

От автора	3
Введение. Небесная механика и ее задачи	5
<b>Глава I. Астрономические координаты и время</b>	<b>10</b>
§ 1. Координаты и время	10
1. Различные системы координат	10
2. Координаты и время	11
3. Эфемеридное время	12
4. Тропический год	14
§ 2. Топоцентрические и геоцентрические системы координат	14
1. Экваториальная топоцентрическая система координат	14
2. Переход к геоцентрической экваториальной системе координат	15
3. Редукция наблюдению за параллаксом	18
4. Вычисление прямоугольных геоцентрических экваториальных координат по элементам орбиты	19
5. Вращающаяся система координат	19
6. Геодезические координаты	21
7. Переход от экваториальной к эклиптической системе координат	21
§ 3. Гелиоцентрические системы координат	22
1. Эклиптическая гелиоцентрическая система координат	22
2. Экваториальная гелиоцентрическая система координат	24
3. Переход от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной геоцентрической системе	25
4. Переход от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной барицентрической системе	26
5. Эклиптические и экваториальные элементы орбиты	28
6. Переход от эклиптической гелиоцентрической системы координат к эклиптической геоцентрической системе	29
§ 4. Влияние прецессии на координаты и элементы орбиты	30
1. Преобразование прямоугольных координат от одной эпохи к другой	30
2. Преобразование элементов от одной эпохи к другой	31
3. Преобразование экваториальных сферических координат от одной эпохи к другой	32
§ 5. Луноцентрические координаты	33
<b>Глава II. Теория движения больших планет</b>	<b>39</b>
§ 7. Метод Лапласа-Ньюкома	39
1. Основная задача небесной механики	39
2. Уравнения движения в цилиндрических координатах	41
3. Постоянная Гаусса	43
4. Уравнения движения в полярных координатах	45

5. Возмущения логарифма радиуса-вектора планеты	46
6. Возмущения долготы планеты	49
7. Возмущения узла и наклона орбиты планеты	51
8. Определение постоянных интегрирования	51
9. Вычисление гелиоцентрической долготы и широты планеты	52
§ 2. Разложение пертурбационной функции в ряд	54
1. Пертурбационная функция	54
2. Коэффициенты Лапласа	57
3. Разложение по степеням взаимного наклона	58
4. Разложение по степеням эксцентриситета	62
5. Вычисление операторов Ньюкома	68
6. Второй член пертурбационной функции	69
§ 3. Теория движения Плутона	70
1. Введение	70
2. Возмущения Плутона от Юпитера	71
3. Улучшение орбиты Плутона	75
§ 4. Теория движения больших планет	81
1. Фундаментальные работы	81
2. Релятивистские поправки в теории движения больших планет	84
<b>Глава III. Теория движения малых планет</b>	<b>89</b>
§ 7. Кольцо малых планет и его структура	89
1. Открытие кольца малых планет	89
2. Структура кольца малых планет	91
3. Орбиты малых планет	94
4. Наиболее интересные группы малых планет	95
5. Служба малых планет	98
6. Искусственные малые планеты	100
7. Малые планеты и небесная механика	100
§ 2. Метод Хилла	101
1. Введение	101
2. Основные уравнения	102
3. Выражения для возмущающих сил	106
4. Зависимость между истинными аномалиями малой планеты и Юпитера в невозмущенном движении	109
5. Интегрирование дифференциальных уравнений для $\delta r$ и $\delta z$	110
6. Вычисление возмущений третьей координаты $z$	111
7. Вычисление возмущений радиуса-вектора	111
8. Вычисление возмущений долготы	112
9. Соотношение между произвольными постоянными интегрирования	112
10. Определение постоянных	114
11. Разложение в ряды Фурье производных пертурбационных функций	116
12. Вычисление возмущений	117
13. Возмущения первого порядка Цереры от Юпитера	118

14. Сравнение теории с наблюдениями	124
§ 3. Применение периодических орбит к изучению движения малых планет	127
1. Периодические орбиты Пуанкаре	127
2. Периодические орбиты Пуанкаре. Продолжение	131
3. Численные методы изучения периодических орбит	137
4. Уравнения в вариациях	138
5. Интегрирование уравнений в вариациях	144
6. Вычисление производных пертурбационной функции	147
7. Соизмеримость $1 : 3$	151
8. Сравнение теории с наблюдениями	155
<b>Глава IV. Теория движения спутников</b>	<b>160</b>
§ 1. Спутники больших планет	160
1. Спутники Марса	160
2. Спутники Юпитера	161
3. Спутники Сатурна	164
4. Кольцо Сатурна	166
5. Спутники Урана	167
6. Спутники Нептуна	168
7. Размеры и массы спутников больших планет	168
§ 2. Возмущения в движении спутниково вызываемые сжатием планеты	168
1. Задача двух тел	168
2. Метод вариация произвольных постоянных	173
3. Разложение пертурбационной функции	177
4. Возмущения первого порядка	180
5. Вековые возмущения первого порядка	185
6. Пример на вычисление возмущений первого порядка	188
7. Примеры вековых возмущений	190
§ 3. движение спутников по орбитам с малыми эксцентриситетами	191
1. Преобразование уравнений Лагранжа	191
2. Преобразование пертурбационной функции	194
3. Возмущения первого порядка	195
4. Вычисление координат спутника	197
§ 4. Истинная аномалия как независимая переменная в уравнениях Лагранжа	198
1. Аномалии как независимые переменные в уравнениях Лагранжа	198
2. Долгота в орбите как независимая переменная в уравнениях Лагранжа	202
3. Пертурбационная функция	203
4. Периодические возмущения	204
5. Вековые возмущения	206
§ 5. Гравитационное поле Земли	207
1. Общее выражение для гравитационного потенциала Земли	207
2. Потенциал Земли, симметричной относительно оси вращения	208
<b>Глава V. Теория движения Луны</b>	<b>211</b>

§ 7. Метод Хилла. Первое приближение	211
1. Земля—Луна как двойная планета	211
2. Дифференциальные уравнения движения	212
3. Вариационная кривая	219
§ 2. Метод Хилла. Второе приближение	224
1. Орбиты, бесконечно близкие к вариационной кривой	224
2. Преобразование уравнений (V.56)	229
3. Уравнение Хилла	239
4. Интегрирование уравнений для $\delta r$ и $\delta s$	244
5. Введение третьей координаты	252
§ 3. Сравнение теории с наблюдениями	255
1. Таблицы Брауна	255
2. Эмпирический член в теории движения Луны	258
§ 4. Устойчивость движения Луны по Хиллу	259
1. Постоянная Якоби	259
2. Поверхность нулевой скорости	261
3. Особые точки поверхности нулевой скорости	262
4. Устойчивость по Хиллу	265
<b>Глава VI. Теория движения комет</b>	<b>268</b>
§ 1. Кометы в Солнечной системе	268
1. Три типа кометных орбит	268
2. Общая характеристика кометных орбит	269
3. Короткопериодические кометы	269
4. Комета Энке—Баклунда	272
5. Комета Отерма 3	276
6. Долгопериодические кометы	278
7. Переход к барицентрической системе координат	279
8. Первоначальные и будущие орбиты долгопериодических комет	282
9. Численные методы вычисления возмущений	282
§ 2. Метод Коуэлла	284
1. Уравнения движения	284
2. Разности и суммы	285
3. Первый метод Коуэлла	287
4. Второй метод Коуэлла	292
5. Второй метод Коуэлла. Продолжение	295
6. Второй метод Коуэлла. Численный пример	298
§ 3. Гравитационные сферы больших планет. Луны и Солнца	306
1. Уравнения движения	306
2. Сфера действия планеты	309
3. Сфера тяготения планеты	311
4. Гравитационная сфера Хилла	311
5. Гравитационные сферы Луны	314
6. Гравитационные сферы Солнца	315
Приложения	317

1. Элементы эллиптической орбиты	318
2. Средние элементы внутренних планет	322
3. Средние элементы Внешних планет	323
4. Спекулирующие элементы внешних планет (1966 г.)	325
5. Средние элементы лунной орбиты	327
6. Основные астрономические постоянные (Де-Ситтер, 1938 г.)	328
7. Основные астрономические постоянные (Клеменс, 1948 г.)	329
8. Астрономические постоянные (МАС, 1964 г.)	330
9. Таблица Малых планет, используемых для определения постоянных каталога слабых звезд	341
10. Таблица малых планет с большим суточным движением	341
11. Элементы орбит троянцев	342
12. Элементы орбит некоторых короткопериодических комет	343
13. Элементы орбит некоторых периодических комет с большими афелийными расстояниями (Q)	345
14. Тригонометрические функции	346
15. Формулы сферической тригонометрии	349
16. Разложение координат эллиптического движения в ряды	353
17. Таблица перевода англо-американских мер в международную систему единиц (СИ)	356
Литература	357

## ОТ АВТОРА

В настоящее время значительно расширился круг лиц, интересующихся вопросами небесной механики. Между тем литература на русском языке по этому разделу астрономии все еще крайне малочисленна. Существующие фундаментальные руководства М. Ф. Субботина „Курс небесной механики“ и Г. Н. Дубошина „Небесная механика“ охватывают очень широкий круг вопросов, содержание которых выходит далеко за пределы университетских программ.

В настоящей книге автор ставит перед собой существенно иные цели. Содержание книги ограничивается рассмотрением шести методов небесной механики, на которых фактически базируются современные теории движения планет, комет и спутников, а именно

1. Метод Лапласа—Ньюкома (глава II).
2. Планетный метод Хилла (глава III).
3. Метод вариации произвольных постоянных (глава IV).
4. Лунный метод Хилла (глава V).
5. Метод периодических орбит (глава III).
6. Метод Коуэлла (глава VI).

Каждый метод подробно рассмотрен во всех деталях, начиная от составления дифференциальных уравнений и кончая сравнением теории с наблюдениями. Для иллюстрации практического применения этих методов привле-

чены теории движения Плутона, Цереры, Гестии, кометы Брукса, искусственного спутника Земли и Луны. При этом автор широко опирается на работы, выполненные за последние годы в Институте теоретической астрономии Академии наук СССР (Ленинград), который является единственным в Советском Союзе специализированным научным учреждением по вопросам небесной механики.

Автор надеется, что настоящая книга будет полезна для студентов университетов и других учебных заведений, где изучается небесная механика, а также для тех лиц, которые по характеру своей научной работы сталкиваются с вопросами небесной механики и хотят иметь краткое, но все-таки достаточно детальное представление об основных задачах и важнейших методах небесной механики.

Первая глава книги носит вводный характер и суммирует необходимые сведения из сферической астрономии. Следующие главы, излагающие методы небесной механики, совершенно независимы друг от друга и могут изучаться в любой последовательности в зависимости от интересов читателя. В приложении собран различный материал справочного характера.

Составляя библиографию, автор сознательно ограничился литературой на русском языке как на наиболее доступной для широкого круга советских читателей. Обратившись к этим изданиям, нетрудно найти ссылки и на зарубежные работы.

---

**НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА И ЕЕ ЗАДАЧИ**

---

Небесная механика — раздел астрономии, изучающий движение тел солнечной системы в гравитационном поле. Движение Солнца, звезд и звездных систем изучает звездная астрономия.

Так как расстояния между телами солнечной системы очень велики по сравнению с размерами самих тел, то все тела солнечной системы можно рассматривать как материальные точки, притягивающие друг друга по закону Ньютона. Поправки, вытекающие из теории относительности, очень малы и учитываются дополнительно. Таким образом, основная задача небесной механики сводится к так называемой задаче  $n$  тел. Так как строгое математическое решение задачи  $n$  тел невозможно, приходится рассматривать отдельно специальные задачи небесной механики, используя при этом различные особенности солнечной системы.

**Задача двух тел.** В первом приближении движение планеты можно рассматривать как происходящее в поле тяготения одного Солнца. В этом случае дифференциальные уравнения движения планеты допускают решение в конечном виде. Постоянные интегрирования определяются из наблюдений (задача определения орбит).

Движение планеты в задаче двух тел определяется законами Кеплера.

1. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.



2. Прямая линия, соединяющая планету с Солнцем, описывает равные площади в равные промежутки времени.

3. Квадраты времен обращений планет вокруг Солнца, умноженные на сумму масс Солнца и планеты, пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца.

Задача трех тел. В 1912 г. финский астроном Сундман (1873—1949) нашел формальное решение этой задачи. Однако ряды Сундмана оказались совершенно бесполезными для практических вычислений. Так, для того чтобы получить значения координат на два месяца вперед, даже с небольшой точностью, необходимо взять число членов ряда  $n > 10^{8 \cdot 10^4}$ , и это для случая, наиболее благоприятного для сходимости, когда все три массы равны между собой.

При некоторых специальных начальных условиях можно получить очень простое решение задачи трех тел (случай Лагранжа), представляющее большой интерес для астрономии. Частным случаем задачи трех тел является так называемая ограниченная задача трех тел, в которой два тела конечной массы движутся вокруг центра инерции по эллиптическим орбитам, а третье тело имеет бесконечно малую массу. Для ограниченной задачи удалось построить разнообразные классы периодических движений (периодические орбиты Пуанкаре, Шварцшильда и др.). Для общего случая задачи трех тел подробно изучены предельные свойства движения при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ , т. е. так называемые финальные движения.

Теория движения больших планет. Дифференциальные уравнения движения  $n$  тел интегрируются в небесной механике приближенно, с помощью разложения в ряды (аналитические методы) или численным интегрированием (численные методы). Если решение ищется в виде рядов, расположенных по степеням малых параметров, то такими параметрами обычно являются массы планет, так как масса даже самой большой планеты солнечной системы — Юпитера — в 1047 раз меньше массы Солнца. Малыми параметрами, по которым ведется разложение в ряды, являются также эксцентриситеты и наклоны орбит больших планет, так как все орбиты лежат почти точно в одной плоскости и мало отличаются от круговых. Члены ряда называются возмущениями или неравенствами и имеют следующую форму:

$$At^m,$$

$$At^m \sin(at + B),$$

$$A \sin(at + B),$$

где  $m = 1, 2, \dots$

Члены первого типа называются *вековыми* возмущениями, второго типа — *смешанными* и третьего типа — *периодическими*. Коэффициенты  $A$  содержат множителем массы планет в различных положительных степенях и потому являются малыми величинами.

Теория движения малых планет. Особенностью малых планет является то обстоятельство, что их массы можно рассматривать как равные нулю. Поэтому движение каждой малой планеты можно изучать отдельно, считая при этом, что движение больших планет нам уже известно.

Теория движения спутников. Эта теория во многих отношениях аналогична теории движения больших планет, однако особенностью задачи является то обстоятельство, что масса планеты, т. е. центрального тела, значительно меньше массы Солнца, притяжение которого существенно сказывается на движении спутников. Для близких к планете спутников нельзя рассматривать планету как материальную точку, а приходится учитывать влияние фигуры планеты на движение спутника.

Теория движения Луны. Движение Луны представляет одну из труднейших задач небесной механики. Особенность этой задачи состоит в том, что Луна является самым близким к Земле небесным телом и потому наблюдения дают координаты Луны с очень большой точностью, которая невозможна для спутников других планет. В теории движения Луны приходится в качестве первого приближения принимать не задачу двух тел (эллиптическое движение), а так называемую вырожденную задачу трех тел (задача Хилла). Решение задачи Хилла дает промежуточную орбиту, более близкую к реальному движению, чем кеплеровский эллипс.

Теория движения комет. Орбиты комет обладают, как правило, очень большими эксцентриситетами и наклонами, поэтому разложение в ряды оказывается невозможным и приходится использовать метод численного интегрирования для того, чтобы шаг за шагом строить

траекторию движения. Другой особенностью комет являются необъяснимые законом Ньютона аномалии в их движениях. В настоящее время удается объяснить эти аномалии реактивными силами, которые возникают в ядре кометы при ее приближении к Солнцу.

Теория фигур планет. Задача заключается в определении формы планет, вызываемой силами тяготения. Эта теория имеет наибольшее значение для Земли и стала особенно актуальной после запуска искусственных спутников Земли, так как особенности их движения определяются прежде всего фигурой Земли.

Теория вращения Земли. Задача состоит в изучении вращательного движения Земли вокруг ее центра тяжести под действием притяжения Солнца и Луны (прецессия и нутация). Эта задача имеет фундаментальное значение в астрономии, так как с Землей связаны основные системы координат, к которым относятся положения других небесных тел. Открытие неравномерности вращения Земли позволило устранить эмпирический член в теории движения Луны и полностью объяснить ее движение гравитационными силами.

Устойчивость солнечной системы. Этот вопрос тесно связан с наличием вековых членов в больших полуосях, эксцентриситетах и наклонах планетных орбит. Методами небесной механики вопрос об устойчивости солнечной системы не может быть полностью решен, так как ряды небесной механики являются расходящимися и пригодны для ограниченного интервала времени. Кроме того, уравнения небесной механики не содержат малые диссипативные факторы (например, непрерывная потеря Солнцем его массы), которые могут играть существенную роль на больших интервалах времени.

Небесная механика и астродинамика. В настоящее время задачи небесной механики приобрели особую актуальность в связи с запуском искусственных спутников Земли и космических ракет. Это объясняется, с одной стороны, тем, что многие задачи астродинамики сводятся к уже изученным задачам небесной механики, а, с другой стороны, расчеты движения космических ракет требуют знания координат и скоростей небесных тел, причем обычно с точностью более высокой, чем та, которая была необходима в классических задачах небесной механики.

**Небесная механика и естествознание.**  
Небесная механика — один из разделов естествознания, т. е. один из разделов науки о природе. Диалектический материализм рассматривает природу, мир как движущуюся материю. Отсюда определение предмета естествознания, данное Энгельсом: предмет естествознания — движущаяся материя. Изучение различных форм движения является основной задачей естествознания. Предмет небесной механики мы можем поэтому определить, наиболее общим образом, как изучение механических форм движения тел солнечной системы.

Известный советский астроном Н. И. Идельсон (1885—1951) писал: „Мы констатируем, например, наличие пустот в кольце малых планет; видим, что Троянцы удержались только в определенных конфигурациях в системе Юпитер—Солнце; почему же одни движения сохранились, другие оказались невозможными и как бы вымерли в течение веков? Вот общая постановка вопроса, которая, несмотря на всю сложность математического аппарата, сближает небесную механику с естественными науками в самом широком смысле этого слова, ставя ей задачу закономерного обоснования существующих типов планетных движений вообще“.

---

## § 1. Координаты и время

**1. Различные системы координат.** В небесной механике для изучения движения естественных и искусственных небесных тел употребляются различные системы координат. Важнейшими координатными системами являются следующие.

1. Топоцентрические координаты (начало координат в пункте наблюдения).

2. Геоцентрические координаты (начало в центре Земли).

3. Гелиоцентрические координаты (начало в центре Солнца).

4. Барицентрические координаты (начало в центре инерции рассматриваемой системы материальных точек).

5. Луноцентрические координаты (начало в центре Луны).

6. Планетоцентрические координаты (начало в центре планеты, например, Юпитера — так называемые иовицентрические координаты).

В зависимости от выбора основной плоскости координатные системы делятся на *экваториальные* (основная координатная плоскость параллельна плоскости земного экватора) и *эклиптические* (основная координатная плоскость параллельна плоскости земной орбиты). Возможны и другие способы выбора основной плоскости. Например, в случае луноцентрических координат за основную плоскость может быть выбрана плоскость лунного экватора или плоскость лунной орбиты.

В небесной механике широко применяются как прямоугольная система координат, так и сферическая система координат.

При решении некоторых задач небесной механики, например в теории движения Луны, используются различные специальные системы координат (цилиндрическая система координат; координаты Якоби, в которых положение точки  $m_i$  относится к центру инерции всех предыдущих точек  $m_1, m_2, \dots, m_{i-1}$ ; различные системы вращающихся координат и т. д.). Удачный выбор системы координат имеет большое значение при постановке и решении задач небесной механики.

**2. Координаты и время.** Так как вследствие лунно-солнечных и планетных возмущений плоскость земного экватора и эклиптики непрерывно меняют свое положение в пространстве, необходимо обязательно указывать эпоху (т. е. момент времени  $t$ ), к которой отнесена принятая система координат.

При решении практических задач небесной механики удобно относить координатную систему к так называемой нормальной эпохе (например, 1925.0, 1950.0, 1975.0). Ось  $x$  обычно направляют в точку весеннего равноденствия, которая является общей точкой как для экваториальной, так и для эклиптической системы координат.

Момент времени (эпоха), к которому мы относим положение системы координат, совершенно произволен и зависит от характера решаемой задачи. Укажем следующие, наиболее удобные на практике, примеры выбора эпохи для экваториальной (геоцентрической или гелиоцентрической) системы координат.

1. Истинный экватор и равноденствие даты (момент  $t$ ).
2. Истинный экватор и равноденствие произвольной эпохи  $t_0$ .
3. Средний экватор и равноденствие даты (момент  $t$ ).
4. Средний экватор и равноденствие произвольной эпохи  $t_0$ .
5. Средний экватор и равноденствие начала года  $T_0$ .
6. Средний экватор и равноденствие нормальной эпохи  $T = 1950.0$  (или 1925.0, или 1975.0 и т. п.).

Первая и третья системы координат, если они отнесены к одному и тому же моменту времени  $t$ , отличаются между собой только малыми нутационными членами. Третья система координат отличается от трех последних систем постоянно увеличивающейся прецессией. Последние три системы отличаются между собой на величину прецессии,

пропорциональную интервалам времени между выбранными эпохами.

Первая и третья системы координат отличаются от четырех других систем тем, что их оси вращаются и потому в этих координатах появляются центробежные и кориолисовы силы. Скорость вращения, однако, настолько мала ( $50''$  в год), что при решении практических задач астрономии силами, зависящими от вращения системы, можно пренебречь.

**3. Эфемеридное время.** Время, употребляемое в дифференциальных уравнениях небесной механики, носит название ньютоновского или эфемеридного времени, так как эфемериды небесных тел (т. е. их положения на небесной сфере для ряда моментов), полученные на основе решения дифференциальных уравнений небесной механики, естественно, даются в астрономических ежегодниках по ньютоновскому времени. Однако астрономические наблюдения относятся не к эфемеридному, а к всемирному времени (среднее солнечное время в Гриниче). Переход от всемирного времени к эфемеридному, который необходимо сделать, чтобы сравнить теорию с наблюдениями, осуществляется по простой формуле:

эфемеридное время = всемирное время  $+ \Delta T$ .

Характер изменения величины  $\Delta T$  с течением времени виден из табл. 1.

Расхождение между эфемеридным и всемирным временем объясняется неравномерностью вращения Земли. Приливное трение вызывает систематическое вековое замедление вращения Земли, в результате чего сутки увеличиваются приблизительно на  $0.0016$  секунд за сто лет; сезонные метеорологические и биологические процессы на поверхности Земли вызывают периодические изменения вращения Земли, имеющие годовой период (быстрее всего Земля вращается в августе и медленнее всего в марте); наконец, геологические процессы, происходящие внутри Земли, вызывают нерегулярные скачкообразные изменения в скорости вращения Земли (изменение длины суток достигает иногда  $0.0034$  сек.).

Точное значение величины  $\Delta T$  может быть получено на основе систематических наблюдений Луны (как самого близкого к Земле естественного небесного тела) путем сравнения эфемеридных положений Луны, отнесенных к эфемеридному времени, с наблюденными положениями

Таблица 1

## Эфемеридное время минус всемирное время

Год	$\Delta T$	Год	$\Delta T$	Год	$\Delta T$
1900.5	- 3 <sup>h</sup> 79	1920.5	+20 <sup>h</sup> 48	1940.5	+24 <sup>h</sup> 30
01.5	- 2.54	21.5	21.06	41.5	24.71
02.5	- 1.13	22.5	21.56	42.5	25.15
03.5	+ 0.35	23.5	21.97	43.5	25.61
04.5	+ 1.80	24.5	22.29	44.5	26.08
1905.5	+ 3.26	1925.5	+22.55	1945.5	+26.57
06.5	4.69	26.5	22.72	46.5	27.08
07.5	6.11	27.5	22.82	47.5	27.61
08.5	7.51	28.5	22.92	48.5	28.15
09.5	8.90	29.5	23.05	49.5	28.94
1910.5	+10.28	1930.5	+23.18	1950.5	+29.42
11.5	11.64	31.5	23.34	51.5	29.66
12.5	12.95	32.5	23.50	52.5	30.29
13.5	14.18	33.5	23.60	53.5	30.96
14.5	15.31	34.5	23.64	54.5	31.09
1915.5	+16.39	1935.5	+23.63	1955.5	+31.59
16.5	17.37	36.5	23.58	56.5	32.01
17.5	18.27	37.5	23.63	57.5	31.8
18.5	19.08	38.5	23.76	58.5	32.8
19.5	19.83	39.5	23.99	59.5	33.

Луны, которые определяются по всемирному времени. Величина  $\Delta T$  вычисляется всегда за прошедшие интервалы времени, так как требуется определенное время, чтобы накопить и обработать наблюдения Луны.

Очевидно, что неравномерность вращения Земли вокруг оси вызывает видимую неравномерность движения светил. Так, например, средняя долгота Солнца, полученная по таблицам Ньюкома, не согласуется с наблюдаемой долготой и нуждается в поправке

$$\Delta\lambda'' = +1''00 + 2''97T + 1''23T^2 + 0.0748B'',$$

где  $T$  — время, отсчитываемое в юлианских столетиях от начальной эпохи  $T_0 = 1900$ , январь 0, средний гриничский полдень, величина  $B''$  называется „флюктуацией в долготе Луны“. Флюктуации в движении Луны объясняются нерегулярными колебаниями скорости вращения Земли.



**4. Тропический год.** Обозначение нормальной эпохи 1950.0 не означает начало года январь 0 или январь 1 обычного календаря. Это начало так называемого тропического года. Бессель (1784—1846) предложил принять за начало тропического года такой момент, когда средняя долгота Солнца, уменьшенная на постоянную аберрацию ( $20''50$ ), точно равна  $280^\circ$ . Продолжительность тропического года равна 365.242199 средних солнечных суток. Напомним, что тропическим годом называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через точку весеннего равноденствия. Даты в тропическом году обозначаются не числами месяцев, а частью года, прошедшего от начала тропического года до рассматриваемого момента.

По исследованиям Ньюкома, начало тропического года в 1900 г. приходилось на январь 0.3135 среднего гриничского времени (или 0.8135 всемирного времени). Прибавляя на каждый год 365.242199 суток и учитывая высокосные годы, нетрудно вычислить начало тропического года для любого календарного года. В Астрономическом Ежегоднике СССР можно найти начало тропического года на любой год. Так, например, начало тропического года 1950.0 приходится на 1950 янв. 0.9234, а начало тропического года 1966.0 приходится на 1966 янв. 0.7986 эфемеридного времени.

## § 2. Топоцентрические и геоцентрические системы координат

**1. Экваториальная топоцентрическая система координат.** Наблюдения естественных и искусственных небесных тел производятся обычно в системе экваториальных топоцентрических координат  $M\xi'\eta'\zeta'$  (рис. 1). Начало координат находится на поверхности Земли в пункте наблюдения  $M$ . Основная плоскость  $\xi'\eta'$  расположена параллельно плоскости земного экватора, причем ось  $\xi'$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $\eta'$  — в точку, расположенную на  $90^\circ$  к западу от оси  $\xi'$ . Ось  $\zeta'$  направлена к северу параллельно оси вращения Земли.

Сферическими координатами в экваториальной топоцентрической системе будут  $\rho'$ ,  $\alpha'$ ,  $\delta'$ , т. е. топоцентрический радиус-вектор светила и его экваториальные

топоцентрические координаты: прямое восхождение  $\alpha'$  и склонение  $\delta'$ .

Между прямоугольными и сферическими топоцентрическими координатами имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\xi' &= \rho' \cos \delta' \cos \alpha', \\ \eta' &= \rho' \cos \delta' \sin \alpha', \\ \zeta' &= \rho' \sin \delta'.\end{aligned}\tag{I. 1}$$

**2. Переход к геоцентрической экваториальной системе координат.** Введем теперь геоцентрическую эква-

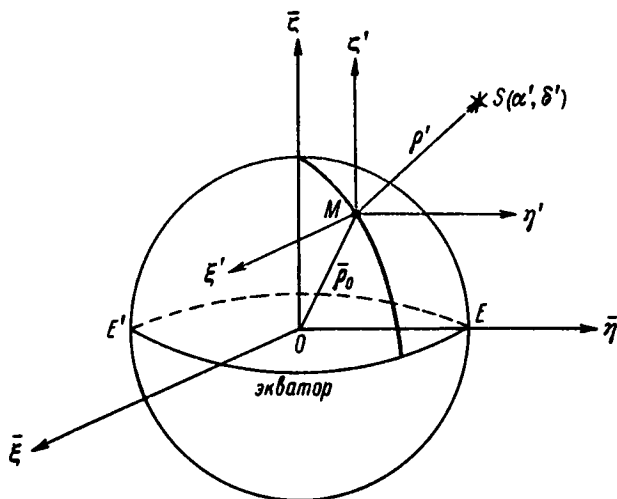


Рис. 1. Топоцентрические и геоцентрические координаты.

ториальную систему координат  $O\xi\eta\zeta$  (рис. 1), которая получается переносом системы  $M\xi'\eta'\zeta'$  параллельно самой себе по направлению геоцентрического вектора  $\bar{\rho}_0$ , определяющего пункт наблюдения  $M$  относительно центра инерции Земли.

Таким образом, чтобы перейти от топоцентрической к геоцентрической экваториальной системе координат необходимо иметь координаты пункта наблюдения, вычисленные по отношению к центру инерции Земли.

Однако фигура Земли (геоид) и положение центра инерции внутри Земли нам, строго говоря, неизвестны. Поэтому на практике вычисление координат пункта  $M$  производится относительно некоторой условной фигуры Земли, за которую мы принимаем так называемый референц-эллипсоид (рис. 2). При этом предполагается, что центр референц-эллипсоида совпадает с центром инерции Земли. Только при построении точных теорий движения

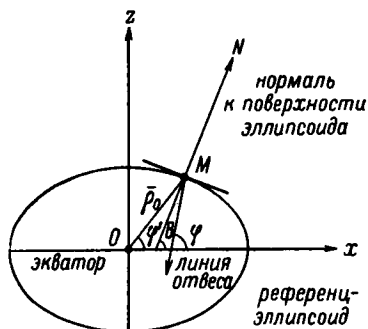


Рис. 2. Геоцентрическая ( $\varphi'$ ), астрономическая ( $\varphi$ ) и геодезическая ( $B$ ) широты пункта наблюдения  $M$ .

близких ИСЗ необходимо учитывать тот факт, что центр инерции Земли находится где-то вблизи центра референц-эллипсоида, но не совпадает с ним.

Необходимо ясно представлять себе различие между астрономическими, геодезическими и геоцентрическими широтами.

*Астрономическая широта*  $\varphi$  определяется вертикалью, т. е. направлением силы тяжести в пункте наблюдения.

Геодезическая широта определяется по отношению к некоторому референц-эллипсоиду, который рассматривается как „идеальная“ фигура Земли. Угол между нормалью к поверхности референц-эллипсоида и плоскостью земного экватора называется *геодезической широтой*  $B$  пункта наблюдения. Наконец, угол между радиусом-вектором  $\vec{r}_0$  пункта наблюдения, проведенным из центра референц-эллипсоида и плоскостью земного экватора, называется *геоцентрической широтой*  $\varphi'$ .

Максимальное расхождение между геоцентрической и астрономической широтами может достигать  $11'5$ , а расхождение между геодезической и астрономической широтой не превышает  $3''$ . При решении большинства астрономических задач можно считать, что геодезическая и астрономическая широты совпадают.

Долгота пункта наблюдения  $\lambda$  определяется как угол между плоскостями основного меридиана (меридиана Гринича) и меридиана пункта наблюдения.

В Советском Союзе для всех астрономо-геодезических работ принят в качестве референц-эллипсоида сфероид Ф. Н. Красовского. Элементы этого сфероида следующие:

$$\begin{aligned} a &= 6378.245000 \text{ км,} \\ b &= 6356.863019 \text{ км,} \\ a &= 1/298.3, \end{aligned} \quad (\text{I. 2})$$

где  $a$  — большая полуось,  $b$  — малая полуось,  $a$  — сжатие сфероида.

Для вычисления положения пункта наблюдения  $M$  применяются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho_0 \cos \varphi' \cos s, \\ \eta_1 &= \rho_0 \cos \varphi' \sin s, \\ \zeta_1 &= \rho_0 \sin \varphi', \end{aligned} \quad (\text{I. 3})$$

где  $\varphi'$  — геоцентрическая широта станции,  $s$  — местное звездное время наблюдения и  $\rho_0$  — радиус-вектор пункта наблюдения.

Для вычисления геоцентрической широты  $\varphi'$  и геоцентрического расстояния  $\rho_0$  наблюдателя, имеющего астрономическую широту  $\varphi$  и находящегося на высоте  $h$  метров над уровнем моря, служат формулы

$$\begin{aligned} \rho_0 \sin \varphi' &= (S + 0.1568 \cdot 10^{-6} h) \sin \varphi, \\ \rho_0 \cos \varphi' &= (C + 0.1568 \cdot 10^{-6} h) \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= (0.993307 + 0.0011 \cdot 10^{-6} h) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (\text{I. 4})$$

Для вспомогательных величин  $C$  и  $S$  в Астрономическом Ежегоднике дается специальная таблица по аргументу  $\varphi$  (см., например, Астрономический Ежегодник СССР на 1964 год, стр. 580).

Мы можем теперь совершить переход к геоцентрической экваториальной системе координат

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' + \xi_1, \\ \eta &= \eta' + \eta_1, \\ \zeta &= \zeta' + \zeta_1. \end{aligned} \quad (\text{I. 5})$$

Из наблюдений, после редукции за параллакс, получаем геоцентрические экваториальные сферические коор-

динаты светила: прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$ . Между прямоугольными геоцентрическими экваториальными координатами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \delta \cos \alpha, \\ \eta &= \rho \cos \delta \sin \alpha, \\ \zeta &= \rho \sin \delta,\end{aligned}\tag{I. 6}$$

где  $\rho$  — геоцентрическое расстояние светила.

**3. Редукция наблюдений за параллакс.** Переход от наблюдаемых топоцентрических координат светила  $\alpha'$ ,  $\delta'$  к геоцентрическим координатам  $\alpha$ ,  $\delta$  осуществляется с помощью формул

$$\begin{aligned}\rho p_\alpha &= (\alpha - \alpha') \rho, \\ \rho p_\delta &= (\delta - \delta') \rho.\end{aligned}\tag{I. 7}$$

Величины  $\rho p_\alpha$  и  $\rho p_\delta$  называются „параллактическими множителями“ и публикуются обычно вместе с наблюдениями. Для вычисления параллактических множителей служат формулы

$$\begin{aligned}\rho p_\alpha &= C \sin (\gamma - \delta') \operatorname{cosec} \gamma, \\ \rho p_\delta &= S \sin (s - \alpha') \sec \delta',\end{aligned}\tag{I. 8}$$

где  $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi' \sec (s - \alpha')$ ,  $\gamma < 180^\circ$ ,  $s$  — местное звездное время наблюдателя,  $\varphi'$  — геоцентрическая широта наблюдателя. Величины  $C$  и  $S$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}C &= 0^{\circ}5867 \rho_0 \cos \varphi', \\ S &= 8^{\circ}80 \rho_0 \sin \varphi'.\end{aligned}\tag{I. 9}$$

Таким образом, эти величины зависят только от координат пункта наблюдения:  $\varphi'$  — геоцентрической широты и  $\rho_0$  — радиуса-вектора места наблюдения и потому являются постоянными величинами для данной обсерватории. Так как величины  $C$  и  $S$  выражаются соответственно во времени и в угловой мере, то и параллактические множители  $\rho p_\alpha$  и  $\rho p_\delta$  также получают соответственно в секундах времени и в секундах дуги.

При использовании формул (I. 7) предполагается, что геоцентрическое расстояние светила  $\rho$  известно хотя бы

и с небольшой точностью (две-три значащие цифры).  
Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + p_\alpha, \\ \delta &= \delta' + p_\delta. \end{aligned} \quad (\text{I. 10})$$

#### 4. Вычисление прямоугольных геоцентрических экваториальных координат по элементам орбиты.

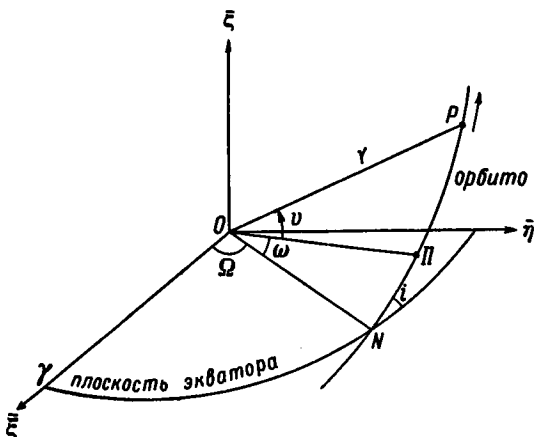


Рис. 3. Элементы орбиты спутника Земли.

Прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты связаны следующим образом с элементами геоцентрической орбиты спутника Земли (рис. 3):

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \eta &= r \cos u \sin \Omega + r \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \zeta &= r \sin u \sin i, \\ u &= v + \omega. \end{aligned} \quad (\text{I. 11})$$

Элементы орбиты  $\Omega$ ,  $i$  и  $\omega$ , определяющие положение орбиты спутника в пространстве, должны быть заданы относительно экватора Земли.

**5. Вращающаяся система координат.** Формулы (I. 11) можно несколько упростить, если ввести вращающуюся систему координат, направив ось  $\xi$  в восходящий узел орбиты светила. Тогда

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos u, \\ \eta &= r \sin u \cos i, \\ \zeta &= r \sin u \sin i,\end{aligned}\tag{I.12}$$

а формулы (I.13) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \rho_0 \cos \varphi' \cos (s - \Omega), \\ \eta_1 &= \rho_0 \cos \varphi' \sin (s - \Omega), \\ \zeta_1 &= \rho_0 \sin \varphi' .\end{aligned}\tag{I.13}$$

Топоцентрические координаты светила должны теперь вычисляться не по (I.1), а по формулам

$$\begin{aligned}\xi' &= \rho' \cos \delta' \cos (\alpha' - \Omega), \\ \eta' &= \rho' \cos \delta' \sin (\alpha' - \Omega), \\ \zeta' &= \rho' \sin \delta' .\end{aligned}\tag{I.14}$$

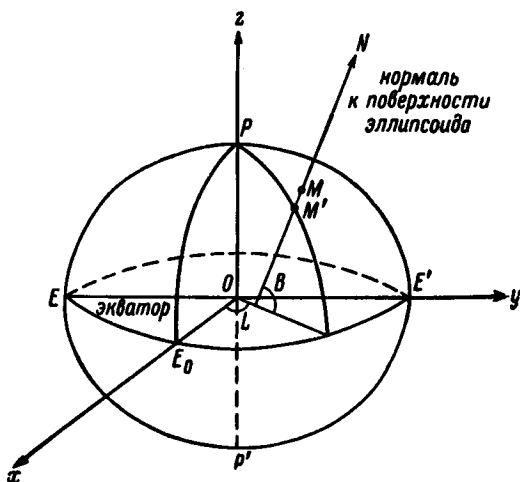


Рис. 4. Геодезические координаты ( $L, B$ ).

Формулы перехода от топоцентрических координат светила к геоцентрическим координатам остаются без изменения (см. (I.5)).

Такая вращающаяся система координат иногда удобна при изучении движения искусственных спутников Земли.

**6. Геодезические координаты.** Направим теперь ось  $x$  в плоскости экватора параллельно плоскости меридиана Гринича. Координаты пункта наблюдения  $M$  в этой системе координат будут твердо связаны с вращающейся Землей и не будут меняться с течением времени.

Имея геодезические координаты пункта наблюдения (рис. 4):  $B$  — геодезическая широта,  $L$  — геодезическая долгота,  $h = MM'$  — высота пункта над уровнем референц-эллипсоида, т. е. координаты пункта, приведенные к выбранному эллипсоиду, можно вычислить прямоугольные геодезические координаты пункта наблюдения по формулам

$$\begin{aligned} X &= (C + h) \cos B \cos L, \\ Y &= (C + h) \cos B \sin L, \\ Z &= (S + h) \sin B, \end{aligned} \quad (\text{I. 15})$$

где

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad S = (1 - e^2) C.$$

Численное значение величин  $C$  и  $S$  можно найти в Астрономическом Ежегоднике СССР (см., например, Астрономический Ежегодник СССР на 1964 г., стр. 580).

**7. Переход от экваториальной к эклиптической системе координат.** Переход от экваториальной прямоугольной системы координат  $\xi, \eta, \zeta$  к эклиптической  $\xi, \eta, \zeta$  происходит по следующим формулам поворота осей на угол  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi, \\ \eta &= \eta \cos \varepsilon + \zeta \sin \varepsilon, \\ \zeta &= \zeta \cos \varepsilon - \eta \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{I. 16})$$

Угол  $\varepsilon$  между плоскостями эклиптики и экватора для эпохи  $T_0 = 1950.0$  равен

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 44''.84 = 23.44579.$$

Для обратного перехода

$$\begin{aligned} \xi &= \xi, \\ \eta &= \eta \cos \varepsilon - \zeta \sin \varepsilon, \\ \zeta &= \zeta \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{I. 17})$$



Рассмотрим теперь связь между геоцентрическими прямоугольными эклиптическими координатами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и эклиптическими сферическими координатами  $r$ ,  $l$ ,  $b$  (радиус-вектор, долгота, широта). Эти координаты связаны между собой следующими формулами:

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos b \cos l, \\ \eta &= r \cos b \sin l, \\ \zeta &= r \sin b.\end{aligned}\tag{I. 18}$$

**Пример.** Пусть  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — прямоугольные и  $R$ ,  $L$ ,  $B$  — сферические эклиптические координаты Солнца. Тогда

$$\begin{aligned}X &= R \cos B \cos L, \\ Y &= R \cos B \sin L, \\ Z &= R \sin B.\end{aligned}\tag{I. 19}$$

Так как широта Солнца очень мала (максимальное значение примерно  $1''$ ), то мы можем положить  $\sin B = B$  и  $\cos B = 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned}X &= R \cos L, \\ Y &= R \sin L, \\ Z &= RB \approx 0.\end{aligned}\tag{I. 20}$$

### § 3. Гелиоцентрические системы координат

**1. Эклиптическая гелиоцентрическая система координат.** Для перехода от геоцентрической эклиптической системы координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  к гелиоцентрической  $x$ ,  $y$ ,  $z$  необходимо перенести начало координат в центр Солнца  $S$ . Ось  $x$  по-прежнему направлена в точку весеннего равноденствия. Формулы перехода имеют вид

$$\begin{aligned}x &= \xi - X, \\ y &= \eta - Y, \\ z &= \zeta - Z,\end{aligned}\tag{I. 21}$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — геоцентрические координаты Солнца. Прямоугольные эклиптические координаты планеты связаны с элементами ее орбиты формулами

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i, \\
 y &= r \cos u \sin \Omega + r \sin u \cos \Omega \cos i, \\
 z &= r \sin u \sin i,
 \end{aligned}
 \tag{I. 22}$$

где  $u = v + \omega$ .

Элементы орбиты  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  заданы относительно плоскости эклиптики.

Введем теперь эклиптические проективные коэффициенты, которые определяются формулами

$$\left.
 \begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\
 P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\
 P_z &= \sin \omega \sin i, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\
 Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\
 Q_z &= \cos \omega \sin i.
 \end{aligned}
 \right\}
 \tag{I. 23}$$

Эти величины геометрически являются направляющими косинусами осей  $S_\xi$  и  $S_\eta$ , расположенных в плоскости орбиты, по отношению к эклиптическим координатным осям. Ось  $\xi$  направлена в перигелий орбиты, а ось  $\eta$  — в точку  $v = 90^\circ$  ( $v$  — истинная аномалия).

Подставляя (I. 23) в (I. 22), получим

$$\begin{aligned}
 x &= \xi P_x + \eta Q_x, \\
 y &= \xi P_y + \eta Q_y, \\
 z &= \xi P_z + \eta Q_z,
 \end{aligned}
 \tag{I. 24}$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi &= r \cos v, \\
 \eta &= r \sin v.
 \end{aligned}$$

Используя для  $\xi$  и  $\eta$  выражения

$$\begin{aligned}
 \xi &= a (\cos E - e), \\
 \eta &= a \cos \varphi \sin E,
 \end{aligned}
 \tag{I. 25}$$

где  $E$  — эксцентрическая аномалия, получим

$$\begin{aligned}
 x &= a P_x (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_x \sin E, \\
 y &= a P_y (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_y \sin E, \\
 z &= a P_z (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_z \sin E,
 \end{aligned}
 \tag{I. 26}$$

где

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - e^2}.$$

Полученные формулы удобны потому, что дают возможность вычислять  $x$ ,  $y$ ,  $z$  непосредственно по эксцентрисической аномалии, минуя вычисление истинной аномалии и радиуса-вектора.

**2. Экваториальная гелиоцентрическая система координат.** Рассмотрим теперь экваториальную гелиоцентрическую систему координат  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ , для чего повернем координатную плоскость  $xy$  вокруг оси  $x$  на угол  $\epsilon$ . Тогда

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x, \\ \bar{y} &= y \cos \epsilon - z \sin \epsilon, \\ \bar{z} &= y \sin \epsilon + z \cos \epsilon,\end{aligned}\tag{I. 27}$$

или, подставляя сюда выражения (I. 22), получим

$$\begin{aligned}\bar{x} &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \cos i \sin \Omega, \\ \bar{y} &= r \cos u \sin \Omega \cos \epsilon + r \sin u \cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \\ &\quad - r \sin u \sin i \sin \epsilon, \\ \bar{z} &= r \cos u \sin \Omega \sin \epsilon + r \sin u \cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \\ &\quad + r \sin u \sin i \cos \epsilon.\end{aligned}\tag{I. 28}$$

Введем для удобства вычислений экваториальные проективные коэффициенты, которые определяются формулами

$$\left. \begin{aligned}P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon - \\ &\quad - \sin \omega \sin i \sin \epsilon, \\ P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin \epsilon + \\ &\quad + \sin \omega \sin i \cos \epsilon, \\ Q_x &= -(\sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\ Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon - \\ &\quad - \cos \omega \sin i \sin \epsilon, \\ Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin \epsilon + \\ &\quad + \cos \omega \sin i \cos \epsilon.\end{aligned}\right\}\tag{I. 29}$$

Эти величины геометрически являются направляющими косинусами осей  $S_\xi$  и  $S_\eta$ , расположенных в плоскости орбиты, по отношению к экваториальной системе координат. Ось  $\xi$  направлена в перигелий орбиты, а ось  $\eta$  — в точку  $\nu = 90^\circ$ . Подставляя (I. 29) в (I. 28), получим

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \xi P_x + \eta Q_x, \\ \bar{y} &= \xi P_y + \eta Q_y, \\ z &= \xi P_z + \eta Q_z,\end{aligned}\tag{I. 30}$$

где

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos \nu, \\ \eta &= r \sin \nu.\end{aligned}$$

Используя для  $\xi$  и  $\eta$  выражения

$$\begin{aligned}\xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a \cos \varphi \sin E,\end{aligned}\tag{I. 31}$$

получим

$$\begin{aligned}\bar{x} &= aP_x(\cos E - e) + a \cos \varphi Q_x \sin E, \\ \bar{y} &= aP_y(\cos E - e) + a \cos \varphi Q_y \sin E, \\ z &= aP_z(\cos E - e) + a \cos \varphi Q_z \sin E,\end{aligned}\tag{I. 32}$$

где  $\cos \varphi = \sqrt{1 - e^2}$ .

Если система орбитальных элементов  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $i$  отнесена не к плоскости эклиптики, а к плоскости экватора, выражения (I. 29) упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned}P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i.\end{aligned}\right\}\tag{I. 33}$$

Остальные формулы (I. 30)—(I. 32) при этом остаются без изменения.

**3. Переход от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной геоцентрической системе.** Итак, имея элементы орбиты планеты, отнесенные к плоскости эклиптики, мы можем вычислить ее прямоугольные экваториальные гелиоцентрические

координаты по формулам (I. 28) или (I. 30), или, наконец, по формулам (I. 32).

Однако для того чтобы сравнить теорию с наблюдениями, нам необходимо вычислить геоцентрические сферические координаты планеты, а именно прямое восхождение  $\alpha$ , склонение  $\delta$  и геоцентрическое расстояние  $\rho$ . Для перехода от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной геоцентрической системе воспользуемся формулами переноса начала координат

$$\begin{aligned}\bar{x} + X &= \rho \cos \delta \cos \alpha, \\ \bar{y} + Y &= \rho \cos \delta \sin \alpha, \\ z + Z &= \rho \sin \delta,\end{aligned}\tag{I. 34}$$

где через  $X, Y, Z$  обозначены геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Солнца. Эти координаты можно найти в *Астрономическом Ежегоднике* (например, в *Астрономическом Ежегоднике СССР* на 1964 г. прямоугольные координаты Солнца приведены на стр. 22—37).

Подставляя (I. 32) в (I. 34), получим

$$\begin{aligned}\rho \cos \delta \cos \alpha &= A_x (\cos E - e) + B_x \sin E + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= A_y (\cos E - e) + B_y \sin E + Y, \\ \rho \sin \delta &= A_z (\cos E - e) + B_z \sin E + Z,\end{aligned}\tag{I. 35}$$

где

$$\begin{aligned}A_x &= aP_x, & A_y &= aP_y, & A_z &= aP_z, \\ B_x &= a \cos \varphi Q_x, & B_y &= a \cos \varphi Q_y, & B_z &= a \cos \varphi Q_z.\end{aligned}$$

Из уравнений (I. 35) определяем  $\alpha, \delta$  и  $\rho$  для заданного момента  $t$ , которые можно затем сравнить с наблюдаемыми значениями  $\alpha$  и  $\delta$ .

**4. Переход от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной барицентрической системе.** Иногда может оказаться полезным перейти от гелиоцентрической системы координат не к геоцентрической, а к барицентрической системе, т. е. к такой системе, в которой за начало координат принят центр инерции системы Земля—Луна. Формулы перехода имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{x} + X^* &= \rho^* \cos \delta^* \cos \alpha^*, \\ \bar{y} + Y^* &= \rho^* \cos \delta^* \sin \alpha^*, \\ z + Z^* &= \rho^* \sin \delta^*,\end{aligned}\tag{I. 36}$$

где  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$  — барицентрические координаты Солнца. Для того чтобы вычислить барицентрические координаты Солнца по известным геоцентрическим координатам, полученным из Астрономического Ежегодника, необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} X^* &= X - dX, \\ Y^* &= Y - dY, \\ Z^* &= Z - dZ, \end{aligned} \quad (I. 37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} dX &= B \operatorname{cosec} \pi_1 \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \\ dY &= B \operatorname{cosec} \pi_1 \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \\ dZ &= B \operatorname{cosec} \pi_1 \sin \delta_1, \\ B &= \frac{\mu}{1 + \mu} \sin 8''.80 \end{aligned} \right\} \quad (I. 37^*)$$

Через  $\mu$  в выражении для  $B$  обозначено отношение масс Луны и Земли, равное  $\mu = 1:81.53$ . Через  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$  и  $\pi_1$  обозначены соответственно прямое восхождение, склонение и параллакс Луны.

Для сравнения вычисленных барицентрических координат светила  $\rho^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $\delta^*$  с наблюдаемыми геоцентрическими координатами  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  необходимо перевести барицентрические экваториальные координаты в геоцентрические экваториальные координаты по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^* + da, \\ \delta &= \delta^* + d\delta, \\ \rho &= \rho^* + d\rho, \end{aligned} \quad (I. 38)$$

где  $da$ ,  $d\delta$  и  $d\rho$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \rho^* \cos \delta^* \sin 1'' da &= -\sin \alpha^* dX + \cos \alpha^* dY, \\ \rho^* \sin 1'' d\delta &= -\sin \delta^* \cos \alpha^* dX - \\ &\quad - \sin \delta^* \sin \alpha^* dY + \cos \delta^* dZ, \\ d\rho &= \cos \delta^* \cos \alpha^* dX + \cos \delta^* \sin \alpha^* dY + \\ &\quad + \sin \delta^* dZ. \end{aligned} \quad (I. 38^*)$$

Входящие в формулы (I. 38\*) величины  $dX$ ,  $dY$ ,  $dZ$  вычисляются по формулам (I. 37\*).

Отметим, что барицентрические координаты Солнца  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$  меняются более плавно с течением времени, чем геоцентрические координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , полученные из Астрономического Ежегодника. Это объясняется тем очевидным фактом, что центр Земли сравнительно быстро движется около центра инерции Земля—Луна и потому гелиоцентрическая орбита Земли с учетом лунных и планетных возмущений имеет значительно более сложный характер, чем эллиптическая орбита центра инерции системы Земля—Луна, для которой учитываются уже только небольшие планетные возмущения.

**5. Эклиптические и экваториальные элементы орбиты.** Положение орбит больших планет определяется в эклиптической системе координат. Орбиты спутников больших планет (в частности, искусственных спутников Земли) относят обычно к экваториальной системе координат, причем за основную плоскость принимается экватор соответствующей планеты.

Рассмотрим, каким образом можно от экваториальных элементов орбиты  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{i}$ ,  $\bar{\omega}$  перейти к эклиптическим элементам  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  и обратно. Остальные элементы, определяющие орбиту планеты или спутника ( $a$  и  $e$ ), а также положение светила на орбите относительно линии апсид, очевидно, не зависят от выбора системы координат.

Построим сферический треугольник, образованный экватором Земли, эклипикой и орбитой светила. Углы этого треугольника равны  $i$ ,  $180^\circ - \bar{i}$  и  $\epsilon$ , а стороны, противоположные углам, равны соответственно  $\bar{\Omega}$ ,  $\Omega$  и  $\bar{\omega} - \omega$  (рис. 5).

Применяя основные формулы сферической тригонометрии, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \sin \bar{i} \sin \bar{\Omega}, \\ \sin i \cos \Omega &= -\cos \bar{i} \sin \epsilon + \sin \bar{i} \cos \epsilon \cos \bar{\Omega}, \\ \cos i &= \cos \bar{i} \cos \epsilon + \sin \bar{i} \sin \epsilon \cos \bar{\Omega}, \\ \sin i \sin (\bar{\omega} - \omega) &= \sin \epsilon \sin \bar{\Omega}, \\ \sin i \cos (\bar{\omega} - \omega) &= \sin \bar{i} \cos \epsilon - \cos \bar{i} \sin \epsilon \cos \bar{\Omega}. \end{aligned} \right\} (I. 39)$$

Эти формулы дают возможность определить  $i$ ,  $\Omega$  и  $\omega$ . Для обратного перехода от эклиптических элементов орбиты к экваториальным имеем следующие формулы, которые получаются из того же треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \sin \bar{i} \sin \bar{\Omega} &= \sin i \sin \Omega, \\ \sin \bar{i} \cos \bar{\Omega} &= \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega, \\ \cos \bar{i} &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega, \\ \sin i \sin (\bar{\omega} - \omega) &= \sin \varepsilon \sin \Omega, \\ \sin i \cos (\bar{\omega} - \omega) &= \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \cos \Omega. \end{aligned} \right\} (I. 40)$$

По этим формулам находим  $\bar{i}$ ,  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\omega}$ .

### 6. Переход от эклиптической гелиоцентрической системы координат к эклиптической геоцентрической системе.

Если вычисления ведутся в эклиптической системе координат, то для сравнения теории с наблюдениями нам необходимо вычислить геоцентрические эклиптические сферические координаты планеты  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ .

Для перехода от эклиптической гелиоцентрической системы координат к эклиптической геоцентрической системе служат формулы переноса начала координат, аналогичные формулы (I. 34)

$$\left. \begin{aligned} x + R \cos B \cos L &= \rho \cos \beta \cos \lambda, \\ y + R \cos B \sin L &= \rho \cos \beta \sin \lambda, \\ z + R \sin B &= \rho \sin \beta, \end{aligned} \right\} (I. 41)$$

где  $\lambda$  и  $\beta$  — долгота и широта планеты, а  $R$ ,  $L$  и  $B$  — радиус-вектор, долгота и широта Солнца. Учитывая формулы (I. 20), можно переписать формулы (I. 41) в более простой форме

$$\left. \begin{aligned} x + R \cos L &= \rho \cos \beta \cos \lambda, \\ y + R \sin L &= \rho \cos \beta \sin \lambda, \\ z &= \rho \sin \beta. \end{aligned} \right\} (I. 42)$$

Так как из наблюдений мы получаем всегда только экваториальные сферические координаты  $\alpha$  и  $\delta$ , то при изучении движения планеты в эклиптических координа-

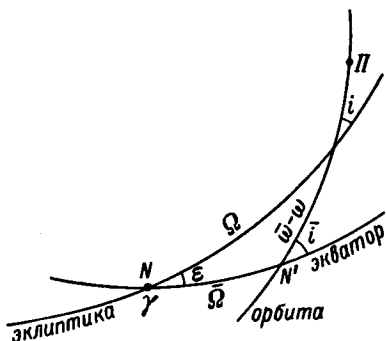


Рис. 5. Экваториальные и эклиптические элементы орбиты небесного тела (проекция на небесную сферу).



тах необходимо все наблюдаемые координаты  $\alpha$  и  $\delta$  перевычислить в  $\beta$  и  $\lambda$ . Для этого служат известные формулы сферической тригонометрии

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon, \\ \sin \beta &= -\cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (I. 43)$$

Через  $\varepsilon$  обозначен, как всегда, наклон экватора к эклиптике. Наблюдаемые координаты планеты  $\beta$  и  $\lambda$ , полученные по формулам (I. 43), сравниваются с вычисленными координатами (на те же моменты времени), полученными по формулам (I. 42).

#### § 4. Влияние прецессии на координаты и элементы орбиты

**1. Преобразование прямоугольных координат от одной эпохи к другой.** До сих пор мы предполагали, что плоскости экватора и эклиптики отнесены к определенной начальной эпохе  $T_0 = 1950.0$  и потому не меняются с течением времени. Однако в практической работе небесного механика очень часто возникает необходимость перехода от одной эпохи к другой. Мы рассмотрим этот вопрос для случая экваториальной системы координат.

Пусть  $x_0, y_0, z_0$  — прямоугольные координаты планеты, отнесенные к эпохе  $T_0$ , а  $x, y, z$  — те же координаты, отнесенные к эпохе  $t$ . Для перехода от эпохи  $T_0$  к эпохе  $t$  употребляются следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 X_x + y_0 Y_x + z_0 Z_x, \\ y &= x_0 X_y + y_0 Y_y + z_0 Z_y, \\ z &= x_0 X_z + y_0 Y_z + z_0 Z_z, \end{aligned} \right\} \quad (I. 44)$$

где  $X_x, Y_x, \dots$  — косинусы углов, образованные осями  $x, y, z$  с осями  $x_0, y_0, z_0$ .

Уравнения (I. 44) пригодны как для гелиоцентрических, так и для геоцентрических прямоугольных координат. Они пригодны также для проективных коэффициентов  $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$ .

Для решения обратной задачи служат формулы

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= xX_x - yY_x - zZ_x, \\ y_0 &= -xX_y + yY_y + zZ_y, \\ z_0 &= -xX_z + yY_z + zZ_z. \end{aligned} \right\} \quad (I. 45)$$

Переводные коэффициенты  $X_x, \dots$  могут быть вычислены по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 X_x &= 1.0000\ 0000 - 0.0002\ 9696\ T^2 - \\
 &\quad - 0.0000\ 0014\ T^3, \\
 Y_x = -X_y &= -0.0223\ 4941\ T - 0.0000\ 0676\ T^2 + \\
 &\quad + 0.0000\ 0221\ T^3, \\
 Z_x = -X_z &= -0.0097\ 1691\ T + 0.0000\ 0206\ T^2 + \\
 &\quad + 0.0000\ 0098\ T^3, \\
 Y_y &= 1.0000\ 0000 - 0.0002\ 4975\ T^2 - \\
 &\quad - 0.0000\ 0015\ T^3, \\
 Y_z = Z_y &= -0.0001\ 0858\ T^2, \\
 Z_z &= 1.0000\ 0000 - 0.0000\ 4721\ T^2 + \\
 &\quad + 0.0000\ 0002\ T^3,
 \end{aligned} \right\} \quad (I. 46)$$

где  $T$  — время в тропических столетиях, считаемое от 1950.0.

**2. Преобразование элементов от одной эпохи к другой.** Преобразование элементов  $\Omega_0, i_0, \omega_0$  для эпохи  $T_0 = 1950.0$  к произвольной эпохе  $t$  выполняется по формулам

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \Omega_0 + a - b \sin(\Omega_0 + c') \operatorname{ctg} i_0, \\
 i &= i_0 + b \cos(\Omega_0 + c'), \\
 \omega &= \omega_0 + b \sin(\Omega_0 + c') \operatorname{cosec} i_0
 \end{aligned} \quad (I. 47)$$

и для обратного перехода по формулам

$$\begin{aligned}
 \Omega_0 &= \Omega - a + b \sin(\Omega + c) \operatorname{ctg} i, \\
 i_0 &= i - b \cos(\Omega + c), \\
 \omega_0 &= \omega - b \sin(\Omega + c) \operatorname{cosec} i.
 \end{aligned} \quad (I. 48)$$

Величины  $a, b, c, c' = c + a$  для различных эпох можно найти в *Астрономическом Ежегоднике*. Если, например,  $T_0 = 1950.0$  и  $t = 1964.0$ , то (*Астрономический Ежегодник СССР на 1964 год*, стр. 5)

$$\begin{aligned}
 a &= 0^\circ 19549, \\
 b &= 0^\circ 001831, \\
 c &= 5^\circ 431, \\
 c' &= c + a = 5^\circ 626.
 \end{aligned} \quad (I. 49)$$

Если элементы орбиты  $\Omega_0, i_0, \omega_0$  отнесены к эклиптике эпохи  $T_0 = 1950.0$ , то поправка за прецессию должна быть вычислена по следующим формулам, в которых  $t - T_0$  выражено в тропических годах,

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 + [p - \pi \operatorname{ctg} i_m \sin(\pi - \Omega_m)](t - T_0), \\ i &= i_0 - \pi \cos(\Pi - \Omega_m)(t - T_0), \\ \omega &= \omega_0 + \pi \operatorname{cosec} i_m \sin(\Pi - \Omega_m)(t - T_0).\end{aligned}\quad (I. 50)$$

В этих формулах через  $p$  обозначена общая прецессия по долготе за год,  $\pi$  — угловая скорость вращения эклиптики,  $\Pi$  — долгота мгновенной оси вращения эклиптики. Величины  $p, \pi$  и  $\Pi$  должны быть взяты для момента  $t_m = \frac{T_0 + t}{2}$  из Астрономического Ежегодника СССР на соответствующий год, например, в Астрономическом Ежегоднике на 1964 г., стр. 5, находим

$$\begin{aligned}p &= 50''.2706, \\ \pi &= 0''.4706, \\ \Pi &= 174^\circ 535.\end{aligned}\quad (I. 51)$$

Уравнения (I. 50) решаются методом последовательных приближений. В первом приближении полагаем  $\Omega_m = \Omega_0$  и  $i_m = i_0$ .

**3. Преобразование экваториальных сферических координат от одной эпохи к другой.** Для преобразования экваториальных сферических координат  $\alpha_0$  и  $\delta_0$ , отнесенных к эпохе  $T_0 = 1950.0$ , к произвольной эпохе  $t$  необходимо применить следующие формулы:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + M + N \sin \alpha_m \operatorname{tg} \delta_m, \\ \delta &= \delta_0 + N \cos \alpha_m,\end{aligned}\quad (I. 52)$$

и для обратного перехода от эпохи  $t$  к эпохе  $T_0$  формулы

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha - M - N \sin \alpha_m \operatorname{tg} \delta_m, \\ \delta_0 &= \delta - N \cos \alpha_m,\end{aligned}\quad (I. 53)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0), \\ \delta_m &= \frac{1}{2}(\delta + \delta_0),\end{aligned}$$

а величины  $M$  и  $N$  даются для различных эпох в Астрономическом Ежегоднике. Для случая  $T_0 = 1950.0$  и  $t =$

$= 1964.0$  имеем, в частности (см. *Астрономический Ежегодник СССР на 1964 г.*, стр. 5),

$$\begin{aligned} M^s &= 0^m 43^s 028, \\ N^s &= 18^s 706, \\ N'' &= 280'.59. \end{aligned} \quad (I. 54)$$

Уравнения (I.52) и (I.53) решаются последовательными приближениями, причем в первом приближении мы полагаем  $\alpha_m = \alpha_0$  и  $\delta_m = \delta_0$ .

## § 5. Луноцентрические координаты

При изучении движения спутников Луны удобно ввести луноцентрическую прямоугольную систему координат

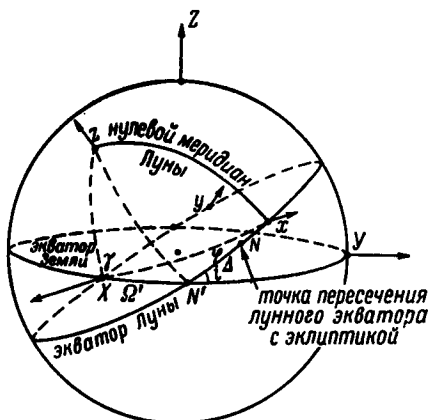


Рис. 6. Луноцентрические экваториальные координаты.

$x, y, z$  (рис. 6), в которой за основную плоскость  $xy$  принята плоскость лунного экватора, ось  $x$  направлена в нулевой меридиан, от которого ведется счет долгот, а ось  $z$  направлена по оси вращения Луны. Пусть система координат  $x, y, z$  отнесена к эпохе  $T_0 = 1960.0$ . Тогда переход от эпохи  $T_0$  к произвольной эпохе  $t$  происходит по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos N(t - T_0) + y \sin N(t - T_0), \\ \eta &= -x \sin N(t - T_0) + y \cos N(t - T_0), \\ \zeta &= z, \end{aligned} \quad (I. 55)$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — прямоугольные координаты в той же системе, но отнесенные к произвольной эпохе  $t$ , а  $N$  — средняя угловая скорость вращения Луны вокруг своей оси

$$N = \frac{2\pi}{27^d \cdot 3216609}. \quad (I. 56)$$

При изучении движения спутников Луны нам могут понадобиться прямоугольные координаты Земли и Солнца, отнесенные к луноцентрической экваториальной (экватор Луны) системе координат  $x, y, z$ . Для вычисления этих координат возьмем из Астрономического Ежегодника СССР прямоугольные координаты Луны и Солнца на эпоху  $T_0$ , отнесенные к геоцентрической экваториальной (экватор Земли) системе координат  $X, Y, Z$ .

Обозначим геоцентрические координаты Луны

$$X_0, Y_0, Z_0$$

и Солнца

$$X'_0, Y'_0, Z'_0.$$

Тогда параллельный перенос начала координат в центр Луны дает луноцентрические координаты Земли

$$\begin{aligned} X_1 &= -X_0, \\ Y_1 &= -Y_0, \\ Z_1 &= -Z_0 \end{aligned} \quad (I. 57)$$

и луноцентрические координаты Солнца

$$\begin{aligned} X_2 &= X'_0 - X_0, \\ Y_2 &= Y'_0 - Y_0, \\ Z_2 &= Z'_0 - Z_0. \end{aligned} \quad (I. 58)$$

Теперь для перехода к системе координат  $x, y, z$  необходимо сделать поворот системы по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= X_i \cos(X, x) + Y_i \cos(Y, x) + Z_i \cos(Z, x), \\ y_i &= X_i \cos(X, y) + Y_i \cos(Y, y) + Z_i \cos(Z, y), \\ z_i &= X_i \cos(X, z) + Y_i \cos(Y, z) + Z_i \cos(Z, z). \end{aligned} \quad (I. 59)$$

Для вычисления направляющих косинусов рассмотрим рис. 7, на котором введены следующие обозначения:  $i$  — наклон среднего лунного экватора к среднему земному экватору;  $\Delta = N'N$  — угловое расстояние от восходящего

узла среднего лунного экватора на среднем экваторе Земли до восходящего узла среднего лунного экватора на эклиптике;  $\Omega' = \gamma N'$  — угловое расстояние от точки весеннего равноденствия до восходящего узла среднего лунного экватора на среднем экваторе Земли, считаемое по последнему;  $\Omega = \gamma N + 180^\circ$  — средняя долгота восходящего узла лунной орбиты;  $\mathcal{C}$  — средняя долгота Луны;  $\varphi = N'x$  — угол между восходящим узлом среднего лунного экватора на среднем экваторе Земли и осью  $x$ , отсчитываемой в положительном направлении от восходящего узла. При этом, согласно законам Кассини,

$$\varphi = \mathcal{C} - \Omega + \Delta. \quad (I. 60)$$

Примечание. Французский астроном Д. Кассини в 1693 г. опубликовал следующие три закона вращения Луны.

1. Долгота восходящего узла лунного экватора на эклиптике равна увеличенной на  $180^\circ$  долготе восходящего узла лунной орбиты или, другими словами, восходящий узел лунного экватора на эклиптике совпадает с нисходящим узлом лунной орбиты на эклиптике (рис. 7).

2. Наклон лунного экватора к эклиптике постояен.

3. Луна вращается около своей оси с равномерной скоростью и в том же направлении, в каком она движется вокруг Земли. Угловая скорость вращения равна, таким образом, среднему сидерическому движению Луны по орбите. Отклонения во вращательном движении Луны от законов Кассини называются физической либрацией.

Для эпохи 1960.0 имеем следующие численные значения элементов лунной орбиты:

$$\begin{aligned} i &= 24^\circ 9' 79, \\ \Omega' &= -0^\circ 082, \\ \Delta &= -1^\circ 218, \\ \mathcal{C} &= 309^\circ 125, \\ \Omega &= 178^\circ 707, \end{aligned} \quad (I. 61)$$

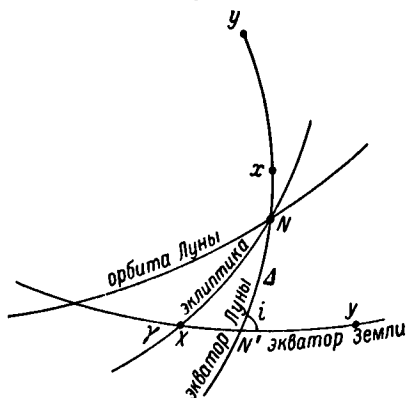


Рис. 7. Взаимное расположение осей  $x, y, z$  и осей  $X, Y, Z$  (проекция на небесную сферу).

откуда по формуле (I. 60) находим

$$\varphi = 129^{\circ}200.$$

В Астрономическом Ежегоднике СССР  $\Delta$  и  $\Omega'$  отнесены к истинному экватору Земли, но различие между истинным и средним экватором мало и им можно пренебречь. Из рис. 7 находим

$$\left. \begin{aligned} \cos(X, x) &= \cos \varphi \cos \Omega' - \sin \varphi \sin \Omega' \cos i, \\ \cos(X, y) &= -\sin \varphi \cos \Omega' - \cos \varphi \sin \Omega' \cos i, \\ \cos(X, z) &= \sin \Omega' \sin i, \\ \cos(Y, x) &= \cos \varphi \sin \Omega' + \sin \varphi \cos \Omega' \cos i, \\ \cos(Y, y) &= -\sin \varphi \sin \Omega' + \cos \varphi \cos \Omega' \cos i, \\ \cos(Y, z) &= -\cos \Omega' \sin i, \\ \cos(Z, x) &= \sin \varphi \sin i, \\ \cos(Z, y) &= \cos \varphi \sin i, \\ \cos(Z, z) &= \cos i. \end{aligned} \right\} \text{(I. 62)}$$

Подставляя численные значения (I. 61), получим

$$\left. \begin{aligned} \cos(X, x) &= -0.6310233, \\ \cos(X, y) &= -0.7757637, \\ \cos(X, z) &= -0.0006044, \\ \cos(Y, x) &= +0.7033621, \\ \cos(Y, y) &= -0.5718013, \\ \cos(Y, z) &= -0.4222856, \\ \cos(Z, x) &= +0.3272482, \\ \cos(Z, y) &= -0.2668971, \\ \cos(Z, z) &= +0.9064626, \end{aligned} \right\} \text{(I. 63)}$$

и формулы (I. 59) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= -0.6310233 X_i + 0.7033621 Y_i + 0.3272482 Z_i, \\ y_i &= -0.7757637 X_i - 0.5718013 Y_i - 0.2668971 Z_i, \\ z_i &= -0.0006044 X_i - 0.4222856 Y_i + 0.9064626 Z_i. \end{aligned} \right\} \text{(I. 64)}$$

Мы получили координаты Земли и Солнца, отнесенные к луноцентрическим экваториальным (экватор Луны) координатам.

Если мы хотим учесть не только оптическую либрацию Луны (которая дается законами Кассини), но и физическую либрацию Луны, необходимо в (I. 62) вычислить  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos b &= -\cos l [\sin(\alpha - \Omega') \cos \delta \cos i + \sin \delta \sin i] + \\ &\quad + \sin l \cos(\alpha - \Omega') \cos \delta, \\ \cos \varphi \cos b &= -\sin l [\sin(\alpha - \Omega') \cos \delta \cos i + \sin \delta \sin i] - \\ &\quad - \cos l \cos(\alpha - \Omega') \cos \delta, \end{aligned} \quad (\text{I. 65})$$

где  $\alpha$ ,  $\delta$  — прямое восхождение и склонение Луны, а  $l$  и  $b$  — либрация по долготе и широте, т. е. селенографическая долгота и селенографическая широта центра диска Луны, видимого из центра Земли. Напомним, что селенографическая долгота отсчитывается по лунному экватору и считается положительной к западу, т. е. в направлении к Морю Кризисов, а селенографическая широта считается положительной к северу от лунного экватора, т. е. в направлении к Морю Ясности.

Эфемерида для физических наблюдений Луны публикуется в Астрономическом Ежегоднике СССР. Эта эфемерида содержит величины  $l$  и  $b$  на каждый день года с точностью до  $0^{\circ}01$ , что соответствует приблизительно 300 м на лунной поверхности. Так, например, в Астрономическом Ежегоднике на 1964 г., стр. 524, находим на 1 января  $0^{\text{h}}$  всемирного времени

$$\begin{aligned} l &= +5^{\circ}17, \\ b &= -2^{\circ}28. \end{aligned}$$

Физическая либрация  $l''$  и  $b''$  очень мала и для указанной даты имеет численное значение

$$\begin{aligned} l'' &= +0^{\circ}01, \\ b'' &= -0^{\circ}03, \end{aligned}$$

поэтому оптическая либрация равна

$$\begin{aligned} l' &= l - l'' = +5^{\circ}16, \\ b' &= b - b'' = -2^{\circ}25. \end{aligned}$$

Таким образом, если мы пренебрегаем физической либрацией, то угол  $\varphi$  может быть вычислен или по фор-



муле Кассини (I. 60) или по формуле (I. 65), в которой мы полагаем  $l = l'$  и  $b = b'$ .

Пример. Вычислить угол  $\varphi$  на дату 7 января 1960 г. Из Ежегодника СССР на 1960 год находим (стр. 39)

$$\begin{aligned}\zeta &= 23^{\circ}634, \\ \Omega &= 178^{\circ}408, \\ \Delta &= -1^{\circ}500,\end{aligned}$$

откуда по формуле (I. 60)

$$\varphi = \zeta - \Omega + \Delta = 203^{\circ}726.$$

С другой стороны, на ту же дату (стр. 57, 39, 512)

$$\begin{aligned}a &= 1^{\text{h}}52^{\text{m}}45^{\text{s}}964, \\ \delta &= +8^{\circ}45'5''03; \\ i &= 24^{\circ}979, \\ \Omega' &= -0^{\circ}101; \\ l' &= 5^{\circ}60 - 0^{\circ}00 = +5^{\circ}60, \\ b' &= 3^{\circ}48 - 0^{\circ}04 = +3^{\circ}44.\end{aligned}$$

Подставляя в формулу (I. 65), находим

$$\varphi = 203^{\circ}726.$$

Формулы и таблицы для вычисления оптической и физической либрации Луны можно найти в объяснении к *Астрономическому Ежегоднику СССР* (см., например, *Астрономический Ежегодник СССР* на 1964 г., стр. 633—635).

---

### § 1. Метод Лапласа—Ньюкома

**1. Основная задача небесной механики.** Основная задача небесной механики может быть сформулирована следующим образом: исследовать движение десяти материальных точек, представляющих Солнце, Меркурий, Венеру, Землю, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон, предполагая, что движение происходит в пустоте под действием только сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения Ньютона.

За инерциальную систему координат, относительно которой рассматривается движение тел солнечной системы, примем следующую систему: начало координат находится в центре инерции солнечной системы; основная плоскость  $xу$  — мгновенная орбита Земли (эклиптика) определенной эпохи (например, нормальной эпохи 1950.0); ось  $x$  направлена в точку весеннего равноденствия для той же эпохи; ось  $z$  — к северному полюсу эклиптики и ось  $y$  образует правую систему с осями  $x$  и  $z$ .

Так как мы с самого начала условились рассматривать солнечную систему как изолированную систему материальных точек, на которую не действуют никакие внешние силы, то отсюда следует, что центр инерции системы движется прямолинейно и равномерно относительно некоторой абсолютной неподвижной системы прямоугольных декартовых координат.

Фиксация в пространстве инерциальной астрономической системы координат составляет важную задачу небесной механики, астрометрии и звездной астрономии.

В настоящее время хорошо известно, что центр инерции солнечной системы (Солнце) описывает приближ-

тельно круговую орбиту вокруг центра Галактики и, таким образом, его движение не может рассматриваться как прямолинейное и равномерное. Однако период обращения центра инерции солнечной системы вокруг галактического центра равен

$$P = 185.9 \cdot 10^6 \text{ лет,}$$

откуда среднее угловое перемещение за год составляет

$$n = 0''006972.$$

Поэтому ускорение по радиусу-вектору, вызываемое вращением Галактики, равно

$$W = Rn^2 = 2.8 \cdot 10^{-10} \text{ м/сек.}^2,$$

где  $R = 16.5 \cdot 10^8$  а. е. — радиус галактической орбиты Солнца. Таким образом, дополнительное ускорение, вызываемое вращением Галактики, настолько ничтожно, что может не приниматься во внимание при решении основной задачи небесной механики.

Итак, система координат, помещенная в центр инерции солнечной системы, с осями, фиксированными для принятой эпохи, может с полным правом рассматриваться как инерциальная система координат.

В этой системе координат действующими силами являются только силы взаимного тяготения. При переходе к любой другой системе координат (см. главу I) в дифференциальных уравнениях движения появляются дополнительные члены, связанные с неинерциальным характером этих систем.

Так как точка весеннего равноденствия определяется пересечением на небесной сфере плоскости земного экватора и плоскости земной орбиты и так как за единицу времени мы принимаем период вращения Земли вокруг своей оси, то для перехода от одних систем координат к другим и от одной эпохи к другой требуется знать со всей возможной точностью поступательное и вращательное движение Земли в пространстве относительно инерциальной системы координат.

Окончательная фиксация координатной системы в пространстве возможна только по отношению к звездам или

удаленным звездным системам (внегалактическим туманностям), поэтому полное решение задачи о пространственно-временной системе отсчета, которая лежит в основе изучения всех вообще физических процессов, выходит за пределы небесной механики и является, как уже было сказано выше, комплексной задачей небесной механики, звездной астрономии и астрометрии.

**2. Уравнения движения в цилиндрических координатах.** При изучении движения больших планет удобно в качестве основной системы координат принять гелиоцентрическую систему координат. В гелиоцентрической системе координат основная задача небесной механики несколько упрощается, так как задача о движении десяти тел приводится к задаче о движении девяти тел.

Итак, поместим начало координат  $O$  в центр Солнца, за основную плоскость  $xu$  примем мгновенную плоскость орбиты Земли для нормальной эпохи 1950.0, ось  $x$  направим в точку весеннего равноденствия для той же эпохи, ось  $z$  направим в северный полюс эклиптики, ось  $y$  составляет правую систему с осями  $x$  и  $z$ . Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат. Через  $r$  и  $\rho$  обозначим соответственно радиус-вектор планеты  $P$  и его проекцию на плоскость  $xu$ , через  $w$  обозначим долготу планет  $P$ , отсчитываемую в плоскости  $xu$  от оси  $x$ . Можем теперь написать

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos w, \\ y &= \rho \sin w, \\ r^2 &= \rho^2 + z^2. \end{aligned} \quad (\text{II. 1})$$

Чтобы составить дифференциальные уравнения движения планеты в цилиндрических координатах, воспользуемся хорошо известными уравнениями Лагранжа второго рода (см., например, книгу Г. Н. Дубошина „Небесная механика“, 1963), которые запишем в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \quad (\text{II. 2})$$

Положение планеты  $P$  однозначно определяется тремя величинами  $q_k$ , которые называются обобщенными коор-

динатами системы, или переменными Лагранжа. В основной задаче небесной механики при изучении гелиоцентрического движения девяти больших планет  $k$  принимает значения от  $k=1$  до  $k=3 \times 9 = 27$ .  $T$  — живая сила системы, является функцией обобщенных скоростей  $\dot{q}$ . Величины  $Q_k$  в правых частях дифференциальных уравнений (II. 2) определяются действующими в системе силами и предполагаются выраженными через  $t$ ,  $q_k$  и  $\dot{q}_k$ . Величины  $Q_k$  называются обобщенными силами, хотя размерность этих величин, вообще говоря, отлична от размерности силы.

Уравнения Лагранжа (II. 2) позволяют очень просто переходить от обобщенных координат к каким угодно переменным, необходимо только выразить через эти переменные живую силу системы  $T$  и составить выражения для обобщенных сил  $Q_k$ . Чтобы перейти от обобщенных координат к цилиндрическим, положим для планеты, имеющей координаты  $q_1, q_2, q_3$ ,

$$\begin{aligned} q_1 &= \rho, \\ q_2 &= \omega, \\ q_3 &= z. \end{aligned} \tag{II. 3}$$

Живая сила планеты выражается в цилиндрических координатах следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\omega}^2 + \dot{z}^2), \tag{II. 4}$$

где через  $m$  обозначена масса планеты (за единицу массы принята масса Солнца).

Обозначим теперь через  $P$ ,  $T$  и  $Z$  — компоненты ускорения планеты соответственно по направлению проекции радиуса-вектора на плоскость  $xu$ , по направлению перпендикуляра к этой проекции в плоскости  $xu$  и по направлению оси  $z$ .

Тогда

$$\begin{aligned} Q_1 &= mP, \\ Q_2 &= m\rho T, \\ Q_3 &= mZ. \end{aligned} \tag{II. 5}$$

Теперь можем легко написать дифференциальные уравнения движения планеты

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 &= P, \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{dw}{dt}\right) &= \rho T, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z.\end{aligned}\quad (\text{II. 6})$$

В том случае, когда действующие силы обладают силовой функцией, т. е. когда существует такая функция  $U$ , частные производные которой по координатам планеты равны компонентам силы, действующей на эту планету, уравнения движения можно написать так:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 &= \frac{dU}{d\rho}, \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{dw}{dt}\right) &= \frac{dU}{dw}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\quad (\text{II. 7})$$

Как известно, силы взаимного притяжения по закону Ньютона обладают силовой функцией

$$U = \frac{k^2(1+m)}{r} + R, \quad (\text{II. 8})$$

где первый член соответствует задаче двух тел, а второй представляет так называемую пертурбационную функцию. Постоянная  $k^2$  носит название постоянной Гаусса. Поэтому окончательно дифференциальные уравнения движения планеты могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + k^2(1+m)\frac{\rho}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{dw}{dt}\right) &= \frac{\partial R}{\partial w}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}.\end{aligned}\quad (\text{II. 9})$$

**3. Постоянная Гаусса.** Постоянная Гаусса  $k^2 = f$ , где  $f$  так называемая постоянная тяготения. Если принять наиболее удобные в теории движения планет астрономические единицы: единица длины — полуось земной орбиты, называемая обычно астрономической единицей длины (а. е.), единица времени — средние солнечные

сутки, единица массы — масса Солнца, то постоянная Гаусса будет иметь следующее численное значение:

$$\begin{aligned} k &= 0.01720209895, \\ k'' &= 3548''.18761. \end{aligned} \quad (\text{II. 10})$$

Эта величина была получена Гауссом по формуле

$$k = \frac{2\pi a^{3/2}}{T\sqrt{1+m}}, \quad (\text{II. 11})$$

где  $a$  — большая полуось земной орбиты в а. е.,  $m$  — масса Земли и Луны, а  $T$  — продолжительность сидерического года в средних солнечных сутках. Гаусс принял следующие, наилучшие в его время, числовые значения астрономических постоянных:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= 354710, \\ T &= 365.2563835, \\ a &= 1. \end{aligned} \quad (\text{II. 12})$$

Так как масса Земли и продолжительность сидерического года определяются из наблюдений и потому их численные значения постепенно улучшаются, то и численное значение  $k$ , полученное Гауссом, должно постоянно изменяться. Однако более удобно рассматривать величину  $k$ , определяемую равенством (II. 10), как абсолютную постоянную, но при этом большую полуось земной орбиты считать отличной от астрономической единицы длины. Так, например, Ньюком, принимая

$$\begin{aligned} k &= 0.01720209895, \\ \frac{1}{m} &= 329390, \\ T &= 365.25636042, \end{aligned} \quad (\text{II. 13})$$

нашел по формуле (II. 11), что

$$a = 1.000000030 \text{ а. е.}, \quad (\text{II. 14})$$

т. е. большая полуось орбиты Земли отличается от единицы только в восьмом десятичном знаке. Заметим, что постоянную Гаусса можно положить равной  $k = 1$ , если

принять за единицу времени  $1/k = 58.13244087$  средних солнечных суток.

