учитывала вековые возмущения первого порядка относительно  $J_2$ .

Общее решение уравнений промежуточного движения в этом случае также может быть найдено методом Гамильтона — Якоби. Оно получено в работе [26]. Приведем здесь первые интегралы задачи Акнеса. Они таковы:

$$\begin{aligned} \frac{fm}{L^2} + \dot{r}^2 - \frac{2fm}{r} + \frac{G^2}{r^2} &= 0, \\ G^4 - r^4 (\cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}^2) G^2 - J_2 (fm)^2 r_0^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) &= 0, \\ r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda} &= H. \end{aligned}$$

Здесь  $L, G, H$  — канонические постоянные Делоне.

**4. Замечания.** Предложенные Т. Штерном, Б. Гарфинкелем и К. Акнесом промежуточные потенциалы по своей структуре имеют много общего друг с другом. Все три потенциала можно записать в такой общей форме:

$$V = F(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}. \quad (6.3.12)$$

Отсюда и следует интегрируемость рассмотренных задач, ибо эта форма, как известно, позволяет проинтегрировать соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби методом разделения

переменных [27] \*). Далее, все промежуточные потенциалы обладают тем важным свойством, что они дают возможность построить промежуточные орбиты, учитывающие важнейшие неравенства в движении спутника, а именно, вековые возмущения первого порядка относительно сжатия Земли.

К настоящему времени наиболее полно разработана промежуточная орбита Акнеса. На ее основе была развита теория, учитывающая вторую, третью и четвертую зональные гармоники геопотенциала. Эта теория дает вековые возмущения до третьего и периодические до второго порядка относительно  $J_2$  включительно.

Недостатки всех промежуточных потенциалов заключаются в следующем. Все они зависят не только от характеристик гравитационного поля Земли, но и от элементов орбиты (большая полуось, эксцентриситет, наклон) спутника. Поэтому точность аппроксимации для разных орбит будет разной. Во всех случаях возмущающая функция содержит коротко-периодические члены первого порядка относительно  $J_2$ . Следовательно, промежуточные орбиты не учитывают этих возмущений, и их нужно определять методами теории возмущений.

### § 3.02. Задачи Баррара, Винти и Кислика

В этом параграфе будет рассмотрен другой тип аппроксимирующих выражений для потенциала притяжения Земли. Эти выражения были предложены Р. Барраром [29], Дж. Винти [30] и М. Д. Кисликом [31]. Все они обладают двумя важнейшими свойствами. Во-первых, они отличаются от потенциала реальной Земли членами порядка выше первого относительно сжатия. Во-вторых, дифференциальные уравнения движения в гравитационном поле, определяемом аппроксимирующими потенциалами, строго интегрируются в квадратурах. В отличие от промежуточных потенциалов, рассмотренных в предыдущих параграфах, они зависят только от постоянных гравитационного поля Земли, и не зависят от элементов орбиты спутника. Возмущающая функция в этом случае не содержит второй зональной гармоники.

Если отбросить тессеральные и секториальные гармоники, то потенциал притяжения Земли можно записать в виде

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right\}, \quad (6.3.13)$$

где  $P_n$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка.

\*) К сожалению, задача не интегрируется, если во втором слагаемом (6.3.12) показатель у  $r$  будет равен 3, а не 2. В этом случае формула (6.3.12) содержала бы как частный случай формулу (6.3.01).

**1. Задача Баррара.** Задача Р. Баррара заключается в изучении движения спутника в гравитационном поле с потенциалом

$$V = \frac{fm}{\rho} \left\{ 1 - \frac{\delta(z - \delta)}{\rho^2} \right\}, \quad (6.3.14)$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \delta)^2}.$$

Предполагая, что  $\delta$  — малая величина, разложим  $V$  в ряд по степеням  $\delta$ . Тогда

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \frac{\delta^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right\} + O(\delta^3), \quad (6.3.15)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z = r \sin \varphi,$$

а  $O(\delta^3)$  — некоторая функция, имеющая третий порядок малости относительно  $\delta$ .

Выберем  $\delta$  так, чтобы

$$\delta = r_0 \sqrt{J_2}. \quad (6.3.16)$$

Тогда первые два члена формулы (6.3.15) будут соответственно равны первым двум членам формулы (6.3.13).

Если через  $R$  обозначить возмущающую функцию

$$R = U - V,$$

то из (6.3.13) и (6.3.15) находим

$$R = -\frac{fm}{r} \sum_{n=3}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) - O(\delta^3). \quad (6.3.17)$$

Таким образом, функция  $V$  отличается от  $U$  членами порядка  $J_2^{1/2}$  и, следовательно, дает достаточно хорошее приближение к потенциалу притяжения Земли.

Чтобы проинтегрировать дифференциальные уравнения движения в силовом поле с потенциалом  $V$ , введем сферические координаты  $\rho, \psi, \lambda$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi \cos \lambda, \\ y &= \rho \cos \psi \sin \lambda, \\ z &= \delta + \rho \sin \psi, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + 2\delta\rho \sin \psi + \delta^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \psi + \frac{\delta}{\rho} \sec \psi. \end{aligned}$$

Тогда

$$V = \frac{fm}{\rho} - \frac{fm\delta \sin \psi}{\rho^2}. \quad (6.3.18)$$

Сопоставление формул (6.3.18) и (6.3.12) показывает, что соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби должно интегрироваться методом разделения переменных.

Первые интегралы задачи Баррара можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho^2 \dot{\lambda} &= c_1, \\ \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \psi &= 2V + c_2, \\ \rho^4 (\dot{\psi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \psi) + 2fm\delta \sin \psi &= c_3. \end{aligned}$$

Формулы, описывающие промежуточную орбиту Р. Баррара, получены в уже указанной работе [29]. Они приводятся также в книге [27].

**2. Задача Винти и Кислика.** Дж. Винти и М. Д. Кислик предложили новые аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли. Эти выражения, в сущности совпадающие друг с другом, можно представить следующей формулой:

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_2^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right\}. \quad (6.3.19)$$

Сравнивая формулу (6.3.19) с (6.3.13), мы видим, что первые два члена в разложении  $V$  в точности совпадают с первыми двумя членами в разложении  $U$ .

Если обозначить через  $R$  возмущающую функцию, то

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{k=3}^{\infty} j_k \left( \frac{r_0}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi), \quad (6.3.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} j_{2n+1} &= -J_{2n+1}, \\ j_{2n} &= -[J_{2n} + (-1)^n J_2^n]. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.21)$$

Поскольку коэффициенты  $J_k$  имеют второй порядок малости относительно  $J_2$ , то из формул (6.3.20) и (6.3.21) видно, что возмущающая функция содержит лишь члены второго порядка. В этом отношении формула (6.3.19), несомненно, имеет явное преимущество по сравнению с формулой (6.3.14).

Дифференциальные уравнения задачи Винти и Кислика могут быть проинтегрированы в сфероидальных координатах  $\xi, \eta, \omega$ , связанных с  $x, y, z$  равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos \omega, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin \omega, \\ z &= \xi\eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.22)$$

Первые интегралы задачи записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{J}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\sqrt{F(\eta)}}{J}, \\ (\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2) \frac{dw}{dt} &= \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.23)$$

где

$$\begin{aligned} J &= \xi^2 + c^2\eta^2, \\ \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1\xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\alpha_1c^2\eta^2 + \alpha_2^2) - \alpha_3^2, \\ c &= r_0\sqrt{J_2}, \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

а  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — канонические постоянные Якоби.

**3. Замечания.** Хотя задача Баррара и представляет интерес и могла бы найти приложения при изучении движения далеких спутников, нужно все же подчеркнуть особую важность задачи Винти и Кислика. Здесь мы имеем интегрируемую динамическую проблему, которая имеет важнейшие приложения в современной небесной механике, как в теории движения ИСЗ, так и в теории движения естественных спутников планет.

Промежуточная орбита, основанная на задаче Винти и Кислика, исследовалась не только авторами, но и многими другими. Рабочие формулы для вычисления промежуточной орбиты были получены Дж. Винти [30], [32], М. Д. Кисликом [31], [33] и И. Ижаком [34].

### § 3.03. Обобщенная задача двух неподвижных центров

В 1961 г. Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, В. Г. Демин предложили для построения теории движения ИСЗ использовать *обобщенную задачу двух неподвижных центров* [35], [36]. Задача эта заключается в исследовании движения спутника в гравитационном поле, потенциал которого дается формулой

$$W = \frac{fm}{2} \left\{ \frac{1 + i\sigma}{r_1} + \frac{1 - i\sigma}{r_2} \right\}. \quad (6.3.25)$$

Здесь  $f$  и  $m$  — постоянная притяжения и масса Земли,  $i = \sqrt{-1}$ ,

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.26)$$

а  $c$  и  $\sigma$  — некоторые вещественные постоянные.

Предполагая, что  $c$  и  $\sigma$  малы, разложим  $W$  в ряд по полиномам Лежандра. Тогда получим

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} J'_k \left( \frac{r_0}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right\}, \quad (6.3.27)$$

где коэффициенты  $J'_k$  даются равенством

$$J'_k = -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{r_0} \right)^k \{ (1 + i\sigma)(\sigma + i)^k + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^k \}. \quad (6.3.28)$$

Отсюда, в частности, следует, что при вещественных  $c$  и  $\sigma$  для любого целого  $k$  коэффициенты  $J'_k$  являются величинами действительными.

Выберем теперь  $c$  и  $\sigma$  из условий

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} c &= r_0 \left\{ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}, \\ \sigma &= \frac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.29)$$

Подставляя в (6.3.29) вместо  $r_0$ ,  $J_2$  и  $J_3$  их числовые значения из § 1.02, найдем

$$c = 209,729 \text{ км}, \quad \sigma = -0,035647. \quad (6.3.30)$$

При этих значениях для  $r_0$ ,  $c$  и  $\sigma$  из формулы (6.3.28) получаем

$$J'_4 = 1,166 \cdot 10^{-6}, \quad J'_5 = -0,006 \cdot 10^{-6}.$$

При этом  $J'_k$  для  $k \geq 6$  будут меньше  $10^{-9}$ . Таким образом, хотя  $J'_4$  и  $J_4$  не равны друг другу, однако их разность меньше, чем  $J_4$ . Вследствие малости отношения  $c/r_0$  постоянные  $J'_k$  убывают с возрастанием  $k$  быстрее, чем  $J_k$ . Поэтому разность функций  $U$  и  $W$  будет содержать члены, порядок которых  $10^{-6}$  и выше.

Пусть

$$R = U - W,$$

где  $U$  дается формулой (6.3.01), есть возмущающая функция. Тогда

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi), \quad (6.3.31)$$

где

$$j_n = -(J_n - J'_n). \quad (6.3.32)$$



Если воспользоваться числовыми данными § 1.02, то для постоянных  $j_n$  получим (в единицах  $10^{-6}$ )

$$\begin{aligned} j_4 &= 0,427, & j_5 &= 0,236, \\ j_6 &= -0,502, & j_7 &= 0,361, \\ j_8 &= 0,118, & j_9 &= 0,100. \end{aligned}$$

Итак, если  $c$  и  $\sigma$  выбрать из условий (6.3.29), то первые три члена формулы (6.3.27) будут совпадать с первыми тремя членами формулы (6.3.01). Тем самым возмущающая функция  $R$  не содержит не только второй, но и третьей зональной гармоники. Она включает в себя лишь члены, порядок которых  $10^{-6}$  и выше. Таким образом, функция  $W$  весьма хорошо аппроксимирует потенциал притяжения реальной Земли.

Перейдем теперь к интегрированию дифференциальных уравнений задачи. Из формулы (6.3.01) следует, что функцию  $W$  можно интерпретировать как силовую функцию задачи двух неподвижных центров с комплексными массами  $\frac{m}{2}(1+i\sigma)$  и  $\frac{m}{2}(1-i\sigma)$  и с мнимым взаимным расстоянием, равным  $ic$ . А как известно, задача двух неподвижных центров является одной из немногих задач механики, интегрируемых в квадратурах.

Дифференциальные уравнения движения могут быть проинтегрированы методом Гамильтона — Якоби, если ввести сферические координаты  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\omega$ , связанные с  $x$ ,  $y$ ,  $z$  формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos \omega, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin \omega, \\ z &= c\sigma + \xi\eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.33)$$

В этих координатах кинетическая энергия  $T$  и силовая функция  $W$  имеют вид

$$T = \frac{J}{2} \left[ \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} + \frac{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}{J} \dot{\omega}^2 \right], \quad (6.3.34)$$

$$W = \frac{Jm(\xi - c\sigma\eta)}{J}, \quad (6.3.35)$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2.$$

С помощью (6.3.34) и (6.3.35) легко составить уравнение Гамильтона — Якоби. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 + c^2}{2J} \left( \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1 - \eta^2}{2J} \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \left( \frac{\partial S}{\partial \omega} \right)^2 = \frac{Jm(\xi - c\sigma\eta)}{J} + \alpha_1, \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

где  $\alpha_1$  — постоянная.

Полный интеграл уравнения (6.3.36) находится методом разделения переменных и дается формулой

$$S = \int \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2 + c^2} d\xi + \int \frac{\sqrt{F(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \alpha_3 \omega, \quad (6.3.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1 \xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2 \alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\alpha_1 c^2 \eta^2 - 2fmcs\eta + \alpha_2^2) - \alpha_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.38)$$

а  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные постоянные Якоби.

Из (6.3.37) нетрудно найти три первых интеграла задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{J}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\sqrt{F(\eta)}}{J}, \\ (1 - \eta^2)(\xi^2 + c^2) \frac{d\omega}{dt} &= \alpha_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.39)$$

Введем новую независимую переменную  $\tau$  согласно уравнению

$$dt = J d\tau. \quad (6.3.40)$$

Тогда из равенств (6.3.39) находим

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} &= \tau + c_1, & \int \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \tau + c_2, \\ \omega &= \alpha_3 \int \frac{\xi^2 + c^2 \eta^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + c_3, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.41)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — постоянные интегрирования.

Таким образом, задача свелась к обращению квадратур. После того, как из первых двух равенств (6.3.41) найдем  $\xi$  и  $\eta$  как явные функции  $\tau$ , третье равенство (6.3.41) даст  $\omega$  как функцию  $\tau$ , а уравнение (6.3.40) позволит связать  $\tau$  с временем  $t$ .

З а м е ч а н и я. Функция  $W$  содержит два параметра  $c$  и  $\sigma$ , которые мы выбрали так, чтобы вторая и третья гармоники в разложении потенциала  $U$  совпадали с таковыми в разложении  $W$ . Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

Пусть  $\sigma = 0, c \neq 0$ . Тогда формулы (6.3.28) и (6.3.29) дают

$$J'_{2n+1} = 0, \quad J'_{2n+1} = (-1)^n \left( \frac{c}{r_0} \right)^2, \quad c = r_0 \sqrt{J_2}$$

и, следовательно, формула (6.3.27) совпадает с формулой Винти и Кислика.

Пусть  $\sigma = 0, c \neq 0$ . Тогда, если ввести

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rc + c^2},$$

разложить  $W$  в ряд по степеням  $c$  и сохранить члены до  $c^2$  включительно, то получим формулу Баррара.

Пусть, наконец,  $\sigma = 0$ ,  $c = 0$ . Тогда формула (6.3.25) даст нам потенциал шарообразной Земли.

Таким образом, формула (6.3.25) включает в себя как частные или предельные случаи промежуточные потенциалы Винти и Кислика, Баррара и невозмущенный потенциал Земли. Пока она является наиболее общей формулой для промежуточного потенциала, допускающего интегрирование уравнений движения в квадратурах.

Обобщенной задаче двух неподвижных центров посвящено более сотни работ. Многие из них нашли отражение в книге [27]. Здесь мы отметим те из них, которые касаются качественных исследований.

Пусть  $h$  есть постоянная энергии. Тогда, если  $h < 0$ , то все движения происходят в ограниченной части пространства. Если же  $h \geq 0$ , то движения оказываются неограниченными в пространстве. Подробный качественный анализ в случае  $\sigma = 0$  для  $h < 0$  был дан в работах [37], [38] и в общем случае в работе [39]. Качественные исследования неограниченных движений были выполнены при  $\sigma = 0$  и  $h = 0$  в работе [40] и для  $h > 0$  в работе [41]. При  $\sigma \neq 0$  подобные исследования содержатся в статье [42]. Полярные орбиты ( $i = 90^\circ$ ) были подробно рассмотрены для  $\sigma = 0$  в работе [43] и для  $\sigma \neq 0$  в работе [44].

Устойчивость частных движений (круговых, эллиптических, эллипсоидальных и др.) была исследована для случая  $\sigma = 0$  в работе [45] и для случая  $\sigma \neq 0$  в работе [46].

Различные формулы, описывающие промежуточную орбиту, были опубликованы в статьях [47]—[51]. Механический смысл силовой функции задачи рассмотрен в работе [52].

### § 3.04. Промежуточная орбита, основанная на обобщенной задаче двух неподвижных центров

Здесь будут приведены формулы, позволяющие находить координаты спутника в промежуточном движении для произвольного момента времени  $t$ . Пусть  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$  и  $M_0$  — элементы промежуточной орбиты. Тогда порядок вычисления прямоугольных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  спутника может быть следующим [48].

1) Определение  $\psi$ :

$$M = n_0(t - t_0) + M_0, \quad (6.3.42)$$

$$E = M + e^* \sin E + \lambda \psi - \lambda_1 \cos \theta - \lambda_2 \sin 2\theta, \quad (6.3.43)$$

$$\theta = (1 + \nu) \psi + \omega_0, \quad (6.3.44)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (6.3.45)$$

где  $n_0$ ,  $e^*$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\nu$  и  $\bar{e}$  определяются формулами

$$n_0 = \sqrt{\frac{f m}{a^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} e^2 (1 - e^2) (1 - s^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} e^4 (1 - e^2) (1 - s^2) (1 + 11s^2 - e^2 + 5e^2 s^2) \right\},$$

$$e^* = e \{ 1 - e^2 (1 - e^2) (1 - s^2) + e^4 s^2 (1 - s^2) (1 - e^2) (3 + e^2) \},$$

$$\lambda = -\frac{e^4}{16} (1 - e^2)^{3/2} (24 - 96s^2 + 75s^4),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} e^3 \sigma s (4 - 5s^2) (1 - e^2)^{3/2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4} e^2 s^2 (1 - e^2)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{4} [(12 - 13s^2) - e^2 (4 - 5s^2)] \right\},$$

$$\nu = \frac{1}{4} e^2 (1 + \sigma^2) (12 - 15s^2) + \\ + \frac{e^4}{64} [(288 - 1296s^2 + 1035s^4) - e^2 (144 + 288s^2 - 510s^4)],$$

$$\bar{e} = e \{ 1 + e^2 (1 - e^2) (1 - 2s^2) + \\ + e^4 (1 - e^2) [(3 - 16s^2 + 14s^4) - 2e^2 (1 - s^2)^2] \}.$$

Вычисление  $\psi$  производится методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения можно взять

$$\psi = E = M.$$

2) Определение  $\xi$  и  $\varphi$ :

$$\xi = a (1 - e \cos E), \quad (6.3.46)$$

$$\varphi = \theta + \frac{k_1^2}{8} \sin 2\theta - \frac{k_2^2}{8} \sin 2\psi, \quad (6.3.47)$$

где

$$k_1^2 = e^2 s^2 [1 - e^2 + \sigma^2] - 4e^4 s^2 (1 - s^2) (1 - e^2),$$

$$k_2^2 = e^2 e^2 s^2 - e^4 e^2 (1 - 10s^2 + 11s^4 + e^2 s^4).$$

3) Определение  $\hat{\Omega}$ :

$$\hat{\Omega} = \mu \psi + \Omega_0 + \mu_1 \sin \psi + \mu_2 \sin 2\psi + \mu'_1 \cos \theta, \quad (6.3.48)$$

где

$$\mu = -\frac{3}{2} e^2 (1 + \sigma^2) a - \frac{3}{16} e^4 (6 - 17s^2 - 24e^2 s^2) a,$$

$$\mu_1 = -2e^2 e a \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [(4 - 28s^2) - e^2 (6 + 7s^2)] \right\},$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{4} e^2 e^2 a \left\{ 1 - \frac{e^2}{4} [(22 + s^2) + e^2 (2 + s^2)] \right\},$$

$$\mu'_1 = e^3 \sigma a s (1 - e^2).$$

4) Определение  $\rho$  и  $\rho'$ :

$$\rho = \frac{\sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - e^2\sigma^2)}}{1 + d \sin \varphi}, \quad (6.3.49)$$

$$\rho' = \frac{\xi}{1 + d \sin \varphi}, \quad (6.3.50)$$

где

$$d = \varepsilon \sigma s \{1 - e^2 [(5 - 6s^2) - e^2(1 - 2s^2)]\}.$$

5) Определение прямоугольных координат:

$$x = \rho (\cos \varphi \cos \hat{\Omega} - \alpha \sin \varphi \sin \hat{\Omega} - \beta \sin \hat{\Omega}),$$

$$y = \rho (\cos \varphi \sin \hat{\Omega} + \alpha \sin \varphi \cos \hat{\Omega} + \beta \cos \hat{\Omega}),$$

$$z = c\sigma + \rho' (s \sin \varphi + \gamma),$$

где

$$\beta = 2\varepsilon \sigma \alpha s \{1 - e^2(4 - 5s^2 + e^2s^2)\},$$

$$\gamma = -\varepsilon \sigma \{(1 - 2s^2) - e^2[(3 - 12s^2 + 10s^4) + e^2(1 - 2s^4)]\}.$$

Здесь

$$e = \frac{c}{p}, \quad p = a(1 - e^2), \quad s = \sin i, \quad \alpha = \cos i, \quad (6.3.51)$$

а  $c$  и  $\sigma$  связаны с  $r_0$ ,  $J_2$  и  $J_3$  формулами (6.3.29).

З а м е ч а н и я. Приведенные здесь формулы описывают все возможные орбиты спутника, основанные на обобщенной задаче двух неподвижных центров. Они не имеют особенностей ни при каких значениях  $e$  и  $i$ . Ими можно пользоваться как в случае критической наклонности, так и при  $e = 0$ .

При выводе этих формул были сохранены все члены до  $e^4$  включительно и отброшены члены, пропорциональные  $e^6$ , т. е. члены третьего порядка относительно  $J_2$ . Здесь мы, однако, отбросили некоторые периодические члены с амплитудами, не превосходящими 1 м.

Нужно иметь в виду, что наиболее точно должны вычисляться величины  $n_0$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , которые являются коэффициентами при  $i$ . Здесь мы привели для них выражения с точностью до второго порядка относительно  $J_2$ . Но в работе [53] получены также члены третьего порядка.

Заметим, наконец, что при  $\sigma = 0$  приведенные формулы описывают промежуточную орбиту, основанную на задаче Винти и Кислика, а при  $c = 0$  и  $\sigma = 0$  — невозмущенную кеплеровскую орбиту. При этом элементы  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$  и  $M_0$  превращаются

соответственно в большую полуось, эксцентриситет, наклон, долготу узла, аргумент перигея и среднюю аномалию в эпоху. Задача об определении элементов промежуточного движения по начальным условиям рассмотрена в работах [49], [51].

### § 3.05. Дифференциальные уравнения для элементов промежуточной орбиты

Рассмотренная в предыдущем параграфе промежуточная орбита учитывает главный член, а также вторую, третью и часть четвертой зональные гармоники потенциала притяжения Земли. Чтобы построить полную теорию движения спутника, которая учитывала бы все остальные возмущающие факторы, нужно иметь дифференциальные уравнения для элементов промежуточного движения. Здесь мы приведем одну систему таких уравнений. Она получена в работе [54].

Пусть  $L$ ,  $G$ ,  $H$  суть новые элементы, которые связаны с  $a$ ,  $e$ ,  $i$  следующими формулами:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{fma} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} (1 - e^2) \alpha^2 + \frac{e^2}{4} \sqrt{1 - e^2} (2 - 3s^2) \right\}, \\ G &= \sqrt{fma (1 - e^2)} \left\{ 1 + \frac{e^2}{4} [(4 - 5s^2) + e^2 (4 - 3s^2)] \right\}, \\ H &= \sqrt{fma (1 - e^2)} \cos i \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [2 - 3s^2 + e^2 (2 - s^2)] \right\}, \end{aligned}$$

где  $e$ ,  $s$  и  $\alpha$  даются равенствами (6.3.51).

Пусть далее элементы  $l$ ,  $g$ ,  $h$  имеют вид

$$l = n(t - t_0) + l_0, \quad g = n'(t - t_0) + g_0, \quad h = n''(t - t_0) + h_0,$$

где

$$\begin{aligned} n &= n_0(1 + \lambda), \quad n' = \nu n_0, \quad n'' = \mu n_0, \\ l_0 &= M_0(1 + \lambda), \quad g_0 = \omega_0 + \nu M_0, \quad h_0 = \Omega_0 + \mu M_0. \end{aligned}$$

Тогда оказывается, что элементы  $L$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$  являются каноническими и дифференциальные уравнения для них запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial H}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.52)$$

Здесь

$$R' = -\alpha_1 + R, \quad (6.3.53)$$

где  $R$  — возмущающая функция, а  $\alpha_1$  определяется формулой

$$\alpha_1 = -\frac{(fm)^2}{2L^2} \left\{ 1 - \frac{c^2(1+\sigma^2)}{2LG^3} \left( 1 - 3\frac{H^2}{G^2} \right) - \right. \\ - \frac{15}{32} \frac{c^4(fm)^4}{LG^7} \left( 1 - 14\frac{H^2}{G^2} + 21\frac{H^4}{G^4} \right) - \\ - \frac{6}{32} \frac{c^4(fm)^4}{L^3G^5} \left( 1 - 18\frac{H^2}{G^2} + 25\frac{H^4}{G^4} \right) + \\ \left. + \frac{6}{32} \frac{c^4(fm)^4}{L^2G^6} \left( 1 - 6\frac{H^2}{G^2} + 9\frac{H^4}{G^4} \right) \right\}, \quad (6.3.54)$$

а  $c$  и  $\sigma$  даются равенствами (6.3.29).

Если  $R = 0$ , то уравнения (6.3.52) определяют промежуточное движение, в котором величины  $L$ ,  $G$ ,  $H$  являются постоянными, а  $l$ ,  $g$ ,  $h$  — линейными функциями времени.

З а м е ч а н и я. При  $c = 0$  и  $\sigma = 0$  элементы  $L$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$  превращаются в элементы *Делоне* в теории кеплеровского движения. В работе [54] предложены также другие системы канонических элементов, в частности, системы, аналогичные первой и второй системам Пуанкаре.

Из уравнений (6.3.52) нетрудно получить дифференциальные уравнения для элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$  и  $M = l$ ,  $\omega = g$  и  $\Omega = h$ . Эти уравнения выведены в работе [55]. Они аналогичны *уравнениям Лагранжа* для оскулирующих элементов и превращаются в таковые при  $c = 0$ . В работе [56] получены уравнения, аналогичные *уравнениям Ньютона*, в которых правые части содержат производные возмущающей функции по элементам, а три компоненты возмущающего ускорения. Еще одна система уравнений, не имеющая аналогов в теории возмущений кеплеровских элементов, была получена в работе [57]. Все эти уравнения обладают тем важным свойством, что дают возможность уже в первом приближении получать неравенства, обусловленные комбинированным влиянием различных возмущающих факторов и сжатием Земли.

Невозмущенный гамильтониан, равный  $-\alpha_1$ , приведен нами с точностью до  $c^4$  включительно. В работе [53] он найден с точностью до  $c^6$ , т. е. с точностью до членов третьего порядка относительно  $J_2$  включительно.

## Глава 4

### ВОЗМУЩЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ПРИРОДЫ

В этой главе даны формулы для возмущений элементов орбиты ИСЗ, вызываемых зональными гармониками высших порядков, тессеральными и секториальными гармониками геопотенциала и притяжением Луны и Солнца.

#### § 4.01. Возмущения от зональных гармоник высших порядков

1. **Возмущающая функция.** Возмущающая функция, обусловленная зональными гармониками потенциала притяжения Земли, имеет вид (см. § 1.01)

$$R = \frac{f m}{r} \sum_{k=2}^{\infty} I_k \left( \frac{r_0}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi'). \quad (6.4.01)$$

В §§ 2.01 — 2.03 были рассмотрены возмущения от второй зональной гармоники. Здесь приводятся формулы для возмущений от гармоник, пропорциональных  $I_3, I_4, \dots, I_8$ .

2. **Вековые возмущения.** Вековые возмущения имеют только элементы  $\Omega, \omega$  и  $M$ . Обозначая через  $\Delta\dot{\Omega}$  и  $\Delta\dot{\omega}$  коэффициенты при вековых возмущениях элементов  $\Omega$  и  $\omega$ , согласно [58] будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\Omega} = & -n \cos i \left[ \frac{15}{32} \gamma_4 (2 + 3e^2) (4 - 7s^2) - \right. \\ & - \frac{105}{1024} \gamma_6 (8 + 40e^2 + 15e^4) (8 - 36s^2 + 33s^4) + \\ & \left. + \frac{315}{32768} \gamma_8 (16 + 168e^2 + 210e^4 + 35e^6) (64 - 528s^2 + 1144s^4 - 715s^6) \right], \end{aligned} \quad (6.4.02)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega} = & -\Delta\dot{\Omega} \cos i + n \left[ \frac{15}{128} \gamma_4 (4 + 3e^2) (8 - 40s^2 + 35s^4) - \right. \\ & - \frac{105}{2048} \gamma_6 (8 + 20e^2 + 5e^4) (16 - 168s^2 + 378s^4 - 231s^6) + \\ & \left. + \frac{315}{262144} \gamma_8 (64 + 336e^2 + 280e^4 + 35e^6) (128 - 2304s^2 + \right. \\ & \left. + 9504s^4 - 13728s^6 + 6435s^8) \right], \end{aligned} \quad (6.4.03)$$



где

$$\gamma_k = I_k \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^k. \quad (6.4.04)$$

Вековое возмущение элемента  $M$  оказывается равносильным среднему движению  $n$  плюс некоторое постоянное возмущение порядка  $J_2^2$ . Среднее движение  $n$  определяется непосредственно из наблюдений, а для вычисления большой полуоси пользуются формулой

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \gamma_2 \sqrt{1 - e^2} (2 - 3s^2) \right], \quad (6.4.05)$$

которая имеет ошибку порядка  $J_2^2$ .

Из формул (6.4.01) — (6.4.03) следует, что вековые возмущения первого порядка обусловлены лишь гармониками четного порядка.

**3. Долгопериодические возмущения.** Долгопериодические возмущения элементов  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $M$  определяются формулами [58]

$$\delta e = \frac{3s(1 - e^2)}{4v} \sum_{k=1}^6 a_k \cos kg', \quad (6.4.06)$$

$$\delta i = - \frac{3e \cos i}{4v} \sum_{k=1}^6 a_k \cos kg', \quad (6.4.07)$$

$$\delta \Omega = \frac{3 \cos i}{4v(4 - 5s^2)s} \sum_{k=1}^6 b_k \sin kg', \quad (6.4.08)$$

$$\delta \omega = - \delta \Omega \cos i + \frac{3}{4ve} \sum_{k=1}^6 c_k \sin kg', \quad (6.4.09)$$

$$\delta M = \frac{3(1 - e^2)^{3/2}}{4ve} \sum_{k=1}^6 d_k \sin kg', \quad (6.4.10)$$

в которых

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \gamma_3 (4 - 5s^2) - \frac{5}{32} \gamma_5 (4 + 3e^2) (8 - 28s^2 + 21s^4) + \\ &\quad + \frac{35}{2048} \gamma_7 (8 + 20e^2 + 5e^4) (64 - 432s^2 + 792s^4 - 429s^6), \\ a_2 &= es \left[ \frac{5}{16} \gamma_4 (6 - 7s^2) - \frac{175}{512} \gamma_6 (2 + e^2) (16 - 48s^2 + 33s^4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{735}{32768} \gamma_8 (48 + 80e^2 + 15e^4) (32 - 176s^2 + 286s^4 - 143s^6) \right], \\ a_3 &= e^2 s^2 \left[ \frac{35}{192} \gamma_5 (8 - 9s^2) - \frac{105}{4096} \gamma_7 (8 + 3e^2) (80 - 220s^2 + 143s^4) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= e^3 s^3 \left[ \frac{105}{1024} \gamma_6 (10 - 11s^2) - \frac{1617}{32768} \gamma_8 (10 + 3e^2) (40 - 104s^2 + 65s^4) \right], \\
 a_5 &= e^4 s^4 \left[ \frac{231}{4096} \gamma_7 (12 - 13s^2) \right], \\
 a_6 &= e^5 s^5 \left[ \frac{1001}{32768} \gamma_8 (14 - 15s^2) \right], \\
 b_1 &= -e \left[ \frac{1}{2} \gamma_3 (16 - 40s^2 + 25s^4) - \right. \\
 &\quad - \frac{5}{32} \gamma_5 (4 + 3e^2) (32 - 296s^2 + 560s^4 - 315s^6) + \\
 &\quad \left. + \frac{35}{2048} \gamma_7 (8 + 20e^2 + 5e^4) (256 - 4864s^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 18\,000s^4 - 23\,892s^6 + 10\,725s^8) \right], \\
 b_2 &= -e^2 s \left[ \frac{5}{16} \gamma_4 (24 - 56s^2 + 35s^4) - \right. \\
 &\quad - \frac{175}{512} \gamma_6 (2 + e^2) (64 - 384s^2 + 636s^4 - 330s^6) + \\
 &\quad \left. + \frac{735}{32768} \gamma_8 (48 + 80e^2 + 15e^4) (128 - 1408s^2 + 4312s^4 - 5148s^6 + 2145s^8) \right], \\
 b_3 &= -e^3 s^2 \left[ \frac{35}{576} \gamma_5 (96 - 220s^2 + 135s^4) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{35}{4096} \gamma_7 (8 + 3e^2) (960 - 4800s^2 + 7304s^4 - 3575s^6) \right], \\
 b_4 &= -e^4 s^3 \left[ \frac{105}{2048} \gamma_6 (80 - 182s^2 + 110s^4) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1617}{65536} \gamma_8 (10 + 3e^2) (320 - 1448s^2 + 2080s^4 - 975s^6) \right], \\
 b_5 &= -e^5 s^4 \left[ \frac{231}{20480} \gamma_7 (240 - 544s^2 + 325s^4) \right], \\
 b_6 &= -e^6 s^5 \left[ \frac{1001}{98304} \gamma_8 (168 - 380s^2 + 225s^4) \right]; \\
 c_1 &= -s \left[ \frac{1}{2} \gamma_3 (4 - 5s^2) - \frac{5}{32} \gamma_5 (4 + 25e^2 + 6e^4) (8 - 28s^2 + 21s^4) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{35}{2048} \gamma_7 (8 + 124e^2 + 145e^4 + 20e^6) (64 - 432s^2 + 792s^4 - 429s^6) \right], \\
 c_2 &= -es^2 \left[ \frac{5}{32} \gamma_4 (2 + e^2) (6 - 7s^2) - \right. \\
 &\quad - \frac{175}{1024} \gamma_6 (4 + 14e^2 + 3e^4) (16 - 48s^2 + 33s^4) + \\
 &\quad \left. + \frac{105}{65536} \gamma_8 (672 + 5264e^2 + 4550e^4 + 525e^6) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (32 - 176s^2 + 286s^4 - 143s^6) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &= -e^2 s^3 \left[ \frac{35}{576} \gamma_5 (3 + 2e^2) (8 - 9s^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{105}{4096} \gamma_7 (8 + 21e^2 + 4e^4) (80 - 220s^2 + 143s^4) \right], \\
 c_4 &= -e^3 s^4 \left[ \frac{105}{4096} \gamma_6 (4 + 3e^2) (10 - 11s^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1617}{131072} \gamma_8 (40 + 88e^2 + 15e^4) (40 - 104s^2 + 65s^4) \right], \\
 c_5 &= -e^4 s^5 \left[ \frac{231}{20480} \gamma_7 (5 + 4e^2) (12 - 13s^2) \right], \\
 c_6 &= -e^5 s^6 \left[ \frac{1001}{196608} \gamma_8 (6 + 5e^2) (14 - 15s^2) \right]; \\
 d_1 &= s \left[ \frac{1}{2} \gamma_3 (4 - 5s^2) - \frac{5}{32} \gamma_5 (4 + 9e^2) (8 - 28s^2 + 21s^4) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{35}{2048} \gamma_7 (8 + 60e^2 + 25e^4) (64 - 432s^2 + 792s^4 - 429s^6) \right], \\
 d_2 &= es^2 \left[ \frac{5}{16} \gamma_4 (6 - 7s^2) - \frac{175}{256} \gamma_6 (1 + e^2) (16 - 48s^2 + 33s^4) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{735}{32768} \gamma_8 (48 + 160e^2 + 45e^4) (32 - 176s^2 + 286s^4 - 143s^6) \right], \\
 d_3 &= e^2 s^3 \left[ \frac{35}{192} \gamma_5 (8 - 9s^2) - \frac{105}{4096} \gamma_7 (8 + 5e^2) (80 - 220s^2 + 143s^4) \right], \\
 d_4 &= e^3 s^4 \left[ \frac{105}{1024} \gamma_6 (10 - 11s^2) - \frac{1617}{65536} \gamma_8 (20 + 9e^2) (40 - 104s^2 + 65s^4) \right], \\
 d_5 &= e^4 s^5 \left[ \frac{231}{4096} \gamma_7 (12 - 13s^2) \right], \\
 d_6 &= e^5 s^6 \left[ \frac{1001}{32768} \gamma_8 (14 - 15s^2) \right],
 \end{aligned}$$

где

$$g' = \dot{\omega}'(t - t_0) + \omega_0 - 90^\circ, \quad (6.4.11)$$

а  $\dot{\omega}'$  — коэффициент при вековом возмущении углового расстояния перигея от узла, т. е.

$$\dot{\omega}' = \dot{\omega} + \Delta\dot{\omega}.$$

Здесь  $\dot{\omega}$  — коэффициент при вековом возмущении элемента  $\omega$  от второй зональной гармоник.

В формулах (6.4.06) — (6.4.10)  $\nu = \dot{\omega}'/n$  или с принятой точностью

$$\nu = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{p} \right)^2 (4 - 5s^2).$$

Поскольку  $\nu$  имеет порядок  $J_2$ , то долгопериодические возмущения элементов  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $M$  пропорциональны  $I_k/J_2$ , т. е.

имеют тот же порядок, что и короткопериодические возмущения от второй зональной гармоники. Большая полуось не содержит долгопериодических возмущений порядка  $I_k/J_2$ . Поэтому с принятой точностью

$$\delta a = 0.$$

**4. Замечания.** Приведенные формулы для возмущений строго учитывают эксцентриситет  $e$ , ибо при их выводе не производилось разложений по степеням  $e$ . Полученными формулами можно пользоваться при любых наклонах  $i$ , за исключением окрестности *критического наклона*  $i \approx 63^\circ 26'$ .

Вековые возмущения пропорциональны  $I_k$  и тем самым примерно в 1000 раз меньше вековых возмущений от второй зональной гармоники. Амплитуды долгопериодических возмущений имеют тот же порядок, что и амплитуды короткопериодических возмущений, вызываемых второй гармоникой. Амплитуды короткопериодических возмущений пропорциональны  $I_k$ , т. е. имеют порядок  $J_2^2$ . Период долгопериодических возмущений равен периоду обращения перигея.

Приведенные формулы учитывают влияние зональных гармоник лишь до восьмого порядка включительно. Однако вследствие того, что коэффициенты  $I_k$  медленно убывают с возрастанием  $k$ , при точных исследованиях необходимо учитывать также влияние гармоник более высокого порядка. В этих случаях следует воспользоваться формулами, содержащимися в работах [59] — [61]. Эти формулы дают возмущения от зональной гармоники любого порядка.

#### § 4.02. Возмущения от зональной гармоники произвольного порядка

В этом параграфе мы приведем формулы для вековых и долгопериодических возмущений, вызываемых гармоникой порядка  $m$ . Выражение для возмущающей функции в этом случае имеет вид

$$R = \frac{fm}{r} j_m \left( \frac{r_0}{r} \right)^m P_m(\sin \varphi). \quad (6.4.12)$$

**1. Функции эксцентриситета  $M_n^{(k)}(e)$ .** Функция  $M_n^{(k)}(e)$  определяется следующей формулой:

$$M_n^{(k)}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v) \cos kv \, dv. \quad (6.4.13)$$

Подробно эти функции были рассмотрены в работе [62]. Здесь мы приведем о них только самые необходимые сведения.

При положительном  $n$  функция  $M_n^{(k)}(e)$  является многочленом относительно  $e$ . Для четного  $k$  степень многочлена равна  $n$ , если  $n$  четно, и  $n-1$ , если  $n$  нечетно. Для нечетного  $k$  степень функции  $M_n^{(k)}$  равна  $n$  или  $n-1$ , смотря по тому, четно или нечетно  $n-k$ . Если  $e$  мало, то  $M_n^{(k)}(e)$  имеет порядок  $e^k$ . Далее имеем

$$M_n^{(k)}(e) \equiv 0, \quad k > n,$$

$$M_n^{(k)}(-e) \equiv (-1)^k M_n^{(k)}(e).$$

Для вычисления  $M_n^{(k)}$  могут служить следующие формулы:

$$M_{k-1}^{(k)} = 0, \quad M_k^{(k)} = \left(\frac{e}{2}\right)^k, \quad (6.4.14)$$

$$\frac{n^2 - k^2}{n} M_n^{(k)} = (2n-1) M_{n-1}^{(k)} - (n-1)(1-e^2) M_{n-2}^{(k)}, \quad (6.4.15)$$

Для вычисления производной функции  $M_n^{(k)}$  по  $e$  следует воспользоваться формулой

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = \frac{n}{2} [M_{n-1}^{(k-1)} + M_{n-1}^{(k+1)}], \quad (6.4.16)$$

или

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = \frac{n}{e} [M_n^{(k)} - M_{n-1}^{(k)}]. \quad (6.4.17)$$

Явные выражения для некоторых  $M_n^{(k)}(e)$  приведены в работе [61].

**2. Функции наклона  $L_n^{(k)}(s)$ .** Функция  $L_n^{(k)}(s)$  определяется формулой

$$L_n^{(k)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(s \cos u) \cos ku \, du. \quad (6.4.18)$$

Эти функции также были рассмотрены в работе [61].

Функция  $L_n^{(k)}(s)$  является многочленом  $n$ -й степени относительно  $s$ . При этом для малых  $s$  этот многочлен имеет порядок  $s^k$ . Если  $n+k$  нечетно, то  $L_n^{(k)}(s)$  тождественно равна нулю. Далее имеем

$$L_n^{(k)}(s) \equiv 0 \quad (k > n),$$

$$L_n^{(k)}(-s) = (-1)^n L_n^{(k)}(s).$$



$$\delta\Omega = \frac{\gamma_{2n}}{vs} \frac{\alpha}{4-5s^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} M_{2n-1}^{(2k)} R_{2n}^{(2k)} \sin 2kg',$$

$$\delta\omega = -\alpha\delta\Omega + \frac{\gamma_{2n}}{ve} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} L_{2n}^{(2k)} Q_{2n-1}^{(2k)} \sin 2kg',$$

$$\delta M = -\frac{\gamma_{2n}}{ve} (1-e^2)^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} L_{2n}^{(2k)} \frac{dM_{2n-1}^{(2k)}}{de} \sin 2kg'.$$

Здесь  $R_n^{(k)}$  и  $Q_n^{(k)}$  определяются равенствами

$$R_n^{(k)} = (4-5s^2) \frac{dL_n^{(k)}}{ds} + 10sL_n^{(k)},$$

$$Q_n^{(k)} = (1-e^2) \frac{dM_n^{(k)}}{ds} + e(2n-3)M_n^{(k)}.$$

Аргумент  $g'$  дается формулой

$$g' = nv(t-t_0) + g_0 - 90^\circ,$$

а  $nv$  есть среднее движение перигея. Для вычисления  $v$  может быть использована формула (6.3.46).

**5. Долгопериодические возмущения в случае нечетной гармоника.** Пусть  $m = 2n + 1$ . Тогда формулы для возмущений будут иметь вид

$$\delta e = -\frac{\gamma_{2n+1}}{ve} (1-e^2) \sum_{k=0}^{n-1} 2M_{2n}^{(2k+1)} L_{2n+1}^{(2k+1)} \cos(2k+1)g',$$

$$\delta i = \frac{\gamma_{2n+1}}{v} \frac{\alpha}{s} \sum_{k=0}^{n-1} 2M_{2n}^{(2k+1)} L_{2n+1}^{(2k+1)} \cos(2k+1)g',$$

$$\delta\Omega = \frac{\gamma_{2n+1}}{vs} \frac{\alpha}{4-5s^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} M_{2n}^{(2k+1)} R_{2n+1}^{(2k+1)} \sin(2k+1)g',$$

$$\delta\omega = -\alpha\delta\Omega + \frac{\gamma_{2n+1}}{ve} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} L_{2n+1}^{(2k+1)} Q_{2n}^{(2k+1)} \sin(2k+1)g',$$

$$\delta M = -\frac{\gamma_{2n+1}}{ve} (1-e^2)^{3/2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} L_{2n+1}^{(2k+1)} \frac{dM_{2n}^{(2k+1)}}{de} \sin(2k+1)g'.$$

**6. Замечания.** Приведенные здесь формулы дают вековые возмущения с точностью до  $j_m$  и долгопериодические возмуще-

ния с точностью до  $j_m/J_2$  включительно. Они позволяют находить возмущения от любого числа зональных гармоник. Использование рекуррентных соотношений для функций  $M_n^{(k)}(e)$  и  $L_n^{(k)}(s)$  дает возможность весьма быстро проводить практические вычисления.

Теория возмущений от зональных гармоник в общем случае подробно изложена в работах [59], [61]. Вековые и важнейшие долгопериодические возмущения исследованы в статьях [63], [64].

### § 4.03. Возмущения от тессеральных и секториальных гармоник

**1. Возмущающая функция.** Возмущающая функция, обусловленная долготными членами потенциала притяжения Земли, имеет вид

$$R = \frac{Im}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n I_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{nk}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda_{nk}), \quad (6.4.24)$$

где  $I_{nk}$  и  $\lambda_{nk}$  — постоянные, численные значения которых приводятся в табл. 75 на стр. 558.

В этом параграфе рассматриваются возмущения от всех долготных членов потенциала до секториальной гармоники четвертого порядка включительно.

**2. Возмущения с периодом около суток.** Долгопериодические возмущения, общий период которых мало отличается от  $24^h$ , имеют вид [65]

$$\begin{aligned} \delta e = & \gamma_{31} [A_{31} \sin(g' - \Omega_{31}) + A'_{31} \sin(g' + \Omega_{31})] + \\ & + \gamma_{32} [A_{32} \cos(g' - 2\Omega_{32}) + A'_{32} \cos(g' + 2\Omega_{32})] + \\ & + \gamma_{33} [A_{33} \sin(g' - 3\Omega_{33}) + A'_{33} \sin(g' + 3\Omega_{33})], \quad (6.4.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i = & \gamma_{22} B_{22} \cos 2\Omega_{22} + \gamma_{41} B_{41} \sin \Omega_{41} + \gamma_{42} B_{42} \cos 2\Omega_{42} + \\ & + \gamma_{43} B_{43} \sin 3\Omega_{43} + \gamma_{44} B_{44} \cos 4\Omega_{44}, \quad (6.4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega = & \gamma_{22} C_{22} \sin 2\Omega_{22} + \gamma_{41} C_{41} \cos \Omega_{41} + \gamma_{42} C_{42} \sin 2\Omega_{42} + \\ & + \gamma_{43} C_{43} \cos 3\Omega_{43} + \gamma_{44} C_{44} \sin 4\Omega_{44}, \quad (6.4.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \delta \omega + \alpha \delta \Omega = & \gamma_{31} [A_{31} \cos(g' - \Omega_{31}) + A'_{31} \cos(g' + \Omega_{31})] - \\ & - \gamma_{32} [A_{32} \sin(g' - 2\Omega_{32}) + A'_{32} \sin(g' + 2\Omega_{32})] + \\ & + \gamma_{33} [A_{33} \cos(g' - 3\Omega_{33}) + A'_{33} \cos(g' + 3\Omega_{33})], \quad (6.4.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \delta M = & \gamma_{31} [A_{31} \cos(g' - \Omega_{31}) + A'_{31} \cos(g' + \Omega_{31})] - \\ & - \gamma_{32} [A_{32} \sin(g' - 2\Omega_{32}) + A'_{31} \sin(g' + 2\Omega_{32})] + \\ & + \gamma_{33} [A_{33} \cos(g' - 3\Omega_{33}) + A'_{33} \cos(g' + 3\Omega_{33})], \quad (6.4.29) \end{aligned}$$



где

$$A_{31} = \frac{3}{16} (1 - \alpha) (1 - 10\alpha - 15\alpha^2),$$

$$A_{32} = -\frac{5}{16} s (1 - \alpha) (1 + 3\alpha),$$

$$A_{33} = \frac{15}{8} s^2 (1 - \alpha),$$

$$A'_{31} = -\frac{3}{16} (1 + \alpha) (1 + 10\alpha - 15\alpha^2),$$

$$A'_{32} = \frac{15}{16} s (1 + \alpha) (1 - 3\alpha),$$

$$A'_{33} = -\frac{15}{8} s^2 (1 + \alpha),$$

$$B_{22} = \frac{3}{2} s,$$

$$C_{22} = -\frac{3}{2} \alpha,$$

$$B_{41} = \frac{15}{16} \alpha (4 - 7s^2),$$

$$C_{41} = \frac{15}{16} \frac{4 - 29s^2 + 28s^4}{s},$$

$$B_{42} = -\frac{45}{16} s (6 - 7s^2),$$

$$C_{42} = \frac{45}{8} \alpha (3 - 7s^2),$$

$$B_{43} = -\frac{315}{8} \alpha s^2,$$

$$C_{43} = -\frac{105}{8} s (3 - 4s^2),$$

$$B_{44} = \frac{315}{8} s^3,$$

$$C_{44} = -\frac{315}{8} s^2 \alpha,$$

причем

$$s = \sin i_0, \quad \alpha = \cos i_0,$$

$i_0$  — наклон орбиты в невозмущенном движении.

В формулах (6.4.25) — (6.4.29)

$$\gamma_{mk} = I_{mk} \frac{n}{n_1} \left( \frac{r_0}{p_0} \right)^m,$$

$$g' = \dot{\omega}' (t - t_0) + \omega_0 - 90^\circ,$$

$$\Omega = \dot{\Omega}' (t - t_0) + \Omega_0,$$

$$\Omega_{mk} = \Omega - \lambda_{mk} - S,$$

где  $n$  — среднее движение спутника,  $p_0$  — параметр его невозмущенной орбиты,  $n_1$  — угловая скорость вращения Земли,  $\dot{\omega}'$  и  $\dot{\Omega}'$  — коэффициенты вековых возмущений элементов  $\omega$  и  $\Omega$ ,  $t_0$  — начальный момент времени,  $S$  — звездное гринвичское время.

**3. Замечания.** Приведенные формулы учитывают влияние всех тессеральных и секториальных гармоник потенциала до четвертого порядка включительно. Они дают только долгопериодические возмущения с общим периодом приближения, равным

одним суткам. Амплитуды долгопериодических возмущений имеют множитель  $n/n_1$ , который для близких спутников равняется  $10 \div 15$ . Короткопериодические возмущения не содержат этого множителя, и их амплитуды примерно в  $10 \div 15$  раз меньше амплитуд долгопериодических возмущений для близких спутников. С принятой точностью долгопериодические возмущения в большой полуоси равны нулю.

Тессеральные и секториальные гармоники не вызывают вековых возмущений. Однако нужно иметь в виду, что эти члены могут вызывать *резонансные эффекты* (даже в случае близких спутников).

В правых частях формул (6.4.25) — (6.4.29) отброшены члены, пропорциональные эксцентриситету орбиты  $e$ . Однако их можно найти в работе [65].

#### § 4.04. Лунно-солнечные возмущения

**1. Система координат и возмущающая функция.** Рассмотрим сначала возмущения, вызываемые Луной. Пусть  $Ox'y'z'$  — прямоугольная, геоцентрическая система координат, плоскость  $x'y'$  которой совпадает с плоскостью орбиты Луны, а ось  $Ox'$  направлена в перигей лунной орбиты. Обозначим далее через  $i'$ ,  $\Omega'$ ,  $\omega'$  наклон, долготу узла и угловое расстояние перигея от узла орбиты спутника, отнесенные к этой системе координат. Тогда возмущающая функция, обусловленная притяжением спутника Луной, дается формулой

$$R_L = f m_L \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r' \cos \psi}{r_L^2} \right). \quad (6.4.30)$$

Здесь  $f$  — постоянная тяготения,  $m_L$  — масса Луны,

$$\left. \begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, & r_L &= \sqrt{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2}, \\ \Delta &= \sqrt{(x' - x_L)^2 + (y' - y_L)^2 + (z' - z_L)^2}, \\ \cos \psi &= \cos u' \cos(\Omega' - v_L) - \sin u' \cos i' \sin(\Omega' - v_L), \end{aligned} \right\} \quad (6.4.31)$$

где  $x_L, y_L, z_L$  — прямоугольные координаты Луны,  $v_L$  — истинная аномалия Луны,  $u'$  — аргумент широты спутника

$$u' = v + \omega', \quad (6.4.32)$$

а  $v$  — истинная аномалия спутника.

Если пренебречь параллаксом Луны, то для возмущающей функции  $R_L$  будем иметь

$$R_L = \frac{1}{2} f m_L \frac{r^2}{r_L^3} (3 \cos^2 \psi - 1). \quad (6.4.33)$$

**2. Вековые и долгопериодические возмущения.** Вековые и долгопериодические возмущения элементов спутника, вызываемые притяжением Луны, имеют вид [66] (см. также [67])

$$\delta a = 0, \quad (6.4.34)$$

$$\delta e = \frac{3}{4} \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 \left( \frac{p}{a} \right)^4 \frac{B}{e}, \quad (6.4.35)$$

$$\delta \omega' = -\cos i' \cdot \delta \Omega' + C, \quad (6.4.36)$$

$$\begin{aligned} \delta i' = \frac{3}{4} \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 \left( \frac{p}{a} \right)^3 \left\{ -B \operatorname{ctg} i' + \frac{1}{2m'} \left[ M_4^{(0)} \sin i' \cos 2(\Omega' - \hat{M} - m'v) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_4^{(2)} \sin^2 \frac{i'}{2} \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \cos 2(m'v + \omega' - \Omega' + \hat{M}) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_4^{(2)} \cos^2 \frac{i'}{2} \operatorname{ctg} \frac{i'}{2} \cos 2(m'v - \omega' - \Omega' + \hat{M}) \right] \right\}, \quad (6.4.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega' = \frac{3}{8} \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 \left( \frac{p}{a} \right)^3 \frac{1}{m'} \left\{ -2m' M_4^{(0)} v \cos i' + 2m' \cos i' M_4^{(2)} v \cos 2\omega' + \right. \\ \left. + M_4^{(0)} \cos i' \sin 2(m'v - \Omega' + \hat{M}) + \right. \\ \left. + M_4^{(2)} \sin^2 \frac{i'}{2} \sin 2(m'v + \omega' - \Omega' + \hat{M}) - \right. \\ \left. - M_4^{(2)} \cos^2 \frac{i'}{2} \sin 2(m'v - \omega' - \Omega' + \hat{M}) \right\}, \quad (6.4.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta M_0 = -\sqrt{1-e^2} C - \frac{1}{2} \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 \left( \frac{p}{a} \right)^4 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ M_4^{(0)} (3 \cos^2 i' - 1) v + \right. \\ \left. + 3M_4^{(2)} \sin^2 i' \cos 2\omega' \cdot v + \frac{3}{m'} M_4^{(0)} \sin^2 i' \sin 2(m'v + \hat{M} - \Omega') + \right. \\ \left. + \frac{1}{m'} M_4^{(2)} \sin^4 \frac{i'}{2} \sin 2(m'v + \omega' - \Omega' + \hat{M}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{m'} M_4^{(2)} \cos^4 \frac{i'}{2} \sin 2(m'v - \omega' - \Omega' + \hat{M}) \right\}, \quad (6.4.39) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B = M_4^{(2)} \left[ v \sin^2 i' \sin 2\omega' - \frac{1}{m'} \sin^4 \frac{i'}{2} \cos 2(m'v + \omega' - \Omega' + \hat{M}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{m'} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(m'v - \omega' - \Omega' + \hat{M}) \right], \quad (6.4.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = \frac{3}{8} \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 \left( \frac{p}{a} \right)^3 \frac{1}{e} \left\{ 2M_3^{(1)} \left( \frac{1}{3} - \cos^2 i' \right) v - \right. \\ \left. - (2M_3^{(1)} + M_4^{(1)} - M_4^{(3)}) \left[ v \sin^2 i' \cos 2\omega' + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{m'} \sin^4 \frac{i'}{2} \sin 2(m'v + \omega' - \Omega' + \hat{M}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{m'} \cos^4 \frac{i'}{2} \sin 2(m'v - \omega' - \Omega' + \hat{M}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{m'} M_3^{(1)} \sin 2(m'v - \Omega' + \hat{M}) \right\}, \quad (6.4.41) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} M_3^{(1)} &= -\frac{3}{2} e (1 - e^2)^{-1/2}, \\ M_4^{(0)} &= \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) (1 - e^2)^{-1/2}, \\ M_4^{(1)} &= -\frac{1}{2} e (4 + e^2) (1 - e^2)^{-1/2}, \\ M_4^{(2)} &= \frac{5}{2} e^2 (1 - e^2)^{-1/2}, \\ M_4^{(3)} &= -\frac{5}{2} e^3 (1 - e^2)^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.42)$$

Здесь

$$m' = \frac{n_L}{n}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{f m_L}{a_L^3}}, \quad \hat{M} = M_{L0} - m' M_0,$$

а  $n_L$ ,  $a_L$  и  $M_{L0}$  — среднее движение, большая полуось и средняя аномалия Луны в эпоху.

Приведенные формулы получены при условии, что в возмущающей функции отброшены параллактические члены и члены, пропорциональные эксцентриситету орбиты Луны. При выводе этих формул наклон орбиты  $i'$  и эксцентриситет  $e$  спутника учитывались полностью. Однако пренебрегалось малой величиной  $m'e$ .

Долгопериодические возмущения имеют период, равный периоду обращения Луны вокруг Земли. Поскольку короткопериодические члены малы (их амплитуды примерно в  $m'$  раз меньше амплитуд долгопериодических возмущений), они были отброшены.

### 3. Вычисление экваториальных элементов.

Формулы (6.4.34) — (6.4.42) дают возмущения элементов  $i'$ ,  $\Omega'$  и  $\omega'$ , отнесенных к плоскости орбиты Луны, как основной плоскости, и лунному перигею, как основной точке в этой плоскости. Но для вычисления прямоугольных экваториальных координат спутника  $x$ ,  $y$ ,  $z$  нам нужны экваториальные элементы, которые обозначим через  $i$ ,  $\Omega$  и  $\omega$ .

Связь между  $i'$ ,  $\Omega'$ ,  $\omega'$  и элементами  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  можно установить из сферического треугольника (рис. 75), в котором  $\Upsilon$ ,  $\Pi_L$  и  $\Pi$  означают соответственно точку весеннего равноденствия,

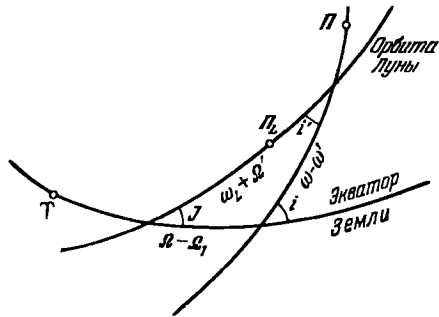


Рис. 75. Связь между элементами орбиты.

перигей Луны и перигей спутника. Решая этот треугольник, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin (\Omega - \Omega_L) &= \sin i' \sin (\Omega' + \omega_L), \\ \sin i \cos (\Omega - \Omega_L) &= \cos i' \sin J + \sin i \cos J \cos (\Omega' + \omega_L), \\ \cos i &= \cos i' \cos J - \sin i' \sin J \cos (\Omega' + \omega_L), \\ \sin i \sin (\omega - \omega') &= \sin J \sin (\Omega' + \Omega_L), \\ \sin i \cos (\omega - \omega') &= \sin i' \cos J + \cos i' \sin J \cos (\Omega' + \omega_L), \end{aligned} \right\} \quad (6.4.43)$$

где  $J$ ,  $\Omega_L$  и  $\omega_L$  — наклон, долгота узла и угловое расстояние перигея от узла лунной орбиты по отношению к плоскости земного экватора. Эти величины можно выразить через эклиптические элементы Луны. Так, например,  $J$  определяется из формулы

$$\cos J = \cos i_{\zeta} \cos \varepsilon - \sin i_{\zeta} \sin \varepsilon \cos \Omega_{\zeta}, \quad (6.4.43')$$

где  $\varepsilon$  — наклон эклиптики к экватору,  $i_{\zeta}$  и  $\Omega_{\zeta}$  — наклон и долгота узла лунной орбиты относительно плоскости эклиптики.

Формулы (6.4.43) и (6.4.43') позволяют, таким образом, найти экваториальные элементы  $i$ ,  $\Omega$  и  $\omega$ , если известны элементы  $i'$ ,  $\Omega'$  и  $\omega'$ .

**4. Возмущения, вызываемые притяжением Солнца.** Солнечные возмущения элементов орбиты спутника можно вычислить по формулам этого параграфа, если в них принять, что  $m_L$  — масса Солнца,  $M_{L_0}$ ,  $\omega_L$ ,  $n_L$  и  $a_L$  — соответственно средняя аномалия в эпоху, долгота перигея, среднее движение и большая полуось солнечной орбиты и  $J = \varepsilon$ ,  $\Omega_L = 0$ . При этом элементы  $i'$ ,  $\Omega'$  и  $\omega'$  будут отнесены к плоскости эклиптики и перигею орбиты Солнца.

**5. Замечания.** Рассмотренные в этом параграфе формулы дают основные неравенства в движении спутника, обусловленные притяжением Луны и Солнца. При их выводе были отброшены неравенства, пропорциональные параллаксам и эксцентриситетам возмущающих тел. Эти неравенства можно найти в работах [68], [70].

Построенная теория не является тригонометрической, т. е. в ней содержатся вековые возмущения тех элементов (наклон и эксцентриситет), которых не должно быть по существу задачи. Однако теория достаточно компактна и ею можно пользоваться на промежутках времени порядка нескольких десятков оборотов спутника. Чисто тригонометрическая теория, дающая возмущения экваториальных элементов, развита в работах [69], [70].

### § 4.05. Определение постоянных интегрирования

Согласно §§ 2.01—4.04 формулы для элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, & \Omega &= \Omega_0 + \delta \Omega, \\ e &= e_0 + \delta e, & \omega &= \omega_0 + \delta \omega, \\ i &= i_0 + \delta i, & M &= M_0 + n(t - t_0) + \delta M, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.44)$$

где  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$ ,  $M_0$  — постоянные интегрирования, а  $\delta a$ ,  $\delta e$ , ... ,  $\delta M$  — суммарные возмущения соответствующих элементов, являющиеся функциями времени  $t$  и постоянных  $a_0$ ,  $e_0$ , ... ,  $M_0$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \delta a &= \varphi_1(t; a_0, e_0, \dots, M_0), \\ \delta e &= \varphi_2(t; a_0, e_0, \dots, M_0), \\ \delta i &= \varphi_3(t; a_0, e_0, \dots, M_0), \\ \delta \Omega &= \varphi_4(t; a_0, e_0, \dots, M_0), \\ \delta \omega &= \varphi_5(t; a_0, e_0, \dots, M_0), \\ \delta M &= \varphi_6(t; a_0, e_0, \dots, M_0). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.45)$$

Постоянные  $a_0$ ,  $e_0$ , ... ,  $M_0$  должны определяться из наблюдений. Их можно также определить по начальным условиям. Пусть для момента  $t = t_0$

$$\left. \begin{aligned} a &= a'_0, & e &= e'_0, & i &= i'_0, \\ \Omega &= \Omega'_0, & \omega &= \omega'_0, & M &= M'_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.46)$$

Тогда, полагая в уравнениях (6.4.44) и (6.4.45)  $t = t_0$  и учитывая малость  $\delta a$ ,  $\delta e$ , ... ,  $\delta M$ , в первом приближении найдем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= a'_0 - \varphi_1(t_0; a'_0, e'_0, \dots, M'_0), \\ e_0 &= e'_0 - \varphi_2(t_0; a'_0, e'_0, \dots, M'_0), \\ i_0 &= i'_0 - \varphi_3(t_0; a'_0, e'_0, \dots, M'_0), \\ \Omega_0 &= \Omega'_0 - \varphi_4(t_0; a'_0, e'_0, \dots, M'_0), \\ \omega_0 &= \omega'_0 - \varphi_5(t_0; a'_0, e'_0, \dots, M'_0), \\ M_0 &= M'_0 - \varphi_6(t_0; a'_0, e'_0, \dots, M'_0). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.47)$$

Формулы (6.4.47) позволяют, таким образом, найти постоянные интегрирования, если известны начальные значения оскулирующих элементов. Формулы эти справедливы с точностью до членов первого порядка. Однако решая уравнения (6.4.44) методом последовательных приближений, можно найти более точные значения постоянных  $a_0$ ,  $e_0$ , ... ,  $M_0$ .

### § 4.06. Вычисление возмущенных координат спутника

Пусть для заданного момента времени  $t$  вычислены возмущенные значения элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $M$ . Тогда возмущенные значения прямоугольных геоцентрических экваториальных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  должны вычисляться по формулам (2.2.06) — (2.2.11).

Обозначим через  $\rho$ ,  $\alpha$  и  $\delta$  топоцентрический радиус-вектор, прямое восхождение и склонение спутника, а через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — прямоугольные геоцентрические координаты наблюдателя:

$$X = \rho \cos \varphi' \cos S, \quad Y = \rho \cos \varphi' \sin S, \quad Z = \rho \sin \varphi',$$

где  $\rho$  — геоцентрический радиус-вектор,  $\varphi'$  — геоцентрическая широта наблюдения,  $S$  — местное звездное время. Тогда для вычисления  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  будут служить следующие уравнения:

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = x - X, \quad \rho \cos \delta \sin \alpha = y - Y, \quad \rho \sin \delta = z - Z.$$

Для вычисления азимута и высоты спутника нужно воспользоваться формулами (1.1.021),

## ВОЗМУЩЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЕМ АТМОСФЕРЫ И СВЕТОВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

В этой главе даны формулы для возмущений элементов орбиты ИСЗ, вызываемых сопротивлением атмосферы и световым давлением. Приведены формулы для продолжительности жизни спутника. Даны различные формулы для теневой функции.

### § 5.01. Плотность атмосферы

Плотность воздуха верхней атмосферы определяется как непосредственно, при помощи аппаратуры, установленной на спутниках и ракетах, так и косвенным путем, при помощи изучения тех возмущений в движении спутника, которые вызывает сопротивление атмосферы. В последние годы наиболее плодотворным оказался второй метод. Он позволил нарисовать подробную картину изменения плотности воздуха с высотой и со временем.

На рис. 76 приводится распределение плотности в зависимости от высоты для 1958—1964 гг., полученное Кинг-Хили и Уокер [71] по наблюдениям 29 спутников. Поскольку на этом рисунке шкала значений плотности логарифмическая, прямая линия строго соответствует экспоненциальному закону изменения плотности  $\rho$  с высотой  $h$ . Поэтому в первом приближении можно принять следующий закон:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \quad (6.5.01)$$

где  $H$  — постоянная, а  $\rho_0$  — значение плотности в исходной точке. Если принять за эту точку перигей орбиты спутника, то высоту  $h$  нужно отсчитывать от перигея.

Величина  $H$ , называемая *шкалой высот*, в свою очередь является функцией высоты. На рис. 77 приводится график изменения  $H$  с высотой, из которого следует, что  $H$  увеличивается с высотой примерно от 35 км на высоте 200 км до 90 км на высоте 700 км. Для спутников с перигейной высотой 200 км



значение  $H$  будет заключаться между 30 и 50 км. Таким образом, формула (6.5.01) тем лучше описывает распределение плотности, чем более тонкий слой рассматривается.

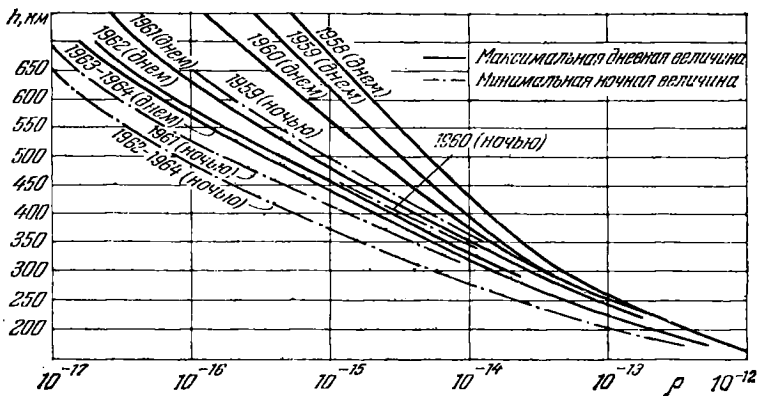


Рис. 76. График изменения плотности воздуха  $\rho$  с высотой.

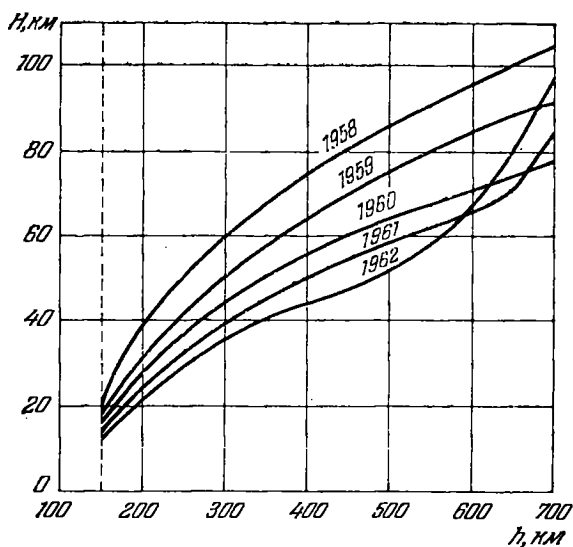


Рис. 77. График изменения шкалы высот  $H$  с высотой.

Рассмотрим теперь изменения плотности воздуха со временем.

**1. Суточный эффект.** В зависимости от времени суток плотность воздуха на данной высоте различна (рис. 78). Максимальная плотность наблюдается примерно через  $2^{\text{h}}$  после полудня, а

нимум — между полночью и рассветом. На высоте 650 км максимальные значения плотности могут в 10 раз превосходить минимальные значения. Разница между дневными и ночными значениями плотности для высоты 200 км мала, но и она может составлять 40% средней плотности на данной высоте.

Этот эффект обусловлен изменением температуры в зависимости от высоты Солнца над горизонтом. Днем атмосфера как бы вздувается, линии постоянной плотности образуют горб, направленный к Солнцу. На высоте 500 км этот горб имеет высоту около 100 км, т. е. дневные значения плотности на высоте 600 км примерно равны ночным значениям на высоте 500 км.

**2. Колебания плотности с периодом 27 суток.** Этот эффект, период которого равен периоду вращения Солнца вокруг своей оси по отношению к Земле, связан с количеством и активностью солнечных пятен на видимой стороне Солнца. Амплитуда колебаний плотности с таким периодом на высоте 200 км может составлять 20%, а на высоте 600 км — 70% от средней плотности.

**3. 11-летний цикл.** Самые большие и, по-видимому, самые медленные вариации плотности воздуха связаны с 11-летним циклом солнечной деятельности (см. рис. 76). Плотность воздуха днем возрастала между 1958 г. (максимум активности) и 1964 г. (минимум активности) на высоте 300 км примерно в три раза, а на высоте 600 км в 20 раз.

**4. 6-месячные колебания.** Плотность воздуха подвержена колебаниям с периодом, равным около 6 месяцев, и амплитудой, достигающей на высоте 350 км около 40% от средней плотности. Максимумы этих колебаний бывают в апреле и октябре, а минимумы — в январе и июне.

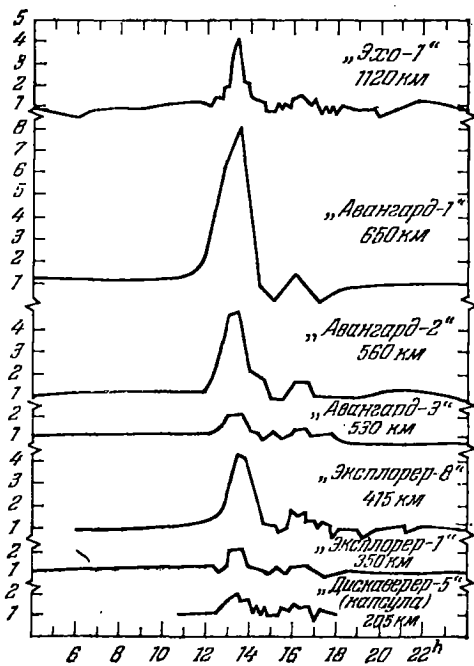


Рис. 78. Иррегулярные изменения плотности воздуха ρ.

**5. Иррегулярные изменения плотности.** Имеются спорадические изменения плотности воздуха, связанные в первую очередь также с деятельностью Солнца. Эти изменения, которые трудно предсказать, могут длиться малое время (несколько суток или несколько часов), но могут достигать достаточно большой величины (см. рис. 78).

Таким образом, плотность воздуха имеет весьма сложную зависимость от времени, и построение точной теории движения спутника в атмосфере является делом чрезвычайно сложным. Однако теория может учесть наиболее значительные эффекты в изменении плотности, и получаемые при помощи такой теории некоторые средние изменения элементов, как показывает практика, могут достаточно точно описывать движение спутника.

### § 5.02. Стандартная атмосфера

Все сведения о плотности воздуха, полученные с использованием ИСЗ, содержатся в *Стандартной атмосфере*. Она состоит из таблиц и формул, позволяющих находить плотность на данной высоте для данного момента времени. Основными входными данными Стандартной атмосферы, помимо высоты  $h$  и местного солнечного времени, являются широта точки  $\varphi$ , в которой определяется плотность, склонение Солнца  $\delta_{\odot}$ , индексы  $F_{10,7}$  и  $\bar{F}_{10,7}$ , характеризующие поток солнечного излучения на волне 10,7 см и геомагнитный индекс  $K_p$ .

Таблицы и формулы Стандартной атмосферы учитывают все вариации плотности, описанные в § 5.01.

Стандартная атмосфера издана как монография [72].

### § 5.03. Сила сопротивления атмосферы

При построении теории поступательного движения спутника обычно принимают во внимание лишь ту компоненту  $F$  аэродинамических сил, направление которой противоположно вектору относительной скорости. Выражение для  $F$  записывают в виде

$$F = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_D, \quad (6.5.02)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха,  $V$  — скорость спутника относительно атмосферы,  $A$  — площадь поперечного миделевого сечения, а  $C_D$  — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления (безразмерный).

Если средняя длина свободного пробега молекул воздуха значительно превосходит геометрические размеры спутника, то коэффициент  $C_D$  близок к 2. Если же мы имеем обратную картину, то  $C_D$  мало отличается от единицы. Средняя длина сво-

бодного пробега молекул на высотах свыше 160 км составляет около 50 м. Поэтому для большинства спутников можно принять  $C_D \approx 2$ .

Для сферических спутников, движущихся по орбитам с высотой перигея от 180 до 500 км и эксцентриситетом от 0 до 0,2, значение  $C_D$  оказалось равным 2,1—2,2 [73]. Для цилиндрических спутников, движущихся по тем же орбитам,  $C_D$  может принимать значения между 2,1 и 2,25. Поэтому с ошибкой, не превосходящей 5%, можно принять, что среднее значение  $C_D$  равно 2,2.

Площадь поперечного сечения  $A$  для несферических спутников является величиной переменной. Поэтому при точном изучении поступательного движения спутника необходимо знать его вращательное движение. Однако, если предположить, что при вращении спутника вокруг центра масс различные его положения равновероятны, то для  $A$  можно взять среднее значение, равное 0,25 площади внешней поверхности спутника.

Из предыдущего следует, что мы не можем с высокой степенью точности знать величины  $A$  и  $C_D$ . Но для построения теории самым важным моментом является то, чтобы произведение  $AC_D$  было постоянным, а эта характеристика может определяться непосредственно из наблюдений.

#### § 5.04. Основные возмущения от сопротивления атмосферы

Пусть сила сопротивления  $F$  дается формулой (6.5.02), а плотность воздуха зависит от высоты по экспоненциальному закону (6.5.01). Обозначим через  $\Delta n$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta \Omega$  и  $\Delta \omega$  соответственно возмущения среднего движения, большой полуоси, эксцентриситета, средней аномалии, долготы узла и углового расстояния перигея от узла. Тогда возмущения этих элементов от сопротивления воздуха будут определяться формулами [74]

$$\Delta n = \hat{k}(t - t_0), \quad (6.5.03)$$

$$\Delta a = -\frac{2}{3} \frac{\hat{k}}{n_0} a_0 (t - t_0), \quad (6.5.04)$$

$$\Delta e = -\frac{2}{3} \frac{\hat{k}}{n_0} \frac{I_1(\xi)}{I_0(\xi) + e_0 I_1(\xi)} (t - t_0), \quad (6.5.05)$$

$$\Delta M = \frac{\hat{k}}{2} (t - t_0)^2, \quad (6.5.06)$$

$$\Delta \Omega = \frac{7 - 8e_0}{6} \mu \hat{k} (t - t_0)^2, \quad (6.5.07)$$

$$\Delta \omega = \frac{7 - 8e_0}{6} \nu \hat{k} (t - t_0)^2, \quad (6.5.08)$$

где

$$\hat{k} = \frac{3}{2} n_0^2 a_0 \rho_0 \varkappa (2\pi\xi)^{-1/2} \left( 1 + 2e_0 + \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{1-6e_0}{8\xi_0} + \frac{9}{128\xi_0^2} \right). \quad (6.5.09)$$

$$\mu = -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{p_0} \right)^2 \cos i_0, \quad (6.5.10)$$

$$\nu = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{p_0} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i_0), \quad (6.5.11)$$

$$\xi_0 = \frac{a_0 e_0}{H}, \quad \varkappa = \frac{SC_D}{m_0}. \quad (6.5.12)$$

Здесь  $n_0$ ,  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$  и  $p_0$  — соответственно значения среднего движения, большой полуоси, эксцентриситета, наклона и параметра орбиты в момент времени  $t = t_0$ ;  $I_0(\xi)$  и  $I_1(\xi)$  — функции Бесселя мнимого аргумента,  $J_2$  — коэффициент при зональной гармонике потенциала притяжения Земли (см. § 1.01),  $\rho_0$  — плотность воздуха в перигее,  $m_0$  — масса спутника,  $r_0$  — средний радиус Земли. Для вычисления функций Бесселя от мнимого аргумента можно обратиться к рекуррентным соотношениям (4.5.80) — (4.5.82). Если  $\xi > 3$ , то для вычисления функций Бесселя  $I_0(\xi)$  и  $I_1(\xi)$  можно пользоваться асимптотическим представлением (4.5.85). Возмущения наклона  $i$  очень малы и могут не приниматься во внимание.

**Замечания.** Формулы (6.5.03) — (6.5.08) обеспечивают достаточную точность, если  $e_0 < 0,2$ . Формула (6.5.09) справедлива при  $0,02 < e_0 < 0,2$ .

В этих выражениях для возмущений вращение атмосферы не принимается во внимание. Эффект вращения атмосферы частично можно учесть, если в формуле (6.5.09)  $\varkappa$  заменить на

$$\varkappa \left( 1 - \frac{r_\pi}{V_\pi} \omega \cos i_0 \right)^2, \quad (6.5.13)$$

где  $r_\pi$  и  $V_\pi$  — радиус-вектор и скорость спутника в перигее,  $\omega$  — угловая скорость вращения атмосферы.

Формулы (6.5.03) — (6.5.08) позволяют легко вычислить возмущения элементов, если известен коэффициент  $\hat{k}$ . Этот коэффициент определяется из наблюдений по изменению среднего движения  $n$ . Формула (6.5.09) может служить для определения плотности воздуха  $\rho_0$  в перигее, если известны  $\hat{k}$ ,  $A$ ,  $C_D$ ,  $H$  и  $m_0$ . Подробности см. в [75] и [76].

### § 5.05. Продолжительность жизни спутника

Под влиянием сопротивления атмосферы высота перигея, эксцентриситет и период обращения спутника монотонно уменьшаются. Со временем они достигают некоторых критических значений, при которых спутник может совершить одно-два об-

ращения вокруг Земли. Критические значения элементов орбиты зависят от отношения площади поперечного сечения к массе спутника. Чем больше это отношение, тем больше критический период обращения и критическая высота перигея. На практике, однако, можно считать, что спутник прекращает свое существование, когда высота перигея достигает 120—150 км, а период обращения равен 86,5—88,0 мин. При этом весьма существенно то, что в конце своей жизни спутник движется по почти круговой орбите, т. е. критическое значение эксцентриситета оказывается очень близким к нулю. Поэтому при определении продолжительности жизни спутника в качестве критического можно принять момент времени, когда эксцентриситет орбиты тождественно равен нулю.

Исходя из выше сказанного можно получить следующую формулу для продолжительности жизни спутника  $\tau$ :

$$\tau = \frac{e_0^2}{2D} \left( 1 - \frac{11}{6} e_0 + \frac{29}{16} e_0^2 + \frac{7}{8} \frac{H}{a_0} \right), \quad (6.5.14)$$

где

$$D = \frac{n_0 \kappa \rho_0 a_0 e_0 I_1(\zeta_0)}{\exp(\zeta_0 + e_0)},$$

$$\kappa = \frac{AC_D}{m_0}, \quad \zeta_0 = \frac{a_0 e_0}{H};$$

здесь  $n_0$ ,  $a_0$ ,  $e_0$  — среднее движение, большая полуось, эксцентриситет орбиты спутника в момент  $t_0$ , от которого отсчитывается  $\tau$ ,  $\rho_0$  и  $H$  — плотность воздуха и шкала высот,  $A$  и  $m_0$  — площадь миделева сечения и масса спутника,  $C_D$  — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления,  $I_1$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

Формулу для продолжительности жизни  $\tau$  можно представить и в другом виде:

$$\tau = \frac{e_0 T_0 F(e_0)}{|\dot{T}_0|}, \quad (6.5.15)$$

где  $T_0$  и  $\dot{T}_0$  — период обращения и скорость изменения периода обращения спутника в начальный момент, а

$$F(e_0) = \frac{3}{4} \left\{ 1 + \frac{7}{6} e_0 + \frac{5}{16} e_0^2 + \frac{1}{2} \frac{H}{a_0 e_0} + \frac{11}{24} \frac{H}{a_0} + \frac{3}{8} \frac{H^2}{a_0^2 e_0^2} \right\}.$$

Таким образом, для того чтобы определить продолжительность жизни спутника, начиная с некоторого момента  $t_0$ , нужно знать для этого момента элементы  $a$ ,  $e$  и скорость изменения периода обращения.

**Замечания.** Формула (6.5.15) дает вполне удовлетворительные результаты в случае достаточно близких ИСЗ (ошибка составляет около 5%). Однако для далеких спутников результаты нужно исправить за счет таких эффектов, как сжатие атмосферы, изменение шкалы высот, вариации плотности, обусловленные солнечной деятельностью. Особенно важно здесь учесть колебания плотности и изменения, связанные с 11-летним циклом. Для этого в качестве  $T_0$  необходимо взять величину, полученную путем осреднения на промежутке времени в несколько лет. Только таким образом можно добиться точности порядка 10%.

### § 5.06. Эволюция орбиты на больших промежутках времени

Формулы § 5.04 получены методом последовательных приближений. Поэтому ими можно пользоваться лишь на малых промежутках времени. Здесь мы приведем формулы, позволяющие оценить изменения элементов орбиты на достаточно больших временных интервалах.

**1. Зависимость элемента  $a$  от  $e$ .** Пусть  $a_0$  и  $e_0$  — начальные значения большой полуоси и эксцентриситета и

$$\xi = \frac{ae}{H};$$

где  $H$  — шкала высот. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{a}{a_0} = 1 - \frac{H}{a_0} \ln \frac{\xi_0 I_1(\xi_0)}{\xi I_1(\xi)} + \frac{H}{a_0} \frac{(ae - a_0 e_0)(ae - a_0)}{a_0^2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{a_0^2} \ln \frac{\xi_0}{\xi}, \quad (6.5.16)$$

которое связывает элементы  $a$  и  $e$ . Здесь, как и раньше,  $I_1$  есть функция Бесселя мнимого аргумента.

