

**ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. Т.1**

М.: Мир, 1972, 300 стр.

В монографии Чжена впервые в мировой литературе обобщен и систематизирован материал по одному из наиболее актуальных и интересных направлений механики жидкости и газа — отрывным течениям, возникающим при обтекании тел вязкой жидкостью или газом во всем диапазоне скоростей, от дозвукового до гиперзвукового, при течениях в каналах, в газовых машинах, турбинах и т. п. Отражая современное состояние в этой бурно развивающейся области гидро- и аэродинамики, книга наряду с достаточно глубоким теоретическим анализом содержит богатые экспериментальные материалы, весьма полезные для практических приложений.

Монография адресована научным работникам и инженерам, специализирующимся в области гидро- и аэродинамики и теплопередачи в приложениях к самолетам, ракетам и космическим летательным аппаратам, газовым машинам и двигателям, скоростным надводным и подводным кораблям, гидротурбинам, компрессорам и т. п. Она может служить также учебным пособием и справочником для студентов и аспирантов университетов и вузов.

**Содержание**

Предисловие редактора русского издания	5
От автора	8
Основные обозначения	9
<b>Глава I. Введение в проблемы отрыва потока</b>	<b>11</b>
1. Механизм отрыва потока	13
2. Современные достижения в теории отрыва потока	39
3. Механизм отрывного течения	46
4. Расчет отрыва потока	60
Литература	64
<b>Глава II. Отрыв установившегося ламинарного потока жидкости на двумерных поверхностях</b>	<b>68</b>
1. Примеры отрыва двумерного установившегося ламинарного потока	69
2. Теоретические методы расчета отрыва ламинарного потока	72
3. Обсуждение	104
Литература	106
<b>Глава III. Отрыв установившегося ламинарного потока жидкости на телах вращения и других пространственных телах</b>	<b>109</b>
1. Отрыв трехмерного ламинарного потока	110
2. Обсуждение	112
3. Отрыв ламинарного потока на теле вращения и треугольном крыле	116
Литература	136
<b>Глава IV. Отрыв турбулентного потока жидкости</b>	<b>141</b>
1. Вычисление толщины потери импульса	145
2. Критерии отрыва внешнего несжимаемого двумерного турбулентного потока	153

3. Отрыв внутреннего потока	172
4. Отрыв осесимметричного и трехмерного установившихся потоков жидкости	192
Литература	203
<b>Глава V. Отрыв неустановившегося потока жидкости</b>	<b>210</b>
1. Отрыв пограничного слоя при внезапном возникновении движения	214
2. Отрыв осесимметричного неустановившегося потока	219
3. Отрыв пограничного слоя при постоянном ускорении	221
4. Отрыв ламинарного потока от движущейся стенки	223
Литература	226
<b>Глава VI. Отрыв потока газа</b>	<b>228</b>
1. Определение точки отрыва ламинарного потока газа без взаимодействия	231
2. Характер и параметры отрывных течений, вызванных скачком уплотнения, и их влияние вверх и вниз по потоку	243
3. Приращение давления при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем	253
4. Расчет отрыва, вызванного скачком уплотнения	262
Литература	288
Приложение	293

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ИЗДАНИЯ

---

С отрывом потока от твердых стенок приходится иметь дело во всех отраслях техники, связанных с течением жидкости или газа: гидротехнике, транспортировке жидкостей и газов, гидравлических и газовых машинах, судостроении, авиации и ракетной технике. В большинстве случаев отрыв — явление, приводящее к вредным последствиям: увеличению сопротивления движению жидкости или газа в трубопроводах («меслные» сопротивления), увеличению сопротивления движению твердого тела в жидкости, уменьшению максимальной подъемной силы крыла, нестационарным нагрузкам, а при высоких сверхзвуковых скоростях — к возможности появления узких зон больших тепловых потоков к летательному аппарату и т. п.

Первая расчетная схема отрывного обтекания тел — двумерное «струйное» течение невязкой жидкости и газа с «мертвой» зоной за телом — была исследована Кирхгофом, Релеем, Леви-Чивита, Жуковским, Чаплыгиным и др. След за телом не является, однако, «мертвой» зоной, структура его существенно зависит от параметров подобия, поэтому схема струйного течения не подтвердилась экспериментальными данными.

Следующая схема отрывного течения невязкой жидкости была дана в вихревой теории сопротивления Кармана. Важнейший шаг в понимании природы отрыва — влияние вязкости жидкости или газа — был сделан благодаря теории ламинарного пограничного слоя Прандтля. При больших числах Рейнольдса отрыв возможен, если есть положительный градиент давления во «внешнем» течении. Однако остались нерешенными следующие два вопроса: а) применима ли теория пограничного слоя для окрестности точки отрыва, б) как рассчитывать отрывное течение в целом.

Значительно более сложным, чем отрыв двумерных течений, оказался отрыв трехмерных течений, а также отрыв турбулентного пограничного слоя.

Интерес к отрывным течениям, возросший в последние годы, по-видимому, обусловлен неизбежностью и серьезными последствиями отрывных течений в ракетной технике и расширением возможностей расчета благодаря вычислительным машинам. Расчетные и теоретические исследования сосредоточены пока на реше-

нии уравнений Навье — Стокса для небольших чисел Рейнольдса и для предельного случая очень больших чисел Рейнольдса (асимптотические методы). Наибольшие успехи достигнуты в исследовании отрывных течений при сверхзвуковых скоростях. Для случая ламинарного течения и  $Re \rightarrow \infty$  исследуются течения вязкой жидкости и газа в окрестности точки отрыва и делаются попытки построить течение в целом с учетом действия вязкости только в тонких слоях (поверхностях тенгенциального разрыва).

Сложность и многообразие отрывных течений обуславливает очень большое количество экспериментальных исследований, причем эксперимент еще долго сохранит свое значение, в особенности для отрывных течений, к которым в первую очередь относятся слова Жуковского: «Независимо от трудностей интегрирования уравнений гидродинамики с соблюдением тех разнообразных граничных условий, которые предоставляет практика, мы не можем без опыта сделать выбора между различными теоретически возможными течениями».

В опубликованных книгах по аэро- и гидродинамике отрыву посвящаются небольшие разделы, большинство же результатов исследований публикуется в многочисленных журналах, докладах, отчетах. Книга Чжена является первой, специально посвященной отрыву монографией, причем автор попытался собрать материалы, относящиеся как к сущности явления, методам расчета, так и результатам экспериментальных исследований отрыва ламинарного и турбулентного пограничных слоев жидкости и газа.

В русском издании книга выйдет в трех томах.

В первом томе изложены физическая картина и механизм отрыва потока различных видов, описаны возникающие при этом отрывные течения и характеризуются современные методы изучения отрывов потока. Рассмотрены теоретические методы исследования установившегося и неустановившегося отрыва ламинарного и турбулентного потоков жидкости и газа при обтекании двумерных, осесимметричных и пространственных тел, крыльев, а также при течении в плоских и осесимметричных каналах, диффузорах и т. п. Изложены все основные методы теоретического расчета отрыва пограничного слоя, дана критическая оценка этих методов и проведено сравнение с результатами экспериментов. Описаны случаи отрывов ламинарных потоков, вызванных падением скачка уплотнения при трансзвуковых, сверх- и гиперзвуковых скоростях.

Во втором томе дается классификация характеристик отрывных течений. Рассматриваются течения в ближнем и дальнем следе за телом, течение при отрыве с кромок крыльев.

В третьем томе рассматривается течение в донной области за телом с привлечением моделей отрывных течений Корста, Чепмена, теории Крокко — Лиза, Нэша, Карашимы, Макгрего-

ри, Крэбтри и др. Описана физическая природа процессов теплопередачи при отрыве потока. Излагаются теоретические и эмпирические методы расчета теплопередачи при отрывных течениях с дозвуковой, сверхзвуковой и гиперзвуковой скоростями. Описываются существующие методы управления отрывом потока, т. е. методы предотвращения или затягивания отрыва при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях с помощью щелей, перегородок, отсоса пограничного слоя и т. п. Рассматриваются методы уменьшения теплопередачи в зонах отрыва, а также методы создания преждевременного отрыва потока.

В целом книга может быть весьма полезной инженерам и научным работникам для ознакомления с проблемой и часто может освободить от необходимости поисков первоисточников. Книга не лишена недостатков: в ней не отражены работы последних лет, в особенности работы советских авторов. Этот недостаток частично устраняется помещенным в т. III приложением и дополнительным списком литературы. Небезупречно изложение: есть неточности, излишние подробности и повторения, а иногда отсутствуют существенные сведения. Эти недостатки по возможности были устранены в переводе

*Г. И. Майкапар*

## ОТ АВТОРА

---

Отрыв потока, как одна из важнейших проблем вязких течений, имеет большое значение не только для науки, но и для практических приложений. В книге предпринята попытка собрать все наиболее интересные результаты исследований основных физических процессов, методов расчета и экспериментов, опубликованных до настоящего времени.

Несмотря на некоторый недостаток материалов, полезных для практических приложений, монография будет полезна инженерам в качестве справочника.

Вашингтон

*П. К. Чжен*

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

---

- $A$  — площадь омываемой поверхности, площадь поперечного сечения тела;  
 $a$  — скорость звука;  
 $C_L$  — коэффициент подъемной силы;  
 $C_D$  — коэффициент сопротивления;  
 $c_f$  — коэффициент поверхностного трения;  
 $C_p$  — коэффициент давления;  
 $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  
 $D$  — сопротивление;  
 $d$  — диаметр;  
 $H = \delta^*/\theta$  — формпараметр пограничного слоя;  
 $h$  — коэффициент теплоотдачи; высота;  
 $Le$  — число Льюиса;  
 $M$  — число Маха;  
 $Nu$  — число Нуссельта;  
 $n$  — показатель степени;  
 $Pt$  — число Прандтля;  
 $p$  — давление;  
 $q$  — скоростной напор;  
 $Re$  — число Рейнольдса;  
 $T$  — температура;  
 $t$  — время;  
 $u$  — составляющая вектора скорости в направлении течения;  
 $v$  — составляющая вектора скорости в направлении  $y$ ;  
 $w$  — составляющая вектора скорости в направлении  $z$ ;  
 $x$  — координата в направлении течения;  
 $y$  — координата в направлении, перпендикулярном направлению  $x$ ;  
 $z$  — координата в направлении, перпендикулярном направлениям  $x$  и  $y$ ;  
 $\alpha$  — угол атаки;  
 $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей;  
 $\delta$  — толщина пограничного слоя яля свободного вязкого слоя;

- $\delta^*$  — толщина вытеснения пограничного слоя;  
 $\varepsilon$  — коэффициент турбулентной вязкости;  
 $\theta$  — толщина потери импульса пограничного слоя;  
 $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  
 $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  
 $\rho$  — плотность жидкости или газа;  
 $\tau$  — напряжение трения;  
 $\psi$  — функция тока.

### *Индексы*

- $e$  — условия на внешней границе пограничного слоя;  
 $S$  — отрыв;  
 $w$  — значение на стенке;  
 $\infty$  — условия в невозмущенном потоке.



## Обозначения

$dm$  — изменение массы в неустановившемся течении, отнесенное к импульсу;

$$f = \frac{(\delta_i - \delta_i^* - \theta) \delta_i}{(\delta_i - \delta_i^*)^2};$$

$h'$  — высота;

$\kappa$  — коэффициент турбулентного перемешивания,

$$\kappa = \frac{\overline{dm}/dx}{\rho_e \cdot u_e}, \text{ также } \kappa = (\delta - \delta^* - \theta)/(\delta - \delta^*);$$

$L$  — длина тела;

$$\overline{m} = \int_0^{\delta} \rho u \, dy;$$

$n$  — показатель степени;

$p$  — давление;

$R$  — точка присоединения потока;

$S$  — точка отрыва;

$T_{os}$  — температура торможения без подвода тепла;

$T_{re}$  — эффективная температура восстановления;

$x'$  — расстояние от горла следа до точки перехода;

$$\alpha_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_x}{\tau_y};$$

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \lim_{h \rightarrow 0} w/q;$$

$\Delta$  — размер пульсаций;

$$\Delta p = p - p_{\infty};$$

$\lambda$  — безразмерная функция,  $\lambda(\xi) = -2\xi \frac{d \ln u_e}{d\xi}$ ;

$$\xi = \int_0^x u_e(x) \, dx;$$

$\tau$  — напряжение трения;

$\varphi$  — угол, измеряемый от критической точки.

*Индексы*

- $B$  — донная область;  
 $0$  — значение перед точкой отрыва;  
— среднее значение.

Отрыв потока жидкости или газа — одно из многих характерных свойств вязкого течения — весьма важное и сложное явление. При отрыве потока происходят потери энергии. При дозвуковой скорости внешнего течения, например течения около летательного аппарата, линия тока отклоняется, сопротивление растет, подъемная сила падает, и образуются обратное течение и застойная зона. В диапазоне трансзвуковых скоростей проблемы управляемости и прочности усложняются из-за отрыва потока. В случае внутреннего течения отрыв может явиться причиной ухудшения коэффициента полезного действия. Оптимальные характеристики различных гидромашин и гидромеханизмов, таких, как вентиляторы, турбины, насосы, компрессоры и т. п., могут быть предсказаны только при правильном понимании явления отрыва потока, так как отрыв происходит как раз перед достижением максимальной нагрузки (или в этот момент). Функционирование простейших и широко распространенных устройств, например кранов домашнего водопровода, также может зависеть от отрыва потока.

Отрыв потока может оказаться полезным в различных инженерных приложениях. Например, тонкий профиль, пригодный для полета с большой скоростью, можно приспособить, используя отрыв потока, для полета с малой скоростью. Если вызвать отрыв на некотором участке верхней поверхности профиля с последующим присоединением потока, в результате получится очень толстый псевдопрофиль, который более пригоден для полета с малой скоростью.

Другой пример благоприятного отрыва потока — отрыв, вызываемый иглой, установленной перед лобовой частью тупого тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Поток может оторваться на игле и образовать конусообразную область течения перед лобовой частью тела. Под влиянием такой конической области отрывного течения изменится форма головной ударной волны от почти прямого скачка до косоугольной и соответственно значительно уменьшится сопротивление головной части. Аэродинамические характеристики отсеков экипажа и других отсеков, возвращаемых с аппарата, движущегося с большой скоростью, могут быть улучшены с помощью отрыва потока.

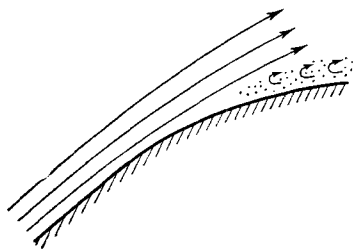
Отдельные части аппаратов, имеющих высокие скорости, двигателей, ядерных реакторов, возвращаемых с орбиты аппаратов

и т. п. работают в условиях высоких температур. Поэтому проблемы теплопередачи объединяются с проблемами гидро- и аэродинамики. Следовательно, проблемы теплопередачи и отрыва потока, достаточно сложные сами по себе, должны рассматриваться совместно.

Отрыв потока изучался многими исследователями, но еще предстоит немало сделать, чтобы освоить этот раздел механики жидкости и газа.

## 1. МЕХАНИЗМ ОТРЫВА ПОТОКА

Отрыв потока, вероятно, относится к наиболее важным гидродинамическим проблемам. Ввиду сложности проблемы дадим стро-



Ф и г. 1. Отрыв потока от гладкой поверхности.



Ф и г. 2. Отрыв потока от поверхности, имеющей изломы.

гое определение отрыву потока и застойному течению. Классическая концепция отрыва потока связана с вязкостью, поэтому ее часто называют «отрывом течения в пограничном слое» или «отрывом пограничного слоя». Необходимым условием отрыва потока является положительный градиент давления. Подробности, связанные с этими факторами, рассматриваются ниже.

В общем смысле в соответствии с концепцией отрыва Маскелла отрыв потока конечной протяженности неизбежен. Поток будет отрываться от поверхности твердого тела на задней кромке, а также перед ней, если реализуются необходимые для этого условия. Отрыв потока вызывается не только непрерывным процессом, имеющим место при обтекании гладкой поверхности, но также разрывами наклона поверхности (фиг. 1,2).

Вначале рассмотрим классическую концепцию отрыва, а затем приведем обобщенное определение понятия отрыва потока.

### 1.1. КЛАССИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ НАЧАЛА ОТРЫВА ПОТОКА НА ГЛАДКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Проблема отрыва потока столь же стара, как и теория пограничного слоя. Людвиг Прандтль еще до разработки теории пограничного слоя занимался отрывом потока. Он установил, что в реальных диффузорах не может быть получено расчетное восстановление давления. Эта проблема была, наконец, решена с помощью его новой теоретической концепции пограничного слоя [1]. На современном этапе развития теории отрыва потока эта концепция может считаться классической.

Классическая концепция отрыва потока сформулирована как для двумерного, так и для осесимметричного течений. Прандтль [2] установил, что необходимым условием отрыва потока от стенки является возрастание давления в направлении течения, т. е. положительный (или обратный) градиент давления в направлении течения (фиг. 3). Это утверждение справедливо как для течения сжимаемой среды (газа), так и для течения несжимаемой среды (жидкости). Следовательно, в общем случае отрыв потока происходит под действием положительного градиента давления и под влиянием ламинарных или турбулентных вязких явлений. В отсутствие одного из этих факторов поток не отрывается.

Например, при удалении пограничного слоя исключаются вязкие эффекты. Прандтль удалил пограничный слой со стенки дозвукового канала с помощью отсоса (фиг. 4).

Перед горловиной канала давление уменьшается в направлении течения вследствие уменьшения площади поперечного сечения канала. В этой области градиент давления отрицателен (или благоприятный), поэтому поток полностью примыкает к стенкам. Однако за горловиной вследствие сильного расширения или достаточно высокого значения положительного градиента давления пограничный слой отрывается от стенки и образуются вихревые течения. Но если пограничный слой за горловиной отсасывается, течение вновь примыкает к поверхности. Феттингер [3] привел другое экспериментальное подтверждение необходимости двух факторов, обуславливающих отрыв потока, а именно обратного градиента давления и вязкости.

На фиг. 5 и 6 показано натекание жидкости на пластины, установленные перпендикулярно направлению течения.

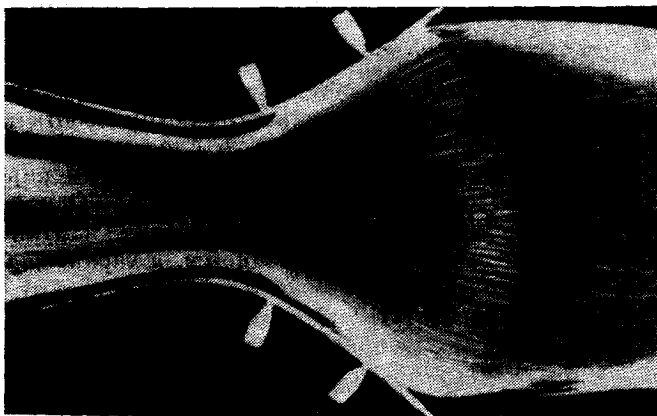
Одна пластина плоская, а другая имеет тонкую выступающую вперед перегородку. При обтекании плоской пластины не происходит отрыва потока, а при наличии выступающей перегородки поток отрывается. Физическую картину можно объяснить следующим образом.

Перед точкой торможения значительно возрастает давление в направлении течения, но поток не отрывается из-за отсутствия

поверхностного трения. Вблизи стенки поток также не отрывается, так как жидкость в пограничном слое течет в направлении уменьшения давления. Однако при обтекании пластины с тонкой высту-



Ф и г. 3. Течение в резко расширяющемся канале [4].



Ф и г. 4. Течение в канале с отсосом пограничного слоя на обеих стенках. Направление течения слева направо [4].

пающей вперед перегородкой поток отрывается, поскольку давление растет в направлении течения и имеется поверхностное трение [4].

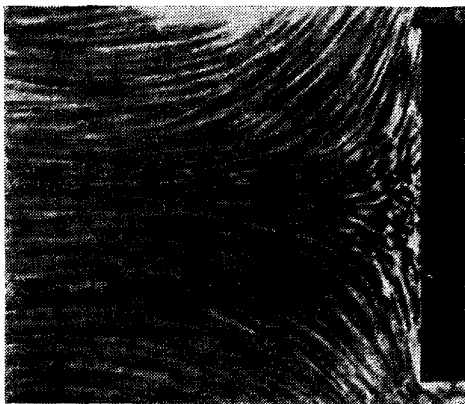
В работе [5] приведены расчеты положения точки отрыва на выступающей перегородке методом разложения в ряды. Распре-

деление скорости при обтекании такого угла «сжатия» дается в виде

$$u_e(x) = u_\infty \left(1 - \frac{x}{L}\right)^n \quad (x \geq 0),$$

где  $u_e(x)$  — скорость на внешней границе пограничного слоя,  $L$  — длина перегородки,  $u_\infty$  — скорость невозмущенного потока. Если показатель степени  $n$  принять равным единице, то координатой точки отрыва будет

$x = 0,126 L$ , но вследствие конечной длины перегородки  $n$  не равно единице и положение отрыва зафиксировано при  $x = 0,15L$ . Расхождение расчетного значения  $x$  с экспериментальным обусловлено, во-первых, влиянием обтекания угла «сжатия» и, во-вторых, отличием  $n$  от единицы.



Ф и г. 5. Безотрывное торможение потока [4].

Роль вязкости в отрыве потока была исследована теоретически Мексинем [6]. Если динамическую вязкость  $\mu$  или кинематическую вязкость  $\nu$  устремить к нулю при соответ-

ствующем уменьшении толщины пограничного слоя, то можно ожидать, что картина вязкого течения будет стремиться к картине потенциального течения или течения без отрыва. Однако в случае ламинарного течения, если  $\nu$  достаточно мала, картина ламинарного течения определяется не величиной  $\nu$ , а характером безразмерной функции

$$\lambda(\xi) = -2\xi \frac{d \ln u_e}{d\xi},$$

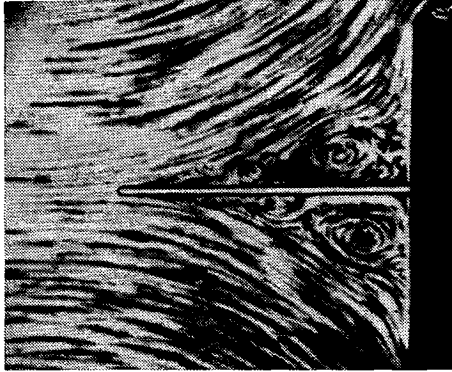
где

$$\xi = \int_0^x u_e(x) dx$$

не зависит явно от  $\nu$ . Поэтому при  $\nu \rightarrow 0$  картина вязкого течения не обязательно будет стремиться к картине потенциального течения.

Это наблюдение было сделано около 20 лет назад, когда возникли трудности при решении задачи об отрыве на основе уравнения Фолкнера — Скэн, примененного к равномерно замедляющемуся

течению около полубесконечной плоскости, вследствие того, что точка отрыва оказалась особенностью. При наличии пограничного слоя картина потенциального течения не совместима с ним ввиду того, что  $\lambda(\xi)$  стремится к положительному бесконечному значению в задней критической точке, что нереально физически. Однако картина течения становится физически возможной благодаря



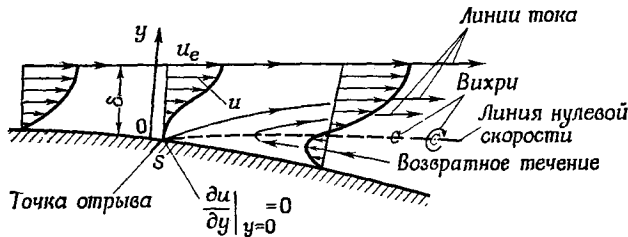
Ф и г. 6. Торможение потока с замедлением и отрывом [4].

вязкости, видоизменяющей потенциальное течение. В этом случае  $\lambda(\xi)$  не стремится к бесконечности, а достигает максимума, близкого к 0,5, и затем уменьшается. Отрыв происходит на небольшом расстоянии за положением максимума.

При отрыве потока вблизи задней критической точки тонкого тела смещение линий тока невязкого течения невелико. Однако при обтекании тупого тела область отрыва располагается далеко от задней критической точки, и вследствие значительного отличия картины течения от потенциального обтекания невязкое течение перестает служить в качестве первого приближения к вязкому течению.

Внутри пограничного слоя влияние вязкости проявляется в том, что скорость, параллельная поверхности стенки, изменяется вдоль направления, перпендикулярного стенке, т. е. существует градиент скорости  $du/dy$  ( $u$  — составляющая скорости, параллельная стенке,  $y$  — расстояние по нормали к стенке). За исключением разреженного газа, скорость потока на стенке равна нулю и с возрастанием расстояния  $y$  скорость  $u$  постепенно растет, достигая в конце концов величины  $u_e$  — скорости невязкого течения на внешней границе пограничного слоя. По сравнению с основным потоком замедленное течение в пограничном слое подвержено относительно большому отрицательному ускорению; вследствие этого количество движения жидкости вблизи стенки мало и ее способность к движению в направлении возрастания давления оказывается ограниченной. Ниже по течению это количество движения и энергия вдоль поверхности стенки затрачиваются на преодоление возрастания давления и трения, и, наконец, частицы жидкости останавливаются. Замедляющийся основной поток не в состоянии сообщить достаточную энергию жидкости в погранич-

ном слое и ускорить ее движение. В классической теории отрыва потока такая точка, в которой  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$ , определяется как точка отрыва. Так как на стенке  $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$  (где  $\tau$  — напряжение трения), в точке отрыва напряжение трения обращается в нуль, или, другими словами, вязкая сила исчезает. В точке за отрывом под действием положительного градиента давления возникает возвратное течение, как показано на фиг. 7, и вследствие



Ф и г. 7. Профиль скорости вблизи точки отрыва.

этого возвратного течения толщина пограничного слоя значительно возрастает. В точке отрыва поток начинает отходить от стенки под небольшим углом.

Как видно из фиг. 7, профиль скорости за точкой отрыва имеет точку перегиба. Это явление обусловлено связью, существующей между градиентом давления вдоль стенки и градиентом скорости по нормали к стенке [7].

Уравнение количества движения для установившегося двумерного течения (несжимаемой) жидкости в пограничном слое имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

На стенке, где  $u = v = 0$ , это уравнение сводится к

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0}.$$

Ввиду роста давления на стенке внизу по потоку от точки отрыва

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0.$$

На стенке выше точки отрыва  $du/du > 0$ . Вблизи границы пограничного слоя, на которой вязкие силы исчезают и  $du/du = 0$ , величина  $du/du$  уменьшается, а величина  $\partial^2 u / \partial y^2$  становится отрицательной. Следовательно, на некотором расстоянии от стенки  $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$  и профиль скорости имеет точку перегиба. Когда профиль скорости имеет точку перегиба, течение неустойчиво и имеет тенденцию к турбулизации.

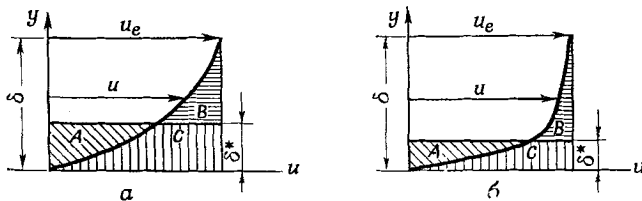


Чтобы рассчитать положение точки отрыва, необходимо прежде всего найти распределение давления или скорости невязкого течения. В качестве первого приближения можно найти распределение статического давления и скорости невязкого течения, пренебрегая пограничным слоем. Решение будет более точным, если к границе твердого тела добавить толщину вытеснения пограничного слоя, поскольку толщина вытеснения пограничного слоя по определению

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

соответствует равенству площадей  $A$  и  $B$  (фиг. 8), так что площадь  $(A + C)$  равна площади  $(B + C)$ . Таким образом,  $\delta^*$  — это толщина, которую имел бы слой жидкости (площадь  $A + C$ ) с такой же интегральной потерей скорости, как и действительный пограничный слой (площадь  $B + C$ ), при замене границы тела поверхностью, соответствующей  $\delta^*$ , около которой течение можно рассматривать как невязкое. Для этого нового утолщенного тела (с учетом толщины вытеснения) определяется распределение давления и скорости течения.

Линия, начинающаяся в точке отрыва и соединяющая точки с нулевой скоростью внутри вязкого слоя, отошедшего от стенки, может быть определена как линия нулевой скорости (фиг. 7). По линии нулевой скорости можно определить отклонение линий



Ф и г. 8. Толщина вытеснения пограничного слоя.

$a$  — ламинарный пограничный слой;  $b$  — турбулентный пограничный слой.

тока вследствие отрыва и границу вихревой области. Вследствие отклонения линий тока потенциального течения, обусловленного отрывом, и образования вихрей в области отрыва происходят потери энергии. При перемешивании медленно текущей жидкости около стенки с быстро текущей жидкостью вдали от нее облегчается движение жидкости против возрастающего давления и трения вследствие увеличения количества движения и энергии жидкости около стенки. По своей природе турбулентное течение обеспечивает такое перемешивание за счет вихревого движения объемов

жидкости. Крокко и Лиз [8] ввели коэффициент турбулентного перемешивания  $\kappa = (\overline{dm}/dx)/\rho_e u_e$ , где  $\overline{m} = \int_0^\delta \rho u dy$  — поток массы,

$\delta$  — толщина пограничного слоя. Перемешивание при турбулентном течении значительно интенсивнее, чем при ламинарном, так что значение  $\kappa$  для турбулентного пограничного слоя может превосходить в десять раз соответствующее значение для ламинарного слоя.

Эффект перемешивания часто выражают через турбулентное напряжение трения  $\tau = \epsilon (\partial u / \partial y)$ , связывая вызывающую его причину с некоторой вязкостью  $\epsilon$ , называемой «турбулентной», или «вихревой», вязкостью. Так как турбулентная вязкость  $\epsilon$  в пограничном слое может в сто раз превышать динамическую вязкость  $\mu$  той же жидкости, турбулентное течение обладает гораздо большей способностью к самоперемешиванию. Вследствие большего потока массы и большей турбулентной вязкости турбулентное течение способно распространяться на большее расстояние против возрастающего давления, чем ламинарное течение. Таким образом, перемешивание является очень важным фактором, характеризующим отрыв, который можно выразить в виде некоторого параметра.

Перемешивание течения в пограничном слое можно численно охарактеризовать отношением толщины вытеснения к толщине потери импульса  $H = \delta^*/\theta$ , где  $H$  — формпараметр профиля пограничного слоя, а

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

— толщина потери импульса пограничного слоя [7]. Интегральное уравнение количества движения Кармана для двумерного несжимаемого потока имеет вид

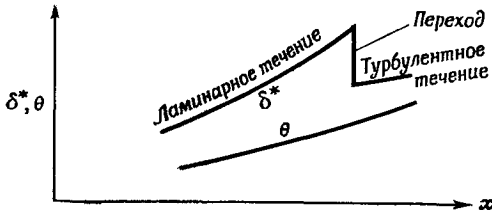
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta}{q} \frac{dp}{dx} \left(1 + \frac{H}{2}\right) + \frac{\tau_w}{2q}, \quad (2)$$

где  $q = (1/2) \rho_e u_e^2$  — скоростной напор, а индекс  $w$  относится к значениям на стенке.

Когда появляется турбулентность, усиление перемешивания происходит на очень коротком расстоянии, так что  $\theta$  можно считать неизменной. Однако толщина вытеснения  $\delta^*$  зависит от количества жидкости, по которой распространяется замедление течения, так что перемешивание влияет на  $\delta^*$  непосредственно. Величина  $\delta^*$  резко изменяется при переходе ламинарного течения в турбулентное. Это легко увидеть из определения величины  $\delta^*$  и фиг. 9. Так как  $\partial u / \partial y$  в турбулентном пограничном слое у стенки намного

больше, чем в ламинарном,  $\delta^*/\delta$  соответственно намного меньше. Приведем теперь численные значения  $H$  при обтекании плоской пластины с нулевым градиентом давления.

В этом случае  $H$  для ламинарного течения равно приблизительно 2,6 и уменьшается до 1,3 при переходе к турбулентному течению. Вследствие турбулентного перемешивания  $\delta^*$  уменьшается до половины от своего первоначального значения. Так как значение  $H$  в турбулентном течении намного меньше, чем соответствующее значение в ламинарном течении, можно утверждать, что при



Ф и г. 9. Влияние перемешивания на  $\delta^*$  и  $\theta$  [9].

высокой интенсивности перемешивания  $H$  уменьшается. Согласно расчетам по уравнению Кармана (2)  $H$  также уменьшается с уменьшением градиента давления, и поэтому можно ожидать, что понижение градиента давления и повышение интенсивности перемешивания будут оказывать одинаковое влияние на характеристики пограничного слоя [7].

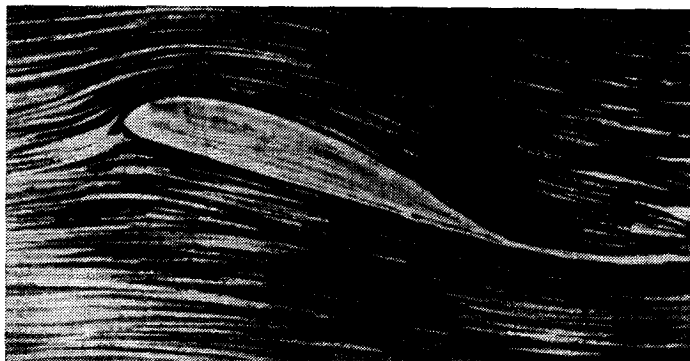
## 1.2. ПРИМЕРЫ ОТРЫВА ДОЗВУКОВОГО ПОТОКА

Рассмотрим отрыв потока от поверхности на примере нескольких классических форм тел.

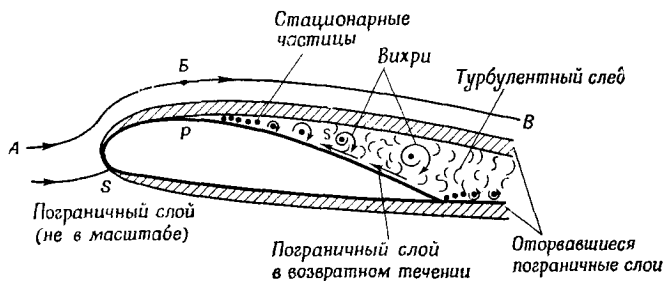
### 1.2.1. Крыловой профиль

Крыловой профиль обладает оптимальными аэродинамическими характеристиками: высокой подъемной силой и малым сопротивлением, если поток присоединен к его поверхности (фиг. 10). Однако, если профиль установлен под достаточно большим углом атаки, поток над верхней поверхностью профиля отрывается (фиг. 11), и течение над этой поверхностью сильно отличается от оптимального. Кроме того, на значительной части области отрыва образуются вихри. Такой вид отрыва на крыловом профиле, нежелательный для инженерных приложений, называется «срывом» потока.

Срыв потока связан с образованием замкнутых каверн, или пузырей, при отрыве течения, что обусловлено динамическими характеристиками циркуляционного движения вокруг поверхности профиля. Пузыри бывают короткими и длинными. Короткий



Ф и г. 10. Безотрывное обтекание профиля [10].

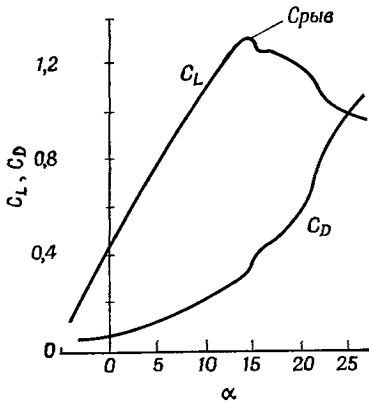


Ф и г. 11. Вязкие эффекты при обтекании профиля (положительный угол атаки) [11].

пузырь образуется между точками отрыва и последующего присоединения потока; его длина имеет порядок 1% длины хорды и не сильно влияет на распределение давления. Однако если короткий пузырь в ламинарном слое разрывается на профиле, происходит срыв потока с передней кромки профиля, что приводит к внезапному возрастанию сопротивления и потере подъемной силы (фиг. 12).

В случае длинного пузыря (от 2 до 3% хорды) распределение давления на профиле несколько изменяется, однако его разрыв не приводит к полному отрыву потока, вместо этого оторвавшийся

поток протекает над поверхностью профиля и в дальнейшем вновь присоединяется.



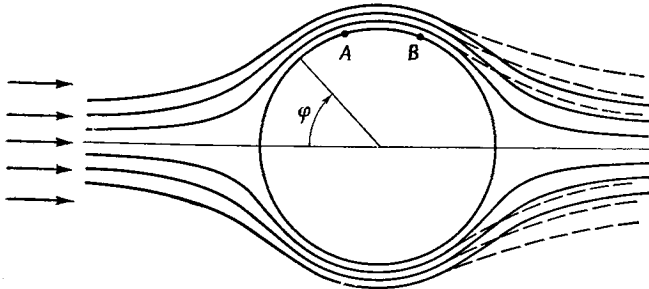
Ф и г. 12. Коэффициенты подъемной силы  $C_L$  и сопротивления  $C_D$  профиля [12].  
 $\alpha$  — угол атаки (град).

1.2.2. Отрыв потока на цилиндре и сфере

Отрыв потока на цилиндре и сфере связан с величиной числа Рейнольдса. Классическое исследование отрыва потока на круговом цилиндре и сфере может служить иллюстрацией зависимости отрыва потока от числа Рейнольдса.

Если применить теорию течения невязкой несжимаемой жидкости, будет получена картина линий тока, изображенная на фиг. 13 сплошными линиями.

Ввиду отсутствия вязкости, предполагаемого в теории потенциального течения, поток не отрывается, а примыкает к поверхности тела. В случае очень медленного, так называемого «ползущего»



Ф и г. 13. Отрыв потока на круговом цилиндре.

движения при  $Re_d = u_\infty d / \nu \leq 1$  силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с вязкими силами. Сопротивление, возникающее при таком движении, обусловлено силами, необходимыми для деформации частиц вязкой жидкости. При очень малых числах Рейнольдса процесс деформации распространяется на большое расстояние от тела по сравнению с малой толщиной пограничного слоя при больших числах Рейнольдса.

Поле давления при медленном движении удовлетворяет уравнению потенциала, и отрыва потока не происходит. В этом случае теплопередача осуществляется только посредством теплопроводности. При возрастании числа Рейнольдса поток отрывается от тела и картина течения соответствует штриховым линиям. На фиг. 13 поток присоединен к телу на участке от передней критической точки по крайней мере до точки  $A$  при всех числах Рейнольдса. Точка  $A$  обозначает точку отрыва ламинарного потока. Для идеальной жидкости теория предсказывает распределение касательной составляющей скорости за пределами пограничного слоя по следующим законам:

$$u_e = 2 \sin \varphi u_\infty \text{ для цилиндра,}$$

$$u_e = \frac{3}{2} \sin \varphi u_\infty \text{ для сферы.}$$

Согласно этим формулам, течение ускоряется до  $\varphi = 90^\circ$ , однако ламинарное течение отрывается уже при  $\varphi = 80-85^\circ$  на поверхности цилиндра в области отрицательных градиентов давления потенциального течения.

Причина такого расхождения кроется в том, что теория идеальной жидкости применима лишь вблизи передней критической точки, тогда как максимальная скорость в действительности достигается при  $\varphi = 70^\circ$ , а не при  $\varphi = 90^\circ$ , как это предсказывает теория идеальной жидкости, и значение этой скорости составляет  $1,6u_\infty$  [6]. Таким образом, под влиянием отрыва потока точка максимальной скорости сдвигается вверх по течению до  $\varphi = 70^\circ$ . Ниже точки  $\varphi = 70^\circ$  статическое давление возрастает, и при  $\varphi > 80^\circ$  поток отрывается, если течение ламинарное.

Как упоминалось выше, при турбулентном течении происходит более интенсивный обмен количеством движения, вследствие которого турбулентное течение обладает большей способностью к сопротивлению возрастающему положительному градиенту давления и трению, и поэтому отрыв потока происходит при больших значениях  $\varphi$ , чем в случае ламинарного течения. Так, точка отрыва турбулентного течения от кругового цилиндра ( $B$ ) соответствует  $\varphi \approx 110^\circ$ .

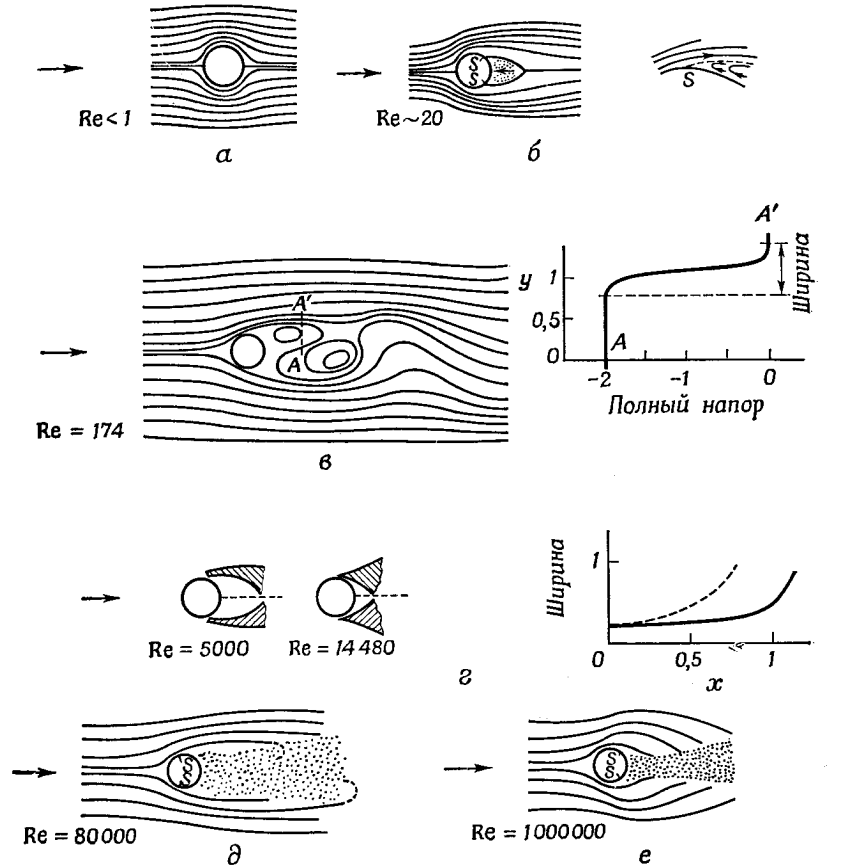
За точкой отрыва формируется след, в котором возникает обратное течение и образуются вихри. Так как точка отрыва ламинарного потока располагается выше по течению, чем точка отрыва турбулентного потока, размеры следа в первом случае больше, и соответственно можно ожидать большее полное сопротивление.

На фиг. 14 показаны картины линий тока при различных числах  $Re_d$ .

При числе Рейнольдса  $\sim 10$  происходит отрыв ламинарного потока, и за подветренной стороной цилиндра образуются два слабых вихря. Вследствие отрыва потока возрастает сопротивле-

ние давления, достигая примерно половины от полного сопротивления.

При числах Рейнольдса  $\sim 100$  течение нестационарно, и вихри срываются поочередно. Область следа вытягивается, и формируется вихревая дорожка Кармана. Так как область следа довольно велика, преобладает сопротивление давления.



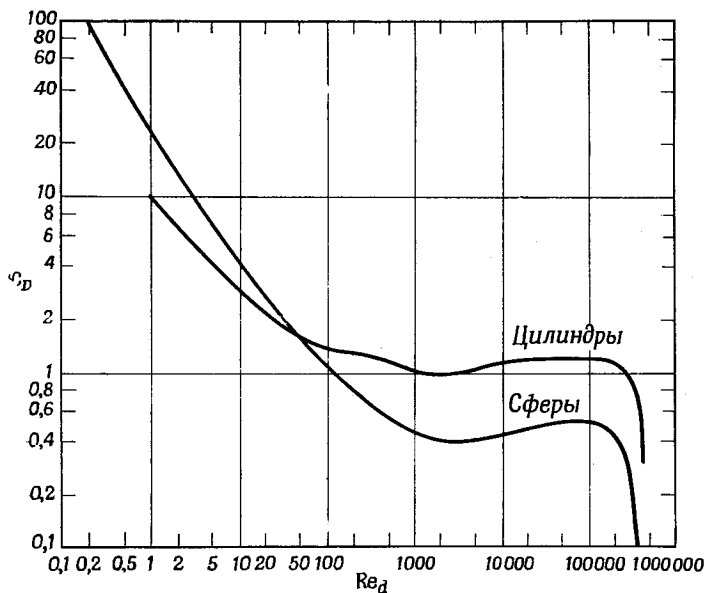
Ф и г. 14. Типы течений около бесконечно длинного цилиндра [13].

*a* —  $Re < 1$ ; *b* —  $Re \sim 20$ ; *S* — точка отрыва ламинарного пограничного слоя; *c* —  $Re = 174$ , одна из стадий обтекания, чередующихся по мере схода противоположных вихрей; справа приведены результаты измерений полного напора насадком вдоль линии *AA'* с указанием ширины свободного ламинарного слоя; *г* — границы свободного слоя при числах Рейнольдса 5000 и 14 480 и графики изменения ширины свободного слоя с расстоянием *x* по потоку; сплошная кривая соответствует числу Рейнольдса 5000, штриховая — более высокому числу Рейнольдса или потоку с более интенсивной турбулентностью при числе Рейнольдса 5000; *д* — положение точки отрыва ламинарного пограничного слоя и общий характер течения при числе Рейнольдса 80 000; переход происходит одновременно с отрывом; *e* — положение точки отрыва турбулентного пограничного слоя и общий характер течения при числе Рейнольдса 1 000 000; переход начинается в ламинарном пограничном слое перед точкой отрыва.

Пр и м е ч а н и е. Все геометрические размеры отнесены к диаметру цилиндра *d*.

При числе Рейнольдса 5000 отношение ширины свободного слоя к диаметру остается малым в направлении течения по сравнению с таким же отношением при числе Рейнольдса около 15 000.

В интервале чисел Рейнольдса  $10^3$ — $10^5$  отрыв потока имеет ламинарный характер, хотя след является турбулентным. Коэффициент сопротивления сохраняется приблизительно постоянным, как видно из фиг. 15, где приведена зависимость  $C_D$  от  $Re_d$ ,



Ф и г. 15. Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса при поперечном обтекании длинных цилиндров и сферы [14].

а полное сопротивление создается главным образом за счет сопротивления давления. Точка отрыва ламинарного потока располагается при  $\varphi = 80$ — $85^\circ$ .

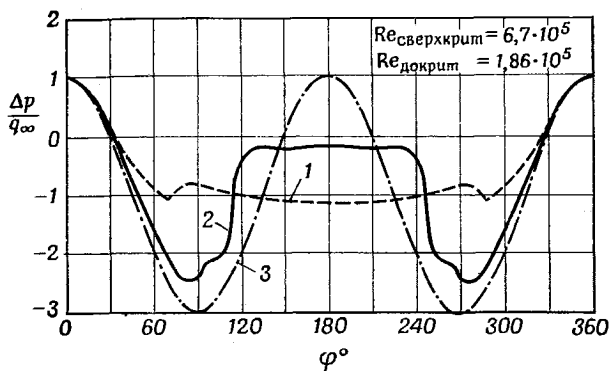
При числах Рейнольдса, больших  $10^5$ , течение в пограничном слое становится турбулентным, и точка отрыва смещается вниз по потоку приблизительно до  $\varphi = 110^\circ$ . Область следа значительно сокращается по сравнению со случаем отрыва ламинарного потока, и соответственно падает сопротивление давления, как это видно на фиг. 15 в области  $Re_d = 500\,000$  [13, 14].

На фиг. 15 показана также зависимость  $C_D$  от  $Re_d$  для сферы. На сфере точка отрыва ламинарного потока соответствует  $\varphi \approx 90^\circ$ , а турбулентного —  $\varphi \approx 110^\circ$ . Интервал критических значений числа Рейнольдса составляет  $1,5 \cdot 10^5 \leq Re_{d, \text{крит}} \leq 4 \cdot 10^5$ , причем



$Re_{d_{крит}}$  уменьшается с возрастанием турбулентности потока.

В начале двадцатого столетия Прандтль и Эйфель измерили сопротивление сфер. Измерения Прандтля дали значение  $C_D = 0,44$ , а Эйфеля —  $C_D = 0,176$ . Позднее Прандтль заметил, что отрыв потока имел место при  $\varphi \approx 90^\circ$ , а если в передней части сферы установить проволочное кольцо, то безотрывное течение



Ф и г. 16. Распределение давления по поверхности кругового цилиндра [4].  
1 — докритическое число Рейнольдса; 2 — сверхкритическое число Рейнольдса; 3 — теоретическое распределение.

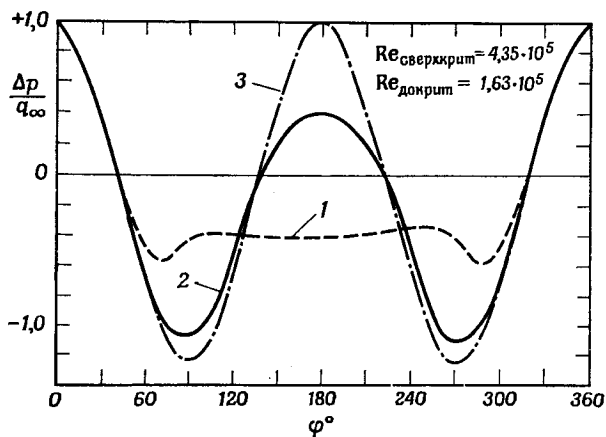
распространяется дальше по потоку и в этих условиях измеренное значение  $C_D$  составляет 0,176. Ясно, что первоначальные измерения Прандтля  $C_D = 0,44$  соответствовали отрыву ламинарного потока, а измерения Эйфеля  $C_D = 0,176$  относились к отрыву турбулентного потока [15]. Измерения распределения статического давления по поверхности цилиндра весьма полезны для понимания явления отрыва потока.

Как показано на фиг. 16, имеется существенное различие между измеренным распределением давления и распределением, предсказываемым теорией потенциального течения. Видно также, что число Рейнольдса оказывает влияние на распределение давления.

При докритических значениях числа Рейнольдса происходит отрыв ламинарного потока. Как упоминалось выше, приблизительно при  $\varphi = 70^\circ$  давление возрастает, так как максимальное значение касательной составляющей скорости  $1,6u_\infty$  достигается при  $\varphi = 70^\circ$ . Это возрастание давления приводит к отрыву потока при  $\varphi = 82^\circ$ . В области отрывного течения статическое давление остается приблизительно постоянным в интервале значений  $\varphi$  от 130 до 230°.

При сверхкритических значениях числа Рейнольдса происходит отрыв турбулентного потока при  $\varphi = 110^\circ$ , а статическое

давление начинает возрастать приблизительно при  $\varphi = 90^\circ$ . Положительный градиент давления при сверхкритических числах Рейнольдса в интервале значений  $\varphi$  от  $110$  до  $120^\circ$  весьма велик, и статическое давление при  $\varphi = 130^\circ$  значительно больше, чем при отрыве ламинарного потока. Как и в области отрывного ламинарного течения, статическое давление в области отрывного турбулентного течения почти постоянно. В окрестности точки торможения потока измеренные значения статического давления



Ф и г. 17. Распределение давления по поверхности сферы [4].

1 — докритическое число Рейнольдса; 2 — сверхкритическое число Рейнольдса; 3 — теоретическое распределение.

и предсказанные теорией потенциального обтекания в основном совпадают.

В целом распределение давления при сверхкритических числах Рейнольдса в меньшей степени отличается от теоретически предсказанного, чем при докритических числах Рейнольдса. В результате полное сопротивление кругового цилиндра при больших значениях чисел Рейнольдса оказывается меньшим, чем при малых числах Рейнольдса. Этот факт виден из фиг. 16.

Недавно Морковин [16] обобщил и объяснил новые экспериментальные и теоретические исследования обтекания круговых цилиндров в более широком интервале чисел Рейнольдса, подчеркнув характерные особенности образования присоединенных и свободных вихрей и их динамику. Были также тщательно изучены многочисленные явления неустойчивости поля течения в целом и отдельных его областей. Оказывается, что образующаяся при возрастании числа Рейнольдса нестационарная, трехмерная, взаимодействующая с внешним потоком вихревая картина течения

является ключом к пониманию результатов наблюдений различных исследователей.

На фиг. 17 показано распределение давления по поверхности сферы. При сверхкритических числах Рейнольдса статическое давление в области турбулентного отрывного течения не является постоянным, а возрастает в интервале значений  $\varphi$  от 140 до 220° в отличие от статического давления в области ламинарного отрывного течения, которое почти постоянно.

Хотя статическое давление в области ламинарного отрывного течения на сфере почти постоянно, коэффициент давления в три раза выше, чем в таком же диапазоне углов на круговом цилиндре.

### 1.3. ТЕЧЕНИЕ В СЛЕДЕ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

В последнее время интенсивно исследовалось течение в следе при больших скоростях. Вследствие значительной протяженности след является важным объектом наблюдений в нем электронов и других излучающих составляющих газа при высокой температуре. Так, след метеора может достигать 28 км на высоте около 185 км. При скорости метеора 12 км/с температура во внешней части следа может достигать 6 500 К на расстоянии 50—100 диаметров за телом [17]. На фиг. 18 и 20 показаны типичные турбулентные следы за тупым телом, телом промежуточной формы и тонким телом при гиперзвуковых скоростях.

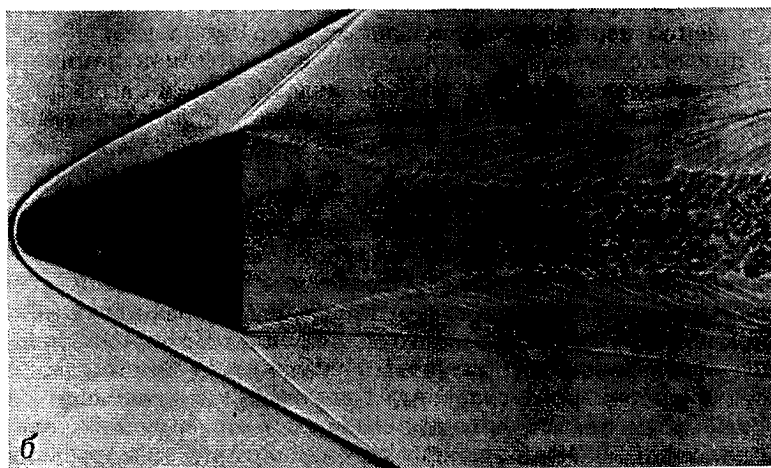
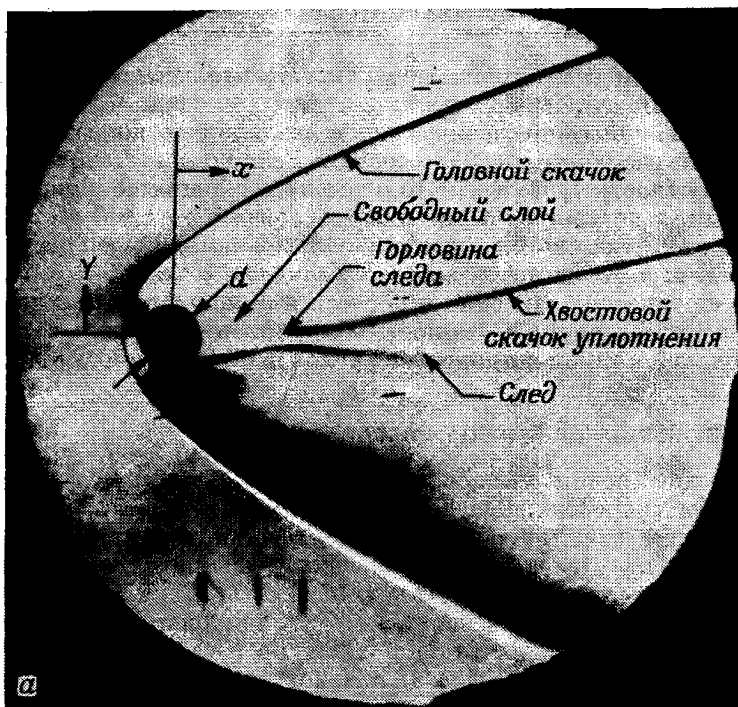
Кроме того, на фиг. 19 показаны профили скорости и энтальпии непосредственно перед горловиной следа и сразу за ней.

След при гиперзвуковых скоростях может быть как ламинарным, так и турбулентным, а число Рейнольдса перехода, вычисленное по местным значениям параметров течения и расстоянию  $x'$  от горловины следа до точки перехода, для тупого тела равно

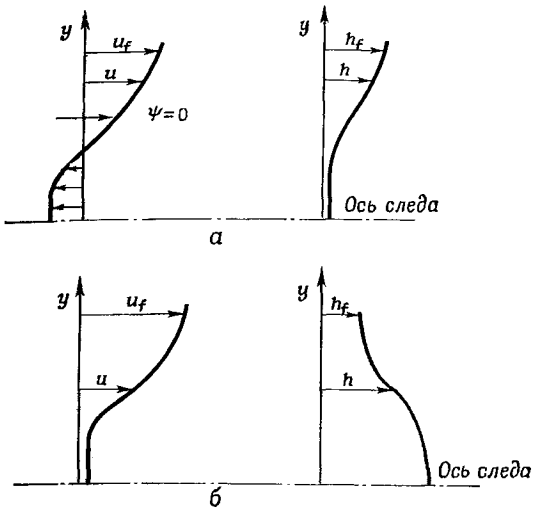
$$Re_{x' \text{ перех}} \approx 5,6 \cdot 10^6.$$

Для застренного тела  $Re_{\text{перех}}$ , вычисленное по тем же параметрам, почти в четыре раза больше, чем для тупого тела [19].

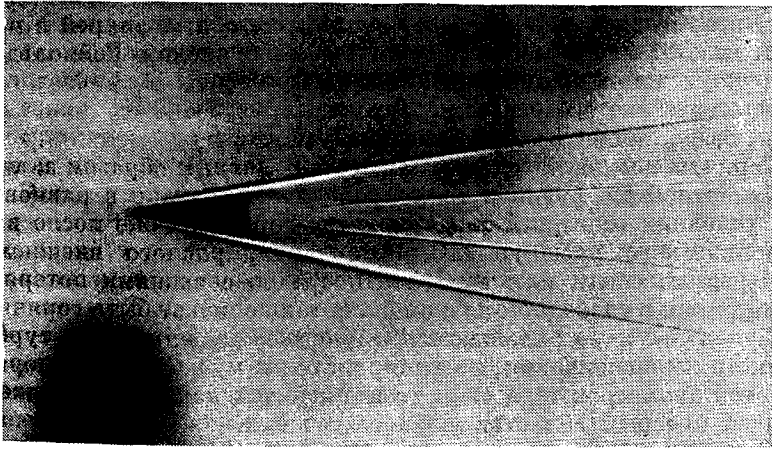
Горячий «внешний след» за тупым телом образован сжатым и разогретым в ударном слое газом, прошедшим через почти нормальный к потоку участок головного скачка уплотнения. «Внутренний след» образован турбулентным течением, возникающим в области с наибольшим градиентом скорости, и смыкающимся с ним свободным вязким слоем, сходящим с поверхности тела. Линия нулевого значения скорости, на которой касательная составляющая скорости равна нулю, начинается в точке отрыва на теле и поворачивает обратно в горловине следа, поскольку при выравнивании потока давление возрастает. Газ над линией нулевой скорости в дальнейшем образует внутренний след. Вблизи горловины турбулентность, существующая в узкой области, окру-



Ф и г. 18. Следы за телами при больших сверхзвуковых скоростях. *a* — цилиндр при числе Маха 5,8 [18]; *б* — затупленный конус при числе Маха 3,18,  $Re_d = 3,58 \cdot 10^4$ ;  $p_\infty = 1$  атм (данные лаборатории ВМС США, шт. Мэриленд).



Ф и г. 19. Типичные профили скорости и энтальпии во внутренней части следа непосредственно перед горловиной и за ней.  
 а — перед горловиной; б — за горловиной.



Ф и г. 20. След за тонким телом при гиперзвуковых скоростях. (Данные лаборатории ВМС США, шт. Мэриленд.)

жающей ось следа, быстро распространяется вонне, захватывая окружающий газ. Все линии тока из «внешнего следа» поглощаются турбулентным следом ниже по течению. За тонким телом образуется «холодный след». В противоположность «горячему следу», который главным образом связан с головным скачком уплотнения, «холодный след» можно считать полностью обусловленным действием эффектов вязкости, связанных с пограничным слоем и с донной областью. Ниже перечислены некоторые свойства гиперзвукового следа, которые отличаются от соответствующих свойств дозвукового следа [17]:

- а) крупномасштабные вихри не образуются даже при ламинарном течении;
- б) ламинарный свободный вязкий слой при гиперзвуковых скоростях гораздо устойчивее;
- в) начальное значение потерь количества движения, или «сопротивления», во внутреннем следе на один или два порядка меньше, чем полное сопротивление тела.

Однако, как отметили Фэй и Гольдберг [20], следующие свойства гиперзвуковых и дозвуковых следов оказываются сходными:

- а) четко определенная частота возмущений в следе;
- б) форма зависимости числа Струхала от числа Рейнольдса;
- в) совпадение начала распространения вихрей с началом турбулентности в следе;
- г) взаимосвязь вырождения крупномасштабных вихрей в мелкомасштабные турбулентные возмущения с числом Рейнольдса;
- д) двухслойные ламинарные следы;
- е) отсутствие осевой симметрии;
- ж) возрастание размеров следа.

Горячий «внешний» след охлаждается главным образом за счет турбулентной диффузии и теплопроводности, однако в равновесных условиях «внешний след» остается горячим даже после изотропического расширения до давления, равного внешнему. «Внутренний след», или турбулентное ядро с вязкими потерями около тела и в свободном вязком слое, также может быть горячим. Турбулентное ядро охлаждается в процессе расширения и турбулентного перемешивания, но это происходит на расстоянии порядка сотен диаметров тела вниз по потоку, так как ядро окружено горячей внешней областью вязкого течения.

Радиус турбулентного следа вниз по потоку за тупым телом можно выразить в виде  $r \propto x^{1/3}$ , где  $r$  — радиус следа в калибрах тела и  $x$  — расстояние за телом, также измеренное в калибрах [21].

«Холодный след» растет медленно и охлаждается гораздо интенсивнее, чем след за тупым телом. Однако достаточно далеко по потоку следы за всеми телами однозначно определяются произведением коэффициента полного сопротивления на площадь донного сечения  $C_{DA}$ .

## 1.4. ОТРЫВ ПОТОКА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Когда скорость потока около тела становится сверхзвуковой, образуется скачок уплотнения, который взаимодействует с пограничным слоем. В результате такого взаимодействия поток может оторваться от поверхности.

Как и в случае дозвукового потока, отрыв обусловлен возрастанием давления в направлении течения. Однако в этом случае рост давления создается скачком уплотнения, пересекающим течение. Чтобы пояснить физику отрыва потока, обусловленного взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем, опишем некоторые эксперименты и приведем обработанные экспериментальные данные.

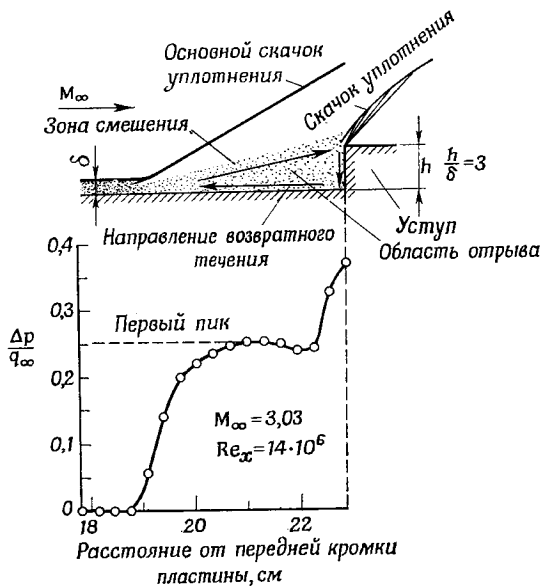
Ланге [22] собрал экспериментальные результаты по взаимодействию скачка уплотнения с двумерным пограничным слоем, опубликованные до июля 1953 г. Эти эксперименты проводились с плоскими пластинами, на которых устанавливались уступы или клинья (фиг. 21, 22). Падающий на пластину скачок уплотнения создавал положительный градиент давления, достаточный, чтобы вызвать отрыв потока. При переходе через скачок давление возрастает, и разность давлений на фронте скачка распространяется в нижних слоях пограничного слоя. Таким образом, появляющийся в стенке градиент давления определяется свойствами пограничного слоя и интенсивностью скачка уплотнения. Однако отрыв потока вызывается главным образом перепадом давления в скачке уплотнения, поэтому, возможно, существует критический перепад давления, который достаточен, чтобы вызвать отрыв потока. Рассмотрим отдельно отрыв потока при взаимодействии скачка уплотнения с ламинарным и турбулентным пограничными слоями.

Исследуя ламинарный пограничный слой, Липман и др. [23] провели испытания с плоской пластиной и выявили следующие зависимости: влияние числа Рейнольдса на критическое давление обратно пропорционально корню квадратному из числа Рейнольдса (число Рейнольдса вычисляется по расстоянию от передней кромки пластины до точки пересечения скачка уплотнения с пограничным слоем); критическое значение коэффициента давления уменьшается с увеличением числа Маха (фиг. 23). Такое влияние чисел Маха и Рейнольдса согласуется со следующими соотношениями:

$$(\Delta p/q_\infty) \propto c_f \propto Re_{\bar{\delta}}^{-1} \propto Re_x^{-1/2}.$$

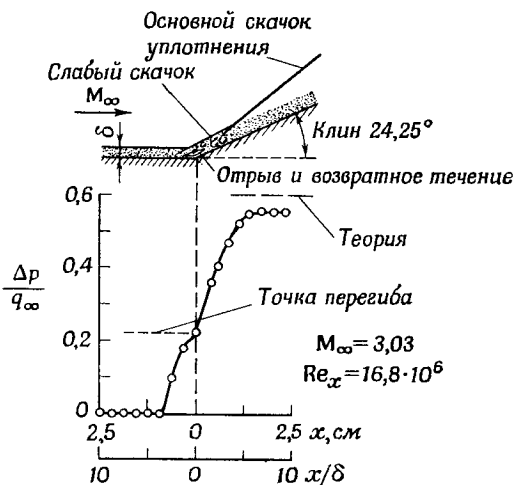
Экспериментальные данные для турбулентного пограничного слоя получены с помощью следующих двух методов: а) метода клина, б) метода падающего скачка уплотнения.

Измерения распределения давления в зоне отрыва, вызванном клином или падающим скачком уплотнения, показывают, что,



Ф и г. 21. Отрыв турбулентного пограничного слоя, вызванный уступом [22].

Результаты газодинамической лаборатории им. Лэнгли.

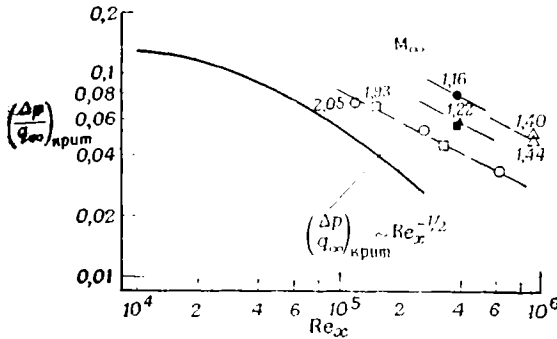


Ф и г. 22. Отрыв турбулентного пограничного слоя, вызванный клином [22].

Результаты газодинамической лаборатории им. Лэнгли.

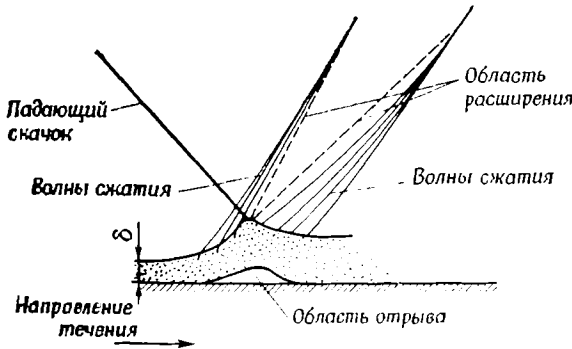


начиная с некоторого угла клина, кривая распределения давления имеет точку перегиба (фиг. 22) и измеренное значение  $\Delta p/q_\infty$  в точке перегиба остается почти постоянным при дальнейшем увеличении угла клина.



Фиг. 23. Критический коэффициент давления для ламинарного пограничного слоя [22].

○ данные Массачусетского технологического института (MIT); ▽ данные газодинамической лаборатории им. Пэнглы, 9-дюймовая сверхзвуковая труба; △ данные аэродинамической лаборатории им. Гутенгейма Калифорнийского технологического института (CALSIT); ▲ ■ ● данные, полученные в Цюрихе.



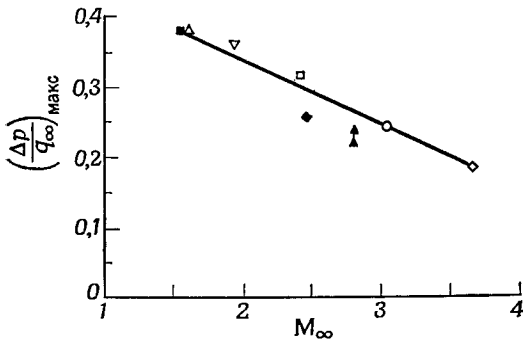
Фиг. 24. Взаимодействие падающего скачка уплотнения с пограничным слоем [22].

Измеренное значение  $\Delta p/q_\infty$  в точке перегиба оказывается существенно постоянной величиной независимо от числа Рейнольдса в интервале от  $12 \cdot 10^6$  до  $32 \cdot 10^6$  при  $M_\infty = 3,03$ .

На фиг. 24 показан отрыв потока в месте падения скачка уплотнения. Из фиг. 24 видно, что приращение давления при переходе через падающий скачок уплотнения распространяется вверх по потоку по пограничному слою, в результате чего

пограничный слой быстро утолщается. Кроме того, непосредственно перед пересечением скачка уплотнения с пограничным слоем возникает веер волн сжатия.

Взаимодействие пограничного слоя со скачком уплотнения осуществляется следующим образом. Когда падающий скачок уплотнения встречает пограничный слой, он отражается от пограничного слоя в виде волны разрежения, и этот процесс сжатия — расширения поворачивает поток к стенке; таким образом рост толщины пограничного слоя ослабляется. Вторая серия волн сжатия образуется за точкой встречи скачка уплотнения с пограничным слоем, и после прохождения этих волн сжатия течение



Ф и г. 25. Влияние числа Маха на максимальный коэффициент давления для турбулентного пограничного слоя [22].

становится параллельным поверхности пластины. Таким образом, область отрыва может быть очень малой. Давление вдоль пластины возрастает до точки отрыва потока, а затем за точкой отрыва градиент давления уменьшается до тех пор, пока при последующем сжатии в веере волн сжатия давление не достигнет своего наибольшего значения. Следовательно, в кривой распределения давления появляется точка перегиба. Аналогичные наблюдения были сделаны и для течения около клина.

При отрыве потока, вызванном взаимодействием скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем, разность давлений меняется с ростом числа Маха, как показано на фиг. 25.

Последние результаты для турбулентного течения подобны результатам измерений для ламинарного пограничного слоя, однако ламинарный и турбулентный пограничные слои заметно различаются по степени распространения вверх по потоку приращения давления в падающем скачке уплотнения и по значениям коэффициентов давления.

Итак, характерные особенности взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем состоят в следующем: при сверхзвуко-

вом ламинарном течении около плоской пластины коэффициент давления отрыва зависит от числа Рейнольдса, но при сверхзвуковом турбулентном течении коэффициент давления очень слабо зависит от числа Рейнольдса или не зависит совсем. Однако коэффициент давления зависит от числа Маха как в ламинарном, так и в турбулентном потоках. При сверхзвуковом течении в отличие от дозвукового в области скачка уплотнения существует значительная по величине составляющая градиента давления по нормали к стенке. В дозвуковом пограничном слое аналогичная составляющая градиента давления настолько мала, что статическое давление по толщине пограничного слоя можно считать постоянным.

Классифицируя все явления взаимодействия с пограничным слоем, Янг [24] выделил следующие пять случаев:

1. Ламинарный пограничный слой перед скачком уплотнения продолжает оставаться таким же и за скачком, не подвергаясь отрыву. Это возможно при слабом скачке уплотнения, когда число Маха невозмущенного потока немного больше единицы. Приращение давления, вызванное таким скачком уплотнения, невелико.

2. Ламинарный пограничный слой перед скачком уплотнения отрывается под действием положительного градиента давления и затем присоединяется вновь к поверхности. Это наблюдалось при  $Re_x = 8,45 \cdot 10^5$ .

3. Ламинарный пограничный слой перед скачком отрывается полностью, но повторно не присоединяется к поверхности тела. В этом случае скачок косой.

4. Турбулентный пограничный слой перед скачком остается присоединенным к поверхности тела и за скачком. В этом случае скачок прямой и отрыва потока не происходит.

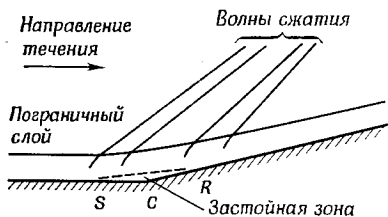
5. Турбулентный пограничный слой, присоединенный перед скачком, отрывается за ним. В этом случае скачок косой.

В общем случае турбулентное течение оказывает большее сопротивление отрыву, вызванному взаимодействием, по сравнению с ламинарным. Таким образом, отрыв потока как при малых, так и при больших скоростях значительно проще предотвратить, если течение из ламинарного становится турбулентным.

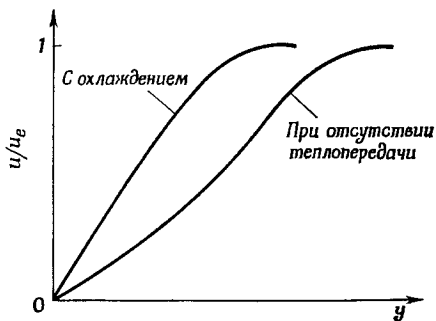
Отрыв потока вызывается также частицами пыли при сверхзвуковых скоростях. Бринич [25] наблюдал область отрывного течения перед тупым телом при числе Маха невозмущенного потока, равном 5. Такой отрыв вызывался падением на тело и последующим отражением вверх по потоку частиц пыли, присутствующих в газе в ударной трубе. Это наблюдение весьма существенно, так как градиент статического давления в свободном потоке около тела был отрицательным и тем не менее поток отрывался. Когда область отрыва формировалась на носовой части тупого тела, точка перехода на хвостовой части тела перемещалась вверх по

поток, и вследствие этого протяженность ламинарного течения около хвостовой части тела существенно сокращалась.

На положение точки отрыва оказывает влияние теплопередача. Это влияние было исследовано Гэддом [26]. При больших скоростях полета вследствие аэродинамического нагрева тепло передается от горячего газа к холодной поверхности тела. Но если горячее тело поместить в поток холодного газа, тепло будет передаваться от поверхности тела к газу. Теплопередача влияет на



Ф и г. 26. Течение около пластины с клином [26].



Ф и г. 27. Влияние охлаждения на форму профиля скорости перед отрывом [26].

градиент давления и протяженность зоны отрыва и, следовательно, на положение отрыва. При охлаждении стенки понижается градиент давления и уменьшается протяженность зоны отрыва, задерживая отрыв.

Простая модель обтекания клина при сверхзвуковой скорости, изображенная на фиг. 26, была предложена Гэддом [26] для физического объяснения явления. На этой фигуре  $S$  и  $R$  обозначают соответственно точки отрыва и последующего присоединения. Нарастание пограничного слоя зависит от интенсивности положительного градиента давления, действующего на пограничный слой, а распределение давления определяется простой волной сжатия, обусловленной утолщением пограничного слоя. Теплопередача оказывает влияние на равновесие между этими двумя процессами. При охлаждении стенки выше области взаимодействия, несмотря на постоянное давление, профиль скорости становится более полным, а пограничный слой более тонким, как показано на фиг. 27.

Так как отрыв потока обусловлен недостаточным количеством движения вблизи стенки, изменение плотности и скорости может объяснить влияние теплопередачи на отрыв. Около охлажденной стенки плотность газа больше, а вязкость меньше, чем при отсутствии теплопередачи. Таким образом, возрастание плотности

вместе с более высокой скоростью приводит к увеличению количества движения и к затягиванию отрыва. При нагревании стенки отрыв происходит выше по потоку, чем при отсутствии теплопередачи.

## 2. СОВРЕМЕННЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ОТРЫВА ПОТОКА

Недавно при попытках решить проблему отрыва в дополнение к концепции пограничного слоя стали придавать большое значение устойчивости всего поля течения и, в частности, влиянию на устойчивость смещения основного потока с диссипативными слоями. В застойной зоне накапливается значительное количество заторможенной жидкости. Более подробно застойная зона будет рассмотрена в последующих разделах этой главы.

Кохран и Клайн [27] наблюдали четыре режима течения в простом двумерном диффузоре с плоскими стенками, соответствующие разным углам раскрытия диффузора.

1. Режим плавного безотрывного течения.
2. Режим с протяженной переходной зоной отрыва, в которой отрыв изменяется со временем по интенсивности, расположению и протяженности.
3. Режим существенно двумерного, относительно установившегося, полностью развитого отрыва, при котором течение происходит с малым расширением или совсем без расширения.
4. Режим струйного течения, при котором поток отрывается и формируется подобно струе.

Кохран и Клайн наблюдали отрыв потока струйного типа, аналогичного теоретически исследованному Крокко и Лизом [8], однако теория Крокко и Лиза касалась лишь установившихся течений струйного типа, так что переходная зона отрыва (режим 2) оказалась не охваченной этой теорией.

Для дальнейшего развития вполне надежных расчетов отрыва необходимы дополнительные исследования не только основного течения, но также характеристик перехода пограничного слоя и зоны отрыва [28].

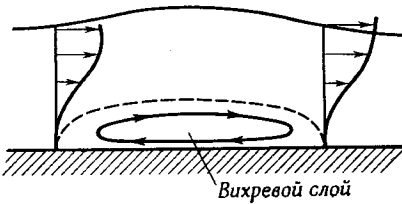
Классическая концепция отрыва потока не может быть непосредственно обобщена на случай отрыва трехмерного потока. Поэтому необходим новый подход к проблеме отрыва потока на теле произвольной формы.

### 2.1. ОТРЫВ ТРЕХМЕРНОГО ПОТОКА. ОБОБЩЕННАЯ КОНЦЕПЦИЯ ОТРЫВА ПОТОКА

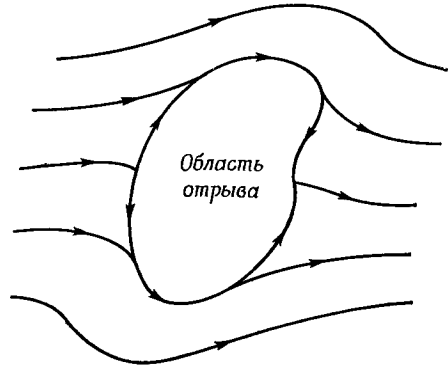
В классическом случае двумерного или осесимметричного течения с нулевым углом атаки отрыв потока отождествляется с возникновением обратного течения, когда точка отрыва представляет

собой переднюю границу вихревого слоя, заключенного в отрывной области. Но эта концепция не приложима к отрыву трехмерного потока [29, 30]. Если после отрыва происходит присоединение потока, картина течения соответствует изображенной на фиг. 28. В этом случае вихревое течение полностью заключено в тонком пограничном слое.

Мур [29] установил, что область отрывного течения на трехмерном теле состоит из вихревого слоя, заключенного между поверхностью тела и поверхностью тока, присоединенной к телу вдоль замкнутой кривой, как показано на фиг. 29. Стрелки указывают возможное на-



Ф и г. 28. Присоединение потока [29].



Ф и г. 29. Область трехмерного отрыва (вид сверху) [29].

правление результирующего напряжения трения на этой кривой и вне отрывной области. Физические представления о том, когда и где отрывается трехмерный поток, не всегда ясны. Поэтому Мур предложил рассматривать область отрывного течения как вихревой слой, заключенный внутри пограничного слоя на теле, если только справедливы предположения о тонком пограничном слое.

### 2.1.1. Поверхностная линия тока

Отрыв трехмерного потока может происходить без возвратного течения и нулевого поверхностного трения; поэтому необходим несколько более общий подход для определения и описания отрыва трехмерного потока. Этот подход основан на новой концепции поверхностных (предельных) линий тока.

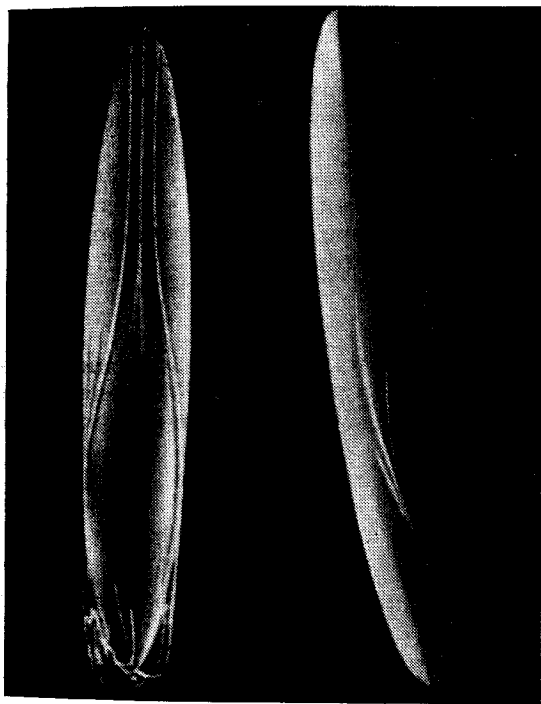
В работах [31, 32] предложено определение отрыва в трехмерном течении, согласно которому линия отрыва должна быть огибающей поверхностных линий тока на твердом теле.

Как установил Эйхельбреннер [33], критерием отрыва в двумерном потоке является условие  $\partial p / \partial z = 0$  и нулевое поверхностное трение, но двумерный отрыв является только вырожденным

случаем трехмерного отрыва [33], происходящего при  $\partial p/\partial z \neq 0$ , где  $z$  — координата в направлении поперечного течения.

Эйхельбреннеру удалось продемонстрировать существование трехмерной огибающей<sup>1)</sup> поверхностных линий тока путем впрыскивания молока через отверстия на поверхности тела, испытываемого в водяной трубе (фиг. 30).

Четкое определение поверхностной линии тока дано Маскеллом [34].



Ф и г. 30. Огибающая поверхностных линий тока на эллипсоиде [33].

При установившемся течении поверхностные линии тока в каждой точке имеют касательные в направлении течения вдоль поверхности. На поверхности скорость равна нулю, но существуют линии тока, проходящие через точки (на высоте  $h$ ) над поверхностью тела; поэтому поверхностные линии тока определяются

<sup>1)</sup> Огибающая понимается не в математическом смысле, а в смысле предельного положения, к которому стремится линия тока. См. Lighthill, *Laminar Boundary Layers*, Oxford, Clarendon Press, ed. by L. Rosenhead.

по направлению движения частиц на бесконечно близком к стенке расстоянии. Тогда поверхностные линии тока описываются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \left( \frac{dv}{dz} / \frac{du}{dz} \right)_{h=0},$$

где  $x, y, z$  — прямоугольные координаты,  $u, v, w$  — соответствующие компоненты вектора скорости.

Линии тока не могут оканчиваться в потоке: они либо начинают бесконечно далеко перед телом и оканчиваются бесконечно далеко за телом, либо образуют замкнутые кривые. Следовательно, если поверхностная линия тока не образует замкнутой кривой на этой поверхности, она должна примкнуть к стенке в некоторой точке присоединения и снова отойти от нее в некоторой последующей точке отрыва  $S$  [33].

Имеется два типа отрыва — обыкновенный и сингулярный. Обыкновенный отрыв является обычным явлением для трехмерного течения; поэтому в первую очередь рассмотрим этот тип отрыва. На криволинейной поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

однозначны и непрерывны, и, так как  $\partial u / \partial z$  и  $\partial v / \partial z$  пропорциональны  $\tau_x$  и  $\tau_y$ , напряжения сдвига в среде должны быть однозначными и непрерывными, а линии поверхностного трения совпадают с поверхностными линиями тока.

Обозначая

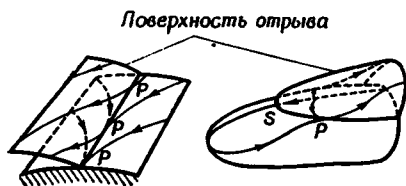
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{\tau_{x0}}{\tau_{y0}},$$

заметим, что угол  $\alpha_0$  конечен, однозначен и непрерывен, пока  $\tau_x$  и  $\tau_y$  одновременно не обратятся в нуль. Маскелл [34] и Дин [35] установили экспериментально, что отрыв в точке  $S$  происходит только при условии, что две различные поверхностные линии тока сходятся и встречаются в этой точке. Затем они сливаются и отходят от поверхности в виде единой разделяющей линии тока. В точке отрыва, где встречаются обе линии тока, значения  $\alpha_0$  на обеих линиях тока одинаковы. Это означает, что обе линии тока должны быть касательны друг к другу в плоскости стенки, образуя точку возврата в месте отрыва. Кроме того, эти линии тока должны касаться стенки в точке отрыва в дополнение к условию касания их между собой, как показано на фиг. 31—34. Наконец, можно установить, что при удовлетворении этих условий касания линия отрыва является также огибающей разделяющих линий тока.

Такие свойства обыкновенного отрыва присущи трехмерному течению, а обыкновенный отрыв возникает в точках возврата.



Следовательно, точки возврата поверхностных линий тока являются точками отрыва трехмерных течений. Поэтому если найдены поверхностные линии тока, то может быть определена точка отрыва.

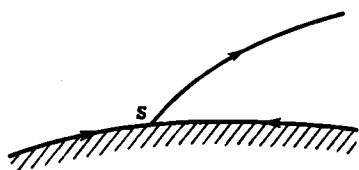


Ф и г. 31. Обыкновенный отрыв [35].

→→ предельные и разделяющие линии тока; P — обыкновенная точка.

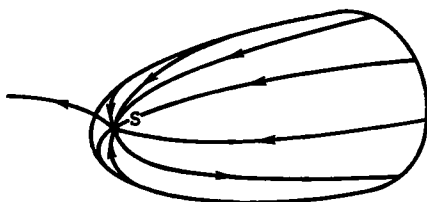
Ф и г. 32. Отрыв с изолированной особой точкой [35].

→→ предельные и разделяющие линии тока; S — особая точка; P — обыкновенная точка.



Ф и г. 33. Сингулярный отрыв двумерного потока [34].

S — особая точка.



Ф и г. 34. Изолированная точка отрыва [34].

S — особая точка.

При сингулярном отрыве  $\tau_x$  и  $\tau_y$  обращаются одновременно в нуль и

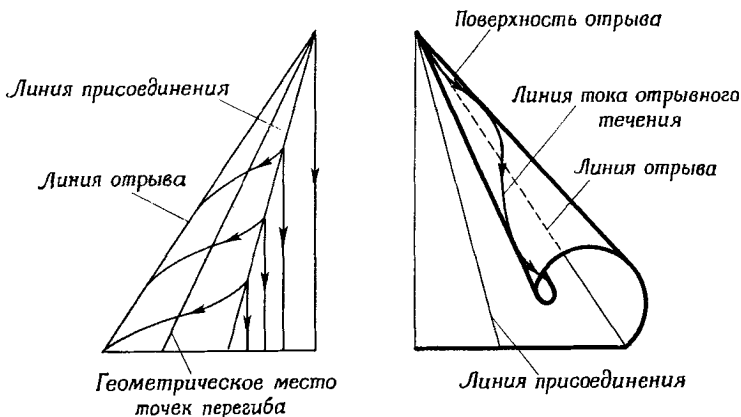
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 / \left( \frac{\partial \sqrt{u^2 + v^2}}{\partial z} \right)_0 = \frac{0}{0}$$

в сингулярной точке. Это означает, что напряжение трения на поверхности обращается в нуль и в такой точке

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\tau_x}{\tau_y} \right)$$

становится неопределенным, а направление течения на поверхности может быть разрывным и многозначным. Другими словами, при сингулярном отрыве поверхностные линии тока могут встречаться не в точке возврата, а в точке иного вида. Единственным требованием к сингулярным поверхностным линиям тока являются нулевые значения напряжения трения на стенке. Напомним, что классическая концепция отрыва в двумерных и осесимметричных

течениях связывает отрыв с точкой, в которой напряжение трения равно нулю. Это означает, что только линия сингулярного отрыва удовлетворяет условиям двумерных и осесимметричных течений при нулевом угле атаки. Вероятно, линии сингулярного отрыва никогда не возникают в трехмерных течениях из-за отсутствия



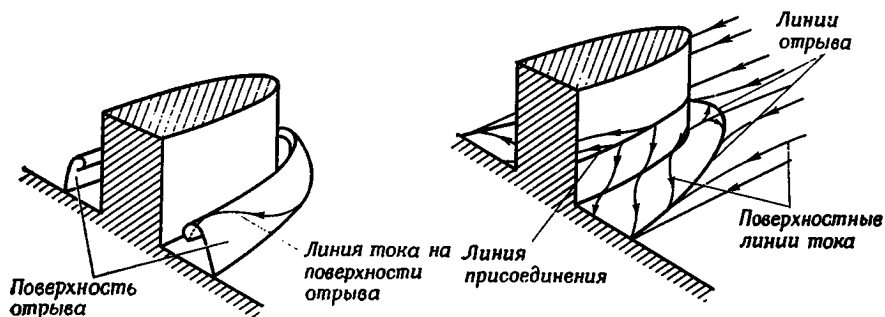
Ф и г. 35. Трехмерный отрыв на стреловидном крыле под углом атаки [35].

поверхностного напряжения трения на таких линиях. Кстати, никто и не наблюдал таких линий в трехмерном течении [35].

Связь между концепцией поверхностных линий тока и вязкостью при отрыве потока заключается в том, что поверхностные линии тока определяют схему течения в вязкой области. Следовательно, физическую природу отрыва трехмерного течения можно понять, если знать возможные схемы этого течения. Маскелл расчленил отрывное течение на две вязкие области: свободный вихревой слой и застойную область (каверну). Если размеры тела конечны, то поток сходит с тела на задней кромке. Конечно, поток может оторваться выше по течению от задней кромки. Этот вид схода потока с тела принадлежит к классическим, а сход потока на задней кромке ранее не рассматривался как отрыв. Теперь в соответствии с анализом Маскелла сход потока на задней кромке также рассматривается как отрыв, поскольку в этом случае пограничный слой отделяется от поверхности тела.

Течение около крыла конечного размаха при малом угле атаки является примером трехмерного течения. В этом случае отрыв потока происходит на острой кромке и линии тока, сходящие с поверхности крыла, образуют некоторую конфигурацию, около которой формируется основное течение. Часто сходящие с поверхности линии тока свертываются в вихрь, как показано на фиг. 35. Это явление описал и объяснил Дин [35].

При отрыве потока вихревой слой отходит от поверхности тела. Непосредственно за отрывом завихренность в отрывном течении в основном перпендикулярна направлению скорости невозмущенного потока и параллельна слою линий тока, сходящихся с поверхности. Кроме этой завихренности, может образоваться вторичная завихренность вследствие возвратного течения перед отрывом или за ним. Эта завихренность вызывает свертывание линий тока, сходящихся с поверхности крыла, в вихрь, и эта вторичная завихренность параллельна направлению основного потока, окру-



Ф и г. 36. Поверхностные линии тока и сбегающие вихри при отрыве пограничного слоя перед цилиндрической стойкой [35].