**4. Уравнения движения в полярных координатах.** При построении теории движения больших планет удобно за основную координатную плоскость принять не неподвижную плоскость эклиптики для нормальной эпохи  $T_0$ , а подвижную плоскость, в которой расположена в каждый данный момент орбита планеты  $P$ . Мы определим эту плоскость как плоскость, проходящую через Солнце (т. е. через начало принятой нами системы координат) и касательную к оскулирующей орбите планеты  $P$ . Приняв эту плоскость оскулирующей орбиты за плоскость  $xu$ , получим

$$\begin{aligned} \rho &= r, \\ z &= 0, \end{aligned} \tag{II. 15}$$

и уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= \frac{\partial R}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{dw}{dt} \right) &= \frac{\partial R}{\partial w}, \end{aligned} \tag{II. 16}$$

где  $w$  отсчитывается от оси  $x$ , лежащей в плоскости орбиты и имеющей произвольное направление. Угол  $w$  носит название долготы планеты  $P$  в орбите.

Уравнения (II. 16) лежат в основе метода Лапласа, изложенного им в первом томе „Трактата по небесной механике“ (1799 г.). Отметим, что это был первый метод, разработанный для аналитического определения возмущений больших планет.

В 80-х годах прошлого столетия Ньюком (1835—1909) применил метод Лапласа для построения теории движения больших планет. Он остановился на методе Лапласа как на наиболее выгодном с практической точки зрения, но внес в него некоторые изменения, которые имели целью облегчить вычисление возмущений высших порядков относительно планетных масс. Все фундаментальные таблицы внутренних планет были вычислены Ньюкомом по методу Лапласа. Этот же метод использовала Ш. Г. Шараф для построения аналитической теории движения Плутона (1955 г.). Таким образом, метод Лап-



ласа полностью оправдал себя при решении основной задачи небесной механики.

В настоящей главе метод Лапласа будет изложен со всеми необходимыми подробностями, в той форме, которую ему придал Ньюком. В качестве числового примера, иллюстрирующего практическое применение метода Лапласа—Ньюкома, будет изложена теория движения Плутона, разработанная в Институте теоретической астрономии (Ленинград) Ш. Г. Шараф.

**5. Возмущения логарифма радиуса-вектора планеты.** Перейдем, следуя Ньюкому, от радиуса-вектора планеты  $r$  к величине  $\rho$  по формуле

$$r = E^{\rho}, \quad (\text{II. 17})$$

где  $E$  — основание натуральных логарифмов, или

$$\rho = \lg r, \quad (\text{II. 18})$$

отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \rho}. \quad (\text{II. 19})$$

Уравнения (II. 16) можно теперь записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r} &= \frac{\partial R}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{dw}{dt} \right) &= r^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial R}{\partial w}. \end{aligned} \quad (\text{II. 20})$$

Умножая первое уравнение (II. 20) на  $2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{r} \frac{dr}{dt}$ , второе — на  $2 \frac{dw}{dt}$ , суммируя произведения и интегрируя, получим

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 - \frac{2k^2(1+m)}{r} = 2 \int d'R + C_0, \quad (\text{II. 21})$$

где для краткости положено

$$d'R = \left( \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial R}{\partial w} \frac{dw}{dt} \right) dt.$$

Величина  $C_0$  — произвольная постоянная интегрирования. Сложим теперь уравнение (II. 21) с первым уравнением (II. 20). После небольших преобразований получим

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k^2(1+m)}{r} = 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho} + C_0. \quad (\text{II. 22})$$

В случае невозмущенного движения радиус-вектор планеты  $r_0$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r_0^2)}{dt^2} - \frac{k^2 (1+m)}{r_0} = - \frac{k^2 (1+m)}{a}. \quad (\text{II. 23})$$

Вычитая почленно (II. 23) из (II. 22), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (r^2 - r_0^2) - k^2 (1+m) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) &= 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho} + \\ &+ \frac{k^2 (1+m)}{a} + C_0. \end{aligned} \quad (\text{II. 24})$$

Положим

$$r_0 = E^{\rho_0}. \quad (\text{II. 25})$$

Пусть

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho. \quad (\text{II. 26})$$

Тогда

$$r^2 = E^{2\rho} = E^{2(\rho_0 + \delta\rho)} = r_0^2 E^{2\delta\rho} = r_0^2 \left( 1 + 2\delta\rho + \frac{2^2}{1 \cdot 2} \delta\rho^2 + \dots \right),$$

$$\frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) = r_0^2 \delta\rho + r_0^2 \delta\rho^2 + \dots, \quad (\text{II. 27})$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = - \frac{\delta\rho}{r_0} + \frac{\delta\rho^2}{2r_0} + \dots$$

Подставляя эти выражения в уравнение (II. 24), ограничиваясь в разложении членами второго порядка малости и перенося эти члены второго порядка в правую часть, получим

$$\frac{d^2 (r_0^2 \delta\rho)}{dt^2} + \frac{k^2 (1+m)}{r_0^3} (r_0^2 \delta\rho) = Q + 2C_1, \quad (\text{II. 28})$$

где для краткости обозначили

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{d^2 (r_0^2 \delta\rho^2)}{dt^2} + \frac{k^2 (1+m) \delta\rho^2}{2r_0}, \\ 2C_1 &= C_0 + \frac{k^2 (1+m)}{a}. \end{aligned} \quad (\text{II. 29})$$

Уравнение (II. 28) дает возмущения радиуса-вектора планеты  $P$ . Ограничимся в дальнейшем вычислении возмущений первого порядка относительно планетных масс. Тогда в первом выражении (II. 29) можем отбро-

силь два последние члена в правой части, содержащие  $\delta\rho^2$ , и получим

$$Q = 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho}. \quad (\text{II. 30})$$

Выражения  $d'R$  и  $\frac{\partial R}{\partial \rho}$ , входящие в (II. 30), мы должны вычислить с невозмущенными значениями координат планет.

Таким образом, вычисление возмущений логарифма радиуса-вектора приведено к интегрированию дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r_0^3} z = Z, \quad (\text{II. 31})$$

где  $\frac{k^2(1+m)}{r_0^3}$  и  $Z$  — известные функции времени. Если известны два частных линейно-независимых решения  $p$  и  $q$  однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (II. 31), т. е., иными словами, если известны две переменные  $p$  и  $q$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r_0^3} p &= 0, \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r_0^3} q &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II. 32})$$

то общее решение уравнения (II. 31) может быть записано следующим образом:

$$z = \frac{1}{p\dot{q} - q\dot{p}} \left( q \int p Z dt - p \int q Z dt + K_1 p + K_2 q \right), \quad (\text{II. 33})$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — постоянные интегрирования.

Нетрудно видеть, что уравнениям (II. 32) удовлетворяют координаты невозмущенного эллиптического движения

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - e), \\ y &= a\sqrt{1-e^2} \sin E, \end{aligned} \quad (\text{II. 34})$$

где  $E$  — эксцентриская аномалия планеты. Поэтому мы можем принять за частные решения уравнения (II. 31) переменные

$$\begin{aligned} p &= \cos E - e, \\ q &= \sin E. \end{aligned} \quad (\text{II. 35})$$

Тогда из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - t_0) \quad (\text{II. 36})$$

следует, что

$$p\dot{q} - q\dot{p} = (1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = n, \quad (\text{II. 37})$$

и уравнение (II. 33) принимает вид

$$z = \frac{1}{n} \left( q \int p Z dt - p \int q Z dt + K_1 p + K_2 q \right), \quad (\text{II. 38})$$

откуда, полагая

$$\begin{aligned} z &= r_0^2 \delta \rho, \\ Z &= Q + 2C_1, \end{aligned} \quad (\text{II. 39})$$

получим

$$\begin{aligned} \delta \rho &= \frac{1}{nr_0^2} \left( q \int p (Q + 2C_1) dt - p \int q (Q + 2C_1) dt + \right. \\ &\quad \left. + K_1 p + K_2 q \right). \end{aligned} \quad (\text{II. 40})$$

Мы получили окончательное выражение для вычисления возмущений логарифма радиуса-вектора планеты  $P$ . Если ограничиваемся возмущениями первого порядка, то  $Q$  вычисляется по формуле (II. 30), а при вычислении возмущений второго порядка для  $Q$  необходимо взять первое выражение (II. 29). При этом в разложение пертурбационной функции входят возмущенные координаты планет.

**6. Возмущения долготы планеты.** Для определения возмущений долготы планеты воспользуемся вторым уравнением (II. 20). Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt + C, \quad (\text{II. 41})$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. Аналогичное уравнение для случая невозмущенного движения имеет вид

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r_0^2} n, \quad (\text{I. 42})$$

где через  $w_0$  обозначена долгота планеты в орбите, соответствующая эллиптическому движению. Положим

$$w = w_0 + \delta w. \quad (\text{II. 43})$$

Вычитая теперь уравнение (II. 42) из уравнения (II. 41), получим

$$\frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial R}{\partial w} dt + \frac{C}{r^2} - \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r_0^2} n. \quad (\text{II. 44})$$

Воспользуемся разложением  $\frac{1}{r^2}$  в ряд

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} (1 - 2\delta\rho + 2\delta\rho^2 - \dots). \quad (\text{II. 45})$$

Подставляя (II. 45) в (II. 44), находим, ограничиваясь членами первого порядка,

$$\frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r_0^2} \int \frac{\partial R}{\partial w} dt + \frac{C}{r_0^2} (1 - 2\delta\rho) - \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r_0^2} n. \quad (\text{II. 46})$$

или

$$\frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r_0^2} \left( \int \frac{\partial R}{\partial w} dt + C - 2C\delta\rho - a^2 \sqrt{1-e^2} n \right). \quad (\text{II. 47})$$

Разность  $C - a^2 \sqrt{1-e^2} n$  имеет порядок возмущающей массы. Поэтому можем положить

$$m' C_2 = C - a^2 \sqrt{1-e^2} n, \quad (\text{II. 48})$$

где  $m'$  — масса возмущающей планеты  $P'$ . Тогда

$$C = m' C_2 + a^2 \sqrt{1-e^2} n. \quad (\text{II. 49})$$

Отбрасывая в (II. 47) член второго порядка относительно возмущающей массы  $2m' C_2 \delta\rho$ , получим окончательно

$$\frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r_0^2} \left( \int \frac{\partial R}{\partial w} dt + m' C_2 - 2a^2 \sqrt{1-e^2} n \delta\rho \right). \quad (\text{II. 50})$$

Таким образом, зная возмущения радиуса-вектора планеты, находим возмущения долготы при помощи квадратуры

$$\delta w = \frac{1}{r_0^2} \int \left( \frac{\partial R}{\partial w} dt + m' C_2 - 2a^2 \sqrt{1 - e^2} n \delta \rho \right) dt + C_3, \quad (\text{II. 51})$$

где  $C_3$  — постоянная интегрирования.

**7. Возмущения узла и наклона орбиты планеты.** Нам остается определить положение в пространстве плоскости оскулирующей орбиты. Относительно основной неподвижной плоскости, за которую приняли мгновенную плоскость орбиты Земли для нормальной эпохи  $T_0 = 1950.0$ , положение оскулирующей орбиты планеты  $P$  можно определить двумя углами  $i$  и  $\Omega$ . Угол  $i$  определяет наклон орбиты к плоскости эклиптики, а угол  $\Omega$  определяет долготу восходящего узла орбиты относительно точки весеннего равноденствия нормальной эпохи  $T_0 = 1950.0$ . Возмущения элементов  $i$  и  $\Omega$  определяются известными уравнениями Лагранжа (см. приложение 1)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \quad (\text{II. 52})$$

где  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $n$  — элементы орбиты планеты  $P$ ,  $R$  — пертурбационная функция. Если ограничиваемся вычислением возмущений первого порядка относительно планетных масс, то в правые части уравнений (II. 52) должны подставить невозмущенные значения элементов орбит. Тогда интегрирование сводится к простым квадратурам

$$\begin{aligned} \delta i &= \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \int \left( \cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) dt + C_4, \\ \delta \Omega &= \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt + C_5, \end{aligned} \quad (\text{II. 53})$$

где  $C_4$  и  $C_5$  — постоянные интегрирования.

**8. Определение постоянных интегрирования.** Итак, формулы (II. 40), (II. 51), (II. 53) определяют возмущения первого порядка орбиты планеты  $P$  для любого момента времени  $t$ . Однако применение этих формул требует вычисления пяти производных пертурбационной функции, а именно

$$\frac{\partial R}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial i}.$$

Ввиду сложности выражения пертурбационной функции через время  $t$  и элементы орбиты возмущаемой и возмущающей планет приходится искать разложение пертурбационной функции в форме бесконечного ряда. Задача разложения пертурбационной функции в ряд является одной из основных задач небесной механики. Для решения этой задачи предложено большое количество различных методов. В § 2 настоящей главы мы подробно рассмотрим разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома. Этим будет доведено до конца интегрирование дифференциальных уравнений движения планеты  $P$ .

Обратим теперь внимание на то, что в процессе интегрирования уравнений движения нами было введено семь постоянных интегрирования, а именно

$$C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, C_4, C_5.$$

Между тем порядок системы требует введения только шести постоянных интегрирования, так как мы решали систему, состоящую из двух уравнений второго порядка и двух уравнений первого порядка. Поэтому не все из полученных нами постоянных являются независимыми. Действительно, оказывается, что постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $K_1$  связаны между собой некоторым соотношением, на выводе которого не будем останавливаться.

Произвольные постоянные интегрирования могут быть определены различными способами. Проще всего определить их из условия: в момент оскуляции  $t = t_0$  возмущения координат  $\rho$  и  $w$  и их производные, а также возмущения элементов  $i$  и  $\Omega$  равны нулю. Таким образом, полагаем

$$\begin{aligned} (\delta\rho)_{t=t_0} &= 0, & (\delta w)_{t=t_0} &= 0, & (\delta i)_{t=t_0} &= 0, \\ \left(\frac{d\delta\rho}{dt}\right)_{t=t_0} &= 0, & \left(\frac{d\delta w}{dt}\right)_{t=t_0} &= 0, & (\delta\Omega)_{t=t_0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II. 54})$$

Вопрос об определении постоянных интегрирования в методе Лапласа—Ньюкома подробно разобран в работе Ш. Г. Шараф (см. список литературы к главе II в конце книги).

**9. Вычисление гелиоцентрической долготы и широты планеты.** Имея возмущенные значения  $\rho$ ,  $w$ ,  $i$  и  $\Omega$ , можем легко вычислить гелиоцентрическую долготу и широту планеты.

Долгота планеты в орбите  $AP$  равна (рис. 8)

$$w = u + \sigma, \quad (\text{II. 55})$$

где  $u = v + \omega$  носит название аргумента широты и  $\sigma = AN$  — расстояние от узла до точки отсчета долгот в орбите.

Обозначим через  $L = \gamma Q$  и  $B = PQ$  гелиоцентрическую долготу и широту планеты соответственно. Прямоугольный сферический треугольник  $NPQ$  дает

$$\text{tg}(L - \Omega) = \cos i \text{tg}(w - \sigma), \quad (\text{II. 56})$$

$$\sin B = \sin i \sin(w - \sigma). \quad (\text{II. 57})$$

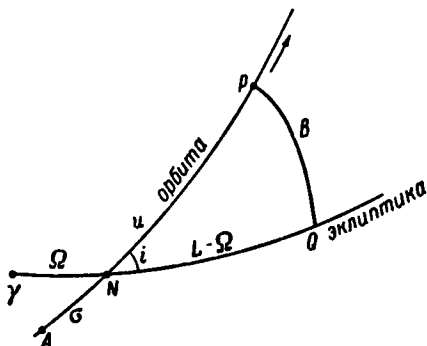


Рис. 8. Гелиоцентрическая долгота и широта планеты (проекция на небесную сферу).

Фиксируем положение точки отсчета  $A$  на орбите следующим условием:

$$\sigma_0 = \Omega_0. \quad (\text{II. 58})$$

Тогда с точностью до величин первого порядка

$$\sigma = \sigma_0 + d\sigma = \Omega_0 + d\Omega \cos i, \quad (\text{II. 59})$$

так как

$$d\sigma = d\Omega \cos i. \quad (\text{II. 60})$$

Вычислив по формулам (II. 56) и (II. 57) гелиоцентрическую долготу и широту планеты, можем затем легко



определить прямоугольные эклиптические координаты планеты  $P$  по формулам

$$\begin{aligned}x &= r \cos B \cos L, \\y &= r \cos B \sin L, \\z &= r \sin B.\end{aligned}\tag{II. 61}$$

## § 2. Разложение пертурбационной функции в ряд

**1. Пертурбационная функция.** Пусть мы имеем Солнце  $S$  и две планеты — возмущаемую планету  $P$ , движение которой изучаем, и возмущающую планету  $P'$ , движение которой будем считать известным. Прямоугольные координаты Солнца и планет относительно инерциальной системы координат обозначим соответственно через  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0; \xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ . Расстояния планет от Солнца обозначим через  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а их взаимное расстояние —  $\Delta_3$ . Тогда

$$\Delta_1^2 = (\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2.\tag{II. 62}$$

Для  $\Delta_2^2$  и  $\Delta_3^2$  имеем аналогичные формулы.

Обозначим массу Солнца через  $m_0$ , массу планеты  $P$  через  $m$  и массу планеты  $P'$  через  $m'$ . Тогда притяжение, испытываемое точкой  $m$  со стороны точки  $m_0$ , будет равно

$$k^2 \frac{m_0 m}{\Delta_1^2},$$

со стороны точки  $m'$  —

$$k^2 \frac{m m'}{\Delta_3^2},$$

где через  $k$  обозначена постоянная Гаусса. Компоненты этих сил по осям координат равны

$$\begin{aligned}-k^2 m_0 m \frac{\xi - \xi_0}{\Delta_1^3}, & \quad -k^2 m_0 m \frac{\eta - \eta_0}{\Delta_1^3}, & \quad -k^2 m_0 m \frac{\zeta - \zeta_0}{\Delta_1^3}, \\-k^2 m m' \frac{\xi - \xi'}{\Delta_3^3}, & \quad -k^2 m m' \frac{\eta - \eta'}{\Delta_3^3}, & \quad -k^2 m m' \frac{\zeta - \zeta'}{\Delta_3^3}.\end{aligned}$$

Поэтому уравнения движения планеты  $P$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{\xi - \xi_0}{\Delta_1^3} - k^2 m m' \frac{\xi - \xi'}{\Delta_3^3}, \\
m \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{\eta - \eta_0}{\Delta_1^3} - k^2 m m' \frac{\eta - \eta'}{\Delta_3^3}, \\
m \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{\zeta - \zeta_0}{\Delta_1^3} - k^2 m m' \frac{\zeta - \zeta'}{\Delta_3^3}.
\end{aligned} \tag{II. 63}$$

Так как нас интересует гелиоцентрическое движение планеты  $P$ , то исключим из уравнений (II. 63) координаты Солнца  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ . Положим

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_0 + x, & \xi' &= \xi_0 + x', \\
\eta &= \eta_0 + y, & \eta' &= \eta_0 + y', \\
\zeta &= \zeta_0 + z, & \zeta' &= \zeta_0 + z',
\end{aligned} \tag{II. 64}$$

так что  $x, y, z$  — гелиоцентрические координаты планеты  $P$  и  $x', y', z'$  — гелиоцентрические координаты планеты  $P'$ . Координаты Солнца  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ .

Тогда из уравнений (II. 63) следует, что после замены переменных по формулам (II. 64)

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2x}{dt^2} + m \frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{x}{\Delta_1^3} - k^2 m m' \frac{x - x'}{\Delta_3^3}, \\
m \frac{d^2y}{dt^2} + m \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{y}{\Delta_1^3} - k^2 m m' \frac{y - y'}{\Delta_3^3}, \\
m \frac{d^2z}{dt^2} + m \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{z}{\Delta_1^3} - k^2 m m' \frac{z - z'}{\Delta_3^3}.
\end{aligned} \tag{II. 65}$$

Но для производных  $\frac{d^2\xi_0}{dt^2}, \frac{d^2\eta_0}{dt^2}, \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}$ , можем написать уравнения, аналогичные уравнениям (II. 63),

$$\begin{aligned}
m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{\xi_0 - \xi}{\Delta_1^3} - k^2 m_0 m' \frac{\xi_0 - \xi'}{\Delta_2^3}, \\
m_0 \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{\eta_0 - \eta}{\Delta_1^3} - k^2 m_0 m' \frac{\eta_0 - \eta'}{\Delta_2^3}, \\
m_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= -k^2 m_0 m \frac{\zeta_0 - \zeta}{\Delta_1^3} - k^2 m_0 m' \frac{\zeta_0 - \zeta'}{\Delta_2^3}
\end{aligned} \tag{II. 66}$$

или, подставляя (II. 64) и сокращая на  $m_0$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= k^2 m \frac{x}{\Delta_1^3} + k^2 m' \frac{x'}{\Delta_2^3}, \\ \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= k^2 m \frac{y}{\Delta_1^3} + k^2 m' \frac{y'}{\Delta_2^3}, \\ \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= k^2 m \frac{z}{\Delta_1^3} + k^2 m' \frac{z'}{\Delta_2^3}.\end{aligned}\quad (\text{II. 67})$$

Обозначим  $\Delta_1 = r_1$ ,  $\Delta_2 = r'$  и  $\Delta_3 = \Delta$  и подставим выражения (II. 67) в уравнения (II. 65). Мы получим после сокращения на  $m$  гелиоцентрические уравнения движения планеты  $P$  в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 m \frac{x}{r^3} - k^2 m' \frac{x'}{r'^3} - k^2 m_0 \frac{x}{r^3} + k^2 m' \frac{x' - x}{\Delta^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 m \frac{y}{r^3} - k^2 m' \frac{y'}{r'^3} - k^2 m_0 \frac{y}{r^3} + k^2 m' \frac{y' - y}{\Delta^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2 m \frac{z}{r^3} - k^2 m' \frac{z'}{r'^3} - k^2 m_0 \frac{z}{r^3} + k^2 m' \frac{z' - z}{\Delta^3}\end{aligned}\quad (\text{II. 68})$$

или

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m) \frac{x}{r^3} + k^2 m' \left( \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m) \frac{y}{r^3} + k^2 m' \left( \frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m) \frac{z}{r^3} + k^2 m' \left( \frac{z' - z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r'^3} \right),\end{aligned}\quad (\text{II. 69})$$

причем

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2.\end{aligned}\quad (\text{II. 70})$$

Уравнения (II. 69) можно записать теперь в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 (m_0 + m) \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 (m_0 + m) \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2 (m_0 + m) \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z},\end{aligned}\quad (\text{II. 71})$$

где

$$R = k^2 m' \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right\}$$

пертурбационная функция.

Взаимное расстояние планет  $\Delta$  выражается формулой

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H, \quad (\text{II. 72})$$

где через  $H$  обозначен угол между радиусами-векторами  $r$  и  $r'$ . При разложении пертурбационной функции в бесконечный ряд наибольшие трудности представляет разложение первого члена

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{-1/2}, \quad (\text{II. 73})$$

который называется главной частью пертурбационной функции.

**2. Коэффициенты Лапласа.** Рассмотрим прежде всего наиболее простой случай движения планет, когда плоскости орбит совпадают, а эксцентриситеты равны нулю, т. е. движение происходит по круговым орбитам. В этом случае главная часть пертурбационной функции принимает вид

$$\frac{1}{\Delta_0} = (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0)^{-1/2}, \quad (\text{II. 74})$$

где

$$H_0 = L - L'.$$

Через  $L$  и  $L'$  обозначим средние долготы планет, отсчитанные от оси  $x$ , лежащей в плоскости движения планет и имеющей произвольное направление. Пусть  $a < a'$  и  $a = \frac{a}{a'} < 1$ , тогда

$$\frac{a'}{\Delta_0} = (1 - 2a \cos H_0 + a^2)^{-1/2}. \quad (\text{II. 75})$$

Рассмотрим более общее выражение

$$F^{-\frac{n}{2}} = (1 - 2a \cos H_0 + a^2)^{-\frac{n}{2}}. \quad (\text{II. 76})$$

Из теории рядов Фурье известно, что функция вида  $F^{-\frac{n}{2}}$  может быть разложена в бесконечный ряд по

косинусам углов, кратных  $H_0$ , который сходится для всех значений  $H_0$ , т. е.

$$\left(\frac{a'}{\Delta_0}\right)^n = F^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iH_0. \quad (\text{II. 77})$$

Коэффициенты  $b_n^{(i)}$  в этом разложении носят название коэффициентов Лапласа. Выражения для вычисления коэффициентов Лапласа даются интегралом Фурье

$$b_n^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2a \cos H_0 + a^2)^{-\frac{n}{2}} \cos iH_0 dH_0. \quad (\text{II. 78})$$

Этот интеграл неудобен для практических вычислений, однако на практике обычно не приходится встречаться с вычислением коэффициентов Лапласа, так как существуют специальные таблицы: E. W. Brown and D. Brouwer „Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis“. Cambridge, 1932, которые содержат эти коэффициенты. Таблицы Брауна и Брауэра дают численные значения величины

$$\lg g_{\frac{n}{2}}^{(i)},$$

где  $g_{\frac{n}{2}}^{(i)}$  определяются условием

$$g_{\frac{n}{2}}^{(i)} = \frac{(1 - a^2)^{\frac{n}{2}}}{a^i} b_n^{(i)} \quad (\text{II. 79})$$

для  $n=1, 3, 5, 7$  и  $i=0, 1, 2, \dots, 11$ , по аргументу

$$p = \frac{a^2}{1 - a^2}.$$

**3. Разложение по степеням взаимного наклона.** Рассмотрим теперь случай двух круговых орбит, наклоненных друг к другу под углом  $I$ . Пусть  $L$  и  $L'$  — средние долготы планет, отсчитываемые от оси  $x$ , которую направим в точку  $N$  — пересечение орбит на небесной сфере. Тогда из рис. 9 находим

$$\cos H = \cos L \cos L' + \sin L \sin L' \cos I \quad (\text{II. 80})$$

или

$$\cos H = \cos(L' - L) - 2 \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2}. \quad (\text{II. 81})$$

Угол  $I$  определяется из треугольника  $QNQ'$  по формуле

$$\cos I = \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega'). \quad (\text{II. 82})$$

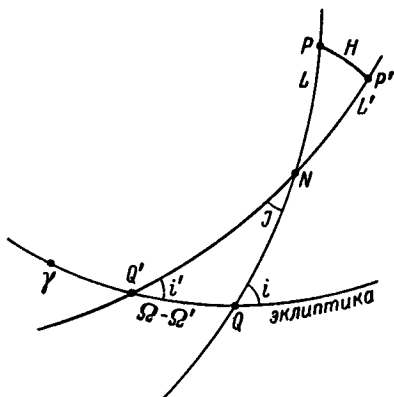


Рис. 9. Проекция орбит двух планет на небесную сферу.

Подставляя (II. 81) в (II. 73) и учитывая, что эксцентриситеты орбит равны нулю, напишем выражение для  $\frac{1}{\Delta}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0)^{-1/2} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{4aa' \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2}}{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{II. 83})$$

Рассмотрим в этом выражении член

$$\frac{4aa' \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2}}{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0}, \quad (\text{II. 84})$$

Очевидно, что он по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{4aa' \sin^2 \frac{I}{2}}{(a - a')^2}. \quad (\text{II. 85})$$

Нетрудно проверить, что для всех больших планет выражение (II. 85) меньше единицы. Наибольшего значения величина (II. 85) достигает для случая Плутона и Урана (0.124). Мы оставляем при этом в стороне случай Плутона и Нептуна, когда аналитические разложения вообще становятся непригодными.

Теперь можно разложить по формуле бинома выражение

$$\left( 1 + \frac{4aa' \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2}}{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0} \right)^{-1/2}$$

в абсолютно сходящийся ряд по степеням  $\sin^2 \frac{I}{2}$ . Используя выражение (II. 74), получим следующий бесконечный ряд (написанные члены достаточны для всех больших планет):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \Delta_0^{-1} - 2aa'\Delta_0^{-3} \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2} + \\ & + 6a^2a'^2\Delta_0^{-5} \sin^2 L \sin^2 L' \sin^4 \frac{I}{2} - \\ & - 20a^3a'^3\Delta_0^{-7} \sin^3 L \sin^3 L' \sin^6 \frac{I}{2} + \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{II. 86})$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-n} &= (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0)^{-\frac{n}{2}} = \\ &= (a')^{-n} (1 - 2a \cos H_0 + a^2)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

или, пользуясь разложением (II. 77),

$$(a')^n \Delta_0^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iH_0. \quad (\text{II. 87})$$

Таким образом, в разложении (II. 86) имеем

$$\begin{aligned}
 2aa'\Delta_0^{-3} &= \frac{a}{a'} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_3^{(i)} \cos iH_0, \\
 6a^2a'^2\Delta_0^{-5} &= 3 \frac{a^2}{a'} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_5^{(i)} \cos iH_0, \\
 20a^3a'^3\Delta_0^{-7} &= 10 \frac{a^3}{a'} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_7^{(i)} \cos iH_0, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{II. 88}$$

При подстановке рядов (II. 88) в разложение (II. 86) нам придется каждый ряд умножить на одно из выражений

$$\left. \begin{aligned}
 \sin L \sin L' &= \frac{1}{2} [\cos (L' - L) - \cos (L' + L)], \\
 \sin^2 L \sin^2 L' &= \frac{1}{8} [2 - 2 \cos 2L - 2 \cos 2L' + \\
 &\quad + \cos (2L' + 2L) + \cos (2L' - 2L)], \\
 \sin^3 L \sin^3 L' &= \frac{1}{32} [9 \cos (L' - L) - 9 \cos (L' + L) + \\
 &\quad + 3 \cos (3L + L') - 3 \cos (3L - L') + \\
 &\quad + 3 \cos (3L' + L) - 3 \cos (3L' - L) + \\
 &\quad + \cos (3L' - 3L) - \cos (3L' + 3L)].
 \end{aligned} \right\}
 \tag{II. 89}$$

После умножения, приведения подобных членов и подстановки в (II. 86) получим окончательно

$$\begin{aligned}
 \Delta^{-1} &= \frac{1}{2} \sum A_i \cos (iL' - iL) + \\
 &\quad + \sin^2 \frac{I}{2} \sum B_i \cos [(i+1)L' - (i-1)L] + \\
 &\quad + \sin^4 \frac{I}{2} \sum C_i \cos [(i+2)L' - (i-2)L] + \\
 &\quad + \sin^6 \frac{I}{2} \sum D_i \cos [(i+3)L' - (i-3)L] + \\
 &\quad + \dots\dots\dots,
 \end{aligned}
 \tag{II. 90}$$



где  $A_i, B_i, C_i, D_i, \dots$  — функции больших полуосей орбит и  $\sin^2 \frac{I}{2}$ .

Если ввести в рассмотрение коэффициенты

$$C_n^i = a^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)}, \quad (\text{II. 91})$$

где  $b_n^{(i)}$  — коэффициенты Лапласа, то

$$\begin{aligned} a'A_i &= C_1^i - \frac{1}{2} (C_3^{i+1} + C_3^{i-1}) \sin^2 \frac{I}{2} + \\ &+ \frac{3}{8} (C_5^{i+2} + 4C_5^i + C_5^{i-2}) \sin^4 \frac{I}{2} - \\ &- \frac{5}{16} (C_7^{i+3} + 9C_7^{i+1} + 9C_7^{i-1} + C_7^{i-3}) \sin^6 \frac{I}{2} + \dots, \\ a'B_i &= \frac{1}{2} C_3^i - \frac{3}{4} (C_5^{i-1} + C_5^{i+1}) \sin^2 \frac{I}{2} + \\ &+ \frac{15}{6} (C_7^{i-2} + 3C_7^i + C_7^{i+2}) \sin^4 \frac{I}{2} - \dots, \\ a'C_i &= \frac{3}{8} C_5^i - \frac{15}{16} (C_7^{i-1} + C_7^{i+1}) \sin^2 \frac{I}{2} + \dots, \\ a'D_i &= \frac{5}{16} C_7^i - \dots \end{aligned}$$

Выражение (II. 90) дает окончательное разложение главной части пертурбационной функции по степеням взаимного наклона для случая круговых орбит.

**4. Разложение по степеням эксцентриситета.** Итак, нами полностью решена задача о разложении в бесконечный ряд главной части пертурбационной функции для случая круговых орбит. Мы получили это разложение в форме (II. 86), что можно записать кратко следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta} = F_0 \left( a, a', L, L', \sin^2 \frac{I}{2} \right). \quad (\text{II. 92})$$

Теперь поставим перед собой задачу разложить в бесконечный ряд функцию

$$\frac{1}{\Delta} = F \left( r, r', W, W', \sin^2 \frac{I}{2} \right), \quad (\text{II. 93})$$

где  $W, W'$  — истинные долготы планет, отсчитываемые, как и средние долготы  $L$  и  $L'$ , от оси  $x$ , направленной

в точку пересечения орбит на небесной сфере. Угол  $H$  между радиусами-векторами  $r$  и  $r'$  по-прежнему определяется формулами (II. 80) и (II. 81), где необходимо  $L$  и  $L'$  заменить на  $W$  и  $W'$ .

Так как эксцентриситеты орбит больших планет можно рассматривать как малые величины, то и разности

$$r - a, r' - a', W - L, W' - L'$$

можно рассматривать как малые приращения величин  $a$ ,  $a'$ ,  $L$ ,  $L'$ . Поэтому переход от разложения (II. 92) к разложению (II. 93) можно осуществить при помощи формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x) = & \varphi(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) + \\ & + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{II. 94})$$

где  $\Delta x$  — приращение величины  $x$ .

Вспомним, что разложение  $E^h$ , где  $E$  — основание натуральных логарифмов, в бесконечный ряд имеет вид

$$E^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \dots \quad (\text{II. 95})$$

Формулу (II. 94) можно записать символически так:

$$\varphi(x + \Delta x) = E^{\Delta x \frac{\partial}{\partial x}} \varphi(x) \quad (\text{II. 96})$$

или для случая любого числа переменных

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) = \\ = E^{\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \dots} \cdot \varphi(x, y, \dots). \end{aligned} \quad (\text{II. 97})$$

Ньюком считал более удобным рассматривать  $\frac{1}{\Delta}$  как функцию не  $r$  и  $r'$ , а  $\lg r$  и  $\lg r'$ . Поэтому он полагает

$$\frac{1}{\Delta} = F\left(\lg r, \lg r', W, W', \sin^2 \frac{I}{2}\right), \quad (\text{II. 98})$$

а в случае круговых орбит

$$\frac{1}{\Delta} = F_0\left(\lg a, \lg a', L, L', \sin^2 \frac{I}{2}\right). \quad (\text{II. 99})$$

Стоящая перед нами задача заключается в разложении выражения

$$\frac{1}{\Delta} = F\left(\lg a + \rho, \lg a' + \rho', L + h, L' + h', \sin^2 \frac{I}{2}\right) \quad (\text{II. 100})$$

по степеням малых приращений

$$\begin{aligned} \rho &= \lg r - \lg a, & h &= W - L, \\ \rho' &= \lg r' - \lg a', & h' &= W' - L'. \end{aligned} \quad (\text{II. 101})$$

Как известно из теории разложения координат эллиптического движения в ряды (см. приложение 16),

$$\begin{aligned} \rho &= \lg \frac{r}{a} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 + \dots + \\ &+ \left(-e + \frac{3}{8} e^3 + \dots\right) \cos M + \\ &+ \left(-\frac{3}{4} e^2 + \frac{11}{24} e^4 - \dots\right) \cos 2M + \\ &+ \left(-\frac{17}{24} e^3 + \dots\right) \cos 3M + \\ &+ \left(-\frac{71}{96} e^4 + \dots\right) \cos 4M + \dots, \end{aligned} \quad (\text{II. 102})$$

$$\begin{aligned} h &= W - L = v - M - \left(2e - \frac{e^3}{4} + \dots\right) \sin M + \\ &+ \left(\frac{5}{4} e^2 + \dots\right) \sin 2M + \left(\frac{13}{12} e^3 + \dots\right) \sin 3M + \dots, \end{aligned} \quad (\text{II. 103})$$

где  $v$  и  $M$  — истинная и средняя аномалии. При малых  $e$  эти ряды сходятся очень быстро.

Введем для краткости записи следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial (\lg a)} = a \frac{\partial}{\partial a}, & D' &= \frac{\partial}{\partial (\lg a')} = a' \frac{\partial}{\partial a'}, \\ D_1 &= \frac{\partial}{\partial L}, & D'_1 &= \frac{\partial}{\partial L'}. \end{aligned} \quad (\text{II. 104})$$

Тогда формула Тейлора (II. 97) для случая четырех переменных запишется так:

$$\begin{aligned} F\left(\lg r, \lg r', W, W', \sin^2 \frac{I}{2}\right) &= E^{\rho D + \rho' D' + h D_1 + h' D'_1} \times \\ &\times F_0\left(\lg a, \lg a', L, L', \sin^2 \frac{I}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{II. 105})$$

Рассмотрим сначала разложение по степеням эксцентриситета возмущаемой планеты, т. е. положим  $e' = 0$ . Тогда  $\rho' = h' = 0$ , и выражение (II. 105) примет вид

$$F\left(\lg r, \lg a', W, L', \sin^2 \frac{I}{2}\right) = E^{\rho D + h D_1} \times \\ \times F_0(\lg a, \lg a', L, L', \sin^2 \frac{I}{2}). \quad (\text{II. 106})$$

Функция  $F_0$ , стоящая в правой части равенства (II. 106), разложена нами в бесконечный ряд (II. 90). Перейдем в этом разложении от тригонометрической формы к экспоненциальной, полагая

$$\lambda = E^{\sqrt{-1}L}, \quad \lambda' = E^{\sqrt{-1}L'}. \quad (\text{II. 107})$$

Тогда

$$F_0 = \sum_{s, s'} H(s, s') \cos(sL + s'L') = \sum_{s, s'} H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'}. \quad (\text{II. 108})$$

Умножим символически общий член этого ряда на  $E^{\rho D + h D_1}$  в соответствии с формулой (II. 106). Получим

$$E^{\rho D + h D_1} \cdot H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} = E^{\rho D + sh\sqrt{-1}} \cdot H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'}, \quad (\text{II. 109})$$

так как

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial L} = \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial \lg \lambda} = \sqrt{-1} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (\text{II. 110})$$

$$D_1 H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} = \sqrt{-1} s H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} \quad (\text{II. 111})$$

или

$$D_1 = \sqrt{-1} s. \quad (\text{II. 112})$$

Но

$$E^{\rho D + sh\sqrt{-1}} = 1 + \rho D + sh\sqrt{-1} + \dots, \quad (\text{II. 113})$$

и мы можем написать

$$E^{\rho D + sh\sqrt{-1}} = 1 + k_1 e + k_2 e^2 + \dots, \quad (\text{II. 114})$$

где  $k_1, k_2, \dots$  — функции  $D, s, M$ . Положим теперь

$$\mu = E^{\sqrt{-1}M}, \quad (\text{II. 115})$$

тогда разложения (II. 102) и (II. 103) примут вид

$$\rho = e \left( -\frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2} \mu^{-1} \right) + \\ + e^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \mu^2 - \frac{3}{8} \mu^{-2} \right) + \dots, \quad (\text{II. 116})$$

$$\sqrt{-1} h = e (\mu - \mu^{-1}) + \frac{5}{8} e^2 (\mu^2 - \mu^{-2}) + \dots \quad (\text{II. 117})$$

Подставляя разложение (II. 116) и (II. 117) в (II. 113) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях эксцентриситета, получим выражения для  $k_1, k_2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \left[ -\frac{1}{2} D + s \right] \mu + \left[ -\frac{1}{2} D - s \right] \mu^{-1}, \\ k_2 &= \frac{1}{8} [D^2 + (-4s - 3) D + 5s + 4s^2] \mu^2 + \\ &+ \frac{1}{4} [D^2 + D - 4s^2] + \\ &+ \frac{1}{8} [D^2 + (4s - 3) D - 5s + 4s^2] \mu^{-2}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 118})$$

Обозначим полиномы по  $D$  и  $s$  в квадратных скобках в формулах (II. 118) символами  $\Pi_m^n$ , где верхний значок указывает на степень  $e$ , а нижний — на степень  $\mu$ , к которым относится данный полином. Тогда формулы (II. 118) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \Pi_1^1 \mu + \Pi_{-1}^1 \mu^{-1}, \\ k_2 &= \Pi_2^2 \mu^2 + \Pi_0^2 + \Pi_{-2}^2 \mu^{-2}, \\ &\dots \\ k_n &= \sum_{k=0}^{2n} \Pi_{n-k}^n \mu^{n-k}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 119})$$

где  $k$  — четное число. Полиномы  $\Pi_m^n$  носят название операторов Ньюкома. Нетрудно видеть, что

$$\Pi_{-m}^n(s) = \Pi_m^n(-s). \quad (\text{II. 120})$$

Теперь можем записать разложение (II. 114) следующим образом:

$$\begin{aligned}
E^{\rho D + sh\sqrt{-1}} &= 1 + e(\prod_1^1 \mu + \prod_{-1}^1 \mu^{-1}) + \\
&+ e^2(\prod_2^2 \mu^2 + \prod_0^2 + \prod_{-2}^2 \mu^{-2}) + \dots = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{2n} \prod_{n-k}^n \mu^{n-k} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{2n} \prod_{n-k}^n \mu^{n-k}. \quad (\text{II. 121})
\end{aligned}$$

Подставляя (II. 121) в (II. 109), получим

$$\begin{aligned}
E^{\rho D + hD_1} \cdot H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{2n} \prod_{n-k}^n H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} \mu^{n-k}. \quad (\text{II. 122})
\end{aligned}$$

или, переходя к тригонометрическим функциям,

$$\begin{aligned}
E^{\rho D + hD_1} \cdot H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{2n} \prod_{n-k}^n H(s, s') \cos[sL + s'L' + (n-k)M], \quad (\text{II. 123})
\end{aligned}$$

где  $k$  принимает четные значения: 0, 2, 4, ... 2n. Введем обозначение

$$P_{n-k}^n(s, s') = \prod_{n-k}^n H(s, s'). \quad (\text{II. 124})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
E^{\rho D + hD_1} \cdot H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{2n} P_{n-k}^n(s, s') \cos[sL + s'L' + (n-k)M]. \quad (\text{II. 125})
\end{aligned}$$

На этом разложение главной части пертурбационной функции по степеням эксцентриситета возмущаемой планеты заканчивается. Нам необходимо теперь показать, как в это разложение можно ввести эксцентриситет возмущающей планеты.

Мы получили, что общий член разложения (II. 125), содержащий множитель  $e^n$ , имеет вид

$$e^n \sum_{k=0}^{2n} P_{n-k}^n(s, s') \cos[sL + s'L' + (n-k)M]. \quad (\text{II. 126})$$

Умножая теперь это выражение на  $E^{\rho'D' + h'D'_1}$

и вводя новый полином  $\Pi_m^{n'}$ , получим общий член окончательного разложения по эксцентриситетам в виде

$$e^n e^{n'} \sum \Pi_m^{n'} \sum P_m^n(s, s') \times \\ \times \cos(sL + s'L' + mM + m'M'). \quad (\text{II. 127})$$

Очевидно, что операторы  $\Pi_m^{n'}$  образуются из  $D'$  и  $s'$  так же, как операторы  $\Pi_m^n$  из  $D$  и  $s$ . Действие операторов  $\Pi_m^{n'}$  на произведение  $P_m^n$  можно представить как действие сложных операторов  $\Pi_{mm}^{nn'}$ , зависящих от двух планет, на исходные коэффициенты  $H(s, s')$ . Таким образом,

$$\Pi_{mm}^{nn'} H(s, s') = \Pi_m^{n'} P_m^n(s, s') = \\ = \Pi_m^n P_m^{n'}(s, s') = P_{mm}^{nn'}(s, s'). \quad (\text{II. 128})$$

Операторы  $\Pi_{mm}^{nn'} = \Pi_m^n \cdot \Pi_m^{n'}$  образуются путем почленного перемножения операторов  $\Pi_m^n$  и  $\Pi_m^{n'}$ .

Итак, задача разложения главной части пертурбационной функции полностью разрешена. Мы получили это разложение в виде

$$\frac{1}{\Delta} = \sum P_{mm}^{nn'} e^n e^{n'} \cos[sL + s'L' + mM + m'M']. \quad (\text{II. 129})$$

Коэффициенты  $P_{mm}^{nn'}$  зависят от больших полуосей  $a$ ,  $a'$  и от взаимного наклона орбит  $I$ .

**5. Вычисление операторов Ньюкома.** Сравнивая формулы (II. 118) и (II. 119), можем сразу написать выражения для операторов Ньюкома

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1^1 &= -\frac{1}{2} D + S, \\ \Pi_{-1}^1 &= -\frac{1}{2} D - S, \\ \Pi_0^2 &= \frac{1}{4} [D^2 + D - 4s^2], \\ \Pi_2^2 &= \frac{1}{8} [D^2 + (-4s - 3)D + 5s + 4s^2], \\ \Pi_{-2}^2 &= \frac{1}{8} [D^2 + (4s - 3)D - 5s + 4s^2], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 130})$$

Кроме того,  $\Pi_0^0 = 1$ . Индексы  $s$  и  $s'$  не являются независимыми, как это видно из формулы (II. 90). Действи-

тельно, в первой строчке  $s' = i$ ,  $s = -i$ ; во второй строчке  $s' = i + 1$ ,  $s = -i + 1$ ; в третьей строчке  $s' = i + 2$ ,  $s = -i + 2$ ; в четвертой строчке  $s' = i + 3$ ,  $s = -i + 3$ . Назовем операторы, соответствующие первой строчке, операторами нулевого класса; операторы, соответствующие второй строчке, операторами первого класса и т. д.

Мы можем теперь легко получить численные коэффициенты для операторов Ньюкома (II. 130). Так, например, рассмотрим оператор

$$\Pi_0^2 = \frac{1}{4} [D^2 + D - 4s^2].$$

При вычислении оператора  $\Pi_0^2$  нулевого класса мы полагаем  $s = -i$ . Придавая  $i$  последовательные значения  $-7, -6 \dots +7$ , получим

$i$	$\Pi_0^2$
$-7$	$-49 + \frac{1}{4} D + \frac{1}{4} D^2$
$-6$	$-36 + \frac{1}{4} D + \frac{1}{4} D^2$
$\dots$	$\dots$
$+7$	$-49 + \frac{1}{4} D + \frac{1}{4} D^2$

Подробные таблицы численных коэффициентов операторов Ньюкома вычислены Ш. Г. Шараф и приведены в ее работе.

**6. Второй член пертурбационной функции.** Обратимся теперь к разложению второго члена пертурбационной функции. Опуская постоянный коэффициент  $k^2 m'$ , можем написать

$$R_1 = -\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}. \quad (\text{II. 131})$$

Так как

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \quad (\text{II. 132})$$

то

$$R_1 = -\frac{r \cos H}{r'^2} \quad (\text{II. 133})$$



или, пользуясь формулой (II. 81), получим для случая круговых орбит

$$R_1 = -\frac{a}{a'^2} \left[ \cos(L' - L) - 2\sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2} \right]. \quad (\text{II. 134})$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$R_1 = -\frac{a}{a'^2} \left[ \cos(L' - L) - \cos(L' - L) \sin^2 \frac{I}{2} + \right. \\ \left. + \cos(L' - L) \sin^2 \frac{I}{2} \right] \quad (\text{II. 135})$$

или

$$a'R_1 = -a \cos(L' - L) \left( 1 - \sin^2 \frac{I}{2} \right) - \\ - a \cos(L' + L) \sin^2 \frac{I}{2}. \quad (\text{II. 136})$$

Сравнивая это выражение с разложением (II. 90), видим, что для учета второго члена пертурбационной функции необходимо в (II. 90) заменить

$$a'A_1 \text{ на } a'A_1 - a \left( 1 - \sin^2 \frac{I}{2} \right), \\ a'A_{-1} \text{ на } a'A_{-1} - a \left( 1 - \sin^2 \frac{I}{2} \right), \quad (\text{II. 137}) \\ a'B_0 \text{ на } a'B_0 - a.$$

### § 3. Теория движения Плутона

**1. Введение.** Разработка теории движения Плутона была начата в 1946 г. в Институте теоретической астрономии в Ленинграде Ш. Г. Шараф. Мы приведем основные результаты первой части этой работы, в которой Ш. Г. Шараф вычисляет возмущения первого порядка от Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, причем возмущения Плутона от Нептуна получены при помощи численного интегрирования.

Для иллюстрации метода Лапласа—Ньюкома изложим основные этапы вычисления возмущений первого порядка от Юпитера.

В основу вычислений положены следующие системы элементов Плутона и Юпитера:

Элементы Плутона		Элементы Юпитера	
Момент оскуляции 1930 сент. 20.0		Эпоха 1850. янв. 0	
		Средн. грин. полдень	
$T = 1989$ окт. 0.0344,	Эклиптика и равноденствие 1950.0	$M'_0 = 148^\circ 033,$	
$\Omega = 109^\circ 634,$		$\Omega' = 99^\circ 779,$	
$i = 17^\circ 144,$		$i' = 1^\circ 308,$	
$\omega = 113^\circ 542,$		$\omega' = 273^\circ 525,$	
$e = 0.248644,$		$e' = 0.048254,$	
$a = 39.517738,$	$a' = 5.202803,$	$n' = 299'128,$	
$n = 14''283.$		$\frac{1}{m'} = 1047.4.$	

Примечание. Система элементов Плутона получена Бауэром (1931 г.) и является барицентрической системой (за начало координат принят центр тяжести системы, состоящей из Солнца и четырех внутренних планет). Так как разности гелиоцентрических и барицентрических координат — величины порядка возмущающих масс, то они дают в возмущениях расхождения только на величины второго порядка, и потому при определении возмущений первого порядка эти элементы могут рассматриваться как гелиоцентрические.

На основании систем элементов вычисляем угол взаимного наклона орбит и отношение больших полуосей

$$\sin \frac{I}{2} = 0.137935, \quad a = 0.131657.$$

**2. Возмущения Плутона от Юпитера.** Для определения возмущений логарифма радиуса-вектора и долготы в орбите воспользуемся формулами (II. 102) и (II. 103). Прежде всего вычисляем ту часть возмущений, которая не зависит от постоянных интегрирования. Обозначим их  $\delta p_1$  и  $\delta w_1$ . Имеем

$$\delta p_1 = \frac{1}{nr_0} \left( q \int p Q dt - p \int q Q dt \right), \quad (\text{II. 138})$$

$$\delta w_1 = \frac{1}{r_0^2} \int \left[ \int \frac{\partial R}{\partial w} dt - 2a^2 n \sqrt{1-e^2} \delta p_1 \right] dt. \quad (\text{II. 139})$$

Вековые и смешанные члены в  $\delta p_1$  появляются вследствие наличия свободных членов в  $pQ$  и  $qQ$ . В  $\frac{d\delta w}{dt}$  члены, содержащие  $t$  вне знака тригонометрических функций, отсутствуют.

При определении постоянных интегрирования за начальный момент  $t_0$  принимают момент оскуляции, т. е.  $t_0 = 1930$  сент. 20.0. Постоянные вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} aC_1 &= - \left[ \int a D_i R \right]_{t=t_0}, \\ aK_1 &= - \left[ n \int q (aQ + 2C_1) dt \right]_{t=t_0}, \\ aK_2 &= - \left[ n \int p (aQ + 2C_1) dt \right]_{t=t_0}, \\ C_2 &= - \left[ n \int a \frac{\partial R}{\partial w} dt \right]_{t=t_0}, \\ C_3 &= - \left\{ n \int \left( \frac{a_0}{r_0} \right)^2 \left[ \frac{m'}{1+m} \left( n \int a \frac{\partial R}{\partial w} dt + C_2 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sqrt{1-e^2} \delta\rho \right] dt \right\}_{t=t_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 140})$$

Вывод формул (II. 140) можно найти в работе Ш. Г. Ша-  
раф. Значения постоянных в этих формулах соответст-  
вуют постоянным § 1 с точностью до постоянных мно-  
жителей.

Теперь остается определить ту часть возмущений,  
которая зависит от постоянных интегрирования. Обозна-  
чим их через  $\delta\rho_2$  и  $\delta w_2$ . Тогда

$$\delta\rho_2 = \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 2C_1 q \int p dt - 2C_1 p \int q dt + K_1 p + K_2 q \right\}, \quad (\text{II. 141})$$

$$\delta w_2 = \frac{1}{r_0^2} \int (m' C_2 - 2a^2 n \sqrt{1-e^2} \delta\rho_1) dt + C_3. \quad (\text{II. 142})$$

Возмущения  $i$ ,  $\Omega$  находим по формулам (II. 53).

Окончательные выражения для вычисления возмуще-  
ний Плутона от Юпитера приведены в табл. 2.

Ограничиваясь первыми членами, можем написать

$$\left. \begin{aligned} \delta \lg r \cdot 10^7 &= -21929 - 20451 \sin M' - \\ &\quad - 8438 \cos M' + 8901 n't \sin M' - \\ &\quad - 7516 \sin 2M' - 3130 \cos 2M' + \\ &\quad + 3271 n't \sin 2M' + \dots, \\ \delta w &= +408''.62 + 1743''.68 n't + \\ &\quad + 845''.19 \sin M' - 1972''.82 \cos M' + \\ &\quad + 859''.04 n't \cos M' + 256''.48 \sin 2M' - \end{aligned} \right\}$$

Таблица 2  
Возмущения Плутона от Юпитера

$t$	$t'$	$\delta \lg r \cdot 10^7$		$\delta w$		$\delta \Omega$		$\delta i$					
		sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos				
0	0		-21929										
	0						+ 408'62				+9'24		+152'40
	1	-20451	- 8438	+845'19			+1743.68 n't				-2.76 n't		- 0.43
	1	+ 8901 n't					-1972.82				-3'59		+0'15
	2	- 7516	- 3130	256.48			+ 859.04 n't				-1.55		0.27
	2	+ 3271 n't	- 1089				- 604.06				-0.66		- 0.34
	3	- 2609	- 372	81.31			+ 262.98 n't				-0.26		- 0.16
	3	+ 1136 n't	- 127	26.22			- 192.23				-0.10		- 0.07
	4	+ 890	- 42	8.53			+ 83.70 n't				-0.04		- 0.03
	4	+ 387 n't	- 15	2.79			- 62.13				-0.01		- 0.01
	5	- 301	- 5	0.92			+ 27.04 n't				-0.04		- 0.01
	5	+ 131 n't	- 1				- 20.24				-0.01		- 0.01
	6	- 101	- 1	0.30			+ 8.81 n't				-0.04		- 0.01
	6	+ 42 n't	- 1	0.11			- 6.62				-0.01		- 0.01
	7	- 34	- 1				+ 2.87 n't				-0.01		- 0.01
	7	+ 14 n't	- 1				- 2.17				-0.01		- 0.01
	8	- 11	- 1	0.11			+ 0.93 n't				-0.01		- 0.01
	8	+ 6 n't	- 1				- 0.71				-0.01		- 0.01
	9	- 3	- 1				+ 0.33 n't				-0.01		- 0.01
	9	+ 1 n't	- 1				- 0.24				-0.01		- 0.01
	10	- 1	- 1				+ 0.10 n't				-0.01		- 0.01
	10	+ 1	- 1				- 0.08				-0.01		- 0.01
1	-8		- 2	0.02			+ 0.03 n't				-0.01		- 0.02
	-7		- 2	0.04			- 0.02				-0.01		- 0.02
	-6		- 2	0.10			+ 0.02				-0.01		- 0.02

Таблица 2 (продолжение)

i	i'	$\delta \lg r \cdot 10^7$		$\delta w$		$\delta \Omega$		$\delta i$	
		sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
	-5	3	6	-0.32	0.18	-	0.28	0.06	0.10
	-4	-10	19	-0.91	0.53	-	1.17	0.22	0.37
	-3	32	56	2.66	1.52	-	5.73	0.98	1.63
	-2	91	160	7.62	4.37	-	29.11	5.08	8.50
	-1	-249	-434	-20.66	+11.86	-	-228.52	+39.75	66.12
	0	+34	+58	+2.84	-1.58	+	+176.03	-22.59	+2.85
	1		13	0.26	-0.22	-	-231.21	+20.25	-67.16
	2		4	-0.14	-0.06	-	-26.76	2.34	-7.83
	3		1	0.06	-0.02	-	4.62	0.41	-1.36
	4			-0.02		-	0.97	0.08	-0.28
	5					-	0.21	0.02	-0.06
	6					-	0.07		-0.02
2	-4			-0.02	+0.02	-	0.07	0.02	+0.02
	-3		1	-0.06	0.04	-	0.28	0.06	0.08
	-2	2	5	-0.18	0.12	-	1.38	0.24	0.41
	-1	-5	10	-0.49	+0.30	-	10.76	+1.87	3.11
	0	+1	2	+0.06	-0.04	+	8.42	-1.10	+0.12
	1		1			-	11.45	+1.00	-3.33
	2					-	1.38	0.12	-0.41
	3					-	0.28	0.02	-0.08
3	-2					-	0.07	0.02	+0.02
	-1			-0.02	+0.02	-	0.55	+0.10	+0.16
	0					-	0.48	-0.06	-0.08
	1					+	0.62	+0.06	-0.18
	2					-	0.07		-0.02

$$\begin{aligned}
 & - 604''.06 \cos 2M' + 262''.98n't \times \\
 & \times \cos 2M' + \dots, \\
 \delta\Omega = & +9''.24 - 2''.76n't - 3''.59 \sin M' - \\
 & - 0''.54 \cos M' - 1''.55 \sin 2M' - \\
 & - 0''.95 \cos 2M' + \dots, \\
 \delta i = & +152''.40 + 0''.15 \sin M' - \\
 & - 0''.43 \cos M' + 0''.27 \sin 2M' - \\
 & - 0''.34 \cos 2M' + \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & - 604''.06 \cos 2M' + 262''.98n't \times \\ & \times \cos 2M' + \dots, \\ \delta\Omega = & +9''.24 - 2''.76n't - 3''.59 \sin M' - \\ & - 0''.54 \cos M' - 1''.55 \sin 2M' - \\ & - 0''.95 \cos 2M' + \dots, \\ \delta i = & +152''.40 + 0''.15 \sin M' - \\ & - 0''.43 \cos M' + 0''.27 \sin 2M' - \\ & - 0''.34 \cos 2M' + \dots \end{aligned}} \right\} \text{(II. 143)}$$

Возмущения логарифма радиуса-вектора даны в седьмом десятичном знаке, возмущения долготы в орбите, долготы узла и наклона в сотых долях секунды дуги. Аргументами в разложениях служат средние аномалии планет.

**3. Улучшение орбиты Плутона.** За оскулирующую систему принята система Бауэра (см. § 3, п. 1), приведенная к центру Солнца:

Элементы орбиты Плутона  
Оскуляция и эпоха 1930 сент. 20.0 всем. вр.

$$\left. \begin{aligned}
 M_0 &= 275^\circ 10' 9''.30, \\
 i &= 17^\circ 6' 33''.44, \\
 \Omega &= 109^\circ 37' 56''.96, \\
 \omega &= 112^\circ 43' 50''.56, \\
 a &= 39.656022, \\
 e &= 0.24699758, \\
 n &= 14''.208367.
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Эклиптика и} \\ \text{равноденствие} \\ 1950.0 \end{array}$$

К моменту исправления орбиты Плутона удалось собрать около 500 точных наблюдений, охватывающих период с 1914 по 1951 г. и полученных в 28 оппозициях.

**Примечание.** Как известно, Плутон был открыт на фотографических снимках, полученных 21, 23 и 29 января 1930 г. Однако по эфемеридам, вычисленным на предыдущие годы, удалось определить положения Плутона на старых пластинках за 1914, 1915, 1919, 1921, 1925 и 1927 гг.

Наблюдения Плутона были привязаны к экватору и равноденствию 1950.0 и исправлены за параллакс. Затем наблюдения Плутона были объединены в 24 нор-

Таблица 3  
Нормальные места

№ п.п.	Всемирное время	α, час. м. с.	δ, сек. о.	Число наблюдений		
				по α	по δ	
1	1914 янв.	23.7904	90°00 11.25	17°37 26.70	1	1
2	нояб.	12.3260	92 31 55.95	17 51 55.90	1	1
3	апр.	7.1674	90 46 02.94	18 07 50.81	2	2
4	1919 дек.	29.4285	97 33 11.51	19 21 04.55	4	4
5	1925 дек.	23.2823	105 17 11.93	20 54 19.87	2	2
6	1927 янв.	6.2500	106 18 41.32	21 11 13.73	2	2
7	1930 апр.	24.1151	109 17 46.59	22 07 06.39	103	103
8	1931 апр.	2.0000	111 14 17.13	22 10 11.88	67	67
9	1932 февр.	4.0000	112 37 48.97	22 22 36.28	22	22
10	1933 март	15.0000	113 27 27.43	22 41 34.52	21	21
11	1934 март	8.0000	114 59 04.92	22 51 37.83	9	8
12	1935 март	18.0000	116 21 16.98	23 03 20.38	8	8
13	1937 март	7.0000	119 29 02.13	23 20 36.55	9	9
14	1938 март	11.0000	120 58 21.02	23 29 28.12	15	13
15	1939 февр.	18.0000	122 54 16.18	23 32 11.56	10	10
16	дек.	11.0000	125 59 18.76	23 13 08.83	13	13
17	1941 март	27.0000	125 32 53.92	23 51 14.54	4	4
18	1942 март	3.0000	127 31 12.62	23 52 03.52	23	23
19	1944 февр.	28.0000	130 57 43.72	23 57 12.87	7	6
20	1947 янв.	22.0000	137 04 20.19	23 41 44.74	12	12
21	1948 февр.	18.0000	138 14 12.06	23 52 00.56	21	21
22	1949 март	12.0000	139 33 48.93	23 56 47.52	17	17
23	1950 февр.	2.0000	142 16 53.74	23 35 39.99	19	19
24	1951 март	22.0000	143 05 09.70	23 49 01.60	20	20

мальных места. Табл. 3 дает сводку нормальных мест. Пятая и шестая колонки указывают количество наблюдений, принятых при составлении данного нормального места. Невозмущенные координаты Плутона на моменты наблюдений вычисляются по обычным формулам эллиптического движения. После этого находим возмущенные элементы по формулам

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + \delta w, \\ w_0 &= v_0 + \Omega_0 + \omega_0, \\ \lg r &= \lg r_0 + \delta \lg r, \\ \Omega &= \Omega_0 + \delta \Omega, \\ i &= i_0 + \delta i, \\ \sigma &= \Omega_0 + \delta \Omega \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 144})$$

При вычислении возмущений суммируются возмущения от четырех больших планет Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Возмущения от первых трех планет получены с помощью рядов, а возмущения Нептуна вычислены методом численного интегрирования. В табл. 4 приведены численные значения возмущений для каждого нормального места.

Возмущенные значения долготы в эклиптике  $l$  и широты  $b$  определяются по известным формулам (см. главу I)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(l - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg}(w - \sigma), \\ \sin b &= \sin i \sin(w - \sigma), \end{aligned} \quad (\text{II. 145})$$

а затем по формулам

$$\begin{aligned} \rho \cos \alpha \cos \delta &= r \cos l \cos b + X, \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= r \sin l \cos b \cos \varepsilon - r \sin b \sin \varepsilon + Y, \\ \rho \sin \delta &= r \sin l \cos b \sin \varepsilon + r \sin b \cos \varepsilon + Z \end{aligned} \quad (\text{II. 146})$$

вычисляются  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\rho$ . Координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  берутся из Астрономического Ежегодника.

Для исправления шести эклиптикальных элементов Плутона  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ , ... пользуемся методом Эккерта—Брауэра. Решая систему из 48 условных уравнений по  $\alpha$  и  $\delta$ , нахо-



Т а б л и ц а 4

## Возмущения Плутона на моменты нормальных мест

№ п.п.	Всемирное время нормального места, исправленное за аберрацию	$\delta \lg r \cdot 10^8$	$\delta \omega$	$\delta \Omega$	$\delta i$
1	1914 янв. 23.5373	— 7279	+ 141.21	— 159.81	+ 257.82
2	нояб. 12.0732	— 4956	130.44	— 124.70	227.54
3	1915 апр. 6.9094	— 3637	126.17	— 96.30	+ 201.78
4	1919 дек. 29.1831	— 4969	128.92	+ 155.19	— 52.28
5	1925 дек. 23.0442	— 5669	54.04	— 40.97	+ 299.14
6	1927 янв. 6.0133	— 4670	32.43	— 29.99	260.47
7	1930 апр. 23.8756	+ 815	0.74	— 2.30	+ 9.67
8	1931 февр. 1.7684	+ 815	0.40	— 0.05	— 4.58
9	1932 февр. 3.7697	— 386	+ 0.27	+ 2.21	+ 11.46
10	1933 март 14.7687	— 3090	— 2.51	13.00	66.70
11	1934 март 7.7708	— 6291	— 9.24	31.38	133.13
12	1935 март 17.7715	— 9938	— 21.53	56.57	203.81
13	1937 март 6.7754	— 15666	— 59.21	92.20	282.81
14	1938 март 10.7766	— 16709	— 81.76	83.13	267.15
15	1939 февр. 17.7796	— 16902	— 100.95	+ 46.20	212.88
16	дек. 10.7796	— 16155	— 113.82	— 6.20	144.60
17	1941 март 26.7800	— 14587	— 124.31	— 103.15	+ 32.70
18	1942 март 2.7834	— 14141	— 123.96	— 155.79	— 21.85
19	1944 февр. 27.7866	— 16611	— 109.24	— 154.63	— 23.19
20	1947 янв. 21.7916	— 31140	— 92.18	+ 71.51	+ 141.44
21	1948 февр. 17.7932	— 37870	— 95.23	159.19	197.34
22	1949 март 11.7939	— 44158	— 103.73	205.85	225.35
23	1950 февр. 1.7962	— 48651	— 113.44	194.95	219.45
24	1951 март 21.7964	— 52920	— 125.22	105.36	173.54

дим поправки к исходной системе оскулирующих элементов

$$\begin{aligned}\delta M_0 &= 111''84, \\ \delta \omega &= - 67''81, \\ \delta \Omega &= - 5''07, \\ \delta i &= 4''04, \\ \delta e &= 9590 \cdot 10^{-8}, \\ \delta a &= 3106 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Представление нормальных мест до и после исправления элементов показано в табл. 5.

Приведем теперь окончательную систему элементов орбиты Плутона:

Эпоха и оскуляция  
1930 сент. 20.0

$$\begin{aligned}M_0 &= 275^\circ 12' 1'' 14, \\ \omega &= 112^\circ 42' 42'' 75, \\ \Omega &= 109^\circ 37' 51'' 89, \\ i &= 17^\circ 6' 37'' 48, \\ e &= 0.24707348, \\ a &= 39.659128, \\ n &= 14'' 206698.\end{aligned}$$

На этом заканчивается построение теории движения Плутона первого порядка относительно возмущающих масс.

**Примечание.** Теория движения Плутона второго порядка относительно возмущающих масс была закончена в 1963 г. (Труды Института теоретической астрономии, выпуск X, 1964 г.). Наблюдения Плутона охватывали интервал времени с 1914 по 1958 г. и дали возможность на основе строгой аналитической теории существенно уточнить систему элементов Плутона.

В настоящее время (1964 г.) следующая система элементов совместно с тригонометрическими рядами, представляющими возмущения координат (первого и второго порядка относительно масс), наилучшим образом определяет движение Плутона:

Эпоха и оскуляция  
1930 сент. 20.0

$$\begin{aligned}M_0 &= 275^\circ 15' 27'' 03, \\ \omega &= 112^\circ 39' 29'' 74, \\ \Omega &= 109^\circ 37' 55'' 99,\end{aligned}$$

Т а б л и ц а 5

## Сравнение теории с наблюдениями

№ п.п.	Всемирное время	До исправления		После исправления	
		Δx	Δδ	Δα	Δδ
1	1914 янв.	23.7904	+0.81	-1.11	+1.95
2	нояб.	12.3260	+0.82	-0.70	+1.30
3	1915 апр.	7.1674	-4.46	+0.53	-2.87
4	1919 дек.	29.4285	-0.11	1.74	-0.79
5	1925 дек.	23.2823	+3.06	0.67	+2.19
6	1927 янв.	6.2500	-0.88	0.33	+0.38
7	1930 апр.	24.1151	-0.59	+0.66	-1.79
8	1931 февр.	2.0000	+0.18	-0.73	-1.48
9	1932 февр.	4.0000	0.13	-0.05	-1.37
10	1933 март	15.0000	0.87	+0.09	-0.71
11	1934 март	8.0000	1.84	-1.31	+0.03
12	1935 март	18.0000	2.54	-1.21	1.11
13	1937 март	7.0000	4.14	+0.05	1.74
14	1938 март	11.0000	3.52	-1.05	1.58
15	1939 февр.	18.0000	4.24	-1.54	1.67
16	дек.	11.0000	3.00	-0.23	+0.59
17	1941 март	27.0000	1.27	+0.22	-1.30
18	1942 март	3.0000	0.30	1.72	-2.07
19	1944 февр.	28.0000	1.68	1.91	-1.24
20	1947 янв.	22.0000	1.98	0.59	-0.77
21	1948 февр.	18.0000	3.83	0.61	+1.17
22	1949 март	12.0000	3.86	+0.32	0.90
23	1950 февр.	2.0000	3.01	-0.77	+0.38
24	1951 март	22.0000	2.34	-0.89	-0.46
			10.61		

$$\begin{aligned}
 i &= 17^{\circ} 6'35''34, \\
 e &= 0.24706226, \\
 a &= 39.672599, \\
 n &= 14''199460.
 \end{aligned}$$

Эклиптика и равноденствие, к которым отнесены элементы орбиты, — нормальная эпоха 1950.0.

#### § 4. Теория движения больших планет

**1. Фундаментальные работы.** В современных Астрономических Ежегодниках эфемериды внутренних планет основаны на таблицах Ньюкома, причем для Марса учитываются поправки, полученные Россом. Таблицы Ньюкома опубликованы в следующих томах „Astronomical Papers of the American Ephemeris“:

Меркурий (Ньюком)	— vol. VI, part II, 1895
Венера (Ньюком)	— vol. VI, part III, 1895
Земля (Ньюком)	— vol. VI, part I, 1895
Марс (Ньюком)	— vol. VI, part IV, 1898
Марс (Росс)	— vol. IX, part II, 1917

Средние элементы, положенные в основу теории движения больших планет Ньюкома, приведены в приложении 2 для момента  $T$ , где  $T$  — время, считаемое в юлианских столетиях по 36525 суток от начальной эпохи, за которую принят 1900 январь 0.12 часов эфемеридного времени. Средняя долгота планеты  $\lambda$ , долгота перигелия  $\pi$  и долгота восходящего узла  $\Omega$  считается от средней точки весеннего равноденствия текущего момента  $T$ . Через  $n$  обозначено среднее суточное сидерическое движение, непосредственно получаемое из наблюдений, т. е. включающее влияние вековых возмущений средней долготы. Соответствующее значение большой полуоси, определяемое по третьему закону Кеплера, обозначено через  $a_1$ ; наконец, через  $a$  обозначена величина большой полуоси, уже освобожденная от влияния только что упомянутых вековых возмущений.

Эфемериды пяти внешних планет, согласно рекомендациям VIII съезда Международного астрономического союза (Рим, 1952 г.), основаны на прямоугольных координатах, полученных Брауэром и Клеменсом в Морской обсерватории США. С помощью электронных быстро-

действующих вычислительных машин Брауэр и Клеменс выполнили огромную вычислительную работу по интегрированию системы дифференциальных уравнений, определяющих движение Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона в поле тяготения Солнца и взаимных возмущений. Интегрирование этой системы 30 порядка охватывает интервал времени с 1653 по 2060 г., причем вычисления велись с 40-дневным шагом с 14 значащими цифрами. Постоянные интегрирования были исправлены на основе 25000 наблюдений, выполненных с 1780 по 1940 г. Оскулирующие элементы орбит пяти внешних планет на 1966 г. приведены в приложении 4.

При интегрировании уравнений движения пяти внешних планет возмущения от внутренних планет учитывались лишь частично (масса внутренних планет была включена в массу Солнца). Поправки, которые дают полный учет влияния внутренних планет на движение внешних, были определены отдельно.

До 1960 г. эфемериды внешних планет вычислялись по таблицам Хилла и Ньюкома, также опубликованных в „Astronomical Papers of the American Ephemeris“:

Юпитер (Хилл)	— vol. VII, part I, 1895
Сатурн (Хилл)	— vol. VII, part II, 1895
Уран (Ньюком)	— vol. VII, part III, 1898
Нептун (Ньюком)	— vol. VII, part IV, 1898

Средние элементы, положенные в основу этих таблиц, приведены в приложении 3.

Таблицы Ньюкома и Хилла были основаны на системе масс, представленной в табл. 6.

Т а б л и ц а 6  
Массы больших планет  $\left(\frac{1}{m}\right)$   
(по Ньюкому)

Меркурий . . . . .	6000000	Юпитер . . . . .	1047.355
Венера . . . . .	408000	Сатурн . . . . .	3501.6
Земля (+ Луна) . . . . .	329390	Уран . . . . .	22869
Марс . . . . .	3093500	Нептун . . . . .	19314

Эти же значения масс были приняты и при численном интегрировании уравнений движения больших планет.

Продолжая традиции Ньюкома и Хилла, Морская обсерватория США под руководством Брауэра и Клеменса осуществляет в настоящее время ряд фундаментальных работ по переработке теории движения больших планет и построению новых таблиц.

Теория движения Меркурия (1765—1937) (Клеменс)	— vol. XI, part 1, 1943
Теория движения Марса (Клеменс)	— vol. XI, part 2, 1949
Пять внешних планет (прямоугольные координаты) (Брауэр и Клеменс)	— vol. XII, 1951
Вековые возмущения больших планет (Брауэр и Вурком)	— vol. XIII, part 1, 1950
Координаты центра масс Солнца и пяти внешних планет (1800—2060) (Клеменс)	— vol. XIII, part 4, 1953
Возмущения пяти внешних планет от четырех внутренних (Клеменс)	— vol. XIII, part 5, 1954
Координаты Солнца (1800—2000) (Хергет)	— vol. XIV, 1953
Теория Юпитера и масса Сатурна (1884—1948) (Хертс)	— vol. XV, part 2, 1953
Координаты Венеры (1800—2000) (Хергет)	— vol. XV, part 3, 1955
Теория движения Венеры (1750—1949) (Данком)	— vol. XVI, part 1, 1958
Теория движения Марса (окончание) (Клеменс)	— vol. XVI, part 2, 1961

В Советском Союзе фундаментальные работы по небесной механике проводит Институт теоретической астрономии Академии наук СССР. Эти работы публикуются в Трудах института.

Теория регуляризованного геоида (Д. В. Загребин)	— вып. I, 1952
Церера (возмущения первого порядка) (В. Ф. Проскурин)	— вып. II, 1952
Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним (И. Д. Жонголович)	— вып. III, 1952
Плутон (возмущения первого порядка) (Ш. Г. Шараф)	— вып. IV, 1955

VII спутник Юпитера (аналитическая теория движения) (С. С. Токмалаева)	— вып. V,	1956
Определение размеров общего земного эллипсоида (И. Д. Жонголович)	— вып. VI,	1956
Определение массы Меркурия (по движению кометы Энке)	— вып. VI,	1956
Новое определение массы Меркурия (С. Г. Маковер)	— вып. VIII,	1961
Церера (продолжение) (В. Ф. Проскурин)	— вып. IX,	1962
Плутон (возмущения второго порядка) (Ш. Г. Шараф)	— вып. X,	1964

В заключение отметим, что в настоящее время в связи с появлением быстродействующих электронных вычислительных машин отпадает необходимость в составлении специальных таблиц движения больших планет, по которым затем вычисляют ежегодно положения планет (эфемериды). Действительно, планетные таблицы являются только вспомогательным средством для вычисления громоздких тригонометрических рядов типа (II.143). Однако с помощью быстродействующих вычислительных машин такие ряды могут быть вычислены непосредственно менее чем за одну секунду. Поэтому достаточно получить для координат планет тригонометрические ряды, а затем непосредственно вычислять эфемериды на несколько сот лет вперед.

**2. Релятивистские поправки в теории движения больших планет.** В 1859 г. Леверье (1811—1877) обнаружил необъяснимое расхождение между теорией и наблюдениями для движения перигелия Меркурия. Это открытие стало возможным потому, что около 1850 г. Леверье предпринял создание новых таблиц движения больших планет. В основу этих таблиц была положена следующая система масс, представленная в табл. 7.

Т а б л и ц а 7  
Система масс  $\left(\frac{1}{m}\right)$   
(по Леверье)

Меркурий . . . . .	3000000	Юпитер . . . . .	1050
Венера . . . . .	401847	Сатурн . . . . .	3512
Земля (+Луна) . . . . .	354936	Уран . . . . .	24000
Марс . . . . .	2680337	Нептун . . . . .	14400

В эпоху Лаверье эта система могла рассматриваться как наилучшая. С этой системой масс Лаверье вычисляет вековое возмущение долготы перигелия Меркурия от всех больших планет и получает величину  $527''$  в столетие (1856 г.).

**Влияние планет на движение  
перигелия Меркурия  
(по Лаверье)**

Венера . . . . .	+280'64
Земля . . . . .	83.61
Марс . . . . .	2.85
Юпитер . . . . .	152.59
Сатурн . . . . .	7.24
Уран . . . . .	0.14
Нептун . . . . .	0.06

---

Итого . . . . . +527'13

Как известно, наблюдения Меркурия бывают двух типов: наблюдения прохождения Меркурия по диску Солнца, которые происходят в ноябре и в мае, и меридианные наблюдения.

Лаверье изучил десять ноябрьских прохождений Меркурия, происшедших с 1677 по 1848 г., и шесть майских за период с 1661 по 1845 г. В то время как ноябрьские прохождения дают достаточно хорошее согласие теории с наблюдениями, майские прохождения показывают ошибку в  $12'05$  в 1753 г., которая, уменьшаясь довольно правильно, с течением времени достигает  $1'03$  в 1845 г. Поэтому Лаверье предположил, что по крайней мере два элемента орбиты должны быть ошибочны: эти ошибки компенсируются для ноябрьских прохождений и складываются для майских. Лаверье вывел следующее уравнение (1859 г.):

$$\Delta\pi + 2.72\Delta e = 38''3, \quad (\text{II. 147})$$

где  $\Delta\pi$  и  $\Delta e$  — поправки к принятым в таблицах вековым изменениям долготы перигелия и эксцентриситета орбиты Меркурия. Затем Лаверье изучает еще около 400 меридианных наблюдений Меркурия, сделанных на Парижской обсерватории с 1801 по 1828 г. и с 1836 по 1842 г., также с точки зрения того, какие поправки эти наблюдения могут внести в вековые изменения орбиты Меркурия. Оказалось (1859 г.), что точное значение  $\Delta e$  не может



быть получено, но что во всяком случае эта поправка имеет отрицательное значение, равное приблизительно  $-8''.1$ . Тогда из уравнения (II. 147) следует, что  $\Delta\pi = +60''$ . Из одних меридианных наблюдений для  $\Delta\pi$  получается еще большая величина, равная  $\Delta\pi = +131''$ . Однако при построении таблиц движения Меркурия Лаверье произвольно положил  $\Delta e = 0$ , что дает  $\Delta\pi = +38''.3$ .

В 1882 г. Ньюком публикует специальный мемуар относительно прохождений Меркурия и выводит для ускорения перигелия значение  $\Delta\pi = +42''.95$ . Заметим, что по сравнению с Лаверье Ньюком располагал тремя новыми ноябрьскими прохождениями 1861, 1868 и 1881 гг. и одним майским наблюдением 1878 г.

В 1895 г. Ньюком резюмировал свои работы, касающиеся Меркурия, Венеры, Земли и Марса в книге „Элементы четырех внутренних планет и основные астрономические постоянные“. В последней главе этой книги Ньюком ввел в рассмотрение предварительные результаты двух новых прохождений Меркурия: майского 1891 г. и ноябрьского 1894 г. Он получил теперь следующую поправку:  $\Delta\pi = +42''.23$ .

Окончательно в таблицы движения Меркурия Ньюком ввел новую поправку  $\Delta\pi = +43''.37$ . Эта величина была им вычислена на основе гипотезы Холла (1895 г.), который для объяснения невязок в движении больших планет предложил увеличить показатель степени в законе всемирного тяготения Ньютона с 2 до 2.000 000 1574. Ньюком принял показатель степени равным 2.000 000 16120.

Методы вычисления вековых возмущений Лаверье и Ньюкома были основаны на идее Лагранжа, который заменял в правых частях дифференциальных уравнений движения пертурбационную функцию ее вековыми членами. Однако никаких специальных исследований, позволяющих утверждать, что интегрирование таких усеченных уравнений дает точные значения вековых возмущений, сделано не было. Поэтому было важно вычислить вековые возмущения Меркурия также по методу Гаусса, так как этот метод не требует разложения пертурбационной функции в ряд. Такая работа была проделана Дулитлем (1869—1920), который вычислил вековые возмущения четырех внутренних планет по методу Гаусса в его модификации, принадлежащей Хиллу. Результаты своих вычислений для движения перигелия Меркурия Дулитл сравнил

с результатами Лаверье и Ньюкома, которые он перевычислил для принятой им системы масс больших планет.

Лаверье  
529'84

Ньюком  
533'03

Дулитл  
529'67

Мы видим, что результаты Дулитла и Ньюкома разошлись на 3'36. Причина этого расхождения так и осталась неясной для самого Дулитла. Но в 1925—1926 гг. Шази (1892—1955) указал на то, что в своих работах Ньюком не пользуется классическим определением долготы перигелия.

Если обозначить через  $\Omega$  долготу узла, а через  $\omega$  расстояние перигелия от узла, то, согласно обычному определению, долгота перигелия — это ломаная дуга  $\pi = \Omega + \omega$ , а движение перигелия соответственно определится так:  $\delta\pi = \delta\Omega + \delta\omega$ . Ньюком определяет движение перигелия по формуле  $\delta\pi^* = \delta\Omega \cos i + \delta\omega$ . Следовательно,  $\delta\pi = \delta\pi^* + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \delta\Omega = \delta\pi^* - 3'36$ . Это как раз та величина, на которую разошлись результаты Дулитла и Ньюкома. Расхождение в 0'17 между этими результатами и вычислениями Лаверье вполне допустимо. Таким образом, теоретическая величина движения перигелия Меркурия может считаться установленной совершенно точно.

В 1916 г. в 49-м томе „Annalen der Physik“ была опубликована статья Альберта Эйнштейна (1879—1955) „Основы общей теории относительности“, которая приводила к дальнейшему расширению наших физических представлений о пространстве и времени. Однако известны только три эффекта, которые являются следствием общей теории относительности, и могут быть проверены наблюдениями в настоящее время: вековое перемещение перигелия Меркурия, искривление луча света вблизи поверхности Солнца и смещение спектральных линий к красному концу спектра в поле тяготения звезд. Все эти три эффекта чрезвычайно малы и потому трудно измеримы. Дополнительное движение перигелия Меркурия, согласно общей теории относительности, составляет  $\Delta\pi = +42'89$  в столетие, отклонение светового луча, проходящего около поверхности Солнца, равно 1'745, наконец, смещение к красному концу спектра для средней длины волны (6000 Å) составляет всего 0.012 Å. Совпадение величины,

полученной Эйнштейном для поправки к движению перигелия Меркурия из общих уравнений теории относительности, с величиной Ньюкома произвело в свое время чрезвычайно большое впечатление „особенно на специалистов“, как замечает Шази.

В настоящее время при вычислении эфемерид внутренних планет вместо эмпирической поправки Ньюкома вводятся поправки в соответствии с теорией Эйнштейна (табл. 8).

Т а б л и ц а 8  
Релятивистское движение перигелиев планет

Планета	$\Delta\pi$	$e\Delta\pi$
Меркурий . . . . .	+42'9	+8'82
Венера . . . . .	+ 8.6	+0.05
Земля . . . . .	+ 3.8	+0.07
Марс . . . . .	+ 1.35	+0.13

Отметим, что наблюдаемый эффект характеризуется не величиной  $\Delta\pi$ , а величиной  $e\Delta\pi$ .

Так была устранена единственная серьезная невязка в теории движения больших планет.



### § 1. Кольцо малых планет и его структура

**1. Открытие кольца малых планет.** Первая малая планета была открыта 1 января 1801 г. — в первый день XIX века итальянским астрономом Пиацци (1746—1826), директором Палермской обсерватории. После шести недель наблюдений планета была потеряна. Однако орбита, вычисленная Гауссом (1777—1855) по небольшому количеству наблюдений, оказалась настолько точной, что 31 декабря 1801 г., ровно через год после первого наблюдения, планета была вновь найдена на расстоянии всего лишь лунного поперечника от предсказанного положения. Новая планета была названа Церерой. Ее движение происходило между орбитами Марса и Юпитера.

В марте 1802 г. во время наблюдений Цереры Ольберс (1758—1840) открыл вторую малую планету, названную Палладой. Гаусс нашел, что Паллада также движется между Марсом и Юпитером, почти с тем же периодом, что и Церера. В 1804 г. была найдена третья планета — Юнона и в 1807 г. четвертая — Веста. Но затем, в течение 38 лет, несмотря на все усилия астрономов, не было открыто ни одной новой планеты.

Первые четыре малые планеты имели яркость 6.5—9.6 и видимые в телескоп диски. Микрометрические измерения дали следующие значения для диаметров (в км) первых четырех малых планет:

Церера (1) . . . . .	770
Паллада (2) . . . . .	490
Юнона (3) . . . . .	200
Веста (4) . . . . .	390

В 1845 г. была открыта пятая малая планета Астрея и с тех пор количество известных малых планет непрерывно увеличивается, чему сильно помогли составленные к тому времени звездные карты эклиптикальных созвездий. К 1891 г. визуальными наблюдениями были открыты 322 малые планеты.