**2. Зависимость эксцентриситета от времени.** Пусть

$$z = \sqrt{1 - \frac{t - t_0}{\tau}},$$

где  $\tau$  — продолжительность жизни спутника, а  $t_0$  — начальный момент времени. Тогда

$$\frac{e}{e_0} = z \left\{ 1 - \frac{e_0}{6} + \frac{131}{288} e_0^2 + \frac{3}{8} \frac{H}{a_0} \ln z + \left( \frac{e_0}{6} - \frac{e_0^2}{18} \right) z - \frac{115}{288} e_0^2 z^2 \right\}. \quad (6.5.17)$$

Формула для  $\tau$  приводится в § 5.05.

**3. Зависимость перигейного расстояния от времени.** Обозначим через  $r_p$  перигейное расстояние, а через  $r_{p0}$  — его значение для  $t = t_0$ . Тогда

$$r_{p0} - r_p = \frac{H}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{17}{8} \frac{H}{a_0} \right) \ln \frac{1}{z} + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \frac{H}{a_0 e_0} \left( 1 + \frac{7}{6} e_0 \right) \left( \frac{1}{z} - 1 \right) - \frac{5}{6} e_0 (1 - z) \right\}. \quad (6.5.18)$$

**4. Зависимость периода обращения от времени.** Пусть  $T$  — период обращения спутника, а  $T_0$  — его значение в начальный момент времени  $t_0$ . Тогда

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{3}{2} e_0 (1 - z) \left\{ 1 + \frac{e_0}{12} (17z - 3) - \right. \\ \left. - \frac{e_0^2}{288} (12 + 323z - 425z^2) \right\} + \frac{3}{4} \frac{H}{a_0} \left\{ \left[ 1 + \frac{e_0}{4} (9z - 2) \right] \ln z - \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \frac{H}{a_0 e_0} \left( \frac{1}{z} - 1 \right) + \frac{5}{6} e_0 (1 - z) \right\}. \quad (6.5.19)$$

**5. Зависимость периода обращения от эксцентриситета:**

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{1 - e_0}{1 - e} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{H}{r_{p0}} \left[ \ln \frac{e_0 (1 + e)}{e (1 + e_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{4} \frac{H}{a_0} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_0} \right) \right] \right\}. \quad (6.5.20)$$

**6. Скорость изменения периода:**

$$\dot{T} = - \frac{3}{4} \frac{e_0 T_0}{\tau z} \left\{ 1 + \frac{e_0}{6} (17z - 10) + \frac{e_0^2}{288} (311 - 1496z + 1275z^2) + \right. \\ \left. + \frac{H}{2a_0 e_0 z} \left[ 1 + \frac{e_0}{12} (17z - 6) + \frac{9}{4} e_0 z \ln z + \frac{3}{4} \frac{H}{a_0 e_0 z} \right] \right\}. \quad (6.5.21)$$

**7. Замечания.** Приведенные здесь формулы дают нам качественное представление об изменении элементов орбиты в зависимости от времени. Они были выведены при условии, что  $0,02 < e < 0,2$ . Случай  $e > 0,2$  рассмотрен в книге [75]. Точность приведенных формул составляет десятые доли процента, а иногда и выше.

### § 5.07. Сила светового давления

Возмущающее ускорение  $F$ , обусловленное световым давлением, определяется формулой

$$F = k P_0 \frac{A}{m_0} \left( \frac{\alpha'}{\Delta} \right)^2, \quad (6.5.22)$$

где

$$P_0 = 4,65 \cdot 10^{-5} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}, \quad (6.5.23)$$



$A$  — площадь поперечного миделева сечения,  $m_0$  — масса спутника,  $a'$  — среднее расстояние от Земли до Солнца,  $\Delta$  — расстояние между спутником и Солнцем. Коэффициент  $k$  в случае зеркального отражения и полного поглощения равен 1, а в случае полного диффузного рассеивания равен 1,44.

Поскольку точные значения величин  $A$  и  $k$  неизвестны, то на практике численное значение коэффициента

$$\delta = kP_0 \frac{A}{m_0} \quad (6.5.24)$$

следует определять из обработки наблюдений спутника.

### § 5.08. Возмущения от светового давления (без учета тени)

Предположим, что спутник не входит в тень Земли. Тогда, если отбросить короткопериодические неравенства, формулы для возмущений элементов будут иметь вид [77], [78]

$$\delta a = 0, \quad (6.5.25)$$

$$\begin{aligned} \delta e = \frac{3}{2} \frac{\delta n a^2 \sqrt{1-e^2}}{f m} & \left[ \frac{\cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \cos(\omega + \Omega + \lambda') + \right. \\ & + \frac{\sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \cos(\omega - \Omega - \lambda') + \frac{\cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \cos(\omega + \Omega - \lambda') + \\ & + \frac{\sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \cos(\omega - \Omega + \lambda') - \frac{1}{2} \frac{\sin i \sin e}{\dot{\omega} + \dot{\lambda}'} \cos(\omega + \lambda') + \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\sin i \sin e}{\dot{\omega} - \dot{\lambda}'} \cos(\omega - \lambda') \right], \quad (6.5.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i = \frac{3}{4} \frac{\delta n a^2 e}{f m \sqrt{1-e^2}} & \left[ \frac{\sin i \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \cos(\omega + \Omega + \lambda') - \right. \\ & - \frac{\sin i \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \cos(\omega - \Omega - \lambda') + \frac{\sin i \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \cos(\omega + \Omega - \lambda') - \\ & - \frac{\sin i \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \cos(\omega - \Omega + \lambda') + \frac{\cos i \sin e}{\dot{\omega} + \dot{\lambda}'} \cos(\omega + \lambda') - \\ & \left. - \frac{\cos i \sin e}{\dot{\omega} - \dot{\lambda}'} \cos(\omega - \lambda') \right], \quad (6.5.27) \end{aligned}$$

$$\delta\Omega = \frac{3}{4} \frac{\delta na^2 e}{f m \sin i \sqrt{1-e^2}} \left[ \frac{\sin i \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \Omega + \lambda') - \frac{\sin i \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \Omega - \lambda') + \frac{\sin i \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \Omega - \lambda') - \frac{\sin i \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \Omega + \lambda') + \frac{\cos i \sin e}{\dot{\omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \lambda') - \frac{\cos i \sin e}{\dot{\omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \lambda') \right], \quad (6.5.28)$$

$$\delta\omega = -\frac{3}{2} \frac{\delta na^2 \sqrt{1-e^2}}{f m e} \left[ \frac{\cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \Omega + \lambda') + \frac{\sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \Omega - \lambda') + \frac{\cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \Omega - \lambda') + \frac{\sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \Omega + \lambda') - \frac{1}{2} \frac{\sin i \sin e}{\dot{\omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \lambda') + \frac{1}{2} \frac{\sin i \sin e}{\dot{\omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \lambda') \right] - \delta\Omega \cos i, \quad (6.5.29)$$

$$\delta(M_0 + \omega) = (1 - \sqrt{1-e^2}) \delta\omega - \cos i \sqrt{1-e^2} \delta\Omega - \frac{3\delta na^2 e}{f m i} \left[ \frac{\cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \Omega + \lambda') + \frac{\sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \Omega - \lambda') + \frac{\cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \Omega - \lambda') + \frac{\sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2}}{\dot{\omega} - \dot{\Omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \Omega + \lambda') - \frac{1}{2} \frac{\sin i \sin e}{\dot{\omega} + \dot{\lambda}'} \sin(\omega + \lambda') + \frac{1}{2} \frac{\sin i \sin e}{\dot{\omega} - \dot{\lambda}'} \sin(\omega - \lambda') \right], \quad (6.5.30)$$

где

$$\delta = k P_0 \frac{A}{m_0}, \quad (6.5.31)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 \frac{n r_0^2}{a^2 (1-e^2)^2} (4 - 5 \sin^2 i), \quad (6.5.32)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{n r_0^2}{a^2 (1-e^2)} \cos i, \quad (6.5.33)$$

$$\dot{\lambda}' = 0,98565 \text{ град/сутки} \quad (6.5.34)$$

( $\lambda'$  — средняя долгота Солнца).

Величины  $\omega$  и  $\Omega$  должны определяться формулами

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),$$

где  $\omega_0$  и  $\Omega_0$  — значения  $\omega$  и  $\Omega$  в начальный момент времени  $t = t_0$ , а значение  $\lambda'$  можно взять из «Астрономического ежегодника».

Важнейшей характеристикой возмущений является отношение  $A/m_0$ . Для спутника «Эхо-1» это отношение равно  $102 \text{ см}^2/\text{г}$ , для «Авангарда-1» оно равно  $0,1425 \text{ см}^2/\text{г}$ . Таким образом, возмущения «Эхо-1», вызываемые солнечным давлением, должны превосходить возмущения «Авангарда-1» примерно в 1000 раз.

### § 5.09. Возмущения от светового давления (с учетом тени)

В отличие от силы притяжения, сила светового давления не является непрерывной функцией и в общем случае нужно учитывать *экранирование света Землей*. Пусть граница тени пересекает орбиту спутника в точках с эксцентрическими аномалиями  $E_1$  и  $E_2$  (спутник входит в тень при  $E = E_1$ ). Тогда возмущения за один оборот спутника будут описываться формулами [77]:

$$\delta a = \frac{2a^2\delta}{fm} (S \cos E + T \sqrt{1 - e^2} \sin E) \Big|_{E_1}^{E_2}, \quad (6.5.35)$$

$$\delta e = \frac{a^2\delta \sqrt{1 - e^2}}{fm} \left[ \frac{1}{4} S \sqrt{1 - e^2} \cos 2E \Big|_{E_1}^{E_2} + \right. \\ \left. + T \left( -2e \cos E + \frac{1}{4} \sin 2E \right) \Big|_{E_1}^{E_2} + \frac{3}{2} \int_{E_1}^{E_2} T dE \right], \quad (6.5.36)$$

$$\delta i = \frac{a^2\delta}{fm \sqrt{1 - e^2}} \left\{ W \left[ (1 + e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \Big|_{E_1}^{E_2} \cos \omega + \right. \\ \left. + W \sqrt{1 - e^2} \left( \cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right) \sin \omega \Big|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} e \int_{E_1}^{E_2} W \cos \omega dE \right\}, \quad (6.5.37)$$

$$\delta \Omega = \frac{a^2\delta}{fm \sin i \sqrt{1 - e^2}} \left\{ W \left[ (1 + e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \Big|_{E_1}^{E_2} \sin \omega - \right. \\ \left. - W \sqrt{1 - e^2} \left( \cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right) \cos \omega \Big|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} e \int_{E_1}^{E_2} W \sin \omega dE \right\}, \quad (6.5.38)$$

$$\delta\omega = -\delta\Omega \cos i + \frac{a^2\delta\sqrt{1-e^2}}{fme} \left[ S(e \sin E + \frac{1}{4} \sin 2E) \Big|_{E_1}^{E_2} + \right. \\ \left. + T \sqrt{1-e^2} (e \cos E - \frac{1}{4} \cos 2E) \Big|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} \int_{E_1}^{E_2} S dE \right], \quad (6.5.39)$$

$$\delta M = -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\delta a}{a} dM - \sqrt{1-e^2} \delta\omega - \sqrt{1-e^2} \cos i \cdot \delta\Omega - \\ - \frac{2a^2\delta}{fm} \left\{ \left[ (1+e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \Big|_{E_1}^{E_2} - \right. \\ \left. - T \sqrt{1-e^2} \left( \cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right) \Big|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} e \int_{E_1}^{E_2} S dE \right\}, \quad (6.5.40)$$

где

$$S = -\cos \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \cos(\Omega + \omega + \lambda') - \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \cos(\omega - \Omega - \lambda') - \\ - \cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2} \cos(\omega + \Omega - \lambda') - \sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2} \cos(\omega - \Omega + \lambda') + \\ + \frac{1}{2} \sin i \sin e \cos(\omega + \lambda') - \frac{1}{2} \sin i \sin e \cos(\omega - \lambda'), \quad (6.5.41)$$

$$T = \cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \sin(\omega + \Omega + \lambda') + \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \sin(\omega - \Omega - \lambda') + \\ + \cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2} \sin(\omega + \Omega - \lambda') + \sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{e}{2} \sin(\omega - \Omega + \lambda') - \\ - \frac{1}{2} \sin i \sin e \sin(\omega + \lambda') + \frac{1}{2} \sin i \sin e \sin(\omega - \lambda'), \quad (6.5.42)$$

$$W = -\sin i \cos^2 \frac{e}{2} \sin(\Omega - \lambda') - \sin i \sin^2 \frac{e}{2} \sin(\Omega + \lambda') - \\ - \cos i \sin e \sin \lambda', \quad (6.5.43)$$

а  $\delta$  дается формулой (6.5.24).

Пределы интегрирования  $E_1$  и  $E_2$  определяются из уравнений

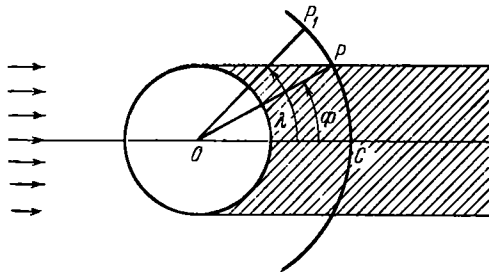
$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{a} \cos \alpha &= -S(\cos E - e) - T \sqrt{1-e^2} \sin E, \\ r \sin \alpha &= r_0, \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos E, \end{aligned} \right\} \quad (6.5.44)$$

в которых  $\alpha$  — угол между геоцентрическими радиусами-векторами Солнца и спутника. При решении уравнений (6.5.44) можно считать, что в течение одного оборота величины  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\lambda'$ ,  $a$ ,  $e$  и, следовательно,  $S$  и  $T$  остаются постоянными.

### § 5.10. Теневая функция

В 1963 г. Ферраз-Мелло предложил ввести так называемую *теневую функцию*. Эта функция равна единице, когда спутник освещен Солнцем, и равна нулю, когда он находится в тени. Если умножить правые части дифференциальных уравнений для элементов на эту функцию, то они будут описывать движение спутника с учетом теневого эффекта.

**1. Теневая функция Ферраз-Мелло.** Рассмотрим рис. 79, на котором  $O$  — центр Земли,  $PC$  — часть орбиты спутника,  $OC$  — ось тени. Предполагая, что тень имеет цилиндрическую форму, имеем



$$\sin \Phi = \frac{r_0}{r}$$

и, кроме того,

$$\lambda = \pi - H,$$

где  $H$  — угол между радиусом-вектором спутника и радиусом-вектором Солнца, а  $r_0$  — средний радиус Земли.

Рис. 79. Эффект тени. Геометрическая картина.

Обозначим через  $\Psi$  *теневую функцию*. Тогда будем иметь

$$\Psi = \begin{cases} 0, & -\Phi < \lambda < \Phi, \\ 1, & -\pi < \lambda < -\Phi, \quad \Phi < \lambda < \pi. \end{cases} \quad (6.5.45)$$

Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$\Psi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\lambda,$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi \cos k\lambda \, d\lambda.$$

Разбивая промежуток интегрирования  $[0, \pi]$  на  $[0, \Phi]$  и  $[\Phi, \pi]$  и имея в виду (6.5.45), находим

$$a_0 = \frac{2}{\pi} (\pi - \Phi),$$

$$a_k = -\frac{2}{k\pi} \sin k\Phi.$$

Поэтому

$$\Psi = 1 - \frac{\Phi}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\Phi \cos k\lambda. \quad (6.5.46)$$

**2. Теневая функция Лалы — Сехнала.** Пусть

$$\Psi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin(\lambda - \Phi)}{\sqrt{1 - \cos^2(\lambda - \Phi)}} \right\}.$$

Эта функция удовлетворяет условию

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \lambda - \Phi < 0, \\ 1, & \lambda - \Phi > 0. \end{cases}$$

П. Лала и Л. Сехнал разлагают  $\Psi$  в ряд по степеням  $\cos \lambda$ . Сначала они представляют  $\Psi$  в виде

$$\Psi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} A_j \sin^{2j+1}(\lambda - \Phi) \right\},$$

где

$$A_j = \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^j \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} C_j^k$$

и окончательно

$$\Psi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{ik} \sin^i \Phi \cos^k \lambda \right\}, \quad (6.5.47)$$

где  $B_{ik}$  суть некоторые численные коэффициенты.

**3. Теневая функция Вашковьяк.** С. Н. Вашковьяк разлагает функцию  $\Psi$  в ряд по полиномам Лежандра

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(\cos \lambda), \quad (6.5.48)$$

где

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} \Psi P_k(\cos \lambda) \sin \lambda d\lambda.$$

Если вычислить эти коэффициенты, то формулу (6.5.48) можно представить в виде

$$\Psi = \frac{1}{2} \left\{ 1 - P_1(\cos \lambda) + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\cos \Phi) [P_{r-1}(\cos \lambda) - P_{r+1}(\cos \lambda)] \right\}. \quad (6.5.49)$$

**4. Дифференциальные уравнения для элементов.** Дифференциальные уравнения для элементов с учетом теневого эффекта

записываются в виде (см. § 3.05)

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \Psi \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} - \Psi \frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \Psi \frac{\partial R}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial G} - \Psi \frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \Psi \frac{\partial R}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial H} - \Psi \frac{\partial R}{\partial H},\end{aligned}$$

где  $\alpha_1$  дается формулой (6.3.54), а  $R$  — возмущающая функция, обусловленная световым давлением.

**5. Замечания.** Наиболее правильно геометрическую картину представляет, по-видимому, формула (6.5.47). Формула (6.5.49) дает картину, аналогичную формуле (6.5.46). Однако функция С. Н. Вашковьяк удобна в том отношении, что она достаточно просто может быть выражена через элементы орбиты. Дело здесь заключается в том, что выражение для  $P_n(\cos \lambda)$  часто встречается и в других задачах небесной механики и для него уже имеется соответствующее разложение.

Используя свое представление теневой функции, Ферраз-Мелло [79] развил общую теорию возмущений с учетом нескольких первых членов разложения  $\Psi$ . П. Лала и Л. Сехнал [80], [81] разработали подробную полуаналитическую теорию короткопериодических возмущений. С. Н. Вашковьяк [82] построила теорию долгопериодических возмущений с учетом любого числа членов теневой функции. Эти две теории могут быть с успехом использованы для практических целей.

## ДРУГИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ДВИЖЕНИИ ИСЗ

В этой главе кратко рассмотрены возмущения, вызываемые прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли, приливной деформацией Земли, электромагнитными силами и притяжением атмосферы. Рассмотрены также релятивистские эффекты. Все эти возмущения являются малыми. Однако при некоторых исследованиях их нужно принимать во внимание.

### § 6.01. Возмущения, вызываемые прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли

Вследствие прецессии и нутации система координат, связанная с экваториальной плоскостью, не является инерциальной. В результате этого в движении спутника появляются дополнительные возмущения, которые могут рассматриваться как косвенные лунно-солнечные возмущения.

**1. Система координат.** В практике исследования ИСЗ наиболее удобной системой координат является координатная система, предложенная Г. Вайсом и Муром. Наклон орбиты  $i$  и аргумент перигея  $\omega$  в этой системе отсчитываются от экватора даты (момента наблюдения), а долгота узла  $\Omega$  измеряется от точки весеннего равноденствия эпохи (скажем 1950,0) вдоль фиксированного экватора эпохи до линии узлов экватора даты, а затем вдоль экватора даты до линии узлов орбиты ИСЗ (рис. 80).

**2. Формулы для возмущений.** Возмущения большой полуоси и эксцентриситета от прецессии и нутации равны нулю. Формулы для возмущений других элементов можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta i &= I, \\ \delta \Omega &= K - H \operatorname{ctg} i - G \operatorname{tg} i, \\ \delta \omega &= H \operatorname{cosec} i + 5G \sin i, \\ \delta M &= 3G \sqrt{1 - e^2} \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.01)$$



где

$$G = \int \dot{\Omega} I dt. \quad (6.6.02)$$

Величины  $H$ ,  $I$ ,  $K$  определяются следующим образом. Пусть  $L_S$  и  $l_S$  — средняя долгота и средняя аномалия Солнца,  $L_M$  и  $l_M$  — соответствующие элементы Луны, а  $\Omega_M$  — долгота узла

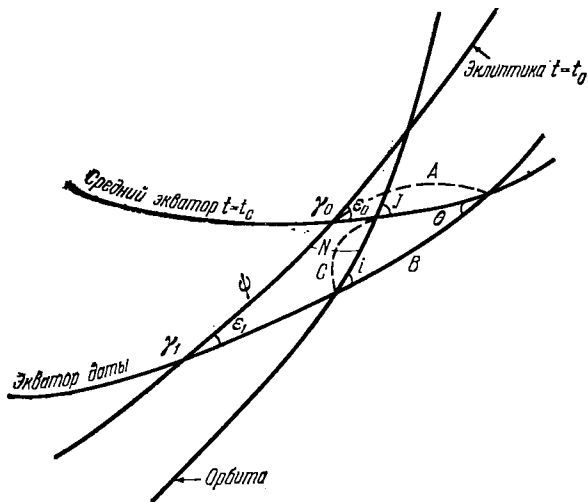


Рис. 80. Прецессия и нутация экваториальной плоскости Земли.

лунной орбиты. Пусть далее  $n_S$ ,  $n_M$  и  $\dot{\Omega}_M$  — среднее движение Солнца, среднее движение Луны и среднее движение узла лунной орбиты, а  $\dot{\Omega}$  — среднее движение узла орбиты спутника. Тогда

$$\begin{aligned} H = & -\frac{7'',34\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \sin(\Omega_M - \Omega - \psi) - \frac{0'',67\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \sin(\Omega_M - \Omega) - \\ & - \frac{0'',32\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M + \dot{\Omega}} \sin(\Omega_M + \Omega - \psi) + \frac{0'',77\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M + \dot{\Omega}} \sin(\Omega_M + \Omega) + \\ & + \frac{0'',67\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M + \dot{\Omega}} \sin(\Omega_M + \Omega) + \frac{0'',17\dot{\Omega}_M}{2\dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \sin(2\Omega_M - \Omega - \psi) - \\ & - \frac{0'',97n_S}{2n_S - \dot{\Omega}} \sin(2L_S - \Omega - \psi) - \frac{0'',08n_S}{2n_S - \dot{\Omega}} \sin(2L_S - \Omega) - \\ & - \frac{0'',04n_S}{2n_S + \dot{\Omega}} \sin(2L_S + \Omega - \psi) + \frac{0'',08n_S}{2n_S + \dot{\Omega}} \sin(2L_S + \Omega) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{0'',02n_S}{n_S - \dot{\Omega}} \sin(l_S - \Omega - \psi) + \frac{0'',02n_S}{n_S + \dot{\Omega}} \sin(l_S + \Omega + \psi) - \\
& - \frac{0'',06n_S}{3n_S - \dot{\Omega}} \sin(2L_S + l_S - \Omega - \psi) - \frac{0'',16n_M}{2n_M - \dot{\Omega}} \sin(2L_M - \Omega - \psi) - \\
& - \frac{0'',02n_M}{2n_M - \dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \sin(2L_M - \Omega_M - \Omega - \psi) - \\
& - \frac{0'',03n_M}{3n_M - \dot{\Omega}} \sin(2L_M + l_M - \Omega - \psi) + \frac{3'',08n_S}{\dot{\Omega}} \sin(\Omega + \psi) + \\
& + \frac{0'',13n_S}{\dot{\Omega}} \sin(\Omega - \psi) + \frac{0'',07n_S}{\dot{\Omega}} \cos(\Omega + \psi), \quad (6.6.03)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I = & \frac{7'',34\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \cos(\Omega_M - \Omega - \psi) + \frac{0'',67\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \cos(\Omega_M - \Omega) - \\
& - \frac{0'',32\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M + \dot{\Omega}} \cos(\Omega_M + \Omega - \psi) + \frac{0'',77\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M + \dot{\Omega}} \cos(\Omega_M + \Omega + \psi) + \\
& + \frac{0'',67\dot{\Omega}_M}{\dot{\Omega}_M + \dot{\Omega}} \cos(\Omega_M + \Omega) - \frac{0'',17\dot{\Omega}_M}{2\dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \cos(2\Omega_M - \Omega - \psi) + \\
& + \frac{0'',97n_S}{2n_S - \dot{\Omega}} \cos(2L_S - \Omega - \psi) + \frac{0'',08n_S}{2n_S - \dot{\Omega}} \cos(2L_S - \Omega) - \\
& - \frac{0'',04n_S}{2n_S + \dot{\Omega}} \cos(2L_S + \Omega - \psi) - \frac{0'',08n_S}{2n_S + \dot{\Omega}} \cos(2L_S + \Omega) - \\
& - \frac{0'',02n_S}{n_S - \dot{\Omega}} \cos(l_S - \Omega - \psi) + \frac{0'',02n_S}{n_S + \dot{\Omega}} \cos(l_S + \Omega + \psi) + \\
& + \frac{0'',06n_S}{3n_S - \dot{\Omega}} \cos(2L_S + l_S - \Omega - \psi) + \frac{0'',16n_M}{2n_M - \dot{\Omega}} \cos(2L_M - \Omega - \psi) - \\
& - \frac{0'',02n_M}{2n_M - \dot{\Omega}_M - \dot{\Omega}} \cos(2L_M - \Omega_M - \Omega - \psi) + \\
& + \frac{0'',03n_M}{3n_M - \dot{\Omega}} \cos(2L_M + l_M - \Omega - \psi) + \frac{0'',07n_S}{\dot{\Omega}} \sin(\Omega + \psi) + \\
& + \frac{3'',08n_S}{\dot{\Omega}} \cos(\Omega + \psi) + \frac{0'',13n_S}{\dot{\Omega}} \cos(\Omega - \psi), \quad (6.6.04)
\end{aligned}$$

$$K = 0'',92 \sin(\Omega_M + \psi) - 0'',92 \sin(\Omega_M - \psi), \quad (6.6.05)$$

где

$$\psi = 50'',3733T, \quad (6.6.06)$$

причем  $T$  есть время в годах от начальной эпохи 1950,0.

Суточные значения величин  $n_S$ ,  $n_M$  и  $\dot{\Omega}_M$  равны

$$n_S = 0^\circ,9856, \quad n_M = 13^\circ,1764, \quad \dot{\Omega}_M = -0^\circ,05295.$$

**3. Замечания.** Приведенные здесь формулы были получены И. Козаи и Х. Киношитой [83]. Они являются весьма точными. При выводе этих формул в теории прецессии и нутации были учтены все члены с амплитудами, превосходящими  $0'',01$ .

### § 6.02. Возмущения, вызываемые приливной деформацией Земли

Потенциал земного притяжения изменяется со временем также под действием приливной деформации Земли. Это приводит к возмущениям орбиты спутника. Формулы для этих возмущений были получены в работах И. Козаи [84], В. Каулы [85] и П. Мюзена [86]. Здесь приведены формулы для возмущений наклона и долготы узла орбиты. Выражения для возмущений остальных элементов можно найти в указанных работах.

**1. Возмущающая функция.** Возмущающая функция, обусловленная приливной деформацией Земли, вызываемой Луной и Солнцем, имеет вид

$$R = k_2 \frac{f m_M r_0^5}{r_M^3 r^3} P_2(\cos H_M) + k_2 \frac{f m_S r_0^5}{r_S^3 r^3} P_2(\cos H_S). \quad (6.6.07)$$

Здесь  $f$  — постоянная притяжения,  $r_0$  — средний радиус Земли,  $m_M$ ,  $r_M$  и  $H_M$  — масса, геоцентрический радиус-вектор Луны и угол, образованный геоцентрическими направлениями на Луну \*) и на спутник;  $m_S$ ,  $r_S$  и  $H_S$  — соответствующие величины, относящиеся к Солнцу,  $k_2$  — постоянная, называемая *числом Лява*,  $r$  — радиус-вектор спутника,  $P_2$  — полином Лежандра второго порядка.

**2. Формулы для возмущений.** Обозначим чрез  $n$  и  $p$  — среднее движение и параметр спутника, чрез  $\dot{\Omega}$  — среднее движение его узла, а чрез  $n'$ ,  $m'$  и  $a'$  — среднее движение, массу и большую полуось внешнего тела (Луны или Солнца). Пусть далее

$$\lambda = \frac{n'}{n}, \quad \mu = \frac{\dot{\Omega}}{n}, \quad \epsilon^2 = \frac{c^2}{p^2},$$

$$\beta = k_2 \frac{m'}{m} \left( \frac{r_0}{a'} \right)^3, \quad \gamma = \frac{r_0^2}{p^2},$$

где  $c = 210$  км.

\*) Точнее, на «фиктивную» Луну (см. Замечание).

Тогда возмущения наклона  $i$  и долготы узла  $\Omega$  определяются следующими формулами:

$$\delta i = \beta\gamma \sum \frac{a_{k,n}}{k\lambda + n\mu} \cos(ku^* + n\theta), \quad (6.6.08)$$

$$\delta\Omega = \Delta\dot{\Omega}(t - t_0) + \frac{\beta\gamma}{\sin i} \sum \frac{b_{k,n}}{k\lambda + n\mu} \sin(ku^* + n\theta) + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \beta\gamma \sin i \sum \frac{a_{k,n}}{(k\lambda + n\mu)^2} \sin(ku^* + n\theta), \quad (6.6.09)$$

где  $k$  и  $n$  принимают следующие значения:

$$k=0, \quad n=1, 2 \quad \text{и} \quad k=2, \quad n=0, \pm 1, \pm 2,$$

так что каждая сумма содержит 7 слагаемых.

Величина  $\Delta\dot{\Omega}$  дается равенством

$$\Delta\dot{\Omega} = -\frac{3}{8} \beta\gamma n (2 - 3 \sin^2 i') \cos i, \quad (6.6.10)$$

где  $i'$  — наклон орбиты внешнего тела относительно плоскости экватора, а коэффициенты  $a_{k,n}$  и  $b_{k,n}$  приведены в табл. 79.

Таблица 79

$k$	$n$	$a_{k,n}$	$b_{k,n}$
0	1	$-0,2738 \cos i$	$0,2738 (1 - 2 \sin^2 i)$
0	2	$-0,0594 \sin i$	$0,0594 \sin i \cos i$
2	0	$-0$	$-0,1781 \sin i \cos i$
2	-1	$-0,2861 \cos i$	$-0,2861 (1 - 2 \sin^2 i)$
2	1	$-0,0123 \cos i$	$0,0123 (1 - 2 \sin^2 i)$
2	-2	$0,6894 \sin i$	$0,6894 \sin i \cos i$
2	2	$-0,0013 \sin i$	$0,0013 \sin i \cos i$

Рассмотрим теперь аргументы  $u^*$  и  $\theta$ , входящие в формулы (6.6.08) и (6.6.09).

В случае Солнца мы имеем

$$u^* = L_S - n_S \Delta t, \quad \theta = \Omega - n_{\oplus} \Delta t,$$

где  $L_S$  и  $n_S$  — средняя долгота и среднее движение Солнца,  $n_{\oplus}$  — угловая скорость вращения Земли относительно своей оси, а  $\Delta t$  — время запаздывания приливов.

В случае Луны имеем

$$u^* = L_M - n_M \Delta t, \quad \theta = \Omega - n_{\oplus} \Delta t,$$

где  $L_M$  и  $n_M$  — средняя долгота и среднее движение Луны. Согласно спутниковым определениям

$$k_2 \approx 0,30, \quad \Delta t \approx 20 \text{ мин.}, \quad n_{\oplus} \Delta t \approx 5^\circ.$$

**3. Возмущения с периодом около 18 лет.** При выводе формул (6.6.08) и (6.6.09) предполагалось, что наклон орбиты Луны к плоскости земного экватора не изменяется со временем. Поэтому указанными формулами можно пользоваться на промежутке времени около одного года. Если же учесть изменения наклона лунной орбиты, то мы придем к долгопериодическим возмущениям, период которых составляет около 18,6 года (период обращения линии узлов орбиты Луны). Теорию этих возмущений разработал И. Козаи [84]. Для них он нашел следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Omega &= -G \cos i, \\ \delta\omega &= G \left( 2 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right), \\ \delta M &= -G (1 - e^2)^{1/2} (1 + e^2) \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.6.11)$$

где

$$G = F (227^\circ \sin N - 1^\circ \sin 2N), \quad (6.6.12)$$

$$F = \frac{k_2}{n (1 - e^2)^2} \left( \frac{r_0}{a} \right)^2, \quad (6.6.13)$$

а  $N$  есть долгота узла орбиты Луны относительно эклиптики.

Эти выражения чрезвычайно важны при анализе движения ИСЗ на больших промежутках времени.

**4. Замечание.** При выводе формул (6.6.08) и (6.6.09) предполагалось, во-первых, что Луна и Солнце движутся относительно Земли по круговым орбитам и, во-вторых, что плоскость лунной орбиты совпадает с плоскостью эклиптики. Поэтому коэффициенты  $a_{n,k}$  и  $b_{n,k}$  оказались общими и для Луны и для Солнца.

Из-за запаздывания приливов при исследовании возмущений вводят так называемую фиктивную Луну. Движение фиктивной Луны происходит так, что и она и вершина прилива проходят через местный меридиан в один и тот же момент времени.

### § 6.03. Релятивистские эффекты.

#### Влияние электромагнитных сил и притяжения атмосферы

**1. Релятивистские эффекты.** Наибольшие поправки к ньютоновскому движению спутника сводятся к поправкам к вековым изменениям перигея и узла орбиты. Эти поправки даются формулами

$$\Delta \dot{\Omega} = \frac{4}{5} \frac{n\gamma}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{r_0^2 \rho}{a^3}, \quad (6.6.14)$$

$$\Delta \dot{\omega} = \frac{3n}{1 - e^2} \frac{\rho}{a} - 3\Delta \dot{\Omega} \cos i, \quad (6.6.15)$$

где

$$\rho = \frac{fm}{c^2}, \quad \gamma = \frac{n_{\oplus}}{n}.$$

Здесь  $f$  — постоянная притяжения,  $m$ ,  $r_0$  и  $n_{\oplus}$  — масса, средний радиус и угловая скорость вращения Земли,  $c$  — скорость света,  $n$ ,  $a$ ,  $e$  — среднее движение, большая полуось и эксцентриситет орбиты спутника.

Релятивистские поправки весьма малы и едва ли их можно обнаружить из наблюдений. Так для спутника с  $a = 10\,000$  км,  $e = 0,2$ ,  $i = 0^\circ$ :

$$\Delta\dot{\Omega} = 0^\circ,55 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta\dot{\omega} = 0^\circ,42 \cdot 10^{-5}.$$

**2. Влияние электромагнитных сил.** Пусть спутник обладает электрическим зарядом  $Q$ . Тогда при его движении в магнитном поле Земли на него будет действовать сила  $F$ , определяемая формулой

$$F = Q(V \times \Phi), \quad (6.6.16)$$

где  $V$  — вектор скорости спутника, а  $\Phi$  — вектор магнитной напряженности.

Компоненты вектора  $\Phi$  можно найти из выражения для потенциала магнитного поля, который может быть представлен в виде ряда по сферическим функциям

$$W = \frac{r_0^3}{r} \{g_1^{(0)} P_1(\sin \varphi) + P_1^{(1)}(\sin \varphi) [g_1^{(1)} \cos \lambda + h_1^{(1)} \sin \lambda] + \dots\}, \quad (6.6.17)$$

где  $r$  — радиус-вектор,  $\varphi$  — широта,  $\lambda$  — долгота спутника,  $r_0$  — средний радиус Земли,  $g_1^{(0)}$ ,  $g_1^{(1)}$ ,  $h_1^{(1)}$  и т. д. — коэффициенты, характеризующие магнитное поле Земли. Так, например,

$$g_1^{(0)} = -0,3 \text{ (гаусса).}$$

Формулы (6.6.16) и (6.6.17) позволяют составить выражения для проекций возмущающего ускорения, которые входят в правые части уравнений Ньютона для оскулирующих элементов, и тем самым написать дифференциальные уравнения для возмущений элементов.

Возмущения, вызываемые электромагнитными силами, исследовались в работах [87], [88], [89]. Было показано, что эти возмущения очень малы. Они могут быть обнаружены, если потенциал спутника будет составлять величину порядка 100 вольт. Но как было показано в работе [89], спутник при своем движении в атмосфере может приобрести потенциал лишь в несколько

десятих долей вольта. До настоящего времени не было обнаружено каких-либо невязок, которые можно было бы интерпретировать как электромагнитные влияния. Однако нужно отметить, что теория электромагнитных возмущений разработана все еще весьма слабо, и заведомо нельзя отрицать, что в некоторых случаях эти возмущения нужно учитывать.

**3. Влияние притяжения атмосферы.** Потенциал притяжения  $U$  во внешнем пространстве можно представить в виде

$$U = U_0 + U',$$

где  $U_0$  — потенциал притяжения Земли, а  $U'$  — потенциал притяжения атмосферы.

Представляя  $U_0$  и  $U'$  в виде рядов по сферическим функциям, для коэффициентов разложения  $U$  будем иметь (см. § 1.01)

$$C_{n,k} = C_{n,k}^{(0)} + C'_{n,k},$$

$$S_{n,k} = S_{n,k}^{(0)} + S'_{n,k},$$

где  $C_{n,k}^{(0)}$  и  $S_{n,k}^{(0)}$  — коэффициенты разложения  $U_0$ , а  $C'_{n,k}$  и  $S'_{n,k}$  — соответствующие коэффициенты  $U'$ . Зная распределение плотности атмосферы, можно вычислить  $C'_{n,k}$  и  $S'_{n,k}$ .

В работе [90] были определены все коэффициенты до четвертого порядка включительно на каждый месяц 1958 г. Оказалось, что все они существенно изменяются со временем. Так,  $C'_{2,0}$  принимает значения от  $-0,06 \cdot 10^{-9}$  до  $-2,00 \cdot 10^{-9}$ , а  $C'_{4,0}$  изменяется в диапазоне от  $-0,51 \cdot 10^{-9}$  до  $-1,24 \cdot 10^{-9}$ . Таким образом, различные вариации плотности атмосферы и связанные с ними изменения коэффициентов  $C'_{n,k}$  и  $S'_{n,k}$  могут наложить определенные ограничения на точность определения коэффициентов разложения геопотенциала по наблюдениям ИСЗ.

#### ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ VI

1. Жонголович И. Д., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 3, 1952.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968, 1975.
3. Kovalevsky J., Barlier F., Space Sci. Revs 7, 1967.
4. Garoshkin E. M., Space Research 7, 1967.
5. Anderle R. I., Oesterwinter C., Communication présentée au 4e symposium du COSPAR à Varsovie, 1963.
6. Cook A. H., Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 10, 1965.
7. King-Hele D. G., Cook G. E., Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 10, 1965.
8. Kozai Y., Spec. Rept. Smithsonian Inst. Astrophys. Observ. 165, 1964.
9. Smith D. E., Planet. and Space Sci. 13, 1965.
10. Kozai Y., Pubs. Astron. Soc. Jap. 16, 1964.
11. King-Hele D. G., Cook G. E., Scott D. W., Planet. and Space Sci. 15, 1967.

12. Kaula W. M., J. Geophys. Res. 71, 1966.
13. Kozai Y., Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. Rept., 38, 1961.
14. Kaula W. M., J. Geophys. Res. 71, 4377, 1966.
15. Kaula W. M., J. Geophys. Res. 71, 5303, 1966.
16. Köhnlein W., Space Research 7, 1967.
17. Smithsonian Astrophys. Obs., Special Report, № 200, 1967.
18. Стандартная Земля, «Мир», М., 1969.
19. Garoschkin E. M., Lambek K., Smithsonian Astrophys. Obs., Special Report, № 315, 1970.
20. Прокурин В. Ф., Батраков Ю. В., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 7, № 7 (90), 1960.
21. Brouwer D., Astron. J. 64, 5, 1959.
22. Kozai Y., Astron. J. 67, № 1307, 1962.
23. Чеботарев Г. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 9, № 1 (104), 1963.
24. Sterne T. E., Astron. J. 63, 28, 1958.
25. Garfinkel B., Astron. J. 63, 88, 1958.
26. Акснес К., Astrophys. Norv. 10, 69, 1965.
27. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения Земли, «Наука», М., 1968.
28. Штерн Т., Введение в небесную механику, «Мир», М., 1964.
29. Bağdas R. B., Astron. J., 66, № 1, 1961.
30. Vinti J. P., Journ. Res. Nat. Bur. Standards 63B, 105, 1959.
31. Кислик М. Д., Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960.
32. Vinti J. P., Res. Nat. Bur. Standards 65B, 131, 1961.
33. Кислик М. Д., Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13, 24, 1960.
34. Jzsak J. G., Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. Rep., № 52, 54, 1960.
35. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», стр. 92, Изд-во АН СССР, 1963.
36. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Астрон. ж. 40, 363, 1963.
37. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 173, 1963.
38. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», стр. 99, Изд-во АН СССР, 1963.
39. Алексеев В. М., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 10, 117, 1965.
40. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 123, 22, 1962.
41. Чепурова В. М., Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 156, 14, 1968.
42. Носков Б. Н., Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 159, 14, 1969.
43. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Вестн. Моск. ун-та, сер. III, физ. астрон., № 5, 81, 1962.
44. Уральская В. С., Вестн. Моск. ун-та, сер. III, физ. астрон., № 4, 1964.
45. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 163, 1963.
46. Дехтярев В. Г., ПМН 26, 6, 1962.
47. Аксенов Е. П., Вестн. Моск. ун-та, сер. III, физ. астр., № 6, 68, 1967.
48. Аксенов Е. П., Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 155, 3, 1968.
49. Аксенов Е. П., Вестн. Моск. ун-та, сер. III, физ. астр., № 3, 36, 1965.
50. Аксенов Е. П., Космические исследования 2, вып. 1, 14, 1964.
51. Аксенов Е. П., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 35, 36, 1966.
52. Аксенов Е. П., Астрон. ж. 45, 858, 1968.
53. Насонова Л. П., Астрон. ж. 48, 194, 1971.



54. Аксенов Е. П., *Астрон. ж.* 45, 1284, 1968.
55. Тимошкова Е. И., *Астрон. ж.* 48, 1061, 1971.
56. Аксенов Е. П., Носков Б. Н., *Астрон. ж.* 49, 1292, 1972.
57. Аксенов Е. П., *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга* 35, 44, 1966.
58. Аксенов Е. П., *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга* 35, 59, 1966.
59. Орлов А. А., *Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР* 10, № 1 (114), 1965.
60. Kaula W. M., *Geophys. J.* 5, № 2, 1961.
61. Аксенов Е. П., *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга* 36, 161, 1967.
62. Аксенов Е. П., *Тр. Университета дружбы народов* 21, математика, вып. 2, 1967, стр. 184.
63. Аксенов Е. П., Прохорова И. П., *Астрон. ж.* 49, 630, 1972.
64. Аксенов Е. П., Прохорова И. П., *Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 11, 1974.*
65. Аксенов Е. П., *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга* 35, 75, 1966.
66. Долгачев В. П., *Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астр., № 1, 94, 1968.*
67. Егорова А. В., *Сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, вып. 8, 1961.*
68. Долгачев В. П., *Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 161, 1969.*
69. Аксенов Е. П., *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга* 35, 93, 1966.
70. Уральская В. С., *Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 161, 1969.*
71. King-Hele D. G., Walker D. M. C., *Space Research.* 2, 1961.
72. CIRA 1972, Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
73. Cook G. E., Ministry of Aviation ARC Current Paper CP., 523, H. M. S. O., London, 1960.
74. Аксенов Е. П., Носков Б. Н., *Астрон. ж.* 50, 590, 1973.
75. Кинг-Хили Д., *Теория орбит искусственных спутников в атмосфере, «Мир», 1966.*
76. Эльясберг П. Е., *Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.*
77. Kozai Y., *Spec. Rept. Smithsonian Astroph. Obs., № 56, 1961.*
78. Поляхова Е. Н., *Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР* 9, № 1 (104), 1963.
79. Ferraz-Mello S., *C. R. Acad. Sc., Paris,* 258, 463, 1964.
80. Lala P., Sehnal L., *Bull. of the Astron. Inst. of Czechoslovakia* 20, 328, 1969.
81. Lala P., *Bull. of the Astron. Inst. of Czechoslovakia* 22, 63, 1971.
82. Вашковьяк С. Н., *Вестн. Моск. ун-та, сер. III, физ., астрон., № 5, 1974.*
83. Kozai Y., Kinoshita, *Celestial mechanics* 7, 356, 1973.
84. Kozai Y., *Publs. Astron. Soc. Japan* 17, 395, 1965.
85. Kaula W. M., *Astron. J.* 74, 1108, 1969.
86. Musen P., Estes R., *Celestial mechanics* 6, 4, 1972.
87. Westerman H. R., *ARS Journ.* 30, 204, 1960.
88. Sehnal L., *Smithsonian Astrophys. Obs., Special Report, № 271, 1, 1968.*
89. Beard D. B., Johnson F. S., *J. Geophys.* 65, 1, 1960.
90. Шкодров В. Г., Шкодрова Е. Б., *Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 9, 1969, стр. 27.*

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В небесной механике и динамике космического полета широко применяются численные методы, получившие особенно интенсивное развитие благодаря внедрению ЭВМ. Основные из этих методов: интерполирование и приближенное представление функций, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение дифференциальных уравнений, обработка результатов наблюдений по методу наименьших квадратов и др.

Общие вопросы теории излагаются, например, в [1]—[12].

## Глава 1

## ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

## § 1.01. Таблица разностей функции

Пусть имеется таблица значений функции  $f(t)$  для значений аргумента  $t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$  (табл. 80).

Таблица 80

$t$	$\dots$	$t_{-2}$	$t_{-1}$	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$\dots$
$f(t)$	$\dots$	$f_{-2}$	$f_{-1}$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$\dots$

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда эта таблица составлена для равноотстоящих значений аргумента, так что  $t_k = t_0 + kh$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Величина  $h$  называется *шагом таблицы*, значения аргумента  $t_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) называются *узлами таблицы*.

При интерполировании и численном дифференцировании функции  $f(t)$  используется таблица ее разностей (табл. 81). В этой таблице через  $f^1$  с различными нижними индексами

Т а б л и ц а 81

$t$	$f$	$f^1$	$f^2$	$f^3$	$f^4$	$f^5$
$t_{-2}$	$f_{-2}$	$f_{-3/2}^1$				
$t_{-1}$	$f_{-1}$	$f_{-1}^1$	$f_{-1}^2$			
		$f_{-1/2}^1$	$f_{-1/2}^2$	$f_{-1/2}^3$		
$t_0$	$f_0$	$f_0^1$	$f_0^2$	$f_0^3$	$f_0^4$	
		$f_{1/2}^1$	$f_{1/2}^2$	$f_{1/2}^3$	$f_{1/2}^4$	$f_{1/2}^5$
$t_1$	$f_1$	$f_1^1$	$f_1^2$	$f_1^3$	$f_1^4$	
		$f_{3/2}^1$	$f_{3/2}^2$	$f_{3/2}^3$		
$t_2$	$f_2$	$f_2^1$	$f_2^2$			
		$f_{5/2}^1$				
$t_3$	$f_3$					

обозначаются *первые разности* (или разности первого порядка), через  $f^2$  — *вторые разности* и т. д. Первые разности с дробными нижними индексами находятся по формулам

$$f_{k+1/2}^1 = f_{k+1} - f_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7.1.01)$$

Вторые разности с целыми нижними индексами находятся по формулам

$$f_k^2 = f_{k+1/2}^1 - f_{k-1/2}^1 \quad (7.1.02)$$

и т. д. Первые, третьи и т. д. разности с целыми индексами и вторые, четвертые и т. д. разности с дробными индексами называются *центральными разностями* и они равны среднему арифметическому из соседних разностей того же столбца. Например,

$$f_0^1 = \frac{1}{2}(f_{-1/2}^1 + f_{1/2}^1), \quad f_{1/2}^2 = \frac{1}{2}(f_0^2 + f_2^2) \quad (7.1.03)$$

и т. д.

Если функция достаточно гладкая и ее значения вычислены достаточно точно, а шаг таблицы мал, то разности довольно быстро убывают вместе с увеличением порядка. Ошибки округления значений  $f$  приводят к тому, что значения разностей, начиная с некоторого порядка, определяются именно этими ошибками; разности теряют плавный ход и, как говорят, «скачут», так что пользоваться ими нет смысла.

Если  $m$ -е разности, выраженные в единицах последнего десятичного знака значений функции, превосходят по абсолютной величине  $2^{m-1}$ , то в значениях функции обязательно имеется погрешность, не меньшая половины последнего выписанного десятичного знака.

### § 1.02. Интерполяционные формулы

Пусть функция  $f(t)$  задана табл. 80. Интерполяционные формулы позволяют вычислять (вообще, приближенно) значения этой функции для промежуточных значений аргумента, не совпадающих с узлами таблицы. Эти формулы строятся с помощью так называемых *интерполяционных полиномов*, которые представляют собой полиномы по степеням независимой переменной, точно совпадающие с  $f(t)$  в узлах. Для удобства вычислений интерполяционные формулы располагаются по соответствующим разностям табл. 81.

Обозначим через  $t^*$  значение аргумента, для которого требуется вычислить значение функции  $f(t)$ , через  $t_0$  — ближайший к  $t^*$  узел таблицы, и положим

$$q = \frac{t^* - t_0}{h}, \quad (7.1.04)$$

так что  $t^* = t_0 + qh$ .

На практике используются чаще всего следующие интерполяционные формулы.

Формула Ньютона для интерполяции вперед (применяется, если  $t^* > t_0$ ,  $0 < q \leq \frac{1}{2}$ ):

$$f(t_0 + qh) \approx f_0 + qf_{1/2}^1 + \\ + \frac{q(q-1)}{2!} f_1^2 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!} f_{n/2}^n. \quad (7.1.05)$$

Формула Ньютона для интерполяции назад (применяется, если  $t^* < t_0$ ,  $\frac{1}{2} \leq q < 0$ ):

$$f(t_0 + qh) \approx f_0 + qf_{-1/2}^1 + \\ + \frac{q(q+1)}{2!} f_{-1}^2 + \dots + \frac{q(q+1) \dots (q+n-1)}{n!} f_{-n/2}^n. \quad (7.1.06)$$

Формула Стирлинга:

$$f(t_0 + qh) \approx f_0 + qf_0^1 + \\ + \frac{q^2}{2!} f_0^2 + \dots + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2) \dots (q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} f_0^{2n-1} + \\ + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2) \dots (q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} f_0^{2n}. \quad (7.1.07)$$

Формула Бесселя:

$$f(t_0 + qh) \approx \frac{1}{2}(f_0 + f_1) + \left(q - \frac{1}{2}\right) f_{1/2}^1 + \frac{q(q-1)}{2!} f_{1/2}^2 + \\ + \frac{q(q-1)\left(q - \frac{1}{2}\right)}{3!} f_{1/2}^3 + \dots + \frac{q(q^2 - 1^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)(q-n)}{(2n)!} f_{1/2}^{2n} + \\ + \frac{q(q^2 - 1^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)(q-n)\left(q - \frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!} f_{1/2}^{2n+1}. \quad (7.1.08)$$

Формула Эверетта:

$$f(t_0 + qh) \approx \\ \approx \left[ \rho f_0 + \frac{\rho(\rho^2 - 1^2)}{3!} f_0^2 + \dots + \frac{\rho(\rho^2 - 1^2) \dots (\rho^2 - n^2)}{(2n+1)!} f_0^{2n} \right] + \\ + \left[ q f_1 + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} f_1^2 + \dots + \frac{q(q^2 - 1^2) \dots (q^2 - n^2)}{(2n+1)!} f_1^{2n} \right] \quad (\rho = 1 - q). \quad (7.1.09)$$

Формула Ньютона (7.1.06) используется также для экстраполяции вперед, т. е. для вычислений  $\hat{f}(t)$  при значениях аргумента  $t$ , находящихся за пределами табл. 80 справа.

Если через  $t_0$  обозначен последний справа узел табл. 80, то таблица разностей вида 81 будет содержать лишь разности с отрицательными нижними индексами. Для вычисления  $f(t^*)$  при  $t^* > t_0$ ,  $t^* = t_0 + qh$  используют формулу (7.1.06), но в этом случае  $q = (t^* - t_0)/h > 0$ .

Точно так же можно экстраполировать  $f(t)$  для значений  $t$  слева от начала табл. 80. Тогда применяется формула (7.1.05) при  $q < 0$ .

Ценность формул Ньютона состоит в простоте структуры коэффициентов, в возможности экстраполяции и в возможности непосредственной интерполяции между узлами вблизи краев табл. 80, когда соответствующие разности с нижними индексами 0, 1 или 1/2 отсутствуют.

Формулы Стирлинга и Бесселя, вообще, более точные, чем формулы Ньютона. Формула Бесселя особенно удобна при интерполяции в точках, близких к середине интервала.

Формула Эверетта часто применяется при субтабулировании, т. е. для составления новой таблицы значений функции  $f(t)$  с более мелким шагом.

Формула Лагранжа:

$$\hat{f}(t) \approx \sum_{i=0}^n \frac{\omega_n(t)}{(t-t_i) d\omega_n(t_i)/dt} \hat{f}_i, \quad (7.1.10)$$

где

$$\omega_n(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_n), \quad \hat{f}_i = f(t_i).$$

Это — самая общая интерполяционная формула, выражающая значение функции в точке  $t$  непосредственно через значения этой функции в  $n + 1$  узлах  $t_0, \dots, t_n$ , причем расположение этих узлов произвольное, а  $t$  принадлежит интервалу  $(t_0, t_n)$ . Правая часть (7.1.10) — полином по  $t$ .

Если узлы равноотстоящие, с шагом  $h$ , то формула Лагранжа приобретает следующий вид:

$$f(t) \approx (-1)^n \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{C_n^i}{t-t_i} f_i, \quad (7.1.11)$$

где  $C_n^i$  — биномиальные коэффициенты,  $q = (t - t_0)/h$ .

Полином в правой части (7.1.10) называется *полиномом Лагранжа*, и он дает приближенное представление функции  $f(t)$  на всем отрезке  $[t_0, t_n]$ . Он может применяться не только для вычислений промежуточных значений  $f(t)$ , но и для различных операций с этой функцией (дифференцирование, интегрирование и др.).

Наивысший порядок разностей, сохраняемых в интерполяционной формуле, называется порядком этой формулы. Если таблица заданных значений функции достаточно обширна, то принципиально возможно составить разности достаточно высокого порядка и использовать соответственно интерполяционные формулы такого же высокого порядка. На практике обычно ограничиваются интерполяционными формулами не выше четвертого или пятого порядков. Отбрасываемые при вычислениях члены не должны, вообще говоря, превышать по абсолютной величине погрешность, которой обладают сами табличные значения функции. Строгая оценка погрешности и сравнение интерполяционных формул между собой по их точности производится с помощью анализа их так называемых остаточных членов.

### § 1.03. Остаточные члены интерполяционных формул

*Остаточный член*  $R_m(t)$  представляет собой разность между точным значением функции  $f(t)$  в точке  $t$  и ее приближенным значением, которое вычисляется по интерполяционной формуле, оборванной на члене с разностью  $m$ -го порядка, т. е. погрешность интерполяционной формулы порядка  $m$ .

Пусть функция  $f(t)$  дифференцируема  $n$  раз ( $n = m + 1$  или  $m + 2$ ). Обозначим через  $M_n$  верхнюю границу модуля производной  $f^n(t)$  в интервале значений  $t$ , которые отвечают табличным значениям  $t$ , использованным при составлении интерпо-

ляционной формулы  $m$ -го порядка. Тогда оценки остаточного члена для различных интерполяционных формул следующие.

Для формулы Лагранжа (в случае  $m+1$  узлов):

$$|R_m(t)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |(t-t_0) \dots (t-t_m)|. \quad (7.1.12)$$

Для формулы Эверетта:

$$|R_m(t)| \leq \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} Q_m(q) M_{m+2}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (7.1.13)$$

$$Q_m(q) = \left| q(q^2 - 1^2) \dots \left( q^2 - \left( \frac{m}{2} \right)^2 \right) \left( q - \frac{m+2}{2} \right) \right|.$$

Для остальных формул оценка имеет общий вид

$$|R_m(t)| \leq \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} Q_m(q) M_{m+1}, \quad (7.1.14)$$

где величина  $Q_m(q)$  выражается различным образом для различных формул.

Для формул Ньютона интерполяции вперед и назад:

$$Q_m(q) = |q(|q|-1) \dots (|q|-m)|. \quad (7.1.15)$$

Для формулы Ньютона экстраполяции вперед:

$$Q_m(q) = q(q+1) \dots (q+m). \quad (7.1.16)$$

Для формулы Стирлинга:

$$Q_m(q) = \left| q(q^2 - 1^2) \dots \left( q^2 - \left( \frac{m}{2} \right)^2 \right) \right|, \quad \left. \begin{array}{l} m - \text{четное,} \\ \\ \end{array} \right\} \\ Q_m(q) = \left| q^2(q^2 - 1^2) \dots \left( q^2 - \left( \frac{m-1}{2} \right)^2 \right) \right|, \quad \left. \begin{array}{l} m - \text{нечетное} \end{array} \right\} \quad (7.1.17)$$

Для формулы Бесселя:

$$Q_m(q) = \left| q(q^2 - 1^2) \dots \left( q^2 - \left( \frac{m-2}{2} \right)^2 \right) \left( q - \frac{m}{2} \right) \right|, \quad \left. \begin{array}{l} m - \text{четное,} \\ \\ \end{array} \right\} \\ Q_m(q) = \left| q(q^2 - 1^2) \dots \left( q^2 - \left( \frac{m-1}{2} \right)^2 \right) \left( q - \frac{m+1}{2} \right) \right|, \quad \left. \begin{array}{l} m - \text{нечетное.} \end{array} \right\} \quad (7.1.18)$$

Если нет никакой информации о возможной величине производной  $f^{(m+1)}(t)$ , так что число  $M_{m+1}$  остается неизвестным, то можно воспользоваться разностями  $(m+1)$ -го порядка, которые вычисляются по имеющейся таблице разностей. Если наибольшие по абсолютной величине значения разностей  $(m+1)$ -го

порядка в строчках таблицы, близких к данному  $t$ , не превышают  $\bar{M}_{m+1}$ , то, заменив в (7.1.14)  $h^{m+1}M_{m+1}$  на  $\bar{M}_{m+1}$ , получим практические оценки для  $|R_m(t)|$ , хотя строгое соблюдение знака  $\leq$  гарантировать нельзя.

В оценке (7.1.13) следует заменить в этом случае  $h^{m+2}M_{m+2}$  на  $\bar{M}_{m+2}$ , где последняя величина превышает по абсолютной величине разности  $(m+2)$ -го порядка.

Значения величин  $\bar{Q}_m(q)$ , равных  $Q_m(q)/(m+1)!$  для формул Ньютона, Стирлинга, Бесселя и  $Q_m(q)/(m+2)!$  для формулы Эверетта, дают представление о точности интерполяционных формул при различных  $m$  и  $q$ .

Кроме того, эти величины представляют собой оценки коэффициентов в соответствующих интерполяционных формулах при разностях  $(m+1)$ -го порядка (в случае формулы Эверетта  $(m+2)$ -го порядка) и таким образом позволяют сделать вывод о том, какими разностями можно пренебречь.

Приведем значения  $\bar{Q}_3$  и  $\bar{Q}_4$  для различных интерполяционных формул.

$m = 3$					
$q$	1	2	3		
- 0,5	0,039		0,0078	0,0391	
- 0,4	0,042		0,0056	0,0336	
- 0,3	0,041		0,0034	0,0262	
- 0,2	0,034		0,0016	0,0176	
- 0,1	0,021		0,0004	0,0087	
0,1	0,021	0,03	0,0004	0,0078	
0,2	0,034	0,07	0,0016	0,0144	
0,3	0,041	0,12	0,0034	0,0193	
0,4	0,042	0,19	0,0056	0,0224	
0,5	0,039	0,27	0,0078	0,0234	

$m = 4$					
$q$	1	2	3	4	5
- 0,5	0,027		0,0117	0,0078	0,0068
- 0,4	0,030		0,0107	0,0060	0,0061
- 0,3	0,030		0,0089	0,0040	0,0049
- 0,2	0,026		0,0063	0,0025	0,0034
- 0,1	0,016		0,0033	0,0010	0,0017
0,1	0,016	0,02	0,0033	0,0006	0,0016
0,2	0,026	0,06	0,0063	0,0009	0,0030
0,3	0,030	0,11	0,0089	0,0008	0,0040
0,4	0,030	0,17	0,0107	0,0004	0,0047
0,5	0,027	0,25	0,0117	0,0000	0,0049

В столбцах 1, 2, 3 и 4 даны значения  $\bar{Q}_3$  и  $\bar{Q}_4$  для формул Ньютона интерполяции, формулы Ньютона экстраполяции и формул Стирлинга, Бесселя соответственно. В столбце 5 даны значения  $\bar{Q}_4$  для формулы Эверетта.

Приведенные числа показывают, что если ограничиться разностями нечетного порядка, то более выгодной с точки зрения



точности является формула Стирлинга, особенно при небольших  $|q|$ . Если же ограничиваться разностями четного порядка, то наиболее точной является формула Бесселя. Значения  $\bar{Q}_3$  для формулы Бесселя при  $0 < q < 0,5$  и при  $0,5 < q < 1$  расположены симметрично относительно точки  $q = 0,5$ . Следовательно, формулу Бесселя выгодней применять всегда при  $q > 0$  для интерполяции вперед.

Погрешность экстраполяции по формуле Ньютона превышает все остальные. Значения  $\bar{Q}_4$  при экстраполяции при

$$q = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$$

равны соответственно

$$0,34; 0,47; 0,61; 0,79; 1,00.$$

Они почти одинаковы при  $m = 3$  и  $m = 4$ . Значения  $\bar{Q}_m$  для формул Ньютона в столбце 1 изменяются очень мало при переходе от  $m = 3$  к  $m = 4$ .

Исходя из значений  $\bar{Q}_3$ ,  $\bar{Q}_4$ , можно сделать вывод, что, например, при применении формулы Бесселя можно отбросить четвертые разности, если они не превышают 20, и пятые разности, если они не превышают 500 (в единицах последнего знака в значениях функции  $f(t)$ ). При применении формулы Стирлинга и при  $|q| \leq 0,2$  можно отбросить четвертые разности, если они не превосходят 300.

### § 1.04. Обратное интерполирование

*Обратное интерполирование* заключается в нахождении значения аргумента, соответствующего заданному значению табличной функции.

Обозначим последнее через  $f_*$ , а искомое значение аргумента  $t$  — через  $t_*$ . Ближайшее табличное значение функции обозначим через  $f_0$ , пронумеруем соответствующим образом предшествующие и последующие значения функции и составим таблицу разностей. Положим  $t_* = t_0 + nh$ , где  $n$  — неизвестное, так что  $f_* = f(t_0 + nt)$ .

Вычисление  $n$  целесообразно выполнить следующим образом.

Перепишем, например, интерполяционную формулу Бесселя (7.1.08) в виде

$$nf_{1/2}^1 = f_* - f_0 - \frac{n(n-1)}{2!} f_{1/2}^2 - \frac{n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{3!} f_{1/2}^3 - \dots \quad (7.1.19)$$

Эта формула рассматривается далее как уравнение относительно неизвестного  $n$ , и его решение ищется методом последо-

вательных приближений. В первом приближении полагают

$$n^{(1)} = \frac{f_* - f_0}{f_{1/2}^1}, \quad (7.1.20)$$

а последующие приближения  $n^{(k)}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) ищутся по формуле

$$n^{(k)} = n^{(k-1)} - \frac{1}{f_{1/2}^1} \left[ \frac{n^{(k-1)}(n^{(k-1)} - 1)}{2!} f_{1/2}^2 + \right. \\ \left. + \frac{n^{(k-1)}(n^{(k-1)} - 1) \left( n^{(k-1)} - \frac{1}{2} \right)}{3!} f_{1/2}^3 + \dots \right]. \quad (7.1.21)$$

Аналогичным образом можно применить формулу Стирлинга

### § 1.05. Интерполирование функции двух переменных

Пусть имеются значения функции  $f(u, v)$  двух переменных в узлах  $(u_i, v_j)$  ( $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) таблицы с двумя входами по  $u$  и  $v$  и постоянными шагами  $u_{i+1} - u_i = h$ ,  $v_{j+1} - v_j = l$ . Полагая  $f(u_i, v_j) = f_{i,j}$  при любых  $i, j$ , введем для разностей следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1,j} - f_{i,j} &= \Delta^{10} f_{i,j}, \\ f_{i,j+1} - f_{i,j} &= \Delta^{01} f_{i,j}; \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{разности первого} \\ \text{порядка} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{10} f_{i+1,j} - \Delta^{10} f_{i,j} &= \Delta^{20} f_{i,j}, \\ \Delta^{10} f_{i,j+1} - \Delta^{10} f_{i,j} &= \Delta^{11} f_{i,j}, \\ \Delta^{01} f_{i,j+1} - \Delta^{01} f_{i,j} &= \Delta^{02} f_{i,j}; \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{разности второго} \\ \text{порядка} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{20} f_{i+1,j} - \Delta^{20} f_{i,j} &= \Delta^{30} f_{i,j}, \\ \Delta^{20} f_{i,j+1} - \Delta^{20} f_{i,j} &= \Delta^{21} f_{i,j}, \\ \Delta^{11} f_{i,j+1} - \Delta^{11} f_{i,j} &= \Delta^{12} f_{i,j}, \\ \Delta^{02} f_{i,j+1} - \Delta^{02} f_{i,j} &= \Delta^{03} f_{i,j}; \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{разности третьего} \\ \text{порядка} \end{array}$$

и т. д.

Наиболее простой является следующая формула, представляющая собой двумерный аналог формулы Ньютона (7.1.05) для интерполяции вперед:

$$f(u_0 + qh, v + sl) \approx f_{00} + q\Delta^{10}f_{00} + s\Delta^{01}f_{00} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^{20}f_{00} + \\ + qs\Delta^{11}f_{00} + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^{02}f_{00} + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^{30}f_{00} + \\ + \frac{q(q-1)s}{2!}\Delta^{21}f_{00} + \frac{qs(s-1)}{2!}\Delta^{12}f_{00} + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^{03}f_{00}, \quad (7.1.22)$$



Если функция  $f(t)$  аппроксимируется сплайном из линейных функций ( $m = 1$ ), то условия (7.1.23) полностью определяют все коэффициенты  $a_{ij}$ . Если  $m \geq 2$ , то для определения  $a_{ij}$  привлекают дополнительные условия. Например, при  $m = 3$  можно принять следующие два дополнительных условия:

$$P''_{13}(t_0) = 0, \quad P''_{N3}(t_N) = 0.$$

### § 1.07. Среднеквадратичные приближения функций

Функция  $f(t)$  с известными значениями в узлах  $t_0, \dots, t_N$  аппроксимируется функцией

$$F(t) = a_0\varphi_0(t) + \dots + a_n\varphi_n(t) \quad (n \leq N), \quad (7.1.25)$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — постоянные коэффициенты и  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t)$  — система функций, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=0}^N \varphi_i(t_k) \varphi_j(t_k) = 0 \quad (i \neq j) \quad (7.1.26)$$

(такие функции называются попарно *ортогональными*).

Чаще всего используют в качестве функций  $\varphi_j(t)$  системы ортогональных полиномов Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита и др. (см., например, [3]). Коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  определяются из условия минимума суммы квадратов отклонений  $f(t)$  от  $F(t)$  в узлах

$$S = \sum_{k=0}^N [F(t_k) - f(t_k)]^2. \quad (7.1.27)$$

Величина  $S$  называется *средним квадратичным отклонением*  $F(t)$  от  $f(t)$ . Функция  $F(t)$ , реализующая минимум  $S$ , называется *наилучшим среднеквадратичным приближением* исходной функции  $f(t)$  данной системой функций  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t)$ .

Формулы для  $a_0, \dots, a_n$  можно выписать в явном виде

$$a_j = \frac{\sum_{k=0}^N f(t_k) \varphi_j(t_k)}{\sum_{k=0}^N \varphi_j^2(t_k)} \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (7.1.28)$$

Соответствующая величина  $S_{\min}$ , равная минимальному значению среднего квадратичного отклонения  $S$  для данной системы функций  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t)$  и выражающая точность аппроксима-

ции функции  $f(t)$  функцией  $F(t)$ , определяется по формуле

$$S_{\min} = \sum_{k=0}^N [f^2(t_k) - a_0^2 \varphi_0^2(t_k) - \dots - a_n^2 \varphi_n^2(t_k)]. \quad (7.1.29)$$

Важным является случай, когда узлы  $t_0, \dots, t_N$  можно выбирать произвольно внутри некоторого интервала  $(a, b)$ . Тогда в качестве системы функций  $\varphi_j(t)$  выбирают полиномы Чебышева, обозначаемые обычно через  $T_j(t)$ , а в качестве узлов выбирают корни полинома Чебышева  $T_{N+1}(t)$ . Если начало отсчета  $t$  и единица длины выбраны так, что  $a = -1$ ,  $b = 1$ , то эти корни равны

$$t_k = \cos \frac{2k+1}{2N+2} \pi \quad (k=0, 1, \dots, N). \quad (7.1.30)$$

Общая формула для  $T_j(t)$  следующая:

$$T_j(t) = \cos(j \arccos t) \quad (|t| \leq 1), \quad (7.1.31)$$

причем  $T_0 \equiv 1$ ,  $T_1(t) = t$ ,  $T_2(t) = -1 + 2t^2$ , а остальные  $T_j(t)$  ( $j \geq 3$ ) определяются по рекуррентной формуле

$$T_j(t) = 2tT_{j-1}(t) - T_{j-2}(t). \quad (7.1.32)$$

Если при построении аппроксимирующей функции вида (7.1.25) по полиномам Чебышева

$$F(t) = a_0 + a_1 T_1(t) + \dots + a_n T_n(t) \quad (7.1.33)$$

используется  $N+1$  узлов и  $n = N$ , то мы получим интерполяционный полином, т. е. полином  $N$ -й степени, совпадающий с  $f(t)$  во всех узлах. Тогда  $S = 0$ .

Для произвольного интервала  $(a, b)$  узлы  $t_k$  ( $k = 0, \dots, N$ ) определяются формулой

$$t_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2N+2} \pi, \quad (7.1.34)$$

а аргументом полиномов Чебышева в (7.1.33) служит вместо  $t$  переменная

$$z = \frac{1}{b-a} (2t - b - a).$$

Случай равноотстоящих узлов. Пусть узлы  $t_0, \dots, t_N$  имеют один и тот же шаг  $h$ , и пусть начало отсчета и единица длины таковы, что  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $\dots$ ,  $t_N = N$ . Тогда при построении аппроксимирующей функции вида (7.1.25) роль

ортогональных полиномов  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ , ... играют следующие полиномы:

$$P_{0,N} = 1, \quad P_{j,N}(t) = 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k C_j^k C_{j+k}^k \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{N(N-1) \dots (N-k+1)},$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

где  $C_j^k$ ,  $C_{j+k}^k$  — биномиальные коэффициенты. В частности,

$$P_{1,N}(t) = 1 - \frac{2t}{N}, \quad P_{2,N}(t) = 1 - \frac{6t}{N-1} + \frac{6t^2}{N(N-1)}.$$

Коэффициенты  $a_j$  в аппроксимирующей функции (7.1.25) и соответствующая величина  $S_{\min}$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(t_k), \\ a_j &= \frac{(2j+1)N(N-1) \dots (N-j+1)}{(N+1)(N+2) \dots (N+1+j)} \sum_{k=0}^N f(t_k) P_{j,N}(t_k) \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ S_{\min} &= \sum_{k=0}^N [f(t_k)]^2 - \sum_{j=0}^N \frac{(N+1)(N+2) \dots (N+1+j)}{(2j+1)N(N-1) \dots (N-j+1)} a_j^2, \end{aligned} \right\} (7.1.36)$$

причем знаменатель в последней сумме при  $j = 0$  полагается равным единице.

### § 1.08. Сглаживание табличных значений функций

Пусть в результате измерений или вычислений получена таблица значений функции  $f(t)$  в узлах  $t_0, t_1, \dots$ , причем эти значения обладают случайными ошибками. Ставится задача исправить эту таблицу и получить «сглаженные» значения исходной функции в узлах, освобожденные в известной мере от случайных ошибок. Эта задача решается путем построения аппроксимирующей сглаживающей функции  $F(t)$ . При этом в качестве  $F(t)$  обычно выбирается среднеквадратичное наилучшее приближение функции  $f(t)$ , рассмотренное в предыдущем параграфе. Соответствующие значения  $F(t_j)$  в узлах являются искомыми «сглаженными» значениями.

В частности, если узлы равноотстоящие и аппроксимирующая функция  $F(t)$  строится по каждому пяти соседним значениям исходной функции  $f(t)$  с помощью полиномов  $P_{j,4}(t)$  ( $j = 0, \dots, 4$ ) (см. формулу (7.1.35)), то сглаженные значения  $F(t_j) = F_j$  для пятерки узлов  $t_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$  выражаются

следующими формулами через значения  $f(t_j) = f_j$  исходной функции  $f(t)$  в этих узлах:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{70} (69f_0 + 4f_1 - 6f_2 + 4f_3 - f_4), \\ F_1 &= \frac{1}{35} (2f_0 + 27f_1 + 12f_2 - 8f_3 + 2f_4), \\ F_2 &= \frac{1}{35} (-3f_0 + 12f_1 + 17f_2 + 12f_3 - 3f_4), \\ F_3 &= \frac{1}{35} (2f_0 - 8f_1 + 12f_2 + 27f_3 + 2f_4), \\ F_4 &= \frac{1}{70} (-f_0 + 4f_1 - 6f_2 + 4f_3 + 69f_4). \end{aligned} \right\} \quad (7.1.37)$$

Формулы (7.1.37) можно записать в ином виде, используя таблицу разностей функции  $f(t)$ , а именно:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= f_1 - \frac{1}{70} f_2^4 \quad (j=0, 4), \\ F_1 &= f_1 - \frac{2}{35} f_2^4 \quad (j=1, 3), \end{aligned} \right\} \quad F_2 = f_2 - \frac{3}{35} f_2^4, \quad (7.1.38)$$

где  $f_2^4$  — четвертая разность в строке, соответствующей узлу  $t_2$ .

Отсюда вытекает следующий упрощенный метод сглаживания с помощью четвертых разностей. А именно, после того, как в каждой строке вычислены четвертые разности  $f_j^4$ , эти разности, умноженные на  $3/35$ , вычитаются из соответствующих значений функции  $f_j$ . Таблица исправленных в каждой строке значений  $f_j - \frac{3}{35} f_j^4$  отвечает более гладкой кривой.

### § 1.09. Равномерные приближения

Функция  $f(t)$  с известными значениями в узлах  $t_0, \dots, t_N$  аппроксимируется функцией  $F(t)$ , которая ищется в виде (7.1.25) с помощью системы ортогональных функций. Однако в отличие от § 1.07 коэффициенты  $a_j$  в (7.1.25) ищутся из условия минимума отклонения  $F(t)$  от  $f(t)$  по абсолютной величине, т. е. минимума функционала

$$\max_k |F(t_k) - f(t_k)| \quad (k=0, 1, \dots, N). \quad (7.1.39)$$

Функция  $F(t)$ , реализующая минимум этого функционала, называется наилучшим равномерным приближением функции  $f(t)$  данной системой ортогональных функций  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t)$ , а минимум функционала (7.1.39) представит собой наибольшую абсолютную погрешность  $\delta$  этого приближения.

В качестве системы ортогональных функций  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ , ... часто выбирают систему полиномов Чебышева, а наилучшее равномерное приближение  $F(t)$  ищется методом итераций (см. [3], т. 1).

Наилучшие равномерные приближения строятся также для функций непрерывного аргумента, и они применяются для непосредственных вычислений значений многих распространенных функций. Приведем примеры таких приближений для некоторых функций, а также наибольшие абсолютные погрешности  $\delta$  этих приближений на определенном интервале изменения  $t$  (см. [14]):

$$\cos t \approx 1 - 0,49670t + 0,03705t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \delta = 0,0009,$$

$$\frac{\lg t}{t} \approx 1 + 0,31755t + 0,20330t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \quad \delta = 0,001,$$

$$e^{-t} \approx 1 - 0,9664t + 0,3536t^2, \quad 0 \leq t \leq \ln 2, \quad \delta = 0,003.$$

### § 1.10. Аппроксимация периодических функций

с известным периодом тригонометрическими полиномами по методу наименьших квадратов

1. Пусть даны значения функции  $f(t)$  в равноотстоящих узлах  $t_1, \dots, t_{N+1}$ , причем  $f(t_{N+1}) = f(t_1)$  и число  $T = t_{N+1} - t_1$  рассматривается как период функции  $f(t)$ . Ставится задача аппроксимации этой функции тригонометрическим полиномом вида

$$F(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \left( A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (2n + 1 \leq N). \quad (7.1.40)$$

Коэффициенты  $A_0, \dots, B_n$  ищутся из условия минимума среднего квадратичного отклонения

$$S = \sum_{j=1}^N [f(t_j) - F(t_j)]^2, \quad (7.1.41)$$

и окончательные формулы для них следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j), \\ A_k &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j) \cos \frac{2\pi k}{T} t_j, \\ B_k &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j) \sin \frac{2\pi k}{T} t_j \end{aligned} \right\} \quad (7.1.42)$$

( $k = 1, \dots, N$ ).



Соответствующая величина  $S_{\min}$  минимума  $S$  выразится формулой

$$S_{\min} = \sum_{j=1}^N f^2(t_j) - \sum_{k=0}^n (l_k A_k^2 + \rho_k B_k^2), \quad (7.1.43)$$

где  $l_k = \rho_k = N/2$  при  $2k \neq Np$  и  $l_k = N$ ,  $\rho_k = 0$  при  $2k = Np$  ( $p$  — целое число или нуль).

Коэффициенты  $A_0, A_k, B_k$  аппроксимирующего тригонометрического полинома связаны с точными значениями коэффициентов Фурье  $\bar{A}_k, \bar{B}_k$  функции  $f(t)$ , если она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье, следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \bar{A}_0 + \bar{A}_N + \bar{A}_{2N} + \dots, \\ A_k &= \bar{A}_k + \bar{A}_{N-k} + \bar{A}_{N+k} + \bar{A}_{2N-k} + \bar{A}_{2N+k} + \dots, \\ B_k &= \bar{B}_k - \bar{B}_{N-k} + \bar{B}_{N+k} - \bar{B}_{2N-k} + \bar{B}_{2N+k} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.1.44)$$

$(k = 1, 2, \dots, n).$

Отсюда видно, что если коэффициенты Фурье убывают по мере возрастания номера довольно быстро, то при небольших  $k$

$$A_0 \approx \bar{A}_0, \quad A_k \approx \bar{A}_k, \quad B_k \approx \bar{B}_k.$$

2. Пусть узлы  $t_1, \dots, t_N$  расположены произвольно, но период исследуемой функции  $f(t)$  известен и равен  $T$ . Тогда аппроксимирующий полином Фурье (7.1.40) и условие минимума величины  $S$ , как условие для нахождения коэффициентов  $A_0, A_k, B_k$ , остаются без изменений. Пусть при этом  $N$  значительно больше, чем  $2n + 1$ . Тогда коэффициенты  $A_0, A_k, B_k$  определяются из системы так называемых условных уравнений

$$A_0 + \sum_{k=1}^n \left( A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t_j + B_k \sin \frac{2\pi k}{T} t_j \right) = f(t_j) \quad (7.1.45)$$

$(j = 1, 2, \dots, N),$

решаемых по методу наименьших квадратов (см. гл. 4).

### § 1.11. Аппроксимация условно-периодических функций с известными частотами полиномом Фурье по методу наименьших квадратов

Пусть значения функции  $f(t)$  заданы в произвольных узлах  $t_1, \dots, t_N$  и известно, что  $f(t)$  — условно-периодическая функция с несколькими, например, тремя, определенными частотами

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Аппроксимирующий полином Фурье ищется в виде

$$F(t) = \sum_{|k|+|j|+|m|=0}^n [A_{kjm} \cos(k\omega_1 + j\omega_2 + m\omega_3)t + B_{kjm} \sin(k\omega_1 + j\omega_2 + m\omega_3)t]. \quad (7.1.46)$$

Количество узлов должно значительно превышать общее количество искоемых коэффициентов  $A_{kjm}, B_{kjm}$ . Эти коэффициенты ищутся тогда из условных уравнений

$$\sum [A_{kjm} \cos(k\omega_1 + j\omega_2 + m\omega_3)t_s + B_{kjm} \sin(k\omega_1 + j\omega_2 + m\omega_3)t_s] = f(t_s) \quad (7.1.47)$$

$(s = 1, 2, \dots, N)$

по методу наименьших квадратов.

### § 1.12. Определение неизвестных частот периодической или условно-периодической функции по совокупности табличных данных

В астрономии часто встречается следующая задача.

Пусть на основании наблюдений или вычислений получены значения функции  $f(t)$  для большого количества равноотстоящих значений  $t_1, \dots, t_{2N+1}$  аргумента  $t$  с шагом  $h$ , и изменение этой функции носит колебательный характер. Требуется аппроксимировать ее тригонометрическим полиномом вида (7.1.46), в котором неизвестны не только коэффициенты, но и частоты и, кроме того, неизвестно само количество частот.

Прежде всего ставится задача об определении частот. Излагаемая ниже методика описана в [10].

Перейдем к новому аргументу  $\theta$  по формуле  $\theta = (t - t_1)/h - N$ , чтобы точкам  $t_1, \dots, t_{2N+1}$  соответствовали точки

$$\theta = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N - 1, N.$$

Обозначим искомые частоты по аргументу  $\theta$  через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , причем предположим, что все  $\alpha_j < \pi$ . Так как частоты по аргументу  $t$  равны  $\omega_j = \alpha_j/h$ , то из  $\alpha_j < \pi$  вытекает  $2h < 2\pi/\omega_j$ . Таким образом, условие  $\alpha_j < \pi$  соответствует требованию, чтобы шаг  $h$  таблицы значений функции  $f(t)$  не превышал половины периода  $T_j = 2\pi/\omega_j$ , соответствующего любой из частот  $\omega_j$ .

Табличные значения функции  $f(t)$ , отвечающие значениям аргумента  $\theta = 0, \pm 1, \dots, \pm N$ , обозначим через  $f_k$  и  $f_{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ). Вычислим величины

$$u_k = f_k + f_{-k}, \quad v_k = f_k - f_{-k} \quad (k = 0, 1, \dots, N),$$

составляющие  $N + 1$  значений функций

$$u(\theta) = \bar{f}(\theta) + \bar{f}(-\theta), \quad v(\theta) = \bar{f}(\theta) - \bar{f}(-\theta), \quad (7.1.48)$$

где  $\bar{f}(\theta) = f(t(\theta))$ . Рассмотрим далее функции

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{1}{2} u_0 + \sum_{j=1}^{N-1} u_j \cos \frac{\pi}{N} jp + \frac{1}{2} u_N \cos \pi p, \\ \Phi_2(p) &= \sum_{j=1}^N v_j \sin \frac{\pi}{N} jp \end{aligned} \right\} \quad (7.1.49)$$

аргумента  $p$  на отрезке  $0 \leq p \leq N$ . Эти функции представляют собой приближенные выражения косинус- и синус-преобразования Фурье функций  $u(\theta)$  и  $v(\theta)$  соответственно. Определяются точки  $p_1, p_2, \dots$ , соответствующие максимумам функций  $\Phi_1(p)$  и  $\Phi_2(p)$  (эти точки максимума должны для обеих функций совпадать). Искомые частоты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  равны

$$\alpha_j = \frac{\pi}{N} p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $n$  — число найденных максимумов.

Практически удобно составить последовательности  $a_k = \Phi_1(k)$  и  $b_k = \Phi_2(k)$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) значений функций  $\Phi_1(p)$ ,  $\Phi_2(p)$  при целых  $p$  и выделить наибольшие (пиковые) значения этих функций или непосредственно, если они совпадают с некоторыми из  $a_k$  и  $b_k$ , или с помощью интерполирования.

Частоты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , определяемые по обеим последовательностям  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$ , должны совпадать между собой в пределах той или иной точности.

После того как  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  найдены, возвращаемся к исходной переменной  $t$  и записываем искомый аппроксимирующий полином Фурье в виде

$$F(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t),$$

где  $\omega_k = \alpha_k/h$ . В этом выражении частоты  $\omega_1, \dots, \omega_n$  уже известны и требуется найти коэффициенты  $A_0, \dots, B_n$  по заданным  $1 + 2N$  значениям функции  $f(t)$  в узлах  $t_1, \dots, t_{2N+1}$ . Это выполняется точно так же, как указано в § 1.10.

Частоты  $\omega_1, \dots, \omega_n$  могут оказаться все точно или с очень небольшими отклонениями кратными одной и той же частоте  $\omega$ . Тогда, положив  $T = 2\pi/\omega$ , получим обычный полином Фурье для функции периода  $T$ . В ином случае следует попытаться пред-

ставить все  $\omega_1, \dots, \omega_n$  как линейные комбинации нескольких (двух, трех, четырех) различных частот.

В [14] указывается другой способ нахождения неизвестных частот по заданной совокупности значений функции  $f(\theta)$ :

$$f_k = f(k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

при целых значениях  $\theta = 0, 1, \dots, N-1$  нормированной переменной  $\theta$ .