Ф и г. 37. Замкнутая каверна при двумерном отрыве [35].

Ф и г. 38. Открытая каверна при двумерном отрыве [35].

жающего конфигурацию линий тока, сходящихся с поверхности.

На фиг. 36 показан другой пример: образование вихря при обтекании цилиндрической стойки, установленной на пластине. Отрыв, происходящий вдоль двух линий обыкновенного отрыва, разделяется точкой сингулярного отрыва, расположенной на линии симметрии. Благодаря вторичной завихренности поверхностные линии тока после отрыва свертываются с образованием двух больших вихрей.

При двумерном отрыве всегда образуется каверна, в которой скорости малы. Установившиеся вихревые области течения отде-

ляются от основного потока некоторой поверхностью. Каверна может быть замкнутой или открытой, как видно из фиг. 37 и 38.

В трехмерном течении каверна образуется не всегда. Каверны при отрыве могут быть установившимися и не установившимися. Замкнутые каверны в двумерных и трехмерных течениях образуются на поверхности профиля, в углублениях, в углах и на расширяющихся стенках диффузора.

### 2.1.2. Срыв

Если отрыв потока нежелателен в инженерных приложениях, его условились называть «срывом». Напомним, что срывом на крыловом профиле называют отрыв потока, ухудшающий характеристики профиля вследствие резкого возрастания сопротивления и падения подъемной силы. Однако на практике отрыв потока не всегда нежелателен. Например, благодаря взаимодействию отрывного течения, создаваемого иглой, установленной перед тупым телом, при сверхзвуковых скоростях полета с отошедшим головным скачком уплотнения лобовое сопротивление сильно уменьшается. Следовательно, необходимо новое определение понятия срыва как явления в течении, которое приводит к накоплению значительных количеств заторможенной жидкости и часто связано с появлением нестационарности [35]. Нестационарность возникает из-за периодических выплескиваний накопившейся застойной жидкости, а так как возможность вытекания исключена, накопление жидкости продолжается. В трехмерном течении существует компонента скорости, перпендикулярная направлению основного потока. Накопленная жидкость может выплескиваться в этом направлении. Поэтому в несимметричном течении, т. е. в трехмерном течении, срывы встречаются редко. Однако в строго двумерном течении вытекание по нормали к направлению основного потока исключено и возможно накопление значительного количества заторможенной жидкости с периодическим выплескиванием; другими словами, возникает срыв. На практике двумерные течения встречаются весьма редко и чаще всего наблюдается осесимметричное течение. В противоположность строгому определению отрыва потока определение срыва следует считать довольно субъективным, так как его существование связано с геометрией поля течения и характеристиками жидкости.

## 3. МЕХАНИЗМ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ

В последнее время отрывные течения при сверхзвуковых скоростях потока исследовались значительно интенсивнее, чем при дозвуковых скоростях. Вследствие этого изучим физическую картину отрывного течения на основе результатов исследования

при больших скоростях и сделаем соответствующие замечания для дозвукового потока. Рассмотрим только такие виды отрывных течений, которые вызываются наличием клина, уступа, выреза, иглы, а также течение в донной области относительно малых размеров по сравнению с размерами тела. Течение в следе на большом расстоянии за телом не рассматривается. Часто отрывное течение называют «застойным», но это не означает, что его скорость равна нулю. В действительности наблюдается сложное нестационарное течение, и на поверхностях тел двумерной формы развиваются трехмерные течения.

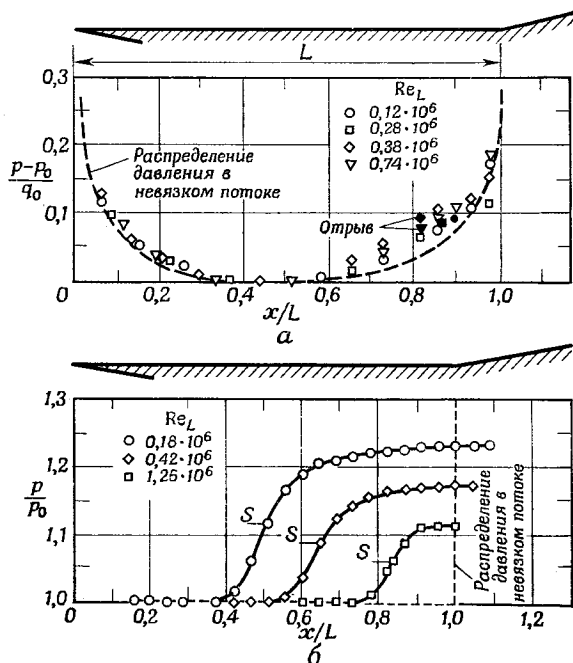
Течение в области отрыва характеризуется взаимодействием между вязким, или диссипативным, течением около поверхности твердого тела и «внешним», почти изэнтропическим течением. Перенос количества движения от «внешнего течения» к диссипативному можно рассматривать как фундаментальный физический процесс, определяющий давление. Теория смещения Крокко — Лиза [8] основана на этой концепции (будет рассмотрена более подробно ниже в этой главе и в гл. IX), которая была модифицирована Гликом [36]. На основе теории Крокко — Лиза были рассчитаны характеристики отрывного течения, вызванного уступом, обращенным навстречу потоку [37].

### 3.1. РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ДОЗВУКОВЫМ И СВЕРХЗВУКОВЫМ ОТРЫВНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

Используя модель клина с углом  $10^\circ$ , изображенного на фиг. 39, Чепмен и др. [38] установили фундаментальное различие между ламинарными дозвуковыми и сверхзвуковыми течениями в характере распределения давления при различных числах Рейнольдса. Как видно из фиг. 39, а, при дозвуковых скоростях ( $0,4 \leq M_\infty \leq 0,8$ ) изменение числа Рейнольдса весьма слабо сказывается на распределении давления и не сопровождается регистрируемым изменением роста давления до отрыва [ $(p_s - p_0)/q_0 = 0,82 \pm \pm 0,005$  при всех числах Рейнольдса]. Индекс 0 означает условия в начале взаимодействия, т. е. в точке, выше которой по потоку давление по существу такое же, как и в невязком течении. Кроме того, распределение давления приближенно соответствует давлению в соответствующем невязком течении, определенному по теории малых возмущений для наклонной плоской пластины и изображенному штриховой линией на фиг. 39, а. Однако, как видно из фиг. 39, б, при сверхзвуковом течении в интервале  $0,18 \cdot 10^6 < Re_L < 1,26 \cdot 10^6$  распределение давления зависит от числа Рейнольдса, изменяются также положение точки отрыва и значение давления, при котором происходит отрыв. Кроме того, измеренное распределение давления не совпадает с распределением, вычисленным по теории невязкого течения, которое скачкообразно изме-

няется от постоянного значения, как показано на фиг. 39, б штриховой линией.

Из этих двух фигур можно заключить, что в дозвуковом течении распределение давления вблизи отрыва и перед ним определяется в первую очередь распределением давления в невязком течении около тела заданной формы и лишь во вторую очередь



Ф и г. 39. Сравнение дозвуковых и сверхзвуковых течений при различных числах Рейнольдса [38].

а — дозвуковое течение, клин  $10^\circ$ ;  $0,4 \leq M_\infty \leq 0,8$ ;  $\alpha = -4^\circ$ ; б — сверхзвуковое течение, клин  $10^\circ$ ;  $M_0 = 2$ .

зависящим от числа Рейнольдса взаимодействием между пограничным слоем и внешним течением; в сверхзвуковом течении распределение давления вблизи отрыва определяется в первую очередь зависящим от числа Рейнольдса взаимодействием (свободное взаимодействие) и только во вторую очередь распределением давления в невязком течении.

### 3.2. ОТРЫВНОЕ ТЕЧЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ УСТУПАМИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

Для отрывных течений, обусловленных взаимодействием скачков уплотнения, вызванных уступами, обращенными навстречу потоку или расположенными по потоку, Чепмен и др. [38] измери-

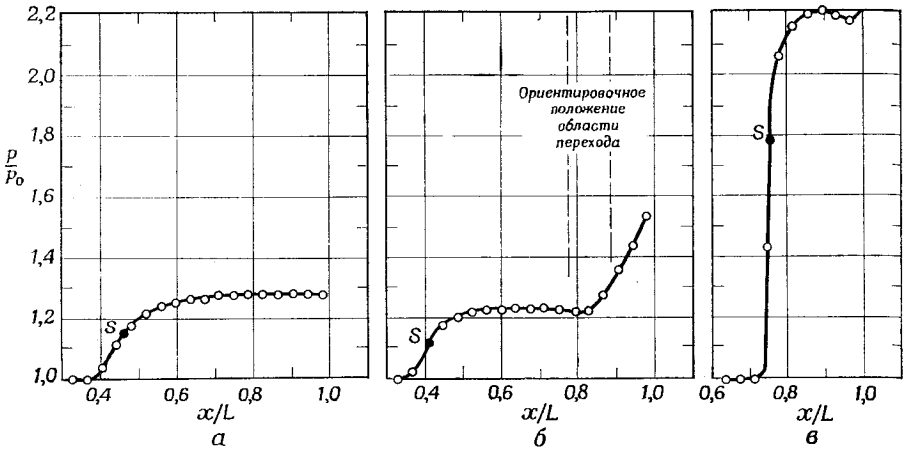
ли распределение давления при  $M_0 = 2,3$  и  $2,0$  (фиг. 40, 41), где индексом 0 обозначены условия непосредственно перед отрывом. Из этих фигур видно, что существуют три режима течения в зависимости от того, является течение ламинарным, переходным или турбулентным. При дозвуковых скоростях ламинарное отрывное течение очень легко переходит в турбулентное, поэтому ламинарное течение (несжимаемой) жидкости практически не представляет интереса. Однако ламинарные отрывные течения газа являются устойчивыми.

При чисто ламинарном режиме обтекания уступа, обращенного навстречу потоку (фиг. 40), имеется область «плато давления» с почти постоянным давлением в области отрыва. Давление отрыва  $p_S$  и давление в области плато  $p_p$  соответственно на  $\sim 15$  и  $\sim 30\%$  выше, чем давление непосредственно перед областью отрыва. В ряде случаев наблюдалось очень слабое возрастание давления во внутреннем угле уступа и на его лобовой поверхности. На небольшом участке у внешнего угла уступа существует область, в которой местное давление на лобовой поверхности выше, чем давление в области отрыва, так как часть оторвавшегося слоя затормаживается на этой поверхности. Если оторвавшийся слой в точке отрыва толстый, то это возрастание давления незначительно. Если же он очень тонок, то давление возрастает на небольшом участке вблизи внешнего угла. В переходном режиме пограничный слой сохраняется ламинарным при отрыве, так что возрастание давления, вызывающее отрыв, остается по существу таким же, как и при чисто ламинарном отрыве. Но переход приводит к более высокому росту давления перед присоединением потока на уступе.

Изменение давления на лобовой поверхности уступа, составляющее примерно  $0,1 p_0$ , обусловлено существованием в области возвратного течения перед уступом достаточно больших дозвуковых скоростей. Так как переход сам по себе является существенно неустановившимся процессом, течение в области между переходом и точкой присоединения также неустановившееся.

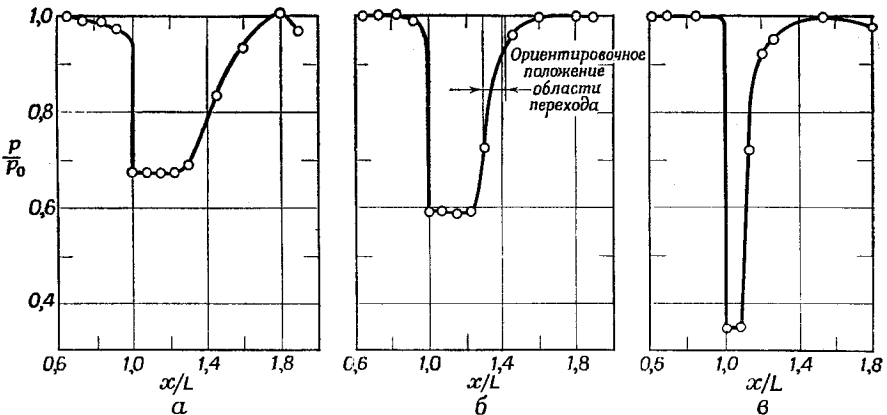
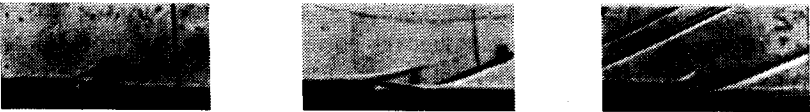
При турбулентном режиме рост давления при отрыве намного больше. В области отрыва не существует плато давления, поскольку вихревое движение в турбулентном слое повышает энергию жидкости. Давление на лобовой поверхности уступа подобно давлению в переходном режиме; степень устойчивости турбулентного течения не столь высока, как у ламинарного, но выше, чем у переходного течения.

Если уступ расположен по потоку, как показано на фиг. 41, то область плато давления существует во всех трех режимах, но величина давления, как и ожидалось, наименьшая при турбулентном и наибольшая при ламинарном течении.



Ф и г. 40. Три режима течения около уступа, обращенного навстречу потока,  $M = 2,3$  [38].

$a$  — чисто ламинарный,  $M_0 = 2,3$ ,  $Re_L = 0,2 \cdot 10^6$ ;  $б$  — переходный,  $M_0 = 2,3$ ,  $Re_L = 0,46 \cdot 10^6$ ;  $в$  — турбулентный,  $M_0 = 2,3$ ,  $Re_L = 1,52 \cdot 10^6$  (с турбулизатором).



Ф и г. 41. Три режима течения около уступа, расположенного по потоку,  $M = 2,0$  [38].

$a$  — чисто ламинарный,  $M_0 = 2,0$ ,  $Re_L = 0,17 \cdot 10^6$ ;  $б$  — переходный,  $M_0 = 2,0$ ,  $Re_L = 0,5 \cdot 10^6$ ;  $в$  — турбулентный,  $M_0 = 2$ ,  $Re_L = 0,39 \cdot 10^6$  (с турбулизатором).



### 3.3. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ОТРЫВНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Теплопередача оказывает влияние не только на положение отрыва, как упоминалось выше, но также и на характеристики отрывного течения. Так как в областях присоединения могут существовать «горячие пятна», влияние теплопередачи на отрывное течение привлекает пристальное внимание.

Физический процесс теплопередачи при отрывном течении частично объясняется следующими тремя механизмами:

- 1) теплопроводность между стенкой и средой в области отрыва;
- 2) теплопроводность через свободный вязкий слой;
- 3) перенос массы между областью отрыва и внешним течением.

Анализ Карлсона [39] подтверждает механизм переноса массы Чешмена — Ларсона [40, 41], в то время как модель переноса массы Харвата [42] дает более точные полуэмпирические поправки к результатам измерений, чем другие методы. Объяснение процесса теплопередачи, предложенное Харватом, состоит в следующем. Область отрыва «дышит» с ультразвуковой частотой, и в течение одного полупериода в эту область вводится масса. Так как в области отрыва теплопередача к стенке высока, избыточная масса нагревается до температуры стенки и уносит это тепло, вытекая из области отрыва в течение следующего полупериода. Таким образом, интенсивность теплообмена зависит от нестационарного обмена массы.

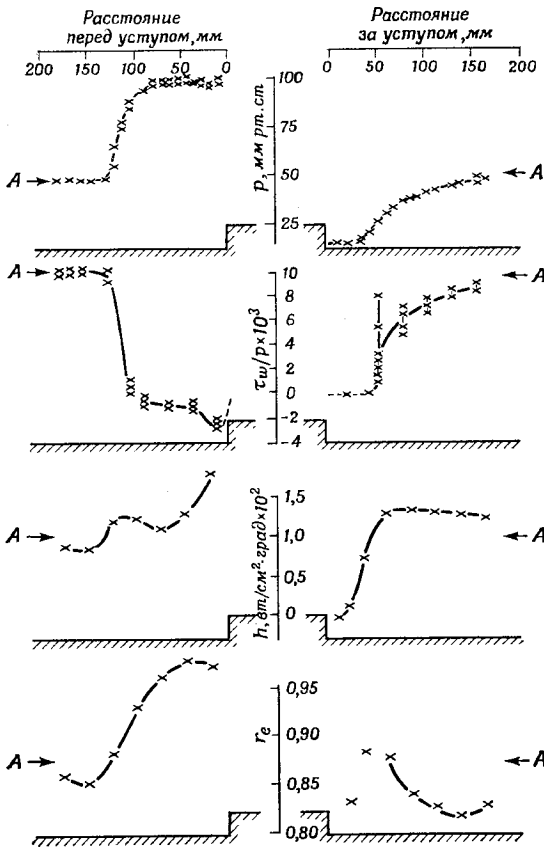
Ниже будет рассмотрено влияние теплопередачи на отрывные течения, вызванные уступами и вырезами.

#### 3.3.1. Уступы

Гэдд и др. [43] получили коэффициент теплопередачи, коэффициент восстановления, а также давление, напряжение трения и число Маха для уступов, обращенных навстречу потоку и расположенных по потоку, при  $M_\infty = 2,44$  и турбулентном режиме течения в пограничном слое (фиг. 42, 43).

Средняя температура поверхности стенки  $65^\circ\text{C}$ , температура торможения  $40^\circ\text{C}$  и соответствующая температура восстановления около  $18^\circ\text{C}$ . Сравнивая распределения давления на ненагреваемом уступе [38] и на нагреваемом уступе [43] можно заметить, что теплопередача оказывает довольно слабое влияние на давление. Трение на стенке перед уступом имеет такое же значение, как и без уступа. В точке, где начинается рост давления, трение уменьшается и обращается в нуль в сечении, где отношение давления к его значению во внешнем потоке составляет около 0,2. Ниже точки отрыва трение на стенке практически равно нулю на расстоянии до 4,5 см перед уступом и затем возрастает. Однако данные

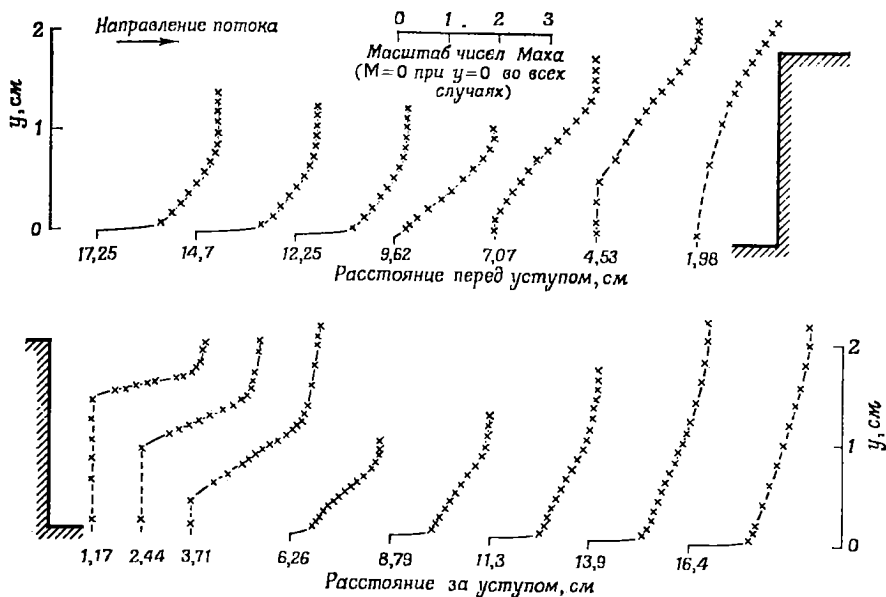
о коэффициенте теплопередачи  $h$  оказываются весьма неожиданными. Величина  $h$  определяется как плотность теплового потока в  $\text{вт}/\text{см}^2$ , отнесенная к разности (в градусах) температуры поверхности и местной эффективной равновесной температуры  $T_{re}$  (соответствующей нулевому тепловому потоку). Измеренные значения  $h$



Ф и г. 42. Результаты для областей отрывного течения [43].  
А — средние значения при отсутствии уступа.

представляют собой некоторые средние значения по верхней части прибора, измеряющего тепловой поток, а не действительное значение в точке. Вверху по потоку перед уступом  $h$  имеет немного меньшее значение, чем при отсутствии уступа. При приближении к уступу  $h$  вначале возрастает, а затем снова уменьшается и наконец вблизи уступа возрастает вдвое по сравнению со значением вверху по потоку. Такой рост  $h$  объясняется ростом давления в этой

области [43]. За уступом, расположенным по потоку, значение  $h$  мало вблизи уступа, а затем быстро достигает своего максимального значения за точкой присоединения. При гиперзвуковых скоростях летательного аппарата, когда длина отсоединившегося слоя смещения меньше или равна радиусу носовой части аппарата,



Ф и г. 43. Профили числа Маха в областях отрыва [43].

тепловой поток в области присоединения может достигать значений, превосходящих в два и более раз соответствующее значение в передней критической точке [44]. Большой приток тепла в области присоединения частично обусловлен малой толщиной пограничного слоя, начинающегося от точки присоединения [45].

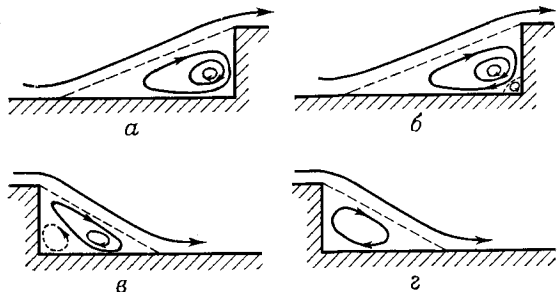
Эффективный коэффициент восстановления определяется следующим образом:

$$\frac{T_{re}}{T_{0s}} = \frac{1 + 0,2r_e M_0^2}{1 + 0,2M^2}$$

где  $T_{re}$  — эффективная температура восстановления, равная температуре  $T_w$ , при которой местный тепловой поток обращается в нуль, если  $T_w$  постоянна,  $T_{0s}$  — температура торможения при отсутствии притока тепла. Эффективный коэффициент восстановления изменяется от точки к точке, и его значения не обязательно совпадают со значениями коэффициента восстановления для изо-

лированной стенки, хотя можно ожидать, что он изменяется приблизительно таким же образом.

Из распределения чисел Маха на фиг. 43 видно, что присоединение потока происходит на расстоянии 4,5 см за уступом, что согласуется с результатами измерений поверхностного трения, обращающегося в нуль на расстоянии 4,5 см, а затем возрастающего далее по потоку. Исследования течения в области присоединения при малых скоростях показывают [46], что профиль чисел Маха



Ф и г. 44. Возможные конфигурации линий тока [46].

подобен изображенному на фиг. 43. На фиг. 44 показаны возвратные течения в зонах отрыва, соответствующие фиг. 43.

Схема внутреннего течения для модели массообмена Харвата и др. [42] представлена на фиг. 45. Вследствие пульсаций разделяющей линии тока в интервале  $\pm \Delta$  около среднего положения (фиг. 45) в полость периодически втекает некоторая масса  $dm$ . Эта жидкость циркулирует вокруг вихря «сжатия», попадает в свободный вязкий слой и вытекает за точкой сжатия.  $\Delta$  составляет некоторую часть от толщины свободного вязкого слоя  $\delta_s$  при отрыве. Импульс, соответствующий переносу количества движения в полость, и центробежная сила, обусловленная несбалансированной массой, вращающейся вокруг вихря «сжатия», должны быть уравновешены.

Неустановившийся приток массы за одну пульсацию равен

$$dm \sim \rho u \infty \Delta.$$

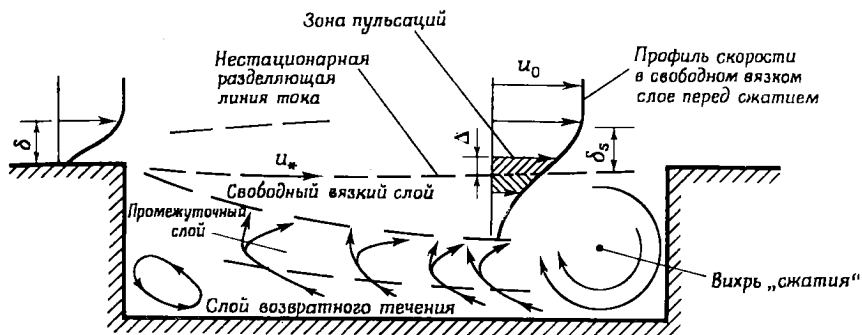
Количество тепла, передаваемое жидкости, втекающей в полость, и уносимое ею из полости, приходящееся на единицу поперечного размера в единицу времени, равно

$$q = c_p dm (T_{aw} - T_w),$$

где в этом случае  $T_{aw}$  — температура втекающей жидкости. Коэффициент теплопередачи для полости длиной  $L$  равен

$$St = \frac{q}{L(T_{aw} - T_w) c_p \rho u_\infty} \sim \frac{\Delta}{L}.$$

Эта модель массообмена подтверждается экспериментальными наблюдениями, однако очевидно также, что не все полости пульсируют, поэтому область применения данной модели ограничена.



Фиг. 45. Структура внутреннего течения для модели с теплопередачей посредством массообмена [42].

Экспериментальные результаты Харвата и др. в основном подтверждают данные наблюдений Ларсона [41].

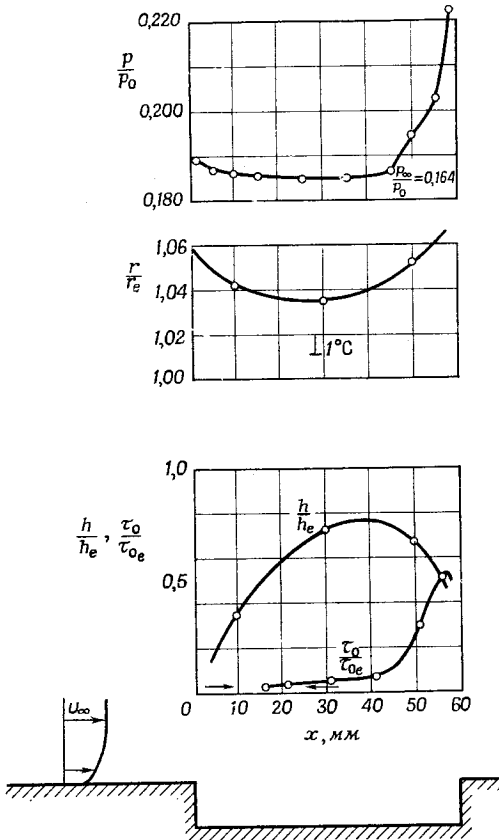
Визуализация течения и изучение диффузии тепла, выполненные Харватом и др., подтвердили существование интенсивного массообмена между полостью и внешним течением, а также неустановившегося течения. Кроме того, течение в центральной зоне имеет три слоя по вертикали: ко дну примыкает слой возвратного течения, относительно слабого и неустановившегося, но в среднем направленного вверх по потоку; промежуточный слой характеризуется сильным возвратным течением, но в целом в нем отсутствует какой-либо определенный поток массы и, наконец, свободный вязкий слой. В окрестности внутреннего угла, вызывающего сжатие потока, вихрь довольно интенсивный, но около внешнего угла, вызывающего отрыв, вихрь слабее и его знак противоположен.

На фиг. 46 приведены типичные характеристики течения в вырезе, протяженность турбулентного пограничного слоя в котором неизвестна [47].

Коэффициент теплопередачи  $h$  и коэффициент восстановления  $r$  определены следующим образом:

$$h = q / (T_w - T_{эфф}), \quad r = (T_r - T_\infty) / (T_s - T_\infty),$$

где  $q$  — плотность теплового потока,  $\text{Вт}/\text{см}^2$ ,  $T_w$ ,  $T_{\text{эфф}}$ ,  $T_r$ ,  $T_\infty$  — значения температуры на стенке, эффективной температуры, температуры, восстановления и температуры в набегающем потоке,  $^\circ\text{C}$ .  $T_{\text{эфф}}$  соответствует температуре при  $q_0 = 0$  и не обязательно равна  $T_r$ . В действительности же они совпадают.



Ф и г. 46. Распределение давления, коэффициента восстановления, коэффициента теплопередачи и коэффициента поверхностного трения по дну выреза;  $M_\infty = 1,8$ ,  $h' = 10$  мм [47].

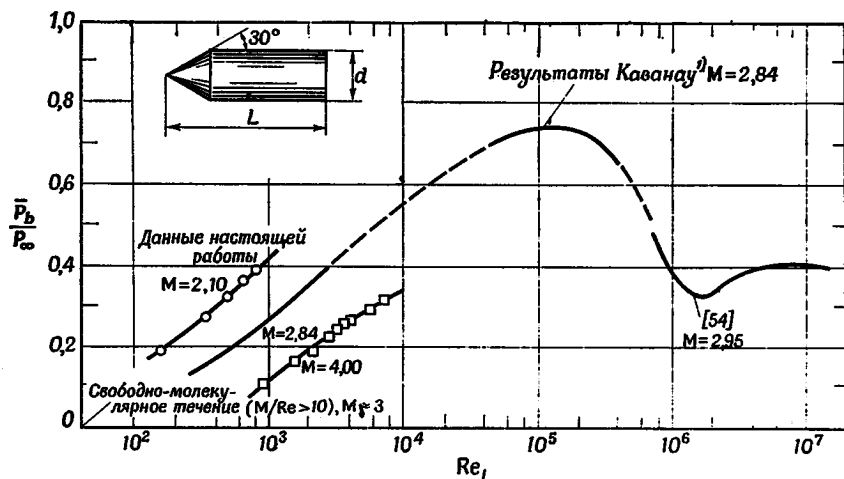
Индексами 0 и e обозначены значения в момент времени  $t = 0$  и на плоской пластине соответственно.

Максимальные значения давления, коэффициента восстановления и поверхностного трения имеют место вблизи задней стенки выреза, а максимальное значение  $h$  достигается немного ниже по потоку от среднего сечения выреза, где значения коэффициента восстановления и давления минимальны. Томан [47] заметил два

вихря в вырезе, а наблюдения с использованием теневого прибора и интерферометра показали, что течения в наиболее глубоких вырезках являются неустановившимися с пульсациями давления в нескольких ограниченных зонах. Так как поверхностное трение уменьшается в большей степени, чем теплопередача, в области отрыва нельзя применять аналогию Рейнольдса без дальнейших исследований характеристик течения в этой области.

#### 3.4. ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ

Донное давление, т. е. давление в области отрыва непосредственно за телом, в общем случае меньше, чем статическое давление в набегающем потоке. Действуя на донную поверхность, оно приводит к появлению силы. Так как составляющая этой силы в направлении течения совпадает с направлением сопротивления, донное давление оказывает непосредственное влияние на полное сопротивление. При некоторых условиях сопротивление, обусловленное донным давлением, довольно велико. В соответствии



Ф и г. 47. Донное давление в зависимости от числа Рейнольдса,  $M \approx 3$  [49].

<sup>1)</sup> Источник: JAS, 24, № 4 (1954).

с теорией смешения Крокко — Лиза [8] можно предполагать, что пониженное давление в донной области поддерживается благодаря переносу количества движения через вязкие слои. Хотя концепция простого переноса количества движения удобна для сверхзвукового течения, она может оказаться недостаточной для течения несжимаемой жидкости, поскольку в несжимаемом потоке наряду с переносом количества движения через вязкий слой важным

фактором является динамика вихрей [48]. Донное давление в сильной степени зависит от числа Рейнольдса, как показано на фиг. 47, где представлена зависимость донного давления от числа Рейнольдса в интервале  $1,16 \cdot 10^3 < Re < 1,8 \cdot 10^7$  и  $M \approx 3$  для цилиндрической модели с конической носовой частью [49]. Так как местные значения донного давления изменяются вдоль радиуса донного среза, на фиг. 47 представлены средние по площади значения коэффициента  $p_b/p_\infty$ . При малых значениях числа Рейнольдса, соответствующих ламинарному режиму течения, донное давление резко изменяется с ростом числа Рейнольдса, однако при больших числах Рейнольдса, соответствующих турбулентному режиму течения, донное давление практически не зависит от числа Рейнольдса. В промежуточном интервале чисел Рейнольдса имеет место переходный режим и донное давление достигает своего максимального значения.

Проблема донного давления за плоской пластиной при дозвуковых скоростях является классической, но для нее еще не получено удовлетворительного решения. Недавно были проведены исследования донного давления при сверхзвуковых скоростях, однако для получения надежных результатов необходимы дальнейшие исследования.

### 3.5. ОТРЫВ ПОТОКА, ВЫЗЫВАЕМЫЙ ТОНКОЙ ИГЛОЙ, ПЕРЕД ТУПЫМ ТЕЛОМ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

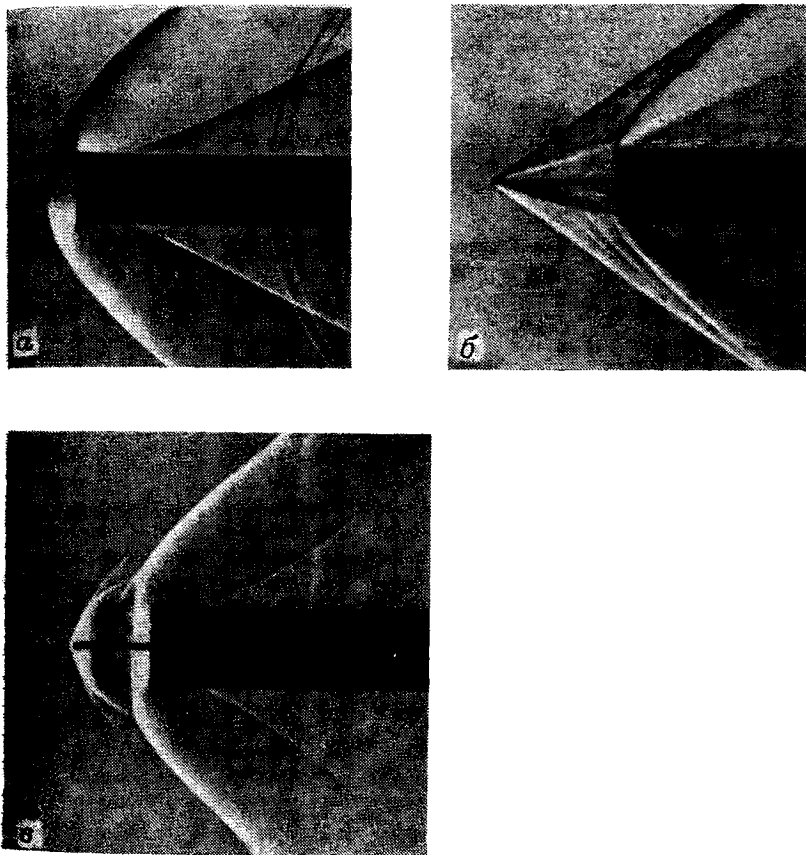
Тонкая игла, выступающая из лобовой части тупого тела, при больших скоростях способна уменьшить сопротивление и теплопередачу благодаря отрыву потока на игле. Таким образом, создавая отрыв потока (а не предотвращая его), можно найти полезные инженерные приложения этого явления.

Отсоединенный скачок уплотнения перед тупым телом (фиг. 48, *a*), может изменить свою форму, если перед таким телом установить тонкую иглу. Скачок уплотнения становится косым и присоединенным к носку иглы (фиг. 48, *б*). Между косым скачком уплотнения и иглой возникает отрывное течение клинообразного или конического типа в зависимости от того, является затупленное тело двумерным или осесимметричным [51].

Если в области отрыва перед скачком уплотнения имеется градиент скорости, как показано на фиг. 49, а статическое давление перед скачком постоянно, то давление за прямым скачком на линии тока, приходящей в точку торможения, будет меньшим, чем давление за прямым скачком в невозмущенном потоке. Если скачок уплотнения остается неизменным и сохраняет форму, изображенную штриховой линией на фиг. 49, то градиент давления по нормали к оси будет положительным, а течение за скачком будет сходящимся. Во всяком реальном течении, однако, градиент



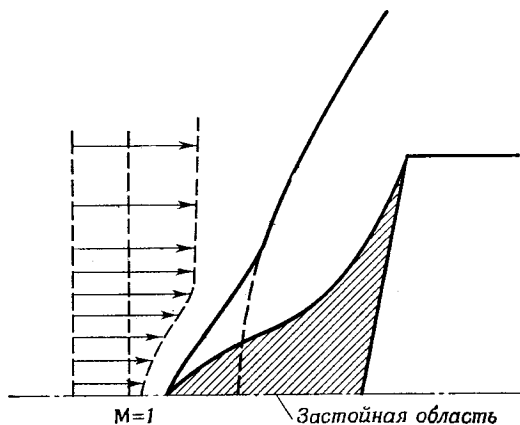
давления по нормали к линии тока, приходящей в точку торможения, должен быть нулевым или отрицательным; поэтому первоначальная форма скачка уплотнения, показанная штриховой линией, становится невозможной и должна измениться. Так как



Ф и г. 48. Головной скачок уплотнения и отрыв потока перед тупым телом [50].

скорость течения на оси симметрии меньше скорости невозмущенного невязкого потока, то никакой скачок уплотнения не создает столь высокого давления на оси, как давление за скачком вне вязкого слоя, пока точка торможения располагается на поверхности тела. Поэтому требуемое высокое давление в окрестности вершины скачка может быть достигнуто, если точка торможения переместит-

ся вверх по потоку. Таким образом, форма скачка изменяется и градиент давления становится положительным в направлении течения, вызывая отрыв. Если циркуляционное течение в вязком слое очень слабое, то граница области отрыва является поверхностью постоянного давления и область отрыва принимает форму клина или конуса. Вследствие наклона скачка уплотнения давление на поверхности тела уменьшается, и поэтому сопротивление



Ф и г. 49. Течение перед тупым телом при переменном полном давлении [51]. Начальная скорость сверхзвуковая.

тела с иглой падает. Так как сопротивление тесно связано с теплопередачей, можно ожидать уменьшения теплопередачи [51].

Причины пульсаций отрывного течения еще не совсем понятны, однако для объяснения этого явления рассматривается баланс массы. На фиг. 48, в показана мгновенная картина пульсирующего течения. Свободный вязкий слой отсасывает воздух из области отрыва. Таким образом, если отношение давлений при переходе через косой скачок уплотнения таково, что масса воздуха, возвращаемая назад в месте присоединения, компенсируется массой воздуха, отсасываемой из области отрыва вязким слоем, течение будет установившимся. Возникновение пульсаций зависит от формы затупленного тела. При отрыве потока около тела с плоским срезом носовой части пульсации наблюдались, но при сферической форме носовой части они отсутствовали.

#### 4. РАСЧЕТ ОТРЫВА ПОТОКА

Отрыв потока исследовался весьма широко, и имеется весьма обширная литература о методах расчета и экспериментальных результатах. Экспериментальные методы и результаты имеют

столь же важное значение, как и теоретический анализ при рассмотрении задач отрыва потока. Однако в данном разделе рассматривается только теоретический анализ, так как этого достаточно для понимания механизма отрыва потока и связанных с ним проблем.

#### 4.1. ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Подход, основанный на рассмотрении пограничного слоя с использованием уравнений неразрывности, движения и энергии, наиболее широко используется при решении классических задач об отрыве потока. Этот подход будет подробно рассмотрен в следующих главах применительно к отрыву несжимаемого и сжимаемого потоков. Отметим здесь, что такой подход позволил успешно решить такие задачи об отрыве установившегося двумерного внешнего течения, как отрыв потока на профиле, при ламинарном и турбулентном режимах. В этом случае теоретическим критерием отрыва является  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$ . Однако такой подход недостаточен при решении таких задач об отрыве внутреннего течения, как отрыв внутри диффузора, или в случае трехмерных течений.

#### 4.2. ТЕОРИЯ СМЕШЕНИЯ КРОККО — ЛИЗА

Теория смешения в упрощенной форме, как уже упоминалось, была развита Крокко и Лизом [8] и применена не только к отрывным и присоединяющимся течениям, но также и к течениям в следе. С помощью этого метода было достигнуто качественное совпадение между результатами теоретических расчетов зависимости донного давления от числа Рейнольдса и экспериментальными данными [52, 53] для тел вращения и данными [54] для профилей с тупыми задними кромками. Таким образом, теория Крокко — Лиза чаще применялась к задачам о донном давлении, хотя она представляет собой общее решение задачи об отрывном течении. Было установлено, что отрывное и присоединяющееся течения в состоянии поддерживать значительный рост давления при больших скоростях. До появления теории Крокко — Лиза расчеты вязкого течения в следе и струе выполнялись на основе предположения о постоянном статическом давлении. В действительности такое простое предположение не выполняется. Крокко и Лиз установили, что в отрывном течении градиент давления вдоль поверхности может достигать максимального значения вблизи точки отрыва и затем постепенно уменьшаться, а при присоединении течения в следе градиент давления пренебрежимо мал на некотором расстоянии вверху по потоку от точки присоединения и быстро возрастает при приближении к этой точке.

На основе теории пограничного слоя отрыв потока можно охарактеризовать двумя определяющими параметрами  $\kappa$  и  $f$ :

$$\kappa = (\delta - \delta^* - \theta) / (\delta - \delta^*) \quad \text{и} \quad f = (\delta_i - \delta_i^* - \theta_i) \cdot \delta_i / (\delta_i - \delta_i^*)^2,$$

где  $\delta$ ,  $\delta^*$  и  $\theta$  — соответственно физическая толщина, а также толщины вытеснения и потери импульса пограничного слоя, индекс  $i$  обозначает несжимаемое течение в преобразовании Стюартсона.

Отрыв ламинарных и турбулентных течений характеризуется уменьшением  $\kappa$  и возрастанием  $f$ . В точке отрыва наклон  $\partial f / \partial \kappa$  бесконечен (или вертикален) (фиг. 50 и 51). Этот факт имеет четкое физическое объяснение.

При приближении к отрыву влияние стенки на элемент жидкости, имеющий большую скорость, становится все менее заметным, и условия в этом элементе, определяющие значение  $\kappa$ , становятся все более подобными условиям «свободной» полубесконечной струи с постоянным значением  $\kappa$ . С другой стороны,  $f$  постепенно возрастает вследствие возрастания полной толщины диссипативного течения. Поэтому наклон  $\partial f / \partial \kappa$  становится бесконечно большим в точке отрыва.

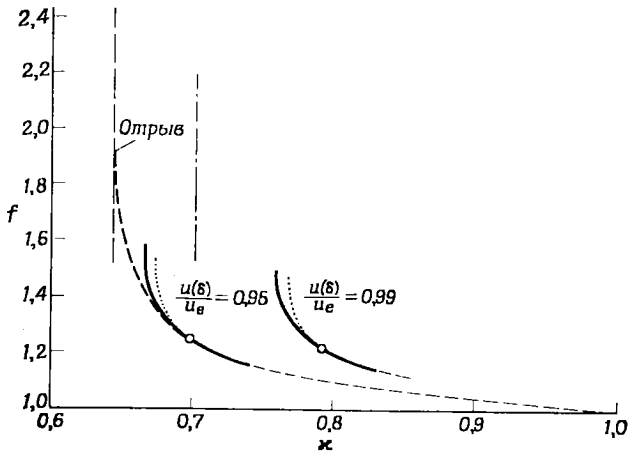
Эта физическая картина важна для решений задач об отрывных течениях, так как она позволяет в какой-то мере предсказать, что произойдет после отрыва, и так как для этой области не существует надежных теоретических решений.

Следует ожидать, что в области отрыва струйный характер течения проявится в еще большей степени, поэтому параметр  $\kappa$  испытывает лишь малые изменения, в то время как все изменения, происходящие в потоке, отражаются на параметре  $f$ . Следовательно, кривая  $f(\kappa)$  будет иметь почти вертикальный участок за точкой отрыва.

Присоединение оторвавшегося потока к стенке и последующее образование обычного пограничного слоя можно рассмотреть в плоскости  $f - \kappa$ , подобно отрыву и отрывным течениям, но в противоположной последовательности.

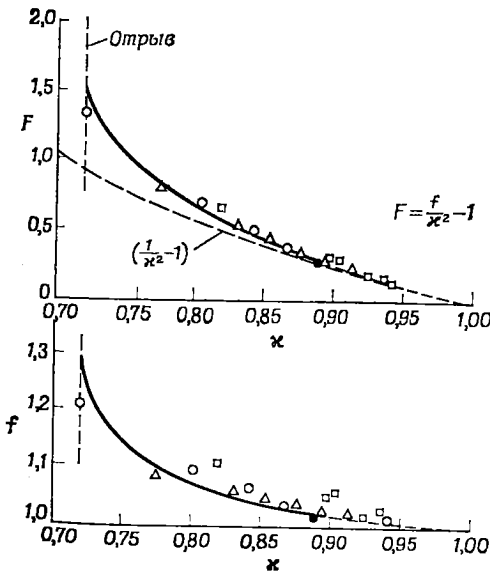
Для дальнего следа  $\delta_i^* = \theta = 0$  и  $\kappa = f = 1$ . Поэтому можно заключить, что любое диссипативное течение несжимаемой жидкости, включая отрыв, отрывные области, области присоединения и след, может быть описано некоторой кривой в плоскости  $f - \kappa$ . Если предположить, что преобразования Стюартсона для турбулентных течений применимы к отрывному течению, то диссипативное течение сжимаемой жидкости можно описать тем же соотношением  $f - \kappa$ . Таким образом, хотя теория Крокко — Лиза дает только качественные решения, она является мощным средством решения задач об установившихся течениях жидкости, включая отрыв потока.

Этот анализ применим не только к двумерным течениям, но также к осесимметричным дозвуковым и сверхзвуковым течениям.



Ф и г. 50. Ламинарные течения [8].

Пограничный слой: — метод Фолкнера — Скэн, .... метод Хоурта; ○ решение Блазиуса ( $dp/dx = 0$ ). Свободная струя (Чепмен): — 0,01 ≤  $u/u_e$  ≤ 0,99; -- 0,05 ≤  $u/u_e$  ≤ 0,95; — — экстраполяция.



Ф и г. 51. Турбулентные течения [8].

— метод Шубаура; ○ метод Ленхоффа; метод Богдонова — Солярски; □ перед скачком уплотнения, △ за скачком уплотнения; ● плоская пластина.

Недавно Глик [36] установил, что выбранная неправильная зависимость  $f(\alpha)$  приводит к расхождению между результатами теории Крокко — Лиза и экспериментальными данными в области течения перед отрывом, и модифицировал теорию Крокко — Лиза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tollmien W., 50 Jahre Grenzschichtforschung, Vieweg, Braunschweig, 1955.
2. Прандтль Л., Механика вязких жидкостей, сб. «Аэродинамика», под ред. Дюрэнда В. Ф., т. 3, Оборонгиз, М.—Л., 1939.
3. Föttinger H., Mitt. Vereinig. Grosskesselbesitzer, H. 73, 1939.
4. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, изд-во «Наука», 1969.
5. Görtler H., Witting H., Einige laminare Grenzschichtströmungen berechnet mittels einer neuen Reihen-Methode, *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. IXb, Fasc. 5/6, 1958.
6. Meksyn D., New Methods in Laminar Boundary-layer Theory, Pergamon Press, N.Y., 1961, first edition, pp. 15 and 109.
7. Schubauer G. B., Spangenberg W. G., Forced Mixing in Boundary Layers, *J. Fluid Mech.*, 8, pp. 10—32 (1960).
8. Crocco L., Lees L., A Mixing Theory for the Interaction between Dissipative Flows and Nearly Isentropic Streams, *J. Aeronaut. Sci.*, 9, № 10, pp. 649—696 (Oct. 1952).
9. Rotta J., Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten unter Benutzung des Energiesatzes, Mitt. Max-Planck-Inst. Ström.-forsch., Vol. 8, Göttingen, 1953.
10. Прандтль Л., Титъенс О., Гидро- и аэродинамика, М.—Л., 1932.
11. Hemke P. E., Elementary Applied Aerodynamics, Prentice-Hall, N.Y., 1946.
12. Weick F. E., Vamber M. J., Wind Tunnel Tests of a Clark Y Wing with a Narrow Auxiliary Airfoil in Different Positions, NACA Rept 428, 1932, p. 5.
13. Dryden H. L., The Role of Transition from Laminar to Turbulent Flow in Fluid Mechanics, University of Pennsylvania, Bicentennial Conferences, Fluid Mechanics and Statistical Methods in Engineering, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1941.
14. Kreith F., Principles of Heat Transfer, International Text Book Co., Scranton, Pa., 1958; first edition, pp. 371—372.
15. Eck B., Technische Strömungslehre, Springer — Verlag, Berlin, 1944, pp. 161—162.
16. Morokovin M. V., Flow Around Circular Cylinder — a Kaleidoscope of Challenging Fluid Phenomena, paper presented at ASME Fluids Engineering Division Conference, Philadelphia, Pa. May 1964.
17. Lees L., Thomas L., Turbulent Diffusion in the Wake of a Blunt-Nosed Body at Hypersonic Speeds, IAS Paper № 62—71 presented at the IAS 30 th Annual Meeting, N.Y., Jan. 1962.
18. Demetriades A., Some Hot-wire Anemometer Measurements in a Hypersonic Wake, Proceedings of the 1961 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 1961.
19. Вэбб, Хромас, Лиз, Переход в следе при гиперзвуковых скоростях полета, *Ракетная техника и космонавтика*, № 3 (1963).
20. Фэй, Гольдберг, Нестационарный гиперзвуковой след за затупленными телами, *Ракетная техника и космонавтика*, № 10 (1963).

21. Морфи, Дикинсон, Развитие турбулентного следа за сферой, летящей со сверхзвуковой скоростью, *Ракетная техника и космонавтика*, № 2 (1963).
22. Lange R. H., Present Status of Information to the Prediction of Shock-induced Boundary Layer Separation, NACA TN 3065, 1954.
23. Liepmann H. W., Roshko A., Dhawan S., On Reflection of Shock Waves from Boundary Layer, NACA Rept 1100, 1952. (Supersedes NACA TN 2334).
24. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоурта Л., ИЛ, 1955, стр. 386—486.
25. Brinich P. F., Blunt Body Separation at Supersonic Speeds, *J. Aeronaut. Sci.*, 25, № 5, pp. 336—337 (May 1958).
26. Gadd G. E., Boundary Layer Separation in the Presence of Heat Transfer, AGARD Rept 280, April 1960.
27. Cochran D. L., Kline S. J., Use of Short Flat Vanes for Producing Efficient Wide-angle Two-dimensional Subsonic Diffusers, NACA TN 4309, Sept. 1958.
28. Kline S. J., On the Nature of Stall, *J. Basic Engng*, 81, Series D, № 3 (Sept. 1959).
29. Moore F. K., Laminar Boundary Layer on Cone in Supersonic Flow at Large Angle of Attack, NACA Rept 1132, 1953, pp. 541—543.
30. Hayes W. D., The Three-dimensional Boundary Layer, NAVORD Rept 1313, NOTS 384, US Naval Ordnance Test Station, Inyokern (May 1951).
31. Eichelbrenner E. A., Oudart A., Observations sur un critère de décollement laminaire dans la couche limite tridimensionnelle, *Recherche aéronaut.*, № 40 (1954).
32. Eichelbrenner E. A., Oudart A., Le décollement laminaire à trois dimensions, *Recherche aéronaut.*, № 47, 1955.
33. Eichelbrenner E. A., Discussion on R. Timman's paper, The Theory of Threedimensional Boundary Layer, Boundary Layer Effects in Aerodynamics, Philosophical Library, Inc., N.Y., 1957, DI, p. 2.
34. Maskell E. C., Flow Separation in Three Dimensions, Royal Aircraft Establishment Rept, Aero, 2565, Nov. 1955.
35. Dean R. C., Jr., Separation and Stall. Handbook of Fluid Dynamics, ed. by Streeter, V. L., McGraw-Hill, N.Y., 11—1 to 11—40.
36. Glick H. S., Modified Crocco-Lees Mixing Theory for Supersonic Separated and Reattaching Flows, *J. Aerospace Sci.*, 29, № 10, pp. 1238—1249 (Oct. 1962).
37. Vasiliiu J., Pressure Distribution in Region of Step-induced Turbulent Separation, *J. Aerospace Sci.*, 29, № 5, pp. 596—601 (May 1962).
38. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K., Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition, NACA TN 3869, 1957.
39. Carlson W. O., Heat Transfer in Laminar, Separated, and Wake Flow Regions, Proceedings of the 1959 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (held at University of California, Los Angeles), Stanford University Press, pp. 140—155.
40. Chapman D. R., A Theoretical Analysis of Heat Transfer in Regions of Separated Flow, NACA TN 3992, 1956.
41. Larson H. K., Heat Transfer in Separated Flows, *J. Aeronaut. Sci.*, 26, № 11, pp. 731—738 (Nov. 1958).
42. Charwat A. F., Dewey C. F., Roos J. N., Hitz J. A., Investigation of Separated Flows, Part II: Flow in the Cavity and Heat Transfer, *J. Aeronaut. Sci.*, 28, № 7, pp. 513—527 (July 1961).
43. Gadd G. E., Cope W. F., Attridge J. L., Heat Transfer and Skin-Friction Measurements at a Mach Number of 2.44 for a Turbulent Boundary Layer on a Flat Surface and in Regions of Separated Flow, ARC R & M 3148 (Oct. 1958).

44. Chung P. M., Viegas J. R., Heat Transfer at the Reattachment Zone of Separated Laminar Boundary Layers, NASA TN D-1071 (Sept. 1961).
45. Naysmith A., Heat Transfer and Boundary Layer Measurements in a Region of Supersonic Flow Separation and Reattachment, ARC 20601, May 1958.
46. Coles D., The Law of the Wake of the Turbulent Boundary Layer, *J. Fluid Mech.*, **1**, Part 2, pp. 191—226 (July 1956).
47. Thomann H., Measurements of Heat Transfer and Recovery Temperature in Regions of Separated Flow at Mach Number 1.8, Aeronautical Research Institute of Sweden, Rept 82, 1959.
48. Roshko A., On the Wake and Drag of Bluff Bodies, *J. Aeronaut. Sci.*, **22**, № 2, pp. 124—132 (Feb. 1955).
49. Kavanau L. L., Base Pressure Studies in Rarefied Supersonic Flows, *J. Aeronaut. Sci.*, **23**, № 3, pp. 193—230 (March 1956).
50. Mair W. A., Experiments on Separation of Boundary Layers on Probes in Front of Blunt Nosed Bodies in a Supersonic Air Stream, *Phil. Mag.*, **43**, 7th series (July 1952).
51. Moeckel W. E., Flow Separation Ahead of Blunt Bodies at Supersonic Speeds, NACA TN 2418 (July 1951).
52. Chapman D. R., An Analysis of Base Pressure at Supersonic Velocities and Comparison with Experiment, NACA TN 2137 (July 1950).
53. Bogdonoff S. M., A Preliminary Study of Reynolds Number Effects on Base Pressure at  $M = 2.95$ , *J. Aeronaut. Sci.*, **19**, № 3 (March 1952).
54. Chapman D. R., Wimbrow W. R., Kester R. H., Experimental Investigation of Base Pressure on Blunt Trailing Edge Wings at Supersonic Velocities, NACA TN 2611.

#### БИБЛИОГРАФИЯ

- Abbott D. E., Holt M., Nielsen J. N., Investigation of Hypersonic Flow Separation and Its Effects on Aerodynamic Control Characteristics, Flight Control Lab., Aeronautical Systems Div., Wright—Patterson Air Force Base, Ohio, ASD-TDR-62-963, Nov. 1962.
- A Mick J. L., A Semiempirical Relation for Laminar Separation *J. Aero/Space Sci.*, (Sept. 1959).
- Chang P. K., Research on Flow Separation in Western Europe, US Air Force., Office of Scientific Research, Washington, DC, AFOSR 4854, the Catholic University of America, July 1963.
- Cooke J. C., Hall M. G., Boundary Layers in Three Dimensions, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 2, Pergamon Press.
- Fraenkel L. E., On Corner Eddies in Plane Inviscid Shear Flow, *J. Fluid Mech.*, **11**, Part 3, pp. 400—406 (Nov. 1961).
- Friberg E. G., Measurement of Vortex Separation, Part I: Two-dimensional Circular and Elliptic Bodies, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 114, Aug. 1965.
- Friberg E. G., Measurement of Vortex Separation, Part II: Three-dimensional Circular and Elliptic Bodies, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 115, Aug. 1965.
- Fung Y. C., Fluctuating Lift and Drag Acting on a Cylinder in a Flow at Supercritical Reynolds Numbers, Space Technology Labs, Division of the Thompson Ramo-Wooldridge Corp., EM 8-5, May 1958.
- Grove A. S., Shair F. H., Petersen E. E., Acrivos A., An Experimental Investigation of the Steady Separated Flow Past a Circular Cylinder, *J. Fluid Mech.*, **19**, Part 1 (May 1964).
- Harper J. F., On Boundary Layers in Two-dimensional Flow with Vorticity, *J. Fluid Mech.*, **17**, Part. 1, pp. 141—153 (Sept. 1963).



- Н а w o r t h D. R., P e t e r s A. R., Analytical Investigations of Laminar Separations Using the «Crocco—Lees Mixing Parameter» Method, NASA Contractor Rept 745 (May 1967).
- Х е й з е р, Влияние магнитных полей на отрыв, *Ракетная техника и космонавтика*, № 12 (1964).
- К а u f m a n L. G., II, M e c k l e r L., H a r t o f i l i s S. A., An Investigation of Flow Separation and Aerodynamic Controls at Hypersonic Speeds, AIAA Paper № 65-753, Nov. 15-18, 1965.
- К l i n e S. J., D e a n R. C., Jr., Unsolved Problems of Fluid Mechanics, *Mech. Engng*, 80, № 12 (Dec. 1958).
- К o r s t H. H., Dynamics and Thermodynamics of Separated Flows, presented at the Symposium on Single- and Multi-component Flow Processes, May 1, 1964, Rutgers Engineering Centennial, Rutgers, the State University.
- M u r p h y J. S., The Separation of Axially Symmetric Turbulent Boundary Layers. Part II: Detailed Measurements in the Boundary Layers on Several Slender Bodies in Incompressible Flow, Douglas Aircraft Division, Long Beach, Calif., Rept № ES 17513 (Aug. 1955).
- П о л, Определение двух типов отрыва, *Ракетная техника и космонавтика*, № 12 (1964).
- R o s n e r D. E., Fundamental Solution to the Diffusion Boundary Layer Equation For Nearly Separated Flow Over Solid Surfaces at Very Large Prandtl Numbers, AeroChem Research Labs, Princeton, NJ, Nov. 1962.
- R o u s e H., Répartition de l'énergie dans des zones de décollement, *Houille blanche, Rev. Ing. Hydraul.*, № 3 (May 1960).
- R o u s e H., Distribution of Energy in Regions of Separation, *Houille blanche, Rev. Ing. Hydraul.*, № 4 (June 1960).
- S t e w a r t s o n K., The Behaviour of a Laminar Compressible Boundary Layer near a Point of Zero Skin-friction, 22 April 1961, pp. 117-128.
- T o r r i l l o D. T., A Brief Review of Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layer Separation, Republic Aviation Corp., Fairchild Hiller, RAC 2325 (April 1964).
- T o w n s e n d A. A., The Behavior of a Turbulent Boundary Layer Near Separation, *J. Fluid Mech.*, 12, p. 536 (1962).

## Глава II

# ОТРЫВ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

---

### Обозначения

- $a$  — длина большой полуоси; постоянная величина;  
 $a_1, a_2, a_3$  — коэффициенты;  
 $B$  — величина, определяемая уравнением (17);  
 $b$  — длина малой полуоси; половина толщины тела;  
постоянная величина;  
 $c$  — постоянная величина, длина хорды;  
 $F = (1 + \xi)/(1 - \xi), \quad F = 2H \{b - \lambda(2H + \delta^*/\delta)\},$

$$F(\xi_1, \eta_1) = \frac{\psi(x, y)}{\left\{2\nu \int_0^x u_e(x) dx\right\}^{1/2}};$$

$$f = \lambda H^2;$$

$I$  — величина, определяемая уравнением (18);

$L$  — характерная длина;

$l'$  — половина длины периметра;

$m$  — показатель степени;

$n$  — показатель степени;

$$u' = u/u_e;$$

$X, Y$  — прямоугольные координаты;

$Z$  — потери энергии;

$\beta$  — определяющая функция;  $\beta = b/L$ ;

$$\xi_i = Z_0 - Z;$$

$$\xi_j = Z_0 - Z_j;$$

$$\eta = y/\delta;$$

$$\eta_1 = \frac{u_e(x)y}{\left\{2\nu \int_0^x u_e(x) dx\right\}^{1/2}};$$

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx};$$

$\xi$  — потенциал скорости,  $\xi = X/L$ ;

$$\xi_1 = \frac{1}{\nu} \int_0^x u_e(x) dx;$$

$$\sigma' = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx};$$

$$\omega = \sigma'^2 u_e \frac{d^2 u}{dx^2} / \left( \frac{du}{dx} \right)^2.$$

### Индексы

экв — эквивалентность;

$t$  — полная эквивалентность;

\* — безразмерная величина;

' — расстояние вниз по потоку от точки максимума потенциала скорости в направлении касательной к поверхности тела;

$\Lambda$  — безразмерная величина.

В этом разделе представлены теоретические и экспериментальные результаты для ламинарного пограничного слоя, образующегося в условиях установившегося двумерного течения в дозвуковом диапазоне скоростей. Отрыв несжимаемого ламинарного потока происходит при малых значениях положительного градиента давления. В теории пограничного слоя ламинарный пограничный слой более доступен для математического анализа и характеристики ламинарного течения могут быть предсказаны с большей степенью точности, чем для турбулентного пограничного слоя. Для турбулентного течения ввиду недостаточного понимания механизма турбулентности необходимы экспериментальные исследования, дополняющие теоретические предсказания.

## 1. ПРИМЕРЫ ОТРЫВА ДВУМЕРНОГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

Проблема отрыва двумерного ламинарного потока относится к наиболее изученным. Существуют точные и приближенные методы анализа этой проблемы.

В общем случае положение точки отрыва можно предсказать с некоторой степенью точности, если эта точка расположена сравнительно далеко от точки минимума давления.

Задачи отрыва установившегося и неустановившегося ламинарного течения около кругового цилиндра и сферы являются классическими и изучались многими исследователями экспериментально и теоретически. Отрыв ламинарного потока на круговом цилиндре происходит в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re_d = 10^3 - 10^5$ .

Измерения, выполненные в Национальной физической лаборатории в Геттингене, показали [1], что при отрыве коэффициент

полного сопротивления кругового цилиндра равен

$$C_D = \text{Полное сопротивление} / \left( \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2 d \right) = 0,25.$$

Хименц [2] измерил положение точки отрыва на круговом цилиндре и получил  $\varphi = 81^\circ$ , где  $\varphi$  — угол, отсчитываемый от передней критической точки. Сохраняя в расчетах следующие три члена разложения скорости потенциального течения (по Блазиусу) [3]:

$$u(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots,$$

где коэффициенты  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $u_5 \dots$  зависят только от формы тела и считаются известными, он вычислил положение точки отрыва, соответствующее  $\varphi = 82^\circ$ . Подставляя это выражение в уравнение количества движения

$$u(\partial u / \partial x) + v(\partial u / \partial y) = - (1/\rho) \partial p / \partial x + \nu(\partial^2 u / \partial y^2)$$

и в уравнение неразрывности

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0,$$

получим, что приближенное положение точки отрыва по Польшгаузену [4] соответствует  $\varphi = 81,5^\circ$ . Хотя положения точки отрыва по Хименцу и Польшгаузену почти совпадают, толщина пограничного слоя в этой точке, вычисленная по методу Польшгаузена, больше. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными показывает, что метод, основанный на аппроксимации Польшгаузена, дает весьма удовлетворительное решение в области ускоряющегося потенциального течения. Однако этот метод менее пригоден в области замедляющегося потенциального течения, в особенности при приближении к точке отрыва.

Можно систематизировать некоторые классические примеры расчетов пограничного слоя приближенными методами [5]. К первой группе примеров относится ламинарное обтекание эллиптических цилиндров, большие оси которых направлены параллельно набегающему потоку. Результаты расчетов положения точки отрыва ламинарного потока следующие:

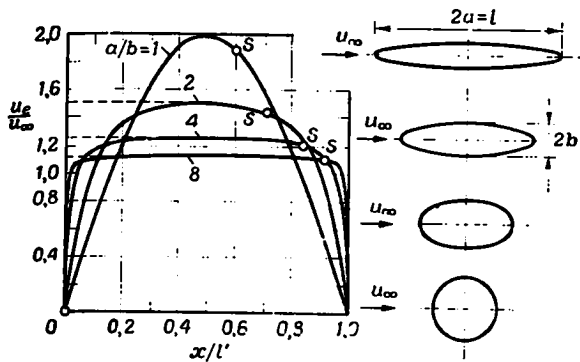
$$x/l' = 0,61 \quad \text{при} \quad a/b = 1,$$

$$x/l' = 0,715 \quad \text{при} \quad a/b = 2,$$

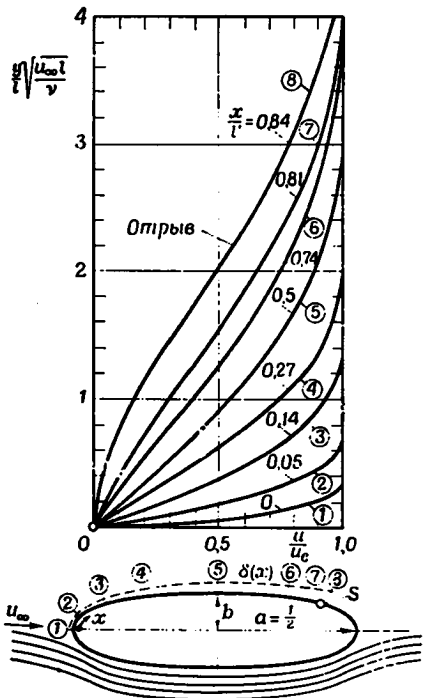
$$x/l' = 0,845 \quad \text{при} \quad a/b = 4,$$

$$x/l' = 0,92 \quad \text{при} \quad a/b = 8,$$

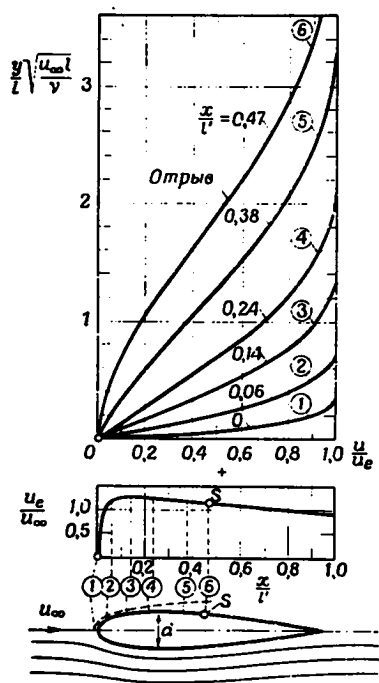
где  $a$  — длина большой полуоси,  $b$  — длина малой полуоси,  $l'$  — половина периметра эллипса,  $x$  — расстояние вдоль дуги эллипса, измеренное от передней критической точки до точки отрыва.



Ф и г. 1. Распределения скорости потенциального течения около эллиптических цилиндров и положения точки отрыва ламинарного потока [25].



Ф и г. 2. Профили скорости в ламинарном пограничном слое на эллиптическом цилиндре;  $a/b = 4$  [25].



Ф и г. 3. Профили скорости в ламинарном пограничном слое и распределение скорости потенциального течения около профиля Жуковского J 015 с относительной толщиной  $d/l = 0,15$  при угле атаки  $\alpha = 0$  [25].

Из этих результатов видно, что с увеличением затупления или с уменьшением отношения  $a/b$  точка отрыва перемещается вверх по потоку, так как величина  $x/l'$  уменьшается (фиг. 1 и 2).

Рассмотрим другой, более практический пример: ламинарное обтекание симметричного профиля Жуковского J 015 при нулевом угле атаки. Точка минимума давления располагается близко к носку профиля, при  $x/l' = 0,141$ . Относительная толщина профиля составляет всего 15%, и вследствие этого точка отрыва располагается значительно ниже по потоку, при  $x/l' = 0,470$  (фиг. 3). Бусман и Ульрих [6] выполнили систематические расчеты пограничного слоя для серии профилей Жуковского с различными относительными толщинами и кривизной при разных углах атаки.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

Рассмотрим и проанализируем девять существующих приближенных методов расчета, а затем опишем более точный метод Гёртлера.

### 2. МЕТОД ПОЛЬГАУЗЕНА

Польгаузен [4] получил приближенное решение с использованием полиномов для представления профиля скорости в следующем виде:

$$u/u_e = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4,$$

где  $\eta = y/\delta \leq 1$ ,  $\delta$  — толщина пограничного слоя;  $a, b, c, d$  — постоянные, определяемые с помощью четырех граничных условий, заданных в виде

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u = u_e \quad \text{при} \quad y = \delta,$$

$$\nu (\partial^2 u / \partial y^2) = (1/\rho) \partial p / \partial x = -u_e \partial u_e / \partial x \quad \text{при} \quad y = 0$$

и

$$\partial u / \partial y = 0, \quad \partial^2 u / \partial y^2 = 0 \quad \text{при} \quad y = \delta.$$

Этим граничным условиям удовлетворяют следующие выражения:

$$a = 2 + (\lambda/6), \quad b = -\lambda/2, \quad c = -2 + (\lambda/2), \quad d = 1 - (\lambda/6),$$

где  $\lambda = (\delta^2/\nu) du_e/dx$  — безразмерный параметр, который имеет физический смысл отношения сил давления к вязким силам. Распределение скоростей теперь описывается уравнением

$$u/u_e = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + (\lambda/6) (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4). \quad (1)$$

Точка отрыва определяется условием  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$  или  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$ . Наконец, из уравнения (1) следует, что ламинарное течение отрывается в точке, где  $a = 0$  или  $\lambda = (\delta^2/\nu) (du/dx) = -12$ .

## 2.2. МЕТОД ЛОЙЦЯНСКОГО

Метод Польгаузена весьма прост и часто используется для определения отрыва ламинарного потока. Но поскольку этот метод не дает достаточно точных результатов, Лойцянский [7] предложил простой, но более точный аналитический метод, используя степенные ряды, которые применимы для случая ламинарного обтекания профиля.

Лойцянский представил профиль скорости в пограничном слое в следующем виде:

$$\frac{u(x, y)}{u_e(x)} = G(\eta_1) = 1 + a_1 \eta_1^n + a_2 \eta_1^{n+1} + a_3 \eta_1^{n+2},$$

где  $n$  — некоторое число,  $\eta_1 = 1 - y/\delta = 1 - \eta$ ;  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — коэффициенты, определяемые из граничных условий на стенке, имеющих вид

$$u = 0, \quad \partial^2 u / \partial y^2 = -u_e (du_e/dx) / \nu, \quad \partial^3 u / \partial y^3 = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

Этим граничным условиям удовлетворяют

$$a_1 = \lambda/2 - (1/6)(n+1)(n+2),$$

$$a_2 = n(n+1)\lambda + (1/3)(n+1)(n+2),$$

$$a_3 = \{(n-1)/2(n+1)\}\lambda - (n/6)(n-1),$$

где  $\lambda = (du_e/dx) \delta^2/\nu$  — параметр Польгаузена.

Точка отрыва также определяется условием  $\tau_w = 0$ . Так как

$$\tau_w = \mu (\partial u / \partial y) |_{y=0} = \sqrt{\mu \rho} \overline{(du_e/dx) u_e^2 b} / |\lambda|^{1/2}$$

и  $b = \lambda/(n+1) + (n+2)/3$ , то отсюда следует, что отрыв имеет место при

$$b = 0 \quad \text{или} \quad \lambda = \lambda_S = -(n+1)(n+2)/3. \quad (2)$$

Польгаузен получил  $\lambda_S = -12$  или  $n = 4.52$ .

Чтобы уточнить расчет ламинарного слоя, Лойцянский ввел следующую линейную связь между  $\lambda$  и  $n$ :

$$\lambda = (20/3)(n-4), \quad (3)$$

так как  $n$  уменьшается в направлении течения.

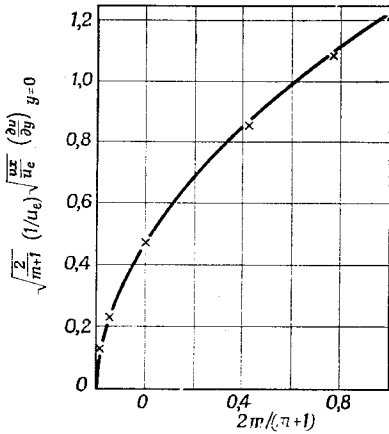
Затем он подтвердил эту связь сравнением значений

$$\sqrt{\frac{2}{m+1}} (1/u_e) \sqrt{(\nu x/u_e)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0},$$

определенных из точного решения Фолкнера — Скэн [8] с расчетами по уравнению (3).

Для расчетов он выбрал частный случай течения  $u_e(x) = Cx^m$ , где  $C$  — постоянная. Результаты показаны на фиг. 4. Сплошная кривая соответствует решению Фолкнера — Скэн, крестиками

обозначены значения, полученные с помощью соотношения (3). Хотя в общем достигнуто хорошее согласие между обоими методами, имеется небольшое расхождение вблизи точки отрыва, так как при использовании соотношения (3) получаются завышенные значения коэффициента трения и некоторое запаздывание отрыва.



Ф и г. 4. Характеристики ламинарного пограничного слоя [7].

критерию Польгаузена при использовании соотношения (2) соответствует  $n = 4,52$ . Вследствие такого несоответствия значений  $n$  было бы желательно установить некоторое подходящее значение этого числа в качестве критерия ламинарного отрыва, однако вместо этого Лойцянский преобразовал интегральное уравнение Кармана

$$\frac{d\delta^*}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2\theta + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \quad (4)$$

к виду

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} g(\lambda, n) + \frac{d^2 u_e}{dx^2} \left\{ \frac{1}{(du_e/dx)} \right\} k(\lambda, n), \quad (5)$$

где  $\delta^*$  и  $\theta$  — соответственно толщины вытеснения и потери импульса.

Эти толщины определяются следующим образом:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy, \quad \theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

и

$$g(\lambda, n) = \frac{b - \{2H + (\delta^*/\delta)\} \lambda}{\lambda (dH/d\lambda) + H/2}, \quad k(\lambda, n) = \frac{(1/2)\lambda H}{\lambda (dH/d\lambda) + H/2}. \quad (6)$$

Используя соотношение (3), Лойцянский выразил коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $b$  в функции от  $n$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_1 &= (10/3)(n-4) - \\ &\quad - (1/6)(n+1)(n+2), \\ a_2 &= - (20/3)n(n-4)/(n+ \\ &\quad + 1) + (1/3)(n-1)(n+2), \\ a_3 &= (10/3)(n-1)(n- \\ &\quad - 4)/(n+1) - (n/6)(n-1), \\ b &= (20/3)(n-4)/(n+ \\ &\quad + 1) + (n+2)/3. \end{aligned}$$

Если в точке отрыва  $n = 3$ , то критерий отрыва Польгаузена идентичен с соотношением (3). Однако напомним, что критерий отрыва Польгаузена



где  $H = \delta^*/\theta$  — формпараметр пограничного слоя. Полагая теперь  $f = \lambda H^2$  и  $F = 2H \{b - \lambda (2H + \delta^*/\delta)\}$ , из уравнения (6) получим  $g(\lambda, n) = F/(df/d\lambda)$  и  $k(\lambda, n) = f/(df/d\lambda)$ . Тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{u_c} \frac{du_c}{dx} \frac{F}{(df/d\lambda)} + \frac{d^2u_c}{dx^2} \frac{1}{(du_c/dx)} + \frac{f}{(df/d\lambda)}$$

или

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{u_c} \frac{du_c}{dx} F + \frac{d^2u_c}{dx^2} \frac{1}{(du_c/dx)} f, \quad (7)$$

где  $f = (\theta/u_c) (du_c/dx) \{(\theta\theta/v)\}^m$  — параметр Прандтля, причем для ламинарного течения  $m = 1$ . Значения  $a_1, a_2, a_3, b, \delta^*/\delta, H, f, F$  и величины

$$\frac{\tau_w}{\sqrt{\mu\rho} |du_c/dx| u_c^2}$$

как функции  $n$  представлены в табл. 1 для значений  $n$  от 3 до 7.

С использованием данных табл. 1 на фиг. 5 графически представлены значения  $F(f)$  и величина

$$\frac{\tau_w}{\sqrt{\mu\rho} |du_c/dx| u_c^2}$$

в зависимости от  $f$ .

Далее, функция  $F$  выражается в виде

$$F(f) = \alpha - \beta f + \varepsilon(f), \quad (8)$$

где  $\alpha - \beta f$  — касательная к кривой  $F(f)$ , а  $\varepsilon(f)$  — поправочный член. Предполагая, что параметр  $f$  конечен при  $x = 0$ , и интегрируя уравнение (7), находим

$$f - \alpha \frac{1}{u_c^\beta} \frac{du_c}{dx} \int_0^x u_c^{\beta-1} dx + \frac{1}{u_c^\beta} \frac{du_c}{dx} \int_0^x u_c^{\beta-1} \varepsilon(f) dx \quad (9)$$

— решение интегрального уравнения количества движения Кармана. Критерий отрыва выражается через  $f$ , так как  $\tau_w$  является функцией  $f$ . Второй интеграл в уравнении (9) служит поправкой для уточнения положения точки отрыва. Числовые значения  $\alpha$  и  $\beta$  в уравнении (9) определяются путем построения касательной к  $F(f)$  в точке  $f = 0$  (фиг. 5). Таким образом определены значения  $\alpha = 0,437$  и  $\beta = 5,75$ . Соответствующие значения  $\varepsilon(f)$ , представляющие собой разность между  $F(f)$  и  $\alpha - \beta f$ , также приведены на фиг. 5. Окончательно уравнение (9) принимает вид

$$f = \frac{0,437}{u_c^{5,75}} \frac{du_c}{dx} \int_0^x u_c^{4,75} dx + \frac{1}{u_c^{5,75}} \int_0^x u_c^{4,75} \varepsilon(f) dx. \quad (10)$$

Таблица 1

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ [7]

$n$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$b$	$\delta^*/\delta$	$H$	$f$	$F$	$\frac{\tau_w}{\sqrt{\mu_0   du_e/dx   u_e^2}}$
3,0	-6,667	8,333	-2,667	0,0000	0,4444	0,1154	-0,08884	1,0395	0,000
3,1	-6,485	8,107	-2,622	0,2366	0,4219	0,1176	-0,08305	0,9835	0,097
3,2	-6,307	7,877	-2,570	0,4635	0,4014	0,1188	-0,07523	0,9195	0,201
3,3	-6,132	7,645	-2,513	0,6814	0,3825	0,1190	-0,06618	0,8517	0,315
3,4	-5,960	7,411	-2,451	0,8909	0,3651	0,1187	-0,05632	0,7833	0,445
3,5	-5,792	7,176	-2,384	1,0926	0,3491	0,1178	-0,04624	0,7165	0,597
3,6	-5,627	6,940	-2,314	1,2870	0,3344	0,1165	-0,03620	0,6526	0,783
3,7	-5,465	6,704	-2,240	1,4745	0,3208	0,1150	-0,02644	0,5924	1,038
3,8	-5,307	6,469	-2,162	1,6556	0,3082	0,1132	-0,01709	0,5363	1,440
3,9	-5,152	6,234	-2,082	1,8306	0,2965	0,1113	-0,00826	0,4847	2,241
4,0	-5,000	6,000	-2,000	2,0000	0,2857	0,1093	-0,00000	0,4373	$\infty$
4,5	-4,292	4,856	-1,564	2,7727	0,2418	0,0990	-0,03267	0,2587	1,515
5,0	-3,667	3,778	-1,111	3,4444	0,2103	0,0895	-0,05338	0,1520	1,335
5,5	-3,125	2,788	-0,664	4,0385	0,1870	0,0814	-0,06628	0,0879	1,278
6,0	-2,667	1,905	0,238	4,5714	0,1693	0,0748	0,07451	0,0477	1,252
6,5	-2,292	1,139	0,153	5,0556	0,1555	0,0693	0,08000	0,0214	1,239
7,0	-2,000	0,500	0,500	5,5000	0,1444	0,0648	0,08394	0,0025	1,230

Лойцянский вычислил величину

$$\frac{\tau_w}{\sqrt{\mu\rho |du_c/dx| u_c^2}},$$

используя точное решение Хоурта и уравнение (10) для профиля, заданного в виде

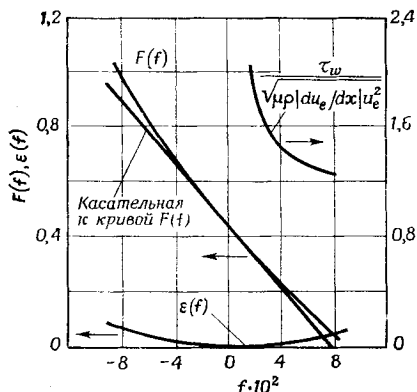
$$u_e = c_0 - c_1 x = c_0 (1 - X^*),$$

где  $c_0$  и  $c_1$  — постоянные, а  $X^* = (c_1/c_0) x$ .

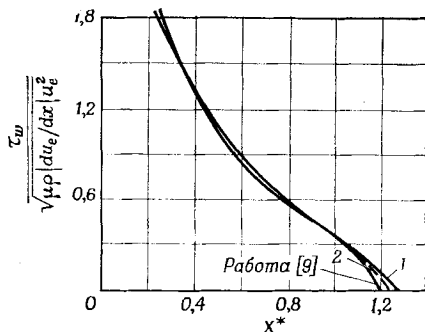
Эти результаты приведены на фиг. 6. Значения

$$\frac{\tau_w}{\sqrt{\mu\rho |du_c/dx| u_c^2}},$$

вычисленные методом Хоурта, с использованием первого и второго интегралов уравнения (10), совпадают, за исключением окрестности точки отрыва. Таким образом, метод определения отрыва



Ф и г. 5. Параметры ламинарного пограничного слоя в зависимости от  $f$  [7].



Ф и г. 6. Напряжение трения в ламинарном пограничном слое [7].

1 — первый интеграл уравнения (10);  
2 — первый и второй интегралы уравнения (10).

ламинарного потока, предложенный Лойцяским, оставаясь сравнительно простым, дает достаточно точные результаты. Лойцянский указывает, что этот метод применим также для ламинарного пограничного слоя на телах вращения.

### 2.3. МЕТОД КАРМАНА — МИЛЛИКЕНА

Рассмотрим теперь метод расчета отрыва ламинарного потока Кармана — Милликена [10]. В методе используются два приближенных решения уравнений пограничного слоя: одно из них более точно на внешней границе пограничного слоя, а другое —

на поверхности движущегося тела. Эти два решения сопрягаются между собой в точке перегиба профиля скорости внутри пограничного слоя. Окончательное решение выражается в виде рядов универсальных функций, являющихся достаточно общими и включающих широкий класс распределений скоростей потенциального течения за пределами пограничного слоя. Это окончательное решение используется затем в расчетах положения точки отрыва ламинарного потока. Прежде чем приступить к подробному рассмотрению метода Кармана — Милликена, определим следующие безразмерные переменные и параметры: а)  $Re_L = (u_\infty L/\nu)$ , где  $u_\infty$  — скорость невозмущенного потока,  $L$  — характерный размер; б)  $\xi^* = (\xi/u_\infty L)$ , где  $\xi^*$  — безразмерный потенциал скорости, выраженный через потенциал скорости  $\xi$  в невязкой области течения за пределами пограничного слоя<sup>1)</sup>; в)  $\psi^* = (\psi/u_\infty L) (\sqrt{Re_L}/2)$ , где  $\psi^*$  — безразмерная функция тока,  $\psi$  — функция тока в области потенциального течения за пределами пограничного слоя; г)  $u^* = (u/u_\infty)$ , где  $u^*$  — безразмерная скорость потока,  $u$  — составляющая скорости в пограничном слое в направлении течения; д)  $Z^* = (Z/u_e^2) = (u_e^2 - u^2)/2u_e^2$ , где  $Z^*$  — «потери энергии», в безразмерном виде,  $u_e$  — скорость потока на внешней границе пограничного слоя. Потери энергии характеризуются уменьшением энергии жидкой частицы единичной массы, движущейся вдоль некоторой линии тока. Эти потери измеряются путем сравнения их с энергией частицы вне пограничного слоя.

Основное уравнение теории Кармана — Милликена для ламинарного пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \frac{u}{u_e} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}, \quad \text{где } \frac{u}{u_e} = \{1 - (2Z/u_e^2)\}^{1/2}. \quad (11)$$

Это уравнение выведено с использованием преобразования Мизеса. В работе [10] оно получено из основного уравнения количества движения в направлении линии тока путем замены переменных и некоторых допущений. В уравнении (11) звездочки у величин  $Z$ ,  $\xi$ ,  $u$  и  $\psi$  для удобства опущены. Решение этого уравнения состоит из двух частей — внешнего и внутреннего.

Внешнее решение получается в предположении, что скорости во внешней части пограничного слоя почти равны скоростям во внешнем потоке, т. е.  $(u/u_e) = 1$ . Следовательно, уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}. \quad (12)$$

Согласно уравнению (12), потери энергии  $Z$  зависят как от безразмерной функции тока  $\psi$ , так и от безразмерного потенциала

<sup>1)</sup> В работе [7]  $\xi$  обозначается через  $\varphi$ .

скорости  $\xi$ . Прежде чем приступить к решению уравнения (12), произведем дополнительные вычисления, связанные с этим решением. Нам предстоит выяснить зависимость квадрата безразмерной скорости  $(u^*)^2$  от безразмерного потенциала скорости  $\xi^*$  вдоль обтекаемой поверхности тела.

Потенциал скорости вне пограничного слоя может быть записан в следующем виде:

$$\xi = \int_0^s u_e(s) ds,$$

где  $s$  — расстояние вдоль поверхности тела, измеряемое от передней критической точки. Следовательно,

$$\xi^* = \frac{\xi}{u_\infty L} = \int_0^{\xi} \frac{u_e(s)}{u_\infty L} ds = \frac{1}{L} \int_0^{\xi} u_e^*(s) ds, \quad (13)$$

где  $L$  — характерный размер.

Согласно уравнению (13), потенциал скорости  $\xi^*$  определяется путем интегрирования  $u_e^*$  по  $s$  вдоль поверхности. Так как  $u_e$  и  $\xi$  (звездочки опущены) являются известными функциями расстояния вдоль поверхности, то нетрудно определить зависимость  $u_e^2$  от  $\xi$ . Следующим шагом является выражение  $u_e^2$  через степенной ряд по  $\xi$ . Вычисления степенных рядов упрощаются, если кривую зависимости  $u_e^2$  от  $\xi$  расчленим на две части:

$$u_e^2 = \sum_{i=0}^n b_i \xi^i \quad \text{для} \quad \xi \leq \xi_1,$$

$$u_e^2 = \sum_{i=0}^m \beta_i \xi^i \quad \text{для} \quad \xi \geq \xi_1,$$

где  $\xi_1$  — произвольно выбранное значение  $\xi$ .

Теперь можно вычислить потери энергии в любой точке пограничного слоя в виде функции от  $\xi$  и  $\psi$ . Потери энергии  $Z_w(\xi, \psi)$  (где индекс  $w$  обозначает внешнее решение) определяются в виде [11]

$$Z_w(\xi, \psi) = \{\beta_0 h_0^* + \gamma_1 \xi_1 g_1^* - \gamma_2 \xi_1^2 g_2^*\} + \xi \{b_1 (h_1 - h_1^*) + \beta_1 h_1^* + 2\gamma_2 \xi_1 (g_1^* + g_2^*)\} + \xi^2 \{b_2 (h_2 - h_2^*) + \beta_2 h_2^*\}, \quad (14)$$

где  $\gamma_1 = b_1 - \beta_1$ ,  $\gamma_2 = b_2 - \beta_2$ .

Это уравнение соответствует уравнению (19) Кармана — Милликена [10]. Если  $\xi \leq \xi_1$ , то  $h_i^* = g_i^* = \beta_i = 0$ , где  $i = 0, 1, 2$ .

$$h_1(\bar{\xi}) = g_0(\bar{\xi}) + g_1(\bar{\xi}),$$

$$h_2(\bar{\xi}) = g_0(\bar{\xi}) + 2g_1(\bar{\xi}) + g_2(\bar{\xi}),$$

причем

$$g_0(\bar{\xi}) = \frac{1}{2}(1 - P(\bar{\xi})), \quad \bar{\xi} = \frac{\psi}{\sqrt{\xi}},$$

где  $P(\bar{\xi}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{\xi}} e^{-\beta^2} d\beta$  — интеграл вероятностей, являющийся затабулированной функцией,

$$g_1(\bar{\xi}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \bar{\xi} e^{-\bar{\xi}^2} + \bar{\xi}^2 + \bar{\xi}^2(1 - P(\bar{\xi})),$$

$$g_2(\bar{\xi}) = \frac{\bar{\xi} e^{-\bar{\xi}^2}}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \bar{\xi}^3 e^{-\bar{\xi}^2} + \frac{2}{3} \bar{\xi}^4 (1 - P(\bar{\xi})).$$

Дальнейшие подробности имеются в работе [41].

Если  $\xi$  рассматривать как параметр, то можно вычислить  $Z_w$  в функции зависимой переменной  $\psi$ . Допустимо пренебречь степенями  $\psi$ , большими трех, так как переменная  $\psi$  в общем случае мала в точке перегиба.

Эта точка перегиба, являющаяся конечным результатом расчетов для внешнего решения, зависит от пограничного слоя, и необходимо определить некоторые величины, чтобы выявить граничные условия для внутреннего решения. Точка перегиба находится из условия  $\partial^2 Z / \partial \psi^2 = 0$  путем решения уравнения относительно  $\psi$ . Полученное значение  $\psi_j$  имеет индекс  $j$ , соответствующий точке сопряжения внутреннего и внешнего решений.

Внутреннее решение получается из рассмотрения уравнения (11) вблизи поверхности тела. Так как внутреннее решение должно быть справедливым в малой области вблизи поверхности, уравнение (11) можно заменить другим дифференциальным уравнением, обладающим теми же свойствами. По существу это процесс дифференцирования, проиллюстрированный в работе [41]. После преобразования переменных дифференциальное уравнение, заменяющее уравнение (11), принимает вид

$$\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial \psi^2} = \frac{A(\xi)}{V \zeta_i} \{1 - V(\zeta_i / (\zeta_j))\}, \quad (15)$$

где  $A(\xi) = -4Z'_0 \sqrt{Z_0}$ ,  $\zeta_i = Z_0 - Z = u^2/2$ ,  $Z_0 = u_e^2/2$ ,  $Z'_0 = \partial Z_0 / \partial \xi$ ,  $\zeta_j = Z_0 - Z_j$ .

Решение уравнения (15) в функции переменной  $\bar{\xi}_i$  ( $\bar{\xi} = \psi / \xi^{0,5}$ ) имеет вид

$$\bar{\xi}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{Z_0}{-Z'_0 \xi}} (\zeta_j / Z_0)^{0,75} \left\{ B - \sqrt{B^2 + 2(\zeta_i / \zeta_j)^{0,5} - (\zeta_i / \zeta_j)} + \right. \\ \left. + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} - \arcsin \frac{1 - (\zeta_i / \zeta_j)^{0,5}}{\sqrt{1+B^2}} \right\}, \quad (16)$$

где  $B$  определяется из следующего уравнения:

$$B^2 = \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial \psi} \right)_{\psi=0}^2 \quad (17)$$

и вычисляется для различных отношений  $(\xi_i/\xi_j)$  в интервале значений  $0 - 1$ , а именно:  $0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ , и  $1,0$ . С помощью этих данных профиль скорости в пограничном слое вблизи поверхности тела определяется из следующих соотношений [11]:

$$u = u_e (\zeta/Z_0)^{0,5}, \quad y \sqrt{\text{Re}_x} = \frac{2 \sqrt{\xi}}{u_e} I_{\xi},$$

где

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \int_0^{\xi} \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{\xi_i/Z_0}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{Z_0}{-Z_0^{\xi}}} \left( \frac{\xi_i}{Z_0} \right)^{0,25} \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} - \arcsin \frac{1-\sqrt{\xi_i/\xi_j}}{\sqrt{1+B^2}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В соотношении (18) распределение скорости в пограничном слое выражено через переменную  $\xi$ . Теперь для каждого отношения  $\xi_i/\xi_j$  можно построить кривую распределения скорости в зависимости от  $\xi$ . Критерием ламинарного отрыва является нулевой градиент скорости на поверхности тела, т. е.  $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ . Из различных распределений скорости по  $\xi$  выбирается одно с нулевым значением градиента скорости на поверхности и обозначается соответствующим значением  $\xi$ , которое используется затем для определения положения точки отрыва ламинарного потока.