В 1891 г. Вольф (1863—1932) в Гейдельберге применил для поисков малых планет короткофокусный светосильный астрограф. За время выдержки (порядка одного—двух часов) малая планета успевает сместиться среди звезд и изображается на пластинке небольшой черточкой, по которой можно отличить ее от близлежащих звезд, получающихся в виде маленьких точек. После введения фотографического метода темпы открытий новых планет резко возросли. Достаточно сказать, что только самим Вольфом было открыто 228 малых планет.

Открытие новой малой планеты само по себе имеет еще небольшое значение, так как пока не вычислена достаточно точная орбита малая планета не может долго наблюдаться и вскоре будет неизбежно утеряна. В настоящее время только небольшое число вновь открываемых малых планет наблюдается достаточно долго, чтобы можно было вычислить надежную орбиту. Такие малые планеты получают номер, название и заносятся в каталог малых планет. Номер и название даются только планетам, наблюдавшимся не менее чем в двух оппозициях, и после того, как их элементы будут исправлены по этим наблюдениям с учетом возмущений. Исключения делаются только для планет, орбиты которых заходят внутрь орбиты Марса. Наилучшим временем для наблюдения малой планеты является период вблизи оппозиции (противостояния). В это время малая планета кульминирует в полночь и бывает видна в течение всей ночи. Яркость малой планеты вблизи оппозиции наибольшая.

Открываемые в настоящее время малые планеты очень слабы. Они имеют среднюю звездную величину около  $14-15^m$ . Общее число малых планет, доступных наиболее крупным современным инструментом ( $21^m.5$  и ярче), оценивается приблизительно в 140 000, а верхний предел для общей массы малых планет определяется в  $1/10-1/12$  массы Земли. Реальная масса всех малых планет, по видимому, много меньше этого верхнего предела и не превышает  $1/1000$  массы Земли.

Таблица 9

## Распределение числа открытых малых планет по годам

Года	Количество планет	Года	Количество планет
1801—1807	4	1906—1915	231
1845—1855	33	1916—1925	239
1856—1865	48	1926—1935	298
1866—1875	72	1936—1945	214
1876—1885	96	1946—1955	51
1886—1895	156	1956—1960	34
1896—1905	173		
		Итого	1649

**2. Структура кольца малых планет.** Большинство известных нам малых планет (97%) имеет суточное движение в пределах от 510 до 1108'', т. е. среднее расстояние от Солнца в пределах от 2.2 до 3.6 а. е. Вне этого основного кольца расположено только 49 планет (1948 г.). Строение кольца малых планет имеет очень сложный характер. На рис. 10 представлено распределение малых планет по суточному движению. Кривая распределения имеет несколько резко выраженных максимумов и минимумов, которые находятся в определенном соотношении с суточным движением Юпитера.

Пусть  $n' = 300''$  — среднесуточное движение Юпитера,  $p$  и  $q$  — простые между собой целые числа. Тогда максимумы и минимумы в распределении астероидов будут

Таблица 10

Соизмеримость	$n$	Название групп малых планет, расположенных вблизи данной соизмеримости
1:1	300''	Троянцы.
3:4	400	Туле.
2:3	450	Група Гильды.
1:2	600	Группа Гекубы.
2:5	750	Группа Минервы.
1:3	900	Группа Гестии.
2:7	1050	Группа Флоры.
1:4	1200	—

соответствовать суточным движениям, которые находятся в простом соотношении с суточным движением Юпитера.

Величина  $|p - q|$  называется порядком соизмеримости. Самыми резкими минимумами или „люками“ являются минимумы, соответствующие  $p/q = 1/2$  и  $p/q = 1/3$ . Соиз-

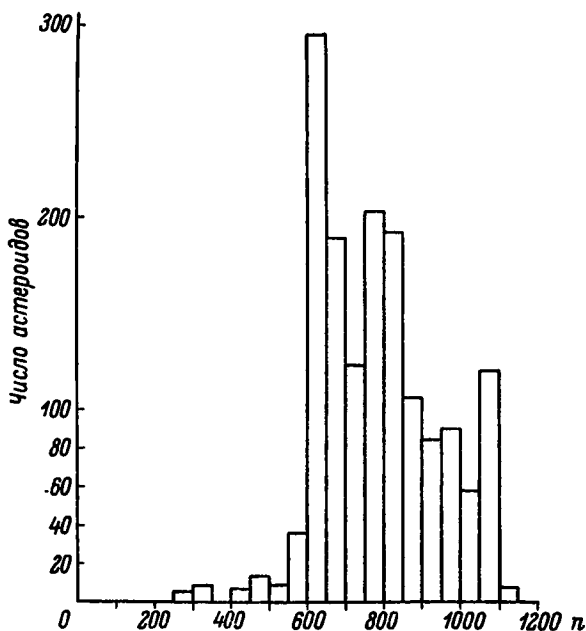


Рис. 10. Структура кольца астероидов.

меримостям  $p/q = 1/1$ ,  $p/q = 3/4$  и  $p/q = 2/3$  соответствуют максимумы в распределении малых планет.

Кроме „люков“, связанных с Юпитером, имеется „люк“, связанный с Марсом. Этот „люк“ соответствует соизмеримости с Марсом 2:1 ( $n = 940''$ ).

Математическая теория, объясняющая существование „люков“ в кольце малых планет, очень сложна и окончательно еще не разработана.

„Люки“ делят основное кольцо малых планет на несколько внутренних колец. На 1 января 1950 г. были известны элементы орбит 1565 малых планет, распределение которых по суточным движениям видно из табл. 11.

Т а б л и ц а 11

$n$	Кольцо	Общее число астероидов
$> 1200''$	A	11
1050—1200	I	130
900—1050	II	237
750—900	III	501
600—750	IV	609
450—600	V	57
$< 450$	B	20

С увеличением числа известных малых планет „люки“ постепенно заполняются, а максимумы, соответствующие  $p/q = 1/1$  и  $p/q = 2/3$ , возрастают.

Крайними значениями больших полуосей орбит малых планет являются  $a = 1.46$  а. е. ( $n = 2015''$ ) у Эроса (433) и  $a = 5.28$  а. е. ( $n = 293''$ ) у Антилоха (1583). Таким образом, кольцо малых планет занимает весь промежуток между орбитами Марса ( $a = 1.52$  а. е.) и Юпитера ( $a = 5.20$  а. е.).

Однако существует несколько малых планет, орбиты которых расположены вне кольца малых планет. Так, открытая в 1949 г. малая планета Икар (1566) имеет большую полуось  $a = 1.08$  а. е. В перигелии Икар заходит внутрь орбиты Меркурия. С другой стороны, Гидальго, имеющий из всех малых планет наибольшее среднее расстояние от Солнца ( $a = 5.79$  а. е.), в афелии почти достигает орбиты Сатурна ( $a = 9.54$  а. е.).

Среднее значение больших полуосей для кольца малых планет близко к 2.8 а. е., что точно совпадает с величиной, предсказанной по „закону“ Боде.

Примечание. В 1772 г. немецкий астроном, директор Берлинской обсерватории, Боде (1747—1826) нашел эмпирическую зависимость между средними расстояниями шести известных в то время больших планет. Напишем ряд чисел: 0, 3, 6, 12, 24, 48 и 96. Прибавим 4 к каждому члену ряда и разделим результат на 10. Мы получим тогда числа, которые довольно хорошо представляют средние расстояния больших планет от Солнца в астрономических единицах.

Боде известен в истории астрономии также тем, что предложенное им название Урана для открытой Гершелем в 1781 г. новой большой планеты стало общепринятым. Название „звезда Георга“, предложенное самим Гершелем в честь английского короля Георга III,



Таблица 12

	Ахиллес	Юпитер
$a$ . . . . .	5.2112	5.2028
$p$ . . . . .	298'23	299'13
$e$ . . . . .	0.148	0.048
$i$ . . . . .	10°3	1°3

не вошло в употребление на континенте, так же как и название „планета Гершеля“. Открытие Урана, казалось, подтвердило правильность „закона“ Боде. Согласно этому „закону“ среднее расстояние Урана от Солнца должно равняться 19.6 а. е., фактически для орбиты Урана  $a = 19.2$  а. е. Однако для Нептуна „закон“ Боде дает 38.8 вместо 30.1.

**3. Орбиты малых планет.** По эксцентриситетам и наклонам орбиты малых планет заметно отличаются от больших планет.

Среднее значение эксцентриситета орбит малых планет  $e = 0.15$ . При этом 98.7% орбит малых планет имеют эксцентриситет  $e < 0.33$ . Однако открыты малые планеты с „кометными“ эксцентриситетами. Например, эксцентриситет орбиты Гидальго (944) равен  $e = 0.66$ , а эксцентриситет Икара (1566)  $e = 0.83$ .

Среднее значение наклонов орбит малых планет приблизительно равно  $i = 10^\circ$ . Десять малых планет имеют наклоны орбит больше  $30^\circ$ . У Паллады (2) наклон орбиты к эклиптике равен  $i = 33^\circ$ , у Гидальго (944)  $i = 43^\circ$  и у Бетулии (1580)  $i = 52^\circ$ .

Несмотря на значительное разнообразие наклонов орбит, ни одна малая планета не движется вокруг Солнца в направлении, обратном движению больших планет; в этом отношении малые планеты являются типичными планетами.

Большие наклоны и эксцентриситеты орбит малых планет вызывают некоторые особенности и в их видимом движении по небесному своду. Некоторые малые планеты могут на довольно большое расстояние удаляться от эклиптики и описывать весьма своеобразную кривую. Так, например, Ганимед (1036) в 1911 г. находился недалеко от полюса эклиптики. Вблизи оппозиции малые планеты всегда движутся попятным движением.

Изучение движения малых планет представляет трудную задачу небесной механики. Аналитические методы, разработанные для больших планет, становятся непригодными или во всяком случае крайне трудоемкими при их применении к малым планетам. Это объясняется следующими причинами: 1) малые параметры ( $e$  и  $i$ ), по которым ведутся разложения в ряды, перестают быть малыми величинами для большинства малых планет; 2) близость массивного возмущающего тела (Юпитер) приводит к тому, что параметр  $\frac{a}{a'}$ , по которому также ведется разложение, мало отличается от единицы; 3) большое количество открытых в настоящее время малых планет делает практически невозможным построение точных аналитических теорий движения для каждой планеты. Поэтому приходится разрабатывать специальные методы для приближенного учета возмущений малых планет и широко применять метод численного интегрирования дифференциальных уравнений движения с использованием современных электронных вычислительных машин.

**4. Наиболее интересные группы малых планет.** Среди всех известных малых планет необходимо выделить три группы, представляющие большой теоретический интерес с точки зрения небесной механики.

#### Группа малых планет, близко приближающихся к Земле

13 августа 1898 г. на Берлинской обсерватории была открыта малая планета, вызвавшая большой интерес из-за быстрого видимого движения, достигавшего  $29'$  за сутки. Оказалось, что большая полуось орбиты этой малой планеты, получившей название Эроса (433), равна  $a = 1.46$  а. е., т. е. меньше, чем у Марса. Благодаря большому эксцентриситету ( $e = 0.22$ ) Эрос в перигелии приближается к Солнцу на  $1.13$  а. е., а к Земле во время некоторых оппозиций — всего на  $0.16$  а. е. (или 23 миллиона километров). Близость Эроса к Земле создает благоприятные условия для определения параллакса Солнца по наблюдениям Эроса в оппозиции. В 1950 г. Рабе, используя многочисленные наблюдения Эроса (свыше 3000) за период с 1926 по 1945 г., определил параллакс Солнца,

массу Луны, постоянную аберрации, а также поправки элементов орбиты Земли.

12 марта 1932 г. в Уккле близ Брюсселя была открыта малая планета, получившая название Амур (1221). Эта планета может приближаться к Земле до 0.1 а. е. Большая полуось ее орбиты  $a=1.92$  а. е. и эксцентриситет  $e=0.44$ . В перигелии расстояние Амура от Солнца всего 1.06 а. е. В оппозицию 1940 г. расстояние Амура от Земли было равно 0.106 а. е. (или около 16 миллионов километров).

24 апреля 1932 г. в Гейдельберге была открыта еще более интересная планета Аполлон. Большая полуось орбиты Аполлона  $a=1.5$  а. е., а эксцентриситет  $e=0.53$ . Перигелий орбиты Аполлона расположен внутри орбиты Венеры. При открытии расстояние Аполлона от Земли равнялось 0.09 а. е. Однако после 1932 г. Аполлон ни разу не наблюдался и, по-видимому, должен считаться утерянным.

28 октября 1937 г. в Гейдельберге была открыта малая планета с необычайно быстрым, никогда прежде не наблюдавшимся видимым движением. В течение одних суток (30 октября) она пробежала четверть небесного свода. Малая планета получила название Гермес. 30 октября 1937 г. около восьми часов по всемирному времени расстояние Гермеса от Земли составляло 0.004 а. е. (или 580 000 км), т. е. только немногим превышало расстояние Луны от Земли. Большая полуось орбиты Гермеса равна  $a=1.29$  а. е., а эксцентриситет  $e=0.47$ . Малая планета наблюдалась в течение пяти суток, но затем была утеряна. Вследствие чрезвычайно быстрого движения следить за ней оказалось невозможным.

26 июня 1949 г. Бааде на обсерватории Паломар открыл малую планету Икар (1566), элементы которой имеют совершенно исключительный характер. Большая полуось  $a=1.078$ , эксцентриситет  $e=0.827$ , время обращения вокруг Солнца 409 суток, т. е. немногим более одного года. В перигелии Икар заходит далеко внутрь орбиты Меркурия. Расстояние Икара от Земли может составлять всего 0.04 а. е. (около 6 миллионов километров).

В 1951 г. была открыта малая планета, получившая впоследствии название Географ (1620). Ее элементы: суточное движение  $n=2557''$ , большая полуось  $a=1.24$  а. е.,

эксцентриситет  $e = 0.33$  и период обращения  $P = 1.39$  года. Планета может подходить к Земле на расстояние  $0.033$  а. е.

В эту группу малых планет входят также Альберт (719), Алинда (887), Ганимед (1036) и некоторые другие.

### Группа ярких малых планет

Если мы вычислим со всею возможной точностью, т. е. с учетом возмущений от всех больших планет эфемериду малой планеты, то разность — наблюдение минус вычисление будет зависеть от неточности принятых элементов малой планеты, неточности элементов Земли и от систематических ошибок каталога звезд, к которому привязаны наблюдения планеты. Это обстоятельство позволяет по наблюдениям малых планет определить как поправки к элементам Земли, так и постоянные звездного каталога. Наблюдения должны производиться в течение промежутка времени, охватывающего не менее двух оборотов малой планеты, т. е. в течение 8—10 лет и по возможности далеко от оппозиции. Поэтому в программу наблюдений могут входить только яркие малые планеты.

В группу ярких малых планет входят Церера (1), Паллада (2), Юнона (3), Веста (4), Геба (6), Ирис (7) и другие.

Преимущества наблюдений малых планет по сравнению с наблюдениями Луны, Солнца или больших планет состоят в том, что малые планеты наблюдаются как светящиеся точки и поэтому их наблюдения свободны от многочисленных систематических ошибок, присущих наблюдениям других небесных светил. Для малых планет, которые используются при построении системы звездных каталогов, должны быть разработаны точные теории движения. Так как при обработке наблюдений нас интересует сравнительно небольшой интервал времени, то проще всего применять метод численного интегрирования уравнений движения планеты.

### Троянская группа малых планет

Лагранж (1736—1813) впервые показал, что при определенных начальных условиях можно довести до конца точное интегрирование дифференциальных уравнений движения в общей задаче трех тел. В одном из этих случаев три массы образуют постоянно вершины равносто-

ронного треугольника, размеры которого не остаются одинаковыми, так как две массы, скажем,  $m_2$  и  $m_3$  описывают вокруг  $m_1$  эллипс, линии апсид которых образуют между собой угол в  $60^\circ$ . Масса  $m_1$  находится в одном из фокусов. Решение Лагранжа представляется на первый взгляд весьма искусственным и его реализация в солнечной системе невозможной. Однако 22 февраля 1907 г. в Гейдельберге была открыта малая планета, получившая впоследствии название Ахиллес (588), орбита которой имеет очень большое сходство с орбитой Юпитера (табл. 12).

Средняя долгота Ахиллеса относительно Юпитера колеблется в пределах от  $+59.5$  до  $+70.8$ . Таким образом Юпитер и Ахиллес при своем движении вокруг Солнца постоянно остаются в вершинах равностороннего треугольника со сторонами, равными в среднем 5.2 а. е. При этом Ахиллес совершает сложные периодические движения около соответствующей вершины равностороннего треугольника, удаляясь иногда на значительное расстояние от этой точки.

В настоящее время открыто 14 малых планет, принадлежащих к этой группе: 9 из них движутся впереди Юпитера и 5 позади него.

**Примечание.** Все малые планеты этой группы названы мужскими именами, взятыми из древнегреческого эпоса о Троянской войне. При этом малые планеты, идущие впереди Юпитера, носят имена греческих героев (Ахиллес, Гектор, Нестор, Агамемнон, Одиссей, Аякс, Диомед, Антилох, Менелай) и поэтому иногда называются „греками“. Малые планеты, идущие за Юпитером, носят имена защитников Трои (Патрокл, Приам, Эней, Анхиз, Троиц) и поэтому называются „троянцами“. Так как это условие не было принято с самого начала, то Патрокл и Гектор оказались в несоответствующих группах.

Отметим, что малые планеты троянской группы имеют также соизмеримость средних движений с Сатурном, равную 5:2.

Над теорией движения малых планет троянской группы работали многие выдающиеся небесные механики.

**5. Служба малых планет.** Открытие малых планет в XIX в. поставило перед небесной механикой ряд новых задач, представляющих большой интерес для космогонии солнечной системы: объяснить особенности в распределении элементов малых планет, проблема „люков“, установление связи между малыми планетами, спутниками

больших планет и кометами и, наконец, вопрос о происхождении и эволюции кольца малых планет.

Одновременно массовое открытие малых планет, вызванное широким применением фотографического метода наблюдений, поставило перед астрономами и сложные организационные вопросы по „службе малых планет“. Парижская эфемеридная конференция в 1911 г. приняла следующую программу работ по малым планетам. Предвычисление эфемерид производится для всех без исключения малых планет с точностью, необходимой и достаточной для отождествления фотографических и визуальных наблюдений. Это означает, что ошибка геоцентрического положения малой планеты не должна превосходить  $0^{\circ}5'—1^{\circ}0'$ . Эфемериды должны в основной массе вычисляться без возмущений и только для малых планет, близких к Юпитеру, вычисляются приближенные возмущения численным или аналитическими методами.

Работа по обработке наблюдений малых планет была сосредоточена в Берлинском вычислительном институте. К этой работе примкнули и другие астрономические учреждения — Планетный институт во Франкфурте-на-Майне, Ленинградский астрономический институт (переименованный в 1943 г. в Институт теоретической астрономии) и другие.

Деятельность Берлинского вычислительного института как центра по малым планетам прекратилась в 1945 г. и по предложению Международного астрономического союза Институт теоретической астрономии взял на себя вычисление и публикацию эфемерид всех малых планет, начиная с 1948 г. В эфемеридной службе принимают участие и другие астрономические учреждения в Советском Союзе и за рубежом: Харьковский государственный университет, Астрофизическая лаборатория Академии наук Латвийской ССР и Латвийское отделение Всесоюзного астрономо-геодезического общества, Астрономический вычислительный институт в Гейдельберге, Астрономическая обсерватория в Цинциннати, Калифорнийский университет, обсерватория „Пурпурная гора“ (Нанкин), Астрономическая обсерватория в Токио, Астрономическая обсерватория Зо-Се (Шанхай).

Значительно расширена программа эфемеридных работ по сравнению с 1911 г. Применение быстродействующих электронных вычислительных машин позволило обеспе-

чить вычисление приближенных возмущений от Юпитера для всех малых планет, эфемериды которых публикуются в настоящее время.

„Эфемериды малых планет на 1963 г.“ содержат элементы 1650 малых планет и эфемериды 1308 малых планет, оппозиции которых имели место в 1963 г.

**6. Искусственные малые планеты.** В 1959 г. система малых планет пополнилась двумя новыми объектами, созданными руками человека.

2 января 1959 г. изготовленная в СССР космическая ракета „Мечта“ вышла на гелиоцентрическую орбиту, превратившись в спутника Солнца — первую искусственную планету. Ее элементы: перигельное расстояние 0.979 а. е., афельное расстояние 1.31 а. е., эксцентриситет  $e=0.148$ , период обращения 443 дня.

3 марта 1959 г. в США был запущен космический аппарат „Пионер IV“, также превратившийся в искусственную планету. „Пионер IV“ движется почти по круговой орбите: эксцентриситет  $e=0.08101$ , большая полуось  $a=1.075$  а. е., период обращения 407 дней.

3 ноября 1960 г. „Пионер V“ превратился в третью искусственную планету с перигельным расстоянием 0.81 а. е. и афельным расстоянием 0.99 а. е.

Четвертая искусственная малая планета запущена в Советском Союзе 2 декабря 1961 г. в направлении к Венере. Ее перигельное расстояние 0.72 а. е. и афельное расстояние 1.02 а. е.

Искусственные планеты не могут наблюдаться даже в самые мощные телескопы и поэтому определение точных орбит для них невозможно.

**7. Малые планеты и небесная механика.** В течение XIX и XX вв. были разработаны многочисленные методы для изучения движения малых планет. Из всех этих методов только метод Ганзена (1795—1874) получил довольно широкое распространение, остальные методы применялись в единичных случаях. Метод Ганзена был, в частности, использован Лево (1841—1911) для построения точной теории движения Весты. Таблицы, составленные Лево в результате 25-летней непрерывной работы — это единственные таблицы, дающие положение малой планеты с точностью, не уступающей точности больших планет. Для вычисления приближенных возмущений широкое распространение получили методы Болина (1860—

1939) и Бренделя (1862—1939). Уравнения для вычисления возмущений получены Болином в форме Ганзена, если ограничиваться в разложениях членами первого порядка относительно возмущающей массы. По методу Болина построены таблицы для группы планет типа Гестии ( $p/q = 1/3$ ), Минервы ( $p/q = 2/5$ ), Флоры ( $p/q = 2/7$ ), Гекубы ( $p/q = 1/2$ ) и для соизмеримости  $p/q = 1/4$ . Для малых планет, близких к Юпитеру, классические методы небесной механики непригодны.

Мы изложим в дальнейших параграфах метод Хилла и его применение к движению Цереры (работы В. Ф. Проскурина) и метод периодических орбит.

## § 2. Метод Хилла

**1. Введение.** Хилл предложил свой метод вычисления возмущений малых планет в 1874 г. В качестве примера, иллюстрирующего этот метод, Хилл через двадцать два года опубликовал возмущения долготы в орбите, логарифма радиуса-вектора и широты Цереры.

В 1933—1936 гг. в Астрономическом институте проводилась работа по использованию метода Хилла для приближенного определения возмущений малых планет.

В 1948 г. В. Ф. Проскурин (1919—1964) приступил к применению метода Хилла для построения точной теории движения Цереры с учетом возмущений от всех больших планет как первого, так и второго, а возможно, и третьего порядка относительно возмущающих масс. Первая часть этой фундаментальной работы (возмущения первого порядка относительно возмущающих масс) была опубликована в 1952 г. в Трудах Института теоретической астрономии (выпуск II). Через десять лет (в 1962 г.) там же была опубликована вторая часть работы (выпуск IX), в которой автор переходит к разработке методики вычисления возмущений второго порядка. В качестве примера, иллюстрирующего метод, вычислены возмущения Цереры от Сатурна.

Метод Хилла, по крайней мере при вычислении возмущений первого порядка, проще других известных методов. Это достигается прежде всего введением в качестве независимого переменного не времени, а невозмущенной истинной аномалии малой планеты. Связь между временем



и истинной аномалией дается, как известно, с помощью интеграла площадей

$$r_0^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{p}, \quad (\text{III. 1})$$

откуда

$$dt = \frac{r_0^2}{k \sqrt{p}} dv. \quad (\text{III. 2})$$

Другой особенностью метода Хилла является выбор специальной координатной системы, в которой за основную плоскость принимается плоскость невозмущенной орбиты малой планеты. При этом формулы Хилла дают непосредственно возмущения радиуса-вектора, долготы в оскулирующей орбите и широты малой планеты по отношению к плоскости невозмущенной орбиты.

При разложении производных пертурбационной функции в ряды по кратным дугам истинных аномалий  $v$  и  $v'$  в методе Хилла применяется гармонический анализ для вычисления коэффициентов рядов Фурье.

В дальнейшем метод Хилла будет изложен для случая возмущений первого порядка.

**2. Основные уравнения.** Примечание. При выводе основных формул метода Хилла была использована статья Б. В. Нумерова „Вычисление абсолютных возмущений первого порядка в полярных координатах“ (Бюллетень Астрономического института, № 35, 1934 г.). Эта статья содержит результаты работы семинара, организованного в Астрономическом институте в 1933 г. при участии Б. В. Нумерова, В. В. Нумеровой, В. С. Мошковой, Н. Ф. Боевой, А. П. Тяхт, А. Н. Струйской, Е. К. Харадзе и др.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения малой планеты в прямоугольных координатах с началом в центре Солнца имеют следующий вид (масса Солнца принята за единицу, масса малой планеты равна нулю):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{III. 3})$$

где производные пертурбационной функции по координатам выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = k^2 m \left( \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = k^2 m \left( \frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = k^2 m \left( \frac{z' - z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r'^3} \right).$$

Координаты малой планеты (Цереры) обозначены через  $x, y, z$ , координаты возмущающего тела (Юпитера) через  $x', y', z'$ . Масса Юпитера —  $m$ . Радиусы-векторы  $r, r'$  и  $\Delta$  — взаимное расстояние между малой планетой и Юпитером определяются формулами

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz'). \end{aligned} \quad (\text{III. 4})$$

Умножая уравнения (III. 3) соответственно на  $x, y, z$  и складывая, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) - v^2 + \\ + \frac{k^2}{r} = x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} + z \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

где через  $v$  обозначена скорость малой планеты,

$$v^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Умножая теперь уравнения (III. 3) соответственно на  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$  и  $\frac{dz}{dt}$  и суммируя, можем написать

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{k^2}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (\text{III. 6})$$

Интегрируя последнюю формулу, получим следующее выражение для квадрата скорости:

$$v^2 = \frac{2k^2}{r} + 2 \int \left( \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt + c_0 + c, \quad (\text{III. 7})$$

где через  $c_0 + c$  обозначена постоянная интегрирования.

Подставляя выражение (III. 7) в уравнение (III. 5), получим основное дифференциальное уравнение для радиуса-вектора в возмущенном движении

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \frac{k^2}{r} = \left( x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} + z \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \\ + 2 \int \left( \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt + c_0 + c. \quad (\text{III. 8})$$

Умножим теперь первое уравнение системы (III. 3) на  $-y$  и второе уравнение на  $+x$ ; складывая, получим

$$\frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (\text{III. 9})$$

откуда, интегрируя, находим

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \int \left( x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt + K_0 + K, \quad (\text{III. 10})$$

где через  $K_0 + K$  обозначена постоянная интегрирования.

Введем вместо прямоугольных координат малой планеты полярные координаты с помощью известных соотношений

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda \cos \beta, \\ y &= r \sin \lambda \cos \beta, \\ z &= r \sin \beta. \end{aligned} \quad (\text{III. 11})$$

Дифференцируя последние формулы, напишем выражения производных от координат

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \lambda \cos \beta \frac{dr}{dt} - r \sin \lambda \cos \beta \frac{d\lambda}{dt} - r \cos \lambda \sin \beta \frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sin \lambda \cos \beta \frac{dr}{dt} + r \cos \lambda \cos \beta \frac{d\lambda}{dt} - r \sin \lambda \sin \beta \frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= \sin \beta \frac{dr}{dt} + r \cos \beta \frac{d\beta}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{III. 12})$$

Используя формулы (III. 12), можем переписать уравнение (III. 10) в следующем виде:

$$r^2 \cos^2 \beta \frac{d\lambda}{dt} = \int \left( x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt + K_0 + K. \quad (\text{III. 13})$$

Мы получили основное дифференциальное уравнение для долготы малой планеты в возмущенном движении.

Представим возмущенные координаты малой планеты в виде

$$r = r_0 + \delta r, \quad \lambda = \lambda_0 + \delta \lambda, \quad z = z_0 + \delta z, \quad (\text{III. 14})$$

где  $r_0, \lambda_0, z_0$  удовлетворяют уравнениям невозмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 r_0^2}{dt^2} - \frac{k^2}{r_0} &= c_0, \\ r_0^2 \cos^2 \beta_0 \frac{d\lambda_0}{dt} &= K_0, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{k^2 z_0}{r_0^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 15})$$

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение для возмущений радиуса-вектора, образуем разность между (III. 8) и первым уравнением (III. 15)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^3} (r_0 \delta r) &= x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} + z \frac{\partial R}{\partial z} + \\ &+ 2 \int \left( \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt + c. \end{aligned} \quad (\text{III. 16})$$

При выводе формулы (III. 16) пренебрегаем квадратом малой величины  $\delta r$ , что допустимо, если ограничиваемся построением теории движения малой планеты с точностью до первого порядка относительно возмущающих масс.

Образуя теперь разность между уравнением (III. 13) и вторым уравнением (III. 15) и учитывая, что в невозмущенном движении широта  $\beta_0 = 0$ , можем написать следующее дифференциальное уравнение для возмущения в долготе, также ограничиваясь первым порядком малых величин  $\delta r$  и  $\delta \lambda$ :

$$r_0^2 \frac{d\delta \lambda_0}{dt} = \int \left( x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt + K - 2r_0 \delta r \frac{d\lambda_0}{dt}. \quad (\text{III. 17})$$

Так как в невозмущенном движении за основную плоскость принята плоскость  $xy$ , то с точностью до членов первого порядка включительно мы можем написать

$$z = \delta z = r_0 \delta \beta. \quad (\text{III. 18})$$

Поэтому для вычисления возмущений координаты  $z$  можно воспользоваться непосредственно третьим уравне-

нием системы (III. 3) которое можно переписать в следующем виде, если ограничиться первым порядком возмущений

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{k^2 \delta z}{r_0^3} = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (\text{III. 19})$$

**3. Выражения для возмущающих сил.** Для получения возмущений первого порядка необходимо в правых частях уравнений (III. 16), (III. 17) и (III. 19) подставить координаты и элементы невозмущенного движения.

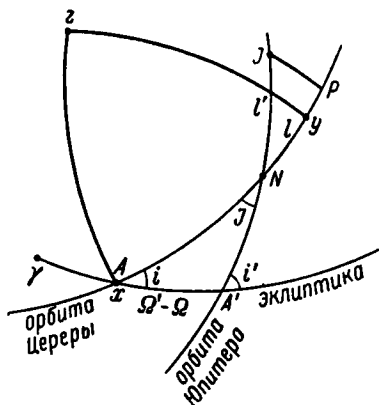


Рис. 11. Орбиты Цереры и Юпитера в проекции на небесную сферу.

Рассмотрим (рис. 11) на небесной сфере пересечение трех больших кругов: эклиптики, невозмущенной орбиты Цереры и невозмущенной орбиты Юпитера. Плоскость невозмущенной орбиты малой планеты примем за плоскость  $xu$ , причем ось  $x$  направим в точку  $A$  пересечения орбиты малой планеты с эклиптикой (восходящий узел планеты).

Невозмущенные координаты Цереры могут быть получены по формулам

$$x_0 = r_0 \cos \lambda_0, \quad y_0 = r_0 \sin \lambda_0, \quad z_0 = 0, \quad (\text{III. 20})$$

причем

$$\lambda_0 = \omega + \nu, \quad (\text{III. 21})$$

где  $\omega$  — расстояние перигелия от узла и  $\nu$  — истинная аномалия Цереры в невозмущенном движении.

Обратимся теперь к сферическому треугольнику  $AA'N$ , образованному восходящими узлами  $\Omega$  и  $\Omega'$  рассматриваемых орбит относительно эклиптики и восходящим узлом  $N$ , орбиты Юпитера относительно орбиты Цереры.

Для вычисления угла взаимного наклона  $\int$  между плоскостями орбит и дуг  $AN$  и  $A'N$ , которые обозначим через  $N$  и  $N'$ , могут служить следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned}
 & \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (N + N') = \\
 & = \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i' + i), \\
 & \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (N + N') = \\
 & = \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i' - i), \\
 & \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (N - N') = \\
 & = \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i' + i), \\
 & \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (N - N') = \\
 & = \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i' - i).
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 22})$$

Долготы Цереры и Юпитера  $l$  и  $l'$ , отсчитанные от точки  $N$ , равны

$$l = \omega + \nu - N, \quad l' = \omega' + \nu' - N'. \quad (\text{III. 23})$$

Из сферических треугольников  $xNI$ ,  $yNI$  и  $zNI$  трудно получить формулы для вычисления координат Юпитера относительно принятой системы прямоугольных координат

$$\begin{aligned}
 x' &= r' \cos(x, I) = r' (\cos N \cos l' - \sin N \sin l' \cos J), \\
 y' &= r' \cos(y, I) = r' (\sin N \cos l' + \cos N \sin l' \cos J), \\
 z' &= r' \cos(z, I) = r' \sin l' \sin J
 \end{aligned} \quad (\text{III. 24})$$

или, заменяя  $\cos J = 1 - 2 \sin^2 \frac{J}{2}$ , получим

$$\begin{aligned}
 x' &= r' \left[ \cos(l' + N) + 2 \sin N \sin l' \sin^2 \frac{J}{2} \right], \\
 y' &= r' \left[ \sin(l' + N) - 2 \cos N \sin l' \sin^2 \frac{J}{2} \right], \\
 z' &= r' \sin l' \sin J.
 \end{aligned} \quad (\text{III. 25})$$

Переходим теперь к вычислению производных пертурбационной функции, которые можно переписать таким образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial z} &= k^2 m \left[ x' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - \frac{x_0}{\Delta^3} \right], \\
&= k^2 m \left[ y' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - \frac{y_0}{\Delta^3} \right], \\
\frac{\partial R}{\partial z} &= k^2 m z' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right).
\end{aligned}
\tag{III. 26}$$

В правые части (III. 16), (III. 17) и (III. 19) входят выражения, зависящие от возмущающих сил и невозмущенных координат малой планеты, которые на основании (III. 20) и (III. 26) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}
r_0 R' &= x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} + z \frac{\partial R}{\partial z} = x_0 \frac{\partial R}{\partial x} + y_0 \frac{\partial R}{\partial y} = \\
&= k^2 m \left[ \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) (x_0 x' + y_0 y') - \frac{r_0^2}{\Delta^3} \right], \\
r_0 T &= x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} = x_0 \frac{\partial R}{\partial y} - y_0 \frac{\partial R}{\partial x} = \\
&= k^2 m \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) (x_0 y' - y_0 x'),
\end{aligned}
\tag{III. 27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy_0}{dt} = \\
&= R' \frac{dr_0}{dt} + r_0 T \frac{d\lambda_0}{dt}, \\
Z &= \frac{\partial R}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Заменяя в последних формулах прямоугольные координаты полярными координатами на основании формул (III. 20) и (III. 25), можем написать следующие выражения для  $R'$ ,  $T$  и  $Z$ :

$$\begin{aligned}
R' &= k^2 m \left[ r' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \cos(l' - l) - 2 \sin l \sin l' \sin^2 \frac{J}{2} \right\} - \frac{r_0^2}{\Delta^3} \right], \\
T &= k^2 m r' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \times \\
&\quad \times \left[ \sin(l' - l) - 2 \cos l \sin l' \sin^2 \frac{J}{2} \right], \\
Z &= k^2 m r' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin l' \sin J.
\end{aligned}
\tag{III. 28}$$

Величины  $R'$ ,  $T$  и  $Z$  — компоненты возмущающей силы по радиусу-вектору, перпендикуляру к радиусу-вектору и по направлению оси  $z$ .

Так как в дальнейшем мы введем вместо времени новую переменную — истинную аномалию малой планеты в невозмущенном движении, нам необходимо установить формулы для перехода от  $v$  к  $v'$ .

**4. Зависимость между истинными аномалиями малой планеты и Юпитера в невозмущенном движении.** Для вычисления средних аномалий Цереры и Юпитера для данного момента  $t$  служат известные формулы

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \mu t, \\ M' &= M'_0 + \mu' t, \end{aligned} \quad (\text{III. 29})$$

где  $\mu$  и  $\mu'$  — среднее суточное движение Цереры и Юпитера, а  $M_0$  и  $M'_0$  — средние аномалии в начальную эпоху. Обозначим отношение средних движений  $\mu$  и  $\mu'$  через

$$n = \mu' : \mu. \quad (\text{III. 30})$$

Исключая  $t$  из уравнений (III. 29), можем написать

$$\begin{aligned} M' &= nM - nM_0 + M'_0 = \\ &= nv + M'_0 - nM_0 - n(v - M). \end{aligned} \quad (\text{III. 31})$$

Положим для краткости

$$\psi = nv + M'_0 - nM_0 \quad (\text{III. 32})$$

тогда

$$M' = \psi - n(v - M). \quad (\text{III. 33})$$

При разложении в ряды нам будет удобно пользоваться переменной  $w'$ , равной

$$w' = \psi - v. \quad (\text{III. 34})$$

В этом случае истинная аномалия Юпитера вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} M' &= v + w' - n(v - M), \\ E' - e \sin E' &= M', \\ \operatorname{tg} \frac{v'}{2} &= \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}} \operatorname{tg} \frac{E'}{2}. \end{aligned} \quad (\text{III. 35})$$



**5. Интегрирование дифференциальных уравнений для  $\delta r$  и  $\delta z$ .** Уравнения (III. 16) и (III. 19) имеют одну и ту же общую форму

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r_0^3} = Q. \quad (\text{III. 36})$$

В невозмущенном движении мы должны положить  $Q=0$ , тогда получим обычное уравнение невозмущенного эллиптического движения, которое имеет два частных решения

$$z_1 = r_0 \cos \nu, \quad z_2 = r_0 \sin \nu. \quad (\text{III. 37})$$

Общий интеграл однородного уравнения может быть записан так:

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2, \quad (\text{III. 38})$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные интегрирования.

Рассматривая величины  $c_1$  и  $c_2$  как функции времени, можем сохранить форму общего интеграла (III. 38) и для неоднородного дифференциального уравнения (III. 36).

Действительно, пользуясь методом вариации произвольных постоянных, дифференцируя два раза выражение общего интеграла (III. 38), получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= c_1 \frac{dz_1}{dt} + c_2 \frac{dz_2}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= c_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + \frac{dc_1}{dt} \frac{dz_1}{dt} + \frac{dc_2}{dt} \frac{dz_2}{dt} \end{aligned} \quad (\text{III. 39})$$

при условии, что

$$z_1 \frac{dc_1}{dt} + z_2 \frac{dc_2}{dt} = 0. \quad (\text{III. 40})$$

Подставляя второе уравнение системы (III. 39) в уравнение (III. 36), можем написать

$$\frac{dc_1}{dt} \frac{dz_1}{dt} + \frac{dc_2}{dt} \frac{dz_2}{dt} = Q. \quad (\text{III. 41})$$

Для определения  $c_1$  и  $c_2$  решаем систему двух уравнений (III. 40) и (III. 41) относительно производных  $\frac{dc_i}{dt}$

и  $\frac{dc_2}{dt}$ . Воспользовавшись интегралом площадей в невозмущенном движении

$$r_0^2 \frac{dv}{dt} = z_1 \frac{dz_2}{dt} - z_2 \frac{dz_1}{dt} = k \sqrt{p}, \quad (\text{III. 42})$$

будем иметь следующие выражения для определения величин  $c_1$  и  $c_2$ :

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{z_2 Q}{k \sqrt{p}}, \quad \frac{dc_2}{dt} = \frac{z_1 Q}{k \sqrt{p}}. \quad (\text{III. 43})$$

Интегрируя и подставляя в общий интеграл (III. 38), можно написать решение дифференциального уравнения (III. 36) в следующем окончательном виде:

$$k \sqrt{p} \cdot z = z_2 \int z_1 Q dt - z_1 \int z_2 Q dt + c_1 z_1 + c_2 z_2. \quad (\text{III. 44})$$

Если теперь перейти к полярным координатам по формулам (III. 37) и заменить дифференциал времени дифференциалом истинной аномалии по формуле (III. 2), то общее решение уравнения (III. 36) можно записать так:

$$\frac{k^2}{r_0 p^2} \cdot z = \int Q \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \sin(\bar{v} - v) dv + c_1 \cos v + c_2 \sin v, \quad (\text{III. 45})$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования, а  $\bar{v}$  под знаком интеграла остается постоянной величиной при интегрировании. После интегрирования следует положить  $\bar{v} = v$ .

**6. Вычисление возмущений третьей координаты  $z$ .** Применяя формулу (III. 45) для вычисления возмущения третьей координаты  $\delta z$ , определяемой дифференциальным уравнением (III. 19), можно написать

$$\frac{k^2}{r_0 p^2} \delta z = \int Z \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \sin(\bar{v} - v) dv + c_4 \cos v + c_5 \sin v, \quad (\text{III. 46})$$

причем возмущающая сила  $Z$  определяется из третьего уравнения системы (III. 28).

**7. Вычисление возмущений радиуса-вектора.** Применяя формулу (III. 45) для вычисления возмущения радиуса-вектора  $\delta r$ , определяемого уравнением (III. 16), можно написать

$$\frac{k^2}{p^2} \delta r = \int Q \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \sin(\bar{v} - v) dv + c_1 \cos v + c_2 \sin v, \quad (\text{III. 47})$$

причем  $Q$  определяется из формулы

$$Q = \left( x_0 \frac{\partial R}{\partial x} + y_0 \frac{\partial R}{\partial y} \right) + 2 \int \left( \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy_0}{dt} \right) dt + c. \quad (\text{III. 48})$$

Последнюю формулу можно на основании (III. 27) переписать в следующем виде:

$$Q = r_0 R' + 2 \int \left( R' \frac{dr_0}{dt} + r_0 T \frac{dl_0}{dt} \right) dt + c. \quad (\text{III. 49})$$

**8. Вычисление возмущений долготы.** Уравнение (III. 17) для определения возмущения долготы  $\delta\lambda$  на основании (III. 27) может быть переписано в виде

$$r_0^2 \frac{d\delta\lambda}{dt} = \int r_0 T dt + K - 2r_0 \delta r \frac{dl_0}{dt}. \quad (\text{III. 50})$$

Переходя к переменной  $v$  и пользуясь интегралом площадей (III. 1), можно формулу (III. 50) переписать в такой форме

$$\frac{d\delta\lambda}{dv} = \int \frac{r_0^3}{k^2 p} T dv + \frac{K}{k \sqrt{p}} - \frac{2\delta r}{r_0}, \quad (\text{III. 51})$$

так как  $d\lambda_0 = dv$  (см. (III. 21)).

Интегрируя последнее выражение, можно написать окончательно следующую формулу для вычисления возмущения долготы:

$$\delta\lambda = \int \left[ \frac{r_0^3}{k^2 p} \int T dv + \frac{K}{k \sqrt{p}} - 2 \frac{\delta r}{r_0} \right] dv + c_3, \quad (\text{III. 52})$$

где  $K$  и  $c_3$  — произвольные постоянные интегрирования.

Формулы (III. 46), (III. 47) и (III. 52) позволяют вычислить возмущения первого порядка для долготы, радиуса-вектора и третьей координаты, иными словами, позволяют полностью построить возмущенное движение малой планеты.

Семь постоянных интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c$  и  $K$  не являются независимыми величинами, а должны тождественно удовлетворять условию, которое можно получить, рассматривая выражение для квадрата скорости.

**9. Соотношение между произвольными постоянными интегрирования.** Выражение квадрата скорости

в полярных координатах на основании формул (III. 12) можно написать в виде

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cos^2 \beta \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2. \quad (\text{III. 53})$$

Соответственно в невозмущенном движении имеем

$$V_0^2 = \left(\frac{dr_0}{dt}\right)^2 + r_0^2 \left(\frac{d\lambda_0}{dt}\right)^2. \quad (\text{III. 54})$$

Образуя разность формул (III. 53) и (III. 54) и ограничиваясь первым порядком малых величин, получим

$$V^2 - V_0^2 = 2 \frac{dr_0}{dt} \frac{d\delta r}{dt} + 2r_0 \delta r \left(\frac{d\lambda_0}{dt}\right)^2 + 2r_0^2 \frac{d\lambda_0}{dt} \frac{d\delta\lambda}{dt}. \quad (\text{III. 55})$$

Переходя к переменной  $v$  и принимая во внимание формулу (III. 51), можно выражение (III. 55) переписать в следующем виде:

$$V^2 - V_0^2 = \frac{2k^2}{r_0^2} \times \\ \times \left( e \sin v \frac{d\delta r}{dv} + \int T \frac{r_0^3}{k^2} dv + \frac{\sqrt{p}K}{k} - \frac{\delta r}{r_0} \right). \quad (\text{III. 56})$$

С другой стороны, образуя разность между уравнением (III. 7) для возмущенного движения и соответствующим уравнением для невозмущенного движения

$$V_0^2 = \frac{2k^2}{r} + c_0, \quad (\text{III. 57})$$

можем написать

$$V^2 - V_0^2 = 2k^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \\ + 2 \int \left( \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy_0}{dt} \right) dt + c. \quad (\text{III. 58})$$

Ограничиваясь первым порядком возмущений радиуса-вектора, а также используя третье уравнение системы (III. 27), получим

$$V^2 - V_0^2 = -\frac{2k^2 \delta r}{r_0^2} + 2 \int \left( R \frac{r^2 e \sin v}{p} + r_0 T \right) dv + c. \quad (\text{III. 59})$$

Наконец, сравнивая последнюю формулу с формулой (III. 56), будем окончательно иметь

$$\frac{r_0^2}{2k^2} c = e \sin \nu \frac{d\delta r}{d\nu} - \int \frac{r_0^3 e \sin \nu}{k^2 p} R d\nu + \\ + \frac{\sqrt{p} K}{k} + \left(1 - \frac{1}{r_0}\right) \delta r. \quad (\text{III. 60})$$

Формула (III. 60) является тождеством, при подстановке в которое возмущения радиуса-вектора  $\delta r$  члены с переменными аргументами должны сократиться. В результате получим соотношение между произвольными постоянными интегрирования. Таким образом, вместо семи произвольных постоянных имеем только шесть, как это должно быть для трех дифференциальных уравнений второго порядка.

**10. Определение постоянных.** Постоянные интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c$  и  $K$  могут быть определены различными способами.

**Первый способ.** Определяем постоянные интегрирования из условия, что при  $t=0$  (эпоха оскуляции) возмущения  $\delta r, \delta \lambda$  и  $\delta z$ , а также их производные

$$\left(\frac{d\delta r}{d\nu}\right)_{\nu=0}, \quad \left(\frac{d\delta \lambda}{d\nu}\right)_{\nu=0}, \quad \left(\frac{d\delta z}{d\nu}\right)_{\nu=0}$$

обращаются в нуль.

Тогда из уравнения (III. 52) имеем

$$\delta \lambda = c_3 + K_1 \nu_0 + \int \left[ \frac{r_0^3}{k^2 p} \int T d\nu - 2 \frac{\delta r}{r_0} \right]_0 d\nu = 0, \quad (\text{III. 61})$$

где

$$K_1 = \frac{K}{k \sqrt{p}},$$

$$\left(\frac{d\delta \lambda}{d\nu}\right)_{\nu=\nu_0} = K_1 + \frac{r_0^3}{k^2 p} \int T_0 d\nu - \frac{2\delta r}{r_0} = 0.$$

Так как  $\delta r=0$ , то из последнего равенства находим

$$K_1 = \frac{K}{k \sqrt{p}} = - \frac{r_0^3}{k^2 p} \int T_0 d\nu. \quad (\text{III. 62})$$

Тогда условие (III. 61) дает

$$c_3 = -K_1 v_0 - \int \left[ \frac{r_0^3}{k^2 p} \int T dv - 2 \frac{\delta r}{r_0} \right]_0 dv. \quad (\text{III. 63})$$

Далее из уравнения (III. 47) имеем

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{p^2} \delta r &= \int \left[ Q \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \sin(\bar{v} - v) dv + \\ &+ c_1 \cos v + c_2 \sin v = 0, \\ \frac{k^2}{p^2} \left( \frac{d\delta r}{dv} \right)_{v=v_0} &= \int \left[ Q \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \cos(\bar{v} - v) dv - \\ &- c_1 \sin v + c_2 \cos v = 0. \end{aligned} \quad (\text{III. 64})$$

Умножая последние равенства соответственно на  $\cos v$ ,  $-\sin v$ , а затем на  $\sin v$ ,  $\cos v$  и складывая, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= \int \left[ Q \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \sin v dv, \\ c_2 &= - \int \left[ Q \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \cos v dv \end{aligned} \quad (\text{III. 65})$$

при  $v = v_0$ . Наконец, уравнение (III. 46) дает

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{r_0 p} \delta z &= \int \left[ Z \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \sin(\bar{v} - v) dv + \\ &+ c_4 \cos v + c_5 \sin v = 0, \\ \frac{k^2}{r_0 p} \left( \frac{d\delta z}{dv} \right)_{v=v_0} &= \int \left[ Z \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \cos(\bar{v} - v) dv - \\ &- c_4 \sin v + c_5 \cos v = 0. \end{aligned} \quad (\text{III. 66})$$

Умножая первое уравнение на  $\cos v$ , а второе на  $-\sin v$ , а затем соответственно на  $\sin v$  и  $\cos v$  и суммируя, получим

$$\begin{aligned} c_4 &= + \int \left[ Z \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \sin v dv, \\ c_5 &= - \int \left[ Z \left( \frac{r_0}{p} \right)^3 \right]_0 \cos v dv \end{aligned} \quad (\text{III. 67})$$

при  $v = v_0$ .

Элементы орбиты Цереры для момента  $t=0$  при данном выборе постоянных интегрирования носят название оскулирующих элементов.

Второй способ. Можно просто положить все постоянные интегрирования равными нулю. В этом случае элементы орбиты малой планеты при  $t=0$  уже не

будут оскулирующими элементами. Элементы орбиты, являющиеся оскулирующими, называют средними элементами. В зависимости от метода определения постоянных интегрирования возможны различные системы средних элементов.

**11. Разложения в ряды Фурье производных пертурбационной функции.** Наша задача заключается теперь в разложении в ряды Фурье по кратным истинной аномалии возмущаемой планеты величин  $R'$ ,  $T$  и  $Z$  (см. (III. 28)). Вычисления следует производить в следующем порядке. Сначала по известным элементам Цереры и Юпитера

$$\begin{aligned} M_0, a, e, \omega, \Omega, i, \\ M'_0, a', e', \omega', \Omega', i' \end{aligned}$$

вычисляем по формулам (III. 22) угол взаимного наклона  $J$  и дуги  $N$  и  $N'$ .

Затем, разделив окружность на  $k$  частей и полагая последовательно  $v=0, \frac{2\pi}{k}, 2\frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1)\frac{2\pi}{k}$ , вычислим

$$\left. \begin{aligned} l &= v + \omega - N, \\ \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \\ r &= a(1 - e \cos E), \\ M &= E - e \sin E \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 68})$$

для каждого значения  $v$ . Разделим теперь окружность на  $k'$  частей. Полагая последовательно  $w' = \psi - v = 0, \frac{2\pi}{k'}, 2\frac{2\pi}{k'}, \dots, (k'-1)\frac{2\pi}{k'}$ , вычислим для каждого  $w'$  и для равноотстоящих значений  $v, kk'$  величин

$$\left. \begin{aligned} M' &= v + w' - n(v - M), \\ E' - e' \sin E' &= M', \\ \operatorname{tg} \frac{v'}{2} &= \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}} \operatorname{tg} \frac{E'}{2}, \\ r' &= a'(1 - e' \cos E'), \\ l' &= v' + w' - N', \\ \cos H &= \cos(l' - l) - 2 \sin l \sin l' \sin^2 \frac{J}{2}, \\ \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 69})$$

После этого по формулам (III. 28) вычисляем  $kk'$  значений  $R'$ ,  $T$  и  $Z$ , по которым  $R'$ ,  $T$  и  $Z$  могут быть разложены в ряды Фурье следующего вида:

$$\sum_{i, i'} [A_{i, i'} \cos(iv + i'w') + B_{i, i'} \sin(iv + i'w')] \quad (\text{III. 70})$$

$$\left( \begin{array}{l} i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \\ i' = 0, -1, -2 \dots \end{array} \right).$$

Метод такого разложения хорошо известен.

**12. Вычисление возмущений.** Обратимся теперь к формулам (III. 46), (III. 47) и (III. 52).

Для вычисления возмущения радиуса-вектора  $\delta r$  по формуле (III. 47) необходимо предварительно вычислить величину  $Q$  по формуле

$$Q = r_0 R' + 2 \int \left( R' \frac{dr_0}{dt} + r_0 T \frac{d\lambda_0}{dt} \right) dt + c. \quad (\text{III. 71})$$

В этом выражении мы должны перейти от переменной  $t$  к истинной аномалии  $v$  Цереры. Для этого достаточно заменить

$$\frac{d\lambda_0}{dt} dt = d\lambda_0 = dv,$$

$$\frac{dr_0}{dt} dt = \frac{dr_0}{dv} dv = \frac{a(1-e^2)e \sin v}{(1+e \cos v)^2} dv.$$

Положим для краткости

$$R'' = \frac{a(1-e^2)e \sin v}{(1+e \cos v)^2} R'.$$

Тогда для вычисления  $Q$  будем окончательно иметь следующую формулу:

$$Q = r_0 R' + 2 \int (R'' + r_0 T) dv + c. \quad (\text{III. 72})$$

Получив выражение для  $\delta r$ , вычисляем возмущение долготы  $\delta \lambda$  по формуле (III. 52).

Возмущение  $\delta z$  определяется по формуле (III. 46). Перейти от возмущения  $\delta z$  к возмущениям широты  $\delta \beta$  не представляет никакого труда, так как

$$r_0 \delta \beta = \delta z.$$

На этом заканчивается вычисление возмущений первого порядка.



**13. Возмущения первого порядка Цереры от Юпитера.** В основу вычисления возмущений Цереры от Юпитера положены следующие элементы:

Церера	Юпитер
Эпоха 1850 янв. 0.0 всем. вр.	
$M_0 = 160^{\circ}59'42''.4,$	$M'_0 = 148^{\circ}1'58''.33,$
$\Omega = 80\ 48\ 31.7,$	$\Omega' = 98\ 55\ 58.16,$
$\omega = 67\ 41\ 23.0,$	$\omega' = 272\ 58\ 28.56,$
$i = 10\ 37\ 8.2,$	$i' = 1\ 18\ 41.81,$
$\varphi = 4\ 29\ 56.9,$	$\varphi' = 2\ 45\ 56.93,$
$\mu = 770'723907,$	$\mu' = 299'12837656,$
$e = \sin \varphi = 0.07844412,$	$e' = \sin \varphi' = 0.04825382,$
$a = 2.7673993,$	$a' = 5.2028029,$
$m' = 1 : 1047.355.$	

Окружность по  $\nu$  делилась на 16 частей, так что аргумент  $\nu$  принимал значение  $0^{\circ}, 22^{\circ}.5, 45^{\circ}, \dots 337^{\circ}.5$ .

Аргументу  $w'$  придавались значения  $0^{\circ}, 15^{\circ}, 30^{\circ}, \dots 345^{\circ}$ ; иными словами, окружность по  $w'$  делилась на 24 части.

После этого вычислялись вспомогательные величины по формулам (III. 22), (III. 23), (III. 35) и (III. 68). Затем по формулам (III. 28) вычислялись  $kk'$  значений  $R', T$  и  $Z$ .

Разложение величин  $R', T$  и  $Z$  в ряды Фурье по аргументам  $\nu$  и  $w'$  не представляет особых трудностей.

Действительно, обозначая каждую из этих величин через  $U$ , можем написать

$$U = C_0(\nu) + C_1(\nu) \cos w' + C_2(\nu) \cos 2w' + \\ + C_3(\nu) \cos 3w' + \dots + S_1(\nu) \sin w' + \\ + S_2(\nu) \sin 2w' + S_3(\nu) \sin 3w' + \dots$$

Каждый из коэффициентов этого ряда является функцией  $\nu$  и в свою очередь разлагается в ряды. Например,

$$C(\nu) = a_0 + a_1 \cos \nu + a_2 \cos 2\nu + a_3 \cos 3\nu + \\ + \dots + b_1 \sin \nu + b_2 \sin 2\nu + b_3 \sin 3\nu + \dots$$

Рассмотрим для простоты случай, когда окружность разделена только на четыре части. Тогда

$$U(\varphi) = C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi. \quad (\text{III. 73})$$

Придавая  $\varphi$  значение  $\varphi = 0, 90, 180, 270^\circ$ , получим

$$\begin{aligned} U_0 &= C_0 + C_1 + C_2, & U_1 &= C_0 - C_2 + S_1, \\ U_2 &= C_0 - C_1 + C_2, & U_3 &= C_0 - C_2 - S_1. \end{aligned}$$

Суммируя и вычитая четные и нечетные значения  $U$ , получим

$$\left. \begin{aligned} 2C_0 + 2C_2 &= U_0 + U_2, \\ 2C_0 - 2C_2 &= U_1 + U_3, \\ 2C_1 &= U_0 - U_2, \\ 2S_1 &= U_1 - U_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 74})$$

Так как частные значения функции  $U$  для  $\varphi = 0, 90, 180, 270^\circ$  нам известны, то из уравнений (III. 74) легко находим все коэффициенты в разложении (III. 73).

После того как выполнено разложение необходимых величин по  $w'$ , а каждый коэффициент полученного ряда разложен в свою очередь в ряд по  $v$ , необходимо получить ряды по двум аргументам. Так, например, если

$$U(v, w') = C_0(v) + C_1(v) \cos w' + C_2(v) \cos 2w' + S_1(v) \sin w', \quad (\text{III. 75})$$

то после разложения коэффициентов получим

$$\begin{aligned} U(v, w') &= (d_0 + d_1 \cos v + d_2 \cos 2v + f_1 \sin v) + \\ &+ (d_3 + d_4 \cos v + d_5 \cos 2v + f_2 \sin v) \cos w' + \\ &+ (d_6 + d_7 \cos v + d_8 \cos 2v + f_3 \sin v) \cos 2w' + \\ &+ (d_9 + d_{10} \cos v + d_{11} \cos 2v + f_4 \sin v) \sin w'. \end{aligned} \quad (\text{III. 76})$$

При объединении рядов в один ряд необходимо пользоваться формулами

$$\cos kv \cos k'w' = \frac{1}{2} [\cos(kv + k'w') + \cos(kv - k'w')],$$

$$\sin kv \cos k'w' = \frac{1}{2} [\sin(kv + k'w') + \sin(kv - k'w')],$$

$$\cos kv \sin k'w' = \frac{1}{2} [\sin(kv + k'w') - \sin(kv - k'w')],$$

$$\sin kv \sin k'w' = \frac{1}{2} [-\cos(kv + k'w') + \cos(kv - k'w')].$$

Выполнив перемножения, мы получим ряд по аргументам  $v$  и  $w'$ . Перейдем теперь к вычислению возмущений.

Возмущения широты определяются из уравнения (III. 46). Интегрирование выполняется по следующим формулам:

$$\int A \cos(iv + i'w') \sin(\bar{v} - v) dv = \frac{A}{1 - (i + i'n)^2} \cos(iv + i'w'),$$

$$\int B \sin(iv + i'w') \sin(\bar{v} - v) dv = \frac{B}{1 - (i + i'n)^2} \sin(iv + i'w').$$

Исключение составляет случай  $i = 1, i' = 0$ . При этом

$$\int A \cos v \sin(\bar{v} - v) dv = \frac{1}{2} Av \sin v + \frac{1}{4} A \cos v,$$

$$\int B \sin v \sin(\bar{v} - v) dv = -\frac{1}{2} Bv \cos v + \frac{1}{4} B \sin v.$$

Выполнив интегрирование, получим  $\delta z$ . Аналогично получаем возмущения радиуса-вектора и долготы Цереры.

Возмущения широты определяются по формуле (см. (III. 18))

$$\delta\beta = \frac{1}{r_0} \delta z. \quad (\text{III. 77})$$

Окончательные разложения для вычисления возмущений широты, долготы и радиуса-вектора приведены в следующих трех табл. 13—15. Аргументами, по которым ведутся разложения, служат  $v$  и  $w' = \psi - v$ .

В табл. 13—15 содержится только часть членов, полученных в работе В. Ф. Проскурина. Общее количество членов в разложении широты составляет 239, долготы — 267 и радиуса-вектора 281.

Ограничиваясь важнейшими членами в разложениях, мы можем представить возмущения широты, долготы и радиуса-вектора следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta\beta &= +3''.29691 + 2''.28354v \cos v - \\ &\quad - 6''.67905v \sin v + 11''.356 \cos w' - \\ &\quad - 10''.104 \sin 2w' - 13''.781 \times \sin(v - 2w') + \\ &\quad + 29''.460 \sin(2v - 3w') - 24''.250 \times \\ &\quad \times \cos(3v - 5w') + \dots, \\ \delta\lambda &= -41''.97999v - 13''.05433v \cos v - \\ &\quad - 0''.25601v \times \cos 2v - 0''.99541v \sin v + \\ &\quad + 0.05211v \sin 3v - 146''.720 \cos(v - w') + \\ &\quad + 163''.001 \sin(v - w') - 609''.928 \\ &\quad \cos(v - 2w') - 514''.984 \cos(2v - 2w') + \\ &\quad + 101''.209 \sin(v - 2w') + 394''.398 \\ &\quad \cos(2v - 3w') + 129''.916 \sin(2v - 3w') + \\ &\quad + 189''.954 \cos(2v - 5w') + 321''.923 \times \end{aligned} \right\} (\text{III. 78})$$

Таблица 13  
Возмущения широты

<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin	<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin
0	0	+3.29691	—				
1	0	—3.33952	—1.14177				
1	0	+2.28354 <i>v</i>	—6.67905 <i>v</i>				
2	0	—0.98155	—0.49018	—1	—1	+ 3.983	+0.659
3	0	+0.04087	+0.01500	0	—1	+11.356	+4.987
4	0	—0.00138	+0.00223	1	—1	— 6.833	—5.486
5	0	+0.00002	—0.00051	2	—1	— 2.711	—4.942
				3	—1	+ 0.135	+0.311
				4	—1	+ 0.010	—0.011
				5	—1	+ 0.001	—0.001

<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin	<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin
—1	—2	+0.260	+ 0.270	—1	—3	+0.002	+ 0.032
0	—2	+7.376	+10.104	0	—3	—0.642	— 3.183
1	—2	—6.036	—13.781	1	—3	—0.087	— 5.334
2	—2	—2.124	— 9.341	2	—3	—9.882	+29.460
3	—2	—0.319	+ 1.353	3	—3	—0.670	+ 1.241
4	—2	+0.034	— 0.116	4	—3	+0.376	— 0.260
5	—2	+0.002	+ 0.005	5	—3	—0.038	+ 0.026

<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin	<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin
—1	—4	+0.002	+0.001	0	—5	+ 0.006	—0.004
0	—4	+0.039	—0.127	1	—5	+ 1.513	—1.335
1	—4	+0.704	—1.670	2	—5	— 1.029	+0.544
2	—4	—3.305	+3.932	3	—5	—24.250	+3.560
3	—4	—4.665	+2.622	4	—5	+ 1.077	+0.241
4	—4	+0.419	—0.152	5	—5	— 0.158	—0.064
5	—4	—0.168	—0.022				

Таблица 14  
Возмущения долготы

<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin	<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin
0	0	-41.97999 $\nu$	--	-1	-1	- 1.282	+ 0.027
1	0	- 1.32643	+16.19725	0	-1	-30.448	+ 52.437
1	0	-13.05433 $\nu$	- 0.99541 $\nu$	1	-1	-146.720	+163.001
2	0	+ 0.67385	- 0.01287	2	-1	- 5.257	+ 8.104
2	0	- 0.25601 $\nu$	- 0.01952	3	-1	- 0.471	+ 0.061
3	0	-- 0.06523	+ 0.05211 $\nu$	4	-1	+ 0.042	+ 0.001
4	0	+ 0.00417	- 0.00296	5	-1	- 0.003	+ 0.000
5	0	- 0.00002	+ 0.00019				

<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin	<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin
-1	-2	- 0.987	- 0.222	-1	-3	- 0.104	- 0.021
0	-2	- 45.964	+ 4.765	0	-3	- 9.625	+ 0.244
1	-2	-609.928	+101.209	1	-3	- 76.930	- 4.549
2	-2	-514.984	+ 36.885	2	-3	+394.398	+129.916
3	-2	- 5.130	- 0.323	3	-3	+ 42.777	+ 29.853
4	-2	+ 0.143	+ 0.133	4	-3	- 0.490	- 0.006
5	-2	- 0.016	- 0.014	5	-3	- 0.001	- 0.089

<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin	<i>i</i>	<i>i'</i>	cos	sin
-1	-4	+ 0.004	0.000	-1	-5	0.000	+ 0.001
0	-4	- 0.077	+ 0.097	0	-5	+ 0.274	+ 0.497
1	-4	+ 3.251	+ 3.696	1	-5	+ 13.349	+ 23.564
2	-4	+64.881	+51.474	2	-5	+189.954	+321.923
3	-4	+27.950	+44.013	3	-5	+ 39.947	+189.432
4	-4	- 1.135	- 8.792	4	-5	+ 2.499	- 5.279
5	-4	+ 0.166	+ 0.138	5	-5	- 1.574	+ 2.322

Таблица 15

Возмущения радиуса-вектора ( $10^8 \cdot \delta r$ ) в а. е.

$i$	$i'$	cos	sin	$i$	$i'$	cos	sin
0	0	+28159.10	--	-1	-1	- 271	+ 944
1	0	- 4351.72	- 331.82	0	-1	+14283	+ 8528
1	0	+ 663.645 <sub>v</sub>	-8703.433 <sub>v</sub>	1	-1	-72128	-64863
2	0	+ 91.01	+ 708.09	2	-1	- 5599	- 3261
3	0	- 68.13	- 110.10	3	-1	+ 128	- 419
4	0	+ 7.26	+ 10.73	4	-1	- 6	+ 72
5	0	- 0.71	- 0.54	5	-1	0	- 7

$i$	$i'$	cos	sin	$i$	$i'$	cos	sin
-1	-2	- 338	+ 199	-1	-3	- 43	- 102
0	-2	+ 2934	+ 26684	0	-3	+ 283	+ 6743
1	-2	-18374	+112275	1	-3	- 986	+ 12382
2	-2	-27685	-389088	2	-3	-75818	+230699
3	-2	+ 1169	+ 6517	3	-3	-26111	+ 34044
4	-2	- 202	- 49	4	-3	+ 867	- 1667
5	-2	+ 27	- 20	5	-3	+ 82	+ 56

$i$	$i'$	cos	sin	$i$	$i'$	cos	sin
-1	-4	- 3	- 11	-1	-5	- 1	- 1
0	-4	+ 58	+ 116	0	-5	+ 43	- 12
1	-4	+ 1560	- 1477	1	-5	+ 15367	- 8733
2	-4	-18233	+29914	2	-5	- 16751	+ 9949
3	-4	-36491	+22884	3	-5	-131026	+27437
4	-4	+10356	- 1925	4	-5	+ 9134	+ 1729
5	-4	- 486	+ 264	5	-5	- 2943	- 1843

$$10^8 \cdot \delta r = \left. \begin{aligned} & \times \sin(2v - 5w') + 189'432 \sin(3v - 5w') + \dots \\ & + 28159.10 + 663.645v \cos v - \\ & - 8703.433v \sin v - 112275 \sin(v - 2w') - \\ & - 389088 \sin(2v - 2w') + 230699 \\ & \sin(2v - 3w') - 131026 \cos(3v - 5w') + \dots \end{aligned} \right\}$$

Формальная точность величин  $\delta\lambda$  и  $\delta\beta$  — 0'001, а величины  $\delta r$  —  $10^{-8}$  а. е., или 1.5 км.

Аналогично могут быть получены возмущения Цереры от всех больших планет.

При определении постоянных интегрирования на возмущения были наложены следующие условия:

1) возмущения широты не должны содержать членов  $A_1 \cos v$  и  $A_2 \sin v$ ;

2) возмущения долготы не должны содержать членов  $A_3$ ,  $B_2 \cos v$  и  $B_3 \sin v$ , а также векового члена.

Шесть выбранных таким образом условий полностью определяют произвольные постоянные.

Элементы орбиты, соответствующие этим произвольным постоянным, уже не будут оскулирующими элементами, так как для момента  $t=0$  возмущения координат отличны от нуля.

**14. Сравнение теории с наблюдениями.** Построение теории движения любого небесного тела должно заканчиваться сравнением теории с наблюдениями.

Для сравнения используем пять нормальных мест Цереры, охватывающих промежутки времени с 1801 по 1946 г. (табл. 16).

Таблица 16  
Нормальные места Цереры

Номера наблюдений	Всемирное время	$\alpha$	$\delta$
1	1801 янв. 21.5	52°19'24".5	+17°07'20".0
2	1836 сент. 10.5	352 41 53.7	-20 29 09.6
3	1880 февр. 28.5	148 00 27.8	+29 31 53.4
4	1915 нояб. 15.5	51 18 06.0	+10 37 31.0
5	1946 авг. 29.0	304 06 09.2	-31 49 24.8

Координаты Цереры отнесены к эпохе 1850.0.

На эти же моменты необходимо иметь и координаты Солнца, которые могут быть получены из астрономических ежегодников.

Невозмущенные значения  $r_0$ ,  $\lambda_0$  могут быть определены по формулам

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + \mu(t - t_0), \\ E &= M + e \sin E, \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ r_0 &= a(1 - e \cos E), \\ \lambda_0 &= v + \omega, \\ \beta_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 79})$$

Долготу  $\lambda$  следует отсчитывать от линии узлов неизменной орбиты Цереры эпохи  $t_0$ , широту  $\delta\beta$  — от плоскости той же орбиты.

Результаты вычислений приведены в табл. 17.

Таблица 17

Номера наблюдений	$t - t_0$	$v$	$\lambda_0$	$r_0$
1	-17875.45	285.439798	52.58108	2.694253
2	- 4859.5	197.63418	324.81728	2.972596
3	+11016.5	359.30773	126.49083	2.550327
4	+24059.5	262.81045	29.99355	2.777640
5	+35304.0	162.05331	289.23641	2.972176

Таблица 18

Номера наблюдений	$\delta\lambda$	$10^6 \cdot \delta r$	$\delta\beta = \beta$
1	-0.03328	-7611	-0.15589
2	-0.01208	+1987	+0.00525
3	-0.08919	-1660	+0.02881
4	-0.21347	+8714	+0.18250
5	+0.33258	+2392	-0.15028



С аргументом  $\nu$  входим в таблицы движения (табл. 13—15) и получаем на момент  $t$  возмущения  $\delta r$ ,  $\delta \lambda$  и  $\delta \beta$ . Суммарные возмущения  $\delta \lambda$ ,  $\delta r$  и  $\delta \beta$  от всех больших планет приведены в табл. 18.

После того как вычислены  $\delta \lambda$ ,  $\delta r$ ,  $\delta \beta$ , можно получить

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \delta \lambda, \\ r &= r_0 + \delta r, \\ \beta &= \delta \beta\end{aligned}\tag{III. 80}$$

и затем определить прямоугольные координаты по формулам

$$\begin{aligned}x &= r \cos \lambda \cos \beta, \\ y &= r \sin \lambda \cos \beta, \\ z &= r \sin \beta.\end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в табл. 19.

Т а б л и ц а 19

Номера наблюдений	$\lambda$	$r$	$x$	$y$	$z$
1	52°54780	2.686642	+1.633739	+2.132812	-0.007310
2	324.80520	2.974583	+2.430821	-1.714425	+0.000272
3	126.40164	2.548667	-1.512486	+2.051363	+0.001282
4	29.78008	2.786354	+2.418371	+1.383898	+0.008875
5	289.56899	2.974568	+0.996303	-2.802744	-0.007802

От прямоугольных координат в осях Хилла необходимо перейти к экваториальным осям  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $z$  эпохи 1850.0 и затем прибавить экваториальные координаты Солнца  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , отнесенные к той же эпохе. Тогда сферические координаты малой планеты  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\rho$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}\rho \cos \alpha \cos \delta &= \bar{x} + X, \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= \bar{y} + Y, \\ \rho \sin \delta &= z + Z.\end{aligned}\tag{III. 81}$$

Табл. 20 дает вычисленные  $\alpha_c$ ,  $\delta_c$ , а также расхождение теории с наблюдениями  $\Delta \alpha = \alpha_0 - \alpha_c$ ,  $\Delta \delta = \delta_0 - \delta_c$ .

Расхождения между теорией и наблюдениями оказываются довольно значительными и объясняются прежде

Т а б л и ц а 20

Номера наблюдений	$\alpha_c$	$\delta_c$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1	52°17'50".4	+17°06'23.2	+ 94".1	+56".8
2	352 42 30.0	-20 29 08.4	- 36.3	- 1.2
3	148 01 30.4	+29 31 41.9	- 62.6	+11.5
4	51 19 43.0	+10 37 55.4	- 97.0	-24.4
5	304 09 09.2	-31 49 42.9	-180.0	+18.1

всего тем, что возмущения второго порядка относительно возмущающих масс остались неучтенными.

### § 3. Применение периодических орбит к изучению движения малых планет

**1. Периодические орбиты Пуанкаре.** Лагранж впервые показал, что при определенных начальных условиях можно довести до конца точное интегрирование дифференциальных уравнений движения в задаче трех тел. Мы обязаны Лагранжу пятью такими специальными решениями.

В каждом из этих пяти случаев движение трех тел происходит в неподвижной плоскости. В двух решениях три массы образуют постоянно вершины равностороннего треугольника, причем в одном случае  $m_3$  лежит на одной стороне от прямой  $m_1m_2$ , а во втором случае — на другой. Размеры этого треугольника не остаются одинаковыми, так как массы  $m_2$  и  $m_3$  описывают вокруг  $m_1$  конгруентные эллипсы, линии апсид которых образуют между собой постоянно угол в  $60^\circ$ ; для обоих эллипсов  $m_1$  является одним из фокусов. При трех остальных решениях  $m_3$  находится постоянно на прямой, которая соединяет  $m_1$  и  $m_2$ ; при этом в одном случае  $m_3$  занимает постоянное положение между  $m_1$  и  $m_2$ , а во втором и в третьем — три массы образуют последовательности  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_3, m_1, m_2$ . В каждом из этих трех случаев  $m_3$  и  $m_2$  двигаются по подобным эллипсам: оба эллипса имеют  $m_1$  своим фокусом. Направления линии апсид совпадают с направлением прямой, проходящей через массы, но в случае последовательности  $m_3, m_1, m_2$  долготы перигелиев отличаются на  $180^\circ$ .

Пуанкаре удалось дать аналитический метод для отыскания периодических решений в проблеме трех тел. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III. 82})$$

система дифференциальных уравнений;  $X_i$  — заданные функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Вообще говоря, представляется довольно трудным найти периодическое решение этих уравнений. Однако построение такого решения оказывается довольно простым, если  $X_i$  могут быть разложены по степеням малого параметра  $\mu$  и если для  $\mu = 0$  уже известно периодическое решение дифференциальных уравнений.

Пуанкаре установил существование трех типов периодических орбит в ограниченной задаче трех тел.

Периодические орбиты первого типа имеют наклоны, равные нулю, а эксцентриситеты — порядка возмущающей массы. В этих решениях произвольным параметром является отношение средних движений. Периодические орбиты второго типа также имеют наклоны, равные нулю, но эксцентриситеты нулевого порядка относительно масс. Эксцентриситет одной из орбит входит в это решение как произвольный параметр. Наконец, для решений третьего типа наклон произволен. В решениях второго и третьего типа отношения средних движений планет

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}, \quad (\text{III. 83})$$

где  $p$  и  $q$  — целые числа, взаимно простые.

Рассмотрим более подробно периодические орбиты Пуанкаре второго типа.

Пусть мы имеем ограниченную эллиптическую задачу трех тел и предположим, что начальные условия движения выбраны таким образом, что малая планета все время остается в плоскости движения Юпитера.

За единицу длины примем большую полуось Юпитера, за единицу массы — сумму масс Солнца и Юпитера, а единицу времени определим таким образом, чтобы постоянная тяготения равнялась единице.

Пусть  $\mu$  — масса Юпитера и  $H$  — угол между радиусами-векторами Юпитера и малой планетой. Согласно

сделанному выбору единиц среднее движение Юпитера  $n' = 1$ , долгота Юпитера  $l' = t$ . Положим

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{a}, \quad u = l, \\y &= \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad v = \pi - \pi'.\end{aligned}$$

Уравнения движения запишутся так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y},\end{aligned}\tag{III. 84}$$

где

$$\left. \begin{aligned}F &= F_0 + \mu F_1, \\ F_0 &= \frac{1}{2x^2} + y, \\ F_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos H + r^2}} - r \cos H - \frac{1}{r}.\end{aligned}\right\}\tag{III. 85}$$

Как известно, функция  $F_1$  может быть разложена в ряд по косинусам кратных углов средних аномалий  $u$  и  $u'$

$$F_1 = \sum_i K_i \cos(i_1 u + i_2 u' + i_3 v),\tag{III. 86}$$

где  $K_i$  — функция  $x$  и  $y$ .

Полагая  $\mu = 0$ , построим периодическое решение уравнений (III. 84)

$$\begin{aligned}x &= x_0 = \sqrt{a_0}, \quad u_0 = l_0, \\ y &= y_0 = \sqrt{a_0(1 - e_0^2)}, \quad v_0 = \pi_0 - \pi',\end{aligned}\tag{III. 87}$$

причем  $x_0$  выберем таким образом, чтобы

$$n = \frac{1}{x_0^3} = \frac{p}{q},\tag{III. 88}$$

где  $p$  и  $q$  — два взаимно простых целых числа.

Решение (III. 87) является действительно периодическим. Положим

$$t = T_0 = 2q\pi,$$

тогда  $u$  и  $l' = t$  будут отличаться только на величину, кратную  $2\pi$  от своих значений при  $t = 0$ .

Задача заключается в том, чтобы определить начальные условия, при которых существует периодическое движение с периодом  $T_0$  для  $\mu \neq 0$ .

Ограничимся в пертурбационной функции только вековыми членами и членами, которые становятся вековыми вследствие соизмеримости

$$[F] = \sum_i K_i \cos(i_1 u + i_2 u' + i_3 v),$$

причем

$$i_1 n + i_2 = 0,$$

или, на основании (III. 88)

$$i_1 p + i_2 q = 0. \quad (\text{III. 89})$$

Поэтому можем написать

$$i_1 = sq, \quad i_2 = -sp,$$

где  $s$  — любое целое число. Тогда

$$[F] = \sum_i K_i \cos[s(qu - pu') + i_3 v] \\ (s = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Как показал Пуанкаре, искомые значения  $y_0$ ,  $u_0$  и  $v_0$  могут быть найдены, если их определить из условия, что функция  $[F]$  этих величин имеет максимум или минимум, т. е. определить их из условия

$$\frac{\partial [F]}{\partial y_0} = \frac{\partial [F]}{\partial u_0} = \frac{\partial [F]}{\partial v_0} = 0, \quad (\text{III. 90})$$

причем после интегрирования мы должны подставить вместо  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $u'$  и  $v$  их значения при  $t = \mu = 0$ . Тогда два последних из уравнений (III. 90) принимают вид

$$\sum_i sq K_i \sin(squ_0 + i_3 v_0) = 0, \\ \sum_i i_3 K_i \sin(sq n_0 + i_3 v_0) = 0. \quad (\text{III. 91})$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если

$$v_0 = \pi_0 - \pi' = 0, 180^\circ, \\ v_0 = 180^\circ r, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Остается рассмотреть первое из уравнений (III. 90)

$$\frac{\partial [F]}{\partial y_0} = 0.$$

Переходя к обычным переменным, получим

$$\frac{\partial [R]}{\partial e} \frac{de}{dy_0} = - \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{ae} \cdot \frac{\partial [R]}{\partial e} = 0, \quad (\text{III. 92})$$

откуда

$$\frac{\partial [R]}{\partial e} = 0. \quad (\text{III. 93})$$

Если условие (III. 93) выполнено, то уравнения Лагранжа (см. приложение 1) непосредственно дают

$$\frac{d\pi}{dt} = 0, \quad (\text{III. 94})$$

т. е. линия апсид малой планеты неподвижна.

Из уравнения (III. 93) можем определить эксцентриситет периодической орбиты.

**2. Периодические орбиты Пуанкаре. Продолжение.** Пусть элементы орбиты малой планеты

$$a, e, \pi, \varepsilon$$

и Юпитера

$$a', e', \pi', \varepsilon'.$$

Введем далее среднюю долготу в орбите

$$\lambda = \varepsilon + \int n dt \quad \text{и} \quad \lambda' = \varepsilon' + \int n' dt,$$

которую в дальнейшем будем называть просто долготой.

Условия существования периодических орбит второго типа сводятся, как мы только что видели, к следующему:

1) средние движения малой планеты и Юпитера должны быть строго соизмеримы

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q},$$

где  $p$  и  $q$  — два числа, взаимно простые;

2) линии апсид обеих планет в начале движения совпадают

$$\pi_0 - \pi' = 0, 180^\circ;$$

3) перигелий малой планеты должен быть неподвижен. Это требование удовлетворяется, если

$$\frac{\partial [R]}{\partial e} = 0,$$

где  $[R]$  содержит только те периодические члены, которые становятся вековыми вследствие соизмеримости, т. е.

$$i_1 p + i_2 q = 0;$$

4) средние долготы планет  $\lambda = \varepsilon + \int n dt$  и  $\lambda' = \varepsilon' + \int n' dt$  должны в начальную эпоху удовлетворять соотношению

$$p\lambda'_0 - q\lambda_0 = 0, 180^\circ.$$

Пренебрегая в пертурбационной функции короткопериодическими членами, можем написать

$$[R] = m' \left[ A_0 + \sum_n A_n \cos(j\xi + k\pi + k'\pi') \right], \quad (\text{III. 95})$$

где

$$\xi = p\lambda' - q\lambda.$$

Ось  $x$  направим в перигелий Юпитера, т. е. положим  $\pi' = 0$ , тогда

$$\pi = 0, 180^\circ. \quad (\text{III. 96})$$

Производные пертурбационной функции по элементам

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)^0 = \left(\frac{\partial R}{\partial \pi}\right)^0 = \left(\frac{\partial R}{\partial e}\right)^0 = 0. \quad (\text{III. 97})$$

Индекс нуль указывает, что производные вычислены для элементов периодической орбиты. Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \quad \frac{d\pi}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^0 = g. \end{aligned} \quad (\text{III. 98})$$

Из этих уравнений следует, что движение малой планеты будет происходить по неподвижному эллипсу с элементами

$$a = a^0, \quad e = e^0, \quad \pi = \pi^0, \quad \varepsilon = \varepsilon^0 + gt. \quad (\text{III. 99})$$

Большая полуось орбиты  $a^0$  находится из условия соизмеримости средних движений; эксцентриситет периодической орбиты  $e$  определяется из уравнения (III. 93); долгота перигелия  $-\pi = 0, 180^\circ$ . Начальная долгота определяется из условия  $\xi = 0, 180^\circ$ .

Среднесуточное движение малой планеты отличается от невозмущенного на постоянную величину  $g$  порядка возмущающей массы

$$\left. \begin{aligned} n^0 &= n + g, \\ n &= ka^{-3/2}, \\ g &= -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)^0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 100})$$

Фактическое существование периодических орбит второго типа впервые показал Хилл. Хилл рассмотрел два случая соизмеримости  $|p - q| \leq 7$  („острая соизмеримость“) и  $|p - q| > 7$ .

Если  $|p - q|$  большое число, то в разложении пертурбационной функции можно ограничиться только чисто вековыми членами ( $i_1 = i_2 = 0$ ). Отбрасывая члены, которые исчезают при дифференцировании по  $e$  и пренебрегая членами восьмого порядка относительно эксцентриситетов, получим

$$\begin{aligned} [R] &= A_1 e^2 + A_2 e^4 + A_3 e'^2 e^2 + A_4 e^6 + A_5 e'^2 e^4 + A_6 e'^4 e^2 - \\ &- (A_7 e' e + A_8 e' e^3 + A_9 e'^3 e + A_{10} e' e^5 + A_{11} e'^3 e^3 + \\ &+ A_{12} e'^5 e) \cos(\pi - \pi') + (A_{13} e'^2 e^2 + A_{14} e'^2 e^4 + A_{15} e'^4 e^2) \times \\ &\times \cos 2(\pi - \pi') - A_{16} e'^3 e^3 \cos 3(\pi - \pi'), \end{aligned} \quad (\text{III. 101})$$

где  $A$  — положительные коэффициенты, зависящие только от  $\alpha = \frac{a}{a'}$ . Дифференцируя по  $e$  и полагая

$$\pi - \pi' = 0, 180^\circ,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial [R]}{\partial e} &= \mp (A_7 e' + A_9 e'^3 + A_{12} e'^5) + 2 [A_1 + (A_3 + A_{13}) e'^2 + \\ &+ (A_5 + A_{15}) e'^4] e \mp 3 [A_8 e' + (A_{11} + A_{10}) e'^3] e^2 + \\ &+ 4 [A_2 + (A_5 + A_{14}) e'^2] e^3 \pm 5 A_{10} e' e^4 + \\ &+ 6 A_4 e^5, \end{aligned} \quad (\text{III. 102})$$

где верхний знак соответствует  $\pi - \pi' = 0$ , а нижний



знак  $\pi - \pi' = 180^\circ$ . Эксцентриситет периодической орбиты  $e^0$  определяется из условия

$$\frac{\partial R}{\partial e} = 0. \quad (\text{III. 103})$$

Из выражения (III.102) непосредственно видно, что положительное значение эксцентриситета соответствует случаю

$$\pi - \pi' = 0. \quad (\text{III. 104})$$

Полагая эксцентриситет Юпитера  $e' = 0.04825336$  и ограничившись верхним знаком в выражении (III.102), получим значение  $e^0$  для любого  $\alpha$ .