Выбирается число  $n (\leq N/3)$ , соответствующее длине искомого аппроксимирующего полинома

$$F(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos \omega_k \theta + B_k \sin \omega_k \theta)$$

и равное количеству искомых частот  $\omega_1, \dots, \omega_n$  в этом полиноме. Рассматривается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} [f(i) + f(2n+i-2)]a_1 + \dots + [f(i+n-2) + f(n+i)]a_{n-1} + \\ + f(i+n-1)a_n - f(i-1) - f(2n+i-1) = 0 \quad (7.1.50) \\ (i = 1, 2, \dots, N-2n) \end{aligned}$$

относительно  $a_1, \dots, a_n$ . Предпочтительно иметь большое число  $N$  табличных значений функции  $f(\theta)$ , выбрать умеренное  $n$ , значительно меньшее  $N/3$ , и решать систему (7.1.50) методом наименьших квадратов (см. гл. 4).

После того как  $a_1, \dots, a_n$  найдены, рассматривают тригонометрическое уравнение

$$\cos n\omega - a_1 \cos(n-1)\omega - \dots - a_{n-1} \cos \omega - \frac{1}{2} a_n = 0. \quad (7.1.51)$$

Если выразить косинусы углов, кратных  $\omega$ , через степени  $\cos \omega$ , то (7.1.51) примет вид алгебраического уравнения  $n$ -й степени относительно  $y = \cos \omega$ . Корни  $y_1, \dots, y_n$  этого уравнения определяют  $n$  искомых частот  $\alpha_k = \arccos y_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) функции  $f(\theta)$  нормированной переменной  $\theta$ .

### § 1.13. Выделение «вековой части» функции по совокупности табличных значений

В небесной механике имеют, как правило, дело с функциями двух типов: 1) функции, описывающие одно- или многочастотные колебания и представимые полиномами Фурье, которые были рассмотрены выше; 2) функции, обнаруживающие, кроме подобных колебаний, также изменения, пропорциональные времени (независимому аргументу). Особенно важен случай, когда эти изменения относительно малы и представляют собой так называемые вековые возмущения.

К функциям первого рода относятся, например, оскулирующие большая полуось и эксцентриситет орбиты планеты.

К функциям второго рода — оскулирующие долгота узла и долгота перигелия орбиты.

При анализе совокупности табличных значений функций второго рода ставится задача об аппроксимации этих функций функциями вида

$$F(t) = A_0 + B_0 t + \tilde{F}(t), \quad (7.1.52)$$

где  $F(t)$  — обычный тригонометрический полином с одной или несколькими частотами без свободного члена, а  $A_0 + B_0 t$  — линейная часть функции  $F(t)$  — свободный член  $A_0$  плюс вековая часть  $B_0 t$ .

а) Следуя [5], укажем методику определения  $A_0$  и  $B_0$ .

Пусть  $f_k = \tilde{f}(t_k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) — заданные табличные значения функции  $\tilde{f}(t)$ . Составляем соотношения

$$A_0 + B_0 t_k = f_k \quad (k = 1, \dots, N), \quad (7.1.53)$$

представляющие собой условные уравнения (см. гл. 4) относительно неизвестных  $A_0, B_0$ . Решение уравнений ищется по методу наименьших квадратов (см. гл. 4), что приводит к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k, & B_0 &= \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t}) f_k \left/ \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2 \right., \\ \bar{t} &= \frac{1}{N} (t_1 + \dots + t_N). \end{aligned} \right\} \quad (7.1.54)$$

При таком выборе  $A_0, B_0$  линейная функция  $A_0 + B_0 t$  соответствует табличным значениям  $f_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) в среднем. Разности

$$f(t_k) - A_0 - B_0 t_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

рассматриваются как совокупность табличных значений новой функции  $\tilde{f}(t)$ , которую следует аппроксимировать тригонометрическим полиномом  $F(t)$ .

б) В [15] предложена другая методика выделения линейной части функции  $f(t)$ . А именно, рассматривается график этой функции и подбирается графически такая прямая  $y = A_0 + B_0 t$  и такие примерно равноотстоящие точки  $t_0, t_1, t_2$ , что

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(t) - A_0 - B_0 t) dt = \int_{t_0}^{t_2} (f(t) - A_0 - B_0 t) dt = 0.$$

При этом равенство нулю этих интегралов проверяется с помощью оценок соответствующих площадей на рисунке с графиком функции  $f(t)$  и с прямой  $y = A_0 + B_0 t$ . В [15] достигается точность определения  $A_0$  до  $1^\circ$  и  $B_0$  до  $0^\circ,05$  при принятой единице времени, равной одному году.

## ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Численным дифференцированием и интегрированием называются операции по нахождению производных и определенных интегралов от функции при условии использования только таблицы ее значений, которая или задается (если мы имеем дело с табличной функцией) или может быть вычислена.

Методы численного дифференцирования и интегрирования основаны на приближенном представлении функций с помощью или интерполяционных полиномов или других аппроксимирующих формул, рассмотренных в гл. 1. Литература по этому вопросу весьма обширна (см. библиографию в [9], [16]). Мы ограничимся в этой главе основными результатами, представляющими наибольший практический интерес.

### § 2.01. Численное дифференцирование с помощью интерполяционных формул

Пусть имеется таблица значений функции  $f(t)$  с равноотстоящими узлами, и пусть составлена таблица вида 81 ее разностей. Формулы для производных от  $f(t)$  получаются дифференцированием интерполяционных формул для этой функции.

Дифференцируя формулы Ньютона для интерполяции вперед, Стирлинга и Бесселя (при этом  $df/dt = hdf/dq$ ), получим соответственно следующие выражения производных в точках  $t = t_0 + qh$  ( $0 \leq q < 1$ ) вблизи узла  $t_0$ :

$$f'(t_0 + qh) = \frac{1}{h} \left[ f_{1/2}^1 + \frac{2q-1}{2!} f_1^2 + \frac{3q^2-6q+2}{3!} f_{3/2}^3 + \dots \right], \quad (7.2.01)$$

$$f'(t_0 + qh) = \frac{1}{h} \left[ f_0^1 + qf_0^2 + \frac{3q^2-1}{3!} f_0^3 + \frac{4q^3-2q}{4!} f_0^4 + \dots \right], \quad (7.2.02)$$

$$f'(t_0 + qh) = \frac{1}{h} \left[ f_{1/2}^1 + \frac{2q-1}{2!} f_{1/2}^2 + \frac{3q^2-3q+\frac{1}{2}}{3!} f_{1/2}^3 + \dots \right]. \quad (7.2.03)$$

Из формулы Ньютона для интерполяции назад получим

$$f'(t_0 + qh) = \frac{1}{h} \left[ f_{-1/2}^1 + \frac{2q+1}{2!} f_{-1}^2 + \frac{3q^2+6q+2}{3!} f_{-3/2}^3 + \dots \right] \\ (-1 < q \leq 0). \quad (7.2.04)$$

Для вторых производных  $f''(t)$  имеют место следующие выражения, получаемые аналогичным образом:

$$f''(t_0 + qh) = \frac{1}{h^2} \left[ f_1^2 + \frac{6q-6}{3!} f_{3/2}^3 + \frac{12q^2-36q+22}{4!} f_2^4 + \dots \right], \quad (7.2.05)$$

$$f''(t_0 + qh) = \frac{1}{h^2} \left[ f_0^2 + q f_0^3 + \frac{12q^2-2}{4!} f_0^4 + \dots \right], \quad (7.2.06)$$

$$f''(t_0 + qh) = \frac{1}{h^2} \left[ f_{1/2}^2 + \frac{6q-3}{3!} f_{1/2}^3 + \frac{12q^2-12q-2}{4!} f_{1/2}^4 + \dots \right], \quad (7.2.07)$$

$$f''(t_0 + qh) = \frac{1}{h^2} \left[ f_{-1}^2 + \frac{6q+6}{3!} f_{-3/2}^3 + \frac{12q^2+36q+22}{4!} f_{-2}^4 + \dots \right]. \quad (7.2.08)$$

Часто используют формулы для производных в узле  $t_0$ . Они получаются из приведенных выше (частично используем более далекие члены) при  $q = 0$ .

Из формул Ньютона для интерполяции вперед:

$$f'(t_0) = \frac{1}{h} \left[ f_{1/2}^1 - \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{3} f_{3/2}^3 - \frac{1}{4} f_2^4 + \dots \right], \quad (7.2.09)$$

$$f''(t_0) = \frac{1}{h} \left[ f_1^2 - f_{3/2}^3 + \frac{11}{12} f_2^4 - \dots \right]. \quad (7.2.10)$$

Из формул Ньютона для интерполяции назад:

$$f'(t_0) = \frac{1}{h} \left[ f_{-1/2}^1 + \frac{1}{2} f_{-1}^2 + \frac{1}{3} f_{-3/2}^3 + \frac{1}{4} f_{-2}^4 + \dots \right], \quad (7.2.11)$$

$$f''(t_0) = \frac{1}{h} \left[ f_{-1}^2 + f_{-3/2}^3 + \frac{11}{12} f_{-2}^4 + \dots \right]. \quad (7.2.12)$$

Из формулы Стирлинга:

$$f'(t_0) = \frac{1}{h} \left[ f_0^1 - \frac{1}{6} f_0^3 + \frac{1}{30} f_0^5 - \frac{1}{140} f_0^7 + \dots \right], \quad (7.2.13)$$

$$f''(t_0) = \frac{1}{h^2} \left[ f_0^2 - \frac{1}{12} f_0^4 + \frac{1}{90} f_0^6 - \dots \right]. \quad (7.2.14)$$

Из формулы Бесселя:

$$f'(t_0) = \frac{1}{h} \left[ f_{1/2}^1 - \frac{1}{2} f_{1/2}^2 + \frac{1}{12} f_{1/2}^3 + \frac{1}{12} f_{1/2}^4 + \dots \right], \quad (7.2.15)$$

$$f''(t_0) = \frac{1}{h^2} \left[ f_{1/2}^2 - \frac{1}{2} f_{1/2}^3 - \frac{1}{12} f_{1/2}^4 + \dots \right]. \quad (7.2.16)$$

Формулы численного дифференцирования можно вывести, дифференцируя формулу Лагранжа (в случае равноотстоящих узлов). Тогда получаем выражения для производных, содержащие остаточный член. Значения производных выражаются в этом случае через значения функции  $f(t)$  в узлах.

Наиболее употребительны следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} f'(t_1) &= \frac{1}{2h} (f_2 - f_0) - \frac{h^2}{6} f'''(\bar{t}), \\ f'(t_2) &= \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\bar{t}), \\ f''(t_1) &= \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\bar{t}), \\ f''(t_2) &= \frac{1}{24h^2} (-2f_0 + 32f_1 - 60f_2 + 32f_3 - 2f_4) + \frac{h^4}{90} f^{(6)}(\bar{t}), \end{aligned} \right\} \quad (7.2.17)$$

где остаточные члены выражены через производные функции  $f'''$ ,  $f^{(4)}$ ,  $f^{(5)}$ ,  $f^{(6)}$  в некоторых промежуточных точках  $\bar{t}$ , а  $f_h = f(t_h)$ .

### § 2.02. Другие формулы численного дифференцирования

Формулы для производных находятся также при дифференцировании аппроксимирующей функции  $F(t)$ , полученной по методу наименьших квадратов (см. § 1.07). Такие формулы учитывают сглаживание узловых значений функции  $f(t)$ , так что они меньше зависят от возможных ошибок этих узловых значений. Приведем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} f'(t_0) &= \frac{1}{10h} (-2f_{-2} - f_{-1} + f_1 + 2f_2), \\ f'(t_0) &= \frac{1}{12h} (f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.18)$$

Последняя формула совпадает со второй формулой из (7.2.17).

Если функция аппроксимирована полиномом Фурье  $F(t)$  (7.1.40), то имеет место следующая приближенная формула для производной  $f'(t)$ :

$$f'(t) \approx \left[ F\left(t + \frac{T}{2n}\right) - F\left(t - \frac{T}{2n}\right) \right] / \frac{T}{n}. \quad (7.2.19)$$



Приведем еще одну формулу, выражающую производную через интеграл:

$$f'(t) = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} xf(t+x) dx \quad (7.2.20)$$

и справедливую, во всяком случае, если функция  $f(t)$  разлагается в окрестности точки  $t$  в ряд Тейлора. Отсюда вытекает следующая приближенная формула:

$$f'(t) \approx \frac{3}{2\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} xf(t+x) dx. \quad (7.2.21)$$

### § 2.03. Численное интегрирование функции по таблице ее значений с постоянным шагом

Формулы для вычисления определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(t) dt \quad (7.2.22)$$

с помощью таблицы значений подынтегральной функции  $f(t)$  называются *квадратурными формулами*. Наиболее простые из них получаются, если имеется таблица значений  $f(t)$  в равноотстоящих узлах. Это — формулы Ньютона — Котеса, выводимые путем замены функции  $f(t)$  ее интерполяционным полиномом Лагранжа и последующего буквенного интегрирования.

1. Обозначим

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + kh, & k &= 0, 1, \dots, n, & h &= (b-a)/n, \\ t_0 &= a, & t_n &= b, & f(t_k) &= f_k. \end{aligned}$$

Общий вид формул Ньютона — Котеса следующий:

$$I \approx \sum_{k=0}^n A_k f_k, \quad (7.2.23)$$

где  $A_k = (b-a)H_k$  и числа  $H_k$ , не зависящие от  $a$ ,  $b$  и функции  $f(t)$ , называются *числами Котеса*. Формула (7.2.23) при фиксированном  $n$  точная, т. е. знак  $\approx$  заменяется на  $=$ , если  $f(t)$  — полином степени  $n$  или ниже при  $n$  нечетном и степени  $n+1$  или ниже при  $n$  четном.

При  $n=1$  (7.2.23) совпадает с формулой трапеций

$$I \approx \frac{b-a}{2} (f_0 + f_1), \quad (7.2.24)$$

при  $n = 2$  — с формулой Симпсона

$$I \approx \frac{b-a}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2). \quad (7.2.25)$$

При  $n = 4$  имеем

$$I \approx \frac{b-a}{90} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \quad (7.2.26)$$

и при  $n = 6$

$$I \approx \frac{b-a}{840} (41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6). \quad (7.2.27)$$

Теоретические оценки остаточных членов  $R_n$  ( $n = 1, 2, 4, 6$ ) этих формул, т. е. разностей между точным значением  $I$  и правой частью (7.2.23) при указанных  $n$ , следующие:

$$\left. \begin{aligned} |R_1| &\leq \frac{h^3}{12} M_2, & |R_2| &\leq \frac{h^5}{90} M_4, \\ |R_4| &\leq \frac{8}{945} h^7 M_6, & |R_6| &\leq \frac{9}{1400} h^9 M_8, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.28)$$

где  $M_n$  — верхняя граница абсолютной величины производной  $f^{(n)}(t)$ .

Формулы Ньютона — Котеса при  $n = 3, 5$  менее выгодны с точки зрения величины оценки их остаточных членов. При больших  $n$  эти формулы неудобны из-за того, что коэффициенты  $H_k$  велики и имеют чередующиеся знаки.

2. Широко применяются обобщенные формулы трапеций и Симпсона, получающиеся, если интервал  $(a, b)$  разбить на  $n$  частей равноотстоящими узлами  $t_1, \dots, t_n$  с шагом  $h$  и к каждому малому интервалу  $(t_k, t_{k+1})$  применить формулу (7.2.24) или к каждой паре интервалов  $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2})$  (тогда  $n$  четное) применить формулу Симпсона (7.2.25). Тогда

$$I \approx h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) \quad (7.2.29)$$

или

$$I \approx \frac{h}{3} [(f_0 + f_n) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2})]. \quad (7.2.30)$$

Оценки остаточных членов этих формул

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad |R| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 \quad (7.2.31)$$

соответственно.

### § 2.04. Квадратурные формулы Гаусса

1. Пусть имеется интеграл (7.2.22) и  $n$  узлов  $t_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), в которых вычисляются значения  $f_k(t_k)$ , могут быть выбраны произвольно. Ставится задача подобрать эти  $n$  узлов так, чтобы приближенная формула

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k f_k \quad (7.2.32)$$

становилась точной при соответствующих коэффициентах (не зависящих от  $f(t)$ ), если  $f(t)$  — полином как можно более высокой степени  $N$ . Тогда (7.2.32) называется *формулой Гаусса* или *квадратурной формулой*, имеющей наивысшую алгебраическую степень точности. При этом показывается, что  $N = 2n - 1$ . (Алгебраическая степень точности формул Ньютона — Котеса при  $n + 1$  узлах равна  $n + 1$  или  $n$ .)

Формула Гаусса непосредственно выписывается для интеграла с нормированным интервалом интегрирования  $(-1, 1)$ :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k f(t_k), \quad (7.2.33)$$

где  $t_1, \dots, t_n$  — нули полинома Лежандра  $P_n(t)$ . Коэффициенты  $A_k$  все положительные и определяются в зависимости от  $t_1, \dots, t_n$  по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1 - t_k^2) [P_n'(t_k)]^2}. \quad (7.2.34)$$

Полином Лежандра  $P_n(t)$  выражается формулой

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]. \quad (7.2.35)$$

Его нули равны при  $n = 3$ :

$$\begin{aligned} -t_1 = t_3 = 0,774597, & \quad t_2 = 0, \\ A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, & \quad A_2 = \frac{8}{9}, \end{aligned}$$

при  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} -t_1 = t_4 = 0,861136, & \quad -t_2 = t_3 = 0,339981, \\ A_1 = A_4 = 0,347855, & \quad A_2 = A_3 = 0,652145, \end{aligned}$$

при  $n = 8$ :

$$\begin{aligned} -t_1 = t_8 = 0,960290, & \quad A_1 = A_8 = 0,101229, \\ -t_2 = t_7 = 0,796666, & \quad A_2 = A_7 = 0,222381, \\ -t_3 = t_6 = 0,525532, & \quad A_3 = A_6 = 0,313707, \\ -t_4 = t_5 = 0,183435, & \quad A_4 = A_5 = 0,362684. \end{aligned}$$

Подробные таблицы с коэффициентами  $A_k$  и узлами  $t_k$  формул Гаусса при  $n \leq 48$  имеются в [16].

Для интеграла на произвольном интервале интегрирования  $(a, b)$  формула Гаусса имеет вид

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(u_k), \quad (7.2.36)$$

где  $u_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$  и  $A_k, t_k$  — те же, что и в (7.2.33)

Формулы Гаусса являются часто наиболее эффективными, т. е. позволяют вычислять интеграл на произвольном интервале интегрирования с заданной точностью при минимальном числе узлов (более подробно об оптимальном выборе квадратурной формулы см. в [9]).

Оценка остаточного члена  $R_n$  формулы Гаусса (7.2.36) имеет вид

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} M_{2n}, \quad (7.2.37)$$

где  $M_{2n}$  — верхняя граница абсолютной величины производной  $f^{(2n)}(t)$ .

2. Формула Гаусса обобщается на интегралы вида

$$I = \int_a^b p(t) f(t) dt, \quad (7.2.38)$$

где  $p(t)$  — *весовая функция* (положительная и интегрируемая).  
Интегралы с весовой функцией

$$p(t) = (t-a)^\alpha (b-t)^\beta,$$

где  $\alpha, \beta$  — произвольные вещественные числа, называются *интегралами Якоби*. Общий вид квадратурной формулы типа Гаусса (т. е. имеющей алгебраическую степень точности  $2n-1$  при  $n$  узлах) для интегралов Якоби в случае нормированного интервала интегрирования  $(-1, 1)$  следующий [16]:

$$\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k f(t_k), \quad (7.2.39)$$

где  $t_1, \dots, t_n$  — нули полинома Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{n!2^n} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}] \quad (7.2.40)$$

и коэффициенты  $A_k$  выражаются формулой

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (1-t_k^2) [dP_n^{(\alpha, \beta)}(t_k)/dt]^2}, \quad (7.2.41)$$

$\Gamma$  — гамма-функция Эйлера.

Имеются квадратурные формулы для ряда частных случаев (7.2.39) при различных  $\alpha, \beta$ .

При  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  имеем формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k f(t_k), \quad A_1 = \dots = A_n = \frac{\pi}{n}, \quad (7.2.42)$$

называемую *формулой Эрмита*. Узлы  $t_1, \dots, t_n$  в этой формуле являются нулями полинома Чебышева  $T_n(t)$  (см. § 1.07). Оценка остаточного члена следующая:

$$|R_n| \leq \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{1}{(2n)!} M_{2n}. \quad (7.2.43)$$

Приведем значения  $t_k$  при  $n = 3, 4, 5$ :

$$\begin{aligned} n=3, & \quad -t_1 = t_3 = 0,707107, & t_2 = 0, \\ n=4, & \quad -t_1 = t_4 = 0,794654, & -t_2 = t_3 = 0,187592, \\ n=5, & \quad -t_1 = t_5 = 0,832497, & -t_2 = t_4 = 0,374541, & t_3 = 0. \end{aligned}$$

Квадратурные формулы вида (7.2.42) с одинаковыми коэффициентами  $A_k$  носят название *формул Чебышева*.

Интересен частный случай интегралов Якоби при  $\beta = 0$ . Тогда замена переменной  $(1-t)/2 = x$  приводит к интегралу вида

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi(x) dx. \quad (7.2.44)$$

В [16] приводятся для такого интеграла значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  квадратурной формулы вида (7.2.39) при различных  $n \leq 8$  и  $\alpha$  от  $-0,9$  до  $5$ .

Например, при  $n = 4, 8$  и  $\alpha = -0,5$  имеем

$$\begin{aligned}
 n = 4 & \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 0,0336483, & A_1 = 0,725368, \\ x_2 = 0,276184, & A_2 = 0,627413, \\ x_3 = 0,634677, & A_3 = 0,444762, \\ x_4 = 0,922157, & A_4 = 0,202457, \end{array} \right. \\
 n = 8 & \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 0,00902738, & A_1 = 0,378901, \\ x_2 = 0,0793006, & A_2 = 0,365207, \\ x_3 = 0,209779, & A_3 = 0,338313, \\ x_4 = 0,381771, & A_4 = 0,299192, \\ x_5 = 0,570636, & A_5 = 0,249258, \\ x_6 = 0,749317, & A_6 = 0,190317, \\ x_7 = 0,892222, & A_7 = 0,124507, \\ x_8 = 0,978914, & A_8 = 0,0543049. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

**§ 2.05. Численное интегрирование сильно осциллирующих функций**

Пусть требуется вычислить интегралы

$$I_1 = \int_a^b f(t) \cos \omega t dt, \quad I_2 = \int_a^b f(t) \sin \omega t dt, \quad (7.2.45)$$

где  $\omega$  достаточно велико, интервал  $(a, b)$  значительно больше  $\pi/\omega$  и подынтегральная функция имеет на интервале  $(a, b)$  много нулей, т. е. сильно *осциллирует*. Квадратурные формулы, рассмотренные в предыдущих параграфах, если не разбивать интервал  $(a, b)$  на очень большое число частей, значительно теряют в данном случае свою точность. Метод построения квадратурных формул для интегралов (7.2.45) состоит в том, что функция  $f(t)$  аппроксимируется алгебраическим полиномом  $p_n(t)$  некоторой степени  $n$ , а получающиеся после этого функции  $p_n(t) \cos \omega t$ ,  $p_n(t) \sin \omega t$  интегрируются буквенно. Возможно также сначала разбить весь интервал  $(a, b)$  на большое число частей и аппроксимировать  $f(t)$  в каждом малом интервале своим полиномом. При разбиении  $(a, b)$  на  $n = 2N$  частей и аппроксимации  $f(t)$  в каждой паре интервалов квадратным трехчленом (некоторый аналог обобщенной формулы Симпсона) получены следующие формулы (см. [9], [11]):

$$I_1 \approx h [\alpha (f_n \sin \omega t_n - f_0 \sin \omega t_0) + \beta C_1 + \gamma C_2], \quad (7.2.46)$$

$$I_2 \approx h [\alpha (f_0 \cos \omega t_0 - f_n \cos \omega t_n) + \beta S_1 + \gamma S_2], \quad (7.2.47)$$

где

$$\alpha = (p^2 + p \sin p \cos p - 2 \sin^2 p)/p^3 = \frac{2}{45} p^3 - \frac{2}{315} p^5 + \dots,$$

$$\beta = (4 \sin p - 4p \cos p)/p^3 = \frac{4}{3} - \frac{2}{15} p^2 + \frac{1}{210} p^4 + \dots,$$

$$\gamma = 2(p + p \cos^2 p - 2 \sin p \cos p)/p^3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} p^2 + \frac{4}{105} p^4 + \dots,$$

$$C_1 = f_1 \cos \omega t_1 + f_3 \cos \omega t_3 + \dots + f_{n-1} \cos \omega t_{n-1},$$

$$C_2 = \frac{1}{2} f_0 \cos \omega t_0 + f_2 \cos \omega t_2 + \dots + f_{n-2} \cos \omega t_{n-2} + \frac{1}{2} f_n \cos \omega t_n,$$

( $S_1$  и  $S_2$  — аналогичные суммы для  $f(t) \sin \omega t$  и

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad p = \omega h, \quad t_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n, \quad t_0 = a, \quad t_n = b$$

$n$  — четное число).

### § 2.06. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул

Теоретические оценки остаточных членов квадратурных формул, приводившиеся выше, требуют составления и анализа производных подынтегральной функции. Применение этих оценок при конкретных вычислениях оказывается возможным лишь в редких случаях. Практически эффективным является следующий прием, носящий название *правила Рунге* (см. [3], [9]).

Пусть интеграл (7.2.22) вычислен два раза по одной и той же квадратурной формуле с использованием сначала  $n$ , а затем  $m > n$  узлов, так что

$$I = S_1 + R_n = S_2 + R_m,$$

где  $S_1$ ,  $S_2$  — соответственно вычисленные приближенные значения интеграла  $I$ , а  $R_n$  и  $R_m$  — соответствующие остаточные члены. Как следует из теоретических оценок, эти остаточные члены пропорциональны по своей величине  $(1/n)^k$  и  $(1/m)^k$  соответственно, где  $k$  зависит от  $n$  и типа квадратурной формулы. Тогда согласно правилу Рунге

$$|R_m| = \frac{|S_2 - S_1|}{1 - (n/m)^k}. \quad (7.2.48)$$

Эта формула дает достаточно надежное значение ошибки, если во всяком случае  $m$  значительно больше  $n$  (например,  $m \geq 2n$ ).

### § 2.07. Квадратурные формулы для несобственных интегралов

1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int_0^b f(t) dt, \quad (7.2.49)$$

в котором подынтегральная функция  $f(t)$  терпит при  $t=b$  бесконечный разрыв. Квадратурная формула строится с помощью выделения в  $f(t)$  множителя, который обуславливает обращение  $f(t)$  в бесконечность при  $t=b$  или указывает на порядок величины  $f(t)$  при  $t \rightarrow b - 0$ . Как правило, можно положить

$$f(t) = \varphi(t)/(b-t)^k \quad (0 < k < 1), \quad (7.2.50)$$

где функция  $\varphi(t)$  конечна на всем отрезке  $[0, b]$ . Тогда интеграл (7.2.49) записывается в виде

$$I = \int_0^b (b-t)^{-k} \varphi(t) dt, \quad (7.2.51)$$

и множитель  $(b-t)^{-k}$  рассматривается как весовая функция типа Якоби. Квадратурную формулу для этого интеграла можно строить исходя из (7.2.39) или непосредственно, аппроксимируя  $\varphi(t)$  соответствующим полиномом. Формула Эрмита (7.2.42) является одним из примеров подобного рода.

Можно также выполнить предварительно подстановку  $t/b = 1 - x$ , которая приводит к вычислению интеграла

$$I = b^{-k+1} \int_0^1 x^{-k} \varphi[b(1-x)] dx, \quad (7.2.52)$$

г. е. интеграла вида (7.2.44) при  $-1 < \alpha < 0$ , для которого имеются таблицы коэффициентов и узлов квадратурной формулы.

2. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} f(t) dt, \quad (7.2.53)$$



в котором  $f(t)$  убывает при  $t \rightarrow \infty$  как некоторая степень  $t^{-k}$  ( $k > 1$ ) и может быть представлена в виде

$$f(t) = \varphi(t)/(1+t)^k, \quad k > 1, \quad (7.2.54)$$

где функция  $\varphi(t)$  ограничена на всей полуоси  $0 < t < \infty$ .

После подстановки  $1+t = 1/x$  приходим к интегралу

$$I = \int_0^1 x^{k-2} \varphi\left(\frac{1-x}{x}\right) dx. \quad (7.2.55)$$

Таким образом, мы приходим к вычислению интеграла вида (7.2.44) при  $\alpha > -1$ .

Более подробно о квадратурных формулах для несобственных интегралов см. в [16].

## Глава 3

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесных тел получили очень большое распространение в связи с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ). С помощью этих методов можно получить таблицы численных значений координат небесных тел (или оскулирующих элементов их орбит) на различные моменты времени.

В 1951 г. в США были опубликованы построенные таким путем таблицы координат пяти внешних планет (Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна) на период с 1653 по 2060 г. [17]. В 1950 и 1962 гг. в США были опубликованы таблицы координат малых планет Цереры, Паллады, Юноны, Весты [18].

В Институте теоретической астрономии АН СССР (ИТА) регулярно публикуются *эфемериды малых планет*, получаемые при помощи численного интегрирования.

Очень широко применяется численное интегрирование при изучении движения комет и особенно в астродинамике для решения различных задач, относящихся к движению искусственных небесных тел. При этом важное практическое значение имеют так называемые краевые задачи.

Чаще всего рассматривают уравнения движения в прямоугольных координатах ввиду простоты их правых частей. Тогда обычно имеют дело с системой уравнений вида

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = F_s(x_1, \dots, x_n, t) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (7.3.01)$$

где  $F_s(x_1, \dots, x_n, t)$  — известные функции переменных  $x_1, \dots, x_n$  и времени  $t$ . Значительно реже рассматривают уравнения относительно оскулирующих элементов орбит. В этом случае рассматривается система уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(x_1, \dots, x_n, t) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (7.3.02)$$

однако правые части оказываются значительно сложнее.

Большинство методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений рассчитано на системы вида (7.3.02). При их применении к системам вида (7.3.01) последние приводят к виду (7.3.02) заменой переменных

$$x_1 = y_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = y_2, \quad x_2 = y_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = y_4, \quad \dots$$

Имеются также методы, разработанные именно для систем вида (7.3.01).

### § 3.01. Метод Рунге — Кутта

Метод Рунге — Кутта непосредственно рассчитан на интегрирование систем вида (7.3.02); он наиболее удобен при применении ЭВМ. Для того чтобы начать вычисления, достаточно знать лишь начальные значения  $x_{s0} = x_s(t_0)$  искомых функций.

Приведем сначала формулы для случая одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (7.3.03)$$

Пусть дано начальное значение  $x_0 = x(t_0)$  и требуется вычислить значения  $x(t)$  при  $t_k = t_0 + kh$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Число  $h$  называется *шагом интегрирования*.

Если обозначить

$$x(t_k) = x_k, \quad hF(x, t) = f(x, t),$$

то формулы, определяющие  $x_1$  по заданному  $x_0$  с точностью до членов порядка  $h^4$ , следующие:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x_0, & \Delta x_0 &= \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3), \\ k_1 &= f(x_0, t_0), & k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{3}k_1, t_0 + \frac{1}{3}h\right), \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{2}{3}k_2, t_0 + \frac{2}{3}h\right). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.04)$$

Формулы для  $\Delta x_0$ , имеющие погрешность порядка  $h^5$  (эти формулы наиболее употребительны при вычислениях на ЭВМ), следующие:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_0, t_0), & k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1, t_0 + \frac{1}{2}h\right), \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}k_2, t_0 + \frac{1}{2}h\right), & k_4 &= f(x_0 + k_3, t_0 + h). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.05)$$

По формулам, аналогичным приведенным, вычисляются последовательно  $x_2, x_3, \dots$  и т. д.

Для контроля точности применяют вычисления с половинным шагом. А именно, вычисляют  $x_1$  по приведенным формулам с шагом, равным  $h$ , а затем с шагом, равным  $h/2$ . Разность между полученными двумя значениями  $x_1$  принимают за погрешность значения  $x_1$ , вычисленного с шагом  $h$ . Аналогичным образом контролируют далее точность значения  $x_2$  и т. д.

Имеются программы вычислений на ЭВМ с *автоматическим выбором шага* при заданной точности. В этом случае задается погрешность  $\delta$  (например,  $1 \cdot 10^{-6}$ ) и некоторый первоначальный шаг интегрирования  $h_0$ . ЭВМ вычисляет по такой программе  $x_1$  с шагом  $h_0$  и с шагом  $h_1 = h_0/2$  и сопоставляет полученные значения  $(x_1)_{h_0}$ ,  $(x_1)_{h_1}$ . Если разность между ними не превышает по абсолютной величине  $\delta$ , то ЭВМ переходит к вычислению  $x_2$  с шагом  $h_0$ . Если эта разность больше  $\delta$ , то ЭВМ выполняет вычисления значения  $x_1$  с шагом  $h_2 = h_1/2$ . Если  $|(x_1)_{h_1} - (x_2)_{h_2}| < \delta$ , то ЭВМ переходит к вычислению  $x_2$  с шагом  $h$ . Если это условие не выполнено, то ЭВМ вычисляет  $x_1$  с шагом  $h_3 = h_2/2$  и т. д.

Для системы уравнений вида (7.3.02) вычисления производятся параллельно для каждого уравнения по формулам, аналогичным (7.3.04) или (7.3.05).

Пусть дана система двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = \Phi(x, y, t) \tag{7.3.06}$$

и начальные условия  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . Обозначим

$$t_k = t_0 + kh, \quad hF(x, y, t) = f(x, y, t), \quad h\Phi(x, y, t) = g(x, y, t), \\ x(t_k) = x_k, \quad y(t_k) = y_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Формулы, определяющие  $x_1$ ,  $y_1$ , например, с точностью до членов порядка  $h^4$ , следующие:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x_0, & y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ \Delta x_0 &= \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3), & \Delta y_0 &= \frac{1}{4}(l_1 + 3l_3), \\ k_1 &= f(x_0, y_0, t_0), & l_1 &= g(x_0, y_0, t_0), \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{3}k_1, y_0 + \frac{1}{3}l_1, t_0 + \frac{1}{3}h\right), \\ l_2 &= g\left(x_0 + \frac{1}{3}k_1, y_0 + \frac{1}{3}l_1, t_0 + \frac{1}{3}h\right), \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{2}{3}k_2, y_0 + \frac{2}{3}l_2, t_0 + \frac{2}{3}h\right), \\ l_3 &= g\left(x_0 + \frac{2}{3}k_2, y_0 + \frac{2}{3}l_2, t_0 + \frac{2}{3}h\right). \end{aligned} \right\} \tag{7.3.07}$$

По таким же формулам вычисляются далее  $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$  и т. д.

Системы уравнений (7.3.01) расписываются при применении указанных выше формул в виде систем уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_s}{dt} = y_s, \quad \frac{dy_s}{dt} = F_s(x_1, \dots, x_n, t) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (7.3.08)$$

Ввиду простоты правых частей первой группы уравнений (для  $x_5$ ) и независимости функций  $F_s$  от  $y_1, \dots, y_n$  формулы упрощаются.

При вычислениях по методу Рунге — Кутта значений искоемых функций при каждом последующем значении аргумента требуется вычислять несколько значений правых частей уравнений в некоторых промежуточных точках. Поэтому объем вычислений больше, чем при использовании *разностных методов* решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако метод Рунге — Кутта дает, вообще, большую точность, чем разностные методы. Из последних мы рассмотрим методы Адамса, Штермера, Коуэлла, так как они наиболее часто применяются в небесной механике.

### § 3.02. Метод Адамса

*Метод Адамса* является наиболее простым из разностных методов. Для того чтобы можно было начать вычисления, требуется, как и в случае применения любых разностных методов, знать значения неизвестных в нескольких равноотстоящих точках  $t_0, t_1, t_2, \dots$  (а не только в начальной точке  $t_0$ ).

Пусть дано, например, одно уравнение (7.3.03). Пусть известны значения  $x(t_0) = x_0, x(t_k) = x_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), причем  $t_k = t_0 + kh$ . (Эти значения целесообразно вычислить по методу Рунге — Кутта.) Составляется таблица разностей для функции  $f(x, t) = \dot{x} = F(x, t)$  по известным значениям  $x_k, f(x_k, t_k) = f_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) (табл. 82). Значение  $x(t_5) = x_5$  находится с помощью разложения решения  $x(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_4$ . Требующиеся для этого производные функции  $f(x, t)$  различных порядков в точке  $(x_4, t_4)$  выражаются с помощью формулы Ньютона для экстраполяции вперед. Это приводит к следующим выражениям:

$$x_5 = x_4 + \Delta x_4, \quad \Delta x_4 = f_4 + \frac{1}{2} f_{7/2}^1 + \frac{5}{12} f_3^2 + \frac{3}{8} f_{5/2}^2 + \frac{251}{720} f_2^4. \quad (7.3.09)$$

Далее вычисляют  $f(x_5, t_5) = f_5$  и разности  $f_{5/2}^1, f_4^2, f_{7/2}^3, f_3^4$ , а затем по таким же формулам  $x_6$  и т. д. Общая формула для вычисления  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, k \geq 4$  по известным  $f_k, f_{k-1}, \dots, f_{k-4}$

Таблица 82

$t$	$x$	$f$	$f'$	$f''$	$f'''$	$f^{(4)}$
$t_0$	$x_0$	$f_0$				
$t_1$	$x_1$	$f_1$	$f'_{1/2}$	$f''_1$		
$t_2$	$x_2$	$f_2$	$f'_{3/2}$	$f''_2$	$f'''_{3/2}$	$f^{(4)}_2$
$t_3$	$x_3$	$f_3$	$f'_{5/2}$	$f''_3$	$f'''_{5/2}$	
$t_4$	$x_4$	$f_4$	$f'_{7/2}$			
...	...	...	...	...	...	...

и соответствующим разностям (табл. 83) записывается в виде

$$\Delta x_k = f_k + \frac{1}{2} f'_{k-1/2} + \frac{5}{12} f''_{k-1} + \frac{3}{8} f'''_{k-3/2} + \frac{251}{720} f^{(4)}_{k-2}. \quad (7.3.10)$$

Более сложная формула, куда входят разности пятого и более высоких порядков, обычно не используется. Если требуется

Таблица 83

$t$	$x$	$f$	$f'$	$f''$	$f'''$	$f^{(4)}$
·	·	·				·
·	·	·				·
·	·	·				·
$t_{k-3}$	$x_{k-3}$	$f_{k-3}$		·	·	·
$t_{k-2}$	$x_{k-2}$	$f_{k-2}$	·	·	·	$f^{(4)}_{k-2}$
			·	·	·	
			·	·	$f'''_{k-1/2}$	
$t_{k-1}$	$x_{k-1}$	$f_{k-1}$	·	$f''_{k-1}$		
			·			
			$f'_{k-1/2}$			
$t_k$	$x_k$	$f_k$				

небольшая точность или если шаг интегрирования  $h$  достаточно мал, то можно ограничиться в этой формуле разностями третьего или даже второго порядка.

### § 3.03. Метод Коуэлла

Пусть известны значения  $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-4}$ ,  $k \geq 4$  и составлена таблица разностей (табл. 84).

Таблица 84

$\vdots$	$\vdots$				
$x_{k-2}$	$f_{k-2}$			$f_{k-2}^3$	$f_{k-2}^4 = \alpha$
$x_{k-1}$	$f_{k-1}$	$f_{k-1/2}^1$	$f_{k-1}^2$	$(f_{k-1/2}^3)$	$(f_{k-1}^4 = \alpha)$
$x_k$	$f_k$	$(f_k^1)$	$(f_k^2)$	$(f_k^3)$	$(f_k^4 = \alpha)$
$(x_{k+1})$	$(f_{k+1})$	$(f_{k+1/2}^1)$		$(f_{k+1/2}^3)$	

При нахождении  $x_{k+1}$  по методу Коуэлла применяется, как в методе Адамса, разложение решения  $x(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_k$ , но выражения для производных функции  $f(x, t)$  в точке  $(x_k, t_k)$  составляются на основании интерполяционной формулы Стирлинга. Это приводит к следующим выражениям:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad (7.3.11)$$

$$\Delta x_k = f_k + \frac{1}{2} f_k^1 + \frac{1}{6} f_k^2 - \frac{1}{24} f_k^3 - \frac{1}{720} f_k^4, \quad (7.3.12)$$

где  $f_k^1, f_k^3$  — центральные разности первого и третьего порядков соответственно, равные

$$f_k^1 = \frac{1}{2} (f_{k+1/2}^1 + f_{k-1/2}^1), \quad f_k^3 = \frac{1}{2} (f_{k+1/2}^3 + f_{k-1/2}^3). \quad (7.3.13)$$

Эти разности, а также разности  $f_k^2, f_k^4$  неизвестны (их нельзя вычислить с помощью лишь значений  $f_{k-4}, \dots, f_k$ ). Поэтому вычисление  $\Delta x_k$  по формуле (7.3.12) проводится с помощью экстраполяции разностей четвертого порядка и последовательных приближений.

Пусть  $f_{k-2}^4 = \alpha$ . Тогда в первом приближении полагают, что четвертые разности  $f_{k-1}^4, f_k^4$  также равны  $\alpha$ . С этими значениями четвертых разностей вычисляют (в первом приближении) разности  $f_k^1, f_k^2, f_k^3$ , отмеченные в табл. 84 скобками, а затем  $\Delta x_k$  и  $x_{k+1}$ .

С этим значением  $x_{k+1}$  вычисляют  $f_{k+1}$  и уточняют разности  $f_{k+1/2}^1, f_k^1, f_k^2, f_{k-1/2}^3, f_{k-1}^4$  (в табл. 84 они подчеркнуты). Имея уточненное значение  $f_{k-1}^4 = a$  и полагая  $f_k^1 = a$ , вычисляем разность  $f_k^3$ , а затем  $\Delta x_k$  и  $x_{k+1}$  во втором приближении и т. д. После аналогичных дальнейших вычислений  $x_{k+2}, x_{k+3}$  приходится обычно опять уточнять  $x_{k+1}$ , поскольку уточняются разности  $f_k^4, f_k^3$  и др.

Формула (7.3.12) метода Коуэлла выгодно отличается от формулы метода Адамса тем, что коэффициенты при разностях убывают гораздо быстрее. Поэтому, несмотря на большую громоздкость вычислений, этот метод часто оказывается более удобным, чем метод Адамса. Вычисления для систем уравнений производятся по аналогичным формулам и таблицам разностей, выписываемым параллельно для правых частей каждого уравнения.

### § 3.04. Метод Штермера (для уравнений второго порядка)

Этот метод аналогичен методу Адамса и является одним из самых простых.

Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t) \quad (7.3.14)$$

и известны значения  $x(t_k) = x_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) в пяти точках  $t_k = t_0 + kh$ . Обозначив

$$h^2F(x, t) = f(x, t), \quad f(x_k, t_k) = f_k, \quad (7.3.15)$$

составим таблицу разностей. Формулы для вычисления  $x_5$  следующие:

$$x_5 = 2x_4 - x_3 + \Delta^2x_4, \quad (7.3.16)$$

$$\Delta^2x_4 = f_4 + \frac{1}{12}f_3 + \frac{1}{12}f_{3/2} + \frac{19}{240}f_2. \quad (7.3.17)$$

Аналогичным образом вычисляют далее  $x_6, x_7$  и т. д. Общие формулы для любого  $x_{k+1}, k \geq 4$  записываются в виде

$$x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1} + \Delta^2x_k, \quad (7.3.18)$$

$$\Delta^2x_k = f_k + \frac{1}{12}f_{k-1}^2 + \frac{1}{12}f_{k-3/2}^3 + \frac{19}{240}f_{k-2}^4. \quad (7.3.19)$$

Разностями выше четвертого порядка обычно пренебрегают. Вычисления для систем уравнений вида (7.3.01) проводят по аналогичным формулам параллельно для каждого уравнения.





шестых разностей вычисляем (в первом приближении) разности  $f_k^2, f_k^4$  (эти разности, а также все другие, необходимые для вычисления  $f_k^2, f_k^4$ , отмечены в табл. 85 скобками), а затем  $\Delta^2 x_k, x_{k+1}$ .

Исходя из этого значения  $x_{k+1}$ , вычисляем  $f_{k+1}$  и уточняем разности  $f_k^2, f_{k-1/2}^3, f_{k-1}^4, f_{k-1/2}^5, f_{k-2}^6$  (в табл. 85 они подчеркнуты). Имея уточненное значение  $f_{k-2}^6 = \alpha$  и полагая  $f_{k-2}^6 = f_k^6 = \alpha$ , вычисляем  $\Delta^2 x_k$  и  $x_{k+1}$  во втором приближении и т. д. При дальнейших вычислениях  $x_{k+2}, x_{k+3}$  приходится возвращаться к уточнению  $x_k$ , поскольку уточняются разности  $f_{k-1}^6, f_k^6$ .

§ 3.06. Метод Коуэлла (2-й вариант)

Пусть дано уравнение (7.3.14) и известны значения  $x_0, \dots, x_6$ . Используя обозначения предыдущего параграфа, составим таблицу разностей, причем в этой таблице добавим столбцы *первых и вторых сумм*, обозначаемых через  $f^{-1}, f^{-2}$  с соответствующими нижними индексами (табл. 86).

Таблица 86

$t$	$x$	$f^{-2}$	$f^{-1}$	$f$	$f^1$	$f^2$	$f^3$	$f^4$	$f^5$	$f^6$
$t_0$	$x_0$			$f_0$						
$t_1$	$x_1$			$f_1$	$f_{1/2}^1$	$f_1^2$				
$t_2$	$x_2$			$f_2$	$f_{3/2}^1$	$f_2^2$	$f_{3/2}^3$	$f_2^4$		
$t_3$	$x_3$	$f_3^{-2}$		$f_3$	$f_{5/2}^1$	$f_3^2$	$f_{5/2}^3$	$f_3^4$	$f_{5/2}^5$	$f_3^6$
$t_4$	$x_4$	$f_4^{-2}$	$f_{7/2}^{-1}$	$f_4$	$f_{7/2}^1$	$f_4^2$	$f_{7/2}^3$	$f_4^4$	$f_{7/2}^5$	
$t_5$	$x_5$	$f_5^{-2}$	$f_{9/2}^{-1}$	$f_5$	$f_{9/2}^1$	$f_5^2$	$f_{9/2}^3$			
$t_6$	$x_6$	$f_6^{-2}$	$f_{11/2}^{-1}$	$f_6$	$f_{11/2}^1$					
		$f_7^{-2}$	$f_{13/2}^{-1}$							

Суммы  $f_j^{-1}, f_j^{-2}$ , начиная с  $f_{7/2}^{-1}, f_3^{-2}$ , составляются таким образом, что столбец значений  $f_j$  является столбцом первых разностей для  $f_j^{-1}$  и вторых разностей для  $f_j^{-2}$ . По одному из

значений  $f_j^{-1}$ ,  $f_j^{-2}$  можно взять произвольно. Полагают

$$f_3^{-2} = x_3 - \frac{1}{12} f_3 + \frac{1}{240} f_3^2 - \frac{31}{60\,480} f_3^4 + \frac{289}{3\,628\,800} f_3^6, \quad (7.3.22)$$

$$f_{1/2}^{-1} = x_4 - x_3 - \frac{1}{12} f_{1/2}^1 + \frac{1}{240} f_{1/2}^3 - \frac{31}{60\,480} f_{1/2}^5. \quad (7.3.23)$$

Значение  $x_7$  выражается через разности формулой

$$x_7 = f_7^{-2} + \frac{1}{12} f_7 - \frac{1}{240} f_7^2 + \frac{31}{60\,480} f_7^4 - \frac{289}{3\,628\,800} f_7^6. \quad (7.3.24)$$

В этой формуле является известной (т. е. вычисляемой по известным значениям  $f_0, \dots, f_6$ ) только вторая сумма  $f_7^{-2}$ . Остальные члены неизвестны, поэтому вычисления производятся, как и в первом варианте метода Коуэлла, с помощью экстраполяции шестых разностей и последовательных приближений. Значения  $x_8, x_9, \dots$  вычисляются последовательно по формуле, аналогичной (7.3.24).

При интегрировании уравнений движения большинства малых планет и комет с шагом  $h = 10^d$  при точности до семи значащих цифр оказывается часто возможным ограничиться в формуле (7.3.24) четвертыми или даже вторыми разностями.

### § 3.07. Накопление погрешностей при численном интегрировании

При численном интегрировании в результате округления на каждом шаге в некоторой неточности формул происходит постепенное накопление погрешности с увеличением числа шагов. Как показывает теоретический анализ (см. [1], [2], [19]), ошибки в координатах (при интегрировании уравнений движения в прямоугольных координатах) после  $n$  шагов численного интегрирования пропорциональны  $n^{3/2}$ . Таким образом, через каждые 30 шагов эта ошибка вообще может увеличиться примерно в 10 раз, т. е. теряется одна значащая цифра.

Косвенный контроль точности при численном интегрировании осуществляется путем вычисления на каждом шаге констант интегралов решаемых дифференциальных уравнений (если такие интегралы имеются). Расхождения в значениях этих констант, появляющиеся на каком-то шаге, указывают на соответствующую потерю точности значений искомых неизвестных.

### § 3.08. Метод Энке численного интегрирования уравнений возмущенного движения

Метод Энке численного интегрирования уравнений возмущенного движения небесных тел заключается в том, что эти уравнения записываются в специальной форме; при этом урав-

нения сохраняют простоту, характерную для уравнений в прямоугольных координатах, но позволяют вычислять непосредственно именно возмущения. Изменение координат за счет невозмущенного движения может учитываться отдельно, например, по обычным кеплеровским формулам.

Этот метод широко применяется в случае малых планет и комет, но вполне целесообразен во всех случаях, когда движение рассматриваемых небесных тел мало отклоняется от кеплеровского.

Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — прямоугольные координаты небесного тела  $P$  с массой  $m$ , движущегося под действием притяжения центрального тела  $S$  (с массой 1) и возмущающих сил. Его уравнения движения при условии, что в отсутствие возмущающих сил движение является кеплеровским, записываются в виде

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = -k^2(1+m)x_s/r^3 + \mu R_s, \quad (s = 1, 2, 3), \quad (7.3.25)$$

где  $k^2$  — постоянная тяготения,  $r$  — расстояние от  $S$  до  $P$  и  $\mu R_s$  — относительно малые возмущающие части уравнений, пропорциональные некоторому малому параметру  $\mu$ .

Если  $x_s^0$  ( $s = 1, 2, 3$ ) — координаты тела  $P$  в невозмущенном движении относительно  $S$ , то уравнения относительно возмущений (отклонений от кеплеровского движения)  $u_s = x_s - x_s^0$  ( $s = 1, 2, 3$ ) записываются в виде

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} = k^2(1+m)[qf(q)x_s - u_s]/r_0^3 + \mu R_s, \quad (s = 1, 2, 3), \quad (7.3.26)$$

где в правых частях полагается  $x_s = x_s^0 + u_s$ ,

$$q = \left[ \left( x_1^0 + \frac{1}{2} u_1 \right) u_1 + \left( x_2^0 + \frac{1}{2} u_2 \right) u_2 + \left( x_3^0 + \frac{1}{2} u_3 \right) u_3 \right] / r_0^2,$$

$$f(q) = [1 - (1 + 2q)^{-3/2}] / q$$

и  $r_0$  — расстояние от  $S$  до  $P$  в невозмущенном движении. Уравнения (7.3.26) и называются *уравнениями Энке*. Величины  $u_s$  имеют порядок  $\mu$ , изменяются гораздо медленнее, чем  $x_s$ , и шаг интегрирования для этих уравнений может быть взят гораздо большим, чем для первоначальных уравнений (7.3.25). Вместе с тем возмущающие части  $\mu R_s$  сохраняют, например, в случае малых планет и комет такую же простую форму, что и в первоначальных уравнениях (7.3.25).

Если положить в правых частях (7.3.26)

$$q = (x_1^0 u_1 + x_2^0 u_2 + x_3^0 u_3) / r_0^2,$$

а также  $x_s = x_s^0$ , то эти уравнения становятся особенно удобными для численного интегрирования. Их решение определяет

возмущения  $u_s$  с точностью до членов первого порядка относительно  $\mu$  (возмущающих масс в случае малых планет и комет). Такое решение может служить хорошим первым приближением.

Что касается непосредственного интегрирования уравнений (7.3.26), то метод может быть любым. Чаще всего применяют метод Коуэлла.

**§ 3.09. Общая постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай линейной краевой задачи**

В предыдущих параграфах рассматривались методы нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях, т. е. решений задачи Коши. В настоящее время в астродинамике часто встречаются задачи другого типа, а именно, краевые задачи (о ряде таких задач сказано в ч. VIII).

Пусть дана система уравнений общего вида

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \dots, x_n, t) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (7.3.27)$$

заданы точки  $t_1, \dots, t_k$  ( $k \geq 2$ ) и некоторые соотношения

$$\Phi_\sigma(x_1(t_1), \dots, x_1(t_k), \dots, x_n(t_1), \dots, x_n(t_k)) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n). \quad (7.3.28)$$

Задача о нахождении решения системы (7.3.27), удовлетворяющего соотношениям (7.3.28), называется *многоточечной краевой задачей* общего вида. Соотношения (7.3.28) называются *краевыми условиями*. Если  $k = 2$  (в краевые условия входят значения искомых функций в двух точках), то краевая задача называется *двухточечной*.

Вопрос о существовании решения общей краевой задачи весьма сложный и исследован далеко не полностью. Эта задача может а) не иметь решений, б) иметь единственное решение, в) иметь конечное число решений, г) иметь бесконечное множество решений. Более простой и лучше исследованной является двухточечная *линейная краевая задача*, когда система исходных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{sj}(t) x_j + f_s(t) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (7.3.29)$$

и краевые двухточечные условия при  $t = 0, t = l$

$$\Phi_\sigma(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{j=1}^n a_{\sigma j} x_j(0) + b_{\sigma j} x_j(l) = q_\sigma \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (7.3.30)$$

являются линейными. В (7.3.29) функции  $p_{sj}(t)$ ,  $f_s(t)$  непрерывны на отрезке  $0 \leq t \leq l$ , а в (7.3.30)  $a_{\sigma j}$ ,  $b_{\sigma j}$  и  $q_{\sigma}$  — постоянные числа.

Краевая задача при всех  $f_s \equiv 0$ ,  $q_{\sigma} = 0$  называется *однородной* и при  $f_s \not\equiv 0$  — *неоднородной*.

Условия существования решения. Пусть  $\{\varphi_{sj}(t)\}$  — фундаментальная система решений уравнений (7.3.29) при всех  $f_s \equiv 0$ . Рассматривается матрица  $Q$  из элементов  $\Phi_{\sigma}(\varphi_{1j}, \dots, \varphi_{nj})$  ( $\sigma, j = 1, 2, \dots, n$ ).

1) Неоднородная краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда  $\det Q \neq 0$ . 2) Однородная краевая задача имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда  $\det Q = 0$ .

Важен вопрос о так называемой обусловленности краевой задачи. Краевая задача называется *хорошо обусловленной*, если малые изменения коэффициентов и правых частей исходных дифференциальных уравнений, а также краевых условий приводят к столь же малым по порядку величины изменениям решения. В противном случае краевую задачу называют *плохо обусловленной*.

Методы решения и анализа краевых задач в настоящее время интенсивно развиваются и приобретают все более и более важное место в теории дифференциальных уравнений. Мы ограничимся изложением некоторых методов решения краевых задач отдельного типа, не останавливаясь на их анализе. Более подробно можно прочитать о краевых задачах в [3], [9], [20].

### § 3.10. Метод стрельбы при нахождении решения линейной двухточечной краевой задачи

Основной вариант этого метода заключается в следующем (см. [9]).

Пусть дана система дифференциальных уравнений (в векторно-матричной форме)

$$\dot{x} = P(t)x + f(t) \quad (7.3.31)$$

(точкой обозначено дифференцирование по переменной  $t$ ), и двухточечные краевые условия вида

$$Ax(0) = a, \quad Bx(l) = b, \quad (7.3.32)$$

где векторы  $x$ ,  $f$ ,  $a$  и  $b$  имеют соответственно размерности  $n$ ,  $n$ ,  $r$  и  $r$ ,  $P(t)$  — матрица с непрерывными по  $t$  элементами,  $A$  — постоянная матрица с  $n - r$  строками, а  $B$  — постоянная матрица с  $r$  строками.

Решение данной краевой задачи ищем в виде

$$x(t) = w(t) + v(t), \quad (7.3.33)$$

где  $v(t)$  — частное решение исходной системы при начальном условии, удовлетворяющем соотношению

$$Av(0) = a, \quad (7.3.34)$$

а  $w(t)$  — нетривиальное решение однородной системы, получающейся из (7.3.31) при  $f \equiv 0$ ,

$$x = P(t)x \quad (7.3.35)$$

с начальным при  $t = 0$  условием, удовлетворяющим соотношению

$$Aw(0) = 0. \quad (7.3.36)$$

Это векторное соотношение эквивалентно  $n - r$  линейным алгебраическим уравнениям относительно  $n$  неизвестных компонент  $w_1(0), \dots, w_n(0)$  вектора  $w(0)$ . Эти уравнения всегда имеют решение, зависящее от  $r$  произвольных постоянных. Таким образом, из (7.3.36) может быть найдена матрица  $W(0)$  с  $r$  столбцами. Если обозначить через  $W(t)$  матрицу из  $r$  решений системы (7.3.35) при начальном условии  $W|_{t=0} = W(0)$ , то  $w(t)$  в (7.3.33) запишется в виде

$$w(t) = W(t)c, \quad (7.3.37)$$

где  $c$  — произвольный вектор с  $r$  компонентами  $c_1, \dots, c_r$ .

При определенных таким путем  $v(t)$  и  $w(t)$  функция (7.3.33) удовлетворяет первому из краевых условий (7.3.32) при всех  $c$ . Дальнейшая цель состоит в таком выборе вектора  $c$ , чтобы решение (7.3.33) удовлетворило второму краевому условию (в точке  $t = l$ ). Можно сказать, что подбираются такие начальные условия при  $t = 0$ , чтобы интегральная кривая исходной системы (7.3.31), удовлетворяя этим начальным условиям, достигла бы при  $t = l$  нужной точки. Отсюда название *метод стрельбы*.

Подчинив вектор  $c$  второму краевому условию, получим

$$BW(l)c + Bv(l) = b. \quad (7.3.38)$$

Если

$$\det [BW(l)] \neq 0 \quad (7.3.39)$$

(это — условие разрешимости поставленной задачи), то

$$c = [BW(l)]^{-1} [b - Bv(l)]. \quad (7.3.40)$$

Функция

$$x(t) = W(t)c + v(t), \quad (7.3.41)$$

где  $c$  определяется согласно (7.3.40), дает решение исходной краевой задачи. Таким образом, построение этого решения сводится к следующему:

1) нахождению каких-либо численных начальных условий  $v(0)$  из системы алгебраических уравнений (7.3.34), при этом не исключается случай  $a = 0$ ; 2) нахождению матрицы  $W(0)$  из линейной алгебраической системы (7.3.36); 3) построению решения задачи Коши исходных уравнений (7.3.31) при начальном условии  $x(0) = v(0)$ ; 4) построению матрицы решений  $W(t)$  задачи Коши для однородной системы (7.3.35) при начальных условиях  $W|_{t=0} = W(0)$ ; 5) вычислению вектора  $c$  из (7.3.40).

Для построения решений задач Коши можно применить любой из рассмотренных выше методов.

Для иллюстрации укажем, какой вид принимают приведенные выше формулы в случае системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + f_1(t), \quad \dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + f_2(t) \quad (7.3.42)$$

и краевых условий

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1(0) + a_2x_2(0) &= a, & |a_1| + |a_2| &\neq 0, \\ b_1x_1(l) + b_2x_2(l) &= b, & |b_1| + |b_2| &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.43)$$

Начальные условия (7.3.34) для  $v_1(0)$ ,  $v_2(0)$  примут вид

$$a_1v_1(0) + a_2v_2(0) = a, \quad (7.3.44)$$

откуда всегда можно подобрать значения  $v_1(0)$ ,  $v_2(0)$  при  $a \neq 0$  и  $a = 0$ . Начальные условия (7.3.36) для  $w(0)$  имеют вид

$$a_1w_1(0) + a_2w_2(0) = 0, \quad (7.3.45)$$

откуда (например, при  $a_2 \neq 0$ )  $w_1(0) = c$ ,  $w_2(0) = -ca_1/a_2$ , где  $c$  — произвольная постоянная. Таким образом, решение алгебраического уравнения (7.3.45) зависит от одной произвольной постоянной и искомая матрица  $W(0)$  имеет один столбец с элементами 1 и  $-a_1/a_2$  соответственно. Матричное решение  $W(t)$  однородной системы, получающейся из (7.3.42) при  $f_1 \equiv 0$ ,  $f_2 \equiv 0$ , ищется при начальном условии

$$W|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1/a_2 \end{pmatrix}$$

и представляет собой матрицу из одного столбца с элементами  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$ . Искомое решение краевой задачи запишется по аналогии с (7.3.41) в виде

$$x_1(t) = cw_1(t) + v_1(t), \quad x_2(t) = cw_2(t) + v_2(t),$$

причем постоянная  $c$  находится из условия вида (7.3.38)

$$b_1[cw_1(l) + v_1(l)] + b_2[cw_2(l) + v_2(l)] = b.$$

Задача разрешима, если  $b_1w_1(l) + b_2w_2(l) = D \neq 0$ , и тогда

$$c = [b - b_1v_1(l) - b_2v_2(l)]/D.$$



### § 3.11. Краевая задача для квазилинейной системы с линейными краевыми условиями

Пусть дана система вида

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, \mu), \quad (7.3.46)$$

где  $\mu$  — малый параметр,

$$\|\mathbf{F}(0, t, \mu)\| \sim \mu, \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, 0)\| \sim \|\mathbf{x}\|^2,$$

и даны краевые условия вида (7.3.32)

$$A\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}, \quad B\mathbf{x}(l) = \mathbf{b}, \quad (7.3.47)$$

где векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  или равны нулю или малы по норме. Для построения решения такой краевой задачи можно применить метод последовательных приближений.

Первое приближение  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = P(t)\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{F}(0, t, \mu) \quad (7.3.48)$$

и тем же краевым условиям (7.3.47).

Имеем, таким образом, линейную краевую задачу. Находим  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$  в виде

$$\mathbf{x}^{(1)} = W(t)\mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{v}^{(1)}(t), \quad (7.3.49)$$

где  $\mathbf{v}^{(1)}(t)$  — частное решение системы (7.3.48) при начальном векторе  $\mathbf{v}^{(1)}(0)$ , определяемом из соотношения (алгебраических уравнений)

$$A\mathbf{v}^{(1)}(0) = \mathbf{a} \quad (7.3.50)$$

(при этом возможен случай  $\mathbf{a} = 0$ ), а  $W(t)$  — матрица решений однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)(\mathbf{x}), \quad (7.3.51)$$

причем матрица начальных условий  $W(0)$  определяется из соотношения

$$AW(0) = 0. \quad (7.3.52)$$

Предполагается, что  $\det[BW(l)] \neq 0$ . Тогда

$$\mathbf{c}^{(1)} = [BW(l)]^{-1}[\mathbf{b} - B\mathbf{v}^{(1)}(l)]. \quad (7.3.53)$$

Если считать для простоты, что  $\|\mathbf{a}\|$  и  $\|\mathbf{b}\|$  имеют порядок параметра  $\mu$ , то  $\|\mathbf{v}^{(1)}(t)\| \sim \mu$ ,  $\|\mathbf{x}^{(1)}(t)\| \sim \mu$ .

Второе приближение  $\mathbf{x}^{(2)}(t)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = P(t)\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}, t, \mu) \quad (7.3.54)$$

и тем же краевым условиям (7.3.47). Опять имеем линейную краевую задачу, причем система (7.3.54) отличается от системы (7.3.48) для первого приближения только лишь неоднородной частью.

Ищем  $\mathbf{x}^{(2)}(t)$  в том же виде (7.3.49)

$$\mathbf{x}^{(2)} = W(t) \mathbf{c}^{(2)} + \mathbf{v}^{(2)}(t), \quad (7.3.55)$$

где  $\mathbf{v}^{(2)}(t)$  — частное решение системы (7.3.54) при тех же начальных условиях, при каких мы находили  $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ , а  $W(t)$  — та же матрица, что и в (7.3.49). Вектор  $\mathbf{c}^{(2)}$  определяем по формуле

$$\mathbf{c}^{(2)} = [BW(l)]^{-1} [\mathbf{b} - B\mathbf{v}^{(2)}(l)]. \quad (7.3.56)$$

При этом (если  $\|\mathbf{a}\| \sim \mu$ ,  $\|\mathbf{b}\| \sim \mu$ )

$$\|\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\| \sim \mu^2, \quad \|\mathbf{c}^{(2)} - \mathbf{c}^{(1)}\| \sim \mu^2, \quad \|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\| \sim \mu^2.$$

Построение дальнейших приближений выполняется аналогичным образом. Их сходимость гарантируется, во всяком случае, при достаточно малых  $\mu$ .

При непосредственных вычислениях численные значения  $\mu$ , а также компонент векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  краевых условий фиксируются. Выписанные выше оценки для  $\|\mathbf{x}^{(1)}\|$ ,  $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|$  дают представление о порядке этих величин, если считать, что  $\mu$ ,  $\|\mathbf{a}\|$ ,  $\|\mathbf{b}\|$  имеют один и тот же порядок.

**З а м е ч а н и е.** Если систему уравнений для последовательных приближений  $\mathbf{x}^{(k)}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) выбрать в следующем виде (вместо (7.3.48) и (7.3.54)):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} = & \left( P + \frac{\partial F(\mathbf{x}^{(k-1)}, t, \mu)}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{x}^{(k)} + \\ & + \left( F(\mathbf{x}^{(k-1)}, t, \mu) - \frac{\partial F(\mathbf{x}^{(k-1)}, t, \mu)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^{(k-1)} \right), \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

то порядок малости  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$  по  $\mu$  составит не  $\mu^k$ , а  $\mu^{2k}$ . Тогда мы получим при малых  $\mu$  последовательность  $\{\mathbf{x}^{(k)}(t)\}$ , обладающую квадратичной сходимостью, характерной для методов типа Ньютона.

### § 3.12. Краевая задача для системы, близкой к нелинейной невозмущенной системе

Пусть дана нелинейная система вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}_0(\mathbf{z}, t) + \mu \mathbf{Z}(\mathbf{z}, t) \quad (7.3.58)$$

и краевые условия типа (7.3.47), и пусть при  $\mu = 0$  такая краевая задача имеет точное или хотя бы приближенное решение  $\mathbf{z}_0(t)$ . Полагая  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{x}$ , приходим в отношении переменной  $\mathbf{x}$

к системе вида (7.3.46) и к краевым условиям (7.3.47) при равных нулю или малых по норме  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Другими словами, мы придем к краевой задаче, рассмотренной в § 3.11.

В небесной механике при  $\mu = 0$  мы имеем краевую задачу для невозмущенного движения. Приближенное или даже точное ее решение можно получить с помощью формул кеплеровского движения. При  $\mu \neq 0$  имеем краевую задачу для возмущенного движения.

### § 3.13. Применение метода градиентного спуска для решения нелинейной краевой задачи общего вида

Пусть дана нелинейная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (7.3.59)$$

и краевые двухточечные условия

$$\Phi(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(l)) = \mathbf{a} \quad (7.3.60)$$

общего вида, где  $\mathbf{F}$  и  $\Phi$  — некоторые нелинейные вектор-функции. Предполагается, что условия существования решения такой краевой задачи выполнены. Существование решения может вытекать и из самого физического (механического) смысла задачи.

Одним из эффективных методов решения задачи является метод градиентного спуска (см., например, [20]). Ставится задача отыскания начального вектора  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , минимизирующего величину

$$p(\mathbf{x}_0) = \|\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(l)) - \mathbf{a}\|^2, \quad (7.3.61)$$

которая рассматривается как функция  $\mathbf{x}_0$ , и при этом  $\mathbf{x}_0$  отыскивается с помощью последовательных приближений  $\mathbf{x}_0^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2$ ), приближающихся к  $\mathbf{x}_0$  по направлению градиента функции  $p(\mathbf{x}_0)$ . В (7.3.61)  $\mathbf{x}(l) = \mathbf{x}(t)|_{t=l}$  и  $\mathbf{x}(t)$  — решение исходной системы (7.3.59) при начальном условии  $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$ , так что  $p$  зависит от  $\mathbf{x}_0$  как явно, так и неявно посредством  $\mathbf{x}(l)$ .

Нулевое приближение  $\mathbf{x}_0^0$  может быть выбрано, вообще говоря, произвольно, но, разумеется, целесообразно, чтобы  $\mathbf{x}_0^0$  было более или менее близким к точному искомому вектору  $\mathbf{x}_0$ .

Переход от любого  $\mathbf{x}_0^{(k)}$  к  $\mathbf{x}_0^{(k+1)}$  осуществляется по формуле

$$\mathbf{x}_0^{(k+1)} = \mathbf{x}_0^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0^{(k)}, h), \quad (7.3.62)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0^{(k)}, h)$  — вектор с компонентами

$$u_j(\mathbf{x}_0^{(k)}, h) = [p(\mathbf{x}_0^{(k)} + \mathbf{e}_j h) - p(\mathbf{x}_0^{(k)})]/h \quad (7.3.63)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

причем  $h$  — малая положительная постоянная, выбираемая произвольно,  $e_j$  — единичный вектор по оси  $j$ -й компоненты вектора  $x$  и  $\alpha^{(k)}$  — некоторая постоянная, выбираемая специальным образом.

Смысл вектора  $u(x_0^{(k)}, h)$  заключается в том, что если  $p(x_0)$  рассматривается как функция  $x_0$ , то  $u(x_0^{(k)}, h)$  есть дискретный эквивалент градиента функции  $p(x_0)$  в точке  $x_0 = x_0^{(k)}$ . Отсюда название *метод градиентного спуска*.

Для определения вектора  $u(x_0^{(k)}, h)$  при заданных  $x_0^{(k)}$  и  $h$  требуется выполнить следующее.

1. Построить  $n + 1$  решений (где  $n$  — размерность вектора  $x$ ) исходной системы (7.3.59), соответствующих  $n + 1$  вариантам начальных условий:

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= x_0^{(k)} + e_1 h && \text{(для 1-го решения),} \\ &\dots\dots\dots \\ x|_{t=0} &= x_0^{(k)} + e_n h && \text{(для } n\text{-го решения),} \\ x|_{t=0} &= x_0^{(k)} && \text{(для } (n + 1)\text{-го решения)} \end{aligned}$$

и обозначаемых через  $x_j^{(k)}(t)$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ) соответственно, так что

$$x_1^{(k)}(0) = x_0^{(k)} + e_1 h, \dots, x_n^{(k)}(0) = x_0^{(k)} + e_n h, x_{n+1}^{(k)}(0) = x_0^{(k)}.$$

2. Построить векторы  $x_j^{(k)}(l)$  для этих решений на правом конце отрезка  $[0, l]$ .

3. Найти векторы  $\Phi(x_j^{(k)}(0), x_j^{(k)}(l))$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ), соответствующие крайевым условиям (7.3.60).

4. Найти значения функций

$$p(x_1^{(k)}(0)), \dots, p(x_n^{(k)}(0)), p(x_0^{(k)}).$$

После всего этого компоненты вектора  $u(x_0^{(k)}, h)$  вычисляем согласно (7.3.63). Если оказывается, что  $p(x_0^{(k)}) = 0$ , то в следующем приближении  $x_0^{(k+1)}$  нет необходимости.

Постоянная  $\alpha^{(k)}$  в (7.3.62) выбирается достаточно малой по абсолютной величине и так, чтобы значение  $p(x_0^{(k+1)})$  оказалось наименьшим по сравнению со всеми значениями  $p(x_0)$  для  $x_0$ , определяемого по формуле

$$x_0 = x_0 - \alpha u(x_0^{(k)}, h), \tag{7.3.64}$$

где  $x_0^{(k)}$  и  $u(x_0^{(k)}, h)$  фиксированы. Для этого можно задать некоторую последовательность малых по абсолютной величине

значений  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  и построить решения  $\mathbf{x}_\sigma(t)$  ( $\sigma = 1, 2, \dots$ ) исходной системы (7.3.59) при начальных условиях

$$\tilde{\mathbf{x}}_\sigma(0) = \mathbf{x}_0^{(k)} - \alpha_\sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}_0^{(k)}, h) \quad (\sigma = 1, 2, \dots),$$

далее найти векторы  $\tilde{\mathbf{x}}_\sigma(t)$ , значения  $p(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma(0))$  и, наконец,  $p(\mathbf{x}_0^{(k)}) - p(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma(0))$ . Путем интерполяции или дальнейшего варьирования значений  $\alpha$  можно найти требуемое значение  $\alpha^{(k)}$ , при котором разность  $p(\mathbf{x}_0^{(k)}) - p(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma(0))$  наибольшая.

Можно также применить более сложный, но и более экономный метод нахождения  $\alpha^{(k)}$  как стационарной точки функции  $p(\mathbf{x}_0^{(k)} - \alpha \mathbf{u}(\mathbf{x}_0^{(k)}, h))$  с помощью итерационного процесса типа Ньютона.

Нулевое приближение  $\alpha_0 = 0$  (для простоты записи индекс  $k$  во всех формулах опускаем). Первое приближение  $\alpha_1$  находим следующим образом.

1. Строим два решения исходной системы (7.3.59)

$\mathbf{x}_1(t)$  — при начальных условиях  $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0 - \alpha_0 \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, h)$ ,

$\mathbf{x}_2(t)$  — при начальных условиях  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_0 - (\alpha_0 + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, h)$ , где  $\tau$  — произвольно выбранное малое число, и находим  $\mathbf{x}_1(t)$ ,  $\mathbf{x}_2(t)$ .

2. Вычисляем согласно определению (7.3.61) величину

$$q = p(\mathbf{x}_2(0)) - p(\mathbf{x}_1(0)). \quad (7.3.65)$$

3. Строим два решения исходной системы (7.3.59)

$\mathbf{x}_3(t)$  — при начальных условиях  $\mathbf{x}_3(0) = \mathbf{x}_0 - (\alpha_0 + |q|) \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, h)$ ,

$\mathbf{x}_4(t)$  — при начальных условиях  $\mathbf{x}_4(0) = \mathbf{x}_0 - (\alpha_0 + |q| + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, h)$  и находим  $\mathbf{x}_3(t)$ ,  $\mathbf{x}_4(t)$ .

4. Вычисляем величину

$$\bar{q} = p(\mathbf{x}_4(0)) - p(\mathbf{x}_3(0)). \quad (7.3.66)$$

Тогда

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{q}{\bar{q} - q} |q|. \quad (7.3.67)$$

Таким же путем ( $\alpha_0$  заменяется во всех формулах на  $\alpha_1$ ) можно найти  $\alpha_2$  и т. д. Можно не добиваться нахождения  $\alpha^{(k)}$  с большой точностью, если значение  $p(\mathbf{x}_0^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0^{(k)}, h))$  еще существенно отличается от нуля.

В результате описанного процесса найдем вектор  $\mathbf{x}_0$  такой, что с заданной точностью  $p(\mathbf{x}_0) = 0$ . Решение же задачи Коши для исходной системы (7.3.59) при начальных условиях  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  представит непосредственно искомое решение поставленной краевой задачи.

### § 3.14. Разностный метод решений краевых задач

*Разностный метод* состоит в принципе в том, что производные искомой функции  $x(t)$  заменяются их приближенными выражениями через значения  $x(t)$  в узлах. Тогда вместо дифференциальных уравнений и краевых условий для функции  $x(t)$  получаем систему конечных уравнений (алгебраических, трансцендентных) относительно неизвестных значений  $x_k = x(t_k)$  этой функции в узлах.

Пусть дано, например, уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + p(t) \dot{x} + s(t) x = f(t) \quad (7.3.68)$$

и краевые условия

$$a_1 x(0) + a_2 \dot{x}(0) = a, \quad b_1 x(l) + b_2 \dot{x}(l) = b. \quad (7.3.69)$$

Отрезок  $[0, l]$  разбиваем на  $N$  частей равноотстоящими узлами с шагом  $h = l/N$ :

$$t_k = kh \quad (k=0, \dots, N), \quad t_N = l.$$

Обозначим

$$x(t_k) = x_k, \quad \dot{x}(t_k) = \dot{x}_k, \quad \ddot{x}(t_k) = \ddot{x}_k$$

и выразим производные во внутренних узлах по разностным формулам (см. (7.2.17))

$$\dot{x}_k \approx \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h}, \quad \ddot{x}_k \approx \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2}. \quad (7.3.70)$$

В крайних узлах  $t_0, t_N$  имеем

$$\dot{x}_0 \approx \frac{x_1 - x_0}{h}, \quad \dot{x}_N \approx \frac{x_N - x_{N-1}}{h}.$$

Исходное уравнение (7.3.68) и краевые условия (7.3.69) заменяем соотношениями

$$\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} + s_k x_k = f_k \quad (7.3.71)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$a_1 x_0 + a_2 \frac{x_1 - x_0}{h} = a, \quad b_1 x_N + b_2 \frac{x_N - x_{N-1}}{h} = b, \quad (7.3.72)$$

$$p_k = p(t_k), \quad s_k = s(t_k), \quad f_k = f(t_k),$$

представляющими собой систему  $N + 1$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N + 1$  неизвестных  $x_0, \dots, x_N$ .

Решив эту систему уравнений, получим таблицу значений  $x_0, \dots, x_N$ , являющуюся численным решением поставленной краевой задачи (разумеется, приближенным).

В случае нелинейного уравнения вида (7.3.68) с правой частью  $f(t, x, \dot{x})$  вместо  $f(t)$  система (7.3.71) заменится следующей:

$$\begin{aligned} & \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} + s_k x_k = \\ & = f\left(t_k, x_k, \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (7.3.73)$$

Вместе с (7.3.72) получим систему нелинейных конечных уравнений относительно  $x_0, \dots, x_N$ . Их решение можно искать методом последовательных приближений того или иного типа.

Системы соотношений вида (7.3.71)—(7.3.72) в случае краевых задач для дифференциальных уравнений более высокого порядка или для систем уравнений составляют аналогичным образом. Существует целый ряд вариантов разностных схем и методики решения получаемых систем конечных уравнений (см. [3], [9]). Важными являются вопросы о погрешности получаемых таким путем приближенных численных решений краевой задачи, а также о сходимости процесса при последовательном уменьшении интервала разбиения.

Можно также, получив разностным методом грубое решение, использовать его в качестве нулевого приближения для метода, изложенного в § 3.13.

## Глава 4

### МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В ряде задач небесной механики и астродинамики, связанных с использованием наблюдательных данных для уточнения элементов орбит небесных тел (см. ч. III) или параметров их гравитационных полей, а также в задачах приближения функций (см. гл. 1) и др. приходится встречаться с системами алгебраических или трансцендентных уравнений, число которых значительно превышает число неизвестных. Решение и анализ таких систем уравнений, называемых *условными*, производится по методу наименьших квадратов, принадлежащему Гауссу.

#### § 4.01. Постановка задачи

Рассматривается система  $n$  уравнений относительно  $m$  неизвестных  $x_1, \dots, x_m$ :

$$f_k(x_1, \dots, x_m) = l_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (7.4.01)$$

причем  $n$  значительно больше  $m$  и  $f_k$  — в общем случае некоторые алгебраические нелинейные или трансцендентные функции. Это — условные уравнения общего вида. Правые части  $l_k$  представляют собой обычно величины, определяемые по данным наблюдений, и их рассматривают как случайные величины, подчиняющиеся некоторому вероятностному закону распределения.

Разности

$$f_k(x_1, \dots, x_m) - l_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

находимые при каких-либо фиксированных значениях  $x_1, \dots, x_m$ , называются *невязками* условных уравнений и обозначаются обычно через  $\delta_k$ .

Ставится задача найти такие значения  $x_1, \dots, x_m$ , при которых сумма квадратов невязок

$$S(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^n \delta_k^2 \quad (7.4.02)$$





правилу Крамера для решения линейных алгебраических уравнений. Формула (7.4.05) и определяет искомого решение исходных условных уравнений, реализующее минимум суммы квадратов невязок (7.4.02).

### § 4.03. Вероятностные оценки погрешности решения

Полученное решение условных уравнений, которое выражается формулой (7.4.05) и которое обозначим через  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ , рассматривается как система случайных величин, связанных со случайными величинами  $l_1, \dots, l_n$  этой формулой. Существенно, что (7.4.05) определяет линейную связь между  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  и  $l_1, \dots, l_n$ . При этом, если общая средняя квадратичная погрешность величин  $l_1, \dots, l_n$  обозначается через  $\sigma$ , то средние квадратичные погрешности величин  $x_1, \dots, x_n$  выражаются следующими простыми формулами:

$$\sigma_{x_k} = \frac{\sigma}{\sqrt{a_k}} \quad (k = 1, \dots, m), \quad \rho_k = \frac{D}{D_{kk}}, \quad (7.4.06)$$

где  $D_{kk}$  — диагональные миноры определителя  $D$  (основного определителя системы нормальных уравнений). Числа  $\rho_1, \dots, \rho_m$  называются *веса неизвестных*  $x_1, \dots, x_m$  соответственно.

Величина  $\sigma$  вообще неизвестна. Используется ее наиболее вероятное значение, вычисляемое по формуле

$$\sigma^2 = \frac{s}{n - m}, \quad (7.4.07)$$

где  $s$  — сумма квадратов *остаточных невязок*, т. е. невязок, соответствующих решению нормальных уравнений

$$s = \sum_{k=1}^n (a_k^{(1)}\bar{x}_1 + \dots + a_k^{(m)}\bar{x}_m - l_k)^2. \quad (7.4.08)$$

С этим значением  $\sigma$  вычисляются все  $\sigma_{x_k}$ .

Окончательно решение исходных условных уравнений записывается в следующем виде:

$$x_k = \bar{x}_k + \sigma_{x_k} \quad (k = 1, \dots, m). \quad (7.4.09)$$

Величины  $\sigma_{x_k}$  указывают на степень уверенности определения неизвестных  $x_1, \dots, x_m$  из этих условных уравнений.

### § 4.04. Неравноточные условные уравнения

Если средние квадратичные ошибки  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  величин  $l_1, \dots, l_n$  в правых частях условных уравнений (7.4.01) различны, то уравнения называются *неравноточными*. Вообще, сами значения  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  неизвестны, но должны быть известными

соотношения между ними:

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \dots = q_1 : q_2 : \dots,$$

где  $q_1, q_2, \dots$  — некоторые числа.

Методика подхода к решению и анализу таких систем уравнений следующая.

Вводим величины

$$p_k = p/\sigma_k^2 \quad (k = 1, \dots, n),$$

называемые *весами условных уравнений*, и выбираем число  $p$  так, чтобы вес наименее точного условного уравнения был равен 1. Умножив затем каждое условное уравнение на его вес, получим систему уравнений

$$p_k f_k(x_1, \dots, x_m) = p_k l_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (7.4.10)$$

которые можно считать равноточными. В случае линейных уравнений поступаем далее так, как изложено в § 4.03.

Распространенным является случай, когда каждое  $j$ -е условное уравнение является результатом усреднения группы предварительно полученных  $q_j$  уравнений. Тогда вес  $j$ -го условного уравнения принимается равным  $q_j$ .

#### § 4.05. Линеаризация условных уравнений общего вида

Пусть даны условные уравнения общего вида (7.4.01). Наиболее эффективный путь их исследования состоит в применении метода последовательных приближений и линеаризации уравнений на каждом шаге.

Прежде всего требуется найти каким-нибудь способом приближенное решение  $x_1^0, \dots, x_m^0$  исходных условных уравнений, для которого невязки более или менее малы. Примем его за нулевое приближение. Полагая в (7.4.01)

$$x_k = x_k^0 + \Delta_1 x_k \quad (k = 1, \dots, m), \quad (7.4.11)$$

разлагаем левые части этих уравнений по степеням  $\Delta_1 x_k$  и отбрасываем все члены выше первого порядка, приходя таким образом к линеаризованным уравнениям относительно  $\Delta_1 x_k$ . Если эти уравнения равноточные (или приведены к равноточным), то методом, описанным в § 4.03, находим решение этих уравнений  $\bar{\Delta}_1 x_1, \dots, \bar{\Delta}_1 x_m$  и соответствующие средние квадратичные погрешности  $\sigma_{1k}$  и получаем первое приближение

$$x_k^{(1)} = x_k^0 + \bar{\Delta}_1 x_k \pm \sigma_{1k} \quad (k = 1, \dots, m) \quad (7.4.12)$$

к решению исходных условных уравнений (7.4.01).

Полагая далее

$$x_k = x_k^{(1)} + \Delta_2 x_k \quad (k = 1, \dots, m) \quad (7.4.13)$$

и линеаризуя условные уравнения для  $\Delta_2 x_1, \dots, \Delta_2 x_m$ , находим аналогичным образом  $\bar{\Delta}_2 x_k, \sigma_{2k}$  и второе приближение

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} + \bar{\Delta}_2 x_k \pm \sigma_{2k} \quad (7.4.14)$$

и т. д. Процесс продолжается, вообще, до тех пор, пока два соседних приближения не совпадут друг с другом в пределах желаемой точности.

#### ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ VII

1. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, гл. IV, V «Мир», 1964.
2. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, гл. VI, «Наука», 1965.
3. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I, Физматгиз, 1959; т. II, Физматгиз, 1960.
4. Бут А. Д., Численные методы, Физматгиз, 1959.
5. ЩигOLEв Б. М., Математическая обработка наблюдений, изд. 3-е, «Наука», 1969.
6. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Физматгиз, 1958.
7. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1963.
8. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, Физматгиз, 1963.
9. Бахвалов И. С., Численные методы, т. I, «Наука», 1973.
10. Ланцош К., Практические методы прикладного анализа, пер. с англ., Физматгиз, 1961.
11. Хемминг Р. В., Численные методы, пер. с англ., «Наука», 1968.
12. Мак-Кракен Д., Дорн У., Численные методы и программирование на ФОРТРАНе, «Мир», 1969.
13. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, «Мир», 1972.
14. Корн Г. К., Корн Т., Справочник по математике, «Наука», 1973.
15. Kovalevsky J., Méthode numérique de calcul de perturbations général. Application au VIII-e satellite de Jupiter, Bull. astron., t. XXIII, 1959.
16. Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, «Наука», 1966.
17. Brower D., Clemence G. M., Eckert W. Y., The rectangular coordinates of five outer planets for years 1653—2060. Astronom. Papers 12, 1951.
18. Herget P., Rectangular coordinates of Ceres, Pallas, Juno, Vesta. Astronom. Papers 16, part 3, 1962; 11, part 5, 1950.
19. Brower D., Clemence G. M., Astron. J. 60, № 3, 1955.
20. Шаманский В. Е., Методы численного решения крайних задач, «Наукова думка», 1966.

# ОПТИМАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АСТРОДИНАМИКИ

## Глава I

### СВЕДЕНИЯ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Включение этого раздела в настоящее издание обусловлено тем, что в последние годы динамика космического полета получила бурное развитие и значительно возросло количество исследователей, интересующихся и активно работающих в этой области современной небесной механики.

При решении оптимальных и краевых задач динамики космического полета используются методы (классические и современные) вариационного исчисления и математической теории оптимальных процессов. Математические методы, применяемые в динамике космического полета, можно условно объединить в следующие группы.

а) *Методы классического вариационного исчисления*, связанные с решением основных вариационных задач (*изопериметрическая задача, задачи Лагранжа, Майера и Больца*), которые формулируются без привлечения функций управления. К этой группе методов можно отнести и теорию экстремумов функций и функционалов Лагранжа. В последние годы появились достаточно эффективные численные методы проверки необходимых и достаточных условий теории максимумов и минимумов, когда количество независимых переменных велико. Особый интерес представляют те методы, которые позволяют решать *экстремальные задачи в классе разрывных или не всюду дифференцируемых функций*.

Основные понятия и определения теории экстремумов и вариационного исчисления читатель может найти в многочисленных учебных пособиях (Г. М. Фихтенгольц [1], И. М. Гельфанд и С. В. Фомин [2], Л. Э. Эльсгольц [3] и др.). Кроме того, можно рекомендовать работы Блисса [4] — [7], Чикала [8], Хэнкока [9], Хорнера [10], Миеле [11] и др. Достаточно полный обзор перечисленных выше работ содержится в переведенном на русский

язык сборнике статей [12], вышедшем под редакцией Лейтмана. На работы, включенные в сборник [12], мы неоднократно будем ссылаться. Следует указать и на книгу Миеле [13], также переведенную на русский язык.

б) *Методы классического вариационного исчисления, видоизмененные и приспособленные для решения традиционных задач (изопериметрической задачи, задач Лагранжа, Майера, Больца), сформулированных с учетом функций управления.* Среди многих работ, рассматривающих оптимальные траектории космического полета с этой точки зрения, следует прежде всего указать на исследования Лоудена [14] — [20], основанные на решении задачи Майера в современной постановке (в настоящем справочнике она названа «*третьей формулировкой задачи Майера*»). Существенные результаты в этом направлении получены В. Ф. Кротовым [21] — [23], В. А. Троицким [24] — [26], Д. Е. Охочимским и Т. М. Энеевым [27], Лейтманом [28] — [30]. Наконец, в сборнике [12] можно найти изложение различных аспектов этого направления вариационного исчисления и многочисленные литературные ссылки (особенно главы II—V, XI).

в) *Метод скорейшего спуска (или метод градиентов)*, который с полным правом можно было бы отнести к группе а), так как он появился еще во времена Коши. Однако большие вычислительные возможности, появившиеся в связи с современной вычислительной техникой, делают метод скорейшего спуска весьма эффективным при решении оптимальных задач динамики космического полета и по этой причине мы выделили его отдельно. Эффективность метода градиентов при нахождении относительных экстремумов функций многих переменных была показана, в частности, Кюрри [31], Розеном [32], Топкинсом [33], а его эффективность в исследовании оптимальных траекторий была установлена Штейном [34], Келли [35], Брайсоном и др. [36]. Достаточно подробное изложение метода градиентов применительно к оптимальным задачам динамики космического полета, сопровождаемое весьма полным указателем литературы, дано в сборнике [12] (гл. VI).

г) *Принцип максимума Л. С. Понтрягина* — один из основных методов математической теории оптимальных процессов. Изложение этого принципа содержится в монографиях [37], [38]. Он особенно удобен при решении вариационных задач со связями, содержащими ограничения на функции управления. Основные математические проблемы обоснования принципа максимума были решены его создателями (академиком Л. С. Понтрягиным и его учениками В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко). Некоторые математические аспекты принципа были изучены Л. И. Розоноэром [39]. Вопросы применимости принципа максимума для исследования оптимальных

движений в динамике космического полета рассматривались Лейтманом [28], [30], [40], В. К. Исаевым [41], [42] и др.

д) *Принцип оптимальности Беллмана* (или метод *динамического программирования*) также является одним из основных методов математической теории оптимальных процессов. Основы этого метода изложены его создателем в книгах [43], [44] и в многочисленных научных статьях. Практическое применение метода динамического программирования в динамике космического полета связано с использованием ЭВМ с большой емкостью оперативной памяти. Известно [12], что задача о минимизации интегрального функционала, зависящего от двумерного вектора управления, требует машинной оперативной памяти в 40 000 ячеек. Для решения вариационных задач большей размерности требуются еще более мощные вычислительные машины.

Описание принципа максимума и метода динамического программирования с точки зрения приложений в механике космического полета можно найти в сборнике [12].

### § 1.01. Понятие функционала

**Определение 1.** Пусть  $Y$  — множество (или пространство) функций  $y(x)$  ( $y(x) \in Y$ ,  $a \leq x \leq b$ ), а  $R$  — некоторое множество чисел ( $L \in R$ ). *Функционалом*  $L[y(x)]$  называется однозначное отображение функционального множества  $Y$  на числовое множество  $R$  [2], [3], [45]. Множество  $Y$  называется областью определения для функционала  $L[y(x)]$ ;  $y(x)$  является аргументом функционала  $L[y(x)]$  (см. [2], [3], [45]).

**Определение 2.** *Вариацией аргумента*  $y(x)$  функционала  $L(y)$  называется

$$\delta y = y(x) - y_1(x) \quad (y(x) \in Y, y_1(x) \in Y). \quad (8.1.01)$$

Аналогично определяются вариации производных аргумента, если  $y(x)$   $k$ -дифференцируема на  $a \leq x \leq b$ :

$$\begin{aligned} \delta y' &= y'(x) - y_1'(x), \\ \delta y'' &= y''(x) - y_1''(x), \\ \delta y^{(k)} &= y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Кроме того, имеют место равенства

$$(\delta y)' = \delta y', \quad (\delta y)'' = \delta y'', \quad \dots, \quad (\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}. \quad (8.1.02)$$

**Определение 3.** Функциональное пространство называется *метрическим*, если для него определено расстояние (введена метрика). *Расстоянием*  $\rho(y_1, y_2)$  между двумя произволь-

ными элементами  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  множества  $Y$  называется некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- а)  $\rho(y_1, y_2) = \rho(y_2, y_1)$  для любых  $y_1(x) \in Y$  и  $y_2(x) \in Y$ .  
 б)  $\rho(y_1, y_2) > 0$  при  $y_1 \neq y_2$ ,  $\rho(y_1, y_1) = 0$  для любого  $y_1(x) \in Y$ ;  
 в)  $\rho(y_1, y_3) \leq \rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, y_3)$  для любых  $y_1(x) \in Y$ ,  $y_2(x) \in Y$ ,  $y_3(x) \in Y$  (неравенство треугольника (см. [3])).

Здесь в качестве расстояния между элементами  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  пространства  $Y$  примем

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{s=0}^k \sup_{a \leq x \leq b} |y_1^{(s)}(x) - y_2^{(s)}(x)|. \quad (8.1.03)$$

Число  $k$  может равняться 0, 1, 2 и т. д.

Определение 4. Функционал  $L[y(x)]$  называется *непрерывным на кривой  $y = y_0(x)$  в смысле близости  $k$ -го порядка*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что при  $\rho(y, y_0) < \delta$  выполняется неравенство

$$\left. \begin{aligned} |L[y(x)] - L[y_0(x)]| < \varepsilon, \\ y(x) \in Y, \quad y_0(x) \in Y. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.04)$$

Определение 5. Функционал  $L[y(x)]$  называется *линейным*, если

$$\left. \begin{aligned} L[cy(x)] &= cL[y(x)], \\ L[y_1(x) + y_2(x)] &= L[y_1(x)] + L[y_2(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.05)$$

Пусть  $Y$  есть  $n$ -мерная область в  $n$ -мерном пространстве фазовых координат  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $U$  — множество  $m$ -мерных функций  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  ( $\mathbf{u} \in U$ ), управляющих изменением фазового вектора  $y(x)$ , а  $D_{n+m} = Y \times U$  (декартово произведение  $Y$  и  $U$ ).

Определение 6. Пара вектор-функций  $(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)) \in D_{n+m}$  называется *минимизирующей парой* или *минималью*, если она доставляет минимальное значение функционалу  $L[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)]$ ;  $(n+m)$ -мерная область  $D_{n+m}$  называется *областью допустимых функций*. Пара  $(\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)) \in D_{n+m}$ , доставляющая экстремум функционалу  $L$ , называется *экстремалью* (см. [37], [38]).

Пусть из  $D_{n+m}$  можно выделить такое подмножество допустимых функций, принадлежащих однопараметрическому семейству  $\mathbf{y}(x, \mu)$ ,  $\mathbf{u}(x, \mu)$ , где  $\mu$  — параметр, что при  $\mu = 0$  получаем минималь

$$\mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}(x), \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x). \quad (8.1.06)$$



Определение 7. *Первой вариацией функционала  $L[\mathbf{y}, \mathbf{u}]$ , определенной на однопараметрическом семействе  $(\mathbf{y}(x, \mu), \mathbf{u}(x, \mu))$ , называется функционал*

$$L^{(1)}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] = \left( \frac{dL}{d\mu} \right)_{\mu=0} \quad (8.1.07)$$

Аналогично определяется вариация  $k$ -го порядка:

$$L^{(k)}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] = \left( \frac{d^k L}{d\mu^k} \right)_{\mu=0} \quad (8.1.08)$$

Вариационное исчисление занимается исследованием экстремальных значений различных функционалов, однако для астродинамики наиболее важными являются методы, позволяющие находить экстремумы функционалов не на произвольных функциональных множествах  $Y$ , а на множестве решений некоторой системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, x), \quad (8.1.09)$$

где  $\mathbf{y}(x)$  —  $n$ -мерный фазовый вектор, определяющий положение движущегося объекта,  $\mathbf{u}(x)$  —  $m$ -мерный управляющий вектор.

### § 1.02. Задача Лагранжа. Множители Лагранжа. Уравнения Эйлера

В динамике космического полета иногда рассматриваются вариационные задачи, использующие лишь классические уравнения движения, в которых не участвуют управляющие функции. Для решения задач такого рода могут найти применение вариационные задачи *Лагранжа*, *Майера*, *изопериметрическая задача*, *задача Больца*.

Пусть  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  удовлетворяет  $m$  уравнениям связи вида

$$f_i(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m < n) \quad (8.1.10)$$

и  $p$  краевым условиям

$$\psi_k(x_0, \mathbf{y}(x_0), x_1, \mathbf{y}(x_1)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p < 2n + 2). \quad (8.1.11)$$

*Задача Лагранжа. Среди всех кусочно-гладких векторов  $\mathbf{y}(x)$  найти такой  $\bar{\mathbf{y}}(x)$ , который доставляет экстремум функционалу*

$$L[\mathbf{y}(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f_0(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx. \quad (8.1.12)$$

Необходимое условие существования решения для этой задачи сводится к достаточной гладкости функций  $f_s$  ( $s = 0, 1, \dots$

...,  $m$ ) и  $\psi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ). Условия, наложенные на  $f_i$ ,  $\psi_k$  и другие функции, участвующие в формулировках перечисленных задач, приводятся, например, в [45].

Для определения вектора экстремали  $\bar{\mathbf{y}}(x)$  можно воспользоваться теоремой Лагранжа.

**Теорема Лагранжа.** Компоненты  $\bar{y}_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) вектора  $\bar{\mathbf{y}}(x)$ , доставляющего экстремум функционалу (8.1.12), должны удовлетворять (кроме уравнений связи (8.1.10)) уравнениям Эйлера:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'_k} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.1.13)$$

где функция Лагранжа  $F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$  равна

$$F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = f_0(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{s=1}^m \lambda_s f_s(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}'), \quad (8.1.14)$$

$\lambda_s(x)$  — множители Лагранжа.

Совместное решение системы уравнений Эйлера и уравнений связи позволяют определить  $n + m$  неизвестных  $\bar{y}_1(x)$ ,  $\bar{y}_2(x)$ , ...,  $\bar{y}_n(x)$ ;  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$ ,  $\lambda_3(x)$ , ...,  $\lambda_m(x)$ . Функции  $\bar{y}_i(x)$  необходимо решают вариационную задачу для функционала (8.1.12).

### § 1.03. Первая формулировка задачи Майера

Пусть  $(n + 1)$ -мерный вектор  $\mathbf{y}(x) = (y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x))$  удовлетворяет уравнениям связи

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') &= 0, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, m < n) \end{aligned}$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} y_0(x_0) &= a_0, & y_1(x_0) &= a_1, & \dots, & y_n(x_0) &= a_n, \\ y_1(x_1) &= b_1, & \dots, & y_n(x_1) &= b_n, \end{aligned}$$

где  $a_0, a_1, \dots, b_n$  — заданные числа.

Среди гладких векторов  $\mathbf{y}(x)$  найти такой, компонента  $y_0(x)$  которого имеет при  $x = x_1$  экстремум.

### § 1.04. Вторая формулировка задачи Майера

Пусть  $(n + 1)$ -мерный вектор  $\mathbf{y}(x) = (y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x))$  удовлетворяет  $m$  уравнениям связи

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') &= 0, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, m < n) \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

и  $p$  краевым условиям

$$\begin{aligned} y_0(x_0) = a_0, \quad y_1(x_0) = a_1, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = a_n, \quad (8.1.16) \\ \psi_k(x_1, y_1(x_1), \dots, y_n(x_1)) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, p < n+1). \end{aligned}$$

Среди гладких векторов  $\mathbf{y}(x)$  найти такой, компонента  $y_0(x)$  которого имеет максимум в точке  $x = x_1$ .

Задача Майера в такой формулировке относится к вариационным задачам «с подвижными концами».

### § 1.05. Изопериметрическая задача

Пусть  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$  удовлетворяет заданным краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_0) = a_1, \quad y_2(x_0) = a_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = a_n, \\ y_1(x_1) = b_1, \quad y_2(x_1) = b_2, \quad \dots, \quad y_n(x_1) = b_n \end{aligned} \right\} \quad (8.1.17)$$

( $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  — заданные числа) и интегральным связям вида

$$L_s(\mathbf{y}) = \int_{x_0}^{x_1} f_s(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx = c_s \quad (s=1, 2, \dots, k), \quad (8.1.18)$$

где  $c_s$  — заданные числа.

Среди всех кусочно-гладких векторов  $\mathbf{y}(x)$  найти такой, который доставляет экстремум функционалу

$$L_0[\mathbf{y}(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f_0(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx. \quad (8.1.19)$$

Если числа  $c_s$  произвольные, то множество допустимых функций (см. § 1.01) может оказаться пустым, т. е. задача может не иметь смысла.

### § 1.06. Задача Больца

Пусть  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  удовлетворяет  $m$  уравнениям связи

$$\varphi_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (i=1, \dots, m < n) \quad (8.1.20)$$

и  $p$  краевым условиям

$$\psi_k(x_0, \mathbf{y}(x_0), x_1, \mathbf{y}(x_1)) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p \leq 2n+2). \quad (8.1.21)$$

Среди всех кусочно-гладких вектор-функций  $y(x)$  найти такую, которая доставляет экстремум функционалу

$$L_0[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f_0(x, y, y') dx + g_0(x_0, y(x_0), x_1, y(x_1)). \quad (8.1.22)$$

Существуют и другие формулировки задачи Больца [45]. Заметим также, что изопериметрическая задача, задачи Лагранжа и Майера могут рассматриваться как частные случаи задачи Больца.

### § 1.07. Третья формулировка задачи Майера. Обобщение теоремы Лагранжа. Характеристические уравнения (обобщенные уравнения Эйлера — Лагранжа)

В задачах механики космического полета применяется другая формулировка задачи Майера.

Пусть  $n$ -мерный фазовый вектор  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ , описывающий состояние управляемого объекта, удовлетворяет  $n$ -мерному дифференциальному уравнению (8.1.09)

$$\frac{dy}{dx} = f(y, u, x) \quad (x_0 \leq x \leq x_1),$$

где  $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))$  есть  $m$ -мерный вектор управления, непрерывный при всех  $x_0 \leq x \leq x_1$ , кроме, быть может, конечного числа точек разрыва. Пусть  $n$ -мерный вектор  $f$  имеет непрерывные компоненты и частные производные достаточно высокого порядка по всем аргументам  $y, u, x$  в некоторой  $(n+m+1)$ -мерной области  $G_{n+m+1}$ , для которой допустимые значения  $y, u$  и  $x$  являются координатами внутренних точек. Пусть, кроме того, известны начальные условия

$$y_k(x_0) = y_{k0} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.1.23)$$

так что при заданном векторе управления  $u(x)$  существует единственное решение уравнения (8.1.09), непрерывное по  $x$ , но с разрывными производными в точках разрыва вектора  $u(x)$ .

Предположим, что на систему наложены связи, описываемые  $p$  равенствами

$$g_s = (y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m; x) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, p < m), \quad (8.1.24)$$

где  $g_s(y, u, x)$  — непрерывные и достаточное число раз дифференцируемые функции по всем аргументам. Функции  $g_s(y, u, x)$  должны быть такими, чтобы соответствующие им координаты  $y_1, y_2, \dots, y_q, q \leq n$  принимали заданные значения при  $x = x_1$ :

$$y_l(x_1) = y_{l,1} \quad (l = 1, 2, \dots, q). \quad (8.1.25)$$

Обозначим через  $y_{q+1,1}, y_{q+2,1}, \dots, y_{n,1}$  значения переменных  $y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_n$  при  $x = x_1$ . Заметим, что  $y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_n$  не связаны краевыми условиями (8.1.25).

Задача Майера для заданного  $x = x_1$ . Необходимо определить такой управляющий вектор  $u^*(x)$ , чтобы при  $u(x) = u^*(x)$  соответствующее ему решение векторного уравнения (8.1.09)  $y^*(x)$  удовлетворяло уравнениям связи (8.1.24), краевым условиям (8.1.25), а заданный функционал

$$L[y_{q+1,1}, y_{q+2,1}, \dots, y_{n,1}] \quad (8.1.26)$$

принимал бы минимальное значение (см. [20]).

З а м е ч а н и е. Если  $x_1$  переменна, то функционал

$$L[y_{q+1,1}, y_{q+2,1}, \dots, y_{n,1}, x_1] \quad (8.1.27)$$

минимизируется и по  $x_1$ .

Управление  $u^*(x)$  называется *оптимальным управлением*, а соответствующее ему решение  $y^*(x)$  уравнения (8.1.09) называется *оптимальным решением* (*оптимальным движением*, *оптимальной траекторией*).

Обобщение теоремы Лагранжа. Компоненты  $u_1^*(x), u_2^*(x), \dots, u_m^*(x)$  оптимального вектора управления  $u^*(x)$  и компоненты  $y_1^*(x), y_2^*(x), \dots, y_n^*(x)$  соответствующего ему оптимального решения  $y^*(x)$ , доставляющие минимум функционалу (8.1.26), должны удовлетворять (кроме уравнений (8.1.09), условий связи (8.1.24) и краевых условий (8.1.23) и (8.1.25)) и характеристическим уравнениям (или обобщенным уравнениям Эйлера — Лагранжа)

$$\lambda_i = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y_i} dx + \lambda_{i,0} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8.1.28)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (8.1.29)$$

где функция Лагранжа  $F(x, y, u)$  выражается равенством\*)

$$F(x, y, u) = -(\lambda, f) + (u, g) = \\ = - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) f_i(x, y, u) + \sum_{s=1}^p \mu_s(x) g_s(x, y, u). \quad (8.1.30)$$

Функции  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$  и  $\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_p(x)$  суть множители Лагранжа.

Таким образом, число функций, подлежащих определению, равно  $2n + m + p$  ( $n$  компонент оптимального решения  $y^*(x)$ ,

\*) Символом  $(a, b)$  обозначено скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ .

$m$  компонент оптимального управления  $u^*(x)$ ,  $n$  множителей Лагранжа  $\lambda_i(x)$  и  $p$  множителей Лагранжа  $\mu_k(x)$ ). Эти функции определяются  $2n$  дифференциальными или интегральными уравнениями (8.1.09) и (8.1.28) и  $m + p$  функциональными уравнениями (8.1.24) и (8.1.29), поэтому для однозначного их определения необходимо иметь  $2n$  краевых условий. Выше написаны  $n + q$  краевых условий (8.1.23) и (8.1.25). Остальные  $n - q$  краевых условий определяются равенствами [4]

$$\lambda_s(x_1) = - \frac{\partial L}{\partial y_{s,1}} \quad (s = q + 1, q + 2, \dots, n). \quad (8.1.31)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Если решается вариационная задача для функционала (8.1.27), то необходимо иметь не  $2n$  краевых условий, а  $2n + 1$  (см. [20]). Недостающее краевое условие имеет вид [9]

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_1) \frac{dy_i(x_1)}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x_1}. \quad (8.1.32)$$

**З а м е ч а н и е 2.** Если оптимальное решение  $y^*(x)$  и оптимальное управление  $u^*(x)$  принадлежат некоторому пространству непрерывных функций, то вместо интегральных уравнений (8.1.28) можно воспользоваться эквивалентными им дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8.1.33)$$

которые вместе с (8.1.29) представляют уравнения Эйлера (§ 1.02) для функции Лагранжа (8.1.30) (см. [20]).

**З а м е ч а н и е 3.** Обобщение теоремы Лагранжа, как и сама теорема Лагранжа (§ 1.02), выражает лишь необходимое условие существования оптимального решения и оптимального управления.

### § 1.08. Свойство множителей Лагранжа на ломаных экстремалиях.

#### Условие Вейерштрасса — Эрдмана

Если вектор управления  $u(x)$  претерпевает конечные разрывы в некоторых точках  $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \dots, x = \alpha_k$ , принадлежащих отрезку  $[x_0, x_1]$ , то для существования *ломаной экстремали* (экстремали, каждое звено которой также является экстремалью) необходимо, чтобы выполнялось условие Вейерштрасса — Эрдмана.

Условие Вейерштрасса — Эрдмана. В точках разрыва (в угловых точках) множители Лагранжа  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots$

...,  $\lambda_n(x)$  и функция  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \frac{dy_i(x)}{dx}$  должны быть непрерывными.

Аналитически условие Вейерштрасса — Эрдмана в форме, удобной для задачи Майера, выражается неравенством [20]

$$(\lambda(x), f(y^*(x), u^*(x), x)) \geq (\lambda(x), f(y^*(x), u(x), x)), \quad (8.1.34)$$

которое должно выполняться при любом  $x \in [x_0, x_1]$ , в том числе и в угловых точках  $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \dots, x = \alpha_n$ .

В (8.1.34) вектор  $f(y^*(x), u(x), x)$  вычисляется на минимали  $y^*(x)$ , а вектор управления  $u(x)$  может быть любым, лишь бы удовлетворялись уравнения связи (8.1.24).

### § 1.09. Принцип максимума Понтрягина

Пусть движение некоторого управляемого объекта описывается  $n$ -мерным дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(y, u). \quad (8.1.35)$$

Вектор-функция  $f(y, u)$  считается непрерывной по всем аргументам в  $(m+n)$ -мерной области  $D_{m+n} = Y \times U$  и непрерывно дифференцируемой по  $y \in Y$ . Если  $m$ -мерный управляющий вектор  $u(x)$  задан, то при конкретных начальных условиях уравнение (8.1.35) имеет единственное решение.

Наряду с уравнением (8.1.35) рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} L[y(x), u(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} f_0(y(x), u(x)) dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f_0(y_1(x), \dots, y_n(x); u_1(x), \dots, u_m(x)) dx, \end{aligned} \quad (8.1.36)$$

для которого подынтегральная функция  $f_0(y(x), u(x))$  непрерывно дифференцируема по всем аргументам в  $D_{m+n}$ .

В фазовом пространстве  $Y$  даны две точки,  $y_0$  и  $y$ .

Необходимо найти среди допустимых управлений  $u(x)$ , переводящих движущийся объект из положения  $y_0$  в положение  $y$ , такое управление  $u^*(x)$ , для которого функционал (8.1.36) принимает наименьшее возможное значение, т. е.

$$L[y^*(x), u^*(x)] = \inf_{u \in U} L[y(x), u(x)]. \quad (8.1.37)$$

В (8.1.37)  $y^*(x)$  — решение уравнения (8.1.35), удовлетворяющее условиям

$$y^*(x_0) = y_0, \quad y^*(x_1) = \bar{y}. \quad (8.1.38)$$

Выше было сказано, что  $y_0$  и  $\bar{y}$  задаются, а значения независимой переменной  $x$ ,  $x_0$  и  $x_1$  не задаются, а определяются из (8.1.38).

Для существования оптимального управления  $u^*(x)$  и оптимального движения  $y^*(x)$  необходимо существование ненулевой непрерывной и дифференцируемой  $(n+1)$ -мерной вектор-функции  $\psi(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$ , компоненты которой удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dx} &= - \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_k(y(x), u(x))}{\partial y_i} \psi_k(x) \\ (i=0, 1, 2, \dots, n), \quad x_0 \leq x \leq x_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.39)$$

Кроме того, она должна быть такой, что функция

$$H(\psi, y, u) = \sum_{k=0}^n \psi_k f_k(y, u),$$

рассматриваемая как функция  $u \in U$ , достигает при  $u = u^*$  максимума.

При  $x = x_1$

$$\psi_0(x_1) \leq 0, \quad \sum_{k=0}^n \psi_k(x) f_k(y^*(x_1), u^*(x_1)) = 0.$$

Если  $\psi(x)$ ,  $y(x)$ ,  $u(x)$  удовлетворяют системам (8.1.35) и (8.1.39), то функции  $\psi_0$  и  $\sum_{k=0}^n \psi_k f_k$ , рассматриваемые как функции  $x$ , являются постоянными и значение  $x_1$  можно заменить любым другим.

Чаще всего целесообразно в качестве множества управляющих функций  $U$  рассматривать  $m$ -мерный (открытый или замкнутый) параллелепипед

$$|u_s| \leq 1 \quad (s = 1, 2, \dots, m).$$

Если  $|u_s| < 1$ , то принцип максимума совпадает с необходимым условием Вейерштрасса [2], если же  $|u_s| \leq 1$ , то классическое условие Вейерштрасса становится непригодным.

Существует большое число работ, посвященных различным аспектам принципа максимума. Среди них основополагающими являются монографии [37], [38].



### § 1.10. Принцип оптимальности Беллмана

Пусть состояние некоторой физической системы определяется  $n$ -мерным фазовым вектором  $y$ . Пусть, кроме того, имеется семейство преобразований  $\{T(y, u)\}$  с переменным вектором (решением)  $u$ , играющим роль параметра и переводящим вектор  $y$  в вектор  $z$ :

$$z = T(y, u).$$

Процесс, состоящий из выбора  $N$  решений  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , назовем  *$N$ -шаговым процессом*.

Свяжем с  $N$ -шаговым процессом некоторую скалярную функцию

$$F(y_1, y_2, \dots, y_N; u_1, u_2, \dots, u_N),$$

называемую *критерием* или *функцией дохода*.

Последовательность допустимых решений  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$  называется *политикой (стратегией)*. Политика, обеспечивающая максимальное значение функции дохода  $F$ , называется *оптимальной политикой* или *оптимальной стратегией*.

Имеет место

принцип оптимальности [44]. *Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и принятое начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, возникшего в результате первоначального решения.*

Из этого принципа выводятся основные уравнения динамического программирования (*уравнения Беллмана*), которые могут рассматриваться как некоторые рекуррентные соотношения, описывающие многоступенчатую оптимизацию в предельном случае при неограниченном возрастании числа шагов. Уравнения Беллмана являются функциональными уравнениями и им можно придать различный вид.

Например, если рассматривается задача о максимизации функционала

$$L[u] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, u) dx$$

при ограничениях

$$\frac{dy}{dx} = G(y, u), \quad y(x_0) = c, \quad 0 \leq u \leq y,$$

то, как показано в [44], решение этой задачи сводится к решению функционального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sup_{0 \leq u \leq c} \left[ F(c, u) + G(c, u) \frac{\partial f}{\partial c} \right], \quad (8.1.40)$$

где  $f(c, x_1)$  — «функция дохода на бесконечном числе шагов» в терминологии Беллмана [44].

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В этой главе приводятся основные сведения из механики переменной массы. Подробности вывода соответствующих уравнений можно найти в [46]—[50].

### § 2.01. Основное уравнение динамики точки переменной массы (уравнение Мещерского)

Пусть масса  $M$  некоторого тела (рассматриваемого как материальная точка) изменяется в результате отделения от него частиц.

Если движение точки переменной массы происходит в силовом поле  $\mathbf{F}$ , то уравнение ее движения в векторной форме имеет вид [46], [47]

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM_1}{dt} \mathbf{V}_1, \quad (8.2.01)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость точки в некоторой неподвижной системе координат  $Oxyz$ ,  $\mathbf{V}_1$  — относительная скорость отделяющихся частиц,  $M_1$  — суммарная масса отделяющихся частиц.

Уравнение (8.2.01) называется *уравнением И. В. Мещерского*.

Если вместо относительной скорости  $\mathbf{V}_1$  ввести абсолютную скорость отделяющихся частиц

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{v}, \quad (8.2.02)$$

то уравнению Мещерского можно придать вид

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM_1}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}). \quad (8.2.03)$$

В некоторых задачах считается, что  $M_1 = M$ .

В координатной форме уравнения Мещерского записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{dM_1}{dt} \left( u_{1x} - \frac{dx}{dt} \right), \\ M \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{dM_1}{dt} \left( u_{1y} - \frac{dy}{dt} \right), \\ M \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{dM_1}{dt} \left( u_{1z} - \frac{dz}{dt} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.2.04)$$

где  $x, y, z$  — координаты материальной точки в неподвижной системе координат  $Oxyz$ ,  $u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}$  — компоненты абсолютной скорости отделяющихся частиц,  $X, Y, Z$  — компоненты равнодействующей  $F$  внешних сил.

### § 2.02. Обобщенное уравнение Мещерского

Пусть наряду с отделением частиц происходит присоединение частиц к точке переменной массы. Тогда уравнение движения в векторной записи имеет вид

$$M \frac{dv}{dt} = F + \frac{dM_1}{dt} V_1 + \frac{dM_2}{dt} V_2, \quad (8.2.05)$$

где  $V_2$  — относительная скорость присоединяющихся частиц,  $M_2$  — суммарная масса присоединяющихся частиц.

Уравнение (8.2.05) может быть названо *обобщенным уравнением Мещерского* [46].

Другие формы записи уравнения (8.2.05):

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad M \frac{dv}{dt} &= F + \frac{dM_1}{dt} (u_1 - v) + \frac{dM_2}{dt} (u_2 - v), \\ \text{б) } \quad \left\{ \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{dM_1}{dt} \left( u_{1x} - \frac{dx}{dt} \right) + \frac{dM_2}{dt} \left( u_{2x} - \frac{dx}{dt} \right), \\ M \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{dM_1}{dt} \left( u_{1y} - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dM_2}{dt} \left( u_{2y} - \frac{dy}{dt} \right), \\ M \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{dM_1}{dt} \left( u_{1z} - \frac{dz}{dt} \right) + \frac{dM_2}{dt} \left( u_{2z} - \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Абсолютная скорость присоединяющихся частиц  $u_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})$  в системе координат  $Oxyz$  определяется векторным равенством

$$u_2 = V_2 + v.$$

Читателю, интересующемуся выводом уравнений Мещерского, рекомендуем книгу А. А. Космодемьянского [47]. Там же доказаны основные теоремы динамики точки переменной массы.

### § 2.03. Уравнения движения тела переменной массы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

Пусть положение тела переменной массы в пространстве определяется  $s$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_s$ . Тогда уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + P_k \quad (8.2.06)$$

полностью описывают движение тела переменной массы. Следует лишь написать функции  $T, Q_k, P_k$  в явном виде.

Если тело переменной массы может быть представлено как сумма  $N$  точек переменной массы, то кинетическая энергия тела  $T$  равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i(t) v_i^2 \quad (8.2.07)$$

Обобщенная сила  $Q_k$  (скаляр) равна

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_i^{(e)}, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right), \quad (8.2.08)$$

где  $F_i^{(e)}$  — равнодействующая внешних сил, приложенных к точке  $m_i$ ,  $r_i$  — радиус-вектор точки  $m_i$ .

Функция  $P_k$  (скаляр) выражается равенством

$$P_k = \sum \frac{dm_i}{dt} \left( u_i, \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (8.2.09)$$

где  $u_i$  — абсолютная скорость отделяющихся от точки  $m_i$  частиц.

### § 2.04. Канонические уравнения движения тела переменной массы

Если ввести обобщенные импульсы

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

то уравнения Лагранжа (8.2.06) принимают «полуканоническую» форму

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + P_k + Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (8.2.10)$$

где

$$H(p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T. \quad (8.2.11)$$

Если внешние силы допускают силовую функцию  $U$  и абсолютные скорости отбрасываемых частиц  $u_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), а следовательно, и  $P_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ), то в этом случае уравнения движения (8.2.10) принимают *каноническую форму Гамильтона*

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (8.2.12)$$

где  $H = \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ .

Функция Лагранжа  $L$  равна  $T + U$ .

Основные теоремы динамики тела переменной массы можно найти, например, в [47]. Различные вопросы теории движения тел переменной массы рассмотрены многими авторами [12], [13], [30], [48]—[51].

## Глава 3

### НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Глава 3 содержит различные формы уравнений ракетодинамики. Кратко излагается постановка и решение оптимальных задач динамики полета в околоземном пространстве.

#### § 3.01. Уравнения движения ракеты. Формула Циолковского

*Ракетой* назовем аппарат, снабженный реактивными двигателями, движение которого происходит под действием внешней силы  $F$  и реактивной тяги  $T$ , обусловленной сгоранием топлива (рабочего тела) в двигателях. Ракета — это частный случай тела переменной массы, поэтому ее движение описывается уравнениями Мещерского (8.2.01) и (8.2.05), в которых следует положить  $M_1 = M$  ( $M$  — масса ракеты),  $V_1 = -c$  ( $c$  — скорость истечения частиц относительно ракеты на срезе сопел реактивных двигателей).

Сила тяги  $T$  равна

$$T = -c \frac{dM}{dt},$$

а уравнение движения ракеты принимает вид

$$M \frac{dv}{dt} = F - c \frac{dM}{dt}. \quad (8.3.01)$$

Уравнение (8.3.01) справедливо при условии, что  $|c| = \text{const}$ .

Отрезок траектории, на котором  $T \neq 0$ , называется *активным участком*, а отрезок траектории, на котором  $T \equiv 0$ , называется *пассивным участком*.

Если рассматривать движение ракеты в неподвижной системе координат  $Oxuz$ , то уравнения для координат ракеты  $x, y, z$

выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= X - c_x \frac{dM}{dt}, \\ M \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - c_y \frac{dM}{dt}, \\ M \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - c_z \frac{dM}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (8.3.02)$$

где  $F = (X, Y, Z)$ ,  $c = (c_x, c_y, c_z)$ .

Если внешние силы отсутствуют ( $F = 0$ ) и движение ракеты вызывается лишь силой тяги, то уравнение (8.3.01) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{c}{M} \frac{dM}{dt}. \quad (8.3.03)$$

Уравнение (8.3.03) интегрируется в любом промежутке времени ( $t_0, t$ ):

$$\left. \begin{aligned} v - v_0 &= c \ln \frac{M_0}{M}, \\ v(t_0) &= v_0, \quad v(t) = v, \\ M(t_0) &= M_0, \quad M(t) = M. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.04)$$

Уравнение (8.3.04) носит название формулы К. Э. Циолковского [47].

Определение. Величина

$$V = c \ln \frac{M_0}{M_p} \quad (8.3.05)$$

( $M_p$  — масса ракеты без топлива) называется *характеристической скоростью ракеты* или *характеристической скоростью маневра* [20]. Она определяет величину изменения скорости ракеты за счет расхода топлива, поэтому многие оптимальные задачи динамики космического полета связаны с минимизацией величины (8.3.05).

Если вектор  $c$  коллинеарен с вектором скорости  $v$  и противоположен по направлению, то движение ракеты будет прямолинейным.

Обозначим через  $M_T$  массу топлива. Тогда очевидно, что

$$M_0 = M_T + M_p$$

и из формулы Циолковского (8.3.05) можно получить скорость ракеты в конце *активного участка траектории*

$$v_p = v_0 - c \ln \left( 1 + \frac{M_T}{M_0} \right). \quad (8.3.06)$$

Если начальная скорость ракеты  $v_0 = 0$ , то для абсолютной величины скорости  $v_p$  в конце *активного участка траектории* имеем

$$v_p = c \ln \left( 1 + \frac{M_T}{M_p} \right). \quad (8.3.07)$$

Определение. Отношение  $M_T/M_p$  называется *числом Циолковского*.

Уравнение

$$M \frac{dv}{dt} = F \quad (8.3.08)$$

описывает движение ракеты на пассивных участках траектории, а уравнение

$$M_p \frac{dv}{dt} = F \quad (8.3.09)$$

описывает движение ракеты на последнем пассивном участке траектории.

Пусть масса ракеты является заданной функцией времени  $M(t) = M_0 f(t)$ , где  $f(t)$  — некоторая неотрицательная монотонно убывающая функция времени, не превосходящая единицу. Можно показать [47], что изменение массы ракеты по линейному закону ( $f(t) = 1 - \alpha t$ ,  $\alpha = \text{const}$ ,  $\alpha > 0$ ) порождает постоянную силу тяги  $T = \text{const}$  (при  $c = \text{const}$ ), а изменение массы по показательному закону ( $f(t) = e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha = \text{const}$ ,  $\alpha > 0$ ) порождает постоянное ускорение ракеты.

Определение. Функция

$$m(t) = - \frac{dM}{dt} = - \frac{dM_T}{dt} \quad (8.3.10)$$

называется *расходом массы в единицу времени* (например, *секундным расходом*), а функция

$$\alpha(t) = - \frac{1}{M_0} \frac{dM}{dt} \quad (8.3.11)$$

называется *удельным расходом топлива в единицу времени*.

Определение. Число

$$n = \frac{a_p}{g} \quad (8.3.12)$$

(где  $a_p$  — ускорение, сообщаемое ракете тягой,  $g$  — ускорение силы тяжести) называется *перегрузкой* или *величиной перегрузки*.

Для показательного закона изменения массы перегрузка постоянна.

Подробнее эти вопросы рассмотрены в [20], [47], [49], [51].



### § 3.02. Развернутая форма характеристических уравнений для задачи о движении ракеты

Пользуясь формулой для секундного расхода топлива (8.3.10), уравнение движения ракеты (8.3.01) при наличии внешней силы  $\Phi$  можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{cm}{M} \mathbf{l} + \mathbf{G}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (8.3.13)$$

где  $\mathbf{l}$  — единичный вектор направления тяги,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор ракеты в неподвижной системе координат  $Oxyz$ ,  $\mathbf{G} = \frac{1}{M} \Phi$ ,  $c$  — модуль относительной скорости истечения газов.

К уравнениям (8.3.13) можно присоединить еще три условия:

а) условие (8.3.10)

$$\frac{dM}{dt} = -m(t), \quad (8.3.14)$$

определяющее массу ракеты, если известна зависимость секундного расхода топлива от времени;

б) тождество

$$|\mathbf{l}|^2 \equiv l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \equiv 1, \quad (8.3.15)$$

где  $l_x, l_y, l_z$  — направляющие косинусы вектора тяги;

в) условие ограниченности секундного расхода топлива

$$0 \leq m(t) \leq \bar{m}, \quad (8.3.16)$$

где  $\bar{m}$  — максимальное значение секундного расхода топлива.

Неравенство (8.3.16) эквивалентно уравнению [52]

$$m(\bar{m} - m) - \alpha^2 = 0, \quad (8.3.17)$$

где  $\alpha$  — вспомогательная управляющая переменная.

Управляющая вектор-функция  $\mathbf{u}(x)$  в общем случае имеет компоненты  $l_x, l_y, l_z, m, \alpha$ . Величины  $l_x, l_y, l_z$  характеризуют ориентацию вектора тяги,  $\alpha$  — ограниченность  $m(t)$ . Если управляющий пятимерный вектор  $\mathbf{u}(x)$  известен и непрерывен, то при заданных начальных условиях

$$t = t_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad M = M_0 \quad (8.3.18)$$

траектория ракеты и закон изменения массы  $M$  определяются единственным образом (если сила есть непрерывная функция).

Пусть требуется определить такую оптимальную траекторию ракеты, на которой некоторый функционал  $L[\mathbf{v}, \mathbf{r}, M]$  принимает минимальное значение при  $t = t_1$ .

Функция Лагранжа (8.1.30) в данном случае будет иметь вид

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, l, m, \alpha, t) = - \left( \mathbf{p}, \frac{cm}{M} \mathbf{l} + \mathbf{G} \right) - (\Lambda, \mathbf{v}) + \\ + \nu m + \mu_1 (|\mathbf{l}|^2 - 1) + \mu_2 [m(\bar{m} - m) - \alpha^2], \quad (8.3.19)$$

где

$$\mathbf{p}(t) = (p_x, p_y, p_z), \quad \Lambda(t) = (\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z), \quad \mathbf{v}(t), \quad \mu_1(t), \quad \mu_2(t)$$

— множители Лагранжа.

Система характеристических уравнений (8.1.33) и (8.1.29) с функцией Лагранжа (8.3.19) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= -\Lambda_x, & \frac{dp_y}{dt} &= -\Lambda_y, & \frac{dp_z}{dt} &= -\Lambda_z, \\ \frac{d\Lambda_x}{dt} &= - \left( \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \right), & \frac{d\Lambda_y}{dt} &= - \left( \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right), & & \\ \frac{d\Lambda_z}{dt} &= - \left( \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} \right), & \frac{d\nu}{dt} &= \frac{cm}{M^2} (\mathbf{p}, \mathbf{l}), & & \\ 0 &= -\frac{cm}{M} p_x + 2\mu_1 l_x, & 0 &= -\frac{cm}{M} p_y + 2\mu_1 l_y, & & \\ 0 &= -\frac{cm}{M} p_z + 2\mu_1 l_z, & & & & \\ 0 &= -\frac{c}{M} (\mathbf{p}, \mathbf{l}) + \nu + \mu_2 (\bar{m} - 2m), & & & & \\ 0 &= -2\mu_2 \alpha. & & & & \end{aligned} \right\} \quad (8.3.20)$$

Система (8.3.20) содержит семь дифференциальных и пять алгебраических уравнений.

### § 3.03. Определение базис-вектора и $\mathbf{p}$ -траектории.

#### Определение функций переключения

Определение. Вектор  $\mathbf{p}$  с компонентами  $p_x, p_y, p_z$  [см. (8.3.19)] называется *базис-вектором траектории* [20].

Пользуясь обобщенными уравнениями Эйлера — Лагранжа (8.3.20), можно показать [20], что *вектор тяги  $\mathbf{T}$  коллинеарен базис-вектору  $\mathbf{p}$* .

Определение. Годограф базис-вектора  $\mathbf{p}$  называется  *$\mathbf{p}$ -траекторией*.

Определение. Функция, определяющая порядок составления экстремалей из частичных участков (дуг), называется *функцией переключения* [53], [54].

Можно различать функцию переключения величины тяги  $\kappa(t)$  и функцию переключения направления тяги  $\delta(t)$ . Аналити-

ческий вид функций  $\kappa(t)$ ,  $\delta(t)$  существенно зависит от решаемой задачи и от участка оптимальной траектории.

Анализ обобщенных уравнений Эйлера — Лагранжа, выполненный Миеле [55], Лейтманом [56], Миеле и Капеллари [57], Фридом [58], Лоуденом [18], [20], [59], [60] и другими авторами, показывает, что оптимальная траектория (экстремаль) может состоять в общем случае из дуг следующих типов: участки нулевой тяги ( $m(t) \equiv 0$  и функция переключения величины тяги неположительна,  $\kappa(t) \leq 0$ ), участки промежуточной тяги ( $0 < m(t) < \bar{m}$ , функция переключения величины тяги равна нулю,  $\kappa(t) = 0$ ) и участки максимальной тяги ( $m(t) = \bar{m}$ , функция переключения величины тяги неотрицательна,  $\kappa(t) \geq 0$ ). Для двумерных (или большей размерности) оптимальных траекторий функция переключения направления тяги неотрицательна,  $\delta(t) \geq 0$ .

Лоуден показал [20], что базис-вектор  $p(t)$  удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \nabla(p, G), \quad (8.3.21)$$

где векторный оператор  $\nabla$  определяется формулой

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

а  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  — единичные векторы.

Лоуден также вывел [20] равенства, связывающие функцию переключения величины тяги с базис-вектором и массой ракеты. На участке нулевой тяги функцию  $\kappa(t)$  можно определить из равенства

$$\kappa(t) = \frac{c}{M} |p| + \text{const}, \quad \kappa(t) \leq 0. \quad (8.3.22)$$

На участке максимальной тяги  $\kappa(t)$  определяется из дифференциального соотношения

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{c}{M(t)} \frac{d|p|}{dt}, \quad \kappa(t) \geq 0. \quad (8.3.23)$$

Равенства (8.3.22) и (8.3.23) определяют явную зависимость функции переключения величины тяги  $\kappa(t)$  от времени  $t$ , если решены обобщенные уравнения Эйлера — Лагранжа (8.3.20), а  $p$  и  $M$  найдены как функции времени  $t$ .

Если ускорение  $G = G(x, y, z)$ , обусловленное внешней силой, не зависит от времени, то уравнение (8.3.21) имеет первый интеграл

$$(p, G) - (p, v) + \kappa m = C. \quad (8.3.24)$$

На участке нулевой тяги и на участке промежуточной тяги ( $\kappa(t) = 0$ ) интеграл (8.3.24) принимает вид

$$(\mathbf{p}, \mathbf{G}) - (\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{v}) = C, \quad (8.3.25)$$

причем  $C$  сохраняет значение на всей оптимальной траектории.

З а м е ч а н и е.  $C = 0$ , если время перелета нефиксировано и подлежит оптимизации [20].

### § 3.04. Определение импульсной тяги. Точки соединения на оптимальных траекториях

О п р е д е л е н и е. Тяга  $T$  называется *импульсной* при  $t = t_1$ , если  $m(t_1) = +\infty$  (или, очевидно,  $\frac{dM}{dt} \Big|_{t=t_1} = -\infty$ ).

В соответствии с условием (8.3.16)  $\bar{m} = +\infty$ , а это означает, что решение вариационных задач с импульсной тягой может оказаться более простым делом, так как ограничения вида (8.3.16) или (8.3.17) отпадают.

Очевидно, участок приложения импульсной тяги *вырождается в точку*, называемую *точкой соединения*. В точках соединения меняется лишь скорость ракеты.

Т е о р е м а Лоудена [20]. В точках соединения функция переключения величины тяги  $\kappa(t)$  необходимо имеет нулевой максимум, т. е.

$$\kappa(t) = \frac{d\kappa(t)}{dt} = 0. \quad (8.3.26)$$

Лоуденом установлены [20], [60]—[62] также свойства оптимальной траектории, на которой имеются точки соединения:

а) базис-вектор  $\mathbf{p}(t)$  и его производная  $\dot{\mathbf{p}}(t)$  всюду непрерывны (в том числе и в точках соединения);

б) на любом активном участке вектор тяги совпадает с базисом, причем  $|\mathbf{p}(t)| = P$  ( $P$  — некоторая постоянная);

в) на любом участке нулевой тяги  $|\mathbf{p}(t)| \leq P$ ;

г)  $|\dot{\mathbf{p}}| = 0$  во всех точках соединения, исключая те, которые совпадают с конечными точками оптимальной траектории.

Кроме того, в точках соединения векторы  $\mathbf{p}(t)$  и  $\dot{\mathbf{p}}(t)$  ортогональны

$$(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = 0. \quad (8.3.27)$$

### § 3.05. Максимизация высоты вертикального подъема ракеты в однородном поле тяжести

Пусть исследуется движение ракеты при следующих предположениях:

а) ускорение силы тяжести постоянно,  $\mathbf{g} = \text{const}$ ;

б) вектор тяги направлен вертикально вверх;

в) скорость истечения частиц  $c$  постоянна;

г) сопротивление атмосферы отсутствует.

Если закон изменения массы ( $M = M_0 f(t)$ ) известен, то интегрирование уравнения вертикального подъема ракеты можно довести до конца. Действительно, внешнее поле определяется силой  $F = -Mg$ , поэтому уравнение (8.3.01) принимает вид

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - c \frac{dM}{dt}. \quad (8.3.28)$$

В результате интегрирования (8.3.28) имеем

$$v(t) = v_0 - gt + c \ln \frac{M_0}{M}$$

или, так как  $M = M_0 f(t)$ , ( $f(0) = 1$ ,  $f(t) > 0$ ),

$$v(t) = v_0 - gt - c \ln f(t). \quad (8.3.29)$$

Повторное интегрирование определяет высоту подъема ракеты как функцию времени

$$H(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} - c \int_0^t \ln f(t) dt. \quad (8.3.30)$$

Пусть  $H_a$  — общая длина всех активных участков, а  $H_p$  — общая длина всех пассивных участков траектории. Тогда высота подъема ракеты  $H_k$  равна

$$H_k = H_a + H_p.$$

**1. Простейшая вариационная задача.** Предположим, что выполнены условия а) — г), и пусть, кроме того, заданы масса топлива  $M_T$  и некоторое  $k$ -параметрическое множество  $\Phi$  функций  $f(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ . Требуется решить задачу о максимизации высоты подъема ракеты на множестве  $\Phi$ .

Пусть  $t_p$  — момент полного сгорания топлива. Тогда из соотношения

$$M_p = M_0 f(t_p, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = M_0 - M_T \quad (8.3.31)$$

можно найти  $t_p$  как функцию параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Обозначим эту зависимость через

$$t_p = T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k). \quad (8.3.32)$$

Формулы

$$v_p = v_0 - gT(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - c \ln \left( 1 - \frac{M_T}{M_0} \right), \quad (8.3.33)$$

$$H_a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} - c \int_0^T \ln f(t) dt, \quad (8.3.34)$$

$$H_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{v_p^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[ v_0 - gT - c \ln \left( 1 - \frac{M_T}{M_0} \right) \right]^2, \quad (8.3.35)$$

полученные из (8.3.29) и (8.3.30), выражают скорость ракеты и длины активного и пассивного участков как функции параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Общая высота подъема ракеты равна

$$H_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} - c \int_0^T \ln f(t) dt + \frac{1}{2g} \left[ v_0 - gT - c \ln \left( 1 - \frac{M_T}{M_0} \right) \right]^2. \quad (8.3.36)$$

Соотношение (8.3.36) показывает, что задача о максимизации высоты  $H_k$  в известном классе функций  $f \in \Phi$  является задачей об исследовании на экстремум функции  $k$  переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  (см. [1], [9], [30], [63]). Полное решение задачи для однопараметрических семейств функций ( $f(t) = 1 - \alpha t$  и  $f(t) = e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ ) дано в [47].

**2. Общая вариационная задача.** Уравнениям (8.3.13), (8.3.14) можно придать форму

$$\frac{dH}{dt} - v = 0, \quad \frac{dv}{dt} + g - \frac{cm}{M} = 0, \quad \frac{dM}{dt} + m = 0. \quad (8.3.37)$$

Если секундный расход топлива ограничен, то следует добавить еще условие (8.3.17)

$$m(\bar{m} - m) - \alpha^2 = 0.$$

Пусть, кроме того, заданы граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{начальные условия } t=0, \quad H=H_0, \quad v=v_0, \quad M=M_0, \\ \text{конечные условия } t=t_k, \quad v=v_k, \quad M=M_k. \end{array} \right\} \quad (8.3.38)$$

**3. Формулировка задачи.** В классе функций  $H(t), v(t), M(t), m(t), \alpha(t)$ , удовлетворяющих уравнениям (8.3.37), (8.3.17) и граничным условиям (8.3.38), найти такую систему функций, которая максимизирует функционал

$$L = H_k - H_0, \quad (8.3.39)$$

где  $H_k$  — наибольшая (конечная) высота.

Функция Лагранжа (8.3.19) для данной задачи равна

$$F = -p \left( -g + \frac{cm}{M} \right) - \Lambda v + \nu m + \mu [m(\bar{m} - m) - \alpha^2], \quad (8.3.40)$$

а уравнения Эйлера — Лагранжа (8.3.20) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\Lambda, & \frac{d\Lambda}{dt} &= 0, & \frac{dv}{dt} &= \frac{cm}{M^2} p, \\ 0 &= \nu - p \frac{c}{M} + \mu(\bar{m} - 2m), & 0 &= -2\mu\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.41)$$

Анализ уравнений (8.3.41), выполненный Миеле [55], [64], Лоуденом [20], Лейтманом [65], показывает, что оптимальная траектория состоит лишь из участков нулевой тяги и участков максимальной тяги, причем на оптимальной траектории имеется только одна угловая точка, т. е. оптималь состоит из двух участков (участка максимальной тяги и участка нулевой тяги). Для данной задачи легко находится также функция переключения величины тяги  $\kappa(t)$  [12].

Из уравнений (8.3.41) вытекает, что одномерный базис-вектор  $p$  является линейной функцией времени.

### § 3.06. Максимизация горизонтальной дальности полета ракеты в однородном поле тяжести при заданной программе расхода топлива

Пусть движение ракеты исследуется при следующих допущениях:

а) Земля считается плоской и ускорение силы тяжести постоянно,  $g = \text{const}$ ;

б) сопротивление атмосферы отсутствует;

в) программа расхода топлива  $cm/M$  — заданная функция времени  $f(t)$ ;

г) вектор тяги  $T(T_x, T_y)$  всегда лежит в вертикальной плоскости  $Oxy$ , проходящей через точку запуска  $O$ ;

д) двигатель работает при  $0 \leq t \leq t_1$ , после чего выключается и ракета дальше движется под действием силы тяжести;

е) скорость истечения продуктов сгорания  $c$  постоянна.

Формулировка задачи. *Требуется найти функцию  $\Theta(t)$ , управляющую ориентацией силы тяги, обеспечивающую максимальную горизонтальную дальность ракеты  $L = OB$  (рис. 81).*

Движение ракеты описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, & \frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{du}{dt} &= f(t) \cos \Theta(t), & \frac{dv}{dt} &= f(t) \sin \Theta(t) - g. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.42)$$

Кроме того, заданы начальные условия:

$$\text{при } t=0 \quad x=y=u=v=0.$$

При  $t = t_1$  никаких условий не наложено.

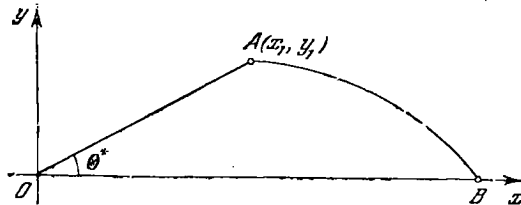


Рис. 81. Оптимальная траектория перелета.  $OA$ —активный участок полета;  $A$ —точка выключения двигателя;  $\theta^*$ —оптимальная управляющая функция.

Рассматривая (8.3.42) как уравнения связи, можно сделать вывод, что данная вариационная задача является задачей Майера. Функция Лагранжа (8.3.19) имеет вид

$$F = -\rho_x f \cos \Theta - \rho_y (f \sin \Theta - g) - \Lambda_x u - \Lambda_y v. \quad (8.3.43)$$

Исследуя обобщенные уравнения Эйлера — Лагранжа с функцией (8.3.43), Лоуден показал [2], что управляющая функция  $\Theta(t)$  (угол наклона вектора тяги к горизонту) находится из условия

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}, \quad (8.3.44)$$

где  $u_1, v_1$  — проекции скорости ракеты в точке  $A$  выключения двигателя (рис. 82). Из (8.3.44) следует, что максимальная дальность достигается при постоянном  $\Theta = \Theta^*$ , независимо от заданной программы расхода топлива  $f(t)$ , так как последняя не входит в (8.3.44).

Чтобы решить уравнения движения (8.3.42) и определить однозначно  $L_{\max}$ , нужно задать конкретный вид функции  $f(t)$ .

Лоуденом показано [20], [66], что при  $f = \text{const}$  и  $\frac{dM}{dt} = \text{const}$

$$L_{\max} = ft_1^2 \left( \frac{l}{g} \operatorname{ctg} \Theta - \frac{1}{2} \cos \Theta \right). \quad (8.3.45)$$

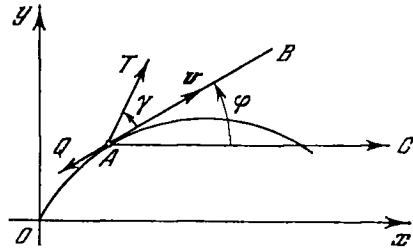


Рис. 82. Полет ракеты в однородном поле тяжести.  $AB$ —касательная к траектории в точке  $A$ .



### § 3.07. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести

Исследуется движение ракеты при допущениях а), б), г), д) и е) § 3.06. Тогда система уравнений движения ракеты вместе с условием (8.3.17) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, & \frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{cm}{M} \cos \Theta, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{cm}{M} \sin \Theta - g, \\ \frac{dM}{dt} &= -m, & m(\bar{m} - m) - \alpha^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.46)$$

Формулировка задачи. В классе функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $M(t)$ ,  $m(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\Theta(t)$ , удовлетворяющих уравнениям (8.3.46) и некоторым граничным условиям (число граничных условий не должно превышать 12), найти систему функций, минимизирующую некоторый функционал  $L = L(t, x, y, u, v, M)$ .

Заметим, что среди искомых функций  $m(t)$  определяет программу расхода топлива, а  $\Theta(t)$  — программу ориентации вектора тяги.

Функция Лагранжа (8.3.19) для данной задачи имеет вид

$$F = -p_x \frac{cm}{M} \cos \Theta - p_y \left( \frac{cm}{M} \sin \Theta - g \right) - \Lambda_x u - \Lambda_y v + \\ + \nu m + \mu [m(\bar{m} - m) - \alpha^2], \quad (8.3.47)$$

а соответствующие обобщенные уравнения Эйлера — Лагранжа (8.3.20) принимают форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= -\Lambda_x, & \frac{dp_y}{dt} &= -\Lambda_y, \\ \frac{d\Lambda_x}{dt} &= 0, & \frac{d\Lambda_y}{dt} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{cm}{M^2} (p_x \cos \Theta + p_y \sin \Theta), \\ 0 &= -\frac{c}{M} (p_x \cos \Theta + p_y \sin \Theta) + \nu + \mu(\bar{m} - 2m), \\ 0 &= -2\mu\alpha, & 0 &= p_x \sin \Theta - p_y \cos \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.48)$$

Анализ уравнений (8.3.48), выполненный различными авторами [12], [56]—[58], [66], [67], позволяет сделать следующие выводы:

- 1) дуги экстремалей, проходимые при промежуточной тяге, отсутствуют;  
 2) угол  $\Theta(t)$ , определяющий направление вектора тяги относительно оси абсцисс, определяется формулой

$$\operatorname{tg} \Theta(t) = \frac{C_4 - C_2 t}{C_3 - C_1 t},$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные интегрирования;

3) если функционал  $L$  не зависит явно от  $u$  и  $v$ , то угол  $\Theta$  постоянен;

4) оптимальная начальная скорость параллельна вектору тяги (если  $L = L(t, x, y, m)$ );

5) если  $L$  не зависит от  $x$ , то тангенс угла  $\Theta$  является линейной функцией времени.

Используя функции переключения  $\kappa(t)$  и  $\delta(t)$ , связанные с множителями Лагранжа формулами

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{c}{m} (p_x \cos \Theta + p_y \sin \Theta) - v, \\ \delta(t) &= p_x \cos \Theta + p_y \sin \Theta, \end{aligned}$$

можно показать [12], что экстремаль состоит не более чем из трех участков и разрыв в направлении вектора тяги возможен только при условии  $p_x = p_y = 0$ .

Задача об оптимальном запуске искусственного спутника, решенная Лоуденом [20], является частным случаем изложенной задачи.

### § 3.08. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести при наличии аэродинамического сопротивления

Пусть движение ракеты исследуется при следующих допущениях (см. рис. 82):

- а) Земля считается плоской и ускорение силы тяжести постоянно,  $g = \operatorname{const}$ ;  
 б) скорость истечения частиц  $c$  постоянна;  
 в) сила сопротивления атмосферы  $Q$  зависит от высоты ракеты над горизонтом  $y$ , скорости  $v$  и от подъемной силы  $F_{\pi}$ ;  
 г) вектор тяги  $T(T_x, T_y)$  лежит в вертикальной плоскости  $Oxy$ , проходящей через точку запуска  $O$ ;  
 д) на величину секундного расхода топлива  $m(t)$  наложено ограничение (8.3.16) или, что то же самое, (8.3.17).

Тогда уравнения движения ракеты вместе с условиями связи (8.3.14) и (8.3.17) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \cos \varphi, & \frac{dy}{dt} &= v \sin \varphi, \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \varphi + \frac{cm}{M} \cos \gamma - \frac{Q(y, v, F_{\Pi})}{M}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{g \cos \varphi}{v} + \frac{F_{\Pi} + cm \sin \gamma}{Mv}, \\ \frac{dM}{dt} &= -m(t), \\ m(\bar{m} - m) - \alpha^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.49)$$

Формулировка задачи. В классе функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $M(t)$ ,  $m(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $F_{\Pi}(t)$ , удовлетворяющих уравнениям (8.3.49) и некоторым граничным условиям (число которых должно быть менее 12), найти такую систему функций, которая минимизирует некоторый функционал  $L=L(x, y, v, \varphi, M, t)$ .

Функция Лагранжа (8.3.19) и соответствующие уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$F = -p_v \left( -g \sin \varphi - \frac{Q - cm \cos \gamma}{M} \right) - p_{\varphi} \left( -\frac{g \cos \varphi}{v} + \frac{F_{\Pi} + cm \sin \gamma}{Mv} \right) - \Lambda_x v \cos \varphi - \Lambda_y v \sin \varphi + vm + \mu [m(\bar{m} - m) - \alpha^2], \quad (8.3.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_x}{dt} &= 0, & \frac{d\Lambda_y}{dt} &= \frac{p_v}{M} \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ \frac{dp_v}{dt} &= -\Lambda_x \cos \varphi - \Lambda_y \sin \varphi + \frac{p_v}{M} \frac{\partial Q}{\partial v} - \\ & & & - \frac{p_{\varphi} g \cos \varphi}{v^2} + \frac{p_{\varphi} (F_{\Pi} + cm \sin \gamma)}{Mv^2}, \\ \frac{dp_{\varphi}}{dt} &= p_v g \cos \varphi - \frac{p_v g \sin \varphi}{v} + \Lambda_x v \sin \varphi - \Lambda_y v \cos \varphi, \\ \frac{dv}{dt} &= -p_v \frac{Q - cm \cos \gamma}{M^2} + p_{\varphi} \frac{F_{\Pi} + cm \sin \gamma}{M^2 v}, \\ 0 &= -\frac{p_v c \cos \gamma}{M} - \frac{p_{\varphi} c \sin \gamma}{Mv} + v + \mu(\bar{m} - 2m), \\ 0 &= -2\mu\alpha, \\ 0 &= p_v \sin \gamma - \frac{p_{\varphi} \cos \gamma}{v}, & 0 &= p_v \frac{\partial Q}{\partial F_{\Pi}} - \frac{p_{\varphi}}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.51)$$

В формуле (8.3.50)  $p_v$ ,  $p_{\varphi}$ ,  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_y$ ,  $v$ ,  $\mu$  — множители Лагранжа.

Анализ уравнений (8.3.51) при различных предположениях относительно функционала  $L$ , силы сопротивления  $Q$  и размер-

ности задачи, выполненный Миеле [68], [69], Лейтманом [70], Брайсоном и Россом [71] и др., позволяет сделать следующее заключение.

1) При наличии сопротивления атмосферы оптимальная траектория состоит из участков нулевой тяги, максимальной тяги и промежуточной (переменной) тяги.

2) Оптимальная программа подъемной силы  $F_{\Pi}$  является непрерывной функцией времени.

3) Функции переключения величины тяги и направления тяги определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{c}{M} \left( p_v \cos \gamma + \frac{p_{\Phi} \sin \gamma}{v} \right) - v, \\ \delta(t) &= p_v \cos \gamma + \frac{p_{\Phi} \cos \gamma}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.52)$$

Если уравнения Эйлера — Лагранжа разрешены относительно искомым функций, то равенства (8.3.52) позволяют задать функции переключения как явные функции времени.

4) Для планирующих траекторий ( $T = 0$ ) оптимальная программа полета достигается в том случае, когда сила аэродинамического сопротивления минимальна по отношению к скорости при постоянных значениях уровня энергии и подъемной силы.

Достаточно подробно эта задача изложена в главе IV монографии [12].

Полное решение простейшей вариационной задачи (задачи о максимальном движении ракеты в сопротивляющей атмосфере) дано А. А. Космодемьянским [47]. Можно также указать на интересные результаты Оберта [51], А. А. Космодемьянского [72], Д. Е. Охоцимского [73].

### § 3.09. Определение оптимальной программы тяги при вертикальном подъеме ракеты в неоднородном поле тяготения в сопротивляющейся атмосфере

*Формулировка задачи. Найти такую программу для величины тяги, которая обеспечивала бы максимальную высоту вертикального подъема ракеты при следующих предположениях:*

а) поле тяготения неоднородно ( $g = g(h)$ ,  $h$  — высота ракеты);

б) сила аэродинамического сопротивления — известная функция  $Q = Q(h, \dot{h})$ ;

в) вектор тяги направлен вертикально вверх;

г) секундный расход топлива  $t(t)$  удовлетворяет условию (8.3.17).

Система уравнений задачи имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{Q - cm}{M} - g, \\ \frac{dM}{dt} &= -m, \\ m(\bar{m} - m) - \alpha^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.53)$$

Функция Лагранжа и соответствующие характеристические уравнения записываются следующим образом:

$$F = -\frac{p_h}{M}(cm - Q - Mg) - \Lambda_h v + \nu m + \mu [m(\bar{m} - m) - \alpha^2], \quad (8.3.54)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_h}{dt} &= -\Lambda_h + \frac{p_h}{M} \frac{\partial Q}{\partial v}, \\ \frac{d\Lambda_h}{dt} &= \left( \frac{1}{M} \frac{\partial Q}{\partial h} + \frac{dg}{dh} \right) p_h, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{cm - Q}{M^2} p_h, \\ 0 &= -\frac{c}{M} p_h + \nu + \mu(\bar{m} - 2m), \\ 0 &= -2\alpha\mu. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.55)$$

Полное решение вариационной задачи для функционала  $L = h_1$  ( $h_1$  — высота ракеты, достигаемая при  $t = t_1$ ) дано Лоуденом [20].

Предполагалось, что  $Q(h, \dot{h})$  и  $g(h)$  — монотонно убывающие функции высоты  $h$ , а

$$Q(h, \dot{h}) = Ae^{-\beta h} \left( \frac{dh}{dt} \right)^\gamma$$

( $A, \beta, \gamma$  — некоторые параметры;  $A$  зависит от миделева сечения ракеты,  $\beta > 0$ ). Как показал Лоуден, оптимальная траектория состоит либо из двух участков (участок максимальной тяги  $m(t) = \bar{m}$  и участок нулевой тяги  $m = 0$ ), либо из трех участков (участок максимальной тяги, участок промежуточной тяги и участок нулевой тяги). См. также [65].

### § 3.10. Задача о максимизации полной энергии космического аппарата

Формулировка задачи. *Требуется найти такой маневр, чтобы полная энергия ракеты была максимальной в некоторый (свободный для выбора) момент времени  $t = t_1$ .*

Задача решается при следующих предположениях:

- а) внешнее силовое поле консервативно;
  - б) начальная точка траектории  $r(t_0)$ , начальная скорость  $v(t_0)$  и начальная масса ракеты  $M_0$  заданы;
  - в) масса ракеты  $M_p$  (без топлива) известна;
  - г) конечная точка траектории  $r(t_1)$  и конечная скорость  $v(t_1)$  заранее не известны;
  - д) секундный расход топлива ограничен.
- Полная энергия ракеты  $H$  равна

$$H = M \left[ V(x, y, z) + \frac{1}{2} v^2 \right]$$

( $MV(x, y, z)$  — потенциальная энергия ракеты), поэтому сформулированная задача является вариационной задачей о нахождении минимума функционала

$$L(x_1, y_1, z_1, v_x, v_y, v_z) = -V(v_1, x_1, z_1) - \frac{1}{2} [v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2], \quad (8.3.56)$$

где

$$x_1 = x(t_1), \dots, v_{z_1} = v_z(t_1).$$

Эта задача относится к разряду задач Майера (см. § 1.07), поэтому для нахождения оптимального решения (шестимерного вектора с компонентами  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ ), оптимального управления (пятимерного вектора с компонентами  $l_x, l_y, l_m, m, \alpha$ ), множителей Лагранжа  $p_x, p_y, p_z, \Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z, v, \mu_1, \mu_2$  необходимо совместно решить уравнения движения ракеты (8.3.13) (система шестого порядка), характеристические уравнения (8.3.20) (семь дифференциальных уравнений и пять алгебраических уравнений), уравнение (8.3.14), равенства (8.3.15) и (8.3.17).

Совместная система 21 уравнения (8.3.13)—(8.3.15), (8.3.17) и (8.3.20) состоит из четырнадцати дифференциальных уравнений и семи алгебраических уравнений, поэтому для определения оптимального решения и оптимального управления необходимо иметь четырнадцать краевых условий. Восемь из них даны в формулировке задачи:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } t = t_0 \quad r = r_0, \quad v = v_0, \quad M = M_0, \\ \text{при } t = t_1 \quad M = M_p. \end{array} \right\} \quad (8.3.57)$$

Остальные шесть краевых условий определяются равенствами (8.1.31) и имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} p_x(t_1) = v_{x_1}, \quad p_y(t_1) = v_{y_1}, \quad p_z(t_1) = v_{z_1}, \\ \Lambda_x(t_1) = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{t=t_1}, \quad \Lambda_y(t_1) = \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{t=t_1}, \quad \Lambda_z(t_1) = \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{t=t_1}. \end{array} \right\} \quad (8.3.58)$$

Условия (8.3.58) эквивалентны [20] условиям

$$\rho(t_1) = \mathbf{v}(t_1), \quad \dot{\rho}(t_1) = \mathbf{G}(x_1, y_1, z), \quad (8.3.59)$$

т. е. в конечной точке траектории базис-вектор совпадает с конечной скоростью, а производная базис-вектора равна ускорению, обусловленному внешним полем.

Подробный анализ уравнений (8.3.13)—(8.3.17), (8.3.20) с краевыми условиями (8.3.57) и (8.3.58) проведен Лоуденом в работах [20], [61]. Здесь же рассмотрена задача без предположения д).

### § 3.11. Задача о минимизации характеристической скорости маневра

*Формулировка задачи. Требуется минимизировать характеристическую скорость маневра (8.3.05) при условии, что конечные точки ( $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ ) траектории и скорости ( $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}_1$ ) в конечных точках заданы, а сам момент  $t_1$  не фиксирован.*

Минимизируемый функционал выражается формулой (8.3.05)

$$L = c \ln \frac{M_0}{M_p}. \quad (8.3.60)$$

Анализируя эту задачу, Лоуден показал [20], что на любом активном участке оптимальной траектории базис-вектор должен быть единичным вектором ( $\rho = 1$ ), коллинеарным с вектором тяги.

Теория оптимальных движений ракет в однородном поле тяжести получила значительное развитие и в работах [27], [41], [42], [74].

## МЕЖОРБИТАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

В главе 4 приводятся основные сведения о межорбитальных перелетах. Дана постановка ряда оптимальных задач динамики космического полета.

### § 4.01. Простейшая краевая задача

Требуется найти элементы эллиптической орбиты  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$ , имеющей одним из фокусов притягивающий центр  $O$  с массой  $m_0$  и проходящей через две заданные точки  $M_1$  и  $M_2$ , если время перелета  $T$  из  $M_1$  в  $M_2$  известно (рис. 83).

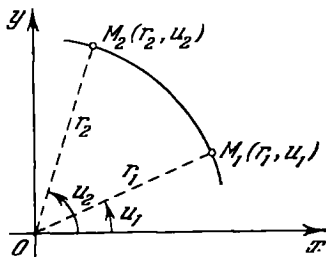


Рис. 83. Орбита перелета.  $M_1, M_2$  — дуга эллиптической орбиты, проходящей через заданные точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Уравнения, определяющие элементы  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p &= r_i [1 + e \cos(u_i - \omega)] \quad (i = 1, 2), \\ E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) &= \frac{\sqrt{f m_0 (1 - e^2)^3}}{p \sqrt{p}} T, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.01)$$

где  $E_1, E_2$  — значения эксцентрисической аномалии для точек  $M_1$  и  $M_2$ .

Для однозначного определения неизвестных следует к уравнениям (8.4.01) добавить соотношения

$$\sin E_i = \frac{\sin(u_i - \omega) \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos(u_i - \omega)}, \quad \cos E_i = \frac{\cos(u_i - \omega) + e}{1 + e \cos(u_i - \omega)}. \quad (8.4.02)$$

Выбор значений  $E_1$  и  $E_2$  следует выполнять с учетом условия

$$\text{sign tg } \frac{u_i - \omega}{2} = \text{sign tg } \frac{E_i}{2} \quad (i = 1, 2). \quad (8.4.03)$$



С использованием такой методики в работе [75] была построена таблица приближенных орбит перелета Земля — Венера. Там же изложена методика учета дифференциальных поправок к элементам, вызванных различными отклонениями в координатах точек  $M_1$  и  $M_2$ .

**З а м е ч а н и е.** Аналогичная методика применима и для определения параметров параболических и гиперболических орбит перелета [76], только в этих случаях последнее уравнение системы (8.4.01) должно быть заменено соответствующим динамическим уравнением (см. ч. II, §§ 2.03, 2.04).

**§ 4.02. Уравнение для базиса-вектора на участке нулевой тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения**

Базис-вектор  $\mathbf{p}$ , коллинеарный вектору тяги  $\mathbf{T}$  (см. § 3.03), удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению (8.3.21)

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = \nabla(\mathbf{p}, \mathbf{G}). \quad (8.4.04)$$

Если внешнее поле потенциально, то уравнение (8.4.04) принимает вид [20]

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = (\mathbf{p}, \nabla\mathbf{G}), \quad (8.4.05)$$

где  $\nabla\mathbf{G}$  — скалярное произведение вектора  $\nabla$  и вектора  $\mathbf{G}$ . Можно показать [4], что справедливо тождество

$$(\mathbf{p}, \nabla) = |\mathbf{p}| \frac{\partial}{\partial s}, \quad (8.4.06)$$

где  $\frac{\partial}{\partial s}$  означает дифференцирование по направлению базиса-вектора  $\mathbf{p}$ .

Тождество (8.4.06) позволяет придать уравнению для базиса-вектора (8.4.05) форму

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = |\mathbf{p}| \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial s}. \quad (8.4.07)$$

Уравнения (8.4.05) и (8.4.07), определяющие базис-вектор  $\mathbf{p}(t)$ , справедливы для любого потенциального внешнего поля.

Если движение ракеты происходит в ньютоновском поле, то

$$\mathbf{G} = -\frac{f m_0}{r^3} \mathbf{r}. \quad (8.4.08)$$

Пользуясь (8.4.08), уравнение (8.4.07) можно привести к виду

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} = \frac{3f m_0}{r^5} (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{r} - \frac{f m_0}{r^3} \mathbf{p}. \quad (8.4.09)$$

Однако ни одно из уравнений (8.3.21), (8.4.05), (8.4.07), (8.4.08), рассматриваемых изолированно, не определяют базис-вектор  $\mathbf{p}(t)$ , так как они содержат и другие неизвестные (например,  $\mathbf{r}$ ), поэтому указанные уравнения нужно рассматривать в совокупности с уравнениями Эйлера (8.3.20) и уравнениями движения (8.3.13).

На участке нулевой тяги движение ракеты в ньютоновском центральном поле происходит по коническому сечению, поэтому зависимость радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  от времени  $t$  известна (см. ч. II, § 3.06). Это облегчает решение уравнения для базис-вектора.

Лоуден доказал [20], что компоненты  $q_x, q_y, q_z$  (в системе координат  $OXYZ$  ось  $OX$  направлена по радиусу-вектору ракеты; ось  $OY$  лежит в плоскости орбиты по направлению движения ракеты; ось  $OZ$  перпендикулярна к плоскости  $OXY$ ) вспомогательного вектора  $\mathbf{q}$ , связанного с базисом-вектором  $\mathbf{p}$  равенством

$$\mathbf{p} = |\mathbf{r}| \mathbf{q}, \quad (8.4.10)$$

определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q_x}{d\Theta^2} - 2 \frac{dq_y}{d\Theta} &= \frac{3r}{\rho} q_x, \\ \frac{d^2 q_y}{d\Theta^2} + 2 \frac{dq_x}{d\Theta} &= 0, \\ \frac{d^2 q_z}{d\Theta^2} + q_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.11)$$

где  $\rho$  — параметр орбиты,  $\Theta$  — полярный угол ракеты в неподвижной системе координат.

Полярный угол  $\Theta$  определяется интегралом площадей (см. формулу (2.1.19))

$$r^2 \frac{d\Theta}{dt} = \sqrt{f m_0 \rho},$$

поэтому его также можно считать известной функцией времени.

В книге Лоудена [20] приведены компоненты  $p_x, p_y, p_z$  базис-вектора как явные функции истинной аномалии. Явная зависимость  $\mathbf{p}$  от времени содержит бесконечные ряды, так как переход от истинной аномалии ко времени связан с решением уравнения Кеплера (см. ч. II, § 2.01).

### § 4.03. Уравнение для базиса-вектора на участке промежуточной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения

Нахождение явной зависимости базиса-вектора от времени для участка промежуточной тяги в общем виде представляет собой неразрешимую задачу. Однако, как показал Лоуден [20], [77], [78], если участок промежуточной тяги лежит в плоскости, проходящей через притягивающий центр, то такое решение может быть получено.

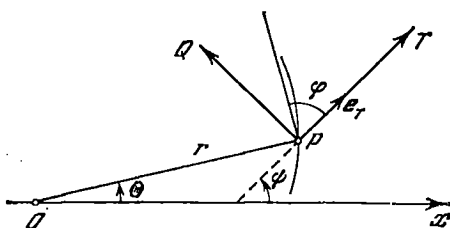


Рис. 84. Участок промежуточной тяги.  $PTQ$  — подвигная прямоугольная система координат, основная ось которой  $PT$  направлена вдоль тяги  $T$ .

Участок промежуточной тяги полностью определяется семью неизвестными функциями времени: полярные координаты ракеты  $r$  и  $\Theta$ , компоненты скорости ракеты  $v$  в системе координат  $PTQ$  (рис. 84),  $v_T$  и  $v_Q$ , углы  $\varphi$  и  $\psi$  и абсолютная величина реактивного ускорения  $a = cm/M$  ( $m$  — секундный расход топлива,  $c$  — модуль скорости истечения газа,  $M$  — масса ракеты).

Перечисленные семь неизвестных функций определяются из следующих уравнений:

Перечисленные семь неизвестных функций определяются из следующих уравнений:

$$\psi + \varphi = \frac{\pi}{2} + \Theta, \quad (8.4.12)$$

$$\frac{dv_T}{dt} - v_Q \frac{d\psi}{dt} = a - \frac{fm_0}{r^2} \sin \varphi, \quad (8.4.13)$$

$$\frac{dv_Q}{dt} + v_T \frac{d\psi}{dt} = \frac{fm_0}{r^2} \cos \varphi, \quad (8.4.14)$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{fm_0}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi), \quad (8.4.15)$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{3fm_0}{r^3} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (8.4.16)$$

$$v_T = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\Theta}{dt} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (8.4.17)$$

$$v_Q = -\frac{dr}{dt} \cos \varphi + r \frac{d\Theta}{dt} \sin \varphi. \quad (8.4.18)$$

Уравнение (8.4.12) очевидно (см. рис. 84). Уравнения (8.4.13) и (8.4.14) описывают движение ракеты [см. (8.3.01)] в системе координат  $PTQ$ . Уравнения (8.4.15) и (8.4.16) определяют проекции базиса-вектора  $p$  на оси  $PT$  и  $PQ$ . Уравнения (8.4.17) и

(8.4.18) выражают связь между проекциями скорости ракеты  $v_T$ ,  $v_Q$  и радиальной и трансверсальной компонентами скорости ракеты  $\dot{r}$  и  $r\dot{\Theta}$ .

Интегрирование уравнений (8.4.12)—(8.4.18) существенно упрощается, если время перелета не фиксировано. Соответствующие результаты можно найти у Лоудена [20], [77]—[79]. В частности, Лоуден показывает, что для малых углов  $\varphi$  тяга на участке промежуточной тяги направлена по биссектрисе угла между касательной к траектории и трансверсалью  $PQ$ .

#### § 4.04. Уравнение для базиса-вектора на участке максимальной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения

Участок максимальной тяги полностью определяется теми же семью величинами, которые приведены в § 4.03, с той лишь разницей, что модуль реактивного ускорения  $a$  принимает максимальное значение

$$\bar{a} = \frac{c\bar{m}}{M}, \quad (8.4.19)$$

где  $\bar{m}$  — величина, ограничивающая секундный расход топлива [см. (8.3.16)]. В силу этого на участке максимальной тяги необходимо решать те же уравнения (8.4.12)—(8.4.18) с заменой  $m$  на  $\bar{m}$ . Принципиально трудности, встречающиеся при интегрировании уравнений для участка промежуточной тяги, остаются и здесь.

#### § 4.05. Метод $p$ -траекторий. Структура оптимальной траектории

В книге Лоудена [20] рассмотрено движение ракеты по оптимальной траектории при следующих допущениях:

- а) оптимальная траектория — кривая, лежащая в плоскости, проходящей через центр притяжения;
- б) поле тяготения ньютоновское;
- в) время перелета не фиксировано и подлежит оптимизации;
- г) все участки максимальной тяги суть точки соединения.

Предположение а) означает, что базис-вектор  $p$  является двумерным. Предположение в) упрощает интегрирование уравнений для базиса-вектора  $p$  (см. §§ 4.02, 4.04), так как согласно замечанию из § 3.03 первый интеграл (8.3.25) уравнений для базиса-вектора имеет более простой вид. Предположение г) означает, что максимальная тяга аппроксимируется импульсами.

Если уравнения для базиса-вектора проинтегрированы и, следовательно, известна явная зависимость проекций базиса-

вектора  $p_x$  и  $p_y$  от времени или от другого параметра (например, от истинной аномалии), то, исключая время, получим уравнение  $p$ -траектории, содержащее модуль базиса-вектора. Аналитический вид уравнения  $p$ -траектории весьма громоздок даже для участка нулевой тяги [20], а для других участков оптимальной траектории получение уравнения  $p$ -траектории встречает непреодолимые трудности, связанные с интегрированием уравнений (8.4.12)—(8.4.18).

Исследование на экстремум модуля базиса-вектора как функции истинной аномалии, выполненное Лоуденом [20], [77], [78] для определения постоянной  $P$  (см. § 3.03), позволяет сделать вывод: если один из участков оптимальной траектории является пассивным и представляет дугу конического сечения и он начался (или закончился) в результате действия импульса, приложенного в апсидальной точке и направленного по касательной к орбите, то тогда и все остальные участки траектории являются пассивными и точки соединения всегда совпадают с их апсидальными точками. В частности, если дуга круговой орбиты является частью оптимальной траектории, то и все остальные пассивные участки оптимальной траектории являются дугами конических сечений с совпадающими осями. Таким образом, оптимальная траектория состоит из пассивных участков (дуг конических сечений), началами и концами которых являются точки соединения.