Этой операцией завершается анализ и решение дифференциальных уравнений, которые используются для определения положения точки отрыва ламинарного потока. Многочисленные промежуточные расчеты слишком громоздки, чтобы их приводить полностью. Достаточно упомянуть основные этапы, чтобы охарактеризовать последовательность вычислений и наметить план действия для тех, кто пожелал бы выполнить такие расчеты самостоятельно.

1) Определить распределение скорости потенциального течения около тела аналитическим или приближенным методами (если тело имеет обтекаемую форму).

2) Построить кривую  $u_e^2$  в зависимости от  $\xi$ .

3) Расчленив кривую  $u_e^2(\xi)$  на две части в некоторой произвольной точке. Описать кривые приближенных зависимостей  $u_e^2(\xi)$  с помощью следующих соотношений:

$$u_e^2 = a_1 + b_1 \xi + c_1 \xi^2 \quad \text{и} \quad u_e^2 = a_2 + b_2 \xi + c_2 \xi^2,$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и т. д. определяются обычными методами аппроксимации кривых.

4) Выбрать некоторые вероятные положения точки отрыва ламинарного потока. Для каждого положения рассчитать соответствующие значения  $\xi$ .

5) Для каждого  $\xi$  определить потери энергии  $Z_\omega = f(\xi, \psi)$ , где  $\xi$  теперь считается параметром, а  $\psi$  — независимой переменной.

6) Рассчитать величину  $\psi_j$  в точке перегиба путем двукратного дифференцирования  $Z_\omega = f(\xi, \psi)$  по  $\psi$  и приравнивания результатов нулю.

7) Вычислить член  $B$  для каждого  $\xi$ . Величина  $B$  нужна для построения профиля скорости в пограничном слое.

8) Для каждого значения  $\zeta_i/\zeta_{wj}$  из набора 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 и 1,0 рассчитать  $\zeta_i$ , используя соотношение  $\zeta_{wj} = Z_0 - Z_{wj}$ , где  $Z_{wj}$  — значение  $Z_\omega$  в точке сопряжения.

9) Для каждого значения  $\xi$  определить  $I_{\frac{1}{2}}$ .

10) Рассчитать и построить профили скорости для различных значений  $\xi$ .

11) По совокупности этих профилей выделить соответствующий нулевому значению градиента скорости на поверхности тела. Полученная кривая определяет окончательное значение  $\xi$ .

12) Кривая  $u_e^2(\xi)$  определяет затем значение  $u_e$ , а кривая  $u_e(x)$  — координату  $x$  точки отрыва ламинарного потока.

Вычисления по методу Кармана — Милликана громоздки, и из-за большого числа промежуточных шагов с использованием конечного числа членов степенных рядов, а также графических построений решение получается приближенным. Однако это хороший пример метода решения сложной задачи пограничного слоя, включающей отрыв потока.

#### 2.4. МЕТОД ДЕНХОФФА

Денхофф [12] разработал приближенный теоретический метод, позволяющий быстро рассчитать отрыв ламинарного потока. В методе Денхоффа предполагается, что действительное распределение скорости вдоль тела можно заменить некоторым набором распределений скорости вдоль плоской пластины, около которой имеется область постоянной скорости, переходящая в область с равномерно убывающей скоростью. Кроме того, предполагается, что действительные профили скорости в пограничном слое в сечении с максимальным значением скорости приблизительно соответствуют профилям Блазиуса для плоской пластины. Так как всякий профиль в пограничном слое однозначно определяется его формой и толщиной, то область возрастающей скорости (в практических случаях) повлияет лишь на толщину пограничного слоя в точке максимума скорости. Это влияние можно воспроизвести с помощью



течения с постоянной скоростью вдоль пластины соответствующей длины [12]. Поскольку при положительном градиенте скорости образуется более тонкий пограничный слой, эквивалентная длина пластины оказывается несколько меньшей, чем действительное расстояние от передней критической точки до положения максимума скорости.

Эквивалентную длину  $x_{\text{ЭКВ}}$  можно вычислить с помощью соответствующего уравнения работы [12], расширяя пределы интегрирования до точки максимума скорости потенциального течения

$$\frac{x_{\text{ЭКВ}}}{L} = \int_0^{x/L} (u_e/u_{e_{\text{макс}}})^{3,17} d\left(\frac{x}{L}\right),$$

где  $u_{e_{\text{макс}}}$  — максимальная скорость потенциального течения,  $L$  — характерный размер, например хорда профиля.

В точке отрыва ламинарного потока удовлетворяется следующее уравнение:

$$F = \frac{x_t}{u_e} \frac{du_e}{dx} = -0,0196, \quad x_t = x_{\text{ЭКВ}} + x',$$

где  $x'$  — расстояние между точкой максимума скорости потенциального течения и начальной точкой линейного участка распределения этой скорости по  $x$ , аппроксимирующего ее распределение ниже точки максимума скорости. Численный расчет положения точки отрыва ламинарного потока на профиле NASA 0012 при нулевом угле атаки показал, что отрыв по методу Денхоффа наступает раньше, чем по методу Кармана — Милликена [10]. Имея в виду простоту метода Денхоффа, согласие между результатами этих расчетов можно считать удовлетворительным.

## 2.5. МЕТОД СТРЕТФОРДА

Стрэтфорд [13] решал уравнения пограничного слоя для внешнего и внутреннего слоев.

Он показал, что для профиля скорости во внешней части пограничного слоя можно отдельно рассматривать влияние градиента давления без учета вязкости и влияние вязких сил без учета градиента давления.

Во внутреннем подслое существует баланс между градиентом давления и вязкими силами. Поэтому Стрэтфорд заключил, что в слое есть переходная область, в которой силы давления уравновешиваются силами вязкости на стенке и силами инерции на его внешней границе.

Стрэтфорд получил математическое выражение для условия отрыва, основанное на решении Блазиуса и перекрывающее все возможные значения расстояний, на которых происходит отрыв.

Кёрл и Скэн [14] модифицировали критерий Стрэтфорда для отрыва ламинарного потока путем сравнения с точным решением Гёртлера [15]. Выполнив расчеты положения отрыва в одиннадцати различных случаях по методу Гёртлера и с помощью модифицированного критерия отрыва Стрэтфорда, приведенного ниже, и сравнив результаты, они выяснили, что различия в среднем составляют менее 3%. Формула Стрэтфорда может быть записана в виде

$$\{\bar{x}^2 C_p (dC_p/d\bar{x})^2\}_S = 0,0104,$$

где  $\bar{x} = x_{\text{эКВ}} + x_S$ . Обозначение  $x_{\text{эКВ}}$  относится к эквивалентной длине до максимума скорости потенциального течения;  $x_S$  — расстояние по течению, измеренное от точки максимума скорости до точки отрыва ламинарного потока, а

$$C_p = (p - p_{\text{мин}}) / \frac{1}{2} \rho u_{\text{макс}}^2.$$

Это один из наиболее простых методов, который позволяет приближенно рассчитать отрыв на основе только характеристик невязкого течения, подобно методу Денхоффа [12].

## 2.6. МЕТОД ШВЕЦА

Решение уравнения пограничного слоя по методу Швеца [16] основано на приближении второго порядка.

Уравнение пограничного слоя с градиентом давления после преобразований принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - u_e \frac{du_e}{dx}.$$

Граничные условия суть

$$u = 0 \text{ при } y = 0; \quad u = u_e \text{ при } y = \delta.$$

Решая это уравнение во втором приближении, находим

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\delta^2}{24} \frac{du_e}{dx} (\eta^4 - 12\eta^2 + 11\eta) - \frac{u_e (d\delta/dx) \delta}{24} (\eta^4 - \eta) + \eta,$$

где  $\eta = y/\delta$ .

Используя  $\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0$ , получаем

$$\frac{3}{8} \frac{du_e}{dx} \delta^2 + \frac{u_e}{8} \frac{d\delta}{dx} \delta = 1.$$

Предполагая, что  $\delta = 0$  при  $x = 0$ , и решая уравнение относительно  $\delta^2$ , находим

$$\delta^2 = \frac{16}{u_e^{\frac{1}{2}}} \int_0^x u_e^{\frac{1}{2}} dx.$$

Для напряжения трения на стенке имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w = \frac{u_e}{3} \left( \frac{4}{\delta} + \frac{du_e}{dx} \right) = \frac{u_e^4}{3} \left( \int_0^x u_e^5 dx \right)^{-1/2} \left\{ 1 + 4 \frac{(du_e/dx)}{u_e^6} \int_0^x u_e^5 dx \right\},$$

однако в точке отрыва  $\partial u / \partial y \Big|_{y=0} = 0$ . Это условие удовлетворяется, если

$$\frac{4}{u_e^6} (du_e/dx) \int_0^x u_e^5 dx = -1.$$

### 2.7. МЕТОД ТВЕЙТСА — КЁРЛА И СКЭН

Твейтс [17] использовал новый подход, принимая толщину потери импульса пограничного слоя  $\theta$  за основную зависимую переменную и вводя соотношение между  $(\partial u / \partial y) \Big|_{y=0}$  и  $(\partial^2 u / \partial y^2) \Big|_{y=0}$ , чтобы решить дифференциальные уравнения пограничного слоя.

Полагая

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{u_e}{\theta} l \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{u_e}{\theta^2} m,$$

заметим, что соотношение между  $l$  и  $m$  можно получить из рассмотрения известных решений [3, 4, 8, 9, 18—20]. Интегрируя интегральное уравнение количества движения

$$\frac{d\theta}{dx} = -(H + 2) \frac{du_e}{dx} \frac{\theta}{u_e} + \frac{\nu}{u_e^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0},$$

Твейтс нашел решение для ламинарного пограничного слоя в виде

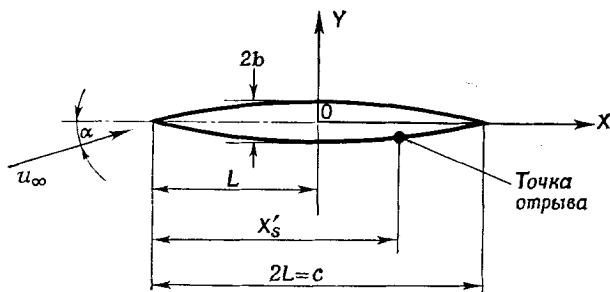
$$\theta^2 = 0,45 u_e^{-6} \nu \int_0^x u_e^5 dx \quad \text{при} \quad m = -\frac{(du_e/dx)\theta}{\nu} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{u_e}{\theta} l(m).$$

Это решение имеет простой вид и лишено недостатков, обычных для всех других приближенных методов. Твейтс установил, что отрыв имеет место при  $m = 0,082$ ,  $l(m) = l(0,082) = 0$ ,  $H(0,082) = 3,7$ .

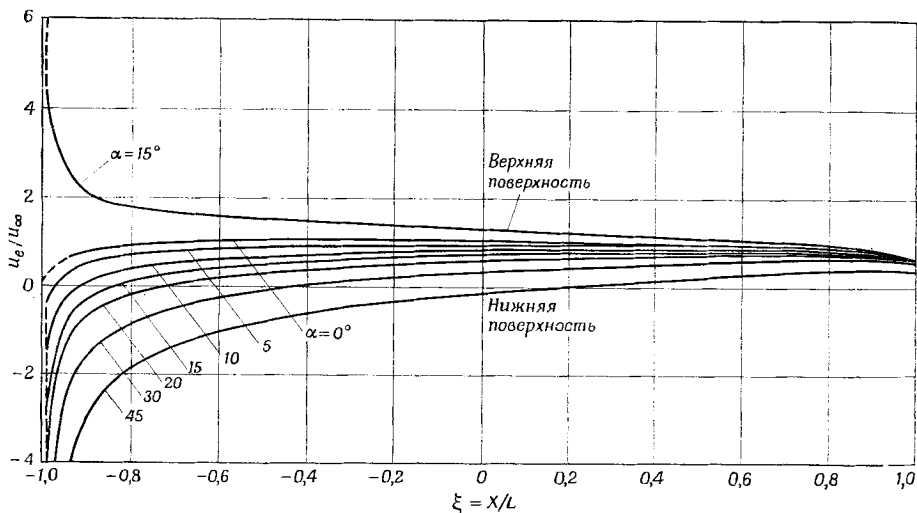
С учетом имеющихся результатов численных расчетов пограничного слоя Кёрл и Скэн [14] видоизменили формулировку Твейтса и получили критерий отрыва ламинарного потока  $\sigma'$  в виде  $\sigma' = (\theta^2/\nu) (du_e/dx) = -0,09$ . Этот критерий содержит члены  $\theta$  и  $\nu$  и сложнее для практических расчетов по сравнению с методом Стрэтфорда, поскольку содержит вязкие члены. Недавно Мордухов и Рейль [21] исследовали теоретические методы определения положения отрыва ламинарного потока.

## 2.8. СРАВНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ МЕТОДОВ

Сравнение экспериментальных данных с расчетами по методам Стрэтфорда, Шведа и Твейтса для одной серии симметричных профилей при различных углах атаки показало, что можно получить



Ф и г. 7. Симметричный профиль [23].



Ф и г. 8. Распределение скорости потенциального течения около симметричного двояковыпуклого профиля под углом атаки [23].

$\xi$  — безразмерное расстояние в направлении хорды, отсчитываемое от середины симметричного двояковыпуклого профиля вдоль поверхности.

удовлетворительное совпадение результатов при больших углах атаки [22, 23].

Симметричные профили имели двояковыпуклую форму  $Y(x) = \pm b \{1 - (X/L)^2\}$  (фиг. 7). Относительная толщина

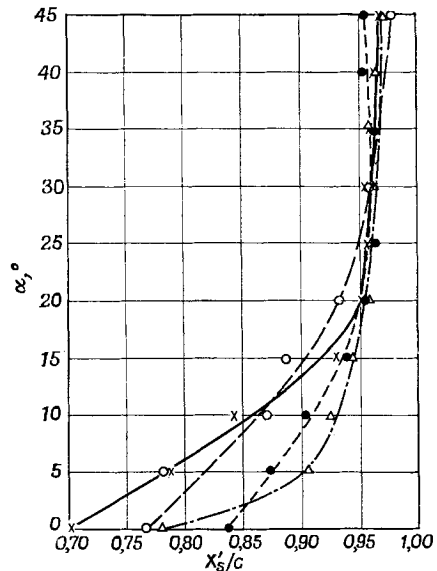
профиля 9,42%. Распределение скорости потенциального течения около такого двояковыпуклого профиля в координатах  $X$  и  $Y$  записывается в следующем виде [24]:

$$u' = 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right) \beta \{2 - \xi \ln F(\xi)\} + \\ + \beta^2 \left[ \frac{3}{\pi^2} (2 - \xi \ln F(\xi))^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi^2} \ln^2 F(\xi) - (1 - \xi)^2 \right] \pm \\ \pm \alpha F(\xi)^{-1/2} \mp \frac{\alpha}{\pi} \beta F(\xi)^{-1/2} \{ (1 + \\ + 2\xi) \ln F(\xi) - 4 \} - \frac{1}{2} \alpha^2,$$

где  $\xi = x/L$ ,  $u' = u_e/u_\infty$ ,  $\beta = b/L$  и  $F(\xi) = (1 + \xi)/(1 - \xi)$ . Верхний знак соответствует распределению скорости потенциального течения по верхней поверхности, а нижний знак — по нижней поверхности. При малых положительных углах атаки точка отрыва на верхней поверхности движется к передней кромке и течение около этой поверхности становится турбулентным. Однако около нижней поверхности течение остается ламинарным. Поэтому измерения и расчеты точек отрыва ламинарного потока были выполнены для нижней поверхности. Для определения точки отрыва использовался метод визуализации течения запылением (фиг. 8 и 9).

Экспериментальные и расчетные результаты приведены в табл. 2.

Только при нулевом угле атаки метод Швеца дает наилучшие результаты из всех трех методов. В диапазоне больших углов атаки совпадение между экспериментом и теорией улучшается. Причину расхождения между результатами расчетов можно объяснить, руководствуясь соображениями Шлихтинга [25] о положении отрыва. Как упоминалось в этом разделе, отрыв ламинарного потока может быть приближенно рассчитан лишь в том случае, когда точка отрыва находится довольно далеко от точки минимума давления. Минимум давления потенциального течения около тонкого двояковыпуклого профиля при нулевом угле атаки распола-



Ф и г. 9. Положение точки отрыва ламинарного потока на симметричном двояковыпуклом профиле в зависимости от угла атаки [23].

× — метод Трейтса; ● — метод Стрэтфорда; △ — метод Швеца; ○ — экспериментальные данные.

Таблица 2

РАСЧЕТНЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ ОТРЫВА НА НИЖНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВОЙКОВЫПУКЛОГО ПРОФИЛЯ (ДЛИНА ХОРДЫ 24,4 см [23])

Угол атаки, °	Относительное расстояние от передней кромки до точки отрыва ламинарного потока, $X_S/c$			
	Расчет			Эксперимент
	метод Твейтса	метод Швеца	метод Стрэтфорда 1)	метод визуализации течения запылением
0	0,7037	0,777	0,8346	0,781
5	0,791	0,907	0,875	0,779
10	0,84	0,9225	0,905	0,870
15	0,93	0,945	0,9425	0,885
20	0,951	0,955	0,955	0,931
30	0,954	0,959	0,958	0,957
45	0,973	0,973	0,954	0,971

1) Величина  $x_{\text{отв}}$  в расчете не учитывалась.

гается посередине хорды. С ростом угла атаки положения минимума давления и точки отрыва ламинарного потока смещаются по направлению к задней кромке. Однако смещение положения минимума давления больше, чем точки отрыва. Следовательно, при малых углах атаки расстояние между положениями минимума давления и точки отрыва относительно больше, чем при больших углах атаки. Таким образом, можно ожидать, что результаты расчетов будут лишь приближенно указывать положение точки отрыва ламинарного потока при малых углах атаки.

Значения коэффициента давления при отрыве

$$C_{pS} = (p_S - p_{\text{мин}}) / \left( \frac{1}{2} \rho u_{e_{\text{макс}}}^2 \right) = 1 - (u_{eS} / u_{e_{\text{макс}}})^2,$$

вычисленные различными приближенными методами, сравниваются в табл. 3 с точными значениями, полученными численным интегрированием уравнений пограничного слоя.

Предполагается следующая классификация типов основного потока:

Случай	Основной поток
1	Эллипс Хартри — Шубауэра [18]
2	$u_e = u_0 [1 - (x/l)]$ Хоуарт [9]
3	$u_e = u_0 [1 - (x/l)^2]$ Тани [27]
4	$u_e = u_0 [1 - (x/l)^4]$ Тани [27]

- 5  $u_e = u_0 [1 - (x/l)^3]$  Тани [27]
- 6  $u_e = (3\sqrt{3}/2) u_0 [(x/l) - (x/l)^3]$  Кёрл [28]
- 7  $u_e = u_0 \sin(x/l)$  Террилл [29]

где  $u_0$  — скорость и  $l$  — длина,  $x$  — расстояние вдоль поверхности.

Методы Тани [27] и Трукенбротта [32], основанные на интегральном уравнении кинетической энергии, представлены ниже в этой главе и в гл. VI соответственно. Как видно из табл. 2 и 3, любой из указанных методов может быть использован для определения точки отрыва ламинарного двумерного течения несжимаемой жидкости. Расчеты по методам Твейтса, Стрэтфорда, Тиммана

Таблица 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ДАВЛЕНИЯ  $C_{pS}$  ПРИ ОТРЫВЕ ЛАМИНАРНОГО НЕСЖИМАЕМОГО ПОТОКА ОТ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ [26]

Метод	Случай						
	1	2	3	4	5	6	7
Точные значения	0,082	0,226	0,142	0,089	0,056	0,056	0,062
Польгаузен [4]	—	0,305	0,192	0,118	0,067	—	—
Тимман [30]	0,072	0,230	0,140	0,080	0,043	—	—
Вальц [31]	0,049	0,204	0,119	0,067	0,035	—	—
Твейтс [17]	0,063	0,217	0,133	0,074	0,040	0,041	0,046
Кёрл—Скэн (модификация метода Твейтса) [14]	0,069	0,231	0,138	0,080	0,047	0,047	0,051
Тани [27]	—	0,225	0,142	0,088	0,057	—	—
Трукенбротт [32]	—	0,215	—	—	—	—	—
Лойцянский [33]	—	0,236	0,141	0,080	0,044	0,066	—
Карман—Милликен [10]	0,069	0,194	—	—	—	—	—
Денхофф [12]	0,067	0,194	0,135	0,071	0,051	—	—
Стрэтфорд [13]							
$\{\bar{x}^2 C_p (dC_p/d\bar{x})^2\}_s = 0,0076$	0,074	0,204	0,125	0,078	0,050	0,048	—
Кёрл—Скэн (модификация метода Стрэтфорда) [14] и Кёрл [34],							
$\{\bar{x}^2 C_p (dC_p/d\bar{x})^2\}_s = 0,0104$	0,088	0,227	0,141	0,088	0,055	0,062	0,068

и Тани вполне удовлетворительны. Выбор подходящего метода зависит от требуемой точности расчета, возможностей проведения вычислений и т. п. Например, можно отдать предпочтение методу Стрэтфорда ввиду простоты вычислений, так как в нем используются данные о потенциальном течении и не включаются характеристики пограничного слоя. Однако, если имеются данные о росте

толщины пограничного слоя, можно также использовать метод Твейтса как сравнительно легкий и точный расчетный метод определения положения точки отрыва.

### 2.9. МЕТОД ПРАНДТЛЯ

Прандтль [35] установил допустимую величину положительного градиента давления, при котором предотвращается отрыв потока. Он применил аппроксимацию Кармана — Польгаузена [25]. Предполагается, что распределение давления, определяемое по теории потенциального течения, сохраняется до точки, близкой к точке отрыва, и что профиль скорости остается неизменным за отрывом, причем  $\lambda = -10$  вместо польгаузеневского значения  $\lambda = -12$  (фиг. 10)

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu u_e / \delta} = -10.$$

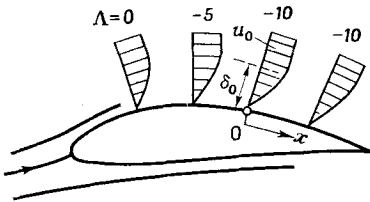
Это значит, что

$$\frac{\theta^2}{\nu} = \frac{0,1369}{-du_e/dx}, \quad u_e \frac{d}{dx} \left( \frac{0,1369}{-du_e/dx} \right) = 0,1369 \frac{u_e (d^2 u_e / dx^2)}{\{(du_e / dx)\}^2} = 0,1369 \sigma,$$

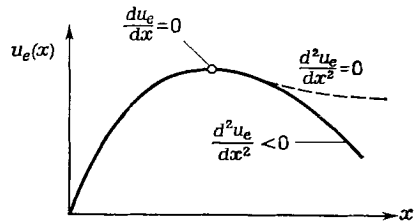
где  $\sigma = u_e (d^2 u_e / dx^2) / \{(du_e / dx)\}^2$ . (19)

Для  $\lambda = -10$   $\sigma \approx 11$ .

Следовательно, при  $\sigma > 11$  отрыва не происходит, а при  $\sigma < 11$  наблюдается отрыв. При  $\sigma = 11$  пограничный слой находится на грани отрыва.



Фиг. 10. Развитие пограничного слоя, когда отрыв ламинарного потока предотвращен [25].



Фиг. 11. Распределение скорости потенциального течения при отрыве ламинарного пограничного слоя и без отрыва [25].

Из соотношения (19) ясно, что необходимым условием предотвращения отрыва является  $u_e'' > 0$  или уменьшение величины положительного градиента давления в направлении потока.

Для условий «почти» предотвращенного отрыва ламинарного потока можно вычислить скорость потенциального течения и толщину пограничного слоя (фиг. 11). Поскольку  $u_e''/u_e' = 11$  ( $u_e''/u_e'$ ), то, интегрируя, получаем  $u_e' = 11 \ln u_e + \ln(-c_1)$  или  $u_e/u_e'' = -c_1'$ .



Так как из соотношения (19)  $(d^2u_e/dx^2)/(du_e/dx) = 11 (du_e/dx)/u_e$ , то, интегрируя, находим  $(du_e/dx)/u_e'' = -c_1'$ , где  $c_1'$  — постоянная. Интегрируя еще раз, получаем  $\frac{1}{10u_e^{10}} = c_1'x + c_2$ .

Если  $u_0$  — скорость потенциального течения в точке отрыва,  $x$  — расстояние вдоль поверхности вниз по потоку от точки отрыва, то, обозначая

$$u_e(x) = u_0 \text{ при } x = 0,$$

$$c_2 = \frac{1}{10u_0^{10}} \text{ и } c_1'u_0^{10} = c_1, \text{ получаем } u_e(x) = \frac{u_0}{(1 + 10c_1x)^{1/10}}$$

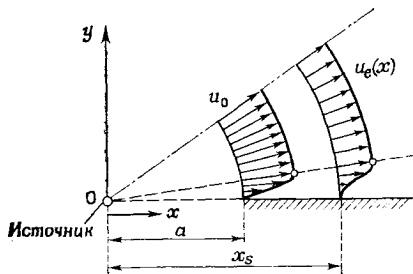
— распределение скорости потенциального течения, при котором предотвращается отрыв. Значение  $c_1$  можно определить с помощью толщины пограничного слоя. Полагая при  $x = 0$   $\delta = \delta_0$ , находим  $c_1 = 10\nu/u_0\delta_0^2$ . Следовательно,

$$u_e(x) = u_0 \left(1 + 100 \frac{\nu x}{u_0 \delta_0^2}\right)^{-0,1} \text{ и } \delta(x) = \delta_0 \left(1 + 100 \frac{\nu x}{u_0 \delta_0^2}\right)^{0,55}.$$

Из этих уравнений можно видеть, что допустимое замедление пропорционально  $x^{-0,1}$  и достаточно мало, поскольку при обтекании плоской пластины под нулевым углом атаки возникает замедление, близкое к этому значению. Для предотвращения отрыва на слабо искривленной поверхности величина  $\delta$  должна быть пропорциональна  $x^{0,55}$ .

Так как при обтекании плоской пластины  $\delta$  пропорциональна  $x^{0,5}$ , нарастание пограничного слоя в условиях предотвращенного отрыва не так уж сильно отличается от его нарастания на плоской пластине.

Обратные течения возникают в диффузоре. Если стенки диффузора прямолинейные, гра-



Фиг. 12. Ламинарный пограничный слой в диффузоре с прямолинейными стенками [25].

диент давления вдоль стенки определяется углом раскрытия диффузора. Предположим, что в точке 0 расположен источник (фиг. 12) и что стенка начинается при  $x = a$ , где  $x$  — расстояние по радиусу от источника в точке 0. Пусть скорость на входе равна  $u_0$ , тогда  $u_e(x) = u_0(a/x)$ ,  $du_e/dx = -u_0(a/x^2)$ ,  $d^2u_e(x)/dx^2 = 2u_0(a/x^3)$  и  $\sigma = 2$ . Затем на основе соотношения (19) можно заключить, что в диффузоре поток всегда отрывается независимо от угла раскрытия. Польгаузен вычислил положение точки ламинарного отрыва  $x_s/a = 1,213$  и установил, что оно не зависит от угла раскрытия диффузора.

Эти случаи показывают, что отрыв ламинарного потока происходит лишь при малых положительных градиентах давления ввиду его ограниченной способности к противодействию росту давления.

### 2.10. МЕТОД ТАНИ

Тани [27] преобразовал уравнения ламинарного пограничного слоя и получил критерий отрыва ламинарного потока. Толщина потери импульса представлена в виде

$$\frac{\theta^2}{\nu} = u_e(x)^{-5,7} \int_0^x \left( 0,441 + 8\sigma'^2 + \frac{0,13}{\omega - 0,3} \right) u_e(x)^{4,7} dx,$$

где

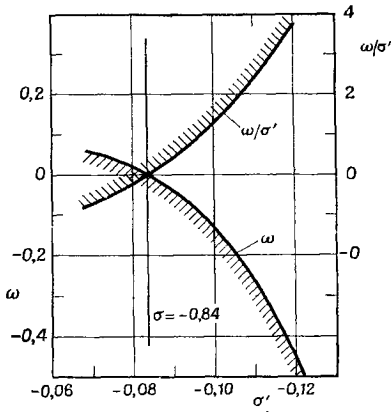
$$\sigma' = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e(x)}{dx} \text{ и } \omega = \sigma'^2 u_e(x) \frac{d^2 u_e(x)}{dx^2} / \left\{ \frac{du_e(x)}{dx} \right\}^2 = \sigma'^2 \sigma.$$

Предыдущее уравнение аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\theta^2}{\nu} = 0,441 u_e(x)^{-5,7} \int_0^x u_e(x)^{4,7} dx.$$

Критерий ламинарного отрыва дается в виде

$\sigma'$	-0,068	-0,084	-0,092	-0,103	-0,119
$\omega$	0,057	0	-0,053	-0,169	-0,429
$\omega/\sigma'$	-0,839	0	0,576	1,64	3,61



Ф и г. 13. Область отрыва ламинарного пограничного слоя [27].

Измерения значений  $d^2 u_e(x)/dx^2$  были выполнены недостаточно точно, а значения  $\omega$  вблизи точки отрыва выходят за пределы интервала значений, соответствующего решению [27]. Так что численные значения критерия отрыва ламинарного пограничного слоя нуждаются в уточнении (фиг. 13).

### 2.11. МЕТОД ХОУАРТА

Хоуарт [9] определил положение точки ламинарного отрыва в частном случае линейного распределения скорости потенциального течения, заданного в виде

$$u_e = b_0 - b_1 x,$$

где  $b_0$  и  $b_1$  — положительные постоянные.

Метод Хоуарта приближенный. Однако, учитывая большее число членов исходных уравнений, можно повысить точность расчета положения точки отрыва.

Представляя функцию тока в виде

$$\psi = b_0^{1/2} x^{1/2} \nu^{1/2} \{f_0(\eta) - 8x^* f(\eta) + (8x^*)^2 f_2(\eta) - (8x^*)^3 f_3(\eta) + (8x^*)^4 f_4(\eta) - \dots\},$$

где  $\eta = 1/2 y x^{-1/2} \nu^{-1/2} b^{1/2}$  и  $x^* = b_1 x / b_0$ , подставляя ее в уравнение пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -b_1(b_0 - b_1 x)$ , и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x^*$ , находим:

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0,$$

$$f_1''' + f_0 f_1'' - 2f_0' f_1' + 3f_0'' f_1 = -1,$$

$$f_2''' + f_0' f_2'' - 4f_0' f_2' + 5f_0'' f_2 = -\frac{1}{8} + (2f_1'^2 - 3f_1 f_1''),$$

$$f_3''' + f_0 f_3'' - 6f_0' f_3' + 7f_0'' f_3 = (6f_1' f_2' - 3f_1 f_2'' - 5f_1'' f_2),$$

$$f_4''' + f_0 f_4'' - 8f_0' f_4' + 9f_0'' f_4 = (4f_2'^2 - 5f_2 f_2'') + (8f_1' f_3' - 3f_1 f_3'' - 7f_1'' f_3),$$

$$f_5''' + f_0 f_5'' - 10f_0' f_5' + 11f_0'' f_5 = (10f_1 f_4' - 3f_1 f_4'' - 9f_1'' f_4) + (10f_2' f_3' - 5f_2 f_3'' - 7f_2'' f_3),$$

$$f_6''' + f_0 f_6'' - 12f_0' f_6' + 13f_0'' f_6 = (12f_1' f_5' - 3f_1 f_5'' - 11f_1'' f_5) + (12f_2' f_4' - 5f_2 f_4'' - 9f_2'' f_4) + (6f_3'^2 - 7f_3 f_3''),$$

$$f_7''' + f_0 f_7'' - 14f_0' f_7' + 15f_0'' f_7 = (14f_1' f_6' - 3f_1 f_6'' - 13f_1'' f_6) + (14f_2' f_5' - 5f_2 f_5'' - 11f_2'' f_5) + (14f_3' f_4' - 7f_3 f_4'' - 9f_3'' f_4),$$

$$f_8''' + f_0 f_8'' - 16f_0' f_8' + 17f_0'' f_8 = (16f_1' f_7' - 3f_1 f_7'' - 15f_1'' f_7) + (16f_2' f_6' - 5f_2 f_6'' - 13f_2'' f_6) +$$

$$+ (16f_3' f_5' - 7f_3 f_5'' - 11f_3'' f_5) + 8(f_4'^2 - 9f_4 f_4''),$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $\eta$ .

Граничными условиями являются

$$f_r = f_r' = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ для всех значений } r, f_0' = 2,$$

$$f_1' = \frac{1}{4}, f_2' = f_3' = f_4' = \dots = 0 \text{ при } \eta = \infty.$$

В результате получим

$$f_0''(0) = 1,328242, \quad f_1''(0) = 1,02054,$$

$$f_2''(0) = -0,06926, \quad f_3''(0) = 0,0560,$$

$$f_4''(0) = -0,0372, \quad f_5''(0) = 0,0272,$$

$$f_6''(0) = -0,0212, \quad f_7''(0) = 0,0174,$$

$$f_8''(0) = -0,0147,$$

Принимая

$$u = \frac{b_0}{2} \{f'_0(\eta) - (8x^*) f'_1(\eta) + (8x^*)^2 f'_2(\eta) \dots\},$$

находим, что условие отрыва  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = 0$  приводит к

$$f''_0(0) - (8x^*) f''_1(0) + (8x^*)^2 f''_2(0) \dots = 0.$$

Принимая  $f''_r(0) = 0$  при  $r \geq 9$ , определяем положение точки отрыва  $x^*_S = 0,129$ . Если принять  $|f''_r(0)| = |f''_s(0)|$  при  $r \geq 9$ , то  $x^*_S = 0,119$ . Поэтому Хоурт предположил, что точка ламинарного отрыва располагается в интервале от 0,119 до 0,129, и предложил в качестве окончательного результата величину  $x^*_S = 0,120$ .

Это значение удовлетворительно согласуется с точным решением Гёртлера [15], который для такого же распределения скорости получил значение  $x^*_S = 0,126$ . Согласно расчетам по методу Кармана — Милликена [10], отрыв происходит при  $x^*_S = 0,102$ , тогда как метод Польгаузена [4] дает  $x^*_S = 0,156$ , т. е. смещение вниз по потоку положения точки отрыва по сравнению с результатом Хоурта. Метод Хоурта требует учета восьми или более членов для достаточно точного предсказания отрыва, но это существенно затрудняет вычисления. Поэтому Хоурт разработал два приближенных метода определения ошибки, когда учитываются первые семь членов. Затем он предложил метод, применимый для расчета пограничного слоя во всяком замедляющемся потоке.

## 2.12. МЕТОД ГЁРТЛЕРА

Задача об отрыве ламинарного пограничного слоя была точно решена Гёртлером [15], который разработал новый общий аналитический метод расчета установившегося двумерного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости с произвольными градиентами давления. Так как его решение дается в виде быстро сходящихся бесконечных степенных рядов, можно получить решение с любой степенью точности, удерживая достаточное число членов разложений в степенные ряды. Рассмотрим этот метод подробнее ввиду его высокой точности.

Гёртлер ввел в качестве независимых переменных следующие безразмерные величины:

$$\xi_1 = \frac{1}{v} \int_0^x u_e(x) dx$$

и

$$\eta_1 = u_e(x) y / \left\{ 2v \int_0^x u_e(x) dx \right\}^{1/2} = yg(x) \quad (20)$$

Далее решение уравнений пограничного слоя дается в виде бесконечного ряда по  $\xi_1$  с коэффициентами, являющимися функциями  $\eta_1$ . Некоторые существенные особенности этого нового ряда заключаются в следующем.

Главный член ряда точно удовлетворяет условиям на внешней границе во всех поперечных сечениях вдоль стенки, следовательно, последующие члены дают поправки лишь для внутренней части пограничного слоя.

Преобразование к новым независимым переменным  $\xi_1$  и  $\eta_1$  приводит к такой формулировке задачи, что заданные условия каждой частной задачи входят в явном виде только в одну функцию, так называемую определяющую функцию пограничного слоя. Эта определяющая функция имеет вид

$$\beta(\xi_1) = 2 \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\int_0^x u_e(x) dx}{u_e^2(x)}$$

и оказывает основное влияние на структуру решения в виде ряда.

Функции, являющиеся коэффициентами нового ряда, могут быть представлены в виде линейных комбинаций универсальных функций. Для любого фиксированного значения  $\beta(0) = \beta_0$  эти функции не зависят от заданных условий. Поэтому для каждого значения  $\beta(0)$  они могут быть затабулированы раз и навсегда. Следовательно, применение новых рядов в каждом конкретном случае связано с нетрудоемкими вычислениями, столь же простыми, как применение любого нестроого метода типа метода Польгаузена. Благодаря их простоте они предпочтительны при решении различных прикладных задач.

Точка отрыва определяется следующим образом.

Характеристики течения до начала отрыва точно выражаются с помощью нескольких членов нового ряда с последующей приближенной экстраполяцией или, более точно, с помощью одного или двух шагов разностного метода. Точность определения точки отрыва с помощью новых рядов обусловлена преимуществами степенных рядов. Новый ряд Гёртлера сходится значительно быстрее, чем ряд Блазиуса, и является более общим, так что с применением ряда Гёртлера решено большое число практических задач, для которых до сих пор не были получены точные решения уравнений пограничного слоя.

На практике большинство задач отрыва потока с положительным градиентом давления на плоской пластине можно достаточно точно решить с помощью членов до пятого порядка вплоть до начала отрыва с последующим применением короткой экстраполяции. Сходимость нового ряда выгоднее всего использовать для случаев с монотонным ускорением или замедлением внешнего потока.

Однако при решении задачи об обтекании цилиндра (когда можно использовать ряд Блазиуса) новый ряд Гёртлера не обладает лучшей сходимостью в поперечных сечениях за точкой минимума давления по сравнению с рядом Блазиуса. Тем не менее первый член нового ряда дает хорошее приближение на значительном большем удалении от передней критической точки, чем первый член ряда Блазиуса.

С помощью нового ряда можно найти решения не только для таких установившихся ламинарных течений несжимаемой жидкости, как течение вдоль плоской пластины с произвольным градиентом давления или обтекание цилиндра, но и для течений сжимаемой среды [36], для пограничного слоя с произвольно распределенным непрерывным отсосом с поверхности стенки [37], для установившихся ламинарных течений несжимаемой жидкости около тел вращения [38] и для расчетов теплового пограничного слоя [39].

Ниже даются некоторые подробности вывода нового ряда и его применения для решения задачи об отрыве ламинарного потока.

Уравнения двумерного установившегося ламинарного пограничного слоя в частных производных имеют следующий вид: уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

уравнение количества движения

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e(x) \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

С введением функции тока  $\psi$ , определяемой следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \psi(x, 0) = 0,$$

удовлетворяется уравнение неразрывности, а уравнение количества движения принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (21)$$

Граничные условия суть

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq x_s).$$

$$\overline{u}(x, y) = u_e(x, y) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty$$

Передняя критическая точка расположена при  $x = 0$  и  $y = 0$ , где разветвляется набегающий поток,  $x = x_s$  — наиболее удаленная по течению исследуемая точка, а  $x = x_s$  и  $y = 0$  в общем случае будут соответствовать точке отрыва ламинарного пограничного слоя. С использованием функции тока  $\psi$  граничные условия при-

НИМАЮТ ВИД

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{при } y = 0$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \rightarrow u_e(x), \quad (0 \leq x \leq x_s) \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Чтобы решение было единственным, в начальном поперечном сечении  $x = 0$  должен быть задан профиль скорости  $u(x, y)$ .

В процессе решения уравнений в частных производных применяются следующие независимые и зависимые переменные в безразмерном виде:

$$\xi = \frac{1}{v} \int_0^x u_e(x) dx = \xi_1, \quad \hat{\eta} = \frac{1}{v} u_e(x) y, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi, \hat{\eta}) &= \frac{1}{v} \psi(x, y), \quad \hat{u}(\xi, \hat{\eta}) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}} = \frac{u(x, y)}{u_e(x)}, \\ \hat{v}(\xi, \hat{\eta}) &= -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} = \frac{u_e(x) v(x, y) + \{du_e(x)/dx\} \cdot y \cdot u(x, y)}{u_e^2(x)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Преобразование (22) является однозначным, если  $u_e(x) > 0$  и  $u_e(x) = 0$  при  $x = 0$ .

Если обратить уравнение (23), то получим

$$\frac{u(x, y)}{u_e(x, y)} = \hat{u}(\xi, \hat{\eta}), \quad \frac{v(x, y)}{u_e(x)} = \hat{v}(\xi, \hat{\eta}) - \hat{\beta}(\xi) \cdot \hat{\eta} \cdot \hat{u}(\xi, \hat{\eta}),$$

где

$$\hat{\beta}(\xi) = \frac{v(du_e(x)/dx)}{u_e^2(x)}.$$

В этих новых переменных уравнение (21) и граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \xi \partial \hat{\eta}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}^2} = \hat{\beta}(\xi) \left(1 - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}^2}\right) + \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}^3}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}(\xi, \hat{\eta}) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}}(\xi, \hat{\eta}) = 0 \quad \text{при } \hat{\eta} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\eta}}(\xi, \hat{\eta}) \rightarrow 1 \quad \text{при } \hat{\eta} \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} (0 \leq \xi \leq \xi_s). \quad (25)$$

Окончательно выбираются следующие независимые и зависимые переменные:

$$\xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{2\xi}} \quad (26)$$

и

$$F(\xi_1, \eta_1) = \frac{\psi(x, y)}{\left\{2\nu \int_0^x u_e(x) dx\right\}^{1/2}}, \quad F(\xi_1, 0) = 0, \quad (0 \leq \xi_1 \leq \xi_S). \quad (27)$$

Кроме того, полагая  $\beta(\xi_1) = 2\xi_1 \hat{\beta}(\xi)$ , имеем

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \nu \sqrt{2\xi_1} F(\xi_1, \eta_1), \quad \frac{u(x, y)}{u_e(x)} = \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\xi_1, \eta_1), \\ \frac{v(x, y)}{u_e(x)} &= -\frac{1}{\sqrt{2\xi_1}} \left[ F(\xi_1, \eta_1) + 2\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\xi_1, \eta_1) + \{\beta(\xi_1) - 1\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \eta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\xi_1, \eta_1) \right]. \end{aligned}$$

С помощью уравнений (24)–(27) уравнение (21) сводится к виду

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta_1^3} + F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1^2} + \beta(\xi_1) \left(1 - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1^2}\right) = 2\xi_1 \left( \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} - \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1^2} \right), \quad (28)$$

$$F(\xi_1, 0) = \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\xi_1, 0) = 0, \quad (0 \leq \xi_1 \leq \xi_S), \quad \lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\xi_1, \eta_1) = 1. \quad (29)$$

При рассмотрении уравнений (28) и (29) замечаем, что данные, соответствующие любой частной задаче, входят только в функцию  $\beta(\xi_1)$

$$\beta(\xi_1) = 2\xi_1 \frac{d}{d\xi_1} \ln \left( \frac{u_e(x)}{u_{e0}} \right).$$

Постоянная скорость  $u_{e0}$  введена для удобства приведения этого уравнения к безразмерному виду. Она может быть принята за единицу измерения скорости либо может использоваться в качестве характерной скорости. При заданном распределении внешней скорости  $\beta(\xi_1)$  — однозначная функция  $x$

$$\beta(\xi_1) = \frac{2 \left( du_e/dx \right) \int_0^x u_e(x) dx}{u_e^2(x)} \quad (30)$$

или

$$\beta(\xi_1) = \frac{2\xi_1(x) \{ \partial^2 \xi_1(x) / \partial x^2 \}}{\{ \partial \xi_1(x) / \partial x \}^2}.$$

Эта функция называется определяющей функцией пограничного слоя, так как она играет важную роль в расчете. Если две задачи подобны по Рейнольдсу, то определяющая функция  $\beta(\xi_1)$  будет одинакова в обоих случаях. Как видно из уравнений (30),  $\beta(\xi_1)$  определяется не только величиной  $du_e/dx$ , но также величиной

$\int_0^x u_e(x) dx$ , определяемой предысторией потока.



Ниже приводятся два примера численного расчета ламинарного течения с помощью нового ряда. Известное распределение скорости потенциального течения выражается в виде  $u_e(x) = \sum_k u_k x^k$ .

Для случая  $\beta_0 = 0$  (острая передняя кромка)  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , для случая  $\beta_0 = 1$  (скругленная передняя кромка)  $k = 1, 2, 3, \dots$ , а если форма тела симметрична относительно направления течения, то  $k = 1, 3, 5$ .

Для удобства можно ввести безразмерные величины  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{y} = y \operatorname{Re}^{1/2}/L$ ,  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = u(x, y)/u_0$ ,

где  $L$  — характерная длина,  $u_0$  — постоянная характерная скорость

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) &= v(x, y) \operatorname{Re}^{1/2}/u_0, & \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) &= \psi(x, y)/v \operatorname{Re}^{1/2}, \\ \bar{u}_e(\bar{x}) &= u_e(x)/u_0 = \sum_k \bar{u}_k \bar{x}^k \text{ и } \bar{u}_k &= u_k L^k/u_0. \end{aligned}$$

Наконец,  $\bar{g}(\bar{x}) = g(x) L/\operatorname{Re}^{1/2} = \bar{u}_e(\bar{x})/\sqrt{2\xi_1}$ , где

$$g(x) = u_e(x) / \left\{ 2v \int_0^x u_e(x) dx \right\}^{1/2}.$$

Кроме того, обозначая

$$\bar{\xi} = \int_0^{\bar{x}} \bar{u}_e(\bar{x}) d\bar{x} = \xi_1 \operatorname{Re}^{-1}$$

и

$$\bar{\eta} = \eta = \bar{y} g(x) L/\operatorname{Re}^{1/2} = \bar{y} \bar{u}_e(\bar{x})/\sqrt{2\xi_1},$$

имеем

$$\beta(\xi_1) = \bar{\beta}(\bar{\xi}) = \left( 2 \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \bar{u}_e(\bar{x}) d\bar{x} \right) / \bar{u}_e^2(\bar{x}).$$

В общей теории определяющая функция может быть разложена в степенной ряд вида  $\bar{\beta}(\bar{\xi}) = \sum_k \bar{\beta}_k \bar{\xi}^k$ , а для ее приложений требуется установить связь между  $\bar{\beta}_k$  и заданными значениями  $\bar{u}_k$ .

Далее, функция тока представляется с помощью степенного ряда

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{2\xi_1} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k \bar{\xi}^k,$$

тогда профиль скорости в пограничном слое выражается в виде

$$\frac{u(x, y)}{u_e(x)} = \bar{u}(\bar{x}, \bar{y})/\bar{u}_e(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{1}{u_e} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}'_k(\eta) \bar{\xi}^k.$$

Окончательное решение для отрыва ламинарного потока с использованием нового ряда Гёртлера приводится для двух случаев:  $\beta_0 = 0$  и  $\beta_0 = 1$ .

### 2.12.1. Случай $\beta_0 = 0$

Этот случай соответствует обтеканию заостренного тела, и в теории пограничного слоя он соответствует течению около плоской пластины при произвольных градиентах давления. Распределение скорости потенциального течения задается в виде  $u_e(x) = \sum_k u_k x^k$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Как указывалось выше, пограничный слой может быть точно рассчитан от передней кромки до точки непосредственно перед началом отрыва с помощью универсальной функции.

$$\text{Так как } \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = V \sqrt{2\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k(\eta) \bar{\xi}^k$$

и

$$\frac{u(x, y)}{u_e(x)} = \bar{u}(\bar{x}, \bar{y})/\bar{u}_e(\bar{x}) = \frac{1}{u_e} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}'_k(\eta) \bar{\xi}^k,$$

коэффициенты — функции  $\bar{F}'_k(\eta)$  могут быть представлены в виде линейных комбинаций универсальных функций  $f$ . Штрих соответствует дифференцированию по  $\eta$ :

$$\bar{F}'_1 = \bar{\beta}_1 f_1,$$

$$\bar{F}'_2 = \bar{\beta}_1^2 f_{11} + \bar{\beta}_2 f_2,$$

$$\bar{F}'_3 = \bar{\beta}_1^3 f_{111} + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 f_{12} + \bar{\beta}_3 f_3,$$

$$\bar{F}'_4 = \bar{\beta}_1^4 f_{1111} + \bar{\beta}_1^2 \bar{\beta}_2 f_{112} + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_3 f_{13} + \bar{\beta}_2^2 f_{22} + \bar{\beta}_4 f_4,$$

$$\bar{F}'_5 = \bar{\beta}_1^5 f_{11111} + \bar{\beta}_1^3 \bar{\beta}_2 f_{1112} + \bar{\beta}_1^2 \bar{\beta}_3 f_{113} + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2^2 f_{122} + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_4 f_{14} +$$

$$+ \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3 f_{23} + \bar{\beta}_5 f_5.$$

Универсальные функции  $F_0, f_1, f_{11}, f_2, \dots$  зависят только от геометрического параметра  $\beta_0$ , характеризующего угол передней кромки. Таблица численных значений [40], которая здесь не приводится, содержит девятнадцать универсальных функций:  $F_0, f_1, \dots, f_5$ , а также их первые, вторые и третьи производные по  $\eta$ . Производные по  $\eta$  даны с шестью десятичными знаками для значений  $\eta = 0, 0,2 \dots 6$ , однако из этих величин при расчете отрыва используется только  $\bar{F}'_k(0)$ .

Если функция  $\bar{u}_e(\bar{x})$  задана в замкнутом виде, то определяющая функция  $\beta(\bar{\xi})$  вычисляется в замкнутом виде через величину  $\bar{u}_e(x)$ .

Функция  $\bar{\beta}$  должна быть представлена как функция  $\bar{\xi}$ , а затем разложена в ряд по степеням  $\bar{\xi}$ . Если эта методика неприменима, то величины  $\bar{\beta}_k$  вычисляются по следующей схеме:

$$\bar{\beta}_1 = 2\bar{u}_1,$$

$$\bar{\beta}_2 = 4(-\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2),$$

$$\bar{\beta}_3 = 2(4\bar{u}_1^3 - 7\bar{u}_1\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3),$$

$$\bar{\beta}_4 = \frac{1}{3}(-48\bar{u}_1^4 + 118\bar{u}_1^2\bar{u}_2 - 66\bar{u}_1\bar{u}_3 - 28\bar{u}_2^2 + 24\bar{u}_4),$$

$$\bar{\beta}_5 = \frac{1}{6}(192\bar{u}_1^5 - 605\bar{u}_1^3\bar{u}_2 + 375\bar{u}_1^2\bar{u}_3 + 320\bar{u}_1\bar{u}_2^2 - 192\bar{u}_1\bar{u}_4 - 150\bar{u}_2\bar{u}_3 + 60\bar{u}_5).$$

После этих предварительных расчетов можно определить распределение скорости в пограничном слое, так как

$$\frac{u(x, y)}{u_e(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k''(\eta) \bar{\xi}^k$$

и производная  $\bar{F}_k''$  задана через  $\bar{\beta}$  и  $f$ .

Точка отрыва ламинарного потока может быть определена из условия

$$\tau_w(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

а

$$\tau_w(x) \frac{\text{Re}^{1/2}}{\rho u_0^2} = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{u}_e(\bar{x}) g(\bar{x}) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k''(0) \bar{\xi}^k.$$

Таким образом, зная  $\bar{F}_k''(0)$ , можно рассчитать положение точки отрыва.

Для случая  $\beta_0 = 0$  значения  $\bar{F}_k''$  вычислены в работе [40]:

$$\bar{F}_0''(0) = 0,469600,$$

$$\bar{F}_1''(0) = 1,032361\bar{\beta}_1,$$

$$\bar{F}_2''(0) = -0,714746\bar{\beta}_1^2 + 0,908119\bar{\beta}_2,$$

$$\bar{F}_3''(0) = 1,103512\bar{\beta}_1^3 - 1,191046\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 + 0,829995\bar{\beta}_3,$$

$$\bar{F}_4''(0) = -2,313327\bar{\beta}_1^4 + 2,775762\bar{\beta}_1^2\bar{\beta}_2 - 1,047926\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3 - 0,505493\bar{\beta}_2^2 + 0,774210\bar{\beta}_4,$$

$$\bar{F}_5''(0) = 5,600941\bar{\beta}_1^5 - 7,803477\bar{\beta}_1^3\bar{\beta}_2 + 2,450688\bar{\beta}_1^2\bar{\beta}_3 + 2,355199\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2^2 - 0,949480\bar{\beta}_1\bar{\beta}_4 - 0,899401\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3 + 0,731424\bar{\beta}_5.$$

2.12.2. Случай  $\beta_0 = 1$ 

Этот случай соответствует обтеканию тела со скругленной передней кромкой, симметричного относительно направления набегающего потока. Благодаря этой симметрии распределение скорости вне пограничного слоя выражается нечетной функцией по  $x$  и может быть представлено в виде

$$u_e(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{при } k=0, 1, 2, 3.$$

В работе [40] даны следующие значения  $\bar{\beta}_k$ :

$$\bar{\beta}_1 = 3\bar{u}_3,$$

$$\bar{\beta}_2 = -13\bar{u}_3^2 + \frac{40}{3}\bar{u}_5,$$

$$\bar{\beta}_3 = 54\bar{u}_3^3 - 96\bar{u}_3\bar{u}_5 + 42\bar{u}_7,$$

$$\bar{\beta}_4 = -221\bar{u}_3^4 + \frac{1648}{3}\bar{u}_3^2\bar{u}_5 - 312\bar{u}_3\bar{u}_7 - \frac{1184}{9}\bar{u}_5^2 + \frac{576}{5}\bar{u}_9,$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_5 = & 898\bar{u}_3^5 - \frac{8560}{3}\bar{u}_3^3\bar{u}_5 + 1790\bar{u}_3^2\bar{u}_7 + 1520\bar{u}_3\bar{u}_5^2 - 928\bar{u}_3\bar{u}_9 - \\ & - 720\bar{u}_3\bar{u}_7 + \frac{880}{3}\bar{u}_{11}. \end{aligned}$$

Как и в случае  $\beta_0 = 0$ , для вычисления  $\tau(x) = 0$  и положения точки отрыва необходимы значения  $\bar{F}_k''(0)$ . Эти значения приведены в работе [40]:

$$\bar{F}_0''(0) = 1,232587,$$

$$\bar{F}_1''(0) = 0,493840\bar{\beta}_1,$$

$$\bar{F}_2''(0) = -0,077205\bar{\beta}_1^2 + 0,464540\bar{\beta}_2,$$

$$\bar{F}_3''(0) = 0,022415\bar{\beta}_1^3 - 0,136636\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 + 0,442383\bar{\beta}_3,$$

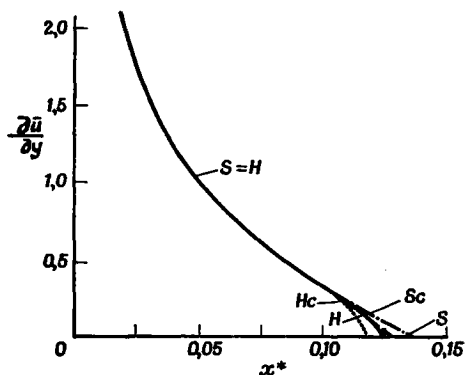
$$\begin{aligned} \bar{F}_4''(0) = & -0,008272\bar{\beta}_1^4 + 0,058722\bar{\beta}_1^2\bar{\beta}_2 - 0,124239\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3 - \\ & - 0,061283\bar{\beta}_2^2 + 0,424639\bar{\beta}_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_5''(0) = & 0,003560\bar{\beta}_1^5 - 0,029057\bar{\beta}_1^3\bar{\beta}_2 + 0,052941\bar{\beta}_1\bar{\beta}_3 + 0,051995\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2^2 - \\ & - 0,114928\bar{\beta}_1\bar{\beta}_4 - 0,112469\bar{\beta}_2\bar{\beta}_3 + 0,409895\bar{\beta}_5. \end{aligned}$$

Решение для ламинарного отрыва с применением нового ряда Гёртлера сравнимо теперь с решением Хоурта.

Для той же задачи с распределением скорости  $u_e = b_0 - b_1x$ , рассмотренной Хоуртом, Гёртлер использовал свой новый ряд.

Так как приближение пятого порядка по  $\bar{\xi}$  приводит к удовлетворительным результатам расчета напряжения трения на стенке и профиля скорости до  $x^* = 0,1125$ , он с помощью разностного метода определил положение точки отрыва ламинарного потока при  $x^* = 0,126$ .



Фиг. 14. Местные значения поверхностного трения при обтекании пластины по Хоурту [15].

$S$  — новая серия расчетов с приближением до пятого порядка;  $H$  — серия расчетов Хоурта с приближением до восьмого порядка;  $H_c$  — результаты расчетов по методу Хоурта с экстраполяцией;  $S_c$  — результаты с экстраполяцией конечноразностным методом.

Сравнивая полученный по методу Гёртлера результат ( $x^* = 0,126$ ) с результатом Хоурта ( $x^* = 0,120$ ), видим, что они хорошо согласуются. Новый ряд сходится значительно быстрее, чем ряд Хоурта при возрастающих значениях  $x^*$  до  $x^* = 0,15$ .

На фиг. 14 показаны результаты расчетов местного поверхностного трения при обтекании плоской пластины по Хоурту, полученные с помощью методов Хоурта и Гёртлера.

Для иллюстрации определения точки отрыва можно использовать следующий простой пример при  $\beta_0 = 0$ . Предположим, что распределение скорости внешнего замедляющегося потока задано в виде

$$u_e(x) = u_{e0}L/(L+x)$$

или в безразмерном виде

$$\bar{u}(x) = 1/(1+x).$$

Тогда  $\beta(\xi) = -2\xi/\text{Re}$  при  $\text{Re} = u_{e0}L/\nu$  сводится к  $\bar{\beta}(\bar{\xi}) = -2\bar{\xi}$ .

Следовательно,  $\bar{\beta}_1 = -2$  и  $\bar{\beta}_k = 0$  при  $k = 0, 2, 3, 4, \dots$ . При единственном не равном нулю члене ( $\bar{\beta}_1 \neq 0$ ) члены нового ряда сильно упрощаются и необходимы лишь значения универсальных функций  $F_0, f_1, f_{11}, f_{111}, f_{1111}, f_{11111}$ . Если вычислить эти шесть членов, то станет возможным произвести расчеты от передней кромки  $x = 0$  до точки в окрестности  $x = 0,150$ , а затем путем экстраполяции определить точку отрыва ( $x = 0,160$ ) с возможной ошибкой  $\sim 1\%$ .

Для ламинарного пограничного слоя со вдувом или отсосом через пористую стенку необходимо дополнить таблицы работы [40].

Закончим данную главу обсуждением некоторых вопросов.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

Для расчета положения точки отрыва часто используется интегральное уравнение количества движения Кармана. С помощью этого уравнения удается получить приближенное решение гораздо проще и быстрее, чем с помощью точных методов, аналогичных методу Гёртлера, поскольку после интегрирования по толщине пограничного слоя уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Известно, что применение уравнения количества движения Кармана дает лучшие результаты для ускоряющегося течения, чем для замедляющегося, и точка отрыва, определенная по уравнению количества движения Кармана, обычно оказывается ниже по потоку, чем по результатам точного решения.

При отрыве потока  $\lambda = 2\xi \frac{d(\ln u_e)}{d\xi}$ , где  $\xi = \int_0^x u_e(x) dx$ , как отметил Мексин [41], — весьма важная величина. Функции  $\lambda$  и  $\xi$  связаны с определяющей функцией  $\beta(\xi_1)$ , введенной Гёртлером, поскольку  $\lambda = u_{e0} \beta(\xi_1)$  и  $\xi_1 = (1/v) \xi$ .

Мексин изучил и критически рассмотрел условие отрыва пограничного слоя, описываемого уравнением Фолкнера — Скэн

$$\bar{f}''' + \bar{f}\bar{f}'' = \lambda(1 - \bar{f})^2, \quad (31)$$

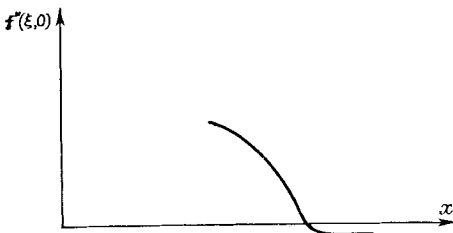
где  $\bar{f} = \psi(x, y) \sqrt{\text{Re}/L} u_e(x) g(x)$ ,  $g(x)$  — безразмерный масштабный множитель, связанный с частной производной по  $\bar{\eta} = y \sqrt{\text{Re}/L} \cdot g(x)$ ,  $L$  — характерная длина,  $\lambda$  — постоянная, подлежащая определению.

При  $\lambda = 0$  это уравнение сводится к уравнению Блазиуса, описывающему течение около плоской пластины; при  $\lambda = -1$  оно соответствует течению около критической точки двумерного тела, а при  $\lambda = -2m/(m+1)$  — течению с распределением скорости  $u_e(x) = cx^m$  в окрестности кромки клина.

Исходя из распределения скорости потенциального невязкого течения около кругового цилиндра  $u_e/u_\infty = 2 \sin \varphi$ , Хименц [42] вычислил  $\lambda_S \approx 1$ , но в реальном потоке  $\lambda_S = 0,40$ , поскольку, как установил Прандтль [43], давление около точки отрыва должно удовлетворять определенным условиям, связанным с существованием обратного течения за областью отрыва. Так как  $\lambda$  — существенный параметр, характеризующий отрыв, и значения  $\lambda_S$  для потенциального и реального течений различны, решение Хименца, полученное с использованием скорости потенциального течения, может быть правильным только случайно. Хименц

решал задачу об отрыве на круговом цилиндре с помощью степенного ряда и в выражении для  $u_e(x)$  учитывал только три члена. Вследствие того что при таком представлении кривая  $\lambda$  не имеет точки максимума и  $\lambda$  монотонно возрастает с  $u_e(x)$ , производные  $du_e/dx$ ,  $d^2u_e/dx^2$  в важной области отрыва выражаются неправильно.

Правильное выражение для  $u_e(x)$  должно быть установлено не только с использованием измеренных значений  $u_e(x)$ , но оно должно также удовлетворять двум характеристическим условиям:  $u_e(x)$  имеет максимум при  $\varphi \sim 70^\circ$  и  $u_e(x)$  имеет минимум или по крайней мере горизонтальную касательную при  $\varphi \sim 85^\circ$ . Эти два условия существенно изменяют форму зависимостей  $du_e/dx$  и  $\lambda$  вблизи точки отрыва. Чтобы удовлетворить этим условиям,



Фиг. 15.  $f''(\xi, 0)$  в зависимости от  $x$  [41].

недостаточно трех членов степенного ряда в выражении для  $u_e(x)$ . Однако с увеличением числа членов степенного ряда задача об отрыве становится неразрешимой. Решение задачи об отрыве, полученное Хименцом с использованием только трех членов в выражении для  $u_e(x)$ , оказалось правильным по чистой случайности. Мексин [41] в дальнейшем уста-

новил, что трудность использования степенного ряда для анализа отрыва иллюстрируется изменением  $f''(\xi, 0)$  по  $x$ . Если построить зависимость  $f''(\xi, 0)$  от  $x$ , то для реального течения вблизи точки отрыва получится кривая, изображенная на фиг. 15.

Кривая такого рода не может быть представлена степенным рядом по  $x$ , поскольку наклон кривой в точке отрыва  $x = x_s$  меняется очень быстро и основное предположение теории пограничного слоя  $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$  не выполняется в окрестности этой точки. Поэтому кривую зависимости  $f''(\xi, 0)$  от  $x$  расчлениают на две части: от передней критической точки до точки отрыва и от точки отрыва вниз по потоку с почти постоянным значением  $f''(\xi, 0)$ . Тогда для  $f''(\xi, 0)$  получается простое алгебраическое выражение.

Если отрыв происходит вблизи задней критической точки тонкого обтекаемого тела, распределение давления или скорости потенциального течения может быть использовано в качестве приближения к вязкому течению, поскольку положения максимума скорости и точки отрыва реального течения близки к их положениям, соответствующим потенциальному течению.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 2, под ред. Гольдштейна С., ИЛ, М., 1948.
2. Hiemenz K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, Thesis, Göttingen, *Dinglers polytech. J.*, 326, p. 32 (1911).
3. Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, 56, № 1 (1908); English transl. in NACA TM 1256.
4. Pohlhausen K., Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht, *Z. angew. Math. Mech.*, 1, pp. 252—268 (1921).
5. Schlichting H., Ulrich A., Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent, *Jahrbuch d. dt. Luftfahrtforschung*, 1, 8 (1942); см. также Rept S 10 of the Lilienthalgesellschaft, 1940.
6. Bussmann K., Ulrich A., Systematische Untersuchungen über den Einfluss der Profilform auf die Lage des Umschlagpunktes, preprint for Jahrbuch d. dt. Luftfahrtforschung, 1943, *Techn. Berichte*, 10, № 9 (1943); NACA TM 1185, 1947.
7. Лойцянский Л. Г., Приближенный метод расчета пограничного слоя на крыле, *ДАН СССР*, XXXV, № 8 (1942).
8. Falkner V. M., Skan S. W., Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations, British ARC, R & M, № 1314, 1930.
9. Howarth L., On the Solution of Laminar Boundary Layer Equations, *Proc. Roy. Soc.*, A 164, № 919, pp. 547—579 (1938).
10. Von Karman, Th., Millikan C. B., On the Theory of Laminar Boundary Layer involving Separation, NACA Rept № 504, 1934; см. также Rept nat. adv. Comm. Aero., Wash. № 504.
11. Von Doenhoff A. E., An Application of the von Karman — Millikan Laminar Boundary Layer Theory and Comparison with Experiments, NACA TN 544, 1935 (Supersedes NACA TR 527).
12. Von Doenhoff A. E., A Method of Rapidly Estimating the Position of the Laminar Separation Point, NACA TN 671, 1938.
13. Stratford B. S., Flow in the Laminar Boundary Layer near Separation, ARC Tech. Rept BSM № 3002, 1957.
14. Curle N., Skan S. W., Approximate Methods for Predicting Separation Properties of Laminar Boundary Layers, *Aeronaut. Quart.*, 8, pp. 264, 266 (1957).
15. Görtler H., A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows, Freiburg University Mathematics Institute Rep., Sept. 1955; см. также *J. of Math. Mech.*, 6, pp. 1—66 (1957).
16. Швец М. Е., ПММ, т. XIII, в. 3, 1949.
17. Thwaites B., Approximate Calculation of the Laminar Boundary Layer, *Aeronaut. Quart.*, 1, pp. 245—280 (Nov. 1949).
18. Hartree D. R., A Solution of the Boundary Layer Equation for Schubauer's Observed Pressure Distribution for an Elliptic Cylinder, ARC 3966, 1939.
19. Iglisch R., Exakte Berechnung der laminaren Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung, *Schr. dt. Akad. Luft Forsch.* (26 Jan. 1944).
20. Schlichting H., Bussmann K., Exakte Lösungen für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen, *Schr. dt. Akad. Luft Forsch.* (May 1943).
21. Morduchow M., Reyle S. P., On Calculation of the Laminar Separation Point, and Results for Certain Flows, *J. Aerospace Sci.*, pp. 996—997 (Aug. 1962).



22. C h a n g P. K., Laminar Separation of Flow Around Symmetrical Struts at Zero Angle of Attack, *J. Franklin Inst.*, **270**, pp. 382, 396 (1960).
23. C h a n g P. K., D u n h a m W. H., Laminar Separation of Flow Around Symmetrical Struts at Various Angles of Attack, *Schiffstechnik*, **8**, № 44 (Nov. 1961); см. также Dept. of Navy, David Taylor Model Basin, Rept 1365 (Jan. 1961).
24. V a n D y k e M. D., Second-order Subsonic Airfoil Theory Including Edge Effects, NACA Rept 1274, 1956.
25. Ш л и х т и н г Г., Теория пограничного слоя, изд-во «Наука», 1969.
26. R o s e n h e a d L. (ed.), Laminar Boundary Layer, Fluid Motor Memoirs, Oxford, Clarendon Press, p. 331, 1963.
27. T a n i I., On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations, *J. Phys. Soc. Japan*, **4**, pp. 149—154 (1948).
28. C u r l e N., Accurate Solutions of the Laminar Boundary Layer Equations, for Flows Having a Stagnation Point and Separation, *Rep. Memor. Aero. Res. Coun. Lond.*, № 3164 (1958).
29. T e r r i l l R. M., Laminar Boundary Layer Flow Head Separation with and without Suction, *Phil. Trans.*, A **253** (1960).
30. T i m m a n R. A., One-parameter Method for the Calculation of Laminar Boundary Layers, *Rep. Trans. Nat. LuchtLab, Amsterdam*, **15**, F 29—45 (1949); см. также *Rep. Nat. LuchtLab, Amsterdam*, F 35.
31. W a l z A., Ein neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Reibungsschicht, *Ber. Lilienthal-Ges. Luftfahrtf.*, № 141 (1941).
32. Т р у к е н б р о д т Е., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschichten bei ebener und rotations-symmetrischer Strömung, *Ing. Arch.*, **20** (1952); см. также An Approximate Method for the Calculation of the Laminar and Turbulent Boundary Layer by Simple Quadrature for Two-dimensional and Axially Symmetric Flow, *J. Aero. Sci.*, **19** (1952).
33. Л о й ц я н с к и й Л. Г., Приближенный метод интегрирования уравнений пограничного слоя в несжимаемом газе, *ПММ*, **13**, № 5 (1949).
34. C u r l e N., The Estimation of Laminar Skin Friction, Including Effects of Distributed Suction, *Aeronaut. Quart.*, **11**, 1960.
35. П р а н д т л ь Л., Механика вязких жидкостей, сб. «Аэродинамика», т. 3, под ред. Дюрэнда В. Ф., М.—Л., 1939.
36. W r a g e E., Entwicklung und Anwendung einer allgemeinen Reihenmethode zur Berechnung laminarer, kompressibler Grenzschichten, Bericht, № 134, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt (Nov. 1960).
37. G ö r t l e r H., On the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows with Continuous Suction, *J. Math. Mech.*, **6**, № 3, pp. 323—340, May 1957.
38. S a l j n i k o v V., Übertragung der Görtlerschen Reihen auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern, Bericht № 133, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Oct. 1960.
39. W r a g e E., Übertragung der Görtlerschen Reihen auf die Berechnung von Temperature-grenzschichten, Bericht № 81, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Dec. 1958.
40. G ö r t l e r H., Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten, mit Anleitung zum Gebrauch, Bericht № 34, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt (Dec. 1957).
41. M e k s y n D., New Methods in Laminar Boundary Layer Theory, Pergamon Press, New York, pp. 94—96, 1961.
42. H i e m e n z K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigem Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, Thesis, Göttingen, 1911, *Dinglers polytech. J.* **326**, p. 32 (1911).
43. P r a n d t l L., Zur Berechnung der Grenzschichten, *Z. angew. Math. Mech.*, **18**, № 1 (Feb. 1938).

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Cramer K. R., On Laminar Separation Bubbles, *J. Aeronaut. Sci.*, **25**, № 2, pp. 143—144 (Feb. 1958).
- Liu C. Y., Sandborn V. A., Evaluation of the Separation Properties of Laminar Boundary Layers, *Aeron. Quart.*, XIX, Part 3 (Aug. 1968).
- Ludwig G. R., An Experimental Investigation of Laminar Separation from a Moving Wall, AIAA Aerospace Sciences Meeting, N. Y., Jan. 20—22, 1964, preprint № 64—6.
- Morduchow M., Reyle S. P., On Calculation of the Laminar Separation Point and Results for Certain Flows, *J. Aerospace Sci.*, **29**, № 11, p. 996 (Aug. 1962).
- Ray A. K., A Note on Separation in Quasi-two-dimensional Laminar Boundary Layer Flow, *J. Aerospace Sci.*, **29**, № 12, p. 1481 (Dec. 1962).

## Глава III

# ОТРЫВ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ И ДРУГИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛАХ

---

### Обозначения

- $A_1, A_2, B, C$  — коэффициенты;  
 $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  
 $D_1, D_2 \dots$ , — коэффициенты;  
 $f = u/u_\infty$ ;  
 $g = v/u_\infty$ ;  
 $h = (w/u_\infty) \text{Re}^{1/2}$ ;  
 $L$  — характерная длина;  
 $l = \tau/(\mu u_e/\theta_x)$ ;  
 $p' = p/\rho u_\infty^2$ ;  
 $U^0$  — скорость основного потока в направлении  $x$ ;  
 $U^*$  — составляющая полной скорости (основной и возмущенной) в направлении  $x$ ;  
 $v_e$  — составляющая скорости потенциального течения в направлении размаха;  
 $\bar{v} = \frac{L}{r} \left( v + \frac{dr/dx}{r} yu \right)$ ;  
 $W^*$  — составляющая полной скорости (основной и возмущенной) в направлении  $z$ ;  
 $\bar{x} = \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2 dy$ ;  
 $\bar{y} = (r/L) y$ ;  
 $\theta$  — угол между направлением набегающего потока и нормалью к передней кромке в некоторой произвольной точке;  
 $\theta_0$  —  $\theta$  в точке  $x = 0$ ;  
 $\eta = \text{Re}_e^{1/2} (Z/L), \quad \eta = y (U^0/\nu x)^{1/2}$ ;  
 $\lambda = (\delta_x^2/\nu) \frac{du_e}{dx}$ ;  
 $\xi = x/L, \quad \xi = \delta_x/\delta_y$ ;  
 $\varphi$  — угол.

После изучения отрыва потока на двумерных телах приступим к рассмотрению отрыва потока на трехмерных телах и, в частности, на телах вращения. Проблемы отрыва потока на осесимметричных телах и двумерных телах в значительной мере взаимосвязаны, однако отрыв потока на трехмерных телах имеет более общий характер и труднее для анализа. Для частных случаев, однако, получены решения. Некоторые результаты анализа отрыва ламинарного потока приводятся в этой главе.

## 1. ОТРЫВ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

Расчет отрыва произвольного трехмерного ламинарного потока осложняется наличием поперечного течения. Доступные методы расчета трехмерных ламинарных течений являются лишь приближенными и часто основаны на теории пограничного слоя. При расчете используются также преимущества, связанные с условиями подобия. Подробно методы подобия и размерностей рассмотрены в книге Седова [1], точное решение для автомодельных течений дается в статье Хансена [2]. Основная трудность решения задач трехмерного ламинарного пограничного слоя состоит в нелинейности уравнений в частных производных с тремя независимыми переменными. В некоторых частных случаях удается упростить задачу, исключив из уравнений движения путем соответствующих преобразований одну или две новые независимые переменные. Такое течение называется «автомодельным течением в направлении (или в направлениях) новой независимой переменной (или переменных)».

Пример приложения условия автомодельности к задаче о трехмерном течении дается в работе [3], где уравнения трехмерного ламинарного пограничного слоя с тремя независимыми переменными сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием условий автомодельности и уравнений количества движения. Таким путем найдены решения для течений около плоской поверхности со спиральными линиями тока внешнего течения. Затем были вычислены распределения скорости в пограничном слое, поверхностное трение, толщина вытеснения и определено направление течения. При сравнении с экспериментальными данными получено удовлетворительное согласие.

Рассчитано несколько случаев. Результаты для трехмерного пограничного слоя показывают, что толщина пограничного слоя уменьшается при ускорении потока и увеличивается при его замедлении. Однако изменение толщины под действием градиента давления несколько меньше, чем в двумерном потоке. Кроме того в трехмерных потоках жидкость с малым количеством движения в пограничном слое течет не против положительного градиента давления в направлении основного течения, а в боковом направле-

нии, в котором градиент давления более благоприятен. В результате трехмерный пограничный слой эффективно противодействует положительному градиенту давления и не отрывается даже при таких значениях положительного градиента, при которых отрыв двумерного потока безусловен. Явления отрыва потока около тел с разрывным изменением формы, например около углов или препятствий, выступающих в толстый пограничный слой по сравнению с характерным размером тела, в опубликованной литературе не рассматриваются.

Уравнения трехмерного ламинарного пограничного слоя можно также применять, не используя условий автомодельности. Мейгер [4] предположил, что статическое давление по толщине пограничного слоя постоянно, скорость поперечного течения мала и что к внешнему течению применим метод малых возмущений. Он использовал свою теорию при расчете тонкостенного цилиндрического снаряда с круговым поперечным сечением, летящего под малым углом атаки по круговой траектории и вращающегося относительно оси симметрии, а также исследовал течение на стенках турбомашин. Хотя точных расчетов точек отрыва не производилось, анализ показал, что слабые поперечные течения представляют собой важный фактор для явлений отрыва на цилиндрических снарядах и в каналах S-образной формы.

Отрыв определяется здесь как явление, при котором весь поток отсоединяется от поверхности. Для течения в пограничном слое около плоской поверхности, вызываемого непрерывным полем сил, соответствующим течению в канале S-образной формы, Мейгер рассчитал поверхностные и потенциальные линии тока. Течение в пограничном слое направлено к стенке канала, наиболее близкой к центру его кривизны, т. е. если канал имитирует собой двойной ряд лопаток, то течение в пограничном слое направлено к подсазывающим поверхностям первого ряда лопаток. Благодаря смещению пограничного слоя происходит перераспределение количества движения в основном течении. Поперечные течения являются важным фактором для отрыва трехмерных потоков такого типа.

Аналогичный случай влияния поперечного течения на отрыв потока изучен Лузом [5]. Он точно рассчитал ламинарный пограничный слой несжимаемой жидкости, создаваемый на плоской пластине течением, линии тока которого параллельны плоскости пластины и имеют параболическую форму в этой плоскости. Вихревой невозмущенный поток имеет постоянную скорость, направленную по нормали к пластине. Эта ситуация подобна встречающейся в некоторых задачах о течении жидкости около лопаток турбомашин. Обозначая через  $\vartheta$  угол между направлением невозмущенного потока и нормалью к передней кромке в произвольной точке, а через  $\vartheta_0$  — соответствующее значение при  $x = 0$ , Луз установил, что при  $\vartheta_0 > 0$  отрыв не возникает, поскольку градиент

давления является благоприятным, однако если угол  $\vartheta_0$  достаточно велик, то под действием положительного градиента давления в области  $\vartheta_0 < \vartheta < 0$  при отсутствии поперечного течения поток отрывается. Однако в действительности поперечное течение существует и его благоприятное влияние предупреждает отрыв потока даже при значительном положительном градиенте давления.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ

Введение в отрыв трехмерного потока (гл. I) основано на концепции поверхностной линии тока (которую Маскелл назвал предельной линией тока). Займемся дальнейшим рассмотрением отрыва трехмерного потока, опираясь, в частности, на статьи Хоурта [6] и Маскелла [7].

В трехмерном потоке присоединение столь же существенно, как и отрыв, и из уравнения неразрывности можно ожидать, что в общем случае присоединение и отрыв имеют место вдоль некоторых линий на поверхности (хотя эти линии могут вырождаться в точку). Пограничный слой начинает развиваться от линии присоединения и продолжается до линии отрыва.

Граничные условия на стенке имеют вид  $u = v = w = 0$  при  $z = 0$ , где  $z$  — координата, перпендикулярная поверхности. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z=0} = 0.$$

Если  $z = h$ , где  $h$  бесконечно мало, то

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 h + O(h^2),$$

$$v = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 h + O(h^2),$$

$$w = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 h + O(h^2) = - \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \right\} h + O(h^2) = O(h^2).$$

Если  $(\partial u/\partial z)_0$  и  $(\partial v/\partial z)_0$  не являются одновременно исчезающе малыми величинами, т. е., за исключением случаев особых точек, выполняется соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w}{q} = 0$$

(где  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$  параллельна стенке), согласно которому поверхностная линия тока в любой обыкновенной точке твердой поверхности касательна к поверхности в этой точке. Можно классифицировать два случая отрыва трехмерного потока.

1. Отрыв потока, исключаящий одновременное обращение в нуль  $(\partial u/\partial z)_0$  и  $(\partial v/\partial z)_0$ .

В этом случае направление поверхностной (предельной) линии тока выражается в виде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 / \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0$$

Постулируется, что при отрыве от поверхности трехмерного тела существуют две области течения, сопрягающиеся вдоль некоторой линии  $L$ , и что поверхность имеет единственную касательную плоскость вдоль  $L$  и во всех точках в окрестности  $L$ .

Если в этих областях не происходит взаимопроникания течений вдоль  $L$ , то

$$\left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)_0 / \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)_0 / \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)_0,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум областям.

Некоторое представление о поведении потока вблизи линии  $L$  можно получить из рассмотрения обтекания наклонного кругового цилиндра [8]. Как будет показано в разд. 3.2, уравнения пограничного слоя (1) и (2), приведенные в этом разделе, не содержат ни  $v$ , ни  $y$ . Следовательно, эти уравнения такие же, как и в двумерном случае, и поэтому поведение отрыва почти полностью определяется этими двумя уравнениями двумерного течения. Уравнение количества движения (3), разд. 3.2, относительно  $v$  определяет составляющую поверхностного трения, параллельную образующей цилиндра, что дает ненулевую постоянную вдоль образующей [6].

Как упоминалось в гл. II, Хоуарт [9] рассчитал отрыв ламинарного двумерного потока, используя линейный профиль скорости  $u_e = b_0 - b_1 x$ . Решение для такого распределения скорости [6] имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_0 \propto (s-x)^{1/2}$$

и  $v \propto (s-x)^{-1/2}$  для всех точек поверхности, где  $s$  — абсцисса точки отрыва. Выше по потоку от точки отрыва при малом и положительном значении  $(s-x)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_0 = A (s-x)^{1/2},$$

где  $A$  — положительная постоянная. Вблизи  $x = s$  из уравнения (3) находим

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_0 = B,$$

где  $B$  — также положительная постоянная. Следовательно, одна из поверхностных линий тока является особой

$$(a) \quad x = s,$$

а остальные выражаются в виде

$$(б) \quad \frac{dx}{A(s-x)^{1/2}} = \frac{dy}{B},$$

или

$$(s-x)^{1/2} = \frac{A}{2B}(y_0 - y),$$

где  $y$  — расстояние, измеренное вдоль оси цилиндра, а  $y_0$  — произвольная постоянная.

Таким образом, как видно из гл. I (фиг. 31), через любую точку  $P$  особой линии (а) проходит одна линия тока из семейства (б), причем эти линии являются касательными к (а) в точках, из которых они исходят.

Жидкость, поступающая к  $L$  с обеих сторон, по достижении  $L$  отрывается от поверхности, и затем эти линии тока образуют поверхность отрыва  $E$ . Линии тока на поверхности отрыва  $E$  вначале касаются линии  $L$ .

2. Отрыв потока при одновременном обращении в нуль  $(\partial u/\partial z)_0$  и  $(\partial v/\partial z)_0$ .

В этом случае  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w}{q} \neq 0$ , и поэтому поверхностная линия тока наклонена к границе. Кроме того, так как  $(\partial v/\partial z)_0 / (\partial u/\partial z)_0 = 0/0$  — неопределенность, то две или более поверхностных линий тока могут достигать особой точки  $S$  независимо и с различными направлениями.

Как показано на схеме Маскелла [7, фиг. 4] и фиг. 34 гл. I, точка  $S$  может лежать на линии  $L$ , и в этом случае в этой точке пересекаются две поверхностные линии тока, либо  $S$  — изолированная точка, и в ней встречается бесконечное число поверхностных линий тока. Обращаясь к случаю задней кромки с исчезающим углом (фиг. 4), где  $L$  — линия излома, или особая линия поверхности, видим, что поверхности  $C_1$  и  $C_2$ , разделяемые линией  $L$ , являются верхней и нижней поверхностями профиля. Рассмотрим некоторую произвольную точку  $A$  на линии  $L$ , которая не обязательно является общей линией тока поверхностей  $C_1$  и  $C_2$ . В точке  $A$  возможны следующие случаи (фиг. 4):

$$(a) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_0$$

одновременно не обращаются в нуль ни в области  $C_1$ , ни в области  $C_2$ ;

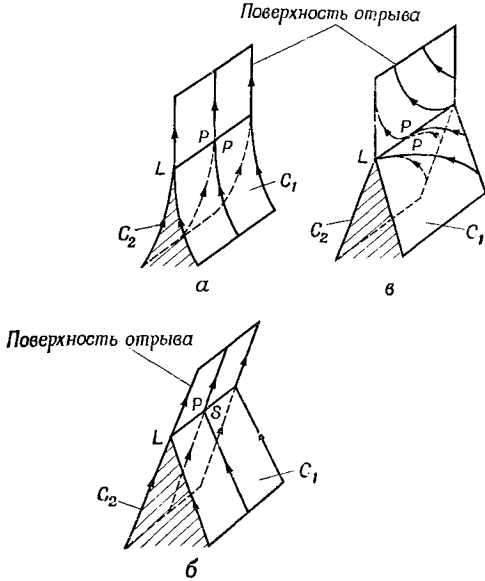
$$(б) \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)_0 = 0, \quad \text{но ни } \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)_0, \quad \text{ни } \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)_0$$



одновременно в нуль не обращаются.

$$(e) \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)_0 = 0.$$

В случае (a) разделяющая линия тока отрывного течения, проходящая через точку A, должна быть касательной к каждой из



Ф и г. 1. Примеры отрыва потока с задней кромки [7].

→ — Предельные и разделяющие линии тока; S — особая точка; P — обыкновенная точка.

поверхностей  $C_1$  и  $C_2$ . Если кромка имеет исчезающий угол, то разделяющая линия тока, проходящая через точку A, должна только располагаться в общей касательной плоскости и не обязательно касаться L. Если же кромка имеет конечный угол, то разделяющая линия тока будет касательной в точке A, только при условии касания линии L, являющейся как бы линией поверхности.

В случае (б) разделяющая линия тока должна быть касательной к поверхности  $C_2$ , но может иметь наклон относительно поверхности  $C_1$ .

Наконец, в случае (e) разделяющая линия тока не должна касаться этих поверхностей.

Отрыв двумерного потока представляет собой частный случай трехмерного течения. Из сказанного ясно, что отрыв двумерного потока изучен довольно подробно, тогда как проблема отрыва

трехмерного потока еще недостаточно понята и нуждается в дальнейших исследованиях.

Так как интенсивность поперечного течения при отрыве может оказаться существенной, при рассмотрении отрыва трехмерного потока необходимо также принимать во внимание влияние этого течения.

Недавно Эйхельбреннер [10] исследовал теоретически и экспериментально сложные трехмерные течения несжимаемой жидкости в пограничном слое, включая отрыв и последующее присоединение.

Хороший обзор проблем трехмерного пограничного слоя, включая отрыв, содержит работа [11].

### 3. ОТРЫВ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ И ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ

Рассмотрим проблему отрыва ламинарного потока на теле вращения и треугольном крыле.

Отрыв потока на сфере является классической проблемой. изученной теоретически и экспериментально. Экспериментально определенный коэффициент сопротивления сферы

$$C_D = (\text{полное сопротивление}) / \left( \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2 A_{\text{макс}} \right)$$

составляет около 0,44 при ламинарном режиме течения ( $2 \cdot 10^3 < \text{Re}_d < 2 \cdot 10^5$ ).

Значение  $C_D$  для сферы примерно вдвое меньше соответствующего значения для кругового цилиндра. Этот факт можно установить из рассмотрения распределения статического давления. Распределение статического давления по сфере и цилиндру, приведенное в разд. 1 гл. I, показывает, что различие между распределениями статических давлений по теории потенциального течения и при обтекании вязкой жидкостью для сферы меньше, чем для кругового цилиндра, что в результате приводит к меньшему полному сопротивлению.

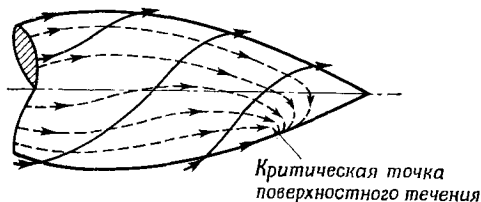
Точка отрыва ламинарного потока на сфере располагается при  $\varphi \approx 83,5^\circ$  [12]. Это значение почти совпадает с соответствующим значением для кругового цилиндра.

Картина линий тока около трехмерного тела состоит из линий тока внешнего течения и поверхностных линий тока, которые могут отличаться по направлению. На фиг. 2 показаны эти два семейства линий тока около тела вращения под малым углом атаки, рассчитанные Нонвейлером [13]. Кроме того, на фиг. 3 показаны результаты визуализации течения около оживала под углом атаки. (Для визуализации течения применялось молоко.) Как упоминалось в гл. I, поверхностная линия тока определяется как кривая, направление которой всюду совпадает с направлением

убывающей до нуля скорости жидкости на поверхности; эта кривая задается уравнением

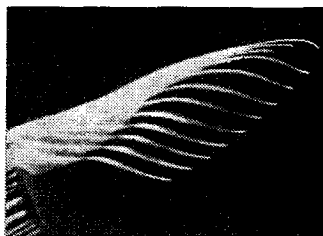
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{v}{u} \right).$$

Как показано на фиг. 2, окружная составляющая скорости потока меняет знак на хвостовой части тела, где образуется пара вихрей в поперечном течении. Продольная составляющая также меняет знак на подветренной стороне тела в плоскости симметрии. Следовательно, на поверхностной линии тока на нижней стороне тела образуется узловая точка, в которой местное поверхностное



Фиг. 2. Схема течения около тела вращения при малом угле атаки (расчетные данные) [13].

— линии тока внешнего течения; --- поверхностные линии тока.



Фиг. 3. Обтекание оживала при большом угле атаки. Визуализация двух вихрей на верхней поверхности (данные ONERA).

трение обращается в нуль. Кроме того, вблизи этой точки происходит отрыв потока и в область следа сходят вихри. Значительно меньшее число работ посвящено отрыву ламинарного потока на телах вращения, чем отрыву на двумерных телах, однако между осесимметричным и двумерным пограничными слоями существует связь, выражаемая преобразованием Манглера [14]. С помощью этого преобразования решение уравнений для двумерных течений можно использовать для осесимметричных течений.

### 3.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАНГЛЕРА

Для потока, направленного вдоль оси тела вращения, Больце [15] вывел основные дифференциальные уравнения течения в криволинейной системе координат:  $x$  — длина меридиана, отсчитываемая от передней критической точки,  $y$  — длина по нормали к контуру. Контур тела вращения задается радиусом  $r(x)$  сечения тела по нормали к оси (фиг. 4). Вводится предположение об отсутствии острых углов контура, так что  $d^2r/dx^2$  нигде не становится

слишком большой величиной. Затем записываются уравнения движения, неразрывности и энергии для установившегося осесимметричного течения жидкости

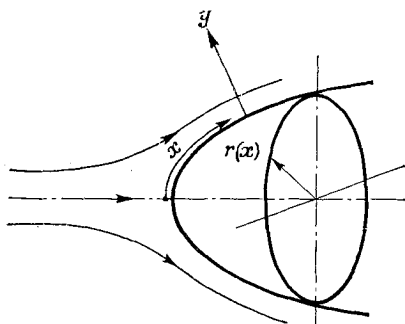
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0,$$

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] - u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

с граничными условиями

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } u = u_e \text{ при } y = \infty.$$

Но для двумерного установившегося течения жидкости уравнения движения, неразрывности и энергии имеют вид



$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$

$$\bar{\rho} c_p \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] - \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\mu} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2$$

Ф и г. 4. Обтекание тела вращения.