Хилл приводит таблицу, дающую  $e^0$  для значений  $\alpha$  от  $\alpha = 0.01$  до  $\alpha = 0.70$  через 0.02 (табл. 21).

Т а б л и ц а 21

$\alpha$	$e^0$	$\alpha$	$e^0$	$\alpha$	$e^0$
0.02	0.0012091	0.26	0.0155796	0.50	0.0291772
0.04	0.0024178	0.28	0.0167534	0.52	0.0302466
0.06	0.0036258	0.30	0.0179216	0.54	0.0313029
0.08	0.0048326	0.32	0.0190838	0.56	0.0323453
0.10	0.0060379	0.34	0.0202392	0.58	0.0333726
0.12	0.0072414	0.36	0.0213875	0.60	0.0343837
0.14	0.0084426	0.38	0.0225281	0.62	0.0353776
0.16	0.0096411	0.40	0.0236605	0.64	0.0363529
0.18	0.0108366	0.42	0.0247841	0.66	0.0373080
0.20	0.0120286	0.44	0.0258989	0.68	0.0382412
0.22	0.0132167	0.46	0.0270022	0.70	0.0391503
0.24	0.0144005	0.48	0.0280955	.	.

Рассмотрим в качестве примера периодическую орбиту

$$\alpha = 0.70, e = 0,0391503,$$

Так как

$$a' = 5,20256,$$

то большая полуось малой планеты будет равна

$$a = 3.64179.$$

Долгота перигелия Юпитера для эпохи 1925 янв. 1.0  
всем. вр.

$$\pi' = 13^{\circ}114,$$

а долгота в орбите для того же момента

$$\lambda'_0 = 277^{\circ}188.$$

Отношение  $\frac{p}{q}$  определяется равенством

$$\frac{p}{q} = \frac{n}{n'} = (1 + m')^{-1/2} a^{-3/2},$$

так как  $m' = 1 : 1047.355$  и  $a = 0.70$ , то

$$\frac{p}{q} = 1.70666 = \frac{85333}{50000}.$$

Таким образом, условия периодического движения  
сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} a &= 3.64179, \\ \pi &= 13^{\circ}114, \\ e &= 0.0391503, \\ \lambda_0 &= 113^{\circ}066, \\ i &= 0. \end{aligned}$$

Просматривая каталог малых планет, находим, что  
этим условиям сравнительно хорошо удовлетворяют, на-  
пример, элементы малой планеты Хельга (522).

$$\begin{aligned} a &= 3.6230, \\ \pi &= 1.36, \\ e &= 0.0852, \\ \lambda_0 &= 116^{\circ}21, \\ i &= 4.417. \end{aligned}$$

Пользуясь табл. 21, можно подобрать периодическую  
орбиту очень близкую к реальным элементам той или  
иной малой планеты.

В случае больших эксцентриситетов пользоваться  
разложением пертурбационной функции невозможно и  
приходится прибегать к численному решению уравнения  
(III. 103). Для различных соизмеримостей можно построить  
следующие периодические орбиты Пуанкаре второго типа  
(табл. 22).

Таблица 22

№	Соизмери- мость	п°	$\pi_0 - \pi'$	$p\lambda'_0 - q\lambda_0$	$\varphi_0$
1	3:4	400''	0°	0°	21.72
2	2:3	450	0	0	30.00
3	2:3	450	180	0	26.75
4	1:2	600	0	0	45.02
5	4:9	675	0	0	1.93
6	4:9	675	0	180	1.91
7	3:7	700	0	0	1.95
8	3:7	700	0	180	1.79
9	3:7	700	180	180	9.14
10	2:5	750	0	0	2.43
11	2:5	750	0	0	14.9
12	3:8	800	0	0	1.74
13	3:8	800	0	180	1.72
14	1:3	900	0	0	4.43
15	1:3	900	0	180	6.49

Рассмотрим случай соизмеримости № 14 (табл. 22).

Элементы Юпитера  
Эпоха 1925 янв. 1.0 всем. вр.

$$\begin{aligned} n' &= 299''.128, \\ \lambda'_0 &= 264^\circ 08, \\ \pi' &= 0.00, \\ \varphi' &= 2.773, \\ i' &= 1^\circ 3. \end{aligned}$$

За начало счета долгот принята долгота перигелия Юпитера в эпоху

$$\pi' = 13^\circ 11,$$

отсюда условия периодического движения

$$\begin{aligned} n &= 897''.384, \\ \pi &= 0^\circ 00, \\ 3\lambda'_0 - \lambda_0 &= 0^\circ 00, \\ \varphi &= 4^\circ 43. \end{aligned}$$

К этим условиям близки элементы трех малых планет

Людовика (292)	Валькирия (877)	Люба (974)
$n = 881''552,$	$905''100,$	$894''498,$
$\pi = 318^{\circ}5,$	$18^{\circ}4,$	$18.2,$
$3\lambda'_0 - \lambda_0 = 3^{\circ}9,$	$311^{\circ}5,$	$44^{\circ}0,$
$\varphi = 1^{\circ}6,$	$8^{\circ}9,$	$8^{\circ}4.$

**3. Численные методы изучения периодических орбит.** Рассмотренные нами классы периодических орбит далеко не исчерпывают всех возможных периодических движений в ограниченной проблеме трех тел.

Наиболее обширное и полное изучение периодических движений, возможных в ограниченной проблеме, проведено в работах Копенгагенской обсерватории. Задача была сформулирована следующим образом.

Две равные массы  $m_1$  и  $m_2$  движутся вокруг общего центра тяжести под действием взаимного притяжения: условия движения выбираются таким образом, чтобы оно происходило по круговым орбитам с постоянной скоростью. Требуется изучить движение третьей бесконечно малой массы, притягиваемой по закону Ньютона обеими конечными массами и движущейся в той же плоскости.

В то время как Пуанкаре в ограниченной задаче полагает одну из масс малой по сравнению с другой, в работах Копенгагенской обсерватории раз навсегда было принято отношение  $m_1 = m_2$  с тем, чтобы возможно дальше отойти от теории возмущений в нашей солнечной системе. Бессилие общей теории заставило прибегнуть к численным методам интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Программа исследований включала изучение следующих групп орбит.

А. Периодические орбиты вокруг каждой из обеих конечных масс.

В. Периодические орбиты вокруг обеих масс.

С. Периодические и асимптотические орбиты вокруг либрационных точек Лагранжа.

Обзорение различных типов периодических и асимптотических орбит потребовало огромного вычислительного труда, но зато привело к открытию ряда интересных случаев движения, существование которых не могло быть указано заранее и никем до тех пор не подозревалось.

Программа работ Копенгагенской обсерватории включала, однако, еще одну очень важную задачу: проследить развитие каждого класса периодических орбит от его естественного начала до конца.

Рассмотрим, например, класс обратных периодических орбит вокруг двух конечных масс  $m_1$  и  $m_2$ . Этот класс включает в себе бесконечное число периодических орбит. На бесконечно далеком расстоянии происходит движение по орбитам, близким к окружности. По мере приближения к массам  $m_1$  и  $m_2$  орбиты становятся все более и более сплюснутыми.

Заканчивается этот класс прямолинейным колебательным движением между точками  $m_1$  и  $m_2$  с бесконечно большой скоростью в каждой точке орбиты. Мы имеем, таким образом, замкнутый в себе класс орбит с естественным началом и концом. Оказалось также, что положение равновесия массы в либрационной точке является предельным случаем периодического движения вокруг данной точки либрации.

Одновременно и независимо от работ Копенгагенской обсерватории численные методы для разыскания периодических решений в ограниченной задаче трех тел были применены Дарвиным (1845—1912). Для соотношения масс Дарвин принял  $m_2:m_1=1:10$ . Вначале Дарвин пытался интегрировать дифференциальные уравнения движения при помощи гармонических рядов. Однако чрезвычайно медленная сходимість разложений заставила отказаться от этого пути.

Для того чтобы получить некоторую необходимую точку опоры в своих исследованиях, Дарвин проводит тщательное изучение при помощи интеграла Якоби областей возможных движений. Эти исследования являются непосредственным продолжением известной работы Хилла о поверхностях нулевой скорости в движении Луны. Предметом работы Дарвина является также исследование устойчивости периодических движений. Дарвин надеялся, что исследование этого вопроса прольет свет на экспериментальный закон планетных расстояний Боде.

**4. Уравнения в вариациях.** Вероятность того, что начальные условия, приводящие к периодическому решению, могут иметь место в движениях тел солнечной системы, равна нулю. Но если начальные условия реального движения очень мало отличаются от тех, которые

соответствуют периодическому решению, то можно ожидать, что реальное движение также будет мало отличаться от движения по периодической орбите, и, следовательно, периодическая орбита может быть использована в качестве промежуточной орбиты.

Рассмотрим периодическое движение, определяемое орбитой Пуанкаре второго типа.

Вместо элементов  $e$ ,  $\pi$  и  $i$ ,  $\Omega$  введем, следуя Лагранжу, новые переменные

$$\begin{aligned} h &= e \sin \pi, & p &= \operatorname{tg} i \sin \Omega, \\ l &= e \cos \pi, & q &= \operatorname{tg} i \cos \Omega. \end{aligned} \quad (\text{III. 105})$$

Уравнения Лагранжа преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[ \sqrt{1-h^2-l^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial l} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h \sqrt{1-h^2-l^2}}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{na^2} \left[ \frac{1+p^2+q^2}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \frac{l}{\sqrt{1-h^2-l^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \right], \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \left[ \sqrt{1-h^2-l^2} \frac{\partial R}{\partial h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l \sqrt{1-h^2-l^2}}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{na^2} \left[ \frac{1+p^2+q^2}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{h}{\sqrt{1-h^2-l^2}} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \right], \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{(1+p^2+q^2)^{3/2}}{\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \\ &\quad - \frac{1}{na^2} \cdot \frac{p(1+p^2+q^2)}{(1+\sqrt{1+p^2+q^2})(1-h^2-l^2)} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\partial R}{\partial h} l - \frac{\partial R}{\partial l} h + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{(1+p^2+q^2)}{\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \\
 &\quad -\frac{1}{na^2} \frac{q(1+p^2+q^2)}{(1+\sqrt{1+p^2+q^2})(1-h^2-l^2)} \times \\
 &\quad \times \left( \frac{\partial R}{\partial h} l - \frac{\partial R}{\partial l} h + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{na^2} \times \\
 &\quad \times \frac{1+p^2+q^2}{(1+\sqrt{1+p^2+q^2})\sqrt{1-h^2-l^2}} \times \\
 &\quad \times \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{na^2} \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial h} h + \frac{\partial R}{\partial l} l \right),
 \end{aligned}
 \tag{III. 106}$$

где

$$R = m' \{ M + N[h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2 - p^2 - q^2 - p'^2 - q'^2 + 2(pp' + qq')] - 2P(hh' + ll') + \dots \}.$$

В случае периодического движения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^0 &= 0, & h^0 &= 0, & l^0 &= e, & p^0 &= 0, & q^0 &= 0, \\
 \varepsilon' &= 0, & h' &= 0, & l' &= e', & p' &= 0, & q' &= 0,
 \end{aligned}$$

а потому

$$\left( \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)^0 = \left( \frac{\partial R}{\partial h} \right)^0 = \left( \frac{\partial R}{\partial p} \right)^0 = \left( \frac{\partial R}{\partial q} \right)^0 = 0.$$

Производная

$$\left( \frac{\partial R}{\partial l} \right)^0 = 0,$$

так как по условию существования периодических орбит Пуанкаре второго типа эксцентриситет периодической орбиты определен таким образом, что

$$\left( \frac{\partial R}{\partial e} \right)^0 = 0.$$

Пертурбационная функция  $R$  содержит только вековые члены и члены, становящиеся вековыми вследствие соизмеримости.

Таким образом, движение малой планеты происходит по неподвижному эллипсу, причем среднесуточное движение будет отличаться на постоянную величину

$$g = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)^0$$

от невозмущенного значения.

Уравнения периодического движения запишутся так:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \\ n^0 = n + g, \quad n = ka^{-3/2}. \quad (\text{III. 107})$$

Рассмотрим движение, близкое к периодическому движению, определяемое элементами

$$a = a^0 + \delta a, \quad \varepsilon = \varepsilon^0 + \delta \varepsilon, \quad h = h^0 + \delta h, \quad l = l^0 + \delta l, \\ p = p^0 + \delta p, \quad q = q^0 + \delta q, \quad (\text{III. 108})$$

где  $\delta a$ ,  $\delta \varepsilon$ ,  $\delta h$ ,  $\delta l$ ,  $\delta p$  и  $\delta q$  — малые величины, квадратами которых можно пренебречь. Задача заключается в том, чтобы определить величины  $\delta a$ ,  $\delta \varepsilon$ , ... как функции времени.

Разлагая правые части уравнений (III. 106) в ряд Тейлора и ограничиваясь только линейными членами вариаций, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= \frac{2}{na} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} \right)^0 \delta \varepsilon + \frac{2}{na} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \varepsilon} \right)^0 \delta h, \\ \frac{d\delta h}{dt} &= \frac{\cos \varphi}{na^2} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right)^0 \delta a + \frac{\cos \varphi}{na^2} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right)^0 \delta l, \\ \frac{d\delta l}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \varepsilon} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} \right)^0 \delta \varepsilon - \\ &\quad - \frac{1}{na^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial^2 R}{\partial h^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \varepsilon} \right)^0 \delta h, \\ \frac{d\delta p}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{1}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} \right)^0 \delta q, \\ \frac{d\delta q}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{1}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} \right)^0 \delta p, \\ \frac{d\delta \varepsilon}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right)^0 \delta a + \\ &\quad + \frac{1}{na^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right)^0 \delta l, \end{aligned} \right\} (\text{III. 109})$$



где

$$n^0 = n + g, \quad g = g^0 + \delta g, \quad (III. 110)$$

$$\delta g = -\frac{1}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial a} + 2a \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \right)^0 \delta a - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right)^0 \delta l.$$

Элементы в правых частях (III. 109) и (III. 110) соответствуют периодическому решению.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2na^2 \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \epsilon^2} \right)^0, \\ a_2 &= 2na^2 \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \epsilon} \right)^0, \\ a_3 &= na \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right)^0, \\ a_4 &= na \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right)^0, \\ a_5 &= na \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right)^0, \\ a_6 &= na \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right)^0, \\ a_7 &= -an \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \epsilon} \right)^0 - an \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \epsilon^2} \right)^0, \\ a_8 &= -an \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h^2} \right)^0 - an \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \epsilon} \right)^0, \\ a_9 &= \frac{an}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} \right)^0, \\ a_{10} &= -\frac{an}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} \right)^0. \end{aligned} \right\} (III. 111)$$

Тогда уравнения в вариациях запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= a_1 \delta \epsilon + a_2 \delta h, \\ \frac{d\delta \epsilon}{dt} &= a_3 \delta a + a_4 \delta l, \\ \frac{d\delta h}{dt} &= a_5 \delta a + a_6 \delta l, \\ \frac{d\delta l}{dt} &= a_7 \delta \epsilon + a_8 \delta h, \end{aligned} \right\} (III. 112)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta p}{dt} &= a_9 \delta q, \\ \frac{d\delta q}{dt} &= a_{10} \delta p. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 113})$$

Пусть элементы орбиты Юпитера  $a'$ ,  $\epsilon'$ , ... также отличаются от элементов Юпитера, принятых при построении периодической орбиты. Положим

$$\left. \begin{aligned} a' &= (a')^0 + \delta a', & p' &= (p')^0 + \delta p', \\ \epsilon' &= (\epsilon')^0 + \delta \epsilon', & q' &= (q')^0 + \delta q', \\ h' &= (h')^0 + \delta h', & n' &= (n')^0 + \delta n', \\ l' &= (l')^0 + \delta l', \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 114})$$

Тогда системы (III. 112) и (III. 113) заменяются системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= a_1 \delta \epsilon + a_2 \delta h + d_1, \\ \frac{d\delta \epsilon}{dt} &= a_3 \delta a + a_4 \delta l + d_2, \\ \frac{d\delta h}{dt} &= a_5 \delta a + a_6 \delta l + d_3, \\ \frac{d\delta l}{dt} &= a_7 \delta \epsilon + a_8 \delta h + d_4, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 115})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta p}{dt} &= a_9 \delta q + d_5, \\ \frac{d\delta q}{dt} &= a_{10} \delta p + d_6, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 116})$$

где, ограничиваясь первыми степенями  $da'$ ,  $\delta\epsilon'$ , ... ,

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 2na^2 \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \epsilon \partial \epsilon'} \right)^0 \delta \epsilon' + 2na^2 \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \epsilon \partial h'} \right)^0 \delta h', \\ d_2 &= na \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l \partial a'} \right)^0 \delta a' + \\ &\quad + na \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l \partial l'} \right)^0 \delta l', \\ d_3 &= na \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l \partial a'} \right)^0 \delta a' + na \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l \partial l'} \right)^0 \delta l', \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= \left[ -na \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \varepsilon'} \right)^0 - \right. \\
 &\quad \left. - na \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'} \right)^0 \right] \delta \varepsilon' + \\
 &\quad + \left[ -na \cos \varphi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial h'} \right)^0 - \right. \\
 &\quad \left. - na \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \partial h'} \right)^0 \right] \delta h', \\
 d_5 &= \frac{an}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial q \partial q'} \right)^0 \delta q', \\
 d_6 &= - \frac{an}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial p'} \right)^0 \delta p'.
 \end{aligned}
 \tag{III. 117}$$

Так как движение Юпитера не испытывает возмущений со стороны малой планеты, то

$$\begin{aligned}
 \delta a' &= \delta a'_0, \quad \delta h' = \delta h'_0, \quad \delta l' = \delta l'_0, \quad \delta p' = \delta p'_0, \\
 \delta q' &= \delta q'_0, \quad \delta \varepsilon' = \delta \varepsilon'_0.
 \end{aligned}
 \tag{III. 118}$$

**5. Интегрирование уравнений в вариациях.** Рассмотрим интегрирование уравнений в вариациях (III. 115) и (III. 116). Обозначим для краткости

$$\delta a = x_1, \quad \delta \varepsilon = x_2, \quad \delta h = x_3, \quad \delta l = x_4, \quad \delta p = x_5, \quad \delta q = x_6. \tag{III. 119}$$

Уравнения (III.115)—(III. 116) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_2 + a_2 x_3, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= a_3 x_1 + a_4 x_4, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= a_5 x_1 + a_6 x_4, \\
 \frac{dx_4}{dt} &= a_7 x_2 + a_8 x_3,
 \end{aligned} \right\} \tag{III. 120}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dx_5}{dt} &= a_9 x_6, \\
 \frac{dx_6}{dt} &= a_{10} x_5.
 \end{aligned} \right\} \tag{III. 121}$$

Обратим внимание на то, что

$$a_6 a_3 - a_4 a_5 = 0.$$

Это дает возможность сразу получить один из первых интегралов

$$a_6 \frac{dx_2}{dt} - a_4 \frac{dx_3}{dt} = 0, \quad (\text{III. 122})$$

откуда

$$a_4 x_3 = a_6 x_2 + c_1, \quad (\text{III. 123})$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования.

Уравнения (III. 120) перепишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= b_1 x_2 + \frac{a_2}{a_4} c_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_3 x_1 + a_4 x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= b_2 x_2 + \frac{a_8}{a_4} c_1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 124})$$

где

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 + a_2 a_5}{a_4}, \quad b_2 = \frac{a_4 a_7 + a_6 a_8}{a_4}.$$

Из первого и третьего уравнений (III. 124) находим

$$-b_2 \frac{dx_1}{dt} + b_1 \frac{dx_4}{dt} = b_3 c_1, \quad (\text{III. 125})$$

где

$$b_3 = \frac{a_1 a_8 - a_2 a_7}{a_1}.$$

Интегрируя (III. 125), получим

$$-b_2 x_1 + b_1 x_4 = b_3 c_1 t + c_2, \quad (\text{III. 126})$$

где  $c_2$  — новая постоянная интегрирования. Совместно со вторым из уравнений (III. 124) находим, исключая  $x_4$ ,

$$b_1 \frac{dx_2}{dt} = (b_1 a_3 - a_4 b_2) x_1 + a_4 b_3 c_1 t + a_4 c_2. \quad (\text{III. 127})$$

Дифференцируя первое из уравнений (III. 124) и исключая  $x_2$  при помощи (III. 127), найдем

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = (b_1 a_3 + a_4 b_2) x_1 + a_4 b_3 c_1 t + a_4 c_2. \quad (\text{III. 128})$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a^2 x_1, \quad (\text{III. 129})$$

где

$$a^2 = b_1 a_3 + a_4 b_2$$

имеет решение

$$\bar{x}_1 = \bar{c}_3 e^{at} + \bar{c}_4 e^{-at}. \quad (\text{III. 130})$$

Отметим, что  $a$  — малая величина порядка возмущающей массы. Частное решение неоднородного уравнения (III. 128) ищем в виде

$$\bar{x}_1 = A + Bt. \quad (\text{III. 131})$$

Подставляя в уравнение (III. 128), находим значения постоянных  $A$  и  $B$

$$A = -\frac{a_4}{a^2} c_2, \quad (\text{III. 132})$$

$$B = -\frac{a_4}{a^2} b_3 c_1.$$

Общее решение уравнения (III. 128) будет

$$x_1 = \bar{c}_3 e^{at} + \bar{c}_4 e^{-at} + Bt + A. \quad (\text{III. 133})$$

Введем новые постоянные  $c_3$  и  $c_4$

$$\bar{c}_3 = \frac{c_3 + c_4}{2}, \quad \bar{c}_4 = \frac{c_3 - c_4}{2}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_3 \operatorname{ch} at + c_4 \operatorname{sh} at + Bt + A, \\ b_1 x_2 &= a (c_3 \operatorname{sh} at + c_4 \operatorname{ch} at) + B - \frac{a_2}{a_4} c_1, \\ a_4 x_3 &= a_6 x_2 + c_1, \\ b_1 x_4 &= b_2 x_1 + b_3 c_1 t + c_2. \end{aligned} \right\} (\text{III. 134})$$

Возвращаясь к переменным Лагранжа, можем написать

$$\left. \begin{aligned} \delta a &= c_3 \operatorname{ch} at + c_4 \operatorname{sh} at + Bt + A, \\ b_1 \delta \varepsilon &= a (c_3 \operatorname{sh} at + c_4 \operatorname{ch} at) + B - \frac{a_2}{a_4} c_1, \\ a_4 \delta h &= a_6 \delta \varepsilon + c_1, \\ b_1 \delta l &= b_2 \delta a + b_3 c_1 t + c_2, \end{aligned} \right\} (\text{III. 135})$$

где постоянные интегрирования  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$  выражаются через начальные отклонения элементов планеты от элементов периодической орбиты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_4 \delta h_0 - a_6 \delta \varepsilon_0, \\ c_2 &= b_1 \delta l_0 - b_2 \delta a_0, \\ c_3 &= \delta a_0 - A, \\ ac_4 &= b_1 \delta \varepsilon_0 - B + \frac{a_2}{a_4} c_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 136})$$

Переходим к интегрированию системы (III. 121), где  $a_9 = -a_{10} = a$ .

Как хорошо известно, система (III. 121) имеет решение

$$\begin{aligned} x_5 &= A \sin(at + b), \\ x_6 &= A \cos(at + b), \end{aligned} \quad (\text{III. 137})$$

где

$$A^2 = (x_5^2)_0 + (x_6^2)_0, \quad \text{tg } b = \frac{(x_5)_0}{(x_6)_0}.$$

Возвращаясь к переменным Лагранжа,

$$\begin{aligned} \delta p &= A \sin(at + b), \\ \delta q &= A \cos(at + b), \end{aligned} \quad (\text{III. 138})$$

где

$$A^2 = \delta p_0^2 + \delta q_0^2, \quad \text{tg } b = \frac{\delta p_0}{\delta q_0}.$$

**6. Вычисление производных пертурбационной функции.** Вычисление коэффициентов, входящих в уравнения в вариациях, сводится к вычислению вторых производных пертурбационной функции по элементам. Для вычисления этих производных обратимся к численным методам, одинаково пригодным для любых эксцентриситетов.

В случае плоского движения выражение для пертурбационной функции имеет вид

$$R' = k^2 m' R, \quad (\text{III. 139})$$

где

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos(w' - w), \quad (\text{III. 140})$$

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(w' - w), \quad (\text{III. 141})$$

причем  $w$  и  $w'$  — истинные долготы малой планеты и Юпитера.

Производная от  $R$  по какому-нибудь из элементов орбиты может быть записана так:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{\partial R}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{\partial R}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \quad (\text{III. 142})$$

Обозначим через  $S$  и  $T$  компоненты возмущающего ускорения по радиусу-вектору и по направлению, перпендикулярному к радиусу-вектору в плоскости оскуливающей орбиты

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad T = \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial w}.$$

Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = S \frac{\partial r}{\partial \alpha} + r T \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \quad (\text{III. 143})$$

Выражения для  $S$  и  $T$  легко находим простым дифференцированием (III. 140)

$$S = \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3} \right] r' \cos(w' - w) - \frac{r}{\Delta^3},$$

$$T = \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3} \right] r' \sin(w' - w). \quad (\text{III. 144})$$

Дифференцируя (III. 143), получим общее выражение для интересующих нас вторых производных пертурбационной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \alpha'} &= S \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \alpha'} + \frac{\partial S}{\partial \alpha'} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \\ &+ r T \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \alpha'} + T \frac{\partial r}{\partial \alpha'} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + r \frac{\partial T}{\partial \alpha'} \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (\text{III. 145})$$

Производные  $S$  и  $T$  по элементам, а также производные  $r$  и  $w$  легко находим по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= T \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 3 \frac{r'}{\Delta^4} \cos(w' - w) \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \\ &+ 3 \frac{r}{\Delta^4} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - \frac{1}{\Delta^3} \frac{\partial r}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= -r' \cos(w' - w) \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3} \right] \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} \end{aligned}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - 3 \frac{r'}{\Delta^4} \sin(w' - w) \frac{\partial \Delta}{\partial a}, \\
\frac{\partial \Delta}{\partial a} &= \frac{1}{\Delta} [r - r' \cos(w' - w)] \frac{\partial r}{\partial a} - \\
& - \frac{r r'}{\Delta} \sin(w' - w) \frac{\partial w}{\partial a}, \\
\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^0 &= -\frac{a \sin \nu}{\cos \varphi}, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)^0 = -a \cos \nu, \\
\left(\frac{\partial r}{\partial a}\right)^0 &= \frac{r}{a}, \\
\left(\frac{\partial w}{\partial h}\right)^0 &= -\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi\right) \frac{1}{\sin \varphi}, \\
\left(\frac{\partial w}{\partial l}\right)^0 &= \frac{2 + e \cos \nu}{1 - e^2} \sin \nu, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^0 = 0, \\
\left(\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\right)^0 &= \frac{a \sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \nu, \\
\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}\right)^0 &= \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi, \\
\left(\frac{\partial^2 r}{\partial h^2}\right)^0 &= -\frac{a \cos \nu}{\sin \varphi} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial h^2}\right)^0 &= \frac{\sin \nu}{\sin \varphi} \left[\frac{2 + e \cos \nu}{\cos^2 \varphi} - \frac{2a^3}{r^3}\right], \\
\left(\frac{\partial^2 r}{\partial l^2}\right)^0 &= \frac{a}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \nu (2 + \sin \varphi \cos \nu), \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial l^2}\right)^0 &= \frac{1}{\cos^4 \varphi} \left[5e + \left(5 + \frac{3}{2} e^2\right) \cos \nu + \right. \\
& \left. + 3e \cos 2\nu + \frac{1}{2} e^2 \cos 3\nu\right] \sin \nu, \\
\left(\frac{\partial^2 r}{\partial a \partial l}\right)^0 &= -\cos \nu, \quad \left(\frac{\partial^2 r}{\partial h \partial \varepsilon}\right)^0 = -\frac{a^3}{r^2} \cos \nu, \quad \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \varepsilon^2}\right)^0 = \\
& = \frac{a^3}{r^2} \sin \varphi \cos \nu, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon^2}\right)^0 = -2 \frac{a^3}{r^3} \sin \varphi \sin \nu.
\end{aligned}$$

(III. 146)

Производные (III. 145) должны быть вычислены для элементов периодического движения, причем в пертурбационной функции нам нужно ограничиться только вековыми членами и членами, становящимися вековыми вследствие соизмеримости. Пользуясь разложением пертурбационной функции, можем написать



$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial a'}\right)^0 = \left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial a'}\right]^0 + \sum A_{j,j'} \cos(jM + j'M' + Q), \quad (\text{III. 147})$$

причем  $pM' - qM = 0,180^\circ$ . Через  $\left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial a'}\right]^0$  обозначены постоянные члены разложения, включая и те периодические члены, которые становятся вековыми вследствие соизмеримости. Из равенства (III. 147) следует, что

$$\left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial a'}\right]^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial a'}\right)^0 dM', \quad (\text{III. 148})$$

иначе говоря, постоянная часть производных пертурбационной функции получается путем осреднения величин

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial a'}\right)^0 \quad (\text{III. 149})$$

по переменной  $M'$  на интервале от нуля до  $\pi$ . Вычисляя функцию (III. 149) для достаточно большого числа частных значений средних аномалий, можно найти величины (III. 148) с любой точностью. Найдем теперь выражения для производных

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial p^2}\right)^0, \left(\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}\right)^0.$$

Общее выражение для пертурбационной функции имеет вид

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r\sigma}{r'^2}, \quad (\text{III. 150})$$

где

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\sigma,$$

$$\sigma = \cos H = \cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega' \cos i = \cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega' \cdot \cos \arctg \sqrt{p^2 + q^2},$$

$H$  — угол между радиусами-векторами  $r$  и  $r'$ , долготы  $\omega$  и  $\omega'$  отсчитываются от линии узлов. Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial p} = -\frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} - \frac{r}{r'^2} \frac{\partial \sigma}{\partial p}, \quad (\text{III. 151})$$

где

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = -\frac{rr'}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial p}.$$

Дифференцируя (III. 151) и учитывая, что

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p}\right)^0 = 0,$$

так как  $p^0 = q^0 = 0$ , получим

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial p^2}\right)^0 = rr' \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}. \quad (\text{III. 152})$$

Так как

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}\right)^0 = -\sin v \sin v',$$

то окончательно имеем

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial p^2}\right)^0 = -rr' \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right] \sin v \sin v'. \quad (\text{III. 153})$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}\right)^0 = -rr' \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right] \sin v \sin v'. \quad (\text{III. 154})$$

**7. Соизмеримость 1:3.** Рассмотрим периодическую орбиту № 15 (табл. 22), соответствующую соизмеримости 1:3. Периодическая орбита определяется следующими элементами:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 3\lambda'_0 + 180^\circ, \\ \pi^0 &= 0, \\ e^0 &= 0.11300, \\ n^0 &= 897''384, \\ i^0 &= 0. \end{aligned}$$

Большая полуось орбиты должна быть найдена посредством последовательных приближений при помощи системы формул

$$\left. \begin{aligned} n^0 &= n + g^0, \\ n &= a^{-3/2}, \\ g^0 &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^0, \\ k^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 155})$$

В первом приближении полагаем  $n = n^0$ , откуда

$$a^0 = 2.50045.$$

На основании формул (III. 142) и (III. 146) имеем

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a} S, \quad (\text{III. 156})$$

откуда

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial a} \right]^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{r}{a} S dM'. \quad (\text{III. 157})$$

Интервал интегрирования  $0 - \pi$  разбиваем на 30 равных частей через  $6^0$ . Пользуясь формулой Симпсона, получим

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial a} \right]^0 = +0.012168,$$

откуда

$$m' \left[ \frac{\partial R}{\partial a} \right]^0 = +0.011618 \cdot 10^{-3},$$

$$g^0 = -0.036743 \cdot 10^{-3} = -0^{\circ}0021052.$$

Единица времени  $\frac{1}{k} = 58.1324$  ср. суток.

Переходя к средним суткам, найдем

$$\begin{aligned} g'' &= -0^{\circ}.130, \\ n &= n^0 - g^0 = 897^{\circ}.514, \\ a^0 &= 9.50021. \end{aligned}$$

При нашей точности вычислений полученный результат можно считать окончательным.

Вычислим теперь производные  $\left[ \frac{\partial^2 R}{\partial h^2} \right]$ ,  $\left[ \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right]$ , ..., осредняя

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial h^2} \right)^0 &= S \frac{\partial^2 r}{\partial h^2} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial r}{\partial h} + r T \frac{\partial^2 v}{\partial h^2} + T \frac{\partial r}{\partial h} \frac{\partial v}{\partial h} + \\ &+ r \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial v}{\partial h}, \\ \left( \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right)^0 &= S \frac{\partial^2 r}{\partial l^2} + \frac{\partial S}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l} + r T \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} + T \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial v}{\partial l} + \\ &+ r \frac{\partial T}{\partial l} \frac{\partial v}{\partial l}, \\ \left( \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right)^0 &= S \frac{\partial^2 r}{\partial a \partial l} + \frac{\partial S}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial a}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varepsilon}\right)^0 &= S \frac{\partial^2 r}{\partial h \partial \varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + r T \frac{\partial^2 v}{\partial h \partial \varepsilon} + \\
 &+ T \frac{\partial r}{\partial h} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + r \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \\
 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2}\right)^0 &= S \frac{\partial^2 r}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + r T \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon^2} + \\
 &+ T \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + r \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \\
 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\right)^0 &= \frac{r}{a} \frac{\partial S}{\partial a}, \\
 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial p^2}\right)^0 &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}\right)^0 = -rr' \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right] \sin v \sin v'.
 \end{aligned} \right\} \text{(III. 158)}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial h^2} \right]^0 &= +0.27074 \cdot 10^{-3}, & m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial h \partial \varepsilon} \right]^0 &= \\
 &= +0.0050270 \cdot 10^{-3}, \\
 m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right]^0 &= -0.16760 \cdot 10^{-3}, & m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} \right]^0 &= \\
 &= -0.0006274 \cdot 10^{-3}, \\
 m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial l} \right]^0 &= -0.009996 \cdot 10^{-3}, & m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \right]^0 &= \\
 &= +0.007072 \cdot 10^{-3}, \\
 m' \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} \right]^0 &= -0.081539 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

При помощи этих величин вычисляем по формулам (III. 111) коэффициенты

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = -0.0019842 \cdot 10^{-3}, & a_6 = -0.10530 \cdot 10^{-3}, \\
 a_2 = +0.015898 \cdot 10^{-3}, & a_7 = -0.0031361 \cdot 10^{-3}, \\
 a_3 = -0.0003561 \cdot 10^{-3}, & a_8 = -0.17029 \cdot 10^{-3}, \\
 a_4 = -0.0059699 \cdot 10^{-3}, & a_9 = -0.05190 \cdot 10^{-3}, \\
 a_5 = -0.0062805 \cdot 10^{-3}, & a_{10} = +0.05190 \cdot 10^{-3}.
 \end{array}$$

Затем находим

$$\begin{array}{ll}
 b_1 = +0.27843 \cdot 10^{-3}, & a = +0.13361 \cdot 10^{-3}, \\
 b_2 = -3.00675 \cdot 10^{-3}, & A = +0.33443 \cdot 10^{-3} c_2, \\
 b_3 = -0.064959 \cdot 10^{-3}, & B = -0.091724 c_1.
 \end{array}$$

Окончательно получаем формулы для вычисления возмущений

$$\left. \begin{aligned} \delta a &= c_3 \operatorname{ch} at + c_4 \operatorname{sh} at - 0.021724c_1 t + \\ &\quad + 0.33443 \cdot 10^3 c_2, \\ \delta \varepsilon &= +0.47987 (c_3 \operatorname{sh} at + c_4 \operatorname{ch} at) + \\ &\quad + 9.4864 \cdot 10^3 c_1, \\ \delta h &= +17.638 \delta \varepsilon - 167.507 \cdot 10^3 c_1, \\ \delta l &= -10.799 \delta a - 0.23331 c_1 t + \\ &\quad + 3.5916 \cdot 10^3 c_2, \\ \delta g &= -0.02972 \cdot 10^{-3} \delta a + 0.03161 \cdot 10^{-3} \delta l, \end{aligned} \right\} \text{(III. 159)}$$

где постоянные интегрирования определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (-0.0059699 \delta h_0 + 0.10530 \delta \varepsilon_0) \cdot 10^{-3}, \\ c_2 &= (+0.27843 \delta l_0 + 3.00675 \delta a_0) \cdot 10^{-3}, \\ c_3 &= \delta a_0 - 0.33443 \cdot 10^3 c_2, \\ c_4 &= +2.0839 \delta \varepsilon_0 - 19.7688 \cdot 10^3 c_1. \end{aligned} \right\} \text{(III. 160)}$$

Долгота вычисляется по формуле

$$\lambda = \varepsilon + n^0 t, \quad \text{(III. 161)}$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta \varepsilon, \quad n^0 = n + g, \quad n = a^{-3/2}, \quad g = g_0 + \delta g.$$

Наконец, возмущения плоскости орбиты определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= A \sin (at + b), \\ \delta q &= A \cos (at + b), \end{aligned} \right\} \text{(III. 162)}$$

где

$$a = -0.05190 \cdot 10^{-3}, \quad A^2 = \delta p_0^2 + \delta q_0^2, \quad \operatorname{tg} b = \frac{\delta p_0}{\delta q_0}. \quad \text{(III. 163)}$$

Числовые коэффициенты в формулах (III. 159)—(III. 163) могут быть вычислены с неограниченной точностью, так как эти величины не зависят от элементов малой планеты, а только от элементов периодической орбиты и принятых значений элементов орбиты Юпитера и его массы.

**8. Сравнение теории с наблюдениями.** Рассмотрим движение малой планеты Гестия. Предварительные оскулирующие элементы орбиты:

Эпоха и оскуляция 1910 нояб. 28.46

Эклиптика 1910.0

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 62^{\circ}60, & M &= 68^{\circ}13, \\
 \omega &= 173.12, & i &= 2.29, \\
 \Omega &= 181.35, & \varphi &= 9.63, \\
 \pi &= 354.47, & e &= 0.16728, \\
 & & n &= 884''451, \\
 & & a &= 2.52477.
 \end{aligned}
 \tag{A}$$

Элементы орбиты Юпитера, отнесенные к той же эпохе и эклиптике

$$\lambda' = 209^{\circ}21, \quad \pi' = 12^{\circ}88.$$

За начало счета долгот принимаем долготу перигелия Юпитера в начальную эпоху

$$\pi' = 12^{\circ}88.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 49^{\circ}72, & h &= -0.05283, \\
 a &= 2.52477, & l &= +0.15873, \\
 \pi &= -18^{\circ}41, & p &= +0.007994, \\
 \Omega &= 168.47, & q &= -0.03918.
 \end{aligned}$$

Элементы орбиты Юпитера

$$\lambda' = 196^{\circ}33, \quad \pi' = 0.00.$$

Исходной периодической орбитой служит периодическая орбита Пуанкаре второго типа № 15 (табл. 22).

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= 3\lambda'_0 + 180^{\circ} = 48^{\circ}99, & & \pi = 0, \\
 a^0 &= 2.50021, & & n^0 = 897''384, \\
 e^0 &= 0.11300, & & l^0 = 0.11300, \\
 h^0 &= 0, & & \\
 p^0 &= 0, & q^0 &= 0, & g^0 &= -0''130.
 \end{aligned}$$

Начальные отклонения элементов Гестии от элементов периодической орбиты

$$\begin{aligned}\delta n &= -12.933, \\ \delta \lambda_0 &= + 0.73, \\ \delta \pi_0 &= -18.41, \\ \delta e_0 &= + 0.05428, \\ \delta i_0 &= + 2.29,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\delta a_0 &= +0.02456, \\ \delta \lambda_0 &= +0.01274, \\ \delta h_0 &= -0.05283, \\ \delta l_0 &= +0.04573, \\ \delta p_0 &= +0.00799, \\ \delta q_0 &= -0.03918.\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определяем по формулам (III. 160)

$$\begin{aligned}c_1 &= +0.001657 \cdot 10^{-3}, \quad A = 0.03999, \\ c_2 &= +0.08658 \cdot 10^{-3}, \quad b = 168.47, \\ c_3 &= -0.004395, \\ c_4 &= -0.006208.\end{aligned}$$

Формулы для вычисления возмущений (см. формулы (III. 159) и (III. 162)) имеют вид

$$\begin{aligned}\delta a &= -0.004395 \operatorname{ch} at - 0.006208 \operatorname{sh} at - 0.000036 \cdot 10^{-3}t + \\ &+ 0.02896, \\ \delta e &= -0.002109 \operatorname{sh} at - 0.002979 \operatorname{ch} at + 0.015719, \\ \delta h &= +17.638\delta e - 0.27756, \\ \delta l &= -10.799\delta a - 0.000387 \cdot 10^{-3}t + 0.31096, \\ \delta g &= +0.001811\delta l - 0.001703\delta a, \\ \delta p &= 0.03999 \sin(168.47 - 2.974 \cdot 10^{-3}t), \\ \delta q &= 0.03999 \cos(168.47 - 2.974 \cdot 10^{-3}t), \\ &\alpha = +0.13361 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Единица времени  $\frac{1}{k} = 58.1324$  ср. суток.





Т а б л и ц а 25  
Представление наблюдений

	1857 г.	1868 г.	1894 г.	1905 г.	1934 г.	1944 г.
$\Delta\lambda$ . . .	+3°85	+1°88	+0°46	+0°58	-1°35	-1°00
$\Delta\beta$ . . .	-0.08	+0.07	+0.01	-0.02	-0.01	-0.06

Улучшая систему элементов (А) по методу Штраке (приближенное исправление четырех элементов  $M, \omega, \varphi, n$ ), находим поправки к исходным элементам

$$\begin{aligned}\delta M &= -0^{\circ}25, \\ \delta \omega &= +0^{\circ}32, \\ \delta \varphi &= -0^{\circ}08, \\ \delta n &= -0^{\circ}312.\end{aligned}$$

Улучшенная система элементов Гестии:

Эпоха и оскуляция 1910 нояб. 28.46  
Эклиптика 1910.0

$$\begin{aligned}\lambda &= + 62^{\circ}66, & M &= 67^{\circ}88, \\ \omega &= 173^{\circ}44, & i &= 2^{\circ}29, \\ \Omega &= 181^{\circ}35, & \varphi &= 9^{\circ}55, \\ \pi &= 354^{\circ}78, & e &= 0.16591, \\ n &= 884^{\prime}139, \\ a &= 2.52537.\end{aligned}$$

Т а б л и ц а 26  
Представление наблюдений с улучшенными элементами  
(наблюдения минус вычисления)

	1857 г.	1868 г.	1894 г.	1905 г.	1934 г.	1944 г.
$\Delta\lambda$ . . .	+0°04	+0°11	-0°17	-0°13	+0°20	-0°03
$\Delta\beta$ . . .	-0.02	-0.00	+0.01	-0.01	-0.02	-0.01

Для контроля представим еще три наблюдения, не участвовавших в улучшении орбиты (табл. 27 и 28).

Т а б л и ц а 27

## Наблюдения

Дата			$\lambda$	$\beta$	sh $\alpha$	ch $\alpha$
1910	дек.	28.86	84°67	-3°75	+0.00007	1.00000
1928	март	16.96	173.54	-0.40	+0.01452	1.00011
1946	дек.	15.86	69.14	-3.75	+0.03026	1.00046

Т а б л и ц а 28

## Представление наблюдений

	1910 г.	1928 г.	1946 г.
$\Delta\lambda$ . . . . .	+0°11	-0°13	+0.19
$\Delta\beta$ . . . . .	-0.01	0.00	-0.05

Таким образом, ограничиваясь линейными членами в уравнениях в вариациях и принимая во внимание только вековые и долгопериодические возмущения, можно представить движение малой планеты с точностью, достаточной для вычисления поисковой эфемериды.

# Глава IV

## ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ

---

### § 1. Спутники больших планет

**1. Спутники Марса.** Спутники Марса были открыты Асафом Холлом (1829—1907) на Морской обсерватории в Вашингтоне 11 и 17 августа 1877 г. Они получили названия Фобоса и Деймоса (т. е. Страха и Ужаса — спутников бога войны Марса у Гомера).

**Примечание.** С. П. Глазенап (1848—1937) в своих воспоминаниях („Мироведение“, т. 25, № 1, 1936 г.) рассказывает о своей встрече с Холлом в 1875 г.: „Среди прнехавших из Сибири соединился с нами и американец Асаф Холл. Он был сын дровосека и учился грамоте в воскресной школе, будучи уже взрослым, у учительницы, ставшей впоследствии его женой. Эта достойная женщина всю жизнь направляла и поддерживала его в его интересной деятельности. Через два года после нашего знакомства он произвел замечательное открытие двух спутников у планеты Марс. В 1877 г. было великое противостояние Марса, которое происходит один раз в 15 лет. Асаф Холл решил воспользоваться условиями противостояния, чтобы разыскать спутников Марса. В это время Марс был ближе всего к Земле, но одна или две попытки ни к чему не привели и охладили его. Но жена уговаривала его продолжать розыски, он же отвечал ей: «У Гершеля, Ласселя и других были инструменты большего размера, нежели мой 24-дюймовый рефрактор Вашингтонской обсерватории, и все-таки они ничего не нашли». — «Ты непременно должен продолжать поиски спутников Марса, потому что, если когда-нибудь астрономы откроют их, то они совершенно основательно упрекнут тебя в недостатке энергии; ведь это в твоих руках теперь самый большой рефрактор мира». Асаф Холл послушался совета жены, и наблюдения его увенчались успехом; в августе того же 1877 г. он открыл первый спутник, а потом и второй“.

Спутники Марса замечательны своей близостью к планете и крайне быстрым движением; внутренний спутник обращается вокруг Марса быстрее, чем Марс вращается вокруг своей оси, так что для марсиан он восходит на западе и заходит на востоке. Кроме того, в течение мар-

сианских суток Фобос дважды восходит и дважды заходит. Такой странной особенностью обладает во всей солнечной системе только этот спутник Марса.

**Примечание.** Удивительно, что существование спутников Марса было предсказано Джонатаиом Свифтом в его книге „Путешествие Гулливера“ примерно за 150 лет до их открытия. Согласно сообщению Гулливера, у астрономов Лапуты были весьма совершенные телескопы, с помощью которых они открыли два спутника, обращающихся вокруг Марса. Первый совершает свое обращение в течение десяти часов, а второй — в течение двадцати одного с половиной часа (Путешествие в Лапуту, гл. 3). Указанные Гулливером периоды обращения удивительно близки к истинным значениям, так как Фобос обращается вокруг Марса за 7 часов 39 минут, а Деймос за 30 часов 18 минут. Спутники Марса очень малы по своим размерам: диаметр Фобоса 15 км и диаметр Деймоса 8 км. С поверхности Марса Деймос наблюдается не в виде диска, подобно нашей Луне, а в виде светящейся точки.

Основные характеристики спутников Марса сопоставлены в табл. 29.

Т а б л и ц а 29  
С п у т н и к и М а р с а

	Видимая величина	Среднее расстояние от центра планеты		Сидерический период обращения	Эксцентриситет орбиты	Наклон орбиты
		видимое с Солнца	в км			
Фобос . . . . .	<sup>m</sup> 11.5	8'46	9350	<sup>d</sup> 0.3189	0.0170	26°19'
Деймос . . . . .	13.5	21.25	23500	1.2631	0.0031	26 2

Плоскости орбит спутников близко совпадают с плоскостью экватора планеты. Орбита Деймоса почти круговая. Герман Струве (1854—1920) нашел, что линия апсид Фобоса обладает прямым движением и притом настолько быстрым, что она в два с небольшим года совершает полный оборот. Это явление обусловлено сжатием планеты, которое Струве оценил в 1/190.

При вычислении эфемерид спутников Марса учитывают возмущения, вызываемые сжатием планеты, и вековые возмущения от Солнца.

**2. Спутники Юпитера.** В настоящее время открыто 12 спутников Юпитера. Четыре из них были открыты почти одновременно в январе 1610 г. Галилео Галилеем (1564—1642) и учеником Тихо Браге Симоном Мариусом

(1570—1624) в Праге. Это сравнительно яркие объекты пятой—шестой звездной величины. Плоскости почти круговых орбит этих спутников приблизительно совпадают с плоскостью экватора планеты. Они обозначаются римскими цифрами I, II, III и IV в порядке возрастающих расстояний от Юпитера. Эти спутники, называемые галилеевы, имеют также и собственные имена: Ио, Европа, Ганимед и Каллисто — три подруги Юпитера и его красавец виночерпий. Третий и четвертый спутники Юпитера по своим размерам больше Меркурия.

Остальные спутники Юпитера, открытые позднее, обозначаются также римскими цифрами в хронологическом порядке их открытия.

Спутник V, открытый Барнардом (1857—1923) 9 сентября 1892 г. с помощью большого рефрактора Ликской обсерватории, также обладает почти в точности круговой орбитой, весьма близкой к плоскости экватора планеты. Этот, самый близкий к Юпитеру спутник, очень слаб ( $13^m$ ). Его расстояние от центра планеты всего 2.5 радиуса Юпитера, а период обращения 12 часов, что лишь немного больше периода обращения Юпитера вокруг оси (10 часов).

Большой интерес представляют работы И. М. Михальского и К. Л. Баева по изучению движения V спутника Юпитера. Спутники VI и VII были открыты Перрайном фотографическим путем в 1904 и 1905 гг. на Ликской обсерватории. Эти спутники обращаются на большом расстоянии от планеты, их орбиты имеют значительные эксцентриситеты (0.16 и 0.21, и большие наклоны (приблизительно  $30^\circ$  к плоскости орбиты Юпитера). Теория движения VI спутника Юпитера, основанная на элементах, полученных Бобоне в 1935 г., была дана В. Ф. Проскуриным. Он воспользовался для этого буквенными разложениями теории движения Луны, созданной Делоне в 1846—1867 гг. Аналитическая теория движения VII спутника Юпитера разработана С. С. Токмалаевой на основе метода Хилла—Брауна.

Спутник VIII, открытый Мелоттом в 1908 г. в Гриниче, расположен еще дальше от Юпитера. Его яркость  $16—17^m$ . Открытие VIII спутника Юпитера сыграло большую роль в развитии методов численного интегрирования. VIII спутник наблюдался регулярно до 1923 г., после чего вычисление эфемерид и наблюдения прекра-

тились. Н. Ф. Боева (1890—1956), взяв за начало координаты спутника в 1916 г., провела численное интегрирование уравнений движения до 1930 г. По ее эфемериде спутник был найден, после чего его наблюдения не прерывались до 1942 г., когда он был снова потерян. Д. К. Куликов (1912—1964) предпринял большую работу по представлению всей совокупности наблюдений с 1908 по 1949 г. единой системой элементов. Эта задача была успешно решена, и по эфемериде на 1947 г. спутник был снова обнаружен.

Эксцентриситет орбиты VIII спутника равен 0.38, а наклон орбиты к эклиптике  $148^\circ$ . Движение VIII спутника является обратным.

В 1914 г. на Ликской обсерватории Никольсоном был открыт IX, самый далекий спутник Юпитера, имевший яркость  $19^m$  величины. Он обладает периодом обращения более двух лет и обратным движением.

Спутники X и XI были открыты в 1938 г. на обсерватории Маунт-Вильсон Никольсоном. Им же открыт в 1951 г. XII спутник Юпитера. XI и XII спутники Юпитера имеют обратное движение.

В табл. 30 даны элементы орбит спутников Юпитера. Четыре больших спутника Юпитера испытывают значительные взаимные возмущения, что было использовано

Т а б л и ц а 30  
С п у т н и к и Ю п и т е р а

	Видимая величина	Среднее расстояние от центра планеты		Сидериче- ский период обращения	Эксцен- триситет орбиты	Наклон орбиты
		видимое с Солнца	в километрах			
V	$13.0^m$	2'54	181500	$0.4982^d$	0.0028	$3^\circ 34.2$
I	5.5	5.90	422000	1.7691	0.0000	3 8.3
II	5.7	9.40	671400	3.5519	0.0003	3 33.9
III	5.1	15.00	1071000	7.1546	0.0015	3 13.3
IV	6.3	26.38	1884000	16.6890	0.0075	3 57.9
VI	13.7	161	11500000	250.6	0.158	28 26
X	18.0	161	11500000	253	0.141	28 24
VII	16.0	165	11750000	259.7	0.207	27 45
XII	18.3	300	21200000	631	0.169	147
XI	17.0	315	22600000	692	0.207	163
VIII	16.0	330	23500000	735	0.380	148
IX	18.0	332	23700000	758	0.275	157

для определения их масс. Масса третьего спутника составляет приблизительно  $1/30$  массы Земли.

Для движений I, II и III спутников Лапласом были установлены два любопытные соотношения. Обозначим периоды обращений этих спутников через  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Тогда

$$\frac{1}{T_1} - \frac{3}{T_2} + \frac{2}{T_3} = 0. \quad (IV. 1)$$

Обозначим далее через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  долготы этих трех спутников, отсчитываемые от произвольной начальной точки. Эти три величины связаны равенством

$$L_1 - 3L_2 + 2L_3 = 180^\circ. \quad (IV. 2)$$

Достаточно полная аналитическая теория движения галилеевых спутников была разработана Лапласом и вошла в его „Небесную механику“. Современная аналитическая теория этих спутников принадлежит голландскому астроному-теоретику Де-Ситтеру (1872—1934).

**3. Спутники Сатурна.** В настоящее время открыты 9 спутников Сатурна. В табл. 31 приведены основные характеристики орбит этих спутников.

Т а б л и ц а 31  
Спутники Сатурна

	Видимая величина	Среднее расстояние от центра планеты		Сидерический период обращения	Эксцентриситет орбиты	Наклон орбиты
		видимое с Солнца	в километрах			
	m			$d$		
Мимас . . . . .	12.1	26"83	185 700	0.9424	0.0201	26°45'
Энцелад . . . . .	11.6	34.42	238 200	1.3703	0.0044	26 45
Тетис . . . . .	10.5	42.60	294 800	1.8878	0.0000	26 45
Диона . . . . .	10.7	54.57	337 700	2.7369	0.0022	26 45
Рея . . . . .	10.0	76.20	527 500	4.5175	0.0010	26 42
Титан . . . . .	8.3	176.67	1 223 000	15.9454	0.0291	26 7
Гиперион . . . . .	13.0	214.13	1 484 000	21.2767	0.1042	26 0
Япет . . . . .	10.8	514.73	3 563 000	79.3302	0.0283	16 18
Феба . . . . .	14.5	1870.4	12 950 000	550.4416	0.1659	175

Орбиты спутников почти в точности круговые, за исключением орбит Гипериона и Фебы, эксцентриситеты которых равны соответственно 0.10 и 0.17. В движениях

спутников Сатурна существуют соизмеримости. Периоды обращения Мимаса и Тетиса, а также Энцелада и Дионы относятся как 1:2; периоды Мимаса и Энцелада, а также Тетис и Дионы — как 2:3 и, наконец, периоды Титана и Гипериона — как 3:4. Движение Фебы является обратным.

Самый яркий спутник Сатурна — Титан ( $8^m$ ) был открыт в 1655 г. Гюйгенсом (1629—1695). Проникнутый еще идеями средневекового мистицизма, он утверждал, что так как количество планет и спутников достигло теперь совершенного числа 12 (Меркурий, Венера, Земля, Луна, Марс, Юпитер и его четыре спутника, Сатурн и Титан), то больше ничего не остается открывать. Однако еще при жизни Гюйгенса Кассини (1625—1712) открыл четыре новых спутника Сатурна — Япета в 1671 г., Рею в 1672 г., Тетис и Диону в 1684 г., 28 августа и 17 сентября 1789 г. В. Гершель (1738—1822) открыл еще два более слабых спутника — Мимас и Энцелад, самых близких к планете.

16 сентября 1848 г. Бонд (1789—1859) на обсерватории Гарвардского колледжа открыл восьмой спутник — Гиперион. Независимо от Бонда этот спутник был открыт также Ласселем, но только двумя днями позднее.

Наконец, в 1898 г. Пиккеринг (1873—1946) обнаружил очень слабый девятый спутник Сатурна, названный Фебой.

В 1905 г. Пиккеринг сообщил об открытии десятого спутника Сатурна с периодом обращения 20 дней 20.4 часа. Однако в дальнейшем это открытие не подтвердилось.

Первая аналитическая теория спутников Сатурна разработана Германом Струве в 1898 г.

Теории движения спутников Сатурна посвящены работы Г. Н. Дубошина. При изучении движения каждого спутника все остальные спутники заменяются бесконечно тонкими круговыми однородными кольцами с массой, равной массе соответствующего спутника. Затем методом А. М. Ляпунова (1857—1918) строится периодическая орбита, близкая к круговой, которая может служить первым приближением к реальным движениям спутников. Метод Хилла был применен Е. А. Гребениковым для построения аналитической теории движения восьмого спутника Сатурна — Япета.



**Примечание.** Названия спутников Сатурна взяты из древнегреческой мифологии. Это титаны и титаниды — бессмертные существа, дети и внуки Урана (Неба) и Геи (Земли). Гиперион и Япет — сыновья Урана и Геи. Тетис, Феба и Рея — их сестры. Титан — сын Гипериона, а Диона — дочь Тетис.

**4. Кольцо Сатурна.** Кольцо Сатурна было впервые замечено в 1610 г. Галилеем, однако в это время оно наблюдалось с ребра, и Галилею не удалось установить характер открытого им объекта. Галилей пишет о загадочной форме Сатурна: „Крайнюю планету я наблюдал тройной“.

Тайна кольца Сатурна была разгадана Гюйгенсом в 1658 г. Кольцо Сатурна является плоским и свободно висит в экваториальной плоскости планеты. По существу это не одно, а три как бы вложенных друг в друга концентрических кольца различной яркости. Размеры кольца Сатурна приведены в табл. 32.

Таблица 32  
Размеры кольца Сатурна

Экваториальный радиус планеты . . . . .	1.00 = 60 300 км
Внутренний радиус кольца <i>C</i> . . . . .	1.16 = 70 100
Внешний радиус кольца <i>C</i> . . . . .	1.47 = 88 600
Внутренний радиус кольца <i>B</i> . . . . .	1.49 = 90 200
Внешний радиус кольца <i>B</i> . . . . .	1.93 = 116 200
Внутренний радиус кольца <i>A</i> . . . . .	2.01 = 121 000
Внешний радиус кольца <i>A</i> . . . . .	2.27 = 137 000

Таким образом, ширина внешнего кольца *A* составляет 16 000 км, между первым и вторым (средним) кольцом существует промежуток (так называемое деление Кассини) в 4800 км. Второе кольцо (*B*), ширина которого 26 000 км, в свою очередь отделено от третьего, слабо светящегося и полупрозрачного (так называемого „крепового“) кольца промежутков в 1600 км, ширина третьего кольца (*C*) 18 500 км.

Работами Лапласа (1749—1827), Максвелла (1831—1879) и С. В. Ковалевской (1850—1891) было показано, что устойчивость сплошного кольца невозможна и что поэтому кольцо состоит из весьма большого количества мелких спутников. В 1895 г. А. А. Белопольский (1854—1934) с помощью спектроскопических наблюдений под-

твердил это теоретическое предположение. Согласно исследованиям М. С. Боброва, кольцо Сатурна состоит из светлых или почти белых тел с весьма неровной поверхностью. Средний поперечник этих тел порядка 1 м. Они заполняют лишь около 1/1000 объема всего кольца, так что среднее расстояние между ними примерно в 10 раз больше их размеров. Общая масса кольца приблизительно в 800 раз меньше массы Луны.

Наклон плоскости кольца Сатурна к эклиптике 1889.25 года и долгота восходящего узла определяются, по Герману Струве, следующими числами:

$$i = 28^{\circ}04'55'',$$

$$\Omega = 167^{\circ}58'08''.$$

**5. Спутники Урана.** Открыто 5 спутников Урана — Миранда, Ариель, Умбриель, Титания и Оберон. Характеристики их орбит приведены в табл. 33.

Т а б л и ц а 33  
Спутники Урана

	Видимая величина	Среднее расстояние от центра планеты		Сидерический период обращения	Эксцентриситет орбиты	Наклон орбиты
		видимое с Солнца	в километрах			
	m			d		
Миранда . . . . .	17.0	9'34	120 000	1.4	0.0	97°59'
Ариель . . . . .	15.2	13.78	191 800	2.5204	0.007	97 59
Умбриель . . . . .	15.8	19.2	267 300	4.1442	0.008	97 59
Титания . . . . .	14.0	31.5	438 700	8.7059	0.023	97 59
Оберон . . . . .	14.2	42.1	586 600	13.4632	0.01	97 59

Спутники Урана движутся почти в одной плоскости, которая образует с плоскостью орбиты планеты угол 97°59', так что их движение является обратным.

Титания и Оберон были открыты В. Гершелем в 1787 г., через 6 лет после того как им была открыта планета Уран. Следующие два спутника, Ариель и Умбриель, открыты Ласселем (1799—1880) в 1851 г. Миранда открыта Кейпером 15 февраля 1948 г. на обсерватории Мак-Дональд в США. Этот пятый спутник Урана является ближайшим к планете. Его яркость 17<sup>m</sup>.

**Примечание.** Свои названия спутники Урана получили по именам персонажей Шекспира (Оберон и Титания — из комедии „Сон в летнюю ночь“; Миранда — из комедии „Буря“) и Попа (Ариель и Умбриель из комической поэмы „Похищение локона“).

**6. Спутники Нептуна.** Первый спутник Нептуна Тритон был открыт Ласселем в 1846 г., через две недели после открытия самого Нептуна.

Этот спутник движется по почти круговой орбите на расстоянии в 13.3 радиуса Нептуна с периодом обращения около 6 суток. Он обладает обратным движением. Яркость спутника 13<sup>m</sup>.6.

Второй спутник Нереида открыт Кейпером 1 мая 1949 г. на 82-дюймовом телескопе обсерватории Мак-Дональд. Его яркость 19<sup>m</sup>.5. Орбита Нереиды обладает „кометным“ эксцентриситетом. Движение спутника прямое. Элементы орбит обоих спутников приведены в табл. 34.

Т а б л и ц а 34  
Спутники Нептуна

	Видимая величина	Среднее расстояние от центра планеты		Сидерический период обращения	Эксцентриситет орбиты	Наклон орбиты
		видимое с Солнца	в километрах			
Тритон . . . .	13.6 <sup>m</sup>	16"23	353 700	5.8768 <sup>d</sup>	0.000	140°
Нереида . . .	19.5	264	5 500 000	359.9	0.749	3°14'

**Примечание.** Тритоны и нереиды — нимфы моря, являются спутниками бога морей Посейдона (Нептуна).

**7. Размеры и массы спутников больших планет.** Приведем в заключение размеры и массы спутников больших планет. Для сравнения интересно привести данные о планете Меркурий (табл. 35).

## § 2. Возмущения в движении спутников, вызываемые сжатием планеты

**1. Задача двух тел.** Если рассматривать планету как материальную точку, то движение спутника происходит по законам Кеплера (задача двух тел), которые можно сформулировать следующим образом.

## Размеры и массы спутников

Спутник	Планета	Диаметр, км	Масса
Каллисто.	Юпитер . . . . .	5180	1.32
Ганимед.	" . . . . .	5150	2.11
(Меркурий).	—	5140	4.37
Тритон.	Нептун . . . . .	5000	1.8
Титан.	Сатурн . . . . .	4150	1.92
Ио.	Юпитер . . . . .	3700	0.99
Луна.	Земля . . . . .	3476	1.00
Европа.	Юпитер . . . . .	3220	0.64
Рея.	Сатурн . . . . .	1750	0.03
Япет.	" . . . . .	1600	0.019
Титания.	Уран . . . . .	1600	—
Оберон.	" . . . . .	1450	—
Тетис.	Сатурн . . . . .	1300	0.0088
Диона.	" . . . . .	1100	0.014
Ариель.	Уран . . . . .	950	—
Энцелад.	Сатурн . . . . .	800	0.00117
Мимас.	" . . . . .	640	0.000516
Умбриель.	Уран . . . . .	640	—
Гиперион.	Сатурн . . . . .	500	—
Феба.	" . . . . .	320	—
Нереида.	Нептун . . . . .	300	—
V.	Юпитер . . . . .	160	—
VI.	" . . . . .	160	—
VII.	" . . . . .	65	—
VIII.	" . . . . .	65	—
IX.	" . . . . .	30	—
XI.	" . . . . .	25	—
X.	" . . . . .	25	—
Фобос.	Марс . . . . .	15	—
Деймос.	" . . . . .	8	—
XII.	Юпитер . . . . .	?	—
Миранда.	Уран . . . . .	?	—

1. Орбита спутника расположена в плоскости, проходящей через центр планеты, причем положение этой плоскости в пространстве (относительно инерциальной системы координат) не меняется при движении и вращении планеты.

2. Орбита спутника — эллипс, в одном из фокусов которого находится центр планеты. Размеры и форма

эллипса определяются величинами  $a$  и  $e$  (большая полуось и эксцентриситет орбиты). Наиболее близкая к планете точка эллиптической орбиты спутника называется перигентром орбиты, а наиболее удаленная точка — апоцентром.

3. Период обращения спутника вокруг планеты определяется формулой

$$P = \frac{2\pi}{km^{1/2}} a^{3/2}, \quad (\text{IV.3})$$

где  $m$  — масса планеты,  $k$  — постоянная Гаусса. Масса спутника принимается равной нулю.

**Задача.** Определить период обращения вокруг Земли для так называемого „нулевого спутника“, у которого большая полуось орбиты равна радиусу Земли ( $a = R = 6370$  км).

Ответ:  $P = 84.4$  минуты.

Формула (IV.3) определяет *сидерический период* обращения спутника, т. е. тот промежуток времени, в течение которого спутник возвращается в то же самое положение относительно звезд для наблюдателя, находящегося в центре планеты.

Для изучения движения спутников обычно применяют экваториальную систему координат, в которой за основную плоскость принимается плоскость экватора планеты. Начало координат находится в центре масс планеты. Ось  $z$  совпадает с осью вращения планеты. Орбита спутника пересекается с плоскостью  $xu$  в двух точках. Проходя через одну из этих точек, спутник переходит из области отрицательных значений  $z$  в область положительных  $z$ . В другой точке происходит обратная смена положительных значений  $z$  на отрицательные. Первую точку называют *восходящим узлом орбиты* ( $\Omega$ ), вторую — *нисходящим узлом орбиты*. Линию пересечения плоскости орбиты спутника с плоскостью  $xu$  называют *линией узлов*. Угол  $xO\Omega$  называют *долготой восходящего узла* и обозначают  $\Omega$ . Этот угол отсчитывается от 0 до  $360^\circ$  против движения часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси  $z$ .

Положение плоскости орбиты спутника в пространстве однозначно определяется двумя элементами — *углом наклона* ( $i$ ) плоскости орбиты к плоскости экватора планеты и *долготой восходящего узла* ( $\Omega$ ).

Если  $i < 90^\circ$ , движение спутника называется *прямым* (т. е. происходящим против часовой стрелки); если  $i > 90^\circ$ , движение спутника называется *обратным*. Если  $i = 90^\circ$ , спутник называется *полярным*.

Фиксируем теперь положение орбиты в плоскости движения спутника. Для этого удобно использовать угол ( $\omega$ ) между линией узлов и *линией апсид* (линия, соединяющая перигеицентр и апогеицентр орбиты), который называется *расстоянием перигеицентра от узла*. Угол  $\omega$  отсчитывается от 0 до  $360^\circ$  против часовой стрелки. Вместо угла  $\omega$  иногда вводят долготу перигеицентра орбиты ( $\pi$ )

$$\pi = \omega + \Omega. \quad (\text{IV. 4})$$

$\pi$  — это *ломаный угол*, который отсчитывается от оси  $x$  до линии узлов в плоскости экватора планеты, а затем от линии узлов до линии апсид в плоскости орбиты.

Положение спутника на орбите определяется заданием момента  $T$  прохождения спутника через перигеицентр орбиты. Вместо момента  $T$  обычно вводят угол  $M_0$  по формуле

$$M_0 = n(t_0 - T). \quad (\text{IV. 5})$$

Угол  $M_0$  называется *средней аномалией* в эпоху  $t_0$ . Величина

$$n = k \sqrt{m} a^{-3/2}, \quad (\text{IV. 6})$$

где  $k = 0.0172020209895$ , называется *среднесуточным движением* спутника по орбите. Эта величина выражается обычно в дуговых секундах

$$n'' = k'' \sqrt{m} a^{-3/2}, \quad (\text{IV. 7})$$

где  $k'' = 3548''.187607$ , или в градусах

$$n^\circ = k^\circ \sqrt{m} a^{-3/2}, \quad (\text{IV. 8})$$

где  $k^\circ = 0^\circ.9856076686$ .

Положение спутника на орбите в любой заданный момент  $t$  определяется углом

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (\text{IV. 9})$$

который называется *средней аномалией*.

Мы ввели шесть элементов орбиты спутника, определяющие ориентацию плоскости орбиты в пространстве ( $i, \Omega$ ), положение орбиты в ее плоскости ( $\omega$  или  $\pi$ ), размер орбиты ( $a$ ), форму орбиты ( $e$ ) и положение спутника на орбите в эпоху ( $M_0$ ).

Зная элементы орбиты, можем вычислить прямоугольные планетоцентрические координаты  $x, y, z$  спутника для любого момента  $t$  по формулам эллиптического движения

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{2\pi}{P} = km^{1/2} a^{-3/2}, \\ M &= M_0 + n(t - t_0), \\ E &= M + e \sin E, \\ r &= a(1 - e \cos E), \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ u &= v + \omega, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 10})$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 11})$$

где  $E$  — эксцентрисическая аномалия спутника,  $r$  — радиус-вектор спутника,  $v$  — истинная аномалия спутника,  $u$  — аргумент широты спутника. Третье из уравнений (IV. 10), называемое уравнением Кеплера, решается методом последовательных приближений. Определив  $x, y, z$ , можем найти видимое положение спутника на небесной сфере.

Если  $x, y, z$  — геоцентрические координаты Луны или искусственного спутника Земли, можно непосредственно применить формулы

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x - X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y - Y, \\ \rho \sin \delta &= z - Z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 12})$$

где  $X, Y, Z$  — известные геоцентрические координаты пункта наблюдения, для которого вычисляем эфемериду спутника, т. е. находим сферические координаты спутника  $\alpha, \delta$  и  $\rho$  для ряда моментов времени  $t$ .

Если  $x, y, z$  — планетоцентрические координаты спутника, то необходимо предварительно перенести начало координат в центр Земли, а уже затем применять формулы (IV.12).

**2. Метод вариации произвольных постоянных.** Несферичность планеты является одной из важнейших причин отклонения орбит близких спутников от невозмущенных кеплеровых эллипсов. Метод вариации произвольных постоянных позволяет наиболее простым образом перейти от невозмущенного движения к реальному.

Мы уже видели, что с помощью формул (IV.10)—(IV.11) прямоугольные координаты  $x, y, z$  могут быть выражены как функции времени и шести произвольных постоянных

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, a, e, M_0, \omega, \Omega, i), \\ y &= f_2(t, a, e, M_0, \omega, \Omega, i), \\ z &= f_3(t, a, e, M_0, \omega, \Omega, i). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.13})$$

Формулы (IV.13) представляют эллиптическое движение спутника, если под  $a, e, \dots$  подразумевать постоянные величины. Но эти же самые формулы могут представить какое угодно движение, и, в частности интересующее нас реальное движение спутника, если рассматривать  $a, e, \dots$  как соответствующим способом выбранные функции времени. Поскольку мы имеем только три условия (IV.13) для определения шести функций  $a(t), e(t), \dots$ , можем подчинить эти функции еще трем дополнительным условиям. Эти дополнительные условия будут состоять в том, чтобы не только координаты  $x, y, z$ , но и их производные  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  также выражались через элементы орбиты по формулам эллиптического движения.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-aP_x \sin E + a \cos \varphi Q_x \cos E), \\ \dot{y} &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-aP_y \sin E + a \cos \varphi Q_y \cos E), \\ \dot{z} &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-aP_z \sin E + a \cos \varphi Q_z \cos E), \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.14})$$

где угол  $\varphi$  определяется из условия  $\sin \varphi = e$ , а вели-



чины  $P_x, Q_x, \dots$  называются проективными коэффициентами (см. главу I).

Функции времени  $a(t), e(t), \dots$ , однозначно определяемые шестью уравнениями (IV.11) и (IV.14), называются *оскулирующими элементами*, а соответствующая им эллиптическая орбита (непрерывно изменяющая свое положение и свою форму) называется *оскулирующей орбитой*.

Пусть возмущающее ускорение  $F$  вызывается силой, имеющей потенциал. Иначе говоря, допустим существование такой функции  $R$ , что

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (\text{IV.15})$$

Тогда дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы орбиты, имеют вид (см. приложение 1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dM_0}{dt} &= - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.16})$$

Если за основные элементы, определяющие движение по эллиптической орбите, принять

$$a, e, i, \Omega, \pi, \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — долгота в эпоху, определяемая уравнением

$$\lambda = M + \pi = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt, \quad (\text{IV.17})$$

то уравнения (IV.16) могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \\
 &+ \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 18})$$

Уравнения (IV. 16) и (IV. 18) впервые были выведены Лагранжем. Функция  $R$  называется *пертурбационной функцией*.

Уравнения Лагранжа, определяющие оскулирующие элементы, могут быть решены только приближенно, например методом последовательных приближений или методом численного интегрирования.

Метод последовательных приближений дает возможность получить оскулирующие элементы спутника в виде рядов, расположенных по степеням малого параметра, зависящего от сжатия планеты,

$$\left. \begin{aligned}
 a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots + \delta_n a + \dots, \\
 e &= e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \dots + \delta_n e + \dots, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 19})$$

Выражения  $\delta_n a$ ,  $\delta_n e$ , ... носят название *возмущений  $n$ -го порядка*.

Пертурбационную функцию  $R$ , как мы увидим дальше, можно разложить в ряд Фурье вида

$$R = \sum A_{jk} \cos(jM + k\omega).$$

Положим в первом приближении  $R=0$ . Тогда уравнения (IV.18) дают  $a=a_0$ ,  $e=e_0$ , ... Эти значения элементов подставляем в правые части (IV.18). И так как  $R$  является функцией  $t$ ,  $a$ ,  $e$ , ..., то уравнения (IV.18) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= f_1(t, a_0, e_0, \dots), \\ \frac{de}{dt} &= f_2(t, a_0, e_0, \dots), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 20})$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \int_{t_0}^t f_1(t, a_0, e_0, \dots) dt = a_0 + \delta_1 a, \\ e &= e_0 + \int_{t_0}^t f_2(t, a_0, e_0, \dots) dt = e_0 + \delta_1 e, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 21})$$

т. е. позволяет определить возмущения первого порядка.

Выражения для оскулирующих элементов будут иметь следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \sum A_{jk} \cos(jM + k\omega_0), \\ e &= e_0 + \sum B_{jk} \cos(jM + k\omega_0), \\ i &= i_0 + \sum C_{jk} \cos(jM + k\omega_0), \\ \Omega &= \Omega_0 + \Omega' t + \sum D_{jk} \sin(jM + k\omega_0), \\ \pi &= \pi_0 + \pi' t + \sum E_{jk} \sin(jM + k\omega_0), \\ \epsilon &= \epsilon_0 + \epsilon' t + \sum F_{jk} \sin(jM + k\omega_0), \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 22})$$

где коэффициенты  $A_{jk}$ ,  $B_{jk}$ , ... зависят от постоянных  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$  и представляются рядами, расположенными по степеням  $e_0$ . Наклон  $i_0$  входит в коэффициенты этих рядов в виде конечных тригонометрических выражений. Угол  $\omega_0$  надо понимать как сокращенное обозначение для  $\pi_0 - \Omega_0$ .

Среди возмущений первого порядка наиболее важными являются вековые возмущения

$$\Omega't, \pi't, \varepsilon't,$$

так как они растут пропорционально времени.

Для вычисления возмущений второго порядка относительно малого параметра необходимо найденные в первом приближении значения элементов (IV.21)

$$a_0 + \delta_1 a, \quad e_0 + \delta_1 e, \quad \dots$$

подставить в правые части уравнений (IV.18), откуда после интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a, \\ e &= e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.23})$$

с точностью до вторых порядков относительно малого параметра. Этот процесс последовательных приближений

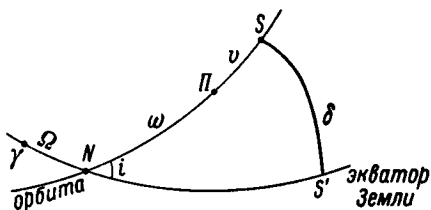


Рис. 12. Проекция орбиты спутника Земли на небесную сферу.

можно продолжать неограниченно далеко, однако из-за громоздкости выражений уже второе приближение представляет большие трудности. Мы ограничимся в дальнейшем только возмущениями первого порядка.

**3. Разложение пертурбационной функции.** Пусть спутник нулевой массы ( $S$  на рис. 12) движется в поле тяготения планеты, внешняя поверхность которой имеет форму уровненного эллипсоида вращения. Сжатие планеты и ее угловую скорость можно считать малыми величинами. Потенциал уровненного эллипсоида на внешнюю

точку с точностью до первой степени сжатия имеет вид (см. § 5 настоящей главы)

$$U = \frac{k^2 m}{r} + \frac{1}{3} J \frac{k^2 m a'^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \delta), \quad (\text{IV. 24})$$

где  $k$  — постоянная Гаусса,  $m$  — масса планеты,  $r$  — радиус-вектор спутника,  $a'$  — экваториальный радиус планеты,  $\delta$  — склонение спутника,  $J$  — параметр, характеризующий фигуру планеты. Величина  $J$  определяется формулой

$$J = \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a'^3}{k^2 m}, \quad (\text{IV. 25})$$

где  $\varepsilon$  — сжатие эллипсоида, а  $\omega$  — угловая скорость его вращения.

Первое слагаемое в (IV. 24) соответствует невозмущенному движению спутника по кеплеровой эллиптической орбите, второе слагаемое представляет пертурбационную функцию, которую будем обозначать, как обычно, через  $R$

$$R = \frac{1}{3} \frac{k^2 m a'^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \delta). \quad (\text{IV. 26})$$

Для того чтобы получить разложение  $R$  в ряд по степеням эксцентриситета орбиты спутника, целесообразно сначала несколько преобразовать выражение (IV. 26). Из сферического треугольника  $SNS'$  (рис. 12) имеем

$$\sin \delta = \sin i \sin (\nu + \omega), \quad (\text{IV. 27})$$

где  $i$  — наклон орбиты,  $\nu$  — истинная аномалия,  $\omega$  — угловое расстояние перигея от узла. Подставляя (IV. 27) в (IV. 26), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{6} J k^2 m \frac{a'^2}{a^3} & \left[ (2 - 3 \sin^2 i) \left( \frac{a}{r} \right)^3 + \right. \\ & + 3 \sin^2 i \cos 2\omega \left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos 2\nu - \\ & \left. - 3 \sin^2 i \sin 2\omega \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin 2\nu \right], \quad (\text{IV. 28}) \end{aligned}$$

где  $a$  — большая полуось орбиты.

Для величин  $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ ,  $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2v$ ,  $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2v$  существуют разложения в ряды по кратным средней аномалии  $M$  (см. приложение 16). Подставляя эти разложения в (IV. 28), получаем окончательное выражение для  $R$ , точное до шестых степеней эксцентриситета

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{1}{3} Jk^2 m \frac{a'^2}{a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \frac{35}{16} e^6 + \right. \\
 & + 3 \left( e + \frac{9}{8} e^3 + \frac{87}{64} e^5 \right) \cos M + \\
 & + \frac{9}{2} \left( e^2 + \frac{7}{9} e^4 + \frac{47}{48} e^6 \right) \cos 2M + \\
 & + \frac{53}{8} \left( e^3 + \frac{393}{848} e^5 \right) \cos 3M + \frac{77}{8} \left( e^4 + \frac{129}{770} e^6 \right) \cos 4M + \\
 & + \frac{1773}{128} e^5 \cos 5M + \frac{3167}{160} e^6 \cos 6M \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{2} Jk^2 m \frac{a'^2}{a^3} \sin^2 i \left[ \frac{1}{48} \left( e^3 + \frac{11}{16} e^5 \right) \cos (M - 2\omega) + \right. \\
 & + \frac{1}{24} \left( e^4 + \frac{7}{10} e^6 \right) \cos (2M - 2\omega) + \frac{81}{1280} e^5 \cos (3M - 2\omega) + \\
 & + \frac{4}{45} e^6 \cos (4M - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{8} e^3 + \right. \\
 & + \frac{5}{192} e^5 \left. \right) \cos (M + 2\omega) + \\
 & + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 - \frac{35}{288} e^6 \right) \cos (2M + 2\omega) + \\
 & + \frac{7}{2} \left( e - \frac{123}{56} e^3 + \frac{489}{448} e^5 \right) \cos (3M + 2\omega) + \\
 & + \frac{17}{2} \left( e^2 - \frac{115}{51} e^4 + \frac{601}{408} e^6 \right) \cos (4M + 2\omega) + \\
 & + \frac{845}{48} \left( e^3 - \frac{6505}{2704} e^5 \right) \cos (5M + 2\omega) + \\
 & + \frac{533}{16} \left( e^4 - \frac{13827}{5330} e^6 \right) \cos (6M + 2\omega) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{228347}{3840} e^5 \cos(7M + 2\omega) + \\
 & + \frac{73369}{720} e^6 \cos(8M + 2\omega) \Big]. \quad (IV. 29)
 \end{aligned}$$

Мы получили разложение пертурбационной функции в ряд Фурье вида

$$R = \sum A_{jk} \cos(jM + k\omega), \quad (IV. 30)$$

где  $j, k$  — целые числа. Коэффициенты  $A_{j,k}$  зависят от переменных  $a, e, i$  и малого параметра  $J$ .

**4. Возмущения первого порядка.** Для того чтобы фактически проинтегрировать уравнения Лагранжа (IV. 18), нам необходимо прежде всего получить в явном виде производные пертурбационной функции по элементам  $a, e, \dots$  Обозначим

$$M = \varepsilon - \pi, \quad \omega = \pi - \Omega, \quad \lambda = \sin i, \quad a = \frac{a'}{a}. \quad (IV. 31)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial R}{\partial M}, \quad \frac{\partial R}{\partial \pi} = -\frac{\partial R}{\partial M} + \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega} = -\frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial e}, \quad \frac{\partial R}{\partial i} = \sqrt{1 - \lambda^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{a}{a'} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (IV. 32)
 \end{aligned}$$

Обозначим далее

$$R = -\frac{2}{3} J \frac{k^2 m a'^2}{a^3} R_1. \quad (IV. 33)$$

Вычислим теперь производные  $R_1$  по элементам, ограничиваясь квадратами эксцентриситета орбиты,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_1}{\partial e} &= -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \lambda^2\right) \left[ e + \left(1 + \frac{27}{8} e^2\right) \cos M + \right. \\
 & + 3e \cos 2M + \frac{53}{8} e^2 \cos 3M \Big] + \\
 & + \frac{3}{8} \lambda^2 \left[ -\frac{1}{8} e^2 \cos(M - 2\omega) + \right. \\
 & + \left. \left(1 - \frac{3}{8} e^2\right) \cos(M + 2\omega) + \right. \\
 & + \left. 10e \cos(2M + 2\omega) - 7\left(1 - \frac{369}{56} e^2\right) \times \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos(3M + 2\omega) - 34e \cos(4M + 2\omega) - \\
& - \frac{845}{8} e^2 \cos(5M + 2\omega) \Big], \\
\frac{\partial R_1}{\partial \lambda} &= \frac{3}{2} \lambda \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cos M + \frac{9}{2} e^2 \cos 2M + \right. \\
& + \frac{1}{2} e \cos(M + 2\omega) - \\
& - \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2M + 2\omega) - \\
& - \left. \frac{7}{2} e \cos(3M + 2\omega) - \frac{17}{2} e^2 \cos(4M + 2\omega) \right], \\
\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} &= + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \lambda^2 \right) [e \sin M + 3e^2 \sin 2M] + \\
& + \frac{3}{4} \lambda^2 \left[ -\frac{1}{2} e \sin(M + 2\omega) + \right. \\
& + 2 \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \sin(2M + 2\omega) + \\
& + \left. \frac{21}{2} e \sin(3M + 2\omega) + 34 e^2 \sin(4M + 2\omega) \right], \\
\frac{\partial R_1}{\partial \Omega} &= \frac{3}{4} \lambda^2 \left[ e \sin(M + 2\omega) - \right. \\
& - 2 \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \sin(2M + 2\omega) - \\
& - \left. 7e \sin(3M + 2\omega) - 17e^2 \sin(4M + 2\omega) \right], \\
\frac{\partial R_1}{\partial \pi} &= - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \lambda^2 \right) \left[ e \sin M + 3e^2 \sin 2M + \right. \\
& + \frac{1}{2} e \sin(M + 2\omega) + \frac{7}{2} e \sin(3M + 2\omega) + \\
& + \left. 17e^2 \sin(4M + 2\omega) \right], \\
\frac{\partial R_1}{\partial a} &= - \frac{3}{a} R_1.
\end{aligned} \tag{IV. 34}$$

Разлагая коэффициенты правых частей в уравнениях Лагранжа по степеням эксцентриситета и подставляя производные пертурбационной функции по элементам, получим уравнения вида (IV. 20), которые легко интегрируются в том случае, когда ограничиваемся возмущениями первого порядка. Интегрируя, получим



$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta a + c_1, \\ e &= e_0 + \delta e + c_2, \\ i &= i_0 + \delta i + c_3, \\ \Omega &= \Omega_0 + \delta \Omega + c_4, \\ \pi &= \pi_0 + \delta \pi + c_5, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \delta \varepsilon + c_6, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 35})$$

где через  $a_0 + c_1$ ,  $e_0 + c_2$ , ... обозначим шесть произвольных постоянных интегрирования.