#### § 4.06. Связь между величиной импульса и элементами эллиптической орбиты

Формулы задачи двух тел позволяют написать следующие соотношения (рис. 85):

$$\left. \begin{aligned} v_r &= q \sqrt{f m_0 p} \sin(u - \omega), \\ v_u &= s \sqrt{f m_0 p}, \\ q \cos(u - \omega) &= s - p^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.20)$$

$$v_Q = s \sqrt{f m_0 p} \sin \varphi - q \sqrt{f m_0 p} \sin(u - \omega) \cos \varphi, \quad (8.4.21)$$

$$v_T = s \sqrt{f m_0 p} \sec \varphi - v_Q \operatorname{tg} \varphi, \quad (8.4.22)$$

где

$$s = \frac{1}{r}, \quad q = \frac{e}{p}, \quad (8.4.23)$$

$p$  — параметр эллипса.

В результате действия мгновенного импульса  $T$  положение ракеты и проекция  $v_Q$  остаются неизменными, а изменяются

лишь элементы орбиты  $p, q, \omega$  и, конечно, в первую очередь  $v_T$ . Если обозначить через  $p_1, q_1, \omega_1$  элементы новой эллиптической орбиты, то очевидно, что

$$(v_T)_1 = s \sqrt{f m_0 p_1} \sec \varphi - v_Q \operatorname{tg} \varphi \quad (8.4.24)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta v_T &= (v_T)_1 - v_T = \\ &= s \sqrt{f m_0} (\sqrt{p_1} - \sqrt{p}) \sec \varphi. \end{aligned} \quad (8.4.25)$$

Приращение  $\Delta v_T$  определяет величину приложенного импульса.

В практических расчетах удобнее вместо (8.4.21) пользоваться равенством

$$\begin{aligned} q \sin(u - \omega) &= \\ &= \left( s - \frac{v_Q}{\sqrt{f m_0 p}} \right) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (8.4.26)$$

Таким образом, параметры обеих орбит должны удовлетворять следующей соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} q \cos(u - \omega) &= s - p^{-1}, \\ q \sin(u - \omega) &= \left( s - \frac{v_Q}{\sqrt{f m_0 p}} \right) \operatorname{tg} \varphi, \\ q_1 \cos(u - \omega_1) &= s - p_1^{-1}, \\ q_1 \sin(u - \omega_1) &= \left( s - \frac{v_Q}{\sqrt{f m_0 p_1}} \right) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.27)$$

Анализ уравнений (8.4.27) и вывод аналитических выражений для частных производных импульса по элементам сделан Лоуденом [12].

### § 4.07. Оптимальный $n$ -импульсный переход между двумя заданными компланарными эллиптическими орбитами

Пусть  $p_0, q_0, \omega_0$  — элементы начальной эллиптической орбиты,  $p_n, q_n, \omega_n$  — элементы орбиты назначения,  $p_k, q_k, \omega_k$  — элементы  $k$ -й промежуточной орбиты, вызванной  $k$ -м импульсом, приложенным в точке  $(s_k, u_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

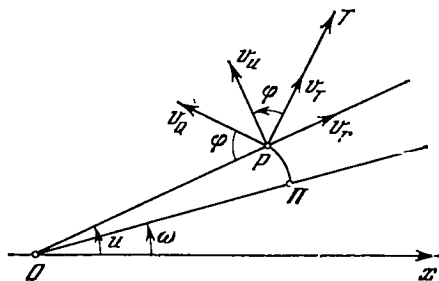


Рис. 85. Связь между импульсом и элементами орбиты.  $O$  — притягивающий центр с массой  $m_0$ ;  $\Pi$  — перицентр эллиптической орбиты;  $P$  — положение аппарата в произвольный момент времени;  $v_r, v_u$  — радиальная и трансверсальная компоненты скорости;  $T$  — импульс;  $v_T$  и  $v_Q$  — компоненты скорости аппарата в направлении приложенного импульса и перпендикулярного к нему.

Тогда полное приращение скорости космического аппарата в результате маневра в целом выражается соотношением

$$W = \sqrt{f m_0} \sum_{k=1}^n X_k, \quad (8.4.28)$$

где

$$X_k = s_k (\sqrt{p_k} - \sqrt{p_{k-1}}) \sec \varphi_k. \quad (8.4.29)$$

Функция  $W$  зависит от  $3n - 3$  переменных ( $p_1, q_1, \omega_1, \dots, p_{n-1}, q_{n-1}, \omega_{n-1}$ ), так как  $p_0, q_0, \omega_0, p_n, q_n, \omega_n$  считаются известными.

Необходимые условия существования экстремума функции  $W$ , очевидно, имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial p_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial \omega_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8.4.30)$$

Присоединение к системе (8.4.30), состоящей из  $3n - 3$  уравнений, еще  $4n - 4$  уравнений типа (8.4.27)

$$\left. \begin{aligned} q_{k-1} \cos(u_k - \omega_{k-1}) &= s_k - p_{k-1}^{-1}, \\ q_{k-1} \sin(u_k - \omega_{k-1}) &= \left( s_k - \frac{v_T^{(k)}}{\sqrt{f m_0 p_{k-1}} \sin \varphi_k} \right) \operatorname{tg} \varphi_k, \\ q_k \cos(u_k - \omega_k) &= s_k - p_k^{-1}, \\ q_k \sin(u_k - \omega_k) &= \left( s_k - \frac{v_T^{(k)}}{\sqrt{f m_0 p_k} \sin \varphi_k} \right) \operatorname{tg} \varphi_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (8.4.31)$$

позволяет написать совместную систему, состоящую из  $7n - 7$  уравнений и содержащую  $7n - 7$  неизвестных  $p_k, q_k, \omega_k, s_k, u_k, v_T^{(k)}, \varphi_k$ . Решение этой общей системы дает параметры всех промежуточных орбит, координаты точек приложения импульсов ( $s_k, u_k$ ), компоненты скорости  $v_T^{(k)}$  и направления импульсов  $\varphi_k$ .

Эти результаты получены Лоуденом [12] в предположении, что число импульсов  $n$  задано. Более общая задача (когда  $n$  также неизвестно) рассматривалась в работах [80]—[82].

Одноимпульсный переход с одной орбиты на другую возможен лишь тогда, когда орбиты пересекаются, причем оптимальной задачи не возникает, так как в этом случае величина импульса однозначно определяется элементами первоначальной орбиты и орбиты назначения.

Решение уравнений (8.4.30) и (8.4.31) для двухимпульсного маневра в общем случае неизвестно, но для ряда частных случаев оно получено. В частности, получено аналитическое решение задачи об оптимальном повороте оси орбиты [12].

#### § 4.08. Оптимальный переход между двумя компланарными круговыми орбитами

Если минимизируется количество топлива, то согласно § 4.05 орбитами перехода являются эллипсы с совпадающими большими осями. Эти эллипсы соприкасаются друг с другом и с круговыми орбитами в своих апсидальных точках (здесь круговые орбиты — это орбиты старта и назначения). Анализ такого класса орбит перехода был впервые сделан Гоманом [83], и по этой

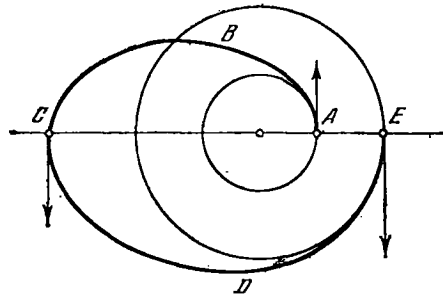


Рис. 86. Трехимпульсная орбита перехода. ABC и CDE — два гомяновских полуэллипса; A, C, E — точки соединения.

причине они называются *гомановскими эллипсами*. Очевидно, что если последним участком оптимальной траектории является не сам гомяновский эллипс, а круговая орбита, то минимальное количество импульсов равно двум.

Хелькер и Зильбер показали [81], что при  $r_e/r_i > 15,6$  ( $r_e$  — радиус внешней круговой орбиты,  $r_i$  — радиус внутренней круговой орбиты) оптимальных маневров не существует, т. е. соответствующая вариационная задача не имеет решения. Они же показали, что существуют трехимпульсные переходы, более выгодные с точки зрения расхода топлива (рис. 86). Вопрос об оптимальном переходе между почти круговыми орбитами рассматривался многими авторами и, в частности, Лоуденом [20], [84] и Смитом [85].



### § 4.09. Оптимальный переход между двумя соосными орбитами

Как показали Смит [85] и Плиммер [86], уравнения (8.4.30) и (8.4.31) могут быть решены в случае двухимпульсного перехода,

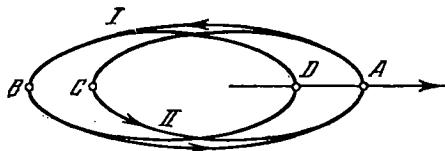


Рис. 87. Оптимальный переход между соосными орбитами.  $I, II$ —орбиты перехода;  $A, B$ —точки соединения для орбиты  $I$ ;  $C, D$ —точки соединения для орбиты  $II$ .

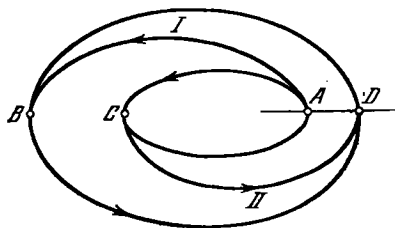


Рис. 88. Оптимальный переход между соосными орбитами.  $I, II$ —орбиты перехода;  $A, B$ —точки соединения для орбиты  $I$ ;  $C, D$ —точки соединения для орбиты  $II$ .

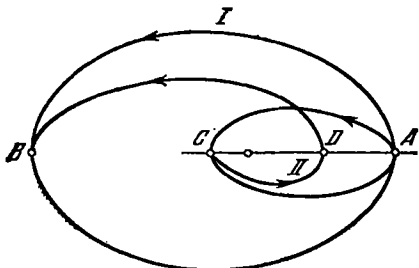


Рис. 89. Оптимальный переход между соосными орбитами.  $I, II$ —орбиты перехода;  $A, B$ —точки соединения для орбиты  $I$ ;  $C, D$ —точки соединения для орбиты  $II$ .

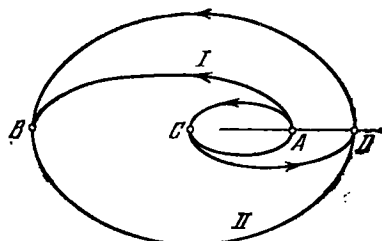


Рис. 90. Оптимальный переход между соосными орбитами.  $I, II$ —орбиты перехода;  $A, B$ —точки соединения для орбиты  $I$ ;  $C, D$ —точки соединения для орбиты  $II$ .

если  $\omega_1 = \omega_2$  или  $\omega_1 = \omega_2 + \pi$ . Анализ этого решения показывает, что возможны оптимальные переходы, изображенные на рис. 87—90.

### § 4.10. Другие траектории перелета в случае компланарных орбит планет старта и назначения

В §§ 4.07—4.09 приведены некоторые оптимальные (с точки зрения расхода топлива) траектории перелета. Достаточно полная классификация траекторий перелета с круговой орбиты на другую компланарную круговую орбиту дана К. Эрике [88]. Укажем также на книгу [90] П. Эскобала, содержащую приближенный аналитический метод построения межпланетных траекторий. В его основу положен метод сфер действия, названный

Эскобалом «методом кусочно-невозмущенных орбит». Этот метод нашел эффективное применение в исследованиях В. А. Егорова [87] (см. § 4.13).

Основных типов траекторий эллиптических перелетов — тринадцать. Один тип отличается от другого как угловой дальностью  $\eta_i$  (это угол, образованный гелиоцентрическим радиусом-вектором точки старта и точки назначения), так и направлением касательных к траектории перелета в точке старта и в точке назначения. Для гомановских орбит  $\eta_i = 180^\circ$  и касательные к траектории перелета в начальной и конечной точках совпадают с касательными к круговым орбитам планет. Для других двенадцати типов перелетных траекторий либо  $\eta_i \neq 180^\circ$ , либо направления касательных не совпадают. В зависимости от значения  $\eta_i$  Эрике делит траектории перелета на быстрые и медленные. Если  $\eta_i < 180^\circ$ , такие траектории называются быстрыми, если  $\eta_i > 180^\circ$  — медленными. На рис. 91 приведены две орбиты быстрых перелетов. Одна изображает быстрый перелет на внешнюю круговую орбиту, другая — на внутреннюю круговую орбиту. На рис. 92 изображены две орбиты длительных перелетов.

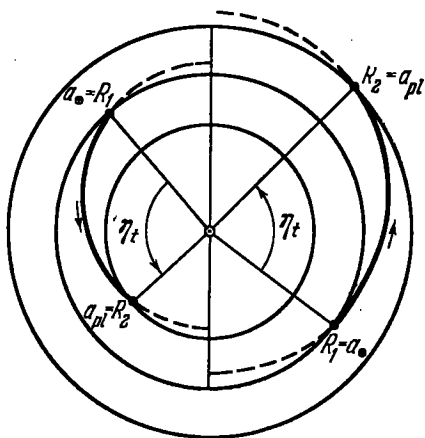


Рис. 91. Орбиты быстрых перелетов. Угловая дальность  $\eta_i$  в обоих случаях меньше  $180^\circ$ .  $R_1$  — точки старта;  $R_2$  — точки назначения.

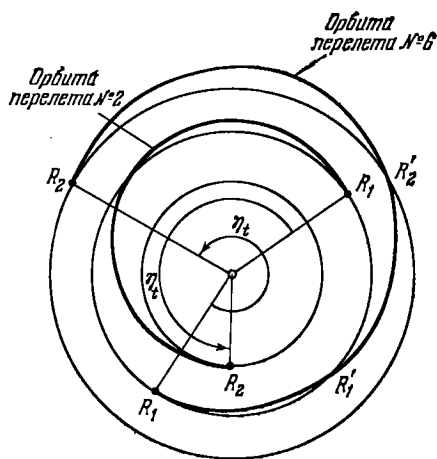


Рис. 92. Орбиты медленных перелетов. Орбита № 2 изображает медленный перелет с внешней орбиты на внутреннюю, орбита № 6 — с внутренней на внешнюю. Угловая дальность  $\eta_i$  в обоих случаях больше  $180^\circ$ .  $R_1$  — точки старта;  $R_2$  — точки назначения.

Эллиптичность и наклон орбит планет старта и назначения существенно усложняют задачу об определении параметров перелетной траектории, однако для малых эксцентриситетов и наклонов она часто

решается аналитическими и численными методами [88]. Отметим также, что траектории перелета весьма чувствительны к

ошибкам в начальных данных. Особенно чувствительны к последним «медленные» траектории. Для попадания в Венеру и Марс ошибка в гиперболической геоцентрической скорости не должна превышать  $0,15$  м/сек по модулю. Поэтому на практике перелеты без коррекции на гелиоцентрическом участке траектории не встречаются.

При расчете перелетных траекторий с возвращением на планету старта существенной является геометрия дуги возвращения, целиком определяющая время нахождения (*период захвата*) космического аппарата на спутниковой орбите планеты назначения.

В частности, можно построить возвратную траекторию, симметричную траектории перелета, но для этого необходимо подождать время, по истечении которого планеты старта и назначения образуют определенную геометрическую конфигурацию.

Из расчетов Эрике следует, что симметричные полеты с Земли к Венере и Марсу с возвращением требуют очень длительные периоды захвата, значительно превышающие год. Это часто нежелательное обстоятельство можно обойти, если воспользоваться несимметричными перелетными траекториями с возвращением [88].

Рассмотренные перелетные орбиты являются эллиптическими, и они, как правило, оптимальны относительно энергетических затрат, но не оптимальны относительно времени перелета (в особенности «медленные траектории»). Возможен также перелет по гиперболической и параболической траекториям. На такой перелет, очевидно, нужно меньшее время перелета, однако подобные орбиты не оптимальны с точки зрения расхода топлива, так как для их реализации требуется большая начальная скорость. Например, при перелете из окрестности Земли необходима начальная геоцентрическая скорость не меньше  $16,7$  км/сек. Гиперболические и параболические орбиты невыгодны с точки зрения энергетического критерия и при возвращении на планету старта.

Перечень формул, позволяющих вычислить все параметры гелиоцентрического участка траектории перелета для различных вариантов, можно найти в главе 9 книги [88].

#### § 4.11. Траектории полета вблизи нескольких планет

Все эллиптические траектории полета к нескольким планетам можно разделить на две группы: *моноэллиптические* и *полиэллиптические*.

Моноэллиптическая траектория полета представляет собой дугу эллипса, пересекающего планетные орбиты в точках, в окрестностях которых в процессе полета находятся планеты.

Полиэллиптическая траектория является составной траекторией и состоит из двух, трех и т. д. участков, каждый из которых представляет собой дугу эллипса с собственными параметрами. Среди полиэллиптических траекторий можно выделить *биэллиптические* (состоящие из двух участков), *триэллиптические* (состоящие из трех участков) траектории и т. д.

На рис. 93 изображены моноэллиптические траектории одногодичного полета с возвращением. Траектории № 1 и № 2 изображают полет к Венере и Марсу с возвращением к Земле. Траектория № 3 — полет к Меркурию, Венере и Марсу с возвращением к Земле. Все эти траектории являются чисто кинематическими, так как при определении их параметров не учитываются силы притяжения.

Один из основных заданных заранее параметров является время полета, которое в данном случае равно году. Если время полета задано, то оно целиком определяет, согласно третьему закону Кеплера, большую полуось траектории полета.

Например, для одногодичного полета к Венере и Марсу с возвращением большая ось эллиптической траектории должна равняться 2 а. е., и если афелий такой траектории будет находиться на расстоянии 1,52 а. е. (она касается круговой орбиты с радиусом, равным большой полуоси орбиты Марса), то ее перигелий будет находиться внутри орбиты Венеры, так как расстояние ее перигелия от Солнца вычисляется по формуле

$$R_p = 2a - R_a = 2 - 1,52 = 0,48 \text{ а. е.},$$

где  $a$  — большая полуось траектории полета,  $R_a$ ,  $R_p$  — гелиоцентрические расстояния ее афелия и перигелия соответственно.

Моноэллиптическая траектория, касательная к круговым орбитам Венеры и Марса (рис. 94), характеризуется периодом, равным 1,185 года, и эксцентриситетом 0,357. Такая траектория пересечет земную орбиту второй раз через 1,185 года и, следовательно, Земля будет находиться в этот момент на угловом расстоянии от точки старта, равном  $67^\circ$ . Отсюда следует, что такая траектория с возвращением невыгодна, так как «встреча»

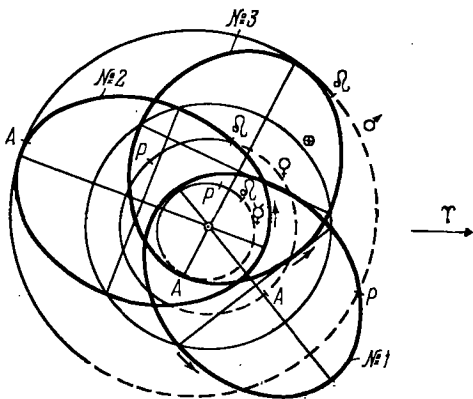


Рис. 93. Моноэллиптические траектории одногодичного полета. Траектории № 1 и № 2 изображают полет к Венере и Марсу с возвращением. Траектория № 3 — полет к Меркурию, Венере и Марсу с возвращением.

с Землей может состояться лишь спустя много оборотов. Эти расчеты показывают, что среди траекторий полета к одной или к нескольким планетам с возвращением выгодными являются лишь те, период обращения по которым кратен году, т. е. равен одному, двум, трем и т. д. годам.

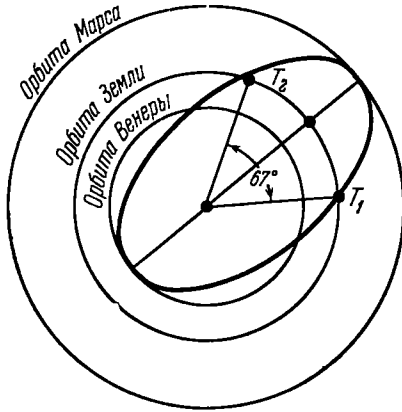


Рис. 94.Monoэллиптическая траектория, касательная к круговым орбитам Венеры и Марса с периодом, равным 1,185 года. Она не обладает свойством возвращения в окрестность Земли на первом обороте.  $T_1$ —точка старта;  $T_2$ —положение Земли на орбите в момент второго прохождения аппарата через точку  $T_1$ .

Если пренебречь притяжением планет и наклоном их орбит, то полет по многоэллиптической траектории может быть реализован без коррекции. При учете этих факторов необходимо приложить в некоторых точках траектории такие корректирующие импульсы, которые, во-первых, исключили бы захват космического аппарата планетами и, во-вторых, обеспечили бы постоянство ее эксцентриситета и большой полуоси.

Эрике показал [88], что среди полиэллиптических траекторий полета к Меркурию, Венере

и Марсу наиболее выгодными и удобными с точки зрения практической реализации являются полуторогодичные триэллип-

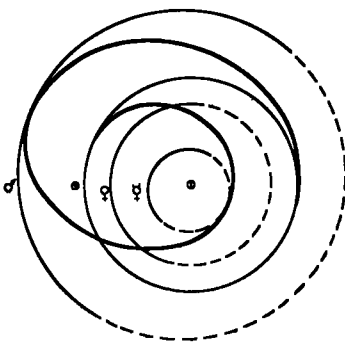


Рис. 95. Полуторогодичная триэллиптическая траектория полета к Меркурию, Венере и Марсу с возвращением.

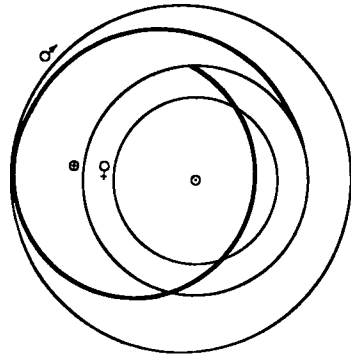


Рис. 96. Биэллиптическая траектория полета к Марсу и Венере с возвращением.

тические траектории с возвращением (рис. 95). Такая траектория касается орбиты Земли в начальный и в конечный момен-

ты полета, орбит Марса и Меркурия и дважды пересекает орбиту Венеры. Среди биэллиптических траекторий не существуют такие, которые касались бы орбиты Земли и в начальный, и в конечный моменты. На рис. 96 приведена биэллиптическая траектория полета к Марсу и Венере с возвращением.

Наконец, отметим, что принципиально возможны составные траектории полета вблизи нескольких планет, состоящие из дуг других конических сечений (гипербол и парабол), однако они далеко не оптимальны с точки зрения энергетического критерия.

#### § 4.12. Начальный этап (запуск и уход) межпланетной траектории

В §§ 4.08 — 4.11 рассматривался гелиоцентрический участок перелетной орбиты. Назовем *начальным этапом* траектории перелета ее участок, начинающийся в момент старта на Земле и кончающийся точкой, являющейся началом гелиоцентрического участка. Начальный этап принято также называть [88] *запуском и уходом* космического аппарата.

Начальный этап сам в свою очередь состоит из трех этапов [88].

*Этап 1.* Активный участок траектории, на котором аппарат приобретает первую космическую скорость. В конце этого этапа аппарат становится искусственным спутником планеты, движущимся по круговой орбите, как правило, на высоте 200—500 км.

*Этап 2.* Активный участок траектории, на котором аппарат приобретает планетоцентрическую гиперболическую скорость, большую (или во всяком случае не меньшую) второй космической скорости.

*Этап 3.* Планетоцентрический гиперболический участок траектории (как правило, пассивный), начинающийся в точке, где аппарат приобрел гиперболическую скорость, и кончающийся в точке, где начинается гелиоцентрический полет. Этот участок простирается до такого расстояния, на котором притяжением планеты по сравнению с притяжением Солнца можно пренебречь (заметим, что гелиоцентрический участок перелетной траектории не обязательно начинается на границе сферы действия планеты; см. ч. V, § 2.05).

Возможны два типа перехода от этапа 1 к этапу 2:

а) так называемый непрерывный уход, когда скорость аппарата непрерывно увеличивается от нулевой до планетоцентрической гиперболической скорости;

б) наличие пассивного участка траектории, состоящего из одного или нескольких оборотов, на котором аппарат является круговым или почти круговым искусственным спутником (иногда этот участок траектории называется орбитой ожидания).

Для выбора параметров начального этапа необходимо решить уравнения типа (8.3.20) при заданных внешних силовых полях (к которым относятся прежде всего притяжение планеты и сопротивление ее атмосферы). Формулы для приближенного расчета (без оптимизации) параметров начального этапа траектории перелета выведены Эрике [88].

В заключение отметим, что имеется обширная литература, посвященная проблеме входа космического аппарата в атмосферу планеты. Укажем на монографию Г. Е. Кузмака [91], в которой с помощью асимптотических методов типа Крылова — Боголюбова изучается движение (как правило, около центра масс) неуправляемого космического аппарата при входе в атмосферу. Некоторые вопросы управляемого движения космических аппаратов в земной атмосфере изучаются в статьях [92]—[96].

### § 4.13. Полеты к Луне

Термин «полеты к Луне» объединяет разнообразные задачи астродинамики: задача о попадании в Луну неуправляемого или управляемого аппарата, создание искусственных спутников Луны, облет Луны без возвращения и облет Луны с возвращением на Землю, мягкая посадка аппарата или космического корабля с космонавтами на лунную поверхность, старт с поверхности Луны аппарата или космического корабля и переход на возвратную к Земле траекторию.

К настоящему моменту все перечисленные задачи не только решены теоретически, но и практически реализованы, поэтому существует обширная библиография по этой важной проблеме. Из капитальных изданий укажем на книги В. А. Егорова [87], К. Эрике [88] и В. И. Левантовского [89], во многом дополняющие одна другую.

Полное решение проблемы попадания неуправляемого аппарата в Луну получено В. А. Егоровым [87]. Проблема решалась автором на базе всестороннего численного исследования уравнений движения ограниченной круговой задачи трех тел (Земля — Луна — космический корабль) в сочетании с эффективным применением метода сфер действия (см. ч. V, гл. 2). Кроме того, им найдены многочисленные конкретные траектории попадания, траектории облета Луны, нетривиальные недолетные траектории, т. е. такие траектории, для которых геоцентрический радиус-вектор имеет по крайней мере два максимума, расположенных за лунной орбитой, и минимум, расположенный внутри лунной орбиты (рис. 97). В. А. Егоровым также рассчитаны наиболее важные, с точки зрения практики, траектории облета с пологим возвращением в атмосферу Земли (рис. 98). Этой проблеме посвящена отдельная глава в книге П. Эскобала [90].

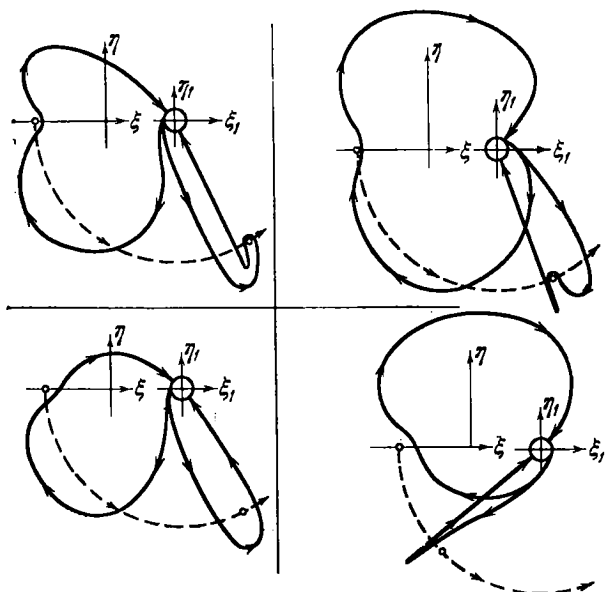


Рис. 97. Классы особых негравитационных долетных траекторий.

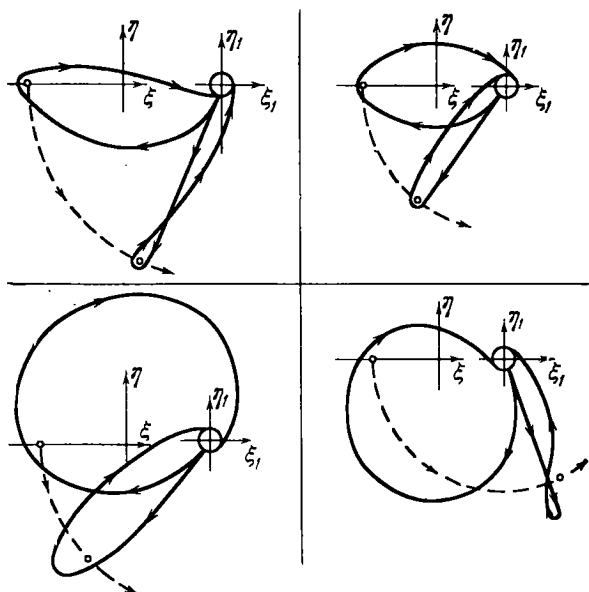


Рис. 98. Траектории с пологим возвращением в атмосферу Земли. Они касаются атмосферных слоев, расположенных концентрически с центрами в центре Земли.



Количественный анализ, выполненный В. А. Егоровым, показал, что достаточно точное определение параметров энергетически оптимальных пространственных траекторий и достаточно точная оценка влияния ошибок в начальных данных на решение конечной задачи могут быть сделаны в рамках ограниченной круговой задачи трех тел без учета притяжения Солнца и других планет, а также без учета на первом шаге эллиптичности лунной орбиты.

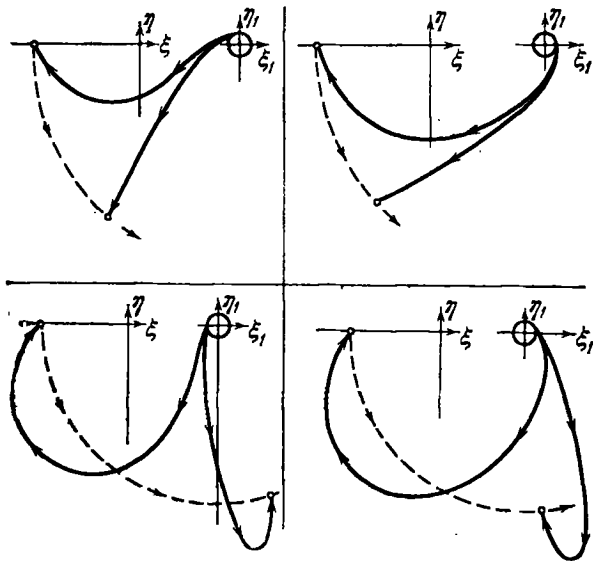


Рис. 99. Траектории попадания в центр лунного диска.

Лунное притяжение мало меняет параметры траекторий попадания в центр видимого лунного диска, поэтому при определении начальных данных для пассивного участка перелетной траектории лунное притяжение не принималось в расчет. Если место старта находится в северном полушарии Земли, то существуют два основных типа траекторий попадания:

- а) траектории, проходящие над северным полушарием;
- б) траектории, проходящие над южным полушарием.

Из типа а) наиболее выгодными (отвечающими минимальным энергетическим затратам) являются «северо-восточные» траектории, из типа б) — «юго-восточные» траектории. Но по сравнению с орбитами плоской круговой задачи трех тел для реализации «северо-восточных» траекторий требуются значительно большие энергетические затраты, в отличие от «юго-восточных» траекторий, для которых эти затраты примерно такие же.

В. А. Егоровым разработан также метод, позволяющий учитывать влияние притяжения Луны в ее сфере действия на параметры траекторий попадания в центр лунного диска. Влияние лунного притяжения (не только в ее сфере действия), солнечного притяжения, сжатия Земли и эллиптичности лунной орбиты учитываются в виде линейных поправок.

На рис. 99 приведены плоские траектории попадания в центр лунного диска по восходящей ветви траектории, т. е. попадание

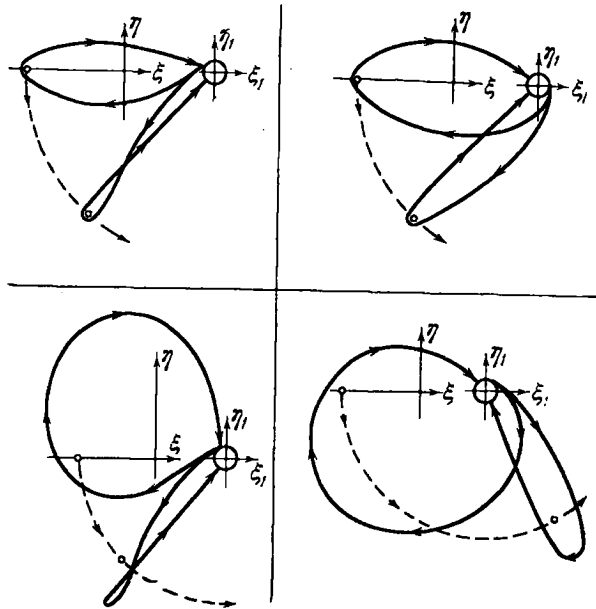


Рис. 100. Плоские облетные траектории.

в Луну происходит до достижения аппаратом максимально удаленной от Земли точки траектории, и по нисходящей ветви, т. е. после достижения этой точки.

На рис. 100 приведены, найденные В. А. Егоровым, различные плоские облетные траектории.

Все изображенные на рис. 97—100 траектории суть траектории с возвращением.

Возможны облетные траектории без возвращения (геоцентрические параболические и гиперболические траектории), характеризующиеся тем, что начальная скорость не меньше второй космической скорости.

В заключение отметим, что приближенное решение задачи о мягкой посадке на поверхность Луны изложено в [88], [90].

## ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ VIII

1. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, «Наука», 1966.
2. Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
3. Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1965.
4. Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.
5. Bliss G. A., J. U. S. Artillery 51, 296, 1920.
6. Bliss G. A., Trans. Amer. Math. Soc. 21, 79, 1920.
7. Bliss G. A., Trans. Amer. Math. Soc. 21, 93, 1920.
8. Cicala P., An Engineering Approach to the Calculus of Variations. Levrotto and Bella, Torino, 1957.
9. Hancock H., Theory of Maxima and Minima, Dover, New York, 1960.
10. Horner J. M., Optimum orbital Transfers. American Rocket Society Undergraduate Competition, 1960.
11. Miele A., ARS Journal 29, 75, 1959.
12. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, под ред. Дж. Лейтмана, «Наука», 1965.
13. Миеле А., Механика полета, т. I, «Наука», 1965.
14. Lawden D. F., Interplanetary Rocket Trajectories. Adv. Space Sci., I, Academic Press, New York, 1959. Русский перевод: Лоуден Д. Ф., «Межпланетные траектории ракет», Сб. «Космические траектории», ИЛ, М., 1963.
15. Lawden D. F., J. Brit. Interplanet. Soc. II, 278, 1952.
16. Lawden D. F., J. Brit. Interplanet. Soc. II, 321, 1952.
17. Lawden D. F., J. Brit. Interplanet. Soc. II, 216, 1952.
18. Lawden D. F., ARS Journal 23, 360, 1953.
19. Lawden D. F., J. Brit. Interplanet. Soc. 13, 87, 1954.
20. Лоуден Д. Ф., Оптимальные траектории для космической навигации, «Мир», 1966.
21. Кротов В. Ф., Автоматика и телемеханика 23, № 12, 1962.
22. Кротов В. Ф., Автоматика и телемеханика 24, № 5, 1963.
23. Кротов В. Ф., Автоматика и телемеханика 25, № 7, 1964.
24. Троицкий В. А., Прикл. матем. и механ. 21, № 4, 1957.
25. Троицкий В. А., Прикл. матем. и механ. 25, № 4, 1961.
26. Троицкий В. А., Прикл. матем. и механ. 29, № 4, 1965.
27. Охочимский Д. Е. и Энеев Т. М., Успехи физ. наук 63, вып. 1, 1957.
28. Leitman G., J. Aero/Space Sci. 26, 586, 1959.
29. Leitman G., Progr. Astronaut. Sci. I, Ch. 4, Amsterdam, 1962.
30. Лейтман Дж., Введение в теорию оптимального управления, «Наука», 1968.
31. Curry H. V., Quart. Appl. Math. 2, 258, 1944.
32. Rosen B., J. Indian Math. 8, 181, 1960.
33. Topkins C. B., Modern Mathematics for the Engineer, Ch. 18, New York, 1956.
34. Stejn M. L., J. Res. Nat. Bur. Stand. B50, 277, 1953.
35. Kelley H. V., ARS Journal 30, 917, 1960.
36. Bryson A. E., Carroll F. I., Mikami K. and Denham W. F., Determination of the lift or drag program that minimizes reentry heating with acceleration or range constraints using a steepest descent computation procedure. Представлено на 29 съезде JAS, New York, January 23—25, 1961.
37. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, «Наука», изд. 2-е, 1969.

38. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, «Наука», изд. 2-е, 1969.
39. Розоноэр Л. И., Автоматика и телемеханика **20**, № 10, 1320; № 11, 1441; № 12, 1561 (1959).
40. Leitman G., J. Aero/Space Sci. **29**, № 8, 1962.
41. Исаев В. К., Автоматика и телемеханика **22**, № 8, 1961.
42. Исаев В. К., Автоматика и телемеханика **23**, № 1, 1962.
43. Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
44. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1962.
45. Цлаф Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, «Наука», 1966.
46. Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1952.
47. Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, ч. II, «Прогресс», 1966.
48. Карагодин В. М., Теоретические основы механики тела переменного состава, Оборонгиз, 1963.
49. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М., Теория полета неуправляемых ракет, Физматгиз, 1959.
50. Россер Д., Ньютон Р., Гросс Г., Математическая теория полета неуправляемых ракет, ИЛ, 1950.
51. Оберт Г., Пути осуществления космических полетов, Оборонгиз, 1948.
52. Valentine F. A., The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions. Dissertation, Dept. of Math., University of Chicago, Illinois, 1937.
53. Cicala P., Piecewise solutions in the programming of optimal flight trajectories, NASA, TT № F-3, 1959.
54. Carfinkel B., Quart. Appl. Math. **9**, № 2, 1951.
55. Miele A., Z. Flugwiss. **6**, № 3, 1958.
56. Leitman G., J. Aeron. Sci. **26**, № 9, 586, 1959.
57. Miele A., Cappellari J. O., Z. Flugwiss. **7**, № 1, 1959.
58. Fried B. D., ARS Journal **27**, № 6, 1957.
59. Lawden D. F., Quart. J. Mech. and Appl. Math. **7**, № 4, 488, 1954.
60. Lawden D. F., Astronaut. Acta **1**, № 1, 41, 1955.
61. Lawden D. F., Interplanetary rocket trajectories, Adv. Space Sci., vol. 1, chap. 1, New York, Academic Press, 1959. Русский перевод: Лоуден Д. Ф., «Межпланетные траектории ракет», Сб. «Космические траектории», ИЛ, М., 1963.
62. Lawden D. F., Astronaut. Acta **8**, № 2, 106, 1962.
63. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 1, «Наука», 1965.
64. Miele A., J. Aero/Space Sci. **25**, № 7, 1958.
65. Leitman G., Aeron. Engin. Rev. **16**, № 6, 63, 1957.
66. Lawden D. F., ARS Journal **27**, № 12, 1957.
67. Fried B. D. and Richardson J. M., J. Appl. Phys. **27**, № 8, 1956.
68. Miele A., Astronaut. Acta **4**, № 4, 264, 1958.
69. Miele A., NASA, TN, № D-155, 1959.
70. Leitman G., Astronaut. Acta **2**, № 3, 1956.
71. Bryson A. E., Ross S. E., ARS Journal **28**, № 7, 1958.
72. Космодемьянский А. А., Докл. АН СССР **111**, вып. 1, 1946.
73. Охотимский Д. Е., Прикл. матем. и механ. **10**, вып. 2, 1946.
74. Leitman G., J. Aero/Space Sci. **29**, № 8, 1962.
75. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Пирогов Е. Н., Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 125, 12, 1962.
76. Гребеников Е. А., Демин В. Г., Межпланетные полеты, «Наука», 1965.
77. Lawden D. F., ARS Journal **31**, № 4, 566, 1961.

78. Lawden D. F., *Astronaut. Acta* 8, № 2, 106, 1962.
79. Lawden D. F., *Astronaut. Acta* 4, № 3, 218, 1958.
80. Edelbaum T. N., *ARS Journal* 29, 864, 1959.
81. Hoëlker R. F., Silber R., The bi-elliptical transfer between circular coplanar orbits, Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Ala. Rept., NDA-TN-2-59, 1959.
82. Rider L., *ARS Journal* 30, 254, 1960.
83. Нохманн W., Die Erreichbarkeit der Himmelskörper, Русский перевод: Гоман «Досыгаемость небесных тел» в книге Н. А. Рынина «Теория космического полета», Изд-во АН СССР, 1932.
84. Lawden D. F., *J. Brit. Interplanet. Soc.* 12, № 2, 68, 1953.
85. Smith G. C., *Astronaut. Acta* 5, № 5, 253, 1959.
86. Plimner R. N. A., *Proc. 10th Intern. Astronaut. Congr.*, London, 1959 (1960).
87. Егоров В. А., Пространственная задача достижения Луны, «Наука», 1965.
88. Эрик К., Космический полет, т. II, часть вторая, «Наука», 1970.
89. Левантовский В. И., Механика космического полета в элементарном изложении, «Наука», 1970.
90. Эскобал П., Методы астродинамики, «Мир», 1971.
91. Кузмак Г. Е., Динамика неуправляемого движения летательного аппарата при входе в атмосферу, «Наука», 1970.
92. Иванов Н. М., Лохов Г. М., Павлов В. В., Яковлев О. С., Космич. исслед. X, вып. 3, 319, 1972.
93. Иванов Н. М., Соболевский В. Г., Космич. исслед. X, вып. 3, 326, 1972.
94. Охоцимский Д. Е., Бельчанский Г. И., Геловани В. А., Космич. исслед. IX, вып. 5, 635, 1971.
95. Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г., Космич. исслед. IX, вып. 5, 648, 1971.
96. Иванов Н. М., Бочаров Л. А., Голуб И. Б., Космич. исслед. IX, вып. 5, 662, 1971.

# ДВИЖЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

## Глава I

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Эта глава в основном содержит различные формы дифференциальных уравнений движения искусственных и естественных небесных тел относительно центров инерции, которые нашли наибольшие приложения в классической теории вращательного движения Земли и Луны и в динамике космического полета.

Более общий случай поступательно-вращательного движения небесных тел изложен в главе 2 части IV настоящего справочника.

Вывод приводимых формул и различного рода подробности можно найти в монографиях [1]—[4].

Кроме того, даны краткие сведения из теории фигур планет.

#### § 1.01. Вращение Земли относительно центра масс

С достаточной для многих практических нужд точностью движение естественных небесных тел, прежде всего Земли и Луны, можно изучать в рамках ограниченной постановки задачи, когда взаимодействием поступательного и вращательного движений тела можно пренебречь и считать движение центра инерции небесного тела заранее известным.

Предполагая Землю абсолютно твердым телом, рассмотрим ее движение относительно центра масс под действием силы притяжения со стороны Солнца (или Луны), принимаемого за материальную точку.

Введем две прямоугольные геоцентрические системы координат (рис. 101): систему  $O\xi\eta\zeta$ , основной плоскостью которой служит плоскость эклиптики некоторой эпохи, ось абсцисс направлена в точку весеннего равноденствия той же эпохи, а ось аппликата — к полюсу эклиптики; и систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , оси которой направлены по главным центральным осям инерции Земли.

Положение Земли будем задавать эйлеровыми углами  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , введенными, как показано на рис. 101.

Дифференциальные уравнения вращательного движения Земли можно записать в виде \*):

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial U}{\partial \theta} \cos \varphi, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)pr &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \theta + \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \varphi, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} (9.1.01)$$

где  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции Земли,  $U$  — силовая функция, а компоненты угловой скорости Земли по ее главным центральным осям инерции  $p, q, r$  задаются кинематическими уравнениями Эйлера \*)

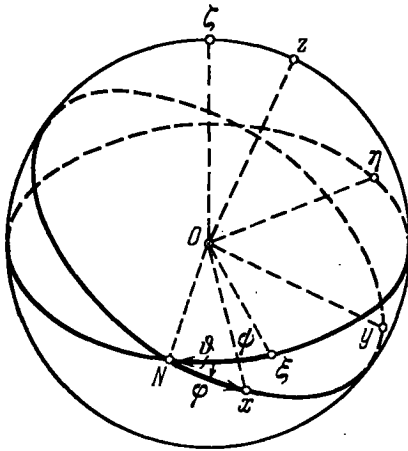


Рис. 101. Системы координат.

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} (9.1.02)$$

Точное выражение силовой функции, входящей в уравнения (9.1.01), представляется рядом по сферическим функциям Лежандра и его можно найти в книге [5].

Если возмущающим телом служит Солнце, то в разложении силовой функции в ряд можно ограничиться второй сферической гармоникой. Тогда согласно [3], [5] будем иметь следующую приближенную формулу:

$$U = \frac{3^{\frac{1}{2}} m}{2\rho^5} [(A - B)y^2 - (C - A)z^2], \quad (9.1.03)$$

в которой  $m$  — масса Солнца,  $\rho$  — его геоцентрическое расстояние.

\*) Приводимые здесь динамические и кинематические уравнения Эйлера несколько разнятся от встречающихся в динамике твердого тела, что объясняется специальным выбором направлений отсчета эйлеровых углов, принятых в астрономии.

Если изучаемая планета обладает осью динамической симметрии, т. е.  $A = B$ , то уравнения движения (9.1.01) будут допускать первый интеграл

$$r = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \vartheta = \omega = \text{const.} \quad (9.1.04)$$

При этом вместо системы (9.1.01) будем иметь уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2A\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta + C\omega^2\dot{\vartheta} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ A\ddot{\vartheta} - A\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - C\omega\dot{\varphi} \sin \vartheta &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.05)$$

Считая величины  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\vartheta}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\varphi}^2$  малыми по сравнению с  $\omega\dot{\vartheta}$  и  $\omega\dot{\varphi}$ , уравнения (9.1.05) можно заменить следующей приближенной системой:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{1}{C\omega \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{C\omega \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.06)$$

При  $U=0$  общее решение системы (9.1.05) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p &= \sigma\omega \cos \Omega(t - t_0), \\ q &= \sigma\omega \sin \Omega(t - t_0), \\ r &= \omega, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.07)$$

где

$$\Omega = \frac{C - A}{A} \omega,$$

а  $\sigma$  и  $t_0$  — произвольные постоянные.

Период  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  называется *свободным периодом Эйлера*. Для Земли он приближенно составляет 302 ср. солн. суток.

Из уравнений (9.1.06) можно найти приближенные выражения для величин прецессии и нутации земной оси, вызванных силами солнечного тяготения

$$\left. \begin{aligned} \psi &= s \cos \vartheta_0 \left( \lambda - \frac{1}{2} \sin 2\lambda \right) + \psi_0, \\ \vartheta &= \frac{s}{2} \sin \vartheta_0 \cos 2\lambda + \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.08)$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:  $\psi_0$ ,  $\vartheta_0$  — постоянные величины,  $\lambda = n't + \lambda_0$  — долгота Солнца, а

$$s = \frac{3n'(C - A)}{2nA}.$$



Из соотношений (9.1.08) вытекает, что полюс мира обладает сложным движением. Он описывает эллиптическую траекторию

$$\frac{\bar{x}^2}{\left(\frac{s \sin \vartheta_0}{2}\right)^2} + \frac{\bar{y}^2}{\left(\frac{s \sin 2\vartheta_0}{4}\right)^2} = 1, \quad (9.1.09)$$

в уравнении которой

$$\bar{x} = \frac{s}{2} \sin \vartheta_0 \cos 2\lambda, \quad \bar{y} = -\frac{s}{4} \sin 2\vartheta_0 \sin 2\lambda,$$

а центр этого эллипса движется по некоторой окружности.

Числовые данные, характеризующие вращательное движение Земли и согласованные с принятой системой фундаментальных астрономических постоянных, приводятся в части I настоящего издания. См. также книгу С. Н. Блажко [6].

### § 1.02. Канонические уравнения вращательного движения небесных тел

В классической теории вращательного движения небесных тел широкие приложения нашли методы вариации произвольных постоянных, характеризующих некоторое вращательное движение рассматриваемого тела, принимаемое за невозмущенное (промежуточное). Решение соответствующих уравнений вращательного движения в оскулирующих элементах проводится стандартными методами классической теории возмущений.

Наиболее ранние уравнения возмущенного вращательного движения в оскулирующих элементах были получены с помощью канонических преобразований в работах Лагранжа [7], Лапласа [8], изложение которых содержится в трактате Ф. Тиссерана [1]. В нашем веке эти методы нашли развитие в работах Андуайе [2]. Приложение этих методов к конкретным задачам небесной механики и динамики космического полета можно найти в исследованиях М. С. Волкова [9], В. В. Белецкого [10], А. Дебри [11], Ф. Бауже [12], В. Г. Демина и Ф. И. Киселева [13], Е. Б. Бибика [14] и др.

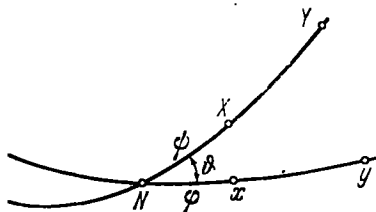


Рис. 102. Углы Эйлера.

Введем углы Эйлера, характеризующие положение абсолютно твердого тела, относительно некоторой системы координат  $OXYZ$  с началом в его центре масс и неизменными в неподвижном пространстве направлениями осей. Пусть  $Oxyz$  — связанная с телом система координат, оси которой направлены по главным центральным осям эллипсоида инерции. Углы Эйлера введем, как

показано на рис. 102, на котором  $\cup XY$  и  $\cup xy$  суть дуги больших кругов, а  $N$  — восходящий узел. Тогда

$$\begin{aligned}\psi &= \cup NX - \text{угол прецессии,} \\ \varphi &= \cup Nx - \text{угол собственного вращения,} \\ \vartheta &= \angle xNX - \text{угол нутации.}\end{aligned}$$

Обозначая теперь через  $T$  живую силу тела, а через  $U$  — силовую функцию и вводя канонические импульсы, сопряженные с углами Эйлера

$$\left. \begin{aligned}p_\varphi &= Cr, \\ p_\vartheta &= -Ar \cos \varphi + Bq \sin \varphi, \\ p_\psi &= (Ar \sin \varphi + Bq \cos \varphi) \sin \vartheta - Cr \cos \vartheta,\end{aligned} \right\} \quad (9.1.10)$$

приходим к следующей системе канонических уравнений вращательного движения небесного тела:

*Первая система канонических уравнений:*

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_\varphi}, & \frac{dp_\varphi}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \varphi}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_\vartheta}, & \frac{dp_\vartheta}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \vartheta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_\psi}, & \frac{dp_\psi}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \psi}.\end{aligned} \right\} \quad (9.1.11)$$

в которых гамильтонова функция  $K$  равна

$$K = T - U. \quad (9.1.12)$$

Соответствующее системе (9.1.11) уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2A} \left[ \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial S}{\partial \psi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) - \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \cos \varphi \right]^2 + \\ + \frac{1}{2B} \left[ \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial S}{\partial \psi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \sin \varphi \right]^2 + \frac{1}{2C} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - U = 0.\end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Другие системы канонических уравнений движения тела вокруг его центра масс связаны с выбором невозмущенного движения, интегрированием надлежащего уравнения Гамильтона — Якоби и каноническими преобразованиями.

Один из способов выбора невозмущенного движения связан со случаем Эйлера — Пуансо. Считая моменты сил, приложенных к небесному телу, малыми, можно в исходном приближении в качестве невозмущенного решения принять движение по Эйлеру — Пуансо. В этом случае, полагая в (9.1.13)  $U = 0$ , после его

интегрирования получим формулы, определяющие невозмущенное вращательное движение тела.

Пусть для определенности  $A < B < C$ . Положим

$$a = \sqrt{\frac{C-B}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{C-A}{B}}, \quad c = \sqrt{\frac{B-A}{C}}, \quad (9.1.14)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{G^2 - 2AH}{C(C-A)}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{C(2CH - G^2)}{(C-B)(G^2 - 2AH)}}, \quad (9.1.15)$$

где  $G$  — модуль кинетического момента поля, а  $H$  — его живая сила, и введем вспомогательную переменную  $\chi$  так, что

$$\left. \begin{aligned} p &= \omega' a \sigma \cos \chi, & q &= \omega' b \sigma \sin \chi, \\ r &= \omega' \sqrt{1 - c^2 \sigma^2 \sin^2 \chi}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.16)$$

Общее решение невозмущенной (упрощенной) задачи, определяющее эйлерово движение тела, тогда запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \operatorname{am}(u, k), \\ p &= \omega' a \sigma \operatorname{cn} u, & q &= \omega' b \sigma \operatorname{sn} u, & r &= \omega' \operatorname{dn} u, \\ \omega &= \omega' \sqrt{1 + a^2 \sigma^2 - a^2 b^2 c^2 \sigma^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ u &= ab \omega' (t + h), & k &= c \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.17)$$

Невозмущенное движение небесного тела удобно относить к системе координат, основной плоскостью которой служит *неизменяемая (инвариантная) плоскость Лапласа*, нормальная кинетическому моменту тела.

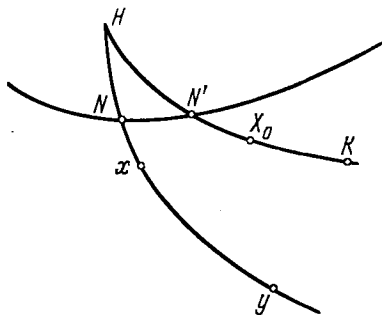


Рис. 103. Вспомогательные углы и дуги.

Основные плоскости и линии новой системы координат изображены на рис. 103 в пересечении со сферой единичного радиуса. Неизменяемая плоскость пересекает единичную сферу по большому кругу  $NK$ . Пусть  $X_0$  — точка пересечения новой оси абсцисс с

этой сферой. По определению эйлеровых углов для новой системы отсчета имеем

$$\psi_0 = \sphericalangle X_0 H, \quad \varphi_0 = \sphericalangle H x, \quad \vartheta_0 = \sphericalangle N' H N. \quad (9.1.18)$$

Положение неизменяемой плоскости относительно старой системы координат задано следующими угловыми величинами:

$$\psi' = \sphericalangle X N', \quad \vartheta' = \sphericalangle X N' K, \quad g = \sphericalangle N' X_0. \quad (9.1.19)$$

Имеют место следующие соотношения, связывающие все введенные величины:

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta \sin (\psi - \psi') &= \sin \vartheta_0 \sin (\psi_0 - g), \\ \sin \vartheta \cos (\psi - \psi') &= \cos \vartheta_0 \sin \vartheta' + \sin \vartheta_0 \cos \vartheta' \cos (\psi_0 - g), \\ \cos \vartheta &= \cos \vartheta_0 \cos \vartheta' - \sin \vartheta_0 \sin \vartheta' \cos (\psi_0 - g), \\ \sin \vartheta \sin (\varphi_0 - \varphi) &= \sin \vartheta' \sin (\psi_0 - g), \\ \sin \vartheta \cos (\varphi_0 - \varphi) &= \sin \vartheta_0 \cos \vartheta' + \cos \vartheta_0 \sin \vartheta' \cos (\psi_0 - g). \end{aligned} \right\} \quad (9.1.20)$$

Теперь запишем полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (9.1.13), определяющий эйлерово невозмущенное движение:

$$S = -Ht + F\psi + \int p_\varphi d\varphi + \int p_\vartheta d\vartheta. \quad (9.1.21)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \\ F &= (Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi) \sin \vartheta - Cr \cos \vartheta, \\ p_\varphi &= Cr = G \cos \vartheta_0, \\ p_\vartheta &= -Ap \cos \varphi + Bq \sin \varphi = G \sin \vartheta_0 \sin (\varphi_0 - \varphi), \\ G^2 &= A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.22)$$

Если ввести дуги

$$\Psi = \cup NN', \quad \Psi_0 = \pi - \cup HN', \quad (9.1.23)$$

то полный интеграл (9.1.21) примет вид

$$S = -Ht + (\psi - \Psi)F + G \left( \Psi_0 + \int \cos \vartheta_0 d\varphi_0 \right). \quad (9.1.24)$$

Связь между двумя системами углов Эйлера и постоянными интегрирования дается формулами

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos (\varphi_0 - \varphi) &= -\frac{F}{G}, \\ \sin^2 \vartheta_0 \left( \frac{\sin^2 \varphi_0}{A} + \frac{\cos^2 \varphi_0}{B} - \frac{1}{C} \right) &= \frac{2H}{G^2} - \frac{1}{C}, \\ \cos \Psi_0 &= \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0 \cos \vartheta'}{\sin \vartheta_0 \sin \vartheta'} = \frac{F \cos \vartheta_0 + G \cos \vartheta}{\sqrt{G^2 - F^2} \sin \vartheta_0}, \\ \cos \Psi &= \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta \cos \vartheta'}{\sin \vartheta \sin \vartheta'} = \frac{F \cos \vartheta + G \cos \vartheta_0}{\sqrt{G^2 - F^2} \sin \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.25)$$

Полный интеграл Гамильтона — Якоби приводит к следующим трем первым интегралам невозмущенного движения:

$$\frac{\partial S}{\partial F} = f_1, \quad \frac{\partial S}{\partial G} = g_1, \quad \frac{\partial S}{\partial H} = h_1, \quad (9.1.26)$$

в которых  $f_1, g_1, h_1$  — произвольные постоянные.

Вместо (9.1.26) можно также записать

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \psi - \Psi, & \omega' ab(t + h_1) &= K(x, k), \\ g_1 &= \Psi_0 + \int \cos \vartheta_0 d\varphi_0 - \frac{2H}{G}(t + h_1). \end{aligned} \right\} \quad (9.1.27)$$

От старых канонических переменных (эйлеровых углов и соответствующих им импульсов) можно перейти к новым каноническим переменным

$$\left. \begin{aligned} F, & & G, & & H, \\ f_1, & & g = g_1 - \pi, & & h. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.28)$$

При рассмотрении возмущенного движения небесного тела относительно его центра инерции переменные (9.1.28) могут быть приняты в качестве оскулирующих элементов. Уравнения возмущенного движения при этом будут иметь вид

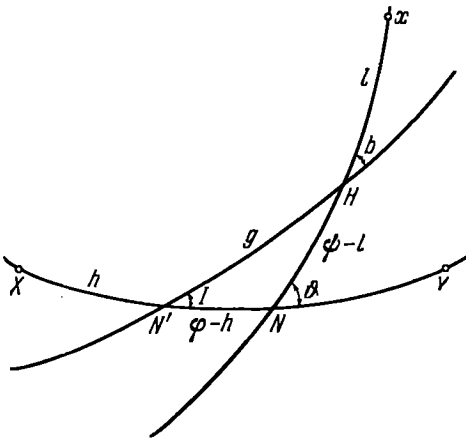


Рис. 104. Канонические угловые переменные Андуайе.

Вторая система канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial f_1}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial h}, \\ \frac{df_1}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial F}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.29)$$

в которых функция Гамильтона  $K$  должна быть выражена через время и шесть новых переменных.

Развитие изложенного и его приложения к задачам астрономии можно найти во втором томе сочинения Ф. Тиссерана [1].

Иной выбор канонических переменных предлагается М. Андуайе [2]. Позднее к нему же обращается А. Депри [11].

Последний вводит новые переменные следующим образом (см. рис. 104). Рассмотрим систему координат  $OXYZ$  и  $Oxyz$ .

Линию узлов плоскостей  $OXY$  и  $Oxy$  обозначим через  $ON$ . Введем углы Эйлера

$$\varphi = \sphericalangle XN, \quad \psi = \sphericalangle Nx, \quad \theta = \sphericalangle YNH. \quad (9.1.30)$$

Построим неизменяемую плоскость Лапласа, проходящую через точку  $O$  и пересекающую плоскости  $Oxy$  и  $OXY$  соответственно по прямым  $OH$  и  $ON'$ . Пусть далее

$$h = \sphericalangle XON', \quad g = \sphericalangle N'OH, \quad l = \sphericalangle HOx, \quad (9.1.31)$$

а  $I$  — угол между плоскостями  $ON'H$  и  $OXY$ ,  $b$  — угол между плоскостями  $Oxy$  и  $ON'H$ . Положим

$$H = G \cos I, \quad L = G \cos b, \quad (9.1.32)$$

где  $G$  — момент количества движения тела.

Величины  $L, G, H, l, g, h$  являются сопряженными каноническими переменными, причем старые канонические переменные связаны с новыми соотношениями

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= (Ap \sin \psi + Bq \cos \psi) \sin \theta + Cr \cos \theta = H, \\ p_\theta &= Ap \cos \psi - Bq \sin \psi = G \sin b \sin (l - \psi), \\ p_\psi &= Cr = L, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.33)$$

а компоненты момента количества движения равны

$$Ap = G \sin b \sin l, \quad Bq = G \sin b \cos l, \quad Cr = L. \quad (9.1.34)$$

Гамильтониан задачи в этих переменных запишется следующим образом:

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{C} - U(l, g, h, L, G, H). \quad (9.1.35)$$

где  $U$  — силовая функция.

Гамильтонова система уравнений движения имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.36)$$

### § 1.03. Астродинамические дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника относительно центра масс

При рассмотрении задач динамики космического полета получили распространение более громоздкие, неканонические системы дифференциальных уравнений вращательного движения спутника в оскулирующих элементах. Некоторые из них можно найти в монографии В. В. Белецкого [10].

Дифференциальные уравнения движения записываются в «перигейной» системе координат  $OXYZ$ , ось аппликат  $Z$  которой коллинеарна радиусу-вектору перигея орбиты, ось ординат  $Y$  нормальна плоскости орбиты, а ось абсцисс  $X$  имеет тангенциальное направление (в сторону движения спутника). Для случая спутника, обладающего осевой динамической симметрией  $A = B$ , уравнения движения были указаны В. В. Белецким [10]. Они имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= (M_X \sin \sigma + M_Z \cos \sigma) \cos \rho + M_Y \sin \rho, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{G} [(M_X \sin \sigma + M_Y \cos \sigma) \cos \rho - M_Y \sin \rho], \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{G \sin \rho} (M_X \cos \sigma - M_Y \sin \sigma), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A} + \frac{1}{G} \{ -M_X [\operatorname{ctg} \vartheta (\cos \sigma \sin \psi + \sin \sigma \cos \psi \cos \rho) + \\ &\quad + \operatorname{ctg} \rho \cos \sigma] + M_Y \sin \rho \operatorname{ctg} \vartheta \cos \psi + \\ &\quad + M_Z [\operatorname{ctg} \vartheta (\sin \sigma \sin \psi - \cos \sigma \cos \rho \cos \psi) + \operatorname{ctg} \rho \sin \sigma] \}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r - \dot{\psi} \cos \vartheta - \\ &\quad - \dot{\sigma} (-\sin \psi \sin \vartheta \sin \rho + \cos \vartheta \cos \rho) + \dot{\rho} \cos \psi \sin \vartheta, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{C} [M_X \alpha_3 + M_Y \beta_3 + M_Z \gamma_3], \end{aligned} \right\} \quad (9.1.37)$$

где  $Cr = G \cos \vartheta$ , а направляющие косинусы  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  суть

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \sin \psi \sin \vartheta \cos \rho \sin \sigma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \sigma + \cos \vartheta \sin \rho \sin \sigma, \\ \beta_3 &= -\sin \psi \sin \vartheta \sin \rho + \cos \vartheta \cos \rho, \\ \gamma_3 &= \sin \psi \sin \vartheta \cos \rho \cos \sigma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \sigma + \cos \vartheta \sin \rho \cos \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.38)$$

В уравнениях (9.1.37) — (9.1.38) использованы следующие обозначения:  $G$  — модуль момента количества движения спутника относительно его центра инерции,  $\rho$  — угол между моментом количества движения и осью ординат перигейной системы,  $\sigma$  — угол между осью аппликат и проекцией момента количества движения на плоскость  $OXZ$ ,  $M_X, M_Y, M_Z$  — проекции главного момента внешних сил на оси перигейной системы координат,  $\varphi, \psi, \vartheta$  — углы Эйлера, вводимые стандартным для теоретической механики образом \*).

\*) Переменные Белецкого связаны с переменными Андуайе — Депри соотношениями  $l = \varphi, g = \psi - \frac{\pi}{2}, h = \sigma + \frac{\pi}{2}, b = \vartheta, l = \rho$ .

Если приложенные силы обладают силовой функцией

$$U = U(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, v),$$

где  $v$  — истинная аномалия центра инерции спутника, то система (9.1.37) принимает следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{G \sin \rho} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} \cos \rho - \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{G \sin \rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A} - \frac{1}{G} \left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right), \\ \frac{dr}{dt} &= 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{G} \frac{\partial U}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.39)$$

Эта система допускает первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const.} \quad (9.1.40)$$

Если  $\frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$ , то имеет место интеграл живых сил

$$G^2 - 2AU = \text{const.} \quad (9.1.41)$$

В случае движения спутника по круговой орбите с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  уравнения движения допускают интеграл Якоби

$$G^2 - 2AU - 2A\omega_0 G \cos \rho = \text{const.} \quad (9.1.42)$$

В общем случае трехосного центрального эллипсоида инерции спутника дифференциальные уравнения движения были даны Ф. Л. Черноулько и имеют вид [15]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= (M_x \sin \sigma + M_z \cos \sigma) \cos \sigma + M_y \sin \rho = M_3, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{G \sin \rho} (M_x \cos \sigma - M_z \sin \sigma) = \frac{M_2}{G \sin \rho}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{G} (M_x \sin \sigma + M_z \cos \sigma) \cos \rho - M_y \sin \rho = \frac{M_1}{G}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \cos \theta + \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{M_2}{G} \operatorname{ctg} \rho. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.43)$$

Эти уравнения образуют замкнутую систему.



### § 1.04. Моменты сил, действующих на спутник

1. Центральное ньютоновское поле тяготения. Вывод силовой функции притяжения точечной массой (или шаром со сферическим распределением плотности) естественного или искусственного небесного тела, размеры которого в рамках поставленной задачи учитываются, приводятся в монографиях [10], [16].

Приближенные моменты сил относительно главных центральных осей рассматриваемого тела равны

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{3fm}{r^3} (C - B) \gamma' \gamma'', \\ M_y &= \frac{3fm}{r^3} (A - C) \gamma \gamma'', \\ M_z &= \frac{3fm}{r^3} (B - A) \gamma' \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.44)$$

или

$$M = \frac{3fm}{r^3} \mathbf{e}_r \times [A(\mathbf{e}_r, \mathbf{i})\mathbf{i} + B(\mathbf{e}_r, \mathbf{j})\mathbf{j} + C(\mathbf{e}_r, \mathbf{k})\mathbf{k}], \quad (9.1.45)$$

где  $m$  — масса притягивающего тела,  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор радиуса-вектора центра масс спутника, а  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы главных центральных осей инерции.

Если через  $U$  обозначить силовую функцию притяжения, то вместо (9.1.44) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma''}, \\ M_y &= \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ M_z &= \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma'}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.46)$$

2. Гравитационное поле сжатой планеты. Компоненты главного момента сил притяжения по главным осям инерции спутника в случае, если притягивающее тело сплюснуто и обладает осью динамической симметрии, даются формулами

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{fm}{r^3} (C - B) \left\{ \left[ 3 - 5\bar{\epsilon} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \left( 7 \frac{\eta^2}{r^2} - 1 \right) \right] \gamma' \gamma'' + \right. \\ &\quad \left. + 10\bar{\epsilon} \frac{\xi}{r} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 (\gamma' \bar{\beta}_3 + \gamma'' \bar{\beta}_2) - 2\bar{\epsilon} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3 \right\}; \\ M_y &= \frac{fm}{r^3} (A - C) \left\{ \left[ 3 - 5\bar{\epsilon} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \left( 7 \frac{\eta^2}{r^2} - 1 \right) \right] \gamma \gamma'' + \right. \\ &\quad \left. + 10\bar{\epsilon} \frac{\eta}{r} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 (\gamma'' \bar{\beta}_1 + \gamma \bar{\beta}_3) - 2\bar{\epsilon} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_3 \right\}, \\ M_z &= \frac{fm}{r^3} (B - A) \left\{ \left[ 3 - 5\bar{\epsilon} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \left( 7 \frac{\eta^2}{r^2} - 1 \right) \right] \gamma \gamma' + \right. \\ &\quad \left. + 10\bar{\epsilon} \frac{\xi}{r} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 (\gamma \bar{\beta}_2 + \gamma' \bar{\beta}_1) - 2\bar{\epsilon} \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.47)$$

Здесь  $\xi, \eta, \zeta, r$  — координаты и радиус-вектор центра масс спутника в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс сжатой планеты,  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$  — направляющие косинусы оси ординат инерциальной системы относительно главных центральных осей инерции,

$$\bar{e} = \frac{r_e - r_p}{r_e} - \frac{\omega_\tau^2 r_e}{2g_e}, \quad (9.1.48)$$

причем  $r_e, r_p$  — соответственно экваториальный и полярный радиусы планеты,  $\omega_\tau$  — ее угловая скорость,  $g_e$  — ускорение силы тяжести на экваторе.

**3. Момент аэродинамических сил.** С достаточной для многих аэродинамических задач точностью момент аэродинамических сил, действующих на спутник, можно принять равным

$$M = \frac{1}{2} \rho_a V_0^2 e_v \times C^m + \frac{1}{2} \rho_a V_0 P, \quad (9.1.49)$$

Здесь  $\rho_a$  — плотность потока,  $V_0$  — скорость центра масс спутника относительно потока,  $e_v$  — единичный вектор этой скорости,

$$C^m = C_1^m i + C_2^m j + C_3^m k, \quad (9.1.50)$$

$$P = P_1 i + P_2 j + P_3 k, \quad (9.1.51)$$

где  $C_i^m, P_i$  — константы, зависящие от положения спутника относительно потока (от угла атаки), а  $i, j, k$  — единичные векторы главных центральных осей инерции спутника.

**4. Моменты сил магнитного взаимодействия.** Момент сил, порожденных взаимодействием магнитного поля спутника с внешним полем, определяется формулой

$$M = H \times I, \quad (9.1.52)$$

в которой  $I$  — магнитный момент спутника,  $H$  — напряженность внешнего магнитного поля.

Магнитный момент спутника порождается установленными на нем постоянными магнитами и токовыми системами, а также намагничиванием спутника в магнитном поле планеты. Последний эффект приводит к магнитному моменту спутника

$$I = \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} v(H, k) k, \quad (9.1.53)$$

где  $\mu_0$  — магнитная проницаемость спутника,  $v$  — объем его оболочки,  $k$  — единичный вектор, направленный вдоль оси материальной симметрии спутника.

Напряженность магнитного поля Земли можно принять равной

$$H = \frac{\mu_\tau}{r^3} [k_\tau - 3(k_\tau, e_r) e_r], \quad (9.1.54)$$

где  $\mu_0$  — величина магнитного момента земного диполя, приближенно совпадающего с осью вращения Земли ( $\mu_T = 8 \cdot 10^{25}$  эрстед·см<sup>3</sup>),  $\mathbf{k}_T$  — единичный вектор оси магнитного диполя,  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ .

**5. Момент сил светового давления.** Для спутников, представляющих собой тело вращения, приближенно момент сил светового давления может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{M} = \frac{a_c(\chi) r_0^2}{r^2} \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}, \quad (9.1.55)$$

где  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор радиуса-вектора центра масс спутника,  $\mathbf{k}$  — единичный вектор его оси материальной симметрии,  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{k}$ ,  $r_0$  — некоторое фиксированное значение.

### § 1.05. Движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском поле

Предполагая размеры спутника достаточно малыми по сравнению с расстоянием до притягивающего центра и считая орбиту его центра масс эллиптической кеплеровской, из уравнений движения, приведенных в [1], можно получить [10]

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= 3 \frac{fm}{\rho^3} (C - B) \gamma' \gamma'', \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr &= 3 \frac{fm}{\rho^3} (A - C) \gamma \gamma'', \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= 3 \frac{fm}{\rho^3} (B - A) \gamma \gamma', \end{aligned} \right\} \quad (9.1.56)$$

где  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  — относительные направляющие косинусы оси аппликат «орбитальной» системы координат (т. е. системы координат, ось аппликат которой направлена по радиусу-вектору центра инерции спутника, ось ординат параллельна нормали к плоскости орбиты, а ось абсцисс параллельна трансверсали) в подвижной системе координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника.

Относительные направляющие косинусы удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma' r - \gamma'' q + \omega \alpha, \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma'' p - \gamma r + \omega \alpha', \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma q - \gamma' p + \omega \alpha'', \end{aligned} \right\} \quad (9.1.57)$$

где  $\omega$  — угловая скорость движения центра масс спутника по орбите, а  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  — направляющие косинусы оси абсцисс орбитальной системы в подвижной (связанной) системе координат, подчиняющихся уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha' r - \alpha'' q - \omega \gamma, \\ \frac{d\alpha'}{dt} &= \alpha'' p - \alpha r - \omega \gamma', \\ \frac{d\alpha''}{dt} &= \alpha q - \alpha' p - \omega \gamma''. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.58)$$

В случае круговой орбиты центра масс ( $\omega = \text{const}$ ) уравнения движения допускают интеграл Якоби

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{3}{2}\omega^2(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) - \omega(Ap\beta + Bq\beta' + Cr\beta'') = h. \quad (9.1.59)$$

Если  $A=B$ , то имеет место еще один первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const}. \quad (9.1.60)$$

Уравнения движения (9.1.56) допускают стационарное решение

$$p = \gamma = 0, \quad q = \omega, \quad (9.1.61)$$

соответствующее относительному равновесию спутника на орбите, при котором спутник все время обращен к Земле одной стороной.

Из приведенных уравнений можно получить различные приближенные формы уравнений движения спутника относительно центра масс на круговой и эллиптической орбитах.

В простейшем случае плоских колебаний спутника на круговой орбите уравнения сводятся к интегралу энергии

$$\frac{1}{2} B\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2} \omega^2 (A - C) \sin^2 \vartheta = h, \quad (9.1.62)$$

в котором  $\vartheta$  — угол между осью наименьшего момента инерции спутника и радиусом-вектором его центра инерции,  $h$  — постоянная интеграла живых сил.

Возможны три типа движения:

- 1)  $\frac{2h}{B} > 3\omega^2 \frac{A-C}{B}$  — *ротационное*,
- 2)  $\frac{2h}{B} = 3\omega^2 \frac{A-C}{B}$  — *лимитационное (предельное)*,
- 3)  $\frac{2h}{B} < 3\omega^2 \frac{A-C}{B}$  — *либрационное*.

Из этих трех типов лимитационное движение является исключительным, так как оно разделяет два других типа движения. На фазовой плоскости  $\phi, \dot{\phi}$  ему соответствует сепаратриса.

Либрационное движение описывается формулой

$$\sin \phi = k \operatorname{sn} [\sigma (t - t_0), k], \quad (9.1.63)$$

в которой модуль эллиптического интеграла равен

$$k^2 = \frac{2h_0}{3\omega^2 (A - C)}, \quad (9.1.64)$$

а

$$\sigma = \omega \sqrt{\frac{3(A - C)}{B}}. \quad (9.1.65)$$

Период колебаний спутника равен

$$T = \frac{4}{\sigma} \mathcal{K}(k). \quad (9.1.66)$$

В случае малых колебаний

$$T \approx \frac{2\pi}{\sigma}. \quad (9.1.67)$$

Если орбита центра масс эллиптическая, то дифференциальное уравнение движения спутника относительно центра масс будет иметь вид

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \phi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\phi}{dv} + \frac{n^2}{2} \sin 2\phi = 2e \sin v, \quad (9.1.68)$$

где  $n^2 = 3(A - C)/B$ ,  $e$  — эксцентриситет орбиты, а  $v$  — истинная аномалия центра масс спутника.

Полагая

$$\phi = \frac{z}{1 + e \cos v}, \quad (9.1.69)$$

вместо (9.1.68) получаем следующее уравнение Хилла:

$$z'' + \frac{n^2 + e \cos v}{1 + e \cos v} z = 2e \sin v. \quad (9.1.70)$$

Принимая теперь за независимую переменную эксцентрическую аномалию  $E$ , приходим к уравнению

$$(1 - e \cos E) \frac{d^2 \phi}{dE^2} + e \sin E \frac{d\phi}{dE} + 3 \frac{A - C}{B} \sin \phi \cos \phi = \\ = 2nae \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin E, \quad (9.1.71)$$

в котором  $\mu$  — гравитационный параметр притягивающего центра, а  $p$  — фокальный параметр орбиты.

Либрационные движения спутника подразделяются на нерезонансные и резонансные. Последние исследованы В. В. Белецким [10], В. Г. Деминым и Р. Б. Сингхом [17]. В работе [17] показано существование резонансов при  $n^2 = \frac{1}{4} k^2$  для любых целых значений  $k$ .

Малые пространственные колебания спутника в случае круговой орбиты описываются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}'' + 3\omega^2 \frac{A-C}{B} \alpha'' &= 0, \\ \ddot{\gamma}' + 4\omega^2 \frac{B-C}{A} \gamma' + \omega \left( \frac{B-C}{A} - 1 \right) \alpha' &= 0, \\ \ddot{\alpha}' + \omega^2 \frac{B-A}{C} \alpha' + \omega \left( 1 - \frac{B-A}{C} \right) \gamma' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.72)$$

Свойства пространственных колебаний определяются корнями характеристического уравнения

$$(\lambda^2 + n^2)(\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_2) = 0, \quad (9.1.73)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= 3\omega^2 \frac{A-C}{B}, \\ a_1 &= \omega^2 \left[ 1 + 3 \frac{B-C}{A} + \frac{B-A}{C} \frac{B-C}{A} \right], \\ a_2 &= 4\omega^2 \frac{B-C}{A} \frac{B-A}{C}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.74)$$

Малые пространственные колебания на эллиптической орбите описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 + e \cos v) \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{dv^2} + [e \cos v + \tilde{a}_1 (4 + e \cos v)] \tilde{\gamma} - \\ - (1 + e \cos v) \tilde{a}_2 \frac{d\tilde{\alpha}}{dv} + e \sin v \cdot \tilde{a}_3 \tilde{\alpha} &= 0, \\ (1 + e \cos v) \frac{d^2 \tilde{\alpha}}{dv^2} + [e \cos v + \tilde{b}_1 (1 + e \cos v)] \tilde{\alpha} + \\ + \tilde{b}_2 (1 + e \cos v) \frac{d\tilde{\gamma}}{dv} - e \sin v \cdot \tilde{b}_3 \tilde{\gamma} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.75)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{B-C}{A}, & \tilde{a}_2 &= \frac{A+C-B}{A}, & \tilde{a}_3 &= \frac{B-C+A}{A}, \\ \tilde{b}_1 &= \frac{B-A}{C}, & \tilde{b}_2 &= \frac{A+C-B}{C}, & \tilde{b}_3 &= \frac{B+C-A}{C}. \end{aligned}$$

### § 1.06. Задача о поступательно-вращательном движении двух гравитирующих динамически симметричных тел

Рассмотрим движение двух взаимно притягивающих абсолютно твердых тел  $M_1$  и  $M_2$ , обладающих осями динамической симметрии. Движение тел будем относить к системе координат  $O_1XYZ$  с началом в центре масс тела  $M_1$  и с фиксированными направлениями координатных осей.

Относительное движение центра масс тела будем определять в канонических элементах Делоне  $L, G, H, l, g, h$  (см. формулы (4.3.21)). Движение тел  $M_i$  относительно их центров масс зададим каноническими переменными Андуайе (см. § 1.02)  $L_i, G_i, H_i, l_i, g_i, h_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения тел в этих переменных имеют гамильтонову форму [14]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_i}, & \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \frac{dG_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_i}, & \frac{dg_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_i}, \\ \frac{dH_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_i}, & \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_i}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.76)$$

$(i = 1, 2).$

Гамильтониан  $F$  дается формулой

$$F = \frac{f^2 m_1^3 m_2^3}{2(m_1 + m_2)L^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{G_i^2}{A_i} + \frac{A_i - C_i}{A_i C_i} L_i^2 \right) + U - U_0, \quad (9.1.77)$$

причем

$$U - U_0 = \frac{f m_1}{2r^3} (2A_2 + C_2 - 3J_2) + \frac{f m_2}{2r^3} (2A_1 + C_1 - 3J_1), \quad (9.1.78)$$

где момент инерции  $J_i$  относительно прямой  $O_1O_2$  определяется соотношением

$$J_i = A_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) + C_i \gamma_i^2 \quad (i = 1, 2), \quad (9.1.79)$$

в котором через  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  обозначены косинусы углов, образуемых прямой  $O_1O_2$  с главными центральными осями инерции тел  $M_i$ .

Указанные направляющие косинусы вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= c_{11}^{(i)} \frac{x}{r} + c_{21}^{(i)} \frac{y}{r} + c_{31}^{(i)} \frac{z}{r}, \\ \beta_i &= c_{12}^{(i)} \frac{x}{r} + c_{22}^{(i)} \frac{y}{r} + c_{32}^{(i)} \frac{z}{r}, \\ \gamma_i &= c_{13}^{(i)} \frac{x}{r} + c_{23}^{(i)} \frac{y}{r} + c_{33}^{(i)} \frac{z}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.80)$$

где  $x, y, z$  — координаты точки  $O_2$  в системе  $O_1XYZ$ .

В канонических переменных коэффициенты в выражениях для направляющих косинусов задаются формулами

$$\left. \begin{aligned} c_{13}^{(i)} &= \frac{1}{G_i^2} \left[ L_i \sqrt{G_i^2 - H_i^2} \sin h_i + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{G_i^2 - L_i^2} (G_i \sin g_i \cos h_i + H_i \sin h_i \cos g_i) \right], \\ c_{23}^{(i)} &= \frac{1}{G_i^2} \left[ -L_i \sqrt{G_i^2 - H_i^2} \cos h_i + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{G_i^2 - L_i^2} (G_i \sin g_i \sin h_i - H_i \cos h_i \cos g_i) \right], \\ c_{33}^{(i)} &= \frac{1}{G_i^2} (L_i H_i - \sqrt{(G_i^2 - L_i^2)(G_i^2 - H_i^2)} \cos g_i). \end{aligned} \right\} \quad (9.1.81)$$

Разложение гамильтониана (9.1.77) в ряд имеет следующий вид;

$$\begin{aligned} F &= \frac{f^2 m_1^3 m_2^3}{2(m_1 + m_2)L^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{G_i^2}{A_i^2} + \frac{A_i - C_i}{A_i C_i} L_i^2 \right) + \\ &\quad + \frac{3f^4 m_1^6 m_2^6}{32(m_1 + m_2)^3 L^6} \left( 35 - 42 \frac{G^2}{L^2} + 15 \frac{G^4}{L^4} \right) \sum_{i,j=1}^2 m_j \left( 1 - 3 \frac{L_i^2}{G_i^2} \right) \times \\ &\quad \times (C_i - A_i) \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{H_i^2}{2G_i^2} + \frac{H \sqrt{G^2 - H^2}}{G^2} \frac{H_i \sqrt{G_i^2 - H_i^2}}{G_i^2} \cos(h - h_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G^2 - H^2}{2G^2} \left[ \frac{G_i^2 - H_i^2}{G_i^2} \cos^2(h - h_i) - \frac{H_i^2}{G_i^2} \right] \right\} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^6 \left[ a_{2i} \frac{\sin}{\cos} i g_1 + a_{3i} \frac{\sin}{\cos} i g_2 \right] + \\ &\quad + \sum_{|l|=1}^6 \sum_{j=1}^2 \left[ a_{4i}^{(j)} \frac{\sin}{\cos} (j g_1 + i l) + a_{5i}^{(j)} \frac{\sin}{\cos} (j g_2 + i l) \right], \quad (9.1.82) \end{aligned}$$

где  $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}^{(j)}, a_{5i}^{(j)}$  — функции канонических переменных  $L, G, H, L_i, G_i, H_i, g, h, h_i$ .



### § 1.07. Вращение Луны

Характерные особенности в движении Луны были изучены Домеником Кассини (см. ч. I, § 4.08).

Законы Кассини легли в основу физической либрации Луны. Впервые им было дано объяснение на основе линеаризованных уравнений движения Лагранжем [7] и Лапласом [8]. Более строгое математическое обоснование было дано в работе [18] на основе асимптотических методов теории колебаний. Там же исследовалась устойчивость решений, соответствующих движениям по Кассини.