с граничными условиями  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  при  $\bar{y} = 0$  и  $\bar{u} = \bar{u}_e$  при  $\bar{y} = \infty$ .

Характеристики двумерного течения отмечены чертой сверху в отличие от характеристик осесимметричного течения. Нетрудно заметить, что уравнения для осесимметричного и двумерного течений одинаковы, за исключением уравнений неразрывности. Манглер [14]<sup>1)</sup> ввел преобразования

$$\bar{x} = \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2(x) dx, \quad \bar{y} = \frac{r(x)}{L} y,$$

устанавливающие связь между скоростями  $\bar{u} = u$ ,

$$\bar{v} = \frac{L}{r} \left( v + \frac{dr}{dx} \frac{yu}{r} \right), \text{ а также } \bar{p}(x) = p(x),$$

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y), \quad \bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(x, y), \quad \bar{\mu}(\bar{x}, \bar{y}) = \mu(x, y),$$

где  $L$  — постоянная с размерностью длины. С помощью этих преоб-

<sup>1)</sup> Ранее это было сделано Е. И. Степановым в работе «Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией», ПММ, XI, № 1 (1947). — Прим. ред.

разований можно перейти от уравнений движения и неразрывности установившегося осесимметричного ламинарного течения к соответствующим уравнениям для двумерного течения, и наоборот. Если  $u$  и  $v$  — известные функции  $x$  и  $y$ , то  $u$  и  $v$  вычисляются с помощью преобразования при соответствующих  $x$  и  $y$ . Преобразование Манглера применимо только для ламинарного течения и непригодно для турбулентного [16]. Однако оно справедливо для пограничных слоев в газе, а также для теплового ламинарного пограничного слоя [17]. Отрыв ламинарного осесимметричного потока можно рассчитать, преобразуя решение Гёртлера для двумерного ламинарного течения с помощью преобразования Манглера [18, 19]. Часто критерий отрыва двумерного потока применяют для тел вращения; однако с ростом толщины тела вращения справедливость этого критерия становится сомнительной.

Например, отрыв ламинарного потока происходит в том сечении тела вращения, где удовлетворяется следующий критерий [20]:

$$\frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial x} = -0,090.$$

Однако точность расчета отрыва по этому критерию в случае сфероида падает с ростом его относительной толщины (отношение толщины к хорде), поскольку предположение о невязком течении становится все более ошибочным при приближении к области отрыва.

Для осесимметричных течений задача отрыва решается на основе уравнений пограничного слоя, как в случае двумерных течений около тел с плавным контуром. Вследствие этого для тел с изломами образующей предыдущий анализ непригоден.

### 3.2. ОТРЫВ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА НА ЦИЛИНДРЕ ПОД УГЛОМ СКОЛЬЖЕНИЯ

Отрыв ламинарного потока на стреловидных крыльях представляет собой важный случай отрыва трехмерного потока. В качестве первого шага к исследованию этих проблем Сирс [8] рассмотрел отрыв ламинарного потока на цилиндре конечной длины под углом скольжения<sup>1)</sup>. Он использовал систему криволинейных координат  $x$  и  $z$  (фиг. 5), применяемую при описании поперечного обтекания цилиндра двумерным потоком. Третья координата  $y$ , направленная параллельно оси цилиндра, вводится дополнительно.

Принимая направления составляющих вектора скорости  $u$ ,  $v$  и  $w$  параллельными осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно, упростим уравнения Навье — Стокса, применяя метод Прандтля оценки порядков величин:

<sup>1)</sup> Раньше эта задача была решена В. В. Струминским (ДАН СССР, 54, № 7, 1946).

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2)$$

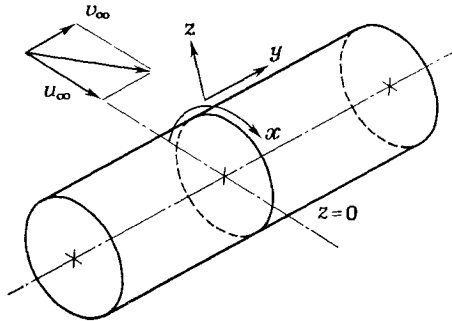
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Опустим далее члены  $\partial u/\partial t$  и  $\partial v/\partial t$ , так как в этой главе рассматриваются только установившиеся течения. Уравнения (1).

(2) и (4) не содержат ни  $v$ . ни  $y$ , поэтому они точно такие же, как и в двумерном случае. Следовательно, можно сказать, что задача об обтекании цилиндра под углом скольжения, представленная этими тремя уравнениями и граничными условиями, аналогична задаче о поперечном обтекании такого же цилиндра двумерным потоком. Таким образом, решение задачи об отрыве двумерного потока при поперечном



Ф и г. 5. Система координат [8].

обтекании цилиндра можно непосредственно применить к случаю отрыва потока на цилиндре под углом скольжения. Составляющая скорости вдоль цилиндра  $v$  может быть вычислена путем интегрирования линейного уравнения. Если теперь ввести безразмерные переменные

$$\begin{aligned} u &= u_{\infty} \cdot f(\xi, \eta), \\ v &= v_{\infty} \cdot g(\xi, \eta), \\ w &= u_{\infty} \operatorname{Re}^{-1/2} \cdot h(\xi, \eta), \end{aligned}$$

где  $\xi = x/L$ ,  $\eta = \operatorname{Re}^{1/2} \cdot z/L$ ,  $\operatorname{Re} = u_{\infty} L/\nu$  и  $L$  — характерный размер, то число членов в системе уравнений (1) — (4) уменьшится и она примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \eta} &= 0, \\ f \frac{\partial f}{\partial \xi} + h \frac{\partial f}{\partial \eta} &= -\frac{\partial p'}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

$$f \frac{\partial g}{\partial \xi} + h \frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta} = 0,$$

где  $p' = p/\rho u_\infty^2$ .

Если за критерий отрыва от поверхности компоненты течения, направленной вдоль хорды, принять  $\partial f/\partial \eta = 0$  при  $\eta = 0$  или  $\partial u/\partial z = 0$  при  $z = 0$ , то из этих упрощенных уравнений пограничного слоя для бесконечно длинного цилиндра под углом скольжения следует, что критерий отрыва ламинарного потока не меняется; следовательно, можно утверждать, что положение точки отрыва не зависит от угла скольжения. В связи с этим напомним, что в гл. II было показано, что положение точки отрыва ламинарного потока не зависит от числа Рейнольдса. Сирс рассчитал положение точки отрыва ламинарного потока для установившихся двумерных течений с распределением скорости течения выше точки отрыва в виде

$$u_e = u_\infty (\xi - \xi^3).$$

Используя критерий отрыва

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0,$$

находим положение точки отрыва при  $\xi = x/L = 0,69$ . Здесь  $L$  — характерный размер, равный расстоянию между точками, где  $u_e(x) = 0$ , а  $u_\infty$  — величина, пропорциональная (но не обязательно равная) скорости невозмущенного потока. Так как двумерное установившееся потенциальное течение можно задать в виде  $u_e(x) = a_1 x + a_3 x^3$ , параметры  $a_1$  и  $a_3$  можно определить «подгонкой»  $u_e(x)$  к заданному распределению скорости на разных цилиндрах, что делает решение более общим.

Наконец, были рассчитаны линии тока потенциального течения и линии тока на поверхности цилиндра под углом скольжения (фиг. 6).

Масштабы графика линий тока (фиг. 6) выбраны произвольно, чтобы сделать явным различие между линиями тока потенциального течения и поверхностной линией тока на трехмерном теле, не задавая ни отношения  $v_\infty/u_\infty$ , ни отношения  $u_\infty$  к нормальной составляющей скорости набегающего потока.

Приближенное решение для ламинарного пограничного слоя на крыле бесконечного размаха (фиг. 7) можно получить с помощью простого обобщения метода Кармана — Польгаузена [21].

Уравнения пограничного слоя Навье — Стокса для установившегося течения жидкости около бесконечно длинного цилиндра

под углом скольжения имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Уравнение неразрывности записывается следующим образом:

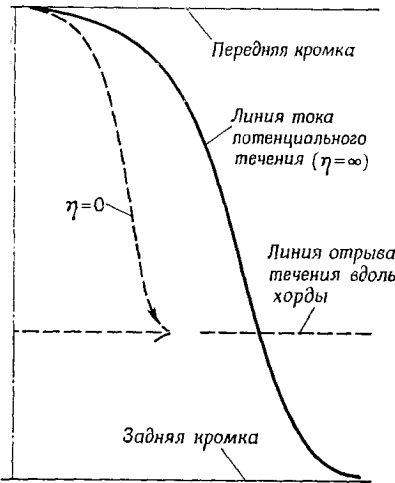
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

С использованием степенных рядов Кармана — Польшаузена профиль скорости можно представить в виде

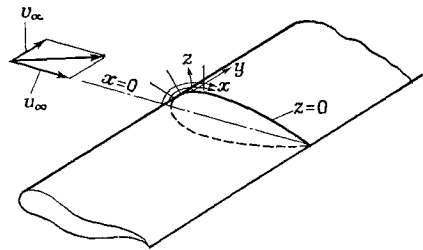
$$\frac{u}{u_\infty} = A_0 + A_1 \left(\frac{z}{\delta_x}\right) + A_2 \left(\frac{z}{\delta_x}\right)^2 + A_3 \left(\frac{z}{\delta_x}\right)^3 + A_4 \left(\frac{z}{\delta_x}\right)^4 \quad (0 \leq z \leq \delta_x), \quad (9)$$

где  $\delta_x$  — толщина пограничного слоя, соответствующая составляющей вектора скорости, направленной по хорде, коэффициенты

$A_0, A_1, \dots$  — функции только  $x$ ; они определяются из условия удовлетворения граничным условиям и уравнению (6). Толщина пограничного слоя  $\delta_x$  вычисляется затем из условия удовлетворения уравнениям (5) и (8). Чтобы удовлетворить уравнению (7), метод



Ф и г. 6. Линия тока потенциального течения и поверхностная линия тока при обтекании цилиндра под углом скольжения [8].



Ф и г. 7. Система координат [21].

Польшаузену обобщается с использованием выражения

$$\frac{v}{v_e} = B_0 + B_1 \left(\frac{z}{\delta_y}\right) + B_2 \left(\frac{z}{\delta_y}\right)^2 + B_3 \left(\frac{z}{\delta_y}\right)^3 + B_4 \left(\frac{z}{\delta_y}\right)^4 \quad (0 \leq z \leq \delta_y), \quad (10)$$



где  $v_e$  — местное значение составляющей скорости потенциального течения по размаху;  $\delta_y$  — толщина пограничного слоя, соответствующая этой составляющей скорости. Коэффициенты  $B_0, B_1, \dots$  определяются с помощью граничных условий

$$z = 0, \quad v = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$z = \delta_y, \quad v = v_e, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Тогда уравнение (10) сводится к виду

$$\frac{v}{v_e} = 2 \left( \frac{z}{\delta_y} \right) - 2 \left( \frac{z}{\delta_y} \right)^3 + \left( \frac{z}{\delta_y} \right)^4 \quad (0 \leq z \leq \delta_y). \tag{11}$$

Составляющая градиента давления по размаху крыла бесконечно-го размаха равна нулю, т. е. отрыв потока в направлении размаха может и не возникать. Если воспользоваться уравнением (11), этот факт выражается в виде  $\partial v / \partial z \neq 0$  при  $z = 0$ . Интегрируя уравнение (7) по  $z$ , получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_y} u (v - v_e) dz = -v \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} \tag{12}$$

Если значения  $u$  и  $v$  из уравнений (9) и (11) подставить в (12) и проинтегрировать, то для  $\xi = \delta_x / \delta_y$  можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение.

Для  $\xi \leq 1$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2 \frac{\xi}{\lambda} - A \left( 1 + \frac{u_e}{du_e/dx} \cdot \frac{d\delta_x/dx}{\delta_x} \right) - C \frac{u_e}{du_e/dx}}{B \left( \frac{u_e}{du_e/dx} \right)},$$

для  $\xi \geq 1$  и  $\delta_y \leq \delta_x$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2 \frac{\xi^3}{\lambda} - \alpha \left( 1 + \frac{u_e}{du_e/dx} \cdot \frac{d\delta_x/dx}{\delta_x} \right) - \gamma \frac{u_e}{du_e/dx}}{\beta \left( \frac{u_e}{du_e/dx} \right)},$$

} (13)

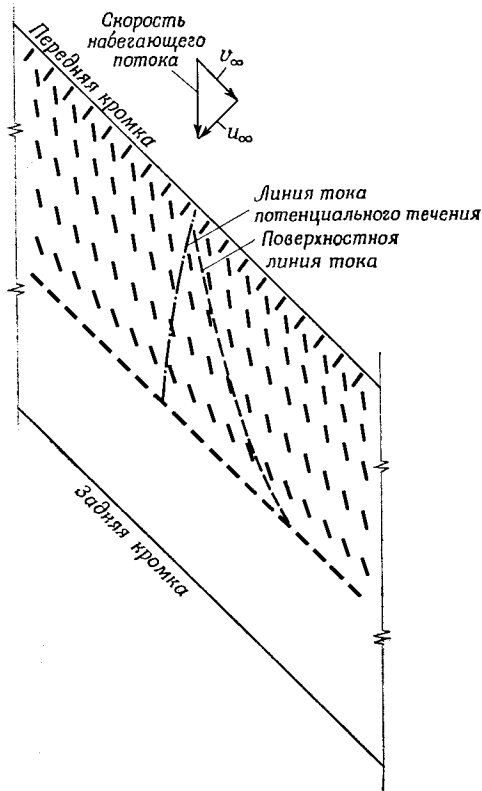
где

$$\lambda = \frac{du_e}{dx} \frac{\delta_x^2}{v},$$

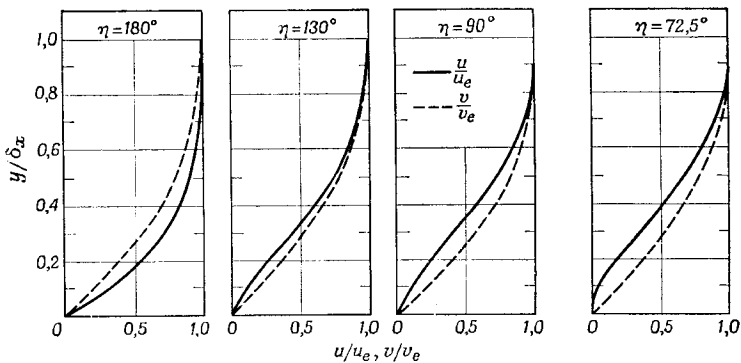
$$A = 0,3\xi^{-1} + D_1 - D_2\xi + D_3\xi^3 - D_4\xi^4,$$

$$B = -0,3\xi^{-2} - D_2 + 3D_3\xi^2 - 4D_4\xi^3,$$

$$C = \frac{dD_1}{dx} - \frac{dD_2}{dx} \xi + \frac{dD_3}{dx} \xi^3 - \frac{dD_4}{dx} \xi^4,$$



Ф и г. 9. Вид в плане на линию тока потенциального течения и поверхностную линию тока, а также спектр обтекания крыла с углом стреловидности  $45^\circ$  [21].



Ф и г. 10. Распределение составляющих скорости по хорде и размаху при различных значениях  $\eta$  (обозначение на фиг. 8) [21].

$$D_1 = \sum_{i=1}^4 \{A_i/(i+1)\} - 1,$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^4 \{2A_i/(i+2)\} - 1,$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^4 \{2A_i/(i+4)\} - \frac{1}{2},$$

$$D_4 = \sum_{i=1}^4 \{A_i/(i+5)\} - \frac{1}{5}$$

и

$$\alpha = 0,06667A_1 + 0,02381A_2\xi^{-1} + 0,01072A_3\xi^{-2} + 0,00556A_4\xi^{-3},$$

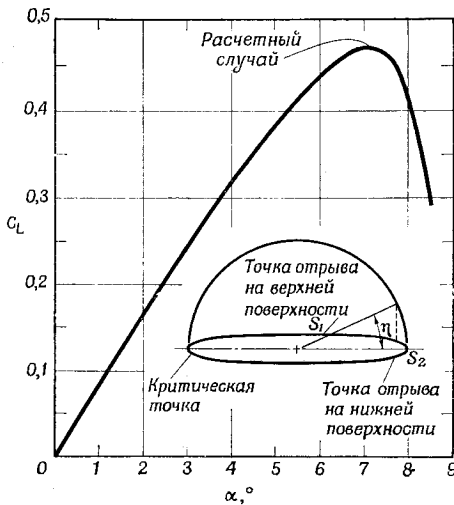
$$\beta = -(0,13334A_1\xi^{-1} + 0,07143A_2\xi^{-2} + 0,04288A_3\xi^{-3} + 0,02780A_4\xi^{-4}),$$

$$\gamma = 0,06667 \frac{dA_1}{dx} + 0,02381 \frac{dA_2}{dx} \xi^{-1} + 0,01072 \frac{dA_3}{dx} \xi^{-2} + 0,00556 \frac{dA_4}{dx} \xi^{-3}.$$

Численные расчеты отношений  $u/u_e$  и  $v/v_e$  и предельной линии тока были выполнены для ламинарного течения около бесконечно

длинного эллиптического цилиндра с отношением большой оси к малой  $b : 1$ , расположенного под углом атаки  $7^\circ$  относительно  $u_\infty$ , что соответствует максимальному значению коэффициента подъемной силы (фиг. 8). Результаты интегрирования уравнения (13) с использованием  $\eta$  в качестве независимой переменной и с применением метода изоклин приведены на фиг. 9 и 10.

На проекции крыла с углом стреловидности  $45^\circ$  в плане (фиг. 9) изображена поверхностная линия тока при  $z = 0$ , указывающая на сильное направленное наружу течение в пограничном слое, и показана для сравнения линия тока потенциального течения. Направленное наружу течение более интенсивно, чем в случае кругового



Ф и г. 8. Коэффициент подъемной силы эллиптического цилиндра [21].

направления течения более интенсивно, чем в случае кругового

цилиндра, рассмотренного Сирсом, главным образом благодаря большому градиенту давления. На фиг. 10 показаны результаты расчетов отношений  $u/u_e$  и  $v/v_e$  в зависимости от  $y/\delta_x$ . Уайльд установил, что составляющая скорости по размаху не влияет на отрыв, подъемную силу или переход ламинарного течения в турбулентное на крыле бесконечного размаха.

Следуя анализу Сирса и Уайльда, Ротт и Крэбтри [22] рассчитали поверхностную линию тока на круговом цилиндре под углом скольжения по уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_y}{\tau_x} = \frac{0,225}{(\theta_y/\theta_x) l_x} \cdot \frac{v_e}{u_e},$$

где

$\theta_x = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dz$  — толщина потери импульса пограничного слоя в направлении хорды;

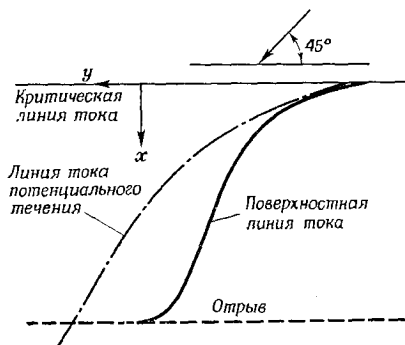
$\theta_y = \int_0^{\infty} \frac{v}{v_e} \{1 - (v/v_e)\} dz$  — толщина потери импульса пограничного слоя в направлении размаха;

$v_e$  — составляющая вектора скорости по размаху за пределами пограничного слоя;

$l = \tau / (\mu_e u_e / \theta_x)$  — безразмерный параметр поверхностного

трения;  $l_x$  — составляющая  $l$  в направлении хорды. Ротт и Крэбтри определяли положение отрыва ламинарного потока по условию  $l = 0$ . Непосредственно перед отрывом наклон линии тока на стенке резко возрастает при  $l_x \rightarrow 0$ .

Расчетные поверхностная линия тока и линия тока потенциального течения на круговом цилиндре под углом скольжения  $45^\circ$  показаны на фиг. 11. Эти расчетные кривые сравнивались с экспериментально определенными поверхностными линиями тока, полученными методом визуализации с использо-



Фиг. 11. Расчетные поверхностная линия тока и линия тока потенциального течения на круговом цилиндре, угол скольжения  $45^\circ$  [22].

ванием смеси керосина и ламповой сажи. Совпадение кривых удовлетворительное. Число Рейнольдса, рассчитанное по составляющей вектора скорости, нормальной к оси цилиндра, составляло  $\sim 20\,000$ , и течение было ламинарным.

На скользящем или стреловидном крыле очень большого удлинения отрыв потока рассчитывается по поперечной составляющей скорости независимо от продольного обтекания. В случае прямой стреловидности возрастает поверхность, занятая устойчивым ламинарным течением, и уменьшается подъемная сила, при которой наступает отрыв [23]. Например, в соответствии с теорией двумерного обтекания, если на крыле возникают обратные течения в пограничном слое и создается максимальная подъемная сила при  $C_L = 1,4$ , то при угле скольжения  $45^\circ$  возникает отрыв, сопровождаемый полностью развитым стеканием пограничного слоя в направлении размаха, при  $C_L = 0,7$ . При угле скольжения  $60^\circ$  коэффициент максимальной подъемной силы падает еще больше, почти до значения  $0,35$ .

### 3.3. ОТРЫВ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА НА КОНУСЕ ПОД УГЛОМ АТАКИ

Наглядным примером трехмерного течения может служить обтекание кругового конуса под углом атаки. В экспериментах с конусами с полууглами при вершине  $7,5$ ,  $12,5$  и  $40^\circ$ , проведенных в водяной трубе при значении числа Рейнольдса  $\sim 2,7 \cdot 10^4$ , вычисленного по длине конуса, был обеспечен ламинарный характер течения внутри пограничного слоя, оторвавшейся вихревой поверхности и ядра завихренности и измерены распределение давления, положение и интенсивность вихрей и угловая координата линий отрыва и присоединения [24].

Следует заметить, что отрыв ламинарного потока на круговом конусе приводит к образованию сравнительно устойчивых вихрей, направленных по потоку, в отличие от нерегулярного течения перемешивания со срывом вихрей (бафтинг) при отрыве двумерного потока. Кроме того, распределение давления по поверхности конуса под углом атаки при дозвуковых скоростях не является коническим, как при сверхзвуковых скоростях.

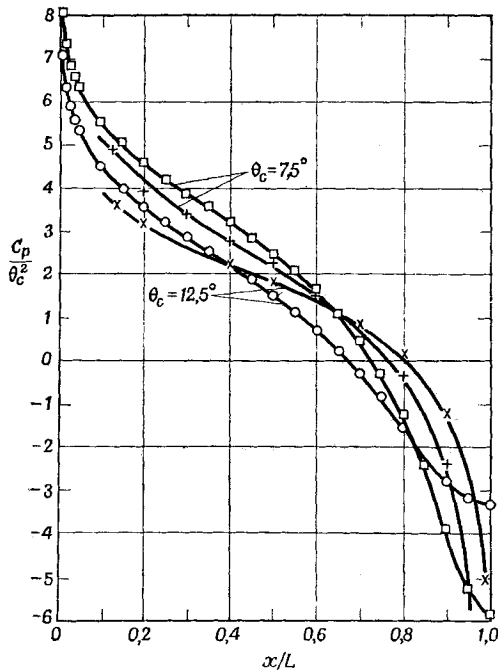
Картина образования вихрей зависит от величины относительного угла атаки  $\alpha/\theta_c$ , где  $\theta_c$  — полуугол при вершине конуса.

Распределение давления по поверхности в продольном направлении показано на фиг. 12, где  $x$  — расстояние от вершины вдоль оси конуса,  $L$  — длина конуса вдоль оси. Как видно из фиг. 12, распределение давления в продольном направлении с достаточной степенью точности можно рассчитать с помощью теории тонкого тела Лейтона [25]. Распределение давления в окружном направлении при  $\alpha/\theta_c = 3,0$  показано на фиг. 13. При этом значении относительного угла атаки возникают три вихря: первичный, вторичный и третичный (фиг. 14).

Рассмотрим картину образования вихрей в следующих трех интервалах значений  $\alpha/\theta_c$ :

1) Малые значения  $\alpha/\theta_c$  ( $\alpha/\theta_c \leq 0,6$ ).

Пограничный слой, нарастающий от линии растекания потока на нижней поверхности  $A_1$  ( $\varphi = 0^\circ$ ), не отрывается, но происходит накопление жидкости с малой энергией на верхней половине



Ф и г. 12. Распределение давления по поверхности конуса в продольном направлении при нулевом угле атаки [24].

○, □ теория [25]; ×, + эксперимент [26].

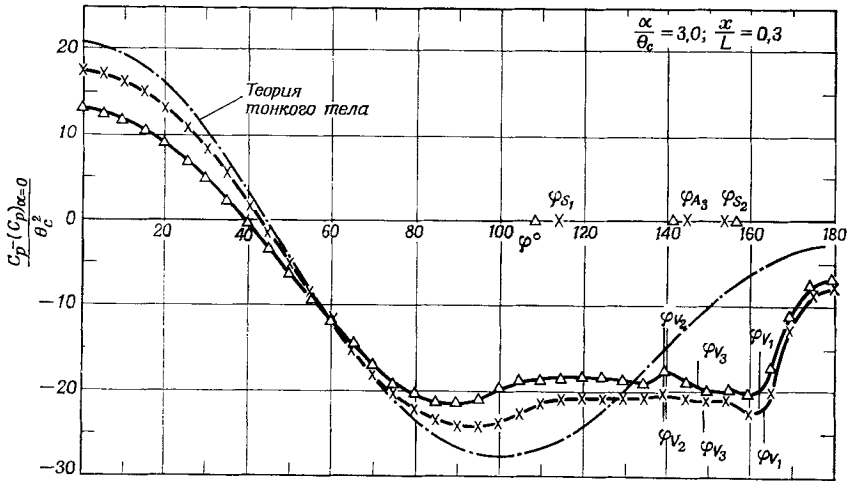
конуса, так что толщина пограничного слоя максимальна на верхней образующей ( $\varphi = 180^\circ$ ).

2) Умеренные значения  $\alpha/\theta_c$ .

$$0,6 < \alpha/\theta_c < 1,6 \quad \text{при} \quad \theta_c = 12,5^\circ,$$

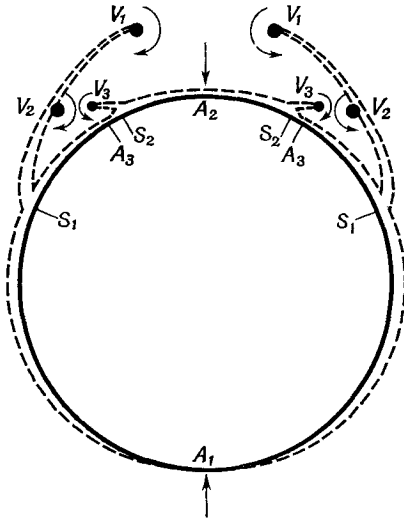
$$0,6 < \alpha/\theta_c < 2,2 \quad \text{при} \quad \theta_c = 7,5^\circ.$$

Зарождение отрыва можно ожидать при  $\alpha/\theta_c \approx 3/4$ , но первоначальные признаки отрыва потока до  $\alpha/\theta_c \approx 1,1$  очень слабы. При  $\alpha/\theta_c \approx 1,1$  и более вихревые поверхности, отделившиеся от поверхности конуса вдоль линии первичного отрыва  $S_1$ , свертываются, образуя симметрично расположенные первичные вихри  $V_1$  значительной интенсивности. Эти вихревые поверхности образованы не только жидкостью из пограничного слоя на нижней



Ф и г. 13. Распределение давления по поверхности конуса в окружном направлении [24, 26].

× конус 7,5°; Δ конус 12,5°. φ — меридиональный угол, отсчитываемый от наветренной образующей.



Ф и г. 14. Образование вихрей около конуса,  $\theta_c = 7,5^\circ$ ,  $\alpha/\theta_c = 3,5$  [24].  $V_1$  — первичный вихрь;  $V_2$  — вторичный вихрь;  $V_3$  — третичный вихрь;  $S_1$ ,  $S_2$  — линии отрыва первичного и вторичного потока;  $A_1$ ,  $A_2$  — наветренная и подветренная образующие;  $A_3$  — линии присоединения третичного течения.

поверхности конуса между  $A_1$  и  $S_1$ , но также жидкостью из пограничного слоя на поверхности между вторичной линией присоединения  $A_2$  ( $\varphi = 180^\circ$ ) и  $S_1$ .

3) Большие значения  $\alpha/\theta_c$ .

$$1,6 < \alpha/\theta_c < 3,5 \quad \text{при} \quad \theta_c = 12,5^\circ,$$

$$2,2 < \alpha/\theta_c < 5,5 \quad \text{при} \quad \theta_c = 7,5^\circ.$$

Пограничный слой на верхней поверхности, начинающийся от  $A_2$  ( $\varphi = 180^\circ$ ), отделяется вдоль линии  $S_2$ , и образовавшаяся таким образом вихревая поверхность свертывается в сравнительно слабый третичный вихрь  $V_3$ , направленный в противоположную сторону относительно первичного и вторичного вихрей. Эта вихревая поверхность также подпитывается жидкостью с противоположной стороны от линии  $S_2$  вследствие нарастания нового пограничного слоя (при возрастании  $\varphi$ ) выше третичной линии присоединения  $A_3$ . Пограничный слой на нижней поверхности, начиная от линии растекания  $A_1$ , отрывается вдоль линии первичного отрыва  $S_1$  и вместе с пограничным слоем ниже линии  $A_3$  (при уменьшении  $\varphi$ ) образует вихревую поверхность, которая свертывается в два вихря  $V_1$  и  $V_2$  одного знака. Первичный вихрь  $V_1$  возникает при умеренных значениях угла атаки, но вторичный вихрь  $V_2$  — новая особенность рассматриваемого поля течения. Вихри  $V_2$  и особенно  $V_3$  расположены близко к поверхности конуса и вызывают перетекание, необходимое для присоединения потока к линии  $A_3$ . Положения ядер завихренностей показаны на фиг. 15, интенсивность вихрей и размеры ядер завихренностей для конуса с полууглом  $7,5^\circ$  приведены на фиг. 16 и 17.

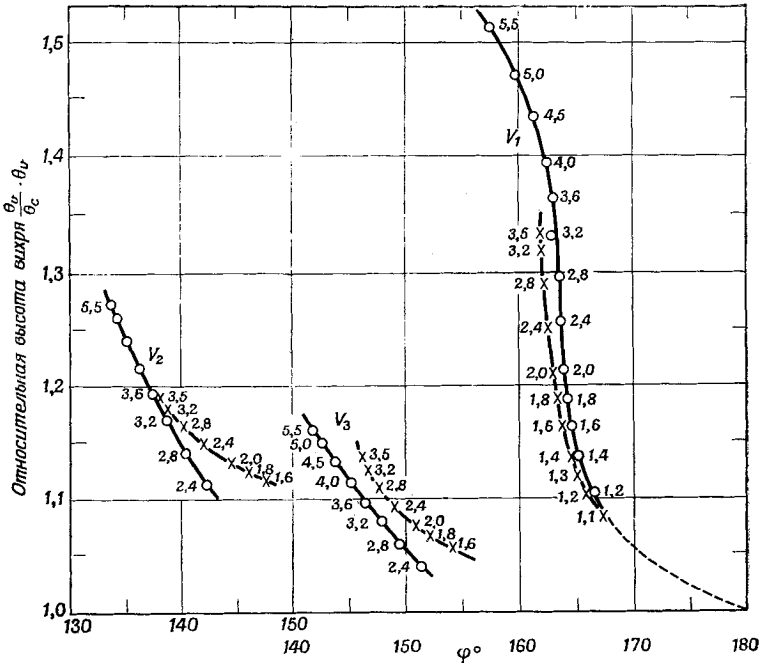
Размер ядра  $\theta_2$  и интенсивность вихря, определенная как  $\Gamma/U_2 x_2$  для первичного и вторичного вихрей, фактически постоянны вниз по потоку при заданном угле атаки. Интенсивность вторичного вихря составляет около 60% от интенсивности первичного вихря, но он ближе расположен к поверхности конуса, и поэтому его влияние на распределение давления столь же значительно, как и влияние первичного вихря. При больших углах атаки интенсивность всех вихрей возрастает с увеличением угла атаки по линейному закону.

Авдеевский и Медведев [27] экспериментально исследовали обтекание конусов при числах Маха 2,1, 3,6 и 6,0 в интервале чисел Рейнольдса от  $10^5$  до  $10^6$ . Полууглы при вершине конусов составляли 5, 10, 15, и  $30^\circ$ . На фотографиях, полученных с помощью высокоскоростной съемки, видно формирование вихрей на подветренной стороне конуса при наличии внутренних скачков уплотнения в сжатом слое.

Разработаны приближенные методы расчета отрыва ламинарного трехмерного пограничного слоя в предположении о малости поперечного течения [28—30].



Все эти методы опирались на уравнение количества движения в направлении потока, но различались между собой выбором профилей скорости, включающих некоторый дополнительный параметр, связанный с поперечным течением, хотя для основного потока использовалось однопараметрическое семейство профилей.

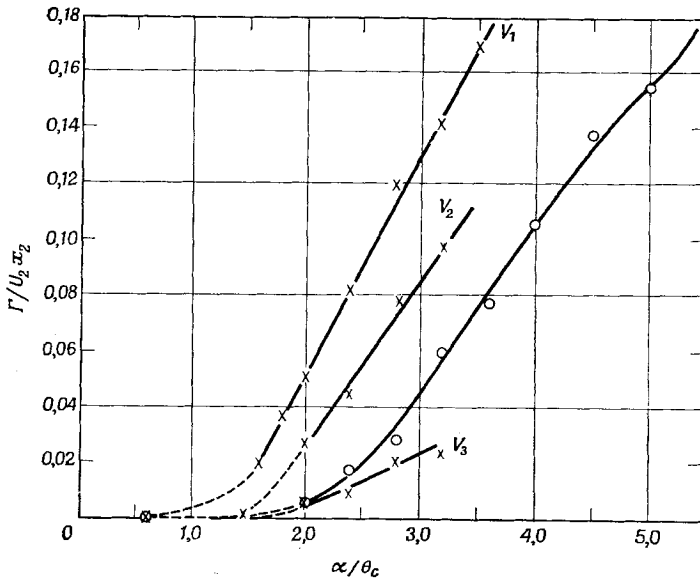


Ф и г. 15. Положения ядер завихренностей при различных значениях  $\alpha/\theta_c$  [24].

$\theta_v$  — сферическая координата оси вихря;  $\circ$  конус  $7,5^\circ$ ;  $\times$  конус  $12,5^\circ$ .

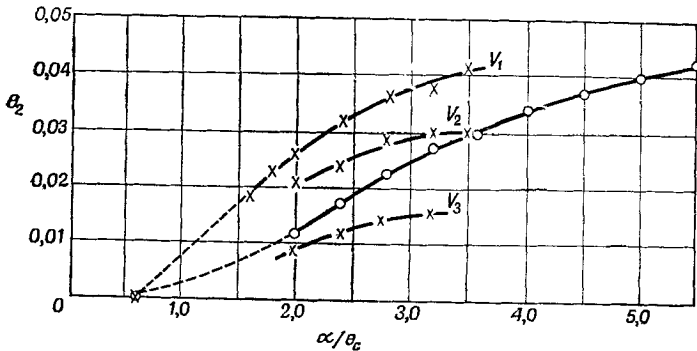
Так как при отрыве поперечное течение не является слабым, эти приближенные методы позволяли осуществить лишь грубую оценку положения отрыва. Однако, если поверхностная линия тока внезапно изменяет направление, расчетное положение отрыва по этим методам может оказаться близким к действительному.

Кук [30], модифицировавший метод Заата, утверждает на основе сопоставления результатов, полученных этими тремя методами, что его метод наиболее удобен для применения. Кук [31] применил свой метод к расчету отрыва ламинарного несжимаемого потока на конусе под углом атаки с использованием полярной координаты  $r$  и угла  $\theta$  между рассматриваемой и некоторой фиксированной образующей, измеренной в плоскости развертки конуса. В предположении, что внешний



Ф и г. 16. Интенсивность вихря  $\Gamma/U_2x_2$  в зависимости от относительного угла атаки  $\alpha/\theta_c$  [24].

$\Gamma$  — циркуляция;  $U_2$  — составляющая скорости на оси вихря;  $x_2$  — расстояние между осью ядра и точкой, в которой свертывающаяся вихревая поверхность совершает полуоборот вокруг «ядра»;  $\circ$  конус  $7,5^\circ$  ( $V_1$ );  $\times$  конус  $12,5^\circ$  ( $V_1, V_2, V_3$ ).



Ф и г. 17. Размер ядра завихренности  $\theta_2$  в зависимости от относительного угла атаки  $\alpha/\theta_c$  [24].

$\circ$  конус  $7,5^\circ$  ( $V_1$ );  $\times$  конус  $12,5^\circ$  ( $V_1, V_2, V_3$ ).

поток конический, преобразованные уравнения неразрывности и количества движения численно интегрировались по методу Крэнка — Никольсона, описанного Холлом [32] и другими, при допустимых затратах машинного времени. Отрыв возникает в том месте, где угол  $\beta$  между поверхностными линиями тока и образующими обращается в нуль, и критерием отрыва служит величина  $\lambda = \alpha/\theta_c$ , где  $\alpha$  — угол атаки,  $\theta_c$  — полуугол при вершине конуса. Если при  $\lambda < 0,5$  отрыв не возникает вообще, то при  $\lambda = 0,5$  поток отрывается почти точно на подветренной образующей конуса. Поскольку характер особенности в месте отрыва известен из работы Брауна [33], положение отрыва определяется довольно точно путем простой экстраполяции теоретического решения (фиг. 18, 19).

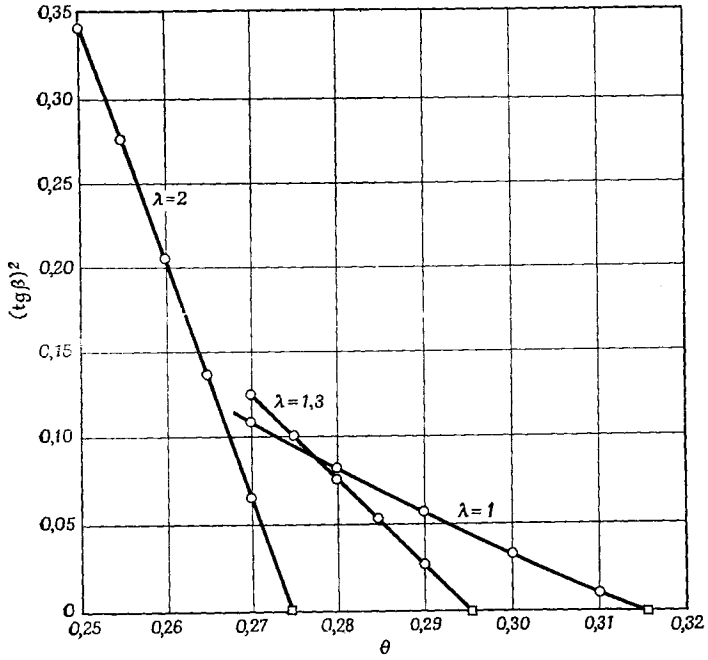
Из фиг. 19 видно, что расчетные и экспериментальные данные Рейнберда и др. [24] не согласуются между собой. По поводу такого расхождения следует заметить следующее: в расчетах использовалась величина внешнего давления, соответствующая теории тонкого тела, не учитывающей вихревых поверхностей, связанных с отрывом, тогда как использование действительного распределения давления может дать лучшее согласие между расчетом и экспериментом [31].

Недавно Кук [34] обобщил свой метод расчета течения несжимаемой среды около конуса под углом атаки [31] на случай ламинарного течения сжимаемой среды. Результирующие уравнения сходны с соответствующими уравнениями течения несжимаемой среды, но добавляется еще одно уравнение и вводятся небольшие изменения для учета влияния сжимаемости. Результаты численных расчетов положения отрыва на конусе с полууглом  $7,5^\circ$  при  $M_\infty = 3$  и 6 и  $\lambda = \alpha/\sin \theta_c = 1$  и 2 в случае отношения энтальпий у стенки и в набегающем потоке, равного 1 (охлаждаемая стенка), и в случае отсутствия теплопередачи представлены в табл. 1 и 2. Здесь  $\theta_{отр}$  — угол в плоскости развертки, при котором происходит отрыв. Из табл. 1 видно, что охлаждение слегка смещает положение отрыва, а из табл. 2 следует, что возрастание  $M_\infty$  не оказывает заметного влияния на положение отрыва. Несколько неожиданным

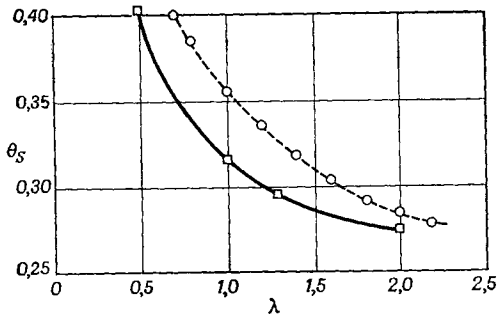
Таблица 1<sup>1)</sup>

$M_\infty$	$\lambda$	Стенка	$\theta_{отр}$	$M_\infty$	$\lambda$	Стенка	$\theta_{отр}$
3	1	Теплоизолированная	0,326	6	1	Теплоизолированная	0,353
3	1	Охлаждаемая	0,336	6	1	охлаждаемая	0,304

1) Из работы [34].



Ф и г. 18. Определение точки отрыва при  $\lambda = 1, 1.3, 2$  [31].  
 ○ расчетные точки; □ точки отрыва по результатам экстраполяции.



Ф и г. 19. Положения точки отрыва [31].  
 — расчет. - - - эксперимент.

Таблица 2<sup>1)</sup>

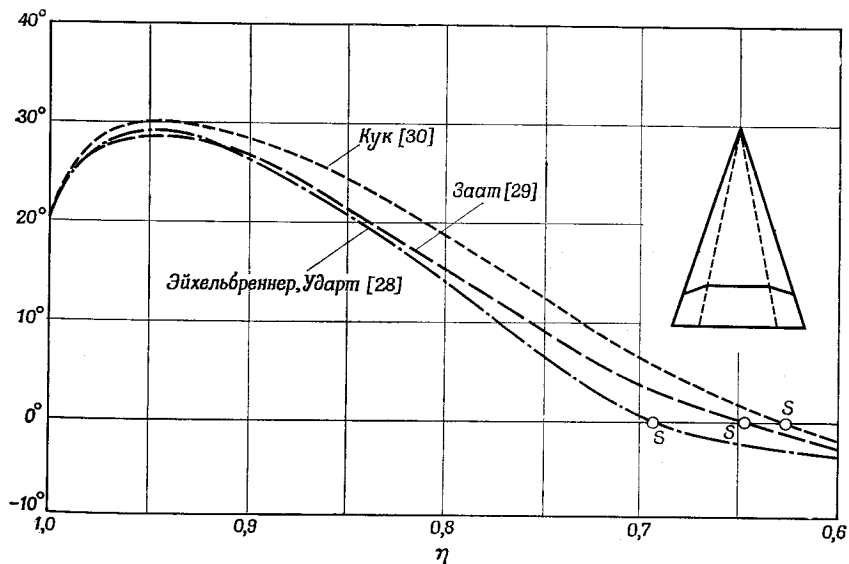
$M_\infty$	$\lambda$	Стенка	$\theta_{отр}$	$M_\infty$	$\lambda$	Стенка	$\theta_{отр}$
3	1	Теплоизолирован-	0,326	3	2	Теплоизолирован-	0,269
		ная				ная	
6	1	То же	0,353	6	2	То же	0,269

1) Из работы [34].

является результат, что в случае непрерывного положительного градиента давления при отсутствии теплопередачи отрыв начинается раньше при более высоком числе Маха. Причина, возможно, кроется в том, что с увеличением числа Маха возрастает градиент давления, вызывая усиление поперечного течения. Так как перед отрывом должно разрушиться сильное поперечное течение, это противодействует ожидаемой тенденции к более раннему отрыву.

#### 3.4. ОТРЫВ ПОТОКА НА ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ

Проблема отрыва потока на крыле малого удлинения с большой стреловидностью передней кромки является важной для



Ф и г. 20. Угол между поверхностями линиями тока и образующими поверхности треугольного крыла с конической круткой;  $n = 2$ ,  $\eta = 0,6$ ,  $C_L = 0,1$ ,  $\chi = 72^\circ$  [30].  
 $n$  — параметр распределения схода потока;  $\eta$  — положение образующей, за которой начинается крутка;  $\chi$  — угол стреловидности;  $S$  — точка отрыва.

современной аэродинамики. При обтекании треугольного крыла отрыв происходит там, где угол между поверхностной линией тока и образующей поверхности крыла обращается в нуль. Расчеты положения отрыва, выполненные Куком [30] для тонкого треугольного крыла с конической круткой и углом стреловидности передней кромки  $72^\circ$ , приведены на фиг. 20, где по определению  $\eta = (y/x) \operatorname{tg} 72^\circ$ , ось  $x$  направлена вдоль центральной хорды крыла, а ось  $y$  перпендикулярна оси  $x$ .

Угол между передней кромкой и центральной хордой равен  $18^\circ$ , а в месте отрыва угол  $\beta$  между линией тока потенциального течения и поверхностной линией тока составляет  $16^\circ$ . Согласно расчетам по трем методам, отрыв происходит при  $\eta = 0,625, 0,645$  и  $0,690$ , т. е. вдоль лучей, отстоящих от центральной хорды на  $11,5, 11,8$  и  $12,7^\circ$  соответственно. Отрыв потока по методу Кука происходит позже остальных, а по методу Эйхельбреннера и Ударта — раньше остальных. Теоретические исследования этой проблемы выполнены в работах [36—39]. Недавно Смит [40] усовершенствовал метод расчета отрыва с передней кромки треугольного крыла малого удлинения. Браун и Майк [41] использовали приближение тонкого тела из линеаризованной теории течений сжимаемой среды.

Отрыв потока на передней кромке будет рассмотрен в гл. IX. Для дальнейшего изучения этой проблемы рекомендуются работы [42—76], не ограниченные случаем ламинарного течения несжимаемой среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, ГИТТЛ М., 1957.
2. Hansen A. G., On Possible Similarity Solutions for Three-dimensional Incompressible Laminar Boundary Layer Flows over Developable Surfaces and with Proportional Main Stream Velocity Components, NACA TM 1437, Sept. 1958.
3. Senoo Y., Three-dimensional Laminar Boundary Layer in Curved Channel with Acceleration, *Trans. ASME*, 80, № 8, pp. 1721—1733 (Nov. 1958).
4. Maeger A., Three-dimensional Laminar Boundary Layer with Small Crossflow, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, № 12, pp. 835—845 (Dec. 1954).
5. Loos H., A Simple Laminar Boundary Layer with Secondary Flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 22, № 1, pp. 35—40 (Jan. 1955).
6. Howarth L., Laminar Boundary Layers, *Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics)*, ed. S. Flügge, Vol. 8/1, pp. 264—350, Fluid Dynamics, I, Springer-Verlag, 1959.
7. Maskell E. C., Flow Separation in Three Dimensions, Royal Aircraft Establishment, Report Aero. 2565 (Nov. 1955).
8. Sears W. R., The Boundary Layer of Yawed Cylinder, *J. Aeronaut. Sci.*, 15, № 1 (Jan. 1948).
9. Howarth L., On the Solution of Laminar Boundary Layer Equations, *Proc. Roy. Soc.*, A 164, № 919, pp. 547—579 (1938).

10. Eichelbrenner E. A., Separation and Reattachment in Three-dimensional Boundary Layers, Symposium on Fully Separated Flows, paper presented at ASME Fluid Engineering Division Conference, Philadelphia, Pa. (May 1964).
11. Cooke J. C., Hall M. G., Boundary Layers in Three Dimensions, pp. 224—282, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 2, Boundary Layer Problems, ed. A. Ferri, D. Küchemann, L. H. G. Sterne, Pergamon Press, 1962; см. также AGARD Rept 2173, 1960.
12. Meksyn D., New Method in Laminar Boundary Layer Theory, Pergamon Press, N. Y., p. 127, 1961.
13. Nonweiler T., A Theoretical Study of the Boundary Layer Flow and Side Force on Inclined Slender Bodies, Rept 115, College of Aeronautics, Cranfield, 1955.
14. Mangler W., Zusammenhang zwischen ebenen und rotations-symmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten, *Z. angew. Math. Mech.*, 28, № 4, pp. 97—103 (1948).
15. Boltze E., Grenzschichten an Rotationskörpern, Dissertation, Göttingen, 1908.
16. Де Сото, Вольф, Применение преобразования Манглера к течению в пограничном слое, *Ракетная техника*, № 4 (1961).
17. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, изд-во «Наука», 1969.
18. Görtler H. A., New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows *J. Math. Mech.*, 6 (1957).
19. Saljnikov V., Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern, Bericht № 133, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Oct. 1960.
20. Thwaites B., Fluid Motion Memoirs, Incompressible Aerodynamics, pp. 404, 410, Oxford, Clarendon Press, 1960.
21. Wild J. M., The Boundary Layer of Yawed Infinite Wings, *J. Aeronaut. Sci.*, 16, № 1, pp. 41—45 (Jan. 1949).
22. Rott N., Crabtree L. F., Simplified Laminar Boundary Layer Calculations for Bodies of Revolution and for Yawed Wings, *J. Aeronaut. Sci.*, p. 560 (Aug. 1952).
23. Jones R. T., Effects of Sweepback on Boundary Layer and Separation, NACA Rept 884, 1947.
24. Rainbird W. J., Crabbe R. S., Jurewicz L. S., The Flow Separation about Cones at Incidence, *Quart. Bull. Div. Mech. Eng. Nat. Aeronaut. Establ. Can.* (April—June 1963); National Research Council of Canada, Rept DME/NAE, 1963(2).
25. Laitone E. V., Experimental Measurements of Incompressible Flow Along a Cylinder with a Conical Nose, *J. Appl. Phys.*, 22, № 1, pp. 63—64 (Jan. 1951).
26. Grimson J., An Investigation into Flow Separation from Cones at Low Speeds, College of Aeronautics (неопубликованные экспериментальные данные).
27. Авдеевский В. С., Медведев К. И., Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1966).
28. Eichelbrenner E. A., Oudart A., Méthode de calcul de la couche limite tridimensionnelle application à un corps fusile incliné sur le vent, ONERA Publication 76, April 1955.
29. Zaat J. A., A Simplified Method for the Calculation of Three-dimensional Laminar Boundary Layers, NLL Rept F184, April 1956.
30. Cooke J. C., Approximate Calculation of Three-dimensional Laminar Boundary Layers, RAE Tech. Note, Aero. 2658, 1959.
31. Cooke J. C., The Laminar Boundary Layer on an Inclined Cone, RAE Tech. Rept 65178, Aug. 1965.

32. Hall M. G., A Numerical Method for Solving the Equations for Vortex Core, RAE Tech. Rept 65106 (May 1965).
33. Brown S. N., Singularities Associated with Separating Boundary Layers, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A 257, № 1084, p. 409, 1964.
34. Cooke J. C., Supersonic Laminar Boundary Layers on Cones, RAE Tech. Rept 66347, Nov. 1966.
35. Brebner G. G., Some Simple Conical Camber Shapes to Produce Low Lift Dependent Drag on a Slender Delta Wing, CP 428, Sept. 1957.
36. Mangler K. W., Smith J. H. B., Calculation of the Flow Past Slender Delta Wings with Leading Edge Separation, RAE Rept Aero, 2593, ARC 19634, May 1957.
37. Mangler K. W., Smith J. H. B., A Theory of the Flow Past a Slender Delta Wing with Leading Edge Separation, *Proc. Roy. Soc.*, A 251, pp. 200—217 (1959); RAE Rept. Aero, 2593, 1957.
38. Brown S. N., The Compressible Inviscid Leading-edge Vortex, *J. Fluid Mech.*, 22, pp. 17—32, 1965.
39. Marsden D. J., Simpson R. W., Rainbird W. J., The Flow over Delta Wings at Low Speeds with Leading-edge Separation, College of Aeronautics Rep № 114, ARC 20409, 1957.
40. Smith J. H. B., Improved Calculations of Leading-edge Separation from Slender Delta Wings, RAE, Tech. Rept 66070 (March 1966).
41. Brown C. E., Michael W. H., On Slender Delta Wings with Leading-edge Separation, NACA Tech. Note 3430, April 1955; см. также *J. Aeronaut. Sci.*, 21, pp. 690—694, 706 (1954).
42. Mac Adams C., Leading-edge Separation from Delta Wings at Supersonic Speeds, *J. Aeronaut. Sci.*, 29, pp. 430, 1953.
43. Alexander A. J., Experimental Investigation on a Cropped Delta Wing with Edge Blowing, College of Aeronautics Rept, № 162, ARC 25213, June 1963.
44. Alexander A. J., Experiments on a Delta Wing Using Leading-edge Blowing to Remove the Secondary Separation, College of Aeronautics Rept, № 161, May 1963.
45. Bergensen A. J., Porter J. D., An Investigation of the Flow Around Slender Delta Wings with Leading-edge Separation, Princeton Univ., Aero Engng Dept., Rept № 510, May 1960.
46. Dore B. D., Non-linear Theory for Slender Wings in Sudden Plunging Motion, NPL Aero. Rept 1128, ARC 26488, Dec. 1964.
47. Earnshaw P. B., An Experimental Investigation of the Structure of a Leading-edge Vortex, ARC R & M 3281, 1961.
48. Edwards R. H., Leading-edge Separation from Delta Wings, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, pp. 134—135, 1954.
49. Fink P. T., Taylor J., Some Low-speed Experiments with 20 Degree Delta Wings, Imperial College, Dept. of Aeronautics, ARC 17854, Sept. 1955.
50. Garner H. C., Lehrian D. E., Non-linear Theory of Steady Forces on Wings with Leading-edge Flow Separation, NPL Aero, Rept 1059, ARC R & M 3375, 1963.
51. Gersten K., Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis, *Ing.-Archiv*, 30, pp. 431—452 (1961).
52. Gregory N., Love E. M., Some Problems of Flow Laminarization on a Slender Delta Wing, NPL Aero. Rept 1138, ARC 26754, Feb. 1965.
53. Hall M. G., A Theory for the Core of a Leading-edge Vortex, *J. Fluid Mech.*, 11, pp. 209—228 (1961).



54. Hummel D., Experimentelle Untersuchung der Strömung auf der Saugseite eines schlanken Delta Flügels, *Z. Flugwiss.*, 13, pp. 247—252 (1965).
55. Küchemann D., A Non-linear Lifting Surface Theory for Wings of Small Aspect Ratio with Edge Separations, RAE Rept Aero. 2540, ARC 17769, April 1955.
56. Lambourne H. C., Bryer D. W., Some Measurements in the Vortex Flow Generated by a Sharp Leading-edge having 65° Sweep, ARC 21073, 1959.
57. Lawford J. A., Low-speed Wind Tunnel Experiments on a Series of Sharp-edged Delta Wings. Part II: Surface Flow Patterns and Boundary Layer Transition Measurements, RAE Tech. Note Aero. 2954, ARC 26032, March 1964.
58. Legendre R., Écoulement au voisinage de la pointe avant d'une aile a forte flèche, *Rech. aéro.*, № 35 (1953).
59. Legendre R., Écoulement au voisinage de la pointe avant d'une aile a forte flèche aux incidences moyennes, 8th Int. Cong. Th. Appl. Mech., Istanbul 1952, *Rech. aéro.*, № 30 (1952), № 31 (1953).
60. Lawson W. V., The Separated Flows on Slender Wings in Unsteady Motion, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Univ. of Southampton, Rept ARC 25118, Sept. 1963.
61. Maskell E. C., On the Asymptotic Structure of a Conical Leading-edge Vortex, presented to IUTAM Symposium on Concentrated Vortex Motions, Ann Arbor, July 1964.
62. Peckham D. H., Low Speed Wind-tunnel Tests on a Series of Uncambered Slender Pointed Wings with Sharp Edges, RAE Rept № Aero. 2613, ARC R & M 3186, Dec. 1958.
63. Rainbird W. J., Crabbe R. S., Peake D. J., Meyer R. F., Some Examples of Separation in Three-dimensional Flows, *Quart. Bull. Div. Mech. Engng Nat. Aeronaut. Establ. Can.*; National Research Council of Canada, Rept № DME/NAE, 1966 (1), Jan.— March 1966.
64. Randall D. G., An Attempt to Predict the Effects of Leading-edge Separation Without the Assumptions of Slender Wing Theory, RAE (неопубликовано).
65. Randall D. G., Oscillating Slender Wings in the Presence of Leading-edge Separation, RAE Rept № Struct. 286, ARC 24939, April 1963.
66. Randall D. G., A Theoretical Determination of the Flow Past and the Air Forces on an Oscillating Slender Delta Wing with Leading-edge Separation, RAE Rept № Struct. 280, ARC 24910, March 1963.
67. Rott N., Diffraction of a Weak Shock with Vortex Generation, *J. Fluid Mech.*, 1, pp. 111—123 (1956).
68. Roy M., Caractères de l'écoulement autour d'une aile en flèche accentuée, *CR Acad. Sci. Paris*, 234, pp. 2501 (1952).
69. Roy M., On the Rolling-up of the Conical Vortex Sheets from a Delta Wing, presented to IUTAM, Symposium on Concentrated Vortex Motions, Ann Arbor, July 1964, Prog. in Aeron. Sci., ed. Küchemann et al., Vol. 7, Pergamon Press, Oxford, 1966.
70. Smith J. H. B., Theoretical Work on the Formation of Vortex Sheets, Prog. in Aeron. Sci., ed. Küchemann et al., Vol. 7, Pergamon Press, Oxford, 1966.
71. Smith J. H. B., A Theory of the Separated Flow from the Curved Leading-edge of a Slender Wing, ARC R & M 3116, 1957.
72. Squire L. C., The Estimation of the Non-linear Lift of Delta Wings at Supersonic Speeds, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, 67, pp. 476—480 (1963).
73. Stewartson K., Hall M. G., The Inner Viscous Solution for the Core of a Leading-edge Vortex, *J. Fluid Mech.*, 15, pp. 306—318 (1963).

74. Ward H. S., An Electrical Analogue Investigation of a Separated Flow Problem Associated with High-speed Swept Aerofoils, ARC 24183, 1962.
75. Werlé H., Étude physique des phénomènes tourbillonnaires au tunnel hydrodynamique, *Bull. Ass. tech. marit. aéronaut.*, **61**, pp. 177—200 (1961).
76. Werlé H., Tourbillons d'ailes minces très élancées, *Recherche aéronaut.*, № 109, pp. 3—12 (Nov.— Dec. 1965)

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Банкс, Гэдд, Задерживающее влияние вращения на ламинарный отрыв, *Ракетная техника и космонавтика*, № 4 (1963).
- Eichelbrenner E. A., Peube J. L., Theoretical and Experimental Investigations in Three-dimensional (Laminar and Turbulent) Boundary Layers, in Particular on Problems of Transition, Separation, and Reattachment, *Faculté des Sciences de Poitiers, Laboratoire de Mécanique des Fluides*, Sept. 1966.
- Hoskin N. E., The Laminar Boundary Layer on a Rotating Sphere, Fifty Years of Boundary Layer Research, Braunschweig, pp. 127—131, 1955.
- Peake D. J., Galway R. D., Rainbird W. J., The Three-dimensional Separation of a Plane, Incompressible, Laminar Boundary Layer Produced by a Rankine Oval Mounted Normal to a Flat Plate, National Research Council of Canada, Aeron. Rept LR-446, NRC № 8925, Nov. 1965.

## Глава IV

# ОТРЫВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

---

### Обозначения

- $A$  — коэффициент или параметр;  
 $a$  — постоянная;  
 $b$  — постоянная или ширина;  
 $C_{Dp}$  — коэффициент сопротивления давления;  
 $c_1^*$  — коэффициент;  
 $D$  — диссипация энергии; полное сопротивление; также

$$D = \frac{2}{3} \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho u_e^2}};$$

- $d_1$  — доля энергии, преобразованной в тепло вследствие диссипации;  
 $e$  — параметр; расширение;  
 $H = \delta^*/\theta$ ;  
 $H' = \delta^{**}/\theta$ ;  
 $H'' = \delta^{***}/\theta$ ;

$$I = \int_0^{\infty} \left( \frac{u_e - u}{u^*} \right)^2 d \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e} \right), \quad I_2 = \int_0^{\infty} \left( \frac{u_e - u}{u^*} \right)^3 d \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e} \right);$$

- $K$  — коэффициент профиля;  
 $k$  — универсальная постоянная;  
 $\bar{k}$  — средний размер шероховатости;  
 $L$  — длина;  
 $l$  — характерный линейный размер; постоянная длина смешения;  
 $p_{t\delta}$  — полное давление при  $y = \delta$ ;  
 $p_{t\theta}$  — полное давление при  $y = \theta$ ;  
 $R$  — радиус;  
 $r$  — расстояние от оси;  
 $r_0$  — радиус кругового цилиндра;  
 $t_1$  — энергия турбулентного движения (скорость трения);  
 $u_\theta = u$  при  $y = \theta$ ;  
 $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  — динамическая скорость;  
 $W$  — ширина;

$w_b$  — расход действительного обратного течения внутри контрольной поверхности;

$w_e$  — максимальный расход, при котором еще возможно удаление жидкости из области отрыва эжектированием в основной поток;

$x_t$  — координата точки перехода;

$x_0$  — координата, измеряемая вдоль центральной оси от точки пересечения ее с продолжением контура тела до начальной точки наклонной поверхности;

$\alpha$  — угол атаки; угол между основным потоком и составляющей  $u_e$  по оси  $x$ ;

$$\Gamma = \Theta \frac{du_e}{dx}; \quad \Gamma = \frac{\theta dp/dx}{qc_f}; \quad \Gamma = \frac{(2c_D/c_f) - H''}{(H-1)H''};$$

$$\Gamma' = \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx}; \quad \Gamma_a = \frac{u_e (du_e/dx) \theta \rho}{\tau_w};$$

$$\delta^{**} = \delta^* \left( 2 - 3 \sqrt{\frac{c_f}{2} I + \frac{c_f}{2} I_2} \right) \text{— толщина потери энергии;}$$

$\delta^{***}$  — толщина потери полной энергии;

$$\zeta = \tau_w / (\rho u_e^2); \quad \zeta(\Gamma_a) = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \left( \frac{u_e \theta}{v} \right)^{1/4};$$

$$\eta = 1 - (u_\theta/u_e)^2; \quad \eta = 1 - (p_{t_\delta} - p_{t_\theta})/q;$$

$$\eta = \frac{C_{pR}}{C_{pRi}};$$

$\Theta$  — половина угла раскрытия;

$\theta$  — толщина потери импульса пограничного слоя; угол раскрытия;

$$\theta' = \theta \text{Re}_\theta^{1/n};$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau_w} \frac{dp}{dx} \delta^* \frac{u_e}{u^*};$$

$$\sigma = w_b/w_e;$$

### Индексы

$i$  — идеальный газ;

$R$  — восстановление; кормовая часть тела;

$t$  — полный;

опт — оптимальный;

1 — на входе;

2 — на выходе;

— основной поток.

На практике отрыв турбулентного потока является гораздо более важной проблемой по сравнению с отрывом ламинарного потока, поскольку вследствие увеличения числа Рейнольдса как при увеличении размеров тела, так и при увеличении скорости потока происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному. На переход влияют завихренность набегающего потока, градиент давления, шероховатость поверхности, кривизна тела, теплопередача и сжимаемость. Поток в диффузоре, как правило, турбулентный. Из предыдущей главы следует, что ламинарный поток имеет сильную тенденцию к отрыву, поэтому при ламинарном обтекании чрезвычайно трудно создать большую нагрузку на твердую поверхность при высокой эффективности. Однако турбулентный поток гораздо легче преодолевает положительный градиент давления из-за обмена количеством движения внутри пограничного слоя. Следовательно, для создания больших нагрузок поток должен быть турбулентным.

Например, как показал Дин [1], допустимая подъемная сила рабочих лопаток гидромашин при ламинарном режиме течения в условиях, близких к отрыву, примерно вчетверо меньше подъемной силы в тех же условиях, но при турбулентном режиме течения. Касательные напряжения в турбулентном потоке в  $10-10^3$  раз больше, чем в ламинарном, поэтому в турбулентном потоке отрыв затягивается или не происходит совсем. Турбулентное течение не поддается расчету теоретическими методами, поскольку механизм турбулентности недостаточно изучен, в частности не известны соотношения между пульсационными и средними по времени величинами. Поэтому для расчета отрыва турбулентного слоя необходимо опираться на экспериментальные данные.

Как правило, расчет турбулентного течения менее точен и требует более громоздких выкладок, чем расчет ламинарного течения. Следующий факт иллюстрирует трудности вычислений. В процессе течения изменяется профиль скорости пограничного слоя. Хотя доказано, что это изменение не чувствительно к изменению отношения толщины вытеснения к толщине потери импульса или физической толщины пограничного слоя к толщине потери импульса [2], однако оно повышает степень неопределенности расчета, поскольку эти отношения могут быть использованы для получения критерия отрыва.

В прошлом много исследований было посвящено турбулентному отрыву при внешнем обтекании тел, например крыльев летательного аппарата, или при внутреннем течении, например в диффузоре. Эти исследования были основаны на теории пограничного слоя. Как будет показано ниже, одной теории пограничного слоя недостаточно, чтобы рассчитать отрыв потока при внутреннем течении, и до сих пор не существует подходящего метода для окончательного расчета отрыва потока в диффузоре. В настоящее время

имеется несколько достаточно точных методов расчета отрыва внешнего потока на профилях, решетках, цилиндрах, сферах и т. д. Возможно, существуют принципиальные отличия между внешними и внутренним течениями, но они недостаточно хорошо изучены.

Например, развитие отрыва внутреннего потока в двумерном диффузоре с большим отношением длины стенки к ширине горла совершенно отлично от развития отрыва внешнего потока [3]. По наблюдениям на определенных стадиях внутреннего течения преобладает переходное течение, поэтому при исследовании отрыва потока необходимо рассматривать вопросы устойчивости и перехода [4, 3]. Очевидно, на параметры отрыва сильное стабилизирующее влияние оказывает близость стенок.

В этой главе, посвященной двумерным течениям, проблемы внешнего и внутреннего течений изучаются отдельно. Возможно, имеет смысл выделить в обоих случаях основные положения теории пограничного слоя, которые важны при решении задач отрыва. Как правило, поток является смешанным (ламинарное течение переходит в турбулентное). Поскольку отрыв зависит от характера пограничного слоя, необходимо найти начальные условия турбулентного течения. Толщина потери импульса  $\theta$  и толщина потери полной энергии, которая определяется как

$$\delta^{***} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left\{ 1 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 - \frac{\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2}{u_e^2} \right\} dy,$$

где штрих означает пульсацию, постоянны и непрерывны при переходе. Следовательно, при переходе сохраняется также неизменным отношение толщины потери полной энергии к толщине потери импульса  $H'' = \delta^{***}/\theta$ . Можно довольно точно оценить количественные значения этих параметров для ламинарного течения, поэтому эти параметры при переходе могут быть использованы как начальные значения для расчета турбулентного течения. Однако следует напомнить, что формпараметр  $H = \delta^*/\theta$  (отношение толщины вытеснения к толщине потери импульса) при переходе изменяется скачкообразно. Если это отношение используется как единственный критерий отрыва потока, то при определении турбулентного отрыва наряду с  $H$  полезно использовать  $H''$ , особенно в случае отрыва при больших градиентах давления, т. е. более точную оценку отрыва турбулентного потока можно получить при одновременном решении уравнений количества движения и энергии, которые включают  $H$  и  $H''$  соответственно. Когда пограничный слой отрывается как ламинарный и присоединяется затем как турбулентный, трудно установить начальные условия расчета турбулентного пограничного слоя. Этот вопрос пока еще не выяснен.

Среди параметров пограничного слоя очень важным является толщина потери импульса  $\theta$ , поэтому необходимо точно вычислить  $\theta$ .

### 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ПОТЕРИ ИМПУЛЬСА

Обычно толщина потери импульса определяется в виде

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy,$$

а для несжимаемого потока — в виде

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy.$$

Эта толщина связана с потерей импульса в пограничном слое, которая может быть выражена как

$$u_e \int_0^{\delta} \rho u dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy.$$

Часто для определения  $\theta$  используется интегральное соотношение Кармана для двумерного течения

$$\frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}.$$

Поскольку интегральный метод Кармана является приближенным, значения  $\theta$ , вычисленные по этому уравнению, не столь точны, как найденные путем решения уравнения Навье — Стокса. Тем не менее метод Кармана нашел широкое применение благодаря своей простоте.

#### 1.1. МЕТОД ТРУКЕНБРОДТА

Для вычисления толщины потери импульса широко используется метод Трукенбродта. Этот метод применим для ламинарного и турбулентного пограничных слоев в двумерном и осесимметричном несжимаемых потоках. Трукенбродт [4] использовал уравнение энергии

$$\frac{1}{u_e^3} \frac{d}{dx} (u_e^3 \delta^{**}) = \frac{2(d_1 + t_1)}{\rho u_e^3},$$

поэтому его метод отличается от других, в которых при определении  $\theta$  используется только уравнение количества движения. Тол-

щина потери энергии  $\delta^{**}$  определяется в виде

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left\{ 1 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right\} dy$$

и связана с потерей энергии в пограничном слое,  $d_1$  — доля энергии, преобразованная в тепло, а  $t_1$  — энергия турбулентного движения. Трукенбротт принял однопараметрическое семейство профилей скорости и однозначное соотношение между  $\delta^{**}/\theta = H'$  и  $\delta^*/\theta = H$  в виде  $H' = \delta^{**}/\theta = 1,269 H/(H - 0,379)$ , а также профиль пограничного слоя в виде

$$\frac{u}{u_e} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/n}.$$

Первый член интегрального уравнения энергии

$$\frac{d_1 + t_1}{\rho u_e^3} = \int_0^{\delta} \frac{t_1}{\rho u_e^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{u_e} \right) dy$$

выражает безразмерную работу сил трения, совершаемую касательным напряжением  $\tau$  внутри пограничного слоя.

Так как энергия  $t_1$  мала по сравнению с  $d_1$ , ею можно пренебречь. Приближенно получается

$$\frac{d_1}{\rho u_e^3} = \frac{0,56 \cdot 10^{-2}}{(u_e \theta / \nu)^{1/8}}.$$

Подставляя это соотношение в интегральное уравнение энергии, принимая среднее значение  $\bar{H}$  и интегрируя, находим

$$\theta \left( \frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/n} = \frac{c_1 + A \int_{x=x_t}^x u_e^{3+(2/n)} dx}{u_e^{3+(2/n)}},$$

где  $x_t$  — точка перехода.

Величина  $A$  для случая обтекания плоской пластины определяется по формуле

$$A = \left( \frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n} \left( \frac{u_{\infty} l}{\nu} \right)^{1/n},$$

затем находится  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\theta(x)}{l} &= \left( \frac{u_e}{u_{\infty}} \right)^{-3} \left\{ c_1^* + \left( \frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n} \times \right. \\ &\times \int_{x_t/l}^{x/l} \left( \frac{u_e}{u_{\infty}} \right)^{3+(2/n)} d \left( \frac{x}{l} \right) \left. \right\}^{n/(1+n)}, \end{aligned}$$

где  $l$  — характерная длина.



Для ламинарного течения  $n = 1$ , а для турбулентного  $4 \leq n \leq 6$  ( $n = 4$  соответствует малым, а  $n = 6$  — большим числам Рейнольдса). Постоянная  $c_1^*$  соответствует ламинарному течению, и если поток полностью турбулентный, то  $c_1^* = 0$ . Значение  $c_1^*$  вычисляется по формуле

$$c_1^* = \left[ \frac{1}{2} c_{f_l} \left\{ \int_0^{x/l} \left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^5 d \left( \frac{x}{l} \right) \right\}^{1/2} \right]^{(n+1)/n},$$

где  $c_{f_l}$  — коэффициент поверхностного трения ламинарного потока около плоской пластины под нулевым углом атаки. Эти уравнения пригодны для двумерного тела. Для тела вращения рекомендуется следующая формула:

$$\frac{\theta(x)}{l} = \left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^{-3} \left( \frac{R}{l} \right)^{-1} \left\{ c_1^* + \left( \frac{c_f}{2} \right)^{(n+1)/n} \times \right. \\ \left. \times \int_{x/l}^{x/l} \left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^{3+(2/n)} \left( \frac{R}{l} \right)^{(n+1)/n} d \left( \frac{x}{l} \right) \right\}^{n/(1+n)},$$

где  $R$  — радиус поперечного сечения, перпендикулярного к оси тела вращения.

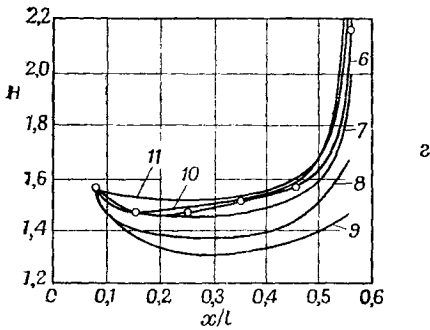
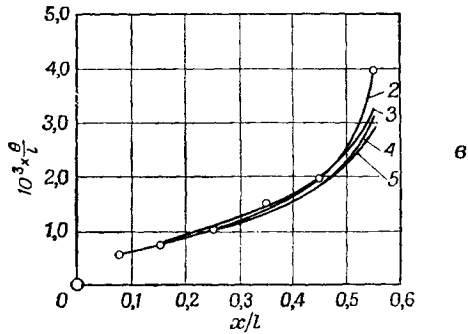
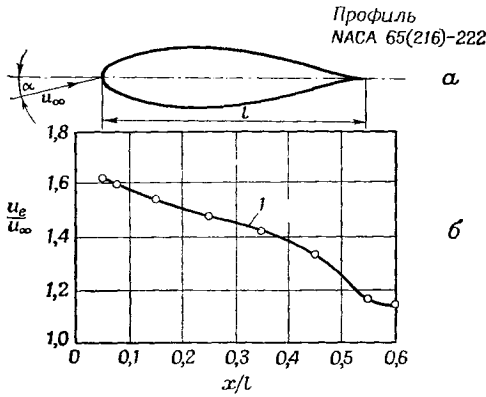
Результаты расчетов по методу Трукенбродта приведены на фиг. 1. Они хорошо согласуются с экспериментальными значениями  $\theta$  и  $H$  при умеренных градиентах давления.

## 1.2. МЕТОД РОТТА

Ротта разработал численный метод расчета для несжимаемого турбулентного пограничного слоя около гладкой и шероховатой поверхностей, включая отрыв потока. При решении уравнений используются графики и номограммы, приложенные к книге. Метод Ротта применим для двумерного и осесимметричного течений. Метод основан на следующих предположениях [5]:

1. Пограничный слой может быть разделен на два подслоя: внутренний, прилегающий к поверхности тела, и внешний.
2. Внешний подслой пограничного слоя может быть представлен одним параметром.
3. Существует однозначная зависимость между статистическим распределением пульсаций и профилем скоростей.

Согласно определению Ротта, в точке отрыва поверхностное трение равно нулю. Этот метод дает хорошие результаты в окрестности точки отрыва. Ротта использует уравнение количества движения и уравнение энергии. Подробно об этих уравнениях будет сказано далее. Результаты экспериментов подтверждают выводы теории Ротта.



Ф и г. 1. Турбулентный пограничный слой на крыловом профиле. Сравнение теории и эксперимента [108].

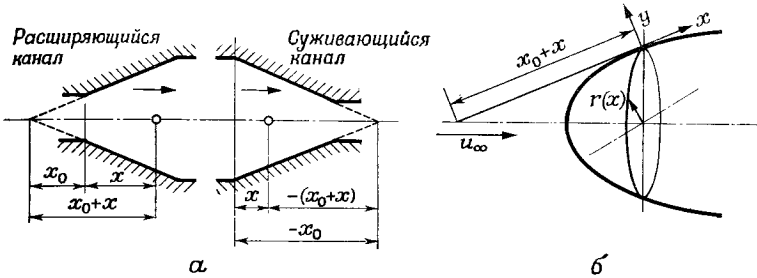
1 — эксперимент, верхняя поверхность профиля; 2 — эксперимент; 3 — Денхофф — Тетервин, Гарнер; 4 — Грушвиц, Грушвиц — Нель; 5 — Трукенброт; 6 — эксперимент; 7 — Трукенброт; 8 — Грушвиц; 9 — Грушвиц — Нель; 10 — Гарнер; 11 — Денхофф — Тетервин.

1.2.1. Уравнение количества движения

Уравнение количества движения для двумерного течения имеет вид

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{x_0+x} - \frac{H+2}{2} \theta \frac{dp/dx}{q} = \frac{cf}{2}, \quad (1)$$

где  $x_0$  — координата, измеряемая вдоль центральной оси, от точки пересечения продолжения контура тела с центральной осью до начальной точки наклонной поверхности (фиг. 2).



Ф и г. 2. Система координат [5].

а — двумерный канал; б — осесимметричное тело.

1.2.2. Уравнение энергии

Уравнение энергии для двумерного течения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u_e + \delta^{**}) + \frac{1}{2} \frac{u_e^3 \delta^{**}}{x_0+x} = D + \frac{d}{dx} \int_0^\infty u \frac{\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2}{2} dy + \\ + \frac{1}{x_0+x} \int_0^\infty u \frac{\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2}{2} dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Для осесимметричного течения  $1/(x_0+x)$  заменяется на  $(1/r)(dr/dx)$ .  $D$  — диссипация энергии, определяемая в виде

$$\begin{aligned} D = \nu \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} dy, \end{aligned}$$

где штрих относится к пульсационной составляющей скорости.

Согласно предположению (1),  $\partial u/\partial y = u^*/ky$ , где  $u^* \{ = \sqrt{\tau_w/\rho}$  — динамическая скорость (скорость трения) и  $k \approx 0,4$  — универсальная постоянная. В общем случае закон рас-

пределения скорости около шероховатой стенки следующий:

$$u = u^* f \left( \frac{yu^*}{\nu}, \frac{ku^*}{\nu} \right),$$

где  $k$  — средний размер шероховатостей поверхности. Исходя из предположения (2), профиль скорости на внешней границе может быть представлен в виде

$$u_e - u = u^* F \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e}, I \right),$$

где

$$I = \int_0^{\infty} \left( \frac{u_e - u}{u^*} \right)^2 d \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e} \right),$$

тогда

$$\theta = \delta^* \left( 1 - \sqrt{\frac{c_f}{2} I} \right)$$

или

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1}{1 - \sqrt{(c_f/2) I}}.$$

Аналогично определяется толщина потери энергии

$$\delta^{**} = \delta^* \left( 2 - 3 \sqrt{\frac{c_f}{2} I} + \frac{c_f}{2} I_2 \right),$$

где

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left( \frac{u_e - u}{u^*} \right)^3 d \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e} \right)$$

и

$$H' = \delta^{**}/\theta = 3 - H + H \frac{c_f}{2} I_2 \left\{ \frac{H-1}{H \sqrt{(c_f/2)}} \right\}.$$

$$I_2 \left\{ \frac{H-1}{H \sqrt{(c_f/2)}} \right\} \text{ выражает зависимость } I_2 \text{ от } \frac{H-1}{H \sqrt{(c_f/2)}}$$

Окончательно толщина потери энергии  $\delta^{**}$  определяется в виде

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left\{ 1 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right\} dy.$$

Кроме того, если ввести толщину потери полной энергии  $\delta^{***}$

$$\begin{aligned}\delta^{***} &= \delta^{**} - \frac{2}{u_e^3} \int_0^{\infty} u \frac{\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2}{2} dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 - \frac{\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2}{u_e^2} \right] dy,\end{aligned}$$

то можно приближенно определить формпараметр  $H''$

$$H'' = \frac{\delta^{***}}{\theta} = 3 - \left( 1 - \frac{c_f}{2} I_2 - 1,3 \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) H. \quad (3)$$

Таким образом, профиль скорости зависит не только от  $H$ , но также от  $H'$ ,  $H''$  и  $c_f$ .

Ротта дает два различных выражения для  $c_f$ , соответствующих гладкой и шероховатой поверхностям. Для гладкой поверхности с учетом эмпирической формулы Людвига и Тилмана [6], а также Шульца-Грунова [7] коэффициент поверхностного трения выражается в виде

$$c_f = 2 \left[ 8 (\lg \text{Re}_\theta)^{0,919} - 0,2 + K \left\{ \frac{H-1}{H \sqrt{(c_f/2)}} \right\} + 5,75 \lg H \right]^{-2}. \quad (4)$$

С учетом результатов Никурадзе [8] и экспериментальных данных Коулбрука и Уайта [9] для шероховатой, покрытой песчинками поверхности Ротта принимает

$$c_f = 2 \left\{ 5,75 \lg \frac{H\theta/\bar{k}}{\sqrt{(c_f/2)}} + 8,4 + K \right\}^{-2}, \quad (5)$$

где  $K$  — постоянная профиля. Используя теперь  $\delta^{***}$  и  $H'' = \delta^{***}/\theta$  и исключая  $d\theta/dx$  из уравнения (1), получим уравнение энергии (2) в виде

$$\theta \frac{dH''}{dx} = - (H-1) \frac{H''}{2} \theta \frac{dp/dx}{q} - c_D - c_f \frac{H''}{2}, \quad (6)$$

где  $c_D$  — коэффициент диссипации, определяемый в виде

$$c_D = \frac{2D}{u_e^3}.$$

Для облегчения расчета по формулам (3) — (5), уравнению (6) и выражению

$$\Gamma = \frac{(2c_D/c_f) - H''}{(H-1)H''}$$

в конце книги приведены графики и номограммы ( $\Gamma - V$ ). Линии на этих номограммах, соответствующие  $A = -1$ , являются предельными. Профиль скорости выше этого предела определяется в приложении А работы Ротта [5].

Вычисления по методу Ротта осуществляются по двум методикам: *Е* и *В*. Методика *Е* заключается в одновременном интегрировании уравнения количества движения и уравнения энергии. Обозначение *Е* связано с использованием уравнения энергии. По методике *В* интегрируется уравнение количества движения в предположении линейной зависимости между формпараметром и градиентом давления аналогично методу Бури, который будет рассмотрен позже. Обозначение *В* связано с применением метода Бури. Далее остановимся подробно на этих методиках.

*Методика Е.* Кроме уравнения (1), используются диаграммы и номограммы (Приложение, фиг. П.1—П.5). Предположим, что заданы начальные значения  $\theta$  и  $H''$ . Оценив  $c_f$ , можно определить соответствующие значения  $H$  по фиг. П.4, а и П.4, б. После этого, вычислив  $Re_\theta$  и  $k/\theta$ , можно уточнить значение  $c_f$  по фиг. П.1 и П.2. Затем для этого значения  $c_f$  уточняется значение  $H$  по фиг. П.4, а и П.4, б. Благодаря умеренному влиянию  $c_f$  на соотношение между  $H$  и  $H''$  этот процесс сходится очень быстро. Для окончательных значений  $H$  и  $c_f$  можно вычислить  $d\theta/dx$  по уравнению (1) и определить  $dH''/dx$  по фиг. П.3.

Таким образом происходит интегрирование дифференциальных уравнений методом последовательных приближений.

*Методика В.* Эта методика проще, поскольку нужно интегрировать только уравнение количества движения (1).  $H$  рассматривается как функция  $\Gamma = \theta [(dp/dx)/qc_f]$  и местного значения  $c_f$ . Соотношение между этими параметрами дается на фиг. П.5. Коэффициент  $c_f$  определяется по фиг. П.1 и П.2. Нужно задать начальное значение только для  $\theta$ .  $H$  определяется по фиг. П.5 после приближенной оценки  $c_f$ . С помощью этого  $H$  корректируется значение  $c_f$  по фиг. П.1 и П.2 и для этого уточненного  $c_f$  по фиг. П.5 находится  $H$ . Этот процесс сходится очень быстро. Численное интегрирование методом последовательных приближений аналогично методике *Е*.

Применимость методики *В* ограничена условием умеренности градиента давления. Эта методика не дает удовлетворительных результатов при определении точки отрыва в случае больших градиентов давления. Однако она может быть использована в качестве первого приближения, а результаты вычислений уточняются с помощью методики *Е*.

Методика *Е* успешно используется для определения параметров потока вблизи точки отрыва. Поскольку критерием отрыва по Ротту является равенство нулю поверхностного трения, точка отрыва определяется из условия  $c_f = 0$ . Так как при приближении к точке отрыва  $H$  увеличивается, а  $c_f$  достаточно быстро уменьшается, то положение отрыва определяется путем экстраполяции кривой  $c_f$  в функции  $x$  до точки  $c_f = 0$ . Метод Ротта применим при  $Re_\theta > 600$  и  $k/\theta \leq 1$ . Вблизи точки отрыва уравнение (3)

не удовлетворяется. Тем самым не выяснена связь между профилем скорости и энергией диссипации. Для решения этих вопросов необходимы экспериментальные исследования.

Более подробные сведения содержатся в работе [109].

## 2. КРИТЕРИИ ОТРЫВА ВНЕШНЕГО НЕСЖИМАЕМОГО ДВУМЕРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Критерии отрыва несжимаемого двумерного турбулентного потока рассмотрены отдельно для внешнего течения и для внутреннего течения. Такое разделение не всегда дает разные критерии для двух различных видов отрыва потока. Некоторые авторы претендуют на применимость их методов в обоих случаях, другие не одобряют такого разделения вообще.

### 2.1. ОТРЫВ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Этот случай наиболее широко исследован, и существующие методы дают приемлемые результаты.

#### 2.1.1. Критерий Бури

Еще в 1931 г. Бури [10] рассмотрел вычислительные методы для турбулентного пограничного слоя с градиентом давления и нашел критерий начала отрыва турбулентного потока. Изучая экспериментальные результаты Никурадзе [11], полученные при течении воды в сужающемся и расширяющемся канале, он нашел, что безразмерный параметр

$$\Gamma = -\Gamma_a \zeta(\Gamma_a) = \frac{du_e/dx}{u_e} \theta \left( \frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/4}$$

может быть использован для определения точки отрыва турбулентного потока. Здесь

$$\Gamma_a = \frac{u_e (du_e/dx) \theta \rho}{\tau_w}$$

и

$$\zeta(\Gamma_a) = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \left( \frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/4}.$$

Параметр  $\Gamma$  аналогичен параметру, используемому Никурадзе. Только Никурадзе применил  $\delta^*$  вместо  $\theta$ . Если  $\Gamma$  быстро увеличивается при приближении к точке отрыва турбулентного потока, то значение  $\Gamma \approx -0,06$  является критерием отрыва. Кроме того, Бури [10] нашел, что путем интегрирования стационарного урав-

нения количества движения

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - u_e \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_w$$

получается

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \theta \left( \frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/4} \right\} = \frac{5}{4} \left\{ \zeta - \frac{du_e/dx}{u_e} \theta \left( \frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/4} \left( \frac{9}{5} + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \right\}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Gamma}{du_e/dx} u_e \right) &= \frac{5}{4} \left\{ -\frac{\Gamma}{\Gamma_a} - \Gamma \left( \frac{9}{5} + H \right) \right\} = \\ &= -\frac{5}{4} \Gamma \left( \frac{9}{5} + H + \frac{1}{\Gamma_a} \right). \end{aligned}$$

Это уравнение зависит от параметра  $\Gamma$ , который можно вычислить следующим способом. Пренебрегая пограничным слоем и отрывом потока, находим распределение скорости, соответствующее теории потенциального течения. Затем вычисляем  $\Gamma$  для двумерного потока

$$\Gamma = \frac{du_e/dx}{u_e} \left[ \frac{1}{u_e^b} \left\{ a \int_{x_0}^x u_e^b dx + \left( \frac{u_{e0}}{du_{e0}/dx} \right) u_{e0}^b \Gamma_0 \right\} \right],$$

причем  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Gamma}{du_e/dx} u_e \right)$  задается как  $a - b\Gamma$ , индекс 0 означает начальные условия,  $x_0$  — начальная криволинейная координата вдоль стенки в направлении основного потока,  $x$  — криволинейная координата вдоль поверхности тела в направлении основного потока. Значения, полученные Никурадзе для замедляющегося течения:  $a = 0,01475$ , и  $b = 3,945$ ; значения, полученные Бури:  $a = 0,0175$  и  $b = 4,15$ .

Вычислительный метод Бури с использованием параметра  $\Gamma$  применим только для областей с умеренным градиентом давления. Это заметил Ротта [12] путем сравнения теоретических и экспериментальных значений параметра

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left( \frac{u - u_e}{u^*} \right)^2 d \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e} \right).$$

в зависимости от  $\lambda = (1/\tau_w) (dp/dx) \delta^* (u_e/u^*)$ .

Преимущество метода Бури состоит в том, что требуется только однократное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения.

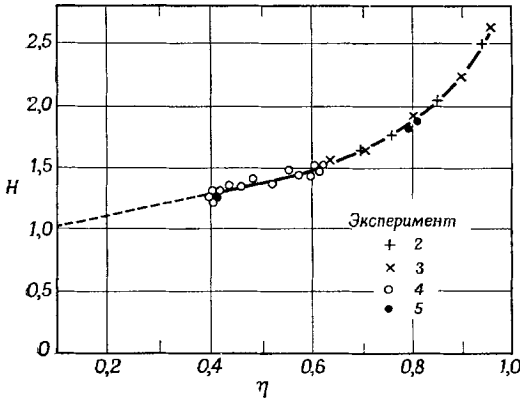


### 2.1.2. Критерий Грушвица

Грушвиц [13] ввел формпараметр в следующем виде:

$$\eta = 1 - \left( \frac{u_\theta}{u_e} \right)^2,$$

где  $u_\theta$  — скорость в направлении потока в точке  $y = \theta$ . Между этим параметром и формпараметром  $H = \delta^*/\theta$  существует однозначная связь. Этот факт был подтвержден экспериментальными



Ф и г. 3. Соотношение между  $H$  и  $\eta$  [13].

данными для крылового профиля (фиг. 3). Параметр  $\eta$  можно также представить в виде

$$\eta = 1 - \frac{p_{t\delta} - p_{t\theta}}{q},$$

где  $p_{t\delta}$  и  $p_{t\theta}$  — полное давление в точках  $y = \delta$  и  $y = \theta$  соответственно. При заданной скорости потенциального течения профиль скорости полностью определяется двумя параметрами  $\eta$  и  $\theta$ . Грушвиц экспериментальным путем обнаружил, что отрыв потока происходит при  $\eta \approx 0,8$ , если точка отрыва определяется из условия  $c_f = 0$ .

Для вычисления значений  $\eta$  вдоль стенки можно выбрать начальное значение  $\eta = 0,1$ . Ошибка в задании начального значения  $\eta$  не оказывает заметного влияния на конечное значение  $\eta$ , поскольку  $\eta$  быстро растет вначале и, достигнув максимума на некотором расстоянии от передней кромки, резко падает. Однако в области больших значений  $\eta$  изменяется непрерывно и плавно вдоль поверхности, поэтому невозможно установить точно значе-

ние этого параметра, при котором происходит отрыв. Так, Шмидбауэр [14] принял за критерий отрыва  $\eta \approx 0,9$  (вместо  $\eta \approx 0,8$ ), когда давление плавно повышается при больших значениях  $\eta$ . Таким образом, метод Грушвица дает лишь приближенную оценку положения точки отрыва турбулентного потока.