Возмущения  $\delta a$ ,  $\delta e$ , ... напишем опять с точностью до вторых степеней эксцентриситета включительно

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} &= 2J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \times \\ &\times \left[ e \cos M + \frac{3}{2} e^2 \cos 2M \right] + \\ &+ J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \left[ -\frac{1}{2} e \cos (M + 2\omega) + \right. \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) \cos (2M + 2\omega) + \\ &+ \left. \frac{7}{2} e \cos (3M + 2\omega) + \frac{17}{2} e^2 \cos (4M + 2\omega) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta e &= J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[ \left(1 + \frac{1}{8} e^2\right) \cos M + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} e \cos 2M + \frac{53}{24} e^2 \cos 3M \right] + \\ &+ \frac{1}{2} J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8} e^2\right) \times \right. \\ &\times \cos (M + 2\omega) + \frac{1}{16} e^2 \cos (M - 2\omega) - \\ &- \frac{1}{2} e \cos (2M + 2\omega) + \frac{7}{6} \left(1 - \frac{235}{56} e^2\right) \times \\ &\times \cos (3M + 2\omega) + \frac{17}{4} e \cos (4M + 2\omega) + \\ &+ \left. \frac{169}{16} e^2 \cos (5M + 2\omega) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i &= \frac{1}{2} J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin i \cos i \left[ -e \cos (M + 2\omega) + \right. \\ &+ \left. (1 - 2e^2) \cos (2M + 2\omega) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7}{3} e \cos(3M - 2\omega) + \frac{17}{4} e^2 \cos(4M + 2\omega) \Big], \\
\delta\Omega = & J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cos i \Big[ (1 + 2e^2) nt + 3e \sin M + \\
& + \frac{9}{4} e^2 \sin 2M + \frac{1}{2} e \sin(M + 2\omega) - \\
& - \frac{1}{2} (1 - 2e^2) \sin(2M + 2\omega) - \\
& - \frac{7}{6} e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8} e^2 \sin(4M + 2\omega) \Big], \\
e\delta\pi = & -J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 (\cos i - \cos^2 i) \Big[ ent + 3e^2 \sin M + \\
& + \frac{1}{2} e^2 \sin(M + 2\omega) - \frac{1}{2} e \sin(2M + 2\omega) - \\
& - \frac{7}{6} e^2 \sin(3M + 2\omega) \Big] + J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \times \\
& \times \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \Big[ ent + \left(1 + \frac{23}{8} e^2\right) \sin M + \\
& + \frac{3}{2} e \sin 2M + \frac{53}{24} e^2 \sin 3M \Big] - \\
& - \frac{1}{4} J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \Big[ \left(1 - \frac{7}{8} e^2\right) \sin(M + 2\omega) - \\
& - \frac{1}{8} e^2 \sin(M - 2\omega) + 5e \sin(2M + 2\omega) - \\
& - \frac{7}{3} \left(1 - \frac{397}{56} e^2\right) \sin(3M + 2\omega) - \\
& - \frac{17}{2} e \sin(4M + 2\omega) - \frac{169}{8} e^2 \sin(5M + 2\omega) \Big], \\
\delta\varepsilon = & 2J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \Big[ \left(1 + \frac{7}{4} e^2\right) nt + \\
& + \frac{13}{4} e \sin M + \frac{21}{8} e^2 \sin 2M \Big] + \\
& + 3J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \Big[ -\frac{13}{24} e \sin(M + 2\omega) + \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{35}{12} e^2\right) \sin(2M + 2\omega) + \\
& + \frac{91}{72} e \sin(3M + 2\omega) +
\end{aligned}
\tag{IV. 36}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{119}{48} e^2 \sin(4M + 2\omega) \Big] - J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \times \\
& \times (\cos i - \cos^2 i) \left[ (1 + 2e^2) nt + 3e \sin M + \right. \\
& + \frac{9}{4} e^2 \sin 2M + \frac{1}{2} e \sin(M + 2\omega) - \\
& - \frac{1}{2} (1 - 2e^2) \sin(2M + 2\omega) - \\
& \left. - \frac{7}{6} e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8} e^2 \sin(4M + 2\omega) \right].
\end{aligned}$$

Шесть постоянных интегрирования  $a_0 + c_1$ ,  $e_0 + c_2$ ,  $i_0 + c_3$ ,  $\Omega_0 + c_4$ ,  $\pi_0 + c_5$ ,  $\varepsilon_0 + c_6$  могут быть определены различными способами. Если мы положим

$$\begin{aligned}
c_1 &= -(\delta a)_{t=t_0}, \\
c_2 &= -(\delta e)_{t=t_0}, \\
c_3 &= -(\delta i)_{t=t_0}, \\
c_4 &= -(\delta \Omega)_{t=t_0}, \\
c_5 &= -(\delta \pi)_{t=t_0}, \\
c_6 &= -(\delta \varepsilon)_{t=t_0},
\end{aligned} \tag{IV. 37}$$

то возмущения элементов вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\delta_1 a &= \delta a - (\delta a)_{t=t_0}, \\
\delta_1 e &= \delta e - (\delta e)_{t=t_0}, \\
\delta_1 i &= \delta i - (\delta i)_{t=t_0}, \\
\delta_1 \Omega &= \delta \Omega - (\delta \Omega)_{t=t_0}, \\
\delta_1 \pi &= \delta \pi - (\delta \pi)_{t=t_0}, \\
\delta_1 \varepsilon &= \delta \varepsilon - (\delta \varepsilon)_{t=t_0},
\end{aligned} \tag{IV. 38}$$

а сами элементы на любой момент времени  $t$  могут быть получены так:

$$\begin{aligned}
a &= a_0 + \delta_1 a, \\
e &= e_0 + \delta_1 e, \\
i &= i_0 + \delta_1 i, \\
\Omega &= \Omega_0 + \delta_1 \Omega, \\
\pi &= \pi_0 + \delta_1 \pi, \\
\varepsilon &= \varepsilon_0 + \delta_1 \varepsilon.
\end{aligned} \tag{IV. 39}$$

Очевидно, что при  $t = t_0$  возмущения  $\delta_1 a = \delta_1 e = \delta_1 i = \delta_1 \Omega = \delta_1 \pi = \delta_1 \epsilon = 0$ .

Элементы орбиты  $a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon$  называются оскулирующими элементами на момент  $t$ , а постоянные интегрирования  $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0$  — оскулирующими элементами для эпохи оскуляции  $t = t_0$ .

Если положить в (IV.35)  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ , то

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, \\ e &= e_0 + \delta e, \\ i &= i_0 + \delta i, \\ \Omega &= \Omega_0 + \delta \Omega, \\ \pi &= \pi_0 + \delta \pi, \\ \epsilon &= \epsilon_0 + \delta \epsilon. \end{aligned} \tag{IV.40}$$

В этом случае элементы  $a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon$  называются оскулирующими элементами орбиты на момент  $t$ , а постоянные интегрирования  $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0$  называются средними элементами орбиты.

Полученные выражения (IV.35)—(IV.36) для возмущенных оскулирующих элементов орбиты спутника дают возможность вычислять возмущенные координаты спутника на любой момент  $t$ . Для этого применяются известные формулы (IV.10)—(IV.11) и

$$M = M_0 + n_0(t - t_0) + \delta \epsilon - \delta \pi - \frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int_{t_0}^t \delta a dt, \tag{IV.41}$$

где буквы с нулевыми индексами обозначают невозмущенные значения элементов. Отметим, что вековые возмущения имеются только в элементах  $\Omega, \pi$  и  $\epsilon$ . В элементах  $a, e, i$  вековые возмущения отсутствуют.

**5. Вековые возмущения первого порядка.** Среди возмущений первого порядка наиболее важными являются вековые возмущения, так как они растут пропорционально времени. Поэтому вековые возмущения необходимо вычислять с большей точностью, чем возмущения периодические.

Структура пертурбационной функции позволяет получить вековые возмущения в конечном виде, не прибегая к разложению в ряды по степеням эксцентриситета.

Для вычисления вековых возмущений вместо элементов  $\Omega$  и  $\varepsilon$  удобно ввести элементы  $\omega$  и  $M_0$ , определяемые формулами

$$\begin{aligned}\omega &= \pi - \Omega, \\ M_0 &= \varepsilon - \pi.\end{aligned}\tag{IV. 42}$$

Уравнения Лагранжа для элементов  $\omega$  и  $M_0$  имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dM_0}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}.\end{aligned}\tag{IV. 43}$$

Обозначим коэффициенты при вековых возмущениях элементов  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $M_0$  через  $\Omega'$ ,  $\omega'$  и  $M'_0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 + \Omega'(t-t_0) + \delta\Omega, \\ \omega &= \omega_0 + \omega'(t-t_0) + \delta\omega, \\ M_0 &= M_0(t) + M'_0(t-t_0) + \delta M_0.\end{aligned}\right\}\tag{IV. 44}$$

Введем вместо независимого переменного  $t$  истинную аномалию  $\nu$ , которая связана с  $t$  соотношением

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = k\sqrt{m} \sqrt{a(1-e^2)}.\tag{IV. 45}$$

Тогда „осредняя“ по  $\nu$  величины  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $\frac{d\Omega}{dt}$  и  $\frac{dM_0}{dt}$ , на интервале  $(0-2\pi)$  получим следующие формулы для вековых возмущений долготы восходящего узла, расстояния перицентра от узла и средней аномалии спутника в эпоху:

$$\left. \begin{aligned}\omega' &= \frac{1}{2\pi k \sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} r^2 \frac{d\omega}{dt} d\nu, \\ \Omega' &= \frac{1}{2\pi k \sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} r^2 \frac{d\Omega}{dt} d\nu, \\ M'_0 &= \frac{1}{2\pi k \sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} r^2 \frac{dM_0}{dt} d\nu.\end{aligned}\right\}\tag{IV. 46}$$

Формулы (IV.46) дают коэффициенты  $\Omega'$ ,  $\omega'$  и  $M'_0$  в предположении, что за единицу времени выбрана величина  $\frac{T}{2\pi}$ , где  $T$  — период обращения спутника вокруг планеты. Если принять за единицу измерения времени сутки, то нужно умножить правые части формул (IV.46) на среднее суточное движение спутника  $n$ , причем в зависимости от того, будет ли  $n$  выражено в радианах или градусах, коэффициенты  $\Omega'$ ,  $\omega'$  и  $M'_0$  также получаются в радианах или градусах.

Подставляя в (IV.46) выражения для  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $\frac{d\Omega}{dt}$  и  $\frac{dM_0}{dt}$ , получим после интегрирования и умножения правых частей на  $n$

$$\left. \begin{aligned} \Omega' &= -J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} n, \\ \omega' &= \frac{1}{2} J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} n, \\ M'_0 &= \frac{1}{2} J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^{3/2}} n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.47})$$

Теперь нетрудно образовать выражения для коэффициентов при вековых возмущениях  $\pi$  и  $\epsilon$

$$\left. \begin{aligned} \pi' &= \frac{1}{2} J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 2 \cos i - 1}{(1-e^2)^2} n, \\ \epsilon' &= \frac{1}{2} J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \frac{(5 + 3\sqrt{1-e^2}) \cos^2 i - 2 \cos i - 1 - \sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2} n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.48})$$

Первая формула (IV.47) показывает, что вековое движение узла достигает максимума при  $i=0$  или при  $i=180^\circ$ , т. е. тогда, когда плоскость орбиты близка к плоскости экватора планеты (при  $i=0, 180^\circ$  положение узла на орбите становится неопределенным).

При  $i=90^\circ$ , т. е. в случае полярной орбиты спутника,  $\Omega'=0$ . Вековое движение перицентра достигает максимума при  $i=0$  или  $i=180^\circ$  и обращается в нуль при  $i=63^\circ 26'$ .

При  $i > 63^\circ 26'$  прямое движение линии апсид меняется на обратное.

Вековое движение элемента  $M_0$  достигает максимума при  $i=0$  или при  $i=180^\circ$  и обращается в нуль при  $i=54^\circ 44'$ .

**6. Пример на вычисление возмущений первого порядка.** В качестве примера для вычисления возмущений возьмем орбиту фиктивного искусственного спутника Земли со следующими элементами:

$$\begin{aligned} a &= 7286.88 \text{ км,} \\ e &= 0.099493, \\ i &= 65^\circ 49'. \end{aligned}$$

Размеры и форма Земли определяются следующими числовыми значениями параметров  $a'$ ,  $J$ :

$$\begin{aligned} a' &= 6378.39 \text{ км,} \\ J &= 0.00164147. \end{aligned}$$

После подстановки элементов орбиты и постоянных  $a'$  и  $J$  в формулы (IV.36) получим выражения для возмущений первого порядка, вызываемых сжатием Земли

$$\begin{aligned} \delta a &= -0.446 \cos M - 0.066 \cos 2M - \\ &- 0.010 \cos 3M - 0.001 \cos 4M - \\ &- 0.376 \cos (M + 2\omega) + \\ &+ 7.401 \cos (2M + 2\omega) + \\ &+ 2.584 \cos (3M + 2\omega) + \\ &+ 0.624 \cos (4M + 2\omega) + \\ &+ 0.131 \cos (5M + 2\omega) + \\ &+ 0.024 \cos (6M + 2\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta e \cdot 10^7 &= -3046 \cos M - 454 \cos 2M - \\ &- 66 \cos 3M - 2 \cos 4M + 2601 \times \\ &\times \cos (M + 2\omega) + 3 \cos (M - 2\omega) - \\ &- 251 \cos (2M + 2\omega) + 5824 \times \\ &\times \cos (3M + 2\omega) + 2119 \cos (4M + 2\omega) + \\ &+ 524 \cos (5M + 2\omega) + \\ &+ 113 \cos (6M + 2\omega) + 20 \cos (7M + 2\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta i \cdot 10^5 &= -136^\circ \cos (M + 2\omega) + \\ &+ 1333^\circ \cos (2M + 2\omega) + \\ &+ 310^\circ \cos (3M + 2\omega) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 562^\circ \cos(4M + 2\omega) + \\
& + 9^\circ \cos(5M + 2\omega) + 1^\circ \cos(6M + 2\omega), \\
\delta\Omega \cdot 10^5 = & - 267416^\circ t - 907^\circ \sin M - 67^\circ \sin 2M - \\
& - 7^\circ \sin 3M - 1^\circ \sin 4M - \\
& - 149^\circ \sin(M + 2\omega) + \\
& + 1465^\circ \sin(2M + 2\omega) + \\
& + 341^\circ \sin(3M + 2\omega) + \\
& + 62^\circ \sin(4M + 2\omega) + \\
& + 10^\circ \sin(5M + 2\omega) + 2^\circ \sin(6M + 2\omega), \\
\delta\varepsilon \cdot 10^5 = & - 477956^\circ t - 1625^\circ \sin M - \\
& - 154^\circ \sin 2M - 16^\circ \sin 3M - \\
& - 2^\circ \sin 4M - 894^\circ \sin(M + 2\omega) + \\
& + 9471^\circ \sin(2M + 2\omega) + \\
& + 2376^\circ \sin(3M + 2\omega) + \\
& + 461^\circ \sin(4M + 2\omega) + \\
& + 80^\circ \sin(5M + 2\omega) + 14^\circ \sin(6M + 2\omega), \\
e\delta\pi \cdot 10^5 = & - 31079^\circ t - 1846^\circ \sin M - \\
& - 267^\circ \sin 2M - 38^\circ \sin 3M - \\
& - 5^\circ \sin 4M - 1^\circ \sin 5M - \\
& - 1488^\circ \sin(M + 2\omega) - \\
& - 649^\circ \sin(2M + 2\omega) + 2^\circ \sin(M - 2\omega) + \\
& + 3259^\circ \sin(3M + 2\omega) + \\
& + 1203^\circ \sin(4M + 2\omega) + \\
& + 299^\circ \sin(5M + 2\omega) + \\
& + 62^\circ \sin(6M + 2\omega) + \\
& + 12^\circ \sin(7M + 2\omega) + 2^\circ \sin(8M + 2\omega).
\end{aligned}
\tag{IV. 49}$$

Примечание. Для того чтобы получить формулы (IV. 49), необходимо в разложениях (IV. 36) получить члены до пятой степени эксцентриситета включительно.

Коэффициенты периодических возмущений большой полуоси даны в километрах, а в вековых возмущениях



элементов  $\Omega$ ,  $e$ ,  $\pi$  время  $t$  необходимо брать в средних солнечных сутках.

Полученные выражения (IV. 49) дают наглядное представление о величине возмущений первого порядка в элементах орбиты спутника. Так, например, в возмущении большой полуоси орбиты наиболее существенными являются периодические возмущения с аргументами  $(2M + 2\omega)$  и  $(3M + 2\omega)$ . Амплитуды этих членов равны соответственно 7.4 и 2.6 км.

Наиболее значительные возмущения в эксцентриситете орбиты вызывает член с аргументом  $(3M + 2\omega)$ , что может дать отклонение в высоте перигея 4.2 км.

Самые большие периодические возмущения в остальных элементах имеют порядок нескольких минут дуги.

**7. Примеры вековых возмущений.** Рассмотрим теперь вековые возмущения долготы узла и расстояния перигея от узла для первых трех советских искусственных спутников Земли.

Т а б л и ц а 36

**Элементы орбит советских искусственных спутников Земли (в начале движения)**

Элементы	Первый спутник	Второй спутник	Третий спутник
$T$ . . . . .	96.17 м	103.75 м	105.95 м
$a$ . . . . .	6954.3 км	7313.8 км	7417.6 км
$i$ . . . . .	65°1	65°3	65°2
$e$ . . . . .	0.052	0.033	0.111
$\pi$ . . . . .	5390°5	4996°7	4892°8

Применяя первые две формулы (IV. 47), находим точные изменения долготы восходящего узла и расстояния перигея от узла, имеющие вековой характер.

	$\Delta\Omega$	$\Delta\omega$
Первый спутник:	—3°15	—0.427
Второй спутник:	—2.66	—0.404
Третий спутник:	—2.55	—0.365

Рассмотрим еще движение перицентра  $V$  спутника Юпитера.

Элементы орбиты V спутника Юпитера

$$\frac{a}{a'} = 2.52,$$

$$i = 0,$$

$$e = 0.0028,$$

$$T = 0.49818 \text{ суток},$$

$$n = 722.63.$$

Параметры, определяющие фигуру Юпитера, имеют следующие числовые значения:

$$\varepsilon = 1/15.63,$$

$$J = 0.02015.$$

Первая формула (IV. 48) принимает при  $i = 0$  следующий вид:

$$\pi' = J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \frac{n}{(1 - e^2)^2}. \quad (\text{IV. 50})$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\pi' = 2^{\circ}29,$$

что хорошо согласуется с наблюдаемым средним суточным движением перицентра

$$\pi' = 2^{\circ}33.$$

Наоборот, зная из наблюдений вековое движение перицентра орбиты спутника, очевидно, можно определить теоретически сжатие планеты по формуле (IV. 50) или по первой формуле (IV. 48).

Рассмотренная в разделах 1—4 § 2 теория движения близких спутников разработана В. Ф. Проскуриным и Ю. В. Батраковым в 1958 г. и была использована в Институте теоретической астрономии АН СССР при обработке визуальных наблюдений искусственных спутников Земли.

### § 3. Движение спутников по орбитам с малыми эксцентриситетами

**1. Преобразование уравнений Лагранжа.** В случае орбит с малым эксцентриситетом уравнения Лагранжа представляют известные неудобства, так как в правых

частях выражений для  $\frac{de}{dt}$  и  $\frac{d\pi}{dt}$  появляется малый делитель  $e$ .

Для того чтобы устранить эту трудность, преобразуем уравнения Лагранжа. Введем вместо  $e$ ,  $\pi$  и  $\varepsilon$  новые элементы

$$\begin{aligned} h &= e \sin(\pi - \Omega), \\ l &= e \cos(\pi - \Omega), \\ \lambda_0 &= \varepsilon - \Omega. \end{aligned} \quad (\text{IV. 51})$$

Таким образом, счет долгот идет от восходящего узла орбиты. Находим прежде всего

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sin(\pi - \Omega) \frac{de}{dt} + e \cos(\pi - \Omega) \frac{d\pi}{dt} - \\ &\quad - e \cos(\pi - \Omega) \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{IV. 52})$$

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \cos(\pi - \Omega) \frac{de}{dt} - e \sin(\pi - \Omega) \frac{d\pi}{dt} + \\ &\quad + e \sin(\pi - \Omega) \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} &= \sin(\pi - \Omega) \frac{\partial R}{\partial h} + \cos(\pi - \Omega) \frac{\partial R}{\partial l}, \\ \frac{\partial R}{\partial \pi} &= e \cos(\pi - \Omega) \frac{\partial R}{\partial h} - e \sin(\pi - \Omega) \frac{\partial R}{\partial l}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 53})$$

Подставляя в уравнения Лагранжа (IV. 18), получим

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - h^2 - l^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{\sqrt{1 - h^2 - l^2}}{na^2} \frac{h}{1 + \sqrt{1 - h^2 - l^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \\ &\quad - \frac{l \operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1 - h^2 - l^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \quad (\text{IV. 54})$$

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - h^2 - l^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{\sqrt{1 - h^2 - l^2}}{na^2} \frac{l}{1 + \sqrt{1 - h^2 - l^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \\ &\quad + \frac{h \operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1 - h^2 - l^2}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned}$$

Рассматривая  $h$  и  $l$  как величины первого порядка малости, преобразуем уравнения (IV. 54), отбрасывая члены второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{h}{2na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{l \operatorname{ctg} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{l}{2na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{h \operatorname{ctg} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 55})$$

Находим далее

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_0}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) + \frac{\partial R}{\partial h} \frac{dh}{d\Omega} + \frac{\partial R}{\partial l} \frac{dl}{d\Omega} + \frac{\partial R}{\partial \lambda_0} \frac{d\lambda_0}{d\Omega} = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) + l \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial R}{\partial \lambda_0}, \\ \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= l \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial R}{\partial \lambda_0}, \end{aligned} \right\} (\text{IV. 56})$$

где  $\left( \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right)$  означает производную от  $R$  по  $\Omega$ , входящему в  $R$  в явном виде.

Мы увидим далее, что в нашей задаче

$$\left( \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) + \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2} \left( l \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial R}{\partial \lambda_0} \right). \quad (\text{IV. 57})$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{dt} &= \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \\ &+ \frac{1}{2na^2} \left( h \frac{\partial R}{\partial h} + l \frac{\partial R}{\partial l} \right) - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 58})$$

Таким образом, уравнения Лагранжа можно заменить следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda_0}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{h}{2na^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda_0} - \frac{l \operatorname{ctg} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{l}{2na^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda_0} + \frac{h \operatorname{ctg} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \right\} (\text{IV. 59})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2} \left( l \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial R}{\partial \lambda_0} \right), \\ \frac{d\lambda_0}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{2na^2} \left( h \frac{\partial R}{\partial h} + l \frac{\partial R}{\partial l} \right) - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \right\}$$

Полученные уравнения пригодны для вычисления возмущений элементов при любых сколь угодно малых эксцентриситетах.

**2. Преобразование пертурбационной функции.** Для преобразования пертурбационной функции к новым переменным нам понадобятся следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} e \sin M &= e \sin(\lambda - \omega) = l \sin \lambda - h \cos \lambda, \\ e \cos M &= e \cos(\lambda - \omega) = l \cos \lambda + h \sin \lambda, \\ e \sin(M + 2\omega) &= e \sin(\lambda + \omega) = l \sin \lambda + h \cos \lambda, \\ e \cos(M + 2\omega) &= e \cos(\lambda + \omega) = l \cos \lambda - h \sin \lambda, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{(IV. 60)}$$

Ограничиваясь в пертурбационной функции первыми степенями эксцентриситета, получим после перехода к новым переменным

$$\begin{aligned} R_1 &= Jk^2 m \frac{a'^2}{a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left( \frac{1}{3} + l \cos \lambda + h \sin \lambda \right) + \\ &+ Jk^2 m \frac{a'^2}{a^3} \sin^2 i \left( -\frac{1}{4} l \cos \lambda + \frac{1}{4} h \sin \lambda + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \cos 2\lambda + \frac{7}{4} l \cos 3\lambda + \frac{7}{4} h \sin 3\lambda \right). \end{aligned} \quad \text{(IV. 61)}$$

При вычислении возмущений элементов  $h$  и  $l$  нам необходимо учесть в пертурбационной функции также и члены второй степени относительно эксцентриситета. Аналогично предыдущему находим

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{3} Jk^2 m \frac{a'^2}{a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \frac{3}{2} (h^2 + l^2) + \right. \\ &+ \left. \frac{9}{2} (l^2 - h^2) \cos 2\lambda + 9hl \sin 2\lambda \right] + \\ &+ \frac{1}{2} Jk^2 m \frac{a'^2}{a^3} \sin^2 i \left[ -\frac{5}{2} (h^2 + l^2) \cos 2\lambda + \right. \\ &+ \left. \frac{17}{2} (l^2 - h^2) \cos 4\lambda + 17hl \sin 4\lambda \right]. \end{aligned} \quad \text{(IV. 62)}$$

Так как  $\Omega$  не входит явно ни в  $R_1$ , ни в  $R_2$ , то  $(\frac{\partial R}{\partial \Omega}) = 0$ .

**3. Возмущения первого порядка.** Вычисляя производные пертурбационной функции по элементам и подставляя полученные выражения в (IV. 59), получим после интегрирования следующие формулы для вычисления возмущений первого порядка элементов орбиты спутника с точностью до первых степеней относительно эксцентриситета или, что тоже самое, относительно  $h$  и  $l$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta a}{a} &= 2J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) (l \cos \lambda + h \sin \lambda) + \\
 &+ J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \left(-\frac{1}{2} l \cos \lambda + \frac{1}{2} h \sin \lambda + \right. \\
 &+ \left. \cos 2\lambda + \frac{7}{2} l \cos 3\lambda + \frac{7}{2} h \sin 3\lambda\right), \\
 \delta h &= J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[ l n t + \sin \lambda + \right. \\
 &+ \left. \frac{3}{2} l \sin 2\lambda - \frac{3}{2} h \cos 2\lambda\right] - \frac{1}{4} J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \times \\
 &\times \left[ \sin \lambda - \frac{7}{3} \sin 3\lambda + 5l \sin 2\lambda - \frac{17}{2} l \sin 4\lambda + \right. \\
 &+ \left. \frac{17}{2} h \cos 4\lambda + h \cos 2\lambda\right] + J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cos^2 i \times \\
 &\times \left( l n t - \frac{1}{2} l \sin 2\lambda \right), \\
 \delta l &= J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[ -h n t + \cos \lambda + \right. \\
 &+ \left. \frac{3}{2} l \cos 2\lambda + \frac{3}{2} h \sin 2\lambda\right] - \frac{1}{4} J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \times \\
 &\times \left[ -\cos \lambda - \frac{7}{3} \cos 3\lambda - 5h \sin 2\lambda - \right. \\
 &- \left. \frac{17}{2} l \cos 4\lambda - \frac{17}{2} h \sin 4\lambda + l \cos 2\lambda\right] + \\
 &+ J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cos^2 i \left[ -h n t + \frac{h}{2} \sin 2\lambda \right], \\
 \delta \Omega &= -J\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cos i \left( n t + \frac{7}{2} l \sin \lambda - \frac{5}{2} h \cos \lambda - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} \sin 2\lambda - \frac{7}{6} l \sin 3\lambda + \frac{7}{6} h \cos 3\lambda \right),
 \end{aligned}
 \tag{IV. 63}$$

$$\begin{aligned} \delta i &= \frac{1}{2} J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \sin i \cos i \left( -l \cos \lambda + h \sin \lambda + \right. \\ &\quad \left. + \cos 2\lambda + \frac{7}{3} l \cos 3\lambda + \frac{7}{3} h \sin 3\lambda \right), \\ \delta \lambda_0 &= 2J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left( nt + \frac{13}{4} l \sin \lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{4} h \cos \lambda \right) + 3J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \sin^2 i \left( -\frac{13}{24} h \cos \lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{24} l \sin \lambda - \frac{91}{72} h \cos 3\lambda + \frac{91}{72} l \sin 3\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\lambda \right) + J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \cos^2 i \left( nt + \frac{7}{2} l \sin \lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} h \cos \lambda - \frac{1}{2} \sin 2\lambda - \frac{7}{6} l \sin 3\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{6} h \cos 3\lambda \right). \end{aligned}$$

Возмущенные элементы орбиты могут быть теперь вычислены по формулам

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a, \\ i &= i_0 + \delta_1 i, \\ h &= h_0 + At + \delta_1 h, \\ l &= l_0 + Bt + \delta_1 l, \\ \Omega &= \Omega_0 + Ct + \delta_1 \Omega, \\ \lambda_0 &= \lambda_0(t_0) + Dt + \delta_1 \lambda_0, \end{aligned} \tag{IV. 64}$$

где  $A, B, C, D$  — известные постоянные коэффициенты при вековых возмущениях;  $\delta_1 a, \delta_1 i, \delta_1 h, \delta_1 l, \delta_1 \Omega$  и  $\delta_1 \lambda_0$  содержат только периодические члены, а  $a_0, i_0, h_0, l_0, \Omega_0$  и  $\lambda_0(t_0)$  — шесть постоянных интегрирования.

Назовем

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= a_0, \\ \bar{i} &= i_0, \\ \bar{h} &= h_0 + At, \\ \bar{l} &= l_0 + Bt, \\ \bar{\Omega} &= \Omega_0 + Ct, \\ \bar{\lambda}_0 &= \lambda_0(t_0) + Dt \end{aligned} \right\} \tag{IV. 65}$$

средними элементами орбиты для момента  $t$ .

Тогда для вычисления возмущенных элементов получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{a} + \delta_1 a, \\ i &= \bar{i} + \delta_1 i, \\ h &= \bar{h} + \delta_1 h, \\ l &= \bar{l} + \delta_1 l, \\ \Omega &= \bar{\Omega} + \delta_1 \Omega, \\ \lambda_0 &= \bar{\lambda}_0 + \delta_1 \lambda_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 66})$$

Элементы  $a, i, h, l, \Omega, \lambda_0$  называются оскулирующими элементами орбиты на момент  $t$ .

**4. Вычисление координат спутника.** При вычислении координат спутника удобно ввести вместо  $\lambda_0$  непосредственно долготу в орбите для момента  $t$

$$\lambda = \lambda_0 + \int_{t_0}^t \delta n dt = \lambda_0 - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \int_{t_0}^t \delta a dt. \quad (\text{IV. 67})$$

Вводя в (IV. 67) выражение для  $\frac{\delta a}{a}$  из (IV. 63) и интегрируя, получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda = \lambda_0 + 2J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left( nt + \frac{7}{4} l \sin \lambda - \right. \\ \left. - \frac{7}{4} h \cos \lambda \right) + 3J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \sin^2 i \left( - \frac{7}{24} h \cos \lambda - \right. \\ \left. - \frac{7}{24} l \sin \lambda + \frac{1}{4} \sin 2\lambda - \frac{49}{72} h \cos 3\lambda + \right. \\ \left. + \frac{49}{72} l \sin 3\lambda \right) + J \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \cos^2 i \left( nt + \frac{7}{2} l \sin \lambda - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} h \cos \lambda - \frac{1}{2} \sin 2\lambda - \frac{7}{6} l \sin 3\lambda + \right. \\ \left. + \frac{7}{6} h \cos 3\lambda \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 68})$$

Полученные возмущенные элементы орбиты могут быть теперь использованы для вычисления возмущенных планетоцентрических прямоугольных координат спутника.

Для этого служат формулы (IV. 10)—(IV. 11) и соотношение

$$M = \lambda - \omega, \quad (\text{IV. 69})$$



где  $\lambda$  вычисляется по формуле (IV.68). Формулы § 3 использовались в Институте теоретической астрономии для обработки визуальных наблюдений искусственных спутников Земли.

#### § 4. Истинная аномалия как независимая переменная в уравнениях Лагранжа

**1. Аномалии как независимые переменные в уравнениях Лагранжа.** Иногда может оказаться удобным принять за независимую переменную в уравнениях движения не время, а невозмущенные среднюю, эксцентрисческую или истинную аномалию.

Переход от времени как независимой переменной к аномалиям осуществляется с помощью формул, вывод которых не представляет затруднений. Дифференцируя по времени соотношение

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (\text{IV. 70})$$

получим

$$\frac{dM}{dt} = n. \quad (\text{IV. 71})$$

Аналогично, дифференцируя по времени уравнение Кеплера,

$$E - e \sin E = M, \quad (\text{IV. 72})$$

находим

$$\frac{dE}{dt} - e \cos E \frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt} \quad (\text{IV. 73})$$

или

$$\frac{dE}{dt} (1 - e \cos E) = n, \quad (\text{IV. 74})$$

откуда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}. \quad (\text{IV. 75})$$

Так как

$$r = a(1 - e \cos E),$$

имеем окончательно

$$\frac{dE}{dt} = n \left( \frac{a}{r} \right). \quad (\text{IV. 76})$$

Наконец интеграл площадей в задаче двух тел дает

$$r^2 \frac{du}{dt} = r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{m} \sqrt{p}, \quad (\text{IV. 77})$$

где  $m$  — масса планеты, масса спутника равна нулю, и

$$p = a(1 - e^2). \quad (\text{IV. 78})$$

Подставляя в (IV. 77)

$$n = \frac{k \sqrt{m}}{a \sqrt{a}},$$

находим

$$r^2 \frac{dv}{dt} = na^2 \sqrt{1 - e^2},$$

откуда окончательно

$$\frac{dv}{dt} = n \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (\text{IV. 79})$$

Таким образом, зависимость между временем и аномалиями устанавливается с помощью формул (IV. 71), (IV. 76) и (IV. 79).

Обозначая любой из шести элементов орбиты буквой  $A$ , мы можем написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dM} &= \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dM} = \frac{1}{n} \frac{dA}{dt}, \\ \frac{dA}{dE} &= \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dE} = \frac{1}{n} \left( \frac{r}{a} \right) \frac{dA}{dt}, \\ \frac{dA}{dv} &= \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dv} = \frac{1}{n} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dA}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 80})$$

С помощью этих формул нетрудно преобразовать уравнения Лагранжа к новым переменным. Так, например, японский астроном Козаи предлагает в теории движения близких искусственных спутников Земли принять за независимую переменную истинную аномалию. Тогда, пользуясь третьей формулой (IV. 80), получаем уравнения Лагранжа в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &= \frac{2}{n^2 a} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\ \frac{de}{dv} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n^2 a^2 e} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{1}{n^2 a^2 e} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{\partial R}{\partial \omega}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\omega}{dv} &= -\frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{di}{dv} &= -\frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \omega} - \\
 &\quad - \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)} \frac{1}{\sin i} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dv} &= \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)} \frac{1}{\sin i} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dM_0}{dv} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{n^2 a \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial a}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 81})$$

Если мы хотим по уравнениям (IV. 81) вычислить возмущения первого порядка, то оскулирующие элементы орбиты в правых частях уравнений должны рассматриваться как постоянные величины. Для вычисления возмущений высших порядков эти формулы неудобны, так как в этом случае множитель при  $\frac{dA}{dt}$  в третьей формуле (IV. 80) мы должны вычислять с постоянными элементами, а остальные элементы в правых частях уравнений Лагранжа рассматривать как оскулирующие элементы, зависящие от времени. Поэтому выведем такие формулы, определяющие зависимость между временем и аномалиями, которые с самого начала учитывают, что в возмущенном движении элементы орбиты являются функциями времени.

Дифференцируя (IV. 70), мы должны теперь написать вместо (IV. 71)

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + n + \frac{dn}{dt} (t - t_0), \quad (\text{IV. 82})$$

полагая

$$\frac{dM_0}{dt} + \frac{dn}{dt} (t - t_0) = \frac{d\bar{M}_0}{dt},$$

получим

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}_0}{dt} + n, \quad (\text{IV. 83})$$

откуда, умножая почленно на  $\frac{dt}{dM}$ , находим после некоторых преобразований

$$\frac{dt}{dM} = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{d\bar{M}_0}{dM} \right). \quad (\text{IV. 84})$$

Аналогично, дифференцируя уравнение Кеплера (IV.72), получим

$$\frac{dt}{dE} = \frac{1}{n} \left( \frac{r}{a} \right) \left( 1 - \frac{a}{r} \sin E \frac{de}{dE} - \frac{a}{r} \frac{dM_0}{dE} \right). \quad (\text{IV. 85})$$

Нам остается вывести зависимость между временем и истинной аномалией. Условимся отсчитывать полярный угол  $u$  в формуле (IV.77) от некоторой подвижной оси, лежащей в плоскости орбиты, так что

$$u = v + \omega + \sigma. \quad (\text{IV. 86})$$

Дифференцируя (IV.86) в предположении, что элементы орбиты являются функциями времени, получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}. \quad (\text{IV. 87})$$

Так как положение оси отсчета выбрано нами совершенно произвольно, то мы можем наложить условие

$$\frac{d\sigma}{dt} = \cos i \frac{d\Omega}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt},$$

и интеграл площадей (IV.77) запишется так:

$$r^2 \frac{du}{dt} = r^2 \left( \frac{dv}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = k \sqrt{m} \sqrt{p} \quad (\text{IV. 88})$$

или

$$r^2 \left( \frac{dv}{dt} + \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dv} \frac{dv}{dt} \right) = k \sqrt{m} \sqrt{p}, \quad (\text{IV. 89})$$

откуда

$$\frac{dv}{dt} \left( 1 + \frac{d\omega}{dv} + \cos i \frac{d\Omega}{dv} \right) = \frac{k \sqrt{m} \sqrt{p}}{r^2}. \quad (\text{IV. 90})$$

Окончательно получаем соотношение между временем и истинной аномалией в следующем виде:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{k \sqrt{m} \sqrt{p}} r^2 \left( 1 + \frac{d\omega}{dv} + \cos i \frac{d\Omega}{dv} \right) \quad (\text{IV. 91})$$

или

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{d\omega}{dv} + \cos i \frac{d\Omega}{dv}\right). \quad (\text{IV. 92})$$

Подставляя (IV.84) в первую формулу (IV.80), (IV.85) — во вторую формулу (IV.80), (IV.92) — в третью формулу (IV.80), получим новые формулы для преобразования уравнений Лагранжа к аномалиям как независимым переменным

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dM} &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{dM_0}{dM}\right) \frac{dA}{dt}, \\ \frac{dA}{dE} &= \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{a}{r} \sin E \frac{de}{dE} - \frac{a}{r} \frac{dM_0}{dE}\right) \frac{dA}{dt}, \quad (\text{IV. 93}) \\ \frac{dA}{dv} &= \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{d\omega}{dv} + \cos i \frac{d\Omega}{dv}\right) \frac{dA}{dt}. \end{aligned}$$

Если заменить в третьей формуле (IV.93)  $\frac{d\omega}{dv}$  и  $\frac{d\Omega}{dv}$  их выражениями (IV.81), то получим

$$\frac{dA}{dv} = \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[1 + \frac{1}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e}\right] \frac{dA}{dt}. \quad (\text{IV. 94})$$

В тех случаях, когда ограничиваемся вычислением возмущений первого порядка, можно применять более простые формулы перехода (IV.80) и, в частности, для переменной  $v$  пользоваться уравнениями Лагранжа в форме (IV.81).

**2. Долгота в орбите как независимая переменная в уравнениях Лагранжа.** Вместо истинной аномалии можно принять за независимую переменную долготу в орбите  $\omega$ , определяемую формулой

$$\omega = v + \omega + \varpi. \quad (\text{IV. 95})$$

Тогда интеграл площадей (IV.77)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k\sqrt{m}}{r^2} \sqrt{p} = n \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1-e^2} \quad (\text{IV. 96})$$

дает точную зависимость между временем и долготой в орбите. Так как формула (IV.96) аналогична формуле (IV.79), то и уравнения Лагранжа для долготы в орбите аналогичны уравнениям (IV.81)

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dw} &= \frac{2}{n^2 a} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\
 \frac{de}{dw} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{1}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{d\omega}{dw} &= -\frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{di}{dw} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sin i} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dw} &= \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)} \frac{1}{\sin i} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dM_0}{dw} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{n^2 a \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial a}.
 \end{aligned} \right\} \text{(IV. 97)}$$

В отличие от уравнений (IV. 81) эти уравнения имеют совершенно общий характер и пригодны для вычисления возмущений любого порядка.

Угол  $\varpi$  определяется условием

$$\frac{d\varpi}{dw} = \cos i \frac{d\Omega}{dw}, \quad \text{(IV. 98)}$$

причем в начальный момент мы можем принять

$$\varpi_0 = \Omega_0,$$

что определит положение точки отсчета долгот на орбите.

Долгота в орбите употреблялась в качестве независимой переменной многими астрономами, например, Гюльденом (1841—1896), Бренделем (1862—1939), Брауном (1866—1938) и др.

**3. Пертурбационная функция.** Ограничимся в пертурбационной функции, как и раньше (§§ 2 и 3), только членом

$$R = \frac{k^2 m}{r^3} a'^2 J\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta\right), \quad \text{(IV. 99)}$$

который зависит от первой степени сжатия планеты. Так как

$$\sin \delta = \sin i \sin(\nu + \omega),$$

то

$$R = k^2 m \frac{a'^2}{a^3} J\left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right]. \quad (\text{IV. 100})$$

Разобьем выражение (IV. 99) на два

$$R = R_1 + R_2, \quad (\text{IV. 101})$$

где  $R_1$  — вековая часть пертурбационной функции,  $R_2$  — периодическая. Для получения вековой части пертурбационной функции мы должны осреднить по времени (или, что тоже, по средней аномалии) выражение пертурбационной функции  $\bar{R}$ . Используем для этого следующие формулы:

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM = (1 - e^2)^{-3/2}, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2v} = \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2v} = 0. \quad (\text{IV. 102})$$

Тогда

$$R_1 = \bar{R} = k^2 m \frac{a'^2}{a^3} J\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i\right) (1 - e^2)^{-3/2}, \quad (\text{IV. 103})$$

а периодическая часть пертурбационной функции будет иметь следующее выражение:

$$R_2 = R - R_1 = k^2 m \frac{a'^2}{a^3} J\left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i\right) \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^3 (1 - e^2)^{-3/2} \right\} + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right]. \quad (\text{IV. 104})$$

**4. Периодические возмущения.** Введем в качестве независимой переменной истинную аномалию спутника и запишем уравнения Лагранжа в форме (IV. 81). Интегрирование этих уравнений в предположении, что в правых частях элементы орбиты заменены постоянными величинами, дает нам возмущения первого порядка

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a, \\ e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e, \\ \dots \dots \dots \quad (\text{IV. 105})$$

где  $a_0, e_0, \dots$  — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из наблюдений;  $\delta_1 a, \delta_1 e, \dots$  — вековые возмущения спутника и  $\delta_2 a, \delta_2 e, \dots$  — периоди-

ческие возмущения. Отметим, что пертурбационная функция не содержит элемента  $\Omega$ , потому периодические возмущения наклона орбиты могут быть получены по формуле

$$\delta_2 i = \frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1 - e^2) \sin i} \int \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{\partial R_2}{\partial \omega} dv. \quad (\text{IV. 106})$$

Окончательные выражения для возмущений для всех шести элементов имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_2 a &= \frac{a'^2}{a} J \left[ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ \left( \frac{a}{r} \right)^3 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - e^2)^{-3/2} \right\} + \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right], \\ \delta_2 e &= \frac{1 - e^2}{e} \frac{a'^2}{a^2} J \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left\{ \left( \frac{a}{r} \right)^3 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - e^2)^{-3/2} \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right] - \\ &\quad - \frac{\sin^2 i a'^2}{2e ap} J \left\{ \cos 2(v + \omega) + e \cos(v + 2\omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} e \cos(3v + 2\omega) \right\}, \\ \delta_2 \omega &= \frac{a'^2}{p^2} J \left[ \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (v - M + e \sin v) + \right. \\ &\quad + \left( 1 - \frac{3}{2} \sin i \right) \left\{ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin v + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2v + \frac{e}{12} \sin 3v \left. \right\} - \frac{1}{e} \left\{ \frac{1}{4} \sin^2 i + \right. \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} - \frac{15}{16} \sin^2 i \right) e^2 \left. \right\} \sin(v + 2\omega) + \\ &\quad + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin(v - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \times \\ &\quad \times \sin 2(v + \omega) + \frac{1}{e} \left\{ \frac{7}{12} \sin^2 i - \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{19}{8} \sin^2 i \right) e^2 \left. \right\} \sin(3v + 2\omega) + \\ &\quad + \frac{3}{8} \sin^2 i \sin(4v + 2\omega) + \\ &\quad + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin(5v + 2\omega) \left. \right], \end{aligned} \quad (\text{IV. 107})$$



$$\begin{aligned}
\delta_2 i &= \frac{1}{4} \frac{a'^2}{p^2} J \sin 2i \left\{ \cos 2(v + \omega) + \right. \\
&\quad \left. + e \cos(v + 2\omega) + \frac{e}{3} \cos(3v + 2\omega) \right\}, \\
\delta_2 \Omega &= -\frac{a'^2}{p^2} J \cos i \left\{ v - M + e \sin v - \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin 2(v + \omega) - \frac{e}{2} \sin(v + 2\omega) - \\
&\quad \left. - \frac{e}{6} \sin(3v + 2\omega) \right\}, \\
\delta_2 M &= \frac{a'^2}{p^2} J \sqrt{1 - e^2} \left[ -\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \times \right. \\
&\quad \times \left\{ \left(1 - \frac{e^2}{4}\right) \sin v + \frac{e}{2} \sin 2v + \frac{e^2}{12} \sin 3v \right\} + \\
&\quad + \sin^2 i \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{5}{4} e^2\right) \sin(v + 2\omega) - \right. \\
&\quad - \frac{e^2}{16} \sin(v - 2\omega) - \frac{7}{12} \left(1 - \frac{e^2}{28}\right) \times \\
&\quad \times \sin(3v + 2\omega) - \frac{3}{8} e \sin(4v + 2\omega) - \\
&\quad \left. \left. - \frac{e^2}{16} \sin(5v + 2\omega) \right\} \right],
\end{aligned}$$

где  $p = a(1 - e^2)$ .

Выражения (IV. 107) в отличие от (IV. 36) не являются разложениями по степеням эксцентриситета, а являются замкнутыми выражениями как относительно наклона орбиты ( $\sin i$ ), так и относительно эксцентриситета ( $e$ ). Эти формулы были получены японским астрономом Козаи в 1959 г. при разработке им теории движения близких спутников Земли, однако они имеют общий характер и могут быть использованы для изучения движения любых естественных спутников в солнечной системе.

**5. Вековые возмущения.** Подставляя в (IV. 81)  $R = R_1$ , получим после интегрирования вековые возмущения орбиты спутника в виде

$$\left. \begin{aligned}
\delta_1 \Omega &= -\frac{a'^2}{p^2} J n t \cos i, \\
\delta_1 \omega &= \frac{a'^2}{p^2} J n t \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right), \\
\delta_1 M_0 &= \frac{a'^2}{p^2} J n t \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \sqrt{1 - e^2}.
\end{aligned} \right\} \text{(IV. 107*)}$$

Эти формулы идентичны формулам (IV. 47). Система формул (IV. 107)—(IV. 107\*) дает возможность получить возмущенные элементы орбиты, по которым затем вычисляются планетоцентрические координаты спутника.

## § 5. Гравитационное поле Земли

**1. Общее выражение для гравитационного потенциала Земли.** При построении точной теории движения близких спутников Земли нельзя ограничиться приближенным выражением для потенциала Земли в форме (IV. 24).

Гравитационный потенциал Земли на внешнюю точку, находящуюся на расстоянии  $r$  от центра Земли, может быть выражен в общем виде через сферические функции следующим образом:

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_0}{r} \right)^n (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \right\}. \quad (\text{IV. 108})$$

В этой формуле  $fM$  — масса Земли, умноженная на гравитационную постоянную; эта величина имеет размерность  $(\text{см})^3 (\text{сек.})^{-2}$ ;  $a_0$  — экваториальный радиус Земли;  $c_{nm}$  и  $d_{nm}$  — безразмерные числовые коэффициенты, характеризующие гравитационное поле Земли;  $r$ ,  $\psi$ ,  $\lambda$  — сферические координаты точки, в которой определяется потенциал  $U$ . Координатные оси выбраны следующим образом: начало координат  $O$  находится в центре масс Земли, угол  $\psi \leq \frac{\pi}{2}$  отсчитывается от экваториальной плоскости Земли, угол  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$  отсчитывается от начального меридиана.

Сферической функцией степени  $n$  называется тригонометрический многочлен

$$S_{nm}(\psi, \lambda) = c_{n0} P_{n0}(\sin \psi) + \sum_{m=1}^n (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi), \quad (\text{IV. 109})$$

где  $P_{n0}(x)$  — многочлен Лежандра степени  $n$ ,  $P_{nm}(x)$  — присоединенная функция Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ .

Многочлены Лежандра определяются так называемой формулой Родриго

$$P_{n0}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (\text{IV. 110})$$

в частности

$$\left. \begin{aligned} P_{00}(x) &= 1, \\ P_{10}(x) &= x, \\ P_{20}(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \\ P_{30}(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \\ P_{40}(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_{50}(x) &= \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 111})$$

Присоединенная функция Лежандра определяется формулой

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_{n0}(x)}{dx^m}. \quad (\text{IV. 112})$$

Для каждого целого положительного  $n$  существует система  $2n + 1$  линейно независимых сферических функций степени  $n$ . В качестве такой системы можно выбрать функции

$$P_{n0}(\sin \psi), \quad (\text{IV. 113})$$

$$\cos m\lambda P_{nm}(\sin \psi), \quad \sin m\lambda P_{nm}(\sin \psi), \quad (\text{IV. 114})$$

$$\cos n\lambda P_{nn}(\sin \psi), \quad \sin n\lambda P_{nn}(\sin \psi). \quad (\text{IV. 115})$$

Функции (IV. 113) называются зональными сферическими функциями, функции (IV. 114) — тессеральными сферическими функциями и функции (IV. 115) — секториальными сферическими функциями.

**2. Потенциал Земли, симметричной относительно оси вращения.** Если считать распределение масс внутри Земли симметричным относительно оси вращения, то потенциал Земли (IV. 108) принимает более простой вид

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + c_{20} \left(\frac{a_0}{r}\right)^2 P_{20} + c_{30} \left(\frac{a_0}{r}\right)^3 P_{30} + \dots \right\}, \quad (\text{IV. 116})$$

т. е. в разложении остаются только зональные сферические функции. Отметим, что асимметрия северного и

южного полушарий Земли характеризуется нечетными зональными функциями. Коэффициенты  $c_{20}$  — безразмерные параметры, полностью определяемые массой Земли, уровнем поверхности, заключающей эту массу, и угловой скоростью вращения Земли.

Иногда, следуя Джеффрису, вместо  $c_{20}$  и  $c_{40}$  вводят параметры

$$\begin{aligned} J &= -\frac{3}{2} c_{20}, \\ D &= \frac{35}{8} c_{40}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 117})$$

Ограничиваясь в (IV.116) первой степенью сжатия Земли, получим

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + c_{20} \left( \frac{a_0}{r} \right)^2 P_{20} \right\} \quad (\text{IV. 118})$$

или, подставляя выражение (IV.111) для  $P_{20}$ ,

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + c_{20} \left( \frac{a_0}{r} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \psi - 1) \right\}. \quad (\text{IV. 119})$$

Переходя к постоянной Джеффриса, можем написать

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{3} J \left( \frac{a_0}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \psi) \right\}. \quad (\text{IV. 120})$$

Т а б л и ц а 37

**Постоянные, характеризующие гравитационное поле Земли (1961)**

$M = m$ . . . . .	1 : 332490	
$fM = k^2 m$ . . . . .	398600 км <sup>3</sup> сек. <sup>-2</sup>	
$a_0$ . . . . .	6378.15 км	
$\varepsilon$ . . . . .	1 : 298.2 ± 0.2	
$\omega$ . . . . .	$\frac{86164.09}{2} = 729212 \cdot 10^{-10}$	$\frac{\text{рад.}}{\text{сек.}}$
$c_{20}$ . . . . .	-1082.3 · 10 <sup>-6</sup>	
$c_{30}$ . . . . .	+ 2.3 · 10 <sup>-6</sup>	
$c_{40}$ . . . . .	+ 2.1 · 10 <sup>-6</sup>	
$J$ . . . . .	+1623.4 · 10 <sup>-6</sup>	
$D$ . . . . .	+ 9.2 · 10 <sup>-6</sup>	

Заменяя обозначения  $fM$  на  $k^2m$ ,  $a_0$  на  $a'$ ,  $\psi$  на  $\delta$ , получим выражение для потенциала Земли в форме (IV. 24)

$$U = \frac{k^2m}{r} + \frac{1}{3} J \frac{k^2ma'^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \delta). \quad (\text{IV. 121})$$

Параметр  $J$  может быть вычислен по теоретической формуле

$$J = \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a'^3}{k^2m}, \quad (\text{IV. 122})$$

где  $\varepsilon$  — сжатие Земли, а  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

Приведем в заключение некоторые числовые параметры, характеризующие потенциал земного притяжения (табл. 37 и 37\*).

Т а б л и ц а 37 \*

Постоянные, характеризующие гравитационное поле Земли  
(Козан, 1964 г.)

$fM$ . . . . .	398603.2 км <sup>2</sup> сек. <sup>-2</sup>	$J_8$ . . . . .	$-0.270 \cdot 10^{-6}$
$a_0$ . . . . .	6378.165 км	$J_9$ . . . . .	$-0.053 \cdot 10^{-6}$
$J_2$ . . . . .	$1082.645 \cdot 10^{-6}$	$J_{10}$ . . . . .	$-0.054 \cdot 10^{-6}$
$J_3$ . . . . .	$-2.546 \cdot 10^{-6}$	$J_{11}$ . . . . .	$+0.302 \cdot 10^{-6}$
$J_4$ . . . . .	$-1.649 \cdot 10^{-6}$	$J_{12}$ . . . . .	$-0.357 \cdot 10^{-6}$
$J_5$ . . . . .	$-0.210 \cdot 10^{-6}$	$J_{13}$ . . . . .	$-0.114 \cdot 10^{-6}$
$J_6$ . . . . .	$+0.646 \cdot 10^{-6}$	$J_{14}$ . . . . .	$+0.179 \cdot 10^{-6}$
$J_7$ . . . . .	$-0.333 \cdot 10^{-6}$		

Примечание.  $J_2 = -c_{20}$ ,  $J_3 = -c_{30}$ ,  $J_4 = -c_{40}$  . . .

### § 1. Метод Хилла. Первое приближение

**1. Земля—Луна как двойная планета.** Если бы Луна двигалась в одиночестве по гелиоцентрической орбите, теория движения Луны могла быть легко построена обычными планетными методами.

Однако рядом с Луной, на расстоянии всего 0.0026 а. е., находится Земля, которая по массе в 81.30 раза больше Луны и потому существенно возмущает ее движение по гелиоцентрической орбите. Эти возмущения, очевидно, имеют совсем другой характер, чем обычные планетные возмущения, и не могут быть получены методами, пригодными для вычисления планетных возмущений.

С другой стороны, масса самой Луны достаточно велика, чтобы вызвать значительные возмущения в гелиоцентрическом движении Земли. Центр тяжести системы Земля—Луна находится на расстоянии 4672 км от центра Земли.

В этом отношении система Земля—Луна может справедливо рассматриваться как двойная планета.

Для сравнения напомним, что в системе Нептуна и его спутников масса наибольшего спутника (Нереиды) в 770 раз меньше массы Нептуна, а в системе Сатурна масса наибольшего спутника (Титана) в 4030 раз меньше массы планеты. Наконец, масса наибольшего спутника Юпитера (Ганимеда) в 12200 раз меньше массы Юпитера.

**Примечание.** Вместе с тем необходимо помнить, что масса Ганимеда (III спутник Юпитера) в 2.11 раз больше массы Луны, масса Титана — в 1.92 раза, масса Тритона — в 1.8 раза, масса Калисто (IV спутник Юпитера) — в 1.32 раза и масса Ио (I спутник Юпитера) равна 0.99 массы Луны.

Особенностью движения Луны является также и то обстоятельство, что ее орбита расположена целиком вне так называемой сферы притяжения Земли (см. главу VI, § 3), т. е. за пределами той области, где притяжение Земли превышает притяжение Солнца. Действительно, нетрудно рассчитать, что ускорение, сообщаемое Луне Солнцем, в среднем равно

$$w_1 = 0.000296 \text{ а. е./сутки},$$

а ускорение, вызываемое притяжением Земли, равно

$$w_2 = 0.000136 \text{ а. е./сутки}.$$

Таким образом, притяжение Солнца в 2.18 раз больше, чем притяжение Земли.

Современная теория Луны основана на работах выдающегося американского небесного механика Джорджа Хилла (1838—1914).

Мы изложим в настоящей главе метод Хилла в несколько упрощенной форме, следуя кембриджским лекциям английского астронома Джорджа Дарвина (1845—1912), сына великого естествоиспытателя Чарльза Дарвина. При этом мы оставим в стороне теорию планетных возмущений в движении Луны, а также вопрос о вычислении возмущений, вызываемых несферичностью фигуры Земли. Иными словами, мы ограничимся решением лунного варианта задачи трех тел.

Приведем теперь геоцентрические элементы Луны, принятые Брауном (1866—1938) в его таблицах движения Луны (см. также приложение 5)

Эпоха

1900 янв. 0.12 ч. всем. вр.

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 270^\circ 43' 41.64, \\ \eta &= 13^\circ 17' 63.965269, \\ \Omega &= 259^\circ 18' 32.75, \\ e &= 0.054900489, \\ i &= 5^\circ 8' 43''.427, \\ \pi &= 334.329556. \end{aligned}$$

**2. Дифференциальные уравнения движения.** Пусть  $m_0$ ,  $m_1$  и  $m'$  — массы Земли  $E$ , Луны  $M$  и Солнца  $S$  и  $G$  — центр инерции  $E$  и  $M$  (рис. 13). Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  —

прямоугольные координаты  $M$  относительно  $E$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — координаты  $S$ , отнесенные к параллельным осям с началом в  $G$ . Координаты точки  $M$  относительно осей с началом в  $G$ , очевидно, будут

$$\frac{m_0}{m_0 + m_1} x, \quad \frac{m_0}{m_0 + m_1} y, \quad \frac{m_0}{m_0 + m_1} z,$$

а координаты  $E$

$$-\frac{m_1}{m_0 + m_1} x, \quad -\frac{m_1}{m_0 + m_1} y, \quad -\frac{m_1}{m_0 + m_1} z.$$

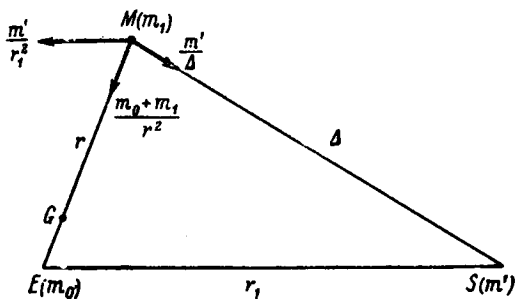


Рис. 13. Компоненты ускорения Луны относительно Земли.

Расстояния  $EM$ ,  $ES$  и  $MS$  обозначим через  $r$ ,  $r_1$ ,  $\Delta$  соответственно.

Предположим, что  $G$  описывает кеплеровский эллипс вокруг  $S$ , так что  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — известные функции времени.

Компоненты ускорения Луны относительно Земли показаны на рис. 13. Имеем

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r_1^2 &= \left(x' + \frac{m_1 x'}{m_0 + m_1}\right)^2 + \left(y' + \frac{m_1 y'}{m_0 + m_1}\right)^2 + \\ &+ \left(z' + \frac{m_1 z'}{m_0 + m_1}\right)^2, \\ \Delta^2 &= \left(x' - \frac{m_0 x'}{m_0 + m_1}\right)^2 + \left(y' - \frac{m_0 y'}{m_0 + m_1}\right)^2 + \\ &+ \left(z' - \frac{m_0 z'}{m_0 + m_1}\right)^2, \end{aligned} \right\} \text{(V. 1)}$$



отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, \\ \frac{m_0 + m_1}{m_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} &= \frac{x' + \frac{m_1 x}{m_0 + m_1}}{r_1}, \\ -\frac{m_0 + m_1}{m_0} \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= \frac{x' - \frac{m_0 x}{m_0 + m_1}}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 2})$$

Направляющие косинусы  $EM$ :  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial z}$ , направляющие косинусы  $ES$ :  $\frac{m_0 + m_1}{m_1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial x}, \frac{\partial r_1}{\partial y}, \frac{\partial r_1}{\partial z} \right)$ , направляющие косинусы  $MS$ :  $-\frac{m_0 + m_1}{m_1} \left( \frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right)$ . Обозначим через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  компоненты ускорения  $M$  относительно осей с началом в  $E$ , тогда

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_0 + m_1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{m'}{\Delta^2} \frac{m_0 + m_1}{m_0} \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{m'}{r_1^2} \frac{m_0 + m_1}{m_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{V. 3})$$

где

$$V = \frac{m_0 + m_1}{r} + \frac{m'}{\Delta} \cdot \frac{m_0 + m_1}{m_1} + \frac{m'}{r_1} \frac{m_0 + m_1}{m_1}.$$

Аналогично

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (\text{V. 4})$$

Пусть  $r'$  — расстояние между  $G$  и  $m'$  и пусть  $H$  — угол  $SGM$ ; тогда

$$\left. \begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \\ r_1^2 &= r'^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} rr' \cos H + \left( \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} \right)^2, \\ \Delta^2 &= r'^2 - \frac{2m_0}{m_0 + m_1} rr' \cos H + \left( \frac{m_0 r}{m_0 + m_1} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 5})$$

Так как  $r$  мало по сравнению с  $r'$ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r'} \left\{ 1 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \cos H + \left( \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \cos H + \left( \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \frac{1}{m_0 \Delta} + \frac{1}{m_1 r_1} &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{1}{r'} + \frac{1}{m_0 + m_1} \frac{r^2}{r'^3} \times \\ &\quad \times \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 6})$$

Отсюда

$$V = \frac{m_0 + m_1}{r} + \frac{m' (m_0 + m_1)^2}{m_0 m_1 r'} + \frac{m' r^2}{r'^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{V. 7})$$

Второй член не включает  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и может быть опущен. Тогда

$$V = \frac{m_0 + m}{r} + \frac{m' r^2}{r'^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right), \quad (\text{V. 8})$$

если отбросить члены с  $\frac{r^3}{r'^4}$ .

Найдем теперь приближенное выражение для  $V$  с учетом тех упрощений, которые могут быть сделаны для реальной системы Земля—Луна—Солнце. В первом приближении  $r' = a'$  и  $GS$  вращается с постоянной угловой скоростью  $n'$ . Другими словами, мы пренебрегаем эксцентриситетом солнечной орбиты, а также тем фактом, что Земля и Луна не находятся в центре инерции (точка  $G$ ) (этот эффект очень мал). Для того чтобы координаты Солнца относительно Земли были почти постоянными, вводим новые оси  $x$ ,  $y$ , вращающиеся с угловой скоростью  $n'$  в плоскости орбиты Солнца вокруг Земли. Ось  $x$  выбирается таким образом, что проходит постоянно через Солнце. Ось  $z$  перпендикулярна плоскости  $xy$ .

Как и раньше, пусть  $x, y, z$  — координаты Луны; координаты Солнца будут приближенно  $a', 0, 0$ . В этом приближении  $r \cos H = x$  и

$$V = \frac{m_0 + m_1}{r} + \frac{3}{2} \frac{m'}{a'^3} x^2 - \frac{1}{2} m' \frac{r^2}{a'^3}. \quad (\text{V. 9})$$

Напишем теперь общее выражение для  $V$  вместо (V. 8) в следующей форме:

$$V = \frac{m_0 + m_1}{r} + \frac{3}{2} \frac{m'}{a'^3} x^2 + \frac{3}{2} m' \left( \frac{r^2 \cos^2 H}{r'^3} - \frac{x^2}{a'^3} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{m'}{a'^3} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \frac{m'}{a'^3} z^2 + \frac{1}{2} m' r^2 \left( \frac{1}{a'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \quad (\text{V. 10})$$

и введем новые обозначения.

Пусть  $\mu$  — среднее синодическое движение Луны. Положим

$$m = \frac{n'}{\mu} = \frac{n'}{n - n'}. \quad (\text{V. 11})$$

Среднее движение Солнца  $n'$  в лунной теории считается известной постоянной, тогда как среднее движение Луны  $n$  (или  $m$ ) — одна из произвольных постоянных интегрирования, которая может быть определена из наблюдений.

В случае Луны  $m$  приблизительно равно  $1/12$ . Эта малая величина, по степеням которой разлагаются возмущения, играет в теории движения Луны роль, аналогичную возмущающей массе  $m'$  в теории планет.

Пренебрегая  $m_0$  и  $m_1$  по сравнению с  $m'$  и полагая постоянную Гаусса равной единице, имеем  $m' = n'^2 a'^3$ , откуда  $\frac{m'}{a'^3} = n'^2 = \mu^2 m^2$ . Обозначим также  $\frac{m_0 + m_1}{\mu^2} = k$ . Тогда мы получим вместо (V. 10)

$$V + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) = \mu^2 \left[ \frac{k}{r} + \frac{1}{2} m (3x^2 - z^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} m^2 \left( \frac{a'^3}{r'^3} r^2 \cos^2 H - x^2 \right) + \frac{1}{2} m^2 r^2 \left( 1 - \frac{a'^3}{r'^3} \right) \right]. \quad (\text{V. 12})$$

Для удобства обозначим

$$\Omega = \frac{3}{2} m^2 \left( \frac{a'^3}{r'^3} r^2 \cos^2 H - x^2 \right) + \frac{1}{2} m^2 r^2 \left( 1 - \frac{a'^3}{r'^3} \right), \quad (\text{V. 13})$$

тогда

$$V + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) = \mu^2 \left[ \frac{k}{r} + \frac{1}{2} m^2 (3x^2 - z^2) + \Omega \right]. \quad (\text{V.14})$$

Уравнения движения относительно системы координат, вращающихся вокруг оси  $z$  с постоянной скоростью  $n'$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} - n'^2 x &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} - n'^2 y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.15})$$

которые дают после подстановки выражения (V.14)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ V + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) \right] = \\ &= \mu^2 \left[ -\frac{kx}{r^3} + 3m^2 x + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ V + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) \right] = \\ &= \mu^2 \left[ -\frac{ky}{r^3} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right], \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ V + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) \right] = \\ &= \mu^2 \left[ -\frac{kz}{r^3} - m^2 z + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.16})$$

Можно положить  $\tau = \mu t$ ; разделив уравнения на  $\mu^2$ , будем рассматривать  $\tau$  как эквивалент времени. Уравнения (V.16) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \frac{kx}{r^3} - 3m^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{kz}{r^3} + m^2 z &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.17})$$

Если умножим эти уравнения соответственно на

$$2 \frac{dx}{d\tau}, 2 \frac{dy}{d\tau}, 2 \frac{dz}{d\tau}$$

и сложим их, то получим

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right\} - 2k \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{r} \right) - 3m^2 \frac{d}{d\tau} (x^2) + \\ + m^2 \frac{d}{d\tau} (z^2) - 2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (\text{V. 18})$$

Положим для краткости

$$v^2 = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2, \quad (\text{V. 19})$$

тогда

$$v^2 = \frac{2k}{r} + 3m^2 x^2 - m^2 z^2 + \\ + 2 \int_0^\tau \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} \right] d\tau + C. \quad (\text{V. 20})$$

Если Солнце движется вокруг Земли с постоянной угловой скоростью  $n'$ , т. е.  $e' = 0$ , ось  $x$  будет всегда проходить через Солнце и, следовательно,

$$x' = r' = a', \quad y' = z' = 0, \\ r \cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'} = x, \quad (\text{V. 21})$$

что дает

$$\frac{a'^3}{r'^3} r^2 \cos^2 H - x^2 = 0. \quad (\text{V. 22})$$

В этом случае  $\Omega$  обращается в нуль, и уравнения (V.17) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \frac{kx}{r^3} - 3m^2x &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{kz}{r^3} + m^2z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 23})$$

Один интеграл этих уравнений хорошо известен, — это интеграл Якоби

$$v^2 = 2 \frac{k}{r} + 3m^2 x^2 - m^2 z^2 + C. \quad (\text{V. 24})$$

**3. Вариационная кривая.** В первом приближении орбита Луны определяется обычно как эллипс — неподвижный или с вращающейся линией апсид. Вращающийся эллипс имеет то преимущество перед неподвижным, что отклонения реального движения от вращающегося эллипса носят почти периодический характер. Вместо того чтобы относить реальную орбиту к эллипсу, Хилл вводит в первом приближении промежуточную орбиту, которая носит название „вариационной кривой“. Посмотрим, как эта орбита получается из дифференциальных уравнений движения.

Мы уже пренебрегли эксцентриситетом солнечной орбиты, сделаем теперь дальнейший шаг и пренебрежем наклоном лунной орбиты к эклиптике. В этом случае  $z$  исчезает, и уравнения (V. 23) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \left( \frac{k}{r^3} - 3m^2 \right) x &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{r^3} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 25})$$

Если траектория тела, движение которого удовлетворяет уравнениям (V. 25), пересекает ось  $x$  под прямым углом, то эта траектория симметрична относительно оси  $x$ . Действительно, если в дифференциальных уравнениях поменять знаки  $y$  и  $\tau$  на обратные, но знак  $x$  оставить без изменения, то уравнения не изменятся.

Аналогичный результат имеет место, если траектория пересекает ось  $y$  под прямым углом, так как если  $x$  и  $\tau$  меняют знак, но знак  $y$  остается без изменений, то уравнения не меняются.

Теперь очевидно, что если тело начинает свое движение из данной точки на оси  $x$  под прямым углом к ней, с различными начальными скоростями, то оно может достичь оси  $y$  и пересечь ее под соответственно разными углами. Если прямой угол лежит где-то между этими углами, то мы можем заключить по принципу непрерывности, что существует некоторая промежуточная

скорость, с которой тело должно пересечь ось  $y$  под прямым углом.

Если тело движется от одной оси к другой, пересекая обе под прямыми углами, ясно, что орбита тела — замкнутая кривая, симметричная относительно обеих осей. Таким образом, указанная кривая представляет частное решение дифференциальных уравнений (V. 25). Это решение называется „вариационной кривой“. Хотя общее решение уравнений (V. 25) включает четыре произвольные постоянные, вариационная кривая имеет только две произвольные постоянные, за которые можно принять расстояние тела от начала координат при пересечении оси  $x$  и момент пересечения  $\tau_0$ . Для простоты мы можем за начало счета времени принять момент пересечения оси  $x$ , т. е. положить  $\tau_0 = 0$ . Так как  $x$  — четная функция  $\tau$ , а  $y$  — нечетная функция  $\tau$ , обе с периодом  $2\pi$ , можно разложить  $x$  и  $y$  в ряды Фурье

$$\begin{aligned} x &= A_0 \cos \tau + A_1 \cos 3\tau + A_2 \cos 5\tau + \dots, \\ y &= B_0 \sin \tau + B_1 \sin 3\tau + B_2 \sin 5\tau + \dots \end{aligned} \quad (\text{V. 26})$$

Когда  $\tau$  кратно  $\pi$ ,  $y = 0$ ; когда  $\tau$  нечетной кратности  $\frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ . Кроме того, в первом случае  $\frac{dx}{d\tau} = 0$  и во втором  $\frac{dy}{d\tau} = 0$ . Эти условия определяют характер вариационной кривой. Необходимо отметить, что члены с четными кратностями отсутствуют в (V. 26). Эти члены должны быть опущены, если  $x$  и  $\frac{dy}{d\tau}$  обращаются в нуль при  $\tau = \frac{\pi}{2}, \dots$ . Мы не ставим перед собой цель подробно следовать анализу Хилла, который определяет характер вариационной кривой с высокой степенью точности. Мы ограничимся грубым приближением, чтобы только проиллюстрировать методику Хилла. Поэтому отбросим все члены с кратностями больше  $3\tau$ . Удобно также несколько изменить обозначения коэффициентов.

Положим

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 + a_{-1}, & A_1 &= a_1, \\ B_0 &= a_0 - a_{-1}, & B_1 &= a_1. \end{aligned} \quad (\text{V. 27})$$

Имеем теперь на один коэффициент меньше, чем раньше, но этого будет достаточно, так как  $A_1$  и  $B_1$  от-

личаются только членами такого порядка, которыми будем пренебрегать. Предположим также, что  $a_1$  и  $a_{-1}$  — малые величины. Тогда

$$\begin{aligned} x &= (a_0 + a_{-1}) \cos \tau + a_1 \cos 3\tau, \\ y &= (a_0 - a_{-1}) \sin \tau + a_1 \sin 3\tau. \end{aligned} \quad (\text{V. 28})$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos 3\tau &= 4 \cos^3 \tau - 3 \cos \tau = \cos \tau (1 - 4 \sin^2 \tau), \\ \sin 3\tau &= -4 \sin^3 \tau + 3 \sin \tau = -\sin \tau (1 - 4 \cos^2 \tau), \end{aligned}$$

то имеем

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cos \tau \left[ 1 + \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} - \frac{4a_1}{a_0} \sin^2 \tau \right], \\ y &= a_0 \sin \tau \left[ 1 - \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} + \frac{4a_1}{a_0} \cos^2 \tau \right]. \end{aligned} \quad (\text{V. 29})$$

Пренебрегая степенями  $a_1$  и  $a_{-1}$  выше первой, получим

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= a_0^2 \left[ 1 + 2 \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} \cos 2\tau \right], \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{a_0^3} \left[ 1 - 3 \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} \cos 2\tau \right] = \\ &= \frac{1}{a_0^3} \left[ 1 - 3 \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} + 6 \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} \sin^2 \tau \right] = \\ &= \frac{1}{a_0^3} \left[ 1 + 3 \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} - 6 \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} \cos^2 \tau \right], \end{aligned} \right\} (\text{V. 30})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{kx}{r^3} &= \frac{k}{a_0^3} \cos \tau \left[ 1 - \frac{2a_1 + 2a_{-1}}{a_0} + \frac{2a_1 + 6a_{-1}}{a_0} \sin^2 \tau \right], \\ \frac{ky}{r^3} &= \frac{k}{a_0^3} \sin \tau \left[ 1 + \frac{2a_1 + 2a_{-1}}{a_0} - \frac{2a_1 + 6a_{-1}}{a_0} \cos^2 \tau \right], \end{aligned} \right\} (\text{V. 31})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= -[(a_0 + a_{-1}) \cos \tau + 9a_1 \cos 3\tau] = \\ &= -\cos \tau [a_0 + 9a_1 + a_{-1} - 36a_1 \sin^2 \tau], \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -[(a_0 - a_{-1}) \sin \tau + 9a_1 \sin 3\tau] = \\ &= -\sin \tau [a_0 - 9a_1 - a_{-1} + 36a_1 \cos^2 \tau]. \end{aligned} \right\} (\text{V. 32})$$

С необходимой точностью имеем

$$\begin{aligned} -2m \frac{dy}{d\tau} &= -2ma_0 \cos \tau, \quad 2m \frac{dx}{d\tau} = -2ma_0 \sin \tau, \\ 3m^2 x &= 3m^2 a_0 \cos \tau. \end{aligned} \quad (\text{V. 33})$$



Подставляя эти результаты в дифференциальные уравнения (V. 25), получим

$$\left. \begin{aligned} & a_0 \cos \tau \left[ -1 - \frac{9a_1 + a_{-1}}{a_0} + \frac{36a_1}{a_0} \times \right. \\ & \times \sin^2 \tau - 2m + \frac{k}{a_0^3} \left( 1 - \frac{2a_1 + 2a_{-1}}{a_0} + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2a_1 + 6a_{-1}}{a_0} \sin^2 \tau \right) - 3m^2 \right] = 0, \\ & a_0 \sin \tau \left[ -1 + \frac{9a_1 + a_{-1}}{a_0} - \frac{36a_1}{a_0} \times \right. \\ & \times \cos^2 \tau - 2m + \frac{k}{a_0^3} \left( 1 + \frac{2a_1 + 2a_{-1}}{a_0} - \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2a_1 + 6a_{-1}}{a_0} \cos^2 \tau \right) \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 34})$$

Приравнявая нулю коэффициенты при  $\cos \tau$ ,  $\cos \tau \sin^2 \tau$ ,  $\sin \tau$ ,  $\sin \tau \cos^2 \tau$ , получим

$$\left. \begin{aligned} & -1 - \frac{9a_1 + a_{-1}}{a_0} - 2m + \\ & \quad + \frac{k}{a_0^3} \left( 1 - \frac{2a_1 + 2a_{-1}}{a_0} \right) - 3m^2 = 0, \\ & -1 + \frac{9a_1 + a_{-1}}{a_0} - 2m + \\ & \quad + \frac{k}{a_0^3} \left( 1 + \frac{2a_1 + 2a_{-1}}{a_0} \right) = 0, \\ & \frac{36a_1}{a_0} + \frac{k}{a_0^3} \left( \frac{2a_1 + 6a_{-1}}{a_0} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 35})$$

Имеем три уравнения для определения  $\frac{k}{a_0^3}$ ,  $\frac{a_1}{a_0}$  и  $\frac{a_{-1}}{a_0}$ . Половина суммы и разность первых двух уравнений дают

$$\left. \begin{aligned} & -1 - 2m - \frac{3}{2} m^2 + \frac{k}{a_0^3} = 0, \\ & \frac{9a_1 + a_{-1}}{a_0} + \frac{2k}{a_0^3} \frac{a_1 + a_{-1}}{a_0} + \frac{3}{2} m^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 36})$$

Отсюда с точностью до  $m^2$

$$\begin{aligned} \frac{k}{a_0^3} &= 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2, \\ \frac{11a_1}{a_0} + \frac{3a_{-1}}{a_0} &= -\frac{3}{2} m^2. \end{aligned} \quad (\text{V. 37})$$

Наконец, из третьего уравнения (V. 35) имеем

$$\frac{19a_1}{a_0} + \frac{3a_{-1}}{a_0} = 0. \quad (\text{V. 38})$$

Вычитая второе уравнение (V. 37) из (V. 38), получим

$$\frac{8a_1}{a_0} = \frac{3}{2} m^2. \quad (\text{V. 39})$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= \frac{3}{16} m^2, & \frac{a_{-1}}{a_0} &= -\frac{19}{16} m^2, \\ \frac{k}{a_0^3} &= 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2. \end{aligned} \quad (\text{V. 40})$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= a_0 \left[ \left( 1 - \frac{19}{16} m^2 \right) \cos \tau + \frac{3}{16} m^2 \cos 3\tau \right], \\ y &= a_0 \left[ \left( 1 + \frac{19}{16} m^2 \right) \sin \tau + \frac{3}{16} m^2 \sin 3\tau \right] \end{aligned} \quad (\text{V. 41})$$

или в форме, более удобной для дальнейшего,

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cos \tau \left[ 1 - m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau \right], \\ y &= a_0 \sin \tau \left[ 1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau \right]. \end{aligned} \quad (\text{V. 42})$$

Это уравнение овала, полуоси которого  $a_0(1 - m^2)$  и  $a_0(1 + m^2)$  направлены вдоль и перпендикулярно к линии, соединяющей Землю и Солнце. Если  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты точки кривой, то

$$\begin{aligned} r^2 &= a_0^2 [1 - 2m^2 \cos 2\tau], \\ r &= a_0 [1 - m^2 \cos 2\tau]. \end{aligned} \quad (\text{V. 43})$$

Также

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \tau \left[ 1 + 2m^2 + \frac{3}{4} m^2 \right] = \\ &= \left( 1 + \frac{11}{4} m^2 \right) \operatorname{tg} \tau. \end{aligned} \quad (\text{V. 44})$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}(\theta - \tau) = \frac{\operatorname{tg} \tau}{1 + \operatorname{tg}^2 \tau} \frac{11}{4} m^2 = \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau, \quad (\text{V. 45})$$

тогда

$$\theta = \tau + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau. \quad (\text{V. 46})$$

Если обозначить через  $a$  среднее расстояние, соответствующее среднему движению  $n$  по невозмущенной орбите, третий закон Кеплера дает (постоянная Гаусса равна единице)

$$n^2 a^3 = m_0 + m_1 = k \mu^2. \quad (\text{V. 47})$$

Но

$$\frac{n}{\mu} = \frac{n - n' + n'}{n - n'} = 1 + m.$$

Отсюда (см. формулу (V. 40))

$$(1 + m)^2 a^3 = k = a_0^3 \left( 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 \right),$$

$$\frac{a_0^3}{a^3} = \frac{1 + 2m + m^2}{1 + 2m + m^2 + \frac{1}{2} m^2}.$$

Окончательно

$$a_0 = a \left( 1 - \frac{1}{6} m^2 \right). \quad (\text{V. 48})$$

Мы получили соотношение между  $a_0$  и невозмущенным средним расстоянием  $a$  (см. также приложение 8).

## § 2. Метод Хилла. Второе приближение

**1. Орбиты, бесконечно близкие к вариационной кривой.** Если положить  $m = 0$ , тем самым пренебрегая солнечными возмущениями, то получим  $x = a_0 \cos \tau$ ,  $y = a_0 \sin \tau$ , т. е. орбита будет круговой. Мы можем поэтому рассматривать вариационную кривую как круговую орбиту, деформированную солнечными возмущениями. Так

как круговая орбита — только специальное решение в задаче двух тел, нельзя ожидать, что вариационная кривая дает нам реальное движение Луны. Действительно, мы знаем, что Луна движется скорее по эллипсу с эксцентриситетом  $1/20$ , чем по кругу или по вариационной кривой. Эта кривая может поэтому служить только приближением к реальной орбите так же, как круг служит приближением к эллипсу. Эллипс с малым эксцентриситетом может рассматриваться, как результат „свободных колебаний“ около круга; точно так же мы можем рассматривать реальное движение Луны, как свободные колебания около вариационной кривой. Таким образом, введем две новые произвольные постоянные, определяющие амплитуду и фазу колебаний, и получим общее решение нашего дифференциального уравнения (V. 25). Процедура совершенно аналогична той, которая используется в динамике для определения малых колебаний около устойчивого положения, т. е. Луна в начальный момент предполагается находящейся вблизи вариационной кривой и ее дальнейшее движение определяется относительно этой кривой. Вначале ограничиваются только первыми степенями малых величин — приближение, которое соответствует первым степеням эксцентриситета в эллиптической теории, а если это необходимо, то могут быть сделаны дальнейшие приближения.

Предположим теперь, что  $P(x, y)$  — координаты точки на вариационной кривой, которую нашли, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям движения, и что  $P'(x + \delta x, y + \delta y)$  — координаты Луны на ее реальной орбите. Тогда, так как  $x, y$  удовлетворяют уравнения (V. 25), очевидно, что уравнения, которым удовлетворяют  $\delta x, \delta y$ , можно записать так:

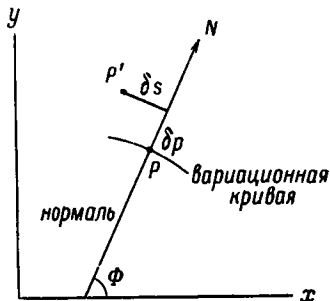


Рис. 14. Орбита бесконечно близкая к вариационной кривой.

Предположим теперь, что  $P(x, y)$  — координаты точки на вариационной кривой, которую нашли, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям движения, и что  $P'(x + \delta x, y + \delta y)$  — координаты Луны на ее реальной орбите. Тогда, так как  $x, y$  удовлетворяют уравнения (V. 25), очевидно, что уравнения, которым удовлетворяют  $\delta x, \delta y$ , можно записать так:

Предположим теперь, что  $P(x, y)$  — координаты точки на вариационной кривой, которую нашли, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям движения, и что  $P'(x + \delta x, y + \delta y)$  — координаты Луны на ее реальной орбите. Тогда, так как  $x, y$  удовлетворяют уравнения (V. 25), очевидно, что уравнения, которым удовлетворяют  $\delta x, \delta y$ , можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta x - 2m \frac{d}{d\tau} \delta y + k\delta \left( \frac{x}{r^3} \right) - 3m^2 \delta x &= 0, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} \delta y + 2m \frac{d}{d\tau} \delta x + k\delta \left( \frac{y}{r^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 49})$$

Однако исходить непосредственно из этих уравнений неудобно. Поэтому заменим  $\delta x$  и  $\delta y$  нормальным и тангенциальным смещениями  $\delta p$  и  $\delta s$  (рис. 14).