Раздельное изучение вращательного и поступательного движения Луны приводит к следующим формулам [1]:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta \sin \varphi &= -\frac{3i\beta}{2\mu + \mu^2 - 3\beta} \sin(c + n_{\zeta}t - \Omega) + \\ &\quad + 3(i + \vartheta_0) \frac{\alpha e}{\mu + \nu} \sin(\bar{\omega} - \Omega), \\ \vartheta \cos \varphi &= -\frac{3i\beta}{(1 + \mu)(2\mu + \mu^2 - 3\beta)} \cos(c + n_{\zeta}t - \Omega) + \\ &\quad + \frac{3}{2}(i + \vartheta_0) \frac{\beta e}{\mu + \nu} \cos(\bar{\omega} - \Omega), \\ p &= -3n_{\zeta}(i + \vartheta_0) \frac{\alpha e}{\mu + \nu} \sin(\bar{\omega} - \Omega), \\ q &= -\frac{3}{2}n_{\zeta}(i + \vartheta_0) \frac{\beta e}{\mu + \nu} \cos(\bar{\omega} - \Omega) - \\ &\quad - 3i\beta n_{\zeta} \frac{2\mu + \mu^2}{(1 + \mu)(2\mu + \mu^2 - 3\beta)} \cos(c + n_{\zeta}t - \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (9.1.83)$$

В формулах (9.1.83)  $\vartheta$  — угол нутации,  $\varphi$  — угол собственного вращения,  $n_{\zeta}$  — среднее движение Луны,  $c + n_{\zeta}t$  — ее средняя долгота,  $e$  — эксцентриситет лунной орбиты,  $i$  — ее наклонность,  $\bar{\omega}$  — долгота перигея лунной орбиты,  $\Omega$  — долгота ее восходящего узла,  $\mu$  — коэффициент в вековом неравенстве долготы восходящего узла лунной орбиты,  $\alpha = \frac{C - B}{A}$ ,  $\beta = \frac{C - A}{B}$ ,  $\gamma = \frac{B - A}{C}$ . Постоянная  $\vartheta_0$  удовлетворяет уравнению

$$\vartheta_0^2 = \frac{(3i\beta)^2}{(1 + \mu)^2 (2\mu + \mu^2 - 3\beta)^2} \frac{2 + 2\mu + \mu^2}{2} + \frac{9}{8} \left( \frac{i + \vartheta_0}{\mu + \nu} e \right)^2 (\beta^2 + 4\alpha^2), \quad (9.1.84)$$

которое приближенно дает

$$\vartheta_0 = \frac{3i\beta}{(1 + \mu)(2\mu + \mu^2 - 3\beta)} \sqrt{1 + \mu + \frac{\mu^2}{2}}. \quad (9.1.85)$$

Если принять [1]

$$\begin{aligned}\mu &= 0,004019, & \nu &= 0,008455, & i &= 5^{\circ}08'44'', \\ \vartheta_0 &= 1^{\circ}31'22'', & \alpha &= 0,000299, & \beta &= 0,000614,\end{aligned}$$

то формулы (9.1.84)–(9.1.85) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}\vartheta \sin \varphi &= -5493'' \sin(c + n_{\zeta}t - \Omega) + 947'' \sin(\bar{\omega} - \Omega), \\ \vartheta \cos \varphi &= -5471'' \cos(c + n_{\zeta}t - \Omega) + 972'' \cos(\bar{\omega} - \Omega), \\ p &= -947'' n_{\zeta} \sin(\bar{\omega} - \Omega), \\ q &= -972'' n_{\zeta} \cos(\bar{\omega} - \Omega) - 44'' n_{\zeta} \cos(c + n_{\zeta}t - \Omega).\end{aligned}\right\} (9.1.86)$$

Введем обозначение

$$\Phi = \varphi - c - n_{\zeta}t + \Omega - 180^{\circ}.$$

Тогда формулы вращательного движения Луны приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned}\vartheta &= \vartheta_0 - 11'' \cos 2(c + n_{\zeta}t - \Omega) - \\ &\quad - 12'' \cos(c + n_{\zeta}t + \bar{\omega} - 2\Omega) - 960'' \cos(c + n_{\zeta}t - \bar{\omega}), \\ \Phi \sin \vartheta_0 &= 11'' \sin 2(c + n_{\zeta}t - \Omega) + \\ &\quad + 12'' \sin(c + n_{\zeta}t + \bar{\omega} - 2\Omega) + 960'' \sin(c + n_{\zeta}t - \bar{\omega}), \\ \varphi &= c + n_{\zeta}t - \Omega - \Phi + 180^{\circ}, \\ \psi &= \varphi - c - n_{\zeta}t + 180^{\circ} + 22'' \sin \zeta - 133'' \sin \odot,\end{aligned}\right\} (9.1.87)$$

где  $\zeta$  и  $\odot$  — соответственно средние аномалии Луны и Солнца,  $\psi$  — угол собственного вращения.

### § 1.08. Дифференциальные уравнения движения деформируемого небесного тела

В небесной механике возникает необходимость исследования движений малодеформированных планет (например, их свободной нутации). В этом случае движение тела относят к так называемым «средним осям» [1].

Одним из способов выбора барицентрической системы координатных осей *Oxyz* состоит в нахождении минимума суммы квадратов отклонений отдельных материальных точек, образующих планету, за время  $dt$  от положений, которые бы они занимали в случае «затвердения» рассматриваемой системы. Это условие сводится к уравнению

$$\sum m_i [(\dot{x}_i - qz_i + ry_i)^2 + (\dot{y}_i - rx_i + pz_i)^2 + (\dot{z}_i - py_i + qx_i)^2] = \min. \quad (9.1.88)$$

Составляющие момента количества движения системы по координатным осям обозначим через  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= Ap - Hq - Gr, \\ \mu &= -Hp + Bq + Fr, \\ \nu &= -Gp - Fq + Cr, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.89)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $G$ ,  $F$ ,  $H$  — центральные осевые и центробежные моменты инерции небесного тела.

Дифференциальные уравнения вращательного движения небесного тела записываются в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} - r\mu + q\nu &= L, \\ \frac{d\mu}{dt} - p\nu + r\lambda &= M, \\ \frac{d\nu}{dt} - q\lambda + p\mu &= N \end{aligned} \right\} \quad (9.1.90)$$

(при подстановке в систему (9.1.90) значений  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  из (9.1.89) следует иметь в виду, что компоненты тензора инерции непостоянны).

Уравнения вращательного движения планеты с учетом ее малых деформаций в предположении, что планета обладает осью динамической симметрии, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A) nq - n \frac{dG}{dt} + Fn^2 &= L, \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) np - n \frac{dF}{dt} - Gn^2 &= M, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.91)$$

где  $n$  — постоянная угловая скорость вращения планеты вокруг оси динамической симметрии, а  $L$ ,  $M$  — моменты внешних сил.

Согласно Ляву [19] приближенно будем иметь

$$F = -\beta nq, \quad G = -\beta np, \quad (9.1.92)$$

где  $\beta$  — постоянная, зависящая от упругих свойств планеты, ее размеров и распределения плотности.

Период вращения планеты  $T$  вследствие упругих деформаций удлиняется на величину

$$\Delta T = \frac{2\pi\beta n^2}{(C - A)^2}. \quad (9.1.93)$$

### § 1.09. Теория фигур небесных тел

Теория фигур равновесия небесных тел состоит в изучении формы, которую принимает жидкость, частицы которой взаимно притягиваются по ньютоновскому закону при отсутствии внешних сил.

Основной вклад в эту теорию был сделан И. Ньютоном, Клеро, Лежандром, Лапласом, Маклореном, Якоби, А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Последовательное изложение можно найти в работах [20] — [26]. Приложения теории фигур планет в гравиметрии даются в книге Н. П. Грушинского [27], а звездодинамические аспекты обсуждаются в монографии К. Ф. Огородникова [28].

Фигуры равновесия небесных тел изучаются на основе уравнений деформируемого тела (см. § 1.08), динамических уравнений Эйлера и гидродинамических уравнений. Последние имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \dot{\omega}_z y - \dot{\omega}_y z - \\ &\quad - \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) + x \omega^2, \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \dot{\omega}_x z - \dot{\omega}_z x - \\ &\quad - \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) + y \omega^2, \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \dot{\omega}_y x - \dot{\omega}_x y - \\ &\quad - \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) + z \omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.94)$$

где  $p(x, y, z)$  — давление жидкости в текущей точке,  $V$  — потенциал сил притяжения,  $\kappa(x, y, z)$  — плотность,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — компоненты мгновенной угловой скорости.

*Теорема Пуанкаре. Единственно возможным движением жидкости, при котором она находится в состоянии относительного равновесия, является перманентное вращение ее вокруг одной из главных центральных осей инерции.*

Если  $\omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ , то, направляя ось аппликат вдоль вектора  $\omega$ , приведем уравнения (9.1.94) к форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.95)$$

где

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (9.1.96)$$

$V$  — потенциал силы тяжести.

*Теорема. Если изолированная идеальная жидкость находится в состоянии относительного равновесия, то ее эквипотенциальные (уровенные) поверхности одновременно являются*

поверхностями изобарическими (равного давления) и изостерическими (равной плотности).

*Следствие.* Жидкая масса, находящаяся в состоянии относительного равновесия, ограничена уровневой поверхностью.

Если жидкость однородна и несжимаема, то уровневая поверхность удовлетворяет уравнению Вавра

$$\kappa \int_S \frac{\cos(\widehat{n, s})}{r} d\sigma = \omega^2 \left( x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right), \quad (9.1.97)$$

в котором  $S$  — поверхность, ограничивающая жидкость,  $ds = \{dx, dy, dz\}$ ,  $d\sigma$  — элемент поверхности,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль.

*Теорема Лихтенштейна.* Фигура относительного равновесия однородной вращающейся жидкости обладает плоскостью симметрии (экватором), которая проходит через ее центр инерции и перпендикулярна к оси вращения.

*Следствие.* Единственной фигурой равновесия невращающейся однородной жидкости является сфера.

Приводимые ниже теоремы накладывают ограничения на угловую скорость вращения жидкости, находящейся в состоянии относительного равновесия.

*Теорема Пуанкаре.* Относительное равновесие жидкости может иметь место только при угловых скоростях ее вращения, не превосходящих  $\sqrt{2\pi f\kappa}$ .

*Теорема Круделли.* Если жидкость, находящаяся в состоянии относительного равновесия, ограничена выпуклой поверхностью, то ее угловая скорость не может превосходить  $\sqrt{\pi f\kappa}$ .

Рядом авторов при различных постановках задачи изучены различные типы фигур равновесия вращающихся жидких масс. Из них наиболее важные астрономические, гравиметрические и геодезические приложения имеют эллипсоидальные фигуры равновесия.

Условие, при котором эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (9.1.98)$$

с постоянной плотностью

$$\kappa = \frac{3m}{4\pi abc} \quad (9.1.99)$$

является фигурой равновесия, сводится к уравнению

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f\kappa} = \int_0^\infty \frac{u(1-u)t dt}{(1+t)(1+ut)D} = \int_0^\infty \frac{v(1-v)t dt}{(1+t)(1+vt)D}. \quad (9.1.100)$$

В этом уравнении использованы обозначения

$$u = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad v = \left(\frac{c}{b}\right)^2, \quad t = \frac{s}{c^2}, \quad (9.1.101)$$

причем через  $s$  обозначена переменная, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1. \quad (9.1.102)$$

Уравнение (9.1.100) допускает два типа эллипсоидальных фигур равновесия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) u = v - \text{эллипсоиды Маклорена,} \\ 2) u \neq v, \int_0^\infty (1 - u - v - uv) \frac{t dt}{D^3} = 0 - \text{эллипсоиды Якоби.} \end{array} \right\} \quad (9.1.103)$$

Существуют два типа эллипсоидов Маклорена: *сплюснутые* и *дискообразные*.

В зависимости от величины угловой скорости, точнее, значенй параметра  $\Omega$ , имеют место следующие случаи:

- 1)  $0 \leq \Omega \leq 0,1871$  — два эллипсоида Маклорена и один эллипсоид Якоби;
- 2)  $0,1871 \leq \Omega < 0,2247$  — два эллипсоида Маклорена;
- 3)  $\Omega = 0,2247$  — один эллипсоид Маклорена;
- 4)  $\Omega > 0,2247$  ни одного равновесного эллипсоида.

Из теорем теории фигур равновесия вращающихся жидких масс вытекают некоторые важные гравиметрические результаты. Ниже приводится ряд соответствующих теорем и формул.

**Теорема Стокса.** *Если вращающаяся жидкая масса находится в состоянии относительного равновесия, то сила тяжести на ее поверхности и вне ее однозначно определяется заданием массы жидкости, угловой скорости ее вращения и уровенной поверхностью.*

*Формула Брунса:*

$$\frac{\partial g}{\partial n} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 2(\omega^2 - 2\pi f \kappa); \quad (9.1.104)$$

здесь  $\partial/\partial n$  — производная по нормали к уровенной поверхности,  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны уровенной поверхности,  $g$  — ускорение силы тяжести.

*Редукция Фая.* Из (9.1.104) для Земли при

$$f = 6,67 \cdot 10^{-8}, \quad \kappa_1 = 0,013, \quad \omega = 0,000073,$$

где  $\kappa_1$  — плотность воздуха, получаем формулу для *приведения в свободном воздухе*:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 0,3086 (1 + 0,00071 \cos 2\varphi), \quad (9.1.105)$$

Потенциал силы тяжести для уровенной поверхности, имеющей форму эллипсоида вращения, равен

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \frac{fm}{c} \operatorname{arcctg} \operatorname{sh} w + \\ & + \frac{\omega^2 a^2}{3} \frac{P_2(\cos u)}{\frac{3b^2 + c^2}{c^2} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - 3 \frac{b}{c}} [(3 \operatorname{sh}^2 w + 1) \operatorname{arcctg} \operatorname{sh} w - 3 \operatorname{sh} w] - \\ & - \frac{\omega^2 a^2}{2} \sin^2 u, \quad (9.1.106) \end{aligned}$$

где использованы эллиптические координаты  $u, v, w$ , связанные с геоцентрическими прямоугольными координатами формулами преобразования [27]

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sin u \sin v \operatorname{ch} w, \\ y &= c \sin u \cos v \operatorname{sh} w, \\ z &= c \cos u \operatorname{sh} w, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.107)$$

$P_2(\cos u)$  — полином Лежандра второго порядка, а уровенная поверхность соответствует следующим значениям [27]:

$$\operatorname{ch} w = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{sh} w = \frac{b}{c}. \quad (9.1.108)$$

Из приведенного потенциала силы тяжести вытекает формула для вычисления ускорения силы тяжести на уровенной поверхности в функции геодезической широты, именуемая *формулой Пицетти — Сомильяна*:

$$g = \frac{g_e a \cos^2 B + g_p b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (9.1.109)$$

в которой  $g_e, g_p$  — ускорения силы тяжести на экваторе и полюсе соответственно, а  $B$  — геодезическая широта.

## УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В этой главе приводятся без доказательств критерии устойчивости в смысле Ляпунова различных режимов вращения относительно центра масс искусственных спутников планет и космических аппаратов, которые вытекают либо из строгого, либо и из линейного анализа уравнений движения. Описываются различные способы стабилизации вращения космических аппаратов. Даются только результаты исследования ограниченных задач динамики космического полета, полученные в предположении, что вращательное движение спутников не оказывает никакого влияния на их орбитальное движение.

Основные результаты этой ветви астродинамики последовательно изложены в [10] и [16]. Достаточно полно результаты указанных исследований освещены в прекрасном обзоре В. М. Морозова [29].

### § 2.01. Устойчивость движения спутников в гравитационном поле сил

Задача о вращательном движении небесного тела относительно его центра инерции в ньютоновском поле тяготения допускает в качестве частных решений положения относительного равновесия, при которых главные центральные оси инерции спутника, движущегося по круговой орбите, ориентированы вдоль радиуса-вектора центра масс, касательной к орбите и нормали к плоскости орбиты (см. § 1.05).

Впервые эта проблема была изучена Лагранжем [7], который в 1780 г. указал необходимые условия устойчивости отмеченных частных решений. В современных терминах решение задачи дано в [1]. В последнее время в нелинейной постановке она исследовалась В. В. Белецким [10], который указал и проанализировал достаточные условия устойчивости. Как оказалось,



для устойчивости относительного равновесия тела на круговой орбите достаточно, чтобы его наибольшая главная центральная ось инерции была направлена вдоль радиуса-вектора его центра масс, наименьшая — по нормали к плоскости орбиты, а средняя — по касательной к орбите.

Из анализа интеграла Якоби вытекает, что существует четыре устойчивых положения относительного равновесия спутника на орбите, которые можно получить одно из другого посредством поворотов спутника на  $180^\circ$  вокруг радиуса-вектора и нормали к плоскости орбиты. При этом должно выполняться неравенство

$$B > A > C. \quad (9.2.01)$$

При помощи теорем Кельвина и Н. Г. Четаева В. В. Румянцев [16] показал, что при выполнении одного из неравенств

$$B > C > A, \quad C > A > B, \quad A > B > C \quad (9.2.02)$$

положения относительного равновесия спутника неустойчивы, а при выполнении одного из неравенств

$$C > B > A, \quad A > C > B \quad (9.2.03)$$

возможна их *гироскопическая стабилизация*.

Положения устойчивого относительного равновесия спутников на круговых орбитах являются центрами либраций. Границы либраций спутников были оценены В. В. Белецким [10]. Области либрации определяются неравенствами

$$\left. \begin{aligned} 3[(A-C)\gamma^2 + (B-C)\gamma'^2] &\leq \frac{2h}{\omega^2}, \\ (B-A)\beta^2 + (B-C)\beta'^2 &\leq \frac{2h}{\omega^2}, \\ 3(A-C)\gamma^2 + (B-A)\beta^2 &\leq \frac{2h}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.04)$$

в которых использованы обозначения § 1.05 и которые надлежит рассматривать совместно с тривиальными геометрическими интегралами для относительных направляющих косинусов.

Более точная оценка границ либрации несимметричного спутника приводится в работе Ликинса и Роута [30] и опирается на анализ неравенства

$$3[(A-C)\gamma^2 + (B-C)\gamma'^2] + (B-A)\beta^2 + (B-C)\beta'^2 \leq \frac{2h}{\omega^2}. \quad (9.2.05)$$

Ряд работ посвящен исследованию устойчивости положений относительного равновесия спутников, снабженных роторами, т. е. спутников-гиростатов. Рассматривались два типа гиростатов. В первом типе постоянной во все время движения остается

компонента момента количества относительного движения ротора по главным центральным осям инерции спутника

$$k_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9.2.06)$$

а во втором типе неизменным остается вектор гиристатического момента, т. е. его компоненты суть

$$k_i^* = k_i + \omega \sum_{s=1}^3 I_s l_{si} (l_{s1}\beta + l_{s2}\beta' + l_{s3}\beta'') = \text{const} \quad (9.2.07)$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

где  $I_s$  — осевые моменты инерции роторов, а  $l_{s1}, l_{s2}, l_{s3}$  — направляющие косинусы свободных осей роторов. Второй тип гиристатов впервые был введен В. В. Румянцевым [16].

Устойчивость положений относительного равновесия гиристата исследовалась А. А. Анчевым [31] и В. В. Румянцевым [16]. Рассматривались следующие три положения относительного равновесия:

$$1) \quad \gamma'' = \beta' = 1, \quad \gamma = \gamma' = \beta = \beta'' = 0 \quad (9.2.08)$$

при  $k_1 = k_3 = 0$ ;

$$2) \quad \gamma'' = 1, \quad \gamma = \gamma' = \beta'' = 0, \quad \beta = \sin \vartheta_0, \quad \beta' = \cos \vartheta_0 \quad (9.2.09)$$

при  $k_3 = 0, k_2 \sin \vartheta_0 - k_1 \cos \vartheta_0 - (B - A) \omega \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = 0$ ;

$$3) \quad \gamma = \beta = 0, \quad \beta'' = -\gamma' = \sin \vartheta_0, \quad \beta' = \gamma'' = \cos \vartheta_0 \quad (9.2.10)$$

при  $k_1 = 0, k_3 \cos \vartheta_0 - k_2 \sin \vartheta_0 + 4(C - B) \omega \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0 = 0$ .

Достаточные условия устойчивости указанных положений относительного равновесия приводятся к виду [18]:

для первого случая

$$B + \frac{k_2}{\omega} > A > C, \quad B + \frac{k_2}{4\omega} > C; \quad (9.2.11)$$

для второго случая

$$\left. \begin{aligned} B + \frac{k_2}{\omega \cos^3 \vartheta_0} > A, \quad B + \frac{k_2 \cos \vartheta_0}{\omega (3 + \cos^2 \vartheta_0)} > C, \\ 3(A - C)(B - C) + \left( B - C + \frac{k_2}{\omega \cos \vartheta_0} \right) (A \cos^2 \vartheta_0 + B \sin^2 \vartheta_0 - C) > 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.12)$$

для третьего случая

$$\left. \begin{aligned} A - B \sin^2 \vartheta_0 - C \cos^2 \vartheta_0 > 0, \quad B + \frac{k_2}{4\omega \cos^2 \vartheta_0} > C, \\ (A - B \sin^2 \vartheta_0 - C \cos^2 \vartheta_0) \left( B - A + \frac{k_2}{\omega \cos \vartheta_0} \right) + \\ + 3(B - C)(A - B) \sin^2 \vartheta_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.13)$$

В случае динамически симметричного спутника, когда  $A=B$ , уравнения движения допускают следующие частные решения:

$$1) \vartheta = 0, \quad \beta'' = 1, \quad \gamma'' = \alpha'' = 0, \quad \Omega = \Omega_0; \quad (9.2.14)$$

$$2) \vartheta = \vartheta_0 \neq 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \beta'' = \cos \vartheta_0, \quad \Omega = \Omega_0 = \frac{A-C}{C} \omega \cos \vartheta_0; \quad (9.2.15)$$

$$3) \vartheta = \vartheta_0 \neq 0, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = \cos \vartheta_0, \quad \Omega = \Omega_0 = 4 \frac{A-C}{C} \omega \cos \vartheta_0, \quad (9.2.16)$$

где  $\vartheta_0$  — угол между осью динамической симметрии спутника и нормалью к плоскости орбиты,  $\Omega_0$  — угловая скорость вращения спутника.

Этим решениям соответствуют перманентные вращения спутника вокруг его оси симметрии, которая неизменно расположена относительно орбитальной системы координат.

Необходимые условия устойчивости частных решений (9.2.14) — (9.2.16) были получены Г. Н. Дубошиным [32], а достаточные условия устойчивости были установлены Ф. Л. Черноушко [33]. Они сводятся к следующим неравенствам:

*для первого случая*

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &> \frac{A-C}{C} \omega && \text{при } A \leq C, \\ \Omega_0 &> 4 \frac{A-C}{C} \omega && \text{при } A \geq C; \end{aligned} \right\} \quad (9.2.17)$$

*для второго случая*

$$A < C; \quad (9.2.18)$$

*для третьего случая*

$$A > C. \quad (9.2.19)$$

Эти результаты были обобщены Н. Н. Колесниковым [34] на случай осесимметричного спутника-гиростата, движущегося на круговой орбите, в предположении, что  $k_1 = k_2 = 0$ , а  $k = k_3 = \text{const}$ . Он выявил три режима регулярной прецессии, аналогичных решениям (9.2.14) — (9.2.16). Случай (9.2.14) остается без изменений, а для двух других случаев вместо (9.2.15) и (9.2.16) будем иметь

$$\Omega = \Omega_0 = \frac{A-C}{C} \omega \cos \vartheta_0 - \frac{k}{C}, \quad (9.2.20)$$

$$\Omega = \Omega_0 = 4 \frac{A-C}{C} \omega \cos \vartheta_0 - \frac{k}{C}. \quad (9.2.21)$$

Достаточные условия устойчивости для первого типа движения приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} C\Omega_0 + k > 4(A - C)\omega & \text{ при } A \geq C, \\ C\Omega_0 + k > (A - C)\omega & \text{ при } C \geq A, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.22)$$

а для двух других случаев сохраняются неизменными.

### § 2.02. Устойчивость движения спутников под действием моментов сил различной природы

Во многих случаях необходим совокупный учет воздействия на вращательное движение спутника сил различной физической природы (как сил тяготения, так и аэродинамических, магнитных и иных сил).

Оценки показывают, что до высот полета спутника порядка  $(0,5 \pm 0,3) \cdot 10^3$  км гравитационный, магнитный и аэродинамические моменты сил должны учитываться одновременно, так как они сравнимы по величине. На более низких орбитах и при входе в атмосферу основное значение приобретают аэродинамические силы. На больших высотах основное значение имеют гравитационные моменты.

Разнообразные исследования в этом направлении выполнил В. В. Белецкий [10]. Он, в частности, рассмотрел положения относительного равновесия спутника, движущегося по круговой орбите, при учете гравитационных и аэродинамических моментов. В этом случае существуют три положения относительного равновесия, как это показано В. В. Белецким [10] и В. М. Морозовым [35]:

$$1) p = q = r = 0, \quad \beta = \beta'' = \gamma' = \gamma'' = \alpha = \alpha' = 0; \quad (9.2.23)$$

$$2) p = q = r = 0, \quad \alpha'' = \gamma'' = \beta = \beta'' = 0, \quad \alpha'' = \sin \vartheta_0; \quad (9.2.24)$$

$$3) p = q = r = 0, \quad \gamma' = \gamma'' = \alpha = \beta = 0, \quad \alpha'' = \sin \vartheta_0, \quad (9.2.25)$$

причем в первых двух случаях  $\vartheta_0$  удовлетворяет уравнению

$$3\omega^2(A - C) \sin \vartheta_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c} (\sin \vartheta_0) = 0, \quad (9.2.26)$$

а в третьем — уравнению

$$\omega^2(C - B) \sin \vartheta_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c} (\sin \vartheta_0) = 0. \quad (9.2.27)$$

Здесь через  $v_0$  обозначена скорость центра инерции тела,  $\rho$  — плотность атмосферы,  $\bar{c}(\sin \vartheta_0)$  — коэффициент аэродинамического момента,  $p, q, r$  — компоненты по главным центральным осям инерции тела. Кроме того, ось аппликат связанной системы должна быть осью симметрии поверхности, ограничивающей тело.

Геометрическая картина движения такова:

*в первом случае* главные центральные оси инерции тела направлены по осям орбитальной системы координат;

*во втором случае* ось ординат связанной системы направлена по нормали к орбитальной плоскости, а две другие центральные главные оси инерции повернуты на угол  $\theta_0$  относительно тангенциального и радиального направления;

*в третьем случае* ось абсцисс коллинеарна радиусу-вектору центра инерции, а ось аппликат наклонена к нормали к орбитальной плоскости под углом  $\theta_0$ .

Наиболее широкие достаточные условия устойчивости указаны в работах В. В. Румянцева [16] и В. М. Морозова [35]. Они имеют следующий вид:

*для первого случая*

$$\left. \begin{array}{l} B > A, \\ 3(C - A)\omega^2 - \frac{1}{2}\rho v_0^2 \bar{c}(1) > 0, \\ (B - C)\omega^2 - \frac{1}{2}\rho v_0^2 \bar{c}(1) > 0, \end{array} \right\} \quad (9.2.28)$$

*для второго случая* (см. [36])

$$\left. \begin{array}{l} B > A, \\ 3(A - C)\omega^2 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \left( \frac{d\bar{c}}{d\alpha''} \right)_{\alpha'' = \sin \theta_0} > 0, \\ B + 3A > 4C - 3(C - A)\cos^2 \theta_0, \end{array} \right\} \quad (9.2.29)$$

*для третьего случая*

$$\left. \begin{array}{l} B > A, \\ (C - B)\omega^2 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \left( \frac{d\bar{c}}{d\alpha''} \right)_{\alpha'' = \sin \theta_0} > 0. \end{array} \right\} \quad (9.2.30)$$

В задаче о движении спутника на геоцентрической экваториальной круговой орбите положения его относительного равновесия существуют и при более общих предположениях относительно действующих на спутник моментов. В работе В. М. Морозова [35] такие равновесные решения получены в случае одновременного действия гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов. Они определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \kappa_3 \beta' - \kappa_2 \beta'' = 3\omega^2 (C - B) \gamma' \gamma'' + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}(\alpha'') \alpha' - \\ \quad - [(C - B)\omega^2 + b] \beta' \beta'', \\ \kappa_1 \beta'' - \kappa_3 \beta = 3\omega^2 (A - C) \gamma' \gamma'' - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}(\alpha'') \alpha - \\ \quad - [(A - C)\omega^2 - b] \beta \beta'', \\ \kappa_2 \beta - \kappa_1 \beta' = 3\omega^2 (B - A) \gamma \gamma' - (B - A) \omega^2 \beta \beta', \end{array} \right\} \quad (9.2.31)$$

где

$$\kappa_i = \omega k_i + a l_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9.2.32)$$

$k_i$  — компоненты гиристатического момента по главным центральным осям инерции,  $a$ ,  $b$  — характеристики постоянного магнитного момента оболочки,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  — направляющие косинусы постоянного магнитного момента относительно главных центральных осей инерции.

Отметим следующие возможные положения относительного равновесия спутника-гиростата:

$$1) \quad \gamma'' = 1, \quad \gamma = \gamma' = \beta = \beta'' = \alpha' = \alpha'' = 0 \quad (9.2.33)$$

при  $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ ,  $\bar{c}(0) = 0$ .

Для того чтобы это положение равновесия было устойчивым, достаточно выполнения неравенств:

$$\left. \begin{aligned} A > C, \quad B > C, \quad (B - A) \omega^2 + \kappa_2 > 0, \\ (B - C) \omega^2 + \kappa_2 - b > 0, \quad \bar{c}'(0) > 0; \end{aligned} \right\} \quad (9.2.34)$$

$$2) \quad \beta' = 1, \quad \alpha = \gamma'' = \cos \theta_0, \quad \gamma' = \alpha' = 0 \quad (9.2.35)$$

при  $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ ,  $3(A - C) \omega^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}'(\sin \theta_0) = 0$ .

Достаточные условия устойчивости этого решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} B > A, \quad (B - A) \omega^2 + \kappa_2 > 0, \\ 3(A - C) \omega^2 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}'(\sin \theta_0) > 0, \\ (3A + B - 4C) \omega^2 + \kappa_2 - b > 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.36)$$

Под действием гравитационных, магнитных и аэродинамических моментов симметричный спутник-гиростат, центр инерции которого описывает экваториальную круговую траекторию, может совершать стационарные движения относительно центра инерции. Такие движения выявлены в работе В. М. Морозова [36]. Обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$  углы, задающие положение оси динамической симметрии спутника в орбитальной системе координат, а через  $\Omega_0$  — угловую скорость вращения спутника вокруг этой оси. Тогда будут существовать следующие стационарные режимы вращения спутника:

$$1) \quad \left. \begin{aligned} p = q = 0, \quad r = \Omega_0, \\ \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0 \quad (\cos \beta_0 = 0), \end{aligned} \right\} \quad (9.2.37)$$

где величины  $\Omega_0$  и  $\alpha_0$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 [(C\Omega_0\omega + k\omega + a) \sin \beta_0 + (C - A)\omega^2 \cos \alpha_0 + b \cos \alpha_0] + \\ + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}' (\sin \alpha_0) \cos \alpha_0 = 0; \end{aligned}$$

$$2) \quad \left. \begin{aligned} p = q = 0, \quad r = \Omega_0, \quad \alpha = \alpha_0, \\ \beta = \beta_0, \quad (\cos \beta_0 \neq 0), \end{aligned} \right\} \quad (9.2.38)$$

где величины  $\Omega_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  должны удовлетворять двум дополнительным соотношениям.

При отсутствии аэродинамических сил имеет место еще один стационарный режим вращения:

$$3) \quad \left. \begin{aligned} p = q = 0, \quad r = \Omega_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0 \\ (\sin \alpha_0 = 0, \quad \cos \beta_0 \neq 0), \end{aligned} \right\} \quad (9.2.39)$$

$$C\Omega_0\omega + [4(C - A)\omega^2 + b] \cos \alpha_0 \sin \beta_0 + k\omega + a = 0.$$

Достаточные условия устойчивости получаются методом связки первых интегралов и сводятся:

для случая 1 при  $\beta_0 = \pi/2$

$$\left. \begin{aligned} C\Omega_0\omega + 4(C - A)\omega^2 \cos^2 \alpha_0 + k\omega + a + b \cos \alpha_0 > 0, \\ [C\Omega_0\omega + (C - A)\omega^2 \cos \alpha_0 + k\omega + a + b \cos \alpha_0] \cos \alpha_0 + \\ + (A\omega^2 - b) \sin^2 \alpha_0 - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}' (\sin \alpha_0) \sin \alpha_0 + \\ + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}' (\sin \alpha_0) \cos \alpha_0 > 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.40)$$

для случая 2

$$\left. \begin{aligned} C\omega^2 + 4(A - C)\omega^2 - b > 0, \\ 3(A - C)\omega^2 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \bar{c}' (\sin \alpha_0) > 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.41)$$

что при  $\bar{c} = 0$  для случая 3 дает

$$C < A, \quad C < A + \frac{1}{3} \left( A - \frac{b}{\omega^2} \right). \quad (9.2.42)$$

### § 2.03. Стабилизация движения спутников и космических аппаратов

Проблема стабилизации движения спутников и космических аппаратов относительно центра масс может быть решена либо чисто классическими методами теории устойчивости, либо в сочетании ее с теорией оптимального управления. Конечная цель этой проблемы состоит в выборе таких уравнений, которые обеспечивают устойчивый режим заданного движения.

Этой проблеме посвящено значительное число работ. Один из надежных способов стабилизации состоит в управлении движением с помощью диссипативных сил. В частности, среди работ этого направления можно отметить работы В. В. Румянцева [37] и Кейна [38]. Этим же методом обеспечивал стабилизацию движения В. А. Сарычев [39], который брал управляющие моменты вида

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Kp, & M_y &= -Kq, & M_z &= 0, \\ (K &= \text{const}, & K &> 0). \end{aligned} \right\} \quad (9.2.43)$$

Ряд работ посвящен оптимальной стабилизации, суть которой состоит в объединении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости со способом динамического программирования Беллмана. Этот метод был предложен Н. Н. Красовским [40].

Оригинальный способ стабилизации был указан В. В. Крементуло [41]. Уравнения движения спутника-гиростата, стабилизация движения которого осуществляется надлежащим выбором вращения маховиков, приводимых во вращение двигателя, брались в виде

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{x}_1 &= z_2 x_3 - z_3 x_2 + u_1, \\ \dot{z}_1 &= z_2 x_3 - z_3 x_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.2.44)$$

Остальные уравнения можно получить циклической перестановкой индексов. В этой системе использованы обозначения:  $x_1, x_2, x_3$  — проекции угловой скорости гиростата на главные центральные оси инерции,  $Z_1, Z_2, Z_3$  — проекции полного момента количества движения гиростата на те же оси,  $I_1 = A - J_x, I_2 = B - J_y, I_3 = C - J_z$ , где  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции аппарата с закрепленными маховиками, а  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции маховиков,  $u_1, u_2, u_3$  — управляющие моменты. Уравнения движения (9.2.44) допускают интеграл

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \text{const}. \quad (9.2.45)$$

В. В. Крементуло принял в качестве координат, задающих положение спутника в инерциальной системе координат, направляющие косинусы  $\alpha_{i,j}$  осей последней относительно связанных со спутником осей координат. В этом случае систему (9.2.45) необходимо дополнить уравнениями относительно направляющих косинусов.

Задача состоит в таком выборе управления, чтобы решение полной системы дифференциальных уравнений движения имело вид

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad \alpha_{i,l} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (9.2.46)$$



Этому решению соответствует положение равновесия спутника-гиростата, при котором связанные и инерциальные оси координат совпадают.

Управление выбирается из условия, чтобы при достаточно малых начальных возмущениях спутник-гиростат асимптотически стремился к равновесному положению (9.2.46) и при этом достигался бы минимум функционала

$$I = \int_0^{\infty} \Omega(x_i, a_{ij}, u_i) dt, \quad (9.2.47)$$

в котором  $\Omega$  — неотрицательная функция, имеющая структуру

$$\Omega = F_1(x_i) + F_2(a_{ij}) + \sum n_i u_i^2 + \lambda, \quad (9.2.48)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — положительно определенные квадратичные формы своих переменных,  $n_i$  — положительные постоянные величины, а через  $\lambda$  обозначены члены высшего порядка.

Искомый закон управления имеет форму:

$$u_i = -m_i x_i + \sum_{(j, k)} a_{jk} a_{jk}, \quad (9.2.49)$$

где  $m_i > 0$ ,  $a_{jk}$  — надлежащим образом выбранные постоянные.

Стабилизация движения спутника относительно центра масс может быть осуществлена технически не только с помощью системы маховиков, но и другими способами. Один из способов пассивной стабилизации спутника, не требующий двигателей и расхода энергии, был предложен в 1956 г. Д. Е. Охочимским. Подробная теория способа была создана в цикле работ В. А. Сарычева [42].

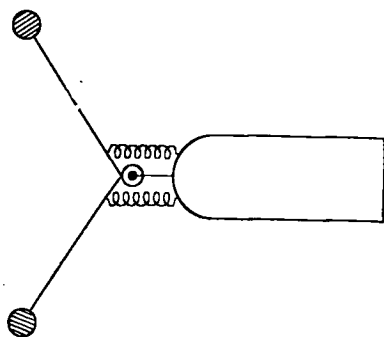


Рис. 105. Схема гравитационной стабилизации спутника.

Принципиальная схема стабилизации изображена на рис. 104. Как видно из рис. 105, к корпусу спутника при помощи сферического шарнира присоединяется стабилизатор, состоящий из двух штанг равной длины, несущих на своих концах равные грузы. Положение стабилизирующего устройства относительно спутника фиксируется специальными пружинами.

#### ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ IX

1. Tisserand F., *Traité de mécanique céleste*, т. 2, Paris, 1891.
2. Andoyer M. H., *Cours de mécanique céleste*, т. 2, Paris, 1926.
3. С м а р т У. М., *Небесная механика*, пер. с англ., «Мир», М., 1965,

4. Жуковский Н. Е., Механика системы. Динамика твердого тела, Гостехиздат, М. — Л., 1939.
5. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
6. Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, Физматгиз, 1948.
7. Lagrange J. L., Oeuvres de Lagrange, т. 5, Paris, 1870.
8. Laplace P. S., Mécanique celeste, Paris, 1793.
9. Волков М. С., Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР, 8, № 5 (98), 343—358, 1962.
10. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, «Наука», М., 1965.
11. Депри А., «Механика», Сб. переводов, № 2, 3—9, «Мир», 1968.
12. Воигеу F., Journ. de mécanique. 11, 3, 521—543, 1972.
13. Демин В. Г., Киселев Ф. И., Докл. АН СССР 214, № 5, 997—998, 1974.
14. Библик Е. Б., «Проблема механики управляемого движения», Межвуз. сб., № 7, 1975.
15. Черноусько Ф. Л., Прикл. матем. и мех. 27, № 3, 474—483, 1963.
16. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников, ВЦ АН СССР, М., 1967.
17. Демин В. Г., Сингх Р. Б., Космич. исслед. 9, № 2, 192—197, 1972.
18. Белецкий В. В., О законах Кассини, Препринт № 79 ИПМ АН СССР, М., 1971.
19. Love A., Proc. Royal Soc. 82, 1909.
20. Аппель П., Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, ОНТИ, М. — Л., 1936.
21. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М. — Л., 1949.
22. Крат В. А., Фигуры равновесия небесных тел, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
23. Лихтенштейн Л., Фигуры равновесия вращающейся жидкости, пер. с нем. «Наука», М., 1965.
24. Сретенский Л. Н., Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы, Успехи матем. наук 5, 1938.
25. Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 3, Изд-во АН СССР, М., 1959.
26. Пицетти П., Основы механической теории фигур планет, Гостехиздат, М., 1933.
27. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, М., 1963.
28. Огородников К. Ф., Динамика звездных систем, Физматгиз, М., 1958.
29. Морозов В. М., Устойчивость движения космических аппаратов, сер. «Итоги науки», М., 1971.
30. Likins P. W., Wright G. M., AIAA Journal 7, 6, 1134—1139, 1969.
31. Анчев А. А., Космич. исслед. 4, № 2, 192—202, 1966.
32. Дубошин Г. Н., Бюлл. Ин-та теор. астроном. АН СССР 7, № 7, 511—520, 1960.
33. Черноусько Ф. Л., Прикл. матем. и мех. 28, № 1, 155—157, 1964.
34. Колесников Н. Н., Прикл. матем. мех. 30, № 3, 589—593, 1966.
35. Морозов В. М., Космич. исслед. 7, № 3, 395—401, 1969.
36. Морозов В. М., Космич. исслед. 5, № 5, 727—732, 1967.
37. Румянцев В. В., Космич. исслед. 6, № 5, 643—648, 1968.
38. Капе Т. R., AIAA Journal 4, 8, 1391—1394, 1966.
39. Сарычев В. А., Космич. исслед. 3, № 5, 667—673, 1965.
40. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения (дополнение IV Н. Н. Красовского), М., «Наука», 1966.
41. Крементуло В. В., Прикл. матем. и мех. 30, № 1, 42—50, 1966.
42. Сарычев В. А., Сб. «Искусств. спутники Земли», вып. 16, 10—33, Изд-во АН СССР, 1963.

## КАЧЕСТВЕННАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

## Глава 1

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ  
РЕШЕНИЯ. ФИНАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В этой главе приведены три фундаментальных метода качественного анализа: метод малого параметра А. Пуанкаре, метод А. М. Ляпунова и метод исследования гамильтоновых систем А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда. Эти способы позволяют устанавливать существование периодических и условно-периодических решений в задачах небесной механики. Кроме того, изложены результаты об исследовании финальных движений в задаче трех тел и проблемы захвата.

## § 1.01. Метод малого параметра Пуанкаре

Пусть имеется векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \mu), \quad (10.1.01)$$

где  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  —  $n$ -мерный вектор фазовых координат,  $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$  —  $n$ -мерная аналитическая вектор-функция  $\in (-\infty, \infty)$ ,  $x \in G_n$ ,  $\mu \in M$  и периодическая по  $t$  с периодом  $T$ ,  $t$  — скалярный аргумент,  $\mu$  — скалярный параметр.

Кроме (10.1.01) рассмотрим векторное уравнение

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = X(t, x^{(0)}, 0). \quad (10.1.02)$$

называемое *порождающим*, или *упрощенным*, для уравнения (10.1.01).

Пусть векторному уравнению (10.1.02) удовлетворяет периодическая вектор-функция

$$x^{(0)}(t) = \varphi(t) \quad (10.1.03)$$

с периодом  $T$ :

$$\varphi(t + T) \equiv \varphi(t), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (10.1.04)$$

Решение (10.1.03) также называется *порождающим*

Сущность метода Пуанкаре состоит в определении необходимых и достаточных условий существования  $T$ -периодического решения уравнения (10.1.01), близкого к решению  $\varphi(t)$  в том смысле, что оно при  $\mu = 0$  обращается в  $\varphi(t)$ .

Пусть искомое решение представляется векторным равенством

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \mu, \beta), \quad (10.1.05)$$

где  $n$ -мерный вектор  $\beta$  характеризует разность начальных условий для решения  $\Phi(t, \mu, \beta)$  и порождающего решения  $\varphi(t)$ , т. е.

$$\beta = \mathbf{x}(0) - \varphi(0). \quad (10.1.06)$$

Заметим, что периодического решения  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \mu, \beta)$ , удовлетворяющего начальному условию  $\mathbf{x}(0) = \varphi(0)$ , не существует, так как это противоречит теореме Коши существования и единственности решения [1], если вектор  $\mathbf{X}$  удовлетворяет условиям этой теоремы.

*Необходимым и достаточным условием* существования  $T$ -периодического решения  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \mu, \beta)$  является выполнение векторного равенства

$$\Phi(T, \mu, \beta) - \Phi(0, \mu, \beta) = 0. \quad (10.1.07)$$

Условие (10.1.07) представляет собой векторное уравнение с неизвестным  $n$ -мерным вектором  $\beta$ , поэтому вопрос о существовании  $T$ -периодического решения  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \mu, \beta)$  равносильен вопросу о разрешимости функционального уравнения (10.1.07) относительно  $\beta$ .

Введем обозначения

$$\psi(\mu, \beta) = \Phi(T, \mu, \beta) - \Phi(0, \mu, \beta), \quad (10.1.08)$$

$$\Delta(\mu, \beta) = \frac{D(\psi)}{D(\beta)}, \quad (10.1.09)$$

где символом  $\frac{D(\psi)}{D(\beta)}$  обозначен якобиан  $n$ -го порядка.

Тогда имеет место

*Теорема Пуанкаре. Если  $\Delta(\mu, \beta)|_{\beta=\mu=0} \neq 0$ , то по крайней мере при достаточно малых  $|\mu|$  уравнение (10.1.01) имеет единственное  $T$ -периодическое решение, аналитическое относительно  $\mu$  и обращающееся в порождающее решение  $\mathbf{x}^{(0)}(t) = \varphi(t)$  при  $\mu = 0$ .*

Если доказано существование периодического решения, то целесообразно находить его либо в виде

$$\mathbf{x}_s(t) = \varphi_s(t) + \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n + k \geq 1 \\ s=1, 2, \dots, n}} P^{(k_1, k_2, \dots, k_n, k)}(t) \beta_1^{k_1} \beta_2^{k_2} \dots \beta_n^{k_n} \mu^k, \quad (10.1.10)$$

где компоненты  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  вектора  $\beta$  получаются в виде рядов

$$\beta_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_s^m \mu^m \quad (10.1.11)$$

в результате решения уравнения (10.1.07), либо сразу в виде

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(q)}(t) \mu^q, \quad (10.1.12)$$

где  $\mathbf{x}^{(q)}(t)$  суть  $T$ -периодические функции  $t$ .

Вектор-функция  $\mathbf{x}^{(q)}(t)$  определяется из неоднородного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}^{(q)}(t)}{dt} = A(t) \mathbf{x}^{(q)}(t) + \mathbf{R}^{(q)}(t), \quad (10.1.13)$$

где  $A(t)$  является  $T$ -периодической матрицей, а  $\mathbf{R}^{(q)}(t)$  — известная  $T$ -периодическая вектор-функция. Более подробно эти вопросы изложены в [2] — [6].

Если  $\Delta(0, 0) = 0$ , то вопрос о существовании периодических решений уравнения (10.1.01) и их числе становится чрезвычайно сложным, так как в этом случае не имеет места теорема о неявных функциях, на основе которой разрешается функциональное уравнение (10.1.07). Некоторые из этих особых случаев рассмотрены Пуанкаре [2] и изложены И. Г. Малкиным [3], [4], Г. Н. Дубошным [5] и К. Зигелем [6].

Метод Пуанкаре позволяет искать и  $kT$ -периодические решения системы (10.1.01), где  $k$  — некоторое целое положительное число. Для существования таких решений необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Phi(kT, \mu, \beta) - \Phi(0, \mu, \beta) = 0. \quad (10.1.14)$$

### § 1.02. Метод Ляпунова

Определение. Векторное автономное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (10.1.15)$$

в котором постоянная вещественная матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, n-2} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-2, 1} & a_{n-2, 2} & \dots & a_{n-2, n-2} \end{pmatrix}, \quad (10.1.16)$$

и  $n$ -мерная вектор-функция  $X(x)$  является голоморфной относительно  $x$  в некоторой  $n$ -мерной области  $G_n (x \in G_n)$ , называется системой Ляпунова.

Теорема Ляпунова. Если уравнению (10.1.15) возможно удовлетворить рядами

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}(\tau), \quad (10.1.17)$$

коэффициенты  $x^{(k)}(\tau)$  которых являются тригонометрическими многочленами вида

$$x^{(k)}(\tau) = \sum_{s=1}^N (A_s^{(k)} \cos s\tau + B_s^{(k)} \sin s\tau), \quad (10.1.18)$$

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \quad (10.1.19)$$

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k \right) \quad (10.1.20)$$

( $c$  — произвольная постоянная), то ряды (10.1.17) абсолютно сходятся при всяком  $t \in (-\infty, \infty)$ , если  $|c| < c_0$ , и поэтому они представляют периодическое решение уравнения (10.1.15). Период  $T$  является аналитической функцией  $c$  в области  $|c| < c_0$ ;  $c_0$  — некоторая положительная достаточно малая постоянная.

Очевидно, что теорема Ляпунова устанавливает существование непрерывного множества периодических решений уравнения (10.1.15), так как  $-c_0 < c < c_0$ . При доказательстве этой теоремы [3], [5], [7], [8] и развивается метод отыскания периодических решений, названный именем Ляпунова. Этот общий метод отыскания периодических решений получил развитие в работах [3], [8] — [11].

Эффективность метода Ляпунова значительно больше в тех задачах, к которым применима теорема Ляпунова о голоморфном интеграле [5], [7], [8].

Теорема Ляпунова о голоморфном интеграле. Пусть  $\lambda > 0$ , собственные значения матрицы  $A$  (10.1.16) не равны числам  $t\lambda i$  ( $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и вектор-функция  $X(x)$  является голоморфной в области  $G_n$  относительно  $x$ , разложение которой начинается с членов не ниже второго порядка. Пусть, кроме того, система Ляпунова (10.1.15) имеет голоморфный, не зависящий от  $t$ , интеграл, в котором совокупность членов второго порядка содержит компоненты  $x_1$  и  $x_2$   $n$ -мерного вектора  $x$ .

Тогда система А. М. Ляпунова (10.1.15) всегда имеет периодическое решение вида (10.1.17) — (10.1.20).

### § 1.03. Периодические решения, полученные методом Пуанкаре

Первые найденные в небесной механике периодические решения — это эллиптическое движение в задаче двух тел (см. ч. II, § 2.01) и лагранжевы решения в задаче трех тел (см. ч. V, §§ 1.02, 2.03). После того как Хилл доказал, что уравнения задачи, названной его именем (уравнения (5.3.16)), допускают периодическое (почти-круговое) решение, Пуанкаре разработал достаточно общий метод — метод малого параметра (см. § 1.01) и на его основе установил [2] существование трех сортов периодических решений в планетном варианте неограниченной задачи трех тел (тело  $P_0$  имеет массу  $m_0$ , значительно большую масс  $m_1 = \alpha_1 \mu$ ,  $m_2 = \alpha_2 \mu$  планет  $P_1$  и  $P_2$ , также отличных от нуля,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\mu$  — малый положительный параметр). Частными случаями этих решений являются периодические решения первого, второго и третьего сорта в ограниченной задаче трех тел (см. ч. V, § 2.05).

При  $\mu = 0$  планетный вариант неограниченной задачи трех тел вырождается в две задачи двух тел (одна задача двух тел с массами  $m_0$  и  $m_1 = 0$ , вторая задача двух тел с массами  $m_0$  и  $m_2 = 0$ ). Очевидно, что среди возможных движений в вырожденной задаче имеются кеплеровские эллипсы, описываемые нулевыми массами  $m_1 = m_2 = 0$ . Пусть, в частности, кеплеровские орбиты суть компланарные окружности. Пуанкаре доказал [2], что при  $\mu \neq 0$  в плоской неограниченной задаче трех тел существуют периодические решения, близкие к круговым. Точнее, взаимные расстояния между тремя телами будут периодическими функциями времени, а чтобы координаты каждого тела были периодическими функциями времени, необходимо рассматривать равномерно вращающуюся (с конечной угловой скоростью) систему координат. В неподвижной системе координат координаты трех тел не будут, вообще говоря, периодическими функциями времени. Если ввести для таких периодических решений оскулирующий кинематический параметр — эксцентриситет, то он имеет порядок величины  $\mu$ . Эти плоские периодические решения задачи трех тел были названы Пуанкаре *решениями первого сорта*, и они образуют четырехпараметрическое семейство решений. Пуанкаре показывает, что все  $\infty^4$  множество периодических решений не богаче, чем однократное бесконечное множество периодических решений, так как одни семейства решений переходят в другие с помощью элементарных преобразований. Заметим также, что решение Хилла является частным случаем периодических решений первого сорта Пуанкаре.

*Периодические решения второго сорта* — это периодические решения плоского планетного варианта задачи трех тел, выро-

ждающиеся при  $\mu = 0$  в кеплеровские эллипсы с отличными от нуля эксцентриситетами (почти-эллиптические орбиты). Наконец, *периодические решения третьего сорта* — это пространственные периодические решения.

Доказательство существования периодических решений второго и третьего сорта в задаче трех тел сведено Пуанкаре [2] к исследованию на экстремум некоторой функции  $\bar{F}_1$ , смысл которой следующий: пусть уравнения движения в задаче трех тел записаны в гамильтоновой форме (см. ч. IV, § 1.13) с аналитической по  $\mu$  при  $|\mu| \leq \mu_0$  функцией Гамильтона  $F$  вида

$$\left. \begin{aligned} F(p, q, \mu) &= F_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k F_k(p, q), \\ F(p, q + (2\pi), \mu) &\equiv F(p, q, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (10.1.21)$$

Удобнее всего в этой задаче пользоваться каноническими элементами Делоне (см. ч. IV, § 4.06). Тогда роль переменных  $p$  играют  $L_k, G_k, H_k$ , переменных  $q$  играют  $l_k, q_k, h_k$  ( $k = 1, 2$ ).

Пусть при  $\mu = 0$  большие полуоси  $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}$  кеплеровских орбит планет  $P_1$  и  $P_2$  выбраны таким образом, что  $n_1^{(0)}T$  и  $n_2^{(0)}T$  (где  $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}$  — средние движения планет  $P_1$  и  $P_2$ ) кратны  $2\pi$ . Тогда вырожденная задача трех тел (т. е. две задачи двух тел) допускает периодическое решение с периодом  $2\pi$  по долготе. Действительно, средние долготы планет  $l_1^{(0)}$  и  $l_2^{(0)}$  за время  $T$  изменятся ровно на  $2\pi$  независимо от начальных значений долгот  $l_{10}^{(0)}, l_{20}^{(0)}$  и от начальных значений канонических элементов Делоне  $H_{10}^{(0)}, H_{20}^{(0)}, g_{10}^{(0)}, g_{20}^{(0)}, h_{10}^{(0)}, h_{20}^{(0)}$  (см. ч. IV, § 4.06).

Обозначим теперь через  $\bar{F}_1$  среднее значение по времени  $t$  функции  $F_1(p, q)$ , вычисленное после замены переменных  $p$  и  $q$  решениями двух задач двух тел. Другими словами, долготы  $l_1^{(0)}, l_2^{(0)}$  заменяются линейными функциями  $t$

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(0)} &= n_1^{(0)}t + l_{10}^{(0)}, \\ l_2^{(0)} &= n_2^{(0)}t + l_{20}^{(0)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.1.22)$$

а все остальные переменные — постоянными значениями. Тогда

$$\bar{F}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(L_k^{(0)}, G_k^{(0)}, H_k^{(0)}, l_k^{(0)}, g_k^{(0)}, h_k^{(0)}) dt.$$

Для существования периодических решений второго и третьего сорта достаточно [2], чтобы  $\bar{F}_1$  в пространстве параметров  $H_1^{(0)}, H_2^{(0)}, l_{10}^{(0)}, l_{20}^{(0)}, g_{10}^{(0)}, g_{20}^{(0)}$  имела экстремум. Пуанкаре доказывает, что функция  $\bar{F}_1$  всегда имеет экстремумы в пространстве



указанных параметров и, следовательно, всегда существуют в планетной задаче трех тел периодические решения второго и третьего сорта. Пуанкаре доказано также, что множество периодических решений третьего сорта богаче множества периодических решений второго сорта, так как, если положить в классе периодических решений третьего сорта наклон, равный нулю, мы получим все множество периодических решений второго сорта и некоторое подмножество периодических решений, не принадлежащих классу решений второго сорта.

Как и в случае решений первого сорта, периодическими функциями времени являются взаимные расстояния, а не координаты тел. Координаты тел будут периодическими функциями  $t$  в равномерно вращающейся системе координат, угловая скорость которой относительно неподвижной системы достаточно мала.

$kT$ -периодические решения системы (10.1.01) Пуанкаре называет *решениями второго рода*. В «Новых методах» [2] он дает исчерпывающий анализ проблемы существования и конкретного построения периодических решений второго рода.

Для периодических решений первого, второго и третьего сорта, так же как и для периодических решений второго рода, характерным является то, что они при  $\mu = 0$  (когда массы двух планет  $m_1 = \alpha_1\mu$ ,  $m_2 = \alpha_2\mu$  обращаются в нуль) вырождаются в кеплеровские орбиты (круговые или эллиптические), т. е. в вырожденном случае перигелии и узлы планетных орбит неподвижны. В связи с этим Пуанкаре ставит и решает новую задачу о периодических решениях в проблеме трех тел: им доказано существование таких периодических решений, которые характеризуются существенным (но спонтанным) изменением долгот перигелиев и узлов, обусловленным взаимно близким прохождением планет. Такие периодические решения названы Пуанкаре *решениями второго вида*.

Методы Пуанкаре получили многочисленные приложения в задаче трех тел. Шварцшильд доказал [12] существование периодических решений в ограниченной круговой задаче трех тел, периоды которых в общем случае несонизмеримы с периодом порождающего решения. Эти периодические решения вырождаются при  $\mu = 0$  во вращающиеся эллипсы вокруг центрального тела (периодические решения с вращающейся линией апсид). Следует также сказать о работе Цейпеля [13], содержащей детальное исследование периодических решений третьего сорта, о книге К. Зигеля [6], в которой доказывалось существование периодических решений гамильтоновых систем, когда матрица линеаризованной части имеет пару чисто мнимых собственных значений, Г. А. Мермана [14], в которой приведены новые четырехпараметрические множества периодических решений в огра-

ниченной круговой задаче трех тел и в задаче Хилла, Ю. В. Батракова [15], [16], рассматривающих существование шварцшильдовских периодических решений в пространственных неограниченной и ограниченной задачах трех тел. Аналогичное семейство периодических решений найдено Е. П. Аксеновым [90]. В этой же задаче, исходя из орбит задачи двух неподвижных центров, В. Г. Демин установил существование периодических орбит, замыкающихся после нескольких оборотов [18]. Семейства периодических решений конечных размеров в окрестности точек либрации найдены Мультином [17]. А. А. Орловым найдены новые классы периодических решений в ограниченной задаче трех тел [91]. Наконец, имеется статья монографического плана Г. А. Чеботарева [19], содержащая, помимо оригинальных результатов автора, историю вопроса.

Описанные выше результаты относятся к ньютоновской задаче трех материальных точек, а не тел конечных размеров. В связи с запросами астродинамики возникла необходимость построения периодических решений в задачах с гравитационными полями, создаваемыми телами конечных размеров.

В работе [92] Е. П. Аксенов и В. Г. Демин установили существование почти-эллиптических периодических относительно «регуляризирующего времени  $\tau$ » экваториальных орбит в спутниковой задаче, когда центральное тело обладает динамической симметрией и медленным (по сравнению со средним движением спутника) вращением. Эти решения образуют двухпараметрическое семейство и могут быть названы решениями второго сорта. В. Г. Деминым найден класс почти-круговых периодических решений [87] в задаче о движении спутника в гравитационном поле, порожденном притяжением сфероидальной планеты и двух точечных масс, двигающихся по круговым орбитам вокруг планеты на расстояниях, больших чем максимальное планетоцентрическое расстояние спутника. В этой же монографии можно найти  $\infty^2$  семейство периодических движений (относительно «регуляризирующего времени  $\tau$ ») лунного спутника.

Вопрос о существовании периодических решений в спутниковой задаче с критическим наклоном ( $\sin^2 i = 0,8$ ) изучен А. А. Орловым [93].

#### § 1.04. Периодические решения, полученные методом Ляпунова

Метод Ляпунова, изложенный в § 1.02, получил заверщенное применение в исследованиях Г. Н. Дубошина [20], [21] и А. И. Рыбакова [22]—[25] по построению аналитических теорий движения спутников в спутниковых системах, и, в частности, в системе Сатурна.

Рассматривалась механическая модель, состоящая из центрального тела — однородного эллипсоида вращения (Сатурн), однородного плоского кругового кольца (кольцо Сатурна), восьми однородных, одномерных, круговых колец (заменяющих спутники) и материальной точки — Солнца, двигающейся, согласно законам Кеплера, по эллипсу, фокус которого совпадает с центром Сатурна.

Полная силовая функция  $U$  задачи о движении спутника является суммой одиннадцати силовых функций и может быть представлена, как показал Г. Н. Дубошин [20], в виде

$$U = U' + U'' \quad (10.1.23)$$

Функция  $U' = U'(\rho, z)$ ,  $U'(\rho, -z) = U'(\rho, z)$ , зависит только от двух цилиндрических координат  $\rho$ ,  $z$  (не зависит от долготы), причем является четной функцией относительно  $z$ . Функция  $U''(\rho, l, z, t)$  представляет остальную часть функции  $U$ . Поскольку силовые функции колец и эллипсоида вращения не зависят от долготы  $l$ , отсюда следует, что

$$U'' = U_{\odot} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{\odot} dl, \quad (10.1.24)$$

где  $U_{\odot}$  — силовая функция, обусловленная притяжением Солнца.

Модельная задача с силовой функцией  $U'$  имеет [20] плоские и пространственные периодические решения вида (10.1.17) — (10.1.20), для нахождения которых используется теорема Ляпунова о голоморфном интеграле. Полная задача может иметь периодические решения только в том случае, если период обращения Сатурна вокруг Солнца и период периодического решения модельной задачи для спутника, зависящего от постоянной  $c$ , соизмеримы.

Для построения этих периодических решений целесообразно применять метод Пуанкаре. В общем случае полная задача не имеет периодические решения, близкие к «ляпуновским» периодическим решениям.

Конкретные вычисления для системы Сатурна, выполненные А. И. Рыбаковым [22]—[25], дали удовлетворительное согласие с многочисленными наблюдениями спутников Сатурна, проведенными Германом и Георгом Струве [94], [95] на протяжении почти столетия с 1880 по 1928 г.

Некоторые семейства периодических решений в окрестности точек либрации изучены Ю. А. Рябовым [26].

### § 1.05. Периодические решения, полученные качественными методами

Методы Ляпунова и Пуанкаре (§§ 1.01, 1.02) суть аналитические методы построения периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Второе направление — это установление существования периодических решений методами качественной теории.

Первая работа подобного характера принадлежит Е. Уиттекеру [27] и опирается на рассмотрение действия в смысле Якоби для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В этом случае положение точки в рассматриваемой динамической системе определяется двумя позиционными координатами  $(x, y)$  и любая траектория точки является плоской. Критерий Уиттекера состоит в том [27], [58], что рассматривается некоторое плоское кольцо на плоскости  $(x, y)$  и значение, построенной специальным образом, функции на внутренней и внешней границах кольца. Эта функция (назовем ее *функцией Уиттекера*) имеет следующую аналитическую структуру:

$$\mathcal{W} = \frac{h + U(x, y)}{\rho(x, y)} + \frac{1}{2} \left( \cos \gamma \frac{\partial U}{\partial x} + \sin \gamma \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (10.1.25)$$

где  $U(x, y)$  — силовая функция,  $h$  — полная энергия системы,  $\rho(x, y)$  — радиус кривизны контура  $C$ , проходящего через заданные две точки траектории,  $\gamma$  — угол наклона нормали, проведенной в точке  $(x, y)$  контура  $C$  к оси  $Ox$ .

Критерий Уиттекера. *Если во всех точках внутренней границы кольца  $\mathcal{W} < 0$ , а во всех точках внешней границы  $\mathcal{W} > 0$ , то в данном кольце имеется периодическая траектория динамической системы, соответствующая данному значению  $h$  полной энергии.*

А. Синьорини [101] и Л. Тонелли [102] обобщили критерий Уиттекера на случай обратимых (автономных) динамических систем, а Дж. Биркгоф [100] распространил критерий Уиттекера на неавтономные динамические системы с двумя степенями свободы.

Основываясь на этом критерии, Н. Д. Моисеев [28], [29] установил существование четырех семейств периодических решений в плоской ограниченной круговой задаче трех тел Солнце — Юпитер — астероид. С помощью критерия Уиттекера Н. Д. Моисеев нашел кольцевые области, в которых располагаются периодические решения. Н. Ф. Рейн разработала [103] метод нахождения периода периодического решения в ограниченной задаче трех тел, аналитическая структура которого неизвестна. В теории движения ИСЗ критерий Уиттекера был применен В. Г. Деминым [31].

Пуанкаре принадлежит первый вариант знаменитой теоремы [96], [97] о неподвижной точке, однако в приложениях получила большее распространение другая формулировка теоремы о неподвижной точке, принадлежащая Дж. Биркгофу [98], [99]. Зигель дал новое доказательство [6] теоремы Биркгофа, сопровождаемое более точными необходимыми оценками для отображаемых областей и для постоянных.

Теоремы А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа о неподвижной точке применялись Биркгофом [100], Зигелем [6] и Ю. Мозером [30] для доказательства существования новых семейств (отличных от решений первого сорта Пуанкаре) почти-круговых решений ограниченной круговой задачи трех тел.

Оригинальные результаты принадлежат А. Д. Брюно [143]. Исследование окрестности тора качественными аналитическими и численными методами позволило удачно систематизировать ранее известные и новые полученные им классы периодических и условно-периодических решений ограниченной круговой задачи трех тел.

### § 1.06. Почти-периодические функции и их свойства. Условно-периодические функции

**Определение 1.** Функция  $f(x)$ , непрерывная на всей вещественной оси, называется *почти-периодической в смысле Бора*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует положительное число  $l = l(\varepsilon)$  такое, что любой отрезок  $[a, a + l]$  ( $a$  — любое вещественное число) содержит по меньшей мере одно число  $\tau$ , для которого

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty). \quad (10.1.26)$$

Число  $\tau(\varepsilon)$  называется  *$\varepsilon$ -почти-периодом функции  $f(x)$* .

Класс почти-периодических функций достаточно хорошо изучен в исследованиях П. Боля и Г. Бора и эти результаты изложены в [32]—[34]. Мы приведем лишь те свойства почти-периодических функций, которые чаще всего нужны в небесной механике.

**Свойство 1.** Пусть  $\mathbf{a}$  есть  $n$ -мерный постоянный вектор,  $\mathbf{f}(x) (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  есть  $n$ -мерная почти-периодическая вектор-функция (его компоненты — почти-периодические функции). Тогда скалярная функция

$$F(x) = (\mathbf{a}, \mathbf{f}(x)) \quad (10.1.27)$$

является почти-периодической.

В частности, тригонометрический полином вида

$$P(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x} \quad (10.1.28)$$

с вещественными  $\lambda_k$  является почти-периодической функцией.

*Свойство 2.* Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  — почти-периодические функции. Тогда

$$F(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x) \quad (10.1.29)$$

— также почти-периодическая функция.

*Свойство 3.* Пусть  $f_1(x), f_2(x)$  — почти-периодические функции, причем

$$\inf_{x \in (-\infty, \infty)} |f_2(x)| > 0.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (10.1.30)$$

— также почти-периодическая функция.

*Свойство 4.* Если производная  $f'(x)$  почти-периодической функции  $f(x)$  равномерно непрерывна на всей вещественной оси  $x \in (-\infty, \infty)$ , то она почти-периодическая функция.

*Свойство 5.* Пусть  $f(x)$  — почти-периодическая функция,

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (10.1.31)$$

и

$$\sup_{x \in (-\infty, \infty)} |F(x)| < \infty. \quad (10.1.32)$$

Тогда  $F(x)$  является почти-периодической функцией.

*Свойство 6.* Всякая почти-периодическая функция имеет конечное интегральное среднее

$$\bar{f} = M\{f\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx. \quad (10.1.33)$$

*Свойство 7.* Интеграл от всякой почти-периодической функции представим в виде

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \bar{f} \cdot x + \varphi(x), \quad (10.1.34)$$

где  $\bar{f}$  — среднее значение функции  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  — почти-периодическая функция.

Определение 2. *Спектральной функцией* для почти-периодической функции  $f(x)$  называется функция

$$a(\lambda) = M \{ f(x) e^{-i\lambda x} \}. \quad (10.1.35)$$

*Свойство 8.* Для любой почти-периодической функции  $f(x)$  ее спектральная функция  $a(\lambda)$  не равна нулю лишь для конечной или счетной последовательности  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$

Определение 3. Числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , для которых  $a(\lambda_n) \neq 0$ , называются *показателями Фурье почти-периодической функции  $f(x)$* , а числа  $a(\lambda_n)$  называются *ее коэффициентами Фурье*. Множество всех показателей Фурье называется *спектром почти-периодической функции*.

Определение 4. *Рядом Фурье почти-периодической функции  $f(x)$*  называется тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n x}, \quad (10.1.36)$$

где

$$a_n = a(\lambda_n) = M \{ f(x) e^{-i\lambda_n x} \}. \quad (10.1.37)$$

Множество  $\{\lambda_n\}$  — спектр функции  $f(x)$ .

Определение 5. Если среди показателей Фурье  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  почти-периодической функции  $f(x)$  существуют такие  $k$  показателей  $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots, \lambda_{n_k}$ , что все остальные представляются в виде суммы

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^k N_i \lambda_{n_i}, \quad (10.1.38)$$

где  $N_1, N_2, \dots, N_k$  — целые числа, то такая почти-периодическая функция называется *условно-периодической*.

Совокупность  $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots, \lambda_{n_k}$  называется *частотным базисом* условно-периодической функции.

Очевидно, что условно-периодическую функцию можно представить рядом Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{|N| \geq 0} A_N e^{i(N, \lambda) x}, \quad (10.1.39)$$

где  $\lambda(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots, \lambda_{n_k})$  есть  $k$ -мерный частотный базис,  $N$  есть  $k$ -мерный целочисленный вектор, норма которого

$$|N| = \sum_{i=1}^k |N_i|. \quad (10.1.40)$$

Этот частный случай почти-периодических функций наиболее распространен в небесной механике.

**§ 1.07. Теорема Арнольда о существовании условно-периодических решений гамильтоновых систем**

Пусть движение объекта описывается гамильтоновой системой  $2n$ -го порядка

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (10.1.41)$$

с аналитическим по всем переменным  $p$  и  $q$  и периодическим по  $q$  гамильтонианом  $H(p, q, \mu)$ , где  $\mu$  — малый параметр. Фазовое  $2n$ -мерное пространство переменных  $p, q$  является прямым произведением  $n$ -мерного тора на область  $n$ -мерного евклидова пространства.

Если гамильтониан зависит только от переменных  $p$  ( $H \equiv H(p)$ ), то уравнения (10.1.41) принимают вид

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega(p). \quad (10.1.42)$$

Уравнения (10.1.42) легко интегрируются, и мы имеем

$$p = p_0, \quad q = \omega t + q_0. \quad (10.1.43)$$

Каждый тор  $p = p_0$  инвариантен, и если частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  несоизмеримы, то мы имеем условно-периодическое движение на торе  $p = p_0$  с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

Основной вопрос, который возникает при рассмотрении гамильтоновых систем (10.1.41), можно сформулировать следующим образом: существуют ли у системы инвариантные торы, близкие к тору  $p = p_0$ , и имеет ли движение на этих торах условно-периодический характер? Этот вопрос в последние десятилетия рассматривался К. Зигелем [6], А. Н. Колмогоровым [35], В. И. Арнольдом [36], Ю. Мозером [37], [38]. Позднее существенные обобщения были сделаны в работах [39], [40].

Ниже мы приводим теорему Арнольда [36] о существовании условно-периодических движений для системы (10.1.41).

В задачах небесной механики не все компоненты  $n$ -мерных векторов  $p$  и  $q$  входят в гамильтониан  $H(p, q)$  одинаковым образом, поэтому ради удобства будем рассматривать векторы  $p_0, q_0$  размерности  $n_0$  и векторы  $p_1, q_1$  размерности  $n_1$ , причем очевидно, что  $n_0 + n_1 = n$ .

*Теорема Арнольда. Пусть гамильтониан  $H(p, q) \equiv H(p_0, p_1, q_0, q_1)$  зависит от параметра  $\mu$  ( $0 < \mu \leq \mu_0$ ),  $2\pi$ -периодичен по переменным  $q_0$  ( $H(p_0, p_1, q_0 + 2\pi, q_1) \equiv H(p_0, p_1, q_0, q_1)$ ), аналитичен в  $2n$ -мерной области*

$$F = \left\{ \begin{array}{l} p_0 \in G_0, \\ |\operatorname{Im} q_0| < \rho, \\ |x_1| \leq R, \quad x_1 = (p_1, q_1) \end{array} \right. \quad (10.1.44)$$



и представим в виде

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_0(\mathbf{p}_0) + \mu H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu), \quad (10.1.45)$$

где  $H_2$  имеет порядок  $\mu^2$ , а

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{H}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) + \tilde{H}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \quad (10.1.46)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \tilde{H}_1 d\mathbf{q}_0 = 0, \quad (10.1.47)$$

$$\bar{H}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \bar{H}_1(\mathbf{p}_0, \tau) + \tilde{\tilde{H}}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1), \quad (10.1.48)$$

$$\bar{H}_1(\mathbf{p}_0, \tau) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{n_1} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k}^{n_1} \lambda_{i,j,k} \tau_i \tau_j \tau_k, \quad (10.1.49)$$

где  $\lambda_0, \lambda_i, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  и  $\lambda_{ij,k}$  зависят только от  $\mathbf{p}_0$ , а

$$2\tau_i = p_{n_0+i}^2 + q_{n_0+i}^2 \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (10.1.50)$$

Пусть, кроме того, в области  $F$  выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{H}_1| &\leq C, & |H_1| &\leq C, & |\bar{H}_1| &\leq C, \\ |\tilde{\tilde{H}}_1| &\leq C |x_1|^2, & |H_2| &\leq \mu^2 C, \end{aligned} \right\} \quad (10.1.51)$$

а в области  $G_0$

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2} \right| \neq 0, \quad \det |\lambda_{ij}(\mathbf{p}_0)| \neq 0. \quad (10.1.52)$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta_0$  ( $\varepsilon; H_0, \bar{H}_1, G_0; \rho, R, C; \mu_0 > 0$ ), что если  $0 < \delta < \delta_0$  и  $0 < \mu < \delta^4$ , то имеют место утверждения:

1. Область

$$\text{Re } F_\delta = \left\{ \begin{aligned} \mathbf{p}_0 &\in \text{Re } G_0, \\ |\text{Im } \mathbf{q}_0| &= 0, \\ 0 &< \tau_i < \delta \end{aligned} \right. \quad (10.1.53)$$

состоит из двух множеств  $F_\delta$  и  $f_\delta$ , из которых  $F_\delta$  инвариантно относительно канонических уравнений с гамильтонианом (10.1.45), а другое,  $f_\delta$ , мало в смысле меры

$$\text{mes } f_\delta < \varepsilon \text{ mes } F_\delta.$$

2. Множество  $F_\delta$  состоит из инвариантных  $n$ -мерных аналитических торов  $T_\omega$ , задаваемых параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}_{0\omega} + f_{0\omega}(\mathbf{Q}), & \mathbf{q}_0 &= \mathbf{Q}_0 + g_{0\omega}(\mathbf{Q}), \\ \mathbf{p}_1 &= \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1\omega}(\mathbf{Q}))} \cos [Q_1 + g_{1\omega}(\mathbf{Q})], \\ \mathbf{p}_1 &= \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1\omega}(\mathbf{Q}))} \sin [Q_1 + g_{1\omega}(\mathbf{Q})], \end{aligned} \right\} \quad (10.1.54)$$

где  $Q = Q_0, Q_1$  — угловые параметры,  $p_{0\omega}, \tau_\omega$  — постоянные, зависящие от номера тора  $\omega$ .

3. Инвариантные торы  $T_\omega$  мало отличаются от торов

$$p_0 = p_{0\omega} = \text{const}, \quad \tau = \tau_\omega = \text{const}. \quad (10.1.55)$$

Это отличие дается оценками

$$|f_{0\omega}(Q)| < \varepsilon\delta, \quad |f_{1\omega}(Q)| < \varepsilon\delta, \quad |g_{0\omega}(Q)| < \varepsilon\delta, \quad |g_{1\omega}(Q)| < \varepsilon\delta. \quad (10.1.56)$$

4. Движение на торе  $T_\omega$  условно-периодично с  $n$ -частотами  $\omega$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_0}{dt} = \omega_0, \quad \frac{dQ_1}{dt} = \omega_1, \\ \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_{0\omega}}, \quad \omega_1 = \mu \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \tau_\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1.57)$$

Эта общая теорема позволяет доказать, что в задаче о движении  $N$  планет существуют условно-периодические решения, если массы планет достаточно малы и их невозмущенные эллиптические движения происходят в кольцеобразных областях трехмерного пространства, не пересекающихся друг с другом. Последнее условие для всех больших планет (исключая Плутон) выполняется. Применение теоремы Арнольда в небесной механике возможно, если написать уравнения движения в канонических переменных Делоне (см. ч. IV, гл. 1) и воспользоваться теоремой Биркгофа [41] о приведении гамильтоновой системы к нормальной форме. Роль частот  $\omega_0$  играют средние движения планет.

### § 1.08. Условно-периодические решения в небесной механике. Геометрическая интерпретация

По традиции в задачах небесной механики *условно-периодическим* называется [140] такое решение, в котором позиционные переменные (большая полуось, эксцентриситет, наклон и аналогичные им канонические переменные) выражаются в виде условно-периодических функций времени, т. е. имеют вид (10.1.39)

$$(a(t), e(t), L(t), \dots) \sim \sum_{|N| \geq 0} A_N e^{i(N, \omega)t}, \quad (10.1.58)$$

а угловые переменные (средняя и истинная долготы, средняя аномалия, долгота перигентра, долгота узла и др.) выражаются в виде сумм линейных функций и условно-периодических функций времени, т. е.

$$(v(t), l(t), M(t), \omega(t), \Omega(t)) \sim at + \sum_{|N| \geq 0} A_N e^{i(N, \omega)t}. \quad (10.1.59)$$

Не существуют в задачах небесной механики такие решения, в которых все переменные (позиционные и угловые) представлялись бы условно-периодическими функциями вида (10.1.58).

Можно дать два геометрических изображения условно-периодических решений. Рассмотрим, ради простоты, совокупность

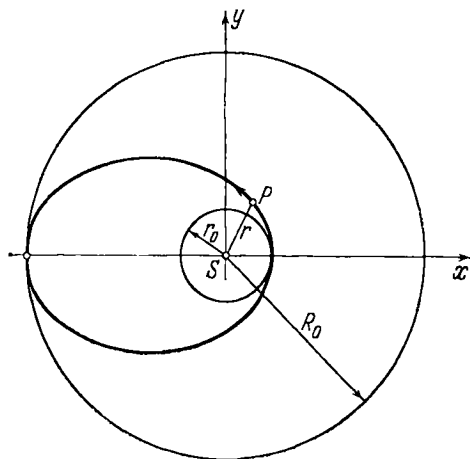


Рис. 106. Изображение эллиптической орбиты планеты  $P$  в ее плоскости.

двух пар функций: одна пара — оскулирующие большая полуось  $a(t)$  и эксцентриситет  $e(t)$ , вторая пара — средняя аномалия  $M(t)$  и угловое расстояние перигенра  $\omega(t)$ .

Предположим, что  $a(t)$  и  $e(t)$  имеют вид (10.1.58), а  $M(t)$  и  $\omega(t)$  — вид (10.1.59). Заметим, что с помощью таких переменных можно описать движение пассивно гравитирующей (нулевой) массы  $P$  в плоской ограниченной задаче трех тел, или движение каждой массы в плоской  $N$ -планетной задаче.

В невозмущенной задаче  $a = a_0$ ,  $e = e_0$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $M = \alpha_1 t + M_0$ , т. е. две позиционные переменные ( $a, e$ ) и одна угловая переменная ( $\omega$ ) суть постоянные, а вторая угловая переменная ( $M$ ) — линейная функция времени. Не ограничивая общность, можно положить  $\omega_0 = M_0 = 0$ .

Одно геометрическое изображение для случая  $e_0 < 1$  дано на рис. 106. Эллиптическая орбита точки  $P$  неподвижна в неподвижной системе координат  $Sxy$  и касается двух окружностей: окружности, радиус которой равен расстоянию перигенра  $r_0 = a_0(1 - e_0)$ , и окружности, радиус которой равен расстоянию апоцентра  $R_0 = a_0(1 + e_0)$ .

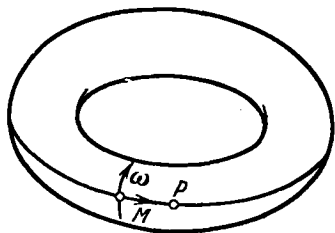


Рис. 107. Изображение эллиптической орбиты на торе.

Для получения второго геометрического изображения воспользуемся тором, образованным прямым произведением двух окружностей [141] с радиусами  $a_0$  и  $e_0$  (рис. 107). Введем на торе две угловые координаты: долготу  $M$  и широту  $\omega$ .

Так как  $\omega = \omega_0 = 0$ ,  $M = \alpha_1 t$ , то движение точки  $P$  на торе изображается равномерным движением по экватору тора.

Допустим теперь, что  $a(t)$ ,  $e(t)$  суть функции вида (10.1.58), а  $M(t)$ ,  $\omega(t)$  — вида (10.1.59). Так как условно-периодические функции ограничены для всех  $t \in (-\infty, \infty)$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} a_{\min} < a(t) < a_{\max}, \\ e_{\min} < e(t) < e_{\max}, \\ M_{\min} < M(t) - \alpha_1 t < M_{\max}, \\ \omega_{\min} < \omega(t) - \alpha_2 t < \omega_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (10.1.60)$$

причем  $a_{\min} \leq a_0 \leq a_{\max}$ ,  $e_{\min} \leq e_0 \leq e_{\max}$ .

Если ввести теперь величины

$$\left. \begin{aligned} R_{\max} &= a_{\max}(1 + e_{\max}), \\ r_{\min} &= a_{\min}(1 - e_{\max}), \end{aligned} \right\} \quad (10.1.61)$$

то очевидно, что  $R_{\max} \geq R_0$ ,  $r_{\min} \leq r_0$ .

Для всех  $t \in (-\infty, \infty)$  существует плоское круговое кольцо  $r_{\min} \leq r \leq R_{\max}$ , внутри которого происходит движение точки  $P$  (рис. 108). Траектория иногда может касаться как внутренней,

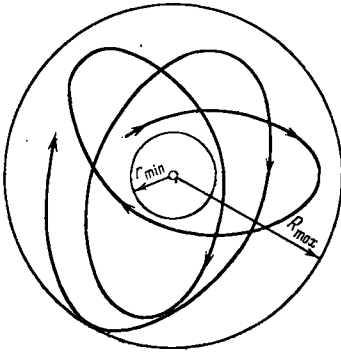


Рис. 108. Изображение условно-периодического движения в плоскости орбиты.

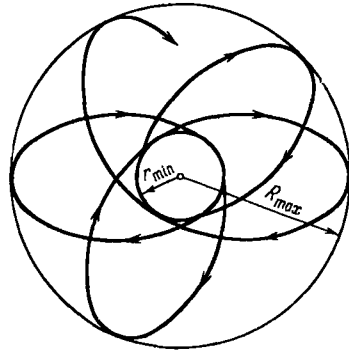


Рис. 109. Периплегматическая орбита в задаче трех тел.

так и внешней границы кольца, но вероятность такого события равна нулю. Если существует условно-периодическое решение, в котором  $a = \text{const}$ ,  $e = \text{const}$ ,  $M(t)$ ,  $\omega(t)$  имеют вид (10.1.59), то такое решение изображено на рис. 109. Такие решения часто называются *периплегматическими*. За бесконечное время угловые переменные  $M(t)$  и  $\omega(t)$  увеличиваются бесконечное число раз на  $2\pi$ , т. е. движущаяся точка  $P$  бесконечное число раз обходит начало координат, а воображаемая прямая, соединяющая смежные по  $t$  максимум и минимум кривой, также совершает бесконечное число поворотов вокруг начала.

Если для геометрического изображения воспользоваться тором, то тогда существует в трехмерном пространстве тор (бублик) с радиусами  $R_{\max}$  и  $r_{\min}$ , а движение точки  $P$  изображается кривой, целиком расположенной внутри тора. При этом точка совершает бесконечное число оборотов по долготе и бесконечное число раз переходит из верхней (северной) части тора в нижнюю (южную). При  $a = \text{const}$  и  $e = \text{const}$  точка движется по поверхности тора с радиусами  $R_0, r_0$ , совершая бесконечное число оборотов по долготе и широте (рис. 110, 111).

Таким образом, в случае  $a = \text{const}$ ,  $e = \text{const}$  имеем обмотку поверхности тора (если  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  рационально несоизмеримы) или «заматывание» кольца.

В общем случае ( $a = a(t)$ ,  $e = e(t)$ ) имеем «заматывание» кольца, или всюду полное наполнение тора. В исключительных

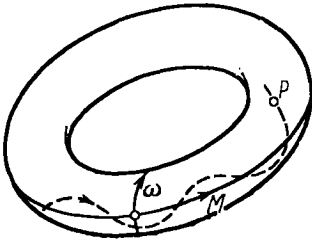


Рис. 110. Изображение пространственного условно-периодического движения.

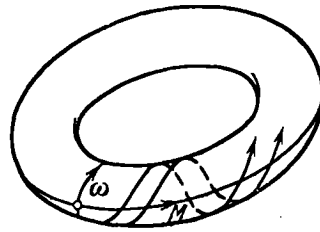


Рис. 111. Изображение условно-периодического движения на торе.