Из наблюдений Грушвица следует, что максимальную подъемную силу можно получить при таких углах атаки, при которых отрыв потока происходит вблизи задней кромки крыла. Критерий отрыва Грушвица  $\eta \approx 0,8$  был подтвержден Никурадзе [11] в экспериментах с водой в сужающемся — расширяющемся канале. Петерс [15] измерил параметры турбулентного пограничного слоя на обычном крыловом профиле при больших числах Рейнольдса и установил, что теоретический критерий отрыва не соответствует экспериментальному. Для вычисления  $\theta$  и  $\eta$  методом последовательных приближений Питерс использовал эмпирическое соотношение

$$\frac{\theta}{(\rho/2) u_e^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) = -\theta \left( \frac{d\eta}{dx} + \eta \frac{du_e^2}{dx} \right) = a\eta + b,$$

где  $a = 0,00894$ ,  $b = -0,00461$  и, как и прежде,  $\eta = 1 - (u_\theta/u_e)^2$ , а уравнение количества движения

$$\frac{d\theta}{dx} + \theta \left( 1 + \frac{H}{2} \right) \frac{1}{u_e^2} \frac{du_e^2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}.$$

Согласно результатам вычислений для углов атаки  $\alpha = 9^\circ$  и  $11^\circ$ , параметр  $\eta$  не достигает 0,8, хотя в эксперименте значение  $\eta = 0,8$  соответствует точке отрыва. Причина несоответствия между вычисленными и измеренными значениями заключается в несправедливости линейной интерполяции правой части эмпирического соотношения  $a\eta + b$ .

Претш [16] исследовал теоретические методы определения сопротивления профиля и привел формулу Грушвица к следующему виду:

$$\eta = 1 - \left( \frac{u_\theta}{u_e} \right)^2 = 1 - \left( \frac{\theta}{\delta} \right)^{H-1} = 1 - \left[ \frac{H-1}{H(H+1)} \right]^{H-1}.$$

Справедливость этой формулы подтверждается экспериментальными данными (фиг. 3). Претш отметил важность влияния перехода на отрыв. При постоянном числе Рейнольдса на крыловом профиле точка отрыва (в которой  $\eta = 0,8$ ) перемещается навстречу потоку, если при этом область перехода также перемещается в том же направлении. Но если область перехода фиксирована, то с увеличением числа Рейнольдса точка отрыва смещается к концу профиля вследствие уменьшения толщины потери импульса. Эти два процесса существуют при любых условиях течения, и связь между переходом и отрывом является следствием этих процессов.

При малых и умеренных числах Рейнольдса влияние перемещения переходной области более заметно и переходная область перемещается навстречу потоку с увеличением числа Рейнольдса. Однако при больших числах Рейнольдса область перехода стабилизируется и остается далеко впереди по потоку. Поэтому влияние переходной области исчезает и с увеличением числа Рейнольдса точка отрыва начинает перемещаться вниз по потоку.

### 2.1.3. Критерий Ротта

Положение отрыва определяется условием равенства нулю коэффициента поверхностного трения. Поэтому оно может быть определено путем экстраполяции кривой  $c_f$  как функции расстояния в точку, где  $c_f = 0$ , но, поскольку в окрестности точки отрыва касательное напряжение у стенки в сильной степени зависит от расстояния, для выражения закона распределения скорости у стенки недостаточно знать только расстояние от стенки, касательное напряжение, вязкость и шероховатость поверхности. Ротта предлагает улучшенную форму закона распределения скорости у стенки

$$u = u^* f \left( \frac{yu^*}{\nu}, \frac{\nu}{\rho u^{*3}} \frac{dp}{dx}, \frac{ku^*}{\nu} \right)$$

и профиля скорости во внешнем слое

$$u_e - u = u^* F \left( \frac{yu^*}{\delta^* u_e}, \frac{\delta^* u_e}{\rho u^{*3}} \frac{dp}{dx}, I \right).$$

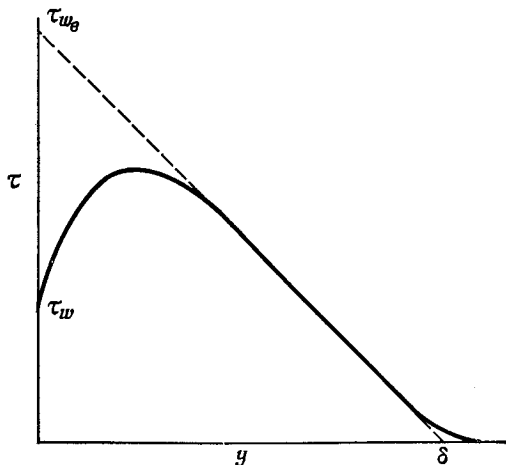
Это означает, что скорость может быть выражена через три параметра:  $H$ ,  $c_f$  и  $(\theta/\rho) (dp/dx)$ . В окрестности отрыва не существует однозначной связи между профилем скорости и статистическим распределением пульсаций. Несмотря на эти трудности описания пограничного слоя вблизи точки отрыва, Ротта [5] предлагает следующий критерий отрыва турбулентного потока:

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} H'' = \lim_{c_f \rightarrow 0} \frac{\delta^{***}}{\theta} = 3 - H \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{H-1}{H} \right)^2 \right\}.$$

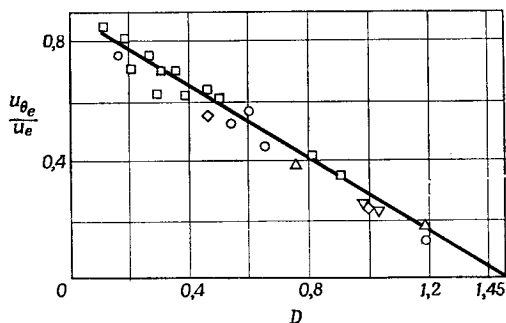
Однако числовые значения этого критерия неизвестны. Ротта установил, что начальное значение  $H$  не оказывает сильного влияния на положение отрыва, если в окрестности перехода давление умеренно повышается или понижается. Однако выбор начального значения  $H$  будет влиять на положение отрыва, если турбулентный пограничный слой начинается в области повышения давления или если давление резко возрастает сразу же после установления турбулентного режима в пограничном слое.

### 2.1.4. Критерий Росса

Росс [17] применил новый подход к расчету турбулентного пограничного слоя, включая отрыв. Так как в данном случае наиболее важен профиль скорости, пограничный слой делится



Ф и г. 4. Типичное распределение касательного напряжения при положительном градиенте давления.



Ф и г. 5. Корреляция значений эффективной относительной скорости на расстоянии от стенки, равном толщине потери импульса, по параметру  $D$  [17].

на три участка: ламинарный, переходный и турбулентный с логарифмическим распределением скорости. Он разработал простой вычислительный метод, заменив обыкновенные дифференциальные уравнения алгебраическими, что существенно упрощает решение.

Критерий отрыва определяется в виде

$$D = \frac{2}{3} \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau_{w_e}}{\rho u_e^2}},$$

где  $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $l$  — путь смещения (постоянная величина) и  $\tau_{w_e}$  — эффективное касательное напряжение на стенке ( $\tau_{w_e}$  определяется путем экстраполяции, как показано на фиг. 4).

Значение критерия  $D$  было получено путем экстраполяции  $u_{\theta_e}/u_e$  как функции от  $D$  в точку, где  $u_{\theta_e}/u_e = 0$  или где  $D = 1,45$ , (фиг. 5). Предел  $D = 1,45$  является верхним, а за критерий отрыва лучше принять  $D = 1,3 \pm 0,1$ . Здесь  $u_{\theta_e}$  — некоторая эффективная скорость, определяемая в виде

$$\frac{u_{\theta_e}}{\sqrt{\tau_{w_e}/\rho}} = 5,6 + 5,6 \lg \frac{\theta \sqrt{\tau_{w_e}/\rho}}{v}$$

### 2.1.5. Критерий Маскелла

Для определения точки отрыва турбулентного потока Маскелл [18] использовал эмпирическую формулу Людвиг — Тилмана для коэффициента поверхностного трения при наличии градиента давления [6]

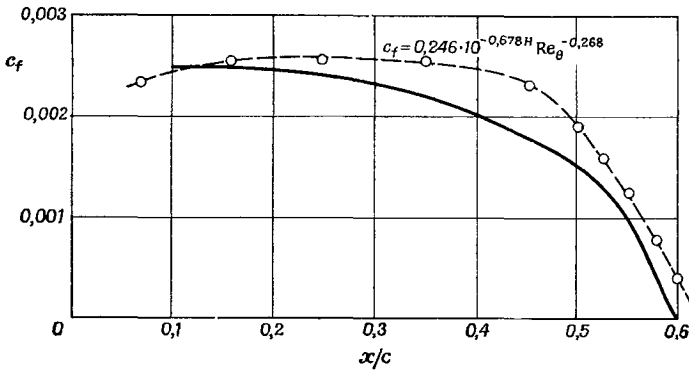
$$c_f = 0,246 \cdot 10^{-0,678H} \text{Re}_0^{-0,268} = 0,246e^{-1,561H} \text{Re}_0^{-0,268}.$$

Из этой формулы не следует  $c_f = 0$ , тем не менее путем экстраполяции  $c_f$  к нулю можно найти точку отрыва (фиг. 6).

С помощью этого метода, как утверждает Маскелл, можно определить отрыв на крыловом профиле с точностью примерно 2%. Так как по формуле Людвиг — Тилмана  $c_f$  не может равняться нулю, то при определении отрыва в окрестности точки, где  $c_f = 0$ , возникает ошибка, так что нельзя брать слишком малые значения  $c_f$ . Лучших результатов можно добиться, экстраполируя  $c_f$ , начиная с того участка кривой, на котором ошибки малы. По формуле Людвиг — Тилмана  $c_f$  резко падает, приближаясь к точке отрыва, и затем монотонно стремится к  $c_f = 0$ . Это свойство кривой позволяет достаточно точно установить положение отрыва.

Маскелл ввел усовершенствованный формпараметр, аналогичный примененному в уравнениях Денхоффа — Тетервина и Гарнера, который можно использовать в более общем случае для определения характеристик турбулентного пограничного слоя. Однако Маскелл не использовал этот параметр для определения отрыва. Напротив, он следовал описанному выше простому мето-

ду, основанному на уравнении Людвиг — Тилмана. Метод Маскелла рекомендуется в том случае, когда нужно быстро получить результат, так как методы Денхоффа — Тетервина и Гарнера



Ф и г. 6. Распределение экспериментальных и расчетных значений форм параметра  $H$  и коэффициента поверхностного трения  $c_f$  для профиля NASA 65 (216)-222;  $Re = 2,67 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 8,1^\circ$  [18].

— распределение  $c_f$  по расчетным значениям  $\theta$  и  $H$ ;  $\circ$  —  $\circ$  распределение  $c_f$  по экспериментальным значениям  $\theta$  и  $H$ ; наблюдаемая точка отрыва  $x_3/c = 0,60$ .

требуют трудоемкого решения системы двух дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, чтобы получить  $H$  и  $\theta$ , которые необходимы для определения критических параметров отрыва.

### 2.1.6. Критерий Денхоффа и Тетервина

Этот метод широко известен как сравнительно простой метод определения точки отрыва турбулентного потока при наличии умеренного градиента давления. Денхофф и Тетервин [19] установили, что  $H$  можно определить, зная профиль скорости, но невозможно доказать теоретически, что профиль скорости определяется через  $H$ . Однако анализ большого количества экспериментальных данных показал, что  $H$  однозначно определяет профиль скорости. Поэтому рассматриваемый метод основан на предположении, что однопараметрическое семейство кривых зависимости  $u/u_e$  от  $y/\theta$  представляет собой профили скорости турбулентного течения. Хотя и существует однозначная связь между  $H$  и профилем скорости, определяющим фактором в установлении критерия отрыва является скорее скорость возрастания  $H$ , чем сам этот параметр. Для вычисления параметров турбулентного пограничного слоя используются следующие уравнения: одно теоретиче-

ское, а два других полуэмпирические:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{H+2}{2} \left(\frac{\theta}{q}\right) \frac{dq}{dx} = \frac{\tau_w}{2q}$$

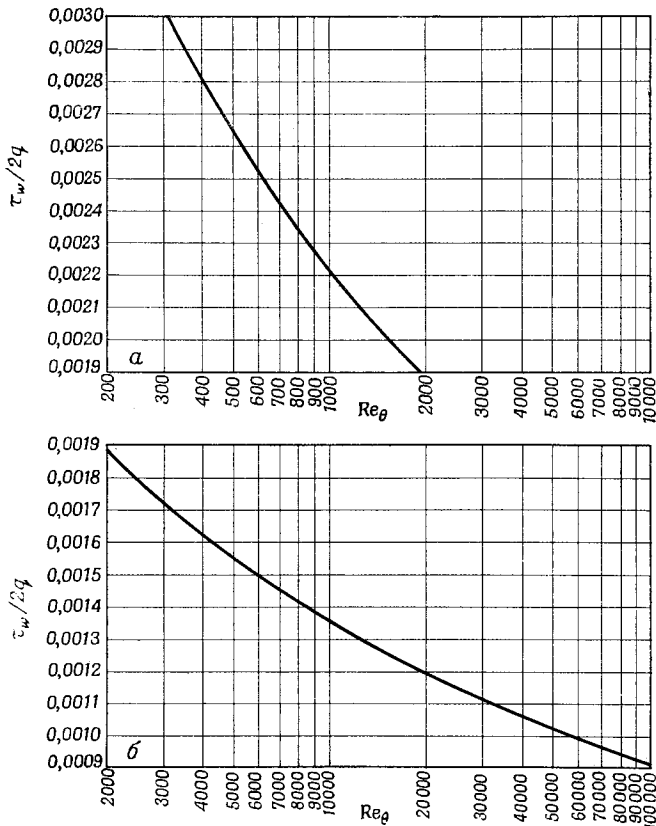
$$\theta \frac{dH}{dx} = e^{4,680(H-2,975)} \left\{ -\frac{\theta}{q} \frac{dq}{dx} \frac{2q}{\tau_w} - 2,035(H-1,286) \right\} \quad (7)$$

и

$$\frac{2q}{\tau_w} = \{5,890 \lg(4,075 \text{Re}_\theta)\}^2.$$

Для облегчения расчетов рекомендуется пользоваться фиг. 7 и 8.

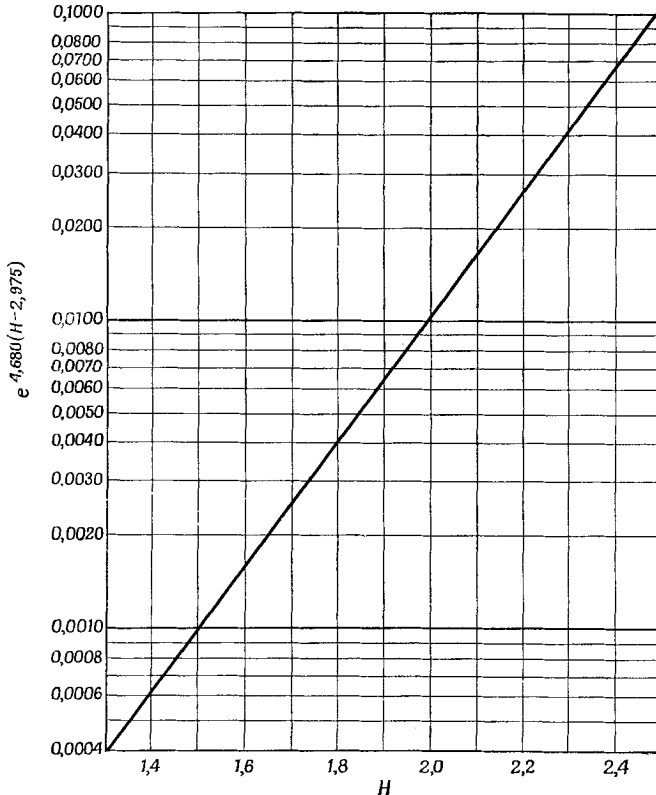
Из первого уравнения (уравнение количества движения, которое упоминалось выше) следует, что скорость изменения толщины



Ф и г. 7. Зависимость  $\tau_w/2q$  от  $Re_\theta$  [19].

потери импульса  $d\theta/dx$  зависит от двух факторов: скорости вне пограничного слоя и вязких сил, представленных здесь касательным напряжением. Второе и третье уравнения необходимы для

определения  $H$  и  $\tau$ , входящих в первое уравнение;  $x$  — расстояние вдоль поверхности, измеряемое от точки, в которой начинается турбулентное течение. Этот метод относительно прост, так как предполагается, что критерий отрыва зависит только от параметра  $H$ . Считается, что отрыв турбулентного потока происходит на коротком участке, где  $H$  быстро растет и достигает значений



Ф и г. 8. Зависимость  $e^{4,680(H-2,975)}$  от  $H$  [19].

1,8—2,6. Из решения дифференциального уравнения можно определить значение формпараметра  $H$  в любой заданной точке на поверхности тела и тем самым выяснить, происходит ли отрыв потока в этой точке.

Для численного интегрирования этих уравнений необходимо правильно задать начальные значения скорости, толщины потери импульса пограничного слоя и формпараметра. Начальные значения переменных  $\theta$  и  $H$  подставляются в первые два уравнения. Это позволяет найти значения  $d\theta/dx$  и  $dH/dx$  в начальной точке.



Затем к начальным значениям  $\theta$  и  $H$  добавляются соответствующие приращения  $\Delta\theta$  и  $\Delta H$  и новые переменные  $\theta$  и  $H$  подставляются в первые два уравнения. Процесс повторяется до тех пор, пока сумма всех приращений  $x$  не станет равна интервалу интегрирования. Если разность  $dH/dx$  между двумя последовательными значениями  $x$  обозначить через  $\Delta(dH/dx)$ , то  $\Delta(dH/dx)\Delta x$  является критерием для определения максимальной ошибки на любом шаге интегрирования. Максимальную ошибку можно уменьшить выбором меньшего приращения  $\Delta x$ . Если величина  $(\theta/q)(dq/dx)(2q/\tau_w)$  очень мала или положительна, то толщина пограничного слоя не очень чувствительна к начальному значению параметра  $H$ ; кроме того, как выяснил Заат [20], положение точки отрыва весьма слабо зависит от начального значения  $H$ . При умеренном росте давления с учетом замечания Ротта о начальном значении  $H$  можно утверждать, что это значение  $H$  не оказывает сильного влияния на отрыв потока. Результаты простого и четко поставленного эксперимента Клаузера [21] не совпадают с выводами теории Денхоффа — Тетервина. Подробнее об этом можно сказать следующее.

Денхофф использовал универсальное семейство профилей скорости в виде зависимости  $u/u_e$  от  $y/\theta$ , где  $y$  — координата, направленная по нормали к поверхности. Клаузер доказал, что такого универсального семейства нет. Кроме того, Денхофф принял  $H = 1,286$  для нулевого градиента давления, основываясь на законе степени  $1/7$ . Это значение  $H$  появилось в уравнении (7). Клаузер показал, что  $H$  не равно 1,286 для закона степени  $1/7$  и что  $H$  изменяется вместе с  $c_f$  даже при постоянном давлении. Поэтому решение уравнения (7) не совпадает с экспериментальными результатами Клаузера. Наконец, Денхофф предполагал, что степенной закон изменяется с изменением числа Рейнольдса, а не градиента давления. Клаузер показал, что градиент давления оказывает сильное влияние на степенной закон, а также что параметр  $H$  учитывает влияние не только градиента давления на форму профиля скорости, но и поверхностного трения [22]. На шероховатой поверхности с нулевым градиентом давления могут быть достигнуты, не вызывая отрыва потока, значения  $H$  от 2,2 до 2,6. Так как уравнение пограничного слоя нелинейно и его решение зависит от предыстории, то с помощью однопараметрического семейства кривых невозможно описать поведение турбулентного пограничного слоя при отличном от нуля градиенте давления. Исключение составляет профиль «равновесной» скорости  $(u - u_e)/u^*$  в функции  $y/\delta$ , где  $u$  — скорость внутри пограничного слоя в направлении потока и  $u^*$  — динамическая скорость.

Клаузер в экспериментах выявил основные свойства турбулентного течения и сравнил их с результатами экспериментов Денхоффа и Тетервина. Как будет показано далее, еще до того, как Клаузер критически прокомментировал метод Денхоффа — Тетер-

вина, Гарнер [23] уже усовершенствовал этот метод. Сам Клаузер не разработал более надежного метода определения отрыва турбулентного потока.

### 2.1.7. Критерий Гарнера

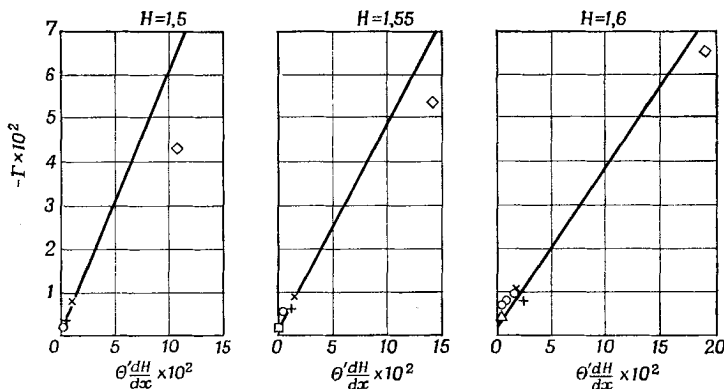
Гарнер [23] разработал численный метод расчета нарастания пограничного слоя. Этот метод является комбинацией двух существующих методов Денхоффа и Хоурта. За критерий отрыва принимается равенство нулю коэффициента поверхностного трения. На основе экспериментальных данных в интервале чисел Рейнольдса  $0,35 \cdot 10^6 \leq Re \leq 4,18 \cdot 10^6$  выведено эмпирическое уравнение. Хоурт ввел два параметра [24]

$$\zeta = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} Re_\theta^{1/n},$$

где  $n$  должно быть задано, индекс  $w$  относится к значениям параметра на стенке, и

$$\Gamma' = \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx}.$$

Используя численное решение, в котором предполагается, что  $\zeta$



Ф и г. 9а. Зависимость  $\theta'$  ( $dH/dx$ ) от  $\Gamma$  для  $H = 1,5, 1,55, 1,6$  [23].

и  $H$  являются функциями только  $\Gamma'$ , Хоурт преобразовал к удобной форме уравнение количества движения пограничного слоя. Однако его метод не дает удовлетворительных результатов при определении точки отрыва.

Гарнер представил уравнение количества движения в том же виде, что и Хоурт [24]. Приняв для поверхностного трения степенной закон [25], он ввел два параметра

$$\theta' = \theta Re_\theta^{1/n} \text{ и } \Gamma = \frac{\theta'}{u_e} \frac{du_e}{dx},$$

где  $n$  можно считать равным 6,  $x$  — расстояние вдоль криволинейной стенки.

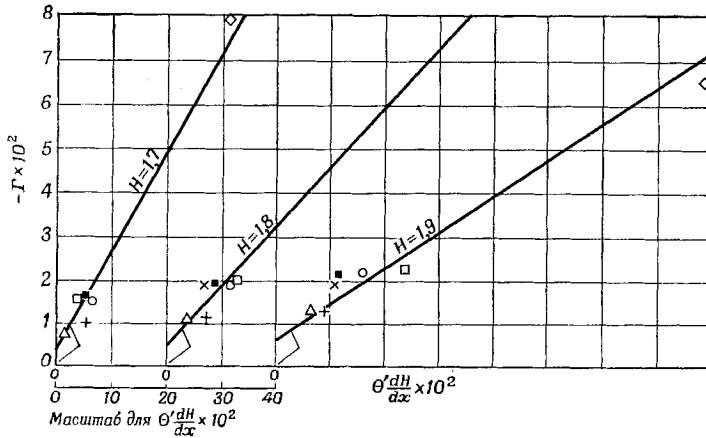
Кроме того, Гарнер тщательно изучил влияние перехода на отрыв турбулентного потока и вывел следующие уравнения: уравнение количества движения

$$\frac{d\theta'}{dx} = \frac{7}{6} \left\{ \xi - \Gamma \left( H + \frac{13}{7} \right) \right\} \tag{8}$$

и эмпирическое уравнение

$$\theta' \frac{dH}{dx} = e^{5(H-1,4)} \{ -\Gamma - A(H-1,4) \}. \tag{9}$$

Видоизмененные кривые, полученные при решении этого уравнения, с  $A = 0,0135$  представлены на фиг. 9а и 9б. Отрыв происходит при  $H = 2,6$ .



Ф и г. 9б. Зависимость  $\theta' (dH/dx)$  от  $\Gamma$  для  $H = 1,7, 1,8, 1,9$  [23].

Для заданного распределения скорости вычисления производятся в следующей последовательности:

1. Рассчитывается ламинарный пограничный слой перед переходом в турбулентный.
2. Находится точка на поверхности, в которой происходит переход, если он вообще имеет место.
3. Значение  $\theta$  в области перехода определяется по результатам п. 1. Затем можно вычислить значение  $\theta'$  сразу после перехода, так как значение  $\theta$  в области перехода непрерывно.
- 4а. Если переход происходит в точке максимума скорости или ниже по потоку, то предполагается, что сразу после пере-

хода  $dH/dx = 0$ , т. е.

$$H = 1,4 - \frac{\Gamma}{0,0135}. \quad (10)$$

46. Если переход происходит выше точки максимума скорости, то можно считать, что параметр  $H$  постоянен между началом перехода и точкой максимума скорости. Значение  $\theta'$  в точке максимума скорости вычисляется по формуле

$$u_e^k \theta' = [u_e^k \theta']_{\text{перех}} + 0,007623 \int u_e^k dx, \quad (11)$$

где индекс «перех» относится к величине в начале перехода,  $k = 7/6 H + 13/6$  и интегрирование производится от начала перехода до точки максимума скорости.

5. Наконец, по уравнениям (8) и (9) определяется точка отрыва. Приведем следующий пример. Пусть  $\xi = 0,006534$ ,  $A = 0,0135$  и  $\frac{c}{u_e} \frac{du_e}{dx}$  является функцией  $x/c$ , где  $c$  — характерная длина, например хорда. Принимая  $s = x/c - (x/c)_0$ , где  $(x/c)_0$  — начальное значение  $x/c$ , можно записать

$$\frac{c}{u_e} \frac{du_e}{dx} = g_0 + g_1 s + g_2 \frac{s^2}{2!} + \dots,$$

$$\frac{\theta'}{c} = \varphi_0 + \varphi_1 s + \varphi_2 \frac{s^2}{2!} + \dots,$$

$$H = H_0 + H_1 s + H_2 \frac{s^2}{2!} + \dots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в уравнении (8), найдем

$$\varphi_1 = \frac{7}{6} \xi - k \varphi_0 g_0,$$

$$\varphi_2 = -k (\varphi_0 g_1 + \varphi_1 g_0) - \frac{7}{6} \varphi_0 g_0 H_1, \quad (12)$$

$$\varphi_3 = -k (\varphi_0 g_2 + 2\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_0) - \frac{7}{3} (\varphi_0 g_1 + \varphi_1 g_0) H_1 - \frac{7}{6} \varphi_0 g_0 H_2,$$

$$k = \frac{7}{6} \left( H_0 + \frac{13}{7} \right).$$

Аналогично из уравнения (9) имеем

$$\varphi_0 H_1 = E \{ -\varphi_0 g_0 - A (H_0 - 1,4) \},$$

$$\varphi_0 H_2 + \varphi_1 H_1 = E \{ -(\varphi_0 g_1 + \varphi_1 g_0) - A H_1 + 5 H_1 \{ -\varphi_0 g_0 - A (H_0 - 1,4) \} \},$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 H_3 + 2\varphi_1 H_2 + \varphi_2 H_1 &= E [ -(\varphi_0 g_2 - 2\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_0 + AH_2) + \\ &+ 5H_1 \{ -\varphi_0 g_1 - \varphi_1 g_0 - AH_1 \} + \\ &+ (5H_2 + 25H_1^2) \{ -\varphi_0 g_0 - A(H_0 - 1,4) \}], \\ E &= e^{5(H_0 - 1,4)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если начальные значения берутся в точке перехода, то  $H_1 = 0$  и уравнения (12) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{7}{6} \zeta - k\varphi_0 g_0, \\ \varphi_2 &= -k(\varphi_0 g_1 + \varphi_1 g_0), \\ \varphi_3 &= -k(\varphi_0 g_2 + 2\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_0) - \frac{7}{6} \varphi_0 g_0 H_2, \\ k &= \frac{7}{6} \left( H + \frac{13}{7} \right) = 3,8 - \frac{7}{6} \frac{\varphi_0 g_0}{A}, \end{aligned} \quad (12a)$$

а уравнения (13) записываются в виде

$$\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ \varphi_0 H_2 &= -E(\varphi_0 g_1 + \varphi_1 g_0), \\ \varphi_0 H_3 + 2\varphi_1 H_2 &= -E(\varphi_0 g_2 + 2\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_0 + AH_2), \\ E &= e^{-\varphi_0 g_0 / A}. \end{aligned} \quad (13a)$$

Если переход начинается в точке максимума скорости, то уравнения (12a) и (13a) существенно упрощаются и в результате

$$\varphi_1 = 0,007623, \quad \varphi_2 = 3,8\varphi_0 g_1, \quad \varphi_3 = 3,8(\varphi_0 g_2 + 2\varphi_1 g_1), \quad (12б)$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = -g_1, \quad H_3 = -g_2 + \frac{A}{\varphi_1} g_1, \quad (13б)$$

где  $A = 0,0135$ .

Теперь для численного интегрирования нужно знать величины  $d\theta'/dx$  и  $c(dH/dx)$  через равные промежутки  $x/c$ . Для вычисления этих величин Гарнер использовал уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\theta'}{dx} &= \varphi_1 + \varphi_2 s + \varphi_3 \frac{s^2}{2!} + \dots, \\ c \frac{dH}{dx} &= H_1 + H_2 s + H_3 \frac{s^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Чтобы получить численные решения, составляется таблица разностей для  $d\theta'/dx$  и  $c(dH/dx)$ , включающая, при необходимости, разности третьего и четвертого порядков.

Принимая

$$c \frac{dH}{dx} = q_n \text{ и } H = H(n),$$

находим

$$\frac{x}{c} = \left( \frac{x}{c} \right)_0 + n \left( \Delta \frac{x}{c} \right)$$

и

$$\begin{array}{cccc}
 q_0 & \Delta^1 q_0 & & \\
 q_1 & \Delta^1 q_1 & \Delta^2 q_0 & \\
 q_2 & \Delta^1 q_2 & \Delta^2 q_1 & \Delta^3 q_0 \\
 q_3 & \Delta^1 q_3 & \Delta^2 q_2 & \Delta^3 q_1 \\
 q_4 & & & \Delta^4 q_0
 \end{array}$$

Составляется интерполяционная формула

$$q_{4+\lambda} = q_4 + \lambda \Delta^1 q_3 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!} \Delta^2 q_2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{3!} \Delta^3 q_1 + \\
 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{4!} \Delta^4 q_0.$$

Теперь  $H(4+r) = H(4) + \int q_n d(x/c)$  с пределами интегрирования от

$$\frac{x}{c} = \left(\frac{x}{c}\right)_0 + 4 \left(\Delta \frac{x}{c}\right)$$

до

$$\frac{x}{c} = \left(\frac{x}{c}\right)_0 + (4+r) \left(\Delta \frac{x}{c}\right),$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 H(4+r) &= H(4) + \left(\Delta \frac{x}{c}\right) \int_0^r q_{4+\lambda} d\lambda = H(4) + \\
 &+ \left(\Delta \frac{x}{c}\right) \left\{ r q_4 + \frac{1}{2} r^2 \Delta^1 q_3 + \frac{1}{12} r(2r+3) \Delta^2 q_2 + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{24} r^2 (r+2)^2 \Delta^3 q_1 + \dots \right\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Для удобства коэффициенты уравнения (14) для ряда значений  $r$  представлены в табл. 1.

Таблица 1 [23]

$r$	$1/2 r^2$	$1/12 r(2r+3)$	$1/24 r^2 \times$ $\times (r+2)^2$	$r$	$1/2 r^2$	$1/12 r(2r+3)$	$1/24 r^2 (r+2)^2$
0,125	0,00781	0,03385	0,00294	0,8	0,32	0,30667	0,20907
0,2	0,02	0,05667	0,00807	0,875	0,38281	0,34635	0,26368
0,25	0,03125	0,07292	0,01318	1,0	0,5	0,41667	0,375
0,375	0,07031	0,11719	0,03305	1,125	0,63281	0,49219	0,51498
0,4	0,08	0,12667	0,0384	1,25	0,78125	0,57292	0,68766
0,5	0,125	0,16667	0,06510	1,50	1,125	0,75	1,14844
0,6	0,18	0,21	0,1014	2,0	2,0	1,16667	2,66667
0,625	0,19531	0,22135	0,11215	2,5	3,125	1,66667	5,27344
0,75	0,28125	0,28125	0,17725				

Далее

$$H(5) = H(4) + \left(\Delta \frac{x}{c}\right) \left(q_4 + \frac{1}{2} \Delta^1 q_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_1 + \dots\right). \quad (15)$$

Применяя тот же метод для определения  $d\theta'/dx$ , найдем значение  $\theta'/c$  в точке

$$\frac{x}{c} = \left(\frac{x}{c}\right)_0 + 5 \left(\Delta \frac{x}{c}\right)$$

из уравнения, аналогичного (15).

Затем из (8) и (9) находятся значения  $d\theta'/dx$  и  $dH/dx$  в точке

$$\frac{x}{c} = \left(\frac{x}{c}\right)_0 + 5 \left(\Delta \frac{x}{c}\right)$$

Теперь, чтобы вычислить значения  $\theta'/c$  и  $H$  в точке

$$\frac{x}{c} = \left(\frac{x}{c}\right)_0 + 6 \left(\Delta \frac{x}{c}\right),$$

таблица разностей расширяется и т. д.

Подробнее численный метод изложен в книге Уайтекера и Робинсона [26]. Недостатком применения линейной интерполяции при численном интегрировании является ограничение на длину шага (определяемую требуемой точностью) и возрастающая трудоемкость составления таблицы разностей. Однако если значенный  $d\theta'/dx$  и  $c$  ( $dH/dx$ ) достаточно для составления новых таблиц разностей, то для ускорения счета интервал  $\Delta(x/c)$  может быть удвоен. На следующих примерах показаны способы удвоения интервала. Предположим, что параметр  $H(8)$  уже вычислен и требуется увеличить интервал от  $\{\Delta(x/c)\}$  до  $2\{\Delta(x/c)\}$ .  $H(10)$  можно найти двумя способами:

а. Используя уравнение (14) и полагая  $r = 2$ . Тогда

$$H(10) = H(8) + \left(\Delta \frac{x}{c}\right) \left\{2q_8 + 2\Delta^1 q_7 + \frac{7}{6} \Delta^2 q_6 + \frac{8}{3} \Delta^3 q_5 + \dots\right\}.$$

б. Составляя новую таблицу разностей, в которой  $q'_n = q_{2n}$ . Тогда

$$H(10) = H(8) + \left(2\Delta \frac{x}{c}\right) \left\{q'_4 + \frac{1}{2} \Delta^1 q'_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 q'_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 q'_1 + \dots\right\}.$$

Если результаты, полученные способами «а» и «б», совпадают, то интервал можно удвоить. В случае дробного приращения интервала путем подбора соответствующего значения  $r$  по уравнению, аналогичному (14), выполняется вычисление на первом шаге с новым интервалом. Однако, чтобы составить новую таблицу разностей, должны быть известны значения  $d\theta'/dx$  и  $c$  ( $dH/dx$ )

для нескольких дополнительных значений  $x/c$ . Их можно получить путем интерполяции.

Так как в уравнения (8) и (9) входит  $H$ , их решение упрощается при использовании табл. 2.

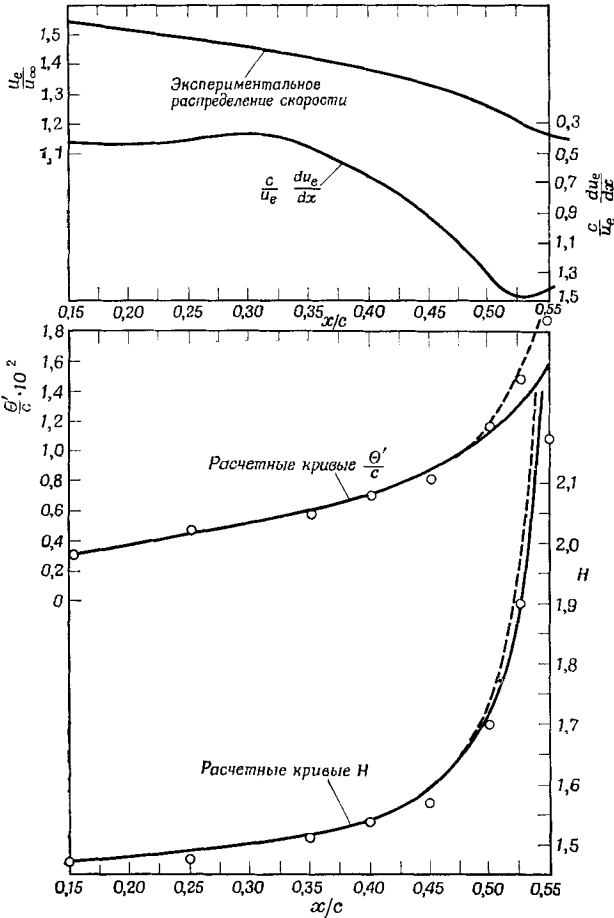
Таблица 2 [23]

$H$	$\frac{7}{6}(H+\frac{13}{7})$	$1,35(H-\frac{1}{4})$	$e^{-5(H-1,4)}$	$H$	$\frac{7}{6}(H+\frac{13}{7})$	$1,35(H-\frac{1}{4})$	$e^{-5(H-1,4)}$
1,40	3,80000	0	1	1,52	3,94000	0,1620	1,82212
1,40125	3,80146	0,00169	1,00627	1,53	3,95167	0,1755	1,91554
1,4025	3,80292	0,00337	1,01258	1,54	3,96333	0,1890	2,01375
1,40375	3,80437	0,00506	1,01892	1,55	3,97500	0,2025	2,11700
1,405	3,80583	0,00675	1,02531	1,56	3,98667	0,2160	2,22554
1,4075	3,80875	0,01012	1,03821	1,57	3,99833	0,2295	2,33964
1,41	3,81167	0,01350	1,05127	1,58	4,01000	0,2430	2,45960
1,4125	3,81458	0,01687	1,06449	1,59	4,02167	0,2565	2,58571
1,415	3,81750	0,02025	1,07788	1,60	4,03333	0,270	2,71828
1,4175	3,82042	0,02362	1,09144	1,62	4,05667	0,297	3,00416
1,42	3,82333	0,02700	1,10517	1,64	4,08000	0,324	3,32012
1,425	3,82917	0,03375	1,13314	1,66	4,10333	0,351	3,66930
1,43	3,83500	0,04050	1,16183	1,68	4,12667	0,378	4,05520
1,435	3,84083	0,04725	1,19124	1,70	4,15000	0,405	4,48169
1,44	3,84667	0,05400	1,22140	1,72	4,17333	0,432	4,95303
1,445	3,85250	0,06075	1,25232	1,74	4,19667	0,459	5,47395
1,45	3,85833	0,06750	1,28402	1,76	4,22000	0,486	6,04965
1,455	3,86417	0,07425	1,31683	1,78	4,24333	0,513	6,68590
1,46	3,87000	0,08100	1,34986	1,80	4,26667	0,540	7,38904
1,465	3,87583	0,08775	1,38403	1,85	4,32500	0,6075	9,4877
1,47	3,88167	0,09450	1,41907	1,90	4,38333	0,675	12,1825
1,475	3,88750	0,10125	1,45499	1,95	4,44167	0,7425	15,6426
1,48	3,89333	0,10800	1,49182	2,0	4,50000	0,810	20,0855
1,485	3,89917	0,11475	1,52959	2,10	4,61667	0,945	33,1155
1,49	3,90500	0,12150	1,56831	2,20	4,73333	1,080	54,5972
1,495	3,91083	0,12825	1,60801	2,30	4,85000	1,215	90,0171
1,50	3,91667	0,13500	1,64872	2,40	4,96667	1,350	148,413
1,51	3,92833	0,14850	1,73325	2,50	5,08333	1,485	244,692

Если используется экспериментальное распределение скоростей, то нет необходимости в вычислении разностей выше требуемого порядка точности определения экспериментальных значений  $(c/u_e)$   $(du_e/dx)$ . В большинстве случаев разностями третьего порядка можно пренебречь.



Как можно видеть из фиг. 10, совпадение расчетных и полученных из эксперимента значений  $H$  и  $\theta'/c$  для крылового профиля под углом атаки вполне удовлетворительное.



Исходя из уравнения неразрывности и уравнений Рейнольдса для двумерного турбулентного потока, Коулмен [27] вывел урав- Ф и г. 10. Крыловой профиль  $NACA\ 65(216)-222$ ,  $\alpha = 10,1^\circ$ ,  $Re = = 2,64 \cdot 10^6$  [23].

Штриховые кривые соответствуют величине  $\theta'/c$  из работы [23]; сплошные кривые соответствуют  $\theta'/c = 0,007623$ ;  $\circ$  — эксперимент.

нения, по форме аналогичные эмпирическим уравнениям Гарнера

$$\theta \frac{dH}{dx} = F \left( \frac{\theta}{\tau_w}, \frac{dp}{dx}, Re_\theta, H \right)$$

и

$$\frac{d\theta}{dx} = c_f \left[ 1 + \frac{\theta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} (H + 2) \right].$$

По сравнению с методом Денхоффа — Тетервина Гарнер ввел следующие улучшения.

Исследование перехода и расчет отрыва выполнены более четко.

В эмпирическое соотношение Гарнера входят три основных параметра  $(\theta/\tau_w)$ ,  $(dp/dx)$ ,  $H$  и  $Re_\theta$  вместо двух  $(\theta/\tau_w)$ ,  $(dp/dx)$  и  $H$  в методе Денхоффа — Тетервина.

Гарнер использовал уравнение для поверхностного трения, учитывающее влияние градиента давления, оправдывая тем самым применение в методе Денхоффа — Тетервина формулы Сквайра и Янга [28] для поверхностного трения плоской пластины.

Наконец, для случая

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\theta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} = 0$$

принято значение  $H = 1,4$ , являющееся лучшей аппроксимацией (как подтвердил Коулмен [27]), чем значение  $H = 1,286$ , принятое в методе Денхоффа — Тетервина.

Вследствие этого метод Гарнера дает более надежные результаты, а расчет выполняется быстрее (при умеренных градиентах давления, т. е. таких, которые существуют на крыловом профиле), чем по методу Денхоффа — Тетервина. Однако Гарнеру не удалось осуществить систематическую корреляцию эмпирических значений  $\Gamma$  и  $H$  по числам Рейнольдса.

Для общности, кроме упомянутых выше критериев, следует упомянуть еще один. Из эксперимента Шубауэра и Клебанова на участке стенки аэродинамической трубы, выступающей в виде крылового профиля, следует, что отрыв турбулентного потока происходит при  $H = 2,8$ .

Из различных критериев отрыва потока, основанных на значении параметра  $H$ , ясно, что отрыв происходит в интервале значений  $H$  от 1,8 до 2,8. Поэтому один только параметр  $H$  не может служить критерием отрыва. Чтобы произошел отрыв, кроме достижения критического значения параметра  $H$ , необходимо резкое возрастание  $H$  вблизи отрыва.

### 3. ОТРЫВ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА

Проблема отрыва потока принципиально важна для течений в расширяющихся частях каналов, или в диффузорах, когда кинетическая энергия при замедлении превращается в потенциальную, так как повышение статического давления вниз по потоку спо-

способствует возникновению отрыва. Диффузоры применяются в турбинах, насосах, вентиляторах, компрессорах и в других роторных машинах. Преобразование кинетической энергии в потенциальную может происходить с потерей энергии из-за явлений, вызванных вязкостью, включая отрыв потока. Эффективность преобразования энергии влияет на к. п. д. машины. Кроме того, также важны свойства выходящего из диффузора расширенного потока, если за диффузором находятся другие элементы роторной машины. Управляя отрывом потока в диффузоре, можно получить высокий к. п. д. гидромашин. Из-за больших чисел Рейнольдса и положительного градиента давления, который ускоряет переход ламинарного течения в турбулентное, поток в диффузоре, как правило, турбулентный.

В прошлом диффузору было посвящено много исследований, но большинство из них были экспериментальными и непосредственно не связаны с отрывом потока. На основе нескольких работ был сделан обзор результатов исследований диффузоров. Исследовалась геометрия диффузоров, максимальная эффективность, оптимальный угол раскрытия, влияние геометрии входного сечения и турбулентности набегающего потока. Хотя перечисленные проблемы не всегда непосредственно связаны с отрывом потока, накопленные экспериментальные данные могут оказаться очень полезными для понимания нерешенных проблем отрыва внутренних течений.

В 1909 г. Гибсон [30] провел обширные эксперименты с водяным потоком в диффузорах различного типа. Было исследовано двадцать пять различных диффузоров (изготовленных из дерева) в интервале средних скоростей потока 1,2—8 м/с. Площадь поперечного сечения диффузоров круговой, квадратной и прямоугольной форм изменялась вдоль оси по линейному закону. Отношение площадей составляло 2,25, 4 и 9. Потери энергии максимальны при значении угла, образованного противоположными сторонами диффузора, от 5,5 до 11°. Потери минимальны (13,5%) в диффузоре с круговым поперечным сечением, в диффузоре с квадратным поперечным сечением они составили 20—33%. Аналогичные явления наблюдал Паттерсон [31]. При угле раскрытия, образованном парами сторон диффузора,  $2\theta = 10 \div 14^\circ$  потери в диффузорах с прямоугольным поперечным сечением почти такие же, как в диффузоре с круглым сечением при том же угле  $2\theta$ . При больших или меньших значениях угла  $2\theta$  потери в диффузорах с прямоугольным поперечным сечением значительно выше.

Гибсон предложил три оптимальных типа профилированных диффузоров. Первый имеет форму, обеспечивающую распределение скорости потенциального течения  $du_e/dl = \text{const}$  по всей длине диффузора. Во втором  $du_e/dx = \text{const}$ . Третий обеспечивает постоянную потерю полного напора на единицу длины диффузора.

Из этих трех типов последний оказался самым эффективным. Гибсон не ставил перед собой задачу создания диффузора с оптимальной формой или улучшения его эффективности, он просто показал, что эффективность диффузора при заданных длине и отношении площадей в значительной степени зависит от распределения площадей поперечного сечения. Это распределение является важным фактором, влияющим на развитие пограничного слоя и отрыв потока. Как показал Гибсон, диффузор с линейным распределением площадей по длине не имеет других преимуществ, кроме простой формы.

В 1926 г. Ведерников [32] исследовал двумерный диффузор с прямолинейными стенками, который мог быть использован в качестве элемента аэродинамической трубы. Диффузор имел угол раскрытия  $2\Theta = 0-28^\circ$ , длину 1 м и площадь входного сечения  $0,1 \text{ м}^2$ . Скорость воздушного потока составляла от 7 до 27 м/с. При  $2\Theta = 14^\circ$  происходило образование вихрей, а при  $2\Theta = 16^\circ$  в области отрыва возникало обратное течение. Минимум потерь наблюдался при  $2\Theta = 8-10^\circ$ . Паттерсон [31] рассмотрел экспериментальные данные Гибсона [40], Петерса [15], Ведерникова [32], Вюллерса [33] и предложил руководствоваться при разработке диффузоров следующими рекомендациями:

1. Оптимальные углы раскрытия  $2\Theta$  для диффузора с круглым поперечным сечением  $6-8^\circ$ , для диффузора с квадратным поперечным сечением  $6^\circ$ , для диффузора с прямоугольным поперечным сечением, у которого две стенки остаются параллельными,  $11^\circ$ .
2. При заданной степени расширения наиболее эффективен диффузор с круглым поперечным сечением.
3. Чем тоньше пограничный слой на входе, тем больше эффективность диффузора.
4. При угле раскрытия  $15^\circ \leq 2\Theta \leq 30^\circ$  эффективность диффузора можно увеличить за счет скругления угловых точек входного участка.
5. При углах раскрытия более  $50^\circ$  потери в диффузоре можно снизить на 40—50% путем закручивания потока по закону «твердого тела» либо с помощью дефлекторов, отклоняющих и закручивающих поток.

Проблемы отрыва потока в работе Паттерсона рассматриваются лишь косвенно. Качественно отрыв потока в диффузорах исследовал Полцин [34], используя метод визуализации. Воздушный поток можно наблюдать с помощью шпирен-метода [35, 36], или, как его еще называют, метода Теплера, и с помощью теневого метода, или метода Дворжака. Модель двумерного дозвукового диффузора имела прямоугольное поперечное сечение, так как из-за искривления смотрового окна при круглом поперечном сечении были бы невозможны наблюдения с помощью шпирен-

метода. Интервал чисел Рейнольдса воздушного потока, вычисленных по средней скорости во входном сечении диффузора и по гидравлическому диаметру, составлял  $5 \cdot 10^3 < Re < 75 \cdot 10^3$ . Тем не менее приведенные ниже результаты наблюдений могут быть полезны для изучения свойств потока в диффузоре.

Эксперимент проводился при углах раскрытия диффузора до  $2\theta = 20^\circ$ . При больших углах раскрытия отрыв потока не мог стабилизироваться на верхней стенке, и точка отрыва внезапно начинала перемещаться к входному сечению. Результаты исследований отрыва на гладкой и шероховатой поверхностях представлены на фиг. 11 и 12 в зависимости не только от угла раскрытия диффузора, но и от отношения площадей, т. е. от расстояния вниз по потоку.

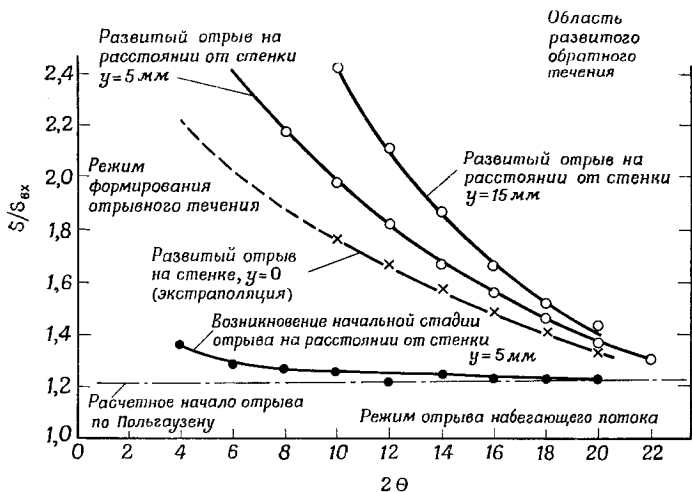
Как и ожидалось, отрыв возникает ниже по потоку при уменьшении угла раскрытия и наоборот. Как видно из фиг. 12, отрыв возникает раньше на шероховатой поверхности, чем на гладкой. (Эта тенденция заметнее проявляется с увеличением отношения площадей.)

Выделение двух стадий отрыва потока (начальная стадия и стадия полностью развитого отрыва) было предложено Полцином (табл. 3 и фиг. 11, 12). Отрыв потока в начальной стадии не является непрерывным процессом: по своей природе это переходный процесс. Анализируя расчетные методы, Полцин выяснил, что

Таблица 3

РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ ОТРЫВА НА РАССТОЯНИИ  $y = 5$  мм ОТ СТЕНКИ ДИФфуЗОРА С УГЛОМ РАСКРЫТИЯ  $2\theta = 10^\circ$  И  $Re = 40\,000$  [34]

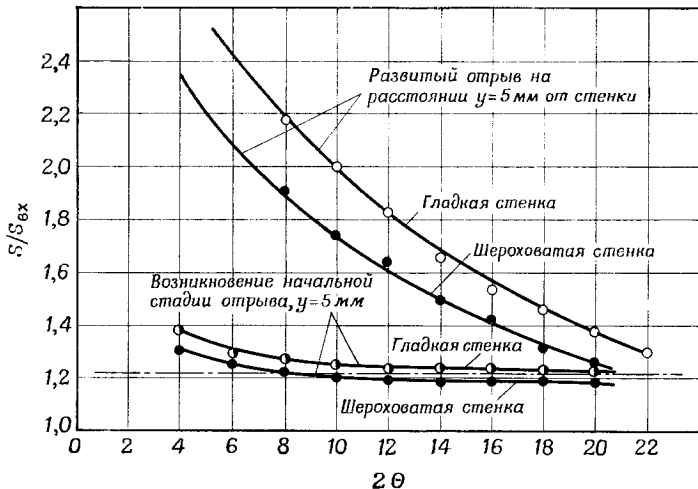
Сечение, в котором производилось наблюдение	Расстояние вдоль оси диффузора, мм	Результаты наблюдений
1,00	0	Параллельный поток, возмущений нет
1,2	110	Параллельный поток, небольшое отклонение полос в сторону стенки, возникновение пульсаций первой полосы
1,26	150	Сильная неустойчивость; быстрое мелькание полос у стенки; возникновение неуставовившегося перемежающегося отрыва
1,456	260	Сильные пульсации, сбегание вниз по потоку различных вихрей
1,7	400	Сбегание вниз по потоку непрерывно следующих один за другим отрывающихся вихрей
2,0	575	Начало непрерывного отрыва вихрей
2,14	650	Первая полоса на расстоянии $y = 5$ мм соответствует обратному течению
2,45	840	Сильное обратное течение



Ф и г. 11. Режимы отрыва в двумерном диффузоре,  $Re = 40\,000$  (гладкая поверхность) [34].

$$e = \frac{S}{S_{вх}} = \frac{\text{Площадь рассматриваемого сечения}}{\text{Площадь входа}},$$

$2\theta$  — угол раскрытия диффузора (град.).

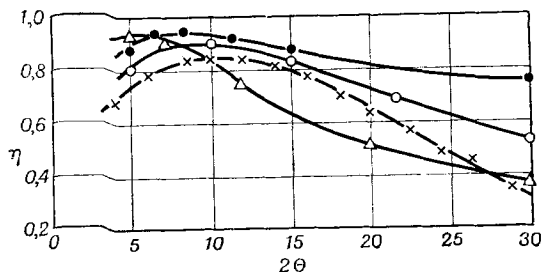


Ф и г. 12. Влияние шероховатости стенки на отрыв потока в двумерном диффузоре,  $Re = 40\,000$  [34].

$$e = \frac{S}{S_{вх}} = \frac{\text{Площадь рассматриваемого сечения}}{\text{Площадь входа}},$$

$\theta$  — угол раскрытия диффузора (град.).

метод Польгаузена [37] пригоден для определения начальной стадии отрыва. В начальной стадии положение точки отрыва не зависит от числа Рейнольдса. Однако Полцин наблюдал, что полностью развитый отрыв зависит от числа Рейнольдса и с увеличением числа Рейнольдса точка развитого отрыва перемещается вверх по потоку. Ясно, поэтому, что метод Польгаузена [37] непригоден для расчета внезапного перемещения точки отрыва. На



Ф и г. 13. Эффективность диффузора [34].

▲ Гибсон,  $A_1/A_2 = 4$ , прямоугольное поперечное сечение; ○ Гибсон,  $A_1/A_2 = 4$ , квадратное поперечное сечение; × Ведерников, прямоугольное поперечное сечение; ● Петерс,  $A_1/A_2 = 2, 3, 4$ , круговое поперечное сечение;  $A_1$  — площадь входа,  $A_2$  — площадь выхода,  $2\theta$  — угол раскрытия диффузора.

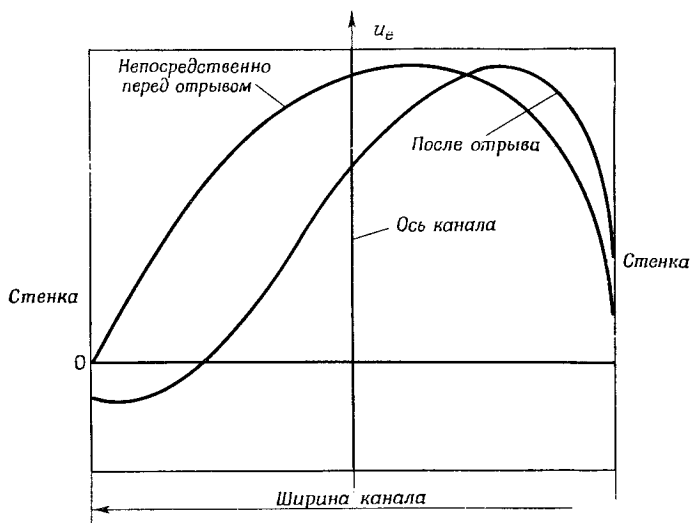
фиг. 13 приведена зависимость эффективности диффузора (определенной как отношение действительного приращения давления к приращению давления без потерь) от угла раскрытия  $2\theta$ .

Величина  $\eta$  достигает максимального значения при  $6^\circ < 2\theta < 10^\circ$ , затем быстро снижается. С ростом длины диффузора потери также растут, причем потери на трение растут быстрее, чем потери, вызванные отрывом потока. Сравнение диффузоров с одинаковым отношением давлений показывает, что при малых углах раскрытия преобладают потери на трение, а при больших углах раскрытия, наоборот, преобладают потери, вызванные отрывом и возмущением потока. Поэтому можно ожидать, что оптимальный угол раскрытия заключен между малыми и большими значениями. На фиг. 14 показано распределение скорости вблизи точки отрыва.

На левой стенке возникает возвратное течение, когда происходит отрыв потока и нарушается симметрия течения, причем максимум скорости смещается в направлении к правой стенке. Турбулентная вязкость  $\epsilon = (\tau/\rho)/(du/dy)$  не постоянна по сечению диффузора; она максимальна на стенке и уменьшается в направлении к оси диффузора. Кроме того, как и ожидалось,  $\epsilon$  увеличивается с увеличением угла раскрытия диффузора.

Рейд [38] исследовал течение воздуха в двумерных несимметричных диффузорах с плоскими стенками. Его интересовало не только влияние угла раскрытия диффузора, но и градиента давления в практически важном интервале значений  $L/W_1$ , где  $L$  — длина диффузора

и  $W_1$ —ширина входного сечения. Согласно полученным результатам, максимальная эффективность диффузора соответствует углу раскрытия  $6-7^\circ$  во всем исследованном интервале значений отношения  $L/W_1$ , причем она уменьшается всего на 2% при увеличении  $L/W_1$  от 5,50 до 21,75. Максимальное значение коэффициента восстановления давления  $C_{PR} = (p_2 - p_1)/q_1$  (где  $p_2$  и  $p_1$  — статическое давление соответственно в выходном и входном сечениях



Ф и г. 14. Распределение скорости, включая область отрыва [34].

диффузора,  $q_1$  — скоростной напор во входном сечении) достигается при угле раскрытия  $2\Theta = 12^\circ$ , когда  $L/W_1 = 5,50$ , и  $2\Theta = 9^\circ$ , когда  $L/W_1 = 21,75$ .

Для управления отрывом можно использовать тонкую центральную продольную перегородку, которая предотвращает отрыв и повышает эффективность коротких диффузоров. В диффузоре возможно также неустановившееся пульсирующее течение. При увеличении угла раскрытия диффузора постоянной длины установившееся течение преобладает до тех пор, пока коэффициент восстановления давления не достигнет максимального значения. Сразу после этого поток становится неустановившимся с интенсивной пульсацией и хаотической завихренностью. Подобные явления неоднократно наблюдались рядом исследователей.

Течение в диффузоре с прямоугольным поперечным сечением было также исследовано Талтсом [39]. Визуальные наблюдения в интервале углов раскрытия от  $0$  до  $20^\circ$  и чисел Рейнольдса



$5 \cdot 10^4 > Re > 3 \cdot 10^5$  показали, что существуют две стадии отрыва потока: «внезапное торможение на границе», при котором мгновенное значение скорости равно нулю или несколько больше нуля, и «отрыв или возвратное течение на границе», при котором среднее значение скорости равно нулю. Были получены следующие эмпирические формулы для степени расширения  $e$  и угла раскрытия диффузора  $\Theta$ :

$$e_{отр} = 1 + 0,3001 \left( \frac{x}{b_1} \right) + 0,0493 \left( \frac{x}{b_1} \right)^2 - 0,0776 \left( \frac{x}{b_1} \right)^3 + \\ + 0,0176 \left( \frac{x}{b_1} \right)^4$$

и

$$\Theta_{отр} = \text{arctg} \left\{ 0,3001 + 0,0493 \left( \frac{x}{b_1} \right) - 0,0776 \left( \frac{x}{b_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + 0,0176 \left( \frac{x}{b_1} \right)^3 \right\},$$

где  $x$  — расстояние от сечения, с которого начинается расширение, и  $b_1$  — ширина входа диффузора. Так как в любом сечении диффузора отрыву потока предшествует максимальное приращение давления, то представляет интерес следующее соотношение между максимальным приращением давления, оптимальным углом раскрытия и требуемой степенью расширения:

$$\Theta_{опт} = \Theta_1 - 12,16^\circ \eta_p \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right),$$

где  $\Theta_1$  — некоторый постоянный угол, зависящий от числа Рейнольдса,  $\eta_p$  — эффективность диффузора,  $e$  — степень расширения (отношение площади данного сечения к площади входа).

Если эффективность диффузора не зависит от длины, на которой происходит расширение, то оптимальные углы раскрытия при конечном значении степени расширения определяются по следующим формулам:

$$\Theta_{опт} = 17,6^\circ - 12,16^\circ \cdot 0,78 = 8,1^\circ \text{ при } Re = 1 \cdot 10^5,$$

$$\Theta_{опт} = 18,7^\circ - 12,16^\circ \cdot 0,79 = 9,1^\circ \text{ при } Re = 2 \cdot 10^5$$

и

$$\Theta_{опт} = 18,4^\circ - 12,16^\circ \cdot 0,84 = 8,0^\circ \text{ при } Re = 3 \cdot 10^5.$$

Коэффициент восстановления энергии в диффузоре заметно выше коэффициента восстановления давления, и разница между ними принимает максимальное значение при полностью развитом отрыве перед появлением обратного течения.

Параметры пограничного слоя на входе — толщина  $\delta$  и форм-параметр  $H = \delta^*/\theta$  — оказывают сильное влияние на развитие

турбулентного пограничного слоя и отрыв потока в диффузоре. В эксперименте Винтерница и Рэмсея [40] применялся кольцевой экран на входе в диффузор. Оказалось, что при торможении потока кольцевым экраном возрастает толщина пограничного слоя и изменяется значение  $H$ . Подробнее вопрос о влиянии экранов на отрыв потока будет рассмотрен в гл. XII.

Краткий обзор некоторых исследований отрыва внутренних течений показывает, что явления, возникающие во внутренних течениях, зависят от угла раскрытия, градиента давления в направлении течения, условий на входе, присутствия перегородок и т. д. Также известно, что в диффузорах и каналах возможно неустановившееся течение с интенсивной пульсацией. Этих фактов достаточно, чтобы убедиться в сложном характере внутреннего течения и показать, что классическую теорию пограничного слоя или решения для вязкого установившегося внешнего течения нельзя непосредственно применять к внутреннему потоку. В настоящее время нет удовлетворительного метода расчета отрыва внутреннего течения. Прежде чем пытаться решить эту сложную проблему, необходимо провести систематические исследования явлений отрыва внутреннего течения в диффузорах простой формы, постепенно переходя к формам, применяемым на практике.

### 3.1. ДВУМЕРНЫЙ ДОЗВУКОВОЙ ДИФFUЗОР С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ СТЕНКАМИ

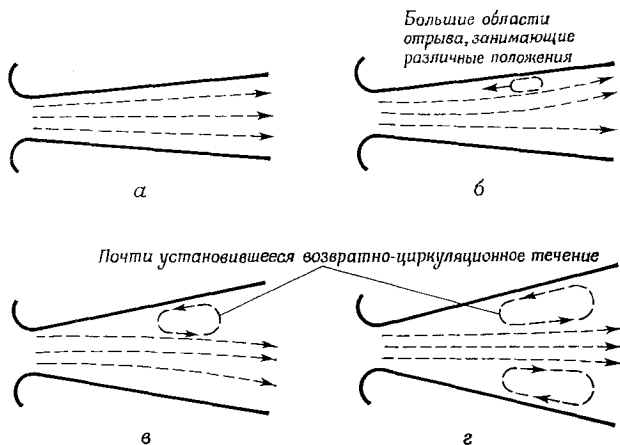
Как показали предыдущие исследования, самыми важными параметрами, влияющими на отрыв потока в двумерном диффузоре с прямолинейными стенками при дозвуковых скоростях (в присутствии или отсутствии плоских направляющих лопаток), являются угол раскрытия, отношение длины диффузора к ширине горла  $L/W_1$  и турбулентность набегающего потока. Влияние удлинения и чисел Рейнольдса пренебрежимо мало.

При увеличении угла раскрытия  $\Theta$  от  $0$  до  $45^\circ$  можно наблюдать четыре существенно различных режима течения:

- а. Безотрывное течение при малых значениях  $\Theta$  (фиг. 15, *a*; фиг. 16, *a* — *a*).
- б. Трехмерный отрыв переходного типа (фиг. 15, *б*; на фиг. 16 соответствует умеренному значению угла  $\Theta = 15^\circ$  в области между *a* — *a* и *б* — *б*). Образуется большая переходная область, в которой положение, размеры и интенсивность отрыва изменяются во времени. В этом режиме наблюдаются сильные пульсации течения.
- в. Установившееся двумерное течение (фиг. 15, *в*; на фиг. 16 соответствует довольно большому углу раскрытия  $\Theta = 17-22,5^\circ$  между *б* — *б* и *в* — *в*). Существует область полностью развитого отрыва, имеющая треугольную форму

и образованная в основном турбулентным возвратно-циркуляционным течением от выходного сечения диффузора почти до его горла. Непрерывный основной поток относительно спокойно движется около другой стенки.

- г. Отрыв потока от обеих стенок (фиг. 15, г; на фиг. 16 соответствует очень большому углу раскрытия  $\Theta = 30^\circ$  в области над кривой  $z - z$ ). Образуется струйное течение, при котором основной поток отрывается от обеих стенок сразу после критического сечения и больше не присоединяется к стенкам ниже по потоку. Такой режим течения существует только при больших углах раскрытия диффузора.



Ф и г. 15. Схематическое представление режимов течения в диффузоре [3]. а — плавное безотрывное течение; б — отрыв переходного типа (нестационарное трехмерное течение); в — полностью развитый установившийся отрыв; г — струйное течение.

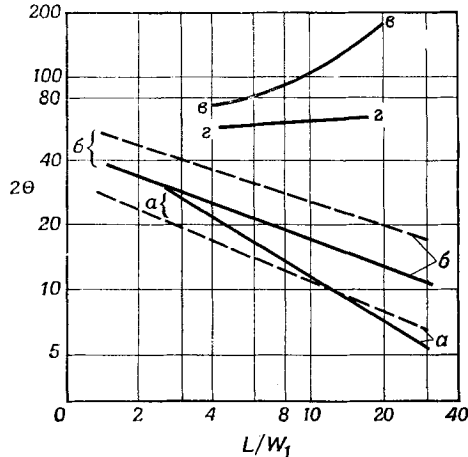
Эти выводы были сделаны авторами работ [41, 42].

При постоянном уровне турбулентности с увеличением отношения  $L/W_1$  от 4 до 20 углы раскрытия, при которых существует неустановившийся трехмерный отрыв и установившийся двумерный отрыв, уменьшаются в 2—3 раза. Однако при постоянном отношении  $L/W_1$  повышение уровня турбулентности приводит к увеличению углов раскрытия, при которых происходит переход от трехмерного отрыва переходного типа к двумерному установившемуся отрыву, приблизительно до 1,5 раза. Но это не влияет на углы раскрытия, при которых возникает трехмерный отрыв переходного типа.

Когда начинается трехмерный отрыв переходного типа, немного понижается эффективность и коэффициент восстановления

давления диффузора, а при двумерном установившемся отрыве эти параметры диффузора сильно падают.

Характеристики диффузора улучшаются при использовании коротких или длинных направляющих лопаток. Возвратное течение при этом исчезает или ослабляется; направление основного течения становится более устойчивым и упорядоченным.



Фиг. 16. Режимы течения в двумерном диффузоре с прямыми лопатками [3].

$\alpha - \alpha$  — линия заметного отрыва;  $\beta - \beta$  — граница между отрывом переходного типа и полностью развитым отрывом;  $\beta - \beta$  — переход от полностью развитого отрыва к струйному течению;  $\beta - \beta$  — переход от струйного течения к полностью развитому отрыву; — слабая турбулентность, — сильная турбулентность. (Между  $\beta - \beta$  и  $\beta - \beta$  имеется область гистерезиса [3]. — Прим. перев.)

и выравнивания профиля скорости на выходе из диффузора<sup>1)</sup>.

Можно упомянуть следующие свойства направляющих лопаток в качестве доказательства, что одной только теории пограничного слоя недостаточно при определении параметров отрыва при внутреннем течении. Например, если поместить в диффузор короткие лопатки, отрыва не произойдет, хотя положительный градиент давления удваивается по величине на стенках в сечениях, закрытых лопатками. И, наоборот, в диффузоре без лопаток при вдвое меньшем положительном градиенте давления, чем в диффузоре

Чтобы получить оптимальную конструкцию диффузора, нужно поместить короткую лопатку в плоскости симметрии вблизи горла; угол раскрытия канала, образованного стенкой и лопаткой, должен быть равен  $\sim 7^\circ$ ; длина лопатки должна вычисляться с учетом геометрии диффузора; при больших скоростях течения в диффузоре не должны возникать области течения со скоростью, близкой к скорости звука. Применение в диффузоре с большим суммарным углом раскрытия лопаток позволяет увеличить коэффициент восстановления давления от 0,38 (без лопаток) до 0,70 путем уменьшения области отрыва потока

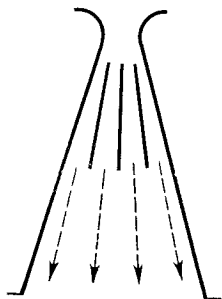
<sup>1)</sup> Установка 6—8 тонких продольных перегородок по всей длине диффузора и диска в его начале приводит к перемещению отрыва на ось диффузора и в результате к повышению коэффициента восстановления давления, однородности и устойчивости потока в коротких конических диффузорах с большими углами раскрытия [R a o D. M., A Method of Flow Stabilization with High Pressure Recovery in Short Conical Diffusers. *Aeron. J.*, 75, № 725, pp. 336—339 (1971)]. — Прим. ред.

с лопатками, происходит отрыв. Другими словами, в присутствии коротких направляющих лопаток положительный градиент давления, действующий на данный пограничный слой, при тех же условиях увеличивается более чем на 100% и уничтожает полностью развитый отрыв. Эти результаты противоречат обычным представлениям об отрыве в соответствии с классической теорией пограничного слоя и явно показывают, что для решения проблемы отрыва при внутреннем течении недостаточно одной только теории пограничного слоя.

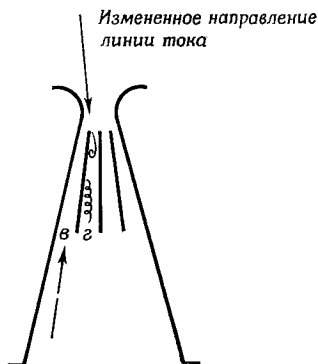
Наблюдая периодическое трехмерное неустановившееся отрывное течение вблизи стенки, Клайн [3] ввел для объяснения этих явлений так называемый сигма-параметр  $\sigma = w_b/w_e$ , где  $w_b$  — расход возвратного течения внутри контрольной поверхности, а  $w_e$  — максимальный расход, с которым оторвавшаяся от основного потока жидкость постепенно возвращается эжектированием в основной поток. Численное значение этого параметра получить нельзя, поэтому  $\sigma$  — качественный параметр. Хотя из-за этого пользоваться  $\sigma$ -параметром не так просто, тем не менее он может применяться при исследовании отрыва внутреннего потока. При  $\sigma < 1$ , т. е.  $w_e > w_b$ , отрыв не может существовать постоянно, так что течение является неустановившимся. При  $\sigma = 1$  происходит установившийся отрыв, и часть потока занимает течение с постоянной циркуляцией. При  $\sigma > 1$  существует область струйного течения периодического типа, бóльшая, чем область отрыва. В этом случае часть оторвавшегося потока отделяется и движется вниз по течению. Этот процесс непрерывно повторяется. При визуальном исследовании картины течения с помощью красителей Клайн установил, что отрыв является развивающимся процессом, т. е. он начинается в локальной области, в которой  $w_b > w_e$ . С ростом области отрыва основной поток отходит от стенки, вызывая локальное уменьшение  $w_e$  и дальнейший рост области отрыва до установления устойчивой картины течения. С помощью этого процесса развития отрыва можно объяснить эксперимент Кохрана и Клайна с направляющими лопатками.

На фиг. 17 показано установившееся течение. На фиг. 18 изображены линии тока, которые возникают, когда область отрыва начинает увеличиваться. Если условия течения соответствуют фиг. 18, то направляющие лопатки оказываются под нагрузкой, так как приобретают некоторый угол атаки вследствие изменения направления линий тока. Под действием этих нагрузок основной поток поворачивает к области, в которой начался отрыв; при этом  $w_e$  увеличивается. Так как усиление неравенства  $w_e > w_b$  способствует сокращению размеров области отрыва и повышению давления ниже по потоку, то градиент давления увеличивается, а отрыв потока ослабляется. Кроме того, каждая лопатка в интервале углов атаки, близких к нулю, подчиняется условию Жуков-

ского — Кутта, так что полученный выше результат следует также из рассмотрения каждой лопатки как крылового профиля. Действительная роль направляющих лопаток заключается в стабилизации поля течения путем изменения переходной стадии отрыва.

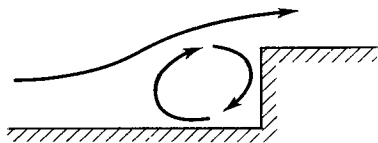


Ф и г. 17. Установившееся течение при наличии коротких направляющих лопаток,  $2\theta = 28^\circ$  [3].

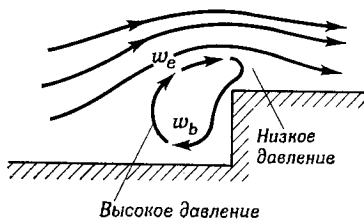


Ф и г. 18. Действие направляющих лопаток при изменяющихся условиях течения [3].

Обратное течение переходного типа (не существует без направляющих лопаток), восстанавливающее поток от  $\beta$  к  $\alpha$ .



Ф и г. 19. Отрыв потока перед уступом [3].



Ф и г. 20. Нестационарный рост области отрыва перед уступом [3].

В симметричном потоке направляющие лопатки оказывают очень слабое влияние на течение, но, как только возникает и начинает развиваться отрыв, направляющие лопатки вызывают местное увеличение  $w_e$  в соответствующих областях течения (фиг. 19, 20). Это оказывает некоторое восстанавливающее действие, которое невозможно в диффузоре без направляющих лопаток.

Различие между внешним и внутренним течениями можно также объяснить из рассмотрения процесса роста области отрыва. Аэродинамические характеристики обычного крылового профиля резко ухудшаются сразу же после возникновения сильного срыва

потока, а результаты, полученные Гибсоном [30] для конического диффузора и Кохраном и Клайном [42] для двумерного диффузора, указывают на постепенное ухудшение характеристик после возникновения срыва. По-видимому, соседняя твердая стенка оказывает ограничивающее влияние на основной поток, сдерживая рост больших областей отрыва. В отличие от этого при внешнем обтекании область отрыва разрастается до некоторых размеров, и значительная часть поверхности профиля постоянно занята областью установившегося отрыва, причем полный срыв потока начинается в относительно фиксированном положении. Однако при течении в каналах с большим отношением  $L/W_1$  существует определенный и важный режим, при котором возникают большие области отрыва, периодически «размываемые» на значительное расстояние [3].

В области отрыва не применима классическая теория пограничного слоя, в которой предполагается  $\partial p/\partial y = 0$ . Несправедливость этого предположения обнаружил Хьюсон [43], измеряя градиент давления вблизи отрыва. Положение точки отрыва, найденное из интегрального соотношения Кармана (гл. II, разд. 3), находится ниже по потоку по сравнению с более точным расчетом и не совпадает с экспериментальными данными о положении срыва [44]. Поэтому расчет положения срыва в предположении о малости  $\partial p/\partial y$  или при использовании интегрального соотношения Кармана дал бы весьма сомнительные результаты.

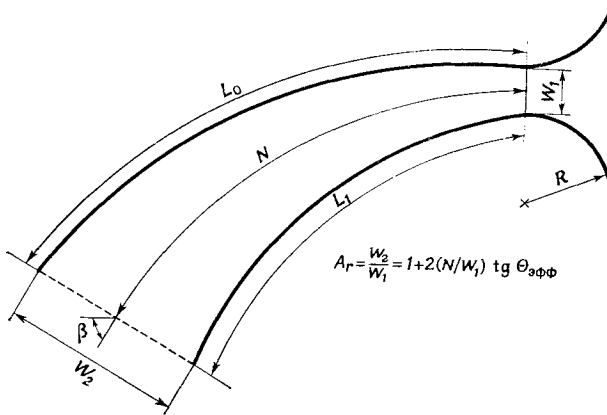
### 3.2. ДВУМЕРНЫЕ ДОЗВУКОВЫЕ ДИФFUЗОРЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ СТЕНКАМИ

Фокс и Клайн [45] исследовали три различных режима течения в диффузоре с криволинейными стенками при увеличении относительного расширения (или угла  $2\Theta_{эфф}$ ) и сохранении постоянными условий потока на входе, длины центральной линии и ширины входного сечения (фиг. 21). Эффективный полный угол раскрытия диффузора  $2\Theta_{эфф}$  вычисляется по формуле для степени расширения диффузора, равной  $1 + 2(N/W_1) \operatorname{tg} \Theta_{эфф}$ .

В данном случае режимы течения аналогичны наблюдаемым в диффузоре с прямолинейными стенками, а именно:

- а. Режим плавного безотрывного течения.
- б. Режим отрыва переходного типа, размеры и интенсивность которого изменяются во времени.
- в. Режим полностью развитого отрыва. Течение в этом режиме относительно установившееся, жидкость движется вдоль стенки, на которой давление повышено. Другая часть диффузора, ограниченная стенкой, на которой давление понижено, заполнена вытянутым завихренным возвратноциркуляционным течением.

Как видно из фиг. 22, наблюдаемое начало отрыва практически не зависит от величины  $\beta$ , если она меньше или равна  $30^\circ$ . При  $\beta = 40^\circ$  значение  $2\Theta_{\text{эфф}}$  постепенно уменьшается при малых значениях  $N/W_1$ , а при  $50^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  все линии наблюдаемого на-



Фиг. 21. Геометрия диффузора с криволинейными стенками и обозначения [45].

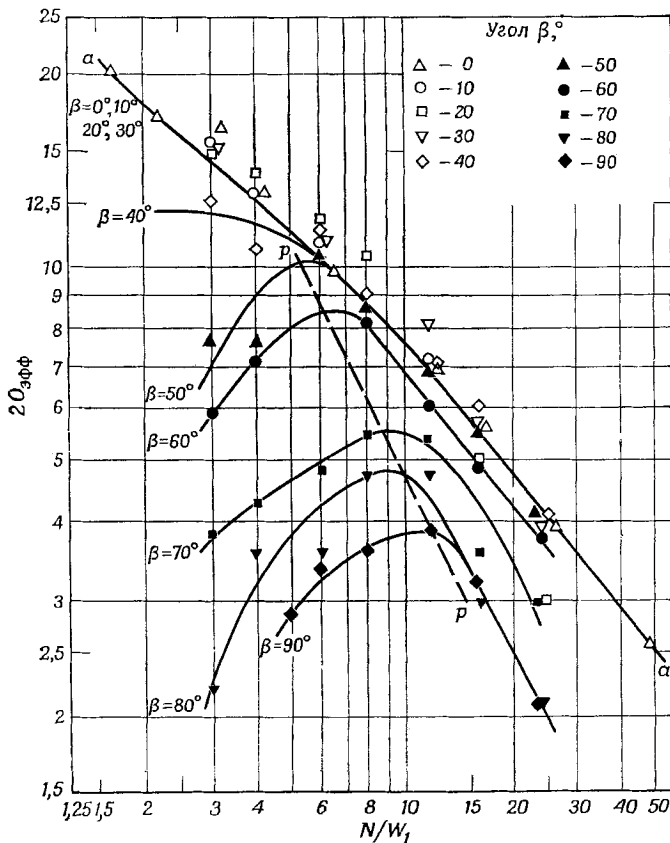
чала отрыва имеют точки максимума, соединенные пунктирной линией  $p - p$ . Эта линия представляет собой максимум расширения потока в канале с минимальным значением  $N/W_1$  без наблюдаемого начала отрыва для данного значения  $\beta$ . Вдоль линий  $p - p$  степень расширения изменяется от 1,8 до 1,9, и так как в координатах  $2\Theta_{\text{эфф}} - N/W_1$  степень расширения возрастает слева направо, то можно несколько увеличить торможение потока, не вызывая отрыва, путем выбора больших значений  $N/W_1$  и соответствующего уменьшения угла раскрытия  $2\Theta_{\text{эфф}}$  для заданного угла поворота потока  $\beta$ . Загиб линий  $a - a$  слева от линии  $p - p$  — характеристика диффузора с криволинейными стенками, существенно отличающая его от диффузора с прямолинейными стенками. Такое явление обусловлено, по-видимому, повышенным положительным градиентом давления на внутренней стенке криволинейного диффузора вниз по потоку от горла. При тех же значениях отношения  $N/W_1$  и угла раскрытия  $2\Theta_{\text{эфф}}$  этот положительный градиент давления по абсолютной величине будет больше в диффузоре с криволинейными стенками, чем в диффузоре с прямолинейными стенками.

На фиг. 23 представлена зависимость  $2\Theta_{\text{эфф}}$  от  $N/W_1$ , соответствующая переходу к полностью развитому отрыву (линия  $b - b$ ).



Видно, что  $2\Theta_{эфф}$  монотонно уменьшается с увеличением угла поворота потока. Полностью развитый отрыв наблюдался при всех углах поворота потока  $\beta$ , кроме  $\beta = 10^\circ$ .

В диффузоре с криволинейными стенками с углом поворота потока более  $30^\circ$  возникало вторичное течение в виде длинного

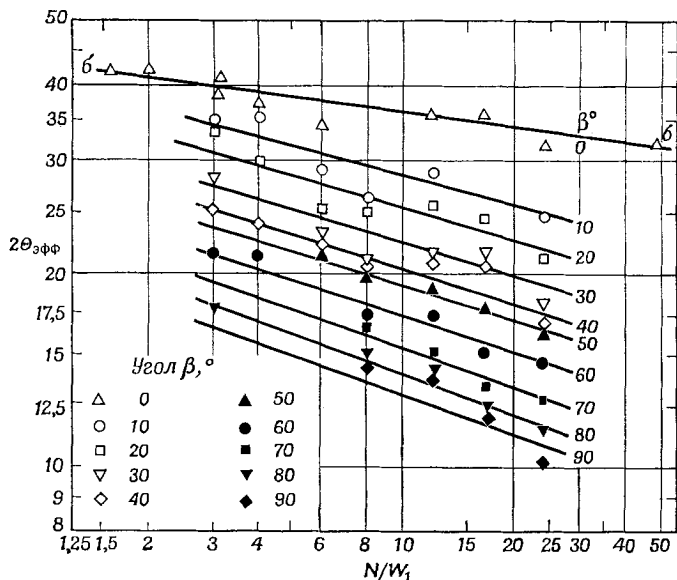


Ф и г. 22. Линии наблюдаемого начала отрыва ( $a - a$ ) при разных углах поворота потока  $\beta$  в диффузоре с криволинейными стенками, с центральной линией в виде дуги окружности и с линейным распределением площади поперечного сечения [45].

спирального образования независимо от глубины канала при условии, что геометрические параметры канала не выходят слишком далеко вверх за пределы линии  $a - a$ . Вторичное течение

было обнаружено при впрыскивании красителей в поток в нескольких сечениях (над дном канала).

Как и в диффузорах с прямолинейными стенками, применение направляющих лопаток в диффузорах с криволинейными стенками способствует ослаблению интенсивности отрыва и сглаживанию профиля скоростей потока на выходе из диффузора.



Ф и г. 23. Линии развитого отрыва ( $\delta - \delta$ ) при разных углах поворота потока в диффузоре с криволинейными стенками, с центральной линией в виде дуги окружности и с линейным распределением площади поперечного сечения [45].

Хотя с уменьшением радиуса кривизны внутренней стенки (отношение  $N/W_1$  мало, угол  $\beta$  велик) течение в диффузоре было турбулентным, течение вдоль внутренней стенки стремилось сохраниться ламинарным. Такую же тенденцию потока сохранять ламинарный характер течения около внутренней стенки в узких изогнутых каналах без расширения обнаружил Маррис [46].

Читателям, интересующимся диффузорами, рекомендуется познакомиться с работами [47—82]. В них рассматриваются течения около шероховатой поверхности, управление пограничным слоем путем отсоса или с помощью турбулизаторов, околосзвуковые течения. Некоторые работы, возможно, не имеют непосредственного отношения к двумерным диффузорам.

3.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИФFUЗОРЫ

Наблюдения и исследования внутреннего течения могут оказаться полезными при проектировании диффузоров, обладающих высокой эффективностью. Однако в настоящее время существуют сложные методы расчета только оптимальных двумерных диффузоров с прямолинейными стенками.

Гаугер [83] предложил метод расчета угла раскрытия диффузора, при котором происходит отрыв потока. В этом методе используется уравнение количества движения в интегральной форме

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u_e u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_w.$$

На фиг. 24 показана схема диффузора.

Используя уравнение неразрывности для диффузора с прямолинейными стенками, соединенного струбой, можно показать, что

$$\frac{du_e}{dx} \Big|_s = -2 \frac{u_e}{d} \operatorname{tg} \Theta.$$

Для определения точки отрыва потока используют разложение  $u$  в ряд Польгаузена, сохраняя только члены до третьей степени  $y$  включительно [37]

$$u = ay + by^2 + cy^3.$$

Затем вычисляю

$$\frac{du_e}{dx} \Big|_s = -\frac{1}{6500} \frac{u_e}{\delta} \left( \frac{u_e \delta}{\nu} \right)^{5/8}.$$

Ф и г. 24. Двумерный диффузор с прямолинейными стенками [83].

При входе в диффузор толщина пограничного слоя равна половине высоты канала.

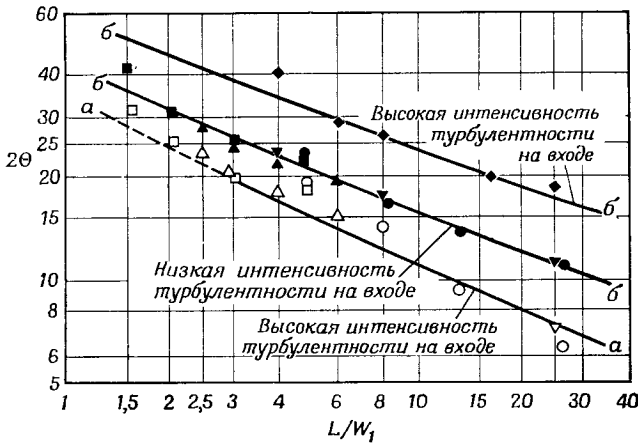
Из этих двух уравнений для  $du_e/dx$  вычисляется угол раскрытия диффузора  $2\Theta$ , при котором происходит отрыв потока. Например, для  $u_e = 10$  м/с,  $d = 0,1$  м,  $\nu = 0,1515 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с и  $\delta = d/2 = 0,05$  м

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{6500} \left( \frac{u_e d}{2\nu} \right)^{5/8} = 0,1029 \text{ или } 2\Theta = 11^\circ 45'.$$

Как отмечалось выше, метод Польгаузена применим только для определения начальной стадии неустановившегося отрыва. Поэтому метод Гаугера может применяться для расчета диффузоров, в которых не происходит отрыва потока. Однако, как указывает Шлихтинг [84], при обтекании решетки лопаток можно ожидать большей эффективности при наличии незначительного отрыва, чем при безотрывном течении. Условия течения в решетке профилей

и в диффузоре различны. До тех пор пока не будет выяснено различие этих течений в отношении отрыва потока, вопрос о преимуществе метода Гаугера для расчета оптимальных диффузоров остается открытым.

Клайн и др. [85] предложили более общий метод расчета оптимальных двумерных диффузоров с прямолинейными стенками,



Ф и г. 25. Режимы течения в дозвуковых двумерных диффузорах с прямолинейными стенками [85].

Область полностью развитого отрыва над линией б-б; область протяженного отрыва переходного типа — между линиями а-а и б-б; область без заметного отрыва — ниже линии а-а. Расстояние от среза диффузора до спрямляющей решетки 25 мм.

а-а б-б

- △ DСВ, расстояние между стенками 356 мм,
- DСВ, расстояние между стенками 660 мм,
- DСВ, расстояние между стенками 190 мм,
- ▽ САМ, низкая интенсивность турбулентности,
- ◆ САМ, высокая интенсивность турбулентности,

САМ — Moore [41], 1955, стенка с гальваническим покрытием,  
DСВ — Briggs, неопубликованные данные, 1957, стенка из оргстекла «люцит».

исходя как из своих собственных, так и выполненных другими авторами исследований. Этот метод основан на экспериментальных данных (например, фиг. 25), поэтому он имеет пробелы и его применение ограничено. Тем не менее в настоящее время он считается наилучшим.

Основные требования к оптимальным диффузорам:

1. Минимальные потери полного давления при заданном перепаде давления.
2. Максимальный коэффициент восстановления давления при заданной степени расширения диффузора независимо от длины.
3. Оптимальный коэффициент восстановления давления для данной длины.

4. Оптимальный коэффициент восстановления давления для любой возможной геометрии и для заданных условий потока на входе. Такой вариант считается наилучшим.

Эти четыре требования совершенно различны, что было продемонстрировано на соответствующих примерах Клайном и др. Подробнее об этих требованиях можно сказать следующее:

1. Минимум потерь полного давления на единицу перепада статического давления совпадает с оптимумом эффективности диффузора. Выражение

$$\frac{C_{pRi} - C_{pR}}{C_{pR}} = \frac{1}{\eta_p} - 1 = \frac{1 - \eta_p}{\eta_p}$$

имеет минимум, когда  $\eta_p$  максимально, так как  $\eta_p \leq 1$ . Здесь

$$C_{pR} = \frac{(1/A_2) \int_{A_2} p_2 dA_2 - (1/A_1) \int_{A_1} p_1 dA_1}{(1/A_1) \int_{A_1} (\rho v^2/2) dA_1},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — площади входного и выходного поперечного сечения диффузора,

$C_{pRi} = 1 - (A_1^2/A_2^2)$  — идеальный коэффициент восстановления давления,

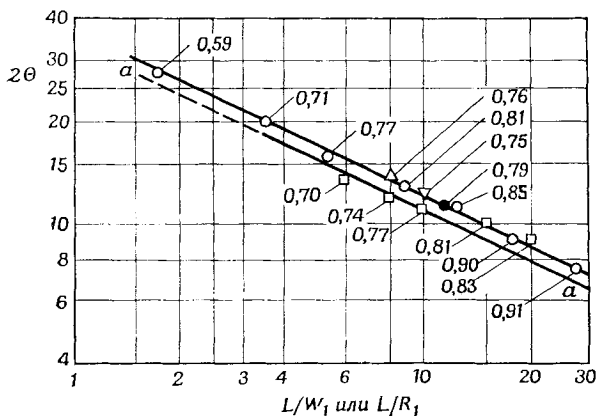
$\eta_p = \frac{C_{pR}}{C_{pRi}}$  — эффективность диффузора.