Пусть  $\Phi$  — наклон наружной нормали вариационной кривой к оси  $x$ . Тогда

$$\begin{aligned}\delta x &= \delta p \cos \Phi - \delta s \sin \Phi, \\ \delta y &= \delta p \sin \Phi + \delta s \cos \Phi.\end{aligned}\tag{V.50}$$

Умножаем первое из дифференциальных уравнений (V.49) на  $\cos \Phi$  и второе на  $\sin \Phi$  и складываем; а затем умножаем первое из уравнений (V.49) на  $\sin \Phi$  и второе на  $\cos \Phi$  и вычитаем. Получим

$$\left. \begin{aligned}\cos \Phi \frac{d^2 \delta x}{d\tau^2} + \sin \Phi \frac{d^2 \delta y}{d\tau^2} - 2m \left[ \cos \Phi \frac{d \delta y}{d\tau} - \right. \\ \left. - \sin \Phi \frac{d \delta x}{d\tau} \right] + k \cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \\ + k \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) - 3m^2 \cos \Phi \delta x = 0, \\ -\sin \Phi \frac{d^2 \delta x}{d\tau^2} + \cos \Phi \frac{d^2 \delta y}{d\tau^2} + 2m \left[ \sin \Phi \frac{d \delta y}{d\tau} + \right. \\ \left. + \cos \Phi \frac{d \delta x}{d\tau} \right] - k \sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \\ \left. + k \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) + 3m^2 \sin \Phi \delta x = 0.\right\}\tag{V.51}$$

Из (V.50) имеем

$$\delta p = \delta x \cos \Phi + \delta y \sin \Phi, \quad \delta s = -\delta x \sin \Phi + \delta y \cos \Phi.\tag{V.52}$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned}\frac{d \delta p}{d\tau} &= \cos \Phi \frac{d \delta x}{d\tau} + \sin \Phi \frac{d \delta y}{d\tau} + \\ &+ (-\delta x \sin \Phi + \delta y \cos \Phi) \frac{d \Phi}{d\tau}, \\ \frac{d \delta s}{d\tau} &= -\sin \Phi \frac{d \delta x}{d\tau} + \cos \Phi \frac{d \delta y}{d\tau} - \\ &- (\delta x \cos \Phi + \delta y \sin \Phi) \frac{d \Phi}{d\tau}.\end{aligned}\right\}\tag{V.53}$$

Два выражения в квадратных скобках, которые входят в уравнения (V.51), могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \cos \Phi \frac{d\delta y}{d\tau} - \sin \Phi \frac{d\delta x}{d\tau} &= \frac{d\delta s}{d\tau} + \delta p \frac{d\Phi}{d\tau}, \\ \sin \Phi \frac{d\delta y}{d\tau} + \cos \Phi \frac{d\delta x}{d\tau} &= \frac{d\delta p}{d\tau} - \delta s \frac{d\Phi}{d\tau}. \end{aligned} \quad (\text{V. 54})$$

Если мы продифференцируем эти выражения, то получим первую группу членов в уравнениях (V. 51).

Меняя порядок уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} \cos \Phi \frac{d^2\delta x}{d\tau^2} + \sin \Phi \frac{d^2\delta y}{d\tau^2} &= \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} - \frac{d\delta s}{d\tau} \frac{d\Phi}{d\tau} - \\ - \delta s \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} - \left( \cos \Phi \frac{d\delta y}{d\tau} - \sin \Phi \frac{d\delta x}{d\tau} \right) \frac{d\Phi}{d\tau} &= \\ = \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} - 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \frac{d\Phi}{d\tau} - \delta p \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 - \delta s \frac{d^2\Phi}{d\tau^2}, \\ -\sin \Phi \frac{d^2\delta x}{d\tau^2} + \cos \Phi \frac{d^2\delta y}{d\tau^2} &= \frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + \frac{d\delta p}{d\tau} + \\ + \frac{d\Phi}{d\tau} + \delta p \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \left( \sin \Phi \frac{d\delta y}{d\tau} + \right. & \\ \left. + \cos \Phi \frac{d\delta x}{d\tau} \right) \frac{d\Phi}{d\tau} &= \frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + 2 \frac{d\delta p}{d\tau} \frac{d\Phi}{d\tau} - \\ - \delta s \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + \delta p \frac{d^2\Phi}{d\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 55})$$

Подставляя (V. 55) в (V. 51), получим уравнения в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} - \delta p \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + 2m \frac{d\Phi}{d\tau} \right] - 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \times \\ \times \left( \frac{d\Phi}{d\tau} + m \right) - \delta s \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + k \cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \\ + k \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) - 3m^2 \cos \Phi \delta x = 0, \\ \frac{d^2\delta s}{d\tau^2} - \delta s \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + 2m \frac{d\Phi}{d\tau} \right] + 2 \frac{d\delta p}{d\tau} \times \\ \times \left( \frac{d\Phi}{d\tau} + m \right) + \delta p \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} - k \sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \\ + k \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) + 3m^2 \sin \Phi \delta x = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 56})$$

Напишем теперь интеграл Якоби

$$v^2 = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = \frac{2k}{r} + 3m^2 x^2 + C. \quad (\text{V. 57})$$

Варьируя, получим

$$\frac{dx}{d\tau} \frac{d\delta x}{d\tau} + \frac{dy}{d\tau} \frac{d\delta y}{d\tau} = -\frac{k}{r^2} \delta r + 3m^2 x \delta x. \quad (\text{V.58})$$

Вариация  $\delta C = 0$ , так как мы будем предполагать, что постоянная  $C$  имеет для смежных орбит то же значение, что и для исходной вариационной кривой.

Теперь

$$\frac{dx}{d\tau} = -v \sin \Phi, \quad \frac{dy}{d\tau} = v \cos \Phi, \quad (\text{V.59})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta x}{d\tau} &= \cos \Phi \frac{d\delta p}{d\tau} - \delta s \cos \Phi \frac{d\Phi}{d\tau} - \\ &\quad - \sin \Phi \frac{d\delta s}{d\tau} - \sin \Phi \delta p \frac{d\Phi}{d\tau}, \\ \frac{d\delta y}{d\tau} &= \sin \Phi \frac{d\delta p}{d\tau} - \delta s \sin \Phi \frac{d\Phi}{d\tau} + \\ &\quad + \cos \Phi \frac{d\delta s}{d\tau} + \cos \Phi \delta p \frac{d\Phi}{d\tau}. \end{aligned} \right\} (\text{V.60})$$

Поэтому

$$\frac{dx}{d\tau} \frac{d\delta x}{d\tau} + \frac{dy}{d\tau} \frac{d\delta y}{d\tau} = v \left( \frac{d\delta s}{d\tau} + \delta p \frac{d\Phi}{d\tau} \right).$$

Итак,

$$\begin{aligned} -\frac{k\delta r}{r^2} &= -\frac{k}{r^3} (x\delta x + y\delta y) = -\frac{kx}{r^3} (\delta p \cos \Phi - \\ &\quad - \delta s \sin \Phi) - \frac{ky}{r^3} (\delta p \sin \Phi + \delta s \cos \Phi) = \\ &= -\frac{k}{r^3} [\delta p (x \cos \Phi + y \sin \Phi) + \\ &\quad + \delta s (-x \sin \Phi + y \cos \Phi)]. \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

Тогда, оставляя член  $3m^2 x \delta x$  в его первоначальной форме, получим вариацию интеграла Якоби в форме

$$\begin{aligned} v \left( \frac{d\delta s}{d\tau} + \delta p \frac{d\Phi}{d\tau} \right) &= -\frac{k}{r^3} [\delta p (x \cos \Phi + y \sin \Phi) + \\ &\quad + \delta s (-x \sin \Phi + y \cos \Phi)] + 3m^2 x \delta x. \end{aligned} \quad (\text{V.62})$$

Прежде чем мы сможем решить дифференциальные уравнения (V.56) для  $\delta p$  и  $\delta s$ , необходимо выразить все

остальные переменные, входящие в эти уравнения, через  $\tau$  с помощью уравнений, полученных в § 1, раздел 3.

**2. Преобразование уравнений (V. 56).** Наша задача заключается теперь в том, чтобы преобразовать дифференциальные уравнения (V. 56) таким образом, чтобы туда входили только переменные  $\delta p$ ,  $\delta s$  и  $\tau$ . Тогда мы сможем решить эти уравнения относительно  $\delta p$  и  $\delta s$  в функции  $\tau$ . Имеем

$$r\delta r = x\delta x + y\delta y = (x \cos \Phi + y \sin \Phi) \delta p + \\ + (-x \sin \Phi + y \cos \Phi) \delta s,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} (\delta x \cos \Phi + \\ + \delta y \sin \Phi) - \frac{3}{r^5} (x \cos \Phi + y \sin \Phi) r \delta r &= \\ = \frac{\delta p}{r^3} - \frac{3}{r^5} [(x^2 \cos^2 \Phi + y^2 \sin^2 \Phi + \\ + 2xy \sin \Phi \cos \Phi) \delta p + (-x^2 \sin \Phi \cos \Phi + \\ + xy \cos^2 \Phi - xy \sin^2 \Phi + y^2 \sin \Phi \cos \Phi) \delta s] &= \\ = \frac{\delta p}{r^3} - \frac{3}{r^5} \left[ \left\{ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \cos 2\Phi + \right. \right. \\ + xy \sin 2\Phi \left. \right\} \delta p + \left. \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 - y^2) \sin 2\Phi + \right. \right. \\ + xy \cos 2\Phi \left. \right\} \delta s \right] &= \frac{\delta p}{r^3} \left[ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \times \right. \\ \times \cos 2\Phi - \frac{3xy}{r^2} \sin 2\Phi \left. \right] - \frac{3\delta s}{r^3} \times \\ \times \left[ \frac{xy}{r^2} \cos 2\Phi - \frac{1}{2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \sin 2\Phi \right]. \end{aligned} \quad (\text{V. 63})$$

Аналогично

$$\begin{aligned} -\sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) &= \\ = \frac{1}{r^3} (-\delta x \sin \Phi + \delta y \cos \Phi) - \frac{3}{r^5} (-x \sin \Phi + y \cos \Phi) r \delta r &= \\ = \frac{\delta s}{r^3} - \frac{3}{r^5} [(-x^2 \sin \Phi \cos \Phi - xy \sin^2 \Phi + xy \cos^2 \Phi + \\ + y^2 \sin \Phi \cos \Phi) \delta p + (x^2 \sin^2 \Phi + y^2 \cos^2 \Phi - \\ - 2xy \sin \Phi \cos \Phi) \delta s] &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta s}{r^3} - \frac{3}{r^5} \left[ \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 - y^2) \sin 2\Phi + xy \cos 2\Phi \right\} \delta p + \right. \\
&+ \left. \left\{ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \cos 2\Phi - xy \sin 2\Phi \right\} \delta s \right] = \\
&= -\frac{3\delta p}{r^3} \left[ \frac{xy}{r^2} \cos 2\Phi - \frac{1}{2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \sin 2\Phi \right] + \\
&+ \frac{\delta s}{r^3} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \cos 2\Phi + \frac{3xy}{r^2} \sin 2\Phi \right]. \quad (\text{V. 64})
\end{aligned}$$

Члены  $3m^2 \delta x \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi}$  в (V.56) будут рассмотрены в дальнейшем (стр. 235).

Следующий шаг будет заключаться в подстановке в дифференциальные уравнения (V.56) значений  $x$ ,  $y$  и  $\Phi$ , которые соответствуют невозмущенной орбите. Для простоты опустим линейный множитель  $a_0$ . Он может быть легко восстановлен в случае надобности.

Из уравнений (V.41) и (V.42) нам известно, что

$$\begin{aligned}
x &= \cos \tau \left( 1 - \frac{19}{16} m^2 \right) + \frac{3}{16} m^2 \cos 3\tau = \\
&= \cos \tau \left( 1 - m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau \right), \\
y &= \sin \tau \left( 1 + \frac{19}{16} m^2 \right) + \frac{3}{16} m^2 \sin 3\tau = \\
&= \sin \tau \left( 1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau \right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= -\sin \tau \left( 1 - \frac{7}{4} m^2 + \frac{9}{4} m^2 \cos^2 \tau \right) = \\
&= -\sin \tau \left( 1 + \frac{1}{2} m^2 - \frac{9}{4} m^2 \sin^2 \tau \right), \\
\frac{dy}{d\tau} &= \cos \tau \left( 1 + \frac{7}{4} m^2 - \frac{9}{4} m^2 \sin^2 \tau \right) = \\
&= \cos \tau \left( 1 - \frac{1}{2} m^2 + \frac{9}{4} m^2 \cos^2 \tau \right),
\end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 65})$$

откуда

$$v^2 = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = \sin^2 \tau \left( 1 + m^2 - \frac{9}{2} m^2 \sin^2 \tau \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos^2 \tau \left( 1 - m^2 + \frac{9}{2} m^2 \cos^2 \tau \right) = 1 - m^2 \cos 2\tau + \\
 & + \frac{9}{2} m^2 \cos 2\tau = 1 + \frac{7}{2} m^2 \cos 2\tau = 1 + \frac{7}{2} m^2 - \\
 & - 7m^2 \sin^2 \tau = 1 - \frac{7}{2} m^2 + 7m^2 \cos^2 \tau. \quad (V. 66)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} & = 1 + \frac{7}{4} m^2 - \frac{7}{2} m^2 \cos^2 \tau = 1 - \frac{7}{4} m^2 + \\
 & + \frac{7}{2} m^2 \sin^2 \tau = 1 - \frac{7}{4} m^2 \cos 2\tau. \quad (V. 67)
 \end{aligned}$$

Теперь

$$\sin \Phi = -\frac{1}{v} \frac{dx}{d\tau}, \quad \cos \Phi = \frac{1}{v} \frac{dy}{d\tau},$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned}
 \sin \Phi & = \sin \tau \left( 1 + \frac{1}{2} m^2 - \frac{9}{4} m^2 \sin^2 \tau - \frac{7}{4} m^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{7}{2} m^2 \sin^2 \tau \right) = \sin \tau \left( 1 - \frac{5}{4} m^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 \tau \right) = \sin \tau \left( 1 - \frac{5}{4} m^2 \cos^2 \tau \right), \\
 \cos \Phi & = \cos \tau \left( 1 - \frac{1}{2} m^2 + \frac{9}{4} m^2 \cos^2 \tau + \frac{7}{4} m^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{7}{2} m^2 \cos^2 \tau \right) = \cos \tau \left( 1 + \frac{5}{4} m^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{5}{4} m^2 \cos^2 \tau \right) = \cos \tau \left( 1 + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 \tau \right),
 \end{aligned} \right\} (V. 68)$$

$$\begin{aligned}
 \sin 2\Phi & = \sin 2\tau \left( 1 - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right), \\
 \cos 2\Phi & = \cos 2\tau + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 2\tau,
 \end{aligned} \quad (V. 69)$$

$$\begin{aligned}
 \cos \Phi \frac{d\Phi}{d\tau} & = \cos \tau \left( 1 - \frac{5}{4} m^2 + \frac{15}{4} m^2 \sin^2 \tau \right), \\
 \sin \Phi \frac{d\Phi}{d\tau} & = -\sin \tau \left( 1 + \frac{5}{4} m^2 - \frac{15}{4} m^2 \cos^2 \tau \right).
 \end{aligned} \quad (V. 70)$$

Возводя в квадрат и суммируя, получим

$$\left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 = \cos^2 \tau \left( 1 - \frac{5}{2} m^2 + \frac{15}{2} m^2 \sin^2 \tau \right) +$$

$$+ \sin^2 \tau \left( 1 + \frac{5}{2} m^2 - \frac{15}{2} m^2 \cos^2 \tau \right) = 1 - \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau,$$

откуда

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = 1 - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau. \quad (\text{V. 70}^*)$$

Дифференцируя опять, получим

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = \frac{5}{2} m^2 \sin 2\tau. \quad (\text{V. 71})$$

Теперь мы можем преобразовать дифференциальные уравнения (V. 56) так, чтобы в новые уравнения входили только переменные  $\delta p$ ,  $\delta s$  и  $\tau$ . Уравнения (V. 56) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} - \delta p \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + 2m \frac{d\Phi}{d\tau} \right] - \\ & - 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \left( \frac{d\Phi}{d\tau} + m \right) - \delta s \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = \\ & = \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} + \delta p \left[ -1 + \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau - 2m \right] - \\ & - 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \\ & - \frac{5}{2} m^2 \sin 2\tau \delta s, \\ & \frac{d^2\delta s}{d\tau^2} - \delta s \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + 2m \frac{d\Phi}{d\tau} \right] + \\ & + 2 \frac{d\delta p}{d\tau} \left( \frac{d\Phi}{d\tau} + m \right) + \delta p \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = \frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + \\ & + \delta s \left[ -1 + \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau - 2m \right] + \\ & + 2 \frac{d\delta p}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) + \\ & + \frac{5}{2} m^2 \sin 2\tau \delta p. \end{aligned} \right\} (\text{V. 72})$$

Теперь мы должны заменить отдельные члены, включающие  $x$  и  $y$ , в выражениях (V. 62), (V. 63), (V. 64)

$$\begin{aligned}
 x \cos \Phi + y \sin \Phi &= \cos^2 \tau \left( 1 - m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 \tau \right) + \sin^2 \tau \left( 1 + m^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau - \frac{5}{4} m^2 \cos^2 \tau \right) = \\
 &= 1 - m^2 \cos 2\tau, \\
 -x \sin \Phi + y \cos \Phi &= -\sin \tau \cos \tau \left( 1 - m^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau - \frac{5}{4} m^2 \cos^2 \tau \right) + \\
 &\quad + \sin \tau \cos \tau \left( 1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 \tau \right) = 2m^2 \sin 2\tau, \\
 r^2 = x^2 + y^2 &= 1 - 2m^2 \cos 2\tau,
 \end{aligned}
 \tag{V. 73}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 &= \cos^2 \tau \left( 1 - 2m^2 - \frac{3}{2} m^2 \sin^2 \tau \right) - \\
 &\quad - \sin^2 \tau \left( 1 + 2m^2 + \frac{3}{2} m^2 \cos^2 \tau \right) = \\
 &= \cos 2\tau - 2m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 2\tau,
 \end{aligned}
 \tag{V. 74}$$

$$\begin{aligned}
 xy &= \frac{1}{2} \sin 2\tau \left( 1 + \frac{3}{4} m^2 \cos 2\tau \right), \\
 (x^2 - y^2) \cos 2\Phi &= \cos^2 2\tau - 2m^2 \cos 2\tau - \\
 &\quad - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 2\tau \cos 2\tau + \\
 &\quad + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 2\tau \cos 2\tau = \\
 &= \cos 2\tau \left( \cos 2\tau - 2m^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} m^2 \sin^2 2\tau \right),
 \end{aligned}
 \tag{V. 75}$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 - y^2) \sin 2\Phi &= \sin 2\tau \left( \cos 2\tau - 2m^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 2\tau - \frac{5}{4} m^2 \cos^2 2\tau \right) = \\
 &= \sin 2\tau \left( \cos 2\tau - \frac{11}{4} m^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} m^2 \cos^2 2\tau \right),
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 xy \cos 2\Phi &= \frac{1}{2} \sin 2\tau \left( \cos 2\tau + \frac{5}{4} m^2 \sin^2 2\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 2\tau \right) = \frac{1}{2} \sin 2\tau \left( \cos 2\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{4} m^2 - \frac{1}{2} m^2 \cos^2 2\tau \right), \\
 xy \sin 2\Phi &= \frac{1}{2} \sin^2 2\tau \left( 1 - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4} m^2 \cos 2\tau \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sin^2 2\tau \left( 1 - \frac{1}{2} m^2 \cos 2\tau \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 76})$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \cos 2\Phi + xy \sin 2\Phi &= \frac{1}{2} \cos^2 2\tau - m^2 \cos 2\tau + \\
 + \frac{1}{4} m^2 \sin^2 2\tau \cos 2\tau + \frac{1}{2} \sin^2 2\tau - \frac{1}{4} m^2 \sin^2 2\tau \cos 2\tau &= \\
 = \frac{1}{2} (1 - 2m^2 \cos 2\tau) = \frac{1}{2} r^2. & \quad (\text{V. 77})
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \cos 2\Phi \mp \frac{3xy}{r^2} \sin 2\Phi &= \\
 = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = -2 \text{ или } +1. & \quad (\text{V. 78})
 \end{aligned}$$

Это коэффициенты при  $\frac{\delta p}{r^3}$  в выражении (V. 63) для

$$\cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right)$$

и при  $\frac{\delta s}{r^3}$  в выражении (V. 64) для

$$-\sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right).$$

Далее имеем

$$-\frac{1}{2} (x^2 - y^2) \sin 2\Phi + xy \cos 2\Phi =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sin 2\tau \left( \cos 2\tau - \frac{11}{4} m^2 - \frac{1}{2} m^2 \cos^2 2\tau \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin 2\tau \left( \cos 2\tau + \frac{5}{4} m^2 - \frac{1}{2} m^2 \cos^2 2\tau \right) = \\
&= 2m^2 \sin 2\tau. \tag{V. 79}
\end{aligned}$$

Так как с точностью до членов нулевого порядка  $r^2 = 1$ , получим

$$3 \left( \frac{xy}{r^2} \cos 2\Phi - \frac{1}{2} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \sin 2\Phi \right) = 6m^2 \sin 2\tau. \tag{V. 80}$$

Это коэффициент при  $-\frac{\delta s}{r^3}$  в

$$+\cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right)$$

и коэффициент при  $-\frac{\delta p}{r^3}$  в

$$-\sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) &= -2 \frac{\delta p}{r^3} - \frac{6m^2}{r^3} \delta s \sin 2\tau = \\
&= -2\delta p (1 + 3m^2 \cos 2\tau) - 6m^2 \delta s \sin 2\tau - \sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + \\
&+ \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) = -\frac{\delta p}{r^3} 6m^2 \sin 2\tau + \frac{\delta s}{r^3} = \\
&= -6m^2 \delta p \sin 2\tau + \delta s (1 + 3m^2 \cos 2\tau). \tag{V. 81}
\end{aligned}$$

Эти два выражения умножаются на  $k$  в дифференциальных уравнениях (V. 56). Другие члены, которые входят в дифференциальные уравнения:  $-3m^2 \cos \Phi \delta x$  и  $+3m^2 \sin \Phi \delta x$ .

Ограничиваясь членами второго порядка,

$$\left. \begin{aligned}
3m^2 \delta x \cos \Phi &= 3m^2 (\delta p \cos \tau - \delta s \sin \tau) \cos \tau = \\
&= \frac{3}{2} m^2 \delta p (1 + \cos 2\tau) - \frac{3}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau, \\
3m^2 \delta x \sin \Phi &= 3m^2 (\delta p \cos \tau - \delta s \sin \tau) \sin \tau = \\
&= \frac{3}{2} m^2 \delta p \sin 2\tau - \frac{3}{2} m^2 \delta s (1 - \cos 2\tau).
\end{aligned} \right\} \tag{V. 82}$$

Так как

$$k = 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} & k \cos \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + k \sin \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) - 3m^2 \delta x \cos \Phi = \\ & = -2\delta p \left( 1 + 3m^2 \cos 2\tau + 2m + \frac{3}{2} m^2 \right) - 6m^2 \delta s \sin 2\tau - \\ & - \frac{3}{2} m^2 \delta p (1 + \cos 2\tau) + \frac{3}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau = \\ & = -2\delta p \left[ 1 + 2m + \frac{9}{4} m^2 + \frac{15}{4} m^2 \cos 2\tau \right] - \\ & - \frac{9}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau, \end{aligned} \quad (\text{V. 83})$$

$$\begin{aligned} & -k \sin \Phi \delta \left( \frac{x}{r^3} \right) + k \cos \Phi \delta \left( \frac{y}{r^3} \right) + 3m^2 \delta x \sin \Phi = \\ & = -6m^2 \delta p \sin 2\tau + \delta s \left( 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 \cos 2\tau \right) + \\ & + \frac{3}{2} m^2 \delta p \sin 2\tau - \delta s \left( \frac{3}{2} m^2 - \frac{3}{2} m^2 \cos 2\tau \right) = \\ & = -\frac{9}{2} m^2 \delta p \sin 2\tau + \delta s \left( 1 + 2m + \frac{9}{2} m^2 \cos 2\tau \right). \end{aligned} \quad (\text{V. 84})$$

Поэтому первое уравнение (V.56) преобразуется в

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \delta p}{d\tau^2} - \delta p \left[ 1 + 2m - \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau \right] - \\ & - 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \frac{5}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau - \\ & - 2\delta p \left[ 1 + 2m + \frac{9}{4} m^2 + \frac{15}{4} m^2 \cos 2\tau \right] - \\ & - \frac{9}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau = 0 \end{aligned} \quad (\text{V. 85})$$

ИЛИ

$$\frac{d^2\delta p}{d\tau^2} - \delta p \left[ 3 + 6m + \frac{9}{2} m^2 + 5m^2 \cos 2\tau \right] - \\ - 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - 7m^2 \delta s \sin 2\tau = 0. \quad (\text{V. 86})$$

Это первое из уравнений (V. 56) после преобразования. Второе уравнение (V. 56) преобразуется так:

$$\frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + \delta s \left( -1 - 2m + \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau \right) + \\ + 2 \frac{d\delta p}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) + \frac{5}{2} m^2 \delta p \sin 2\tau - \\ - \frac{9}{2} m^2 \delta p \sin 2\tau + \delta s \left( 1 + 2m + \frac{9}{2} m^2 \cos 2\tau \right) = 0. \quad (\text{V. 87})$$

Поэтому

$$\frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + 7m^2 \delta s \cos 2\tau + 2 \frac{d\delta p}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \\ - 2m^2 \delta p \sin 2\tau = 0. \quad (\text{V. 88})$$

Это второе уравнение после преобразования. Интеграл Якоби (см. (V. 62)) дает

$$\frac{d\delta s}{d\tau} + \delta p \frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{3m^2 x \delta x}{v} - \frac{k}{vr^3} \left[ \delta p (x \cos \Phi + y \sin \Phi) + \right. \\ \left. + \delta s (-x \sin \Phi + y \cos \Phi) \right] = 3m^2 \cos \tau (\delta p \cos \tau - \delta s \sin \tau) - \\ - \left( 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 - \frac{7}{4} m^2 \cos 2\tau + 3m^2 \cos 2\tau \right) \times \\ \times [\delta p (1 - m^2 \cos 2\tau) + 2m^2 \delta s \sin 2\tau] = \\ = \frac{3m^2}{2} \delta p (1 + \cos 2\tau) - \frac{3m^2}{2} \delta s \sin 2\tau - \delta p \left( 1 + 2m + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} m^2 + \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau - m^2 \cos 2\tau \right) - 2m^2 \delta s \sin 2\tau = \\ = -\delta p \left( 1 + 2m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \frac{7}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau. \quad (\text{V. 89})$$



Подставляя для  $\frac{d\Phi}{d\tau}$  его значение (V. 70\*), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d\delta s}{d\tau} &= -\delta p \left( 1 + 2m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \\
 &\quad - \delta p \left( 1 - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \frac{7}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau = \\
 &= -\delta p \left( 2 + 2m - \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau \right) - \\
 &\quad - \frac{7}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau, \\
 2 \frac{d\delta s}{d\tau} &= -4\delta p \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \\
 &\quad - 7m^2 \delta s \sin 2\tau, \\
 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) &= \\
 &= -4\delta p \left( 1 + 2m + m^2 - \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau \right) - \\
 &\quad - 7m^2 \delta s \sin 2\tau, \\
 2 \frac{d\delta s}{d\tau} \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) + 7m^2 \delta s \sin 2\tau &= \\
 &= -4\delta p \left( 1 + 2m + m^2 - \frac{5}{2} m^2 \cos 2\tau \right).
 \end{aligned}
 \tag{V. 90}$$

Последнее выражение из (V. 90) может быть использовано для исключения  $\frac{d\delta s}{d\tau}$  из (V. 86). Подставляя, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} + \delta p \left[ -3 - 6m - \frac{9}{2} m^2 - 5m^2 \cos 2\tau + 4 + \right. \\
 \left. + 8m + 4m^2 - 10m^2 \cos 2\tau \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{V. 91}$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\delta p}{d\tau^2} + \delta p \left[ 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - 15m^2 \cos 2\tau \right] &= 0, \\
 \frac{d\delta s}{d\tau} &= -2\delta p \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) - \frac{7}{2} m^2 \delta s \sin 2\tau.
 \end{aligned}
 \tag{V. 92}$$

Если продифференцируем второе уравнение (V. 92), которое, как мы помним, было выведено из интеграла

Якоби и поэтому включает наше второе дифференциальное уравнение (V. 88), получим

$$\frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + 7m^2\delta s \cos 2\tau + \frac{7}{2} m^2 \sin 2\tau \frac{d\delta s}{d\tau} + \\ + 2 \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) \frac{d\delta p}{d\tau} + 5m^2\delta p \sin 2\tau = 0$$

и, исключая  $\frac{d\delta s}{d\tau}$ ,

$$\frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + 7m^2\delta s \cos 2\tau - 7m^2\delta p \sin 2\tau + \\ + 2 \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) \frac{d\delta p}{d\tau} + 5m^2\delta p \sin 2\tau = 0 \quad (\text{V. 93})$$

или

$$\frac{d^2\delta s}{d\tau^2} + 7m^2\delta s \cos 2\tau + 2 \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) \frac{d\delta p}{d\tau} - \\ - 2m^2\delta p \sin 2\tau = 0. \quad (\text{V. 94})$$

Это и есть, как и можно было ожидать, наше второе дифференциальное уравнение, которое было найдено выше (см. (V. 88)). Поэтому мы можем ограничиться в дальнейшем только уравнениями (V. 92).

**3. Уравнение Хилла.** Дифференциальное уравнение для  $\delta p$  принадлежит к типу дифференциальных уравнений, имеющих большое значение в математической физике. Можно записать это уравнение в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (q_0 + 2q_1 \cos 2t + 2q_2 \cos 4t + \dots) x = 0, \quad (\text{V. 95})$$

где  $q_0, q_1, q_2, \dots$  — постоянные, зависящие от возрастающих степеней малой величины  $m$ . Уравнение (V. 95) называется уравнением Хилла. Требуется найти такое решение этого уравнения, чтобы  $x$  оставалось малым для всех значений  $t$ . Применим для решения метод последовательных приближений.

Пренебрегая  $q_1, q_2, \dots$ , получим, как первое приближение,

$$x = A \cos(t \sqrt{q_0} + \epsilon). \quad (\text{V. 96})$$

Подставляя это значение для  $x$  в член, который умножается на  $q_1$  и пренебрегая  $q_2, q_3, \dots$ , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q_0x + 2Aq_1 \cos 2t \cos (t\sqrt{q_0} + \epsilon) \quad (\text{V. 97})$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q_0x + Aq_1 \{ \cos [t(\sqrt{q_0} + 2) + \epsilon] + \cos [t(\sqrt{q_0} - 2) - \epsilon] \} = 0. \quad \text{[(V. 98)]}$$

Решая это уравнение обычными способами, получим второе приближение

$$x = A \left\{ \cos [t\sqrt{q_0} + \epsilon] + \frac{q_1 \cos [t(\sqrt{q_0} + 2) + \epsilon]}{4(\sqrt{q_0} + 1)} - \frac{q_1 \cos [t\sqrt{q_0} - 2) + \epsilon]}{4(\sqrt{q_0} - 1)} \right\}. \quad (\text{V. 99})$$

Опять используя это решение, получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + q_0x + Aq_1 \{ \cos [t(\sqrt{q_0} + 2) + \epsilon] + \cos [t(\sqrt{q_0} - 2) - \epsilon] \} + \\ + \frac{Aq_1^2}{4(\sqrt{q_0} + 1)} \{ \cos [t(\sqrt{q_0} + 4) + \epsilon] + \cos (t\sqrt{q_0} + \epsilon) \} - \frac{Aq_1^2}{4(\sqrt{q_0} - 1)} \times \\ \times \{ \cos (t\sqrt{q_0} + \epsilon) + \cos [t(\sqrt{q_0} - 4) + \epsilon] \} + \\ + Aq_2 \{ \cos [t(\sqrt{q_0} + 4) + \epsilon] + \cos [t(\sqrt{q_0} - 4) + \epsilon] \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 100})$$

Это уравнение включает члены вида  $B \cos(t\sqrt{q_0} + \epsilon)$ ; поэтому после интегрирования в решении появятся члены вида

$$Ct \sin (t\sqrt{q_0} + \epsilon).$$

Но эти члены уже не являются малыми при возрастании  $t$ .

Будем поэтому искать решение в другой форме. Предположение, на котором базировались последовательные

приближения, состояло в том, что период главного члена  $x$  зависел только от  $q_0$  и не зависел от  $q_1, q_2, \dots$ . Появление вековых членов заставляет нас пересмотреть это предположение и принять за первое приближение

$$x = A \cos(ct \sqrt{q_0} + \varepsilon), \quad (\text{V. 101})$$

где  $c$  приблизительно равно единице и будет определено таким образом, чтобы, если это возможно, избежать появления вековых членов. Однако удобнее написать первое приближение в форме

$$x = A \cos(ct + \varepsilon), \quad (\text{V. 102})$$

где  $c$  приблизительно равно  $\sqrt{q_0}$ .

Подставляя это значение для  $x$  в член, включающий  $q_1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + q_0x + Aq_1 \{ \cos[(c+2)t + \varepsilon] + \\ + \cos[(c-2)t + \varepsilon] \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 103})$$

Второе приближение имеет вид

$$\begin{aligned} x = A \cos(ct + \varepsilon) + \frac{Aq_1}{(c+2)^2 - q_0} \cos[(c+2)t + \varepsilon] + \\ + \frac{Aq_1}{(c-2)^2 - q_0} \cos[(c-2)t + \varepsilon]. \end{aligned} \quad (\text{V. 104})$$

Переходя к следующему приближению с этим значением  $x$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + q_0x + Aq_1 \{ \cos[(c+2)t + \varepsilon] + \\ + \cos[(c-2)t + \varepsilon] \} + \frac{Aq_1^2}{(c+2)^2 - q_0} \times \\ \times \{ \cos[(c+4)t + \varepsilon] + \cos(ct + \varepsilon) \} + \\ + \frac{Aq_1^2}{(c-2)^2 - q_0} \{ \cos(ct + \varepsilon) + \\ + \cos[(c-4)t + \varepsilon] \} + \\ + Aq_2 \{ \cos[(c+4)t + \varepsilon] + \\ + \cos[(c-4)t + \varepsilon] \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 105})$$

Мы можем теперь перейти к дальнейшим приближениям. Член вида  $\cos(ct + \varepsilon)$  вызывает появление в решении членов вида  $\cos[(c \pm 2)t + \varepsilon]$  и  $\cos[(c \pm 4)t + \varepsilon]$ , а члены вида  $\cos[(c \pm 2)t + \varepsilon]$  и  $\cos[(c \pm 4)t + \varepsilon]$  вызовут появление в решении новых членов вида  $\cos(ct + \varepsilon)$ , т. е. членов точно такой же формы, как начальный принятый нами член.

Поэтому, чтобы получить окончательный результат, проще всего прямо начать с предположения, что решение имеет форму ряда, содержащего члены вида (V. 104).

Различные авторы нашли удобным введение вместо тригонометрических экспоненциальных функций. Следуя их примеру, будем поэтому писать дифференциальное уравнение (V. 95) в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x \sum_{-\infty}^{+\infty} q_i E^{2it\sqrt{-1}} = 0, \quad (\text{V. 106})$$

где  $q_{-i} = q_i$  и искать решение в форме

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_j E^{(c+2j)t\sqrt{-1}}, \quad (\text{V. 107})$$

где коэффициент  $A$  и величина  $c$  будут определены приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $E^{t\sqrt{-1}}$ . Подставляя выражение (V. 107) для  $x$  в дифференциальное уравнение (V. 106), получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{-\infty}^{+\infty} (c+2j)^2 A_j E^{(c+2j)t\sqrt{-1}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} A_j E^{(c+2j)t\sqrt{-1}} \times \\ & \times \sum_{-\infty}^{+\infty} q_i E^{2it\sqrt{-1}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 108})$$

Приравнивая нулю коэффициент при  $E^{(c+2j)t\sqrt{-1}}$ ,

$$\begin{aligned} & -(c+2j)^2 A_j + A_j q_0 + A_{j-1} q_1 + A_{j-2} q_2 + A_{j-3} q_3 + \dots \\ & + A_{j+1} q_{-1} + A_{j+2} q_{-2} + A_{j+3} q_{-3} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 109})$$

Поэтому последовательность уравнений такова:

$$\begin{aligned}
 & \dots + [q_0 - (c-4)^2] A_{-2} + q_{-1} A_{-1} + q_{-2} A_0 + \\
 & + q_{-3} A_1 + q_{-4} A_2 + \dots = 0, \\
 & \dots + q_1 A_{-2} + [q_0 - (c-2)^2] A_{-1} + q_{-1} A_0 + \\
 & + q_{-2} A_1 + q_{-3} A_2 + \dots = 0, \\
 & \dots + q_2 A_{-2} + q_1 A_{-1} + [q_0 - c^2] A_0 + q_{-1} A_1 + \\
 & + q_{-2} A_2 + \dots = 0, \\
 & \dots + q_3 A_{-2} + q_2 A_{-1} + q_1 A_0 + [q_0 - (c+2)^2] \times \\
 & \times A_1 + q_{-1} A_2 + \dots = 0, \\
 & \dots + q_4 A_{-2} + q_3 A_{-1} + q_2 A_0 + q_1 A_1 + \\
 & + [q_0 - (c+4)^2] A_2 + \dots = 0, \\
 & \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{aligned}} \right\} \text{(V. 110)}$$

Очевидно, что мы получили бесконечный определитель для нахождения  $c$ . Если возьмем только три колонки и три столбца в этом определителе, то

$$\begin{aligned}
 [q_0 - (c-2)^2] [q_0 - c^2] [q_0 - (c+2)^2] - q_1^2 [q_0 - (c-2)^2] - \\
 - q_1^2 [q_0 - (c+2)^2] - q_2^2 (q_0 - c^2) + 2q_1^2 q_2 = 0 \quad \text{(V. 111)}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 [(q_0 - c^2 - 4)^2 - 16c^2] [q_0 - c^2] - \\
 - 2q_1^2 (q_0 - c^2 - 4) - q_2^2 (q_0 - c^2) + 2q_1^2 q_2 = 0. \quad \text{(V. 112)}
 \end{aligned}$$

Если отбросим  $(q_0 - c^2)^3$ , которое мало, то

$$\begin{aligned}
 [-8(q_0 - c^2) + 16 + 16(q_0 - c^2) - 16q_0] \times \\
 \times [q_0 - c^2] - (q_0 - c^2) [2q_1^2 + q_2^2] + 8q_1^2 + \\
 + 2q_1^2 q_2 = 0, \\
 8(q_0 - c^2)^2 + (q_0 - c^2) (16 - 16q_0 - 2q_1^2 - q_2^2) + \\
 + 8q_1^2 + 2q_1^2 q_2 = 0, \\
 (q_0 - c^2)^2 + 2(q_0 - c^2) \left(1 - q_0 - \frac{1}{8} q_1^2 - \frac{1}{16} q_2^2\right) + \\
 + q_1^2 + \frac{1}{4} q_1^2 q_2 = 0.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dots \\ \dots \\ \dots \end{aligned}} \right\} \text{(V. 113)}$$

Так как  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  малы по сравнению с  $1 - q_0$  и  $q_2$  мало по

сравнению с единицей, имеем как грубое приближение

$$(c^2 - q_0)^2 + 2(q_0 - 1)(c^2 - q_0) = -q_1^2. \quad (\text{V. 114})$$

откуда

$$\begin{aligned} c^2 - q_0 &= -(q_0 - 1) \pm \sqrt{(q_0 - 1)^2 - q_1^2}, \\ c^2 &= 1 \pm \sqrt{(q_0 - 1)^2 - q_1^2}. \end{aligned} \quad (\text{V. 115})$$

Так как  $c^2 = q_0$ , если  $q_1 = 0$ , то берем только положительный знак и получаем окончательно

$$c = \sqrt{1 + \sqrt{(q_0 - 1)^2 - q_1^2}}. \quad (\text{V. 116})$$

Это значение для  $c$  удивительно близко к точному значению.

**4. Интегрирование уравнений для  $\delta p$  и  $\delta v$ .** Вернемся теперь к теории движения Луны и рассмотрим решение нашего дифференциального уравнения (V. 92) для  $\delta p$ . Положим

$$\delta p = A_{-1} \cos[(c - 2)\tau + \varepsilon] + A_0 \cos(ct + \varepsilon) + A_1 \cos[(c + 2)\tau + \varepsilon]. \quad (\text{V. 117})$$

Подставляя в (V. 92), получаем

$$\begin{aligned} &A_{-1} \left[ \left( 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - 15m^2 \cos 2\tau \right) - (c - 2)^2 \right] \times \\ &\times \cos[(c + 2)\tau + \varepsilon] + A_0 \left[ \left( 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - 15m^2 \cos 2\tau \right) - c^2 \right] \cos(ct + \varepsilon) + \\ &+ A_1 \left[ \left( 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - 15m^2 \cos 2\tau \right) - (c + 2)^2 \right] \times \\ &\times \cos[(c + 2)\tau + \varepsilon] = 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 118})$$

Затем приравниваем нулю коэффициенты при различных косинусах. Первый косинус  $\cos(ct + \varepsilon)$  дает

$$\begin{aligned} &-\frac{15}{2} m^2 A_{-1} + A_0 \left( 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - c^2 \right) - \\ &-\frac{15}{2} m^2 A_0 = 0, \end{aligned} \quad (\text{V. 119})$$

второй косинус  $\cos[(c-2)\tau + \epsilon]$

$$A_{-1} \left[ 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - (c-2)^2 \right] - \frac{15}{2} m^2 A_0 = 0, \quad (\text{V. 120})$$

третий косинус  $\cos[(c+2)\tau + \epsilon]$

$$-\frac{15}{2} m^2 A_0 + A_1 \left[ 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - (c+2)^2 \right] = 0. \quad (\text{V. 121})$$

Если отбросим члены с  $m^2$ , уравнение (V. 119) дает

$$c^2 = 1 + 2m, \quad (\text{V. 122})$$

откуда

$$c = 1 + m, \quad c - 2 = -(1 - m), \quad c + 2 = 3 + m. \quad (\text{V. 123})$$

Уравнения (V. 120)—(V. 121) сводятся к следующим:

$$2mA_{-1} = 0, \quad A_1(-8 + 2m) = 0, \quad (\text{V. 124})$$

отсюда следует, что при  $A_{-1}$  по крайней мере порядка  $m$  и  $A_1$  — по крайней мере порядка  $m^2$ . Так как мы пренебрегаем степенями выше  $m^2$ , то уравнение (V. 129) сводится к

$$A_0 \left( 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - c^2 \right) = 0, \quad (\text{V. 125})$$

так что

$$c^2 = 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 \quad (\text{V. 126})$$

или

$$c = 1 + m - \frac{3}{4} m^2,$$

отсюда

$$\begin{aligned} (c-2)^2 &= \left( 1 - m + \frac{3}{4} m^2 \right)^2 = 1 - 2m + \frac{5}{2} m^2, \\ 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 - (c-2)^2 &= 4m - 3m^2. \end{aligned} \quad (\text{V. 127})$$

Поэтому уравнение (V. 120) принимает вид

$$A_{-1} (4m - 3m^2) = \frac{15}{2} m^2 A_0. \quad (\text{V. 128})$$



Так как  $A_{-1}$  порядка  $m$ , то член  $-3m^2 A_{-1}$  порядка  $m^3$  повтому может быть отброшен. Отсюда

$$4mA_{-1} = \frac{15}{2} m^2 A_0 \quad (\text{V. 129})$$

или

$$A_{-1} = \frac{15}{8} mA_0.$$

Таким образом мы можем получить  $A_{-1}$  только с точностью до членов первого порядка. Уравнение (V. 121) принимает вид

$$-\frac{15}{2} m^2 A_0 + A_1 [1 - 9] = 0 \quad (\text{V. 130})$$

или

$$A_1 = -\frac{15}{16} m^2 A_0. \quad (\text{V. 131})$$

Как мы уже видели, можно получить  $A_{-1}$  только с точностью до членов первого порядка; повтому бесполезно сохранять члены более высокого порядка в  $A_1$ . Итак, наше решение окончательно имеет вид

$$A_{-1} = \frac{15}{8} mA_0, \quad A_1 = 0,$$

отсюда

$$\delta p = A_0 \left\{ \cos(ct + \varepsilon) + \frac{15}{8} m \cos[(c - 2)\tau + \varepsilon] \right\}. \quad (\text{V. 132})$$

Изменим несколько наши обозначения. Обозначим  $A_0 = -a_0 e$ . Тогда

$$\delta p = -a_0 e \cos(ct + \varepsilon) - \frac{15}{8} ma_0 e \cos[(c - 2)\tau + \varepsilon], \quad (\text{V. 133})$$

где

$$c = 1 + m - \frac{3}{4} m^2.$$

Хилл нашел для  $c$  следующее числовое решение:

$$c = 1.07158 \ 32774 \ 16012,$$

которое соответствует принятому значению параметра  $m$

$$m = 0.08084 \ 89338 \ 0813.$$

Переходим к интегрированию второго уравнения (V.92). С точностью до первых степеней малых величин оно имеет вид

$$\frac{d\delta s}{d\tau} = -2(1+m)\delta p = 2(1+m)a_0 e \cos(ct + \varepsilon) + \frac{15}{4} m a_0 e \cos[(c-2)\tau + \varepsilon]. \quad (\text{V. 134})$$

Интегрируя и замечая, что  $c=1+m$ , так что  $c-2=-(1-m)$ , получим

$$\delta s = 2a_0 e \sin(c\tau + \varepsilon) - \frac{15}{4} m a_0 e \sin[(c-2)\tau + \varepsilon]. \quad (\text{V. 135})$$

Полагаем постоянную интегрирования равной нулю, так как при  $e=0$  движение происходит по вариационной кривой.

Чтобы понять физический смысл нашего результата, рассмотрим решение при  $m=0$ , т. е. случай когда отсутствуют солнечные возмущения. Тогда

$$\delta p = -a_0 e \cos(c\tau + \varepsilon), \quad \delta s = 2a_0 e \sin(c\tau + \varepsilon). \quad (\text{V. 136})$$

На невозмущенной орбите  $x = a_0 \cos \tau$ ,  $y = a_0 \sin \tau$ , так что  $\Phi = \tau$  и

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta p \cos \Phi - \delta s \sin \Phi, \\ \delta y &= \delta p \sin \Phi + \delta s \cos \Phi, \end{aligned} \quad (\text{V. 137})$$

$$\begin{aligned} \delta x &= -a_0 e \cos(c\tau + \varepsilon) \cos \tau - 2a_0 e \sin(c\tau + \varepsilon) \sin \tau, \\ \delta y &= -a_0 e \cos(c\tau + \varepsilon) \sin \tau + 2a_0 e \sin(c\tau + \varepsilon) \cos \tau. \end{aligned} \quad (\text{V. 138})$$

Поэтому, полагая  $X = x + \delta x$ ,  $Y = y + \delta y$ ,  $X = R \cos q$ ,  $Y = R \sin q$ , получим

$$\begin{aligned} X &= a_0 [\cos \tau - e \cos(c\tau + \varepsilon) \cos \tau - \\ &\quad - 2e \sin(c\tau + \varepsilon) \sin \tau], \\ Y &= a_0 [\sin \tau - e \cos(c\tau + \varepsilon) \sin \tau + \\ &\quad + 2e \sin(c\tau + \varepsilon) \cos \tau]. \end{aligned} \quad (\text{V. 139})$$

Поэтому

$$R^2 = a_0^2 [1 - 2e \cos(c\tau + \varepsilon)]$$

или

$$R = a_0 [1 - e \cos(c\tau + \varepsilon)] = \frac{a_0}{1 + e \cos(c\tau + \varepsilon)} =$$

$$= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} = \frac{a}{1+e \cos M}. \quad (\text{V. 140})$$

Далее имеем

$$\cos q = \cos \tau - 2e \sin(c\tau + \varepsilon) \sin \tau,$$

$$\sin q = \sin \tau + 2e \sin(c\tau + \varepsilon) \cos \tau,$$

поэтому

$$\sin(q - \tau) = 2e \sin(c\tau + \varepsilon),$$

что дает

$$q = \tau + 2e \sin(c\tau + \varepsilon). \quad (\text{V. 141})$$

Уравнения (V. 140) для  $R$  и (V. 141) для  $q$  имеют в первом приближении такую же форму, как радиус-вектор и истинная долгота в невозмущенном эллиптическом движении. Таким образом, видим, что если пренебречь солнечными возмущениями, полагая  $m=0$ , то  $e$  может быть отождествлено с эксцентриситетом и  $c\tau + \varepsilon$  — со средней аномалией.

Возвращаясь к нашему решению и опуская опять для простоты множитель  $a_0$ , получим из (V. 133) и (V. 135)

$$\begin{aligned} \delta p &= -\frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \varepsilon] - e \cos(c\tau + \varepsilon), \\ \delta s &= -\frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \varepsilon] + 2e \sin(c\tau + \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{V. 142})$$

Так как  $\cos \Phi = \cos \tau$  и  $\sin \Phi = \sin \tau$  с точностью до первых порядков малых величин и

$$\delta x = \delta p \cos \Phi - \delta s \sin \Phi, \quad \delta y = \delta p \sin \Phi + \delta s \cos \Phi,$$

то

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= -\frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \varepsilon] \cos \tau - \\ &\quad - e \cos(c\tau + \varepsilon) \cos \tau + \\ &\quad + \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \varepsilon] \sin \tau - \\ &\quad - 2e \sin(c\tau + \varepsilon) \sin \tau, \\ \delta y &= -\frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \varepsilon] \sin \tau - \\ &\quad - e \cos(c\tau + \varepsilon) \sin \tau - \\ &\quad - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \varepsilon] \cos \tau + \\ &\quad + 2e \sin(c\tau + \varepsilon) \cos \tau. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 143})$$

Пусть теперь  $X = x + \delta x$  и  $Y = y + \delta y$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} X &= \cos \tau \left[ 1 + m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{8} m e \cos \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - e \cos (c\tau + \varepsilon) \right] + \\ &\quad + \sin \tau \left[ \frac{15}{4} m e \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - \right. \\ &\quad \left. - 2e \sin (c\tau + \varepsilon) \right], \\ Y &= \sin \tau \left[ 1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{8} m e \cos \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - e \cos (c\tau + \varepsilon) \right] - \\ &\quad - \cos \tau \left[ \frac{15}{4} m e \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - \right. \\ &\quad \left. - 2e \sin (c\tau + \varepsilon) \right]. \end{aligned} \right\} \text{(V. 144)}$$

Для  $R^2 = X^2 + Y^2$  получим с той же степенью точности

$$\begin{aligned} R^2 &= \cos^2 \tau \left[ 1 - 2m^2 - \frac{3}{2} m^2 \sin^2 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{4} m e \cos \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - 2e \cos (c\tau + \varepsilon) \right] + \\ &\quad + \sin^2 \tau \left[ 1 + 2m^2 + \frac{3}{2} m^2 \cos^2 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{4} m e \cos \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - 2e \cos (c\tau + \varepsilon) \right] + \\ &\quad + \sin 2\tau \left[ \frac{15}{4} m e \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - 2e \sin (c\tau + \varepsilon) \right] - \\ &\quad - \sin 2\tau \left[ \frac{15}{4} m e \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - 2e \sin (c\tau + \varepsilon) \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - 2m^2 \cos 2\tau - \frac{15}{4} m e \cos \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - \\ &\quad - 2e \cos (c\tau + \varepsilon). \end{aligned} \quad \text{(V. 145)}$$

Отсюда, восстанавливая множитель  $a_0$ , который был опущен для краткости,

$$R = a_0 \left[ 1 - e \cos (c\tau + \varepsilon) - \frac{15}{8} m e \cos \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - \right.$$

$$-m^2 \cos 2\tau]. \quad (\text{V. 146})$$

Это выражение дает нам радиус-вектор Луны. Остается найти долготу Луны.

Умножая выражения для  $X$  и  $Y$  на  $\frac{1}{R}$ , т. е. на

$$1 + e \cos (c\tau + \varepsilon) + \frac{15}{8} me \cos [(c-2)\tau + \varepsilon] + m^2 \cos 2\tau$$

и помня, что

$$m^2 \cos 2\tau = m^2 - 2m^2 \sin^2 \tau = 2m^2 \cos^2 \tau - m^2,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \cos q &= \cos \tau \left[ 1 - \frac{11}{4} m^2 \sin^2 \tau \right] + \\ &+ \sin \tau \left[ \frac{15}{4} me \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - \right. \\ &\left. - 2e \sin (c\tau + \varepsilon) \right], \\ \sin q &= \sin \tau \left[ 1 + \frac{11}{4} m^2 \cos^2 \tau \right] - \\ &- \cos \tau \left[ \frac{15}{4} me \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} - \right. \\ &\left. - 2e \sin (c\tau + \varepsilon) \right], \end{aligned} \right\} (\text{V. 147})$$

откуда

$$\sin (q - \tau) = \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau - \frac{15}{4} me \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} + \\ + 2e \sin (c\tau + \varepsilon)$$

или с принятой степенью точности

$$q = \tau + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau - \frac{15}{4} me \sin \{(c-2)\tau + \varepsilon\} + \\ + 2e \sin (c\tau + \varepsilon). \quad (\text{V. 148})$$

Преобразуем теперь эти результаты к обычным обозначениям.

Пусть  $L$  и  $v$  — средняя и истинная долгота Луны,  $L'$  — средняя долгота Солнца. Тогда  $q$  — истинная долгота Солнца относительно движущихся осей. Имеем

$$v = q + L'. \quad (\text{V. 149})$$

Итак,

$$\begin{aligned}\tau + L' &= (n - n')t + n't = L, \\ \tau &= L - L'.\end{aligned}\tag{V. 150}$$

Мы видели, что  $c\tau + \varepsilon$  — средняя аномалия Луны, или  $L - \pi$ , поэтому

$$(c - 2)\tau + \varepsilon = L - \pi - 2(L - L') = -(L + \pi - 2L').$$

Подставляя эти значения в выражения (V. 146) для  $R$  и (V. 148) для  $q$ , получим, замечая, что  $a_0 = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2\right)$ ,

$$\left. \begin{aligned}R &= a \left[ 1 - \frac{1}{6}m^2 - e \cos(L - \pi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{8}me \cos(L - 2L' + \pi) - m^2 \cos 2(L - L') \right], \\ v &= L + 2e \sin(L - \pi) + \\ &\quad + \frac{15}{4}me \sin(L - 2L' + \pi) + \frac{11}{8}m^2 \sin 2(L - L').\end{aligned}\right\} \tag{V. 151}$$

На практике обычно табулируют не разложение самого радиуса-вектора, а синус паралакса Луны  $p$

$$\sin p = \frac{\rho_0}{r}, \tag{V. 152}$$

где  $\rho_0$  — экваториальный радиус Земли, а  $\frac{1}{r}$  с принятой нами степенью точности имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{1}{6}m^2 + e \cos(L - \pi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8}me \cos(L - 2L' + \pi) + m^2 \cos 2(L - L') \right].\end{aligned}\tag{V. 153}$$

Следующие ряды дают представление о величине наиболее значительных возмущений в движении Луны:

$$\left. \begin{aligned}v &= L + 377' \sin(L - \pi) + 76' \sin(L - 2L' + \pi) + \\ &\quad + 39' \sin 2(L - L'), \\ p &= 3422'' + 187'' \cos(L - \pi) + 34'' \cos(L - \\ &\quad - 2L' + \pi) + 28'' \cos 2(L - L').\end{aligned}\right\} \tag{V. 154}$$

Члены с аргументом  $L - \pi$  называются уравнением центра. Члены с аргументом  $L - 2L' + \pi$  получили название эвекции. Наконец, члены с аргументом  $2(L - L')$  называются вариацией.

Эти члены были найдены эмпирически еще задолго до создания гравитационных теорий движения Луны. Гиппарх (II в. до н. э.) открыл уравнение центра, Птоломей (II в. н. э.) — эвекцию и Тихо Браге (1546—1604) около 1580 г. обнаружил вариацию в движении Луны.

**5. Введение третьей координаты.** Полагая по-прежнему  $\Omega = 0$ , рассмотрим дифференциальное уравнение (V. 23) для

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{kz}{r^3} + m^2z = 0. \quad (\text{V. 155})$$

Из (V. 40):  $\frac{k}{\sigma_0^3} = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2$ ; и из второго уравнения (V. 43):  $\frac{\alpha_0^3}{r^3} = 1 + 3m^2 \cos 2\tau$ . Поэтому уравнение (V. 155) можно записать так:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z \left( 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 + 3m^2 \cos 2\tau \right) = 0. \quad (\text{V. 156})$$

Имеем опять уравнение типа Хилла. Предположим, что

$$z = B_{-1} \cos \{(g - 2)\tau + \zeta\} + B_0 \cos (g\tau + \zeta) + B_1 \cos \{(g + 2)\tau + \zeta\}. \quad (\text{V. 157})$$

Подставляя, получим

$$\begin{aligned} & B_{-1} \left[ -(g - 2)^2 + 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 + \right. \\ & \left. + 3m^2 \cos 2\tau \right] \cos [(g - 2)\tau + \zeta] + \\ & + B_0 \left[ -g^2 + 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 + \right. \\ & \left. + 3m^2 \cos 2\tau \right] \cos (g\tau + \zeta) + \\ & + B_1 \left[ -(g + 2)^2 + 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 + \right. \\ & \left. + 3m^2 \cos 2\tau \right] \cos [(g + 2)\tau + \zeta] = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты при  $\cos(g\tau + \zeta)$ ,  $\cos[(g-2)\tau + \zeta]$ ,  $\cos[(g+2)\tau + \zeta]$  дают соответственно

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} m^2 B_{-1} + B_0 \left[ -g^2 + 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 \right] + \frac{3}{2} m^2 B_1 &= 0, \\ B_{-1} \left[ -(g-2)^2 + 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 \right] + \frac{3}{2} m^2 B_0 &= 0, \quad (\text{V. 158}) \\ \frac{3}{2} m^2 B_0 + B_1 \left[ -(g+2)^2 + 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

В первом приближении отбросим члены с  $m^2$ . Тогда первое из этих уравнений даст  $g^2 = 1 + 2m$  и  $g = 1 + m$ . Третье уравнение показывает, что отношение  $\frac{B_1}{B_0}$  имеет порядок  $m^2$ . Но множитель  $m$  может быть сокращен во втором уравнении, показывая, что  $\frac{B_{-1}}{B_0}$  порядка  $m$ . Поэтому  $B_1$  можно опустить. Рассматривая члены с  $m^2$ , получим теперь из первого уравнения (V.158)

$$g^2 = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2,$$

поэтому

$$g = 1 + m + \frac{5}{4} m^2 - \frac{1}{2} m^2 = 1 + m + \frac{3}{4} m^2. \quad (\text{V. 159})$$

Пренебрегая членами с  $m^2$ ,

$$(g-2)^2 = (1-m)^2 = 1 - 2m. \quad (\text{V. 160})$$

Второе уравнение (V.158) дает

$$B_{-1} = -\frac{3}{8} m B_0.$$

Решение (V.157) принимает вид

$$z = B_0 \left[ \cos(g\tau + \zeta) - \frac{3}{8} m \cos\{(g-2)\tau + \zeta\} \right]. \quad (\text{V. 161})$$

Интерпретируем это уравнение геометрически. Для этого отбросим солнечные возмущения, получим

$$z = B_0 \cos(g\tau + \zeta). \quad (\text{V. 162})$$

Рассмотрим теперь движение Луны в плоскости, наклоненной под углом  $i$  к эклиптике. Пусть  $\Omega$  озна-



чает долготу лунного узла,  $L$  — среднюю долготу Луны,  $\beta$  — широту Луны. Прямоугольный сферический треугольник  $NMQ$  дает (рис. 15)

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} i \sin (L - \Omega),$$

поэтому

$$z = r \operatorname{tg} \beta = r \operatorname{tg} i \sin (L - \Omega). \quad (\text{V. 163})$$

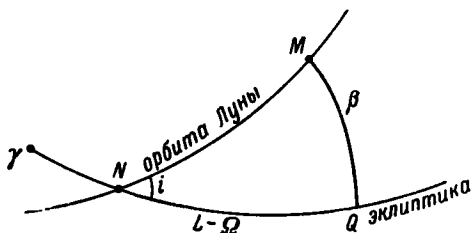


Рис. 15. Проекция орбиты Луны на небесную сферу.

Так как мы имеем дело только с первым приближением, можем положить  $r = a_0$  и получим, сравнивая (V. 163) с (V. 162),

$$\begin{aligned} B_0 &= a_0 \operatorname{tg} i, \\ g\tau + \zeta &= L - \Omega - \frac{1}{2} \pi. \end{aligned} \quad (\text{V. 164})$$

Дифференцируя это уравнение по времени, находим

$$g(n - n') = n - \frac{d\Omega}{dt},$$

откуда

$$\frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} = 1 - \frac{g(n - n')}{n} = 1 - \frac{g}{1 + m} = -\frac{3}{4} m^2. \quad (\text{V. 165})$$

Таким образом, мы нашли, что узел лунной орбиты имеет обратное движение.

Имеем

$$\begin{aligned} gr + \zeta &= L - \Omega - \frac{1}{2} \pi, \\ (g - 2)\tau + \zeta &= L - \Omega - \frac{1}{2} \pi - 2(L - L') = \\ &= -(L - 2L' + \Omega) - \frac{1}{2} \pi, \end{aligned}$$

Если обозначим  $s = \operatorname{tg} \beta$ ,  $k = \operatorname{tg} i$ , то получим окончательно из (V. 161)

$$s = k \sin(L - \Omega) + \frac{3}{8} m k \sin(L - 2L' + \Omega). \quad (\text{V. 166})$$

Последний член в этом уравнении носит название эвекции в широте.

### § 3. Сравнение теории с наблюдениями

**1. Таблицы Брауна.** Практическая работа по построению таблиц Луны на основе метода Хилла была начата в 1888 г. Эрнестом Брауном (1866—1938) по предложению его учителя и друга Джорджа Дарвина (1845—1912).

С 1901 по 1908 г. в *Memoirs of the Royal Astronomical Society* систематически печатаются отдельные части теоретических исследований Брауна, а с 1913 по 1915 г. в *Monthly Notices* были опубликованы материалы, содержавшие дискуссию астрономических постоянных, которые предполагалось положить в основу таблиц. Фундаментальные постоянные базировались главным образом на меридианных наблюдениях, сделанных в Гриниче.

Составление таблиц было начато в 1908 г., немедленно после окончания теоретической части исследования, и закончено в 1918 г. В 1919 г. все три тома таблиц вышли в свет, а в *Астрономическом Ежегоднике* на 1923 г. впервые была дана эфемерида Луны, основанная на таблицах Брауна. Эта эфемерида заменила эфемериду Луны, вычислявшуюся с 1862 г. по таблицам Ганзена (с 1883 г. — с поправками Ньюкома).

Мы приведем для примера некоторые члены разложения в истинной долготе Луны, как они даны в первом томе таблиц Брауна (табл. 38).

Из табл. 38 видно, что солнечные возмущения в долготе Луны содержат 312 членов.

Аналогичный вид имеют и таблицы, которые содержат разложения солнечных возмущений в широте Луны и в синусе параллакса Луны,

$$\sin p = \frac{a_0}{r}, \quad (\text{V. 167})$$

где  $a_0$  — экваториальный радиус Земли, а  $r$  — геоцентрический радиус-вектор Луны. Всего в трех томах таблиц

Таблица 38

## Солнечные возмущения в истинной долготе Луны

Параметры	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	№ п/п	Номер таблиц
1				6	+ 0'127	1	33
				4	+ 13.902	2	33
				2	+ 2369.902	3	31
<i>e</i>	1	0	0	6	+ 0'023	4	16
				4	+ 1.979	5	39
				2	+ 191.953	6	35
				0	+ 22639.500	7	30
				-2	- 4586.426	8	32
				-4	- 38.428	9	37
				-6	- 0.393	10	16
				-8	-- 0.004	11	16
<i>e'</i>	0	1	0	6	- 0'004	12	1
				4	- 0.289	13	1
				2	- 24.420	14	24
				0	- 668.111	15	47
				-2	- 165.145	16	23
				-4	- 1.877	17	1
				-6	- 0.024	18	1
$\alpha_1$	0	0	0	5	+ 0'004	19	33
				3	+ 0.403	20	33
				1	- 125.154	21	33
$\gamma$	0	0	2	*4	- 0'085	49	17
				2	- 5.741	50	44
				0	- 411.608	51	40
				-2	- 55.173	52	41
				-4	+ 0.025	53	17
...		...			...		...
$e^2\gamma^4$	2	0	4	2	+ 0'001	-	-
				0	+ 0.011	310	48

Параметры	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	№ п/п	Номер таблиц
$e^{2\gamma^4}$	2	0	-4	0	+0.001	— 311 —	— 48, 49 —
				-2	-0.003		
				-4	-0.001		
$e^{\delta e'}$	5	1	0	0	-0.004	— 312 —	— 46, 47 —
				-2	-0.004		
				0	+0.004		
$e^{\delta e' \gamma^2}$	3	1	2	0	+0.006	— —	— —
				0	-0.006		

табулировано 1415 различных членов из общего числа 1650, полученных Брауном в его исследованиях.

К табл. 38 необходимо сделать следующие пояснения. Табулированные возмущения имеют вид

$$A \sin(il + i'l' + kF + k'D). \quad (V. 168)$$

Первый столбец указывает, какие малые параметры

$$e = 0.054900489,$$

$$e' = 0.01675104,$$

$$\gamma = \sin \frac{i}{2} = 0.044886967,$$

$$\alpha_1 = \frac{a}{a'} \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} = 0.00251287$$

входят в коэффициент *A*. Второй столбец содержит коэффициенты *i*, *i'*, *k* и *k'*. Третий столбец дает численные значения коэффициента *A*. Четвертый столбец указывает порядковый номер данного члена и пятый столбец дает ссылку на номер таблицы (или номера нескольких таблиц), в которых табулирован соответствующий член разложения. Члены, не имеющие порядкового номера, были получены при теоретическом исследовании,

но в таблицы не включены. Аргументы  $l$ ,  $l'$ ,  $F$  и  $D$  в (V.168) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} l &= L - \pi, \\ l' &= L' - \pi', \\ F &= L - \Omega, \\ D &= L - L', \end{aligned} \tag{V.169}$$

где  $L$  и  $L'$  — геоцентрическая средняя долгота Луны и Солнца,  $\pi$  и  $\pi'$  — долгота перигелия Луны и Солнца,  $\Omega$  — долгота узла Луны. На устройстве самих таблиц Брауна мы не будем останавливаться, так как в настоящее время с помощью быстродействующих электронных вычислительных машин координаты Луны можно вычислять непосредственно по разложениям, подставляя время  $t$  в тригонометрические ряды, минуя, таким образом, использование таблиц.

**2. Эмпирический член в теории движения Луны.** Уже Ганзен при построении теории движения Луны должен был ввести в выражение для средней долготы эмпирический член для того, чтобы согласовать теорию с наблюдениями. Этот член с учетом поправок, которые Ньюком ввел в теорию Ганзена, имеет вид

$$E = +12'95 \sin(131^\circ 0 T + 100^\circ 6). \tag{V.170}$$

Введение этого члена в разложение долготы никак не объяснялось гравитационной теорией движения Луны и причины его появления оставались загадочными. Браун при построении таблиц также не смог обойтись без введения эмпирического члена, который отличался от (V.170) незначительными изменениями в числовых коэффициентах

$$E = +10'71 \sin(140^\circ 0 T + 100^\circ 7). \tag{V.171}$$

Три произвольных параметра, входящих в (V.171), были подобраны таким образом, чтобы наблюдения Луны представлялись с точностью до  $0'1$  на интервале времени между 1720 и 1930 гг. и с точностью до  $0'6$  на интервале времени от 1625 до 1720 г. В (V.170) и (V.171) время  $T$  считается в юлианских столетиях от эпохи 1800.0.

Если перейти к эпохе 1900.0, то формула (V.171) принимает, очевидно, вид

$$E = +10''.71 \sin(140.0T + 240^\circ 7). \quad (\text{V. 172})$$

Этот член и был введен Брауном в таблицы. В настоящее время доказано, что появление эмпирического члена в движении Луны объясняется неравномерностью вращения Земли. Поэтому оказалось возможным при вычислении лунной эфемериды исключить из разложений эмпирический член и заменить его членами, которые получены на основе разнообразного наблюдательного материала в исследованиях Фосерингама (1874—1936), Де-Ситтера (1872—1934) и Гаролда Спенсера Джонса (1890—1960) и которые отражают эффект неравномерного вращения Земли на движение небесных тел.

Поправка, которую надо прибавить к средней долготе Луны, полученной из таблиц Брауна, равна

$$\begin{aligned} \Delta L = & -8''.72 - 26''.75T - 11''.22T^2 - \\ & - 10''.71 \sin(140^\circ 0T + 240^\circ 7), \end{aligned} \quad (\text{V. 173})$$

причем полученная таким образом долгота Луны будет уже отнесена не к всемирному, а к эфемеридному времени (см. главу I). Введение поправки (V.173) полностью исключило из теории движения Луны всякий эмпиризм и позволило представить всю совокупность наблюдений на основе чисто гравитационной теории.

Рекомендация о введении в эфемериды Луны поправки (V.173) была принята на VIII съезде Международного астрономического союза (МАС) в Риме в 1952 г. Фактически в астрономических ежегодниках эта поправка учитывается, начиная с ежегодников на 1960 год.

## § 4. Устойчивость движения Луны по Хиллу

**1. Постоянная Якоби.** Рассмотрим круговую ограниченную задачу трех тел, в которой два тела конечной массы, Солнце ( $S$ ) и Земля ( $T$ ), описывают круговые орбиты вокруг общего центра инерции, а третье тело — Луна ( $L$ ) имеет бесконечно малую массу.

За начало координат примем общий центр инерции  $O$ , а плоскость, в которой происходит движение Земли

и Солнца, пусть будет плоскость  $xу$ . Примем, далее, за единицу массы сумму масс Солнца и Земли, тогда масса Земли может быть обозначена через  $m$ , а масса Солнца через  $1 - m$ . За единицу расстояния примем постоянное расстояние между Землей и Солнцем, а единицу времени выберем так, чтобы постоянная Гаусса  $k = 1$ .

При нашем выборе единиц среднее угловое движение конечных масс равно

$$n = \frac{k \sqrt{(1 - m) + m}}{a^{3/2}} = 1,$$

где  $a = 1$  — большая полуось орбиты, описываемой Солнцем и Землей относительно друг друга под влиянием взаимного притяжения по закону Ньютона.

Предположим теперь, что оси координат вращаются в направлении движения конечных масс с равномерной угловой скоростью  $n = 1$ . Тогда мы можем направить ось  $x$  таким образом, чтобы Солнце и Земля постоянно находились на оси  $x$ .

Пусть  $x, y, z$  — прямоугольные координаты Луны. Тогда уравнения движения Луны для равномерно вращающихся осей запишутся так (ср. с уравнениями (V. 15)):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{V. 174})$$

где

$$V = \frac{1 - m}{r_1} + \frac{m}{r_2}.$$

Через  $r_1$  и  $r_2$  мы обозначили расстояние Луны от Солнца и от Земли. Уравнения (V. 174) имеют интеграл, который был впервые получен Якоби (1804—1851) и затем применен Хиллом в первом из его знаменитых мемуаров по теории Луны (Researches in the Lunar Theory, 1878) для рассмотрения вопроса об устойчивости ее движения. Положим

$$U = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - m}{r_1} + \frac{m}{r_2}, \quad (\text{V. 175})$$

тогда уравнения (V.174) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\tag{V.176}$$

Если умножить эти уравнения на  $2\frac{dx}{dt}$ ,  $2\frac{dy}{dt}$  и  $2\frac{dz}{dt}$  и затем сложить результаты, то полученное уравнение можно проинтегрировать. Получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2U - C,\tag{V.177}$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, известная под названием постоянной Якоби. Численное значение этой постоянной может быть легко получено по формуле

$$\begin{aligned}C &= \frac{2(1-m)}{r_1} + \frac{2m}{r_2} + x^2 + y^2 - \\ &\quad - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,\end{aligned}\tag{V.178}$$

если нам известны координаты и скорость Луны для какого-нибудь произвольного момента времени  $t$ . Если обозначить через  $x_1$  и  $x_2$  координаты Солнца и Земли (которые постоянно находятся на оси  $x$ ), то

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}\tag{V.179}$$

**2. Поверхность нулевой скорости.** Обозначим через  $v$  скорость Луны во вращающейся системе координат. Тогда

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,\tag{V.180}$$

и уравнение (V.177) может быть записано так:

$$v^2 = 2U - C.\tag{V.181}$$



Так как скорость Луны всегда положительна, то, очевидно, поверхность, определяемая уравнением

$$2U - C = 0, \quad (\text{V. 182})$$

является границей, которая отделяет область пространства, в котором движение Луны возможно, от той части пространства, где это движение становится невозможным. Поверхность (V. 182) называется поверхностью нулевой скорости, а движение Луны возможно только в той части пространства, где

$$2U - C > 0. \quad (\text{V. 183})$$

Подставляя (V. 175) в (V. 182), можем записать уравнение поверхности нулевой скорости в виде

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-m)}{r_1} + \frac{2m}{r_2} = C$$

или окончательно

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{2(1-m)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2m}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}} = C. \quad (\text{V. 184})$$

**3. Особые точки поверхности нулевой скорости.**  
Особые точки поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \quad (\text{V. 185})$$

определяются уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (\text{V. 186})$$

которые должны быть решены относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  совместно с уравнением поверхности (V. 185). Для поверхности нулевой скорости легко находим, дифференцируя (V. 184) по  $x$ ,  $y$ ,  $z$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} &= x - (1-m) \frac{x-x_1}{r_1^3} - m \frac{x-x_2}{r_2^3} = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} &= y - (1-m) \frac{y}{r_1^3} - m \frac{y}{r_2^3} = 0, \end{aligned} \quad (\text{V. 187})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = -(1-m) \frac{z}{r_1^3} - m \frac{z}{r_2^3} = 0.$$

Из последнего уравнения для  $z$  сразу находим, что  $z=0$ . Следовательно, все особые точки поверхности нулевой скорости лежат в плоскости  $xy$ . Для особых точек уравнения движения (V. 176) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V. 188})$$

и, следовательно, в этих точках не только

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0,$$

но и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Следовательно, если Луна находилась бы на поверхности нулевой скорости в особой точке, то не только ее скорость, но и ускорение были бы равны нулю и Луна навсегда оставалась бы в этой точке.

Определим теперь координаты особых точек. Если  $y \neq 0$ , то второе из уравнений (V. 187) дает

$$1 - \frac{1-m}{r_1^3} - \frac{m}{r_2^3} = 0, \quad (\text{V. 189})$$

которое может быть удовлетворено, если

$$r_1 = r_2 = 1, \quad (\text{V. 190})$$

т. е. особая точка, Солнце и Земля находятся в вершинах равностороннего треугольника. Так как  $y$  может иметь как положительное, так и отрицательное значение, то мы имеем две особые „треугольные“ точки, расположенные симметрично относительно оси  $x$ . Эти точки называются либрационными точками Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$ .

Если теперь  $y=0$ , то особые точки находятся на оси  $x$ , и мы имеем из первого уравнения (V. 187)

$$x - (1 - m) \frac{x - x_1}{r_1^3} - m \frac{x - x_2}{r_2^3} = 0. \quad (\text{V. 191})$$

Если  $m$  малая величина, то решение уравнения (V. 191) может быть найдено в виде бесконечного ряда, расположенного по степеням малого параметра  $m$ . Подробный

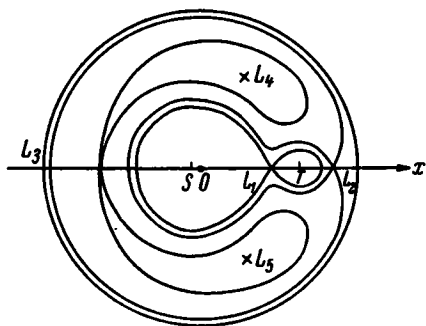


Рис. 16. Поверхности нулевой скорости в ограниченной задаче трех тел.

анализ решения уравнения (V. 191) можно найти в книге М. Ф. Субботина „Курс небесной механики“, т. 2, 1937 г. Мы ограничимся здесь только окончательными результатами.

Так как уравнение (V. 191) имеет три корня, то необходимо рассмотреть три различных случая.

Первый случай. Особая точка лежит на оси  $x$  между Солнцем и Землей (рис. 16). Тогда

$$r_1 + r_2 = 1, \quad (\text{V. 192})$$

$$r_2 = \mu - \frac{1}{3} \mu^2 - \frac{1}{9} \mu^3 - \dots, \quad (\text{V. 193})$$

где

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{m}{3(1-m)}}.$$

Полагая для Земли  $m = 1:320\,000$ , находим по формуле (V. 193)

$$r_2 = 0.01010 \text{ а. е.}$$

Второй случай. Особая точка лежит на оси  $x$  справа от Земли. Тогда

$$r_1 - r_2 = 1, \quad (\text{V. 194})$$

$$r_2 = \mu + \frac{1}{3} \mu^2 - \frac{1}{9} \mu^3 + \dots \quad (\text{V. 195})$$

По формуле (V. 195) находим численное значение

$$r_2 = 0.01017 \text{ а. е.}$$

Третий случай. Особая точка лежит на оси  $x$  слева от Солнца. Тогда

$$r_2 - r_1 = 1, \quad (\text{V. 196})$$

$$r_2 = 2 - \frac{7}{4} \mu^3 + \frac{21}{4} \mu^6 - \dots \quad (\text{V. 197})$$

или, подставляя числовое решение для  $\mu$ ,

$$r_2 = 1.99999818 \text{ а. е.}$$

Особые точки поверхности нулевой скорости, лежащие на оси  $x$ , называются либрационными точками Лагранжа и обозначаются  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ .

Каждой либрационной точке соответствует определенное численное значение постоянной Якоби, которое может быть вычислено по формуле (V. 178)

$$C = x^2 + \frac{2(1-m)}{x-x_1} + \frac{2m}{x-x_2}. \quad (\text{V. 198})$$

Для либрационных точек Солнца—Земля имеем

$$C_1 = 3.0009264,$$

$$C_2 = 3.0009227,$$

$$C_3 = 3.0000156.$$

**4. Устойчивость по Хиллу.** Пересечем поверхность нулевой скорости (V. 184) плоскостью  $xy$ , тогда

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2(1-m)}{r_1} + \frac{2m}{r_2} = C. \quad (\text{V. 199})$$

Ограничимся малыми значениями  $x$  и  $y$ . В этом случае два первых члена в уравнении (V. 199) могут быть отброшены, и мы получим

$$F(x, y) = \frac{2(1-m)}{r_1} + \frac{2m}{r_2} = C. \quad (\text{V. 200})$$

Если постоянная Якоби  $C$  велика, то кривая нулевой скорости состоит из двух замкнутых овалов вокруг Солнца и Земли. Действительно, если  $r_1$  мало, то

$$\frac{2(1-m)}{r_1} = C,$$

а если мало  $r_2$ , то

$$\frac{2m}{r_2} = C.$$

В первом случае уравнение кривой, окружающей Солнце, имеет вид

$$r_1 = \frac{2(1-m)}{C}, \quad (\text{V. 201})$$

и во втором случае уравнение кривой, окружающей Землю,

$$r_2 = \frac{2m}{C}. \quad (\text{V. 202})$$

Чем больше  $C$ , тем меньше радиусы окружностей  $r_1$  и  $r_2$ . По мере убывания постоянной Якоби  $C$  радиусы окружностей увеличиваются и при  $C = C_1$  обе кривые соприкасаются в особой точке  $L_1$ . При еще меньших значениях постоянной Якоби обе окружности соединяются в одну кривую, охватывающую Солнце и Землю.

Аналогичная картина имеет место, если мы пересечем поверхность нулевой скорости плоскостью  $xz$ .

Наконец, пересечение поверхности нулевой скорости плоскостью  $yz$  дает

$$y^2 + \frac{2(1-m)}{r_1} + \frac{2m}{r_2} = C. \quad (\text{V. 203})$$

Если  $1-m$  гораздо больше, чем  $m$ , а  $x$  и  $y$  очень малы, то

$$\frac{2(1-m)}{r_1} = C, \quad (\text{V. 204})$$

и мы опять имеем уравнение окружности с центром в Солнце, радиус которой увеличивается с уменьшением  $C$ .

Теперь можно получить некоторое представление о форме поверхности нулевой скорости для различных значений  $C$ . Для больших  $C$  эта поверхность состоит из

двух замкнутых поверхностей приблизительно сферической формы вокруг Солнца и Земли. При уменьшении  $C$  поверхности расширяются и при  $C = C_1$  касаются друг друга. Для еще меньших значений  $C$  обе поверхности сливаются в одну поверхность, ограничивающую замкнутую полость, внутри которой находятся Солнце и Земля.

Если координаты и скорость Луны в произвольный момент ее движения таковы, что постоянная Якоби, вычисленная по формуле (V. 178), настолько велика, что ей соответствуют замкнутые поверхности вокруг Солнца и Земли, и если в некоторый момент Луна находится внутри поверхности, окружающей Землю, то можно утверждать, что она всегда останется там, так как не сможет пересечь поверхность нулевой скорости. Такая устойчивость носит название устойчивости по Хиллу. Однако, если значение постоянной Якоби для Луны мало и поверхность нулевой скорости не замкнута, мы ничего не можем утверждать об устойчивости Луны, так как хотя она и может удалиться неопределенно далеко от Земли, но удалится ли она фактически или нет — вопрос остается открытым.

Итак, устойчивость движения по Хиллу определяется условием

$$C > C_1, \quad (\text{V. 205})$$

где  $C_1$  — значение постоянной Якоби в точке либрации  $L_1$ . Хилл получил для Луны следующее значение постоянной Якоби:

$$C = 3.25440.$$

Так как  $C > C_1$ , то соответствующая поверхность нулевой скорости образует вокруг Земли замкнутую поверхность с радиусом равным по Хиллу 109.694 экваториальным радиусам Земли, что составляет 700 000 км. Таков верхний предел для расстояния, на которое Луна может удалиться от Земли.

Хагихара (Япония) в 1952 г. показал, что все естественные спутники в солнечной системе, за исключением четырех спутников Юпитера с обратным движением (VIII, IX, XI и XII), являются устойчивыми по Хиллу.

### § 1. Кометы в Солнечной системе

**1. Три типа кометных орбит.** Кометы, безусловно, представляют наиболее загадочный класс объектов в Солнечной системе. По современным представлениям, они образуют обширное облако (облако Оорта), окружающее нашу Солнечную систему. Орбиты комет, составляющих облако Оорта, имеют большие полуоси от 50 000 до 150 000 а. е. и всевозможные эксцентриситеты и наклоны к плоскости эклиптики. Под влиянием звездных возмущений кометные орбиты испытывают значительные изменения. Если эксцентриситет орбиты приближается к единице, комета вблизи перигелия оказывается в области движения больших планет. Возмущения от планет могут перебросить комету на гиперболическую орбиту, после чего комета навсегда покидает Солнечную систему. В других случаях планетные возмущения уменьшают большую полуось и эксцентриситет орбиты. Комета после этого навсегда остается вблизи Солнца, имея сравнительно небольшой период обращения.

Таким образом, все кометы, входящие в состав Солнечной системы, могут быть разбиты на три типа. Кометы первого типа образуют облако Оорта и никогда не могут наблюдаться с Земли. К кометам второго типа принадлежат те кометы, которые вследствие звездных возмущений впервые приблизились к Солнцу по орбитам, близким к параболическим. Такие кометы могут быть замечены с Земли, если их перигелиальное расстояние не превышает 4—5 а. е. Кометы этого типа называются долгопериодическими кометами. Наконец, кометы третьего типа — это так называемые короткопериодические кометы.

Афелии орбит этих комет обычно близки к орбитам больших планет.

**2. Общая характеристика кометных орбит.** Вновь открываемые кометы обозначаются годом открытия и латинской буквой по порядку открытия. Кроме того, комета обычно получает имя открывшего ее астронома, а если комета открыта независимо двумя или более астрономами, как это часто случается, то комета получает двойное или тройное наименование. Порядок открытия комет обычно не совпадает с порядком их прохождения через перигелий орбиты. Поэтому через несколько лет каждая комета получает окончательное обозначение, в котором буква заменяется римской цифрой, указывающей на порядок прохождения через перигелий в данном году. Так, например, кометы, прошедшие через перигелий в 1961 г., получили следующие обозначения:

- 1961 I = 1960 *i* — периодическая комета Энке—Баклунда  
II = 1960 *n* — комета Канди  
III = 1960 *f* — периодическая комета Комас Сола  
IV = 1960 *m* — периодическая комета Виртанена  
V = 1961 *d* — комета Вильсона—Хаббарда  
VI = 1961 *a* — периодическая комета Форбса  
VII = 1960 *j* — периодическая комета Швассмана—  
Вахмана 2  
VIII = 1961 *f* — комета Секки  
IX = 1961 *g* — периодическая комета Григга—Скьерупа

Как уже было сказано, для возможности открытия кометы необходимо, чтобы ее перигельное расстояние не превышало 4—5 а. е. (табл. 39).

Характерной особенностью кометных орбит, которая отличает их от орбит не только больших планет, но и малых планет, является наклон к плоскости эклиптики, который может иметь любые значения от 0 до 180° (табл. 40).

В табл. 40 кометы подобраны таким образом, чтобы наклоны двух соседних комет отличались не более чем на 3—4° между собой.

**3. Короткопериодические кометы.** Примером короткопериодических комет могут служить кометы, элементы которых приведены в приложении 12. Обращает на себя внимание тот факт, что короткопериодические кометы



Таблица 39

## Кометы с наибольшими перигельными расстояниями

Комета	$q = a(1 - e)$ , а. е.	Комета	$q = a(1 - e)$ , а. е.
1957 IV	5.538	1925 VI	4.181
1948 III	4.709	1942 VIII	4.113
1954 V	4.501	1956 I	4.074
1957 VI	4.446	1729	4.051
1959 X	4.274	1936 I	4.043

Таблица 40

## Наклон кометных орбит

Комета	$i$	Комета	$i$	Комета	$i$
1770 I	1°6	1580	64°6	1784	128°9
1960 VI	5.6	1758	68.3	1921 II	132.1
1819 IV	9.1	1924 I	72.3	1944 I	136.1
1890 VII	12.8	1895 III	76.2	1887 III	139.8
1954 XIII	16.8	1840 III	79.9	1822 III	143.7
1960 III	20.8	1926 VII	83.6	1956 III	147.5
1892 VI	24.8	1948 X	87.6	1961 II	150.9
1092	28.8	1826 V	90.6	1890 IV	154.3
1857 IV	32.8	1748 I	94.5	1855 II	156.9
1686	35.0	1871 IV	98.3	1853 I	159.8
1892 I	38.7	1877 VI	102.2	1889 II	163.8
1885 V	42.4	1949 IV	105.8	1788 I	167.5
1919 V	46.4	1907 II	109.8	1835 I	170.9
1955 IV	50.1	1923 III	113.8	1942 VIII	172.5
1915 IV	53.5	1858 VI	117.0	1759 III	175.1
1802	57.0	1857 III	121.0	1864 II	178.1
1880 V	60.7	1932 VI	125.0		

отчетливо распадаются на четыре семейства Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Кроме того, кометы 17—20 принадлежат, вероятно, к семейству еще неоткрытой большой планеты, среднее расстояние которой от Солнца равно приблизительно 52 а. е. Плутон вследствие малой массы не имеет собственного кометного семейства.