случаях (например, если  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  рационально соизмеримы) траектория замыкается после некоторого числа оборотов, и мы получаем периодическое решение. Аналогичные геометрические интерпретации условно-периодических решений можно дать и в случае большего числа позиционных и угловых переменных. Например, в пространственной ограниченной задаче трех тел число позиционных и угловых переменных равно соответственно трем ( $a(t)$ ,  $e(t)$ ,  $i(t)$  и  $M(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\Omega(t)$ ). Вместо кругового плоского кольца следует рассматривать полый цилиндр, основанием которого служит круговое кольцо, а высота равна  $2i_{\max}$ , где  $|i(t)| < i_{\max}$ . Вместо двумерной поверхности тора следует рассматривать трехмерную поверхность тора, полученную прямым произведением трех окружностей с радиусами  $a_{\max}$ ,  $e_{\max}$ ,  $i_{\max}$ .

Первые условно-периодические решения в задаче трех тел нашел Пуанкаре [2]. Его метод малого параметра (см. § 1.01) позволяет находить в определенных системах координат условно-периодические решения задачи трех тел. Периодические решения первого, второго, третьего сорта суть, вообще говоря,

условно-периодические решения, так как координаты точек в неподвижной прямоугольной системе координат даются функциями типа (10.1.59). Периодические решения Шварцшильда (см. § 1.03) также являются условно-периодическими решениями в неподвижной системе координат.

Условно-периодические решения  $N$ -планетной задачи, найденные Арнольдом в § 1.07, являются условно-периодическими решениями второго сорта, пользуясь терминологией Пуанкаре.

В. Джеффрисом и Ю. Мозером [42] и Г. А. Красинским [43] доказано существование условно-периодических решений первого сорта (почти-круговых движений) в задаче трех тел и в плоской  $N$ -планетной задаче. Построены условно-периодические

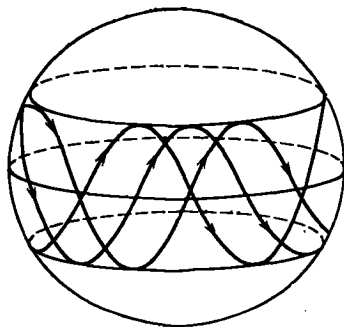


Рис. 112. Условно-периодическое движение спутника на эллипсоидальной поверхности.

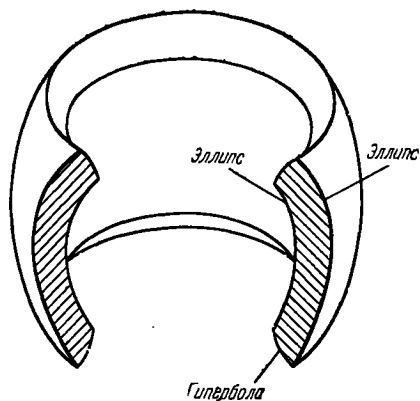


Рис. 113. Часть трехмерного пространства, в которой происходит условно-периодическое движение спутника.

решения в окрестности точек либрации [36], [140]. Условно-периодические решения в осредненных вариантах плоской ограниченной задачи трех тел найдены в [29], [140]. Все перечисленные классы условно-периодических решений имеют «периплегматический» характер, или суть движения в торах или на торе.

Дж. Винти [45], М. Д. Кисликом [46], Е. П. Аксеновым, В. Г. Деминым и Е. А. Гребениковым [47] доказано существование условно-периодических решений в задаче о движении искусственного спутника сфероидальной планеты. Ими доказано, что при отрицательных энергиях спутника существуют условно-периодические решения, всюду плотно обматывающие часть эллипсоидальной поверхности, заключенной между двумя параллелями (рис. 112), или всюду заполняющие тело вращения, образованное вращением фигуры (рис. 113) вокруг оси  $Oz$ .

В конце заметим, что доказательство существования условно-периодических решений в планетных задачах, основанное на

применении методов ускоренной сходимости ньютоновского типа [48], содержит в себе и способ построения некоторых классов условно-периодических решений гамильтоновых систем. Конструктивная часть метода достаточно подробно описана Ю. А. Рябовым [140].

### § 1.09. Финальные движения в задаче трех тел. Захват и обмен в задаче трех тел

Финальными движениями в задаче  $n$  тел называются предельные движения, к которым стремятся движения каждого из тел при  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Классификация финальных движений в задаче трех тел была дана Ж. Шази [49]. Согласно Шази существует семь типов финальных движений в задаче трех тел (рис. 114).

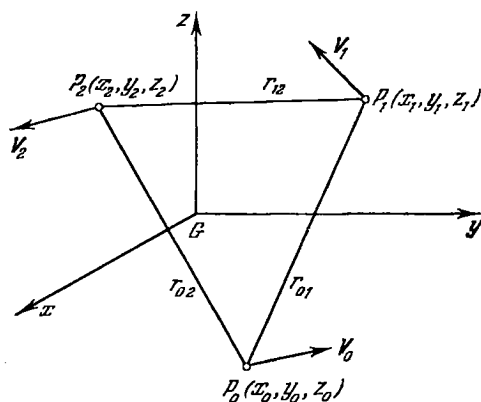


Рис. 114.  $Gxyz$  — прямоугольная барицентрическая система координат;  $V_0, V_1, V_2$  — барицентрические скорости точек  $P_0, P_1, P_2$  соответственно.

А) Движения гиперболические:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{01} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{02} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{12} = +\infty,$$

причем  $r_{ij} = O(t)$  для достаточно больших значений  $t$ . Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |V_0| > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |V_1| > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |V_2| > 0.$$

В) Движения гипероло-параболические:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{01} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{02} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{12} = +\infty,$$

причем

$$r_{01}(t) = O(t), \quad r_{02}(t) = O(t), \quad r_{12}(t) = O(t^{3/2})$$

для достаточно больших значений  $t$ . Отсюда вытекает, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |V_{12}| = 0$ ,  $V_{ij}$  — скорость тела  $P_j$  относительно  $P_i$ .

С) Движения гипероло-эллиптические:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{01} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{02} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{12} < C_1,$$

$C_1$  — некоторая постоянная, причем

$$r_{01}(t) = O(t), \quad r_{02}(t) = O(t)$$

при достаточно больших значениях  $t$ .

Д) Движения параболо-параболические:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{ij} = +\infty,$$

причем все

$$r_{ij}(t) = O(t^{2/3})$$

для достаточно больших  $t$ . На бесконечности все относительные скорости обращаются в нуль.

Е) Движения параболо-эллиптические:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{01} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{02} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{12} < C,$$

причем

$$r_{01}(t) = O(t^{3/2}), \quad r_{02} = O(t^{3/3})$$

для достаточно больших  $t$ . Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{V}_{01}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{V}_{02}| = 0.$$

Ф) Движения ограниченные: все  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{ij} < C$ .

Г) Движения осциллирующие:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{01} < C$ , а  $r_{02}(t)$  и  $r_{12}(t)$

с одной стороны неограничены, но и не стремятся к бесконечности при  $t \rightarrow +\infty$ . Существование таких движений у Шази не было доказано. Этот вопрос положительно решен К. А. Ситниковым [50].

Очевидно, что в приведенной классификации индексы 0, 1 и 2 не имеют существенного значения.

Пусть  $h$  — постоянная интеграла энергии, написанного в барицентрических координатах.

Если  $h < 0$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  финальные движения могут принадлежать только типам С), Е), Ф), Г).

Если  $h = 0$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  финальные движения принадлежат либо С), либо Д).

Если  $h > 0$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  финальные движения могут принадлежать А), В), С).

Аналогичная классификация имеет место и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Переход от одного типа финальных движений (при  $t \rightarrow -\infty$ ) к другому (при  $t \rightarrow +\infty$ ) связан с так называемой *проблемой захвата*, рассматривавшейся многими авторами [49], [51] — [53].

Согласно Шази назовем *захватом* в задаче трех тел следующий переход:

$$\begin{matrix} A & \rightarrow & C \\ t \rightarrow -\infty & & t \rightarrow +\infty \end{matrix}.$$



Наиболее полно проблема захвата рассмотрена В. М. Алексеевым [54], [55].

Согласно Алексееву *частичным захватом* в задаче трех тел называются переходы

$$\begin{array}{l} C \rightarrow E, \quad C \rightarrow G, \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty, \\ E \rightarrow C, \quad G \rightarrow C, \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty, \\ E \rightarrow G, \quad G \rightarrow E. \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty. \end{array}$$

*Полным захватом* называются переходы

$$C \rightarrow F, \quad E \rightarrow F, \quad G \rightarrow F. \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty.$$

Наконец, *обменом* в задаче трех тел называются переходы

$$\begin{array}{l} C \rightarrow C, \quad E \rightarrow E, \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty, \\ F \rightarrow F, \quad G \rightarrow G. \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow +\infty. \end{array}$$

Последние переходы содержат как тривиальные случаи (когда остается без изменений не только тип финальных движений, но и характер движений в системе трех тел), так и наиболее интересные случаи, когда роль компонент в материальной системе существенно меняется. Например,

1)

$$\begin{array}{l} C \quad \rightarrow \quad C \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} r_{01} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{01} = +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} r_{02} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{12} = +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} r_{12} < C, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{02} < C. \end{array}$$

2)  $F \rightarrow F$ : тело  $P_2$  было спутником  $P_0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , а при  $t \rightarrow +\infty$  становится спутником  $P_1$ .

В. М. Алексеевым доказано, что все указанные типы переходов возможны в задаче трех тел. Иногда удается определить вероятность захвата [52], [55].

Финальные движения в задаче  $n \geq 3$  тел не изучены.

## ПРОБЛЕМА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И СХОДИМОСТЬ РЯДОВ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Всякая задача небесной механики сводится к дифференциальным уравнениям, и, следовательно, ее решение равносильно решению дифференциальных уравнений, описывающих ее. Однако термину «решение» дифференциальных уравнений на разных этапах приписывалось различное содержание и в силу сказанного проблема интегрируемости в небесной механике трактовалась в различные эпохи по-разному.

С эпохи Лагранжа и Лапласа *задача считается интегрируемой, если она решается «в квадратурах»*, т. е. можно найти общий интеграл дифференциальных уравнений задачи, содержащий независимые произвольные постоянные, число которых в точности равно порядку системы. С этой точки зрения наиболее интересными интегрируемыми задачами являются задача двух тел (ч. II) и задача двух неподвижных центров (см. ч. V, гл. 3). В задаче  $n > 2$  тел известны 10 первых интегралов (см. ч. IV), и, как показал Лагранж, порядок системы может быть понижен еще на две единицы. Следовательно, для нахождения ее общего интеграла следует знать еще  $6n - 12$  первых интегралов, однако фундаментальные исследования Брунса, Пуанкаре и Пенлеве (см. §§ 2.03 и 2.04) доказали бесплодность дальнейших поисков.

Развитие аналитической теории дифференциальных уравнений позволило дать еще одну трактовку проблеме интегрируемости в небесной механике. *Если можно найти решение дифференциальных уравнений задачи небесной механики в виде рядов, сходящихся для любых априорно заданных параметров системы (массы тел, начальные условия и др.), то данную задачу также можно отнести к интегрируемым задачам.* Для задачи трех тел такое решение найдено Зундманом (см. § 2.05). Основные трудности, которые возникают при отыскании решения в виде степенных рядов, связаны с устранением особенностей в дифференциальных уравнениях, возникающих из-за возможности столкновения двух или большего числа тел (см. § 2.04).

Другая, качественная трактовка проблемы интегрируемости, получившая развитие в наше время, понимается как *построение универсальной классификации всевозможных решений* по различным свойствам и связанное с этим разбиение всего фазового пространства на области, содержащие движения, принадлежащие только одному классу. При этом сами решения в случае надобности могут быть найдены приближенно либо аналитическими, либо численными методами.

Пуанкаре ввел понятие *практической интегрируемости* задач небесной механики, понимая под этим нахождение приближенного решения, удовлетворительно представляющего наблюдения и охватывающего практически приемлемый промежуток времени. В этом смысле все задачи небесной механики интегрируемы, особенно в связи с большими возможностями электронных вычислительных машин. Использование методов теории возмущений (см. ч. IV, гл. 9) обуславливает появление *асимптотических расходящихся рядов*. Практика построения теорий движения тел Солнечной системы, накопленная в небесной механике на протяжении двух столетий, говорит в пользу применения таких рядов в конкретных задачах.

### § 2.01. Теорема Пуассона об интеграле гамильтоновой системы

Пусть задача описывается гамильтоновой системой  $2n$ -го порядка

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (10.2.01)$$

где  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  — известная функция  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $t$ .

Определение. *Скобкой Пуассона* двух скалярных функций

$F_1(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  и  $F_2(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

называется выражение

$$(F_1, F_2) = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_s} \frac{\partial F_2}{\partial p_s} - \frac{\partial F_1}{\partial p_s} \frac{\partial F_2}{\partial q_s} \right). \quad (10.2.02)$$

Теорема Пуассона. Если  $F_1 = C_1$  и  $F_2 = C_2$  являются двумя первыми интегралами системы (10.2.01), то выражение  $(F_1, F_2) = C$  либо представляет собой первый интеграл системы (10.2.01), либо является тождеством.

К сожалению, в задачах небесной механики теорема Пуассона не позволяет получить новые первые интегралы, так как она приводит к тем же известным интегралам или к их комби-

нации. Она может быть использована лишь для формального построения нового интеграла, не представляющегося конечным выражением (см. [56], [57]), а рядом, сходимость которого не установлена, например, *адельфического (родственного) интеграла* (см. [58]).

**§ 2.02. Теорема Брунса о несуществовании алгебраических первых интегралов задачи трех тел, отличных от классических**

Прежде чем сформулировать теорему Брунса, приведем несколько лемм, имеющих самостоятельный научный интерес. Эти леммы также принадлежат Брунсу [58].

*Лемма 1. Если дифференциальные уравнения задачи трех тел имеют каноническую форму (10.2.01), то всякий алгебраический интеграл системы (10.2.01), не зависящий явно от  $t$ , имеет вид*

$$R(q, p, u) = C, \quad (10.2.03)$$

$$u = r_{01} + r_{02} + r_{12}, \quad (10.2.04)$$

где  $R(q, p, u)$  — рациональная функция переменных  $q, p, u$ .

*Лемма 2. Всякий алгебраический интеграл системы (10.2.01), не зависящий явно от  $t$ , является алгебраической комбинацией интегралов вида*

$$\frac{P_1(q, p, u)}{P_2(q, p, u)} = C, \quad (10.2.05)$$

где  $P_1, P_2$  — многочлены относительно  $q, p, u$ , обладающие некоторой однородностью, а именно:

$$P_1(\kappa^2 q, \kappa^{-1} p, \kappa^2 u) \equiv \kappa^q P_1(q, p, u),$$

$$P_2(\kappa^2 q, \kappa^{-1} p, \kappa^2 u) \equiv \kappa^r P_0(q, p, u).$$

*Лемма 3. Всякий алгебраический интеграл дифференциальных уравнений движения задачи трех тел вида (10.2.01), не зависящий явно от времени, является алгебраической комбинацией классических интегралов.*

Заметим, что леммы 1 — 3 установлены Брунсом для задачи  $n > 2$  тел, а не только для задачи трех тел.

*Лемма 4. Всякий зависящий явно от  $t$  алгебраический интеграл задачи трех тел является алгебраической комбинацией алгебраических интегралов, не содержащих явно  $t$ , и интегралов вида  $t - \varphi = c$ , где  $\varphi$  — алгебраическая функция переменных  $q', p'$  ( $q', p'$  — канонические переменные из § 1.14 ч. IV, где они обозначены через  $q$  и  $p$ ).*

Теорема Брунса. *Всякий алгебраический интеграл задачи трех тел имеет вид*

$$F(I_1, I_2, \dots, I_{10}) = C, \quad (10.2.06)$$

где  $I_1, I_2, \dots, I_{10}$  — левые части классических интегралов, данных формулами в §§ 1.14 и 1.17 ч. IV, а  $F$  — алгебраическая функция аргументов  $I_1, \dots, I_{10}$ .

Замечание. Теорема Брунса утверждает, что не существуют другие интегралы, алгебраические относительно канонических переменных, введенных в §§ 1.14, 1.17 ч. IV, а следовательно, и относительно прямоугольных координат в инерциальной системе отсчета и их производных, так как последние выражаются через указанные канонические переменные алгебраическим образом. Но из этого вовсе не следует, что вообще отсутствуют какие-либо алгебраические интегралы.

Пенлеве распространил лемму 4 на задачу  $n > 3$  тел.

Подробное изложение теоремы Брунса содержится в [5], [58].

### § 2.03. Теорема Пуанкаре о несуществовании однозначных аналитических первых интегралов гамильтоновой системы

Пусть имеется гамильтонова система  $2n$ -го порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (10.2.07)$$

где функция Гамильтона  $H(x, y, \mu)$  обладает свойствами:

1) непрерывна и однозначна относительно  $2n + 1$  аргумента  $x, y, \mu$  ( $\mu$  — скалярный параметр) в  $(2n + 1)$ -мерной области

$$D = \begin{cases} x \in X, \\ y \in (-\infty, \infty)^n, \\ -\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0; \end{cases}$$

2) аналитична относительно  $\mu$  при  $|\mu| \leq \mu_0$ ;

3) периодична относительно  $y$ .

$$H(x, y + 2\pi, \mu) \equiv H(x, y, \mu).$$

В силу условий 1)–3)  $H(x, y, \mu)$  можно представить рядом

$$H(x, y, \mu) = H_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i H_i(x, y), \quad (10.2.08)$$

сходящимся при  $|\mu| \leq \mu_0$  для любых  $x \in X, y \in (-\infty, \infty)^n$ .

Теорема Пуанкаре. *Если  $H_0 = H_0(x)$  и гессиан  $\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x \in X} \neq 0$ , то уравнения (10.2.07), кроме первого инте-*

грала  $H(x, y, \mu) = C$ , не имеют в области  $D_1 \subset D$ , вообще говоря, другого однозначного аналитического интеграла (см. [2]).

Исключительные случаи, когда могут существовать другие однозначные аналитические интегралы системы (10.2.07), также исследованы Пуанкаре [2].

Из теоремы Пуанкаре следует, что в планетном варианте задачи трех тел ( $m_1 \ll m_0$ ,  $m_2 \ll m_0$ ) не существует других однозначных интегралов, кроме интеграла энергии и интегралов площадей. Результаты Пуанкаре были распространены Пенлеве на задачу  $n$  тел. Подробно эти вопросы изложены в учебнике Г. Н. Дубошина [5].

### § 2.04. Случай интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных

Теорема Гамильтона — Якоби (см. ч. IV, § 1.20) устанавливает эквивалентность проблемы интегрируемости канонической системы (4.1.52) и уравнения Гамильтона — Якоби (4.1.67) или (4.1.68). Это обусловило интенсивные исследования по проблеме отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби, прежде всего методом разделения переменных [104].

Изложим кратко историю вопроса:

В 1843 г. Якоби [105] нашел методом разделения переменных полный интеграл уравнения вида

$$\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 = h. \quad (10.2.09)$$

Р. Лиувилль [106], [107] показал, что интегрируемо более общее, чем (10.2.09), уравнение Гамильтона — Якоби, а именно:

$$\sum_{i=1}^k \left[ \frac{1}{a_i(q_i)} \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 - 2U_i(q_i) \right] = 2h \sum_{i=1}^k b_i(q_i). \quad (10.2.10)$$

В 1880 г. Г. Морера [108] нашел методом разделения переменных все случаи интегрируемости уравнения

$$a_{11}(q_1, q_2) \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + 2a_{12}(q_1, q_2) \frac{\partial W}{\partial q_1} \frac{\partial W}{\partial q_2} + a_{22}(q_1, q_2) \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 - U(q_1, q_2) = h. \quad (10.2.11)$$

В 1891, 1893 гг. П. Штеккель [109] исследовал проблему интегрируемости уравнения

$$\sum_{i=1}^k a_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 - 2U(q_1, q_2, \dots, q_k) = 2h. \quad (10.2.12)$$

Доказано, что если уравнение (10.2.12) допускает разделение переменных, то необходимо существует система  $k^2$  функций  $\varphi_{ij}(q_i)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ) и система  $k$  функций  $\Psi_i(q_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), обладающих тем свойством, что коэффициенты  $a_i(q_1, q_2, \dots, q_k)$  и силовая функция  $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$  представляются соотношениями

$$a_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}, \quad U = \sum_{i=1}^k \Psi_i a_i,$$

$$\Delta = \det \{\varphi_{ij}\}.$$

Эти условия являются и достаточными [110].

После работы Штеккеля осталось найти случаи интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби, содержащего, помимо квадратов импульсов, также произведения импульсов с различными индексами, импульсами в первой степени и явно время в характеристической функции, т. е. представляло интерес уравнение Гамильтона — Якоби вида

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^k a_{ij}(q_1, \dots, q_k) \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^k b_i(q_1, \dots, q_k) \frac{\partial S}{\partial q_i} - U(q_1, \dots, q_k) = h. \quad (10.2.13)$$

Очевидно, что возможность интегрирования уравнения Гамильтона — Якоби целиком определяется аналитической структурой коэффициентов  $a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_k)$ ,  $b_i(q_1, q_2, \dots, q_k)$  и силовой функции  $U$ . Это побудило Т. Леви-Чивита [111] вывести необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения (10.2.13), чтобы оно было интегрируемым методом разделения переменных. Для случая трех степеней свободы (например, для пространственной ограниченной задачи трех тел) эти условия выписаны и исследованы Ф. Даль-Аква [112]. В 1911 г. П. Бургатти [113] выписал функциональные зависимости импульсов от координат, приводящие к интегрированию уравнения Гамильтона — Якоби. Н. Д. Моисеев [114] и В. Г. Демин [87] указали на два обобщения уравнений Лиувилля и Штеккеля, также интегрируемые методом разделения переменных.

Вопросы интегрируемости уравнений в частных производных первого порядка исследовал В. Г. Имшенецкий [121], идеи которого были использованы М. С. Яров-Яровым [122] для интегрирования неавтономного уравнения Гамильтона — Якоби.

**§ 2.05. Теорема о неприводимости уравнения Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной круговой задачи трех тел к уравнению типа Штеккеля**

Уравнение Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной круговой задачи трех тел в эллиптических переменных  $u, v$  (5.2.56) не имеет форму уравнения Штеккеля (10.2.12), поэтому правомерен вопрос о существовании такой замены переменных, которая делала бы возможным такое преобразование.

Для случая двух степеней свободы назовем *уравнением типа Штеккеля* уравнение

$$f_1(q_1) \left[ \frac{\partial W}{\partial q_1} + \Phi_1(q_1) \right]^2 + f_2(q_2) \left[ \frac{\partial W}{\partial q_2} + \Phi_2(q_2) \right]^2 = \Phi_1(q_1) + \Phi_2(q_2), \quad (10.2.14)$$

где  $q_1, q_2$  — обобщенные координаты.

К такому уравнению сводится уравнение Штеккеля (10.2.12) для  $k = 2$  и обобщение В. Г. Демина [115].

Теорема [116]. *Не существует никакая невырожденная дифференцируемая замена переменных*

$$\left. \begin{aligned} u &= u(q_1, q_2), \\ v &= v(q_1, q_2), \end{aligned} \right\} \quad (10.2.15)$$

*преобразующая уравнение Гамильтона — Якоби (5.2.56) в уравнение (10.2.14).*

Замечание. Если вместо уравнения (10.2.14) рассматривается оно же, помноженное на общий множитель  $\lambda(q_1, q_2) \neq 0$ , то можно доказать, что утверждение теоремы остается в силе.

**§ 2.06. Соударения**

Пусть в абсолютной прямоугольной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  рассматривается задача  $n$  тел  $(P_i(m_i; \xi_i, \eta_i, \zeta_i) \ i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ , и пусть  $A(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$  — некоторая конечная, но нефиксированная точка в  $O\xi\eta\zeta$ . Обозначим через  $r_i$  расстояние  $AP_i$ .

Определение.  $k$ -кратным *соударением* (или *столкновением*) точек  $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_k}$  ( $0 \leq n_1 \leq n-1, 0 \leq n_2 < n-1, \dots, 0 \leq n_k \leq n-1; n_i \neq n_j$ , если  $i \neq j$ ) в конечный момент времени  $\bar{t}$  называется явление, описанное условиями

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} r_{n_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k). \quad (10.2.16)$$

Точка  $A$  называется *точкой соударения*,  $\bar{t}$  — *момент соударения*.

Очевидно, что наименьшее значение  $k$  равно 2 и мы имеем *парное* или *двойное соударение*, наибольшее значение  $k$  равно  $n$



и в таком случае точка соударения  $A$  совпадает с центром масс системы  $G$ .

Если  $h < 0$  ( $h$  — постоянная интеграла энергии), то в задаче двух тел при прямолинейном движении будет бесчисленное множество вещественных моментов соударения, определяемых по формуле

$$\bar{t}_k = \bar{t}_0 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (10.2.17)$$

где  $n = \frac{\sqrt{f(m_0 + m_1)}}{a^{3/2}}$ ,  $a$  — большая полуось орбиты, т. е. половина длины прямолинейного отрезка, в который вырождается эллипс при  $e \rightarrow 1 - 0$ ,  $\bar{t}_0$  — один из моментов соударения.

При  $h \geq 0$  существует лишь один вещественный момент соударения, хотя, если рассматривать комплексные значения времени, здесь также будет бесчисленное множество моментов соударения. Расстояние между телами в окрестности момента соударения представляется разложением

$$h < 0, \quad r = \left( \frac{3f(m_0 + m_1)}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - \bar{t}_k)^{2/3} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n (t - \bar{t}_k)^{n/3}, \quad (10.2.18)$$

$$h = 0, \quad r = \left( \frac{3f(m_0 + m_1)}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - \bar{t}_0)^{2/3}, \quad (10.2.19)$$

$$h > 0, \quad r = \left( \frac{3f(m_0 + m_1)}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - \bar{t}_0)^{2/3} + \sum_{n=3}^{\infty} b_n (t - \bar{t}_0)^{n/3}. \quad (10.2.20)$$

Отсюда следует, что для скорости имеем ряды

$$h < 0, \quad v = \frac{dr}{dt} = \left( \frac{2f(m_0 + m_1)}{\sqrt{3}} \right)^{2/3} (t - \bar{t}_k)^{-1/3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{na_n}{3} (t - \bar{t}_k)^{\frac{n-3}{3}}, \quad (10.2.21)$$

$$h = 0, \quad v = \left( \frac{2f(m_0 + m_1)}{\sqrt{3}} \right)^{2/3} (t - \bar{t}_0)^{-1/3}, \quad (10.2.22)$$

$$h > 0, \quad v = \left( \frac{2f(m_0 + m_1)}{\sqrt{3}} \right)^{2/3} (t - \bar{t}_0)^{-1/3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{nb_n}{3} (t - \bar{t}_0)^{\frac{n-3}{3}}. \quad (10.2.23)$$

Формулы (10.2.21)–(10.2.23) показывают, что для любого  $h$

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} v = +\infty \quad (10.2.24)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} v \sqrt{r} = \sqrt[3]{6f(m_0 + m_1)} f(m_0 + m_1), \quad (10.2.25)$$

Формулы (10.2.21) — (10.2.23) весьма важны, так как и в задаче трех тел в случае двойных соударений имеется та же асимптотика.

Если вместо времени в качестве независимой переменной рассматривать эксцентрическую аномалию, то уравнения движения не будут иметь особенность, т. е. эксцентрическая аномалия играет роль регуляризирующей переменной. Детально эти вопросы изложены в [59], [60].

Исследование кратных соударений в задаче  $n \geq 3$  тел чрезвычайно сложно потому, что до настоящего времени не известны *необходимые и достаточные условия* наличия кратных соударений или их отсутствия.

*Необходимое условие  $n$ -кратного соударения (теорема Вейерштрасса — Слудского — Зундмана)* [5], [6], [61]. Необходимым условием  $n$ -кратного соударения в задаче  $n$  тел в конечный вещественный момент времени является равенство нулю момента количества движения  $c$  системы.

*Теорема Зундмана.* В задаче трех тел  $|c| = 0$  только в том случае, если движение трех тел происходит в некоторой неизменной плоскости (см. [5]).

Таким образом, для исключения тройного соударения в задаче трех тел следует считать, что  $|c| \neq 0$ . Именно в этом предположении, конечно, не исключающем двойных соударений в задаче трех тел, Зундман исследовал характер последних и оценил величины кинематических и динамических параметров системы (прежде всего взаимные расстояния и относительные скорости). Зундманом, в частности, доказаны следующие утверждения.

1) Если  $|c| > 0$ , то на любом конечном отрезке времени может иметь место только конечное число двойных соударений. Другими словами, последовательность последующих моментов соударения  $\{\bar{t}_k\}$

$$\bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_k < \dots$$

( $\bar{t}_0$  — некоторый начальный момент) не может сходить к конечному пределу. Это утверждение справедливо и для моментов соударений, предшествовавших  $\bar{t}_0$ , так как уравнения движения задачи трех тел, написанные в неподвижных прямоугольных координатах, инвариантны относительно замены  $t$  на  $-t$ .

2) Если  $|c| > 0$  и  $\bar{t}$  — момент соударения двух тел, то при  $t \rightarrow \bar{t}$  отрезок, соединяющий эти тела, стремится к определенному предельному положению, а его угловая скорость стремится к нулю (движение — почти прямолинейно, как в задаче двух тел). Более того, расстояние монотонно убывает, а скорость неограниченно возрастает, причем имеет место равенство типа (10.2.25)

Другими словами, для моментов времени, близких к моменту соударения, какова бы ни была далекая масса, решающей является сила притяжения близких тел.

3) Если  $|c| > 0$ , то для всех  $t \in (-\infty, \infty)$  два из наибольших взаимных расстояний ограничены снизу одной и той же постоянной, а скорость удаленной массы ограничена сверху. Это утверждение говорит о том, что с возрастанием (или с убыванием)  $t$  периметр треугольника, образованного телами, не может стремиться к нулю ни монотонным, ни осциллирующим образом.

Эти соображения позволили Зундману преодолеть математические трудности, возникающие из-за возможных двойных соударений в уравнениях движения задачи трех тел. Зундман не нашел необходимых и достаточных условия отсутствия всяких соударений в задаче трех тел, но, изучив характер соударений с помощью метода регуляризации независимой переменной, устранил эти особенности в дифференциальных уравнениях задачи трех тел.

**§ 2.07. Решение задачи трех тел в виде рядов, сходящихся для всех вещественных значений времени.  
Теорема Зундмана**

*Теорема Зундмана. Если момент количества движения в задаче трех тел отличен от нуля ( $|c| > 0$ ), то прямоугольные барицентрические координаты трех тел, их взаимные расстояния и время  $t$  могут быть разложены в степенные ряды по степеням переменной  $\omega$ . Эти ряды сходятся при  $|\omega| < 1$  (см. [5], [6], [61]).*

Связь между временем  $t$  и новой независимой переменной  $\omega$  выражается равенствами

$$\omega = \frac{e^{\frac{\pi s}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi s}{2\Omega}} + 1}, \quad s = \frac{2\Omega}{\pi} \ln \frac{1 + \omega}{1 - \omega}, \quad (10.2.26)$$

$$s = \int_{t_0}^t (U + 1) dt, \quad dt = (U + 1)^{-1} ds, \quad (10.2.27)$$

где  $U$  — силовая функция задачи,  $t_0$  — начальный момент времени. Постоянная  $\Omega$  однозначно определяется массами трех тел, их начальными координатами и скоростями. В [5] для нее дается явное выражение.

Так как интервал  $-1 < \omega < 1$  отображается взаимно однозначно с помощью (10.2.26) в бесконечный интервал  $-\infty < s < +\infty$ , а  $-\infty < s < +\infty$  с помощью (10.2.27) отображается взаимно однозначно в бесконечный интервал  $-\infty < t < +\infty$ ,

то отсюда вытекает, что ряды, построенные Зундманом для задачи трех тел, сходятся для всех вещественных значений времени  $t$ .

Исследования Д. Белорицкого [62] показали, что скорость сходимости рядов Зундмана чрезвычайно мала, поэтому их использование в приложениях в настоящее время невозможно. Интересные исследования, примыкающие к работам Зундмана, выполнил Г. А. Мерман [63].

Аналогичные результаты для задачи  $n > 3$  тел неизвестны.

### § 2.08. Сходимость рядов Хилла в основной проблеме теории движения Луны

В гл. 3 ч. V и в гл. 10 ч. IV приведены уравнения Хилла, определяющие промежуточную орбиту Луны. Для теории Луны Хилл рассматривал уравнения [см. (5.3.18)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\xi^2} - 2m \frac{dy}{d\xi} + \frac{\chi x}{r^3} - 3m^2x &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} + 2m \frac{dx}{d\xi} + \frac{\chi y}{r^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.28)$$

в которых

$$\xi = (n - n')(t - t_0), \quad (10.2.29)$$

$$\chi = \frac{f(m_T + m_L)}{(n - n')^2}, \quad m = \frac{n'}{n - n'}, \quad (10.2.30)$$

где  $m_T, m_L$  — массы Земли и Луны,  $n, n'$  — средние сидерические движения Луны и Солнца. Хилл показал (см. ч. IV, гл. 10), что уравнения (10.2.28) имеют периодическое решение

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1)\xi, \\ y &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \sin(2k+1)\xi, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.31)$$

где коэффициенты  $A_{2k+1}$  и  $B_{2k+1}$  разлагаются в ряды по степеням малого параметра  $m$ .

А. М. Ляпунов показал [64], что уравнения (10.2.28) имеют периодические решения вида

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} m^k P_k(\xi), \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} m^k Q_k(\xi), \quad (10.2.32)$$

где  $P_k(\xi)$  и  $Q_k(\xi)$  — тригонометрические полиномы относительно  $\cos s\xi$  и  $\sin s\xi$  ( $s$  — целое число). Ряды Ляпунова (10.2.32) представляют собой «перестроенные» ряды Хилла (10.2.31).

В работе [64] Ляпунов не только построил формальные ряды (10.2.32), но и доказал их сходимость: им доказано, что ряды (10.2.32) абсолютно и равномерно сходятся для всякого значения  $t$  при  $|m| \leq 1/7$ . Для теории движения Луны  $m \approx 0,08085$ , поэтому ряды Хилла применимы в этой задаче.

Другое доказательство сходимости рядов Хилла дал А. Уинтнер [60]. Г. А. Мерман [65], М. С. Петровская [66] и Ю. А. Рябов [67] занимались расширением области сходимости рядов Хилла. Последнему принадлежит наиболее общий результат ( $|m| \leq 0,258$ ).

### § 2.09. Характер сходимости рядов классической теории возмущений

Если при интегрировании дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов применяется какой-нибудь из классических методов теории возмущений (см. ч. IV), то любой элемент на первом шаге представляется выражением вида

$$E = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{s_1, s_2} \frac{B_{k_1, k_2}^{s_1, s_2}}{k_1 n_1 + k_2 n_2} \sin(k_1 l_1 + k_2 l_2 + D_{s_1, s_2}) + Ct + E_0, \quad (10.2.33)$$

где  $n_1, n_2$  — невозмущенные средние движения планет (мы рассматриваем планетный вариант задачи трех тел),  $l_1, l_2$  — средние долготы,  $C, E_0, D_{s_1, s_2}$  — постоянные ( $C$  для некоторых элементов может равняться нулю, независимо от того, соизмеримы или не соизмеримы  $n_1$  и  $n_2$ ),  $B_{k_1, k_2}^{s_1, s_2}$  зависит от  $a_1, a_2, e_1, e_2, \sin^2 \frac{I}{2}$ .

Если  $n_1$  и  $n_2$  — рациональные числа, то существует бесконечное множество значений  $k_1$  и  $k_2$ , для которых  $k_1 n_1 + k_2 n_2 = 0$  и члены с такими индексами  $k_1$  и  $k_2$  включены в  $Ct$ . Делители с другими значениями  $k_1$  и  $k_2$  будут ограничены снизу общей постоянной, поэтому ряд из (10.2.33) будет сходиться для любого  $t \in (-\infty, \infty)$ , если  $e_1, e_2$  и  $\sin^2 \frac{I}{2}$  не превышают некоторые положительные пределы.

Если  $n_1$  и  $n_2$  — иррациональные числа, то для любой пары таких чисел наверняка существуют такие целые индексы  $k_1$  и  $k_2$ , что  $|k_1 n_1 + k_2 n_2| < \alpha$ ,  $\alpha$  — произвольное положительное число. Это обстоятельство ставит под сомнение сходимость ряда (10.2.33) для любых  $t$ , сколь угодно близких к начальному моменту  $t_0$  и для любых сколь угодно малых значений  $e_1, e_2, \sin^2 \frac{I}{2}$ .

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_1} \sum'_{k_2} \left| \frac{K_{k_1, k_2} \beta^r}{k_1 + k_2 \nu} \right|, \quad r = |k_1 - k_2|, \quad (10.2.34)$$

в котором суммирование ведется по  $k_1$  и  $k_2$ , удовлетворяющим условию

$$k_1 k_2 < 0, \quad \nu = n_1/n_2, \quad \beta = \sup \left\{ e_1 < 1, e_2 < 1, \sin^2 \frac{I}{2} \right\}.$$

Очевидно, что ряд (10.2.34) является мажорантным для той части ряда (10.2.33), для которой  $k_1 k_2 < 0$ . Лишь только эта часть ряда представляет интерес с точки зрения сходимости.

Пусть ряд  $\sum \sum' K_{k_1, k_2} \beta^r$  сходится при  $|\beta| < 1$ .

*Теорема Брунса. Значения  $\nu$ , для которых ряд (10.2.34) сходится, и значения  $\nu$ , для которых ряд (10.2.34) расходится, образуют всюду плотное множество на вещественной оси  $(-\infty, +\infty)$ .*

Из теоремы Брунса, однако, не следует, что точки расходимости ряда (10.2.33) также образуют всюду плотное множество, хотя точки сходимости образуют такое множество. Как оказывается, точки расходимости ряда (10.2.34) нарушают лишь равномерную сходимость рядов вида (10.2.33) (член  $Ct + E_0$  не рассматриваем). Подробности см. в [68], [69].

Рассуждения Брунса относятся к классической теории возмущений первого приближения, когда невозмущенная орбита суть кеплеровский эллипс. В этом случае  $k_1 n_1 + k_2 n_2$  не зависит от малого параметра  $\mu$  (см. § 1.03). При построении высших приближений или при построении решений в окрестности данного периодического решения знаменатели типа  $k_1 n_1 + k_2 n_2$  будут зависеть от  $\mu$  таким образом, что

$$\frac{1}{k_1 n_1 + k_2 n_2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^{k/2}, \quad (10.2.35)$$

причем радиус сходимости рядов (10.2.35) для некоторых наборов  $k_1$  и  $k_2$  будет сколь угодно мал.

Отсюда вытекает, что и в целом ряды, представляющие возмущения, будут степенными рядами относительно  $\sqrt{\mu}$ , расходящимися на оси  $\mu$ . Пуанкаре доказал [2], что такие ряды являются асимптотическими, так как

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{F - \Phi_s}{\mu^{s/2}} = 0 \quad (10.2.36)$$

для любого целого  $s > 0$ . В (10.2.36) через  $F$  обозначен весь бесконечный формальный ряд по степеням  $\sqrt{\mu}$ , через  $\Phi_s$  — сумма его первых  $s$  членов.

Желание многих астрономов построить теории движения небесных тел в «тригонометрической форме», подразумевая под этим представление позиционных переменных (большие полуоси, эксцентриситеты, наклоны и их аналоги) в виде сумм периодических функций времени, а угловых переменных (долготы, аномалии и их аналоги) — в виде сумм линейных функций времени и сумм периодических функций, привело к разработке общего метода построения решений канонических систем с периодическим по угловым переменным и аналитическим по  $\mu$  гамильтонианом, названного Пуанкаре «методом Линдштедта» [2]. Начало этого направления было положено Лапласом, а завершенное развитие его мы получили благодаря Пуанкаре.

Сущность этого метода такова. Пусть имеется каноническая система

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (10.2.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu) &= H_0(\mathbf{p}) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s H_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ H(\mathbf{p}, \mathbf{q} + (2\pi), \mu) &\equiv H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (10.2.38)$$

Решение системы (10.2.37) отыскиваем в виде

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + \mu p_i^{(1)} + \mu^2 p_i^{(2)} + \dots + \mu^s p_i^{(s)} + \dots, \\ q_i &= q_i^{(0)} + \mu q_i^{(1)} + \mu^2 q_i^{(2)} + \dots + \mu^s q_i^{(s)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.39)$$

причем коэффициентам разложений (10.2.39) заранее придаем форму

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(s)} &= \sum A \cos \alpha_s t + \sum B \sin \alpha_s t + C, \\ q_i^{(s)} &= \sum D \cos \alpha_s t + \sum E \sin \alpha_s t + Ft + K, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.40)$$

где  $A, B, \dots, K$  — величины, зависящие только от начальных данных,  $\alpha_s$  — величины, разлагаемые в ряды по степеням  $\mu$ .

Ньюкомб, Линдштедт и Пуанкаре детально разработали формальную сторону метода построения решений (10.2.39) как в случае общих канонических систем, так и в случае задачи

трех тел. Кроме того, Пуанкаре [2] исследовал вопросы сходимости рядов (10.2.39) и доказал, что из-за появления «малых знаменателей» вида

$$s_1 n_1 + s_2 n_2 + \dots + s_k n_k$$

( $n_1, n_2, \dots, n_k$  — средние движения планет в планетной задаче,  $s_1, s_2, \dots, s_k$  — целые числа) они, вообще говоря, расходятся. Но имея асимптотический характер, эти ряды с успехом могут применяться при изучении движений небесных тел на конечных интервалах времени, если их обрывать до появления в ряде первого малого знаменателя.

В заключение отметим, что вопросы сходимости (точнее, расходимости) рядов Линдштедта в ограниченной задаче трех тел изучены исчерпывающим образом Г. А. Мерманом [44].

### § 2.10. Теоремы Пуанкаре о ранге и классе возмущений

В § 8.01 ч. IV дано определение ранга и класса возмущений. Пуанкаре установил две теоремы о ранге и классе возмущений произвольного порядка в классической теории возмущений. Эти теоремы, по существу, указывают на асимптотический характер рядов теории возмущений не только в первом приближении. Они могут быть с успехом применены для оценки промежутка времени, на котором теория обеспечивает заданную точность при условии, что в рядах сохранено заданное число членов.

*Теорема Пуанкаре о ранге [70]. Если невозмущенные средние движения  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$  — в планетном варианте задачи  $k$  тел (задача о движении  $k-1$  планет) несоизмеримы, то:*

1) *в разложениях для возмущений канонических элементов Пуанкаре  $L_i, \lambda_i, \xi_j, \eta_j$  любого порядка отсутствуют члены, имеющие отрицательный ранг;*

2) *ранг каждого смешанного члена больше или равен единице;*

3) *возмущения  $\delta L_i$  не содержат членов нулевого ранга.*

Здесь  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, 2k-2$ . Относительно канонических элементов Пуанкаре см. ч. IV, § 2.08.

*Теорема Пуанкаре о классе. Если невозмущенные средние движения несоизмеримы, то:*

1) *класс каждого члена в возмущениях любого порядка элемента  $\lambda_i$  неотрицателен;*

2) *класс каждого члена в возмущениях любого порядка для элементов  $L_i, \xi_j, \eta_j$  не меньше 0,5.*

Обобщение теоремы Пуанкаре о ранге для переменных, являющихся ограниченными по времени и аналитическими функциями первой системы канонических элементов Пуанкаре, дано в [142].



**§ 2.11. Поиск частных, первых и общих интегралов заданной аналитической структуры обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ.**

Приложение к ограниченной задаче трех тел

Пусть имеется  $n$ -мерное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Y(x, y), \quad (10.2.41)$$

где  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  — точки  $n$ -мерного евклидова пространства  $R_n$ ,  $x$  — скалярная независимая переменная,  $x \in (-\infty, \infty)$ . Введем в рассмотрение  $(n+1)$ -мерное евклидово пространство

$$R_{n+1} = R_n \times (-\infty, \infty)$$

и обозначим через  $P_0$  множество начальных точек  $(x_0, y_0) \in R_{n+1}$ . Пусть, кроме того, все интегральные кривые, порожденные начальной областью  $P_0$  для всех  $x \geq x_0$ , составляют многообразие  $M(x, y(x))$ .

Очевидно,

$$P_0 \subset M \subset R_{n+1}.$$

Будем считать, что вектор  $Y$  удовлетворяет в  $M$  условиям теоремы Коши [104].

Наряду с уравнением (10.2.41) рассмотрим систему функциональных равенств

$$F_k(x, y; a_1, a_2, \dots, a_m) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s \leq n). \quad (10.2.42)$$

Пусть  $F_k(x, y; a_1, a_2, \dots, a_m)$  таковы, что при любом наборе вещественных параметров  $a_1, a_2, \dots, a_m$  они определены на многообразии  $M$  вместе со своими частными производными  $\frac{\partial F_k}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F_k}{\partial y}$  и имеют априори заданную аналитическую структуру, содержащую неизвестные параметры  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

Правомерна постановка следующих задач.

**Задача 1.** Пусть  $s = 1$ , и, следовательно, система (10.2.42) сводится к одному функциональному равенству с неизвестными параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Найти критерий, основанный на методах численного интегрирования, позволяющий утверждать, что равенство (10.2.42) является частным интегралом уравнения (10.2.41).

**Задача 2.** Ее формулировка подобна формулировке задачи 1 с той лишь разницей, что вместо частного интеграла отыскивается первый интеграл уравнения (10.2.41).

**Задача 3.** Пусть  $s = n$ . Найти критерий, позволяющий утверждать, что система  $n$  функциональных равенств (10.2.42) представляет общий интеграл уравнения (10.2.41).

Методы решения задач 1—3 изложены в [117]. Электронно-вычислительные машины используются для составления и решения функциональных уравнений, неизвестными в которых суть  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Эффективность этих методов целиком определяется возможностями математического обеспечения ЭВМ.

С помощью таких методов было доказано, в частности, что  $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2$  не может быть представлена [118] в виде отношения двух полиномов от тригонометрических и гиперболических функций  $\cos v, \sin v, \operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u$ , где  $u, v$  — эллиптические переменные (см. ч. V, §§ 2.07, 2.08).

### § 2.12. Поиск решений уравнения Гамильтона — Якоби на ЭВМ. Приложение к ограниченной задаче трех тел

Рассмотрим уравнение Гамильтона — Якоби для задачи с двумя степенями свободы вида

$$a_1(q_1, q_2) \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + a_2(q_1, q_2) \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + b_1(q_1, q_2) \frac{\partial W}{\partial q_1} + b_2(q_1, q_2) \frac{\partial W}{\partial q_2} + U(q_1, q_2) = h. \quad (10.2.43)$$

Оно может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^2 a_k(q_1, q_2) \left[\frac{\partial W}{\partial q_k} + f_k(q_1, q_2)\right]^2 = \Phi(q_1, q_2), \quad (10.2.44)$$

где

$$f_k = \frac{b_k}{2a_k}, \quad \Phi = h - U + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \frac{b_k^2}{a_k^2}. \quad (10.2.45)$$

С помощью обозначений

$$T_k = \frac{\partial W}{\partial q_k} + f_k(q_1, q_2) \quad (k = 1, 2) \quad (10.2.46)$$

уравнение (10.2.44) приводится к системе

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^2 a_k(q_1, q_2) T_k^2 &= \Phi(q_1, q_2), \\ \frac{\partial T_1}{\partial q_2} - \frac{\partial T_2}{\partial q_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.47)$$

Пусть функции  $T_k$  имеют априори заданную аналитическую структуру

$$T_k = F_k(q_1, q_2; a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_m^{(k)}) \quad (k = 1, 2) \quad (10.2.48)$$

с неизвестными параметрами  $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_m^{(k)}$ . Чтобы проверить гипотезу о существовании аналитической структуры для  $T_h$  вида (10.2.48), нами предложен метод [117], который сводится к решению методом Рунге — Кутты [119] системы обыкновенных дифференциальных уравнений (а не уравнений в частных производных) и к применению теоремы Гамильтона — Якоби (см. ч. IV, § 1.20). Как и в § 2.11, эффективность метода зависит от возможностей математического обеспечения ЭВМ.

В частности, было доказано, что частные производные  $\frac{\partial S}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial v}$ , входящие в уравнение Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной круговой задачи трех тел (5.2.56), не могут иметь следующие аналитические структуры:

а) в виде квадратных радикалов от полиномов относительно  $\cos v$ ,  $\sin v$ ,  $\operatorname{ch} u$ ,  $\operatorname{sh} u$  четвертой степени;

б) в виде сумм полиномов относительно  $\cos v$ ,  $\sin v$ ,  $\operatorname{ch} u$ ,  $\operatorname{sh} u$  второй степени и квадратных радикалов от таких же полиномов четвертой степени;

в) в виде сумм полиномов второй степени и квадратных радикалов от отношений полиномов шестой и четвертой степени [120].

**З а м е ч а н и е.** Методы поиска решений в буквенном виде на ЭВМ являются, строго говоря, не обоснованными, так как они сопровождаются многими ошибками. Они лишь служат средством прогноза в аналитических теориях. Однако они особенно эффективны, если уравнения имеют известные первые интегралы, используемые для контроля вычислений. Именно так обстоит дело в ограниченной круговой задаче трех тел, где имеется интеграл Якоби.

## ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Основная задача теории устойчивости движения — это установление критериев, позволяющих судить, будет ли данное движение устойчивым или неустойчивым. При этом понятия «устойчивость движения» или «устойчивость решения» трактовались в предшествующий период и трактуются в настоящее время по-разному. В хронологическом порядке, по-видимому, сначала появилось понятие «устойчивость по Лагранжу», далее «устойчивость по Пуассону», «устойчивость по Хиллу», «устойчивость по Якоби», «устойчивость по Ляпунову», «устойчивость на конечном промежутке времени», «устойчивость при постоянно действующих возмущениях» и др.

Хотя возраст теории устойчивости соразмерен с возрастом теории дифференциальных уравнений, лишь в 1892 г. благодаря Ляпунову она получила наиболее общую постановку и, главное, весьма мощные и математически строгие методы исследования. В приложениях постановка задачи об устойчивости движения, принадлежащая Ляпунову, и методы, созданные им, оказались весьма удачными и эффективными.

### § 3.01. Определение устойчивости по Ляпунову

Пусть имеется векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (10.3.01)$$

где  $n$ -мерная вектор-функция  $f(x, t)$  определена в  $(n + 1)$ -мерной области  $G_{n+1} = G_n \times I_t$ ,  $t \in I_t = (a, \infty)$ ,  $x \in G_n$ ,  $G_n$  — область в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ .

Пусть, далее, уравнение (10.3.01) допускает частное решение  $x = x(t)$ . Это решение, следуя Ляпунову, будем называть *невозмущенным*, а все другие — *возмущенными*.

Определение 1 [32]. Частное решение (невозмущенное движение)  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(t)$  называется *устойчивым по Ляпунову* по отношению к вектору  $\mathbf{x}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что выполняются следующие условия:

1) все решения  $\mathbf{x}(t)$  [в том числе и  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ], удовлетворяющие условию

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0)\| < \delta, \quad (10.3.02)$$

определены в бесконечном интервале  $t_0 \leq t < \infty$ ;

2) для этих решений справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t_0)\| < \varepsilon \quad (10.3.03)$$

при всех  $t_0 \leq t < \infty$ .

Здесь норма вектора  $\mathbf{x}(t)$  понимается как сумма модулей компонент  $\|\mathbf{x}(t)\| = \sum_{k=1}^n |\mathbf{x}_k(t)|$ .

Определение 2. Если  $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$  (не зависит от  $t_0 \in T$ ) и выполняются остальные условия определения 1, то решение  $\mathbf{x}(t)$  называется *равномерно устойчивым в области T*.

Определение 3. Решение  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  называется *асимптотически устойчивым при  $t \rightarrow \infty$* , если оно устойчиво и к тому же для любого  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\Delta = \Delta(t_0) > 0$  такое, что все решения  $\mathbf{x}(t)$ , удовлетворяющие начальному условию  $\|\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0)\| < \Delta$ , обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| = 0. \quad (10.3.04)$$

В частности, тривиальное решение  $\bar{\mathbf{x}}(t) \equiv 0$  *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0. \quad (10.3.05)$$

Определение 4.  $n$ -мерный шар  $\|\mathbf{x}\| < \Delta(t_0)$  при фиксированном  $t_0$  называется *областью притяжения положения равновесия — тривиального решения  $\bar{\mathbf{x}}(t) \equiv 0$* , изображаемого началом координат в системе  $Ox_1x_2 \dots x_n$ .

Определение 5. Пусть область  $G_n \equiv R^n$ . Если имеет место определение 3 и  $\Delta = \infty$ , то решение  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  называется *асимптотически устойчивым в целом*. Для асимптотически устойчивого в целом решения его областью притяжения является все пространство  $R^n$ .

Определение 6. Решение  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  называется *неустойчивым по Ляпунову*, если для некоторых  $\varepsilon \geq 0$ ,  $t_0 \in (a, \infty)$  и любого

$\delta > 0$  существует хотя бы одно решение  $x_\delta(t)$  и момент  $t_1 = t_1(\delta) > t_0$  такие, что

$$\|x_\delta(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta \quad \text{и} \quad \|x_\delta(t_1) - \bar{x}(t_1)\| \geq \varepsilon. \quad (10.3.06)$$

**Определение 7.** Решение  $\bar{x}(t)$  уравнения (10.3.01) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*  $F(t, y)$ , если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что при  $\|F(y, t)\| < \delta$  все решения  $y(t)$  векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) + F(y, t), \quad (10.3.07)$$

удовлетворяющие условию  $\|y(t_0)\| < \delta$ , определены в бесконечном интервале  $t \in [t_0, \infty)$  и к тому же

$$\|y(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \infty). \quad (10.3.08)$$

Аналогичные определения можно дать и для  $-\infty < t \leq t_0$ .

Ляпуновым разработаны два общих метода исследования на устойчивость решений дифференциальных уравнений, получившие в литературе название «первого метода Ляпунова» и «второго метода Ляпунова».

В § 3.05 приводятся основные теоремы Ляпунова. Эти выдающиеся результаты послужили источником для огромного количества работ по качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, аналитической и качественной небесной механике. Впервые они были опубликованы в докторской диссертации А. М. Ляпунова [7]. Укажем также на издания [8], [32], [71—73], содержащие подробное изложение как основных теорем Ляпунова, так и результатов многих его последователей.

### § 3.02. Определение орбитальной устойчивости

**Определение 1.** Если решение  $x(t)$  существует при  $a \leq t \leq b$ , то множество точек  $L = \{x(t); a \leq t \leq b\}$  называется *траекторией*.

**Определение 2.** *Положительной полутраекторией* называется множество точек  $L^+\{x(t); t_0 \leq t < \infty\}$ , *отрицательной полутраекторией* — множество точек  $L^-\{x(t); -\infty < t \leq t_0\}$ .

**Определение 3.** *Расстоянием* точки  $x \in R^n$  до некоторого множества  $L \subset R^n$  называется величина

$$\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\| \quad (10.3.09)$$

$[\rho(x, L)]$  — расстояние точки  $x$  до «ближайшей» точки множества  $L$ .

Определение 4. Решение  $\bar{x}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) уравнения (10.3.01) называется *орбитально устойчивым* при  $t \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что при

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta$$

выполняется неравенство  $\rho(x(t), \bar{L}^+) < \varepsilon$  при  $t_0 \leq t < \infty$ , где  $\bar{L}^+ = \{x(t), t_0 \leq t < \infty\}$ .

Если к тому же  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), \bar{L}^+) = 0$ , то решение *асимптотически орбитально устойчиво*.

З а м е ч а н и е. Из устойчивости решения вытекает его орбитальная устойчивость, но не наоборот.

### § 3.03. Другие определения устойчивости

Определение устойчивости по Лагранжу. Пусть  $G_n$  — область конечных размеров, принадлежащая  $n$ -мерному евклидову пространству  $R^n$ . Будем считать, что  $G_n$  имеет конечные размеры, если для любых  $x \in G_n$ ,  $y \in G_n$

$$\|x - y\| < C, \quad (10.3.10)$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

Частное решение  $\bar{x}(t)$  уравнения (10.3.01) называется *устойчивым по Лагранжу*, если выполнены условия

$$\bar{x}(t_0) \in G_n, \quad \bar{x}(t) \in G_n, \quad t \geq t_0. \quad (10.3.11)$$

Условия (10.3.11) означают ограниченность решения  $\bar{x}(t)$  для всех значений  $t \geq t_0$ .

*Область сплошной устойчивости по Лагранжу* — это область, состоящая только из траекторий, устойчивых по Лагранжу.

Определение устойчивости по Пуассону. Частное решение  $\bar{x}(t)$  уравнения (10.3.01) *устойчиво по Пуассону*, если точка  $M$ , описывающая траекторию, за бесконечное время проходит бесконечное число раз через сколь угодно малую окрестность начальной точки  $M_0$ .

Устойчивость по Пуассону траекторий получила большое развитие в теории динамических систем [41].

Определение устойчивости по Хиллу. Плоская ограниченная круговая задача трех тел имеет интеграл Якоби (5.2.07). Если постоянная интеграла Якоби  $C$  больше  $C(L_2)$  [ $C(L_2)$  — значение постоянной интеграла Якоби для точки либрации  $L_2$ ], то область возможности движения третьего тела

(рис. 115) состоит либо из одной овальной области, содержащей точки  $P_0$  и  $P_1$  [при  $C(L_2) < C < C(L_1)$ ], либо из двух овальных областей, одна из которых содержит тело  $P_0$ , а другая —  $P_1$  (при  $C^* > C(L_1)$ ), и области, внешней относительно кривой, расположенной за пределами всех точек либрации (кривая  $C^*$ ).

Если  $C > C(L_2)$  и начальная точка траектории находится в одной из этих овальных областей, то траектория называется *устойчивой по Хиллу*. В частности, таковыми являются спутниковые орбиты при  $t \in (-\infty, \infty)$  [для них  $C^* > C(L_1) > C(L_2)$ ].

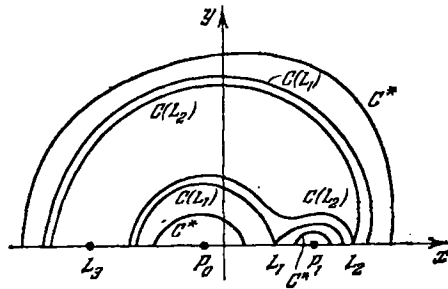


Рис. 115. Кривые Хилла нулевой скорости.

Определение устойчивости по Якоби. Пусть дана система дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= F_1\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= F_2\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right), \end{aligned} \right\} \quad (10.3.12)$$

обладающая «интегралом энергии»

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = F_3(x, y, h). \quad (10.3.13)$$

Пусть имеются два решения:

$$\bar{x} = x^{(0)}(t), \quad \bar{y} = y^{(0)}(t), \quad (10.3.14)$$

$$x = x^{(0)}(t) + \delta x(t); \quad y = y^{(0)}(t) + \delta y(t), \quad (10.3.15)$$

определяемые близкими начальными условиями и принадлежащими одному и тому же *изоэнергетическому семейству* (для них  $h$  одно и то же).

Траектория (10.3.14) называется *устойчивой в смысле Якоби*, если любая траектория (10.3.15) с возрастанием  $t$  сближается с первой (точнее, порядок величины расстояния между ними выше первого порядка малости).

Понятия устойчивости в смысле Хилла и Якоби специально приспособлены для исследования поведения решений ограниченной задачи трех тел.

Определение устойчивости по Хиллу и Якоби впервые встречается у Пуанкаре, однако наиболее корректные определения



и, главное, наиболее общие качественные результаты в проблеме трех тел, связанные с ними, содержатся в работах Дж. Биркгофа [74], Н. Д. Моисеева [75], [76] и В. В. Степанова [77].

В литературе встречаются различные определения устойчивости на конечном промежутке времени, и интересующемуся читателю можно указать работу [78].

### § 3.04. Знакопостоянные и знакоопределенные функции.

#### Полная производная в силу системы

Рассмотрим полицилиндр  $K = \{T < t < \infty, \|x\| < a\}$  в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $G_{n+1} = G_n \times I_t$ ,  $G_n$  есть  $n$ -мерное евклидово пространство,  $I_t = (-\infty < t < \infty)$ . Пусть вещественная непрерывная скалярная функция  $V(x, t)$  задана в  $K$ .

Определение 1 [32].  $V(x, t)$  называется *знакопостоянной* (знакопостоянно положительной или знакопостоянно отрицательной) в  $K$ , если

$$V(x, t) \geq 0 \quad (\text{или } V(x, t) \leq 0)$$

при  $(x, t) \in K$ .

Определение 2.  $V(x, t)$  называется *знакоопределенно положительной* в  $K$ , если существует непрерывная функция  $W(x)$  при  $\|x\| < a$  такая, что

$$\begin{aligned} V(x, t) &\geq W(x) > 0 \quad \text{при } \|x\| \neq 0, \\ V(0, t) &= W(0) = 0. \end{aligned}$$

Определение 3.  $V(x, t)$  называется *знакоопределенно отрицательной* в  $K$ , если существует непрерывная функция  $W(x)$  при  $\|x\| < a$  такая, что

$$\begin{aligned} V(x, t) &\leq -W(x) < 0 \quad \text{при } \|x\| \neq 0, \\ V(0, t) &= W(0) = 0. \end{aligned}$$

Определение 4 [7]. Функция  $V(x, t)$  имеет *бесконечно малый высший предел* при  $x \rightarrow 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$|V(x, t)| < \varepsilon$$

при  $\|x\| < \delta$  и  $t \in [t_0, \infty)$ , где  $t_0 > T$ .

Из определения 4 следует, что  $V(x, t)$ , допускающая бесконечно малый высший предел при  $x \rightarrow 0$ , ограничена в полицилиндре  $K_0 = \{t_0 \leq t < \infty, \|x\| < a\} \subset K$ .

Пусть имеется система  $n$  дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t) \quad (10.3.16)$$

такая, что  $X(0, t) \equiv 0$  и вектор-функция  $X(x, t)$  непрерывна вместе с частными производными первого порядка в цилиндре  $K^* = \{T < t < \infty, \|x\| < A, A > a\}$ , т. е.  $K \subset K^*$ . Очевидно, что уравнение (10.3.16) допускает тривиальное решение  $\bar{x} = 0$ . Будем его называть *невозмущенным движением*, а всякое другое решение — *возмущенным движением*.

Если система (10.3.16) имеет частное решение  $x^*(t)$ , то с помощью замены

$$z(t) = x(t) - x^*(t)$$

она преобразуется в систему

$$\frac{dz}{dt} = Z(z, t), \quad Z(z, t) = X(x^* + z, t) - X(x^*, t),$$

имеющую тривиальное решение  $z(t) \equiv 0$ .

Отсюда следует, что задача об устойчивости произвольного частного решения эквивалентна задаче об устойчивости тривиального решения.

Пусть, кроме того, вещественная функция  $V(x, t)$  непрерывна вместе с частными производными первого порядка в цилиндре  $K$ .

**О п р е д е л е н и е 5 [7].** Функция  $\dot{V}(x, t)$ , определяемая равенством

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x, t) \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad } V, X), \quad (10.3.17)$$

называется *полной производной по времени  $t$  функции  $V(x, t)$  в силу системы (10.3.16)*.

### § 3.05. Теоремы Ляпунова об устойчивости

**Первая теорема.** Если существует в  $K$  знакоопределенно положительная функция  $V(x, t)$  такая, что ее полная производная  $\dot{V}(x, t)$  по  $t$  в силу системы (10.3.16) является знакопостоянно отрицательной, то ее тривиальное решение  $\bar{x} = 0$  устойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Вторая теорема.** Если существует в  $K$  знакоопределенно положительная функция  $V(x, t)$ , допускающая бесконечно малый высший предел при  $x \rightarrow 0$  и такая, что ее полная производная  $\dot{V}(x, t)$  по  $t$  в силу системы (10.3.16) является знакоопределенно отрицательной, то ее тривиальное решение  $\bar{x} = 0$  асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow \infty$ .

**Третья теорема.** Пусть в  $K$   $V(x, t)$  допускает бесконечно малый высший предел при  $x \rightarrow 0$  и имеет знакоопределенную

производную  $\dot{V}(x, t)$  по  $t$  в силу системы (10.3.16). Если при некотором  $t_0 > T$  в любой окрестности  $\|x\| < \Delta \leq a$  найдется точка  $(x_0, t_0)$ , в которой выполняется неравенство

$$V(x_0, t_0) \cdot \dot{V}(x_0, t_0) > 0, \quad (10.3.18)$$

то тривиальное решение  $\bar{x} = 0$  системы (10.3.16) неустойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow \infty$ .

**Замечание 1.** Во всех теоремах область определения функции  $X(x, t)$ , вообще говоря, больше области определения функции  $V(x, t)$ . Это условие задано включением  $K \subset K^*$ .

**Замечание 2.** В третьей теореме  $V(x, t)$  не обязательно знакоопределенная функция.

**Замечание 3.** Как заметил Н. Г. Четаев [71], для того чтобы тривиальное решение  $\bar{x} = 0$  было неустойчивым, достаточно наличия хотя бы одного решения, исходящего из каждой, сколь угодно малой окрестности начала  $x = 0$  и выходящего за пределы фиксированной окрестности. Тем самым условия третьей теоремы Ляпунова могут быть ослаблены, что и сделал Н. Г. Четаев (см. теорему Четаева в [32], [71]).

Пусть

$$X(x, t) = Ax + \varphi(x, t), \quad (10.3.19)$$

где  $A$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица, и вектор-функция  $\varphi(x, t)$  такова, что  $\frac{\varphi(x, t)}{\|x\|}$  при  $x \rightarrow 0$  стремится к нулю равномерно по  $t$ .

Тогда справедлива следующая теорема, составляющая основу первого метода Ляпунова.

**Теорема.** Если все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части, то тривиальное решение  $\bar{x} = 0$  системы (10.3.16) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow +\infty$ .

### § 3.06. Устойчивость по отношению к части переменных.

#### Теорема В. В. Румянцева

Рассмотрим  $k$ -мерный вектор  $\Phi(x, t)$  ( $k \leq n$ ) и обозначим через  $y$  вектор

$$y = \Phi(x, t) - \Phi(0, t). \quad (10.3.20)$$

**Определение.** Тривиальное решение  $\bar{x} = 0$  называется устойчивым в смысле Ляпунова по отношению к вектору  $\Phi$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при любых начальных нормах, удовлетворяющих условию

$$\|x^{(0)}\| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\|y(t)\| < \varepsilon$$

при всех  $t \geq t_0$ .

Если  $k = n$ , то предыдущее определение сводится к определению 1 из § 3.01.

Такое определение известно в литературе как определение устойчивости по части переменных. Действительно, если вектор  $\Phi$  имеет компоненты  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $k < n$ ), то тогда речь идет об устойчивости лишь  $k$  компонент вектора  $x = 0$ . Пусть вектор  $y$  имеет компоненты  $x_1, \dots, x_k$ .

**Теорема В. В. Румянцева [123].** *Если существует знакоопределенная по отношению к вектору  $y$  функция  $V(x, t)$ , полная производная  $\dot{V}(x, t)$  по  $t$  которой в силу системы (10.3.16) является знакопостоянной функцией противоположного с  $V$  знака, или тождественно равна нулю, то тривиальное решение  $x = 0$  устойчиво по отношению к вектору  $y$ .*

Определение знакопостоянной и знакоопределенной по отношению к части переменных функции  $V(x, t)$  можно найти в [87], [123].

### § 3.07. Связка первых интегралов. Способ Н. Г. Четаева

Пусть система (10.3.16) имеет  $s \leq n$  известных первых интегралов

$$F_i(x) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (10.3.21)$$

Рассмотрим дифференцируемую функцию

$$V = V(F_1, F_2, \dots, F_s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (10.3.22)$$

зависящую от некоторых неопределенных постоянных параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , подбираемых таким образом, чтобы функция  $V$  была бы знакоопределенной. Очевидно, что в силу уравнений всегда  $\dot{V} = 0$ , поэтому если  $V$  является знакоопределенной, то отсюда вытекает устойчивость исследуемого решения  $x = 0$  (заметим, что здесь вектор  $x$  означает «возмущения»). В конкретных примерах основная задача состоит в выборе параметров  $\lambda_i$ , чтобы  $V$  была бы знакоопределенной. Изложенный способ предложен Н. Г. Четаевым [124] и оказался весьма эффективным в различных разделах механики, в частности в небесной механике и астродинамике. Довольно часто зависимость (10.3.22) имеет линейный вид относительно параметров  $\lambda_i$ , и эти параметры выбираются таким образом [125], чтобы разложение  $V$  в окрестности  $x = 0$  начиналось с квадратичной формы. Если построенная функция  $V$  является знакоопределенной, то тривиальное решение  $x = 0$  устойчиво, так как  $\dot{V} = 0$ .

### § 3.08. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема И. Г. Малкина

Пусть в полицилиндре  $K^* = \{T < t < \infty, \|y\| < A\}$  наряду с системой (10.3.16) задана система  $n$  дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = X(y, t) + R(y, t), \quad (10.3.23)$$

где вектор-функция  $R(y, t)$  характеризует постоянно действующие возмущающие факторы. В отличие от  $X(x, t)$ , которая тождественно равна нулю при  $x = 0$ ,  $R(y, t)$  может и не обращаться тождественно в нуль при  $y = 0$ .

**О п р е д е л е н и е.** Тривиальное решение  $x = 0$  системы (10.3.16) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta_1(\varepsilon)$  и  $\delta_2(\varepsilon)$  такие, что всякое решение  $y$  системы (10.3.23), для которого начальная норма  $\|y^{(0)}\|$  удовлетворяет условию

$$\|y^{(0)}\| < \delta_1(\varepsilon)$$

при любом векторе  $R(y, t)$ , удовлетворяющем в полицилиндре  $\{t_0 \leq t < \infty, \|y\| < \varepsilon\}$ , условию

$$\|R(y, t)\| < \delta_2(\varepsilon),$$

само удовлетворяет при всех  $t > t_0$  неравенству

$$\|y(t, y^{(0)}, t_0)\| < \varepsilon.$$

Впервые определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях было дано в статье Г. Н. Дубошина [126].

**Т е о р е м а** И. Г. М а л к и н а [72]. *Если для системы (10.3.16) существует знакоопределенно положительная функция  $V(x, t)$ , полная производная по  $t$  которой  $\dot{V}(x, t)$  в силу системы (10.3.16) является знакоопределенно отрицательной и если в полицилиндре  $K^*$  норма  $\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|$  ограничена, то тривиальное решение  $x = 0$  устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Г. Н. Дубошиным [126] было дано первое общепринятое определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях и рассмотрены некоторые, весьма важные в приложениях, случаи теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, когда возмущающие факторы  $R(y, t)$  голоморфны по  $y$  и не зависят от  $t$ .

### § 3.09. Теоремы Лапласа — Лагранжа и Пуассона об отсутствии вековых возмущений больших полуосей

Теорема Лапласа — Лагранжа [59]. Если невозмущенные средние движения планет в планетном варианте задачи  $N$  тел несоизмеримы, то большие полуоси планетных орбит ( $a$ , следовательно, средние движения и канонические элементы  $L$ ) не содержат вековых возмущений первого порядка относительно возмущающих масс.

Теорема Пуассона [59]. Если невозмущенные средние движения планет несоизмеримы, то возмущения второго порядка (относительно возмущающих масс) больших полуосей не имеют вековых членов.

Исследования возмущений третьего порядка больших полуосей показали, что они содержат вековые возмущения [79].

Теоремы Лапласа — Лагранжа и Пуассона указывают лишь на устойчивость в смысле Лагранжа (см. § 3.03) планетных орбит на конечном промежутке времени. Чем меньше возмущающие массы, тем больше этот промежуток.

### § 3.10. Теоремы об устойчивости планетных орбит

Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов, положенные в основу теории вековых возмущений Лагранжа (см. ч. IV, § 8.03), которые получаются из общих уравнений для оскулирующих элементов в результате замены возмущающей функции ее вековой частью (см. ч. IV, § 6.04) с точностью до величин второго порядка малости (относительно эксцентриситетов и наклонов), имеют первые интегралы

$$\sum_{k=1}^{n-1} m_k n_k a_k^2 e_k^2 = C_1, \quad (10.3.24)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} m_k n_k a_k^2 \operatorname{tg}^2 i_k = C_2. \quad (10.3.25)$$

Здесь рассматривается планетный вариант задачи  $n$  тел ( $n-1$  планета и центральное тело),  $m_k$ ,  $n_k$  — масса и среднее движение  $k$ -й планеты,  $a_k$ ,  $e_k$  — большая полуось и эксцентриситет ее орбиты,  $i_k$  — наклон  $k$ -й планеты относительно плоскости Лапласа (см. ч. IV, § 1.01). Интегралы (10.3.24) и (10.3.25) впервые были найдены Лапласом.

Анализируя эти интегралы, Лаплас доказал теорему об «устойчивости» планетных орбит в первом приближении.

*Теорема Лапласа. Пусть выполняются следующие условия:*

1) *движение всех планет происходит в одном направлении (каждое слагаемое в интегралах (10.3.24) и (10.3.25) положительно);*

2) *массы всех планет  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) одного порядка;*

3) *большие полуоси орбит  $a_k$  являются колеблющимися и ограниченными функциями времени  $t \in (t_0, T)$ , мало изменяющимися около некоторых средних значений;*

4) *в некоторый начальный момент времени  $t_0$  все эксцентриситеты и наклоны  $e_k(t_0)$ ,  $i_k(t_0)$  малы.*

*Тогда  $e_k(t)$  и  $i_k(t)$  являются малыми функциями для всех  $t \in (t_0, T)$ .*

Теорема Лапласа, конечно, не позволяет сделать вывод о том, что гипотетическая планетная система (и, в частности, Солнечная система) устойчива в смысле Лагранжа для  $t \in (t_0, \infty)$ , так как, во-первых, строго не известно, выполняется ли условие 3) для всех  $t \in (t_0, \infty)$  [известно лишь, что в первом и во втором приближении большие полуоси не имеют вековых возмущений (см. § 3.09)], а во-вторых, интегралы (10.3.24) и (10.3.25) являются интегралами приближенных уравнений.

Теорема Лапласа в сочетании с теорией вековых возмущений второго порядка позволяет лишь утверждать, что на конечном хотя, быть может, и весьма большом промежутке времени (тем большем, чем меньше массы планет) движение планет имеет условно-периодический характер. Такие движения Арнольд назвал *лагранжевыми движениями в планетной задаче* [36] (они, естественно, отличны от лагранжевых равновесных решений). Существенное добавление к решению проблемы устойчивости принадлежит Арнольду.

*Теорема Арнольда [80]. Если массы планет, эксцентриситеты и наклоны их орбит достаточно малы при некотором  $t = t_0$ , то для большинства начальных условий движение планет имеет условно-периодический характер для всех вещественных значений времени  $-\infty < t < \infty$  и мало отличается от лагранжева движения с подходящими начальными условиями.*

Условно-периодические решения порождаются начальными условиями, принадлежащими области  $F_\delta$ , определенной формулой (10.1.53). Для начальных условий, принадлежащих области  $f_\delta = F \setminus F_\delta$  [ $F$  — область, в которой происходит движение планет, определена формулой (10.1.44)], вопрос о существовании условно-периодических движений остается открытым. Правда, при этом мера  $f_\delta$  может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с мерой  $F_\delta$ .

Таким образом, теорема Арнольда позволяет утверждать, что *движения в планетной задаче устойчивы в смысле Лагранжа для большинства начальных условий не только в первом, но и в любом приближении.*

Если определить *вероятность устойчивости* в смысле Лагранжа планетной системы как

$$P = \frac{\text{mes } F_\delta}{\text{mes } F}, \quad (10.3.26)$$

то можно утверждать, что движение планет устойчиво с вероятностью  $P$ , сколь угодно близкой к единице.

**З а м е ч а н и е 1.**  $P = 1$  не влечет за собой устойчивость в смысле Лагранжа планетной системы, так как в этом случае остается множество меры нуль, которое может, вообще говоря, порождать неограниченные движения.

**З а м е ч а н и е 2.** Теорема Арнольда доказывается при условии, что области, в которых происходит движение каждой планеты, не пересекаются. Это условие необходимо и в классической теории возмущений.

### § 3.11. Теоремы Арнольда об устойчивости решения гамильтоновой системы в общем эллиптическом случае

Арнольд установил общие теоремы об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем в общем эллиптическом случае [80], которые оказались эффективными при исследовании устойчивости лагранжевых треугольных решений.

Пусть имеется гамильтонова система с одной степенью свободы

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (10.3.27)$$

где гамильтониан представляется формулой

$$H(p, q, t) = \lambda r + \sum_{l=2}^n c_l r^l + \tilde{H}(p, q, t), \quad (10.3.28)$$

$$r = \frac{p^2 + q^2}{2}, \quad (10.3.29)$$

$$\tilde{H}(p, q, t) = O(r^{n+1}). \quad (10.3.30)$$

$H(p, q, t)$  предполагается аналитической по  $p, q, t$  и  $2\pi$ -периодической по  $t$ .

Уравнения (10.3.27) имеют тривиальное решение (положение равновесия)

$$p = q = 0. \quad (10.3.31)$$



**Определение.** *Общим эллиптическим случаем для гамильтониана (10.3.28) называется случай, когда среди постоянных  $c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$  ( $n$  может быть сколь угодно большим) есть отличные от нуля.*

Пусть  $\lambda$  — некоторое иррациональное число. Обозначим через  $\Lambda_k$  множество таких иррациональных чисел  $\lambda$ , для которых выполняется неравенство

$$|\lambda n - m| > \frac{k}{(m+n)^2} \quad (10.3.32)$$

при всех целых  $m > 0, n > 0$ . Пусть, кроме того,  $\Lambda$  является объединением точек плотности всех множеств  $\Lambda_k$ . Множество всех вещественных чисел, не принадлежащих  $\Lambda$ , имеет меру нуль.

**Теорема 1.** *Если  $\lambda \in \Lambda$ , то тривиальное решение (10.3.31)  $p = q = 0$  системы (10.3.27) с гамильтонианом  $H(p, q, t)$  общего эллиптического типа (10.3.28) устойчиво в смысле Ляпунова.*

Пусть теперь имеется автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.33)$$

**Определение.** Если гамильтониан  $H(p_1, p_2, q_1, q_2)$  представим в виде

$$\left. \begin{aligned} H(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + H_0(r_1, r_2) + \tilde{H}(p_1, p_2, q_1, q_2), \\ H_0(r_1, r_2) &= \sum_{l_1+l_2=2}^n c_{l_1, l_2} r_1^{l_1} r_2^{l_2}, \quad \tilde{H} = O((r_1 + r_2)^{n+1}), \end{aligned} \right\} \quad (10.3.34)$$

причем

$$h(\epsilon) = H_0(\epsilon \lambda_2, -\epsilon \lambda_1) \neq 0, \quad (10.3.35)$$

то такой случай, согласно определению Арнольда, называется *общим эллиптическим случаем для гамильтоновой системы с двумя степенями свободы*. Для случая  $n$  степеней свободы Арнольд дает определение общего эллиптического случая в работе [36]. Гамильтониан, приведенный в § 1.07, принадлежит к общему эллиптическому типу.

**Теорема 2.** *Тривиальное решение  $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$  (положение равновесия) автономной системы (10.3.33) с гамильтонианом  $H(p_1, p_2, q_1, q_2)$  в общем эллиптическом случае устойчиво в смысле Ляпунова, если  $\lambda_2/\lambda_1 \in \Lambda$ .*

Получены также некоторые результаты по устойчивости автономных систем общего вида с внутренним резонансом частот [144]—[147]

### § 3.12. Устойчивость лагранжевых равновесных решений задачи трех тел

Лагранжевы решения неограниченной задачи трех тел неустойчивы в смысле определения 1 (§ 3.01). Действительно, если рассматривать некоторое частное решение неограниченной задачи трех тел, определенное начальными условиями, близкими к лагранжевым, то для этих начальных данных центр масс системы будет двигаться в неподвижной системе координат со скоростью, отличной от скорости, определенной лагранжевыми начальными данными. А это приводит к тому, что по истечении некоторого конечного промежутка времени точки, изображающие возмущенное движение, будут находиться на достаточно большом расстоянии от точек, изображающих лагранжево движение в абсолютной системе координат.

В связи с этим Раус [81] ставит и решает в первом приближении вопрос об устойчивости постоянной треугольной конфигурации, образованной тремя телами. Другими словами, решается задача об орбитальной устойчивости периодического лагранжева решения.

Позднее Ляпунов доказал более общий результат [64], что если масса одной из точек достаточно велика по сравнению с массами двух других тел, то треугольник Лагранжа в задаче трех тел устойчив в первом приближении при условии, что эксцентриситеты орбит меньше единицы.

Когда эксцентриситеты орбит близки к нулю, лагранжев треугольник устойчив в первом приближении, если массы трех тел  $m_0, m_1, m_2$  удовлетворяют условию

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2} > 27. \quad (10.3.36)$$

**З а м е ч а н и е.** Устойчивость в первом приближении лагранжева треугольника в ограниченной круговой задаче трех тел имеет место при выполнении условия

$$\frac{(m_0 + m_1)^2}{m_0 m_1} > 27, \quad (10.3.37)$$

получающегося из (10.3.36) при  $m_2 = 0$ . Условие (10.3.37) в точности совпадает с условиями (5.2.41) и (5.2.42).

Существенно, что при выполнении условия (10.3.37) можно говорить не только об устойчивости конфигурации, образованной тремя телами, одно из которых имеет нулевую массу, но и об устойчивости треугольных лагранжевых решений в первом приближении в смысле определения 1 (§ 3.01).

Усилия многих исследователей были направлены на то, чтобы исследовать устойчивость треугольных лагранжевых решений ограниченной круговой задачи трех тел не только в первом

приближении. Однако до появления работы Арнольда [80] все попытки оказались тщетными. Так как уравнения ограниченной задачи гамильтоновы, то отсюда следует [41], что в первом приближении устойчивость имеет место только в том случае, когда все собственные значения матрицы линейного приближения [59] имеют нулевые вещественные части [41] (см. ч. V, § 2.05). Это — особый случай в теории устойчивости (по терминологии Ляпунова), так как учет малых членов высшего порядка может существенно изменить поведение решений в окрестности лагранжевых решений.

А. М. Леонтович, опираясь на общие теоремы Арнольда (см. § 3.11), доказал, что для всех значений масс  $m_0$  и  $m_1$ , удовлетворяющих условию (10.3.37), кроме, быть может, множества лебеговой меры нуль, лагранжево треугольное решение ограниченной круговой задачи трех тел устойчиво [82].

Корни характеристического уравнения (5.2.40) выражаются равенствами

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad (10.3.38)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad (10.3.39)$$

а условие (10.3.37) в обозначениях  $m_0 = 1 - \mu$  и  $m_1 = \mu$  — записывается в виде

$$27\mu(1 - \mu) < 1. \quad (10.3.40)$$

Пользуясь формулами (10.3.38) — (10.3.40), результат Леонтовича можно сформулировать также следующим образом:

*либрационные решения  $L_4$  и  $L_5$  плоской ограниченной круговой задачи трех тел устойчивы в смысле Ляпунова, если  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$  (для любых целых чисел  $k_1$  и  $k_2$ ) и  $\Phi \equiv \alpha\lambda_1^2 - \beta\lambda_1\lambda_2 + \gamma\lambda_2^2 \neq 0$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные коэффициенты [82]).*

Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (или отношение  $\lambda_1/\lambda_2$ ), удовлетворяющие противоположному условию

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 0, \quad (10.3.41)$$

образуют множество меры нуль. Таким значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствует множество значений  $\mu$  меры нуль, удовлетворяющих неравенству (10.3.40).

Ю. Мозер показал, что условие « $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$  для любых целых чисел  $k_1$  и  $k_2$ » может быть заменено менее жестким условием « $k_1\lambda + k_2\lambda_2 \neq 0$  для значений  $k_1$  и  $k_2$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$ ».

Таким образом, результаты Леонтовича и Мозера утверждают, что *треугольные лагранжевы решения плоской ограни-*

ченной круговой задачи трех тел устойчивы для всех значений  $\mu$ , удовлетворяющих неравенству (10.3.40), кроме, быть может, трех значений, подчиняющихся условиям

$$\left. \begin{aligned} k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 0, \quad 0 < |k_1| + |k_2| \leq 4, \\ \alpha\lambda_1^2 - \beta\lambda_1\lambda_2 + \gamma\lambda_2^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.42)$$

Существуют лишь три таких значения  $\mu$ :

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{611}{675}} \right), \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{71}{75}} \right), \quad \mu_3 \approx 0,01091367. \quad (10.3.43)$$

Исследование устойчивости лагранжевых решений для этих значений  $\mu$  выполнено в работах А. П. Маркеева [83], [84], [127].

Комбинируя метод преобразований Биркгофа гамильтоновой системы к нормальной форме [41] с теоремами Ляпунова о неустойчивости (см. § 3.05) и со способом Четаева (см. § 3.07), А. П. Маркеев доказал, что при значениях  $\mu$ , равных  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (10.3.43), лагранжевы треугольные решения (точки либрации  $L_4$  и  $L_5$ ) плоской ограниченной круговой задачи трех тел неустойчивы, а при  $\mu = \mu_3$  эти решения устойчивы.