Как показали Гибсон [30] и Рейд [38], оптимальная эффективность диффузора возможна при угле раскрытия около  $7^\circ$  для всех диффузоров, кроме коротких, поэтому при проектировании диффузора с минимумом потерь полного давления необходимо выбирать угол раскрытия  $7^\circ$  и длину, обеспечивающую требуемую степень расширения диффузора,  $L/W_1$  или  $L/R_1$ , не более 25.

2. Оптимум коэффициента восстановления давления при постоянной степени расширения диффузора является пологим в области установившегося течения [38], поэтому можно выбирать почти любую длину диффузора, при которой его геометрические параметры остаются ниже линии  $a - a$ .
3. Максимум  $C_{pR}$  как функции угла раскрытия имеет место только при быстром возрастании потерь полного давления. Другими словами,  $C_{pR}$  достигает максимума при быстром развитии отрывных течений. Если отношение  $L/W_1$  постоянно, а угол раскрытия увеличивается, то оптимум коэффициента восстановления давления лежит немного

выше линии  $a - a$ . То же самое подтверждают результаты, представленные на фиг. 26, в соответствии с которыми оптимум коэффициента восстановления на 10% выше линии  $a - a$  при  $L/W_1 = \text{const}$ .

4. Эта задача недостаточно полно изучена, однако известно, что оптимальный диффузор можно получить при  $2\theta = 7^\circ$  и  $L/W_1 = 25-30$ .



Ф и г. 26. Корреляция данных по оптимальному восстановлению давления при постоянном значении  $L/W_1$  [85].

$a-a$ : Мур и Клайн [41], высокая интенсивность турбулентности на входе. Конический диффузор (труба на выходе):  $\circ$  Гибсон (Паттерсон). Прямоугольный диффузор (камера на выходе),  $\square$  Рейд,  $\triangle$  Кохран,  $\nabla$  Ведерников,  $\bullet$  Уайтмен (неопубликованные данные).

Упомянутые методы расчета оптимальных диффузоров не основаны на теории, тем не менее они могут с успехом использоваться на практике благодаря своей простоте и несложности вычислений.

#### 4. ОТРЫВ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО И ТРЕХМЕРНОГО УСТАНОВИВШИХСЯ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ

Работ, посвященных отрыву трехмерного турбулентного потока, довольно мало, к тому же некоторые из них являются простыми обобщениями или модификациями теорий двумерных течений. На современном этапе развития гидромеханики лишь в редких случаях решения задач об отрыве трехмерного турбулентного потока могут быть получены теоретически.

Отрыв трехмерного потока возникает в особых и обыкновенных точках [87—90]. Отрыв двумерного потока происходит в особо:

точке с нулевым коэффициентом поверхностного трения, за которой возникает обратное течение. Однако отрыв трехмерного потока происходит, как правило, в обыкновенной (неособой) точке, коэффициент поверхностного трения в которой не равен нулю и за которой не возникает обратное течение. Единственное условие такого отрыва — отход потока от поверхности. В плоскости симметрии отрыв происходит в особой точке, но все другие точки линии отрыва, проходящей через плоскость симметрии, являются обыкновенными.

#### 4.1. ОТРЫВ ТРЕХМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Джонстон [86] распространил теорию Ротта [5] двумерного турбулентного пограничного слоя на случай пространственного течения в закрученном пограничном слое, обладающего плоскостью симметрии. Хотя применимость этого метода ограничена, он с успехом используется для определения положения линии отрыва трехмерного потока.

Джонстон поместил особую точку отрыва в плоскость симметрии, обобщив соответствующим образом двумерную теорию; затем попытался оценить положение линии отрыва, образованной обыкновенными точками и проходящей через плоскость симметрии. На фиг. 27 показана модель течения, рассмотренного Джонстоном.

Для расчета использовалось уравнение количества движения в интегральной форме вместе с эмпирическим соотношением для изменения формы профиля скорости и касательного напряжения. В плоскости симметрии интегральное уравнение количества движения принимает вид

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + (2\theta_x + \delta_x) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{u_e^2} \int_0^d (u_e - u) \frac{dw}{dz} dy = \frac{c_{fx}}{2}, \quad (16)$$

где

$$\delta_x = \frac{1}{u_e} \int_0^d (u_e - u) dy, \quad \theta_x = \frac{1}{u_e^2} \int_0^d (u_e - u) u dy,$$

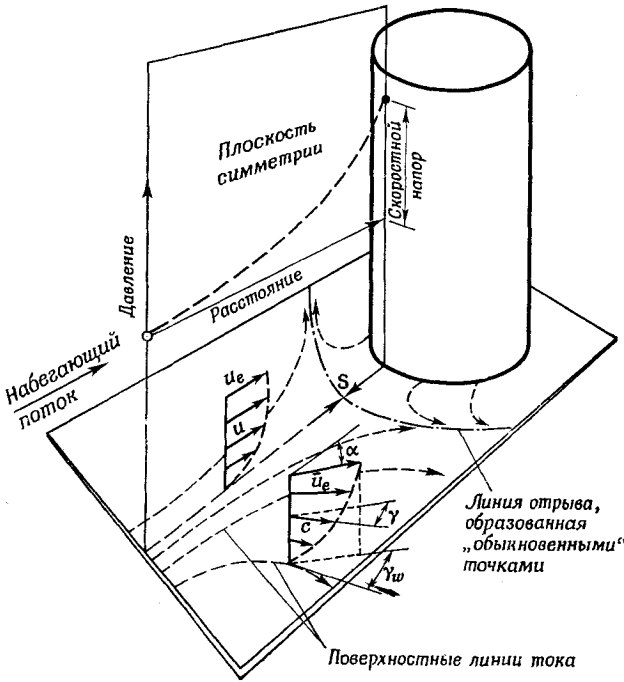
$w$  — составляющая вектора скорости в пограничном слое в направлении координаты  $z$  и  $d$  — верхний предел интегрирования по  $y$ , лежащий вне пограничного слоя. Это уравнение было получено в предположении, что изменение давления по нормали к стенке пренебрежимо мало, без учета членов, связанных с турбулентной пульсацией. Оценка справедливости такого допущения дается в работе [86].

Из фиг. 28 видно, что вектор скорости основного потока  $\bar{u}_e$  в точках на линиях тока основного течения составляет угол  $\alpha$  с составляющей  $u_e$  по оси  $x$ . Вектор скорости в пограничном слое

$s$  в общем случае несколько отклонен от направления скорости основного потока  $\bar{u}_e$ . Вблизи плоскости симметрии  $\alpha$  имеет малое значение и

$$u_e = \bar{u}_e, \quad w = \bar{w} + \alpha \bar{u}, \quad u = \bar{u} - \alpha \bar{w},$$

где  $\bar{u}$  и  $\bar{w}$  — составляющие скорости  $s$ , соответственно параллельная и нормальная к  $\bar{u}_e$ . Затем добавляется член, который позволя-



Ф и г. 27. Пример течения в пограничном слое, имеющего плоскость симметрии [86].

ет применить интегральное уравнение количества движения двумерного потока для потока в плоскости симметрии

$$\frac{1}{u_e^2} \int_0^d (u_e - u) \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{1}{u_e^2} \int_0^d (\bar{u}_e - \bar{u}) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dy +$$

$$+ \frac{d\alpha}{dz} \frac{1}{u_e^2} \int_0^d \bar{u} (\bar{u}_e - \bar{u}) dy.$$



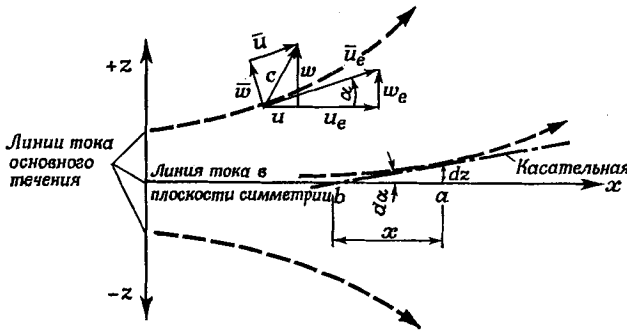
Вводя обозначение

$$\theta_{xz} = \frac{1}{u_e^2} \int_0^d (\bar{u}_e - \bar{u}) \bar{w} dy,$$

находим

$$\frac{1}{u_e^2} \int_0^d (u_e - u) \frac{\partial w}{\partial z} dy = \theta_x \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial z}. \tag{17}$$

Член  $\theta_x (\partial \alpha / \partial z)$  соответствует вкладу от сходящихся или расходящихся линий тока основного течения, а  $\partial \theta_{xz} / \partial z$  — вкладу, обусловленному растекающимся пограничным слоем, в дополнительный



Ф и г. 28. Система координат и составляющие вектора скорости в плоскости симметрии пограничного слоя [86].

Ось  $y$  направлена перпендикулярно чертежу.

член интегрального уравнения количества движения. Теперь для потока в плоскости симметрии уравнение (16) с использованием (17) принимает вид

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{c f_x}{2} - \frac{2\theta_x + \delta_x}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} - \theta_x \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial z}. \tag{18}$$

Чтобы пользоваться этим уравнением в расчетах, принимается следующее дополнительное предположение, вытекающее из условия неразрывности основного двумерного течения перед отрывом:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = - \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x}. \tag{19}$$

Ясно, что  $\bar{w} = e\bar{u}$  вблизи стенки и  $\bar{w} = A(\bar{u}_e - \bar{u})$  во внешней части пограничного слоя, где  $A$  и  $e$  — параметры;  $e = \text{tg } \gamma_w$ , а  $\gamma_w$  — угол между  $u_e$  и поверхностной предельной линией тока. Так как при  $\text{Re}_{\theta x} > 10^4$  величину  $\theta_{xz}$  можно вычислить по форму-

ле  $-\theta_{xz} = A (\theta_x - \delta_x)$ , для плоскости симметрии получается

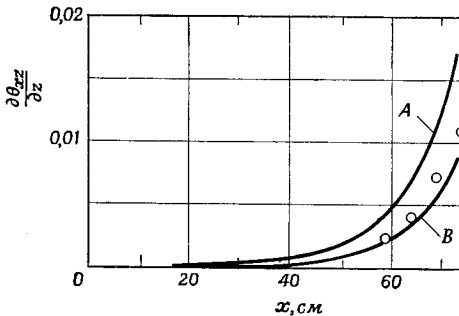
$$-\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial z} = \frac{A}{z} (\theta_x - \delta_x). \quad (20)$$

Если пограничный слой достаточно развит и входит в область разворота потока, в которой линии тока основного течения имеют форму дуг окружности, то

$$A = 2\alpha,$$

следовательно,

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 2 \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \quad (21)$$



Фиг. 29. Член  $\partial \theta_{xz} / \partial z$ , учитывающий закрученность пограничного слоя в интегральном уравнении количества движения в плоскости симметрии. Сравнение с экспериментом [86].

○ из эксперимента  $A \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial z} = 2,0 \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\theta_x - \delta_x)$ ;

В  $\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial z} = 1,0 \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\theta_x - \delta_x)$ .

няется на линии тока основного течения. Поэтому, принимая

$$-\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\theta_x - \delta_x)$$

и подставляя (19) и (21) в (18), находим

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\frac{2\theta_x}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{c_{fx}}{2}. \quad (22)$$

Интегрируя уравнение (22), окончательно имеем

$$\theta_x u_e^2 = [\theta_x u_e^2]_{x=0} + \int_0^x \frac{c_{fx}}{2} u_e^2 dx. \quad (23)$$

Изменение  $\theta_x$  вдоль плоскости симметрии можно приближенно вычислить по уравнению (23) в предположении, что  $c_{fx} = \text{const}$ .

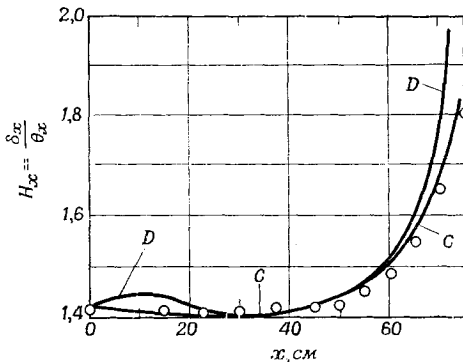
Точку отрыва можно найти из решения уравнения (23) совместно с уравнением Денхоффа — Тетервина [19]

$$\frac{dH_x}{dx} = \{ \exp 4,680 (H_x - 2,975) \} \times \left[ -\frac{2}{u_e} \frac{du_e}{dx} \{ 5,890 \lg (4,075 \text{Re}_{\theta_x}) \}^2 - \frac{2,035 (H_x - 1,286)}{\theta_x} \right], \quad (24)$$

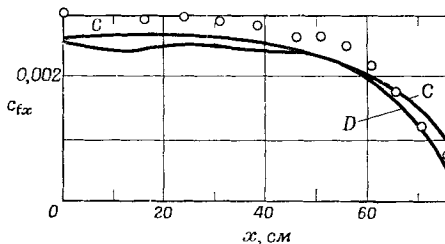
уравнением Людвига — Тилмана для коэффициента поверхностного трения [6]

$$c_{f_x} = 0,246 [\exp(-1,561H_x)] \text{Re}_{\theta_x}^{-0,268} \quad (25)$$

и с использованием графического метода Ротта [5]. Результаты представлены на фиг. 30 и 31.



Фиг. 30. Сравнение расчетных значений формпараметра  $H_x$  в плоскости симметрии с экспериментальными данными [86].  $C$  — Денхофф — Тетервин,  $D$  — Ротта;  $\circ$  экспериментальные данные.



Фиг. 31. Сравнение расчетных значений коэффициента поверхностного трения  $c_{f_x}$  в плоскости симметрии с экспериментальными данными [86].  $C$  — Денхофф — Тетервин;  $D$  — Ротта;  $\circ$  экспериментальные данные.

На фиг. 32 основной поток направлен сверху вниз. Задняя стенка расположена внизу под черными стрелками. Тонкая черная линия является расчетной линией отрыва. Черные стрелки слева и справа от оси симметрии указывают расчетные линии тока основного потока.

Ниже представлены экспериментальные и расчетные результаты. Расстояние до особой точки отрыва в плоскости симметрии, определенное из условия равенства нулю коэффициента поверхностного трения, равно

$x = 78,7$  см на основании визуализации потока (фиг. 32),

$x = 81,3$  см из экстраполяции экспериментальных данных (фиг. 31),

$x = 86,4$  см из экстраполяции расчетной кривой  $C$  (фиг. 31),

$x = 78,7$  см из экстраполяции расчетной кривой  $D$  (фиг. 31).

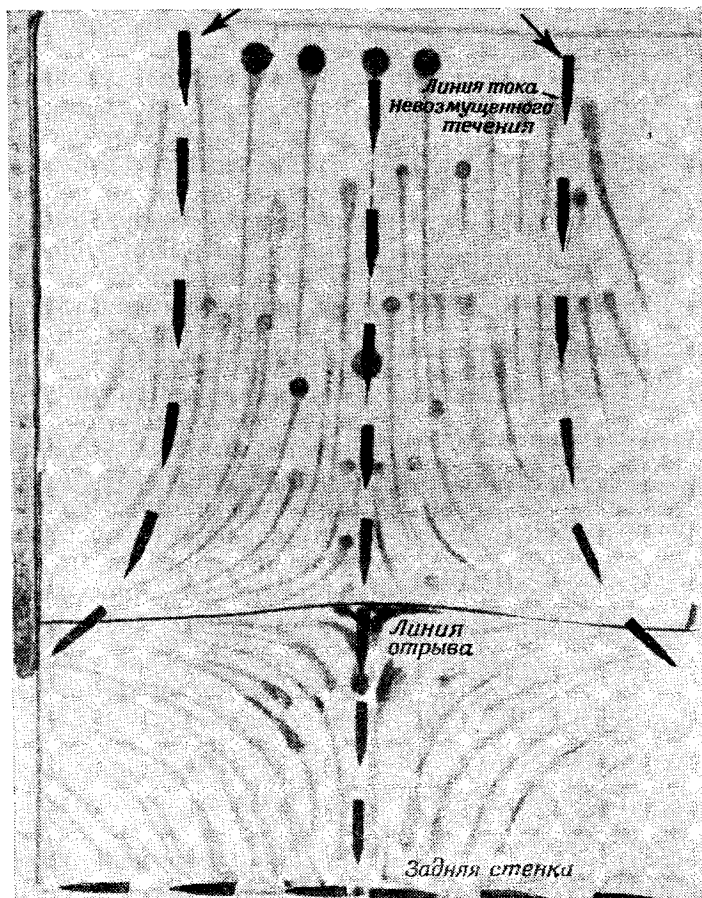
Критерий отрыва соответствует  $H_x = 1,8$ , т. е.

$x = 76,2$  см из экспериментальных данных (фиг. 30),

$x = 73,7$  см по расчетной кривой  $C$  (фиг. 30),

$x = 70$  см по расчетной кривой  $D$  (фиг. 30).

Из этих результатов видно, что определение точки отрыва в плоскости симметрии можно выполнить достаточно точно. Для внутренних течений лучшие результаты по определению отрыва можно получить для трехмерного течения, имеющего плоскость симметрии, чем для двумерного, поскольку отрыв в трехмерном



Ф и г. 32. Поверхностные линии тока, полученные методом визуализации путем нанесения краски на стенку рабочей части трубы [86].

потоке полностью стационарный. Жидкость из области отрыва равномерно уносится благодаря боковому течению в пограничном слое. В двумерном потоке существует отрыв переходного типа и жидкость из области отрыва периодически уносится основным потоком.

## 4.2. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ТЕЧЕНИЕ

Как было показано ранее, для удовлетворительного решения задач об осесимметричных внутренних течениях недостаточно результатов, полученных для пограничного слоя в двумерном внешнем потоке. Выходят из положения, добавляя в уравнение для внешнего течения еще один член, чтобы приспособить его для внутреннего течения. Этот член — коэффициент турбулентного нормального напряжения

$$\frac{\tau_R}{2q} = \frac{1}{2q} \int_0^{\delta} \frac{\partial (\rho u'^2)}{\partial x} dy,$$

где  $u'$  — среднеквадратичная пульсация скорости в осевом направлении. При добавлении такого члена в основные два уравнения Денхоффа — Тетервина Раберт и Перш [93] получили следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-\theta}{q} \frac{dq}{dx} \left(1 + \frac{H}{2}\right) + \frac{0,123}{\text{Re}_0^{0,268} \cdot 10^{0,678H}} + 0,0011 \left(\theta \frac{dH}{dx}\right)^{0,135} +$$

$$+ 0,187\theta \frac{dH}{dx} - \frac{\theta}{d} \frac{dd}{dx}$$

и

$$\theta \frac{dH}{dx} = -\frac{\theta}{q} \frac{dq}{dx} H \frac{(H-1)(3H-1)}{2} + \frac{1}{\text{Re}_0^{0,268}} \left( -\frac{1}{2} \cdot 10^{-0,678H} \times \right.$$

$$\times \left[ 0,0246 (H-1) - \frac{\theta}{q} \frac{dq}{dx} \{167,2 (H-1,25)^{0,536} - \right.$$

$$\left. - 35,15\} \{H(3H-0,9) - 0,1\} \right] \Big),$$

где  $d$  — диаметр канала. Так как полуэмпирическое уравнение Денхоффа — Тетервина основано на предположении об умеренной кривизне крылового профиля, предложенные уравнения Раберта и Перша могут дать лучшие результаты при определении характеристик внутреннего течения. Эти уравнения получены из эмпирических соотношений между входящими в них переменными и числовыми значениями. Однако критерия отрыва турбулентного потока Раберт и Перш не дают.

## 4.3. ТРЕХМЕРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ТЕЛЕ

В случае вращающегося тела сила Кориолиса и, в меньшей степени, центробежные силы, действующие на пограничный слой на теле, создают дополнительное ускорение в направлении течения, оказывая такое же влияние, как и отрицательный градиент давления. Вследствие этого влияния отрыв потока задержи-

вается. Мэйджер [94] исследовал природу трехмерного пограничного слоя на неподвижных и вращающихся телах, таких, как пропеллеры, лопатки ротора компрессора или турбины, и представил результаты анализа и измерений [95]. Химмельскамп [96] измерял пограничный слой на вращающихся воздушных винтах. Результаты этих исследований указывают на затягивание отрыва. Благодаря этому затягиванию коэффициент подъемной силы вблизи втулки вращающегося воздушного винта можно увеличить до 3,2 по сравнению с 1,4 для невращающегося винта <sup>1)</sup>.

#### 4.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОТРЫВА ТРЕХМЕРНОГО ПОТОКА

Некоторые успехи в экспериментальных исследованиях были достигнуты недавно Тейлором [97], исследовавшим трехмерный пограничный слой в гидромашине при наличии отрыва потока. В зависимости от геометрии решетки лопаток поток около нее может рассматриваться либо как внешний, либо как внутренний. Если расстояние между лопатками больше, чем размер самих лопаток, то поток можно считать внешним, и наоборот.

Эксперименты Либлейна [98] показали, что, когда отношение максимальной скорости на поверхности лопатки к скорости на выходе из решетки равно примерно двум, отрыв потока на лопатках возникает при больших углах атаки и с минимальными потерями. Лубик и Уолнер [99] установили, что нестационарный процесс в многоступенчатом компрессоре газотурбинного двигателя является последовательным отрывом потока в ступенях. Отрыв потока в ступенях происходит при одних и тех же критических степенях сжатия в течение периода квазистационарного роста нагрузки, например во время очень быстрых изменений потока на входе. Отрыв может иметь место при возмущениях перед компрессором и за ним независимо от скорости изменения нагрузки.

На практике турбулентное течение — довольно распространенное явление, поэтому точное определение возникновения отрыва такого течения имеет большое значение при проектировании гидромашин с большим к. п. д. или корпусов кораблей с ограниченной осадкой. В настоящее время, однако, нет надежных методов определения отрыва внутреннего трехмерного течения. Имеющихся экспериментальных данных недостаточно для понимания сложной природы отрыва трехмерного потока.

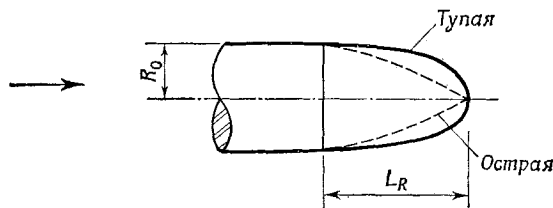
Для интересующихся этой проблемой читателей рекомендуются работы [100—106].

<sup>1)</sup> Правильнее говорить не о затягивании отрыва, а о влиянии вращения на воздух в области отрыва, приводящем к росту коэффициента подъемной силы. (Келдыш В. В., *Инж. журнал*, т. III, вып. 1, 1963.) — *Прим. ред.*

#### 4.5. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ И СОПРОТИВЛЕНИЕМ ТРЕНИЯ НА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОРМОВОЙ ЧАСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРЫВА ПОТОКА

Соотношение между сопротивлением давления и сопротивлением трения на осесимметричной кормовой части, примыкающей к длинному круговому цилиндру, выражает влияние отрыва потока на сопротивление.

Вигардт [107] получил следующие приближенные эмпирические формулы для коэффициента сопротивления давления  $C_{Dp}$ , исполь-



Ф и г. 33. Осесимметричная кормовая часть, примыкающая к длинному круговому цилиндру [107].

зую модель, представленную на фиг. 33, при числе Рейнольдса  $(2R_0 u_e)/\nu = 0,6 \cdot 10^6$ , где  $R_0$  — радиус кругового цилиндра: для острой кормовой части (эллипсоид 6 : 1)

$$C_{Dp} = 0,14 \left( \frac{L_R}{R_0} \right)^{-3/2},$$

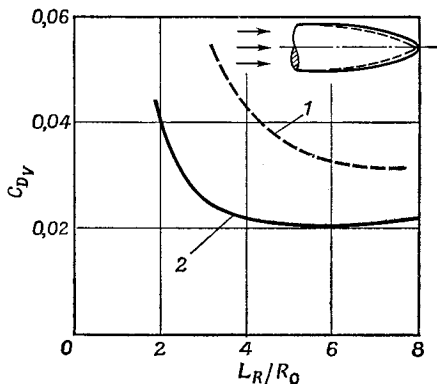
для тупых кормовых частей (эллипсоид 2 : 1 и 4 : 1)

$$C_{Dp} = 0,06 \left( \frac{L_R}{R_0} \right)^{-2/2},$$

где  $L_R$  — длина кормовой части. Для гидродинамических исследований, включая гидродинамику корпуса корабля, такая модель может оказаться полезной для выяснения роли сопротивления давления и сопротивления трения при наличии отрыва.

Если коэффициент сопротивления кормовой части (отнесенный к ее объему) определить как  $C_{DV} = D/qV^{2/3}$ , где  $D$  — полное сопротивление,  $q$  — скоростной напор и  $V$  — объем, то, как видно из фиг. 34, тупая кормовая часть имеет меньшее сопротивление, чем острая, хотя на первой возникает отрыв большей интенсивности. Числовые величины этих коэффициентов сопротивления являются предварительными оценками вследствие неточности измерений. Коэффициенты могут зависеть в известной степени от чисел Рейнольдса, однако ясно, что в диапазоне удлинений  $3 < L_R/R_0 < 5$  коэффициент сопротивления тупой кормовой части

меньше, чем острой. Объяснить этот противоречивый на первый взгляд факт можно на примере эллипсоидальной кормовой части (удлинение 4 : 1), примыкающей к круговому цилиндру. Измеренное касательное напряжение на стенке  $\tau_w$ , а также измеренное



Ф и г. 34. Полное сопротивление кормовой части, примыкающей к круговому цилиндру [107].

1 — острая нормовая часть; 2 — тупая нормовая часть.

и соответствующее потенциальному течению распределения статического давления  $p$  показаны на фиг. 35. Как и следовало ожидать, из-за отрыва на хвостовой части измеренное и соответствующее потенциальному течению распределение давления различны, но порядки их величин можно считать одинаковыми по сравнению с очень малым касательным напряжением. Результирующая сила в направлении потока получается суммированием произведения элементов поверхности на соответствующие проекции  $\tau_w$  и  $p$ . Кривая на фиг. 35 представляет собой эту результирующую

силу, причем видно, что вклады в эту силу касательных и нормальных напряжений на поверхности одинакового порядка. Однако если эти напряжения проинтегрировать вдоль поверхности тела, то, как это следует из кривых в нижней части фиг. 35, касательное напряжение монотонно растет в направлении к области отрыва потока и коэффициент сопротивления трения равен

$$C_{D_f} = + \int_0^{x/L_R} 2 \frac{L_R}{R_0} \frac{R}{R_0} \frac{\tau_w}{q} d \left( \frac{x}{L_R} \right) = 0,022.$$

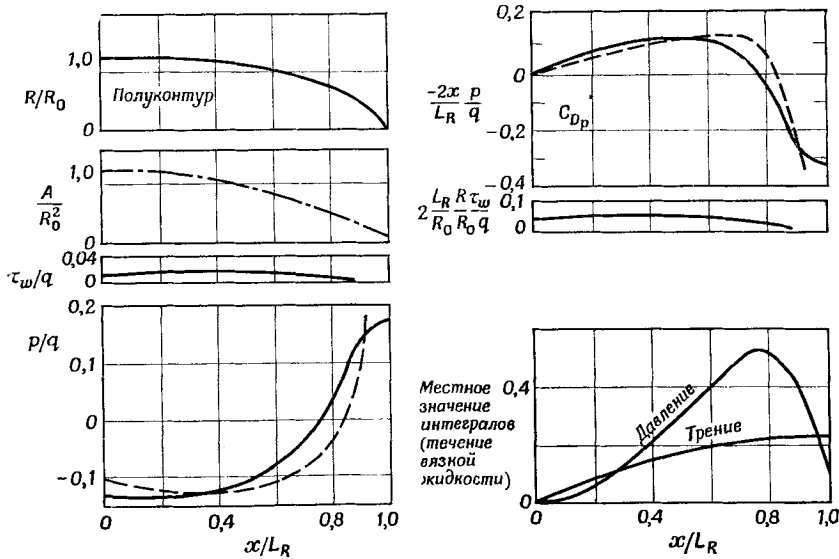
Коэффициент сопротивления давления равен

$$C_{D_p} = - \int_0^{x/L_R} 2 \frac{x}{L_R} \frac{p}{q} d \left( \frac{x}{L_R} \right).$$

На передней части кормы вследствие разрежения он увеличивается до 0,052, затем падает у конца кормы до значения 0,007. Здесь сопротивление имеет положительный знак, а тяга — отрицательный. Такой характер изменения  $C_{D_p}$  объясняется существованием положительных перепадов давления за точкой



отрыва. Таким образом, полный коэффициент сопротивления  $C_{D_t} = 0,022 + 0,007 = 0,029$ , где  $C_{D_t} = (D_f + D_p)/(q\pi r_0^2)$ . Силы трения составляют 76% в полном сопротивлении, несмотря на их



Ф и г. 35. Интегрирование сил трения и давления, действующих на тупую кормовую часть (эллипсоид 4 : 1), примыкающую к круговому цилиндру [107]. А — местная площадь;  $C_{D_p}$  — площадь под кривой; — — течение вязкой жидкости; - - - потенциальное течение.

малую величину, а большие по величине силы давления составляют только 24%. Для более тонких тел вклад сопротивления давления еще меньше. Этот числовой пример объясняет кажущееся противоречие на фиг. 34.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dean R. C., Jr., Separation and Stall, Handbook of Fluid Dynamics, ed. by V. L. Streeter, McGraw-Hill, N. Y., 1961.
2. Shapiro A. H., The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Vol. 2, p. 1093, the Ronald Press Co., N. Y., 1953.
3. Kline S. J., On the Nature of Stall, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D (Sept. 1959).
4. Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotations-symmetrischer Strömung, *Ing. Arch.*, 20, № 4 (1952), или Truckenbrodt E., A Method of Quadrature for Calculation of the Laminar and Turbulent Boundary Layer in Case of Plane and Rotationally Symmetrical Flow, NACA TM 1379, 1955.

5. Rotta J., Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten unter Benutzung des Energiesatzes, *Mitt. Max-Planck-Institut StrömForsch.*, 8, Göttingen (1953).
6. Ludwig H., Tillmann W., Investigation of the Wall-shearing Stress in Turbulent Boundary Layers, NACA TM 1285 (May 1950) или Ludwig H., Tillmann W., Untersuchungen über die Wandspannung turbulenter Reibungsschichten, *Ing-Arch.*, 17, pp. 288—299 (1949).
7. Schultz-Grunow F., Ein neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten, *Luftfahrtforschung*, 17, p. 239 (1940).
8. Nikuradse J., Strömungsgesetze in rauhen Röhren, VDI Forschungsheft 361, 1933.
9. Colebrook C. F., White C. M., Experiments with Fluid Friction in Roughened Pipe, *Proc. Roy. Soc. London, A*, 161, p. 367 (1937).
10. Buri A., Eine Berechnungsgrundlage für die Turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung, Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule, 1931, или Buri A., A Method of Calculation for the Turbulent Boundary Layer with Accelerated and Retarded Basic Flow, Ministry of Aircraft Production (British), RTP Translation 2073.
11. Nikuradse J., Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen, Forschungsarbeiten des VDI № 289, 1929.
12. Rotta J., Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten, *Ing.—Arch.*, 20, № 3, pp. 195—207 (1952).
13. Gruschwitz E., Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall and Druckanstieg, *Ing.—Arch.*, 2, pp. 321—346 (1931).
14. Schmiedbauer H., Verhalten turbulenter Reibungsschichten an erhabengekrümmten Wänden, Dissertation, Göttingen, 1934.
15. Peters H., On the Separation of Turbulent Boundary Layers, *J. Aeronaut. Sci.*, p. 7 (Sept. 1935).
16. Pretsch J., Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes, *Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung*, 1, p. 61 (1938).
17. Ross D., A New Approach to Turbulent Boundary Layer Problems, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs*, 81, № 604 (Jan. 1955).
18. Maskell E. C., Approximate Calculation of the Turbulent Boundary Layer in Two-dimensional Incompressible Flow, Royal Aircraft Establishment Rept 2443, Nov. 1951.
19. Von Doenhoff A. E., Tetervin N., Determination of General Relations for the Behavior of Turbulent Boundary Layers, NACA Rept 772, 1943.
20. Zaat J. A., Revised Methods for Routine Calculations of Laminar and Turbulent Boundary Layers of Two-dimensional Incompressible Flows, NLL Rept F79, Amsterdam, 1951.
21. Clauser F. H., Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, pp. 91—108 (1954).
22. Clauser F. H., The Turbulent Boundary Layer Flow, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 6, pp. 28—30, Academic Press, N. Y., 1956.
23. Garner H. C., The Development of Turbulent Boundary Layers, ARC, R & M 2133, 1944.
24. Howarth L., The Theoretical Determination of the Lift Coefficient for a Thin Elliptic Cylinder, ARC Tech. Rept R & M, № 1838; 1938; см. также *Proc. Roy. Soc., A*, 149, pp. 558—586.
25. Falkner V. M., A New Law for Calculating Drag, *Aircraft Engng*, 15, pp. 65—69 (1943).
26. Whitaker E. T., Robinson G., The Calculus of Observations, third edition, ch. XIV, 1940.

27. Coleman W. S., Analysis of the Turbulent Boundary Layer for Adverse Pressure Gradients Involving Separation, *Quart. Appl. Math.*, 5, № 2, p. 182 (July 1947).
28. Squire H. B., Young A. D., The Calculation of the Profile Drag of Airfoils, ARC Tech. Rept R & M, № 1838, 1938.
29. Schubaer G. B., Klebanoff P. S., Investigation of Separation of the Turbulent Boundary Layer, NACA TN 2133, 1950.
30. Gibson A. H., On the Flow of Water Through Pipes and Passages Having Converging or Diverging Boundaries, *Proc. Roy. Soc. London*, A, 83, № 563 (March 1910).
31. Patterson G. N., Modern Diffuser Design, *Aircraft Engng*, 10, № 115, pp. 267—273 (Sept. 1938).
32. Ведерников А. Н., Экспериментальное исследование движения воздуха в плоском расширяющемся канале. Труды ЦАГИ, вып. 21, 1926.
33. Vüllers H., Ausnutzung der kinetischen Austrittsenergie der Luft bei Ventilatoren mittels Diffusoren, *Z. Ver. dt. Ing.*, 77, № 31 (1933).
34. Polzin J., Strömungsuntersuchungen an einem ebenen Diffusor, *Ing.—Arch.*, 11, № 5, pp. 361—385 (Oct. 1940); см. также Flow Investigation in a Two-dimensional Diffuser, RTP Translation, № 1286, British Ministry of Aircraft Production.
35. Martinot-Lagarde A., *CR Acad. Sci. Paris.*, 188, p. 159 (1929).
36. Demontis J., Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'air, № 87, Lille, 1936.
37. Pohlhausen K., Für näherungsweise Integration der Differentialgleichung der Laminaren Reibungsschicht, *Z. angew. Math. Mech.*, 1, pp. 252—268 (1921).
38. Reid E. G., Performance Characteristics of Plane-wall Two-dimensional Diffusers, NACA TN 2888, 1953.
39. Tults H., Flow Expansion and Pressure Recovery in Fluids, *Proc. Am. Soc. Civil. Engrs.*, 80, № 507, pp. 1—26 (Dec. 1954).
40. Winternitz F. A. L., Ramsay W. J., Effects of Inlet Boundary Layer or Pressure Recovery in Conical Diffusers, Fluids Report, № 41, Department of Scientific and Industrial Research, Mechanical Engineering Laboratory (Aug. 1956).
41. Moore C. A., Kline S. J., Some Effects of Vanes and of Turbulence on Two-dimensional Wide-angle Subsonic Diffusers, NACA TN 4080, 1958.
42. Cochran D. L., Kline S. J., Use Short Flat Vanes for Producing Efficient Wide-angle Two-dimensional Subsonic Diffusers, NACA TN 4309, 1958.
43. Hewson C. T., The Growth and Separation of a Turbulent Boundary Layer, Cambridge University, 1949, диссертация.
44. Cole D., The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer, *J. Fluid Mech.*, 1, pp. 191—226 (1956).
45. Fox R. W., Kline S. J., Flow Regimes in Curved Subsonic Diffusers, ASME Paper, № 61-WA-191, Nov.—Dec. 1961.
46. Marris A. W., Radial Distribution of Temporal-mean Peripheral Velocity and Pressure for Fully Developed Turbulent Flow in Curved Channels, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D., 82 (Sept. 1960).
47. Fliegner A., Versuche über das Ausströmen von Luft durch konisch divergente Rohre, *Schweiz Bauzeitung*, 31, p. 68 (1898).
48. Andres K., Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck, *Mitt. ForschArb. Geb. IngWes.*, № 76, (1909).
49. Hochschild H., Versuche über die Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen, *Mitt. ForschArb. Geb. IngWes.*, № 114 (1912).

50. Gibson A. H., On the Resistance to Flow of Water Through Pipes or Passages having Divergent Boundaries, *Trans. Roy. Soc. Edin.*, 48, Part 1, pp. 97—116 (1913).
51. Kröner R., Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen, *ForschArb. Geb. IngWes.*, № 22 (1920).
52. Riffart A., Versuche mit Verdichtungsdüsen (Diffusoren), *VDI-Forschungs Heft*, 257 (1922).
53. Dönch F., Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln, *ForschArb. Geb. IngWes.*, № 282 (1926).
54. Peters H., Energieumsetzung in Querschnittserweiterungen bei verschiedenen Zulaufbedingungen, *Ing.—Arch.*, 2, № 1, pp. 92—107 (March 1931); см. также NACA TM 737, 1934.
55. Frey K., Verminderung des Strömungsverlustes in Kanälen durch Leitflächen, *Forsch. Geb. IngWes.*, 5, pp. 105—117 (May—June 1934).
56. Demontis J., Recherches sur l'influence de l'angle d'ouverture d'un ajutage divergent sur l'écoulement à deux dimensions de l'air à travers cet ajutage, *Pub. Sci. et Tech. du Ministère de l'air*, № 87, 1936.
57. Sörensen E., Wandrauhigkeitseinfluss bei Strömungsmaschinen, *Forsch. Geb. IngWes.*, 8, p. 25 (1937).
58. Polzin J., Der Einfluss der Wandrauhigkeit bei Strömungsmaschinen, *VDI—Zeitschrift*, 81, p. 531 (1937), № 18, pp. 521—522.
59. Young A. D., Green G. L., Tests of High-speed Flow in Diffusers of Rectangular Cross-section, RM, № 2201, ARC, 1944.
60. Squire H. B., Carter P., Further Experiments on Conical Diffusers, ARC Rept, № 13, 499 (British NPL Rept NV TP 320), Nov. 1950.
61. Von Ruchti O., Research on Radial Diffusers, Bericht der Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug, Ernst Udet Institut für Aerodynamik und Flugmechanik, Technische Berichte, Vol. 11, 1944.
62. Biebel W. J., Low-pressure Boundary-Layer Control in Diffusers and Bends, NACA WR L-84, 1945 (formerly NACA ARR 15C24).
63. Kalinske A. A., Conversion of Kinetic Energy to Potential Energy in Flow Expansion, *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs*, 3, pp. 355—390 (1946).
64. Гуржиенко Г. А. Об установившемся турбулентном течении в коническом диффузоре с малым углом раствора. Труды ЦАГИ, вып. 462, 1939.
65. Gratzler L. B., Smith R. H., Boundary Layer Control for Wide Angle Diffusers, Univ. of Washington Aeronautical Laboratory Rept, № 300 (Nov. 1948).
66. Robertson J. M., Ross D., Water Tunnel Diffuser Flow Studies, Part 11, Experimental Research, Penn. State College (July 1949).
67. Nelson W. J., Popp E. G., Performance Characteristics of Two 6° and Two 12° Diffusers at High Flow Rates, NACA RM L9H09, Jan. 1952.
68. Wood C. C., Preliminary Investigations of the Rectangular Vortex Generators on the Performance of a Short 1.9:1 Straight Wall Annular Diffuser, NACA RM L51G09, 1951.
69. Martin R. C., Effects of Inlet Wall Contour on the Pressure Recovery of a 10° 10-inch Inlet Diameter Conical Diffuser, NACA RM L-51 Ella, 1951.
70. Persh J., The Effect of Surface Roughness on the Performance of a 23° Conical Diffuser at Subsonic Mach Numbers, NACA RM L-51 K09, Jan. 1952.
71. Valentine E. F., Carroll R. B., Effects of Some Preliminary Variables of Rectangular Vortex Generators in the Static Pressure Rise Through a Short Diffuser, NACA RM L-52B13, 1952.
72. Kline S. J., Runstalter P. W. Some Preliminary Results of Visual Studies on the Flow Model of the Wall Layers of the Turbulent

- Boundary Layer, *J. Appl. Mech.*, 26, *Trans. ASME*, 81, pp. 166—170 (1953).
73. Squire H. B., Experiments on Conical Diffusers, Ministry of Supply, ARC RM, № 2751, 1953.
  74. Little B. H., Jr., Wilbur S. W., Performance and Boundary Layer Data from 120° and 23° Conical Diffusers of Area Ratio 2,0 at Mach Numbers up to Choking and Reynolds Numbers up to 7,  $5 \times 10^6$ , NACA Rept 1201, 1954. (Supersedes NACA RM L9H10 by Copp and Klevath; RM L9K10 by Persh; RM L50C02a by Little and Wilbur.)
  75. Бам-Зеликович Г. М., Расчет отрыва пограничного слоя *Изв. АН СССР, ОТН*, № 12 (1954).
  76. Persh J., Bailey B. M., Effect of Surface Roughness over the Downstream Region of a 23° Conical Diffuser, NACA TN 3066, 1954.
  77. Faulders C. R., Aerodynamic Design of Vaned Diffusers for Centrifugal Compressors, ASME Paper, № 56—A213, 1956.
  78. Halzhauser C. A., Hall L. P., Exploratory Investigation of the Use of Area Suction to Eliminate Air Flow Separation in Diffusers having Large Expansion Angles, NACA TN 3793, Oct. 1956.
  79. Scott—Wilson J. B., Lewelyn-Davis D. I. T. P., The Development of an Improved Diffuser for the 3 ft x 3 ft Tunnel, RAE Tech. Note Aero. 2446, July 1956.
  80. Scherrer R., Anderson S. E., Preliminary Investigation of a Family of Diffusers Designed for Near Sonic Inlet Velocities, NACA TN 3668, 1956.
  81. Woollett R. R., Preliminary Investigation of Short Two-dimensional Subsonic Diffusers, NACA RM E56C02 (May 1956).
  82. Norbury J. F., Some Measurements of Boundary Layer Growth in a Two-dimensional Diffuser, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D, 81, pp. 285—296 (1959).
  83. Gauger M., диссертация Technische Hochschule, Breslau, 1934.
  84. Schlichting H., Application of Boundary Layer Theory in Turbo-Machinery, *J. Basic Engng, Trans ASME* (Dec. 1959).
  85. Kline S. J., Abott D. E., Fox R. W., Optimum Design of Straight-walled Diffusers, *J. Basic Engng*, Ser. D, pp. 321—331 (Sept. 1959).
  86. Johnston J. P., The Three-dimensional Turbulent Boundary Layer, MIT Gas Turbine Laboratory Rept 39, May 1957 (or ASME Paper 59-HYD-6), *J. Basic Engng*, Ser. D, pp. 622—628 (Sept. 1960).
  87. Maskell E. C., Flow Separation in Three-dimensions, Rept № Aero. 2565, Royal Aircraft Establishment, Farnborough (Nov. 1955).
  88. Eichelbrenner E., Décollement et recollement turbulent en trois dimensions, *Recherche aéronaut.*, № 84, p. 19 (Sept.—Oct 1961).
  89. Johnston J. P., Three-dimensional Turbulent Boundary Layer, Sc. D. thesis, MIT, May 1957.
  90. Taylor E. S., The Skewed Boundary Layer, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D, 81, pp. 297—304 (1959).
  91. Johnston J. P., On the Three-dimensional Turbulent Boundary Layer Generated by Secondary Flow, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D, 82, pp. 233—248 (1960).
  92. Squire H. B., Winter K. G., The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Non-uniform Stream, *J. Aeronaut. Sci.*, 18, pp. 271—277 (1951).
  93. Rubert K. F., Persh J., A Procedure for Calculation of the Development of Turbulent Boundary Layers under the Influence of Adverse Pressure Gradients, NACA TN 2478 (Sept. 1951).
  94. Mager A., Generalization of Boundary Layer Momentum Integral Equations of Three-dimensional Flows Including Those of Rotating Systems, NACA Rept 1067, 1952.

95. Mager A., Mahoney I. I., Budinger R. E., Discussion of Boundary Layer Characteristics Near the Wall of an Axial-flow Compressor, NACA Rept 1085, 1952.
96. Himmelskamp H., Profilvermessungen an einem umlaufenden Propeller, Thesis, Göttingen, 1945.
97. Taylor E. S., The Skewed Boundary Layer, ASME Paper 58-A-113, Dec. 1958.
98. Lieblein E., Loss and Stall Analysis of Compressor Cascade, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D, 81, № 3 (Sept. 1959).
99. Lubick R. J., Wallner L. F., Stall Prediction in Gas Turbine Engines, *J. Basic Engng, Trans. ASME*, Ser. D, 81, № 3 (Sept. 1959).
100. Henry J. R., Wilbur S. W., Preliminary Investigation of the Flow in an Annular-diffuser-tailpipe Combination with an Abrupt Area Expansion and Suction, Injection, and Vortex Generator Flow Controls, NACA RM L-53K30, 1954.
101. Herzog J., Investigation of Annular Diffusers, *MaschBau Wärmew.*, № 7 (1956).
102. Uram E. M., The Growth of an Axisymmetric Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient, Proc. Second US National Congress of Applied Mechanics, Ann Arbor, Mich., 1954.
103. Wilbur S. W., Higginbotham J. T., Investigation of Two Short Annular Diffuser Configurations Utilizing Suction and Injection as a Means of Boundary Layer Control, NACA RM L54K18, Jan. 1955.
104. Wood C. C., Higginbotham J. T., Effects of Diffuser and Centerbody Length on Performance of Annular Diffusers with Constant-diameter Outer Walls and with Vortexgenerator Flow Controls, NACA RM L54G21, Sept. 1954.
105. Wood C. C., Higginbotham J. T., The Influence of Vortex Generators on the Performance of a Short 1.9 : 1 Straight-wall Annular Diffuser with a Whirling Inlet Flow, NACA RM L52L01a, Feb. 1953.
106. Milliat J. P., Turbulent Air Flow in a Pipe with Diffusing Section, *Houille blanche*, 11 (1956).
107. Wieghardt K., Betrachtungen zum Zähigkeitswiderstand von Schiffen, *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft*, 52 (1959).
108. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, изд-во «Наука», 1964.
109. Rotta J. C., Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 2, Boundary Layer Problems, ed. Ferry A., Küchemann D., Sterne L. T. G., Pergamon Press, 1962.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Crockrell D. J., Markland E., The Effects of Inlet Conditions on Incompressible Fluid Flow through Conical Diffusers, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, pp. 51—52 (Jan. 1962).
- Eichelbrenner E. A., Peube J. L., Theoretical and Experimental Investigations in Three-dimensional (Laminar and Turbulent) Boundary Layers, in Particular on Problems of Transition, Separation and Reattachment, Faculté des Sciences de Poitiers, Laboratoire de Mécanique des Fluides (Sept. 1966).
- Moses H. L., Chappell J. R., Goldberger T., Boundary Layer Separation in Internal Flow, Gas Turbine Laboratory, MIT, Rept № 81 (Sept. 1965).
- Murphy J. S., The Separation of Axially Symmetric Turbulent Boundary Layers, Part 1: Preliminary Experimental Results on Several Bodies in Incompressible Flow, Douglas Aircraft Div., Rept № ES17513, 19 March 1954.

- Robertson J. M., Prediction of Turbulent Boundary-layer Separation, *J. Aeronaut. Sci.*, 24, № 8, pp. 631—632 (Aug. 1957).
- Рошке, Мэссир, Отрыв потока в профилированном сопле, *Ракетная техника*, № 10 (1962).
- Spangenberg W. G., Rowland W. R., Mease N. E., Measurements in a Turbulent Boundary Layer Maintained in a Nearly Separating Condition, reprinted from *Fluid Mechanics of Internal Flow*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1967.
- Stratford D. S., The Prediction of Separation of the Turbulent Boundary Layer, *J. Fluid Mech.*, p. 17 (Jan. 1959).
- Sunley H. L. G., Ferriman V. N., Jet Separation in Conical Nozzles, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, p. 808 (Dec. 1964).
- Yang, Tah-Teh, Splitter Effect in Conical Diffusers. Part I: Experimental Phase Incompressible Flow, Engineering Experiment Station Bulletin № 103, Clemson Univ., Clemson, South Carolina (March 1965).
- Yang, Tah-Teh, Splitter Effect in Conical Diffusers. Part II: Optimum Design Procedure, Experimental Phase, Incompressible Flow, Engineering Experiment Station Bulletin № 106, Clemson Univ., Clemson, South Carolina (July 1966).

## Глава V

# ОТРЫВ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА ЖИДКОСТИ

---

### Обозначения

- $a$  — ось эллипса;  
 $b$  — ось эллипса; постоянное ускорение;  
 $k = b/a$ ;  
 $R$  — радиус тела;  
 $r$  — координата, направленная по нормали к оси тела;  
 $w(x) = u_e(x, t)/t$ ;  
 $\zeta$  — безразмерная величина;  
 $\eta = y/(2\sqrt{vt})$ ;  
 $\varphi$  — угол, измеряемый от критической точки.

### Индексы

- $\circ$  — первое приближение;  
1 — второе приближение.

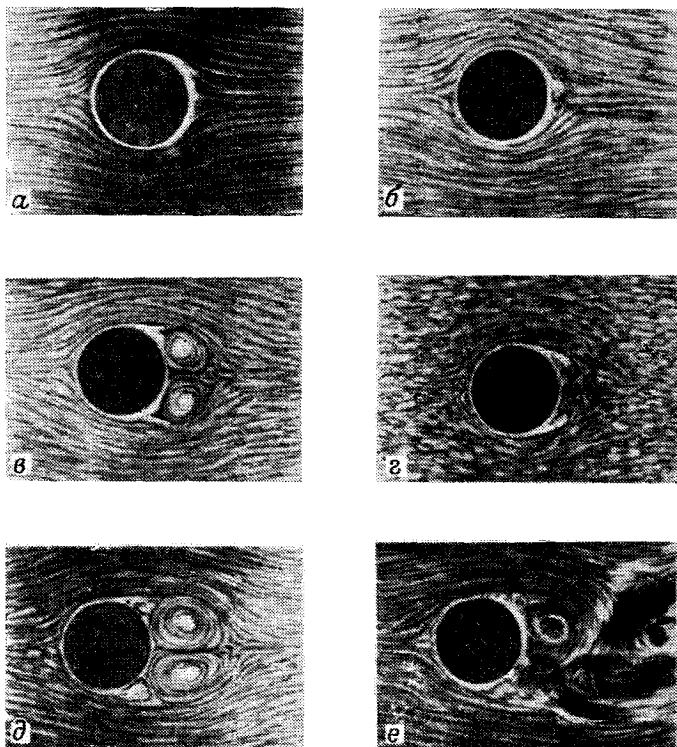
Отрыв установившегося потока как наиболее простой тип течения исследован гораздо шире по сравнению с отрывом неустановившегося потока. Неустановившееся течение в пограничном слое может быть обусловлено перемещением границ с переменной скоростью или пульсациями в основном потоке. Известно, что отрыв потока сам по себе порождает неустановившийся характер течения, а неустановившийся отрыв в общем случае является самовозбуждающимся.

В прошлом были получены теоретические решения задач об отрыве неустановившегося потока, обусловленного движением тела с переменной скоростью, и большинство из них приведено в монографиях Шлихтинга [1], Гольдштейна [2] и т. д. Здесь также будут приведены эти классические решения.

При движении из состояния покоя поток жидкости является неустановившимся, и в таком неустановившемся потоке происходит отрыв. Рассмотрим тупое тело, находящееся в начальный момент времени в состоянии покоя. И тело, и жидкость имеют до некоторого времени нулевую скорость, а затем возникает пере-



менный во времени внешний поток. В этом случае механизм неустановившегося течения можно понять из рассмотрения фиг. 1, где показано обтекание кругового цилиндра. На фиг. 1, а показано начальное течение. Это течение безвихревое, и толщина пограничного слоя близка к нулю.

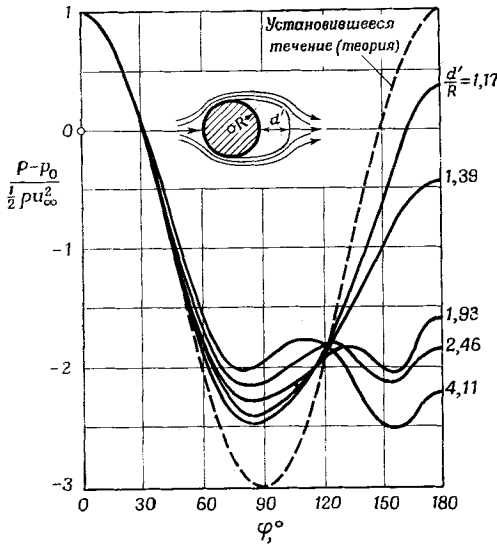


Фиг. 1. Образование пограничного слоя, вихрей и следа при обтекании кругового цилиндра, движущегося ускоренно из состояния покоя.

Со временем около тела формируется тонкий пограничный слой, происходит диффузия завихренности пограничного слоя, толщина слоя растет, а скорость по толщине меняется от скорости тела до скорости внешнего потока.

Обычно отрыв начинается в сечении, где скорость потенциального течения быстрее всего убывает в направлении потока. При обтекании кругового цилиндра отрыв начинается у задней критической точки (фиг. 1, б). Позднее это будет доказано теоретически. Как видно из фиг. 1, в, точка отрыва перемещается со временем

вверх по потоку. Линия тока, проходящая через точку отрыва, отделяет вязкий слой, скорости в котором малы. Завихрения формируют вихревой слой, который свертывается в виде двух концентрированных вихрей (фиг. 1, *з*). Перемещение точки отрыва вверх по потоку продолжается до достижения установившегося



Ф и г. 2. Распределение давления по поверхности кругового цилиндра в начальной стадии движения [1].

положения. Когда вихри разрастаются (фиг. 1, *д*), они становятся неустойчивыми и уносятся с тела внешним потоком (фиг. 1, *е*).

Швабе [3] более подробно исследовал этот тип течения около кругового цилиндра и измерил распределение давления на цилиндре, которому сообщается ускорение из состояния покоя (фиг. 2).

В начальной стадии движения при малом  $d'$  (расстояние между цилиндром и критической точкой в потоке за двумя вихрями) измеренное распределение давления приближается к распределению давления в потенциальном потоке, но с течением времени различие между измеренным распределением давления и распределением давления в потенциальном потоке увеличивается. При обтекании тонких тел, таких, как крыловой профиль, тонкий эллиптический цилиндр, корпус корабля и т. д., измеренное распределение давления близко к распределению давления в потенциальном потоке даже при больших интервалах времени, поскольку нарастание пограничного слоя невелико.

В предыдущих главах были рассмотрены различные методы, позволяющие определить положение отрыва при заданных условиях установившегося течения. В этой главе описаны методы, с помощью которых определяется время и пройденное расстояние до образования установившегося отрывного течения.

Периодическое течение может быть вызвано периодическим движением жидкости около тела, находящегося в состоянии покоя, или наоборот, и в обоих случаях пограничный слой также будет неустановившимся. Известно, что на положение отрыва ламинарного пограничного слоя влияют внешние пульсации и что точка отрыва колеблется. Однако большей информацией об отрыве потока при периодическом движении автор не располагает.

Критерием отрыва неустановившихся двумерного и осесимметричного потоков, как и для установившихся потоков, является предположение о равенстве нулю напряжения трения в точке отрыва.

Основные уравнения неустановившегося пограничного слоя те же самые, что и для установившегося, за исключением добавочного члена, содержащего  $\partial/\partial t$  в уравнении количества движения и в уравнении Бернулли.

Уравнение неразрывности двумерного течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнение количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Для осесимметричного течения уравнение количества движения такое же, а уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Используя уравнение Бернулли для неустановившегося течения, можно записать выражение для градиента давления в виде

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x},$$

где  $u_e(x, t)$  — заданная скорость неустановившегося течения за пределами пограничного слоя. Для решения этих дифференциальных уравнений необходимы следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = u_e(x, t) \quad \text{при } y = \infty.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений (1) — (3) выполняется, как правило, методом последовательных приближений, основанном на следующем рассуждении. В начальной стадии движения из состояния покоя пограничный слой очень тонок,

но вязкий член  $\nu (\partial^2 u / \partial y^2)$  очень велик, в то время как конвективные члены уравнений сохраняют обычные значения. Вязкие силы уравновешиваются нестационарным ускорением  $\partial u / \partial t$  и давлением, в выражении для которого в начале движения доминирует  $\partial u_e / \partial t$ . Для получения теоретического решения скорость рассматривается в виде суммы первого и второго приближений

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t), \quad (4)$$

где индексы 0 и 1 обозначают первое и второе приближения;  $u_0$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t}. \quad (5)$$

Граничные условия:

$$u_0 = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } u_0 = u_e(x, t) \text{ при } y = \infty$$

Уравнение для второго приближения  $u_1(x, y)$  получается из уравнения количества движения (2). Конвективные члены вычисляются при использовании  $u_0$  и с учетом конвективного члена в выражении для давления. Уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}. \quad (6)$$

Граничные условия:

$$u_1 = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } u_1 = 0 \text{ при } y = \infty.$$

Уравнения неразрывности также записываются через  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $v_0$ ,  $v_1$ .

Аналогично получают приближения высшего порядка  $u_2$ ,  $u_3$ , . . . . Указанный метод применим не только для неустановившегося течения из состояния покоя, но и для периодического течения. Однако решение дифференциального уравнения этим методом затруднительно, причем трудности возрастают с увеличением порядка аппроксимаций, ограничивая применимость метода. Далее более подробно будет изучен отрыв, который возникает при внезапном возникновении движения и при движении с постоянным ускорением. Вследствие недостатка информации отрыв при периодическом движении здесь не рассматривается.

## 1. ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВОЗНИКНОВЕНИИ ДВИЖЕНИЯ

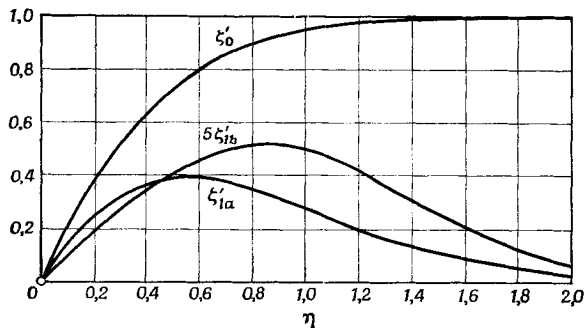
Рассмотрим отрыв неустановившихся двумерного и осесимметричного потоков.

1.1. ОТРЫВ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВУМЕРНОГО ПОТОКА

Введем функцию тока

$$\psi(x, y, t) = 2 \sqrt{vt} \left\{ u_e \zeta_0(\eta) + tu_e \frac{du_e}{dx} \zeta_1(\eta) + \dots \right\}, \quad (7)$$

где  $\eta = y/2 \sqrt{vt}$  и  $\zeta$  — безразмерная величина.



Ф и г. 3. Функция  $\zeta_0'$ , а также  $\zeta_1' = \zeta_{1a}'$  и  $\zeta_{1b}'$  для распределения скорости в нестационарном пограничном слое; уравнения (8) и (15а) [1].

При этом составляющие скорости  $u = \partial\psi/\partial y$  и  $v = -\partial\psi/\partial x$  равны

$$\begin{aligned} u &= u_e \zeta_0' + tu_e (du_e/dx) \zeta_1' + \dots, \\ -v &= 2 \sqrt{vt} \left[ \frac{du_e}{dx} \zeta_0 + t \left\{ \left( \frac{du_e}{dx} \right)^2 + u_e \frac{d^2u_e}{dx^2} \right\} \zeta_1 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (5), получим для первого приближения  $\zeta_0'' + 2\eta \zeta_0' = 0$ .

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \zeta_0' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ \zeta_0' &= 1 \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{u_0(x, y, t)}{u_e(x, y, t)} = \zeta_0'(\eta) = \operatorname{erf} \eta. \quad (9)$$

На фиг. 3 построена функция  $\zeta_0'$  от  $\eta$ .

Из уравнений (7) и (9) получаем дифференциальное уравнение для второго приближения

$$\zeta_1''' + 2\eta \zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4 [\zeta_0'^2 - \zeta_0 \zeta_0'' - 1]. \quad (10)$$

Граничные условия:

$$\zeta_1 = \zeta_1' = 0 \quad \text{при } \eta = 0.$$

$$\zeta_1' = 0 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Решение уравнения (10) дается Блазиусом:

$$\begin{aligned} \zeta_1' = & -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2) \operatorname{erfc}(\eta) + \frac{1}{2}(2\eta^2 - 1) \operatorname{erfc}^2(\eta) + \\ & + \frac{2}{\pi} \exp(-2\eta^2) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2) + 2 \operatorname{erfc}(\eta) - \frac{4}{3\pi} \exp(-\eta^2) + \\ & + \left( \frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi^{3/2}} \right) \left\{ \eta \exp(-\eta^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta^2 + 1) \operatorname{erfc}(\eta) \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Теперь из уравнений (8), (9) и (11) вычисляется  $u$ . Как видно из уравнения (8), отрыв происходит в момент времени  $t_S$  при условии  $(\partial u / \partial y)|_0 = 0$  или  $\zeta_0''(0) + \zeta_1''(0) t_S (\partial u_e / \partial x) = 0$ . Если начальные производные задаются в соответствии с фиг. 3

$$\zeta_0''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad \zeta_1''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right), \quad (12)$$

то из уравнения (12) имеем

$$1 + \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \frac{du_e}{dx} t_S = 0. \quad (13)$$

Отрыв возможен при положительном градиенте давления, т.е. там, где величина  $du_e/dx$  отрицательна и начало отрыва находится в точке, где абсолютное значение  $du_e/dx$  имеет наибольшее значение. Если положение отрыва задано, то время отрыва  $t_S$  (время до возникновения отрыва) вычисляется по уравнению (13).

## 1.2. ОТРЫВ ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Обозначая через  $u_\infty$  скорость невозмущенного потока, запишем выражение для скорости потенциального течения около кругового цилиндра (фиг. 4)

$$u_e(x) = 2u_\infty \sin \frac{x}{R} \quad \text{и} \quad \frac{du_e(x)}{dx} = \frac{2u_\infty}{R} \cos \frac{x}{R}.$$

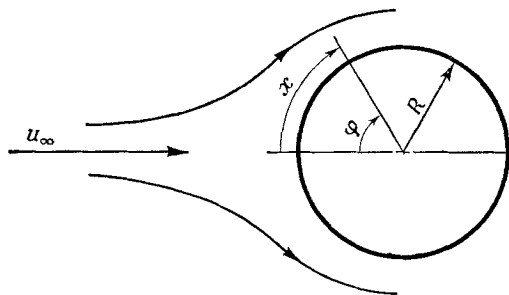
Наибольшее абсолютное значение  $du_e/dx$  достигается в задней критической точке. Время  $t_S$ , по истечении которого возникает отрыв, определяется из уравнения (13) (второе приближение)

$$t_S = \frac{R/u_\infty}{2 \{ 1 + (4/3\pi) \}} = 0,351 R/u_\infty.$$

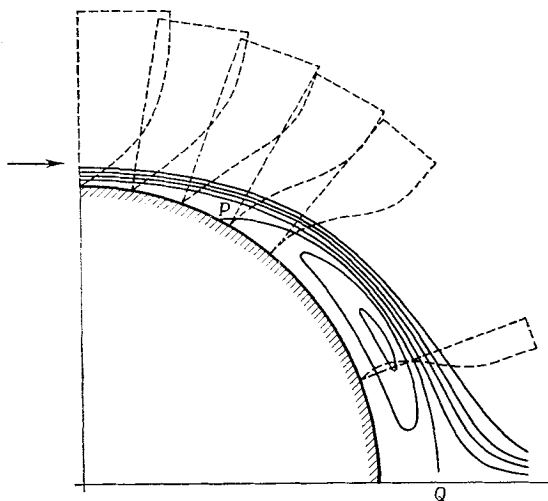
При этом расстояние, пройденное цилиндром до начального момента отрыва, равно

$$S_S = t_S u_\infty = \frac{R}{2 \{1 + (4/3\pi)\}} = 0,351 R.$$

Оказывается, что второе приближение для  $t_S$  является достаточно точным для практического применения, поскольку третье



Ф и г. 4. Обтекание кругового цилиндра.



Ф и г. 5. Пограничный слой в момент, когда точка отрыва достигает положения  $\varphi = 60^\circ$  (от задней критической точки).

Кривая  $PQ$  — граница вихревого слоя.

приближение Гольдштейна и Розенхеда [4]

$$t_S = 1 / \left\langle 0,7122 \left( -\frac{du_e}{dx} \right) + \left\{ 0,7271 \left( \frac{du_e}{dx} \right)^2 + 0,05975 u_e \frac{d^2 u_e}{dx^2} \right\}^{1/2} \right\rangle$$

и уточненные расчеты Вундта [5] дают для цилиндра  $t_S = 0,32 R/u_\infty$  при гораздо более громоздких вычислениях.

Блазиус [6] определил профили скорости, когда угловое положение точки отрыва равно  $60^\circ$ , считая от задней критической точки (фиг. 5). Если радиус цилиндра 10 см,  $v = 0,01$  см<sup>2</sup>/с, а ускорение 0,1 см/с<sup>2</sup>, то в соответствии с фиг. 5 время от начала движения равно 15,8 с. Но при ускорении 10 см/с<sup>2</sup> это время равно 1,58 с.

### 1.3. ОТРЫВ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Эту задачу решили Гёртлер [7] и Толмин [8].

Задано уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси. Обозначая  $k = b/a$ ,  $x/a = \cos \varphi$  и  $y/b = \sin \varphi$ , можно записать скорость потенциального течения вдоль поверхности эллиптического цилиндра, которому внезапно сообщается скорость  $u_\infty$  в направлении горизонтальной полуоси  $a$ , в виде

$$\frac{u_e(s)}{u_\infty} = \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}},$$

а градиент скорости в виде

$$\frac{a}{u_\infty} \frac{du_e(s)}{ds} = \frac{(1+k) k^2 \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi)^2}.$$

Если  $k^2 > \frac{4}{3}$ , градиент скорости максимален при  $\varphi = \varphi_m$ , где  $\cos^2 \varphi_m = \frac{1}{3(k^2-1)}$ . Числовые значения максимума градиента скорости равны

$$\frac{b}{u_\infty} \left( \frac{du_e}{ds} \right)_m = \frac{1+k}{k} \quad \text{при } k^2 \leq \frac{4}{3}$$

и

$$\frac{b}{u_\infty} \left( \frac{du_e}{ds} \right)_m = \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{k^3(1+k)}{\sqrt{k^2-1}} \quad \text{при } k^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Время  $t_S$  до начального момента отрыва можно найти подстановкой этих выражений в уравнение (13)

$$t_S \frac{u_\infty}{a} = \frac{k^2}{\{1+(4/3\pi)\}(1+k)} \quad \text{при } k^2 \leq \frac{4}{3}$$

и

$$t_S \frac{u_\infty}{b} = \frac{16\sqrt{k^2-1}}{\{1+(4/3\pi)\}3\sqrt{3}k^3(1+k)} \quad \text{при } k^2 \geq \frac{4}{3}.$$

(14)



Расстояние  $S$ , пройденное цилиндром до начального момента отрыва, выражается в виде  $S = t_S u_\infty$ , так что

$$y_S = 0 \text{ при } k^2 \leq \frac{4}{3},$$

$$\frac{y_S^2}{b^2} = 1 - \frac{1}{3(k^2 - 1)} \text{ при } k^2 \geq \frac{4}{3}.$$

При  $k = 1$  уравнение (14) становится уравнением для кругового цилиндра. С увеличением  $k = b/a$   $t_S$  уменьшается и точка отрыва перемещается от конца оси  $a$  в направлении конца оси  $b$ . При  $k = b/a \rightarrow \infty$  уравнение для кругового цилиндра становится уравнением пластины, установленной под прямым углом к направлению потока. В этом случае  $t_S = 0$ , т. е. отрыв возникает мгновенно и  $y_S = b$ .

#### 1.4. ОТРЫВ ПОТОКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

Расчет пограничного слоя на внезапно приобретающем вращательное движение цилиндре выполнил Толмин [9]. Метод решения аналогичен методу, примененному для эллиптического цилиндра. Результаты показывают, что отрыв потока затягивается на той стороне цилиндра, где тангенциальная скорость совпадает по направлению со скоростью потока.

### 2. ОТРЫВ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА

В этом случае критерий начала отрыва потока аналогичен соответствующему критерию в случае двумерного течения, т. е.  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$ .

Определяя  $u = (1/r)(\partial\psi/\partial y)$  и  $v = (-1/r)(\partial\psi/\partial x)$ , введем функцию тока

$$\psi(x, y, t) = 2\sqrt{vt} \left[ ru_e \zeta_0(\eta) + t \left\{ ru_e \frac{du_e}{dx} \zeta_{1a}(\eta) + u_e^2 \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}(\eta) \right\} + \dots \right]. \tag{15}$$

Больце [10] получил

$$\frac{u}{u_e} = \zeta_0' + t \left( \frac{du_e}{dx} \zeta_{1a}' + \frac{u_e}{r} \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}' \right), \tag{15a}$$

где  $\zeta_{1a}$  идентично  $\zeta_1$  в случае двумерной задачи. Используя уравнение (6), он нашел  $\zeta_{1b}$  из уравнений

$$\zeta_{1a}'''' + 2\eta \zeta_{1a}'''' - 4\zeta_{1a}' = 4(\zeta_0'^2 - 1 - \zeta_0 \zeta_0'')$$

и

$$\zeta_{1b}'''' + 2\eta \zeta_{1b}' - 4\zeta_{1b} = -4\zeta_0 \zeta_0''.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}\zeta_{1a} = \zeta'_{1a} = 0, \quad \zeta_{1b} = \zeta'_{1b} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ \zeta'_{1a} = 0, \quad \zeta'_{1b} = 0 \quad \text{при } \eta = \infty.\end{aligned}$$

На фиг. 3 построены графики, а в табл. 1 приведены числовые значения  $\zeta'_{1a}$  и  $\zeta'_{1b}$  в функции  $\eta$ . Начальное значение  $\zeta''_{1b}(0) = 0,169$  можно найти как из фиг. 3, так и из табл. 1.

Из условия  $(\partial u/\partial y)|_{y=0} = 0$  получается следующее уравнение:

$$\zeta''_0(0) + t_S \left\{ \frac{du_e}{dx} \zeta''_{1a}(0) + \frac{u_e}{r} \frac{dr}{dx} \zeta''_{1b}(0) \right\} = 0$$

или

$$1 + t_S \left\{ \frac{du_e}{dx} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) + 0,150 \frac{u_e}{r} \frac{dr}{dx} \right\} = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (16) можно вычислить время  $t_S$  до начального момента отрыва на осесимметричном теле заданной формы при заданном распределении скорости потенциального течения.

Таблица 1

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  $\zeta'_{1a}$  И  $\zeta'_{1b}$  В ФУНКЦИИ  $\eta$  [10]

$\eta$	$\zeta'_{1a}$	$\zeta'_{1b}$	$\eta$	$\zeta'_{1a}$	$\zeta'_{1b}$
0	0	0	1,1	0,231	0,092
0,1	0,142	0,017	1,2	0,191	0,083
0,2	0,246	0,034	1,3	0,158	0,072
0,3	0,318	0,051	1,4	0,126	0,061
0,4	0,362	0,066	1,5	0,099	0,050
0,5	0,382	0,080	1,6	0,075	0,040
0,6	0,382	0,091	1,7	0,056	0,031
0,7	0,367	0,099	1,8	0,041	0,023
0,8	0,340	0,103	1,9	0,021	0,011
0,9	0,307	0,102	$\infty$	0	0
1,0	0,269	0,099			

### 2.1. ОТРЫВ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ

Больце [10] вычислил время и расстояние до возникновения установившегося отрыва на сфере.

Так как  $r = \sin(x/R)$  и  $u_e(x) = 3/2 u_\infty \sin(x/R)$ , уравнение (16) принимает вид

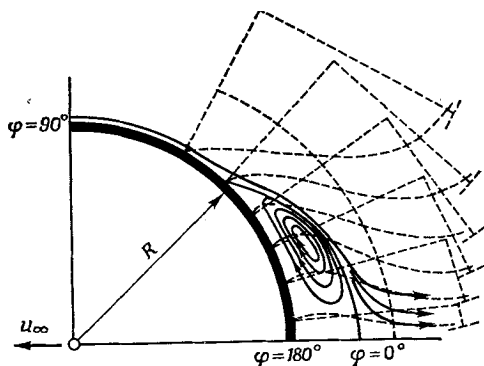
$$1 + t_S \frac{3}{2} \frac{u_\infty}{R} \cdot 1,573 \cos \frac{x}{R} = 0$$

И

$$\frac{3}{2} t_S \frac{u_\infty}{R} = 0,635.$$

Добавляя два члена в выражение для функции тока, Больце [10] получил значение 0,589 вместо 0,635 или  $t_S = 0,392R/u_\infty$ . Тогда расстояние, пройденное сферой до начального момента отрыва, равно  $S_S = u_\infty t_S = 0,392R$ .

Точка отрыва движется от задней критической точки сначала быстрее, затем медленнее к установившемуся положению  $\varphi \approx 110^\circ$ .



Ф и г. 6. Профили скорости в пограничном слое на равноускоренно движущейся сфере,  $S_S = 0,6R$  [1].

На фиг. 6 показаны профили скорости в пограничном слое, соответствующие расстоянию  $S_S = 0,6R$ . Это расстояние покрывается за время 0,6 с, если  $R = 10$  см и  $u_\infty = 10$  см/с.

### 3. ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ПОСТОЯННОМ УСКОРЕНИИ

Блазиус [6] вычислил расстояние и время, исчисляемые от начала движения, для случая обтекания равноускоренно движущегося двумерного тела. Результаты его исследований очень напоминают предыдущие, полученные для случая внезапного возникновения движения.

Задавая скорость потенциального течения около тела в виде

$$\begin{aligned} u_e(x, t) &= 0, & (t \leq 0), \\ u_e(x, t) &= tw(x), & (t \geq 0) \end{aligned}$$

и функцию тока  $\psi$  в виде

$$\psi(x, y, t) = 2\sqrt{vt} \left\{ tw\zeta_0(\eta) + t^3 w \frac{dw}{dx} \zeta_1(\eta) + \dots \right\},$$

находим

$$u(x, y, t) = u_e \left( \zeta'_0 + t^2 \frac{dw}{dx} \zeta'_1 + \dots \right). \quad (17)$$

Затем получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' - 4\zeta_0' &= -4, \\ \zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 12\zeta_1' &= -4 + 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0''). \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \zeta_0 = \zeta_0' = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_1' = 0 &\text{ при } \eta = 0, \\ \zeta_0' = 1, \quad \zeta_1' = 0 &\text{ при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Блазиус нашел решение для  $\zeta_0'$  в виде

$$\zeta_0' = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2) - (1 + 2\eta^2) \operatorname{erfc} \eta.$$

Он получил также решение для  $\zeta_1'$  в конечном виде.

Некоторые числовые значения  $\zeta_0'$  и  $\zeta_1'$  даны в табл. 2. Положение точки отрыва определяется условием  $(\partial u / \partial y)|_{y=0} = 0$ , и из

Таблица 2

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  $\zeta_0'$  И  $\zeta_1'$

$\eta$	$\zeta_0'$	$\zeta_1'$	$\eta$	$\zeta_0'$	$\zeta_1'$
0	0	0	1,0	0,943	0,020
0,25	0,450	0,137	$\infty$	1,0	0
0,50	0,720	0,150			

уравнения (17) следует  $\zeta_0''(0) + t_S^2 (dw/\partial x) \zeta_1''(0) = 0$ . Так как  $\zeta_0'(0) = 4/\sqrt{\pi}$ ,  $\zeta_1'(0) = (4/\sqrt{\pi}) \times 0,427$  (табл. 2), то

$$1 + 0,427 t_S^2 \frac{dw}{dx} = 0 \text{ или } 1 + 0,427 t_S \frac{du_e}{dx} = 0. \quad (18)$$

Сравнивая уравнение (13) (которое соответствует внезапному возникновению движения) с уравнением (18) при одинаковых значениях  $du_e/dx$ , можно ожидать, что при начавшемся внезапно движении отрыв произойдет раньше, чем при равноускоренном движении.

### 3.1 ОТРЫВ ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Для кругового цилиндра  $u_e(x, t) = tw(x) = 2bt \sin(x/R)$ , где  $b$  — постоянное ускорение. Кроме того,

$$w(x) = 2b \sin \frac{x}{R} \text{ и } \frac{dw}{dx} = \frac{2b}{R} \cos \frac{x}{R}. \quad (19)$$

Отрыв возникает сначала в задней критической точке.

Блазиус добавил два дополнительных члена в уравнение (19) и получил следующее модифицированное уравнение:

$$1 + 0,427 \frac{dw}{dx} t_S^2 - 0,026 \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 t_S^4 - 0,01w \frac{d^2w}{dx^2} t_S^4 = 0. \quad (20)$$

Для кругового цилиндра, расположенного под нулевым углом атаки, последний член обращается в нуль в критической точке и  $t_S^2 (dw/dx) = -2,08$ . Из уравнений (19) и (20) следует  $t_S^2 = 1,04 R/b$ .

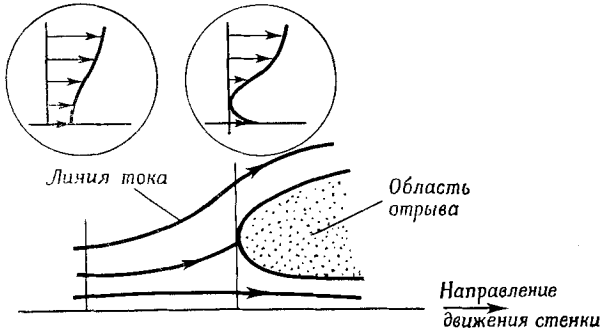
Расстояние, пройденное цилиндром до начального момента отрыва потока, равно  $S = bt_S^2/2$ , или  $S = 0,52R$ . Таким образом,  $S$  в этом случае также больше, чем в случае внезапного возникновения движения.

Теоретическое решение другим методом было получено Гёртлером [11], который представил потенциальное течение в виде  $u_e(x, t) = w(x) t^n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . При  $n = 0$  течение соответствует внезапному возникновению движения, а при  $n = 1$  — равноускоренному движению. Гёртлер получил решение для первого приближения при изменении  $n$  от 0 до 4 путем разложения функции тока в степенной ряд по времени. Значения  $t_S$  и  $S$  затем были вычислены по значениям второго приближения на стенке с заданным начальным наклоном.

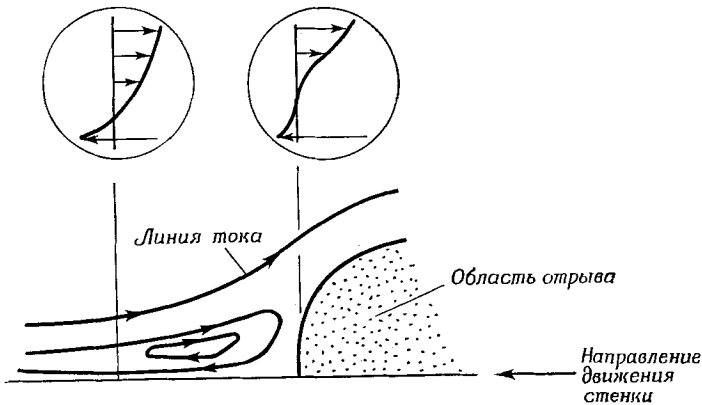
#### 4. ОТРЫВ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ОТ ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКИ

Специальный вид отрыва неуставившегося ламинарного потока от движущейся стенки, который может возникать на лопатках компрессоров, был исследован авторами работ [12, 13] на примере двумерного вращающегося цилиндра диаметром 10 см (максимальное число оборотов 2000 об/мин). Цилиндр помещен в свободный поток, скорость которого менее 9 м/с. Чтобы имитировать характер изменения давления, соответствующий обтеканию крылового профиля, вращающийся цилиндр был экранирован. Важным в данном случае свойством срыва потока является присутствие неуставившегося пограничного слоя, в котором точка отрыва движется относительно стенки. Определенная нестационарность существует в пограничном слое во всех угловых положениях с отрицательным  $V/u_\infty$ , где  $V$  — составляющая скорости, перпендикулярная к направлению  $u_\infty$ , причем направление к поверхности цилиндра принимается отрицательным. Эта нестационарность постепенно возрастает с увеличением угла, но ни в одном угловом положении не существует заметного скачка в величине пульсации скорости. Такой скачок мог бы указывать на отрыв потока. Отрыв неуставившегося потока такого типа отличается от отрыва установившегося потока,

следовательно, разными будут и критерии отрыва. Скорость при отрыве ненулевая, и формирование отрывного течения за точкой отрыва не является необходимым условием. Тем не менее задача



Ф и г. 7. Стенка, движущаяся в направлении течения [12].



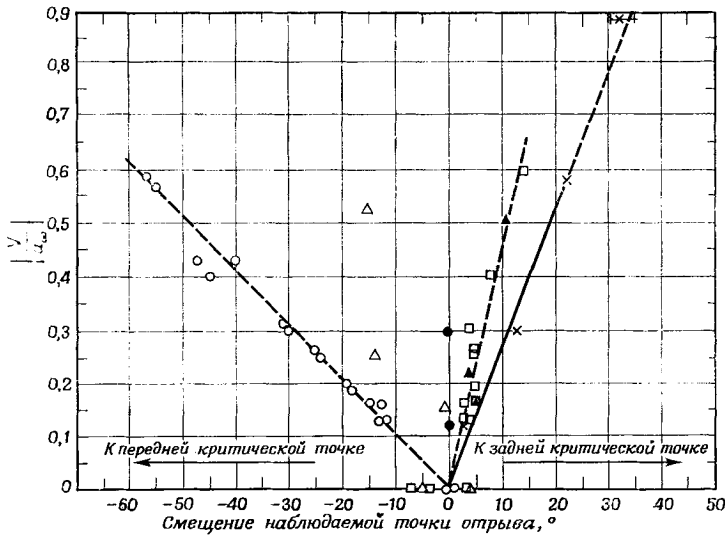
Ф и г. 8. Стенка, движущаяся против течения [12].

определения точки отрыва может быть сведена к задаче установившегося течения, если стенка движется либо вниз, либо вверх по потоку.

Если стенка движется вниз по потоку, то в области отрыва образуется профиль скорости, как на фиг. 7. Отрыв происходит не на стенке, а на некоторой высоте над стенкой, и пограничный слой течет под отрывной зоной. Точка отрыва перемещается вниз по потоку, и это перемещение зависит от скорости стенки по линейному закону, но оно относительно мало чувствительно к градиенту давления.

На фиг. 8 показан профиль скорости для случая, когда стенка движется вверх по потоку.

Отрыв возникает в том месте, где профиль скорости имеет достаточно большой плоский вертикальный участок с особенностью у основания и где скорость резко меняется от нуля вблизи



Ф и г. 9. Влияние скорости стенки на наблюдаемое положение точки отрыва [13].

$\left| \frac{v}{u_\infty} \right|$  — отношение абсолютной величины вертикальной составляющей скорости в пограничном слое (скорости стенки) к скорости набегающего потока.

Обозначения	Модель	Знач $V/u_\infty$	$Re_d$	Положение точки отрыва (град) при $V=0$	Источник
×	} Цилиндр с обтекателем	+	$6 \cdot 10^4$	120	[13]
□		+	$2 \cdot 10^4$	133	*
●		-	$6 \cdot 10^4$	120	[13]
○	} Цилиндр без обтекателя	-	$2 \cdot 10^4$	131	*
▲		+	$2 \cdot 10^4$	85	*
△		-	$2 \cdot 10^4$	85	*

\* WADC TR-59-75, 1959

стенки до скорости стенки на самой стенке. Пограничный слой содержит подслой с возвратно-циркуляционным течением, который простирается от передней критической точки до точки отрыва, причем в пограничном слое не должно быть отрывного течения.

Поэтому критерий отрыва ламинарного потока на движущейся стенке может быть сформулирован в виде двух условий:  $du/dy = 0$  и  $u = 0$  в одной и той же точке независимо от направления движения стенки. Единственным достоверным экспериментальным указанием на отрывное течение, когда стенка движется, является поведение вертикальной составляющей скорости в пограничном слое. Влияние скорости стенки на наблюдаемое положение отрыва ламинарного потока показано на фиг. 9.

Приближенное решение (развивающее исследование Польгаузе-на) [14] предсказывает отрыв ламинарного потока в случае стенки, движущейся вниз по потоку; но для стенки, движущейся вверх по потоку, нет теоретических исследований, позволяющих предсказать отрыв.

Завершим теперь эту главу рассмотрением нестационарности потока при отрыве. Можно выделить два типа нестационарных потоков: квазистационарный и переходный [15]. Квазистационарный поток периодичен, т. е. его основные характеристики не меняются по времени. Структура потока переходного типа меняется из одного устойчивого положения, которое может быть нестационарным, в другое.

Широко известная вихревая цепочка Кармана, колеблющаяся крыло и установившийся срыв потока на вращающихся телах принадлежат к первому случаю. В общем случае возникают периодически срывающиеся вихри. Из-за таких срывающихся вихрей работа турбомашин и трубопроводов сопровождается шумом.

Отрыв переходного типа возможен при разгоне реактивного двигателя до рабочей скорости. В течение периода разгона может быть несколько различных конфигураций отрывных течений.

Явления нестационарности потока при отрыве характеризуются пульсирующими процессами в застойных зонах, которые в настоящее время не могут быть описаны теоретически. Поэтому частота и размеры пульсирующих вихрей, а также нестационарные силы и давления могут быть определены только экспериментально.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ш л и х т и н г Г., Теория пограничного слоя, изд-во «Наука», 1969.
2. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 2, под ред. Гольдштейна, ИЛ, 1948.
3. S c h w a b e M., Über Druckermittlung in der instationären ebener Strömung, *Ing.—Arch.*, 6, p. 34 (1935); см. также NACA TM 1039, 1943.
4. G o l d s t e i n S., R o s e n h e a d L., Boundary Layer Growth, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 32, pp. 392—401, 1936.
5. W u n d t H., Wachstum der laminaren Grenzschicht an schräg angeströmten Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe, *Ing.—Arch.*, 23, p. 212 (1955).
6. B l a s i u s H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, 56 (1908).



7. G ö r t l e r H., Grenzschichtentstehung an Zylinder bei Anfahrt aus der Ruhe, *Arch. Math.*, **1**, p. 138 (1948).
8. T o l l m i e n W., Grenzschichten, Handbuch der Experimental Physik, Vol. 4, Part 1, p. 274, 1931.
9. T o l l m i e n W., Die zeitliche Entwicklung der Laminaren Grenzschicht an rotierenden Zylindern, диссертация, Göttingen, 1924; см. также Handbuch der Experimental Physik, Vol. 4, Part 1, p. 274, 1931.
10. B o l t z e E., Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Thesis, Göttingen, 1908.
11. G ö r t l e r H., Veränderung und Wirkung der Laminar Grenzschicht und Druckwiderstand, *Ing.—Arch.*, **14**, 286 (1944).
12. L u d w i g G. R., An Experimental Investigation of Laminar Separation from a Moving Wall, AIAA preprint № 64-6, presented at Aerospace Sciences Meeting, N. Y., Jan. 1964.
13. B r a d y U. G., L u d w i g G. R., Research on Unsteady Stall of Axial Flow Compressors, Cornell Aeronautical Laboratory, CAL Rept AM-1762-S-4, Nov. 1963.
14. S m i t h S. H., Laminar Boundary Layers on Moving Walls, AFOSR TN-50-454, Sept. 1956.
15. D e a n R. C., Separation and Stall, Handbook of Fluid Dynamics, ed. by V. L. Streeter, McGraw-Hill, N. Y., 1961.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Ф э й, Г о л ь д б е р г, Нестационарный гиперзвуковой след за затупленными телами, *Ракетная техника и космонавтика*, № 10 (1963).
- F a u J. A., G o l d b u r g A., The Unsteady Hypersonic Wake Behind Spheres, Avco Everett Research Lab., Research Rept 139, BSD-TDR-62-105, Nov. 1962.
- M a g n u s o n A. H., An Experimental Investigation of the Unsteady Wake Behind an Oscillating Wing In Two-dimensional Incompressible Non-cavitating Flow, The Pennsylvania State Univ., Institute for Science and Engineering, Ordnance Research Lab., Tech. Memo. File № TM 607.2441-10, Feb. 1967.
- S a r p k a y a T., Unsteady Flow Over an Inclined Plate, *J. Appl. Mech.*, presented Nov. 17—22, 1963, at ASME Meeting, N. Y., paper № 63-WA-47.
- S a r p k a y a T., Lift, Drag and Added-mass Coefficients for a Circular Cylinder Immersed in a Time-dependent Flow, *J. Appl. Mech.*, presented Nov. 25—30, 1962, at ASME Meeting, paper № 62-WA-61.
- S a r p k a y a T., G a r r i s o n C. J., Vortex Formation and Resistance in Unsteady Flow, *J. Appl. Mech.*, presented Nov. 25—30, 1962, at ASME Meeting, paper № 62-WA-62.

## Глава VI

### ОТРЫВ ПОТОКА ГАЗА

#### Обозначения

$a(X)$  — параметр профиля скорости;

$b$  — положительная постоянная;

$$C = \frac{T_{\text{исх}}}{T} \frac{\mu}{\mu_{\text{исх}}};$$

$$F = \frac{x_t}{u_e} \frac{du_e}{dx};$$

$h$  — высота; высота уступа;

$I$  — количество движения;

$$J = \theta_t^* / \delta_t^*;$$

$$k = 1 - (p - p_1) / (p_2 - p_1);$$

$L$  — характерная длина;

$l$  — длина области отрыва; расстояние от передней кромки;

$m$  — поток массы;

$n$  — параметр, входящий в формулу  $u/u_e = (y/\delta)^{1/n}$ ;

$r$  — коэффициент восстановления; расстояние от оси вращения;

$S$  — функция энтальпии торможения;

$t$  — переменная Дородницына,  $y = \int_0^t (T/T_e) dt$ ;

$U = (a_\infty/a_e) u$  — скорость, преобразованная по Стюартсону;

$\bar{u}$  — средняя скорость в направлении течения;

$X$  — преобразованная по Стюартсону координата,  $dX = (p_e a_e / p_\infty a_\infty) dx$ ;

$x'$  — расстояние от точки максимума касательной составляющей скорости потенциального течения вдоль поверхности тела;

$Y$  — преобразованная по Стюартсону координата,  $dY = (a_{e\rho_e} / a_{\infty\rho_\infty}) dy$  или  $Y = \int_0^y (v_s/v) dy$ ;

$\alpha$  — параметр;

$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$  или параметр;

$\beta'$  — эмпирическая постоянная;

$\delta_t$  — значение  $t$  при  $y = \delta$ ;

$\varepsilon$  — малая величина;

$$\Sigma = M_e - M_{\infty\pm};$$

$$\eta = 1 - \xi;$$

$\Theta$  — наклон линий тока внешнего невязкого течения при  $y = \delta$ ; угол клина;

$$\kappa = u/u_e;$$

$$\lambda = 1/c \operatorname{Re}_\infty (\delta t/L)^2;$$

$$\lambda_1 = b\lambda;$$

$$\xi = x/L;$$

$$\xi_1 = b\xi;$$

$\tau$  — касательное напряжение или  $\tau = t/\delta_t$ ;

$\varphi$  — угол скачка; угол отклонения потенциального потока;

$$\chi(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(p/p_S)^{1/2}}.$$

### Индексы

- $a$  — значение на расстоянии  $a$  от передней кромки;
- $b$  — значение по Блазиусу;
- $c$  — сжимаемый поток; постоянное давление;
- $i$  — несжимаемый поток; преобразованное значение;
- $K$  — значение в точке перегиба;
- $O$  — значение перед взаимодействием;
- $S$  — отрыв; некоторое стандартное состояние газа; функция энthalпии торможения;
- $s$  — значение в точке торможения;
- $t$  — полное значение;
- отр — значение в точке отрыва;
- эkv — эквивалентный;
- 1 — условие на границе пограничного слоя непосредственно перед областью взаимодействия;
- 2 — условие за прямым скачком. Невязкому потоку соответствует индекс 1 или следующие индексы: + далеко за скачком, — далеко перед скачком;
- дифференцирование по  $x$  или  $\xi$ .