В случае тесного сближения кометы с большой планетой ее элементы испытывают значительные изменения. Это наглядно видно из табл. 41, в которой приведены

Т а б л и ц а 41  
Комета Вольфа 1

$T$	$P$ (в годах)	$e$	$q$	$Q$	$\omega$	$\Omega$	$i$
1884.88	6.77	0.561	1.572	5.59	127°7	207°3	25°3
1891.68	6.89	0.557	1.604	5.64	172.8	207.2	25.2
1898.51	6.84	0.555	1.603	5.61	172.9	207.2	25.2
1912.15	6.80	0.558	1.587	5.59	172.8	207.2	25.3
1918.95	6.79	0.559	1.582	5.59	172.9	207.1	25.3
1925.85	8.28	0.405	2.435	5.75	160.7	204.4	27.3
1934.16	8.33	0.404	2.450	5.77	160.8	204.4	27.3
1942.48	8.29	0.405	2.437	5.75	161.0	204.3	27.3
1950.81	8.42	0.396	2.498	5.78	161.1	203.9	27.3
1959.22	8.43	0.395	2.507	5.78	161.1	203.9	27.3

элементы кометы Вольфа 1 за ряд лет. В промежутке от 1918 до 1925 г. элементы кометы испытали значительные изменения из-за сильных возмущений от Юпитера в результате тесного сближения. В частности, перигельное расстояние кометы увеличилось за один оборот на 0.853 а. е.

В табл. 42 сопоставлены элементы кометы Понс—Виннеке за 132 года. Движение этой кометы происходит вблизи соизмеримости средних движений кометы и Юпитера ( $n:n'=2:1$ ). Между 1915 и 1921 гг. комета прошла через точную соизмеримость ( $P=5.93$ ). Элементы кометы испытывают значительные изменения. Наклон орбиты к плоскости эклиптики, например, увеличился в два раза.

Табл. 12 приложения может быть продолжена за счет комет, у которых афелии орбит лежат далеко за пределами орбиты Плутона (см. приложение 13). Можно предполагать, что в эволюции орбит этих комет основную роль играют неизвестные нам большие планеты Солнечной системы. Таким образом, между короткопериодиче-

Т а б л и ц а 42

## Комета Понс—Виннеке

$T$	$P$ (в годах)	$e$	$q$	$Q$	$\omega$	$\Omega$	$i$
1819.55	5.62	0.755	0.774	5.55	161°6	114°9	10°7
1858.33	5.56	0.755	0.769	5.50	162.2	114.8	10.8
1869.49	5.59	0.752	0.782	5.52	162.4	114.6	10.8
1875.19	5.73	0.741	0.829	5.57	165.2	112.5	11.3
1886.68	5.82	0.726	0.885	5.58	172.1	104.9	14.5
1892.50	5.82	0.726	0.887	5.58	172.1	104.9	14.5
1898.22	5.83	0.715	0.924	5.56	173.4	101.6	17.0
1909.77	5.88	0.701	0.973	5.54	172.3	99.9	18.3
1915.67	5.87	0.701	0.972	5.54	172.3	99.9	18.3
1921.45	6.01	0.685	1.041	5.57	170.3	98.5	18.9
1927.47	6.01	0.686	1.039	5.57	170.4	98.5	18.9
1933.38	6.09	0.670	1.102	5.57	169.3	96.9	20.1
1939.47	6.09	0.670	1.101	5.57	169.3	96.8	20.1
1945.52	6.16	0.655	1.159	5.56	170.1	94.5	21.7
1951.69	6.12	0.653	1.161	5.53	170.2	94.4	21.7

Т а б л и ц а 43

## Элементы кометы Энке—Баклуида

Обозначение	$T$	$\omega$	$\Omega$	$i$	$q$	$e$
1786 I	яив. 30.9	182°50	334°13	13°60	0.3348	0.8484
1795	дек. 21.4	182.03	334.66	13.71	0.3344	0.8489
1805	нояб. 21.5	182.45	334.34	13.56	0.3404	0.8462
1819 I	яив. 27.3	182.44	334.56	13.62	0.3352	0.8486

скими и долгопериодическими кометами существует, по-видимому, непрерывный переход.

**4. Комета Энке—Баклуида.** Комета Энке—Баклуида была открыта 26 ноября 1818 г. Понсом в Марселе. Энке (1791—1865) вычислил ее орбиту и нашел, что комета движется по эллипсу с коротким периодом обращения. Ему удалось отождествить комету Понса с кометой, открытой Мешеном 17 января 1786 г., а также с кометами 1795 и 1805 (табл. 43).

Из сопоставления четырех появлений кометы Энке установил, что ее движение не подчиняется строго закону всемирного тяготения Ньютона. Период обращения кометы, освобожденный от влияния планетных возмущений, оказался не постоянным, а систематически уменьшался от оборота к обороту, как это видно из табл. 44.

Для увязки между собой всех наблюдений кометы Энке пришлось принять гипотезу, согласно которой комета движется в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости кометы и обратно пропорциональна квадрату радиуса-вектора

$$F = G \frac{v^2}{r^2}.$$

Вследствие наличия силы  $F$  среднее движение кометы получает при каждом обороте постоянное приращение, а в средней аномалии появляется член, зависящий от квадрата времени. Эксцентриситет кометы систематически убывает. Если обозначить период обращения кометы через

$\tau \approx 1200$  суток, то получим

$$M = M_0 + n_0(t - t_0) + k\tau^2,$$

$$n = n_0 + \frac{k}{600}\tau,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi'\tau.$$

Для величин  $k$  и  $\varphi'$  Энке получил такие числовые значения:

$$k = 60'', \quad \varphi' = -3''.$$

Т а б л и ц а 44

Года	P (в сутках)
1786—1795	1208.11
1795—1805	1207.88
1805—1819	1207.42

Т а б л и ц а 45

Года	$k$
1818—1858	60''
1858—1868	50
1868—1894	42
1894—1904	29
1904—1914	22.5

Однако Энке не удалось разрешить загадку движения кометы Понса. Хотя ему и удалось объединить 10 появлений кометы (1819—1848 гг.), но расхождения между теорией и наблюдениями оставались значительными (вероятная ошибка одного нормального места составляла  $16''.6$ ) и имели систематический ход. Послеперигельные нормальные места плохо увязывались с доперигельными. Так, например, послеперигельное нормальное место 1842 г. имело ошибку в  $101''.7$ .

После смерти Энке исследование движения кометы перешло сначала в Пулковскую обсерваторию, а затем, в 1945 г., в Институт теоретической астрономии Академии наук СССР. Пулковский астроном Э. Астен (1842—1878) вычислил возмущения кометы Энке с 1848 по 1875 г., применяя незадолго перед этим разработанный метод численного интегрирования в ганзеневских координатах. Астена удалось объединить 16 появлений кометы с 1819 по 1868 г. со средней ошибкой одного нормального места в  $13''.3$ . Однако для нормальных мест 1871 г. ошибка по  $\alpha$  достигала громадной величины —  $1437''.6$  и Астена пришлось предположить, что произошло сближение кометы с какой-то малой планетой, которая и изменила своими возмущениями кометную орбиту. После Астена изучением движения кометы Энке в течение 38 лет занимался академик О. А. Баклунд (1846—1916), директор Пулковской обсерватории. Баклунд начал свою работу с объединения четырех появлений кометы за 1871—1881 гг. При этом оказалось, что вековое ускорение кометы уменьшилось с  $k = 60''$  до  $k = 32''$ . Этим самым выяснилась причина громадных невязок при представлении наблюдений в работах Астена, который принимал для  $k$  постоянное значение ( $k = 60''$ ). Уменьшение векового ускорения кометы Баклунд объяснил тем, что сопротивляющаяся среда с течением времени рассеивается в межпланетном пространстве и плотность ее уменьшается. Изменение величины  $k$  по Баклунду показано в табл. 45.

Академия наук, отмечая выдающееся научное значение работ Баклунда, постановила „чтобы в изданиях Академии комета Энке именовалась отныне кометой Энке—Баклунда“. Исследования Баклунда продолжал пулковский астроном Л. Л. Маткевич (1878—1949), который обработал наблюдения кометы Энке—Баклунда за 1918—1934 гг.

В 1935 г. движение кометы изучал другой пулковский астроном, Н. И. Идельсон. Он произвел сравнение теории с наблюдениями в четырех появлениях кометы (1924—1934 гг.) и обработал 16 нормальных мест. „Результаты этих вычислений, — писал Н. И. Идельсон, — оказались плачевными; несмотря на многочисленные попытки, не удалось представить всех нормальных мест с допустимыми невязками. Эти невязки достигали для нормальных мест, наиболее удаленных от перигелия, от 30 до 50"; таким образом, мы встречаемся с затруднением, о котором писал еще Баклунд; почти невозможно удовлетворительно представить все нормальные места одного появления“. Идельсону пришлось отбросить 10 нормальных мест и ограничиться увязкой оставшихся 6 нормальных мест. Их удалось представить с максимальной ошибкой в 4". Коэффициент векового ускорения оказался равным 22".77, что очень близко к последнему определению Баклунда.

В 1945 г. построение точной теории движения кометы Энке—Баклунда вошло в план работ Института теоретической астрономии. В работах С. Г. Маковера (первое сообщение: „Комета Энке—Баклунда. Движение за 1937—1951 гг.“, было опубликовано в 1954 г. в Трудах ИТА) загадка движения кометы получила постепенно полное объяснение. Вековое ускорение удалось объяснить на основе гипотезы Уиппла (1950 г.) о „ледяном“ составе ядер комет. По взглядам Уиппла, ядро кометы состоит из замерзших воды, аммиака, углекислоты и различных других летучих веществ, в которые вкраплены небольшие частички каменистого характера. Предполагается, что ядро кометы вращается вокруг оси. При приближении кометы к Солнцу ее ядро нагревается и легкоплавкие вещества улетучиваются, вследствие чего возникают действующие на ядро реактивные силы. Допуская вращение ядра кометы в прямом и в обратном направлении, можно объяснить как ускорение, так и замедление движения кометы. Постепенное уменьшение векового ускорения объясняется истощением запаса замерзших газов в ядре после каждого сближения кометы с Солнцем.

Реактивные силы, вызывающие ускорение в движении кометы, действуют только на коротком участке орбиты вблизи перигелия, на остальной части орбиты комета движется строго по закону Ньютона. Поэтому

С. Г. Маковер делает наиболее простое предположение, полагая, что элементы орбиты меняются мгновенно в момент прохождения кометы через перигелий.

Методика, разработанная С. Г. Маковером, позволила объединить 5 появлений кометы (1937—1954 гг.) с небывалой до этого точностью (вероятная ошибка одного нормального места  $\pm 1''0$ ), причем не отбрасывалось ни одно нормальное место.

Убедительным подтверждением правильности принятого закона движения был тот факт, что впервые в истории исследования движения кометы Энке—Баклунда удалось получить для массы Меркурия по возмущениям, которые эта планета вызывает в движении кометы, величину

$$m = 1 : 6\,280\,000,$$

которая хорошо совпала со значениями, полученными другими методами. Для сравнения укажем, что Баклунд по возмущениям кометы Энке получил

$$m = 1 : 9\,745\,000,$$

а сам Энке нашел

$$m = 1 : 3\,271\,742.$$

Вековое ускорение кометы Энке—Баклунда уменьшилось; согласно вычислениям С. Г. Маковера, до  $12''$  в 1951 г. Параллельно с уменьшением векового ускорения уменьшилась и яркость кометы с  $9^m0$  до  $12^m0$ .

В настоящее время вековое ускорение среднего движения обнаружено и у некоторых других короткопериодических комет, причем знак векового ускорения может быть как положительным, так и отрицательным. Например, у кометы Брукса мы наблюдаем ускорение среднего движения, а у кометы Д'Арре и кометы Вольф 1, наоборот, вековое замедление.

**Примечание.** Так как при каждом обороте вокруг Солнца комета теряет по приблизительным подсчетам  $10^8$ — $10^{10}$  грамм газового вещества, то при средней массе ядра в  $10^{16}$  грамм комета может совершить  $10^8$ — $10^8$  оборотов вокруг Солнца. Однако уже значительно раньше комета становится недоступной для наблюдений и вообще перестает существовать в виде кометного объекта. По Эпику, „продолжительность жизни“ комет семейства Юпитера меньше  $10^6$  лет.

**5. Комета Отерма 3.** Одной из наиболее интересных комет, открытых в текущем столетии, является комета

1942 VII (Отерма 3). Комета открыта 3 апреля 1943 г. в Турку (Финляндия) как очень слабый объект ( $15^m$ ). Орбита кометы расположена полностью между орбитами Марса и Юпитера; отношение среднего суточного движения кометы к среднему суточному движению Юпитера близко к соизмеримости 2:3; эксцентриситет орбиты  $e=0.144$ , а наклон орбиты кометы к плоскости эклиптики равен  $i=4^\circ$ . Таким образом, орбита кометы 1942 VII очень похожа на орбиты малых планет группы Гильды. Наряду с кометой Швассмана—Вахмана комета Отерма 3 принадлежит к числу комет, которые могут наблюдаться во всех точках орбиты. И действительно, начиная с 1943 г. комета наблюдается ежегодно в каждой оппозиции, что позволило собрать значительный наблюдательный материал и построить точную теорию движения. Эта работа была выполнена в Институте теоретической астрономии А. В. Фокиным (1956 г.). Исследуя обстоятельства тесного сближения кометы Отерма 3 с Юпитером в 1937 г., А. В. Фокин обнаружил, что в результате огромных возмущений от Юпитера орбита кометы была изменена до неузнаваемости (ср. ниже элементы кометы на две различные эпохи).

### Элементы орбиты кометы Отерма 3

Эпоха 1936

дек. 27.0

$$a=8.053,$$

$$n=155^{\circ}3,$$

$$\varphi=19^{\circ}2,$$

$$i=2^{\circ}1,$$

$$\Omega=332^{\circ}4,$$

$$\omega=322^{\circ}1,$$

$$P=22.85 \text{ года,}$$

Эпоха 1938

дек. 15.0

$$a=4.421,$$

$$n=381^{\circ}7,$$

$$\varphi=8^{\circ}7,$$

$$i=1^{\circ}8,$$

$$\Omega=154^{\circ}3,$$

$$\omega=309.0,$$

$$P=9.30 \text{ года.}$$

До сближения с Юпитером в 1937 г. комета Отерма 3 двигалась за пределами орбиты Юпитера ( $q=5.4$ ) и не могла наблюдаться с Земли.

Интересно отметить, что на протяжении нескольких лет планетоцентрическая орбита кометы Отерма 3 была эллиптической, т. е. комета как бы превратилась временно в спутника Юпитера. Около положения максимального сближения с Юпитером оскулирующие планетоцен-



трические элементы были совершенно аналогичны элементам VIII спутника Юпитера:

Комета	VIII спутник
Отерма 3	Юпитера
$a = 0.292$ а. е.,	$a = 0.157$ а. е.,
$e = 0.339$ ,	$e = 0.378$ ,
$r = 0.176$ а. е.,	$Q = 0.216$ а. е.

где  $Q$  — афельное расстояние. Таким образом, комета Отерма 3 при своем движении пересекала орбиту VIII спутника Юпитера. Минимальное расстояние кометы от Юпитера составляло  $r = 0.168$  а. е.

Изучение движения короткопериодических комет за годы, предшествующие их открытию, приводит к несомненному выводу, что многие кометы семейства Юпитера были открыты после больших возмущений от Юпитера, которые резко изменили форму и размеры кометных орбит и приблизили их к орбите Земли, что существенно улучшило условия их видимости. Отметим также, что многочисленные „утери“ короткопериодических комет также происходят чаще всего после тесных сближений с Юпитером. Удачное предвычисление появления утерянной кометы представляет очень трудную и ответственную задачу. Проблема тесных сближений комет с планетами изучалась в Институте теоретической астрономии Е. И. Казимирчак-Полонской.

**6. Долгопериодические кометы.** Задача о движении комет с орбитами, близкими к параболическим, представляет актуальную проблему современной небесной механики. В Институте теоретической астрономии над этим вопросом в течение ряда лет работает И. В. Галибина, которая получила интересные результаты, изучая влияние больших планет на движение комет этого типа. В основу вычислений И. В. Галибиной была положена методика, предложенная С. Г. Маковым (1956 г.). При вычислении возмущений комет, близких к параболическим, за независимую переменную в дифференциальных уравнениях движения принимается время  $t$ , вследствие чего возмущения по необходимости вычислялись для сравнительно ограниченного промежутка времени. По предложению С. Г. Макова, за независимую переменную вместо времени  $t$  принимается истинная аномалия  $\varphi$ ,

что позволяет за небольшое число шагов интегрирования вычислить возмущения за очень большой промежуток времени. Изменяя истинную аномалию от  $v = -160^\circ$  до  $v = +160^\circ$ , удастся определить форму оскулирующей кометной орбиты далеко за пределами орбиты Плутона, там, где возмущения от больших планет становятся пренебрежимо малыми.

Примером долгопериодической кометы с орбитой, близкой к параболической, может служить комета 1944 IV, открытая Ван-Гентом (Йоганненсбург) 23 мая 1944 г. как объект 12<sup>m</sup>. Последнее наблюдение кометы было сделано 11 августа 1945 г. на Ликской обсерватории, когда яркость кометы составляла всего 19<sup>m</sup>.

Оскулирующие элементы кометы получились следующие:

Комета 1944 IV

$$\begin{aligned} a^{-1} &= -0.0009369, \\ e &= 1.002085, \\ q &= 2.225936, \\ \omega &= 336^\circ 9778, \\ \Omega &= 202.8027, \\ i &= 95.0164, \\ T &= 1944 \text{ июль } 17.61350. \end{aligned}$$

Таким образом, орбита кометы оказалась гиперболической и можно было бы думать, что комета Ван-Гента не принадлежит Солнечной системе, а приблизилась к Земле из межзвездного пространства. Однако по гелиоцентрическим элементам нельзя судить о форме первоначальной орбиты, так как она искажена движением Солнца относительно центра масс Солнечной системы. Чтобы исключить указанное влияние, необходимо определить форму орбиты кометы относительно барицентра Солнечной системы.

**7. Переход к барицентрической системе координат.** Согласно определению центра тяжести системы материальных точек  $m_i$  координаты  $(x^*, y^*, z^*)$  и скорости  $(\dot{x}^*, \dot{y}^*, \dot{z}^*)$  кометы относительно нового начала будут

$$\begin{aligned} x^* &= x + \delta x, & \dot{x}^* &= \dot{x} + \delta \dot{x}, \\ y^* &= y + \delta y, & \dot{y}^* &= \dot{y} + \delta \dot{y}, \\ z^* &= z + \delta z, & \dot{z}^* &= \dot{z} + \delta \dot{z}, \end{aligned} \quad (\text{VI. 1})$$

где

$$\delta x = -\frac{\sum m_i x_i}{1 + \sum m_i}, \quad \delta \dot{x} = -\frac{\sum m_i \dot{x}_i}{1 + \sum m_i} \quad (\text{VI. 2})$$

и аналогично для  $\delta y$ ,  $\delta \dot{y}$ ,  $\delta z$  и  $\delta \dot{z}$ . Величины (VI. 2) являются, очевидно, малыми поправками порядка возмущающих масс. Точно также можно написать

$$\frac{1}{a^*} = \frac{1}{a} + \delta \frac{1}{a}, \quad e^* = e + \delta e, \quad (\text{VI. 3})$$

причем  $a^*$  и  $e^*$  — большая полуось и эксцентриситет орбиты кометы, отнесенные к барицентрической системе.

Задача заключается в определении  $\delta \frac{1}{a}$  и  $\delta e$ . Метод решения состоит в том, чтобы, зная зависимость между координатами и скоростями, с одной стороны, и элементами орбиты, с другой, получить выражение, связывающее вариации элементов с вариациями координат и скоростей. При этом вместо постоянной Гаусса следует взять  $k^* = k \sqrt{1 + \sum m_i}$ , откуда

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{1}{2} \sum m_i. \quad (\text{VI. 4})$$

Введем орбитальную систему координат

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu, & \xi &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \sin \nu, \\ \eta &= r \sin \nu, & \eta &= \frac{k\sqrt{p}}{r} \left( \frac{r}{a} \cos \nu + e \right). \end{aligned} \quad (\text{VI. 5})$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \xi &= xP_x + yP_y + zP_z, \\ \eta &= xQ_x + yQ_y + zQ_z, \end{aligned} \quad (\text{VI. 6})$$

где  $P_x, \dots, Q_z$  — направляющие косинусы орбитальных осей ( $\xi, \eta$ ) относительно экваториальных координат ( $x, y, z$ ). Соотношения (VI. 6) дают

$$\begin{aligned} \delta \xi &= P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z, \\ \delta \eta &= Q_x \delta x + Q_y \delta y + Q_z \delta z, \\ \delta \dot{\xi} &= P_x \delta \dot{x} + P_y \delta \dot{y} + P_z \delta \dot{z}, \\ \delta \dot{\eta} &= Q_x \delta \dot{x} + Q_y \delta \dot{y} + Q_z \delta \dot{z}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 7})$$

Из интеграла живых сил

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (\text{VI. 8})$$

находим

$$\delta \left( \frac{1}{a} \right) = - \frac{2}{r^2} \delta r - \frac{2}{k^2} (\xi \delta \xi + \eta \delta \eta) + 2 \frac{\delta k}{k^3} (\xi^2 + \eta^2)$$

или

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{a} \right) = & - \frac{2}{r^3} (\xi \delta \xi + \eta \delta \eta) - \frac{2}{k^2} (\xi \delta \xi + \eta \delta \eta) + \\ & + 2 \frac{\delta k}{k} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \quad (\text{VI. 9})$$

Величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$  и их вариации вычисляются по формулам (VI. 5) и (VI. 7). Для вычисления  $\delta e$  воспользуемся формулой

$$p = a(1 - e^2), \quad (\text{VI. 10})$$

которая дает

$$\delta e = - \frac{p}{2e} \delta \left( \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{2ae} \delta p. \quad (\text{VI. 11})$$

Из интеграла площадей

$$\xi \eta - \eta \dot{\xi} = k \sqrt{p}$$

имеем

$$\delta p = \frac{2\sqrt{p}}{k} (\xi \delta \eta - \eta \delta \xi + \eta \delta \dot{\xi} - \dot{\xi} \delta \eta) - 2p \frac{\delta k}{k}. \quad (\text{VI. 12})$$

Подставляя (VI. 9) и (VI. 12) в формулу (VI. 11), получим

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{\sqrt{p}}{e} \left( \frac{\sqrt{p}}{r^3} \xi - \frac{1}{ak} \eta \right) \delta \xi + \frac{\sqrt{p}}{e} \left( \frac{\sqrt{p}}{r^3} \eta + \frac{1}{ak} \xi \right) \delta \eta + \\ & + \frac{\sqrt{p}}{ek} \left( \frac{\sqrt{p}}{k} \xi + \frac{1}{a} \eta \right) \delta \dot{\xi} + \frac{\sqrt{p}}{ek} \left( \frac{\sqrt{p}}{k} \eta - \frac{1}{a} \xi \right) \delta \dot{\eta} - \\ & - \frac{2p}{e} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\delta k}{k}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 13})$$

Формулы (VI. 9) и (VI. 13) полностью решают поставленную задачу. Аналогичные выражения можно получить и для других элементов орбиты кометы.

**8. Первоначальные и будущие орбиты долгопериодических комет.** Применяя формулы (VI. 9) и (VI. 13) к элементам орбиты кометы 1944 IV (см. стр. 279), получим

$$(a^*)^{-1} = +0.000\,998 \text{ а. е.}^{-1},$$

$$e^* = 0.99777.$$

Однако оскулирующие элементы орбиты, близкой к параболе, вычисленные для момента оскуляции вблизи перигелия, еще не дают ответа на вопрос о характере первоначальной орбиты этой кометы. Для того чтобы определить первоначальную орбиту, мы должны с помощью численного интегрирования проследить за движением этой кометы в течение ряда предшествующих лет и настолько далеко, чтобы иметь уверенность, что возмущения до этого момента были незначительными. Такие вычисления для кометы 1944 IV, выполненные И. В. Галибиной, показали, что

$$(a^*)_{\text{перв.}}^{-1} = +0.000007 \text{ а. е.}^{-1},$$

иными словами, начальная большая полуось орбиты равнялась приблизительно 140 000 а. е., т. е. в афелии комета 1944 IV находилась на расстоянии 280 000 а. е. от Солнца.

Таким образом, комета Ван-Гента принадлежит к облаку Оорта. Вследствие звездных возмущений ее перигелийное расстояние уменьшилось до  $q = 2.2$  а. е. и она стала доступна для наблюдений с Земли.

В табл. 46 приводится список долгопериодических комет, относительно которых можно утверждать, что они принадлежат к облаку Оорта. В этой таблице также даны большие полуоси (обратные величины) их будущих орбит, по которым эти кометы удаляются от Солнца за пределами орбиты Плутона.

Мы видим, что возмущения от известных нам больших планет выбрасывают значительную часть долгопериодических комет за пределы Солнечной системы.

**9. Численные методы вычисления возмущений.** Для вычисления возмущений кометных орбит применяются исключительно методы численного интегрирования диф-

ференциальных уравнений. Это объясняется тем обстоятельством, что эксцентриситеты и наклоны орбит, по степеням которых ведутся разложения в аналитических методах, не могут рассматриваться как малые величины в случае комет. Среди разнообразных численных способов интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения наибольшее распространение в небесной механике получил способ интегрирования в прямоугольных координатах, называемый обыкновенно способом Коуэлла.

Т а б л и ц а 46

**Первоначальные и будущие орбиты некоторых долгопериодических комет (по И. В. Галибной)**

Комета	$(a^*)_{\text{перв.}}^{-1}$	$(a^*)_{\text{буд.}}^{-1}$
1902 III	+0.000017	+0.000875
1919 V	+0.000013	-0.000052
1925 VII	+0.000007	-0.000335
1936 I	+0.000017	-0.000286
1942 IV	+0.000007	-0.000847
1944 IV	+0.000007	-0.000531

Метод Коуэлла широко и успешно применяется в Институте теоретической астрономии как в его непосредственном виде, так и в той форме, которую ему придал в 20-х годах Б. В. Нумеров (метод экстраполирования). С 1954 г. метод Коуэлла и метод экстраполирования применяются в Институте для интегрирования уравнений движения малых планет на машине БЭСМ, а также для решения других задач. В 1960 г. Д. К. Куликов (1912—1964) разработал методику интегрирования уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по методу Коуэлла с автоматическим изменением шага интегрирования.

В методе Энке вычисляют отклонение возмущенных прямоугольных координат от тех же величин в невозмущенном движении. Аналогичный метод для полярных координат разработал Ганзен.

В XIX в. широко применялся метод вариации элементов. В этом случае интегрируются численными мето-

дами дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы.

## § 2. Метод Коуэлла

**1. Уравнения движения.** Дифференциальные уравнения движения в задаче  $n$  тел имеют наиболее простую форму в том случае, когда эти уравнения написаны в прямоугольных координатах, а начало координат лежит в центре масс всей системы  $n$  материальных точек. В этом случае уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_i k^2 m_i \frac{x_i - x}{\Delta_i^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \sum_i k^2 m_i \frac{y_i - y}{\Delta_i^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \sum_i k^2 m_i \frac{z_i - z}{\Delta_i^3},\end{aligned}\tag{VI. 14}$$

где

$$\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2.$$

В этих уравнениях через  $x, y, z$  обозначены барицентрические координаты кометы, движение которой мы изучаем, а через  $m_i, x_i, y_i, z_i$  — массы и барицентрические координаты больших планет и Солнца. Однако в небесной механике мы принимаем обычно за начало системы координат центр Солнца, так как в этом случае становится ненужной отдельная теория движения Солнца.

В гелиоцентрической системе уравнения (VI. 14) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2(1+m) \frac{x}{r^3} + X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2(1+m) \frac{y}{r^3} + Y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2(1+m) \frac{z}{r^3} + Z,\end{aligned}\tag{VI. 15}$$

где

$$X = \sum_i k^2 m_i \left( \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right),$$

$$Y = \sum_i k^2 m_i \left( \frac{y_i - y}{\Delta_i^3} - \frac{y_i}{r_i^3} \right),$$

$$Z = \sum_i k^2 m_i \left( \frac{z_i - z}{\Delta_i^3} - \frac{z_i}{r_i^3} \right).$$

Масса Солнца принята за единицу,  $m$  — масса кометы, которую можно положить равной нулю. Суммирование распространяется на все большие планеты, возмущения от которых мы хотим учитывать.

Координаты больших планет  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , „солнечные члены“  $-\frac{x_i}{r_i^3}$ ,  $-\frac{y_i}{r_i^3}$ ,  $-\frac{z_i}{r_i^3}$  и множители, связанные с массами планет  $k^2 m_i$ , могут быть взяты из специальных таблиц или из Астрономического Ежегодника СССР.

Уравнения (VI.15) можно записать в такой форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= F_1(x, y, z, t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= F_2(x, y, z, t), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= F_3(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

которая указывает на то, что члены с первой производной по времени отсутствуют. Мы рассмотрим для простоты численное интегрирование уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t). \quad (\text{VI.17})$$

Интегрирование системы уравнений (VI.16) проводится аналогично, причем все три уравнения интегрируются параллельно.

**2. Разности и суммы.** Введем прежде всего некоторые обозначения. Пусть  $f(t)$  — непрерывная функция времени, значения которой мы будем рассматривать для ряда равностоящих моментов  $t_0$ ,  $t_0 + w$ ,  $t_0 + 2w$ , ...  $t_0 - w$ ,



$t_0 - 2w, \dots$  Величина  $w$  носит название шага интегрирования. Значения функции  $f(t)$  будем обозначать через

$$f_k = f(t_k), \quad (\text{VI. 18})$$

где  $t_k = t_0 + kw$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots -1, -2, \dots$  Разности и суммы значений функции будем обозначать так, как это показано в табл. 47.

Таблица 47

Аргумент	Вторая сумма	Первая сумма	Функция	Первая разность	Вторая разность	Третья разность	Четвертая разность
$t_0 - 3w$	$f_{-3}^{-2}$	$f_{-5/2}^{-1}$	$f_{-3}$	$f'_{-3/2}$			
$t_0 - 2w$	$f_{-2}^{-2}$	$f_{-3/2}^{-1}$	$f_{-2}$	$f'_{-3/2}$	$f_{-2}^2$	$f_{-3/2}^3$	
$t_0 - w$	$f_{-1}^{-2}$	$f_{-1/2}^{-1}$	$f_{-1}$	$f'_{-1/2}$	$f_{-1}^2$	$f_{-1/2}^3$	$f_{-1}^4$
$t_0$	$f_0^{-2}$	$f_{1/2}^{-1}$	$f_0$	$f'_{1/2}$	$f_0^2$	$f_{1/2}^3$	$f_0^4$
$t_0 + w$	$f_1^{-2}$	$f_{3/2}^{-1}$	$f_1$	$f'_{3/2}$	$f_1^2$		
$t_0 + 2w$	$f_2^{-2}$		$f_2$				
...	...	...	...	...	...	...	...

Кроме буквы  $f$ , будем употреблять для обозначения разностей также букву  $\Delta$ . Табл. 47 может быть по мере надобности продолжена вверх, вниз и вправо. Каждая из величин, входящих в табл. 47, равна разности между двумя величинами, стоящими в ближайшем левом столбце непосредственно ниже и выше этой величины. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_{k+1} - f_k &= f'_{k+1/2}, \\ f'_{k+1/2} - f'_{k-1/2} &= f_k^2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{VI. 19})$$

при любом целом значении  $k$ .

Одно из значений столбца сумм первого порядка может быть взято произвольно, например,  $f_{-1/2}^{-1}$ . Остальные значения вычисляются по формуле

$$f_{k+1/2}^{-1} = f_{k-1/2}^{-1} + f_k. \quad (\text{VI. 20})$$

Точно так же, взяв произвольно одно из значений вторых сумм, например  $f_0^{-2}$ , получим все остальные числа этого столбца по формуле

$$f_{k+1}^{-2} = f_k^{-2} + f_{k+1/2}^{-1}. \quad (\text{VI. 21})$$

Таблица сумм и разностей дополняется еще полусуммами двух соседних величин одного и того же столбца. Для этих полусумм приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_k + f_{k+1}) &= f_{k+1/2}, \\ \frac{1}{2}(f'_{k-1/2} + f'_{k+1/2}) &= f'_k, \\ \frac{1}{2}(f_{k-1/2}^{-1} + f_{k+1/2}^{-1}) &= f_k^{-1}, \\ \frac{1}{2}(f_k^{-2} + f_{k+1}^{-2}) &= f_{k+1/2}^{-2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{VI. 22})$$

**3. Первый метод Коуэлла.** Приступим теперь к интегрированию уравнения (VI. 17). Особенность этого уравнения состоит в том, что в правую часть не входит первая производная и потому можно перейти прямо от второй производной  $\frac{d^2x}{dt^2}$  к искомой функции  $x(t)$  по одной формуле двойного интегрирования, используя при этом интерполяционную формулу Стирлинга. Таким образом мы можем избежать двух последовательных интегрирований — одного для нахождения  $\frac{dx}{dt}$ , а другого для нахождения  $x(t)$ .

Интеграл  $x(t)$  уравнения второго порядка может быть задан или своими значениями в двух точках, например,

$$x_0 = x(t_0), \quad x_{-1} = x(t_0 - w), \quad (\text{VI. 23})$$

или теми значениями, которые интеграл и его производная принимают в начальный момент

$$x_0 = x(t_0), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}. \quad (\text{VI. 24})$$

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть  $x_{-1}$  и  $x_0$  — заданные величины. По этим данным требуется вычислить остальные значения  $x_1, x_2, \dots$  искомой функции  $x(t)$ . Очевидно, что для решения поставленной задачи необходимо найти способ для вычисления разностей

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \Delta_{1/2}, \\ x_2 - x_1 &= \Delta_{3/2}, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ x_{k+1} - x_k &= \Delta_{k+1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 25})$$

Введем в рассмотрение вторые разности

$$\Delta_k^2 = \Delta_{k+1/2} - \Delta_{k-1/2}. \quad (\text{VI. 26})$$

Так как согласно (VI. 25)  $\Delta_{k+1/2} = x_{k+1} - x_k$  и  $\Delta_{k-1/2} = x_k - x_{k-1}$ , то

$$\Delta_k^2 = x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}. \quad (\text{VI. 27})$$

Разлагая  $x_{k+1} = x(t_k + w)$  и  $x_{k-1} = x(t_k - w)$  по степеням  $w$ , получим

$$x_{k-1} = x_k + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{n!} \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_k, \quad (\text{VI. 28})$$

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_k.$$

Подставляя в (VI. 27), находим

$$\Delta_k^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{d^{2n} x}{dt^{2n}}\right)_k. \quad (\text{VI. 29})$$

Обозначим

$$w^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = w^2 F(x, t) = f.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 &= w^2 \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_k + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{d^{2n} x}{dt^{2n}} \right)_k = \\ &= f_k + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{2n}}{(2n+2)!} \left( \frac{d^{2n} f}{dt^{2n}} \right)_k. \end{aligned} \quad (\text{VI. 30})$$

Выразим теперь производные через разности. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$\begin{aligned} f(t_k + zw) &= f_k + z f'_k + \frac{z^2}{2!} f''_k + \frac{z(z^2 - 1^2)}{3!} f'''_k + \\ &+ \frac{z^2(z^2 - 1^2)}{4!} f''''_k + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI. 31})$$

Дифференцируя по  $z$  и полагая  $z=0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f'_k - \frac{1}{6} f''_k + \frac{1}{30} f'''_k - \frac{1}{140} f''''_k + \\ &+ \frac{1}{630} f''''''_k - \frac{1}{2772} f^{(11)}_k + \dots, \\ w \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)_k &= f''_k - \frac{1}{12} f^{(4)}_k + \frac{1}{90} f^{(6)}_k - \frac{1}{560} f^{(8)}_k + \\ &+ \frac{1}{3150} f^{(10)}_k - \frac{1}{11632} f^{(12)}_k + \dots, \\ w^3 \left( \frac{d^3 f}{dt^3} \right)_k &= f'''_k - \frac{1}{4} f^{(5)}_k + \frac{7}{120} f^{(7)}_k - \frac{41}{3024} f^{(9)}_k + \\ &+ \frac{479}{151200} f^{(11)}_k - \dots, \\ w^4 \left( \frac{d^4 f}{dt^4} \right)_k &= f^{(4)}_k - \frac{1}{6} f^{(6)}_k + \frac{7}{240} f^{(8)}_k - \frac{41}{7560} f^{(10)}_k + \\ &+ \frac{479}{453600} f^{(12)}_k - \dots, \\ w^5 \left( \frac{d^5 f}{dt^5} \right)_k &= f^{(5)}_k - \frac{1}{3} f^{(7)}_k + \frac{13}{144} f^{(9)}_k - \frac{139}{6048} f^{(11)}_k + \dots, \\ w^6 \left( \frac{d^6 f}{dt^6} \right)_k &= f^{(6)}_k - \frac{1}{4} f^{(8)}_k + \frac{13}{240} f^{(10)}_k - \frac{139}{12096} f^{(12)}_k + \dots, \\ w^7 \left( \frac{d^7 f}{dt^7} \right)_k &= f^{(7)}_k - \frac{5}{12} f^{(9)}_k + \frac{31}{240} f^{(11)}_k - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 32})$$

$$\left. \begin{aligned}
 w^8 \left( \frac{d^8 f}{dt^8} \right)_k &= f_k^8 - \frac{1}{3} f_k^{10} + \frac{31}{360} f_k^{12} - \dots, \\
 w^9 \left( \frac{d^9 f}{dt^9} \right)_k &= f_k^9 - \frac{1}{2} f_k^{11} + \dots, \\
 w^{10} \left( \frac{d^{10} f}{dt^{10}} \right)_k &= f_k^{10} - \frac{5}{12} f_k^{12} + \dots, \\
 w^{11} \left( \frac{d^{11} f}{dt^{11}} \right)_k &= f_k^{11} - \dots \\
 w^{12} \left( \frac{d^{12} f}{dt^{12}} \right)_k &= f_k^{12} - \dots
 \end{aligned} \right\}$$

Подставляя найденные выражения для производных в формулу (VI. 30), получим основную формулу первого метода Коуэлла

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^6 - \frac{289}{3628800} f_k^8 + \\
 + \frac{317}{22\,809\,600} f_k^{10} - \frac{6\,803\,477}{2615\,348\,736\,000} f_k^{12} + \dots \quad (\text{VI. 33})$$

Искомая координата  $x_{k+1}$  находится теперь при помощи двойного суммирования

$$\begin{aligned}
 \Delta_{k+1/2} &= \Delta_{k-1/2} + \Delta_k^2, \\
 x_{k+1} &= x_k + \Delta_{k+1/2}.
 \end{aligned} \quad (\text{VI. 34})$$

Вычисления по методу Коуэлла начинаются следующим образом. Зная  $x_0$  и  $x_{-1}$ , можем вычислить

$$x_0 - x_{-1} = \Delta_{-1/2}.$$

После этого, отбрасывая в формуле (VI. 33) неизвестные нам пока члены с разностями  $f_0^2, f_0^4, \dots$ , полагаем в первом приближении

$$\Delta_0^2 = f_0 = w^2 F_0 = w^2 F(x_0, t_0). \quad (\text{VI. 35})$$

Эта величина может быть легко вычислена непосредственно по уравнению (VI. 17), так как функция  $F(x, t)$  должна быть нам задана в явном виде. После того как нам стала известна вторая разность  $\Delta_0^2$ , можем легко вычислить по формулам (VI. 34)

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1/2} &= \Delta_{-1/2} + \Delta_0^2, \\
 x_1 &= x_0 + \Delta_{1/2}.
 \end{aligned} \quad (\text{VI. 36})$$

Имея теперь  $x_{-1}$ ,  $x_0$ ,  $x_1$ , можем вычислить  $f_0^2$  и, следовательно, найти по формуле (VI.33) более точное значение для  $\Delta_0^2$ , а именно

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2. \quad (\text{VI. 37})$$

После этого по формулам (VI.36) находим более точное значение  $x_1$ . Переходим теперь к вычислению  $x_{-2}$  по формулам (VI.34)

$$\begin{aligned} \Delta_{-3/2} &= \Delta_{-1/2} + \Delta_{-1}^2, \\ x_{-2} &= x_{-1} + \Delta_{-3/2}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 38})$$

Неизвестная нам вторая разность  $\Delta_{-1}^2$  находится по формуле (VI.33).

$$\Delta_{-1}^2 = f_{-1} = \omega^2 F(x_{-1}, t_{-1}).$$

После того как вычислено в первом приближении  $x_{-2}$ , находим  $f_{-1}^2$  и уточняем значение второй разности

$$\Delta_{-1}^2 = f_{-1} + \frac{1}{12} f_{-1}^2. \quad (\text{VI. 39})$$

Теперь по формулам (VI.38) находим во втором приближении значение  $x_{-2}$ . Точно так же вычисляем и  $x_2$ . Теперь можно найти четвертую разность  $f_0^4$ , как это видно из следующей схемы:

$x_{-2}$	$F(x_{-2}, t_{-2})$	$f_{-2}$				
			$f'_{-3/2}$			
$x_{-1}$	$F(x_{-1}, t_{-1})$	$f_{-1}$		$f_{-1}^2$		
			$f'_{-1/2}$		$f_{-1/2}^3$	
$x_0$	$F(x_0, t_0)$	$f_0$		$f_0^2$		$f_0^4$
			$f'_{1/2}$		$f_{1/2}^3$	
$x_1$	$F(x_1, t_1)$	$f_1$		$f_1^2$		
			$f'_{3/2}$			
$x_2$	$F(x_2, t_2)$	$f_2$				

Возвращаемся снова к вычислению разности  $\Delta_0^{-2}$ . По формуле (VI.33) находим новое, еще более точное значение

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2 - \frac{1}{240} f_0^4 \quad (\text{VI. 40})$$

и затем по формулам (VI. 36) — более точное значение  $x_1$ . Если интервал интегрирования выбран таким образом, что шестая разность не больше, чем двухзначное число, можем ограничиться в формуле (VI. 33) тремя первыми членами. Поэтому значение  $\Delta_0^2$ , полученное по формуле (VI. 40), можно считать окончательным.

Когда интегрирование продвинулось достаточно далеко, то для вычисления  $\Delta_k^2$  по формуле (VI. 33) неизвестные разности  $f_k^2$  и  $f_k^4$  определяются в первом приближении при помощи экстраполирования „на глазок“ шестых разностей. После этого находятся соответствующие  $x_{k+1}$ ,  $x_{k+2}$ , ... и разности перевычисляются обычным способом. Затем повторяют вычисление  $x_{k+1}$ ,  $x_{k+2}$ , ... Если интервал интегрирования достаточно мал, то значения  $x_{k+1}$ ,  $x_{k+2}$ , ... не изменяются, а следовательно, не изменяются и разности.

Данный метод был успешно применен Коуэллом (1870—1949) и Кроммелином (1865—1939) в 1908 г. к движению восьмого спутника Юпитера и в 1910 г. при изучении движения кометы Галлея за два оборота 1759—1835—1910 гг. В работе о движении кометы Галлея Коуэлл указал на возможность некоторого улучшения своего метода. Этот „второй метод“ Коуэлла, как выяснилось впоследствии, совершенно идентичен с методом численного интегрирования, который предложил Гаусс („метод квадратур“).

**4. Второй метод Коуэлла.** Для вывода формул, определяющих второй метод Коуэлла, просуммируем равенства (VI. 34) от  $k=1$  до  $k=n-1$ . Получим

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1/2} &= \Delta_{-1/2} + \sum_0^{n-1} \Delta_k^2, \\ x_n &= x_0 + \sum_0^{n-1} \Delta_{k+1/2}. \end{aligned} \tag{VI. 41}$$

Но из формулы (VI. 33) следует, что

$$\sum_0^{n-1} \Delta_k^2 = \sum_0^{n-1} f_k + \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_k^2 - \frac{1}{240} \sum_0^{n-1} f_k^4 + \dots \tag{VI. 42}$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} f_0^m &= f_{1/2}^{m-1} - f_{-1/2}^{m-1}, \\ f_1^m &= f_{3/2}^{m-1} - f_{1/2}^{m-1}, \\ f_2^m &= f_{5/2}^{m-1} - f_{3/2}^{m-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{n-1}^m &= f_{n-1/2}^{m-1} - f_{n-3/2}^{m-1}. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$\sum_0^{n-1} f_k^m = f_{n-1/2}^{m-1} - f_{-1/2}^{m-1}. \quad (\text{VI. 43})$$

Мы можем теперь преобразовать равенство (VI. 42) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} \Delta_k^2 &= (f_{n-1/2}^{-1} - f_{-1/2}^{-1}) + \frac{1}{12} (f'_{n-1/2} - f'_{-1/2}) - \\ &\quad - \frac{1}{240} (f^3_{n-1/2} - f^3_{-1/2}) + \dots = \\ &= f_{n-1/2}^{-1} + \frac{1}{12} f'_{n-1/2} - \frac{1}{240} f^3_{n-1/2} + \dots - \\ &\quad - f_{-1/2}^{-1} - \frac{1}{12} f'_{-1/2} + \frac{1}{240} f^3_{-1/2} + \dots \quad (\text{VI. 44}) \end{aligned}$$

Подставляя (VI. 44) в формулу (VI. 41), находим

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1/2} &= \Delta_{-1/2} + f_{n-1/2}^{-1} + \frac{1}{12} f'_{n-1/2} - \frac{1}{240} f^3_{n-1/2} + \dots - \\ &\quad - f_{-1/2}^{-1} - \frac{1}{12} f'_{-1/2} + \frac{1}{240} f^3_{-1/2} + \dots \quad (\text{VI. 45}) \end{aligned}$$

Полагая в (VI. 45)

$$\begin{aligned} f_{-1/2}^{-1} &= \Delta_{-1/2} - \frac{1}{12} f'_{-1/2} + \frac{1}{240} f^3_{-1/2} - \frac{31}{60480} f^5_{-1/2} + \\ &\quad + \frac{289}{3628800} f^7_{-1/2} - \frac{317}{22809600} f^9_{-1/2} + \\ &\quad + \frac{6803477}{2615348736000} f^{11}_{-1/2} - \dots, \quad (\text{VI. 46}) \end{aligned}$$



что можно всегда сделать, пользуясь произвольностью начального значения в столбце первых сумм, получим окончательно

$$\Delta_{n-1/2} = f_{n-1/2}^{-1} + \frac{1}{12} f'_{n-1/2} - \frac{1}{240} f_{n-1/2}^3 + \dots \quad (\text{VI. 47})$$

Обратимся теперь ко второму уравнению (VI. 34). Заменяя в (VI. 47) букву  $n$  на  $k+1$ , напишем

$$\Delta_{k+1/2} = f_{k+1/2}^{-1} + \frac{1}{12} f'_{k+1/2} - \frac{1}{240} f_{k+1/2}^3 + \dots \quad (\text{VI. 48})$$

Нам надо теперь просуммировать это выражение от  $k=0$  до  $k=n-1$ . Получим

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} \Delta_{k+1/2} &= \sum_0^{n-1} f_{k+1/2}^{-1} + \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f'_{k+1/2} - \\ &- \frac{1}{240} \sum_0^{n-1} f_{k+1/2}^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI. 49})$$

Но на основании равенства (VI. 43) имеем

$$\sum_0^{n-1} f_{k+1/2}^m = f_n^{m-1} - f_0^{m-1},$$

поэтому равенство (VI. 49) можем теперь написать так:

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} \Delta_{k+1/2} &= (f_n^{-2} - f_0^{-2}) + \frac{1}{12} (f_n - f_0) - \frac{1}{240} (f_n^2 - f_0^2) + \\ &+ \dots = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \dots - \\ &- f_0^{-2} - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI. 50})$$

Подставляя (VI. 50) во второе равенство (VI. 41), получим

$$x_n = x_0 + f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \dots - \\ - f_0^{-2} - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \dots \quad (\text{VI. 51})$$

Пользуясь произвольностью начального значения в столбце вторых сумм, положим

$$f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60\,480} f_0^4 + \frac{289}{3\,628\,800} f_0^6 - \\ - \frac{317}{22\,809\,600} f_0^8 + \frac{6\,803\,477}{2\,615\,348\,736\,000} f_0^{10} - \dots \quad (\text{VI. 52})$$

Теперь формула (VI. 51) окончательно запишется так:

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60\,480} f_n^4 - \frac{289}{3\,628\,800} f_n^6 + \\ + \frac{317}{22\,809\,600} f_n^8 - \frac{6\,803\,477}{2\,615\,348\,736\,000} f_n^{10} + \dots \quad (\text{VI. 53})$$

Формула (VI. 53) определяет второй метод Коуэлла. Начальные члены столбца первых сумм и столбца вторых сумм вычисляются по формулам (VI. 46) и (VI. 52), т. е. уже не являются произвольными.

Вычисления по формуле (VI. 53) ведутся так же, как и в случае первого метода Коуэлла, т. е. исходя из заданных  $x_0$  и  $\Delta_{-1/2} = x_0 - x_1$  определяют несколько смежных значений  $x_1, x_{-2}, x_2, \dots$ . Затем нужные разности  $f_n^2$  и  $f_n^4$  находят в первом приближении, экстраполируя „на глазок“ шестые разности.

**5. Второй метод Коуэлла. Продолжение.** Рассмотрим теперь второй случай интегрирования уравнения (VI. 17), когда искомый интеграл  $x(t)$  задан начальными значениями

$$x_0 = x(t_0), \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} \quad (\text{VI. 54})$$

Наша задача заключается в нахождении координат  $x_1, x_2, \dots$ . Первая из формул (VI. 32) дает

$$w \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 = \Delta_0 - \frac{1}{6} \Delta_0^3 + \frac{1}{30} \Delta_0^5 - \dots$$

С другой стороны, на основании формулы (VI. 53) мы можем написать

$$x_0 = \Delta_0^0 = f_0^{-2} + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f_0^2 + \dots$$

И аналогично

$$\Delta_0^m = f_0^{m-2} + \frac{1}{12} f_0^m - \frac{1}{240} f_0^{m+2} + \dots,$$

повтому

$$\begin{aligned} w \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 &= f_0^{-1} + \frac{1}{12} f_0' - \frac{1}{240} f_0^3 + \dots - \\ &\quad - \frac{1}{6} \left( f_0' + \frac{1}{12} f_0^3 - \frac{1}{240} f_0^5 + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{1}{30} \left( f_0^3 + \frac{1}{12} f_0^5 - \frac{1}{240} f_0^7 + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

или

$$w \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 = f_0^{-1} - \frac{1}{12} f_0' + \frac{11}{720} f_0^3 - \frac{191}{60480} f_0^5 + \dots \quad (\text{VI. 55})$$

По определению

$$f_0^{-1} = \frac{f_{1/2}^{-1} + f_{-1/2}^{-1}}{2}$$

или

$$f_0^{-1} = \frac{1}{2} (f_{1/2}^{-1} + f_{-1/2}^{-1} - f_0) = f_{1/2}^{-1} - \frac{1}{2} f_0. \quad (\text{VI. 56})$$

Подставляя (VI. 56) в (VI. 55), окончательно получим

$$\begin{aligned} f_{1/2}^{-1} &= w \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0' - \frac{11}{720} f_0^3 + \frac{191}{60480} f_0^5 - \frac{2497}{3628000} f_0^7 + \\ &\quad + \frac{14797}{95800320} f_0^9 - \frac{92427157}{2615348736000} f_0^{11} + \dots \quad (\text{VI. 57}) \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае можно пользоваться для численного интегрирования формулами (VI. 52) и (VI. 53), которые удовлетворяют условию  $x_0 = x(t_0)$ , но вычисление исходного члена в столбце первых сумм не-

обходимо провести не по формуле (VI. 46), а по формуле (VI. 57).

Отличительной особенностью метода численного интегрирования возмущенных координат является его универсальность. В то время как аналитические методы небесной механики применимы только в том случае, когда возмущения малы, а параметры орбит ограничены некоторыми пределами, при численном интегрировании уравнений движения вообще не возникает вопроса о характере орбит рассматриваемых тел и о величине возмущений.

Численные методы небесной механики, разработанные Клеро (1713—1765), в течение XVIII в. применялись исключительно к кометам; в течение XIX в. эти методы получили дальнейшее развитие и нашли широкое применение для вычисления возмущений малых планет и, наконец, в середине XX в. появление быстродействующих электронных вычислительных машин позволило применить численные методы в теории движения больших планет, а затем и в задачах астродинамики. Принципиальным недостатком численных методов является быстрое накопление ошибок округления на каждом шаге интегрирования уравнений движения. Этот вопрос детально изучался в Институте теоретической астрономии в работах В. Ф. Мячина. После того как сделано  $n$  шагов численного интегрирования, ошибки в полученных координатах оказываются пропорциональными  $n^3$ , иными словами, после 100 шагов интегрирования ошибки округления в исходных значениях координат увеличиваются в 1000 раз, т. е. три последних вычислительных знака в результатах будут ошибочны. Систематическое накопление ошибки в процессе интегрирования ограничивает возможности численных методов по сравнению с аналитическими методами, которые свободны от этого недостатка.

Предположим, например, что мы вычисляем координаты какого-либо объекта с 15 десятичными знаками на протяжении  $10^4$  оборотов. При каждом обороте необходимо сделать около 100 шагов численного интегрирования, чтобы обеспечить достаточную малость высших разностей. После  $10^4$  оборотов (или  $10^6$  шагов интегрирования) накопившаяся ошибка составит  $10^9$  единиц последнего десятичного знака. Таким образом, к концу интегрирования мы сохраним точность в координатах всего

в шесть десятичных знаков. В случае близкого искусственного спутника Земли  $10^4$  оборотов соответствуют приблизительно 666 суткам; для Меркурия это составит около 2500 лет.

Однако, если мы захотим увеличить точность координат до девяти знаков, теория движения Меркурия (а следовательно, и общая численная теория движения всех больших планет) может быть построена только на 25 лет! Возможности аналитических методов значительно шире, а поэтому они и в настоящее время составляют основу небесной механики.

**6. Второй метод Коуэлла. Численный пример.** В качестве числового примера мы рассмотрим вычисление возмущенных координат периодической кометы Брукса, выполненное выдающимся советским специалистом в области кометной астрономии А. Д. Дубяго (1903—1959).

Исходными данными являются оскулирующие элементы орбиты.

Эпоха оскуляции 1939 г. сент. 24.0. всем. вр.

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 1^\circ 13' 2''.76, \\ \omega &= 195^\circ 41' 2''.18, \\ \Omega &= 177^\circ 42' 16''.12, \\ i &= 5^\circ 32' 45''.78, \\ \varphi &= 29^\circ 4' 55''.49, \\ n &= 510''.66170 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Эклиптика и} \\ \text{равноденствие} \\ 1950.0 \end{array} \quad (\text{VI. 57}^*)$$

Необходимо вычислить точные возмущения от Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна до эпохи следующего появления кометы в 1946 г. Исходные координаты и скорости вычисляются по формулам задачи двух тел в экваториальной системе координат для момента оскуляции  $t_0 = 1939$  сент. 24.0.

$$\begin{aligned} x &= A_x (\cos E - e) + B_x \sin E, \\ y &= A_y (\cos E - e) + B_y \sin E, \end{aligned} \quad (\text{VI. 58})$$

$$z = A_z (\cos E - e) + B_z \sin E,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{r \sqrt{a}} (B_x \cos E - A_x \sin E),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{r \sqrt{a}} (B_y \cos E - A_y \sin E), \quad (\text{VI. 59})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{k}{r \sqrt{a}} (B_z \cos E - A_z \sin E),$$

$$\begin{aligned}
 A_x &= aP_x, & B_x &= a \cos \varphi Q_x, \\
 A_y &= aP_y, & B_y &= a \cos \varphi Q_y, \\
 A_z &= aP_z, & B_z &= a \cos \varphi Q_z,
 \end{aligned}
 \tag{VI. 60}$$

$$\left.
 \begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega, \\
 P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega) \cos \varepsilon - \\
 &\quad - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\
 P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega) \sin \varepsilon + \\
 &\quad + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega, \\
 Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega) \cos \varepsilon - \\
 &\quad - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\
 Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega) \sin \varepsilon + \\
 &\quad + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon.
 \end{aligned}
 \right\}
 \tag{VI. 61}$$

### Уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M_0 + n(t - t_0)$$

решается относительно  $E$  последовательными приближениями. Используя систему оскулирующих элементов, находим

$$x = +1.786990050, \quad \omega \frac{dx}{dt} = -0.0425078129,$$

$$y = +0.535836158, \quad \omega \frac{dy}{dt} = +0.1400120441,$$

$$z = +0.165843768, \quad \omega \frac{dz}{dt} = +0.0454068136.$$

Интервал интегрирования принят равным  $\omega = 10$  суток. Когда комета находилась на расстоянии от Солнца, превышающем 3.5 а. е., вычисления велись с 20-дневными промежутками времени. Переход от одного интервала к другому в процессе интегрирования не представляет затруднений. Если мы хотим обеспечить окончательную

точность координат в семь десятичных знаков, то число знаков, с которыми вычисляются функции

$$\begin{aligned} f_x &= w^2 \frac{d^2x}{dt^2}, \\ f_y &= w^2 \frac{d^2y}{dt^2}, \\ f_z &= w^2 \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned} \quad (\text{VI. 62})$$

а также суммы и разности должно быть на два и три знака больше.

Для того чтобы составить предварительную таблицу разностей величины  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  вычисляются для ряда моментов по невозмущенным координатам кометы. Мы ограничимся вычислениями для координаты  $x$  (табл. 48).

Т а б л и ц а 48

Всемирное время	$x \cdot 10^7$	$f_x \cdot 10^7$
1939 авг. 25.0	+18775329.42	-83485.81
сент. 4.0	18556525.50	83402.02
14.0	18254379.04	82391.05
24.0	17869900.50	80466.30
окт. 4.0	17405011.04	77679.96
14.0	16862490.73	74119.02
24.0	16245892.03	69898.51

Составим теперь предварительную таблицу сумм и разностей для координаты  $x$  (табл. 49). Аналогичные таблицы должны быть составлены для координат  $y$ ,  $z$ .

Все величины в табл. 49 приведены в единицах седьмого знака. Первый член в таблице вторых сумм вычисляется по формуле (VI. 52), которая дает в седьмом десятичном знаке

$$\begin{aligned} f_0^{-2} &= +17869900.50 + 6705.52 + 3.59 + 0.02 = \\ &= +17876609.63. \end{aligned}$$

Начальный член в таблице первых сумм вычисляется по формуле (VI. 57), которая дает

$$\begin{aligned} f_{1/2}^{-1} &= -425078.13 - 40233.15 + 196.30 + 1.06 + 0.02 = \\ &= -465113.90. \end{aligned}$$

Во втором приближении величины  $f_x, f_y, f_z$  определяются от момента к моменту, начиная от эпохи оскуляции 1939 сент. 24.0, причем  $x, y, z$  вычисляются на каждый момент по формуле (VI. 53).

Так как полученные в первом приближении исходные члены рядов сумм не изменились, то в дальнейших приближениях нет надобности. Предварительная таблица разностей для  $x$  представлена в табл. 50.

А. Д. Дубяго экстраполирует „на глазок“ третью разность, полагая ее равной  $f_x^3 = -133$ . После этого легко находим

$$f_x^2 = +108, f_x^1 = +5478, f_x = -49175.$$

Экстраполируем теперь вторую разность на момент дек. 3.0, полагая ее равной  $f_x^2 = 0$ . Мы нашли теперь все необходимые данные для вычисления  $x_n$  на момент дек. 3.0. По формуле (VI. 53) находим

$$x_n = +1.3130294.$$

Четвертые разности не влияют на результат, потому мы их не вычисляем. Находим аналогично  $y_n$  и  $z_n$ , и получаем окончательное значение  $f_x$  (а также  $f_y$  и  $f_z$ ), которое и выписываем в табл. 50 вместо предварительного значения, стоящего в квадратных скобках. Это окончательное значение равно

$$f_x = -49176.38.$$

Разности  $f_x^1, f_x^2, f_x^3$  в квадратных скобках меняются незначительно, и потому значение  $x_n$ , полученное выше, является окончательным.

Интересно сравнить влияние различных планет на движение кометы Брукса. Обозначим

$$f_x = -k^2 w^2 \frac{x}{r^3} + \sum_i k^2 w^2 m_i \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \\ - \sum_i k^2 w^2 m_i \frac{x_i}{r_i^3} = \text{I} + \text{II} + \text{III}. \quad (\text{VI. 63})$$

Численные значения отдельных членов, входящих в формулу (VI. 63), приведены (в седьмом десятичном знаке) на момент дек. 3.0 в табл. 51.



Таблица 49

## Таблица сумм и разностей

Всемирное время	$f_x^{-2}$	$f_x^{-1}$	$f_x$	$f_x^1$	$f_x^2$	$f_x^3$	$f_x^4$	$f_x^5$	$f_x^6$
1939 авг. 25.0			-83485.81	+ 83.79					
сент. 4.0			-83402.02	+1010.97	+927.18	- 13.40			
14.0			-82391.05	+1924.75	+913.78	- 52.19	-38.79	+3.99	
24.0	-17876609.63	-465113.90	-80466.30	+2786.34	+861.59	- 86.99	-34.80	-6.76	+2.77
окт. 4.0	+17411495.73	-542793.86	-77679.96	+3560.95	+774.60	-115.03	-28.04		
14.0	+16868701.87	-616912.88	-74119.02	+4220.51	+659.57				
24.0	+16251788.99		-69898.51						

Таблица сумм и разностей

Всемірное время	$f_x^2$	$f_x^{-1}$	$f_x$	$f_x^1$	$f_x^2$	$f_x^3$
1939 сент. 24.0	+17876609.63	-465113.90	-77679.90	+3561.04		
окт. 4.0	+17411495.73	-542793.80	-74118.86	+4220.61	+659.57	-133.81
14.0	+16868701.93	-616912.66	-69898.25	+4746.37	+525.76	-142.96
24.0	+16251789.27	-686810.91	-65151.88	+5129.17	+382.80	-142.21
нояб. 3.0	+15564978.36	-751962.79	-60022.71	+5369.76	+240.59	
13.0	+14813015.57	-811985.50	-54652.95	[+5478]	[+108]	[-133]
23.0	+14001030.07	-866638.45	[-49175]			
дек. 3.0	+13134391.62				[0]	

Т а б л и ц а 51

Влияние различных планет на движение кометы Брукса  
( $t = 1939$  дек. 3.0)

		Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн
I	-49185.06	—	—	—	—	—
II	+ 21.99	-0.06	-0.60	0.00	+21.26	+1.39
III	- 13.31	-0.75	-0.32	-0.04	-11.35	-0.85
$f_x$	-49176.38	—	—	—	—	—

Из табл. 51 наглядно видно преобладающее влияние Солнца (I) на движение кометы по сравнению с планетными возмущениями (II). Члены (III) характеризуют действие планет на Солнце.

Вычисление возмущенных координат кометы Брукса было доведено А. Д. Дубяго до 1946 сент. 27.0, после чего им были вычислены координаты и компоненты скорости для новой эпохи оскуляции 1946 авг. 28.0

$$\begin{aligned}
 x &= +1.820603519, \\
 y &= +0.443917934, \\
 z &= +0.136052980, \\
 w \frac{dx}{dt} &= -0.214771303, \\
 w \frac{dy}{dt} &= +0.820516946, \\
 w \frac{dz}{dt} &= +0.266059381.
 \end{aligned}$$

Компоненты скорости вычисляются по формуле (VI. 55), которую мы можем написать для произвольного  $n$

$$\begin{aligned}
 w \left( \frac{dx}{dt} \right)_n &= f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n' + \frac{11}{720} f_n'' - \frac{191}{60480} f_n''' + \frac{2497}{3628000} f_n^{(4)} - \\
 &- \frac{14797}{95800320} f_n^{(5)} + \frac{92427157}{2615348736000} f_n^{(6)} - \dots \quad (\text{VI. 64})
 \end{aligned}$$

Переходим к вычислению оскулирующих элементов орбиты. Для этого служит следующая система формул:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r \frac{dr}{dt} &= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}, \\ v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \end{aligned} \quad (\text{VI. 65})$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{k^2},$$

$$e \sin E = \frac{r \frac{dr}{dt}}{k \sqrt{a}}, \quad (\text{IV. 66})$$

$$e \cos E = \frac{rv^2}{k^2} - 1,$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= e, \\ M &= E - e \sin E, \end{aligned} \quad (\text{VI. 67})$$

$$\begin{aligned} A_x &= aP_x = x \frac{a}{r} \cos E - \frac{1}{k} \frac{dx}{dt} a^{3/2} \sin E, \\ A_y &= aP_y = y \frac{a}{r} \cos E - \frac{1}{k} \frac{dy}{dt} a^{3/2} \sin E, \end{aligned} \quad (\text{VI. 68})$$

$$A_z = aP_z = z \frac{a}{r} \cos E - \frac{1}{k} \frac{dz}{dt} a^{3/2} \sin E,$$

$$\begin{aligned} B_x &= a \cos \varphi Q_x = x \frac{a}{r} \sin E + \frac{1}{k} \frac{dx}{dt} a^{3/2} (\cos E - e), \\ B_y &= a \cos \varphi Q_y = y \frac{a}{r} \sin E + \frac{1}{k} \frac{dy}{dt} a^{3/2} (\cos E - e), \end{aligned} \quad (\text{VI. 69})$$

$$B_z = a \cos \varphi Q_z = z \frac{a}{r} \sin E + \frac{1}{k} \frac{dz}{dt} a^{3/2} (\cos E - e),$$

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \omega &= P_x \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\ \sin i \cos \omega &= Q_x \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\ \sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\ \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \\ \cos i &= -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \operatorname{cosec} \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 70})$$

По формулам (VI. 65)—(VI. 70) получена следующая система элементов орбиты:

Эпоха и оскуляция 1946 авг. 28.0 вс. вр.

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0^\circ 18' 2''.98, \\ \omega &= 195^\circ 36' 19''.00, \\ \Omega &= 177^\circ 41' 54''.46, \\ i &= 5^\circ 32' 23''.35, \\ \varphi &= 28^\circ 59' 20''.38, \\ n &= 509''.74848. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Эклиптика и} \\ \text{равноденствие} \\ 1950.0 \end{array} \quad (\text{VI. 71})$$

Сравнение систем (VI. 71) и (VI. 57\*) показывает, что элементы орбиты изменились незначительно. Это объясняется тем, что за время рассмотренного оборота кометы вокруг Солнца она не имела тесных сближений с большими планетами.

### § 3. Гравитационные сферы больших планет, Луны и Солнца

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим ограниченную задачу трех тел: Солнце, планета и комета. Обозначим через  $x, y, z$  гелиоцентрические координаты кометы, через  $x_1, y_1, z_1$  гелиоцентрические координаты планеты и через  $m$  ее массу. Напишем дифференциальные уравнения движения кометы в прямоугольной гелиоцентрической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} &= k^2 m \left( \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} &= k^2 m \left( \frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= k^2 m \left( \frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right), \end{aligned} \quad (\text{VI. 72})$$

где  $\Delta$  — расстояние кометы от планеты, которую мы рассматриваем как возмущающее тело. Величина  $\Delta$  определяется по формуле

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \quad (\text{VI. 73})$$

Напишем теперь уравнения гелиоцентрического движения планеты

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x_1}{r_1^3} &= 0, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y_1}{r_1^3} &= 0, \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z_1}{r_1^3} &= 0.\end{aligned}\tag{VI. 74}$$

Примем центр планеты за начало системы координат, оси которой параллельны осям гелиоцентрической системы, и соответствующие координаты кометы обозначим через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Тогда

$$\xi = x - x_1, \quad \eta = y - y_1, \quad \zeta = z - z_1.$$

Вычитая из уравнений (VI. 72) соответствующие уравнения (VI. 74), получим планетоцентрические уравнения движения кометы в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2m\frac{\xi}{\Delta^3} &= k^2\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3}\right), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2m\frac{\eta}{\Delta^3} &= k^2\left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3}\right), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2m\frac{\zeta}{\Delta^3} &= k^2\left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3}\right).\end{aligned}\tag{VI. 75}$$

Обозначим через  $R$  ускорение, которое Солнце сообщает комете в том случае, когда Солнце принимается за центральное тело, а через  $F$  обозначим возмущающее ускорение, вызываемое притяжением планеты. Уравнения (VI. 72) показывают, что

$$R = \frac{k^2}{r^2},\tag{VI. 76}$$

$$\begin{aligned}F = k^2m \left[ \left( \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right)^2 + \left( \frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right)^2 \right]^{1/2}.\end{aligned}\tag{VI. 77}$$

Обозначим теперь через  $R_1$  ускорение, которое планета сообщает комете в том случае, когда планета при-

нимается за центральное тело, а через  $F_1$  обозначим возмущающее ускорение, вызываемое притяжением Солнца. Тогда из уравнений (VI. 75) находим

$$R_1 = \frac{k^2 m}{\Delta^2}, \quad (\text{VI. 78})$$

$$F_1 = k^2 \left[ \left( \frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right)^2 + \left( \frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right)^2 + \left( \frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{VI. 79})$$

Положим

$$-\frac{x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta}{r_1 \Delta} = \cos \varphi, \quad (\text{VI. 80})$$

$$\frac{\Delta}{r_1} = u. \quad (\text{VI. 81})$$

Угол  $\varphi$  определяет угол между направлениями из центра планеты на комету и на Солнце.

Преобразуем выражения для  $F$  и  $F_1$ . Так как

$$F = k^2 m \left[ \frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{r_1^4} + 2 \frac{x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta}{\Delta^3 r_1^3} \right]^{1/2},$$

то, учитывая (VI. 80), находим

$$F = k^2 m \left[ \frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{r_1^4} - \frac{2 \cos \varphi}{\Delta^2 r_1^2} \right]^{1/2}$$

или, вводя величину  $u$ , получим

$$F = \frac{k^2 m}{\Delta^2} \left( 1 - 2u^2 \cos \varphi + u^4 \right)^{1/2}. \quad (\text{VI. 82})$$

Аналогично преобразуем выражение для  $F_1$ . Так как

$$F_1 = k^2 \left[ \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r^4} - 2 \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3 r_1^3} \right]^{1/2}$$

и так как

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = x_1(x_1 + \xi) + y_1(y_1 + \eta) + z_1(z_1 + \zeta) = r_1^2(1 - u \cos \varphi),$$

$$r^2 = (x_1 + \xi)^2 + (y_1 + \eta)^2 + (z_1 + \zeta)^2 = r_1^2(1 - 2u \cos \varphi + u^2),$$

то  $F_1$  можно преобразовать к виду

$$F_1 = \frac{k^2 u^2}{\Delta^2 (1 - 2u \cos \varphi + u^2)} \{1 + (1 - 2u \cos \varphi + u^2)^2 - 2(1 - u \cos \varphi)(1 - 2u \cos \varphi + u^2)^{1/2}\}^{1/2}. \quad (\text{VI. 83})$$

Используя теперь малость величины  $u$ , преобразуем выражения (VI. 76), (VI. 82) и (VI. 83) к окончательному виду

$$R = \frac{k^2}{r_1^2}, \quad (\text{VI. 84})$$

$$F = R_1 = \frac{k^2 m}{\Delta^2}, \quad (\text{VI. 85})$$

$$F_1 = \frac{k^2 \Delta}{r_1^3} (1 + 3 \cos^2 \varphi)^{1/2}. \quad (\text{VI. 86})$$

**2. Сфера действия планеты.** Под сферой действия планеты понимают ту область пространства, в которой при вычислении возмущений целесообразно принимать планету за центральное тело, а Солнце — за возмущающее.

Понятие о сфере действия введено в астрономию Лапласом в связи с изучением движения комет при их сближении с большими планетами. Особенно часто приходится иметь дело с прохождением комет через сферу действия Юпитера. Поверхность, ограничивающая сферу действия, определяется условием

$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1}. \quad (\text{VI. 87})$$

Внутри сферы действия

$$\frac{F}{R} > \frac{F_1}{R_1}. \quad (\text{VI. 88})$$

Подставляя (VI. 84)—(VI. 86) в уравнение (VI. 87), находим для радиуса сферы действия следующее выражение:

$$\Delta_1 = r_1 \left( \frac{m^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}} \right)^{1/6}. \quad (\text{VI. 89})$$

Мы получили уравнение в полярных координатах, определяющее поверхность вращения, которая ограничивает сферу действия. Поверхность (VI. 89) действительно мало



## Радиусы сфер действия больших планет

	$\Delta_1 \text{ min}$	$\Delta_1 \text{ max}$	$\Delta_1 \text{ min}$	$\Delta_1 \text{ max}$
	в в. с.		в млн км	
Меркурий . . . . .	0.00060	0.00091	0.090	0.136
Венера . . . . .	0.00409	0.00415	0.612	0.621
Земля . . . . .	0.00610	0.00631	0.913	0.944
Марс . . . . .	0.00350	0.00422	0.524	0.631
Юпитер . . . . .	0.30665	0.33786	45.87	50.54
Сатурн . . . . .	0.34428	0.38488	51.50	57.58
Уран . . . . .	0.32991	0.36261	49.35	54.25
Нептун . . . . .	0.57551	0.58547	86.10	87.59
Плутон . . . . .	0.17825	0.29523	26.67	44.17

отличается от сферы. Отношение наибольшего и наименьшего значений величины  $\Delta$  равно  $2^{1/2} = 1.15$ , причем малая ось направлена из центра планеты к Солнцу. Принято определять сферу действия планеты максимальным радиусом поверхности вращения, т. е.

$$\Delta_1 = r_1 m^{1/2}. \quad (\text{VI. 90})$$

Если комета при своем гелиоцентрическом движении окажется на расстоянии  $\Delta_1$  относительно возмущающей планеты, то в этот момент она вступает в сферу действия планеты. Радиус сферы действия увеличивается при перемещении планеты из перигелия в афелий. В табл. 52 даны значения радиуса сферы действия, соответствующие положению планеты в перигелии (минимальное) и в афелии (максимальное).

Интересно оценить максимальную величину отношения  $\frac{F_1}{R_1}$  для точек, расположенных на поверхности сферы действия. Подставляя (VI. 85) и (VI. 86), находим

$$\frac{F_1}{R_1} = 2m^{1/2}. \quad (\text{VI. 91})$$

Таким образом, это отношение зависит только от массы планеты и не зависит от ее расстояния до Солнца. Численные значения величины (VI. 91) сопоставлены в табл. 53.

Т а б л и ц а 53  
Отношение  $F_1 : R_1$

Меркурий . . . . .	0.088	Юпитер . . . . .	0.50
Венера . . . . .	0.150	Сатурн . . . . .	0.40
Земля . . . . .	0.158	Уран . . . . .	0.26
Марс . . . . .	0.100	Нептун . . . . .	0.28
		Плутон . . . . .	0.16

**3. Сфера тяготения планеты.** Под сферой тяготения планеты мы будем понимать область пространства, внутри которой притяжение планеты сильнее притяжения Солнца. Поверхность, ограничивающая сферу тяготения, определяется условием

$$R_1 = R. \quad (\text{VI. 92})$$

Внутри сферы тяготения

$$R_1 > R. \quad (\text{VI. 93})$$

Подставляя (VI. 84) и (VI. 85) в уравнение (VI. 92), получим выражение для определения радиуса сферы тяготения планеты в форме

$$\Delta_2 = r_1 m^{1/2}. \quad (\text{VI. 94})$$

Приведем для  $r_1$  минимальное и максимальное значение радиуса-вектора планеты. Тогда для радиуса сферы тяготения планеты получим численные значения, представленные в табл. 54.

Интересно отметить, что из всех спутников больших планет только Луна ( $a = 0.384$  млн км) постоянно находится за пределами сферы тяготения планеты. Внешние спутники Юпитера, VIII и IX (оба с обратным движением), имеют большие полуоси орбит, равные соответственно 23.5 и 23.7 млн км и, таким образом, также оказываются за пределами сферы тяготения планеты, но только тогда, когда Юпитер находится вблизи перигелия или когда сами спутники находятся вблизи афелиев своих орбит.

**4. Гравитационная сфера Хилла.** Либрационная точка  $L_1$  определяет максимальное значение радиуса замкнутой области, в которой возможно устойчивое, по Хиллу, движение спутников. При больших значениях радиуса

Таблица 54

## Радиусы сфер тяготения больших планет

	$\Delta_2$ min	$\Delta_2$ max	$\Delta_2$ min	$\Delta_2$ max
	в а. е.		в млн км	
Меркурий . . . . .	0.00013	0.00019	0.019	0.029
Венера . . . . .	0.00112	0.00114	0.168	0.171
Земля . . . . .	0.00171	0.00177	0.256	0.265
Марс . . . . .	0.00078	0.00095	0.117	0.142
Юпитер . . . . .	0.15298	0.16855	22.89	25.22
Сатурн . . . . .	0.15222	0.17017	22.77	25.46
Уран . . . . .	0.12091	0.13289	18.09	19.88
Нептун . . . . .	0.21452	0.21823	32.09	32.65
Плутон . . . . .	0.04959	0.08214	7.42	12.29

область возможных движений перестает быть замкнутой и объединяется с областью возможных движений вокруг Солнца. Расстояние  $\Delta_3$  либрационной точки  $L_1$  от планеты определяется следующей формулой:

$$\Delta_3 = a \left( \mu - \frac{1}{3} \mu^2 - \frac{1}{9} \mu^3 \right), \quad (\text{VI. 95})$$

где

$$\mu = \left( \frac{m}{3} \right)^{1/3}$$

малая величина для планет Солнечной системы. Значения  $\mu$  сопоставлены в табл. 55.

Таблица 55

$$\text{Величина } \mu = \left( \frac{m}{3} \right)^{1/3}$$

Меркурий . . . . .	0.0038	Юпитер . . . . .	0.0683
Венера . . . . .	0.0093	Сатурн . . . . .	0.0457
Земля . . . . .	0.0100	Уран . . . . .	0.0244
Марс . . . . .	0.0048	Нептун . . . . .	0.0258
		Плутон . . . . .	0.0097

Таблица 56

## Радиусы сфер Хилла для больших планет

	$\Delta_3$	$\Delta_3$
	в а. е.	в млн км
Меркурий . . . . .	0.00148	0.221
Венера . . . . .	0.00674	1.008
Земля . . . . .	0.01001	1.497
Марс . . . . .	0.00724	1.083
Юпитер . . . . .	0.34697	51.91
Сатурн . . . . .	0.42881	64.15
Уран . . . . .	0.46494	69.56
Нептун . . . . .	0.77035	115.24
Плутон . . . . .	0.38392	57.43

Назовем гравитационной сферой Хилла область пространства с центром в планете и с радиусом, равным  $\Delta_3$ . Численные значения величины  $\Delta_3$ , полученные по формуле (VI. 95), приведены в табл. 56.

Поверхность гравитационной сферы Хилла может рассматриваться как теоретическая граница спутников данной планеты. Вычислим отношение  $\frac{F_1}{R_1}$  для точек, расположенных на поверхности сферы Хилла. Подставляя значения  $F_1$  и  $R_1$  по формулам (VI. 85) и (VI. 86), находим, что максимальное значение величины  $\frac{F_1}{R_1}$  равно

$$\frac{F_1}{R_1} = \frac{2}{3}. \quad (\text{VI. 96})$$

Область пространства, ограниченная поверхностью, на которой  $R_1 = F_1$ , имеет радиус, равный

$$\Delta_4 = r_1 \left( \frac{m}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}} \right)^{1/3}.$$

Эта область мало отличается от сферы, так как отношение наибольшего и наименьшего радиусов равно  $2^{1/3} = 1.26$ . Полагая

$$\Delta_4 = am^{1/3}, \quad (\text{VI. 97})$$

находим, что радиус этой гравитационной сферы приблизительно в  $3^{1/3} = 1.44$  раз больше радиуса сферы Хилла.

**5. Гравитационные сферы Луны.** Применим формулы (VI. 90), (VI. 94) и (VI. 95) для определения гравитационных сфер Луны. В этом случае необходимо рассмотреть два варианта задачи:

- (а) Луна—Земля,
- (б) Луна—Солнце.

Астрономические постоянные должны быть выбраны следующим образом:

Задача (а)	Задача (б)
$a = 384\,400$ км,	$a = 149\,600\,000$ км,
$e = 0.05490$ ,	$e = 0.016751$ ,
$m = 1 : 81.375$ .	$m = 1 : 27\,133\,500$ .

Рассмотрим сначала задачу (а).

Формула (VI. 90) дает для радиуса сферы действия Луны

$$\begin{aligned}\Delta_{1\min} &= 62500 \text{ км,} \\ \Delta_{1\max} &= 69800 \text{ км,} \\ \Delta_{1\text{ср.}} &= 66150 \text{ км.}\end{aligned}$$

Отношение  $\frac{F_1}{R_1}$  на поверхности сферы действия равно

$$\frac{F_1}{R_1} = 2m^{1/3} = 0.83.$$

По формуле (VI. 94) определяем радиус сферы тяготения Луны

$$\begin{aligned}\Delta_{2\min} &= 40300 \text{ км,} \\ \Delta_{2\max} &= 45000 \text{ км,} \\ \Delta_{2\text{ср.}} &= 42650 \text{ км.}\end{aligned}$$

Наконец, по формуле (VI. 95) вычисляем радиус сферы Хилла

$$\Delta_3 = 58050 \text{ км.}$$

Обратим внимание на то, что сфера Хилла по своим размерам меньше, чем сфера действия, тогда как для больших планет, наоборот, сфера Хилла по своим размерам больше сферы действия. Нетрудно убедиться, что

сфера Хилла по своим размерам меньше сферы действия, если  $m > \frac{1}{243}$ . Если  $m > \frac{1}{9}$ , сфера Хилла окажется меньше сферы тяготения.

Рассмотрим теперь задачу (б).

Формула (VI. 90) дает для сферы действия Луны

$$\Delta_{1 \min} = 156\,400 \text{ км,}$$

$$\Delta_{1 \max} = 161\,700 \text{ км,}$$

$$\Delta_{1 \text{ ср.}} = 159\,050 \text{ км.}$$

Радиус сферы тяготения вычисляется по формуле (VI. 94)

$$\Delta_{2 \min} = 28\,200 \text{ км,}$$

$$\Delta_{2 \max} = 29\,200 \text{ км,}$$

$$\Delta_{2 \text{ ср.}} = 28\,700 \text{ км.}$$

Формула (VI. 95) дает радиус сферы Хилла

$$\Delta_3 = 344\,800 \text{ км.}$$

Сравнивая задачи (а) и (б), видим, что для радиуса сферы тяготения Луны должно быть принято значение, соответствующее задаче Луна—Солнце, а для радиуса сферы действия и сферы Хилла—значение, соответствующее задаче Луна—Земля.

**6. Гравитационные сферы Солнца.** Если предположить, что вся масса Галактики сосредоточена в ее центре, а Солнце движется вокруг центра Галактики по кеплеровой орбите, то формулы (VI. 90), (VI. 94) и (VI. 95) могут быть применены для определения размеров гравитационных сфер Солнца.

Примем для массы Галактики значение

$$M = 1.3 \cdot 10^{11} \text{ масс Солнца,}$$

и для радиуса галактической орбиты Солнца величину

$$a = 8 \cdot 10^3 \text{ пс} = 16.5 \cdot 10^8 \text{ а. е.}$$

Результаты вычисления будут следующие:

$$\Delta_1 = 0.29 \text{ пс} = 60\,000 \text{ а. е. (сфера действия),}$$

$$\Delta_2 = 0.022 \text{ пс} = 4\,500 \text{ а. е. (сфера притяжения),}$$

$$\Delta_3 = 1.1 \text{ пс} = 230\,000 \text{ а. е. (сфера Хилла).}$$

Для сравнения напомним, что расстояние от Солнца до  $\alpha$  Центавра равно 1.3 пс, а орбита Плутона имеет радиус, равный 40 а. е.

Если условиться принять за границы Солнечной системы сферу Хилла, то окажется, что эти границы простираются до ближайших звезд.

---

1. Элементы эллиптической орбиты.
2. Средние элементы внутренних планет.
3. Средние элементы внешних планет.
4. Оскулирующие элементы внешних планет.
5. Средние элементы лунной орбиты.
6. Основные астрономические постоянные (Де-Ситтер, 1938 г.).
7. Основные астрономические постоянные (Клеменс, 1948 г.).
8. Астрономические постоянные (МАС, 1964 г.).
9. Таблица малых планет, используемых для определения постоянных каталога слабых звезд.
10. Таблица малых планет с большим суточным движением.
11. Элементы орбит троянцев.
12. Элементы орбит некоторых короткопериодических комет.
13. Элементы орбит некоторых периодических комет с большими афельными расстояниями ( $Q$ ).
14. Тригонометрические функции.
15. Формулы сферической тригонометрии.
16. Разложение координат эллиптического движения в ряды.
17. Таблица перевода англо-американских мер в международную систему единиц (СИ).



## Элементы эллиптической орбиты

Орбита планеты определяется шестью параметрами (рис. 17).