Работа [127] полностью исчерпала проблему устойчивости треугольных лагранжевых решений в плоской ограниченной круговой задаче трех тел. В [128] А. П. Маркеев исследовал устойчивость треугольных равновесных решений в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел. Им доказано, что для большинства начальных условий (в смысле меры Лебега) при всех значениях  $\mu$ , удовлетворяющих условию (10.3.40), кроме двух значений,  $\mu = \mu_1$ ,  $\mu = \mu_2$  из совокупности (10.3.43), треугольные точки либрации устойчивы. При  $\mu = \mu_1$  и  $\mu = \mu_2$  имеет место неустойчивость.

Отметим существенное отличие в поведении условно-периодических решений в окрестности  $L_4$  и  $L_5$ . В плоском случае любая точка из достаточно малой окрестности  $L_4$  и  $L_5$  при всех значениях  $\mu$ , удовлетворяющих условию  $27\mu(1-\mu) < 1$ , кроме двух ( $\mu = \mu_1$ ,  $\mu = \mu_2$ ), порождает условно-периодическое решение. Другими словами, точки  $L_4$  и  $L_5$  устойчивы в смысле Ляпунова. В пространственной задаче большинство точек (но не все) из достаточно малой окрестности точек либрации порождают условно-периодические решения. Неясно, имеют ли условно-периодический характер решения, порождаемые точками, принадлежащими множеству малой (в смысле Лебега) меры, поэтому говорить об устойчивости по Ляпунову (или о неустойчивости) треугольных точек либрации в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел преждевременно.

Уравнения первого приближения (уравнения в вариациях) для исследования окрестности точек либрации  $L_4$  и  $L_5$  ограниченной эллиптической задачи трех тел составляют линейную систему с  $2\pi$ -периодическими (относительно истинной аномалии возмущающих тел) функциями, поэтому даже в первом приближении вопрос об их устойчивости представляется весьма сложным. Для близкого к единице эксцентриситета орбит возмущающих масс точки либрации  $L_4$  и  $L_5$  неустойчивы в смысле Ляпунова [85]. Здесь же сформулирована теорема об устойчивости, которая оказывается верной лишь с точностью до первой степени эксцентриситета орбит возмущающих масс. Этот результат согласуется с результатами исследования Ляпунова [64]. В дальнейшем многие исследователи [86], [129], [130], [131] и др., пользуясь аналитическими или численными методами, строили области устойчивости и неустойчивости на плоскости параметров  $\mu$ ,  $e$  ( $\mu$  — малая возмущающая масса,  $e$  — эксцентриситет ее орбиты) для линеаризованной системы уравнений (уравнений первого приближения). В нелинейной постановке при малых  $e$  А. П. Маркеевым [132] получены утверждения об устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, формальной устойчивости и неустойчивости по Ляпунову в зависимости от значений параметров  $\mu$  и  $e$ .

### § 3.13. Устойчивость других решений задачи трех тел

Пуанкаре в «Новых методах» [2] доказал, что *решения плоской ограниченной круговой задачи трех тел, устойчивые в смысле Хилла (см. § 3.03), будут устойчивыми по Пуассону и, следовательно, обладают свойством возвращаемости в любую сколь угодно малую окрестность начальной точки.*

Устойчивость по Пуассону свойственна и для других законов тяготения [2], отличных от ньютоновского, если рассматривается плоская ограниченная задача и существует интеграл энергии. В неограниченной задаче трех тел свойство траекторий быть устойчивым по Пуассону в общем не сохраняется.

Н. Д. Моисеевым построены [28], [29] области сплошной устойчивости и неустойчивости в плоской ограниченной круговой задаче трех тел с помощью критерия Уиттекера.

Существенные результаты по устойчивости решений гамильтоновых систем, к которым относится и ограниченная круговая задача трех тел (плоская и пространственная), принадлежат В. Г. Демину [87]. Им доказано, что в случае спутниковых орбит или в случае орбит, охватывающих обе притягивающие массы, гамильтоновы уравнения ограниченной задачи трех тел, путем замены переменных, можно привести к «невыврожденному случаю» (хотя первоначальная задача является вырожденной) и

к ним, следовательно, применима теорема Арнольда об устойчивости в эллиптическом случае (см. § 3.11). Таким образом, В. Г. Деминым доказано, что *периодические и условно-периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел спутникового типа или охватывающие обе притягивающие массы орбитально устойчивы (устойчивы относительно всех кеплеровских элементов, кроме средней аномалии).*

### § 3.14. Устойчивость орбитальных движений искусственных спутников

Исследованию устойчивости движения спутников в последние годы уделяется большое внимание. Работы по этой проблеме можно разделить на две группы:

- 1) исследование устойчивости движения центра масс (орбитального движения) спутников;
- 2) исследование устойчивости движения спутника относительно центра масс.

Второе направление обсуждается в части IX. Мы коснемся работ, примыкающих к первому направлению.

Известно [20], [47], [71], [87], [133], что спутниковая задача с осесимметричным гравитационным полем допускает круговые решения. В. Г. Деминым получены [87], [134] необходимые и достаточные условия устойчивости таких орбит материальной точки (спутника). Необходимые условия получены с помощью теоремы Ляпунова «первого метода» (§ 3.05). Достаточные условия получены с помощью способа Четаева (§ 3.07) образования линейной, относительно параметров  $\lambda_i$  (§ 3.07), и квадратичной, относительно первых интегралов, связки (задача имеет два известных первых интеграла [87]), т. е. функция Ляпунова отыскивается в виде

$$V = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_1^2 + F_2, \quad (10.3.44)$$

где  $F_1, F_2$  — левые части интегралов площадей и энергии (см. (4.1.23), (4.1.24)), записанные в цилиндрических переменных  $\rho, \lambda, z$ .

Если постоянно действующие факторы  $R(y, t)$  (§ 3.08) малы и не зависят от долготы, т. е.

$$R(y, t) = \mu \Phi(\rho, z, \mu),$$

то устойчивость круговых орбит не нарушается при достаточно малых по модулю значениях параметра  $\mu$ . Другими словами, зональные гармоники в разложении потенциала центрального тела (см. ч. IV, гл. 5 и ч. VI) не нарушают устойчивости круговых орбит, если только разложение потенциала сходится «достаточно быстро».

Обобщенная задача двух неподвижных центров (см. ч. VI) также допускает круговые орбиты. Их устойчивость при постоянно действующих возмущениях исследована в работах [135], [136], [137], а для случая предельного варианта задачи двух неподвижных центров в [138]. Названная задача допускает в качестве частных решений так называемые «эллипсоидальные и гиперболоидальные орбиты» [47]. Эти орбиты лежат на эллипсоиде или на гиперboloиде вращения. Первые располагаются между двумя параллелями, и если являются периодическими, то после некоторого числа оборотов замыкаются, в противном случае имеем обмотку части эллипсоида. Гиперболоидальные траектории не являются спутниковыми орбитами, так как при  $t \rightarrow \pm \infty$  материальная точка удаляется на бесконечность. С помощью связи интегралов В. Г. Демин [87] показал, что эллипсоидальные орбиты устойчивы по отношению к большой полуоси и эксцентриситету эллипсоида и гиперболоида, на которых происходит движение спутника. Устойчивость движения стационарных (или суточных) спутников рассмотрена в [89], [137].

Если спутник имеет стреловидную форму, а центральное тело суть шар со сферическим распределением плотности, то такая задача, в частности, допускает частные решения, в которых центр масс движется по круговой орбите вокруг шара.

Г. Н. Дубошиным не только найдены частные решения в этой задаче [139], но и изучена их устойчивость. Доказано [87], [139], что круговые орбиты центра масс стреловидного спутника устойчивы по отношению к цилиндрическим переменным и их производным  $\rho$ ,  $z$ ,  $|\dot{\rho}|$ ,  $|\dot{z}|$ ,  $|\dot{\lambda}|$  при наличии постоянно действующих возмущений, обусловленных формой спутника, если предположить, что длина спутника достаточно мала.

В заключение отметим, что многие, не затронутые здесь, вопросы устойчивости орбитальных движений изложены в монографиях В. Г. Демина [87] и В. В. Румянцева [89].

#### ЛИТЕРАТУРА К ЧАСТИ X

1. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961.
2. Пуанкаре А., Избранные труды, т. I, «Наука», 1971; т. II, «Наука», 1972.
3. Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.
4. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
5. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
6. Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, ИЛ, 1959.
7. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
8. Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, Изд-во МГУ, 1952.

9. Каменков Г. В., Тр. Университета дружбы народов 15, вып. III, сер. теор. мех., 3, 1966.
10. Каменков Г. В., Тр. Университета дружбы народов 15, вып. III, сер. теор. мех., 56, 1966.
11. Рябов Ю. А., Ученые записки МГУ, сер. матем., т. VII, вып. 165, 1954.
12. Schwarzschild K., Astron. Nachr. 147, № 3506, 17, 1898.
13. Zeipel H., Nova Acta Reg. Societ. sci. Upsaliensis, ser. III, 1904.
14. Мерман Г. А., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 1, 7, 1952.
15. Батраков Ю. В., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 6, № 2 (62), 112, 1955.
16. Батраков Ю. В., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 6, № 2 (62), 121, 1955.
17. Moulton F., Periodic orbits, Washington, 1920.
18. Демин В. Г., Астрон. ж. 38, вып. 1, 157, 1961.
19. Чеботарев Г. А., Успехи астрон. наук 5, 176, 1950.
20. Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 15, вып. 1, 158, 1945.
21. Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 121, 1960.
22. Рыбаков А. И., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 171, 1960.
23. Рыбаков А. И., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 203, 1960.
24. Рыбаков А. И., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 28, 249, 1960.
25. Рыбаков А. И., Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 108, 23, 1960.
26. Рябов Ю. А., Астрон. ж. 29, 5, 582, 1952.
27. Whittaker E. T., Mon. Notices Roy. Astron. Soc. 62, 346, 1902.
28. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 9, вып. 2, 82, 1940.
29. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 9, вып. 2, 116, 1940.
30. Moser J., Math. Ann. 126, 325, 1953.
31. Демин В. Г., Тр. Университета дружбы народов 17, вып. 4, сер. теор. мех., 18, 1966.
32. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967.
33. Бор Г., Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1934.
34. Левитан Б. М., Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1953.
35. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР 98, 4, 527, 1954.
36. Арнольд В. И., Успехи матем. наук 18, вып. 6 (114), 91, 1963.
37. Мозер Ю., «Математика», Период. сб. перев. ин. статей 6, вып. 4, 3, 1962.
38. Мозер Ю., «Математика», Период. сб. перев. ин. статей 6, вып. 5, 51, 1962.
39. Мозер Ю. И., Успехи матем. наук 23, вып. 4 (142), 179, 1968.
40. Мозер Ю. И., Успехи матем. наук 24, вып. 2 (146), 165, 1969.
41. Биркгоф Дж., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
42. Jeffys W. H., Moser J., Astron. J. 71, 7, 568, 1966.
43. Красинский Г. А., Астрон. ж. 15, 1, 1968.
44. Мерман Г. А., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР 8, 5, 1961.
45. Vinti J. P., J. Res. Nat. Bur. Stand. B62, 2, 79, 1959.
46. Кислик М. Д., Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 3, Изд-во АН СССР, 1960.
47. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 173, Изд-во АН СССР, 1963.



48. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
49. Chazy J., La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste, t. I, t. II, Paris, 1928—1930.
50. Ситников К. А., Докл. АН СССР 133, 2, 303, 1960.
51. Ситников К. А., Матем. сб. 32 (74), 3, 693, 1953.
52. Мерман Г. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 6, № 10 (83), 687, 1958.
53. Алексеев В. М., Докл. АН СССР 108, 4, 1956.
54. Алексеев В. М., Успехи матем. наук 24, вып. 1, 1969.
55. Алексеев В. М., Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, 1963.
56. Vozis G., Astron. J. 72, 3, 380, 1967.
57. Sotopoulos G., Astron. J. 72, 5, 669, 1967.
58. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
59. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
60. Уинтнер А., Аналитические основы небесной механики, «Наука», 1967.
61. Sundman K. F., Acta Math. 36, 105, 1912.
62. Beloritzky D., J. Observ. 16, 109—132, 149—172, 189—211, 1933.
63. Мерман Г. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 6, № 10 (83), 713 1958.
64. Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 1, Изд-во АН СССР, 1954.
65. Мерман Г. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 5, № 4 (67), 185, 1952.
66. Петровская М. С., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 7, № 6 (89), 441, 1959.
67. Рябов Ю. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 8, № 10 (103), 772, 1962.
68. Vigns K., Astron. Nachr. 109, № 2606, 215, 1884.
69. Шарлье К., Небесная механика, «Наука», 1966.
70. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, «Наука», 1965.
71. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Физматгиз, 1955.
72. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, «Наука», 1966.
73. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.
74. Birkhoff G., Amer. Trans. 17, 1917.
75. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 6, вып. 1, 3—98, 1936.
76. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга 9, вып. 2, 5—81, 1940.
77. Степанов В. В., Астрон. ж. 13, вып. 5, 435, 1936.
78. Карачаров К. А., Пилютик А. Г., Введение в техническую теорию устойчивости, Физматгиз, 1963.
79. Meffroy J., Bull. astron. 21, 261, 1958.
80. Арнольд В. И., Докл. АН СССР 137, 2, 255, 1961.
81. Routh E. J., A treatise on the stability of a given state of motion, London, 1877.
82. Леонтович А. М., Докл. АН СССР 143, 3, 525, 1962.
83. Маркеев А. П., Прикл. матем. и механ. 32, вып. 4, 738, 1968.
84. Маркеев А. П., Космич. исследования 5, 3, 1967.
85. Гребеников Е. А., Астрон. ж. 9, 3, 567, 1964.
86. Лукьянов Л. Г., Вестн. Моск. ун-та, физ., астрон., № 1, 63, 1969.
87. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения, «Наука», 1968.
88. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, «Наука», 1965,

89. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников, ВЦ АН СССР, 1967.
90. Аксенов Е. П., Астрон. ж. XXXVIII, 2, 336, 1961.
91. Орлов А. А., Тр. ГАИШ 15, вып. 2, 1950.
92. Демин В. Г., Аксенов Е. П., Вестн. Моск. ун-та, сер. III, № 6, 87, 1960.
93. Орлов А. А. Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР 7, 10, 1960.
94. Struve H., Publications de l'observatoire central Nicolas, série II, 11, St.-Petersbourg, 1898.
95. Struve G., Veröff. Univ. Sternwarte Berlin-Babelsberg, Berlin, 6, тетрадь 5, 1939.
96. Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947.
97. Poincaré H., Rend. Circ. mat., Palermo, 33, 375, 1912.
98. Birkhoff G. D., Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncei (3), 1, 85, 1935.
99. Birkhoff G. D., Trans. Amer. Math. Soc. 14, 14, 1913.
100. Birkhoff G. D., Trans. Amer. Math. Soc. 18, 190, 1917.
101. Signorini A., Rendiconti dei Lincei 21, 36, 1912.
102. Tonelli L., Rendiconti dei Lincei 21, 332, 1912.
103. Рейн Н. Ф., Докл. АН СССР XV, № 8, 1937.
104. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1953.
105. Якоби К., Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.
106. Liouville R., Journ. de Math. XIV, 1, 1849.
107. Liouville R., Journ. de Math. XII, 1, 1847.
108. Moëra G., Atti della R. Acad. di Torino 16, 1880.
109. Stäckel P., Math. Ann. 42, 1893.
110. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.
111. Levi-Civita T., Math. Ann. 59, 1904.
112. Dall'Acqua F., Math. Ann. 66, 1908.
113. Burgatti P., Roma Lincei Rend. 20, 1911.
114. Мультон Ф. П., Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935.
115. Демин В. Г., Вестн. Моск. ун-та, физ., астр., № 1, 1960.
116. Гребеников Е. А., Киоса М. Н., ПММ 38, вып. 2, 1974.
117. Гребеников Е. А., Киоса М. Н., ЖВМ и МФ 14, № 5, 1974.
118. Гребеников Е. А., Киоса М. Н., ДУ IX, 11, 1973.
119. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, «Наука», т. 2, 1966.
120. Киоса М. Н., Аналитические и численные методы исследования проблемы интегрируемости задачи трех тел, канд. дисс., МГУ — ГАИШ, 1974.
121. Имшенецкий В. Г., Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядка, Изд-во Москов. матем. о-ва, М., 1916.
122. Яров-Яровой М. С., ПММ 27, вып. 6, 1963.
123. Румянцев В. В., Вестн. Моск. ун-та, № 4, 1957.
124. Четаев Н. Г., ПММ 10, 1, 135, 1946.
125. Меркин Д. Р., Введение в теорию устойчивости движения, «Наука», 1971.
126. Дубошин Г. Н., Тр. ГАИШ XIV, 1, 153, 1940.
127. Маркесв А. П., Исследования устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики, Препринт ИПМ АН СССР, 1970.
128. Маркеев А. П., Астрон. ж. 48, 4, 1971.
129. Danby J. M. A., Astr. J. 69, 2, 1964.
130. Naufeh A. H., Kamei A. A., AIAA Journ. 8, 2, 1970.
131. Маркеев А. П., ПММ 34, 2, 1970.
132. Маркеев А. П., Препринт № 1 ИПМ АН СССР, 1973.
133. Чандрасекар С., Принципы звездной динамики, ИЛ, 1948.

134. Демин В. Г., Вестн. Моск. ун-та; сер. физ., астр., № 4, 76, 1960.
135. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., ИСЗ, вып. 16, 163, Изд-во АН СССР, 1963.
136. Дегтярев В. Г., ПММ 26, вып. 4, 1962.
137. Дегтярев В. Г., Инженерный журн. 3, вып. 3, 1963.
138. Куницын А. Л., Космич. исследования 6, вып. 2, 324, 1966.
139. Дубошин Г. Н., Астрон. ж. XXXI, вып. 4, 723, 1959.
140. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Новые качественные методы в небесной механике «Наука», 1971.
141. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Методы ускоренной сходимости в нелинейной механике, «Наукова думка», 1971.
142. Гребеников Е. А., Астрон. ж. XXXV, вып. 6, 904, 1958.
143. Брюно А. Д., Препринты №№ 97, 98 ИПМ АН СССР, 1974.
144. Ибрагимова И. К., Журн. выч. матем. и мат. физ. 6, 5, 1966.
145. Куницын А. Л., ПММ 35, 1, 1971.
146. Куницын А. Л., ДУ 7, 9, 1971.
147. Гольцер Я. М., Нурпеисов С., Изв. АН Каз. ССР, 1, 1972.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация 114  
— годовая 97  
— дифференциальная 139  
— звездная 115  
— планетная 116  
— суточная 116  
—, эллиптическая часть 117  
«Авангард-1» 620  
Азимут 24, 25  
— геодезический 50, 52  
Альмукантарат 24  
Амальтея 510  
Амплитуда 362  
Аналогии Непера 34  
Аномалия истинная 217, 222, 226, 234, 263  
— средняя 222, 261  
— — в эпоху 221, 224  
— эксцентрическая 81, 222, 232, 237, 261  
Апекс 115  
Апогей 217, 564  
Апоцентр 217  
Аппроксимация 649  
Аргумент перицентра 219, 221  
— широты 222, 226  
Ариэль 510  
Астрономическая единица 185  
— — световая 115, 185  
Астрономические постоянные 176  
— —, новая система 177  
Афелий 217
- Базис-вектор 715, 730—733  
Базис частотный 800  
Барицентр системы «Земля — Луна» 491  
Бюро времени международное 167
- Вариационная кривая Хилла 464  
Вариация 455  
— аргумента 696  
— первая 698
- Вектор Лапласа 216  
Венера 72, 186, 188—190, 488, 489, 504—507, 538, 539  
Вертикал 23  
— первый 23  
Вертикаль 22  
— астрономическая 46  
— геодезическая 48  
— местная 47  
Веса неизвестных 691  
— условных уравнений 692  
Весовая функция 661  
Веста 514, 516, 517  
Високосы задержанные 151  
Возмущающая функция 385, 433, 440, 447  
— —, весовая часть 402  
— —, главная часть 386, 402  
— —, дополнительная часть 392, 398  
— —, задачи  $n$  тел 294  
— —, нерезонансная часть 344  
— — от сжатия планеты 510  
— —, резонансная часть 344  
Возмущения в движении ИСЗ от прецессии и нутации экваториальной плоскости Земли 625  
— — — от приливной деформации Земли 628  
— — — от притяжения атмосферы 632  
— — — релятивистские 630  
— — — электромагнитные 631  
— вековые 566, 571  
— — 1-го порядка 571  
— долгопериодические 569, 571  
—, класс 422  
— короткопериодические 566, 572  
— лунно-солнечные 569  
— Луны 477  
— периодические 422  
—, порядок 422  
— смешанные 422  
— солнечные спутников 513  
—, степень 422

- Возмущения элементов 441, 574  
 — — орбиты ИСЗ вековые 593, 599, 604  
 — — — — долгопериодические 594, 599, 600, 604  
 — — — — лунно-солнечные 603, 606  
 — — — — от высших гармоник  
 — — — — от светового давления 618, 620  
 — — — — от сопротивления атмосферы 609, 613  
 — — — — с периодом около суток 601  
 Время атомное 167—169  
 — всемирное 149, 155—157, 163  
 — — квазиравномерное 156  
 — звездное 149, 152, 153, 158  
 — — гриничское 158  
 — — истинное 160  
 — — квазистинное 158  
 — — среднее 159  
 — — эфемеридное 163  
 — солнечное 155  
 — среднее 154  
 — эфемеридное 149, 150, 157, 161, 163, 165, 177  
 Высота 24  
 — ортометрическая 54
- Гамма-функция** 366  
**Ганимед** 508, 510  
**Гармоники зональные** 566  
 — секториальные 556, 562, 603  
 — тессеральные 556, 562, 603  
**Гармония** 516  
**Гекуба** 514, 517  
**Географос** 517  
**Гестия** 514, 516, 517  
**Гидальго** 513, 517  
**Гильда** 517  
**Гиперион** 510  
**Главный эллиптический член в долготе** 451  
 — — — в широте 451  
**Год аномалистический** 151  
 — бесселев 87, 151  
 — високосный 151  
 — драконический 151  
 — звездный 150  
 — сидерический 150, 457  
 — тропический 151  
**Горизонт астрономический** 23  
 — геодезический 50  
 — местный 82  
**Град** 26  
**Группа типа Гильды** 513
- Дальность горизонтальная** 720  
 — наклонная 25—27  
**Дата юлианская** 175  
**Движение гиперболическое** 244  
 — кеплеровское 211  
 — круговое 243, 244  
 — поступательно-вращательное 321—331  
 — промежуточное 588—592  
 — прямолинейное 229  
 — собственное 85  
 — спутника либрационного 765—767  
 — — лимитационное 765  
 — — орбитальное 847, 848  
 — — ротационное 765  
 — среднее 221, 224  
 — эллиптическое 243, 244  
**Движения лагранжевы в планетной задаче** 840  
 — финальные 808, 809  
**Девияция** 81  
**Деймос** 510  
**Диона** 510  
**Дифференциальный метод исправления элементов орбит** 273, 285  
**Дифференцирование численное** 655—657  
**Долгота астрономическая** 47  
 — галактическая 28  
 — геодезическая 49, 52  
 — геоцентрическая 52  
 — перигентра 222, 226  
 — планетоцентрическая 59  
 — селенографическая 73  
 — узла 219, 221, 224, 227, 262  
 — — в эпоху 224  
 — эклиптическая 28  
 — эфемеридная 162
- Европа** 508, 510
- Задача Акснесса** 580, 581  
 — Баррара 581, 582  
 — Больца 700  
 — вариационная общая 719  
 — — простейшая 718  
 — — с подвижными концами 700  
 — Винти и Кислика 581, 584  
 — Гарфинкеля 579  
 — двух неподвижных центров 549, 550, 584  
 — — — обобщенная 551, 588, 848  
 — — тел 211  
 — изопериметрическая 700  
 — краевая 678—684

- Задача Лагранжа 698  
 — Майера 699, 701  
 — л тел 288  
 — — — двухпланетная 385, 400  
 — — — планетная 385, 405, 839, 840  
 — Стерна 578  
 — трех тел 792—795, 806, 808, 811, 819, 823  
 — — — неограниченная 524—542  
 — — — ограниченная 548  
 — — — — гиперболическая 549  
 — — — — круговая 533, 542, 546—548  
 — — — — — плоская 534, 817, 845  
 — — — — — параболическая 549  
 — — — — — планетная 815  
 — — — — — эллиптическая 549  
 — — — Хилла 551, 552  
 Задачи вариационные традиционные 695  
 — интегрируемые 811  
 — модельные 577  
 — экстремальные 694  
 Законы Кассини 203, 770  
 Захват 809, 810  
 Звезды двойные 121  
 Земля 186, 188—192, 457, 488, 489, 504—507, 538, 539, 753  
 Зенит 23, 25  
 — геодезический 48  
 Знаменатели малые 429  
 Зонды космические 200
- Изменения вековые 90**  
 — годовые 90  
 Икар 517  
 Интеграл адельфический 813  
 — алгебраический 813  
 — движения центра масс 289, 298, 302, 310, 328  
 — живых сил 290, 293, 295, 299, 300, 302, 303, 310, 328  
 — площадей 289, 293, 295, 300, 302, 303, 310, 328  
 — полный 318, 757  
 — рефракции 133  
 — Якоби 534  
 Интегралы Лапласа 215  
 — Якоби 661  
 Интегрирование численное 658  
 Интегрируемость 812, 815  
 Интерполирование 635  
 — обратное 642  
 Ио 508, 510  
 Ирис 516
- Календарь григорианский 151  
 — юлианский 151  
 Каллисто 508, 510  
 Каталоги звездные 143—145  
 Колжур равноденствий 24  
 — солнцестояний 24  
 Комета Вольфа 1 519  
 — Лекселя 518  
 — Отерма 3 519  
 Кометы гиперболические 517  
 — долгопериодические 517  
 — короткопериодические 517  
 — параболические 517  
 Координаты астрономические 46  
 — барицентрические 291, 294  
 — видимые 62  
 — галактические 28  
 — Ганзена идеальные 295, 305  
 — — полярные 305  
 — географические 55  
 — геодезические 46, 48  
 — геоцентрические 52  
 — дифференциальные 41  
 — небесные 45  
 — обобщенные 214  
 — орбитальные 216, 223, 226, 228, 233  
 — — относительные 40, 41  
 — — полярные 216  
 — — цилиндрические 294  
 — сферические 213, 295  
 — центра масс 210  
 — цилиндрические 211  
 — экваториальные 37  
 — эклиптические 37, 38  
 — Якоби 292  
 Коэффициенты Ганзена 235  
 — Лапласа 381—383  
 — Ньюкома 383  
 — Фурье 800  
 Кривая Хилла 535, 545  
 Критерий Тиссерана 542  
 — Уиттекера 797  
 Круг большой 23  
 — равных высот 24  
 — склонений 52  
 — широт 28
- Летиция 516  
 Либрация Луны 203—207  
 — — оптическая 75, 204  
 — — параллактическая 204  
 — — суточная 204  
 — — физическая 74—77, 205  
 Линия апсид 217  
 — геодезическая 50

- Линия отвеса 22  
 — полуденная 23  
 — узлов 219  
 Луна 74—78, 93, 138, 186, 192, 194,  
 198, 199, 538, 539, 770, 822  
 «Лунар орбитер I, III, IV» 200, 201  
 Лунация 150  
 Люки 514  
  
 «Маринер-2, 4, 5, 6, 7, 9» 65, 200  
 Марс 64, 65, 186, 188—192, 488, 492,  
 504—507, 538, 539  
 Масконы 203  
 Матрица ориентации экваториальная  
 81  
 Международное условное начало 56  
 Мельпомена 516  
 Меридиан астрономический 47  
 — геодезический 48  
 — лунный 59  
 — местный 46  
 — небесный 23  
 — нулевой 46  
 — основной 39  
 — селенографический 58  
 — центральный 57  
 — эфемеридный 162  
 Меркурий 186, 188—190, 192, 194, 487,  
 489, 504—507, 538, 539  
 Место видимое 103  
 — истинное 103  
 — наблюдения фиктивное 103  
 — нормальное 142  
 — среднее 103  
 Месяц аномалистический 152, 482  
 — драконический 152, 492  
 — сидерический 457, 482  
 — синодический 150, 152  
 — тропический 152  
 — эфемеридный 150  
 Метод Адамса 670  
 — Болина 515  
 — Брауэра 415  
 — Брауэра — Клеменса 405  
 — Бренделя 515  
 — Ганзена 412, 514  
 — Гаусса 690  
 — градиентного спуска 685, 695  
 — Делоне 447  
 — Делоне — Цейпеля 426  
 — Коуэлла 481, 671, 674, 675  
 — Лагранжа 333  
 — Лагранжа — Шарпи 547  
 — Лапласа — Ньюкома 419  
 — Линдштедта 824  
 — Ляпунова 790  
 — малого параметра 789  
  
 Метод наименьших квадратов 689  
 — разностный 687  
 — Рунге — Кутты 668  
 — скорейшего спуска 685, 695  
 — стрельбы 679  
 — улучшения орбит ИСЗ 287  
 — Хилла 408, 514  
 — Штермера 673  
 — Энке 675  
 Методы осреднения 432  
 — — Боголюбова 442  
 Мимас 510  
 Минималь 697  
 Минута 26  
 — десятичная 26  
 — звездная 161  
 — средняя 160  
 Миранда 510  
 Многочлены сферические 373  
 Множители параллактические 129  
 Момент прохождения через пери-  
 центр 219, 222, 225, 227  
 Моменты сил аэродинамических 763  
 — — магнитного взаимодействия 763  
 — — от ньютоновского поля тяготе-  
 ния 762  
 — — от сжатия планеты 762  
 — — светового давления 764  
  
 Надир 23, 25  
 Наклон 219, 221, 224, 225, 227, 262  
 — критический 597  
 — луно-солнечный 86  
 — орбиты 219  
 — — к экватору 61  
 — — к эклиптике 61  
 — средний 86  
 — эклиптики к экватору 24  
 Накопление погрешности 676  
 Невязки остаточные 691  
 Нептун 72, 157—191, 193, 194, 494—  
 498, 500, 504—507, 538, 667  
 Неравенство 454  
 — годовое 455  
 — параллактическое 455  
 Нерида 510  
 Нутация 91—94  
 — в долготе 75  
 — в наклоне 75  
 — дифференциальная 139  
  
 Оберон 510  
 Область притяжения положения рав-  
 новесия 830  
 — сплошной устойчивости по Ла-  
 гранжу 832

- Ода 513  
 Операция основная 43  
 Орбита гиперболическая 219, 247, 267, 271  
 — круговая 217, 268  
 — невозмущенная 211  
 — оскулирующая 334  
 — параболическая 217, 248, 266, 271  
 — первоначальная 273  
 — предварительная 279  
 — промежуточная 462  
 — — ИСЗ 577  
 — прямолинейная 218  
 — эллиптическая 217, 247, 260, 266, 270, 275, 277  
 Оси средние 771  
 Остаточные разности 141  
 Остаточный член 639, 659  
 Ось мира 23  
 — основная 22, 25  
 Отклонение среднее квадратичное 695
- Паллада 516, 517  
 Параллакс 123  
 — годичный 103, 124  
 — горизонтальный экваториальный 125  
 — — — средний 125, 128  
 — Луны 74  
 — рефракционный 138  
 — Солнца 179  
 — суточный 124—127, 130  
 Параллель 47  
 — геодезическая 47  
 — небесная 25  
 — суточная 25  
 Параметр 217, 219, 221, 227, 260  
 Параметры прецессии Ньюкома 108, 109  
 Партенона 516  
 Перегрузка 713  
 Перелеты межорбитальные 729  
 — многоимпульсные 735  
 — — одноимпульсные 736  
 — —, траектории 739, 740—743  
 — —, — моноэллиптические 740, 741  
 — —, — полиэллиптические 740, 741  
 Переменные Клеро — Лапласа 306  
 — Лагранжа 342—344  
 Перигей 217, 564, 614  
 Перигелий 217  
 Период обращения 271, 226  
 — юлианский 174, 175  
 — — модифицированный 175  
 Перицентр 217  
 Планеты малые 513
- Плоскость Лапласа неизменяемая 290, 756  
 — основная 22, 25  
 Плотность воздуха 610—612  
 Плутон 187—190, 193, 494—498, 500, 538, 539  
 Поверхность относимости фундамен-  
 тальная 43, 46  
 — Хилла 534, 545  
 Показатели Фурье 800  
 Полеты к Луне 744  
 Полином Лагранжа 639  
 Полиномы Гегенбауэра 380  
 — интерполяционные 637  
 — Лежандра 368, 372, 555  
 — Ньюкома операторные 401  
 Политика оптимальная 706  
 Положение географическое 46  
 Полуось большая 221, 260  
 — действительная 225  
 Полюс большого круга 29  
 — галактический 29  
 — географический 46  
 — геодезический 48  
 — истинный 57, 85  
 — мира 23  
 — — северный 23  
 — — южный 23  
 — орбиты 23  
 — средний 57, 85  
 — эклиптики северный 24  
 — — южный 24  
 Полярное расстояние 26  
 Постоянная aberrации 98  
 — — суточной 116, 179  
 — гравитационная гауссова 180  
 — — гелиоцентрическая 179  
 — — геоцентрическая 197, 283  
 — — луноцентрическая 199, 200  
 — — планетоцентрическая 194  
 — живых сил 214  
 — либрации физической 74  
 — лунного неравенства 179  
 — нутации 91, 178  
 — параллактического неравенства 179  
 — площадей 215  
 — синуса параллакса Луны 179  
 — тяготения 179  
 — энергии 214  
 Постоянные астродинамические 195—  
 203  
 — астрономические 176  
 — Гайна 74, 76  
 — Лапласа 215  
 — редуцированные 92  
 Почти-период 798



- Правило Непера 32  
 — Рунге 664  
 Предел Лапласа 232  
 Представления интегральные 369, 376  
 Прецессия 85, 104—114  
 — годовичная 88  
 — дифференциальная 139  
 — лунно-солнечная 86  
 —, матрица 92  
 — общая 105  
 — от планет 87  
 — по прямому восхождению 88  
 — по склонению 89  
 Приближение наилучшее среднеквадратичное 645  
 Принцип максимума Понтрягина 695, 704  
 — оптимальности Беллмана 696, 706  
 Программа оптимальная 725  
 Программирование динамическое 706  
 Продолжительность жизни спутника 615  
 Прямое восхождение 27  
 — — планетоцентрическое 59  
*p*-траектории 715  
 Пункты Лапласа 52  
 Пятиугольник Непера 32
- Равноденствие среднее 62  
 Разложение радиуса-вектора 233  
 Разности вторые 636  
 — первые 635  
 — центральные 636  
 Ракета 711  
 Расстояние зенитное 25  
 — перигейное 221  
 — перигелийное 221  
 — полярное 26  
 — радиальное 81  
 — угловое 40  
 — — перицентра от узла 221, 225, 227, 262  
 Расход массы 713  
 — топлива 713, 719  
 Редукция звездных положений 101  
 — Фая 775  
 Референц-эллипсоид стандартный 49  
 Рефракция 132  
 — астрономическая 131, 133  
 — атмосферная 132  
 — геодезическая 132  
 — дифференциальная 132  
 — ионосферная 132  
 — нормальная 134  
 — параллактическая 138  
 — электронная 132
- Решение возмущенное 829, 835  
 — невозмущенное 829, 835  
 — оптимальное 702  
 — орбитально устойчивое 832  
 — порождающее 788  
 — равномерно устойчивое 830  
 — условно-периодическое 803, 804, 806  
 — — периплегматическое 805  
 — устойчивое при постоянно действующих возмущениях 831  
 Решения периодические 539  
 — — Пуанкаре 2-го вида 794  
 — — — 2-го рода 794  
 — — — 1-го сорта 539, 541, 542, 792  
 — — — 2-го сорта 539, 541, 542  
 — — — 3-го сорта 539, 541, 793  
 — — Шварцшильда 542  
 — равновесные 527  
 — частные Лагранжа 527, 540, 541, 549  
 — — — гомографические 528, 532  
 — — — коллинеарные 528—530, 535  
 — — — круговые 528  
 — — — треугольные 535, 843—846  
 Рея 510  
 Ряд гипергеометрический 367  
 — Фурье почти-периодической функции 800  
 Ряды Зундмана 821  
 — Линдштета 825  
 — Ляпунова 821  
 — Хилла 821, 822
- Сатурн 187—191, 193—195, 493—499, 501—507, 538, 539, 667  
 Сближения комет с большими планетами 518  
 Световое давление 617  
 Свободный период Эйлера 753  
 Сгущения орбит малых планет 513  
 Секунда атомная 167  
 — десятичная 26  
 — звездная 26  
 — средняя 160  
 — эфемеридная 150  
 Семейства комет 517, 519  
 Силовая функция двух тел 324  
 — — задачи двух неподвижных центров 586  
 — — — *n* тел 289, 301  
 — — — трех тел 524, 526  
 — — притяжения Земли 195, 555, 561  
 — — — Луны 198—202  
 — — системы тел 323  
 Силы аэродинамические 612

- Символ Аппеля 366  
 Система алгебраическая редукцион-  
 ных величин 95  
 — астрогеодезическая мировая 197  
 — геодезических данных 50  
 — координат ареографическая 64  
 — — афродитографическая 71  
 — — баригентрическая 22  
 — — галактическая 28, 36  
 — — гелиографическая 70  
 — — геозекваториальная 59  
 — — горизонтальная 24, 34  
 — — йовигентрическая 68  
 — — луногентрическая 73  
 — — марсогентрическая 64  
 — — нептуногентрическая 72  
 — — объектогентрическая 82  
 — — орбитальная 80, 764  
 — — перигейная 760  
 — — сатурногентрическая 70  
 — — селенографическая 73  
 — — селеногентрическая 22, 73  
 — — селенозекваториальная 72  
 — — топогентрическая 22  
 — — ураногентрическая 72  
 — — экваториальная вторая 27, 35,  
 36  
 — — — первая 26, 34  
 — — — эклиптическая 27, 35  
 — — — юпитерогентрическая 68  
 — Ляпунова 791  
 — отсчета 21  
 — постоянных МАС 178, 185  
 — тригонометрическая редукционных  
 величин 95  
 — юлианская 152  
 Системы координат гелиогентриче-  
 ские 22  
 — — зенографические 69, 69  
 — — планетогентрические 58  
 — — прямоугольные 37  
 Склонение 26, 27  
 — планетогентрическое 59  
 Скобка Пуассона 812  
 Скорость космическая вторая 218  
 — — первая 218  
 — света 253  
 — характеристическая 712, 728  
 Служба времени 173  
 — широт международная 57  
 Соизмеримость средних движений 432  
 Солнце 189, 190  
 — среднее экваториальное 150  
 — — эфемеридное 162  
 Соударения 817—819  
 Спектр функции 800  
 Сплайн 644  
 Спутник Юпитера VI 508, 510  
 — — VII, 508, 510  
 — — VIII 509, 510  
 — — IX 510  
 — — X 510  
 — — XI 510  
 — — XII 510  
 Спутники галилеевы 508  
 — гиростаты 778, 779, 783, 786  
 — Земли искусственные 554  
 — Луны искусственные 200  
 — планет 508—510  
 — Сатурна 796  
 Среднее равноденствие даты 161  
 Стабилизация вращательная движе-  
 ния 786  
 — — — гироскопическая 778  
 — — — оптимальная 785  
 Стандартная атмосфера 612  
 — Земля 559  
 Сутки звездные 149, 150, 154  
 — истинные солнечные 149  
 — квазиистинные 150, 158  
 — средние 150  
 — — солнечные 150  
 Сфера влияния 538  
 — гравитационная Хилла 538, 539  
 — действия 537  
 — небесная 22  
 — тяготения 537  
 Сферический избыток 33  
 Сфероид 48  
 — стандартный относимости 49, 50  
 Схемы осреднения 432, 433  
 — — Гаусса 433, 434, 436, 440  
 — — Делоне — Хилла 433, 435, 439,  
 440  
 — — Моисеева 433, 434, 438, 440  
 — — Фату 433, 434, 436, 440  
 Счет времени гражданский 156  
 Таблица Куммера 368  
 — Кэли 234  
 Таблицы рефракции Пулковские 135  
 — Эккерта 495  
 Теневая функция 622—624  
 Теорема Арнольда об условно-перио-  
 дических движениях 801  
 — — об устойчивости планетных ор-  
 бит 840  
 — Брунса о существовании интегралов  
 813, 814  
 — — о сходимости 823  
 — Вейерштрасса — Слудского —  
 Зундмана 819  
 — Гамильтона — Якоби 318

- Теорема Зундмана о рядах 820  
 — — о соударениях 819  
 — Крудели 774  
 — Лагранжа 699  
 — —, обобщение 702, 703  
 — Лапласа 839  
 — Лапласа — Лагранжа 839  
 — Ляпунова о голоморфном интеграле 791  
 — — о периодических решениях 791  
 — Малкина 838  
 — о неподвижной точке 798  
 — Пуанкаре о несуществовании первых интегралов 814  
 — — о существовании периодического решения 789  
 — Пуассона 812  
 — — об устойчивости 839  
 — Румянцева 837  
 — синусов 30  
 Теоремы Арнольда об устойчивости решения гамильтоновой системы 841, 842  
 — Ляпунова об устойчивости 835, 836  
 — Пуанкаре о равновесии вращающихся жидкостей 773, 774  
 — — о ранге и классе возмущений 825  
 Теория возмущений 432, 442  
 — движения больших планет 484  
 — — — Клеменса 485  
 — — — Леверье 444  
 — — — Ньюкома 484—487  
 — — — Хилла 486  
 — — — Шараф 486  
 — — Луны 443, 457  
 — — —, аргументы фундаментальные 452  
 — — —, основная проблема 444, 482  
 — Хилла — Брауна 458—470, 481  
 Тетис 510  
 Тефия 510  
 Титан 510  
 Титания 510  
 Точка весеннего равноденствия 24, 150  
 — — — для планеты 59  
 — — — истинная 150  
 — — — квазиистинная 150  
 — — — средняя 150  
 — весны 24  
 — запада 23  
 — зимнего солнцестояния 24  
 — зимы 24  
 — лета 24  
 Точка летнего солнцестояния 24  
 — осени 24  
 — осеннего равноденствия 24  
 — севера 23  
 — соединения 717  
 — юга 23  
 Точки либрации 541  
 — — коллинеарные 531, 536  
 — — треугольные 529, 536  
 — равноденственные 23  
 — угловые 703  
 Траектории межпланетные 743  
 Траектория облетная 747  
 — оптимальная 733, 734  
 Треугольник параллактический 34  
 — сферический 29  
 — — присоединенный 32  
 Тритон 510  
 Троянцы 513  
 Туле 513  
 Тэта-функции 365  
 Тяга импульсная 717  
 Углы Эйлера 321, 757  
 Угол вертикали 52  
 — возвышения 24  
 — места 24  
 — наклона траектории 82  
 — поворота траектории 83  
 — позиционный 40  
 — скоростного курса 83  
 — часовой 26  
 — — эфемеридный 162  
 — эксцентриситета 222  
 Узел восходящий 219  
 — нисходящий 219  
 Узлы таблицы 635  
 — — равноотстоящие 646  
 Уклонение абсолютное 50  
 — астрономо-геодезическое 50  
 — отвеса 50, 51  
 — относительное 48  
 Умбриель 510  
 Управление оптимальное 702  
 Уравнение Бесселя 376  
 — Вавра 774  
 — времени 155  
 — Гамильтона — Якоби 318  
 — Гаусса 367  
 — гипергеометрическое 367  
 — Кеплера 222, 223  
 — Лагранжа 236  
 — Лагранжа — Якоби 290  
 — Ламберта 264  
 — Ламе 379  
 — Лапласа 52

- Уравнение Лежандра 370  
 — Мещерского 707  
 — — обобщенное 708  
 — параболической орбиты 265  
 — порождающее 788  
 — световое 115  
 — типа Штекеля 817  
 — Хилла 766  
 — центра 234, 241  
 Уравнения Беллмана 706  
 — Брауэра 416  
 — в вариациях 540  
 — в форме Клеро — Лапласа 213  
 — Клеро — Лапласа 306  
 — Лагранжа для оскулирующих эле-  
 ментов 338, 350  
 — нормальные 690  
 — Ньютона для оскулирующих эле-  
 ментов 335, 336, 345, 349  
 — условные 275, 282, 689, 692  
 — — неравноточные 691  
 — характеристические движения ра-  
 кеты 715  
 — Эйлера кинематические 323  
 — Эйлера — Лагранжа 724  
 — — — обобщенные 701  
 Уран 72, 187—191, 193—195, 494—499,  
 504—507, 538, 667  
 Условие Вейерштрасса — Эрдмана  
 703  
 Устойчивость асимптотическая 830  
 — — в целом 830  
 —, вероятность 841  
 — вращательного движения 775  
 — лагранжевых решений 843  
 — орбитальная 831, 847, 848  
 — по Лагранжу 832, 839  
 — по Ляпунову 830  
 — по Пуассону 832, 846  
 — по Хиллу 832, 846  
 — по Якоби 833  
 — равномерная 830  
 Участок активный 711  
 — максимальной тяги 720  
 — нулевой тяги 720  
 — пассивный 701  
 Феба 510  
 Фигуры равновесия небесных тел 773  
 Фобос 510  
 Формула Баррара 587  
 — Бесселя 638, 640  
 — Брунса 775  
 — Лагранжа 236  
 — — интерполяционная 638, 640  
 — — обобщенная 237  
 Формула квадратурная 665  
 — Лапласа для рефракции 137  
 — Льюйе 34  
 — Пизетти — Сомильяна 776  
 — Родрига 369  
 — Стирлинга 637, 640  
 — Циолковского 712  
 — Эверетта 638, 640  
 — Эрмита 662, 665  
 Формулы Андуайе — Ньюкома 112  
 — Борда 33  
 — Брауэра 573  
 — Гаусса квадратурные 660  
 — Деламбра 33  
 — Каньоли 32  
 — Леверье 390  
 — Михайлова 59  
 — Ньютона — Котеса 659  
 — Ньютона интерполяционные 637,  
 640  
 — обобщенные трапеций 659  
 — пяти элементов 31  
 — Чебышева 662  
 Функции Бесселя 375—379  
 — — от мнимого аргумента 378  
 — Ганкеля 379  
 — Крампфа — Радо 135  
 — Ламе 379  
 — Лежандра 371  
 — — присоединенные 371, 372, 553  
 — наклона 598  
 — Неймана 379  
 — почти-периодические 798  
 — сферические 373  
 — — зональные 373  
 — — секториальные 373  
 — — тессеральные 373  
 — условно-периодические 650, 800  
 — цилиндрические 379  
 — — эксцентриситета 597  
 — эллиптические  
 — — Вейерштрасса 364  
 — — Якоби 363, 366  
 Функционал 696, 697  
 Функция возмущающая 294, 337  
 — гипергеометрическая 367  
 — дохода 706  
 — переключения 715, 717, 723, 725  
 — производящая 371, 375  
 — спектральная 800  
 — Уиттекера 797  
 Церера 514—517, 667  
 Час 26  
 — звездный 161  
 — средний 161

- Числа Коши 384  
 — Крюгера 105  
 Число Циолковского 713
- Шаг интегрирования** 668  
 — таблицы 635
- Широта астрономическая** 47  
 — галактическая 29  
 — геодезическая 49  
 — геоцентрическая 52  
 — планетоцентрическая 59  
 —, приведение 52  
 — приведенная 52  
 — селенографическая 73  
 — эклиптическая 28
- Шкала высот** 609
- Эвекция** 455  
**Эдда** 517  
**Экватор астрономический** 47  
 — галактический 28  
 — географический 46, 47  
 — геодезический 48  
 — Земли средний 78  
 — Луны истинный 78  
 — — средний 78  
 — небесный 23
- Эклиптика** 23  
**Экстремаль** 697  
**Эксцентриситет** 217, 219, 221, 225, 260  
 — эллипсоида относимости 52
- Элементы канонические Делоне** 340, 345, 563  
 — — Пуанкаре 340, 341, 344, 346, 354  
 — — Якоби 339, 345, 352  
 — Кэррингтона 70
- Элементы Лагранжа** 338  
 — орбиты 218  
 — — векторные экваториальные 249, 261, 263, 269  
 — — кеплеровские 219  
 — — оскулирующие 334  
 — — эклиптические 219  
 — средние 410
- Эллипс гемановский** 737  
**Эллипсоид общий земной** 48  
**Эллипсоиды Маклорена** 775  
 — Якоби 775
- Эллиптические интегралы второго рода** 360  
 — — первого рода 358  
 — — полные 360  
 — — третьего рода 360
- Энергия барицентрическая** 290  
**Энцелад** 510  
**Эпоха** 25, 222  
**Эрос** 517  
**Эфемерида** 230  
 — астрометрическая 141  
 — геоцентрическая 142  
 — Луны 481
- Эфемериды** 140  
 — больших планет 487, 491  
 — для физических наблюдений 59  
 — малых планет 667  
**«Эхо-1»** 620
- Юнона** 516, 517  
**Юпитер** 187—192, 194, 195, 493—499, 501—507, 538, 539, 667
- Янус** 510  
**Япет** 510

# СПРАВОЧНОЕ РУКОВОДСТВО ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И АСТРОДИНАМИКЕ

Под редакцией  
Г. Н. ДУБОШИНА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ  
И ПЕРЕРАБОТАННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1976

*Виктор Кузьмич Абалакин  
Евгений Петрович Аксенов  
Евгений Александрович Гребеников  
Владимир Григорьевич Демин  
Юрий Александрович Рябов*

Справочное руководство по небесной механике  
и астродинамике

М., 1976 г. 864 стр. с илл.

Редактор *А. З. Рывкин*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *М. Л. Медведская*

---

Сдано в набор 26/IX 1975 г. Подписано к печати 2/III 1976 г. Бумага тип. № 1 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Физ. печ. л. 54. Усл. печ. л. 54. Уч.-изд. л. 56,47.  
Тираж 4250 экз. Т-05611. Цена книги 3 р. 20 к.  
Заказ № 840.

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета  
Министров СССР по делам издательства,  
полиграфии и книжной торговли.  
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 20

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	17
Предисловие к первому изданию . . . . .	19

### Часть I

## СФЕРИЧЕСКАЯ И ЭФЕМЕРИДНАЯ АСТРОНОМИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ (АБАЛАКИН В. К.)

<b>Глава 1. Системы координат . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1.01. Небесная сфера . . . . .	21
§ 1.02. Главные круги, линии и точки небесной сферы . . . . .	22
§ 1.03. Горизонтальная система координат . . . . .	24
§ 1.04. Экваториальные системы координат . . . . .	25
§ 1.05. Эклиптическая система координат . . . . .	27
§ 1.06. Галактическая система координат . . . . .	28
§ 1.07. Основные формулы сферической тригонометрии . . . . .	29
§ 1.08. Соотношения между различными астрономическими координатами . . . . .	34
§ 1.09. Прямоугольные системы координат . . . . .	37
§ 1.10. Системы географических координат . . . . .	45
§ 1.11. Соотношения между астрономическими и геодезическими координатами . . . . .	50
§ 1.12. Планетоцентрические системы координат . . . . .	58
§ 1.13. Марсоцентрическая и ареографическая системы координат . . . . .	64
§ 1.14. Юпитероцентрическая и зенографическая системы координат . . . . .	68
§ 1.15. Сатурноцентрическая система координат . . . . .	70
§ 1.16. Системы координат, определяемые осевым вращением Солнца, Венеры, Урана и Нептуна . . . . .	70
§ 1.17. Луноцентрическая и селенографическая системы координат . . . . .	72
§ 1.18. Орбитальная система координат . . . . .	82
§ 1.19. Объектоцентрическая система координат . . . . .	80
<b>Глава 2. Редукционные вычисления . . . . .</b>	<b>85</b>
§ 2.01. Прецессия . . . . .	85
§ 2.02. Редукция звездных положений с учетом прецессии и собственного движения . . . . .	89
§ 2.03. Нутация . . . . .	91
§ 2.04. Годичная абберрация . . . . .	97
§ 2.05. Сводка основных формул редукции звездных положений . . . . .	101
§ 2.06. Учет влияния членов второго порядка . . . . .	103
§ 2.07. Годичный параллакс . . . . .	103
§ 2.08. Точные формулы для учета прецессии . . . . .	104



§ 2.09. Формулы учета прецессии в прямоугольных экваториальных координатах . . . . .	105
§ 2.10. Формула учета прецессии в прямоугольных эклиптических координатах . . . . .	107
§ 2.11. Совместный учет прецессии и нутации в прямоугольных экваториальных координатах . . . . .	109
§ 2.12. Формулы учета прецессии в координатах и элементах орбит при умеренных и малых разностях эпох . . . . .	111
§ 2.13. Аберрация света . . . . .	114
§ 2.14. Приведение звезды на видимое место в прямоугольных координатах . . . . .	118
§ 2.15. Об учете орбитального движения компонент двойных звезд . . . . .	121
§ 2.16. Параллакс . . . . .	123
§ 2.17. Учет суточного параллакса в горизонтальной системе координат . . . . .	125
§ 2.18. Формулы учета суточного параллакса в экваториальной системе координат . . . . .	126
§ 2.19. Формулы учета суточного параллакса в координатах Солнца и планет . . . . .	128
§ 2.20. Формулы учета суточного параллакса в системе эклиптических координат . . . . .	130
§ 2.21. Астрономическая рефракция . . . . .	131
§ 2.22. Формулы учета рефракции в координатах небесных объектов . . . . .	136
§ 2.23. Рефракция при наблюдении небесных объектов, расположенных на конечных расстояниях от Земли . . . . .	137
§ 2.24. Дифференциальная прецессия и нутация. Дифференциальная аберрация и дифференциальный параллакс . . . . .	139
§ 2.25. Сравнение теории с наблюдениями . . . . .	140
§ 2.26. Каталоги звездных положений . . . . .	143
§ 2.27. Геоцентрические координаты нуля-пункта селенографической системы отсчета . . . . .	145
§ 2.28. Вычисление топоцентрических расстояний до точек лунной поверхности . . . . .	146
<b>Глава 3. Время и его измерение . . . . .</b>	<b>149</b>
§ 3.01. Основные понятия и определения . . . . .	149
§ 3.02. Звездное и солнечное время. Всемирное время . . . . .	152
§ 3.03. Квазиравномерное всемирное время . . . . .	156
§ 3.04. Связь между всемирным временем и звездным гриничским временем . . . . .	157
§ 3.05. Эфемеридное время . . . . .	161
§ 3.06. Поправка за эфемеридное время . . . . .	165
§ 3.07. Атомное время . . . . .	167
§ 3.08. Юлианский период. Юлианские дни . . . . .	174
<b>Глава 4. Астрономические постоянные . . . . .</b>	<b>176</b>
§ 4.01. Новая система астрономических постоянных (система астрономических постоянных МАС 1964) . . . . .	177
§ 4.02. Задачи астродинамики и астрономические постоянные . . . . .	184
§ 4.03. Результаты радиолокационных определений астрономической единицы в км . . . . .	185
§ 4.04. Значения масс больших планет . . . . .	185
§ 4.05. Астродинамические характеристики тел Солнечной системы . . . . .	188
§ 4.06. Астродинамические постоянные, связанные с Землей . . . . .	195
§ 4.07. Астродинамические постоянные, связанные с Луной . . . . .	198
§ 4.08. Либрация Луны . . . . .	203
<b>Литература к части I . . . . .</b>	<b>208</b>

*Часть II***ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ (АКСЕНОВ Е. П.)**

<i>Глава 1. Общая теория невозмущенного кеплеровского движения</i>	211
§ 1.01. Постановка задачи. Различные формы дифференциальных уравнений движения	211
§ 1.02. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения	214
§ 1.03. Типы невозмущенного кеплеровского движения	216
§ 1.04. Элементы орбиты	218
§ 1.05. Формулы, связывающие постоянные интегрирования и элементы орбиты	220
<i>Глава 2. Основные формулы невозмущенного кеплеровского движения</i>	221
§ 2.01. Эллиптическое движение	221
§ 2.02. Круговое движение	224
§ 2.03. Гиперболическое движение	225
§ 2.04. Параболическое движение	227
§ 2.05. Прямолинейное движение	229
§ 2.06. Вычисление эфемерид планет и комет	230
<i>Глава 3. Разложение координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды</i>	231
§ 3.01. Разложение функций эксцентрической аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии	231
§ 3.02. Разложение функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии	234
§ 3.03. Первые члены рядов по кратным средней аномалии для некоторых функций	235
§ 3.04. Формула Лагранжа	236
§ 3.05. Ряды по степеням эксцентриситета	237
§ 3.06. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии	239
§ 3.07. Ряды по кратным истинной аномалии	241
§ 3.08. Разложения координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды по степеням времени	242
§ 3.09. Степенные ряды в случае эллиптического движения	244
Литература к части II	245

*Часть III***МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТ (РЯБОВ Ю. А.)**

<i>Глава 1. Вычисление координат невозмущенного кеплеровского движения по элементам орбиты</i>	247
§ 1.01. Вычисление орбитальных координат в случае эллиптической или гиперболической орбит	247
§ 1.02. Вычисление орбитальных координат в случае параболической орбиты	248
§ 1.03. Вычисление орбитальных координат в случае орбит, эксцентриситет которых близок к единице	248
§ 1.04. Вычисление гелиоцентрических прямоугольных эклиптических и экваториальных координат	249

<b>Глава 2. Определение орбит</b> . . . . .	250
§ 2.01. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит . . . . .	250
§ 2.02. Особые случаи, встречающиеся при вычислении гелиоцентрических координат . . . . .	254
§ 2.03. Определение гелиоцентрических положений по четырем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит . . . . .	255
§ 2.04. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае параболической орбиты . . . . .	257
§ 2.05. Вычисление элементов эллиптической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям . . . . .	260
§ 2.06. Определение элементов гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям . . . . .	262
§ 2.07. Определение элементов параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям . . . . .	263
§ 2.08. Уравнения Ламберта и Эйлера . . . . .	264
§ 2.09. Определение элементов эллиптической или гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям с помощью уравнения Ламберта . . . . .	265
§ 2.10. Определение элементов круговой орбиты по двум наблюдениям . . . . .	268
§ 2.11. Вычисление элементов гелиоцентрической орбиты по положению и скорости в начальный момент . . . . .	270
<b>Глава 3. Улучшение первоначальной орбиты</b> . . . . .	273
§ 3.01. Дифференциальное исправление орбит. Постановка задачи . . . . .	273
§ 3.02. Выражения для производных от координат по элементам (или по функциям элементов) . . . . .	275
§ 3.03. Условные уравнения, составляемые по наблюдениям долготы и широты небесного тела . . . . .	281
<b>Глава 4. Определение и улучшение элементов орбит искусственных спутников Земли</b> . . . . .	283
§ 4.01. Определение элементов орбит ИСЗ по положению и скорости в момент выхода на орбиту . . . . .	283
§ 4.02. Определение предварительных элементов орбиты ИСЗ по наблюдениям . . . . .	285
§ 4.03. Улучшение орбит ИСЗ . . . . .	287
Литература к части III . . . . .	287
 <b>Часть IV</b>	
<b>ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ (ГРЕБЕНИКОВ Е. А., РЯБОВ Ю. А.)</b>	
<b>Глава 1. Дифференциальные уравнения движения задачи <math>n</math> тел в координатах</b> . . . . .	288
§ 1.01. Уравнения абсолютного движения . . . . .	288
§ 1.02. Уравнение Лагранжа — Якоби . . . . .	290
§ 1.03. Уравнения движения в барицентрических прямоугольных координатах . . . . .	291
§ 1.04. Уравнения движения в координатах Якоби . . . . .	292
§ 1.05. Уравнения относительного движения в прямоугольных координатах . . . . .	293
§ 1.06. Уравнения движения в идеальных прямоугольных координатах Ганзена . . . . .	295

§ 1.07. Уравнения абсолютного движения в цилиндрических координатах . . . . .	297
§ 1.08. Уравнения относительного движения в цилиндрических координатах . . . . .	299
§ 1.09. Уравнения абсолютного движения в сферических координатах . . . . .	301
§ 1.10. Уравнения относительного движения в сферических координатах . . . . .	302
§ 1.11. Уравнения движения в полярных координатах Гаусена . . . . .	305
§ 1.12. Уравнения Клеро — Лапласа . . . . .	306
§ 1.13. Общее правило составления канонических уравнений . . . . .	307
§ 1.14. Первая каноническая форма уравнений абсолютного движения . . . . .	309
§ 1.15. Вторая каноническая форма уравнений абсолютного движения . . . . .	310
§ 1.16. Третья каноническая форма уравнений абсолютного движения . . . . .	312
§ 1.17. Первая каноническая форма уравнений относительного движения . . . . .	313
§ 1.18. Вторая каноническая форма уравнений относительного движения . . . . .	314
§ 1.19. Третья каноническая форма уравнений относительного движения . . . . .	316
§ 1.20. Уравнение Гамильтона — Якоби. Метод Гамильтона — Якоби . . . . .	318
§ 1.21. Уравнения движения системы в векторной форме . . . . .	319
<b>Глава 2. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения небесных тел . . . . .</b>	<b>321</b>
§ 2.01. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера . . . . .	321
§ 2.02. Силовая функция системы тел . . . . .	323
§ 2.03. Разложение силовой функции двух тел . . . . .	324
§ 2.04. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в абсолютной прямоугольной системе координат . . . . .	326
§ 2.05. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в относительной прямоугольной системе координат . . . . .	328
§ 2.06. Каноническая форма уравнений поступательно-вращательного движения системы тел . . . . .	330
<b>Глава 3. Дифференциальные уравнения возмущенного движения тела для различных систем оскулирующих элементов . . . . .</b>	<b>332</b>
§ 3.01. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных . . . . .	332
§ 3.02. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	334
§ 3.03. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	336
§ 3.04. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	337
§ 3.05. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	338
§ 3.06. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Якоби . . . . .	339
§ 3.07. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Делоне . . . . .	340
§ 3.08. Две системы канонических элементов Пуанкаре . . . . .	340
§ 3.09. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов . . . . .	342
§ 3.10. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов . . . . .	343
§ 3.11. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай) . . . . .	344
§ 3.12. Связь между прямоугольными координатами движущейся точки и различными системами канонических элементов . . . . .	345

<b>Глава 4. Дифференциальные уравнения возмущенного движения задачи <math>n</math> тел для различных систем оскулирующих элементов</b> . . . . .	<b>347</b>
§ 4.01. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	347
§ 4.02. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	349
§ 4.03. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	350
§ 4.04. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	350
§ 4.05. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах Якоби . . . . .	351
§ 4.06. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах Делоне . . . . .	353
§ 4.07. Две системы канонических элементов Пуанкаре . . . . .	353
§ 4.08. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов . . . . .	355
§ 4.09. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов . . . . .	356
§ 4.10. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай) . . . . .	357
<b>Глава 5. Специальные функции</b> . . . . .	<b>359</b>
§ 5.01. Эллиптические интегралы и эллиптические функции . . . . .	359
§ 5.02. Гипергеометрический ряд и гипергеометрическая функция . . . . .	366
§ 5.03. Полиномы Лежандра. Функции Лежандра . . . . .	368
§ 5.04. Присоединенные функции Лежандра . . . . .	371
§ 5.05. Сферические функции . . . . .	373
§ 5.06. Цилиндрические функции. Функции Бесселя . . . . .	375
§ 5.07. Функции Ламе . . . . .	379
§ 5.08. Полиномы Гегенбауэра. Коэффициенты Лапласа . . . . .	380
§ 5.09. Числа Коши . . . . .	384
<b>Глава 6. Разложение возмущающей функции</b> . . . . .	<b>385</b>
§ 6.01. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай круговых орбит) . . . . .	385
§ 6.02. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай малых эксцентриситетов и взаимного наклона) . . . . .	390
§ 6.03. Разложение возмущающей функции в случае произвольного взаимного наклона . . . . .	400
§ 6.04. Вековая часть возмущающей функции в двухпланетной задаче . . . . .	402
§ 6.05. Численные методы разложения возмущающей функции . . . . .	404
§ 6.06. Полуаналитический метод Брауэра — Клеменса разложения возмущающей функции . . . . .	405
<b>Глава 7. Аналитические методы вычисления возмущений координат</b> . . . . .	<b>408</b>
§ 7.01. Метод Хилла . . . . .	408
§ 7.02. Метод Ганзена . . . . .	412
§ 7.03. Метод Брауэра . . . . .	415
§ 7.04. Метод Лапласа — Ньюкома . . . . .	419
<b>Глава 8. Аналитические методы вычисления возмущений элементов</b> . . . . .	<b>421</b>
§ 8.01. Общий вид возмущений элементов. Порядок, степень, ранг и класс возмущений . . . . .	421
§ 8.02. Метод Гаусса вычисления вековых возмущений первого порядка . . . . .	422

§ 8.03. Метод Лагранжа определения вековых возмущений в двухпланетной задаче . . . . .	424
§ 8.04. Основы метода Делоне . . . . .	426
§ 8.05. Связь между возмущениями координат и возмущениями элементов . . . . .	430
<b>Глава 9. Методы теории возмущений, основанные на схемах осреднения</b> . . . . .	<b>432</b>
§ 9.01. Основные схемы осреднения возмущающей функции в двухпланетной задаче . . . . .	432
§ 9.02. Уравнения осредненных схем ограниченной круговой задачи трех тел, определяющие промежуточную орбиту (нулевое приближение). Их первые интегралы . . . . .	436
§ 9.03. Разложение возмущающей функции для схем осреднения . . . . .	440
§ 9.04. Основы метода теории возмущений . . . . .	442
<b>Глава 10. Теория движения Луны</b> . . . . .	<b>443</b>
§ 10.01. Уравнения основной проблемы в теории движения Луны . . . . .	444
§ 10.02. Разложение возмущающей функции в основной проблеме теории движения Луны . . . . .	445
§ 10.03. Решение Делоне основной проблемы в теории движения Луны . . . . .	447
§ 10.04. Основные этапы построения теории Хилла — Брауна движения Луны . . . . .	458
§ 10.05. Промежуточная орбита в теории Хилла — Брауна . . . . .	462
§ 10.06. Общее решение уравнений основной проблемы в теории Хилла — Брауна . . . . .	465
§ 10.07. Переход к сферическим координатам . . . . .	467
§ 10.08. Численные значения постоянных интегрирования и параметров в теории Хилла — Брауна . . . . .	468
§ 10.09. Окончательные выражения для долготы $V$ , широты $\beta$ и синуса параллакса $\sin p_L$ , соответствующие решению основной проблемы . . . . .	470
§ 10.10. Возмущения Луны, обусловленные притяжением планет, фигурами Земли и Луны . . . . .	477
§ 10.11. Уточнение теории движения Луны Хилла — Брауна . . . . .	481
<b>Глава 11. Теория движения больших планет</b> . . . . .	<b>484</b>
§ 11.01. Внутренние планеты . . . . .	487
§ 11.02. Внешние планеты . . . . .	493
§ 11.03. Полиномиальное представление оскулирующих элементов орбит внешних планет . . . . .	498
§ 11.04. Полиномиальное представление прямоугольных гелиоцентрических координат Юпитера и Сатурна . . . . .	501
§ 11.05. Тригонометрическая теория вековых возмущений орбит больших планет . . . . .	504
<b>Глава 12. Движение малых тел Солнечной системы</b> . . . . .	<b>508</b>
§ 12.01. Невозмущенное движение спутников . . . . .	509
§ 12.02. Возмущения оскулирующих элементов орбит спутников, вызываемые сжатием планеты . . . . .	510
§ 12.03. Возмущения в движении спутников, вызываемые притяжением Солнца . . . . .	513
§ 12.04. Общие сведения о характере движения малых планет . . . . .	513
§ 12.05. Возмущенное движение малых планет . . . . .	514
§ 12.06. Общие сведения о движении комет . . . . .	517
§ 12.07. Возмущенное движение комет . . . . .	518
<b>Литература к части IV</b> . . . . .	<b>519</b>

*Часть V***ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ (ГРЕБЕНИКОВ Е. А.)**

<i>Глава 1. Неограниченная задача трех тел . . . . .</i>	<b>524</b>
§ 1.01. Различные формы дифференциальных уравнений движения задачи трех тел . . . . .	524
§ 1.02. Лагранжевы решения. Точки либрации . . . . .	527
<i>Глава 2. Ограниченная круговая задача трех тел . . . . .</i>	<b>533</b>
§ 2.01. Дифференциальные уравнения движения. Интеграл Якоби . . . . .	533
§ 2.02. Поверхность нулевой относительной скорости . . . . .	534
§ 2.03. Лагранжевы решения ограниченной круговой задачи трех тел. Точки либрации . . . . .	535
§ 2.04. Различные гравитационные сферы . . . . .	536
§ 2.05. Периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел . . . . .	539
§ 2.06. Критерий Тиссерана . . . . .	542
§ 2.07. Уравнения ограниченной круговой задачи в эллипсоидальных переменных . . . . .	542
§ 2.08. Уравнение Гамильтона — Якоби в эллипсоидальных переменных . . . . .	546
§ 2.09. Понижение порядка системы уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел . . . . .	547
<i>Глава 3. Другие ограниченные задачи трех тел . . . . .</i>	<b>548</b>
§ 3.01. Общий случай ограниченной задачи трех тел . . . . .	548
§ 3.02. Задача двух неподвижных центров . . . . .	549
§ 3.03. Задача Хилла . . . . .	551
Литература к части V . . . . .	552

*Часть VI***ДВИЖЕНИЕ****ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ (АКСЕНОВ Е. П.)**

<i>Глава 1. Гравитационное поле Земли. Дифференциальные уравнения движения искусственного спутника . . . . .</i>	<b>555</b>
§ 1.01. Потенциал притяжения Земли . . . . .	555
§ 1.02. Стандартная Земля . . . . .	559
§ 1.03. Дифференциальные уравнения движения спутника . . . . .	562
§ 1.04. Элементы орбиты ИСЗ. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов . . . . .	563
<i>Глава 2. Возмущения, вызываемые второй зональной гармоникой геопотенциала . . . . .</i>	<b>565</b>
§ 2.01. Возмущения от второй зональной гармоники как функции средней аномалии . . . . .	565
§ 2.02. Возмущения от второй зональной гармоники как функции истинной аномалии . . . . .	570
§ 2.03. Случай орбит с малыми эксцентриситетами . . . . .	573

<b>Глава 3. Теория промежуточных орбит ИСЗ</b> . . . . .	<b>577</b>
§ 3.01. Задачи Штерна, Гарфинкеля и Акнеса . . . . .	577
§ 3.02. Задачи Баррара, Винти и Кислика . . . . .	581
§ 3.03. Обобщенная задача двух неподвижных центров . . . . .	584
§ 3.04. Промежуточная орбита, основанная на обобщенной задаче двух неподвижных центров . . . . .	588
§ 3.05. Дифференциальные уравнения для элементов промежуточной орбиты . . . . .	591
<b>Глава 4. Возмущения гравитационной природы</b> . . . . .	<b>593</b>
§ 4.01. Возмущения от зональных гармоник высших порядков . . . . .	593
§ 4.02. Возмущения от зональной гармоник произвольного порядка . . . . .	597
§ 4.03. Возмущения от тессеральных и секториальных гармоник . . . . .	601
§ 4.04. Лунно-солнечные возмущения . . . . .	603
§ 4.05. Определение постоянных интегрирования . . . . .	607
§ 4.06. Вычисление возмущенных координат спутника . . . . .	608
<b>Глава 5. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы и све- товым давлением</b> . . . . .	<b>609</b>
§ 5.01. Плотность атмосферы . . . . .	609
§ 5.02. Стандартная атмосфера . . . . .	612
§ 5.03. Сила сопротивления атмосферы . . . . .	612
§ 5.04. Основные возмущения от сопротивления атмосферы . . . . .	613
§ 5.05. Продолжительность жизни спутника . . . . .	614
§ 5.06. Эволюция орбиты на больших промежутках времени . . . . .	616
§ 5.07. Сила светового давления . . . . .	617
§ 5.08. Возмущения от светового давления (без учета тени) . . . . .	618
§ 5.09. Возмущения от светового давления (с учетом тени) . . . . .	620
§ 5.10. Теневая функция . . . . .	622
<b>Глава 6. Другие возмущения в движении ИСЗ</b> . . . . .	<b>625</b>
§ 6.01. Возмущения, вызываемые прецессией и нутацией экваториаль- ной плоскости Земли . . . . .	625
§ 6.02. Возмущения, вызываемые приливной деформацией Земли . . . . .	628
§ 6.03. Релятивистские эффекты. Влияние электромагнитных сил и притяжения атмосферы . . . . .	630
Литература к части VI . . . . .	632

## Часть VII

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ (РЯБОВ Ю. А.)

<b>Глава 1. Интерполирование и приближение функций</b> . . . . .	<b>635</b>
§ 1.01. Таблица разностей функции . . . . .	635
§ 1.02. Интерполяционные формулы . . . . .	637
§ 1.03. Остаточные члены интерполяционных формул . . . . .	639
§ 1.04. Обратное интерполирование . . . . .	642
§ 1.05. Интерполирование функции двух переменных . . . . .	643
§ 1.06. Приближение функций с помощью сплайнов . . . . .	644
§ 1.07. Среднеквадратичные приближения функций . . . . .	645
§ 1.08. Сглаживание табличных значений функций . . . . .	647
§ 1.09. Равномерные приближения . . . . .	648



§ 1.10. Аппроксимация периодических функций с известным периодом тригонометрическими полиномами по методу наименьших квадратов	649
§ 1.11. Аппроксимация условно-периодических функций с известными частотами полиномом Фурье по методу наименьших квадратов	650
§ 1.12. Определение неизвестных частот периодической или условно-периодической функции по совокупности табличных данных	651
§ 1.13. Выделение «вековой части» функции по совокупности табличных значений	653
<b>Глава 2. Численное дифференцирование и интегрирование</b>	<b>655</b>
§ 2.01. Численное дифференцирование с помощью интерполяционных формул	655
§ 2.02. Другие формулы численного дифференцирования	657
§ 2.03. Численное интегрирование функции по таблице ее значений с постоянным шагом	658
§ 2.04. Квадратурные формулы Гаусса	660
§ 2.05. Численное интегрирование сильно осциллирующих функций	663
§ 2.06. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул	664
§ 2.07. Квадратурные формулы для несобственных интегралов	665
<b>Глава 3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений</b>	<b>667</b>
§ 3.01. Метод Рунге — Кутты	668
§ 3.02. Метод Адамса	670
§ 3.03. Метод Коуэлла	672
§ 3.04. Метод Штермера (для уравнений второго порядка)	673
§ 3.05. Метод Коуэлла (1-й вариант)	674
§ 3.06. Метод Коуэлла (2-й вариант)	675
§ 3.07. Накопление погрешностей при численном интегрировании	676
§ 3.08. Метод Энке численного интегрирования уравнений возмущенного движения	676
§ 3.09. Общая постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай линейной краевой задачи	678
§ 3.10. Метод стрельбы при нахождении решения линейной двухточечной краевой задачи	679
§ 3.11. Краевая задача для квазилинейной системы с линейными краевыми условиями	682
§ 3.12. Краевая задача для системы, близкой к нелинейной невозмущенной системе	683
§ 3.13. Применение метода градиентного спуска для решения нелинейной краевой задачи общего вида	684
§ 3.14. Разностный метод решений краевых задач	687
<b>Глава 4. Метод наименьших квадратов решения алгебраических и трансцендентных уравнений</b>	<b>689</b>
§ 4.01. Постановка задачи	689
§ 4.02. Линейные и равнооточные условные уравнения	690
§ 4.03. Вероятностные оценки погрешности решения	691
§ 4.04. Неравнооточные условные уравнения	691
§ 4.05. Линеаризация условных уравнений общего вида	692
Литература к части VII	693

## Часть VIII

ОПТИМАЛЬНЫЕ  
И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АСТРОДИНАМИКИ (ГРЕБЕНИКОВ Е. А.)

<b>Глава 1. Сведения из вариационного исчисления и математической теории оптимальных процессов . . . . .</b>	<b>694</b>
§ 1.01. Понятие функционала . . . . .	696
§ 1.02. Задача Лагранжа. Множители Лагранжа. Уравнения Эйлера . . . . .	698
§ 1.03. Первая формулировка задачи Майера . . . . .	699
§ 1.04. Вторая формулировка задачи Майера . . . . .	699
§ 1.05. Изопериметрическая задача . . . . .	700
§ 1.06. Задача Больца . . . . .	700
§ 1.07. Третья формулировка задачи Майера. Обобщение теоремы Лагранжа. Характеристические уравнения (обобщенные уравнения Эйлера — Лагранжа) . . . . .	701
§ 1.08. Свойство множителей Лагранжа на ломаных экстремалях. Условие Вейерштрасса — Эрдмана . . . . .	703
§ 1.09. Принцип максимума Понтрягина . . . . .	704
§ 1.10. Принцип оптимальности Беллмана . . . . .	706
<b>Глава 2. Основные уравнения динамики тел переменной массы . . . . .</b>	<b>707</b>
§ 2.01. Основное уравнение динамики точки переменной массы (уравнение Мещерского) . . . . .	707
§ 2.02. Обобщенное уравнение Мещерского . . . . .	708
§ 2.03. Уравнения движения тела переменной массы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода) . . . . .	709
§ 2.04. Канонические уравнения движения тела переменной массы . . . . .	709
<b>Глава 3. Некоторые оптимальные задачи динамики полета в околоземном пространстве . . . . .</b>	<b>711</b>
§ 3.01. Уравнения движения ракеты. Формула Циолковского . . . . .	711
§ 3.02. Развернутая форма характеристических уравнений для задачи о движении ракеты . . . . .	714
§ 3.03. Определение базис-вектора и $p$ -траектории. Определение функций переключения . . . . .	715
§ 3.04. Определение импульсной тяги. Точки соединения на оптимальных траекториях . . . . .	717
§ 3.05. Максимизация высоты вертикального подъема ракеты в однородном поле тяжести . . . . .	717
§ 3.06. Максимизация горизонтальной дальности полета ракеты в однородном поле тяжести при заданной программе расхода топлива . . . . .	720
§ 3.07. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести . . . . .	722
§ 3.08. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести при наличии аэродинамического сопротивления . . . . .	723
§ 3.09. Определение оптимальной программы тяги при вертикальном подъеме ракеты в неоднородном поле тяготения в сопротивляющейся атмосфере . . . . .	725
§ 3.10. Задача о максимизации полной энергии космического аппарата . . . . .	726
§ 3.11. Задача о минимизации характеристической скорости маневра . . . . .	728

<b>Глава 4. Межорбитальные перелеты . . . . .</b>	<b>729</b>
§ 4.01. Простейшая краевая задача . . . . .	729
§ 4.02. Уравнение для базиса-вектора на участке нулевой тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения . . . . .	730
§ 4.03. Уравнение для базиса-вектора на участке промежуточной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения . . . . .	732
§ 4.04. Уравнение для базиса-вектора на участке максимальной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения . . . . .	733
§ 4.05. Метод $p$ -траекторий. Структура оптимальной траектории . . . . .	733
§ 4.06. Связь между величиной импульса и элементами эллиптической орбиты . . . . .	734
§ 4.07. Оптимальный $l$ -импульсный переход между двумя заданными компланарными эллиптическими орбитами . . . . .	735
§ 4.08. Оптимальный переход между двумя компланарными круговыми орбитами . . . . .	737
§ 4.09. Оптимальный переход между двумя соосными орбитами . . . . .	738
§ 4.10. Другие траектории перелета в случае компланарных орбит планет старта и назначения . . . . .	738
§ 4.11. Траектории полета вблизи нескольких планет . . . . .	740
§ 4.12. Начальный этап (запуск и уход) межпланетной траектории . . . . .	743
§ 4.13. Полеты к Луне . . . . .	744
Литература к части VIII . . . . .	748

## Часть IX

### ДВИЖЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС (ДЕМИН В. Г.)

<b>Глава 1. Дифференциальные уравнения движения небесных тел относительно центра масс . . . . .</b>	<b>751</b>
§ 1.01. Вращение Земли относительно центра масс . . . . .	751
§ 1.02. Канонические уравнения вращательного движения небесных тел . . . . .	754
§ 1.03. Астродинамические дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника относительно центра масс . . . . .	759
§ 1.04. Моменты сил, действующих на спутник . . . . .	762
§ 1.05. Движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском поле . . . . .	764
§ 1.06. Задача о поступательно-вращательном движении двух гравитирующих динамически симметричных тел . . . . .	768
§ 1.07. Вращение Луны . . . . .	770
§ 1.08. Дифференциальные уравнения движения деформируемого небесного тела . . . . .	771
§ 1.09. Теория фигур небесных тел . . . . .	772
<b>Глава 2. Устойчивость и стабилизация вращательного движения искусственных небесных тел . . . . .</b>	<b>777</b>
§ 2.01. Устойчивость движения спутников в гравитационном поле сил . . . . .	777
§ 2.02. Устойчивость движения спутников под действием моментов сил различной природы . . . . .	781
§ 2.03. Стабилизация движения спутников и космических аппаратов . . . . .	784
Литература к части IX . . . . .	786

## Часть X

## КАЧЕСТВЕННАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА (ГРЕБЕНИКОВ Е. А.)

<b>Глава 1. Периодические и условно-периодические решения. Финальные движения</b> . . . . .	<b>788</b>
§ 1.01. Метод малого параметра Пуанкаре . . . . .	788
§ 1.02. Метод Ляпунова . . . . .	790
§ 1.03. Периодические решения, полученные методом Пуанкаре . . . . .	792
§ 1.04. Периодические решения, полученные методом Ляпунова . . . . .	795
§ 1.05. Периодические решения, полученные качественными методами . . . . .	797
§ 1.06. Почти-периодические функции и их свойства. Условно-периодические функции . . . . .	798
§ 1.07. Теорема Арнольда о существовании условно-периодических решений гамильтоновых систем . . . . .	831
§ 1.08. Условно-периодические решения в небесной механике. Геометрическая интерпретация . . . . .	803
§ 1.09. Финальные движения в задаче трех тел. Захват и обмен в задаче трех тел . . . . .	808
<b>Глава 2. Проблема интегрируемости и сходимости рядов в небесной механике</b> . . . . .	<b>811</b>
§ 2.01. Теорема Пуассона об интеграле гамильтоновой системы . . . . .	812
§ 2.02. Теорема Брунса о несуществовании алгебраических первых интегралов задачи трех тел, отличных от классических . . . . .	813
§ 2.03. Теорема Пуанкаре о несуществовании однозначных аналитических первых интегралов гамильтоновой системы . . . . .	814
§ 2.04. Случаи интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных . . . . .	815
§ 2.05. Теорема о неприводимости уравнения Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной круговой задачи трех тел к уравнению типа Штеккеля . . . . .	817
§ 2.06. Соударения . . . . .	817
§ 2.07. Решение задачи трех тел в виде рядов, сходящихся для всех вещественных значений времени. Теорема Зундмана . . . . .	820
§ 2.08. Сходимость рядов Хилла в основной проблеме теории движения Луны . . . . .	821
§ 2.09. Характер сходимости рядов классической теории возмущений . . . . .	822
§ 2.10. Теоремы Пуанкаре о ранге и классе возмущений . . . . .	825
§ 2.11. Поиск частных, первых и общих интегралов заданной аналитической структуры обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ. Приложение к ограниченной задаче трех тел . . . . .	826
§ 2.12. Поиск решений уравнения Гамильтона — Якоби на ЭВМ. Приложение к ограниченной задаче трех тел . . . . .	827
<b>Глава 3. Проблема устойчивости в небесной механике</b> . . . . .	<b>829</b>
§ 3.01. Определение устойчивости по Ляпунову . . . . .	829
§ 3.02. Определение орбитальной устойчивости . . . . .	831
§ 3.03. Другие определения устойчивости . . . . .	832
§ 3.04. Знакопостоянные и знакоопределенные функции. Полная производная в силу системы . . . . .	834
§ 3.05. Теоремы Ляпунова об устойчивости . . . . .	835
§ 3.06. Устойчивость по отношению к части переменных. Теорема В. В. Румянцева . . . . .	836

§ 3.07. Связка первых интегралов. Способ Н. Г. Четаева . . . . .	837
§ 3.08. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема И. Г. Малкина . . . . .	838
§ 3.09. Теоремы Лапласа — Лагранжа и Пуассона об отсутствии вековых возмущений больших полуосей . . . . .	839
§ 3.10. Теоремы об устойчивости планетных орбит . . . . .	839
§ 3.11. Теоремы Арнольда об устойчивости решения гамильтоновой системы в общем эллиптическом случае . . . . .	841
§ 3.12. Устойчивость лагранжевых равновесных решений задачи трех тел . . . . .	843
§ 3.13. Устойчивость других решений задачи трех тел . . . . .	846
§ 3.14. Устойчивость орбитальных движений искусственных спутников	847
Литература к части X . . . . .	848
Предметный указатель . . . . .	853