В гл. 1 указывалось, что вязкость и положительный градиент давления являются двумя определяющими факторами, существенно влияющими на отрыв потока. Как показал Вайзе [1], отрыв потока газа, как и отрыв потока жидкости, можно предотвратить, удаляя пограничный слой путем его отсоса со стенок канала, т. е. устранение действия вязкости предотвращает отрыв потока. Поскольку при сверхзвуковых скоростях формируются скачки уплотнения и давление за скачком повышается до гораздо более высокого уровня, чем в тех же условиях в дозвуковом потоке, при сверхзвуковых скоростях более резко выражен положительный градиент давления в направлении течения.

Кроме того, при высоких скоростях большое значение имеет эффект сжимаемости газа, а при достаточно высоких скоростях течения происходит взаимодействие между скачком уплотнения и пограничным слоем. В общих чертах механизм отрыва потока такого рода рассматривается в гл. 1. В данной главе рассматриваются современные исследования отрыва потока, вызванного скачком уплотнения, и возникновения отрыва сжимаемой среды. Как будет показано ниже, в прошлом проблема волнового отрыва была связана в основном с косыми скачками уплотнения; случай прямого скачка будет рассмотрен в разд. 2.4.

Вследствие отрыва изменяется распределение давления в области отрыва. Однако если рассматривать только полное приращение давления, то отрыв не всегда ведет к его уменьшению, так как можно достичь теоретического приращения давления, несмотря на отрыв потока. Если тем не менее отрыв происходит из-за взаимодействия со скачком уплотнения, аэродинамические силы изменяются довольно резко наряду с соответствующим изменением теплового потока. Более того, течение становится нестационарным из-за возникновения самовозбуждающихся колебаний, и в пограничном слое происходят потери количества движения.

Дополнительными проблемами, связанными с отрывом, являются управление сверх- и гиперзвуковыми летательными аппаратами и ограничения некоторых характеристик этих аппаратов. Например, на крыле самолета скачок расположен где-то между передней и задней кромками, и отрыв, вызванный скачком уплотнения, влияет на распределение давления по крылу. При трансзвуковом режиме полета отрыв часто превращает плавное и постепенное нарастание давления по крылу в чрезвычайно возмущенное распределение со значительными пульсациями, вызывающими тряску аппарата или сильные изменения его устойчивости и управляемости. При сверхзвуковых скоростях скачок уплотнения перемещается по направлению к задней кромке, приобретая наклон относительно направления потока; таким образом, хотя скачок слабый, при больших углах атаки все еще возможен отрыв.

В прошлом основные свойства отрыва потока исследовались на простых моделях, таких, как впадина, уступ, игла. Углубление на поверхности летательного аппарата может вызвать разрушение конструкции из-за нестационарного течения в нем, но углубления вместе с тем полезны для увеличения сопротивления гиперзвуковых космических летательных аппаратов, возвращающихся в атмосферу Земли. Отрыв потока перед уступом аналогичен отрыву потока от иглы, установленной перед затупленным телом. Если игла установлена перед затупленным осесимметричным телом, прямой скачок перед затупленным телом может перейти в конический, и тогда между концом иглы и носовой частью тела формируется коническая область отрыва потока, в результате чего

уменьшается сопротивление. Если течение всюду ламинарное, интенсивность теплопередачи также может уменьшиться. Важным параметром, влияющим на отрыв потока, является отношение длины иглы к толщине затупленного тела. Если это отношение меньше 3, то может произойти отрыв ламинарного потока у конца иглы. Так как распределение давления на теле изменяется при варьировании этого отношения, игла может быть использована как эффективное средство управления летательным аппаратом. В настоящее время, несмотря на прогресс в теоретических исследованиях взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем и отрыва сжимаемого потока, теория еще далека от полного или по крайней мере удовлетворительного приложения к практике, например, расчета лопаток компрессора, закрылков, каналов и т. д. при турбулентном течении.

Обширный обзор и правильное представление об отрыве потока, вызванном скачком уплотнения, а также о его влиянии на крылья и способах его предотвращения приведены в работе Пирси [2]. Холдер и Гэдд [3] исследовали взаимодействие ударной волны с пограничным слоем и связь с донным давлением. Фрэзер и др. [4] экспериментально исследовали отрыв потока в соплах при сверхзвуковых скоростях. Краткий обзор, посвященный отрыву газа с акцентированием внимания на гиперзвуковом диапазоне скоростей, был сделан Кауфманом и др. [5]. Так как практические аспекты проблемы отрыва выходят за рамки этой главы, заинтересованный читатель может обратиться к цитированной литературе.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ГАЗА БЕЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Здесь представлены три основных аналитических метода определения точки отрыва ламинарного слоя.

### 1.1. МЕТОД ХОУАРТА

Хоуарт [6] исследовал влияние сжимаемости на отрыв в случае, когда скорость основного потока, начиная от критической точки, возрастает до максимума и затем уменьшается. Выяснилось, что при таком распределении скорости отрыв в потоке газа происходит раньше, чем в потоке жидкости. В этом методе используются уравнения неразрывности, количества движения, энергии, а также функция тока. Аналогичные результаты были получены Коупом и Хартри [7], но их метод связан с трудоемкими расчетами на вычислительных машинах. Кроме того, работа Хоуарта [6] имеет более непосредственное отношение к отрыву, чем метод Коупа и Хартри. В расчетах предполагалось, что  $\mu \propto T$  и  $Pr = 1$ .

Основные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Функция тока  $\psi$  вводится следующим образом:

$$\rho u = \rho_S \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\rho_S \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где  $S$  означает некоторое стандартное состояние газа.

Если ввести преобразованную координату  $Y$  в виде

$$Y = \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{T_S}{T} dy$$

и принять

$$\psi(x, y) = \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \chi(x, Y),$$

$$u = \frac{\rho_S}{\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_x = \frac{\rho_S}{\rho} \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right)_x \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_x$$

или

$$u = \frac{\rho_S}{\rho} \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \frac{\partial \chi}{\partial Y} \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \frac{T_S}{T} = \frac{p}{p_S} \frac{\rho_S}{\rho} \frac{T_S}{T} \frac{\partial \chi}{\partial Y} = \frac{\partial \chi}{\partial Y}$$

и аналогично

$$v = -\frac{\rho_S}{\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_y = -\frac{1}{2} \frac{\rho_S}{p_S \rho} \left( \frac{p_S}{p} \right)^{1/2} \frac{\partial p}{\partial x} \chi -$$

$$- \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \frac{\rho_S}{\rho} \left\{ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_Y + \left( \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right)_x \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_y \right\} =$$

$$= \left( \frac{p}{p_S} \right)^{1/2} \left( \frac{T_S}{T} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2},$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial Y} \frac{\partial \chi}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} \frac{\partial \chi}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2a_e^2} \left\{ u_e^2 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right)^2 \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma}{2a_e^2} \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} \right] + v_s \frac{\partial^3 \chi}{\partial Y^3}, \quad (1)$$

где  $a_e$  — местная скорость звука на границе пограничного слоя.

Это уравнение аналогично уравнению для жидкости, за исключением члена

$$G = 1 + \frac{\gamma-1}{2a_e^2} \left\{ u_e^2 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right)^2 \right\} - \frac{\gamma}{2a_e^2} \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2}.$$

Критерием отрыва считается  $du/dy|_{y=0} = 0$ , следовательно, отрыв потока можно определить, принимая  $du/dy$  или  $du/dY$  равными нулю в уравнении (1). Для заданного распределения скорости замедляющегося основного потока из уравнения (1) следует, что с увеличением числа Маха отрыв будет передвигаться вперед. Из-за усиления влияния на пограничный слой члена  $u_e (du_e/dx)$ , связанного с градиентом давления, за счет положительного множителя  $[1 + \{(\gamma - 1)/2a_e^2\} u_e^2]$ , можно ожидать более раннего отрыва, что и показывает численный расчет.

Расчеты по методу Польшаузена свидетельствуют, что по сравнению с отрывом несжимаемого потока расстояние до точки отрыва от передней кромки уменьшается на 5% при  $M = 1$  и на 33% при  $M = 10$ .

## 1.2. МЕТОД ЛОФТИНА И УИЛСОНА

Лофтин и Уилсон [8] разработали теоретический метод быстрой оценки положения точки отрыва двумерного ламинарного пограничного слоя газа. Они обобщили упрощенное решение Денхоффа для жидкости [9], используя преобразование координат Стюартсона [10], выражающее параметры ламинарного слоя газа через эквивалентные параметры ламинарного слоя жидкости.

Результаты расчетов точки отрыва ламинарного потока для широкого диапазона чисел Маха и градиентов скорости показывают, что при любом градиенте скорости с ростом числа Маха величина восстановления давления перед началом отрыва уменьшается. Критерием отрыва является  $du/dy|_{y=0} = 0$ . Как показано в гл. II, критерий отрыва Денхоффа выражается в виде

$$F = \frac{x_l}{u_e} \frac{du_e}{dx} = 0,0196.$$

Это уравнение получено из интегрального соотношения Кармана в предположении, что распределение скорости в пограничном слое в каждой точке вдоль тела в области ускоряющегося потока аналогично распределению Блазиуса на плоской пластине. Точка отрыва ламинарного потока газа вычисляется с помощью преобразования Стюартсона

$$y_i = \frac{a_e}{a_{\max}} \frac{1}{\sqrt{v_{\max}}} \int_0^{y_c} \frac{\rho}{\rho_{\max}} dy_c, \quad (2)$$

$$x_i = \int_0^{x_c} \left( \frac{a_e}{a_{\max}} \right)^{(3\gamma-1)/(\gamma-1)} dx_c \quad (3)$$

и

$$u_{e_i} = \frac{a_{\text{макс}}}{a_e} u_{e_c}, \quad (4)$$

а также уравнения Денхоффа для жидкости. Индексы  $i$ ,  $c$  и макс относятся соответственно к несжимаемому и сжимаемому течениям и к точке максимума скорости потенциального течения. Применение этого метода требует громоздкого преобразования каждой точки из плоскости сжимаемого течения в соответствующую точку плоскости несжимаемого течения. С помощью более быстрого способа, заключающегося в прямом приложении метода, можно учесть влияние числа Маха простым умножением измеряемого градиента скорости в сжимаемом потоке на некоторый множитель. Тогда из уравнений (3) и (4) имеем

$$\frac{du_{e_i}}{dx_i} = \left\{ u_{e_c} \frac{d(a_{\text{макс}}/a_e)}{dx_c} + \frac{a_{\text{макс}}}{a_e} \frac{du_{e_c}}{dx_c} \right\} \left( \frac{a_{\text{макс}}}{a_e} \right)^{(3\gamma-1)/(\gamma-1)} \quad (5)$$

Принимая за характерную скорость звука  $a_{\text{макс}}$  в точке максимума скорости  $u_{\text{макс}}$  и  $u_{e_{\text{макс}}} = u_{\text{макс}}$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{d(u_{e_i}/u_{e_{\text{макс}}})}{dx_i} = & \left\{ \frac{u_{e_c}}{u_{e_{\text{макс}}}} \frac{d(a_{\text{макс}}/a_e)}{dx_c} + \right. \\ & \left. + \frac{a_{\text{макс}}}{a_e} \frac{d(u_{e_c}/u_{e_{\text{макс}}})}{dx_c} \right\} \left( \frac{a_{\text{макс}}}{a_e} \right)^{(3\gamma-1)/(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнения энергий следует

$$\frac{a_e}{a_{\text{макс}}} = \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\text{макс}}^2 \{1 - (u_{e_c}/u_{\text{макс}_c})^2\}} \quad (7)$$

и

$$\frac{d(a_{\text{макс}}/a_e)}{dx_c} = \frac{\frac{\gamma-1}{2} M_{\text{макс}}^2 \frac{u_{e_c}}{u_{e_{\text{макс}}}} \frac{d(u_{e_c}/u_{\text{макс}_c})}{dx_c}}{\left[ 1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) M_{\text{макс}}^2 \{1 - (u_{e_c}/u_{\text{макс}_c})^2\} \right]^{3/2}}. \quad (8a)$$

Предполагается, что приближенное определение точки отрыва ламинарного потока в плоскости эквивалентного сжимаемого течения производится с помощью преобразованного положительного градиента скорости в точке максимума скорости. Такое допущение предполагает, что либо существует разрыв в распределении скорости газа в точке приложения положительного градиента давления, либо распределение скорости может быть аппроксимировано таким способом. На основе этого предположения  $a_e/a_{\text{макс}} = 1$ ,

$$\frac{d(a_{\text{макс}}/a_e)}{dx_c} = \frac{\gamma-1}{2} M_{\text{макс}}^2 \frac{d(u_{e_c}/u_{\text{макс}})}{dx_c}. \quad (8б)$$

Если подставить уравнение (8б) в уравнение (6) и предположить,



что  $u_{e_c}/u_{\max_c} = a_{\max_c}/e_e = 1$ , то

$$\frac{d(u_{e_i}/u_{\max_i})}{dx_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\max}^2\right) \frac{d(u_{e_c}/u_{\max_c})}{dx_c}. \quad (9)$$

Из этого уравнения видно, что градиент скорости в точке максимума скорости жидкости равен соответствующему градиенту скорости газа, умноженному на  $(1 + [(\gamma - 1)/2] M_{\max}^2)$ . Эквивалентная длина плоской пластины в потоке газа (индекс  $c$ ) равна

$$x_{\text{эвб}_c} = \int_0^{x_{\max_c}} \left(\frac{u_{e_c}}{u_{\max_c}}\right)^{8,17} \left(\frac{a_{\max_c}}{a_e}\right)^{8,17} \left(\frac{a_e}{a_{\max_c}}\right)^{(3\gamma-1)/(\gamma-1)} dx_c. \quad (10)$$

Принимая для воздуха  $\gamma = 1,4$ , получаем

$$x_{\text{эвб}_c} = \int_0^{x_{\max_c}} \left(\frac{u_{e_c}}{u_{\max_c}}\right)^{8,17} \left(\frac{a_{\max_c}}{a_e}\right)^{0,17} dx_c. \quad (11)$$

Если  $(a_{\max_c}/a_e)^{0,17} \approx 1$ , то

$$x_{\text{эвб}_c} = \int_0^{x_{\max_c}} \left(\frac{u_{e_c}}{u_{\max_c}}\right)^{8,17} dx_c. \quad (12)$$

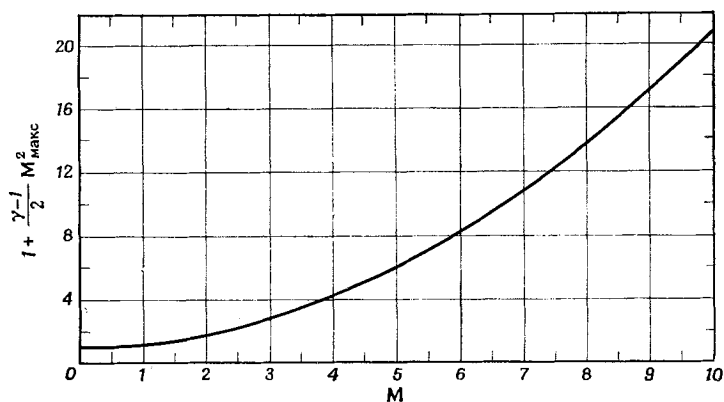
Следовательно,

$$F_i = \left(\frac{x_{\text{эвб}_i}}{u_{\max_i}}\right) \left(\frac{du_{e_i}}{dx_i}\right) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\max}^2\right) \frac{x_{\text{эвб}_i}}{u_{\max_c}} \frac{du_{e_c}}{dx_c}. \quad (13)$$

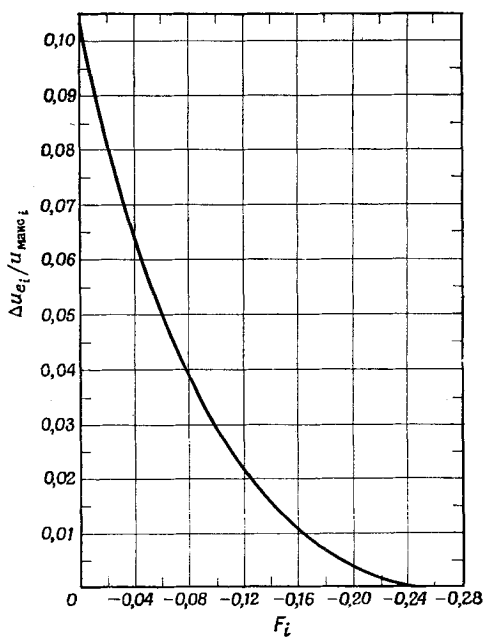
С помощью установленной зависимости между несжимаемым и сжимаемым течениями положение точки отрыва ламинарного потока газа для известного распределения скорости и заданного числа Маха находится следующим образом:

1. Графически определяется градиент скорости  $du_{e_c}/dx_c$  в плоскости сжимаемого течения. Возможно, потребуется видоизменить заданное распределение скорости таким образом, чтобы положительный градиент скорости начинался в определенной точке и аппроксимировался прямой линией.
2. По уравнению (12) вычисляется эквивалентная длина.
3. По фиг. 1 определяется параметр  $1 + [(\gamma - 1)/2] M_{\max}^2$ .
4. По уравнению (13) определяется безразмерный градиент скорости в плоскости эквивалентного несжимаемого течения. Падение скорости, которое соответствует отрыву ламинарного потока жидкости, определяется по фиг. 2.

Численный расчет показывает, что при уменьшении скорости по линейному закону в зависимости от расстояния до передней кромки в условиях ламинарного отрыва влияние числа Маха, предсказываемое методом Лофтина и Уилсона [8], в основном совпадает с результатами Стюартсона [10] и Хоурта [6].



Ф и г. 1. Величина  $1 + [(\gamma - 1)/2] M_{\text{макс}}^2$  как функция числа Маха [8].



Ф и г. 2. Падение скорости  $\Delta u_{e_i} / u_{\text{макс}_i}$  в ламинарном несжимаемом потоке перед отрывом как функция градиента скорости [8].  
 $F_i$  — безразмерный градиент скорости.

## 1.3. МЕТОД МОРДУХОВА И КЛАРКЕ

Мордухов и Кларке [11] предложили теоретический метод определения точки отрыва ламинарного потока газа. Этот метод является развитием метода Кармана — Польгаузена с применением полиномиальных профилей скорости до седьмой степени. Кроме того, он может быть модифицирован для учета теплопередачи. Этот расширенный анализ будет рассмотрен в гл. XI. Будут приведены основные результаты определения точки отрыва и численный пример, который хорошо согласуется с другим известным решением. Основные уравнения движения, энергии, неразрывности для двумерного потока газа и уравнение состояния следующие:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho e \mu_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (14)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = -\rho e \mu_e \frac{\partial u_e}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (16)$$

и

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \frac{T_e}{T}. \quad (17)$$

Расчет основан на следующих предположениях: число Прандтля  $Pr = \mu c_p / k$  равно единице; стенка является адиабатической ( $\partial T / \partial y = 0$  при  $y = 0$ ), коэффициент вязкости линейно зависит от температуры.

Исключая  $\rho_e \mu_e (\partial u_e / \partial x)$  из уравнений (14) и (15), получим

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = \text{const} \quad (18)$$

или

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left( 1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right). \quad (19)$$

Теперь считая, что

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = C \frac{T}{T_\infty}, \quad (20)$$

где

$$C = \left( \frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2} \frac{1 + (S/T_\infty)}{(T_w/T_\infty) + (S/T_\infty)}, \quad (21)$$

$S = \text{const} = 120 \text{ K}$  для воздуха, из уравнения (19) находим

$$\frac{T_w}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2. \quad (22)$$

Интегрируя уравнение (14) по толщине пограничного слоя от  $y = 0$  до  $y = \delta$  и вводя переменную Дородницына  $t$ , определяемую преобразованием

$$y = \int_0^t \frac{T}{T_e} dt, \quad (23)$$

получим следующее соотношение, являющееся в сущности интегральным уравнением Кармана:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_1 (\delta_t^2)' + \{F_1' + F_1 (\ln \rho_e u_e^2)' - F_2 (\ln u_e)'\} \delta_t^2 = \\ = F_3 \frac{\mu_\infty c}{\rho_e u_e} \frac{T_e}{T_\infty}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\tau, \\ F_2 &= \int_0^1 \left(\frac{u}{u_e} - \frac{T}{T_e}\right) d\tau, \\ F_3 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{u}{u_e}\right) \right\}_w. \end{aligned} \quad (25)$$

Индекс  $w$  означает условие на стенке.

Величина  $\delta_t$  (значение  $t$  при  $y = \delta$ ) — толщина пограничного слоя в плоскости  $x - t$ , а  $\tau = t/\delta_t$ .

Штрих (') означает производную по  $x$ . Вводя безразмерные переменные  $\lambda$  и  $\xi$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{C} \text{Re}_\infty \left(\frac{\delta_t}{L}\right)^2, \\ \xi &= \frac{x}{L}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $L$  — характерная длина и  $\text{Re}_\infty = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$ , получим уравнение (24) в виде

$$\lambda' + 2\lambda \left\{ \frac{\rho_e'}{\rho_e} + \frac{F_1'}{F_1} + \frac{u_e'}{u_e} \left(2 - \frac{F_2}{F_1}\right) \right\} = 2 \frac{u_\infty}{u_e} \frac{\rho_\infty}{\rho_e} \frac{T_e}{T_\infty} \frac{F_3}{F_1}, \quad (27)$$

где штрих (') теперь и далее означает производную по  $\xi$ .

Граничные условия в плоскости  $x - t$ :

$$\frac{u}{u_e} = 0, \quad \frac{\partial^2 (u/u_e)}{\partial \tau^2} = - \left(\frac{T_\infty}{T_e}\right)^2 \frac{\rho_e}{\rho_\infty} \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)' \frac{T_w}{T_\infty} \lambda, \quad \frac{\partial^3 (u/u_e)}{\partial \tau^3} = 0$$

при  $\tau = 0$ , (28)

$$\frac{u}{u_e} = 1,$$

$$\frac{\partial (u/u_e)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 (u/u_e)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^3 (u/u_e)}{\partial \tau^3} = 0$$

при  $\tau = 1$ .

Второе условие на стенке ( $\tau = 0$ ) следует в общем случае из исходного уравнения (14) в частных производных в сочетании с уравнением (20). Третье условие на стенке следует из уравнения (14) (в переменных  $x, \tau$ ) в сочетании с условием отсутствия теплопередачи ( $\partial T / \partial \tau|_w = 0$ ). Второе и третье граничные условия [уравнения (28)] выполняются только тогда, когда нормальная составляющая скорости на стенке равна нулю. Для определения точки отрыва должно быть удовлетворено дополнительное граничное условие в точке отрыва

$$\left\{ \frac{\partial^4 (u/u_e)}{\partial \tau^4} \right\}_{\tau=0} = 0. \tag{29}$$

Оно получено дифференцированием уравнения (14) дважды по  $t$  с последующей подстановкой значений параметров на стенке, соответствующих  $\partial u / \partial t = 0$ . Профиль скоростей, который удовлетворяет уравнениям (28) и (29), является полиномом седьмой степени

$$\frac{u}{u_e} = \left( \frac{7}{4} - \frac{a_2}{2} \right) \tau + a_2 \tau^2 - \frac{1}{4} (21 + 10a_2) \tau^5 + (7 + 3a_2) \tau^6 - \left( \frac{5}{2} + a_2 \right) \tau^7, \tag{30}$$

где

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2} \frac{u'_e}{u_\infty} G \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) \left\{ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_\infty^2 \left( 1 - \frac{u_e^2}{u_\infty^2} \right) \right\}^{(3-2\gamma)/(\gamma-1)}$$

и

$$G = \left( \frac{\rho_b}{\rho_\infty} \right) \left( \frac{T_b}{T_\infty} \right)^{-1/(\gamma-1)}. \tag{31}$$

Индекс  $b$  означает условия сразу за скачком уплотнения. Теперь функции  $F$ , определяемые уравнениями (25), принимают вид

$$F_{1_S} = 0,1156 + 0,00253a_2 - 0,001454a_2^2,$$

$$F_{2_S} = -0,02976a_2 - 0,3125 - \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 (0,4281 + 0,03229a_2 - 0,00145a_2^2),$$

$$F_{3_S} = 1,7500 - 0,5000a_2. \tag{32}$$

Так как отрыв происходит в точке, где

$$\left\{ \frac{\partial (u/u_e)}{\partial \tau} \right\}_w = 0,$$

то из уравнения (30) следует  $a_2 = 3,5$  при отрыве ламинарного слоя. Используя уравнение (32) и предполагая, что в выражениях для  $F_1$  и  $F_2$  величины  $a_2$  и  $a_2^2$  можно (приближенно) заменить постоянными средними значениями  $\bar{a}_2$  и  $\bar{a}_2^2$ , получаем следующее приближенное решение  $\lambda_S$  для  $\lambda(\xi)$  из уравнения (27):

$$\lambda_S = \frac{7}{2} \frac{1}{F_{1S} G} \times \left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^3 + \frac{2}{F_{1S}} (0,0625 + 0,02976 \bar{a}_2) \left( \frac{T_e}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{F_{1S}}} (0,1781 + 0,03229 \bar{a}_2 - 0,00145 \bar{a}_2^2) \times \frac{\left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^4 + \frac{2}{F_{1S}} (0,0625 + 0,02976 \bar{a}_2) \left( \frac{T_e}{T_\infty} \right)^{\frac{2}{\gamma-1} - \frac{1}{F_{1S}}} (0,1781 + 0,03229 \bar{a}_2 - 0,00145 \bar{a}_2^2)}{\left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^6 + 1,28 \left( \frac{T_e}{T_\infty} \right)^{0,9366} d\xi} \quad (33)$$

Индекс  $S$  указывает, что значение получено с использованием профиля скоростей в виде полинома седьмой степени. Точка отрыва определяется из уравнения (33) и за средние значения  $\bar{a}_2$  и  $\bar{a}_2^2$  можно взять значения параметров  $a_2$  и  $a_2^2$  в этой точке. Следовательно, для определения точки отрыва, в которой  $a_2 = 3,5$ , в уравнение (33) подставляются значения  $\bar{a}_2 = 3,5$  и  $\bar{a}_2^2 = 12,25$ . Тогда

$$\lambda_S(\xi) = \frac{32,83}{G} \frac{\int_0^\xi (u_e/u_\infty)^{6,128} (T_e/T_\infty)^{0,9366} d\xi}{(u_e/u_\infty)^{7,128} (T_e/T_\infty)^{2,437}} \quad (34)$$

Так как величина  $a_2$  пропорциональна  $\lambda$  и находится из уравнения (31), величина  $\lambda$ , при которой происходит отрыв, равна

$$\lambda_S = \frac{7}{G} \left( -\frac{\bar{u}_\infty}{u_e'} \right) \frac{\left[ 1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) M_\infty^2 \{1 - (u_e^2/u_\infty^2)\} \right]^{-(3-2\gamma)/(\gamma-1)}}{1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) M_\infty^2} \quad (35)$$

Уравнения (33) и (34) для  $\lambda(\xi)$  применимы только для граничного условия  $\lambda_S = 0$  при  $\xi = 0$ . Но если область положительных градиентов давления начинается не на передней кромке, а в некоторой точке  $\xi = \xi_a$ , это граничное условие должно быть заменено условием  $\lambda_S = \lambda_a$  при  $\xi = \xi_a$  и решение уравнения (34) для  $\lambda_S(\xi)$  будет представлено следующим образом ( $\bar{a}_2 = 3,5$  и  $\bar{a}_2^2 =$

= 12,25):

$$\lambda_S = \frac{32,83}{G} \int_{\xi_a}^{\xi_1} \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^{6,128} \left(\frac{T_e}{T_\infty}\right)^{0,9366} d\xi + \lambda_a \left\{ \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^{7,128} \left(\frac{T_e}{T_\infty}\right)^{2,437} \right\}_{\xi=\xi_a} \cdot$$

$$\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^{7,128} \left(\frac{T_e}{T_\infty}\right)^{2,437} \tag{36}$$

Значение  $\lambda_a$  определяется выражением

$$\lambda_a = \frac{4}{F_1 G} \times$$

$$\int_0^{\xi_1} \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^{3 + \frac{2}{F_1} (0,08571 + 0,01905\bar{a}_2)} \left(\frac{T_e}{T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{F_1} (0,1950 + 0,02116\bar{a}_2 - 0,000622\bar{a}_2^2)} d\xi$$

$$\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)_{\xi=\xi_a}^{4 + \frac{2}{F_1} (0,08571 + 0,01905\bar{a}_2)} \left(\frac{T_e}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{\gamma-1} - \frac{1}{F_1} (0,1950 + 0,02116\bar{a}_2 - 0,000622\bar{a}_2^2)}$$

$$\tag{37}$$

Положение точки отрыва определяется значением  $\xi$ , при котором по уравнениям (34) или (36) и (35) получаются одинаковые значения  $\lambda_S$ . Для любого заданного положительного градиента давления и  $M_\infty$  в соответствии с уравнениями (34) или (36) и (35) строится график зависимости  $\lambda$  ( $\xi$ ) от  $\xi$  в окрестности ожидаемой точки отрыва. Точка пересечения этих двух кривых является точкой отрыва, и, так как положение этой точки, определяемое уравнениями (34) и (35), не зависит от  $G$ , можно принять  $G = 1$ . Это не означает, однако, что скачок уплотнения на передней кромке не влияет на положение точки отрыва, поскольку значения  $u/u_e$  ( $\xi$ ) и  $u_e/(u_\infty$  ( $\xi$ )) могут зависеть от скачка уплотнения.

### 1.3.1. Сравнение с результатами Стюартсона

Чтобы сравнить положение точки отрыва, вычисленное по данному методу, с результатами Стюартсона [10], Мордухов и Кларке [11] выбрали простейший тип течения с положительным градиентом давления, соответствующим линейному распределению скорости, т. е.

$$\frac{u}{u_e} = 1 - b\xi, \tag{38}$$

где  $b$  — положительная постоянная.

Если ввести линейную замену переменных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= b\xi, \\ \lambda_1 &= b\lambda, \end{aligned} \tag{39}$$

уравнение (27) останется в прежнем виде, за исключением того, что  $\xi$  будет заменено на  $\xi_1$ , а  $\lambda$  — на  $\lambda_1$ . Итак,

$$\frac{u_e}{u_\infty} = 1 - \xi_1. \quad (40)$$

Это уравнение не содержит  $b$ . Поэтому необходимо решать уравнение (27) только для  $b = 1$ , так как для любого другого значения  $b$  достаточно в полученном решении заменить  $\xi$  на  $\xi_1$ , а  $\lambda$  на  $\lambda_1$ . Следовательно, в данном случае

$$\frac{u_e}{u_\infty} = 1 - \xi. \quad (41)$$

Постоянное среднее значение  $\bar{a}_2$  выбирается из следующих соображений: так как в данном случае  $a_2$  изменяется от 0 (при  $\xi = 0$ ) до 5 [в точке отрыва из уравнения (29) следует  $1 - (a_2/5) = 0$ ], то за среднее значение  $a_2$  можно принять  $\bar{a}_2 = 2,5$ ; следовательно,  $\bar{a}_2^2 = 6,25$ . Теперь уравнение (37) принимает вид ( $G = 1$ )

$$\lambda = \frac{37,5 \int_0^1 \eta^{5,50} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) M_\infty^2 (1 - \eta^2) \right\}^{5/4} d\eta}{\eta^{6,50} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) M_\infty^2 (1 - \eta^2) \right\}^{2,75}}, \quad (42)$$

где  $\eta = 1 - \xi$ . При  $M_\infty = 0$  уравнение (42) сводится к

$$\lambda = 5,76 \left\{ (1 - \xi)^{-6,50} - 1 \right\}. \quad (43)$$

Наконец, точка отрыва определяется приравнованием правых частей уравнений (34) и (35). В данном случае точки, в которых эти правые части одинаковы, находятся графическим построением параметра  $\lambda$  ( $\xi$ ), соответствующего обоим уравнениям (34) и (35), вблизи предполагаемой точки отрыва

$$\xi = 0,14 \text{ при } M_\infty = 0 \text{ и } 1 \text{ и } \xi = 0,10 \text{ при } M_\infty = 3.$$

Точки отрыва, найденные при  $M_\infty = 0, 1$  и  $3$ , приведены в табл. 1 вместе с данными Стюартсона [10]. Результаты этих методов удовлетворительно совпадают между собой.

Таблица 1

ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ ОТРЫВА, ВЫЧИСЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫМ МЕТОДОМ [УРАВНЕНИЯ (34) И (35)], В СРАВНЕНИИ С РЕШЕНИЕМ СТЮАРТСОНА

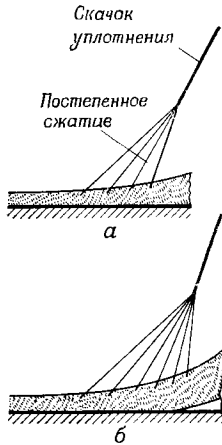
( $u_e/u_\infty = 1 - \xi$ ).

Метод	$\xi$ в точке отрыва		
	$M_\infty = 0$	$M_\infty = 1$	$M_\infty = 3$
Уравнения (34) и (35)	0,122	0,113	0,0768
Решение Стюартсона	0,120	0,110	0,077



## 2. ХАРАКТЕР И ПАРАМЕТРЫ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ, И ИХ ВЛИЯНИЕ ВВЕРХ И ВНИЗ ПО ПОТОКУ

Даже при слабом скачке уплотнения градиент давления во внешнем потоке довольно велик. Но на поверхности тела градиент давления мал вследствие сглаживания, обусловленного взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем.



При повышении давления в пограничном слое, вызванном скачком уплотнения, утолщаются трубки тока во внутренней (дозвуковой) части слоя.

Это утолщение вытесняет внешнюю часть слоя и оттесняет внешний поток от стенки, порождая семейство волн сжатия в сверхзвуковом потоке (фиг. 3, а). Волны сжатия начинаются в сверхзвуковой части пограничного слоя и распространяются во внешний поток. Таким образом, пограничный слой преобразует резкий перепад давления в более сглаженное распределение, которое может быть им преодолено при условии, что скачок достаточно слаб. С увеличением интенсивности скачка (т. е. приращения давления) градиенты в этой области также увеличиваются и во внутренней части начинается торможение потока, которое продолжается до тех пор, пока не наступит состояние, при котором невозможно движение газа в основном направлении у поверхности тела. Как показано на фиг. 3, б, эти нижние слои

Ф и г. 3. Ударные волны, ослабленные пограничным слоем [2].

а — при утолщении пограничного слоя; б — при отрыве и утолщении пограничного слоя.

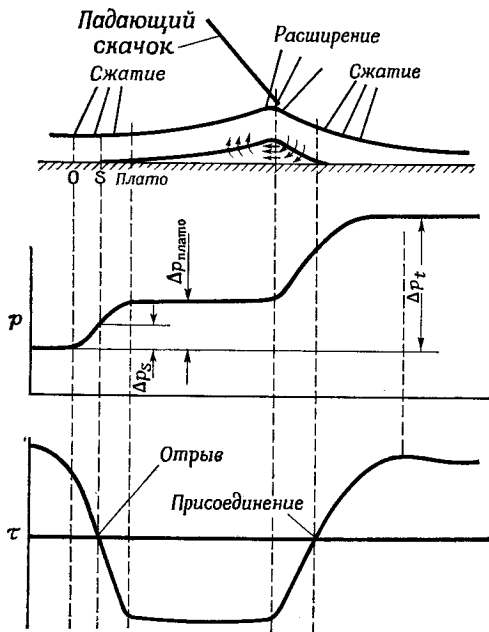
отрываются от поверхности, вызывая дальнейшее отклонение внешних частей пограничного слоя и внешнего потока. Так возникает отрыв в непрерывном поле течения, который усиливается с увеличением интенсивности скачка [2].

Измерения профиля скорости показывают, что изменение толщины пограничного слоя между отрывом и скачком происходит в основном вследствие увеличения толщины зоны отрыва, причем внешняя часть профиля скорости изменяется относительно мало. Это справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного потока [2] и часто используется в исследованиях.

Подробности, касающиеся характеристик отрывного течения, включая течения при отрывах, индуцированных скачком уплотнения, будут рассмотрены в гл. VII.

## 2.1. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Положение отрыва, как и раньше, определяется из условия равенства нулю напряжения трения на поверхности тела. Распределение давления и напряжения трения на стенке для типичной физической модели может быть представлено следующим образом: в невозмущенной области давление постоянно, при приближении к отрыву давление растет и продолжает расти за точкой отрыва, достигая некоторого постоянного значения в области отрыва;



Ф и г. 4. Схема течения с областью отрыва [12].

затем давление снова повышается вплоть до точки присоединения потока и продолжает расти за точкой присоединения потока до постоянного значения, соответствующего давлению за падающим и отраженным скачками уплотнения. Сразу за присоединением поток может стать турбулентным [11].

Если область отрыва имеет значительную протяженность, то параметры потока около точки отрыва не зависят от причины, вызвавшей отрыв потока, и явление отрыва по существу авто-модельно [13—15]. Все основные параметры являются функциями чисел Маха и Рейнольдса. Таким образом, исследование взаимо-

действия скачка уплотнения с пограничным слоем может состоять из двух этапов:

1. Определение автомодельных характеристик отрыва, которые зависят только от местных условий.
2. Установление связи между длиной области отрыва и интенсивностью скачка уплотнения.

Как показано на фиг. 4, при отрыве существуют два важных параметра, связанных с давлением. Первый — рост давления перед точкой отрыва; второй — рост давления до некоторого постоянного значения в области отрыва. Хаккинен и др. [12] назвали это постоянное давление «плато-давлением». Чепмен и др. [13] получили оценку коэффициента перепада давления, анализируя порядки величин, которые имеют место в областях отрыва и плато-давления

$$\Delta p \approx \sqrt{c_{f0}/\beta},$$

где  $\beta = \sqrt{M_0^2 - 1}$ , а индекс 0 соответствует условиям в невозмущенном потоке до взаимодействия.

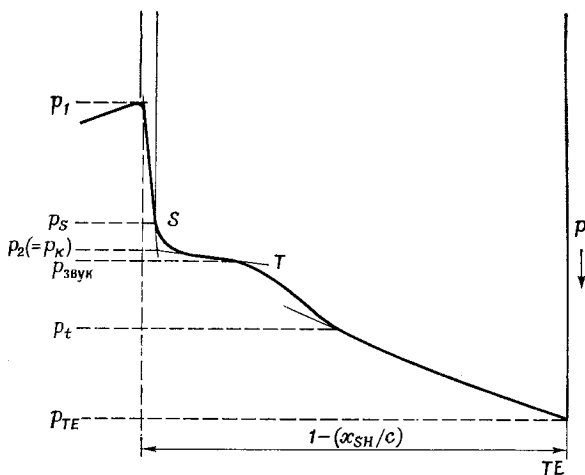
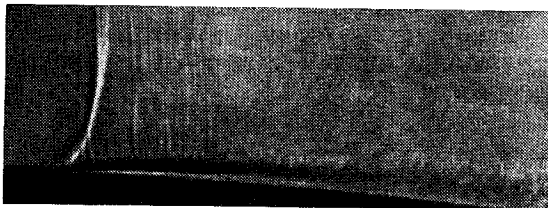
## 2.2. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КРЫЛОВОМ ПРОФИЛЕ

На фиг. 5 показано распределение давления в турбулентном пограничном слое на крыловом профиле при отрыве, индуцированном скачком уплотнения [2]. Давление увеличивается вниз по потоку.

Давление повышается до  $p_S$  благодаря скачку уплотнения и отрыву потока в точке  $S$ , но это повышение меньше, чем в скачке уплотнения во внешнем потоке. Затем давление быстро и непрерывно повышается вдоль оторвавшегося вязкого слоя до величины  $p_2$ , которая может поддерживаться вязким течением под этим слоем. По достижении значения  $p_2$ , соответствующего точке перегиба кривой распределения давления, градиент давления становится очень малым. Значение  $p_2$  часто используется для сопоставления с экспериментальными данными, так как оно легко вычисляется и связано с ростом давления в процессе отрыва. Когда застойная зона становится достаточно протяженной, рост давления резко замедляется. Процесс медленного повышения давления распространяется вдоль всего свободного вязкого слоя, который в конце концов отклоняется к поверхности, замыкая область отрыва и восстанавливая быстрый рост напряжения трения на поверхности тела. Процесс присоединения потока сопровождается увеличением скорости роста давления, и в области присоединения достигается полный перепад давления, соответствующий переходу через скачок уплотнения. Отрыв такого вида в потоке газа влияет на область течения перед скачком уплотнения и за ним. Нетрудно выделить следующие три участка распределения давления:

1. Относительно резкое повышение давления в верхней части потока.
2. Относительно резкое повышение давления при присоединении потока.
3. Относительно медленное повышение давления между двумя этими участками. Этот участок соответствует области отрыва под свободным вязким слоем.

Существует следующая связь между давлением и толщиной пограничного слоя: так как отрыву потока соответствует утолще-



Ф и г. 5. Отрыв турбулентного пограничного слоя у основания скачка уплотнения на поверхности крылового профиля. Определение некоторых значений давления на поверхности [2].

$x_{SH}$  — положение скачка уплотнения.

ние пограничного слоя, то присоединению потока (процессу, обратному отрыву) соответствует его утоньшение. Поток отрывается в том месте, где напряжение трения равно нулю; однако напряжение трения восстанавливается после присоединения потока. Поэтому профили пограничного слоя являются важными факторами при отрыве потока, вызванном скачком уплотнения. Интен-

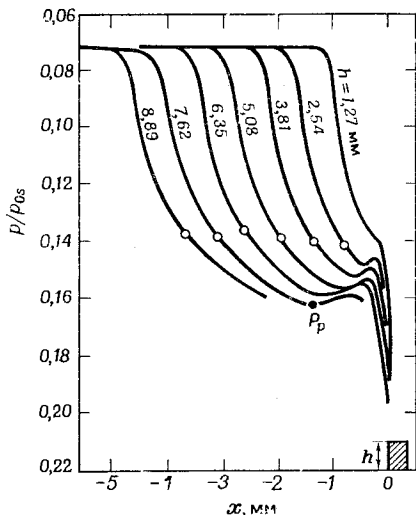
сивность ударной волны влияет на полное приращение давления в областях отрыва и присоединения только через профиль пограничного слоя в точках отрыва и присоединения потока. Большое приращение давления, соответствующее более интенсивному скачку уплотнения, создается в основном в области между отрывом и присоединением. Но поскольку в этой области повышение давления происходит весьма медленно, рост интенсивности скачка уплотнения сопровождается существенным увеличением протяженности области отрывного течения, причем точка отрыва перемещается вверх по потоку, обеспечивая непрерывное поддержание равновесия между полным приращением давления и силами в вязком потоке.

### 2.3. УСТУПЫ

Вкратце рассмотрим отрыв потока около уступов, о чем уже говорилось в гл. I.

#### 2.3.1. Уступы, обращенные навстречу потоку

Перед уступом, обращенным навстречу потоку, возникает отрыв, если только высота уступа не пренебрежимо мала по срав-



Ф и г. 6. Распределение давления на поверхности перед уступом в зависимости от высоты уступа; турбулентный пограничный слой [2].

○ точка отрыва (приблизительно)  $\delta = 5$  мм;  $p_{0s}$  — давление торможения в набегающем потоке перед отрывом.

нению с толщиной пограничного слоя. Точка отрыва не известна заранее, и равновесное течение устанавливается само собой, но

точка присоединения потока располагается в верхнем углу уступа. Высота уступа сильно влияет на распределение давления вдоль поверхности за точкой отрыва (фиг. 6).

Максимум давления в турбулентном оторвавшемся потоке был вычислен Лавом [17] в интервале чисел Маха  $1,5 < M_0 < 3,5$  и  $h > \delta$

$$C_{p_{\max}} = \frac{3,2}{8 + (M_0 - 1)^2},$$

а также Стерретом и Эмери [18] в интервале чисел Маха  $3,5 \leq M_e \leq 6,5$  и  $h > \delta$

$$C_{p_{\max}} = 0,13 - \frac{1,5}{M_0^2} + \frac{9,1}{M_0^3}.$$

### 2.3.2. Уступы, расположенные по потоку

Размер области отрыва наибольший в ламинарном потоке, наименьший в турбулентном потоке и промежуточный в потоке переходного типа. Давление в области отрыва меньше по сравнению с давлением вверх по потоку от отрыва. Давление в области отрыва наименьшее в турбулентном потоке, наибольшее в ламинарном потоке и промежуточное в потоке переходного типа. Около уступа давление постоянно при любом режиме течения.

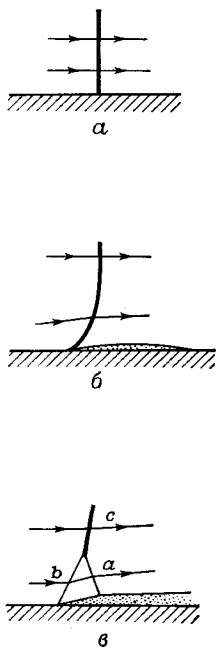
Параметры потока около уступа, расположенного по потоку, можно определить по методу Чепмена и др. [13]. Подробнее об этом методе см. гл. VII.

### 2.4. ПРЯМОЙ И ПОЧТИ ПРЯМОЙ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

В случае прямого скачка уплотнения число Маха набегающего потока и интенсивность скачка уплотнения взаимосвязаны. Однако в полностью развитом отрывном течении, вызванном прямым скачком уплотнения, не были выделены отдельные участки области отрыва, как в случае рассмотренных выше отрывов, вызванных косыми скачками уплотнения. Причины недостаточно глубокого исследования взаимодействия прямого скачка уплотнения с пограничным слоем в отличие от других типов взаимодействия заключаются в том, что, во-первых, течение за прямым скачком дозвуковое и сильно влияет на присоединение потока, на величину конечного давления и, возможно, на всю картину взаимодействия; во-вторых, часто трудно поддерживать установившиеся параметры потока, что необходимо для детальных исследований [2].

Одно из немногих исследований взаимодействия прямого скачка уплотнения с пограничным слоем, включая отрывы с другими видами скачков, выполнено Нусдорфером [19]. Оно показало, что в сверхзвуковых диффузорах возможны три вида взаимодействия,

соответствующие прямому, искривленному и разветвленному ( $\lambda$ -образному) скачкам уплотнения (фиг. 7). Скачок заданной интенсивности, взаимодействующий с турбулентным пограничным

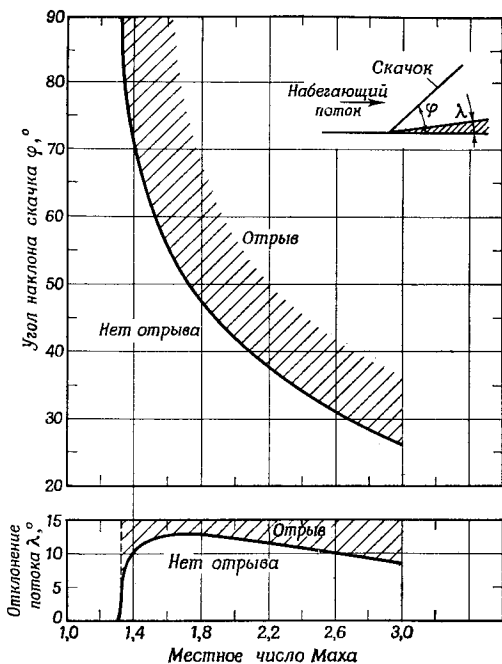


Фиг. 7. Типы скачков уплотнения, взаимодействующих с пограничным слоем в сверхзвуковом потоке при числе Маха, немного большем 1 [19].

*a* — прямой скачок; *b* — искривленный скачок; *c* —  $\lambda$ -образный скачок.

слоем, оказывает одинаковое влияние на слой независимо от того, создан ли он тупым телом или входным участком сверхзвукового диффузора.

Прямой скачок возникал при числах Маха, меньших 1,3. Этот слабый плоский скачок направлен перпендикулярно потоку и не вызывает отрыва, вероятно, вследствие малой интенсивности. Однако два других скачка уплотнения вызывают отрыв. Искривленный скачок постепенно изменяет свой наклон с расстоянием от стенки и обычно вызывает отрыв с последующим присоединением потока к поверхности стенки. Разветвленный скачок вначале



Фиг. 8. Влияние числа Маха или угла наклона скачка уплотнения в двумерном потоке на отрыв ( $\gamma = 1,4$ ) [19].

имеет вид косо́го скачка, у которого на некотором расстоянии от стенки появляется изгиб. За скачком такого типа возникает интенсивный отрыв, и поток обнаруживает слабую тенденцию к присоединению к стенке. При числе Маха более 1,24 может возникнуть  $\lambda$ -образный скачок, и тогда отрыв зависит от повышения статического давления в потоке. На фиг. 8 показано влияние числа Маха или угла наклона скачка на отрыв двумерного потока. Видно, что при числе Маха, больших 1,3, отрыв возникает, если скачок прямой. Этот критерий можно выразить также в виде относительного перепада статического давления, равного 1,89.

Простой критерий отрыва, вызванного скачком уплотнения в турбулентном потоке, предложен в работах [19, 20]

$$\left( \frac{u_{\text{отр}}}{u_{\text{зарожд. отр}}} \right)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Этот критерий получен на основе многочисленных расчетов дозвукового обтекания профиля по методу Грушвица. Рост давления при взаимодействии почти прямого скачка с турбулентным пограничным слоем представлен на фиг. 9 и 10 для слабого и сильного скачков.

Если предположить, что поток невязкий, давление на поверхности за скачком резко возрастает. Однако пограничный слой не может выдержать разрыва давления, поэтому характер внешнего обтекания изменяется, и около стенки скачок вырождается в семейство волн сжатия, как и в других случаях взаимодействия. В турбулентном потоке (фиг. 9,10) давление на поверхности вначале растет по крутой зависимости, но его градиент уменьшается вниз по потоку. В случае слабого скачка это уменьшение градиента давления начинается в точке, где  $p = 0,528p_s$  ( $p_s$  — давление торможения). В случае сильного скачка отрыв осуществляется в точке, где давление ниже своего значения в звуковой точке, и уменьшение градиента начинается сразу после отрыва [21].

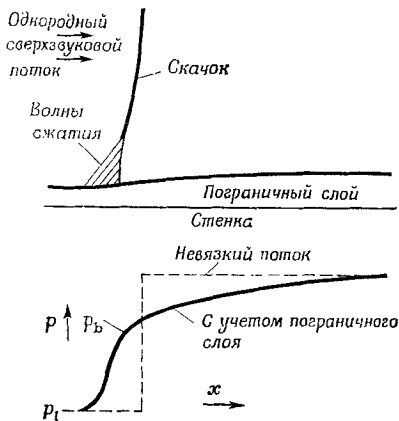
Гэдд [21] разработал метод исследования отрыва турбулентного потока, вызванного почти прямым скачком уплотнения, используя в качестве критерия отрыва условие  $c_f = 0$ . Предложенная им формула для коэффициента поверхностного трения при взаимодействии прямого скачка уплотнения с пограничным слоем имеет вид

$$\frac{c_f}{c_{fa}} = \left\{ (2+n) \frac{M_1}{M_e} \left( \frac{T_1}{T_e} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left/ \left[ \frac{1}{(n+3)(M_e^2/M_1^2) - 1} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2,5l_a}{M_e} \frac{dM_e}{dx} \left[ \frac{1-N}{(n+3)(M_e^2/M_1^2) - 3} - \frac{1}{(n+3)(M_e^2/M_1^2) - 1} \right] \right\}, \quad (44)$$

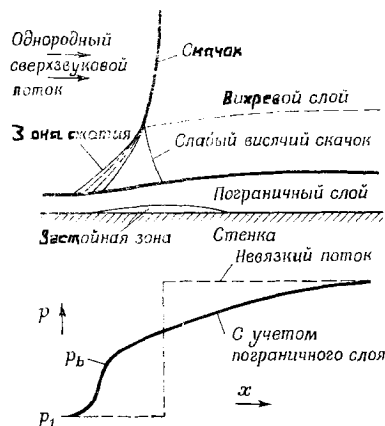
где индекс  $a$  соответствует положению на расстоянии  $l_a$  от передней кромки, индекс 1 означает условия на границе пограничного



слоя непосредственно перед областью взаимодействия (условия для набегающего потока на плоской пластине), а индекс  $e$  — условия на границе пограничного слоя. Эта формула справедлива для  $\theta_a = c l_a \text{Re}_a^{-1/5}$ , так что  $c_{fa} = (8/5) c \cdot \text{Re}_a^{-1/5}$ , где  $\text{Re}_a$  — число Рейнольдса, вычисленное по параметрам набегающего потока



Ф и г. 9. Картина течения и распределение давления, когда скачок недостаточно сильный, чтобы вызвать значительный отрыв [21].



Ф и г. 10. Картина течения и распределение давления при сильном скачке уплотнения [21].

и характерной длине  $l_a$ ,  $c$  — постоянная, а  $n$  — показатель степени в степенном профиле скорости пограничного слоя перед областью взаимодействия

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \text{ и } N = \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \frac{\theta}{\delta} .$$

Уравнение (44) применимо для турбулентного пограничного слоя, подверженного действию большого положительного градиента давления при умеренных сверхзвуковых скоростях и постоянном давлении по толщине пограничного слоя. Постоянство давления по толщине пограничного слоя выполняется при очень малых числах Маха, но уже при  $M_1 = 1,3$  давление заметно меняется по толщине пограничного слоя. Значения коэффициента поверхностного трения плохо согласуются с другими данными, что свидетельствует о непригодности уравнения (44) для определения  $c_f$ . Однако уравнение (44) дает приблизительно правильное положение точки отрыва. Взаимодействие с прямым скачком уплотнения создает сильный положительный градиент давления под скачком, и обычный критерий отрыва турбулентного пограничного слоя

в этом случае оказывается неприменимым. Следовательно, при расчете отрыва, вызванного прямым скачком уплотнения, применение формпараметра  $H$  пограничного слоя теряет смысл. Если градиент давления внезапно становится бесконечным после предыдущего участка с нулевым градиентом давления, отрыв может быть вызван очень малым приращением давления, и в этом случае будет иметь значение только форма бесконечно малого участка профиля скорости около поверхности; поэтому значение  $H$  при отрыве будет такое же, как на плоской пластине. По той же причине оказывается неверной формула Людвиг — Тилмана [22], вывод которой основан на предположении о «законе стенки», применимом на расстоянии  $\theta$  (толщина потери импульса пограничного слоя) от стенки [23]. Критерий отрыва Стрэтфорда [23] получен для случая положительного градиента давления в несжимаемом потоке. Поэтому если в этом критерии учесть эффект сжимаемости, то его можно будет применить для взаимодействия прямого скачка с пограничным слоем. Критерий Стрэтфорда для отрыва турбулентного несжимаемого потока имеет вид

$$(2C_p)^{(n-2)/4} \left( l \frac{dC_p}{dl} \right)^{1/2} = 1,06\beta' (10^{-6} \text{Re})^{1/10}, \quad (45)$$

где  $C_p = 1 - (u_e^2/u_1^2)$ ,  $u_1$  — скорость на границе пограничного слоя непосредственно перед областью взаимодействия,  $l$  — расстояние от передней кромки,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса, вычисленное по характерному размеру  $l$ ,  $\beta'$  — эмпирическая константа, принятая Стрэтфордом равной 0,66. Преобразование уравнения (45) в случае сжимаемого потока осуществляется следующим образом [21].

Замечая, что в уравнение (44) для сжимаемого потока входит отношение  $M_e/M_1$ , которое является функцией  $l$ , скажем  $F(l)$ , можно предположить, что отрыв произойдет почти в той же точке, что и в несжимаемом потоке с профилем скорости  $u_e/u_1 = F(l)$ . Можно показать, что эквивалентность будет полной, если  $N$  в уравнении (44) равно нулю. Так как  $N$  — малая величина, формула Стрэтфорда (45) применима к сжимаемому потоку при  $C_p = 1 - (M_e^2/M_1^2)$ . Имея в виду, что  $l \approx l_a$  вверх по потоку от зоны взаимодействия, и предполагая справедливость соотношения  $\delta_a = 0,38 [l_a \text{Re}_a^{-1/5}]$  при умеренных числах Маха, получаем следующее выражение для критерия отрыва сжимаемого потока (по Стрэтфорду):

$$\left\{ \frac{4(M_1^2 - 1)(1 - k)}{M_1^2} \right\}^{(n-2)/4} \left\{ -\frac{(M_1^2 - 1)}{M_1^2} \frac{dk}{d(x/\delta_a)} \right\}^{1/2} = 0,116 \cdot \beta', \quad (46)$$

где  $k$  — параметр, зависящий от давления,  $1 - k = (p - p_1)/(p_2 - p_1)$ ,  $p_2$  — давление далеко вниз по потоку.

Теоретическое решение Гэдда [21] подтвердилось его экспериментами по взаимодействию прямого скачка с пограничным

слоем в трубе, а также экспериментами Седдона [24] по взаимодействию прямого скачка при числе Маха набегающего потока 1,47. В качестве вывода об отрыве турбулентного потока, вызванного почти прямым скачком, Гэдд [21] указал, что отрыв происходит, когда число Маха набегающего потока превышает 1,2, но здесь следует напомнить, что Нусдорфер [19] не наблюдал отрыва потока, вызванного прямым скачком при  $M = 1,3$ . Теоретическое решение Гэдда задачи взаимодействия прямого скачка с турбулентным пограничным слоем можно применить также и к задаче о взаимодействии с ламинарным пограничным слоем, приняв  $n = 1$ .

### 3. ПРИРАЩЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Приращение давления, при котором возникает отрыв потока в результате взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем, и давление в зоне отрыва, например плато-давления, являются характерными значениями давления при взаимодействии скачка с пограничным слоем. На практике важно знать величину этого приращения давления.

#### 3.1. ПРИРАЩЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ, ВЫЗЫВАЮЩЕЕ ОТРЫВ

Рассмотрим результаты экспериментальных исследований ламинарного и турбулентного течений.

##### 3.1.1. Плоская пластина. Ламинарный пограничный слой

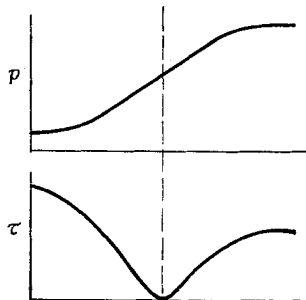
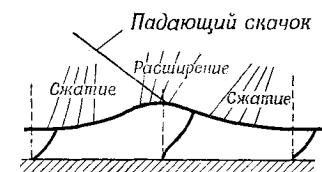
Свободное взаимодействие определяется как полностью развитый отрыв, при котором течение в зоне отрыва не испытывает влияния возмущения снизу по потоку [13]. Свободное взаимодействие возникает вследствие того, что сжатие приводит к утолщению пограничного слоя, и его окончательный отрыв происходит в результате отклонения внешнего потока, вызванного этим утолщением. Приращение давления при свободном взаимодействии в области отрыва в отсутствие теплопередачи, согласно Чепмену и др. [13], пропорционально  $\sqrt{c_{f_0}}$ , где  $c_{f_0}$  — коэффициент поверхностного трения непосредственно перед областью взаимодействия, т. е.  $C_{PS} \propto \sqrt{c_{f_0}}$ , где  $C_{PS}$  — коэффициент давления в области отрыва. Для  $C_{PS}$  в ламинарном пограничном слое предлагается формула [25]

$$C_{PS} = 1,13 \sqrt{\beta_0 \text{Re}^{1/2}},$$

где  $\beta_0 = \sqrt{M_0^2 - 1}$ , а  $M_0$  — число Маха вверх по потоку от области взаимодействия. Кроме того, Хаккинен и др. [12] получили

$$C_{pS} = \sqrt{\frac{2c_{f0}}{\beta_0}}.$$

Значения  $C_{pS}$ , вычисленные по этим трем формулам, хорошо согласуются между собой не только для плоской пластины, но также для углов и уступов. Справедливость последней формулы подтверждается теориями Крокко и Лиза [26, 27], а также Кёрла [28].



Ф и г. 11. Схема течения с зарождающимся отрывом [12].

Приращение давления, соответствующее зарождающемуся отрыву в точке нулевого коэффициента поверхностного трения, вычислено Хаккиненом и др. для схемы течения, показанной на фиг. 11. Вследствие приближения линий тока внешнего течения к поверхности тела за точкой падения скачка происходит утоньшение пограничного слоя. Поэтому может поддерживаться значительное приращение давления без отрыва потока.

На поверхности тела в окрестности скачка градиент давления поддерживается почти постоянной системой внешних скачков уплотнения, хотя самоиндуцированный градиент давления был бы отрицательным при выпуклой форме границы пограничного слоя. Как подтверждает эксперимент, местное влияние системы скачков не может

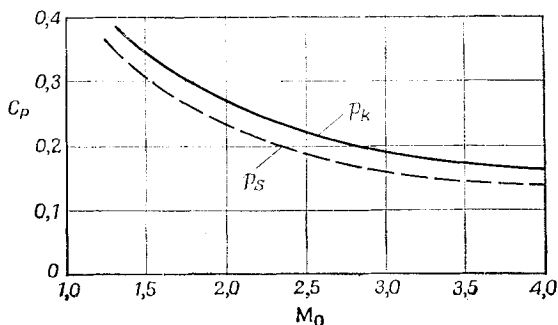
распространяться слишком далеко от точки падения скачка, так как при приближении к стенке скачок давления постепенно компенсируется расширением потока. Таким образом, повышение давления происходит главным образом вследствие самоиндуцирования и приращение давления, вызывающее отрыв, создается перед скачком уплотнения. Предполагая, что утолщение и утоньшение пограничного слоя симметричны, найдем

$$C_{p_{\text{зарожд. отр}}} = 2C_{pS}. \quad (47)$$

Это соотношение подтверждают эксперименты Хаккинена и др. [11].

### 3.1.2. Плоская пластина. Турбулентный пограничный слой

Теоретическое решение для отрыва турбулентного потока, индуцированного скачком уплотнения, получить гораздо труднее, чем для ламинарного потока, поэтому оценка приращения давления при отрыве турбулентного потока производится главным образом экспериментально. При взаимодействии скачка с турбулентным пограничным слоем коэффициент давления  $C_{pS}$ , как и в случае ламинарного пограничного слоя, пропорционален  $\sqrt{c_{f_0}}$ , но, как и предполагалось, приращение давления в турбулентном



Ф и г. 12. Давление отрыва и давление в точке перегиба кривой давления; турбулентный пограничный слой,  $Re_{x_0} = 5 \cdot 10^5$  [2].

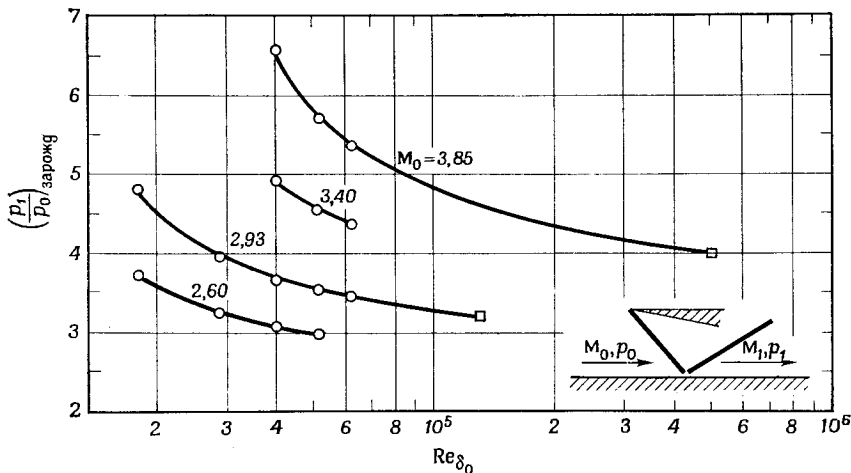
$p_k$  — давление в точке перегиба;  $p_S$  — давление в точке отрыва.

потоке слабее зависит от числа Рейнольдса [13]. Как показано на фиг. 12, при отрыве турбулентного потока, индуцированном скачком уплотнения, давление в точке перегиба не очень отличается от давления отрыва.

В турбулентном потоке давление, при котором происходит отрыв, и отклонение потока возрастают с увеличением  $M$  при постоянном значении  $Re_{\delta_0}$ ; они также возрастают с уменьшением  $Re_{\delta_0}$  при постоянном значении  $M$ , как это видно из фиг. 13 и 14 [29].

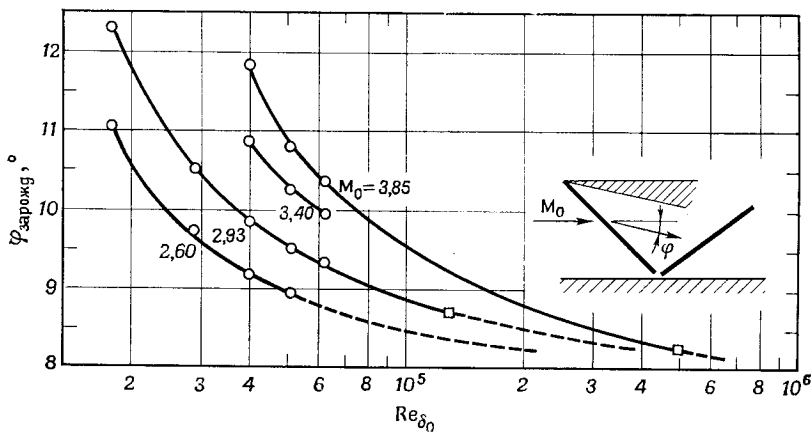
### 3.1.3. Искривленная поверхность

Теоретически и экспериментально показано [30], что при взаимодействии скачка с ламинарным пограничным слоем на выпуклой поверхности кривизна способствует уменьшению приращения давления в точке полностью развитого отрыва [25, 30]; однако результаты, полученные для плоской пластины, примени-



Ф и г. 13. Влияние числа Рейнольдса на приращение давления при зарождающемся отрыве турбулентного пограничного слоя, вызванном падающим скачком уплотнения [29].

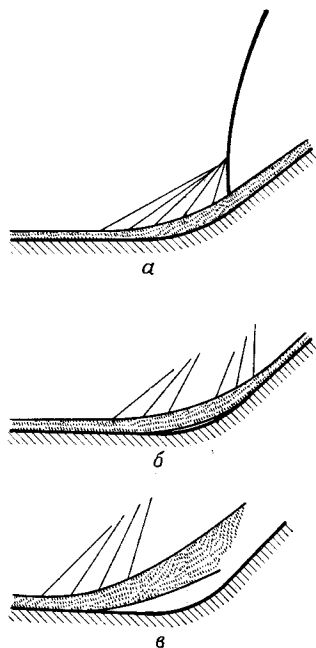
○ скачок, падающий на плоскую пластину (зарождающийся отрыв обнаруживается по появлению горба на кривой давления); точки получены перестроением кривых с фиг. 17 работы [29]; □ скачок, падающий на стенку аэродинамической трубы (зарождающийся отрыв обнаруживается путем зондирования пограничного слоя) [16].



Ф и г. 14. Влияние числа Рейнольдса на угол отклонения потока при зарождающемся отрыве турбулентного пограничного слоя, вызванном падающим скачком уплотнения [29].

○ скачок, падающий на плоскую пластину (зарождающийся отрыв обнаруживается по появлению горба на кривой давления); точки получены перестроением кривых с фиг. 17 работы [29]; □ скачок, падающий на стенку аэродинамической трубы (зарождающийся отрыв обнаруживается путем зондирования пограничного слоя) [16].

мы, если радиус кривизны не очень мал [31]. Кривизна увеличивает интенсивность скачка, который может существовать, не вызывая отрыва [30]. Отрыв, вызываемый скачком уплотнения, падающим на вогнутую поверхность, отличается от отрыва на выпуклой поверхности, причем отрыв на вогнутой поверхности связан со сжатием потока, напоминающим скачок уплотнения (фиг. 15).



Фиг. 15. Взаимодействие на искривленной поверхности сжатия [2].

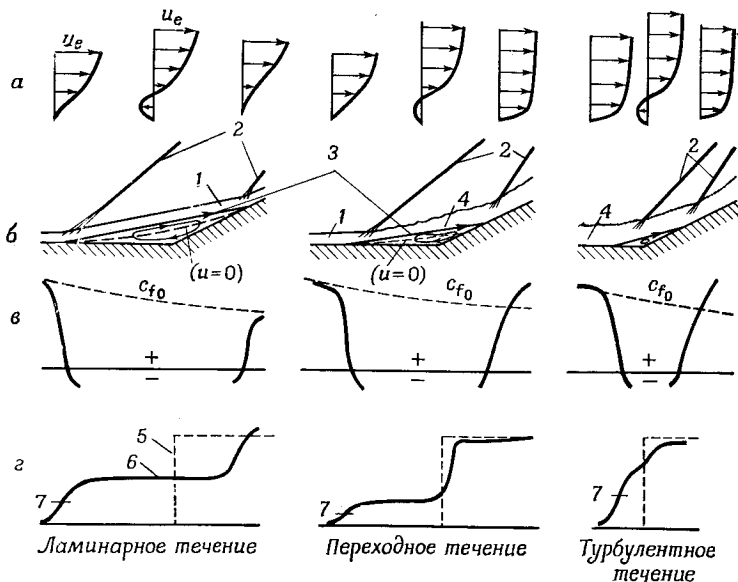
а — нет отрыва; б — небольшая область установившегося отрыва потока; в — значительная область неустановившегося отрыва.

Небольшая область установившегося отрыва турбулентного потока постепенно растет в отличие от большой области неустановившегося отрыва турбулентного потока, переход к которой происходит иногда внезапно [30]. Для данных чисел Рейнольдса и Маха приращение давления перед отрывом на искривленной поверхности больше, чем при обтекании угла, меньшего  $\pi$  (угол сжатия), и увеличивается с увеличением радиуса кривизны поверхности [29]. Давление в углах сжатия (перед наклонной стенкой) гораздо проще вычислить, чем на искривленной поверхности. Типичные характеристики отрыва потока около углов сжатия (или перед наклонными стенками) показаны на фиг. 16 [4, 13, 18, 32, 33], где  $c_{f_0}$  — местный коэффициент трения при нулевом градиенте давления.

При всех режимах течения коэффициент поверхностного трения в области отрыва отрицателен. Ламинарное течение имеет характерную область плато давления, а при турбулентном течении давление в области отрыва растет. Течение переходного типа сочетает свойства ламинарного и турбулентного течений. Давление после присоединения потока обычно совпадает с вычисленным для невязкого газа, но при некоторых условиях оно может превышать это значение, что объясняется более низким уровнем местной энтропии, обусловленным сжатием невязкого потока в нескольких скачках уплотнения в окрестности отрыва. Сжатие в нескольких скачках более эффективно, чем сжатие в одном скачке уплотнения, так как обеспечивает более высокое местное давление. При ламинарном течении давление в области присоеди-

нения приблизительно то же самое, что и в области плато, а при турбулентном течении оно составляет от половины до одной трети максимального приращения давления. Влияние числа Рейнольдса на индуцированный скачком уплотнения отрыв турбулентного потока от двумерного угла сжатия показано на фиг. 17 и 18.

Видно, что при зарождающемся отрыве приращение давления зависит от числа Рейнольдса, а угол поворота больше при меньших числах Рейнольдса и при больших числах Маха. При числах



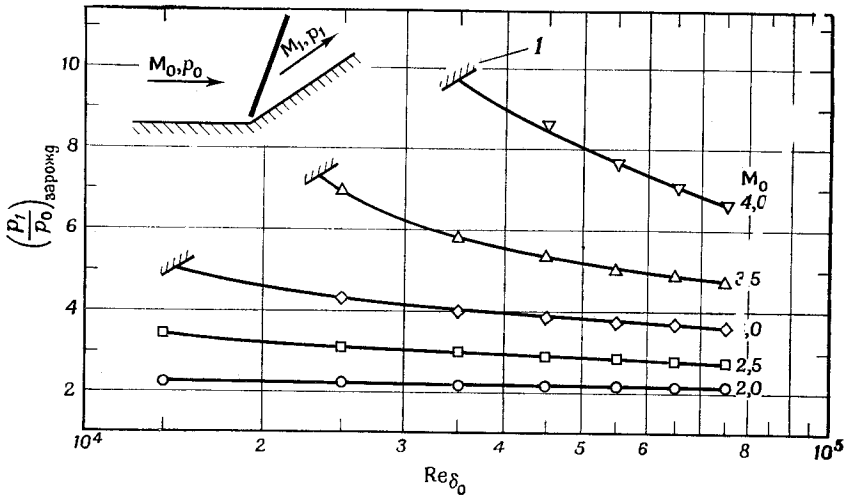
Ф и г. 16. Характеристики отрыва потока (пример отрыва перед наклонной стенкой [5]).

*a* — профили скорости; *б* — физическая плоскость; *в* — местный коэффициент трения; *г* — коэффициент давления; *1* — ламинарный пограничный слой; *2* — скачки уплотнения; *3* — разделяющая линия тока; *4* — турбулентный пограничный слой; *5* — невязкое течение; *6* — плато давления; *7* — отрыв.

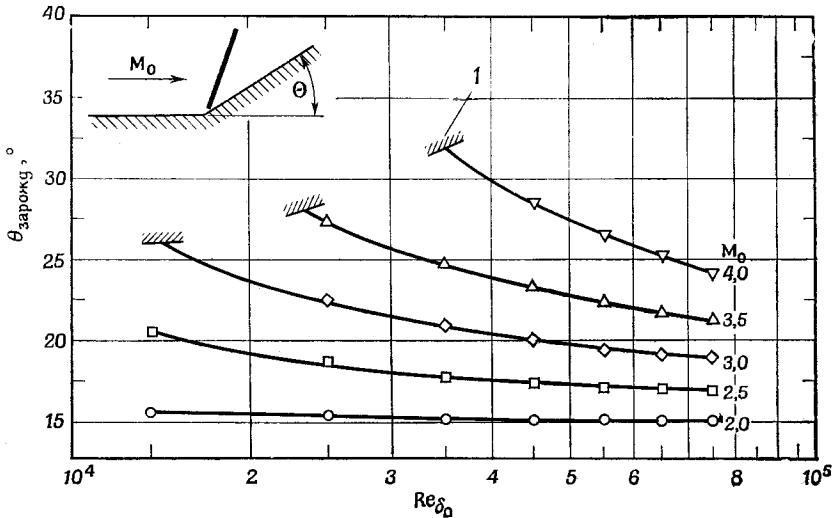
Маха, больших указанных на кривых для данного угла отклонения, отрыва не происходит, а меньшие числа Маха соответствуют отрыву потока. Следовательно, с уменьшением числа Маха течение около такой поверхности, как элерон или щиток (отклоненный на некоторый угол), при почти постоянном числе Рейнольдса переходит от режима присоединенного течения к отрыву. Наоборот, при увеличении числа Маха возможно отклонение поверхности на больший угол без отрыва потока.

При индуцированном скачком отрыве ламинарного слоя и данном приращении давления область отрыва будет больше, чем при





Ф и г. 17. Влияние числа Рейнольдса на приращение давления при зарождающемся отрыве турбулентного потока перед наклонной стенкой [29].  
 Значками обозначены результаты перестроения кривых с фиг. 9 работы [29].  $Re_{\delta_0} = u_0 \delta_0 / 12 \nu_0$ , где  $u$  — скорость,  $\delta$  — толщина пограничного слоя, индекс 0 соответствует условию перед началом взаимодействия. 1 — приблизительный минимум  $Re_{\delta_0}$  для турбулентного течения при взаимодействии (фиг. 8 работы [29]).

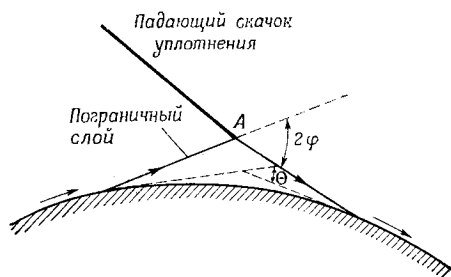


Ф и г. 18. Влияние числа Рейнольдса на угол отклонения потока при зарождающемся отрыве турбулентного потока перед наклонной стенкой.  
 Значками обозначены результаты перестроения кривых с фиг. 9 работы [29]. 1 — приблизительный минимум  $Re_{\delta_0}$  для турбулентного течения при взаимодействии (фиг. 8 работы [29]).

отрыве турбулентного слоя, так как приращение давления, вызывающее отрыв ламинарного и переходного пограничного слоев, намного меньше, чем для турбулентного пограничного слоя.

В случае ламинарного пограничного слоя на искривленной поверхности соотношение (47) можно изменить в соответствии с конкретными свойствами поверхности. Гребер [34] изучил этот случай на примере простой модели со слабым скачком уплотнения, которая показана на фиг. 19.

Приращение давления, вызванное падающим скачком уплотнения и отклонением невязкого потока, соответствует действительному отклонению потока  $2\varphi$ , вызванному в точке  $A$  скачком уплотнения и расширением. Приращение давления, действующее на



Ф и г. 19. Углы отклонения потока на выпуклой поверхности [2].

пограничный слой, меньше на величину, которая требуется для отклонения потока на угол, равный изменению наклона поверхности  $\theta$ . Так как величине  $C_{p\text{зарожд}}$  в соотношении (47) должно соответствовать приращение давления, приложенное к пограничному слою, то в случае искривленной поверхности интенсивность скачка больше, чем в случае плоской поверхности, для которой справедливо соотношение (47). Гребер [34] показал, что интенсивность скачка, при которой начинается отрыв потока, увеличивается с увеличением кривизны выпуклой поверхности, хотя величина приращения давления на поверхности уменьшается с увеличением кривизны.

Куэн [29] экспериментально показал, что в случае турбулентного течения приращение давления, допускающее безотрывное обтекание, для искривленной поверхности больше, чем для поверхности с изломом. При больших отношениях давления в потоке около выпуклой искривленной поверхности часто внезапно возникает область нестационарного отрывного течения большого размера. Это наблюдение важно в том смысле, что при малом отношении давлений область отрывного течения устойчива и медленно увеличивается не только около гладких плавных изогнутых поверхностей, но и в других случаях взаимодействия.

Отрыв потока перед уступом — самый простой случай определения приращения давлений, при котором возникает отрыв, поскольку перед уступом всегда существует отрыв независимо от отношения давлений или высоты уступа, если только эта высота не слишком мала по сравнению с толщиной пограничного слоя.

3.2. ПОВЫШЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ДО ПОСТОЯННОГО ЗНАЧЕНИЯ

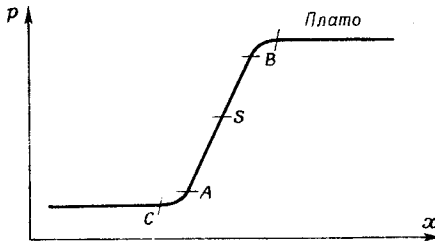
Анализируя порядки величин, Хаккинен и др. [12] количественно оценили повышение давления до постоянной величины в области отрыва. Такая оценка намного сложнее определения приращения давления, вызывающего отрыв. Порядок приращения давления до значения плато определяется на основе предположения, что за точкой отрыва линия  $u = 0$  образует стенку, которая отклоняет пограничный слой. Применяя интегральное уравнение количества движения в области над линией  $u = 0$ , которая по предположению отстоит на расстоянии  $h$  от стенки, получаем

$$c_{f_c} - c_{f_h} = (H_c + 2 - M_0^2) \theta_c \frac{dC_p}{dx} + \frac{\beta}{2} \frac{dC_p}{dx} \int_{x_0}^x C_p dx - \frac{dC_p}{dx} \int_{x_0}^x \frac{dh}{dx} dx \tag{48}$$

где индекс  $c$  обозначает величины, соответствующие постоянному давлению.

На фиг. 20 показано распределение давления вблизи точки отрыва.

Между точками  $O$  и  $A$  в начале зоны взаимодействия напряжение трения на стенке уменьшается, а градиент давления увеличивается, пока не достигнет своего значения в области отрыва.



Ф и г. 20. Распределение давления вблизи точки отрыва [12].

Между точками  $A$  и  $B$  давление увеличивается при почти постоянном градиенте давления. За точкой  $B$  градиент давления уменьшается и количество движения обратного течения возрастает от пренебрежимо малой величины до равновесного значения в области плато. Теперь из уравнения (48) можно определить величину  $C_{p\text{плато}}$ .

Если основная часть приращения давления до значения плато накапливается до появления значительного отрицательного количества движения, уравнение (48) принимает вид

$$\frac{dC_p}{dx} \int_{x_s}^x \frac{dh}{dx} dx = c_{f_h} - c_{f_w}$$

В области плато коэффициент давления обусловлен прежде всего углом между линией  $u = 0$  и стенкой. Кроме того,  $d\delta^*/dx$  —

малая величина, так как пограничный слой над линией  $u = 0$  утоньшается от точки отрыва до области плато. Предполагая, что отклонения значений коэффициента поверхностного трения на линии  $u = 0$  от значения этого коэффициента в области постоянного давления в точках  $A$  и  $B$  одинаковы, давление в точке  $B$  равно значению плато-давления и  $c_{fw} \approx -c_{fh}$  вблизи области плато, из уравнения (48) получим

$$C_{p_{\text{плато}}} > C_{p_S} \sqrt{2}. \quad (49)$$

Если взять среднее между оценками, которые можно получить по соотношению (49) и соотношению

$$C_{p_{\text{плато}}} < 1,9C_{p_S}, \quad (50)$$

которое было выведено Хаккиненом и др. [12] в предположении, что обратное течение симметрично, получим приближенное значение коэффициента давления

$$C_{p_{\text{плато}}} = 1,65C_{p_S} \quad (51)$$

или

$$C_{p_{\text{плато}}} = 1,65 \sqrt{\frac{2c_{f_0}}{\beta}}. \quad (52)$$

Справедливость соотношений (51) и (52) подтверждается экспериментом Хаккинена и др. [12].

#### 4. РАСЧЕТ ОТРЫВА, ВЫЗВАННОГО СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

В последнее время успешно проводились расчеты отрыва ламинарного потока, вызванного скачком уплотнения. Исследования охватывают всю область взаимодействия скачка с пограничным слоем, включая течение вверх и вниз по потоку, а также область присоединения потока. Получены теоретические решения линеаризованных уравнений движения без учета и с учетом вязких членов для течения, слабо отличающегося от течения Блазиуса [35, 36].

Приближенные решения задач взаимодействия основаны на конкретной модели пограничного слоя и предположении, что с помощью нескольких общих параметров можно охарактеризовать всю область взаимодействия. К такому классу приближений относится применение Лизом [37] метода Польгаузена и интегральный метод Крокко и Лиза [26]. Основное предположение этого приближения — постоянство давления по толщине пограничного слоя. Оно справедливо везде, кроме окрестности точки падения скачка, и полезно тем, что связывает проблему взаимо-

действия с общей теорией пограничного слоя. Однако, как указал Гэдд [14], выбор конкретного профиля скорости может существенно ограничить применимость такого расчета отрыва потока. Кроме того, чтобы выбрать теоретическую модель течения, требуются подробные эксперименты. Теоретические решения несколько упрощаются с учетом факта, что параметры потока в окрестности отрыва зависят только от местных условий, если область отрыва, вызванного скачком уплотнения, является достаточно протяженной. Это было замечено несколькими исследователями [12, 13].

Крокко [38] с помощью теории Крокко — Лиза [26] объяснил процесс взаимодействия, вызывающий отрыв как ламинарного, так и турбулентного потоков.

Гэдд [21] развил теорию взаимодействия относительно слабого прямого скачка с турбулентным пограничным слоем, согласно которой отрыв происходит приблизительно при числах Маха, больших 1,3. При решении возникают следующие трудности. За кривой распределения давления нет явно выраженной точки, соответствующей полному приращению давления за прямым скачком. Поток вне пограничного слоя частично дозвуковой, и турбулентный пограничный слой труднее поддается расчету, чем ламинарный. Кроме того, приходится иметь дело с нелинейными уравнениями.

В следующих разделах изложены некоторые методы расчета отрыва ламинарного и турбулентного пограничных слоев, вызванного скачком уплотнения.

#### 4.1. ТЕОРИЯ КРОККО [38]

Предполагая, что давление постоянно по толщине пограничного слоя, перепишем интегральное соотношение Кармана следующим образом:

$$\frac{dI}{dx} = u_e \frac{dm}{dx} - \delta \frac{dp}{dx} - \tau_w,$$

где  $I$  и  $m$  — количество движения и массовый расход, которые могут быть выражены через толщину пограничного слоя:

$$\begin{aligned} m &= \rho_e u_e (\delta - \delta^*), \\ I &= \rho_e u_e^2 (\delta - \delta^* - \theta). \end{aligned}$$

Чтобы решить задачу о взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем, используем схему течения, показанную на фиг. 21.

В области взаимодействия обычное приближение пограничного слоя неприменимо. Однако в предположении, что ошибки аппроксимации пограничного слоя существенны только в ограниченной области и быстро убывают выше и ниже по течению от зоны вза-

имедействия, можно ввести контрольную поверхность, включающую область больших ошибок (фиг. 21). Далее, предполагается, что, когда пограничный слой проходит через скачок, внешний поток может быть представлен двумя зонами однородных течений 1 и 2 с косым скачком между ними, и если  $\psi_2 > \psi_s$ , где  $\psi = f(x)/x - x$  (определения  $f$  и  $x$  будут даны ниже), то происходит отрыв потока. На границе пограничного слоя статическое давление за скачком  $p_2$  постоянно (или почти постоянно), а между сечениями 1 и 2 происходит перераспределение и выравнивание давления, неравномерного по толщине пограничного слоя. Этот процесс заканчивается в сечении 2, в котором давление становится равным  $p_2$ . Расстояние между сечениями 1 и 2 составляет всего несколько толщин пограничного слоя, поэтому на таком коротком расстоянии можно пренебречь распространением турбулентности во внешнем потоке и поверхностным трением. Таким образом, уравнения неразрывности и количества движения в направлении течения имеют вид

$$m_1 = m_2, \quad I_1 - I_2 = \delta_1 (p_2 - p_1).$$

Уравнение энергии получено в предположении о постоянстве температуры торможения и скорости звука заторможенного потока. Отношение давлений имеет вид

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma \frac{w_1 (\kappa_1 w_1 - \kappa_2 w_2)}{\psi_1 + \kappa_1 t_1} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\psi_2 + \kappa_2 t_2}{\psi_1 + \kappa_1 t_1} \frac{w_1}{w_2}, \quad (53)$$

где  $w = u_e/a_s$ ,  $a_s$  — скорость звука заторможенного потока,  $\kappa = \bar{u}/u_e$ ,  $\bar{u}$  — средняя скорость, определяемая соотношением  $\bar{u} = I/m$ ,

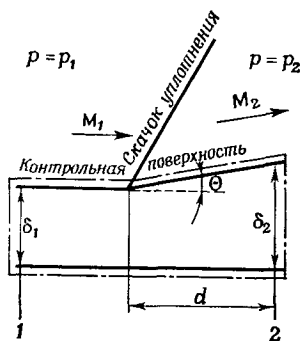
$$t(w) = T_e/T_s = 1 - \frac{\gamma-1}{2} w^2$$

и  $T_s$  — температура торможения. Как и прежде,

$$\psi(x) = f(x)/x - x.$$

Величину  $f(x)$  можно найти из формулы

$$m = \frac{p\delta}{RT_s} \frac{\bar{u}}{f - \frac{1}{2}(\gamma-1)(\bar{u}^2/a_s^2)}$$



Фиг. 21. Модель взаимодействия [38].

Другое соотношение между  $w_2$ ,  $w_1$ ,  $p_2$  и  $p_1$  дает уравнение Рэнкина — Гюгонио

$$\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} w_2^2\right) / \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} w_1^2\right) = \left(\frac{t_2}{t_1}\right) = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}\right) / \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_1}{p_2}\right). \quad (54)$$

Для рассматриваемой модели значение  $\delta_2 - \delta_1$  является функцией только изменения скорости (связанного с  $w_1$  и  $p_2/p_1$ ) и расстояния выравнивания, которое невозможно определить расчетным путем. Поэтому, как правило, решение можно получить подбором различных значений  $\delta_2/\delta_1$  при известном законе  $\psi(\kappa)$ , полученном путем численного расчета. Однако в случае отрыва, вызванного скачком уплотнения, можно получить теоретическое решение, поскольку оно не зависит ни от  $\delta_1/\delta_2$ , ни от расстояния выравнивания. Причина этого заключается в том, что значение  $\kappa$  после отрыва остается постоянным и равным  $\kappa_S$ . Из уравнения (53) при  $\kappa = \kappa_S$  получаем

$$w_2 = \frac{\kappa}{\kappa_S} \left\{ w_1 - \frac{1}{\gamma w_1} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left( \frac{\psi_1}{\kappa_1} + 1 - \frac{\gamma-1}{2} w_1^2 \right) \right\}, \quad (55)$$

а из уравнения (54)

$$w_2^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{t_2}{t_1} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{t_2}{t_1} w_1^2 \right). \quad (56)$$

Исключая  $w_2$  из (55) и (56) и подставляя  $t_2/t_1$ , получаем из (54) уравнение, выражающее связь между  $p_2/p_1$ ,  $w_1$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_S$ , которое содержит третью степень  $p_2/p_1$  и вторую степень  $w_1^2$  или  $M_1^2 = w_1^2/t_1$ . Решение для  $M_1^2$  в зависимости от  $p_2/p_1$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_S$  имеет вид

$$M_1^2 = \frac{G + HF + \{G(G + 2HF) + (\kappa_S/\kappa_1)^2 H^2\}^{1/2}}{2\{F^2 - (\kappa_S/\kappa_1)^2\}}, \quad (57)$$

где

$$F = 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \frac{\psi_1}{\kappa_1},$$

$$G = \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\kappa_S}{\kappa_1} \right)^2 \frac{(p_1/p_2) - (p_2/p_1)}{\{(\gamma+1)/(\gamma-1)\} + (p_1/p_2)}$$

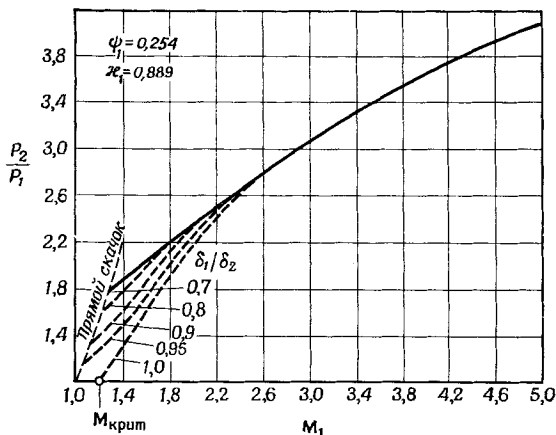
и

$$H = \frac{2}{\gamma} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left( \frac{\psi_1}{\kappa_1} + 1 \right).$$

Как только найдены значения  $p_2/p_1$  и  $w_2$ , с помощью последнего члена уравнения (53) можно определить значение  $\psi_2$ . Оно соответствует любому заданному значению  $\delta_1/\delta_2$ . Решение, полученное для  $\psi_2 > \psi_S$ , справедливо только при условии, что поток действительно имеет отрыв, и наоборот, если интенсивность скачка недо-

статочна, чтобы вызвать отрыв, то решение находится численно для заданного значения  $\delta_1/\delta_2$ .