1. Наклон плоскости орбиты к плоскости эклиптики, обозначенный через  $i$ . Наклон может иметь любые значения между  $0$  и  $180^\circ$ . Он считается меньше  $90^\circ$ , если для наблюдателя, находящегося в северном

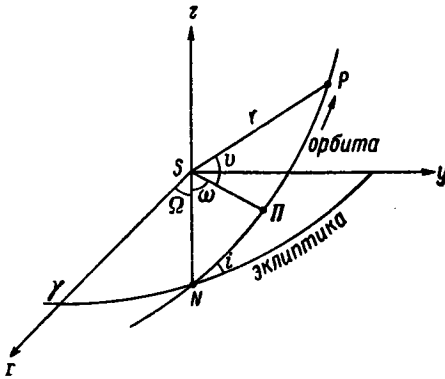


Рис. 17. Эллиптическая орбита планеты в пространстве.

полюсе эклиптики, движение планеты имеет прямое направление (против часовой стрелки), и больше  $90^\circ$  — при обратном движении.

2. Долгота узла, обозначаемая через  $\Omega$  (знак узла). Это гелиоцентрическая долгота точки, в которой планета пересекает эклиптику, переходя из южного полушария в северное. Точка эта называется восходящим узлом орбиты. Долгота узла может принимать любые значения от  $0$  до  $360^\circ$ .

3. Большая полуось орбиты, обозначается через  $a$ . Иногда вместо  $a$  в качестве элемента задается среднее суточное движение, которое обозначается через  $n$ . Между  $n$  и  $a$  существует зависимость

$$n = k \sqrt{1 + m} a^{-3/2},$$

где  $k$  — постоянная Гаусса,  $m$  — масса планеты (масса Солнца равна единице).

4. Эксцентриситет орбиты, обозначается через  $e$ . Если  $b$  — малая полуось орбиты, то

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} : a.$$

Иногда вместо эксцентриситета вводят угол эксцентриситета  $\varphi$ , который определяется соотношением

$$\sin \varphi = e.$$

5. Расстояние перигелия от узла (аргумент перигелия), обозначается через  $\omega$ . Это гелиоцентрический угол между восходящим узлом орбиты и направлением на перигелий орбиты. Он измеряется в плоскости орбиты в направлении движения планеты и может иметь любые значения от 0 до  $360^\circ$ . Вместо элемента  $\omega$  иногда применяется долгота перигелия

$$\pi = \omega + \Omega.$$

6. Элемент времени, определяется эпохой (датой), в которую планета находится в определенной точке орбиты. Иногда задается момент времени  $T$ , в который планета находится в перигелии.

Положение планеты на орбите определяется аргументом широты, который обозначается через  $u$ . Это угол, измеряющий расстояние планеты от восходящего узла орбиты. Аргумент широты меняется от 0 до  $360^\circ$  в направлении движения планеты.

Истинной аномалией называется угол между радиусом-вектором планеты и направлением на перигелий. Этот угол обозначается через  $v$ . Очевидно, что

$$v = u - \omega.$$

Эксцентрической аномалией  $E$  называется угол, который определяется уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - T) = M.$$

Правая часть этого уравнения называется средней аномалией. Радиус-вектор планеты и ее истинная аномалия очень просто выражаются через эксцентрическую аномалию с помощью конечных выражений

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Средней долготой планеты называется угол

$$\lambda = M + \omega + \Omega.$$

Истинной долготой планеты называется угол

$$l = \nu + \omega + \Omega.$$

Период обращения планеты вокруг Солнца определяется формулой

$$P = \frac{2\pi}{n}.$$

Оскулирующей орбитой планеты в момент  $t$  называется орбита, вычисленная по положению  $(x, y, z)$  и скорости  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  планеты в момент  $t$  по формулам невозмущенного движения. Момент  $t$  называется эпохой оскуляции.

Средние элементы. Каждая аналитическая теория движения планеты или спутника может иметь свою систему средних элементов, которая определяется условиями, наложенными на произвольные постоянные интегрирования.

Оскулирующая орбита планеты непрерывно изменяет свое положение в пространстве и свою форму. Изменение оскулирующих элементов орбиты с течением времени определяется уравнениями Лагранжа (вывод уравнений Лагранжа можно найти у М. Ф. Субботина в „Курсе небесной механики“, т. 2, 1937; или в книге Г. Н. Дубошина „Небесная механика“, 1963)

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dM_0}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Угол  $M_0$  называется средней аномалией планеты в эпоху  $t_0$ . Если заменить переменные  $\omega$  и  $M_0$  на  $\pi$  и  $\varepsilon$  при помощи соотношений

$$\omega = \pi - \Omega, \quad M_0 = \varepsilon - \pi,$$

то получим уравнения Лагранжа в другой форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \\ &\quad + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $p = a(1 - e^2)$ .

Угол  $\varepsilon$  называется средней долготой планеты в эпоху  $t_0$ . Этот угол не надо путать с углом  $\lambda_0$ , который также называется средней долготой планеты в эпоху  $t_0$ . Разница между углами  $\varepsilon$  и  $\lambda_0$  очевидна из следующих формул для вычисления средней долготы планеты в момент  $t$ :

$$\lambda = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt,$$

где  $n$  определяется уравнением

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$\lambda = \lambda_0 + n(t - t_0),$$

$n$  — постоянная величина (среднее движение планеты).

## Приложение 2

### Средние элементы внутренних планет

Средние элементы орбиты Меркурия  
(Ньюком)

$$\lambda = 178^\circ 10' 44'' 68 + 538\,106\,654'' 80 T + 1'' 084 T,$$

$$\pi = 75^\circ 53' 58'' 91 + 5599'' 76 T + 1'' 061 T^2,$$

$$\Omega = 47^\circ 08' 45'' 40 + 4266'' 75 T + 0'' 626 T^2,$$

$$i = 7^\circ 00' 10'' 37 + 6'' 699 T - 0'' 066 T^2,$$

$$e = 0.205\,614\,21 + 0.000\,020\,46 T - 0.000\,000\,030 T^2,$$

$$n = 14732'' 419\,7380 - 0'' 000\,001\,355 T,$$

$$a_1 = 0.387\,09867, \quad a = 0.387\,09860.$$

$T$  — время, считаемое в юлианских столетиях от среднего гриничского полдня 0-го янв. 1900 г.

Средние элементы орбиты Венеры (Ньюком)

$$\lambda = 342^\circ 46' 01'' 39 + 210\,669\,162'' 88 T + 1'' 1148 T^2,$$

$$\pi = 130^\circ 09' 49'' 8 + 5068'' 93 T - 3'' 515 T^2,$$

$$\Omega = 75^\circ 46' 46'' 73 + 3239'' 46 T + 1'' 476 T^2,$$

$$i = 3^\circ 23' 37'' 07 + 3'' 621 T - 0'' 0035 T^2,$$

$$e = 0.006\,820\,69 - 0.000\,047\,74 T + 0.000\,000\,091 T^2,$$

$$n = 5767'' 669\,7692 + 0'' 000\,000\,2628 T,$$

$$a_1 = 0.723\,33222, \quad a = 0.723\,33162.$$

$T$  — время, считаемое в юлианских столетиях от среднего гриничского полдня 0-го янв. 1900 г.

## Средние элементы орбиты Земли (Ньюком)

$$\begin{aligned}\lambda &= 99^{\circ}41'48''.04 + 129602\ 768''.13T + 1''.089T^2, \\ \pi &= 101^{\circ}13'15''.0 + 6189''.03T + 1''.63T^2 + 0''.012T^3, \\ e &= 0.016\ 751\ 04 - 0.000\ 041\ 80T - 0.000\ 000126T^2, \\ n &= 3548''.192\ 8323 - 0''.000\ 001\ 103T, \\ a_1 &= 1.000\ 000\ 30, \quad a = 1.000\ 000\ 23.\end{aligned}$$

## Средние элементы орбиты Марса (Ньюком, Росс)

$$\begin{aligned}\lambda &= 293^{\circ}44'51''.46 + 68\ 910\ 103''.83T + 1''.1184T^2, \\ \pi &= 334^{\circ}13'05''.53 + 6626''.73T + 0''.4675T^2 - 0''.0043T^3, \\ \Omega &= 48^{\circ}47'11''.19 + 2775''.57T - 0''.005T^2 - 0''.0192T^3, \\ i &= 1^{\circ}51'01''.20 - 2''.430T + 0''.0454T^2, \\ e &= 0.093\ 312\ 90 + 0.000\ 092\ 064T - 0.000\ 000\ 077T^2, \\ n &= 1886''.518\ 6207 + 0''.000\ 000\ 463T, \\ a_1 &= 1.523\ 691\ 46, \quad a = 1.523\ 688\ 40.\end{aligned}$$

$T$  — время, считаемое в юлианских столетиях от среднего гриничского полдня 0-го янв. 1900 г.

**Примечание.** Через  $n$  обозначено среднее суточное сидерическое движение, непосредственно получаемое из наблюдений, т. е. включающее влияние вековых возмущений средней долготы. Соответствующее значение большой полуоси, определяемое по третьему закону Кеплера, обозначено через  $a_1$ . Через  $a$  обозначена большая полуось, освобожденная от влияния упомянутых вековых возмущений.

## Приложение 3

### Средние элементы внешних планет

#### Средние элементы орбит Юпитера и Сатурна (Хилл)

Эпоха средн. грин. полдень 0-го янв. 1850 г.

Юпитер

Сатурн

$$\begin{array}{l} \lambda = 159^{\circ}56'25''.05, \\ \pi = 11^{\circ}54'26''.72, \\ \Omega = 98^{\circ}55'58''.16, \\ i = 1^{\circ}18'41''.81, \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Эклиптика} \\ \text{и равно-} \\ \text{денствие} \\ 1850.0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda = 14^{\circ}49'39''.95, \\ \pi = 90^{\circ}06'39''.53, \\ \Omega = 112^{\circ}20'51''.38, \\ i = 2^{\circ}29'39''.26, \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Эклиптика} \\ \text{и равно-} \\ \text{денствие} \\ 1850.0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 e &= 0.048\ 253\ 82, \\
 n &= 299'128\ 376\ 56, \\
 a &= 5.202\ 802\ 875.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e &= 0.056\ 060\ 75, \\
 n &= 120'455\ 042\ 14, \\
 a &= 9.538\ 843\ 210.
 \end{aligned}$$

### Средние элементы орбит Урана и Нептуна (Ньюком)

Эпоха средн. грин. полдень 0-го янв. 1900 г.

Уран	Нептун
$\lambda = 243^{\circ}21'44''.66,$	$\lambda = 85^{\circ}01'30''.63,$
$\pi = 169^{\circ}02'55''.6,$	$\pi = 43^{\circ}45'20''.2,$
$\Omega = 73^{\circ}29'24''.9,$	$\Omega = 130^{\circ}40'44''.0,$
$i = 0^{\circ}46'21''.60,$	$i = 1^{\circ}46'45''.32,$
$e = 0.047\ 044\ 33,$	$e = 0.008\ 533\ 41,$
$n = 42'234\ 34,$	$n = 21'532\ 66,$
$a = 19.190\ 978.$	$a = 30.070\ 672.$

Эклиптика и равноденствие 1900.0

### Средние элементы Плутона (Шараф)

Эпоха и оскуляция 1930 сентябрь 20.0

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 275^{\circ}15'27''.03, \\
 \omega &= 112^{\circ}39'29''.74, \\
 \Omega &= 109^{\circ}37'55''.99, \\
 i &= 17^{\circ}6'35''.34, \\
 e &= 0.24706226, \\
 n &= 14'199460, \\
 a &= 39.672599.
 \end{aligned}$$

Эклиптика и равноденствие 1950.0

Оскулирующие элементы внешних планет (1966 г.)  
Среднее равноденствие и экваториальная дата

Дата	<i>t</i>	$\varrho$	$\kappa$	$\alpha$	$\lambda$	$\epsilon$	Средняя всплеска
<b>Ю п и т е р</b>							
Февр. 4	1.30602	100.1072	13.4732	5.202410	0°0831007	0.0482230	71.5068
Март 16	1.30602	100.1081	13.4801	5.202432	0.0831001	0.0482227	74.8256
Апр. 25	1.30602	100.1090	13.4872	5.202456	0.0830996	0.0482224	78.1442
Июнь 4	1.30602	100.1099	13.4944	5.202480	0.0830990	0.0482219	81.4626
Июль 14	1.30602	100.1109	13.5018	5.202505	0.0830984	0.0482213	84.7808
Авг. 23	1.30602	100.1118	13.5093	5.202531	0.0830978	0.0482206	88.0989
Окт. 2	1.30601	100.1127	13.5168	5.202557	0.0830971	0.0482197	91.4168
Нояб. 11	1.30601	100.1137	13.5244	5.202584	0.0830965	0.0482187	94.7347
Дек. 21	1.30601	100.1146	13.5320	5.202611	0.0830958	0.0482175	98.0524
<b>С а т у р н</b>							
Февр. 4	2.48867	113.4145	90.9044	9.549313	0.0334047	0.0552050	264.0930
Март 16	2.48869	113.4167	91.0472	9.548008	0.0334116	0.0552252	265.2879
Апр. 25	2.48871	113.4189	91.1891	9.546714	0.0334184	0.0552396	266.4836
Июнь 4	2.48873	113.4209	91.3299	9.545433	0.0334251	0.0552482	267.6803
Июль 14	2.48874	113.4229	91.4692	9.544167	0.0334317	0.0552512	268.8785
Авг. 23	2.48875	113.4248	91.6066	9.542917	0.0334383	0.0552486	270.0786
Окт. 2	2.48875	113.4266	91.7419	9.541685	0.0334448	0.0552408	271.2808
Нояб. 11	2.48876	113.4283	91.8746	9.540472	0.0334512	0.0552278	272.4854
Дек. 21	2.48876	113.4299	92.0046	9.539280	0.0334574	0.0552098	273.6929



Приложение 4 (продолжение)

Дата	i	Ω	κ	α	π	σ	Средняя взвешанная
<b>У р а н</b>							
Февр. 4	0°77251	73°8852	168°4300	19.21287	0°0117038	0.0483048	358.8562
Март 16	0.77251	73.8897	168.4606	19.21704	0.0116999	0.0485115	359.2983
Апр. 25	0.77251	73.8940	168.4995	19.22112	0.0116962	0.0487139	359.7326
Июнь 4	0.77250	73.8980	168.5461	19.22511	0.0116926	0.0489115	0.1595
Июль 14	0.77250	73.9018	168.6002	19.22901	0.0116890	0.0491038	0.5794
Авг. 23	0.77250	73.9053	168.6614	19.23279	0.0116856	0.0492904	0.9926
Окт. 2	0.77250	73.9086	168.7293	19.23647	0.0116822	0.0494708	1.3995
Нояб. 11	0.77250	73.9116	168.8034	19.24002	0.0116790	0.0496446	1.8005
Дек. 21	0.77250	73.9143	168.8835	19.24344	0.0116759	0.0498115	2.1959
<b>Н е п т у н</b>							
Февр. 4	1.77301	131.4133	51.2795	29.97901	0.0060047	0.0114510	178.9331
Март 16	1.77302	131.4107	51.8168	29.98378	0.0060032	0.0112921	178.6255
Апр. 25	1.77303	131.4082	52.3394	29.98885	0.0060017	0.0111237	178.3333
Июнь 4	1.77304	131.4058	52.8465	29.99420	0.0060001	0.0109464	178.0572
Июль 14	1.77304	131.4035	53.3369	29.99980	0.0059984	0.0107609	177.7983
Авг. 23	1.77305	131.4012	53.8097	30.00564	0.0059967	0.0105678	177.5577
Окт. 2	1.77306	131.3991	54.2637	30.01168	0.0059949	0.0103679	177.3366
Нояб. 11	1.77307	131.3970	54.6976	30.01791	0.0059930	0.0101617	177.1362
Дек. 21	1.77308	131.3951	55.1099	30.02430	0.0059911	0.0099499	176.9580
<b>П л у т о н</b>							
Март 16	17.12725	109.7629	223.1066	39.50786	0.0039690	0.2480628	326.0566
Июнь 4	17.12659	109.7622	223.0215	39.53654	0.0039647	0.2485009	326.4675
Авг. 23	17.12618	109.7629	222.9459	39.56448	0.0039605	0.2489475	326.8714
Нояб. 11	17.12601	109.7650	222.8806	39.59137	0.0039564	0.2493964	327.2677
Янв. 30	17.12606	109.7683	222.8258	39.61693	0.0039526	0.2498417	327.6558

## Средние элементы лунной орбиты

Эфемерида Луны в современных Астрономических Ежегодниках основана на теории Хилла—Брауна и строго соответствует гравитационной теории.

Для повышения точности (до 0<sup>o</sup>.001 по  $\alpha$  и 0<sup>o</sup>.01 по  $\delta$ ) эфемерида Луны вычисляется непосредственно по тригонометрическим рядам, на которых Браун построил таблицы движения Луны. Фундаментальные элементы Луны, принятые Брауном, с учетом некоторых современных исправлений следующие:

Эпоха 1900 янв. 0 12<sup>h</sup> эф. вр.

Средняя долгота Луны

$$\lambda = 270^{\circ}434164 + 13^{\circ}1763965269d - 0^{\circ}0011337^2 + \\ + 0^{\circ}00000197^3.$$

Средняя долгота перигея

$$\pi = 334^{\circ}329556 + 0^{\circ}1114040803d - 0^{\circ}0103257^2 - \\ - 0^{\circ}0000127^3.$$

Средняя долгота узла

$$\Omega = 259^{\circ}183275 - 0^{\circ}0529532222d + 0^{\circ}0020787^2 + \\ + 0^{\circ}0000027^3.$$

Время  $T$  считается от основной эпохи в юлианских столетиях по 36525 эфемеридных суток,  $d$  — в сутках.

Эксцентриситет

$$e = 0.054900489.$$

Постоянная наклона орбиты

$$i = 5^{\circ}8'43''.427.$$

Постоянная лунного параллакса

$$p = 3422''.70.$$

Отношение массы Земли к массе Луны

$$1 : m = 81.53.$$

Отметим, что восходящий узел лунного экватора на эклиптике совпадает с нисходящим узлом лунной орбиты, так что его долгота равна  $\Omega = \pm 180^{\circ}$ .

Расстояние между центрами Земли и Луны определяется формулой

$$\rho = \frac{a_0}{\sin p},$$

где  $a_0 = 6378.245$  км (по Красовскому), отсюда получаем (в км)

$$\rho = \frac{1315.6 \cdot 10^6}{p},$$

причем горизонтальный параллакс  $p$  выражен в секундах. Среднему значению параллакса  $p = 3422''.70$  соответствует

$$a = 384\,375 \text{ км.}$$

Современное значение для большой полуоси лунной орбиты

$$a = 384\,402 \text{ км} \pm 2 \text{ км.}$$

### Приложение 6

#### Основные астрономические постоянные (Де-Ситтер, 1938 г.)

Радиус Земли на широте $\varphi$ . . . . .	$\rho = 6378387 - 21494 \sin^2 \varphi + 42 \sin^2 2\varphi$
Разность геоцентрической и астрономической широт . . . . .	$\varphi' - \varphi = -11'36''.245 \sin 2\varphi + 0''.965 \sin 4\varphi$
Обратная величина сжатия Земли . . . . .	$\alpha^{-1} = 296.753$
Экваториальный горизонтальный параллакс Солнца . . . . .	$\pi_0 = 8''.8030$
Постоянная годичной аберрации . . . . .	$\mu_0 = 20''.4770$
Постоянная нутации . . . . .	$N_0 = 9''.2181$
Движение Земли за средние сутки . . . . .	$n = 3548.1928906 + 0''.0000892t$
Тропический год . . . . .	$T = 365^d 24218946 - 0^d 00001548t$
Сидерический год . . . . .	$S = 365^d 25635442 - 0^d 00000918t$
Средний наклон экватора к эклиптике (в эпоху) . . . . .	$\varepsilon_1 = 23^\circ 27' 8''.29 + 0''.0607t^2 - 0''.00777t^3$

Средний наклон экватора к эклиптике (в данный момент) . . . . .	$\epsilon = 23^{\circ}27'8''29 - 47''080t - 0'0059t^2 + 0'00186t^3$
Лунно-солнечная прецессия . . . . .	$p_1 = 50'37461 + 0'0049561t - 0'0000007t^2$
Прецессия от планет . . . . .	$\theta = 0'12493 - 0'018959t - 0'0000004t^2$
Общая прецессия . . . . .	$p = 50'26000 + 0'022337t + 0'000014t^2$

$t$  — число тропических столетий от эпохи 1900.0.

### Приложение 7

#### Основные астрономические постоянные (Клеменс, 1948 г.)

Средний радиус Земли . . . . .	$R_1 = 637\ 1248\ \text{м}$
Динамическое сжатие Земли	$H = \frac{C-A}{C} = 0.003\ 286\ 885$
Солнечный параллакс . . . . .	$\pi_0 = 8'790$
Скорость света . . . . .	$c = 299\ 773\ \text{км/сек.}$
Обратная величина массы Луны . . . . .	$\mu^{-1} = 81.79$
Обратная величина сжатия Земли . . . . .	$\epsilon^{-1} = 296.202$
Экваториальный радиус Земли . . . . .	$b = 637\ 8388\ \text{м}$
Ускорение силы тяжести на экваторе . . . . .	$g_0 = 978.034\ \text{см/сек.}$
Астрономическая единица . . . . .	$a = 149\ 670\ 000\ \text{км}$
Постоянная аберрации . . . . .	$k = 20'507$
Отношение масс Солнце : (Земля + Луна)	$m^{-1} = 329\ 406$
Постоянная синуса лунного параллакса . . . . .	$\pi' = 3422'599$
Параллактическое неравенство . . . . .	$P = 124'941$
Постоянная прецессии . . . . .	$p = 5493'847 - 0'0036t$
Постоянная нутации . . . . .	$N = 9'210 + 0'0009t$
Лунно-солнечная прецессия	$p_0 = 5040'010 + 0'4930t$

$t$  — число тропических столетий от эпохи 1900.0.

## Астрономические постоянные (МАС, 1964 г.)

Астрономическими постоянными называются числа, которые входят в формулы небесной механики и сферической астрономии и служат для вычисления точных координат небесных тел. Среди этих постоянных, играющих основную роль во всех астрономических вычислениях, отметим, например, такие важные величины, как параллакс Солнца и связанную с ним астрономическую единицу длины, т. е. среднее расстояние Земли от Солнца; постоянные прецессии и нутации, определяющие направление земной оси в пространстве; массы планет и Луны. Все астрономические постоянные определяются на основании астрономических наблюдений. Так как между астрономическими постоянными существуют различные математические зависимости, то обычно их разделяют на первичные и производные, причем различные авторы проводят это разделение по-разному. Первичные астрономические постоянные должны допускать независимое от других постоянных определение из наблюдений их числовых значений и притом с достаточной точностью. Международный астрономический союз (МАС) на XII Генеральной ассамблее в Гамбурге (1964 г.) принял следующую систему астрономических постоянных.

### А. Первичные астрономические постоянные

#### 1. Число секунд в тропическом году (1900.0)

$$s = 31556925.9747 \text{ сек.}$$

Постоянная  $s$  определяет единицу времени (эфemerидную секунду).

#### 2. Скорость света

$$c = 299792.5 \cdot 10^3 \text{ м/сек.}$$

Скорость света — скорость распространения электромагнитных волн — одна из основных физических постоянных. Впервые величина скорости света была определена в 1675 г. датским астрономом Рёмером (1644—1710) по

наблюдениям покрытий спутников Юпитера, но в настоящее время точные определения этой величины основаны на физических методах исследования.

3. Экваториальный радиус земного эллипсоида

$$a_e = 6378160 \text{ м.}$$

4. Наклон эклиптики к экватору (1900.0)

$$\epsilon_0 = 23^\circ 27' 8''.26,$$

$$\cos \epsilon_0 = 0.9173917.$$

5. Гравитационная постоянная Гаусса.

$$k = 0.01720209895 \text{ (а. е.)}^{3/2} \text{ (масса Солнца)}^{-1/2} \text{ (сутки)}^{-1}.$$

Эта постоянная вычисляется по формуле

$$k = \frac{2\pi A^{3/2}}{P\sqrt{S+E+M}}, \quad (1)$$

где (по Гауссу)  $P = 365.2563835$  ср. солн. суток,

$$E + M = 1 : 354710 \text{ (масса Земли + Луна),}$$

$$S = 1 \quad \text{(масса Солнца),}$$

$$A = 1 \quad \text{(астрономическая единица).}$$

Подставляя эти численные значения в (1), получим

$$k = 0.017202\ 098\ 950\ 000,$$

$$k'' = 3548''.18760\ 69651.$$

Известные в настоящее время более точные значения  $P$  (длина сидерического года) и  $E + M$  дали бы несколько иное значение для  $k$ . Но так как изменять  $k$  неудобно, то предпочитают, оставляя без изменения постоянную Гаусса, выбирать единицу длины так, чтобы формула (1) строго соблюдалась. При таком условии большая полуось орбиты Земли уже не равна единице, а определяется формулой

$$a = \left( \frac{kP\sqrt{S+E+M}}{2\pi} \right)^{2/3}. \quad (2)$$

6. Астрономическая единица

$$A = 149600 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

Необходимо помнить, что в соответствии с формулой (2) большая полуось орбиты Земли равна

$$a = 1.000\ 000\ 23 \text{ а. е.}$$

Поэтому среднее расстояние Земли от Солнца на 34.4 км больше, чем величина астрономической единицы.

7. Геоцентрическая гравитационная постоянная (включая атмосферу)

$$GE = 398603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек.}^2,$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $E$  — масса Земли. Гравитационная постоянная — это коэффициент пропорциональности в формуле, представляющей закон тяготения Ньютона. Гравитационная постоянная может быть определена экспериментально из измерений с помощью крутильных весов притяжения между двумя известными массами. Численное значение гравитационной постоянной известно с небольшой точностью

$$G = (6.673 \pm 0.003) \cdot 10^{-8} \text{ (см)}^3 \text{ (грамм)}^{-1} \text{ (сек.)}^{-2}.$$

8. Коэффициент второй гармоники в выражении для гравитационного потенциала земного эллипсоида

$$J_2 = 0.0010827.$$

До запуска искусственных спутников Земли было принято писать гравитационный потенциал через коэффициенты (см. главу IV, § 5)

$$J = \frac{3}{2} J_2, \quad D = -\frac{35}{8} J_4. \quad (3)$$

9. Масса Луны

$$\mu^{-1} = \frac{E}{M} = 81.30.$$

Предварительные результаты определения массы Луны по наблюдениям лунников и космических ракет (США)

$$\mu^{-1} = 81.3015 \pm 0.0033.$$

10. Сидерическое среднее движение Луны (1900.0)

$$n_{\odot}^* = 2.6616994890 \cdot 10^{-6} \text{ рад./сек.}$$

11. Общая прецессия по долготе в тропическое столетие (1900.0)

$$p = 5025''64,$$

отсюда

$$\begin{array}{l} - p = 5025''.64 \dots \text{общая прецессия по долготе} \\ \lambda = -11''.44 \dots \text{планетная прецессия} \\ \hline p_1 = 5037''.08 \dots \text{лунно-солнечная прецессия} \\ - p_1 = 5037''.08 \dots \text{лунно-солнечная прецессия} \\ \theta = -1''.92 \dots \text{релятивистская поправка,} \\ \hline p'_1 = 5039.00 \dots \text{лунно-солнечная прецессия,} \\ \text{ньютоновская.} \end{array}$$

Постоянная прецессии

$$\begin{array}{l} \frac{p_1}{\cos \varepsilon_0} = p = 5490''.66 \text{ (релятивистская),} \\ \frac{p'_1}{\cos \varepsilon_0} = p' = 5492''.75 \text{ (ньютоновская).} \end{array}$$

12. Постоянная нутации (1900.0)

$$N = 9''.21.$$

Постоянная нутации связана с динамическим сжатием Земли ( $H$ ) по формуле

$$N = 252870''.9 H \cos \varepsilon_0 \frac{\mu}{1 + \mu}, \quad (4)$$

где

$$H = \frac{C - A}{C} = 326742 \cdot 10^{-8},$$

$C$  и  $A$  — экваториальный и полярный моменты инерции Земли.

## Б. Производные астрономические постоянные

1. Параллакс Солнца

$$\pi_{\odot} = 8''.79405.$$

Соотношение между  $A$  и  $\pi_{\odot}$  выражается формулой

$$\sin \pi_{\odot} = \pi_{\odot} \sin 1'' = \frac{a_s}{A}. \quad (5)$$



## 2. Световой промежуток

$$T_A = \frac{A}{c} = 499.012 \text{ сек.}$$

Световым промежутком или уравнением света называется промежуток времени, в течение которого свет проходит среднее расстояние от Солнца до Земли.

3. Абберационная постоянная для среднего движения Земли (1900.0)

$$k'' = \frac{v}{c} = 20''.4958,$$

где  $v$  — орбитальная скорость Земли,  $c$  — скорость света.

Так как скорость Земли различна в различных точках орбиты, то можно принять за среднюю скорость полусумму наибольшей (перигельной) и наименьшей (афельной) скорости Земли. Пусть  $e = 0$ , тогда

$$v_0 = \frac{2\pi A}{s} = 29.78515964 \text{ км/сек. (круговая скорость),}$$

где

$$2\pi = 6.2831853072,$$

$$2\pi A = 939964521.9 \text{ км,}$$

$$s = 31558149''.540$$

( $s$  — продолжительность сидерического года в секундах).

Отсюда  $k_0'' = \frac{v_0}{c} = 20''.49294$ . Введем эксцентриситет орбиты Земли (1900.0)

$$e = 0.01675104, \text{ sec } \varphi = 1.000140328.$$

Тогда

$$v_{\text{пер.}} = v_0 \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

$$v_{\text{аф.}} = v_0 \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

$$v_{\text{ср.}} = v_0 (1 - e^2)^{-1/2} = v_0 \text{ sec } \varphi, \quad (8)$$

$$k'' = k_0'' \text{ sec } \varphi. \quad (9)$$

4. Гелиоцентрическая гравитационная постоянная

$$GS = 132718 \cdot 10^{15} \text{ м}^3/\text{сек}^2.,$$

$G$  — гравитационная постоянная,  $S$  — масса Солнца.  
 В астрономической системе единиц

$$GS = k^2 S = k^2. \quad (10)$$

Поэтому

$$GS = 0.0002959122083 \text{ (а. е.)}^3 \text{ (сутки)}^{-2}$$

или

$$GS = 990735.3601 \cdot 10^{24} \text{ м}^3/\text{сутки}^2.$$

5. Масса Земли и масса системы Земля + Луна

$$а) \frac{S}{E} = 332958,$$

$$б) \frac{S}{M+E} = 328912.$$

6. Сжатие земного эллипсоида

$$f = 1/298.2(5).$$

Эта величина определяется формулой

$$f = \frac{1}{2} (3J_2 + m) \left( 1 + \frac{3}{4} J_2 + \frac{3}{28} m \right), \quad (11)$$

где

$$m = \frac{a_e^3 \omega^2 (1-f)}{GE} = 0.0034498, \quad (12)$$

$$\omega = 2\pi/86164.09 = 729212 \cdot 10^{-10} \text{ рад./сек.}$$

Величина  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли, параметр  $m$  — отношение центробежного ускорения к гравитационному на экваторе, умноженное на  $(1-f)$ .

7. Тропическое среднее движение Луны (1900.0)

$$n_C = n_C^* + p/100 = 2.6617072100 \cdot 10^{-6} \text{ рад./сек.}$$

8. Возмущенное среднее расстояние до Луны (1900.0)

$$a_C = 384400 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Возмущенной (вариационной) орбитой Луны называется периодическое решение дифференциальных уравнений движения Луны, если в них положить равными нулю наклон и эксцентриситет солнечной орбиты, а также па-

раллакс Солнца. Эти условия приводят к особому частному случаю задачи трех тел, когда одно тело уходит в бесконечность, но продолжает влиять на движение двух других. Вариационная орбита включает все возмущения, зависящие от углового расстояния Луны и Солнца, и служит промежуточной орбитой в теории движения Луны по Хиллу.

Уравнение вариационной кривой имеет вид (см. гл. V, формула (V. 42))

$$\begin{aligned}x &= a_{\zeta} \left[ 1 - m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau \right] \cos \tau, \\y &= a_{\zeta} \left[ 1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau \right] \sin \tau, \\r &= a_{\zeta} [1 - m^2 \cos 2\tau],\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$m = \frac{n'}{n - n'} = 0.080848933808312,$$

$n'$  и  $n$  — средние сидерические движения Солнца и Луны.

Таким образом, форма вариационной кривой вполне определяется величиной  $m$ . При  $m = 0$  — это окружность, а при  $m \neq 0$  — овал с центром в начале координат и с полуосями, отношение которых равно  $(1 - m^2) : (1 + m^2)$ .

Размеры вариационной орбиты характеризуются величиной  $a_{\zeta}$ , которая определяется формулой (см. гл. V, формула (V. 48))

$$\begin{aligned}a_{\zeta} &= a \left( 1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2304} m^4 - \frac{67}{288} m^5 - \right. \\&\left. - \frac{45293}{41472} m^6 - \frac{8761}{6912} m^7 - \frac{4967441}{7962624} m^8 + \frac{14829273}{39813120} m^9 + \dots \right).\end{aligned}\quad (14)$$

Величина  $a$ , равная

$$a = \left[ \frac{GE(1 + \mu)}{(n_{\zeta}^*)^2} \right]^{1/3},\quad (15)$$

называется невозмущенным средним расстоянием до Луны. Подставляя численные значения, находим

$$a = 384749 \text{ км.}$$

Так как

$$a_c = (1.00090768)^{-1} \cdot a = 384400 \text{ км,}$$

то, следовательно, возмущенное среднее расстояние до Луны на 349 км меньше невозмущенного среднего расстояния.

9. Постоянная синуса параллакса Луны (1900.0)

$$\sin \pi_c = 0.01659251 = 3422''.451.$$

Эта величина определяется отношением

$$\sin \pi_c = \pi_c \sin 1'' = \frac{a_s}{a_c}. \quad (16)$$

10. Коэффициент лунного неравенства

$$L = 6''.43987.$$

Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$L = \frac{\mu}{1 + \mu} \cdot \frac{a_c}{A}. \quad (17)$$

Необходимо различать коэффициент лунного неравенства ( $L$ ) и коэффициент лунного неравенства в долготе Солнца ( $L_s$ ). Возмущения в долготе Солнца содержат член

$$\Delta \lambda' = L_s \sin D = L_s \sin (\lambda - \lambda'), \quad (18)$$

где  $\lambda$  — долгота Луны,  $\lambda'$  — долгота Солнца. В таблицах движения Луны Ньюкома находим

$$L_s = 6''.454.$$

Но так как по Ньюкому

$$\pi_{\odot} = 8''.790, \quad \pi_c = 3422''.68, \quad \mu = 1 : 81.45,$$

то

$$L = 6''.4248.$$

Поэтому

$$L_s = 1.00454 L. \quad (19)$$

Если подставить  $L = 6''.43987$  в формулу (19), получим

$$L_s = 6''.469.$$

## 11. Коэффициент параллактического неравенства

$$P_{\zeta} = 124''986$$

Возмущения в долготе Луны содержат член, амплитуда которого зависит только от параллаксов Луны и Солнца и от массы Луны. Это так называемое параллактическое неравенство; период его равен синодическому лунному месяцу, так как его аргумент  $D = \lambda - \lambda'$  есть разность средних долгот Луны и Солнца. Неравенство выражается формулой  $P_{\zeta} \sin D$ , где согласно теории Брауна

$$P_{\zeta} = \frac{1-\mu}{1+\mu} \left( \frac{15}{8} n + \frac{93}{8} n^2 + \dots \right) \frac{a_{\zeta}}{A}. \quad (20)$$

Здесь  $n$  — отношение продолжительности сидерического месяца к сидерическому году, известное с большой точностью

$$n = 0.07480133.$$

Подставляя числовое значение  $n$  в формулу (20), получим

$$P_{\zeta} = 49853''2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{a_{\zeta}}{A}. \quad (21)$$

По Брауну

$$P_{\zeta} = 125''12.$$

## 12. Три множителя $F_1, F_2, F_3$ :

а) множитель для аберрации

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \sec \varphi = 1.000140,$$

где  $e$  — эксцентриситет орбиты Земли на эпоху 1900.0;

б) множитель для лунной орбиты (см. формулу (14))

$$F_2 = \left( 1 - \frac{1}{6} m^2 + \dots \right) = 0.999093142, \quad (22)$$

$$a_{\zeta} = F_2 \cdot a;$$

в) множитель для параллактического неравенства Луны (см. формулу (20))

$$F_3 = \left( \frac{15}{8} n + \frac{93}{8} n^2 + \dots \right) = 49853''2.$$

## В. Массы больших планет

(по Клеменсу, 1964 г.)

1/m	Автор	Метод
<b>Меркурий (1/m = 6 000 000)</b>		
5970 000 ± 455 000	Данком (1958 г.).	Венера (1750—1949). Вековые возмущения. Эрос (1926—1945). Комета Энке—Баклунда. (1898—1954).
6480 000 ± 350 000	Брауер (1950 г.).	
6120 000 ± 43 000	Рабе (1950 г.).	
5980 000 ± 170 000	Маковер и Бохан, (1961 г.).	
6110 000 ± 40 000		
<b>Венера (1/m = 408 000)</b>		
409 300 ± 1400	Клеменс (1943 г.).	Меркурий (1765—1937). Солнце (1836—1923). Солище (1900—1937).
404 700 ± 800	Джонс (1926 г.).	
407 000 ± 500	Морган и Скотт (1939 г.).	Эрос (1926—1945). Вековые возмущения. Маринер II (1962). Марс (1750—1955).
408 645 ± 208	Рабе (1950 г.).	
408 000 ± 800	Брауер (1950 г.).	
408 539.5 ± 12.0	Андерсон и др. (1963 г.).	
408 945 ± 300	Данком (1963 г.).	
408 539 ± 12	Андерсон и др. (1965 г.).	Маринер II (1962).
408 598.1 ± 25		
<b>Земля (1/m = 329 390)</b>		
328 390 ± 103	Витт (1933 г.).	Эрос (1893—1931). Эрос (1926—1945). Радарные измерения (1961—1963). Солнечный параллакс (1930—1931).
328 452 ± 43	Рабе (1950 г.).	
328 906 ± 6	—	
329 330 ± 100	Джонс (1941 г.).	
328 906 ± 6		
<b>Марс (1/m = 3093500)</b>		
3088 000 ± 5 000	Ван ден Бош (1927 г.).	Спутники (1877—1909). Эрос (1926—1945).
3110 000 ± 7 700	Рабе (1950 г.).	
3050 000 ± —		

$1/m$	Автор	Метод
<b>Юпитер</b> ( $1/m = 1047.355$ )		
1047.39 $\pm$ 0.03	Клеменс (1961 г.). Де-Ситтер (1915 г.). Куликов (1950 г.). Замтер (1910 г.). Остен (1928 г.).	— Спутники. Спутник VIII (1908—1946). Эгерия (1850—1906). Валентина (1899—1918).
1047.40 $\pm$ 0.03		
1047.4 $\pm$ 0.4		
1047.558 $\pm$ 0.40		
1047.57 $\pm$ 0.06		
1047.41 $\pm$ 0.02		
<b>Сатурн</b> ( $1/m = 3501.6$ )		
3502.20 $\pm$ 0.53	Хилл (1898 г.). Гейо (1913 г.). Ван ден Бош (1927 г.). Хертц (1953 г.). Джеффрис (1954 г.). Клеменс (1960 г.).	Юпитер (1750—1888). Юпитер (1750—1907). Спутники. Юпитер (1884—1948). Спутники (1924—1937). Юпитер (1779—1941).
3499.9 $\pm$ 1.18		
3496 $\pm$ 3		
3497.64 $\pm$ 0.27		
3494.8 $\pm$ 1.3		
3499.7 $\pm$ 0.4		
3499.6 $\pm$ 0.4		
<b>Уран</b> ( $1/m = 22\,869$ )		
22934 $\pm$ 6	Харрис (1950 г.). Хилл (1898 г.). Ван ден Бош (1927 г.).	Спутники. Сатурн (1751—1888). Спутники.
23239 $\pm$ 89		
22530 $\pm$ 50		
22930 $\pm$ 6		
<b>Нептун</b> ( $1/m = 19\,314$ )		
19094 $\pm$ 22	Гайо (1910 г.). Ван Бисбрук (1957 г.).	Уран (1690—1903). Нереида (1949—1955).
18889 $\pm$ 62		
19070 $\pm$ 21		
<b>Плутон</b> ( $1/m = 360\,000$ )		
400 000 $\pm$ 40 000	Брауер (1955 г.).	Уран и Нептун (1712—1941).

Примечание. После названия каждой планеты приводится отношение массы Солнца к массе планеты (масса планеты включает атмосферу и спутники!), принятое в современных астрономических ежегодниках. В первом столбце даны важнейшие определения масс больших планет и их вероятные ошибки. Далее в таблице указаны автор, год выполнения работы и использованный автором наблюдательный материал. После отдельных определений массы планеты приводится ее взвешенное среднее значение.

Приложение 9

Таблица малых планет, используемых для определения постоянных каталога слабых звезд (Эклиптика и равноденствие 1950.0)

Номер	Название	$\Omega$	$\omega$	$i$	$\varphi$	$\mu$	$a$
1	Церера . . . . .	81°	72°	10°6	4°4	771"	2.7675
2	Паллада . . . . .	173	310	34.8	13.5	769	2.7718
3	Юнона . . . . .	170	246	13.0	15.0	814	2.6683
4	Веста . . . . .	104	149	7.1	5.1	978	2.3617
6	Геба . . . . .	139	238	14.8	11.7	939	2.4259
7	Ирида . . . . .	260	144	5.5	13.3	963	2.3854
11	Партенопа . . . . .	125	193	4.6	5.9	924	2.4514
18	Мельпомена . . . . .	150	227	10.1	12.6	1020	2.2959
39	Летиция . . . . .	157	207	10.4	6.5	770	2.7690
40	Гармония . . . . .	94	269	4.3	2.6	1039	2.2676

Примечание. Ни одна из этих планет не бывает слабее  $10^m 5$  в оппозиции.

Приложение 10

Таблица малых планет с большим суточным движением (Эклиптика и равноденствие 1950.0)

Номер	Название	$\Omega$	$\omega$	$i$	$\varphi$	$\mu$	$a$
433	Эрос . . . . .	304°	178°	10°8	12°9	2015"	1.4581
1566	Икар . . . . .	88	31	23.0	55.8	3171	1.0777
1620	Географос . . . . .	337	276	13.3	19.6	2557	1.2442
—	Аполлон . . . . .	36	285	6.4	34.5	1959	1.4861
—	Адонис . . . . .	353	40	1.5	51.2	1284	1.9692
—	Гермес . . . . .	35	91	4.7	28.3	2421	1.2904



**Элементы орбит троянцев**  
**(Эклиптика и равноденствие 1950.0)**  
**А. „Греки“**

Номер	Название	$\Omega$	$\omega$	$i$	$\varphi$	$\mu$	$a$
588	Ахиллес . . . . .	316°	128°	10°3	8°5	298"	5.2112
624	Гектор . . . . .	342	182	18.3	1.4	306	5.1211
659	Нестор . . . . .	351	333	4.5	6.3	296	5.2368
911	Агамемнон . . . . .	337	78	21.9	3.7	305	5.1328
1143	Одиссей . . . . .	221	234	3.1	5.2	300	5.1860
1404	Аякс . . . . .	332	57	18.1	6.4	302	5.1631
1437	Диомед . . . . .	315	127	20.6	2.5	304	5.1431
1583	Антилах . . . . .	221	186	28.3	3.1	293	5.2760
1647	Менелай . . . . .	240	290	5.7	1.6	297	6.2224

**Б. „Троянцы“**

Номер	Название	$\Omega$	$\omega$	$i$	$\varphi$	$\mu$	$a$
617	Патрокл . . . . .	44°	304°	22°1	8°1	299"	5.2068
884	Приам . . . . .	301	331	8.9	6.9	298	5.2164
1172	Эней . . . . .	247	46	16.7	5.9	300	5.1881
1173	Анхиз . . . . .	284	31	7.0	7.9	308	5.0958
1207	Троил . . . . .	48	293	33.7	5.3	303	5.1595

Элементы орбит некоторых короткопериодических комет

Номер	Обозначение	$T$	$P$ (в годах)	$e$	$\omega$	$\Omega$	$i$	Эпоха	$Q = a(1+e)$ (а. е.)
<b>Семейство Юпитера (<math>a \approx 5.2</math> а. е.)</b>									
1	1957 I	Февр. 2.63	4.903	0.7036	356°28	215°43	17°62	1950.0	4.9
2	1957 II	Февр. 4.95	5.266	0.5476	191.01	119.28	12.47	1950.0	4.7
3	1961 VII	сент. 5.47	6.532	0.3828	357.74	126.01	3.72	1950.0	4.8
4	1960 V	июнь 12.56	7.021	0.6039	350.75	76.23	31.09	1950.0	5.9
5	1958 IV	июнь 10.50	7.880	0.1445	354.87	155.11	3.99	1950.0	4.5
6	1961 III	апр. 4.49	8.586	0.5761	40.02	62.84	13.44	1950.0	6.6
<b>Семейство Сатурна (<math>a \approx 9.5</math> а. е.)</b>									
7	1951 V	май 28.37	10.950	0.5880	144.81	156.20	3.76	1950.0	7.8
8	1939 X	нояб. 10.08	13.606	0.8206	206.96	269.84	54.65	1950.0	10.4
9	1957 IV	май 12.89	16.100	0.1315	355.83	321.61	9.49	1950.0	7.3
10	1948 XIII	дек. 15.94	17.971	0.7745	346.69	347.17	15.00	1948.0	12.2
<b>Семейство Урана (<math>a \approx 19.2</math> а. е.)</b>									
11	1956 VI	окт. 19.37	27.873	0.9192	196.05	250.36	28.87	1950.0	17.6
12	1866 I	январ. 11.63	33.176	0.9054	170.94	232.58	162.69	1866.0	19.7
13	1942 IX	дек. 19.20	38.961	0.8611	358.36	78.59	17.89	1943.0	21.4

Приложение 12 (продолжение)

Номер	Обозначение	Г	P (в годах)	e	ω	α	i	Эпоха	$Q = a(1 + e)$ (а. е.)
			Семейство Нептуна (a = 30.1 а. е.)						
14	1913 VI	ноябрь 26.77	61.730	0.9197	57°06	347°31	40°87	1913.0	30.0
15	1954 VII	май 22.89	70.857	0.9548	199.02	255.19	74.18	1950.0	33.5
16	1910 II	апр. 20.18	76.029	0.9673	111.72	57.84	162.21	1910.0	35.3
			Семейство?						
17	1862 III	авг. 23.41	119.64	0.9604	152.76	138.68	113.56	1862.0	47.6
18	1889 III	июнь 21.24	128.31	0.9567	60.12	271.83	31.21	1889.0	49.8
19	1917 I	апр. 11.18	145.34	0.9931	121.31	87.98	32.68	1917.0	55.0
20	1939 VI	авг. 9.46	156.04	0.9742	29.30	355.28	64.20	1939.5	57.2

Элементы орбит некоторых периодических комет с большими афелийными расстояниями (Q)

Номер	Обозначение	T	a (а. е.)	e	ω	Q	i	$Q = a(1+e)$ (а. е.)
1	1939 I	февр. 6.85	146	0.9951	169°03	288°91	63°52	291
2	1943 I	февр. 6.72	173	0.9922	39.82	100.12	19.71	345
3	1947 IV	май 20.97	224	0.9975	303.76	353.20	39.29	447
4	1939 III	апр. 10.17	348	0.9985	89.25	311.58	138.12	695
5	1953 I	январь 5.42	411	0.9959	191.63	220.69	59.12	820
6	1957 V	авг. 1.44	547	0.9994	40.31	67.62	93.94	1094
7	1941 IV	январь 27.65	690	0.9989	268.67	42.39	168.20	1379
8	1948 XI	окт. 27.43	2077	0.9999	107.26	210.33	23.12	4154
9	1958 III	апр. 16.31	2817	0.9993	16.46	150.51	15.79	5632
10	1937 V	авг. 15.66	2955	0.9997	114.83	58.73	146.41	5909
11	1952 I	январь 12.95	4102	0.9998	269.60	76.18	152.53	8203

## Тригонометрические функции

Углы измеряются в градусах и радианах. Радиан не имеет специального обозначения; угол, равный  $\alpha$  радианов, обозначается просто  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} 1 \text{ радиан} &= 57^{\circ}29'57''9513082321 = \\ &= 3437'746\ 77078\ 49393 = \\ &= 206264''80624\ 70964, \\ 1^{\circ} &= 0.01745\ 32925\ 19943, \\ 1' &= 0.00029\ 08882\ 08666, \\ 1'' &= 0.0000048481\ 36811. \end{aligned}$$

Переход от градусов к радианам и обратно производится по формулам

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{180} \alpha^{\circ},$$

где

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159\ 26535\ 89793, \\ \pi^{-1} &= 0.31830\ 98861\ 83791. \end{aligned}$$

Разложения в ряд

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \\ &\quad - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \\ &\quad - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Функции кратных углов

$$\begin{aligned} \cos na &= \cos^n a - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} a \sin^2 a + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} a \sin^4 a - \dots, \\ \sin na &= \frac{n}{1} \cos^{n-1} a \sin a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \\ &\quad \times \cos^{n-3} a \sin^3 a + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times \\ &\quad \times \cos^{n-5} a \sin^5 a - \dots \end{aligned} \tag{2}$$

Полагая  $n$  равным последовательно 2, 3, 4, ..., получим

$$\left. \begin{aligned} \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1, \\ \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a, \\ \cos 4a &= 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1, \\ \cos 5a &= 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2a &= \sin a (2 \cos a), \\ \sin 3a &= \sin a (4 \cos^2 a - 1), \\ \sin 4a &= \sin a (8 \cos^3 a - 4 \cos a), \\ \sin 5a &= \sin a (16 \cos^4 a - 12 \cos^2 a + 1), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### Степени функций

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos^2 a &= \cos 2a + 1, \\ 2^2 \cos^3 a &= \cos 3a + 3 \cos a, \\ 2^3 \cos^4 a &= \cos 4a + 4 \cos 2a + 3, \\ 2^4 \cos^5 a &= \cos 5a + 5 \cos 3a + 10 \cos a, \\ 2^5 \cos^6 a &= \cos 6a + 6 \cos 4a + 15 \cos 2a + 10, \\ 2^6 \cos^7 a &= \cos 7a + 7 \cos 5a + 21 \cos 3a + 35 \cos a, \\ 2^7 \cos^8 a &= \cos 8a + 8 \cos 6a + 28 \cos 4a + \\ &\quad + 56 \cos 2a + 35, \\ 2^8 \cos^9 a &= \cos 9a + 9 \cos 7a + 36 \cos 5a + \\ &\quad + 84 \cos 3a + 126 \cos a, \\ 2^9 \cos^{10} a &= \cos 10a + 10 \cos 8a + 45 \cos 6a + \\ &\quad + 120 \cos 4a + 210 \cos 2a + 126, \\ &\dots \dots \dots \\ 2^{n-1} \cos^n a &= \cos na + \frac{n}{1} \cos (n-2)a + \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)a + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_0^p \sin p \frac{2(i'+i)\pi}{m}, \\
\sum_0^p \cos p \frac{2i'\pi}{m} \cos p \frac{2i\pi}{m} &= \frac{1}{2} \sum_0^p \cos p \frac{2(i'-i)\pi}{m} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_0^p \cos p \frac{2(i'+i)\pi}{m}, \tag{8} \\
\sum_0^p \sin p \frac{2i'\pi}{m} \sin p \frac{2i\pi}{m} &= \frac{1}{2} \sum_0^p \cos p \frac{2(i'-i)\pi}{m} - \\
& - \frac{1}{2} \sum_0^p \cos p \frac{2(i'+i)\pi}{m}.
\end{aligned}$$

Связь с показательной функцией

$$\begin{aligned}
2 \cos x &= E^{\sqrt{-1}x} + E^{-\sqrt{-1}x}, \\
2\sqrt{-1} \sin x &= E^{\sqrt{-1}x} - E^{-\sqrt{-1}x}, \tag{9}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E &= 2.71828 \ 18284 \ 59045 \ \dots, \\
E^{-1} &= 0.36787 \ 94411 \ 71442.
\end{aligned}$$

## Приложение 15

### Формулы сферической тригонометрии

1. Сферические треугольники. Обозначим через  $A, B, C$  три угла сферического треугольника, через  $a, b, c$  — противоположные стороны треугольника. Между этими шестью величинами существуют следующие соотношения, каждое из которых содержит один угол и три стороны.

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \tag{1} \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.
\end{aligned}$$



## Теорема синусов

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) можно получить

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} A \sin C &= \cos b \cos C, \\ \operatorname{ctg} a \sin c - \operatorname{ctg} A \sin B &= \cos c \cos B, \\ \operatorname{ctg} b \sin a - \operatorname{ctg} B \sin C &= \cos a \cos C, \\ \operatorname{ctg} b \sin c - \operatorname{ctg} B \sin A &= \cos c \cos A, \\ \operatorname{ctg} c \sin a - \operatorname{ctg} C \sin B &= \cos a \cos B, \\ \operatorname{ctg} c \sin b - \operatorname{ctg} C \sin A &= \cos b \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Соотношения (1) дают также

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned} \quad (4)$$

Если положить  $2p = a + b + c$ , то

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}, \end{aligned} \quad (5)$$

и аналогичные выражения для углов  $B$  и  $C$ .

Если положить  $2P = A + B + C - 180^\circ$ , то

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin P \sin(A-P)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(B-P) \sin(C-P)}{\sin B \sin C}}, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin P \sin(A-P)}{\sin(B-P) \sin(C-P)}}, \end{aligned} \quad (6)$$

и аналогичные формулы для  $b$  и  $c$ .

Приведем еще следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{c}{2} \sin \frac{A-B}{2} &= \cos \frac{C}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \\ \sin \frac{c}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{C}{2} \sin \frac{a+b}{2}, \\ \cos \frac{c}{2} \sin \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{C}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \\ \cos \frac{c}{2} \cos \frac{A+B}{2} &= \sin \frac{C}{2} \cos \frac{a+b}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B &= \sin A \sin C - \\ &\quad - \cos A \cos C \cos b, \\ \frac{\sin C}{\operatorname{tg} a \cos b - \sin b \cos C} &= \frac{\operatorname{tg} B \cos A + \sin A \cos c}{\sin c}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin A \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

## 2. Прямоугольные сферические треугольники

Пусть прямой угол будет  $A$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c, \\ \sin b &= \sin a \sin B, \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} a \cos C, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin c &= \sin a \sin C, \\ \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} a \cos B, \\ \operatorname{tg} c &= \sin b \operatorname{tg} C, \\ \cos C &= \sin B \cos c, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} b &= \sin c \operatorname{tg} B, \\ \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \\ \cos B &= \sin C \cos b. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти формулы служат для решения прямоугольных треугольников во всех встречающихся случаях.

3. Общий случай решения сферических треугольников. Если известны три стороны треугольника и требуется найти три его угла, то проще всего воспользоваться последним выражением в формулах (5) и аналогичными выражениями для углов  $B$  и  $C$ . Если, наоборот, известны три угла треугольника и требуется найти три его стороны, пользуемся последним выражением в формулах (6) и аналогичными для  $b$  и  $c$ .

Если известны две стороны  $a$  и  $b$  и угол между ними  $C$ , то решение может быть найдено с помощью формул (7) (первое выражение содержит только неизвестные величины). Однако быстрее можно получить решение по формулам

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \\ \sin C \operatorname{ctg} A &= \sin b \operatorname{ctg} a - \cos b \cos C, \\ \sin C \operatorname{ctg} B &= \sin a \operatorname{ctg} b - \cos a \cos C.\end{aligned}\quad (13)$$

4. Метод И. Д. Жонголовича. При решении задач плоской и сферической тригонометрии можно ограничиться употреблением только одной тригонометрической функции  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Соответствующие формулы, которые легко выводятся из обычных формул тригонометрии, получены И. Д. Жонголовичем.

Рассмотрим, например, прямоугольный сферический треугольник. Пусть даны гипотенуза  $a$  и катет  $b$ . Требуется определить два угла  $B$ ,  $C$  и катет  $c$ . Формулы И. Д. Жонголовича дают

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ - B}{2} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a+b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a-b}{2}}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

(См.: И. Д. Жонголович и Т. Б. Сабанина. Таблицы натуральных значений  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  и  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$  с пятью значащими цифрами. Изд. АН СССР, Л., 1963).

## Приложение 16

### Разложение координат эллиптического движения в ряды

Координаты эллиптического движения  $r$  и  $v$ , так же как и любая функция этих координат  $F(r, v)$ , являются периодическими функциями средней аномалии  $M$  с периодом  $2\pi$ .

Теория разложения координат эллиптического движения в ряды подробно изложена в книге М. Ф. Субботина „Курс небесной механики“, т. 2, 1937 и в книге Г. Н. Дубошина „Небесная механика“, 1963. Эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{a} = & 1 + \frac{1}{2} e^2 - \cos M \left[ e - \frac{3}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 - \frac{7}{9216} e^7 + \dots \right] - \\
 & - \cos 2M \left[ \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{3} + \frac{e^6}{16} - \dots \right] - \\
 & - \cos 3M \left[ \frac{3}{8} e^3 - \frac{45}{128} e^5 + \frac{567}{5120} e^7 - \dots \right] - \\
 & - \cos 4M \left[ \frac{1}{3} e^4 - \frac{2}{5} e^6 + \dots \right] - \\
 & - \cos 5M \left[ \frac{125}{384} e^5 - \frac{4375}{9216} e^7 + \dots \right] - \\
 & - \cos 6M \left[ \frac{27}{80} e^6 - \dots \right] - \\
 & - \cos 7M \left[ \frac{16807}{46080} e^7 - \dots \right] - \dots, \quad (1) \\
 v = & M + \sin M \left[ 2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 + \frac{107}{4608} e^7 + \dots \right] + \\
 & + \sin 2M \left[ \frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 + \frac{17}{96} e^6 - \dots \right] + \\
 & + \sin 3M \left[ \frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5 + \frac{95}{512} e^7 - \dots \right] + \\
 & + \sin 4M \left[ \frac{103}{96} e^4 - \frac{451}{480} e^6 + \dots \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin 5M \left[ \frac{1097}{960} e^5 - \frac{5957}{4608} e^7 + \dots \right] + \\
& + \sin 6M \left[ \frac{1223}{960} e^6 - \dots \right] + \\
& + \sin 7M \left[ \frac{47273}{32256} e^7 - \dots \right] + \dots, \tag{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg \frac{r}{a} = & \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 + \frac{1}{96} e^6 + \dots + \\
& + \cos M \left[ -e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{1}{64} e^5 + \frac{127}{9216} e^7 + \dots \right] + \\
& + \cos 2M \left[ -\frac{3}{4} e^2 + \frac{11}{24} e^4 - \frac{3}{64} e^6 - \dots \right] + \\
& + \cos 3M \left[ -\frac{17}{24} e^3 + \frac{77}{128} e^5 - \frac{743}{5120} e^7 - \dots \right] + \\
& + \cos 4M \left[ -\frac{71}{96} e^4 + \frac{129}{160} e^6 - \dots \right] + \\
& + \cos 5M \left[ -\frac{523}{640} e^5 + \frac{10039}{9216} e^7 - \dots \right] + \\
& + \cos 6M \left[ -\frac{899}{960} e^6 - \dots \right] + \\
& + \cos 7M \left[ -\frac{355081}{322560} e^7 - \dots \right] + \dots, \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 = & 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \frac{35}{16} e^6 + \\
& + \cos M \left[ 3e + \frac{27}{8} e^3 + \frac{261}{64} e^5 + \dots \right] + \\
& + \cos 2M \left[ \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 + \frac{141}{32} e^6 + \dots \right] + \\
& + \cos 3M \left[ \frac{53}{8} e^3 + \frac{392}{128} e^5 + \dots \right] + \\
& + \cos 4M \left[ \frac{7}{8} e^4 + \frac{129}{80} e^6 + \dots \right] + \\
& + \cos 5M \left[ \frac{1773}{128} e^5 + \dots \right] + \\
& + \cos 6M \left[ \frac{3167}{160} e^6 + \dots \right] + \dots, \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2v = \cos M \left[ -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 + \frac{1}{768} e^5 + \dots \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \cos 2M \left[ 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{41}{48} e^4 - \frac{133}{1440} e^6 + \dots \right] + \\
& + \cos 3M \left[ \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 + \frac{4971}{1280} e^5 + \dots \right] + \\
& + \cos 4M \left[ \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 + \frac{9079}{720} e^6 + \dots \right] + \\
& + \cos 5M \left[ \frac{845}{48} e^3 + \frac{32525}{768} e^5 + \dots \right] + \\
& + \cos 6M \left[ \frac{533}{16} e^4 - \frac{13827}{160} e^6 + \dots \right] + \\
& + \cos 7M \left[ \frac{228347}{3840} e^5 + \dots \right] + \\
& + \cos 8M \left[ \frac{73369}{720} e^6 + \dots \right] + \dots, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2v &= \sin M \left[ -\frac{1}{2} e + \frac{1}{24} e^3 - \frac{7}{256} e^5 + \dots \right] + \\
& + \sin 2M \left[ 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{37}{48} e^4 - \frac{217}{1440} e^6 + \dots \right] + \\
& + \sin 3M \left[ \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 + \frac{4809}{1280} e^5 + \dots \right] + \\
& + \sin 4M \left[ \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 + \frac{8951}{720} e^6 + \dots \right] + \\
& + \sin 5M \left[ \frac{845}{48} e^3 - \frac{32525}{768} e^5 + \dots \right] + \\
& + \sin 6M \left[ \frac{533}{16} e^4 - \frac{13827}{160} e^6 + \dots \right] + \\
& + \sin 7M \left[ \frac{228347}{3840} e^5 + \dots \right] + \\
& + \sin 8M \left[ \frac{73369}{720} e^6 + \dots \right] + \dots \tag{6}
\end{aligned}$$

Теоретический предел сходимости рядов (1)—(6)

$$0 \leq e < 0.66,$$

однако свою практическую пригодность эти ряды теряют, конечно, гораздо раньше.

**Таблица**

**перевода англо-американских мер в международную систему единиц (СИ)**

Миля морская (английская) = 1853.182 м.

Миля морская (США) = 1853.249 м.

Миля морская (международная) = 1852 м.

Миля уставная (английская) = 1609.344 м.

Миля уставная (США) = 1609.3472 м.

Фут = 12 дюймов = 0.3048 м.

Дюйм = 0.0254 м.

1 узел = 1 морская миля в час =  $1853.25 \text{ м}/\text{час} = 51.48 \text{ см}/\text{сек.} = 0.5148 \text{ м}/\text{сек.}$

Примечание: русская миля = 7 верст = 7467.6 м.

## ЛИТЕРАТУРА

### Глава I

- Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Тр. ИТА, вып. 3, 1952.
- Зверев М. С. Фундаментальные постоянные астрономии. Астр. ж., 28, вып. 2, 1951.
- Идельсон Н. И. Редукционные вычисления в астрономии. Приложение к Астрономическому Ежегоднику СССР на 1941 год.
- Идельсон Н. И. Фундаментальные постоянные в астрономии и геодезии. Приложение к Астрономическому Ежегоднику СССР на 1942 год.
- Клеменс Г. М. Таблицы больших планет. Астр. ж., 34, вып. 3, 1957.
- Козловская С. В. Массы и радиусы планет и спутников. Бюлл. ИТА, 9, № 5, 1963.
- Куликов К. А. Фундаментальные постоянные астрономии. М., 1956.
- Михайлов А. А. Астрономическая единица длины. Астр. ж., 39, вып. 4, 1962.
- Поланиуер М. Д. Теория физической либрации Луны. Бюлл. ИТА, 9, № 8, 1964.
- Субботин М. Ф. Решения IX Генеральной ассамблеи Международного астрономического союза и „Астрономический Ежегодник СССР“. В кн.: Тр. 12-й астрометр. конф. СССР, 1957.

### Глава II

- Брауер Д. и Дж. Клеменс. Методы небесной механики. М., 1964.
- Дубошин Г. Н. Введение в небесную механику. М., 1938.
- Дубошин Г. Н. Об устойчивости солнечной системы. Усп. астр. наук, 2, 1941.
- Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, М., 1963.
- Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Физматгиз, М., 1964.



- Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. ИЛ, 1959.
- Клеменс Г. М. Таблицы больших планет. Астр. ж., 34, вып. 3, 1957.
- Куликов Д. К. Эфемериды больших планет и астрометрия. Бюлл. ИТА, 9, № 10, 1964.
- Проблемы движения искусственных тел. Сборник, 1963.
- Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М., 1965.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. Астр. института, № 53, 1945.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. К вопросу об улучшении элементов эллиптических орбит. Бюлл. ИТА, 4, № 6, 1949.
- Смарт У. Небесная механика. М., 1965.
- Субботин М. Ф. Курс небесной механики, 1—3. ОНТИ, 1933, 1947 г.
- Субботин М. Ф. Улучшение сходимости основных разложений теории возмущенного движения. Бюлл. ИТА, 4, № 1, 1947.
- Субботин М. Ф. Теория относительности и небесная механика. Астр. ж., 33, вып. 2, 1956.
- Субботин М. Ф. Работы Анри Пуанкаре в области небесной механики. Вопросы истории естествознания и техники, вып. 2, 1956.
- Субботин М. Ф. Теоретическая астрономия. В книге „Астрономия в СССР за сорок лет (1917—1957)“, 1960.
- Субботина Н. С. Методы вычисления эфемерид внутренних планет и оценка их точности. Бюлл. ИТА, 10, № 2, 1965.
- Чеботарев Г. А. Движение перигелия Меркурия как одна из эмпирических проверок выводов общей теории относительности. Бюлл. Астр. института, № 52, 1944.
- Шараф Ш. Г. Теория движения Плутона. Ч. I. Возмущения Плутона первого порядка относительно возмущающих масс. Тр. ИТА, вып. 4, 1955.
- Шараф Ш. Г. и Н. А. Будникова. Теория движения Плутона. Ч. 2. Возмущения Плутона второго порядка относительно возмущающих масс. Ч. 3. Перевычисление возмущений Плутона первого порядка относительно возмущающих масс. Ч. 4. Новые элементы Плутона. Тр. ИТА, вып. 10, 1964.

### *Глава III.*

- Дубяго А. Д. Определение орбит. М., 1949.
- Макарова Е. Н. О совместном определении систематических ошибок звездных каталогов и масс планет по наблюдениям астероидов. Бюлл. ИТА, 7, № 1, 1958.
- Орлов А. Я. и Б. А. Орлов. Курс теоретической астрономии. М., 1940.
- Пиус Л. Ю. Применение метода периодических орбит к изучению движения малой планеты Гекубы (108). Бюлл. ИТА, 8, № 1, 1961.
- Проскурин В. Ф. Теория движения Цереры. Часть первая. Абсолютные возмущения Цереры первого порядка относительно возмущающих масс. Тр. ИТА, вып. 2, 1952.
- Проскурин В. Ф. и Т. И. Машинская. Представление наблюдений Цереры с учетом возмущений первого порядка. Бюлл. ИТА, 5, № 5, 1953.

- Проскурин В. Ф. Теория движения Цереры. Часть вторая. Об абсолютных возмущениях Цереры второго порядка относительно возмущающих масс. Тр. ИТА, вып. 9, 1962.
- Путлин И. И. Малые планеты. М., 1953.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. Малые планеты. Усп. астр. наук, 5, 1950.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. Наблюдения малых планет для определения постоянного каталога слабых звезд. В книге „Тр. 11-ой всесоюзной астрометр. конф.“, 1955.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. Малые планеты. В книге „Астрономия в СССР за сорок лет (1917—1957)“, 1960.
- Субботин М. Ф. Некоторые соображения по вопросу о построении фундаментального каталога. Астр. ж., 16, вып. 3, 1937.
- Субботин М. Ф. Курс небесной механики, 1. (2 изд.), 1941; 2, 1937.
- Субботин М. Ф. Вспомогательные таблицы для вычисления орбит и эфемерид. ОНТИ, М.—Л., 1941.
- Чеботарев Г. А. Теория периодических орбит в небесной механике. Усп. астр. наук, 5, 1950.
- Чеботарев Г. А. Применение периодических орбит к изучению движения малых планет. Бюлл. ИТА, 4, № 10, 1951.
- Чеботарев Г. А. и А. И. Божкова. Теория движения малых планет троянской группы. Бюлл. ИТА, 6, № 4, 1955.
- Щиголов Б. М. Промежуточные орбиты в задаче трех тел (обзор). Тр. ГАИШ, 24, 1954.

#### Глава IV.

- Брумберг В. А. Абсолютные возмущения элементов искусственных спутников Луны. Бюлл. ИТА, 8, № 10, 1962.
- Гребеников Е. А. Аналитическая теория движения Япета. Астр. ж., 35, вып. 6, 1958.
- Гребеников Е. А. Возмущенное движение восьмого спутника Сатурна Япета. Астр. ж., 36, вып. 2, 1959.
- Гребеников Е. А. О вековых возмущениях в теории движения искусственных спутников Земли. Астр. ж., 36, вып. 6, 1959.
- Дубошин Г. Н. О периодических движениях в системе спутников Сатурна. Тр. ГАИШ, 15, вып. 1, 1945.
- Дубошин Г. Н. О рядах, которыми могут быть представлены движения спутников Сатурна. Тр. ГАИШ, 15, вып. 1, 1945.
- Дубошин Г. Н. О дифференциальных уравнениях движения спутников планет. Астр. ж., 30, вып. 3, 1953.
- Дубошин Г. Н. О возмущениях в движении спутников Сатурна. Тр. ГАИШ, 28, 1960.
- Дубошин Г. Н. О влиянии Солнца на движение спутников Сатурна. Тр. ГАИШ, 28, 1960.
- Дубошин Г. Н. О возмущениях в движении Япета и Феба. Тр. ГАИШ, 28, 1960.
- Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. Бюлл. ИТА, 6, № 8, 1957.
- Касачевский М. П. О движении спутников Марса. Тр. ГАИШ, 24, 1954.

- Касачевский М. П. Определение промежуточных орбит спутников Марса. Тр. ГАИШ, 28, 1960.
- Касачевский М. П. Возмущающее действие Солида на движение спутников Марса. Тр. ГАИШ, 28, 1960.
- Проскури В. Ф. Исследование движения VIII спутника Юпитера. Бюлл. ИТА, 4, № 7, 1950.
- Проскури В. Ф. К вопросу об устойчивости движения VIII спутника Юпитера. Бюлл. ИТА, 4, № 7, 1950.
- Проскури В. Ф. Солиечные неравенства в движении VI спутника Юпитера. Бюлл. ИТА, 6, № 1, 1955.
- Проскури В. Ф. и Ю. В. Батраков. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. Бюлл. ИТА, 7, № 7, 1960.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. Замечания по поводу вычисления частных возмущений в элементах. Астр. ж., 35, вып. 5, 1958.
- Чеботарев Г. А. Движение искусственных спутников Земли по орбитам с малыми эксцентриситетами. Бюлл. ИТА, 9, № 1, 1963.
- Штери Т. Введение в небесную механику. М., 1964.

### Глава V

- Загребин Д. В. Об учете эмпирического члена при составлении лунной эфемериды. Бюлл. ИТА, 5, № 1, 1951.
- Загребин Д. В. Метод исправления таблиц Брауна с целью улучшения лунной эфемериды. Астр. ж., 30, вып. 1, 1953.
- Кондурарь В. Т. Влияние формы Луны на ее движение. Астр. ж., 40, вып. 4, 1963.
- Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М., 1965.
- Субботин М. Ф. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, 1937.
- Токмолаева С. С. Аналитическая теория движения седьмого спутника Юпитера. Тр. ИТА, вып. 5, 1956.
- ЩигOLEB Б. М. О промежуточной орбите Хилла в задаче трех тел. Тр. ГАИШ, 28, 1960.

### Глава VI

- Галибниа И. В. Первоначальные и будущие орбиты долгопериодических комет. Бюлл. ИТА, 9, № 7, 1964.
- Дубяго А. Д. Определение орбит. М., 1949.
- Казимирчак-Полонская Е. И. Основные задачи исследования сближения комет с большими планетами. Тр. ИТА, вып. 7, 1961.
- Казимирчак-Полонская Е. И. Движение кометы Вольфа 1 в сфере действия Юпитера в 1922 г. и представление ее наблюдений в 1925 г. Тр. ИТА, вып. 7, 1961.
- Казимирчак-Полонская Е. И. Применение методов численного интегрирования в особых прямоугольных координатах к исследованию планетоцентрического движения комет. Бюлл. ИТА, 8, № 7, 1962.
- Казимирчак-Полонская Е. И. Дифференциальные методы учета эффектов при исследовании планетоцентрического движения комет. Бюлл. ИТА, 8, № 7, 1962.

- Куликков Д. К. Численные методы небесной механики в применении к изучению движения VIII спутника Юпитера. Бюлл. ИТА, 4, № 7, 1950.
- Куликков Д. К. Интегрирование уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по квадратурному методу Коулла с автоматическим выбором шага. Бюлл. ИТА, 7, № 10, 1960.
- Маковер С. Г. Комета Энке—Баклунда. Сообщение первое. Движение за 1937—1951 гг. Тр. ИТА, вып. 4, 1955.
- Маковер С. Г. Комета Энке—Баклунда. Сообщение второе. Определение массы Меркурия по наблюдениям кометы за 1937—1954 гг. Тр. ИТА, вып. 6, 1956.
- Маковер С. Г. и Н. А. Бохан. Комета Энке—Баклунда. Сообщение третье. Движение кометы за 1898—1911 гг. и новое определение массы Меркурия. Тр. ИТА, вып. 8, 1961.
- Маковер С. Г. О возмущениях комет от неподвижных звезд. Бюлл. ИТА, 9, № 8, 1964.
- Мячин В. Ф. Оценка погрешности численных методов интегрирования уравнений небесной механики. Бюлл. ИТА, 8, № 8, 1962.
- Субботин М. Ф. Курс небесной механики, 2, ОНТИ, 1937.
- Фокин А. В. Орбита кометы Отерма 3, 1942 VII по наблюдениям 1943—1950 гг. Бюлл. ИТА, 7, № 2, 1958.
- Фокин А. В. Исследование тесного сближения кометы Отерма 3 с Юпитером. Бюлл. ИТА, 7, № 2, 1958.
- Чеботарев Г. А. Гравитационные сферы больших планет, Луны и Солнца, Астр. ж., 40, вып. 5, 1963.
- Чеботарев Г. А. О границах солнечной системы. Астр. ж., 41, вып. 5, 1964.
- Шамова М. Я. Исследование формы орбиты кометы 1925-VII (Шайн—Комас—Сола). Бюлл. ИТА, 5, № 7, 1953.
- Шамова М. Я. Численное интегрирование уравнений движения астероидов на электронной машине „Урал“. Бюлл. ИТА, 8, № 3, 1961.
- ЩигOLEв Б. М. и П. Т. Резниковский. О применении метода Рунге при численном решении уравнений небесной механики. Сообщ. ГАИШ, № 92, 1953.

---

Примечание. Бюллетень ИТА — Бюллетень Института теоретической астрономии. Первые три тома (№№ 1—53) Бюллетеня имеют заглавие „Бюллетень астрономического института“, соответственно названию Института в те годы (1924—1943). Эти 53 выпуска не имеют нумерации томов, поэтому в списке литературы при соответствующих статьях ссылки на том не имеется, а лишь на номер выпуска.

В связи с реорганизацией и переименованием Института с № 54 Бюллетень получил название „Бюллетень Института теоретической астрономии“. С этого же № 54 появилась нумерация томов (с т. 4). Первые 53 номера условно разбиты на три тома: т. 1 (№№ 1—20), т. 2 (№№ 21—40) и т. 3 (№№ 41—53).

Труды ИТА — Труды Института теоретической астрономии. Выходят в свет с 1952 г. Предназначены для опубликования работ по небесной механике, имеющих характер законченных монографий.

---

# О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
От автора . . . . .	3
Введение. Небесная механика и ее задачи . . . . .	5
<b>Глава I. Астрономические координаты и время . . . . .</b>	<b>10</b>
§ 1. <i>Координаты и время . . . . .</i>	10
1. Различные системы координат (10). 2. Координаты и время (11). 3. Эфемеридное время (12). 4. Тропический год (14).	
§ 2. <i>Топоцентрические и геоцентрические системы координат . . . . .</i>	14
1. Экваториальная топоцентрическая система координат (14). 2. Переход к геоцентрической экваториальной системе координат (15). 3. Редукция наблюдений за параллакс (18). 4. Вычисление прямоугольных геоцентрических экваториальных координат по элементам орбиты (19). 5. Вращающаяся система координат (19). 6. Геодезические координаты (21). 7. Переход от экваториальной к эклиптической системе координат (21).	
§ 3. <i>Гелиоцентрические системы координат . . . . .</i>	22
1. Эклиптическая гелиоцентрическая система координат (22). 2. Экваториальная гелиоцентрическая система координат (24). 3. Переход от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной геоцентрической системе (25). 4. Переход от экваториальной гелиоцентрической системы координат к экваториальной барицентрической системе (26). 5. Эклиптические и экваториальные элементы орбиты (28). 6. Переход от эклиптической гелиоцентрической системы координат к эклиптической геоцентрической системе (29).	
§ 4. <i>Влияние прецессии на координаты и элементы орбиты . . . . .</i>	30
1. Преобразование прямоугольных координат от одной эпохи к другой (30). 2. Преобразование элементов от одной эпохи к другой (31).	

3. Преобразование экваториальных сферических координат от одной эпохи к другой (32).

§ 5. *Луноцентрические координаты* . . . . . 33

**Глава II. Теория движения больших планет** . . . . . 39

§ 1. *Метод Лапласа—Ньюкома* . . . . . 39

1. Основная задача небесной механики (39). 2. Уравнения движения в цилиндрических координатах (41). 3. Постоянная Гаусса (43). 4. Уравнения движения в полярных координатах (45). 5. Возмущения логарифма радиуса-вектора планеты (46). 6. Возмущения долготы планеты (49). 7. Возмущения узла и наклона орбиты планеты (51). 8. Определение постоянных интегрирования (51). 9. Вычисление гелиоцентрической долготы и широты планеты (52).

§ 2. *Разложение пертурбационной функции в ряд* . . . . . 54

1. Пертурбационная функция (54). 2. Коэффициенты Лапласа (57). 3. Разложение по степеням взаимного наклона (58). 4. Разложение по степеням эксцентриситета (62). 5. Вычисление операторов Ньюкома (68). 6. Второй член пертурбационной функции (69).

§ 3. *Теория движения Плутона* . . . . . 70

1. Введение (70). 2. Возмущения Плутона от Юпитера (71). 3. Улучшение орбиты Плутона (75).

§ 4. *Теория движения больших планет* . . . . . 81

1. Фундаментальные работы (81). 2. Релятивистские поправки в теории движения больших планет (84).

**Глава III. Теория движения малых планет** . . . . . 89

§ 1. *Кольцо малых планет и его структура* . . . . . 89

1. Открытие кольца малых планет (89). 2. Структура кольца малых планет (91). 3. Орбиты малых планет (94). 4. Наиболее интересные группы малых планет (95). 5. Служба малых планет (98). 6. Искусственные малые планеты (100). 7. Малые планеты и небесная механика (100).

§ 2. *Метод Хилла* . . . . . 101

1. Введение (101). 2. Основные уравнения (102). 3. Выражения для возмущающих сил (106). 4. Зависимость между истинными аномалиями малой планеты и Юпитера в невозмущенном движении (109). 5. Интегрирование дифференциальных уравнений для  $\delta r$  и  $\delta z$  (110). 6. Вычисление возмущений третьей координаты  $x$  (111). 7. Вычисление возмущений радиуса-вектора (111). 8. Вычисление возмущений долготы (112). 9. Соотношение между произвольными постоянными интегрирования (112). 10. Определение постоянных (114). 11. Разложение в ряды Фурье производных пертурбационных функций (116). 12. Вычисление возмущений (117). 13. Возмущения первого порядка Цереры от Юпитера (118). 14. Сравнение теории с наблюдениями (124).

§ 3. *Применение периодических орбит к изучению движения малых планет* . . . . . 127

1. Периодические орбиты Пуанкаре (127). 2. Периодические орбиты Пуанкаре. Продолжение (131). 3. Численные методы изучения периодических орбит (137). 4. Уравнения в вариациях (138). 5. Интегрирование уравнений в вариациях (144). 6. Вычисление производных пертурбационной функции (147). 7. Соизмеримость 1:3 (151). 8. Сравнение теории с наблюдениями (155).

**Глава IV. Теория движения спутников** . . . . . 160

§ 1. *Спутники больших планет* . . . . . 160

1. Спутники Марса (160). 2. Спутники Юпитера (161). 3. Спутники Сатурна (164). 4. Кольцо Сатурна (166). 5. Спутники Урана (167). 6. Спутники Нептуна (168). 7. Размеры и массы спутников больших планет (168).

§ 2. *Возмущения в движении спутников, вызываемые сжатием планеты* . . . . . 168

1. Задача двух тел (168). 2. Метод вариации произвольных постоянных (173). 3. Разложение пертурбационной функции (177). 4. Возмущения первого порядка (180). 5. Вековые возмущения первого порядка (185). 6. Пример на вычисление возмущений первого порядка (188). 7. Примеры вековых возмущений (190).

§ 3. *Движение спутников по орбитам с малыми эксцентриситетами* . . . . . 191

1. Преобразование уравнений Лагранжа (191). 2. Преобразование пертурбационной функции (194). 3. Возмущения первого порядка (195). 4. Вычисление координат спутника (197).

§ 4. *Истинная аномалия как независимая переменная в уравнениях Лагранжа* . . . . . 198

1. Аномалии как независимые переменные в уравнениях Лагранжа (198). 2. Долгота в орбите как независимая переменная в уравнениях Лагранжа (202). 3. Пертурбационная функция (203). 4. Периодические возмущения (204). 5. Вековые возмущения (206).

§ 5. *Гравитационное поле Земли* . . . . . 207

1. Общее выражение для гравитационного потенциала Земли (207). 2. Потенциал Земли, симметричной относительно оси вращения (208).

**Глава V. Теория движения Луны** . . . . . 211

§ 1. *Метод Хилла. Первое приближение* . . . . . 211

1. Земля—Луна как двойная планета (211). 2. Дифференциальные уравнения движения (212). 3. Вариационная кривая (219).



	Стр.
§ 2. Метод Хилла. Второе приближение . . . . .	224
1. Орбиты, бесконечно близкие к вариационной кривой (224). 2. Преобразование уравнений (V. 56) (229). 3. Уравнение Хилла (239). 4. Интегрирование уравнений для $\delta r$ и $\delta z$ (244). 5. Введение третьей координаты (252).	
§ 3. Сравнение теории с наблюдениями . . . . .	255
1. Таблицы Брауна (255). 2. Эмпирический член в теории движения Луны (258).	
§ 4. Устойчивость движения Луны по Хиллу . . . . .	259
1. Постоянная Якоби (259). 2. Поверхность нулевой скорости (261). 3. Особые точки поверхности нулевой скорости (262). 4. Устойчивость по Хиллу (265).	
<b>Глава VI. Теория движения комет . . . . .</b>	<b>268</b>
§ 1. Кометы в Солнечной системе . . . . .	268
1. Три типа кометных орбит (268). 2. Общая характеристика кометных орбит (269). 3. Короткопериодические кометы (269). 4. Комета Энке—Бакунда (272). 5. Комета Отерма 3 (276). 6. Долгопериодические кометы (278). 7. Переход к барцентрической системе координат (279). 8. Первоначальные и будущие орбиты долгопериодических комет (282). 9. Численные методы вычисления возмущений (282).	
§ 2. Метод Коуэлла . . . . .	284
1. Уравнения движения (284). 2. Разности и суммы (285). 3. Первый метод Коуэлла (287). 4. Второй метод Коуэлла (292). 5. Второй метод Коуэлла. Продолжение (295). 6. Второй метод Коуэлла. Численный пример (298).	
§ 3. Гравитационные сферы больших планет, Луны и Солнца . . . . .	306
1. Уравнения движения (306). 2. Сфера действия планеты (309). 3. Сфера тяготения планеты (311). 4. Гравитационная сфера Хилла (311). 5. Гравитационные сферы Луны (314). 6. Гравитационные сферы Солнца (315).	
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>317</b>
1. Элементы эллиптической орбиты . . . . .	318
2. Средние элементы внутренних планет . . . . .	322
3. Средние элементы внешних планет . . . . .	323
4. Оскулирующие элементы внешних планет (1966 г.) . . . . .	325
5. Средние элементы лунной орбиты . . . . .	327
6. Основные астрономические постоянные (Де-Ситтер, 1938 г.) . . . . .	328
7. Основные астрономические постоянные (Клеменс, 1948 г.) . . . . .	329
8. Астрономические постоянные (МАС, 1964 г.) . . . . .	330

9. Таблица малых планет, используемых для определения постоянных каталога слабых звезд . . . . .	341
10. Таблица малых планет с большим суточным движением . . . . .	341
11. Элементы орбит троянцев . . . . .	342
12. Элементы орбит некоторых короткопериодических комет . . . . .	343
13. Элементы орбит некоторых периодических комет с большими афельными расстояниями ( $Q$ ) . . . . .	345
14. Тригонометрические функции . . . . .	346
15. Формулы сферической тригонометрии . . . . .	349
16. Разложение координат эллиптического движения в ряды . . . . .	353
17. Таблица перевода англо-американских мер в международную систему единиц (СИ) . . . . .	356
Л и т е р а т у р а . . . . .	357

---

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Г. А. ЧЕБОТАРЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ  
И  
ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ  
НЕБЕСНОЙ  
МЕХАНИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА · 1965 · ЛЕНИНГРАД