Отношение давлений при переходе через скачок уплотнения, вызывающий отрыв, представлено на фиг. 22 в зависимости от



Ф и г. 22. Отношение давлений при переходе через скачок уплотнения, вызывающий отрыв, в зависимости от числа Маха. Для безотрывного течения отношение давлений зависит от отношения толщин  $\delta_1/\delta_2$  [38].

Значение  $\psi$  вычислено по [39] ( $\kappa_s = 0,72$ ). — течение с отрывом; ---- безотрывное течение.

числа Маха. Теоретические кривые соответствуют течению с отрывом;  $\kappa_s = 0,72$  соответствует кривой Шубауэра — Клебанова [39],  $\kappa_s = 0,76$  — кривой Клаузера [40].<sup>1)</sup>

Кривые вычислены по уравнению (57) при  $\kappa_1 = \kappa_s$ ,  $\psi_1 = \psi_0$  для двух значений  $\kappa_s = 0,72$  и  $\kappa_s = 0,76$ . Совпадение теоретических и экспериментальных результатов удовлетворительное для  $\kappa_s = 0,76$  во всем диапазоне значений  $M_1$ , за исключением малых  $M_1$ , при которых отрыва не происходит.

#### 4.2. ИССЛЕДОВАНИЯ ДОНАЛЬДСОНА И ЛАНГЕ

Дональдсон и Ланге [41] определили приращение давления, при котором возникает отрыв ламинарного и турбулентного потоков на плоской пластине, и провели эксперименты в интервале значений  $Re$  от  $2 \cdot 10^6$  до  $49 \cdot 10^6$  в струе с  $M_\infty = 3,03$ .

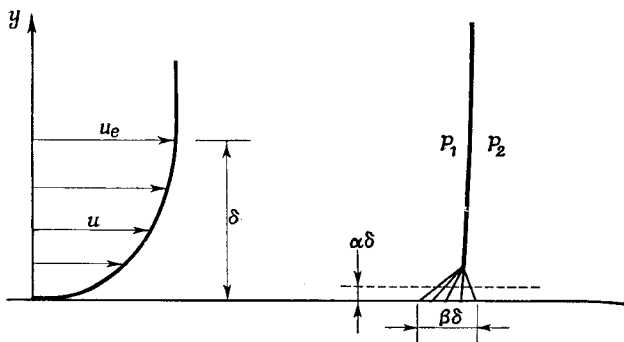
Для упрощения исследований с применением теории размерностей использовалась схема течения, изображенная на фиг. 23, при следующих предположениях.

<sup>1)</sup> Кривая Клаузера  $\kappa_s = 0,76$  на фиг. 22 не приведена.— *Прим. перев.*



Длина участка стенки, на котором скорость и давление изменяются на величины, соответствующие их изменениям по толщине скачка уплотнения, пропорциональна толщине пограничного слоя  $\delta$ , и влияние скачка уплотнения, вызывающего приращение давления от  $p_1$  до  $p_2$ , проявляется в нижней части пограничного слоя. При толщине нижней части  $\alpha\delta$ , где  $\alpha$  — малая величина, приращение давления  $\Delta p = p_2 - p_1$  приходится на участок длиной  $\beta\delta$ , где  $\beta$  — некоторый параметр.

Если нет отрыва, то изменение количества движения, вносимое в элементарный объем (со сторонами  $\alpha\delta$  и  $\beta\delta$ ) под действием сил трения в пограничном слое, равно изменению количества движения, выносимого из этого объема под действием



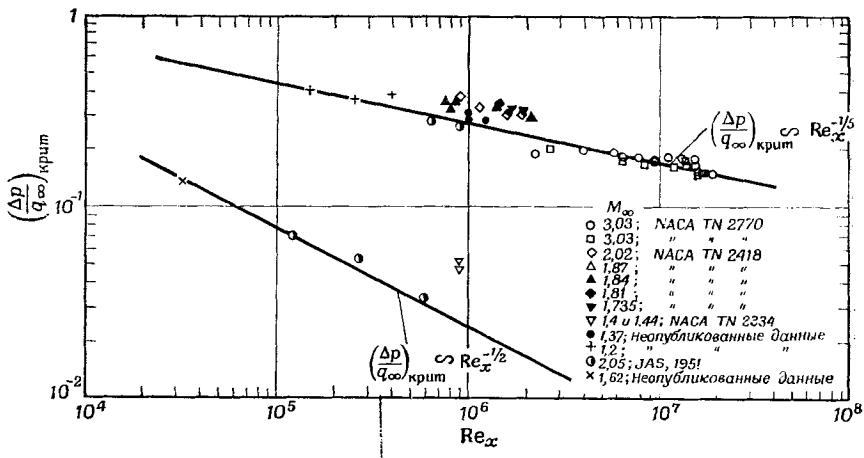
Ф и г. 23. Взаимодействие скачка с пограничным слоем [41].

разности давлений. Скорость у стенки на входе в элементарный объем мала по сравнению с изменением скорости, которое может быть создано приращением давления  $\Delta p$ , и для обеспечения безотрывного течения изменение  $u$  также должно быть мало (чтобы предотвратить возникновение обратного течения). Тогда критерием зарождения отрыва будет условие равенства между изменением количества движения в единицу времени, вызванным  $\Delta p$ , и изменением количества движения в единицу времени под действием сил трения. Следовательно, принимая, что количество движения жидкости, перенесенное через верхнюю и нижнюю по потоку поверхности элемента, пропорционально напряжению трения на стенке, действующему на входе в элемент, можно утверждать, что суммарное количество движения, заключенное в самом элементе, также пропорционально начальному напряжению трения, т. е.

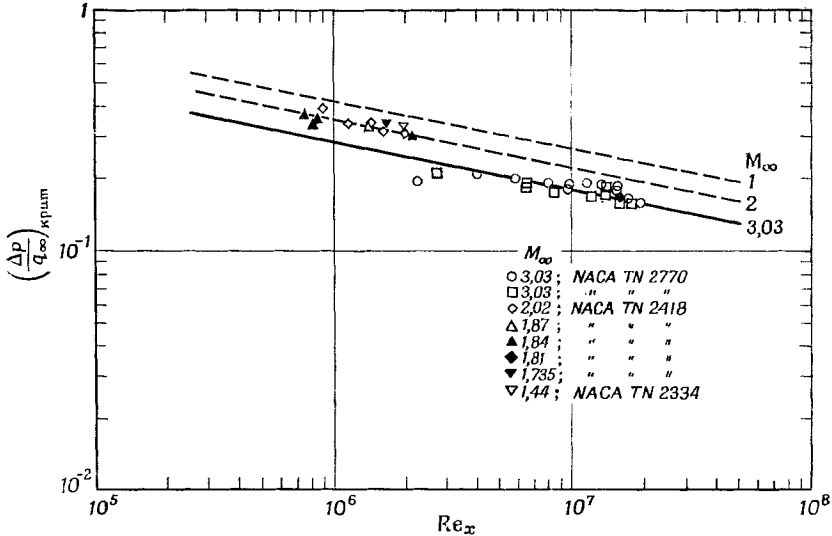
$$\Delta p \alpha \delta \propto \tau_w \beta \delta \text{ или } \left( \frac{\Delta p}{q_\infty} \right)_{\text{крит}} \propto \beta \delta (\alpha \delta)^{-1} c_f.$$

Так как для ламинарного пограничного слоя

$$c_f \propto Re_\delta^{-1},$$



Ф и г. 24. Критическое приращение давления за скачком уплотнения вызывающим отрыв пограничного слоя, в зависимости от числа Рейнольдса [41].



Ф и г. 25. Влияние числа Маха на зависимость от числа Рейнольдса критического приращения давления за скачком уплотнения, вызывающим отрыв турбулентного пограничного слоя [41].

а для турбулентного пограничного слоя с профилем скоростей, подчиняющимся степенному закону с показателем степени  $1/7$ ,

$$c_f \propto Re_\delta^{-1/4},$$

то для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине

$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right)_{\text{крит}} \propto Re_x^{-1/2}$$

и для турбулентного

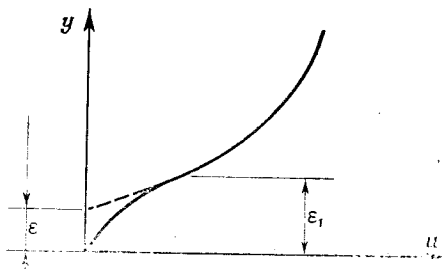
$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right)_{\text{крит}} \propto Re_x^{-1/5}.$$

Стюартсон [42] показал, что безразмерное приращение давления, вызывающее отрыв ламинарного потока, по порядку величины равно  $Re_x^{-2/5}$ , что совпадает с результатами упрощенного анализа Дональдсона и Ланге [41]. Кроме того, экспериментальные результаты, представленные на фиг. 24 и 25, хорошо согласуются с теоретическими.

#### 4.3. РАСЧЕТ ХАККИНЕНА И ДР.

Исследуется ламинарный пограничный слой, — схема которого представлена на фиг. 26.

Профиль скорости в подслое сопрягается с профилем скорости пограничного слоя на высоте  $\epsilon_1$ , и по отношению к набегающему потоку невозмущенный пограничный слой оказывается приподнятым на высоту  $\epsilon$  от стенки. Если пренебречь количеством движения в подслое, то условие баланса сил в области высотой  $\epsilon$  запишется следующим образом:



$$\epsilon \frac{dp}{dx} = \tau_\epsilon - \tau_w. \quad (58)$$

Фиг. 26. Пограничный слой в окрестности отрыва [12].

Если повышение давления обусловлено увеличением

$\epsilon$  и если можно применить линеаризованную теорию, то

$$C_p = \frac{2}{\beta} \frac{d\epsilon}{dx}, \quad (59)$$

где  $\beta = \sqrt{M_0^2 - 1}$ , а  $M_0$  — число Маха невозмущенного потока перед взаимодействием. Исключая  $\epsilon$  из уравнений (58) и (59).

получим

$$\frac{\beta}{2} \frac{dp}{dx} \int_{x_e}^x C_p dx = c_{f_e} - c_{f_w}.$$

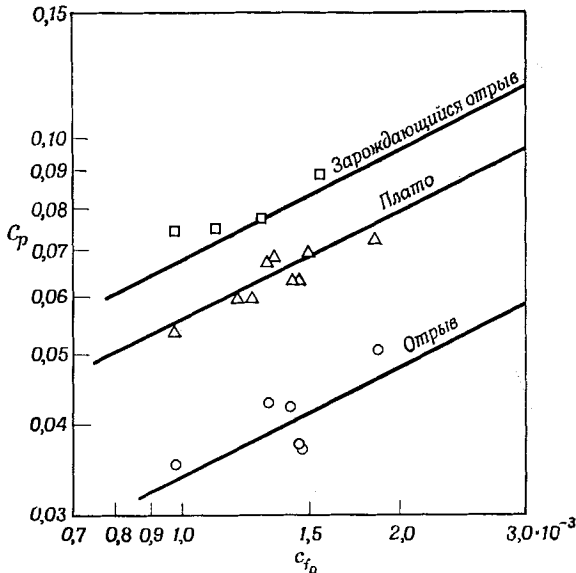
Выполняя интегрирование и принимая  $c_{f_w} = 0$ , найдем коэффициент давления в точке отрыва

$$C_{p_S} = \sqrt{\frac{2c_{f_0}}{\beta}}. \quad (60)$$

Как видно из фиг. 27, уравнение (60) подтверждается экспериментальными данными и расчетной формулой из работы [25]

$$C_{p_S} = 1,39 \sqrt{\frac{c_{f_0}}{\beta}}$$

и практически такой же формулой из работы [12]. Однако для



Ф и г. 27. Коэффициенты давления при отрыве, в области плато и при зарождении отрыва [12].

$c_{f_0}$  — коэффициент поверхностного трения в начале взаимодействия; — уравнения (60), (52), (47) при  $M_0 = 2$ .

$M_0 = 2$  в работе [13] получено несколько меньшее значение числового коэффициента

$$C_{p_S} = 1,19 \sqrt{\frac{c_{f_0}}{\beta}}.$$

Хаккинен и др. [12] применили другой подход, используя интегральное соотношение Кармана, для определения  $C_{p_S}$  и толщины

потери импульса. В предположении, что пограничный слой приподнят подслоем с пренебрежимо малым количеством движения интегральное соотношение Кармана можно записать в виде

$$c_f = 2 \frac{d\theta}{dx} - \{\delta^* + \theta(2 - M_0^2)\} \frac{dC_p}{dx}. \quad (61)$$

Тогда толщину потери импульса  $\theta$  можно считать приблизительно равной ее значению при постоянном давлении. Принимая толщину вытеснения  $\delta^*$  равной толщине при постоянном давлении плюс отклонение от нее, из уравнения (59) получим

$$C_p = \frac{2}{\beta} \frac{d(\Delta\delta^*)}{dx}, \quad (62)$$

где  $\Delta\delta^*$  — отклонение от значения толщины вытеснения при постоянном давлении. Подставляя (62) в (61), получаем

$$c_{f_c} - c_{f_w} = (H_c + 2 - M_0^2) \theta_c \frac{dC_p}{dx} + \frac{\beta}{2} \frac{dC_p}{dx} \int_{x_0}^x C_p dx. \quad (63)$$

Интегрируя по частям и принимая в уравнении (63) в точке отрыва  $c_{f_w} = 0$ , находим

$$\frac{\beta}{4} C_{p_s}^2 = (c_{f_c})_s - (H_c + 2 - M_0^2) \left( \theta_c \frac{dC_p}{dx} \right)_s. \quad (64)$$

Значение множителя  $\{\theta_c (dC_p/dx)\}_s$  в этом уравнении можно найти с помощью обобщенного метода Польгаузена [33].

Параметр отрыва Польгаузена — Грушвица равен

$$k_s = - \left( \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \frac{\theta^2}{C} \frac{u_\infty}{2v_\infty} \frac{dC_p}{dx} \right)_s = -0,157, \quad (65)$$

где  $C$  — константа Чепмена — Рубезина [43], определяемая по формуле

$$C = (\mu/\mu_\infty)/(T/T_\infty).$$

Затем из уравнения (65) находим

$$\left( \theta \frac{dC_p}{dx} \right)_s = \frac{0,713 (c_{f_c})_s}{1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) r M_0^2}, \quad (66)$$

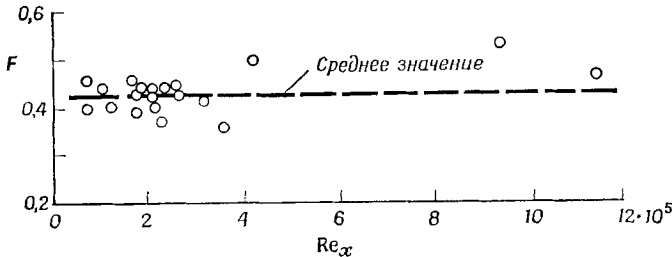
или при  $\theta_c = x c_{f_c}$ , где  $x$  — расстояние, измеряемое от передней кромки пластины,

$$\left( x \frac{dC_p}{dx} \right)_s = \frac{0,713}{1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) r M_0^2}, \quad (67)$$

где  $r$  — коэффициент восстановления.

Уравнения (66) и (67) получены для несжимаемого потока, но они также могут быть справедливы и для сжимаемого потока, так как в результат входит константа Чепмена — Рубезина  $C$  [43].

Как видно из фиг. 28, модифицированный параметр отрыва Польгаузена — Грушвица дает хорошее совпадение с экспериментальными данными, полученными в НАСА, Южнокалифорнийском университете, Массачусетском технологическом институте



Фиг. 28. Модифицированный параметр отрыва Польгаузена — Грушвица [12]

$$F = \frac{1 + \{(\gamma - 1)/2\} r M_0^2}{0,713} \left( x \frac{dC_p}{dx} \right)_S; \quad F_{\text{теор}} = 1.$$

и в Национальной физической лаборатории при исследовании отрывов, вызванных уступами, углами сжатия и отраженными скачками уплотнения в интервалах значений  $2,0 < M_0 < 2,53$  и  $76\,000 < Re_x < 1\,130\,000$ . Из-за трудностей измерения градиента давления полученное из экспериментов значение константы Польгаузена — Грушвица составило менее половины от вычисленного значения, хотя значение  $x (dC_p/dx)$  при отрыве и данном числе Маха было постоянным. Поэтому если воспользоваться этой постоянной и подставить (66) в (64), то будет получен коэффициент давления при отрыве

$$C_{rS} = 2 \sqrt{\frac{(c_{fc})_S}{\beta}} \sqrt{1 - \frac{0,3(H_c + l - M_0^2)}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)rM_0^2}}, \quad (68)$$

где  $l$  — длина области отрыва с постоянным давлением. Так как для  $\gamma = 1,4$  и  $Pr = 0,72$ ,

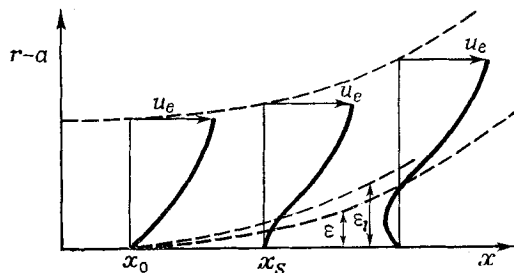
$$H_c = H_b (1 + 0,258M_0^2) \quad [44] \quad (69)$$

где  $H = \delta^*/\theta$  — формпараметр пограничного слоя и индекс  $b$  относится к решению Блазиуса, то при  $M_0 = 2$  формула (68) принимает следующий вид:

$$C_{pS} = 1,29 \sqrt{\frac{(c_{fc})_S}{\beta}}. \quad (70)$$

4.3.1. Отрыв потока на тонкой игле перед тупым телом при гиперзвуковых скоростях

Эта проблема будет рассматриваться в гл. IX. Однако здесь будет кратко воспроизведен расчет Вуда [44], основанный на использовании описанного выше расчета Хаккинаена.



Ф и г. 29. Профили скорости в области взаимодействия [44].

Используя уравнение Навье — Стокса в цилиндрических координатах, имеем

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (71)$$

а также  $\partial p / \partial r = 0$ . Предполагая, что положительный градиент давления действует только в тонком подслое около стенки, в котором можно пренебречь инерционными членами, и что коэффициент вязкости  $\mu_w$  в подслое не зависит от температуры стенки, получим уравнение (71) в виде

$$\frac{dp}{dx} = \mu_w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (72)$$

Для дальнейшего анализа используем профили скорости в области взаимодействия, изображенные на фиг. 29, где  $a$  — радиус иглы,  $r$  — переменный радиус. Вниз по потоку вдоль иглы положительный градиент давления способствует увеличению толщины подслоя. Таким образом, невозмущенный профиль скорости, не искажаясь, приподнимается на высоту  $\epsilon$ .

В этой области

$$\frac{dp}{dx} \int_a^{a+\epsilon} r dr = \mu_w \int_a^{a+\epsilon} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} dr + \mu_w \int_a^{a+\epsilon} \frac{\partial u}{\partial r} dr. \quad (73)$$

Интегрируя по частям с использованием соотношения  $\mu (du/\partial r) = \tau$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2a\varepsilon + \varepsilon^2) = \tau_\varepsilon (a + \varepsilon) - \tau_w a, \quad (74)$$

где индекс  $w$  относится к условиям на стенке, а  $\varepsilon$  — к условиям на высоте  $\varepsilon$  от стенки.

Предполагая, что величина  $\varepsilon$  пренебрежимо мала по сравнению с радиусом иглы  $a$ , получим

$$\varepsilon \frac{dp}{dx} = \tau_\varepsilon - \tau_w. \quad (75)$$

Это уравнение аналогично уравнению (58). Вуд установил в общем виде связь между утолщением подслоя и соответствующим приращением давления вследствие отклонения потенциального течения

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \operatorname{tg} \varphi (x) = f \{M_{e_0}, C_p(x)\}, \quad (76)$$

где  $M_{e_0}$  — число Маха вне пограничного слоя непосредственно перед областью взаимодействия в точке  $x_0$ . Для малого отклонения  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$  и

$$f \{M_{e_0}, C_p(x)\} = \frac{1}{2} C_p(x) \sqrt{M_{e_0}^2 - 1}, \quad (77)$$

и так как, согласно ньютоновской теории гиперзвуковых течений, при малом  $\varphi$

$$C_p(x) = 2\varphi^2(x),$$

то

$$f \{M_{e_0}, C_p(x)\} = \sqrt{\frac{C_p(x)}{2}}.$$

Для гиперзвукового потока с использованием ньютоновской теории получаем

$$C_{pS} \propto (V\sqrt{2} c_{f_0})^{2/3},$$

где

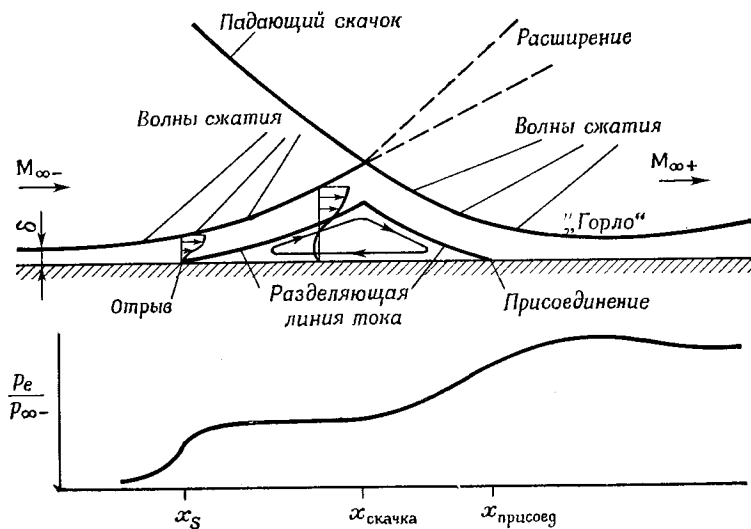
$$c_{f_0} = 2 \int_0^{C_{pS}} f dC_p.$$

#### 4.4. МЕТОД ЛИЗА И РИВЗА

Лиз и Ривз [45] недавно разработали метод расчета взаимодействия скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем, который применим к области от начала взаимодействия до присоединения потока, а также к течениям в донной области и в следе.



В этом методе используется первый момент количества движения, кроме обычного интеграла количества движения, который называется также нулевым моментом; профили скорости и энтальпии характеризуются единственным независимым параметром, неявно связанным с местным градиентом статического давления. Термин «докритический» используется в этом методе в рамках



Ф и г. 30. Схематическое представление взаимодействия скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем [49].

теории смещения Крокко — Лиза [26] для адиабатического ламинарного пограничного слоя, и «сверхкритический» — для адиабатического турбулентного пограничного слоя.

В методе Лиза и Ривза рассматривается начинающееся выше по потоку взаимодействие скачка, в результате которого пограничный слой переходит в докритическое состояние на расстоянии нескольких своих толщин, а интенсивность скачка определяется по резкому изменению параметров, определяемых тремя основными уравнениями процесса взаимодействия. Так как пограничный слой становится сверхкритическим при некотором значении отношения энтальпии на поверхности к энтальпии во внешнем потоке, эта теория не обеспечивает непрерывного подхода к области отрыва на охлаждаемой поверхности плоской пластины. Поток со сверхкритическими условиями может существовать также в пограничном слое далеко за областью взаимодействия, когда он проходит через «горло» (фиг. 30) в области присоединения. Показано, что профили скорости обратного течения по Стюартсону [46] и их

аналоги для потоков с теплопередачей Коэна — Решетко [47] дают качественно правильные результаты в отличие от профилей, выраженных полиномами. Результаты Лиза — Ривза хорошо совпадают с экспериментальными данными Чепмена и др. [13], Хаккинена и др. [12], а также Стеррета и Эмери [18].

В их методе предполагалось, что приближения пограничного слоя справедливы во всей области вязкого течения. Используемая при этом схема течения изображена на фиг. 30.

Ограничимся здесь лишь некоторыми замечаниями, так как взаимодействие скачка с пограничным слоем, изображенное на фиг. 30, уже было описано в гл. I и VI.

Так как дозвуковая часть вязкого слоя не способна выдержать внезапное повышение давления, падающий скачок отражается в виде веера волн разрежения, который компенсирует повышение давления в скачке уплотнения. В результате такого отражения течение на внешней границе вязкого слоя отклоняется в направлении поверхности пластины и по мере поворота вязкого слоя давление повышается, а поток замедляется. За областью присоединения над разделяющей линией тока формируется новый пограничный слой, который по достижении сечения с минимумом толщины («горла») переходит в состояние, соответствующее слабому сверхзвуковому вязкому взаимодействию при новом числе Маха. В адиабатическом случае вязкое течение считается полностью докритическим в том случае, когда приращение давления, вызванное падающим скачком, плавно передается вверх по потоку до сечения с «начальным» течением на пластине, и сверхкритическим, если оно реагирует на повышение давления внизу по потоку только через внезапный скачкообразный переход в докритическое состояние, хотя за этим скачком течение плавное. Следует заметить, что при взаимодействии с внешним невязким сверхзвуковым течением в докритическом пограничном слое может появиться свой положительный градиент давления в направлении потока. Исследуя первый момент количества движения, можно избежать полуэмпирических предположений в расчете Крокко — Лиза [26].

#### *4.4.1. Профили скорости и энтальпии*

При выборе профиля скорости в соответствии с методом Тани [48], который классифицировал профили скорости с помощью одного независимого параметра  $a(x)$ , пропорционального производной скорости на поверхности, получаются удовлетворительные результаты вверх по потоку от точки отрыва, но физически нереальный максимум статического давления за точкой отрыва. Ниже по потоку используется более подходящий профиль Стюартсона для возвратного течения [46]. Кроме того, чтобы гарантировать правильность формы профиля полной энтальпии и направления

потока тепла через всю зону взаимодействия, включая присоединение, с помощью решений Коэна — Решетко [47], аналогичных решению Стюартсона [46], устанавливается связь между параметром  $a(X)$  профиля скорости и значением функции полной энтальпии  $S = (h_s/h_{se}) - 1$  на стенке ( $h_s$  — полная энтальпия, а  $e$  соответствует внешнему невязкому течению). Если однопараметрического семейства профилей скорости недостаточно, то можно обратиться к методу Вигардта [49], в котором сохраняется краевое условие для  $\partial^2 u / \partial y^2$  на поверхности и используются нулевой и первый моменты количества движения. Тогда параметры для выбора профилей имеют вид.

Для *присоединенного течения*

$$a(X) = \left. \frac{\partial (U/U_e)}{\partial (Y/\delta_i)} \right|_{Y=0} \quad \text{при} \quad 0 \leq a(X) \leq 1,58, \quad (78)$$

где  $U$ ,  $X$ ,  $Y$  — преобразованные по Стюартсону скорость и координаты, определяемые в виде

$$U = (a_\infty/a_e) u, \quad dX = (p_e a_e / p_\infty a_\infty) dx$$

и

$$dY = (a_e \rho / a_\infty \rho_\infty) dy.$$

Индекс  $i$  относится к преобразованным величинам.

Для *отрывного течения*

$$a(X) = [Y/\delta_i]_{U=0} \quad \text{при} \quad 0 \leq a(X) \leq 1, \quad (79)$$

где  $a(X)$  — геометрическое место точек, в которых скорость равна нулю, разграничивающее области основного и возвратного течений. Для заданного  $S_w$  (индекс  $w$  относится к значению на стенке) все требуемые интегральные функции, фигурирующие в двухмоментном уравнении для  $a(X)$  и  $\theta(X)$  или  $\delta^*(X)$ , могут быть выражены через  $a(X)$ . К двум уравнениям количества движения могут быть добавлены профиль полной энтальпии и уравнение энергии в интегральной форме.

#### 4.4.2. Дифференциальные уравнения и особенности их решения

Интегрируя уравнение количества движения в переменных Стюартсона по толщине пограничного слоя и используя уравнение неразрывности [49, 50], получаем

$$M_e (d\theta_i^2/dX) + 2 \{2 + (\delta_i^*/\theta_i) + (e/\theta_i)\} \theta_i^2 (dM_e/dX) = 2 (v_\infty/a_\infty) (\theta_i/U_e) (\partial U/\partial Y)_{Y=0}. \quad (80)$$

Аналогично, умножая уравнение количества движения на  $U$  и интегрируя [49, 50], получаем

$$\begin{aligned} M_e (d\theta_i^*/dX) + 2 \{3 + 2E/\theta_i\} \theta_i^* (dM_e/dX) = \\ = 4 (v_\infty/a_\infty) (\theta_i^*/U_e^2) \int_0^{\delta_i} (\partial U/\partial Y)^2 dY, \end{aligned} \quad (81)$$

где

$$\delta_i^* = \int_0^{\delta_i} \{1 - (U/U_e)\} dY, \quad (82a)$$

$$\theta_i = \int_0^{\delta_i} (U/U_e) \{1 - (U/U_e)\} dY, \quad (82б)$$

$$\theta_i^* = \int_0^{\delta_i} (U/U_e) \{1 - (U^2/U_e^2)\} dY, \quad (82в)$$

$$e = \int_0^{\delta_i} S dY, \quad (82г)$$

$$E = \int_0^{\delta_i} (U/U_e) S dY. \quad (82д)$$

Эти уравнения можно переписать в следующей удобной форме:

$$\begin{aligned} H (d\delta_i^*/dX) + \delta_i^* (dH/dX) + (2H + 1) (\delta_i^*/M_e) (dM_e/dX) = \\ = \{v_\infty/(a_\infty M_e \delta_i^*)\} P, \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} J (d\delta_i^*/dX) + \{\delta_i^* (dJ/dH)\} (dH/dX) + (3J + 2S_w T^*) \times \\ \times (\delta_i^*/M_e) (dM_e/dX) = \{v_\infty/(a_\infty M_e \delta_i^*)\} R, \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$\delta_i^* = \delta_i^* + e,$$

$$H = (\theta_i/\delta_i^*), \quad J = (\theta_i^*/\delta_i^*),$$

$$R = (2\delta_i^*/U_e^2) \int_0^{\delta_i} (\partial U/\partial Y)^2 dY, \quad (85)$$

$$P = (\delta_i^*/U_e) (\partial U/\partial Y)_{Y=0},$$

$$T^* = (E/S_w \cdot \delta_i^*).$$

Внешний невязкий поток при вязком взаимодействии такого типа заранее неизвестен, но определяется нормальной составляющей скорости, обусловленной ростом пограничного слоя. Откло-

нение линий тока во внешнем невязком течении при  $y = \delta$  определено в работе [26]

$$\operatorname{tg} \Theta = (v_e/u_e) = (d\delta^*/dx) - \frac{d}{dx} (\lg \rho_e u_e) \int_0^y \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy. \quad (86)$$

Если использовать преобразование Стюартсона, то это уравнение примет вид

$$\left(\frac{1}{m_e}\right) \left\{ \left(1 + m_e\right) / \left(1 + m_\infty\right) \right\} \operatorname{tg} \Theta = \left[ \left\{ \left(1 + m_e\right) / m_e \right\} + \right. \\ \left. + H \right] d\delta_i^*/dX + \delta_i^* (dH/dX) + (f\delta_i^*/M_e) (dM_e/dX),$$

где

$$m = \{(\gamma - 1)/2\} M^2, \\ f = 2H + \{(3\gamma - 1)/(\gamma - 1)\} + \{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)\} \{m_e/(1 + m_e)\} H + \\ + [(M_e^2 - 1)/\{m_e(1 + m_e)\}] Z, \quad (87)$$

$$Z = (1/\delta_i^*) \int_0^{\delta_i} (U/U_e) dY.$$

Так как в общем случае волны сжатия, вызванные утолщением пограничного слоя, стремятся объединиться в ударную волну за пределами пограничного слоя, изоэнтальпическое соотношение Прандтля — Майера между  $M_e$  и  $\Theta$  может служить хорошим приближением. Таким образом,

$$v_{\infty\pm} - v(M_e) = \Theta,$$

где

$$v(M_e) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M_e^2-1} \right) - \operatorname{arctg} \left( \sqrt{M_e^2-1} \right), \quad (88a)$$

$$v_{\infty\pm} = v(M_{\infty\pm}), \quad (88б)$$

а  $\infty^-$  и  $\infty^+$  означают точки на большом расстоянии от скачка соответственно вверх и вниз по потоку.

Если сверхзвуковой — гиперзвуковой параметр подобия  $\sqrt{(M_e^2 - 1) \operatorname{tg} \Theta}$  близок к единице и  $\operatorname{tg} \Theta \approx \Theta$ , уравнения (88a) и 88 б) можно заменить линеаризованным соотношением Прандтля — Майера

$$\Theta = -\frac{\sqrt{M_{\infty\pm}^2 - 1}}{(1 + m_{\infty\pm})} (\varepsilon/M_{\infty\pm}), \quad (88в)$$

где

$$M_e = M_{\infty\pm} + \varepsilon. \quad (88г)$$

Объединяя уравнения (87—88г) с уравнениями (83) и (84), получаем систему трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для трех зависимых переменных  $M(X)$ ,  $\delta_i^*(X)$  и  $H(X)$  или  $a(X)$ . Величины  $H$ ,  $J$ ,  $P$ ,  $R$ ,  $T^*$  и  $Z$  вычисляются как функции от  $a(X)$  и  $S_w$  с помощью профили скорости и энтальпии Коэна — Решетко [47], включая профили, нижняя часть которых аналогична профилям Стюартсона для отрывного и присоединенного течений. Применяя метод, аналогичный методу Твейтса [51], для уравнения количества движения и для аппроксимации кривых, представим эти величины как функции только одного параметра  $a$ . Например, для адиабатического течения ( $S_w = 0$ ).

*Присоединенное течение*

$$\{(0 \leq a \leq 1,58) \text{ (Блазиус)}\},$$

$$a = \left\{ \frac{\partial (U/U_e)}{\partial (Y/\delta_i)} \right\}_{Y=0},$$

$$H = 0,249 + 0,10a - 0,00955a^2,$$

$$J = 0,374 + 0,142a - 0,00422a^2,$$

$$R = 0,847 + 0,151(a - 1,64)^2,$$

$$P = 0,416a, \quad 0 < a \leq 0,781,$$

$$P = 1,30 - 2,535/(a + 1,82), \quad 0,781 \leq a \leq 1,58,$$

$$Z = 0,537a + 1,04,$$

$$E = e = 0.$$

*Отрывное течение*

$$a(X) = (Y/\delta_i)_{U=0} \quad (0 \leq a \leq 0,54),$$

$$H = -0,411a + 0,249,$$

$$J = -0,584a + 0,374,$$

$$R = 1,26 + 10,9(a - 0,017)^2,$$

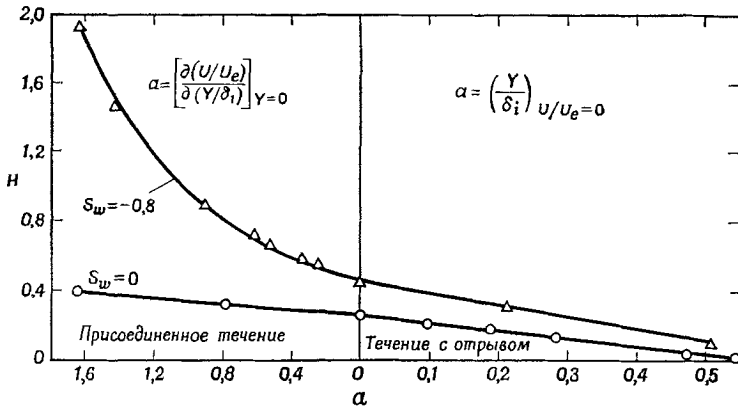
$$P = -1,75a, \quad 0 \leq a \leq 0,343,$$

$$P = 10,75(a - 0,45)^2 - 0,723, \quad a > 0,343,$$

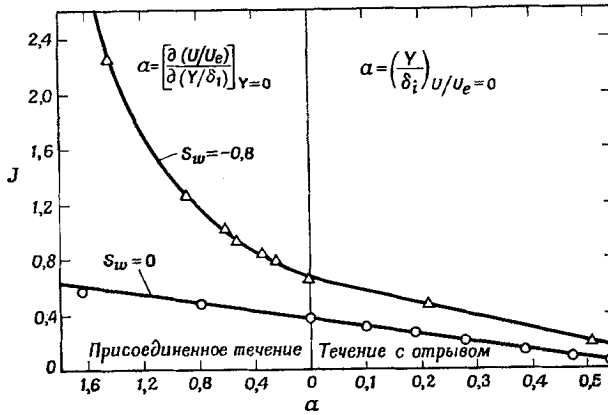
$$Z = -1,42a + 1,04.$$

Как показано на фиг. 31—35, эти функции дают хорошее совпадение со значениями, полученными непосредственно из автомодельных решений.

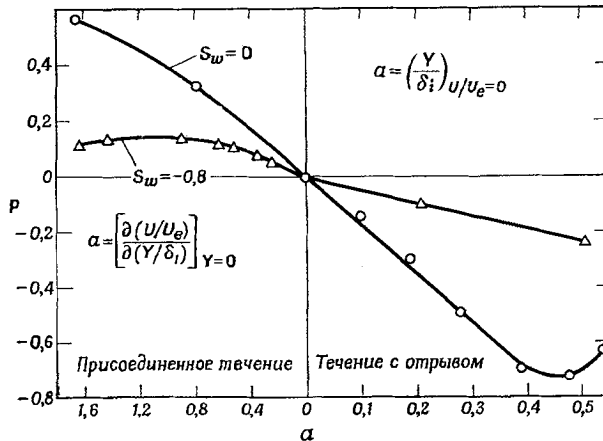
Для сильно охлажденной стенки ( $S_w = -0,8$ ) значения  $H$ ,  $J$ ,  $P$ ,  $R$ ,  $Z$  и  $T^*$  также показаны на фиг. 31—36. Числовые значения этих переменных, полученные данным методом, следующие.



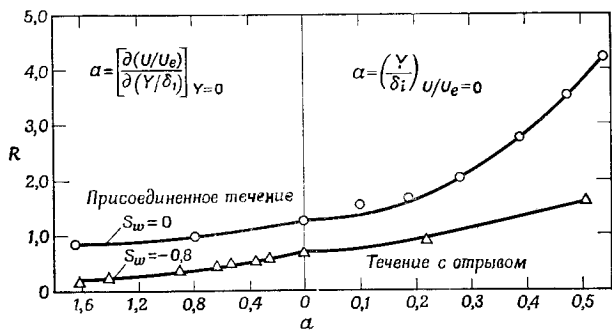
Ф и г. 31. Зависимость  $H$  ( $\alpha$ ), полученная из автомодельных решений [49].



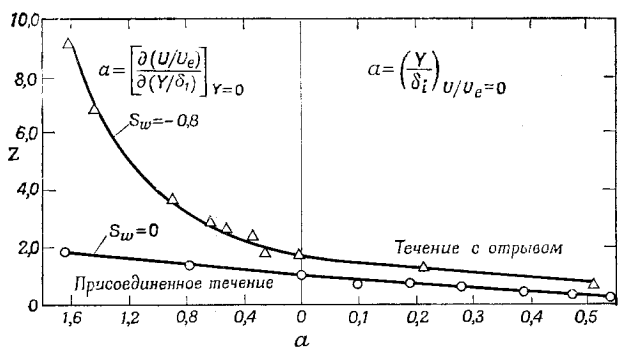
Ф и г. 32. Зависимость  $J$  ( $\alpha$ ), полученная из автомодельных решений [49].



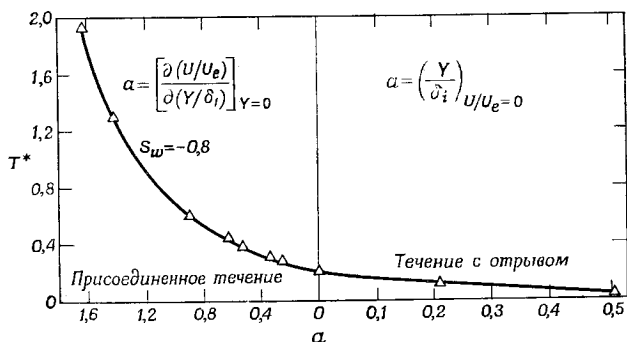
Ф и г. 33. Зависимость  $P$  ( $\alpha$ ), полученная из автомодельных решений [49].



Ф и г. 34. Зависимость  $R$  ( $\alpha$ ), полученная из автомодельных решений [49].



Ф и г. 35. Зависимость  $Z$  ( $\alpha$ ), полученная из автомодельных решений [49].



Ф и г. 36. Зависимость  $T^*$  ( $\alpha$ ), полученная из автомодельных решений [49].



*Присоединенное течение*

$$a = \left[ \frac{\partial (U/U_e)}{\partial (Y/\delta_i)} \right]_{Y=0} \quad (S_w = -0,8),$$

$$H = \frac{1,882}{2,246 - a} - 0,320, \quad J = \frac{2,096}{2,242 - a} - 0,271,$$

$$R = -0,529a + 0,722, \quad 0 \leq a \leq 0,25,$$

$$R = -0,182 + \frac{1,127}{1,21 + a}, \quad 0,25 < a < 1,25,$$

$$R = -0,251a + 0,582, \quad a > 1,25,$$

$$P = 0,222a, \quad 0 \leq a \leq 0,41,$$

$$P = 0,142 - 0,103 (a - 1,112)^2, \quad a > 0,41,$$

$$T^* = \frac{1,286}{2,18 - a} - 0,39,$$

$$Z = 1,75 + 2,24 (a + 0,04)^2, \quad 0 \leq a \leq 1,0,$$

$$Z = 4,09 + 12,19 (a - 0,93)^2, \quad 1,0 < a.$$

*Отрывное течение*

$$(0 \leq a \leq 0,51) \quad (S_w = -0,8),$$

$$a = (Y/\delta_i)_{U=0},$$

$$H = -0,661a + 0,445,$$

$$J = -0,887a + 0,664,$$

$$P = -0,462a,$$

$$R = 0,707 + 2,978 (a + 0,072)^2, \quad 0 \leq a \leq 0,335,$$

$$R = 2,42a + 0,388, \quad 0,335 \leq a,$$

$$T^* = -0,354a + 0,20,$$

$$Z = -0,190a + 1,75.$$

Подробные расчеты влияния теплопередачи будут вскоре опубликованы Лизом и Ривзом.

#### 4.4.3. Расчет распределения давления в области взаимодействия, отрыва и присоединения

Основные дифференциальные уравнения можно записать несколько иначе.

Уравнение неразрывности

$$B(d/dX)(\lg \delta_i^*) + (dH/dX) + f(d/dX)(\lg M_e) = - \left\{ \frac{v_\infty}{a_\infty M_e (\delta_i^*)^2} \right\} h. \quad (89)$$

Уравнение количества движения

$$(d/dX)(\lg \delta_i^*) + (dH/dX) + (2H + 1)(d/dX)(\lg M_e) = \frac{v_\infty}{a_\infty M_\infty (\delta_i^*)^2} P. \quad (90)$$

Уравнение первого момента количества движения

$$J(d/dX)(\lg \delta_i^*) + (dJ/dH)(dH/dX) + (3J + 2S_w T^*)(d/dX)(\lg M_e) = \frac{v_\infty}{a_\infty M_e (\delta_i^*)^2} R, \quad (91)$$

где

$$B = \left\{ H + \left( \frac{1+m_e}{m_e} \right) \right\},$$

$$h = -\tilde{\text{Re}}_{\delta_i^*} \frac{1+m_e}{m_e (1+m_\infty)} \text{tg } \Theta, \quad (92)$$

$$\tilde{\text{Re}}_{\delta_i^*} = \frac{a_\infty M_e \delta_i^*}{v_\infty},$$

если

$$\sqrt{M_e^2 - 1} \text{tg } \Theta \ll 1 \quad \text{и} \quad \text{tg } \Theta \approx \Theta,$$

$$h = \tilde{\text{Re}}_{\delta_i^*} \frac{1+m_e}{m_e} \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{(1+m_\infty)(1+m_\infty \pm)} (\varepsilon/M_\infty \pm). \quad (92a)$$

Рассматривая эти три уравнения как систему алгебраических уравнений для  $(d\delta_i^*/dX)$ ,  $(dH/dX)$  и  $(dM_e/dX)$ , получим

$$(\delta_i^*/M_e)(dM_e/dX) = (1/\tilde{\text{Re}}_{\delta_i^*}) \{N_1(H_1 M_{e1} h)/\{D(H_1 M_e)\}\}, \quad (93)$$

$$\delta_i^*(dH/dX) = (1/\text{Re}_{\delta_i^*}) \{N_2(H_1 M_{e1} h)/\{D(H_1 M_e)\}\}, \quad (94)$$

$$(d\delta_i^*/dX) = (1/\tilde{\text{Re}}_{\delta_i^*}) \{N_3(H_1 M_{e1} h)/\{D(H_1 M_e)\}\}, \quad (95)$$

где

$$D(H_1 M_e) = \{(1+m_e)/m_e\} \{(3J + 2S_w T^*) - (2H + 1)(dJ/dH)\} + \{(2H + 1) - f\} \{J - H(dJ/dH)\}, \quad (95a)$$

$$N_1(H_1 M_{e1} h) = \{(1+m_e)/m_e\} \{R - P(dJ/dH)\} + \{(P+h)\} \{J - H(dJ/dH)\}, \quad (95b)$$

$$N_2(H_1 M_{e1} h) = \{(1+m_e)/m_e\} \{(3J + 2S_w T^*)P - R(2H + 1)\} + \{(P+h)\} \{H(3J + 2S_w T^*) - fJ\} + \{(RH + Jh)\} \{f - (2H + 1)\}, \quad (95в)$$

$$N_3(H_1 M_{e1} h) = (P+h) \{f(dJ/dH) - (3J + 2S_w T^*)\} - \{(f - (2H + 1))\} \{R + h(dJ/dH)\}. \quad (95г)$$

#### 4.4.4. Взаимодействие скачка уплотнения с докритическим ламинарным пограничным слоем

При исследовании взаимодействия скачка уплотнения с докритическим ламинарным пограничным слоем распределение давления во всей области взаимодействия определяется по параметрам отдельных участков области отрыва.

#### 4.4.5. Область вверх по потоку от отрыва

Зная число Рейнольдса и процесс развития пограничного слоя, можно полностью описать взаимодействие между ламинарным пограничным слоем и внешним сверхзвуковым потоком перед областью отрыва. Если пограничный слой, втекающий в зону взаимодействия, рассматривать как автомодельный пограничный слой Блазиуса, то  $dM_e/d\delta_t^* = 0$ ,  $da/d\delta_t^* = 0$  при  $a \rightarrow a_b$  вдоль интегральной кривой от точки отрыва (где индекс относится к решению Блазиуса). Поэтому  $N_1 \rightarrow 0$  и  $N_2 \rightarrow 0$  в соответствии с уравнениями (93) и (94), но  $N_3 \neq 0$ ,  $D \neq 0$  при  $a \rightarrow a_b$ . Эти условия удовлетворяются, если

$$HR = PJ. \quad (96)$$

Из уравнений (92а), (96), а также

$$h = \{(1 + m_e)/m_e\} \left\{ \frac{P(dJ/dH) - R}{J - H(dJ/dH)} \right\} - P,$$

которое выведено из уравнения (95б), следует

$$\begin{aligned} \epsilon = - (P_b/H_b) \left[ \left\{ \left( \frac{1 + m_{\infty-}}{m_{\infty-}} \right) \right\} + H_b \right] \left\{ \frac{(m_{\infty-})(1 + m_{\infty-})}{\sqrt{M_{\infty-}^2 - 1}} \right\} \times \\ \times \{v_{\infty}/(a_{\infty} \cdot \delta_t^*)\}. \end{aligned} \quad (97)$$

При  $M_{\infty} \gg 1$

$$\epsilon \approx - (1 + H_b) (P_b/H_b) \{v_{\infty}/(a_{\infty} \delta_t^*)\} (m_{\infty}^2/M_{\infty}). \quad (97a)$$

Для численного интегрирования уравнения (93) — (95) переписываются в виде

$$(\delta_t^*/M_e) (dM_e/d\delta_t^*) = (N_1/N_3), \quad (98)$$

$$\delta_t^* (da/d\delta_t^*) = (N_2/N_3) \{1/(dH/da)\}. \quad (99)$$

В точке отрыва удовлетворяются условия  $a = 0$ ,  $\Theta = \Theta_s$  и  $\epsilon = \epsilon_s$  и выбирается пробное значение  $\delta_t^*$ . Уравнения (98) и (99) численно интегрируются методом Рунге — Кутты. Определяются точное значение  $\delta_{t_s}^*$  и соответствующая интегральная кривая для типичной задачи с двумя краевыми условиями  $N_1 = N_2 = 0$  при  $a \rightarrow a_b$ . Точка, в которой  $N_1 = N_2 = 0$  и  $a = a_b$ , считается началом взаимодействия и по значению  $\delta_t^*$  в этой точке определяется

начальное число Рейнольдса. Перед отрывом  $(d\delta_i^*/dM_e) < 0$ ,  $(da/d\delta_i^*) < 0$  и  $(da/dM_e) > 0$ . При соответствующем выборе  $\varepsilon$  или  $h$  при  $a = a_b$  знаки  $N_1$  и  $N_2$  изменяются, так что  $(da/dM_e) > 0$ , но  $(d\delta_i^*/dM_e) > 0$  и  $(da/d\delta_i^*) > 0$ . Эта ветвь представляет взаимодействие веера волн разрежения с ламинарным пограничным слоем, при котором в области взаимодействия  $a > a_b$ . Результаты решения уравнений (98) и (99) переносятся в физическую плоскость при помощи соотношений

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{\delta_{i_0}^*}^{\delta_i^*} \left\{ (1 + m_e)/(1 + m_\infty) \right\}^{(3\gamma-1)/(2(\gamma-1))} (a_\infty/v_\infty) \times \\ \times (M_e \delta_i^*/R) \{ \delta_i (dH/da) (dJ/dH) (da/d\delta_i^*) + J + \\ + (3J + 2S_w T^*) (\delta_i^*/M_e) (dM_e/d\delta_i^*) \} d\delta_i^*. \quad (100)$$

#### 4.4.6. Область между точками отрыва потока и падения скачка

Между точками отрыва и присоединения потока  $a = (Y/\delta_i)_{U=0}$ . Так как при отрыве производная  $da/dX$  в уравнении (94) всегда положительна и ограничена по величине, линия нулевых значений скорости отходит под конечным углом от поверхности. Для течения, соответствующего нижней части профиля Стюартсона,  $[\{(d/da) (Y/\delta_i)\}_{\psi=0}]_{a \rightarrow 0} = \text{const}$ , поэтому разделяющая линия тока также отходит под конечным углом от поверхности. Ниже по потоку за отрывом уравнения (98) и (99) решаются при условиях отрыва:  $a = 0$ ,  $\delta_i^* = (\delta_i^*)_S$  и  $\Theta = \Theta_S$ , которые находятся из решения уравнений для области выше по потоку.

#### 4.4.7. Область присоединения (за точкой падения скачка)

В точке падения скачка число  $M_e$  непрерывно и

$$\Theta_2 = v_{\infty+} + \Theta_1 - v_{\infty-}$$

В случае линеаризации

$$\varepsilon_2 = M_{\infty-} + \varepsilon_1 - M_{\infty+},$$

где индексы 1 и 2 относятся к условиям перед скачком и за ним соответственно. Величина  $a$  также непрерывна и ее значение известно, поэтому  $M_{\infty+}$  или  $\Theta_2$  (или  $\varepsilon_2$ ) используется как параметр, по которому производятся итерации при интегрировании вниз по потоку. Точная интегральная кривая определяется из условия  $N_1 \rightarrow 0$ ,  $N_2 \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow a_b$  и  $M_{\infty-} \rightarrow M_{\infty+}$ . За точкой падения скачка  $a$ ,  $M_e$  и  $\delta_i^*$  уменьшаются в направлении к точке присоединения.

Ниже по потоку за точкой присоединения

$$a = \left[ \partial (U/U_e) / \left\{ \partial (Y/\delta_i) \right\} \right]_{Y=0}$$

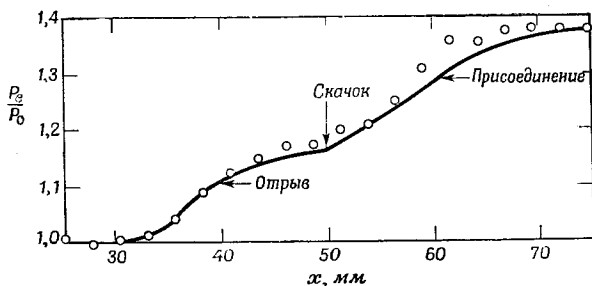
и

$$da/dX > 0.$$

В некоторой точке после присоединения  $N_3 = 0$  и  $(d\delta_i^*/dX) = 0$ , но  $\Theta \neq 0$  и поток проходит через «горло» в плоскости  $\delta_i^* - X$ , причем  $(d\delta_i^*/dX) > 0$  за этой точкой. В окрестности присоединения  $(dM_e/dX) < 0$ , так что  $(dM_e/da) < 0$ .

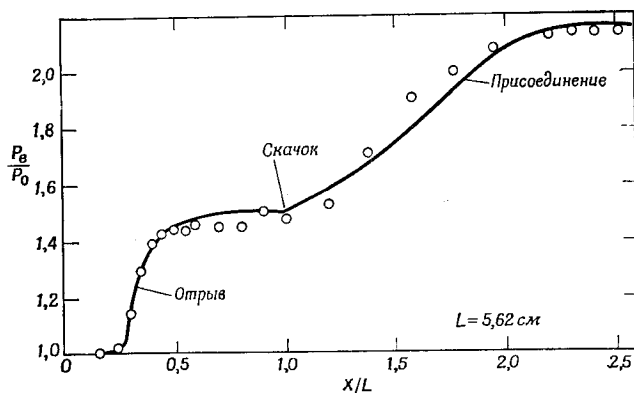
#### 4.4.8. Распределение давления во всей области взаимодействия

Как это видно из фиг. 37 и 38, распределение давления, определенное по методу Лиза — Ривза, хорошо согласуется с экспериментальными данными [12, 13].



Ф и г. 37. Экспериментальное и расчетное распределения давления при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем,  $M_\infty = 2,0$ ,  $Re_{x_0} = 1,9 \cdot 10^5$  [49].

○ экспериментальные данные Хаккинена и др. [12]; ——— теория [49].



Ф и г. 38. Экспериментальное и расчетное распределения давления при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем,  $M_\infty = 2,45$ ,  $Re_{x_0} = 1,08 \cdot 10^4$  [49].

○ экспериментальные данные Чепмена и др. [13]; ——— теория [49].

## ИИТЕПАТҮПА

1. Weise A., The Separation of Flow due to Compressibility Shock, NACA TM 1, 52, 1947.
2. Pearcey H. H., Shock-induced Separation and its Prevention, Boundary Layer and Flow Control, ed. by C. V. Lachmann, Vol. 2, Pergamon Press, N. Y., 1961, pp. 1166—1344.
3. Holder D. W., Gadd G. E., The Interaction between Shock Wave and Boundary Layers and its Relation to Base Pressure in Supersonic Flow, Boundary Layer Effects in Aerodynamics, National Physical Laboratory, Philosophical Library, N. Y., 1957.
4. Fraser R. P., Eisenklam P., Wilkie D., Investigation of Supersonic Flow Separation in Nozzles, *J. Mech. Engng Sci.*, 1, № 3, pp. 267—279 (1959).
5. Kaufman L. G., Oman R. A., Hartofilis S. A., Meckler L. A., Evans W. J., Weiss D., A Review of Hypersonic Flow Separation and Control Characteristics, ASD TDR 62-168, Flight Control Laboratory, Aeronautical Systems Division, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, March 1962.
6. Howarth L., Concerning the Effect of Compressibility on Laminar Boundary Layers and their Separation, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, 194, A 1036, pp. 16—42 (July 28, 1948).
7. Cope W. F., Hartree D. R., The Laminar Boundary Layer in Compressible Flow, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A, 241, pp. 1—68 (June 22, 1948).
8. Loftin L. K., Wilson H. B., A Rapid Method for Estimating the Separation Point of a Compressible Laminar Boundary Layer, NACA TN 2892, Feb. 1953.
9. von Doenhoff A. E., A Method of Rapidly Estimating the Position of the Laminar Separation Point, NACA TN 671, 1938.
10. Stewartson K., Correlated Incompressible and Compressible Boundary Layers, *Proc. Roy. Soc. London*, A, 200, pp. 84—100 (June 30, 1949).
11. Morduchow M., Clarke J. H., Method for Calculations of Compressible Laminar Boundary-layer Characteristics in Axial Pressure Gradient with Zero Heat Transfer, NACA TN 2784, Sept. 1952.
12. Hakkinen R. J., Greber I., Trilling L., Abarbanel S. S., The Interaction of an Oblique Shock Wave with a Laminar Boundary Layer, NASA Memo. 2-18-59W, March 1959.
13. Chapman D. R., Kuehn M., Larson K., Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Stream with Emphasis on the Effect of Transition, NACA Rept 1356, 1958.
14. Gadd G. E., Interaction between Wholly Laminar or Wholly Turbulent Boundary Layers and Shock Waves Strong Enough to Cause Separation, *J. Aeronaut. Sci.*, 20, № 11, (Nov. 1953).
15. Gadd G. E., A Theoretical Investigation of the Effects of Mach Number, Reynolds Number, Wall Temperature and Surface Curvature on Laminar Separation in Supersonic Flow, Rept № FM 2415, British ARC, June 1956.
16. Bogdonoff S. M., Some Experimental Studies of the Separation of Supersonic Turbulent Boundary Layers, paper presented at Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, University of California, Los Angeles, 1955.
17. Love E. S., Pressure Rise Associated with Shock-induced Boundary Layer Separation, NACA TN 3601, Dec. 1955.
18. Sterrett J. R., Emery J. C., Extension of Boundary Layer Separation Criterion to a Mach Number of 6—5 by Utilizing Flat Plates with Forward-facing Steps, NASA TN D-618, Dec. 1960.
19. Nussdorfer T. J., Some Observations of Shock-induced Turbulent Separation on Supersonic Diffusers, NACA RM E51 L26, May 1956.

20. Nitzberg G. E., Crandall S., A Study of Flow Changes Associated with Airfoil Section Drag Rise at Supercritical Speeds, NACA TN 1813, 1949.
21. Gadd G. E., Interactions between Normal Shock Waves and Turbulent Boundary Layers, R & M 3262, ARC, 1962.
22. Thwaites B. (ed.), Incompressible Aerodynamics, Ch. 2, Oxford University Press, 1960 (Ch. 2 is based on material submitted by D. A. Spence).
23. Stratford B. S., The Prediction of Separation of the Turbulent Boundary Layer, *J. Fluid Mech.*, 5, p. 1 (1959).
24. Seddon J., The Flow Produced by Interaction of a Turbulent Boundary Layer with a Normal Shock Wave of Strength Sufficient to Cause Separation, paper presented at the AGARD Boundary-layer Meeting in London in April 1960.
25. Gadd G. E., A Theoretical Investigation of Laminar Separation in Supersonic Flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 24, p. 759 (1957).
26. Crocco L., Lees L., A Mixing Theory for the Interaction between Dissipative Flows and Nearly Isentropic Streams, *J. Aeronaut. Sci.*, 19, p. 649 (1952).
27. Bray K. N. C., Gadd G. E., Woodger M., Some Calculations by the Crocco-Lees and other Methods of Interaction between Shock Waves and Laminar Boundary Layers, including Effects of Heat Transfer and Suction, ARC, Rept 21834, F. M. 2937, 1960.
28. Curle N., The Effects of Heat Transfer of Laminar Boundary-layer Separation in Supersonic Flow, ARC Rept 21986, 1960.
29. Kuehn D. M., Experimental Investigation of the Pressure Rise Required for the Incipient Separation of Turbulent Boundary Layers in Two-dimensional Supersonic Flow, NASA Memo. 1-21-59A, Feb. 1959.
30. Holder D. W., Gadd G. E., The Interaction between Shock Waves and Boundary Layers and its Relation to Base Pressure in Supersonic Flow, Proceedings of the Symposium on Boundary Layer Effects in Aerodynamics, National Physical Laboratory, 1955.
31. Schuh H., On Determining Turbulent Boundary Layer Separation on Incompressible and Compressible Flow., *J. Aeronaut. Sci.*, 22, p. 343 (1955).
32. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, из-во «Наука», 1969.
33. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоуарта Л., ИЛ, 1955.
34. Greber I., Interaction of Oblique Shock-waves with Laminar Boundary Layers, Fluid Dynamics Research Group, MIT Tech. Rept. 59-2, 1959.
35. Lighthill M. J., On Boundary Layers and Upstream Influence, II. Supersonic Flows without Separation, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, 247, pp. 478-507 (1953).
36. Müller E. A., Theoretische Untersuchungen über die Wechselwirkung zwischen einem einfallenden schwachen Verdichtungsstoss und der laminaren Grenzschicht in einer Überschallströmung, 50 Jahre Grenzschichtforschung, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1955, pp. 343-363.
37. Lees L., Interaction between the Laminar Boundary Layer Over a Plane Surface and an Incident Oblique Shock Wave, Rept № 143, Princeton University, Aero. Engng Lab., Jan. 1949.
38. Crocco L., Considerations on the Shock Boundary Layer Interaction, Proceedings of the Conference on High-speed Aeronautics, Polytechnic Institute, Brooklyn, N. Y., Jan. 1955 (published by Polytechnic Institute of Brooklyn, 1950, ed. by Ferri A., Hoff, N. J., Libby, P. A.).
39. Schubaer G. B., Klebanoff P. S., Investigation of Separation of Turbulent Boundary Layer, NACA Rept 1030, 1951.
40. Clauser F. H., Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, № 2 (Feb. 1954).

41. Donaldson C. du P., Lange R. H., Study of the Pressure Rise Across Shock Waves Required to Separate Laminar and Turbulent Boundary Layers, NACA TN 2770, Sept. 1952.
42. Stewartson K., On the Interaction between Shock Waves and Boundary Layers, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47, Pt. 3, pp. 545—553 (July 1951).
43. Chapman D. R., Rubesin M. W., Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer with Arbitrary Distribution of Surface Temperature, *J. Aeronaut. Sci.*, 16, № 9, pp. 547—565 (Sept. 1949).
44. Wood C. J., A Study of Hypersonic Separated Flow, Ph. D thesis, University of London, Oct. 1964.
45. Lees L., Reeves B. L., Supersonic Separated and Reattaching Laminar Flows, I. General Theory and Application to Adiabatic Boundary Layer-Shock Wave Interaction AIAA Preprint № 64-4, presented at Aerospace Sciences Meeting, Jan. 20—22, 1964, N. Y.
46. Stewartson K., Further Solutions of the Falkner-Skan Equation, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 50, Part 3, pp. 454—465 (July 1954).
47. Cohen C. B., Reshotko E., Similar Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer with Heat Transfer and Pressure Gradient, NACA Rept 1293, 1956.
48. Тани И., On the Approximate Solution of the Laminar Boundary Layer Equations, *J. Aerospace Sci.*, 21, № 7, pp. 487—504 (July 1954).
49. Lees L., Reeves B. L., Some Remarks on Integral Moment Methods for Laminar Boundary Layers with Application to Separation and Reattachment, GALCIT Rept № 1, Dec. 1961, AFOSR Rept № 1920; см. также Лпз, Рпвз, Сверхзвуковые отрывные и присоединяющиеся течения, ч. 1, Общая теория и применение ее для анализа взаимодействия скачка уплотнения с адиабатическим пограничным слоем, *Ракетная техника и космонавтика*, № 11 (1964).
50. Savage S. G. B., The Effect of Heat Transfer on Separation of Laminar Compressible Boundary Layers, GALCIT, Separated Flows Research Project, Rept № 2, June 1962.
51. Thwaites B., Approximate Calculation of the Laminar Boundary Layer, *Aero Quart.*, 1, pp. 245—280 (Nov. 1949).

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- А р е н с, Отрыв потока в профилированных соплах вследствие перерасширения, *Ракетная техника и космонавтика*, № 8 (1963).
- А р е н с, С п и г л е р, Отрыв потока в перерасширенных ракетных соплах с коническим сверхзвуковым участком при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем, *Ракетная техника и космонавтика*, № 3 (1963).
- В а р т з Д. Р., An Approximate Solution of Compressible Turbulent Boundary-layer Development And Convective Heat Transfer in Convergent-Divergent Nozzles, the American Society of Mechanical Engineers, N. Y., Paper 54-A-153, Nov. 28—Dec. 3, 1954.
- В о г д о н о ф ф С. М., К е п л е р С. Е., Separation of a Supersonic Turbulent Boundary Layer, *J. Aeronaut. Sci.*, 22, № 6 (June 1955).
- В р и н и ч П. Ф., Blunt Body Separation at Supersonic Speeds., *J. Aeronaut. Sci.*, 25, № 5 (May 1959).
- С h e n g С. I., Laminar Separated Flow Within Rejoining or Reattaching Boundary Layers, Avco Corp., Research and Advanced Development Division, Wilmington, Mass., Tech. Memo. RAD-TM-64-66, 27 Nov. 1964.

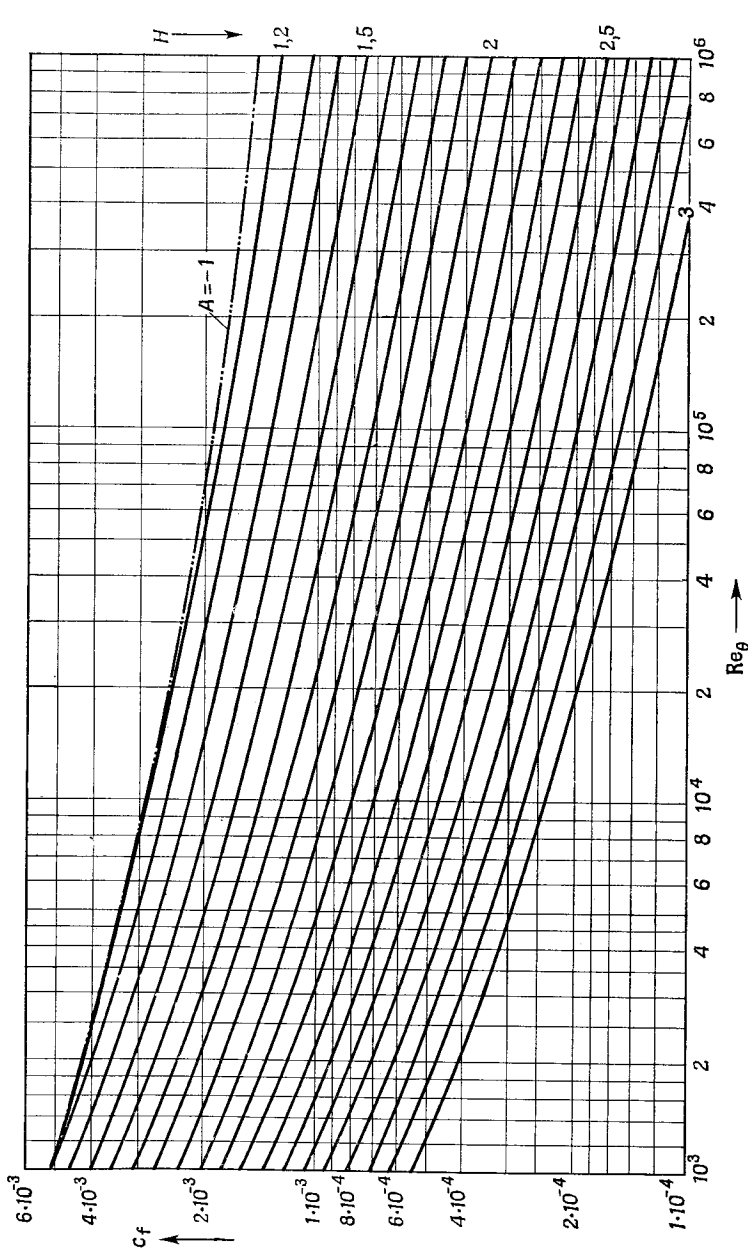


- Donaldson J. C., Myers A. W., Investigation of the Separation and Reattachment of Flow Downstream of Two-dimensional and Rearward-facing Steps at Mach Numbers 2, 5, 3, 5 and 5, von Karman Gas Dynamics Facility, Arnold Engineering Development Center, Arnold Air Force Station Tenn., AEDC-TR-66-106, May 1966.
- Erdos J., Pallone A., Shock-Boundary Layer Interaction and Flow Separation, AVCO Technical Rept RAD-TR-61-23, 15 Aug. 1961.
- Fox J., Surface Pressure and Turbulent Air Flow in Transverse Rectangular Notches, NASA TN D-2501, 1964.
- Gillette W. B., Separation Measurements of Supersonic Turbulent Boundary Layers Over Compression Corners, Defense Research Lab., the University of Texas, Austin, Texas, DRL-543, 21 July 1966.
- Ginoux J. J., Laminar Separation in Supersonic and Hypersonic Flows, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Belgium, Final Rept, Contract AF EOAR 65-11, 1 Nov. 1964 to 31 Oct. 1965.
- Ginoux J. J., Laminar Separation in Supersonic and Hypersonic Flow, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Génèse, Belgium, 1 Oct. 1965 to 30 Sept. 1966, Final Rept, AFOSR 67-0615, 30 Sept. 1966.
- Graham W. J., Vas I. E., An Experimental Investigation of the Separation of a Hypersonic Boundary Layer of a Flat Plate. Part 1: Pressure Distribution and Optical Studies at  $M = 11,7$ , Aeronaut. Res. Labs., ARL 63-74, May 1963.
- Guman W. J., On the Plateau and Peak Pressure of Regions of Pure Laminar and Fully Turbulent Separation in Two-dimensional Supersonic Flow, *J. Aero/Space Sci.*, p. 56 (Jan. 1959).
- Holden M. S., An Analytical Study of Separated Flows Induced By Shock Wave-Boundary Layer Interaction, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc., CAL Rept № A1-1972-A-3, Dec. 1965.
- Holden M., Separated Flow Studies at Hypersonic Speeds. Part I: Separated Flows over Axisymmetric Spiked Bodies, Cornell Aeronautical Laboratory, Contract № Nonr 2653(00), Dec. 1964.
- Holden M., Separated Flow Studies at Hypersonic Speeds. Part II: Two-dimensional Wedge Separated Flow Studies, Contract № Nonr 2653(00), Cornell Aeronautical Laboratory, CAL Rept № AF-1285-A-13(2), Dec. 1964.
- Holder D. W., The Interaction between Shock Waves and Boundary Layers, Presented at the Fifth International Aeronautical Conference, June 20-24, 1955, Preprint № 550.
- Kaufman L. G., III, Pressure Measurements for Mach Five Flows over a Blunt Pyramidal Configuration with Aerodynamic Controls: Part of an Investigation of Hypersonic Flow Separation and Control Characteristics, Air Force Flight Dynamics Lab., Research and Technology Div., Tech. Documentary Rept № RTD-TDR-63-4239, Jan. 1964.
- Nielsen J. N., Lynes L. L., Goodwin F. K., Calculation of Laminar Separation With Free Interaction by the Method of Integral Relations, Part I: Two Dimensional Supersonic Adiabatic Flow, AFFDL-TR-65-107, Oct. 1965.
- Page R. H., Flow Separation in Nozzles, *J. Aerospace Sci.*, 29, № 1, p. 110 (Jan. 1962).
- Pearcey H. H., Stuart C. M., Methods of Boundary-layer Control for Postponing and Alleviating Buffeting and Other Effects of Shock-induced Separation, presented at the IAS National Summer Meeting, Los Angeles, Calif., June 16-19, 1959, SMF Fund Paper № FF-22.
- Ray Kumar A., Estimation of the Critical Pressure Rise for Separation in Two-dimensional Shock Boundary Layer Interaction Problems, National Aeronautical Establishment, NRC, Ottawa, 1962.
- Sacks A. H., Burnell J. A., On the Use of Impact Theory for Slender Configurations Exhibiting Flow Separation, Vidya, Research and Development, Rept № 92, March 31, 1963.

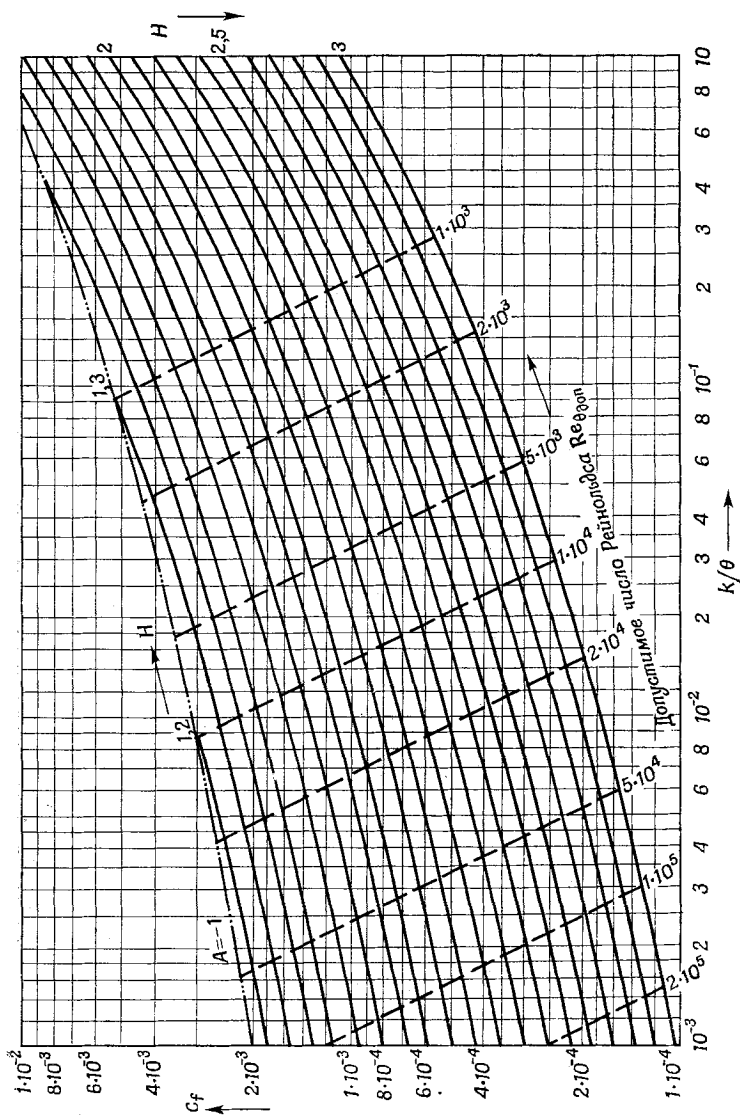
- Scheller K., Bierlein J. A., Some Experiments on Flow Separation in Rocket Nozzles, *J. Am. Rocket. Soc.*, **23**, № 1, pp. 28—32 and 40 (Jan—Feb. 1953).
- Sinnott C. S., Theoretical Prediction of the Transonic Characteristics of Airfoils, *J. Aerospace Sci.*, **29**, № 3, pp. 275—283 (March 1962).
- Tyler R. D., Shapiro A. H., Pressure Rise Required for Separation in Interaction between Turbulent Boundary Layer and Shock Wave, *J. Aeronaut. Sci.*, **20**, № 12, pp. 858—860 (Dec. 1953).

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ \*

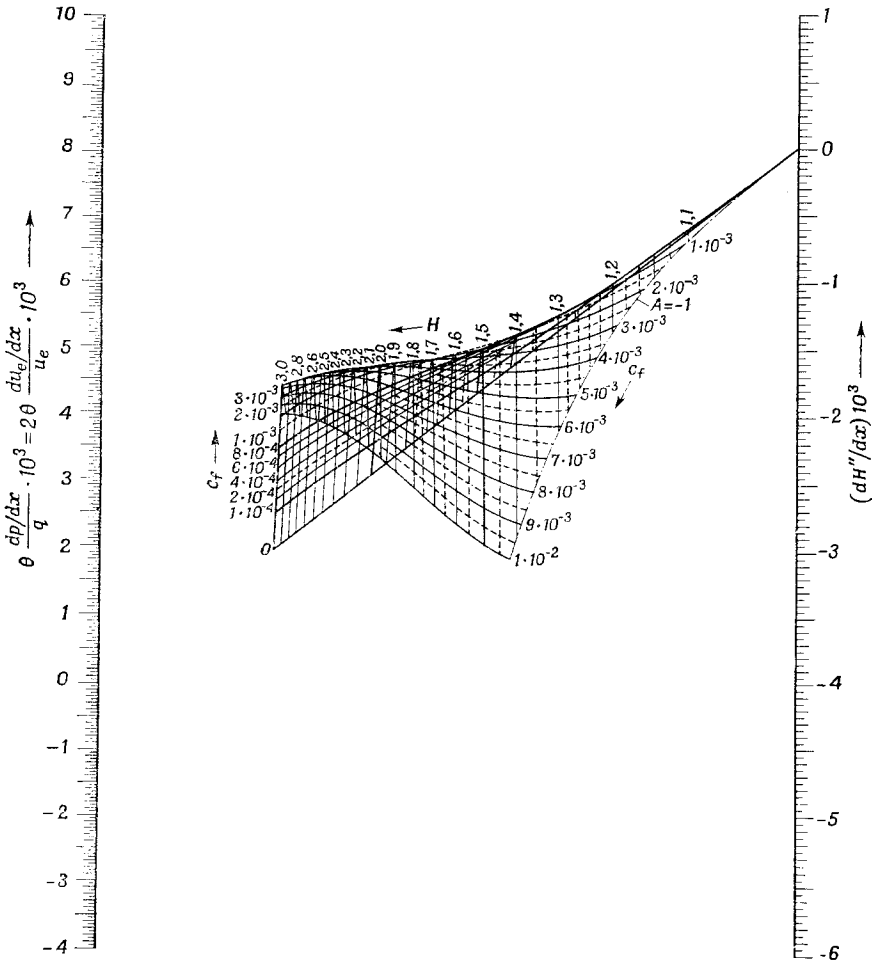


Ф и Г. П.1. Местный коэффициент поверхностного трения на гладкой поверхности  $c_f = 2 [8 \lg Re_\theta^{0.919} - 0.2 + K + 5.75 \lg H]^{-2}$ .  
 $c_f = \tau_w / (1/2 \rho v_c^2)$  — местный коэффициент поверхностного трения;  $\theta$  — толщина [потери импульса];  $Re_\theta = u_e \theta / \nu$  — число Рейнольдса;  
 $H = \delta^* / \theta$  — формпараметр;  $K$  — постоянная профиля,



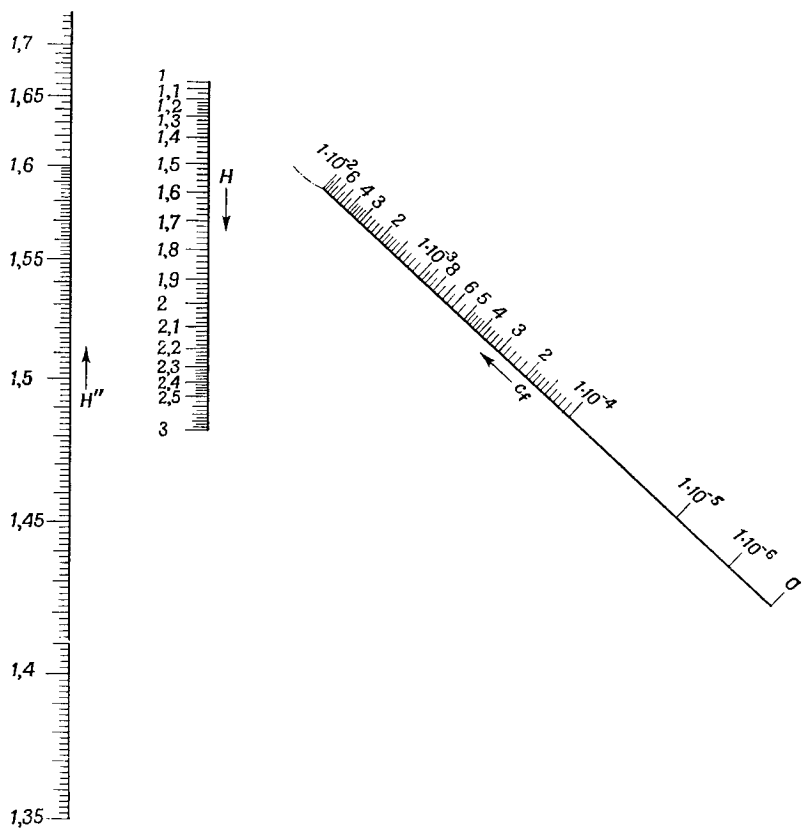
Ф и г. П.2. Местный коэффициент поверхностного трения на шероховатой поверхности  $c_f = 2 \times \times \{5,75 \lg [H (\theta/\bar{k})/\sqrt{c_f/2} - 8,4 - K]^{-2}$ .

$c_f = c_0 / 1/2 \rho u_e^2$  — местный коэффициент поверхностного трения;  $\bar{k}$  — средний размер шероховатости;  $\theta$  — толщина пограничного слоя;  $H = 8 * / \theta$  — формпараметр;  $Re_\theta = u_e \theta / \nu$  — число Рейнольдса;  $K$  — постоянная профиля. При  $Re_\theta < Re_{\theta \text{ доп}}$  поверхность предполагается «гидравлически гладкой».

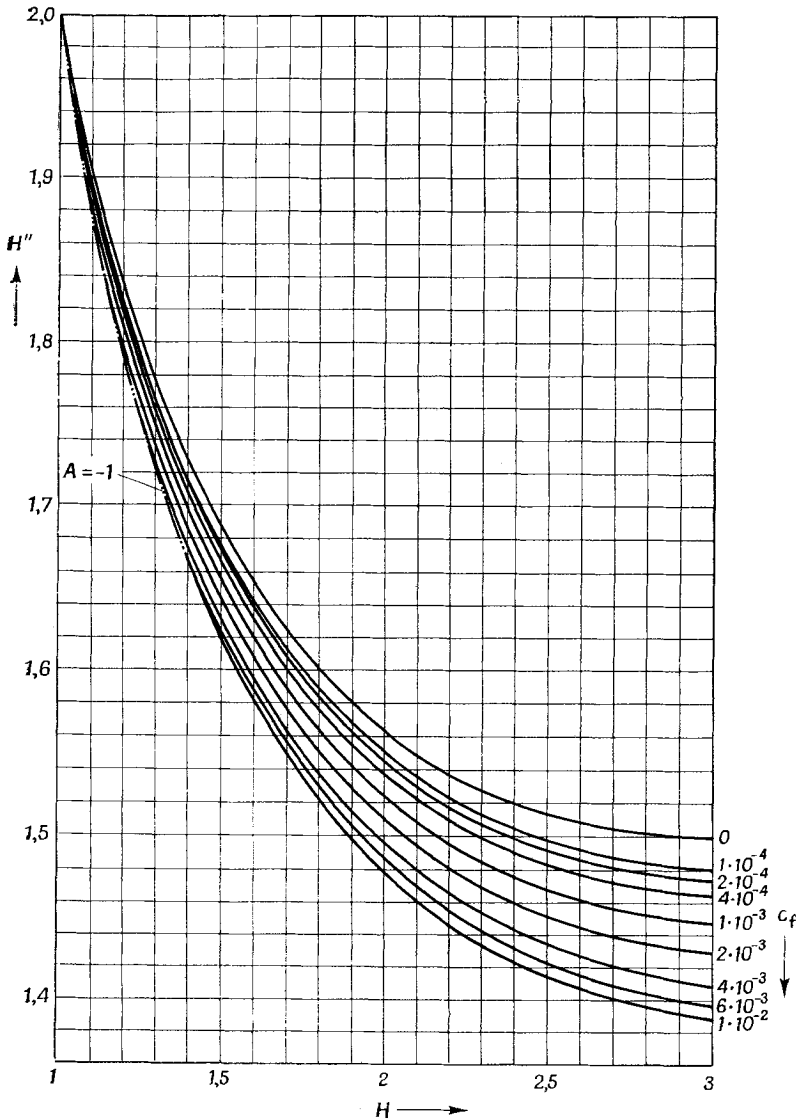


Ф и г. П.3. Номограмма для определения  $\theta (dH''/dx)$ .

$\theta(dH''/dx) = - \left[ (H-1) \frac{1}{2} H'' \theta (dp/dx) / q \right] - c_D - c_f H'' / 2$ ,  $x$ —координата в направлении течения;  $\delta^*$ —толщина вытеснения;  $\theta$ —толщина потери импульса;  $\delta^{***}$ —толщина потерь полной энергии;  $u_e$ —скорость внешнего течения у границы пограничного слоя;  $p$ —статическое давление;  $q = 1/2 \rho u_e^2$ —скоростной напор;  $H = \delta^* / \theta$ ,  $H'' = \delta^{***} / \theta$ —формпараметры;  $c_f$ —коэффициент поверхностного трения;  $c_D$ —коэффициент диссипации.

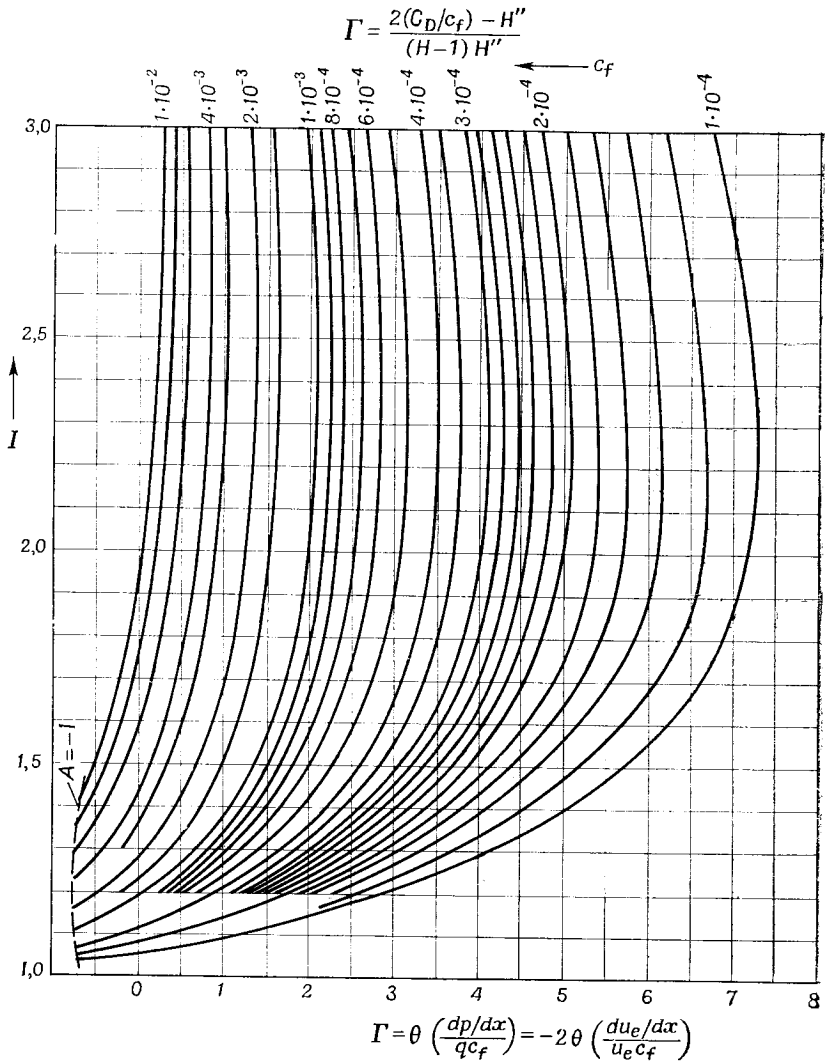


Ф и г. П.4а. Номограмма для определения соотношения между  $H$  и  $H''$ .  
 Приближенное выражение для  $H''$ :  $H'' = 3 - (1 - [c_f/2] I_2 - 1,3 \sqrt{c_f/2}) H$ , где  $H = \delta^*/\theta$ ,  
 $H'' = \delta^{**}/\theta$  — формпараметры;  $c_f$  — местный коэффициент поверхностного трения;  
 $I_2$  — формпараметр.



Ф и г. П.4б. Соотношение между  $H$  и  $H''$ .

Приближенное выражение для  $H''$ :  $H'' = 3 - (1 - [c_f/2] I_2 - 1,3 \sqrt{c_f/2}) H$ , где  $H = \delta^*/\theta$ ,  $H'' = \delta^{***}/\theta$  — формпараметры;  $c_f$  — местный коэффициент поверхностного трения;  $I_2$  — формпараметр.



Ф и г. П. 5. Диаграмма для определения формпараметра  $H$ .

\* Графики и номограммы (фиг. П.1 — П.5) заимствованы из работы Ротта (Rotta J., Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten unter Benutzung des Energiesatzes, *Mitt. Max-Planck-Institut Ström-Forsch.*, Vol. 8, Göttingen, 1953.)



# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие редактора русского издания . . . . .	5
От автора . . . . .	8
Основные обозначения . . . . .	9
<b>Глава I. Введение в проблемы отрыва потока . . . . .</b>	<b>11</b>
1. Механизм отрыва потока . . . . .	13
2. Современные достижения в теории отрыва потока . . . . .	39
3. Механизм отрывного течения . . . . .	46
4. Расчет отрыва потока . . . . .	60
Литература . . . . .	64
<b>Глава II. Отрыв установившегося ламинарного потока жидкости на двумерных поверхностях . . . . .</b>	<b>68</b>
1. Примеры отрыва двумерного установившегося ламинарного потока . . . . .	69
2. Теоретические методы расчета отрыва ламинарного потока . . . . .	72
3. Обсуждение . . . . .	104
Литература . . . . .	106
<b>Глава III. Отрыв установившегося ламинарного потока жидкости на телах вращения и других пространственных телах . . . . .</b>	<b>109</b>
1. Отрыв трехмерного ламинарного потока . . . . .	110
2. Обсуждение . . . . .	112
3. Отрыв ламинарного потока на теле вращения и треугольном крыле . . . . .	116
Литература . . . . .	136
<b>Глава IV. Отрыв турбулентного потока жидкости . . . . .</b>	<b>141</b>
1. Вычисление толщины потери импульса . . . . .	145
2. Критерии отрыва внешнего несжимаемого двумерного турбулентного потока . . . . .	153
3. Отрыв внутреннего потока . . . . .	172
4. Отрыв осесимметричного и трехмерного установившихся потоков жидкости . . . . .	192
Литература . . . . .	203
<b>Глава V. Отрыв неустановившегося потока жидкости . . . . .</b>	<b>210</b>
1. Отрыв пограничного слоя при внезапном возникновении движения . . . . .	214
2. Отрыв осесимметричного неустановившегося потока . . . . .	219
3. Отрыв пограничного слоя при постоянном ускорении . . . . .	221
4. Отрыв ламинарного потока от движущейся стенки . . . . .	223
Литература . . . . .	226
<b>Глава VI. Отрыв потока газа . . . . .</b>	<b>228</b>
1. Определение точки отрыва ламинарного потока газа без взаимодействия . . . . .	231
2. Характер и параметры отрывных течений, вызванных скачком уплотнения, и их влияние вверх и вниз по потоку . . . . .	243
3. Приращение давления при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем . . . . .	253
4. Расчет отрыва, вызванного скачком уплотнения . . . . .	262
Литература . . . . .	288
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>293</b>

# Separation of Flow

---

by Paul K. Chang

---

Professor of Mechanical Engineering  
The Catholic University of America  
Washington, D.C., U.S.A.

---

---

Pergamon Press

Oxford . London . Edinburgh . New York .

Toronto . Sydney .

Paris . Braunschweig

П. ЧЖЕН

# ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

---

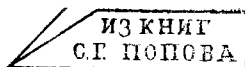
Том первый

---

Перевод с английского  
докт. техн. наук А. И. ГОЛУБИНСКОГО

Под редакцией  
докт. техн. наук Г. И. МАЙКАПАРА

---



Издательство «Мир» · Москва · 1972